



**FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.  
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA**

# CURSOS INSTITUCIONALES

## **DIPLOMADO EN DISEÑO Y ADAPTACIÓN DE ANTENAS**

**MOD. II. AVANZADO DE ELECTRICIDAD  
Y MAGNETISMO**

**DEL 29 DE ABRIL AL 07 DE MAYO DEL 2003**

### ***APUNTES GENERALES***

CI - 063

**Instructor: M. en I. César Enrique Benítez Joyner  
SECRETARÍA DE MARINA  
ABRIL/MAYO DEL 2003**

## I. Campo y potencial eléctrico.

### I.1 Concepto descarga eléctrica distribuciones continuas de carga.

- La carga eléctrica es la base de una interacción fundamental entre partículas.
- Propiedad fundamental de las partículas de la materia.
- La carga eléctrica neta en cualquier sistema aislado es constante.
- Toda las cargas libres son múltiplos enteros de la magnitud de la carga del electrón.
- Las cargas libres se mueven fácilmente en conductores, pero mucho menos fácilmente en dieléctricos.
- Benjamín Franklin (1706-1790): Sugirió llamar carga positiva y carga negativa.

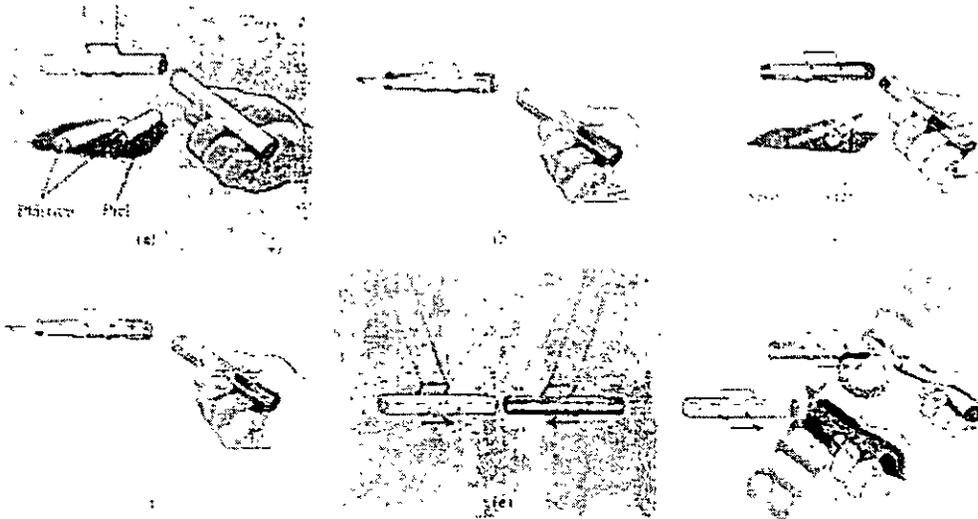


Figura 1 (a, b) Después de ser frotadas con piel, dos barras de plástico se repelen entre sí (c, d). Después de ser frotadas con seda, dos barras de vidrio se repelen entre sí. (e) La barra de plástico cargada en (b) atrae a la barra de vidrio cargada en (d). (f) La piel atrae a la barra de plástico cargada y la seda atrae a la barra de vidrio cargada.

## 1.2 Principio de conservación de la carga eléctrica

El principio de la conservación de la carga eléctrica es:

- En cualquier proceso de carga ésta no se crea ni se destruye: Se transfiere de un cuerpo a otro.
- Por lo tanto la magnitud de la carga del electrón o del protón es una unidad natural de carga.
- Cada cantidad observable de carga eléctrica es siempre un múltiplo entero de esta unidad básica.

**Se dice que la carga del electrón está cuantizada.**

masa del electrón =  $m_e = 9.1093897 \times 10^{-31}$  [kg]

masa del protón =  $m_p = 1.6726231 \times 10^{-27}$  [kg]

masa del neutrón =  $m_n = 1.6749286 \times 10^{-27}$  [kg]

### I.3 Concepto de conductor y aislador

Conductor: Material que permite que la carga se mueva fácilmente de una región del material a otra, mientras que los aislantes no lo permiten (no hay electrones).

Semiconductor: Tienen propiedades intermedias entre los buenos conductores y las de los buenos aislantes.

### I.4 Fenómeno de inducción electrostática

- Proceso de descarga por inducción:

*"Cuando un cuerpo puede dar a otro cuerpo una carga de signo opuesto sin disminuir o modificar en nada su propia carga"*

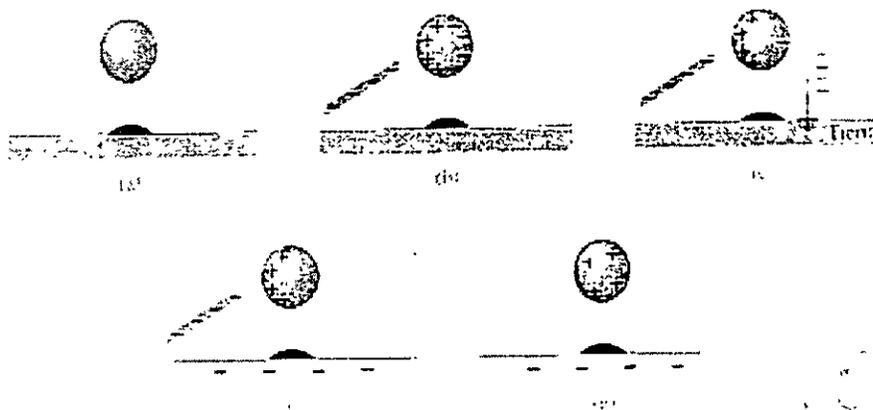


Figura 2 Carga de una esfera metálica por inducción.

Las cargas en exceso en un cuerpo se llaman cargas inducidas.

### 1.5 Ley de Coulomb. Principio de superposición.

#### **Ley de Coulomb:**

*La magnitud de la fuerza eléctrica entre dos cargas puntuales es directamente proporcional al producto de las cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellas.*

$$F = k \frac{|q_1 q_2|}{r^2}$$

En el SI:

$$k = 8.987551781 \times 10^9 \text{ [N m}^2 \text{/C}^2\text{]}$$

$$k \approx 8.988 \times 10^9 \text{ [N m}^2 \text{/C}^2\text{]}$$

El valor numérico de k se define en términos de c (velocidad de la luz).

$$k = (10^9 \text{ [N m}^2 \text{/C}^2]) c^2$$

donde:

$$c = 2.99792450 \times 10^8 \text{ [m/s]}$$

La unidad del SI (sistema internacional) de carga eléctrica se llama:

$$\text{Coulomb} = [\text{C}],$$

$$[\text{C}] = [\text{A/s}] = \text{Coulomb}$$

Cargas puntuales: Cuerpos cargados muy pequeños en comparación con la distancia r entre ellos.

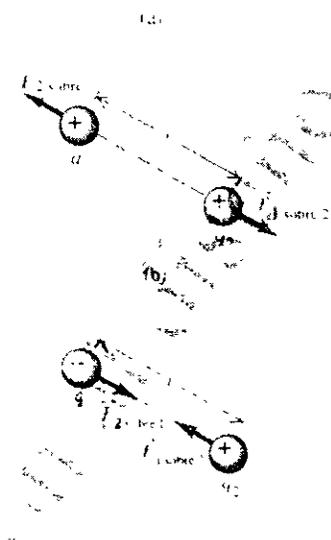
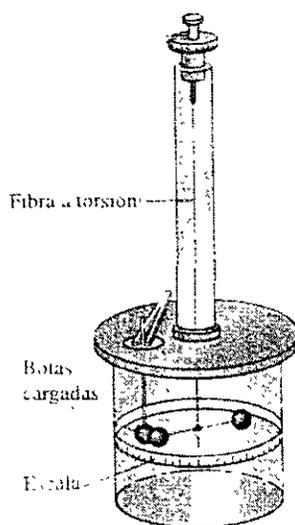


Figura 3. (a) Balanza de torsión del tipo usado por Coulomb para medir la fuerza eléctrica. (b) Cargas eléctricas del mismo signo se repelen entre sí. (c) Cargas eléctricas de signo opuesto se atraen entre sí. En cada caso la magnitud de la fuerza sobre cada carga puntual es proporcional al producto de las cargas y es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellas. Las fuerzas obedecen a la tercera ley de Newton.

En el SI la ley de Coulomb:

$$F = k \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{|q_1 q_2|}{r^2}$$

(fuerza entre dos cargas puntuales)

donde:

$$\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \quad (\text{permeabilidad del espacio libre}).$$

$$\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 C^2}$$

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \left[ \frac{\text{Wb}}{\text{A} \cdot \text{m}} \right]$$

$$\text{Carga del electrón} = e = 1.60217733 \times 10^{-19} [\text{C}]$$

Principio de superposición de fuerzas.

Los experimentos muestran que cuando dos cargas ejercen fuerzas simultáneamente sobre una tercera carga, la fuerza total que actúa sobre esa carga es la suma vectorial de las fuerzas que las dos cargas ejercen individualmente.

## 1.6 Concepto de campo eléctrico.

La fuerza eléctrica sobre un cuerpo cargado es ejercida por el campo eléctrico creado por otros cuerpos cargados.

Definimos el campo eléctrico  $\vec{E}$  en un punto como la fuerza eléctrica  $\vec{F}_0$  experimentada por una carga de prueba  $q_0$  en el punto, dividida entre la carga

El campo eléctrico en cierto punto es igual a la fuerza eléctrica por unidad de carga en ese punto:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} \left[ \frac{N}{C} \right]$$

(definición de campo eléctrico como fuerza por unidad de carga)

$$\vec{F} = q_0 \cdot \vec{E}$$

(fuerza ejercida sobre una carga puntual  $q_0$  por un campo eléctrico  $\vec{E}$ )

Una definición completamente correcta del campo eléctrico, es tomando el límite cuando  $q_0$  tiende a cero y el efecto perturbador de  $q_0$  sobre la distribución de carga resulta despreciable:

$$\vec{E} = \lim_{q_0 \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{q_0}$$

En cálculos prácticos del campo eléctrico  $E$  producido por una distribución de carga, consideraremos fijar la distribución de carga y no tendremos que efectuar esta operación de límite.

Si la distribución fuente es una carga puntual  $q$ , es fácil encontrar el campo eléctrico que produce.

Llamamos punto fuente a la posición de la carga y punto de campo al punto de campo al punto  $P$  donde estamos determinando el campo.

Es útil introducir un vector unitario  $\hat{r}$  a lo largo de la línea desde el punto fuente al punto de campo.

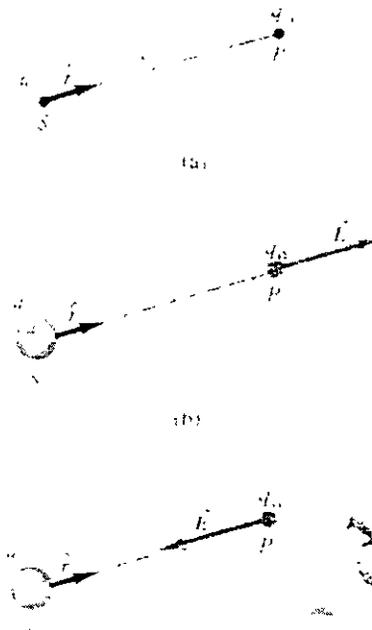


Figura 4. (a) El vector unitario  $\hat{r}$  tiene la dirección desde el punto fuente S al punto P de campo. (b) En cada punto, el vector de campo establecido por una carga puntual aislada positiva, apunta alejándose de la carga. (c) En cada punto, el vector de campo eléctrico establecido por una carga puntual aislada negativa apunta directamente hacia la carga.

Este vector unitario  $\hat{r}$  es igual al vector desplazamiento  $\vec{r}$  del punto fuente al punto de campo, dividido entre la distancia  $r = |\vec{r}|$  entre esos dos puntos; esto es:

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r}$$

»

Si colocamos una pequeña carga de prueba  $q_0$  en el punto de campo  $P$ , a una distancia  $r$  del punto fuente, la magnitud  $F_0$  de la fuerza está dada por la ley de Coulomb:

$$F_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{|q q_0|}{r^2}$$

La magnitud de  $E$  de campo eléctrico en  $P$  es:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{|q|}{r^2}$$

(magnitud del campo eléctrico de una carga puntual)

usando el vector unitario  $\hat{r}$  se puede escribir en forma vectorial:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{|q|}{r^2} \cdot \hat{r}$$

(campo eléctrico de una carga puntual)

### 1.7 Cálculos de campo eléctrico originados por distribuciones discretas y continuas de carga.

Para encontrar el campo causado por una distribución de carga, interpretamos que está formada por muchas cargas puntuales  $q_1, q_2, q_3, \dots$

En un punto  $P$  cada carga puntual genera su propio campo eléctrico  $E_1, E_2, E_3, \dots$ , de manera que una carga de prueba  $q_0$  colocada en  $P$  experimenta una fuerza  $\vec{F} = q_0 \vec{E}_1$  de la carga  $q_1$ , etc.

Por el principio de superposición la fuerza total es:

$$\vec{F}_0 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots = q_0 \vec{E}_1 + q_0 \vec{E}_2 + q_0 \vec{E}_3 + \dots$$

El efecto combinado de todas las cargas en la distribución se describe con el campo eléctrico total  $\vec{E}$  en el punto P:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \dots$$

(Principio de superposición de campos eléctricos.)

Existen diversas distribuciones de carga:

- a lo largo de una línea
- sobre una superficie
- a través de un volumen

- Distribución de carga en una línea.

Como por ejemplo: una barra larga, delgada y cargada.

Usamos:  $\lambda$ : Densidad de carga lineal [C/m]

- Distribución sobre una superficie.

Usamos:  $\sigma$  = densidad de carga superficial [C/m<sup>2</sup>]

- Distribución a través de un volumen.

Usamos:  $\rho$  = densidad de carga volumétrica [C/m<sup>3</sup>]

**Línea de campo eléctrico:** Es una línea o curva imaginaria dibujadas a través de una región del espacio, de manera que su tangente en cualquier punto tiene la dirección del vector de campo eléctrico en ese punto.

*Las líneas de campo eléctrico nunca se intersecan.*

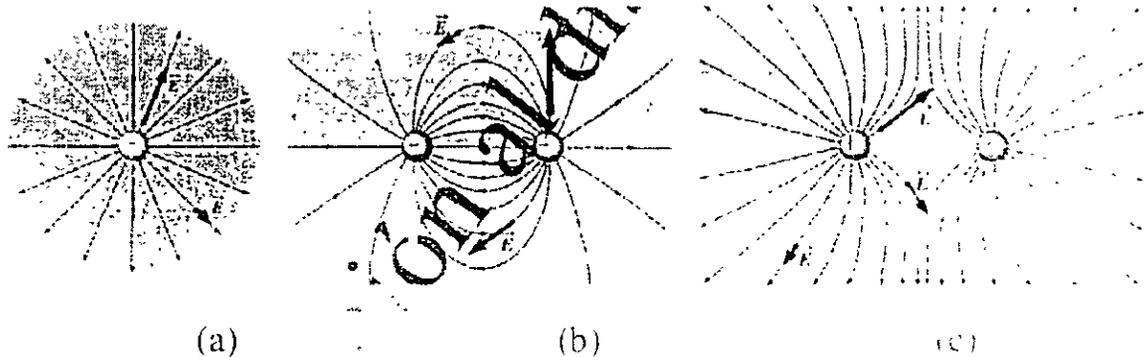


Figura 5. Líneas de campo eléctrico para varias distribuciones de carga. (a) Una sola carga positiva. (b) Dos cargas de igual magnitud y signo opuesto (dipolo eléctrico). (c) Dos cargas positivas iguales. En general la magnitud de  $\vec{E}$  es diferente en puntos diferentes a lo largo de una línea de campo dada.

### 1.8 Concepto de definición de flujo eléctrico.

El flujo eléctrico es una medida del flujo del campo magnético a través de una superficie.

Es igual al producto de un elemento de área y la componente perpendicular de  $\vec{E}$ , integrado sobre una superficie.

$$\Phi_E = \int E \cos \phi dA = \int E_{\perp} dA = \int \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

(Definición general de flujo eléctrico)

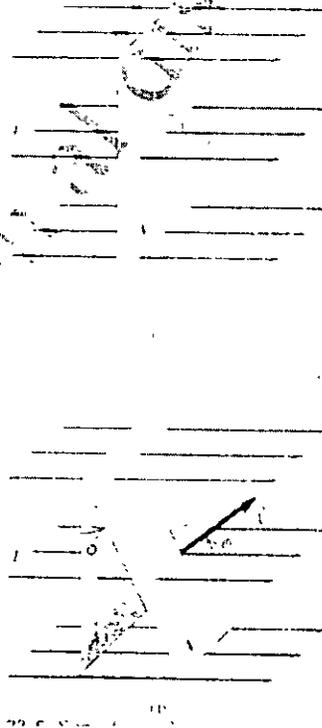


Figura 6 Superficie plana en un campo eléctrico uniforme. (a) El Flujo eléctrico a través de la superficie es igual a  $EA$ . (b) Cuando el vector área forma un ángulo  $\phi$  con  $\vec{E}$ ,  $A_{\perp} = A \cos \phi$ . El flujo es cero cuando  $\phi = 90^{\circ}$ .

## 1.9 Ley de Gauss en forma integral y sus aplicaciones.

La ley de Gauss es lógicamente a la ley de Coulomb pero su uso simplifica mucho los problemas que tienen un alto grado de simetría.

*"Establece que el flujo total a través de una superficie cerrada, puede escribirse como la integral de superficie de la componente  $\vec{E}$  normal a la superficie, es igual a una constante multiplicada por la carga total  $Q$  contenida en la superficie":*

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{DENTRO}}{\epsilon_0}$$

Y puede expresarse la ley de Gauss de varias formas equivalentes:

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot \cos \phi d\vec{A} = \oint E_{\perp} dA = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{DENTRO}}{\epsilon_0}$$

Cuando se coloca un exceso de carga sobre un conductor y está en reposo, ésta reside por completo sobre la superficie y  $E=0$  en todo punto del material del conductor.

DISTRIBUCIÓN DE LA CARGA	PUNTO EN CAMPO ELÉCTRICO	MAGNITUD DEL CAMPO ELÉCTRICO	DISTRIBUCIÓN DE LA CARGA	PUNTO EN CAMPO ELÉCTRICO	MAGNITUD DEL CAMPO ELÉCTRICO
Carga puntual $q$	Distancia $r$ desde $q$	$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$	Esfera aislante sólida, carga $Q$ distribuida uniformemente en todo el volumen	Fuera de la esfera, $r > R$	$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$
Carga $q$ sobre superficie de esfera conductora de radio $R$	Fuera de la esfera, $r > R$ Dentro de la esfera, $r < R$	$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$ $E = 0$		Dentro de la esfera, $r < R$	$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qr}{R^3}$
Alambre infinito, carga por unidad de longitud $\lambda$	Distancia $r$ desde el alambre	$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r}$	Lámina infinita de carga con carga uniforme por unidad de área $\sigma$	Cualquier punto	$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$
Cilindro conductor infinito de radio $R$ , carga por unidad de longitud $\lambda$	Fuera del cilindro, $r > R$ Dentro del cilindro, $r < R$	$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r}$ $E = 0$	Dos placas conductoras con cargas opuestas con densidades de carga superficial $+\sigma$ y $-\sigma$	Cualquier punto entre las placas	$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$

Tabla 1. Campos eléctricos. Aplicaciones

### 10.1 El campo electrostático y concepto de campo conservativo.

La fuerza eléctrica ocasionada por un grupo de cargas en reposo es una fuerza conservativa.

El trabajo  $W$  realizado por la fuerza eléctrica sobre una partícula cargada que se desplaza en un campo eléctrico puede representarse mediante una función de energía potencial  $U$ .

$$W_{a \rightarrow b} = U_a - U_b$$

La energía potencial para dos cargas puntuales  $q$  y  $q_0$  separadas una distancia  $r$  es:

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{|q q_0|}{r}$$

Y la energía potencial para una carga  $q_0$  en el campo eléctrico y un grupo de cargas  $q_i$  está dada por:

$$U = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} + \frac{q_3}{r_3} \right) = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \sum \frac{q_i}{r_i}$$

Donde:  $r_i$  = es la distancia desde  $q_i$  hasta  $q_0$

Nota: si  $q_0$  está infinitamente lejos de las otras cargas  $U = 0$ .

### 1.11 Definición y potencial eléctrico.

El potencial eléctrico, representado por  $V$ , es la energía potencial por unidad de carga.

- El potencial debido a una sola carga puntual  $q$  a una distancia  $r$  de la carga es:

$$V = \frac{U}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r}$$

- El potencial debido a un grupo de cargas puntuales  $q_i$  es:

$$V = \frac{U}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum \frac{q_i}{r_i}$$

- Y el potencial debido a una distribución continua de carga es:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r}$$

**I.12 Cálculos de diferencias de potencial.**

La diferencia de potencial entre: a y b, también conocida como el potencial de a con respecto a b, está dado por la integral de línea de  $\vec{E}$ :

$$V_a - V_b = \int_a^b \vec{E} d\vec{l} = \int_a^b E \cos \phi dl$$

*Dos conjuntos equivalentes de unidades para la madre de campo eléctrico son:*

$$[\text{V/m}] \text{ y } [\text{N/C}]$$

Un volt es  $[1\text{V} = 1\text{J/C}]$ .

El electrón volt, cuya abreviatura es eV, es la energía correspondiente a una partícula con carga igual a la de un electrón que se mueve a través de una diferencia de potencial de un volt.

El factor de conversión es:

$$1\text{eV} = 1.602 \times 10^{-19} [\text{J}]$$

### 1.13 El gradiente de potencial eléctrico.

Si se conoce el potencial como una función de las coordenadas  $x, y, z$ , las componentes del campo eléctrico en cualquier punto están dadas por:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

(componentes de  $E$  en términos de  $V$ )

En forma vectorial:

$$\vec{E} = -\left( \hat{i} \frac{\partial V}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial V}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial V}{\partial z} \right)$$

( $\vec{E}$  en términos de  $V$ )

En notación vectorial a la siguiente operación se le conoce como gradiente de la función  $f$ :

$$\nabla f = \left( \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) f$$

En cada punto, el gradiente de  $V$  apunta en la dirección en la que  $V$  aumenta con mayor rapidez para un cambio en la posición. En consecuencia, en cada punto la dirección de  $\vec{E}$  es aquella en la que  $V$  disminuye con mayor rapidez y siempre es perpendicular a la superficie equipotencial que pasa por cada punto.



**FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.  
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA**

# CURSOS INSTITUCIONALES

## **DIPLOMADO EN DISEÑO Y ADAPTACIÓN DE ANTENAS**

**MOD. II. AVANZADO DE ELECTRICIDAD  
Y MAGNETISMO**

**DEL 29 DE ABRIL AL 07 DE MAYO DEL 2003**

### ***APUNTES ANEXOS***

CI - 063

**Instructor: M. en I. César Enrique Benítez Joyner  
SECRETARÍA DE MARINA  
ABRIL/MAYO DEL 2003**

## EJEMPLOS LEY DE COULOMB

## 1. Fuerza entre dos cargas puntuales.

Dos Cargas puntuales,  $q_1 = +25$  [nC] y  $q_2 = -75$  [nC], están a una distancia de 3 [cm] entre sí.

Encuentre la magnitud y la dirección de:

- a) La fuerza eléctrica que  $q_1$  ejerce sobre  $q_2$ .  
 b) La fuerza eléctrica que  $q_2$  ejerce sobre  $q_1$ .

Solución:

- a) Aplicando la ley de Coulomb:

$$F_{1\text{sobre } 2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_1 q_2|}{r^2}$$

$$F_{1\text{sobre } 2} = \left( 9.0 \times 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \right) \frac{(+25 \times 10^{-9} \text{C})(-75 \times 10^{-9} \text{C})}{(0.030 \text{m})^2}$$

$$F_{1\text{sobre } 2} = 0.019 \text{ [N]}$$

- b) La tercera ley de Newton es aplicable a la fuerza eléctrica. Aunque las cargas tienen diferentes magnitudes, la magnitud de la fuerza que  $q_2$  ejerce sobre  $q_1$  es igual que la magnitud de la fuerza que  $q_1$  ejerce sobre  $q_2$ :

$$F_{2\text{sobre } 1} = 0.019 \text{ [N]}$$



## 2. Suma vectorial de fuerzas eléctricas sobre una línea.

Dos cargas puntuales están situadas sobre el eje x positivo de un sistema coordenado como se muestra en la figura. La carga  $q_1 = 1.0$  [nC] está a 2.0 [cm] del origen y la carga  $q_2 = -3.0$  [nC] está a 4 [cm] del origen.

¿Cuál es la fuerza total ejercida por esas dos cargas sobre una carga  $q_3 = 5$  [nC] situada en el origen?. Las fuerzas gravitatorias son despreciables.

Solución:

La fuerza total sobre  $q_3$  es la suma vectorial de las fuerzas debidas a  $q_1$  y  $q_2$  individualmente.

Se encuentra primero la magnitud  $F_{1 \text{ sobre } 3}$  de la fuerza  $q_1$  sobre  $q_3$ :

$$F_{1 \text{ sobre } 3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_1 q_3|}{r^2}$$

$$F_{1 \text{ sobre } 3} = \left( 9.0 \times 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2} \right) \frac{(1.0 \times 10^{-9} C)(5.0 \times 10^{-9} C)}{(0.020 m)^2}$$

$$F_{1 \text{ sobre } 3} = 1.12 \times 10^{-4} [N] = 112 [\mu N]$$

La magnitud  $F_{2 \text{ sobre } 3}$  de la fuerza  $q_2$  sobre  $q_3$ :

$$F_{2sobre3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_2q_3|}{r^2}$$

$$F_{2sobre3} = \left(9.0 \times 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2}\right) \frac{(3.0 \times 10^{-9} C)(5.0 \times 10^{-9} C)}{(0.040m)^2}$$

$$F_{2sobre3} = 8.4 \times 10^{-5} [N] = 84 [\mu N]$$

Esta fuerza tiene una componente x positiva porque  $q_3$  es atraída por la carga opuesta  $q_2$ . La suma de componentes x es:

$$F_x = -112 \mu N + 84 \mu N = -28 \mu N$$

### 3. Suma vectorial de las fuerzas eléctricas en un plano.

En la figura mostrada, dos cargas positivas iguales  $q_1 = q_2 = 2.0 \text{ } [\mu\text{C}]$  interactúan con una tercera carga puntual  $Q = 4.0 \text{ } [\mu\text{C}]$ .

Encuentre la magnitud y la dirección de la fuerza total (neta) sobre  $Q$ .

Solución:

Se calcula la fuerza que cada carga ejerce sobre  $Q$  y luego encontrar la suma vectorial de las fuerzas.

$$F_{\text{sobre } Q} = \left( 9.0 \times 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \right) \frac{(4.0 \times 10^{-6} \text{ C})(2.0 \times 10^{-6} \text{ C})}{(0.50 \text{ m})^2}$$

$$F_{\text{sobre } Q} = 0.29 [\text{N}]$$

El ángulo  $\alpha$  está por debajo del eje x por lo que las componentes están dadas por

$$(F_{\text{sobre } Q})_x = (F_{\text{sobre } Q}) \cos \alpha = (0.29 \text{ N}) \frac{0.40 \text{ m}}{0.50 \text{ m}} = 0.23 \text{ N}$$

$$(F_{\text{sobre } Q})_y = -(F_{\text{sobre } Q}) \sin \alpha = -(0.29 \text{ N}) \frac{0.30 \text{ m}}{0.50 \text{ m}} = -0.17 \text{ N}$$

La carga inferior  $q_2$  ejerce una fuerza de la misma magnitud, pero a un ángulo  $\alpha$  por encima del eje x. Por simetría su componente x es la misma que la debida a la carga superior, pero su componente "y" tiene el signo opuesto.

Por lo tanto las componentes de la fuerza total  $F$  sobre  $Q$  son:

$$F_x = 0.23 \text{ N} + 0.23 \text{ N} = 0.46 \text{ N}$$

$$F_y = -0.17 \text{ N} + 0.17 \text{ N} = 0$$

*La fuerza total sobre  $Q$  está en la dirección x positiva con magnitud de 0.46 N.*

## EJEMPLO DE CAMPO ELÉCTRICO

### 1. Vector de campo eléctrico para una carga puntual.

Una carga puntual  $q = -8$  [nC] está situada en el origen. Encuentre el vector campo eléctrico en el punto del campo  $x = 1.2$  [m],  $y = -1.6$  [m], según la figura.

Solución:

$$\vec{E} = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{|q|}{r^2} \cdot \hat{r}$$

La distancia de la carga en el punto fuente S al punto P es:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(1.2\text{m})^2 + (-1.6)^2} = 2.0\text{m}$$

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r} = \frac{x\hat{i} + y\hat{j}}{r} = \frac{(1.2\text{m})\hat{i} + (-1.6\text{m})\hat{j}}{2.0\text{m}} = 0.60\hat{i} - 0.80\hat{j}$$

Por tanto el vector campo eléctrico es:

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{|q|}{r^2} \cdot \hat{r} \\ &= \left(9.0 \times 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2}\right) \frac{(-8.0 \times 10^{-9} C)}{(2.0 m)^2} (0.60\hat{i} - 0.80\hat{j}) \\ &= \left(-11 \frac{N}{C}\right)\hat{i} + \left(14 \frac{N}{C}\right)\hat{j}\end{aligned}$$

## EJEMPLOS DE FLUJO ELÉCTRICO

### 1. Flujo eléctrico a través de un disco

Un disco de radio de 0.10 [m] está orientado con su vector unitario normal  $\hat{n}$  formando un ángulo de  $30^\circ$  respecto al campo eléctrico uniforme  $\vec{E}$  con magnitud de  $2.0 \times 10^3$  [N/C], según la figura.

¿Cuál es el flujo eléctrico a través del disco?

Solución:

El área es  $A = \pi (0.10\text{m})^2 = 0.0314 \text{ m}^2$ .

Por lo tanto el flujo eléctrico es:

$$\Phi = EA \cos \phi = \left( 2.0 \times 10^3 \frac{\text{N}}{\text{C}} \right) (0.0314 \text{ m}^2) (\cos 30^\circ) = 54 \left[ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}} \right]$$

## 2. Flujo eléctrico a través de una esfera

Una carga puntual positiva  $q = 3.0 \text{ } [\mu\text{C}]$  está rodeada por una esfera de  $0.20 \text{ m}$  de radio centrada sobre la carga, según la figura.

Encuentre el flujo eléctrico a través de la esfera debido a esta carga.

Solución:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2}$$

$$= \left( 9.0 \times 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \right) \frac{(3.0 \times 10^{-6} \text{ C})}{(0.20 \text{ m})^2} = 6.75 \times 10^5 \left[ \frac{\text{N}}{\text{C}} \right]$$

Y el flujo total hacia fuera de la esfera es:

$$\Phi_E = EA = \left( 6.75 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{C}} \right) (4\pi)(0.20 \text{ m})^2 = 3.4 \times 10^5 \left[ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}} \right]$$

## EJEMPLOS DE POTENCIAL ELÉCTRICO

## 1. Fuerza eléctrica y potencial eléctrico.

Un protón (carga  $+e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$ ) se desplaza una distancia total  $d = 0.50 \text{ m}$  en línea recta, desde el punto a hasta un punto b dentro de un acelerador lineal. El campo eléctrico es uniforme a lo largo de la recta y tiene una magnitud  $E = 1.5 \times 10^7 \text{ [N/C]}$  en la dirección de a a b.

Determine:

- La fuerza ejercida sobre el protón.
- El trabajo realizado por el campo sobre el protón.
- La diferencia de potencial  $V_a - V_b$ .

- a) La fuerza apunta en la misma dirección que el campo eléctrico y su magnitud es:

$$F = qE = (1.602 \times 10^{-19} \text{ C})(1.5 \times 10^7 \text{ N/C}) = 2.4 \times 10^{-12} \text{ N}$$

- b) La fuerza es constante y está en la misma dirección que el desplazamiento, por lo que el trabajo realizado es:

$$W_{a \rightarrow b} = Fd = (2.4 \times 10^{-12}) (0.50 \text{ m}) = 1.2 \times 10^{-12} \text{ J}$$

- c) La diferencia de potencial es:

$$V_a - V_b = \frac{W_{a \rightarrow b}}{q} = \frac{1.2 \times 10^{-12} \text{ J}}{1.602 \times 10^{-19} \text{ C}} = 7.5 \times 10^6 \text{ J/C} = 7.5 \times 10^6 \text{ V} = 7.5 \text{ MV}$$

## 2. Potencial debido a dos cargas puntuales.

Un dipolo eléctrico consiste en dos cargas puntuales  $q_1 = +12$  [nC] y  $q_2 = -12$  [nC], colocadas a una distancia de 10 [cm] una de la otra, según la figura.

Calcule el potencial en los puntos a, b y c mediante la suma de los potenciales debidos a cada una de las cargas.

Solución:

Se calculará en cada punto la suma algebraica de la siguiente ecuación:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum \frac{q_i}{r_i}$$

En el punto a, el potencial debido a la carga positiva  $q_1$  es:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_1} = \left( 9.0 \times 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2} \right) \frac{(12 \times 10^9 C)}{(0.060m)^2} = 1800 \left[ \frac{N \cdot m}{C} \right] = 1800 \left[ \frac{J}{C} \right] = 1800[V]$$

El potencial debido a la carga negativa  $q_2$  es:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{r_2} = \left( 9.0 \times 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2} \right) \frac{(-12 \times 10^9 C)}{(0.040m)^2} = -2700 \left[ \frac{N \cdot m}{C} \right] = -2700 \left[ \frac{J}{C} \right] = -2700[V]$$

El potencial  $V_a$  en el punto a es la suma de los anteriores:

$$V_a = 1800V + (-2700V) = -900[V]$$

De forma similar se calcula el potencial en el punto b, siendo el de la carga positiva de  $+2700[V]$ ; el que produce la carga negativa es  $-770[V]$ , por lo que:

$$V_b = 2700V + (-770V) = 1930[V]$$

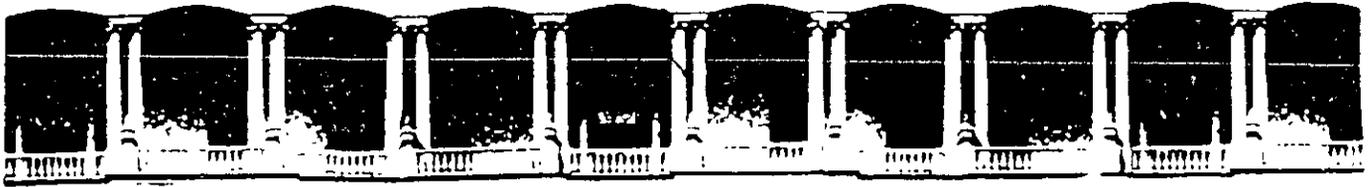
En el punto c el potencial que produce la carga positiva es:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_{21}} = \left( 9.0 \times 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2} \right) \frac{(12 \times 10^9 C)}{(0.13m)^2} = 830[V]$$

El potencial debido a la carga negativa es  $-830 [V]$  y el potencial es cero:

$$V_c = 830V + (-830V) = 0[V]$$

El potencial también es cero en el infinito.



**FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.  
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA**

# CURSOS INSTITUCIONALES

## **DIPLOMADO EN DISEÑO Y ADAPTACIÓN DE ANTENAS**

**MOD. II. AVANZADO DE ELECTRICIDAD  
Y MAGNETISMO**

**DEL 29 DE ABRIL AL 07 DE MAYO DEL 2003**

### ***ANEXOS SEGUNDA PARTE***

CI - 063

**Instructor: M. en I. César Enrique Benítez Joyner  
SECRETARÍA DE MARINA  
ABRIL/MAYO DEL 2003**

## II. Capacitancia y dieléctricos.

### II.1 Concepto de capacitor y definición de capacitancia.

Un capacitor es *cualquier pareja de conductores separados por un material aislante.*

Cuando el capacitor está cargado, se tienen cargas de igual magnitud,  $Q$ , y de signo opuesto en los dos conductores, y el potencial  $V_{ab}$  del conductor con carga positiva con respecto al que tiene carga negativa es proporcional a  $Q$ . La capacitancia  $C$  se define como:

$$C = \frac{Q}{V_{ab}}$$

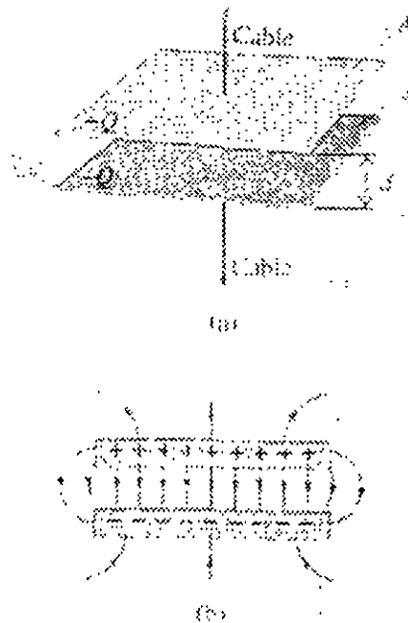


Figura 1. (a) Capacitor de placas planas paralelas cargado. (b) Cuando la separación de las placas es pequeña en comparación con su tamaño, la curvatura del campo eléctrico en los bordes es pequeña.

## II.2 Cálculo de capacitancias.

Un capacitor de placas planas paralelas se construye con 2 placas conductoras paralelas, cada una con una área  $A$  separadas entre sí por una distancia  $d$ . Si el espacio entre placas sólo *contiene vacío*, la capacitancia es:

$$C = \frac{Q}{V_{ab}} = \epsilon_0 \frac{A}{d}$$

La unidad del SI para la capacitancia es el farad [F].

Un farad es un Coulomb por volt:

$$[1 \text{ F} = 1 \text{ C/V}].$$

Otras unidades:

$$[1 \text{ F} = 1 \text{ C}^2/\text{N m} = 1 \text{ C}^2/\text{J}].$$

El microfarad [ $\mu\text{F} = 10^{-6} \text{ F}$ ], el nanofarad [ $\text{nF} = 10^{-9} \text{ F}$ ] y el picofarad [ $\text{pF} = 10^{-12} \text{ F}$ ] se emplean con frecuencia.

Ejemplos

**1. Tamaño de un capacitor de 1 F.**

Un capacitor de placas paralelas tiene una capacitancia de 1.0 F. Si las placas están separadas 1.0 mm, ¿cuál es el área de las placas?

Solución:

$$C = \frac{Q}{V_{ab}} = \epsilon_0 \frac{A}{d}$$

Despejando el área:

$$A = \frac{Cd}{\epsilon_0} = \frac{(1.0F)(1.0 \times 10^{-3} m)}{8.85 \times 10^{-12} [F/m]} = 1.1 \times 10^8 [m^2]$$

**2. Propiedades de un capacitor de placas paralelas.**

Las placas de un capacitor de placas paralelas en el vacío están separadas 5.00mm y tienen 2.00 m<sup>2</sup> de área. Se aplica una diferencia de potencial de 10 000 V (10.0 kV) a través del capacitor.

Calcule :

- La capacitancia.
- La carga en cada placa.
- La magnitud del campo eléctrico en el espacio entre placas.

Solución:

a) Para obtener la capacitancia:

$$C = \epsilon_0 \frac{A}{d} = \frac{(8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m})(2.0 \text{ m}^2)}{5.0 \times 10^{-3} \text{ m}} = 3.54 \times 10^{-9} [\text{F}] = 0.00354 [\mu\text{F}]$$

b) La carga del capacitor es:

$$Q = CV_{ab} = (3.54 \times 10^{-9} \text{ C/V})(1.0 \times 10^4 \text{ V}) = 3.54 \times 10^{-5} [\text{C}] = 35.4 [\mu\text{C}]$$

La placa que tiene mayor potencial tiene una carga de +35.4 [μC] y la otra placa tiene una carga de -34.5 [μC].

c) La magnitud del campo eléctrico es:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0 A} = \frac{3.54 \times 10^{-5} \text{ C}}{(8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2 / \text{N} \cdot \text{m})(2.0 \text{ m}^2)} = 2 \times 10^6 [\text{N/C}]$$

Otra forma de obtener dicha magnitud es sabiendo que el campo eléctrico es igual en magnitud al gradiente de potencial. Además el campo entre las placas es uniforme:

$$E = \frac{V_{ab}}{d} = \frac{1.0 \times 10^4 \text{ V}}{5.0 \times 10^{-3} \text{ m}} = 2.0 \times 10^6 [\text{V/m}]$$

### 11.3 Cálculo de la energía almacenada.

La energía  $U$  requerida para cargar un capacitor  $C$  a una diferencia de potencial  $V$  y con una carga  $Q$  es igual a la de energía almacenada en el capacitor y está dada por:

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}QV$$

Puede considerarse que esta energía reside en el campo eléctrico establecido entre los conductores; la densidad de energía  $u$  (energía por unidad de volumen) es:

$$u = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$$

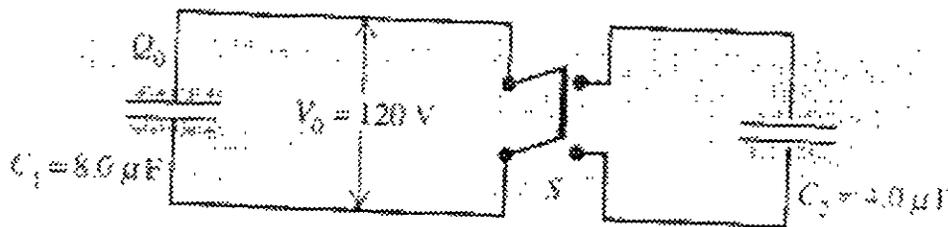
### Ejemplos

#### 1. Transferencia de carga y de energía entre capacitores

En la figura se carga un capacitor de capacitancia  $C_1 = 8.0$  [ $\mu\text{F}$ ] conectándolo a una fuente de voltaje  $V_0 = 120$  [V]. El interruptor  $S$  está abierto inicialmente.

Cuando  $C_1$  está cargado, la fuente se desconecta.

- ¿Cuál es la carga  $Q_0$  en  $C_1$  si  $S$  se deja abierto?
- ¿Cuál es la energía almacenada en  $C_1$  si  $S$  se deja abierto?
- El capacitor de capacitancia  $C_2 = 4.0$  [ $\mu\text{F}$ ] está descargado inicialmente. Después de cerrar el interruptor  $S$ , ¿cuál es la diferencia de potencial a través de cada capacitor y cuál es la carga en cada uno de ellos?
- ¿Cuál es la energía total del sistema después de cerrar el interruptor  $S$ ?



Solución:

- a) La carga  $Q_0$  en  $C_1$  es:

$$Q_0 = C_1 V_0 = (8.0 \mu\text{F})(120\text{V}) = 960 [\mu\text{C}]$$

- b) La energía almacenada inicialmente en el capacitor es:

$$U_{\text{inicial}} = \frac{1}{2} Q_0 V_0 = \frac{1}{2} (960 \times 10^{-6} \text{C})(120\text{V}) = 0.058 [\text{J}]$$

- c) Cuando se cierra el interruptor, la carga positiva  $Q_0$  se distribuye en las placas superiores de ambos capacitores y la carga negativa  $-Q_0$  se distribuye en las placas inferiores de los dos capacitores.

Por la conservación de la carga:

$$Q_1 + Q_2 = Q_0$$

En el estado final, cuando las cargas ya no están en movimiento, las dos placas superiores están al mismo potencial; están conectadas por un alambre conductor, formando una sola superficie equipotencial.

Las dos placas inferiores también se encuentran al mismo potencial, distinto del de las placas superiores.

La diferencia de potencial final entre placas es la misma en ambos capacitores.

Por lo tanto las cargas de cada capacitor son:

$$Q_1 = C_1 V \qquad Q_2 = C_2 V$$

Combinando con la ecuación de la conservación de la carga:

$$V = \frac{Q_0}{C_1 + C_2} = \frac{960 \mu\text{C}}{8.0 \mu\text{F} + 4.0 \mu\text{F}} = 80 \text{ [V]}$$

$$Q_1 = 640 [\mu\text{C}] \qquad Q_2 = 320 [\mu\text{C}]$$

- d) La energía final del sistema es la suma de las energías almacenadas de cada capacitor:

$$U_{\text{final}} = \frac{1}{2} Q_1 V + \frac{1}{2} Q_2 V = \frac{1}{2} Q_0 V$$

$$U_{\text{final}} = \frac{1}{2} (960 \times 10^{-6} \text{ C})(80 \text{ V}) = 0.038 \text{ [J]}$$

## 2. Energía del campo eléctrico.

Suponga que desea almacenar 1.0 [J] de energía potencial eléctrica en un volumen de 1.0 [m<sup>3</sup>] en el vacío. Determine:

- a) ¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico que se necesita?

Solución:

- a) La densidad de energía deseada es:  $u = \frac{1.0 \text{ J}}{1.0 \text{ m}^3} = 1.0 \left[ \frac{\text{J}}{\text{m}^3} \right]$

de la ecuación:

$$u = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

despejamos E:

$$E = \sqrt{\frac{2u}{\epsilon_0}} = \sqrt{\frac{2(1.0 \text{ J/m}^3)}{8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2}} = 4.75 \times 10^5 \left[ \frac{\text{N}}{\text{C}} \right] = 4.75 \times 10^5 \left[ \frac{\text{V}}{\text{m}} \right]$$

#### II.4 Conexiones de capacitores; capacitor equivalente.

Cuando se conectan capacitores con capacitancias  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ ,..... en serie, la capacitancia equivalente  $C_{eq}$  es:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots$$

(capacitores en serie).

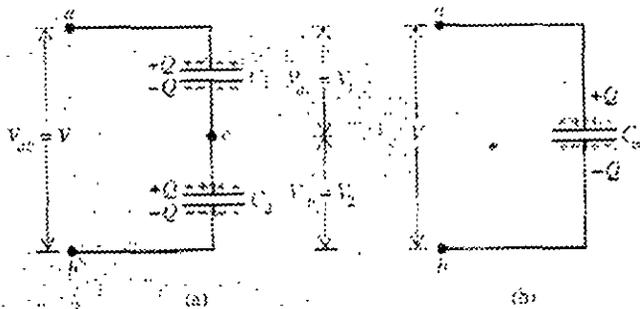


Figura 2. (a) Dos capacitores en serie. (b) El capacitor equivalente

Cuando están conectados los capacitores en paralelo, la capacitancia equivalente  $C_{eq}$  es:

$$C_{eq} = C_1 + C_1 + C_1 + \dots$$

(capacitores en paralelo).

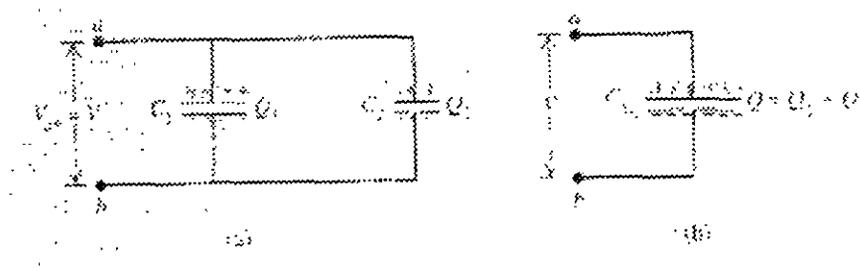


Figura 3. (a) Dos capacitores en serie. (b) El capacitor equivalente.

Ejemplos:

### 1. Capacitores en serie y en paralelo.

En las figuras 2 y 3, sea  $C_1 = 6.0 \text{ } [\mu\text{F}]$  y  $V_{ab} = 18 \text{ } [\text{V}]$ . Encuentre la capacitancia equivalente de la combinación, la carga y la diferencia de potencial para cada capacitor cuando ambos están conectados:

- En serie.
- En paralelo.

Solución:

- La capacitancia equivalente de la conexión serie:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{6.0 \mu\text{F}} + \frac{1}{3.0 \mu\text{F}}$$

Por lo tanto:

$$C_{eq} = 2.0[\mu F]$$

La carga  $Q$  de cada capacitor en serie es igual que la del capacitor equivalente:

$$Q = C_{eq}V = (2.0\mu F)(18V) = 36[\mu C]$$

La diferencia de potencial a través de cada capacitor es inversamente proporcional a su capacitancia:

$$V_{ac} = V_1 = \frac{Q}{C_1} = \frac{36\mu C}{6.0\mu F} = 6.0[V]$$

$$V_{cb} = V_2 = \frac{Q}{C_2} = \frac{36\mu C}{3.0\mu F} = 12[V]$$

Para dos capacitores en serie, la diferencia de potencial más grande aparece en el capacitor que tiene la menor capacitancia.

- b) La capacitancia equivalente de la conexión en paralelo (figura 3) está dada por:

$$C_{eq} = C_1 + C_2 = 6.0\mu F + 3.0\mu F = 9.0[\mu F]$$

Esta es mayor que  $C_1$  a que  $C_2$  ya diferencia de potencial a través de cada capacitor en paralelo es la misma que la que se tiene a través del capacitor equivalente, 18 [V].

Las cargas  $Q_1$  y  $Q_2$  son directamente proporcionales a las capacitancias  $C_1$  y  $C_2$  respectivamente:

$$Q_1 = C_1 V = (6.0 \mu\text{F})(18\text{V}) = 108 [\mu\text{C}]$$

$$Q_2 = C_2 V = (3.0 \mu\text{F})(18\text{V}) = 54 [\mu\text{C}]$$

Para dos capacitores en paralelo, la carga mayor aparece en el capacitor de mayor capacitancia.

## 2. Red de capacitores.

Encuentre la capacitancia equivalente de la combinación mostrada en la siguiente figura:

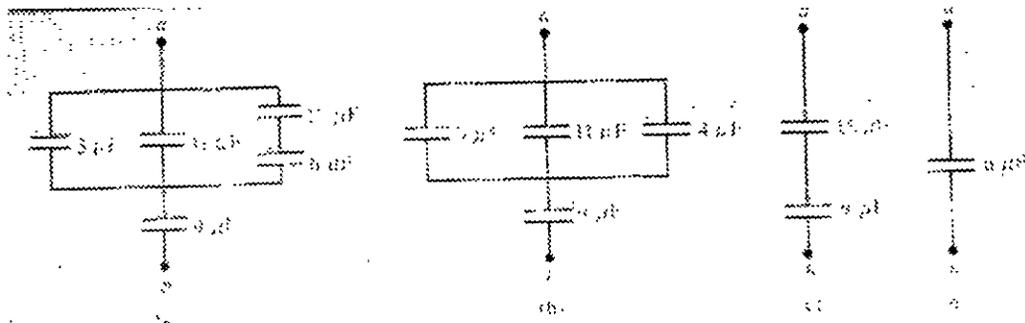


Figura 4. Red de capacitores entre los puntos a y b.

Solución:

Primero sustituimos la combinación en serie de  $12 [\mu\text{F}]$  y  $6 [\mu\text{F}]$  por su capacitancia equivalente ( $C'$ ):

$$\frac{1}{C'} = \frac{1}{12 \mu\text{F}} + \frac{1}{6 \mu\text{F}} \quad , \quad C' = 4 [\mu\text{F}]$$

Esta nos da la combinación equivalente mostrada en la figura 4-b.

Ahora se determina la capacitancia equivalente ( $C''$ ) de los tres capacitores en paralelo:

$$C'' = 3\mu F + 11\mu F + 4\mu F = 18[\mu F]$$

Se obtiene ahora una combinación equivalente más sencilla mostrada en la figura 4-c.

Para concluir, se determina la capacitancia equivalente  $C_{eq}$  de la figura 4-c.

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{18\mu F} + \frac{1}{9\mu F}, \quad C_{eq} = 6[\mu F]$$

## II.5 Polarización de la materia, concepto de rigidez dieléctrica, susceptibilidad, permitividad y permitividad relativa.

Cuando el espacio entre los conductores (de un capacitor) está lleno con un material dieléctrico, la capacitancia aumenta en un **factor k** conocido como constante dieléctrica del material.

Para un capacitor de placas planas paralelas, con un dieléctrico entre sus placas, la capacitancia es:

$$C = kC_0 = k\epsilon_0 \frac{A}{d} = \epsilon \frac{A}{d}$$

donde:  $\epsilon = k\epsilon_0$  (es la permitividad del dieléctrico)

Las unidades de  $\epsilon_0$  son:  $|1 \text{ C}^2 / \text{N m}^2 = 1 \text{ F} / \text{m}|$

Así que  $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ [ F/m ]}$  ( Constante de permitividad)

- Para una cantidad fija de carga y en las placas del capacitor, las cargas inducidas sobre la superficie del dieléctrico disminuyen la intensidad del campo eléctrico y la diferencia en el potencial entre las placas en el mismo factor  $k$ .
- La carga superficial resulta de la polarización, que *es una redistribución microscópica de carga en el dieléctrico debido a la reorientación de las moléculas polares en un campo aplicado o a la creación de momentos bipolares inducidos en un material no polar.*

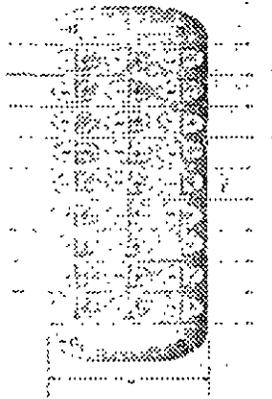


Figura 5. La polarización de un dieléctrico en un campo eléctrico da lugar a delgadas capas de cargas ligadas sobre las superficies, creando densidades de cargas superficiales  $\sigma_i$  y  $-\sigma_i$ .

- En campos eléctricos suficientemente intensos, *los dieléctricos se convierten en conductores lo cual se conoce como ruptura de rigidez dieléctrica.*

- La máxima magnitud del campo eléctrico que un material puede soportar sin que haya ruptura se conoce como rigidez dieléctrica.

Tabla de valores de la constante dieléctrica  $K$  a 20°

MATERIAL	$K$	MATERIAL	$K$
Vacío	1	Cloruro de polivinilo	3.18
Aire (1 atm)	1.00059	Flexiglas	3.40
Aire (100 atm)	1.0048	Vidrio	5-10
Teflón	2.1	Neopreno	6.70
Polietileno	2.25	Germanio	16
Benceno	2.29	Glicerina	42.5
Mercurio	3.4	Agua	80.4
Mylar	3.1	Franato de estroncio	310

Constante dieléctrica de un material.

$$k = \frac{C}{C_0} \quad (\text{constante dieléctrica de un material})$$

- $k$  siempre es mayor a la unidad.

Figura 6. Efecto de un dieléctrico entre las placas de un capacitor de placas paralelas.

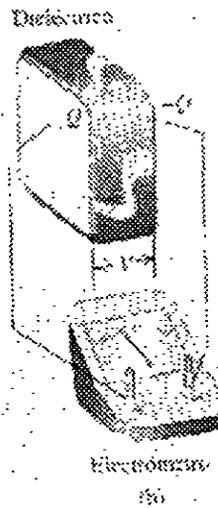
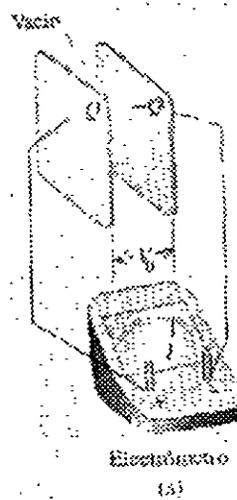


Tabla Constante dieléctrica y campo de ruptura dieléctrica de algunos materiales aislantes

MATERIAL	CONSTANTE DIÉLECTRICA, $K$	CAMPO DE RUPTURA (V/cm)
Policarbonato	2.5	$3 \times 10^7$
Poliéster	3.3	$6 \times 10^7$
Polipropileno	2.2	$7 \times 10^7$
Poliéstereno	1.6	$2 \times 10^7$
Vidrio pyrex	4.7	$1 \times 10^8$



**FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.  
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA**

# CURSOS INSTITUCIONALES

## **DIPLOMADO EN DISEÑO Y ADAPTACIÓN DE ANTENAS**

**MOD. II. AVANZADO DE ELECTRICIDAD  
Y MAGNETISMO**

**DEL 29 DE ABRIL AL 07 DE MAYO DEL 2003**

### ***ANEXOS TERCERA PARTE***

CI - 063

**Instructor: M. en I. César Enrique Benítez Joyner  
SECRETARÍA DE MARINA  
ABRIL/MAYO DEL 2003**

## II. Circuitos eléctricos.

### III.1 Conceptos y definiciones de corriente eléctrica, velocidad de arrastre y densidad de corriente eléctrica.

La corriente eléctrica es la cantidad de carga que fluye a través de un área específica por unidad de tiempo.

La unidad de la corriente eléctrica en el SI es el ampere:

$$[1A=C/s]$$

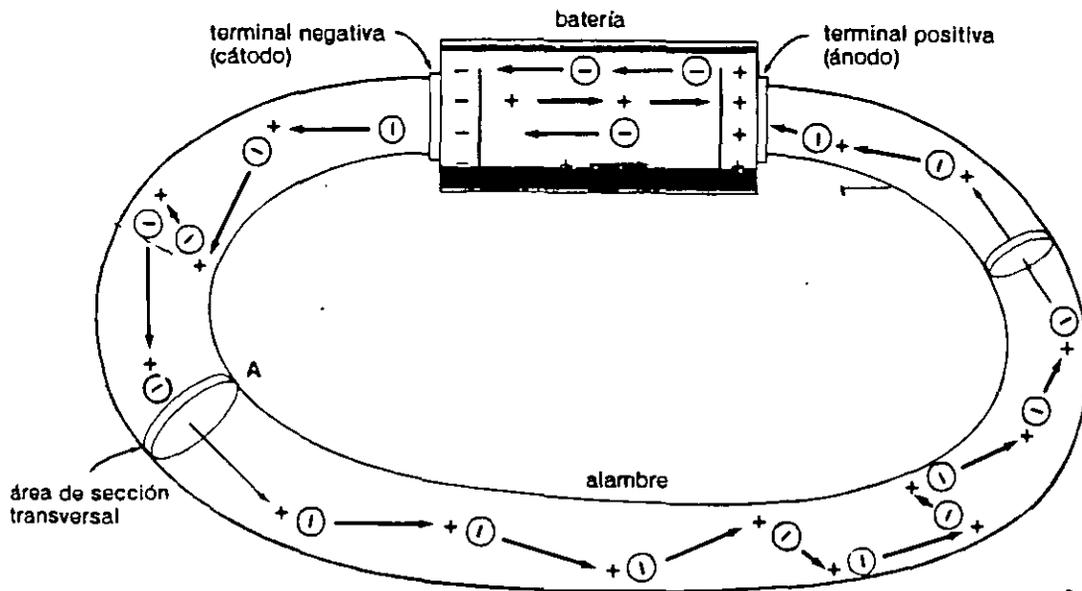


Figura 1. Corriente eléctrica. El flujo de carga en un circuito de baterías. El campo eléctrico creado en el alambre por la batería hace que los electrones se dirijan hacia las terminales, dando origen a un flujo de electrones o corrientes. El movimiento de electrones es aleatorio y caótico a consecuencia de las colisiones, pero se da un movimiento neto de electrones en el alambre hacia la terminal positiva.

Si los portadores de carga en un material tienen una concentración de partículas  $n$ , carga  $q$  la velocidad de arrastre  $\vec{v}_d$  (de magnitud  $v_d$ ), la corriente eléctrica  $I$  que pasa a través de una área  $A$  es:

$$I = \frac{dQ}{dt} = n|q|v_d A$$

Donde:

$n$  = partículas cargadas por unidad de volumen [ $\text{m}^{-3}$ ]

$v_d$  = velocidad de arrastre.

$A$  = área transversal del conductor.

La densidad de corriente  $\vec{J}$  es la corriente eléctrica por unidad de área transversal. En términos de las cantidades anteriores:

$$\vec{J} = nq\vec{v}_d \quad (\text{densidad de corriente vectorial}).$$

$$\vec{J} = \frac{I}{A} = nqv_d \quad (\text{densidad de corriente escalar})$$

Y las unidades en el SI:

$$[J]=[A/m]$$

**Ejemplo.****Densidad de corriente y velocidad de arrastre en un cable.**

Un cable de cobre calibre 18, tiene un diámetro nominal de 1.0[mm]. Por este cable circula una corriente constante de 1.67 [A] a una lámpara de 200 [W].

La densidad de electrones libres es de  $8.5 \times 10^{28}$  electrones por metro cúbico. Encuentre la magnitud de:

- La densidad de corriente.
- La velocidad de arrastre.

Solución:

- El área transversal es:

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi (1.02 \times 10^{-3} \text{ m})^2}{4} = 8.17 \times 10^{-7} \text{ m}^2$$

La magnitud de la densidad de corriente es

$$J = \frac{I}{A} = \frac{1.67 \text{ A}}{8.17 \times 10^{-7} \text{ m}^2} = 2.04 \times 10^6 \left[ \frac{\text{A}}{\text{m}^2} \right]$$

- La velocidad de arrastre es:

$$v_d = \frac{J}{n|q|} = \frac{2.04 \times 10^6 \left[ \frac{\text{A}}{\text{m}^2} \right]}{(8.5 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}) (1.60 \times 10^{-19} \text{ C})} = 1.5 \times 10^{-4} \left[ \frac{\text{m}}{\text{s}} \right] = 0.15 \left[ \frac{\text{mm}}{\text{s}} \right]$$

Nota: Con esta rapidez, un electrón necesita 6700[s] (1 hora, 50 minutos) para recorrer un cable de 1 metro de largo. La rapidez del movimiento aleatorio de los electrones es del orden de  $10^6$  [m/s], siendo en este ejemplo casi  $10^{10}$  veces menor que la rapidez del movimiento aleatorio.

De manera convencional la corriente eléctrica se describe en términos de un flujo de cargas positivas, aunque los portadores reales de cargas sean negativos o de ambos signos.

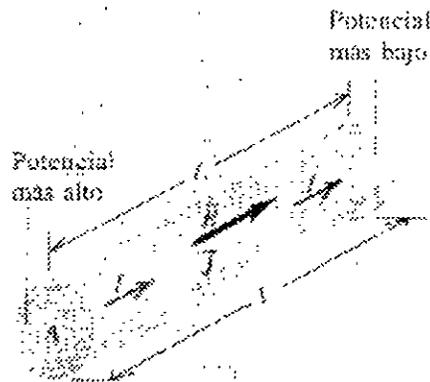


Figura 2. Conductor con sección transversal uniforme. La densidad de corriente es uniforme en cualquier sección transversal y el campo eléctrico es constante a lo largo de su longitud. La corriente fluye desde el potencial eléctrico más alto hacia el más bajo.

## II.2 Ley de Ohm; conductividad y resistividad.

La resistividad  $\rho$  de un material está definida por el cociente de la magnitud del campo eléctrico y de la densidad de corriente:

$$\rho = \frac{E}{J} [\Omega \cdot m]$$

- Los buenos conductores tienen baja resistividad.
- Los buenos aislantes tienen alta resistividad.

La conductividad es el recíproco de la resistividad y sus unidades en el sistema internacional son  $[\Omega \text{ m}]^{-1}$ .

Los buenos conductores tienen una conductividad más grande que los aislantes.

Tabla 1. Resistividades y coeficientes térmicos de resistividad a 20°C.

Substancia	Resistividad $\rho$ , $\Omega \cdot \text{m}$	Coficiente térmico $\alpha_r$ , 1/C° o 1/K
Cobre	$1.69 \times 10^{-8}$	$3.9 \times 10^{-3}$
Plata	$1.59 \times 10^{-8}$	$3.8 \times 10^{-3}$
Oro	$2.44 \times 10^{-8}$	$3.4 \times 10^{-3}$
Aluminio	$2.83 \times 10^{-8}$	$4.0 \times 10^{-3}$
Tungsteno	$5.33 \times 10^{-8}$	$4.6 \times 10^{-3}$
Platino	$10.4 \times 10^{-8}$	$3.9 \times 10^{-3}$
Manganina	$48.2 \times 10^{-8}$	0
Constantan	$48.9 \times 10^{-8}$	$2 \times 10^{-6}$
Nicromo	$100 \times 10^{-8}$	$4 \times 10^{-4}$
Carbón	$3.5 \times 10^{-5}$	$-5 \times 10^{-4}$
Germanio	-0.5	$-5 \times 10^{-2}$
Silicio	-1000	$-7 \times 10^{-2}$
Madera	$10^8 - 10^{14}$	—
Vidrio	$10^{10} - 10^{14}$	—
Cuarzo fundido	$5 \times 10^{17}$	—

La resistividad por lo general aumenta con la temperatura; para cambios pequeños de temperatura, esta variación se representa.

$$\rho(T) = \rho_0 [1 + \alpha(T - T_0)]$$

$\alpha$  = coeficiente de temperatura de la resistividad

$T_0$  = temperatura de referencia (0 °C a 20°C)

$\rho_0$  = resistividad a una temperatura de referencia T

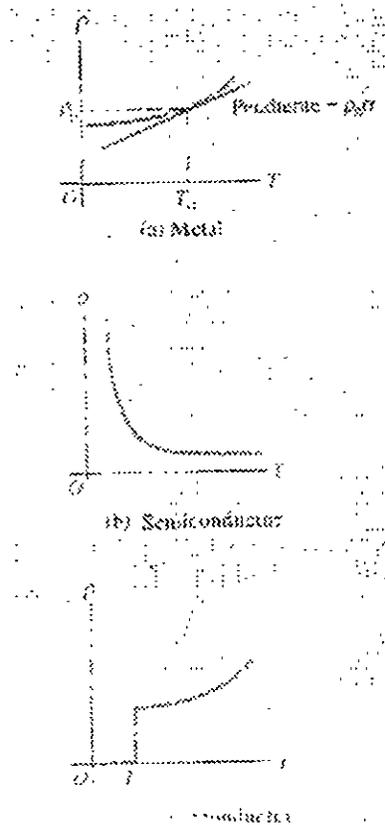


Figura 3. Variación de la resistividad con la temperatura absoluta para (a) un metal normal; (b) un semiconductor; y (c) un superconductor.

Para la materia que sigue la ley de Ohm, la diferencia de potencial  $V$  a través de una muestra particular de material es proporcional a la corriente eléctrica  $I$  que lo atraviesa:

$$V = I R \quad (\rho = \text{cte.})$$

Donde  $R$  = resistencia de la muestra.

En términos de la resistividad  $\rho$  la longitud  $L$  y que el área transversal  $A$ :

$$R = \frac{\rho L}{A} [\Omega] = \left[ \frac{V}{A} \right]$$

Dado que la resistividad de un material varía con la temperatura, la resistencia de un conductor específico también lo hace. Para intervalos de temperatura no muy grandes es:

$$R(T) = R_0 [1 + \alpha(T - T_0)]$$

Donde:

$R(T)$  = resistencia a la temperatura  $T$

$R_0$  = resistencia a la temperatura  $T_0$

$T_0$  = temperatura de referencia ( $0^\circ\text{C}$  a  $20^\circ\text{C}$ )

$\alpha$  = coeficiente de temperatura de la resistividad

## Ejemplos

### Campo eléctrico, diferencia de potencial y resistencia en un cable.

Un cable calibre 18, tiene un diámetro de 1.02[mm] y un área transversal  $A = 8.2 \times 10^{-7} \text{ [m}^2\text{]}$  y por él circula una corriente  $I = 1.67 \text{ [A]}$ . Encuentre:

- La magnitud del campo eléctrico en el cable.
- La diferencia de potencial entre dos puntos del cable separados una distancia de 50[cm].
- La resistencia de un segmento de cable de 50 [cm] de longitud.

Solución.

- La magnitud del campo eléctrico es  $\rho J$ , la densidad de corriente es  $J = I/A$ , y la resistividad del cobre por tabla su valor es  $1.69 \times 10^{-8} \text{ [}\Omega \cdot \text{m]}$ .

$$E = \rho J = \rho \frac{I}{A} = (1.69 \times 10^{-8} \text{ [}\Omega \cdot \text{m}]) \frac{1.67 \text{ A}}{8.2 \times 10^{-7} \text{ m}^2} = 0.035 \left[ \frac{\text{V}}{\text{m}} \right]$$

b) La diferencia de potencial es:

$$V = EL = \left(0.035 \left[\frac{V}{m}\right]\right)(50[m]) = 1.7[V]$$

c) La resistencia de un segmento de cable de 50 cm de longitud es:

$$R = \frac{V}{I} = \frac{1.7V}{1.67A} = 1.0[\Omega]$$

Otra forma:

$$R = \frac{\rho L}{A} = \frac{(1.72 \times 10^{-8} [\Omega \cdot m])(50[m])}{8.2 \times 10^{-7} [m^2]} = 1.0[\Omega]$$

### III. Ley de Juole.

Un elemento en un circuito con una diferencia de potencial  $V_{ab}$  y una corriente eléctrica  $I$  suministra energía a un circuito y si la dirección de la corriente va del potencial más bajo a uno alto en el dispositivo, toma inercia del circuito si la corriente es opuesta.

La potencia  $P$  (razón de transferencia de energía) está dada por:

$$P = V_{ab} I \quad [W]$$

Un resistor  $R$  siempre toma energía eléctrica en un circuito y la convierte en energía térmica a una razón dada por:

$$P = V_{ab} I = I^2 R = \frac{V_{ab}^2}{R}$$

Ejemplo:

De la figura (4), calcule:

- La razón de conversión de energía (química a eléctrica).
- La razón de disipación de energía (conversión en calor) en la batería.
- La potencia neta de la batería.

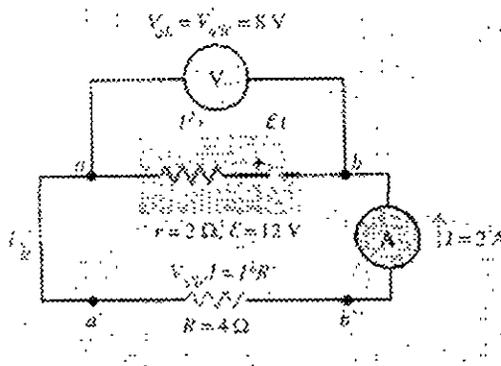


Figura 4. Relaciones de potencia en un circuito simple.

Solución:

- La razón de conversión de energía en la batería es:

$$\varepsilon I = (12V)(2A) = 24[W]$$

- La razón de disipación de energía (conversión en calor) en la batería.

$$I^2 r = (2A)^2 (2\Omega) = 8[W]$$

- La potencia neta de la batería.

$$P = V_{ab} I = (8V)(2A) = 16[W]$$

$$P = V_{a'b'} I = (8V)(2A) = 16[W]$$

$$P = I^2 R = (2A)^2 (4\Omega) = 16[W]$$

### III.4 Conexiones de resistores; resistor equivalente.

Cuando varios resistores,  $R_1, R_2, R_3, \dots$ , están conectados en serie, la resistencia equivalente  $R_{eq}$  es la suma de las resistencias individuales:

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3 + \dots \quad (\text{resistores en serie})$$

En una conexión fluye la misma corriente a través de todos los resistores.

Si los resistores están en paralelo, la resistencia equivalente  $R_{eq}$  está dada por:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots \quad (\text{resistores en paralelo})$$

Todos los resistores de una conexión en paralelo tienen la misma diferencia de potencial entre sus terminales.

Ejemplo:

Calcule la resistencia equivalente de la red mostrada en la figura (5), y encuentre la corriente en cada resistor. La fuente de fem ( $\varepsilon$ ) tiene una resistencia interna ( $r$ ) despreciable.

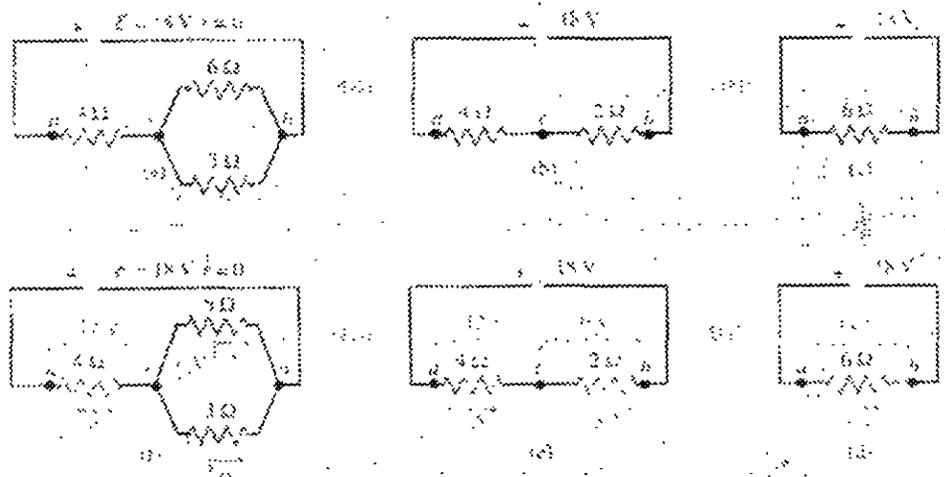


Figura 5. Pasos a reducir una combinación de resistores a un solo resistor equivalente y para calcular la corriente en cada resistor

Solución:

En la figura (5b) y (5c) se muestran las etapas sucesivas de la reducción de la red a una sola resistencia equivalente.

Se obtiene la resistencia equivalente de los resistores en paralelo de  $6\ \Omega$  y  $3\ \Omega$  :

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{6\ \Omega} + \frac{1}{3\ \Omega} = \frac{1}{2} \rightarrow R_{eq} = 2\ \Omega \Leftrightarrow \frac{1}{R_{eq}} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} = \frac{6 + 3}{6 \cdot 3} = 2\ \Omega$$

Después se calcula la resistencia equivalente (figura (5c)) de la conexión en serie de los resistores de  $4\Omega$  y  $2\Omega$ :

$$R_{eq} = 4\Omega + 2\Omega = 6\Omega$$

Ahora calculamos la corriente en el circuito de la figura (5d):

$$I_{ab} = \frac{V_{ab}}{R_{6\Omega}} = \frac{18V}{6\Omega} = 3[A]$$

Así que la corriente en los resistores de  $4\Omega$  y  $6\Omega$  de la figura (e) también es de  $3[A]$ .

La diferencia de potencial  $V_{cb}$  es:

$$V_{cb} = IR_{2\Omega} = (3A)(2\Omega) = 6[V]$$

La diferencia de potencial  $V_{ac}$  es:

$$V_{ac} = IR_{4\Omega} = (3A)(4\Omega) = 12[V]$$

La corriente en los resistores de  $6\Omega$  y  $3\Omega$  (figura f) es para cada uno:

$$I_{6\Omega} = \frac{V_{cb}}{R} = \frac{6V}{6\Omega} = 1[A] \quad | \quad I_{3\Omega} = \frac{V_{cb}}{R} = \frac{6V}{3\Omega} = 2[A]$$

Siendo la corriente en el resistor de  $4\Omega$  de  $3A$  :

$$I_{4\Omega} = \frac{V_{ac}}{R} = \frac{12V}{4\Omega} = 3[A]$$

### III.5 Concepto y definición de fuerza electromotriz. Fuentes de fuerza electromotriz.

Un circuito completo es un camino cerrado conductor por el que puede circular una corriente continua.

En un circuito eléctrico, en algún lado de la trayectoria cerrada, debe existir un dispositivo que actúe como bomba en una fuente.

En este dispositivo la carga debe desplazarse hacia arriba, de un punto de energía potencial menor a uno de energía potencial mayor, oponiéndose a la fuerza electrostática, que intenta empujar la carga en sentido contrario.

La dirección de la corriente en tal dispositivo es desde un potencial más bajo hacia uno más alto, justo al contrario de lo que sucede en un conductor ordinario.

Lo que hace que la corriente fluya en dicha dirección se conoce como fuerza electromotriz (cuya abreviatura es *fem*).

Este es un término mal empleado, puesto que la *fem* no es una fuerza, sino una cantidad de energía por unidad de carga, como el potencial.

*La unidad de la fuerza motriz en el sistema internacional es el volt [ $V = 1 J/C$ ].*

Un circuito completo por el que circula una corriente estacionaria debe contener una fuerza de fuerza electromotriz (*fem*) y se representa con el símbolo  $\mathcal{E}$ .

Las baterías, generadores eléctricos, células solares, termopares, y células de combustib. son ejemplos de fuentes de *fem*. Todos estos dispositivos convierten la energía de alguna forma (mecánica, química, térmica, etc.) en energía potencial eléctrica y la transfieren al circuito al cual están conectados.

Una fem ideal mantiene una diferencia de potencial constante entre sus terminales, independiente de la corriente a través del dispositivo, pero toda fem real posee una resistencia interna  $r$ .

La diferencia de potencial en terminales  $V_{ab}$  depende de la corriente.

$$V_{ab} = \varepsilon - Ir \quad (\text{fuente con resistencia interna}).$$

Donde:  $V_{ab}$  = Voltaje entre terminales de una fuente con resistencia interna.  
 $\varepsilon$  =  
 $r$  = Resistencia interna de la fem.  
 $Ir$  = Caída de potencial a través de la resistencia interna  $r$ .

Ejemplo:

Según los datos del siguiente circuito (figura 6), diga ¿cuáles son las lecturas en los medidores?

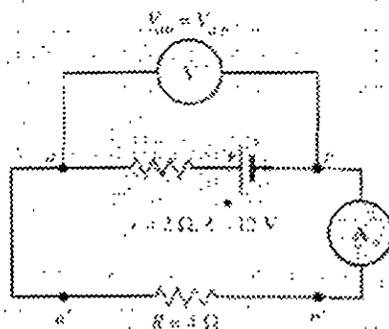


Figura 6. Fuente en un circuito completo

Solución:

La corriente  $I$  a través del resistor  $R$  esta determinada por:

$$I = \frac{\varepsilon}{R+r} = \frac{12V}{4\Omega + 2\Omega} = 2[A]$$

Por lo tanto la lectura en el amperímetro es de  $I = 2[A]$

La diferencia de potencial en los puntos  $a$  y  $b$ ,  $a'$  y  $b'$  es

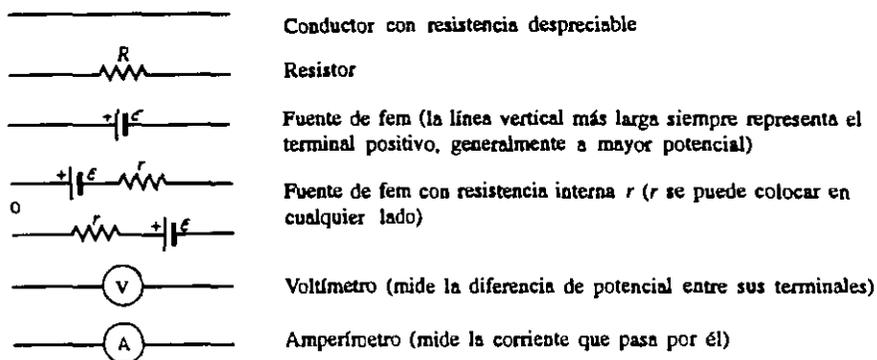
$$V_{ab'} = IR = (2A)(4\Omega) = 8[V]$$

$$V_{ab} = \varepsilon - Ir = 12V - (2A)(2\Omega) = 8[V]$$

Se concluye que la lectura en el voltímetro es  $V_{ab} = 8[V]$ , siendo menor el voltaje en terminales que la fem. Cuanto más pequeña sea la resistencia interna  $r$ , menor será la diferencia entre  $V_{ab}$  y  $\varepsilon$ .

### III.6 Nomenclatura básica empleada en circuitos eléctricos.

Simbolos más empleados para los diagramas de circuitos:



### III.7 Leyes de Kirchhoff y su aplicación en circuitos resistivos.

La reglas de los modos de se basa en la ley de la conservación de la carga.

Regla de los nodos: la suma algebraica de las corrientes que entran en un nodo debe ser cero

$$\sum I = 0 \quad (\text{regla de nodo})$$

Regla de las mallas: la suma algebraica de las diferencias de potencial en cualquier trayectoria cerrada, incluyendo las asociadas con fuentes de fem y elementos de resistencia debe ser cero.

$$\sum V = 0 \quad (\text{regla de mallas para cualquier trayectoria cerrada})$$

Ejemplo:

### Una red compleja

Encuentre la corriente en cada resistor y la resistencia equivalente de la red de cinco resistores que se muestra en la figura (7).

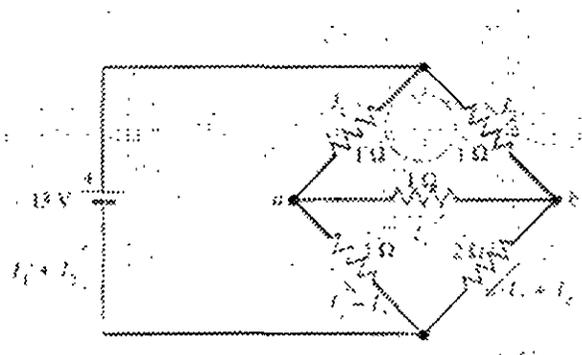


Figura 7. Circuito con varios resistores.

Solución:

*Esta red no puede representarse en términos de combinaciones en serie ni en paralelo.*

Cinco corrientes se deben determinar, pero al aplicar la regla de los nodos a las uniones a y b, se pueden representar en términos de tres corrientes conocidas, como se observa en la figura (7).

La corriente en la batería es  $I_{\text{batería}} = I_1 + I_2$ .

Aplicamos la regla de las mallas a las tres trayectorias señaladas y se obtienen las siguientes tres ecuaciones:

$$13V - I_1(1\Omega) - (I_1 + I_3)(1\Omega) = 0 \quad (1)$$

$$-I_2(1\Omega) - (I_2 + I_3)(2\Omega) + 13V = 0 \quad (2)$$

$$-I_1(1\Omega) - I_3(1\Omega) + I_2(1\Omega) = 0 \quad (3)$$

Tenemos ahora un conjunto de tres ecuaciones simultáneas para las tres corrientes desconocidas, que pueden resolverse con varios métodos.

Un procedimiento directo es despejar  $I_2$  en la ecuación (3), obteniendo:

$$I_2 = I_1 + I_3$$

y se sustituye la expresión anterior en las ecuaciones (1) y (2) para eliminar  $I_2$ , quedando dos ecuaciones:

$$13V = I_1(2\Omega) - I_3(1\Omega) \quad (1')$$

$$13V = I_1(3\Omega) + I_3(5\Omega) \quad (2')$$

Ahora se puede eliminar  $I_3$  multiplicando la ecuación (1') por 5 y sumando las dos ecuaciones, se obtiene:

$$78V = I_1(13\Omega) \rightarrow I_1 = 6[A]$$

Se sustituye el valor de  $I_1$  en la ecuación (1') para obtener:

$$I_3 = -1[A]$$

Y sustituyendo  $I_1$  e  $I_3$  en la ecuación (3) se obtiene  $I_2$ :

$$I_2 = 5[A]$$

El valor negativo de  $I_3$  dice que su dirección es opuesta a la que se había supuesto.

La corriente total a través de la red es:

$$I_1 + I_2 = 11[A]$$

Y la caída de potencial en la red es igual a la fem de la batería, 13 [V]. Por lo tanto la resistencia equivalente de la red es:

$$R_{eq} = \frac{13V}{11A} = 1.2[\Omega]$$

### III.8 Circuito R-C

#### Carga de un capacitor.

- Cuando se carga un capacitor mediante una batería en serie con un resistor, la corriente y la carga del capacitor no son constantes.

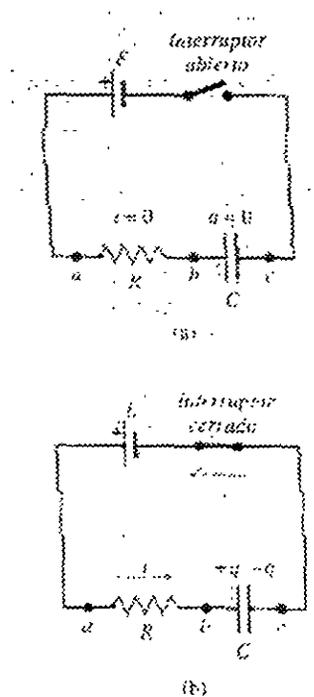


Figura 8. Carga de un capacitor.

- La carga se aproxima a su valor final de manera asintótica.
- La carga y la corriente eléctrica en el circuito son:

$$q = C\varepsilon \left( 1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right) = Q_f \left( 1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right) \quad (\text{circuito RC, carga de un capacitor}).$$

Donde:  $Q_f =$  carga final

- La corriente instantánea  $i$  es la derivada con respecto al tiempo de la ecuación anterior.

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{\varepsilon}{R} e^{-\frac{t}{RC}} = I_0 e^{-\frac{t}{RC}} \quad (\text{circuito RC carga de un capacitor}).$$

- La carga y la corriente instantánea son funciones exponenciales.

### Constante de tiempo

- Después de un tiempo igual a  $RC$ , la corriente en el circuito RC disminuyen a  $1/e$  (cerca de 0.368) de su valor inicial. En este momento la carga del capacitor ha alcanzado  $(1 - 1/e) = 0.632$  de su valor final  $Q_f = C\varepsilon$
- El producto  $RC$  es una medida de que tan rápido se carga el capacitor.

*RC se llama constante de tiempo o tiempo de relajación del circuito y se representa con  $\tau$ .*

$$\tau = RC$$

- Cuando  $T$  es pequeña y capacitó se carga rápidamente.
- Cuando  $T$  es más grande la carga lleva más tiempo.
- Si la resistencia es pequeña, es más fácil que fluyan la corriente y el capacitor se carga el menor tiempo.

### Descarga de un capacitor

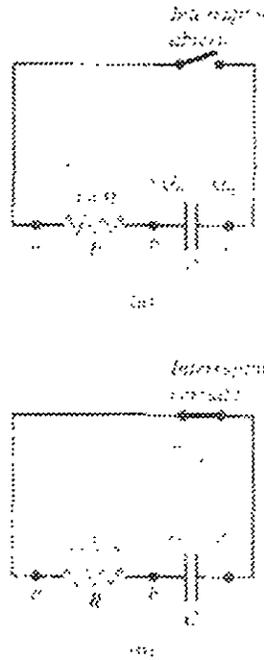


Figura 9. Descarga de un capacitor.

- Cuando el capacitor se descarga, la carga y la corriente están dadas por:

$$q = Q_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$i = \frac{dq}{dt} = -\frac{Q_0}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} = I_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

*La constante de tiempo es igual para la carga que para la descarga de un capacitor.*

**Ejemplos.****1. Carga de un capacitor.**

Un resistor con resistencia de  $10 \text{ [M}\Omega\text{]}$  está conectado en serie con un capacitor cuya capacitancia es  $1 \text{ [}\mu\text{F]}$  y una batería con fem de  $12.0 \text{ [V]}$  (ver figura 8). Antes de cerrar el interruptor en el instante  $t = 0$ , el capacitor está descargado. Determine:

- ¿Cuál es la constante de tiempo?
- ¿Qué fracción de la carga final se encuentra sobre las placas e  $t = 46 \text{ [s]}$ ?
- ¿Qué fracción de la corriente inicial permanece cuando  $t = 46 \text{ [s]}$ ?

Solución:

- La constante de tiempo es:

$$\tau = R \cdot C = (10 \times 10^6 \Omega)(1.0 \times 10^{-6} \text{ F}) = 10 \text{ [s]}$$

- La fracción de la carga final en el capacitor es  $q/Q_f$ , que obtenemos de la ecuación.

$$q = C\varepsilon \left( 1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right) = Q_f \left( 1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right)$$

$$\frac{q}{Q_f} = 1 - e^{-\frac{t}{RC}} = 1 - e^{-\frac{46 \text{ [s]}}{10 \text{ [s]}}} = 0.99$$

**El capacitor está cargado un 99% después de un tiempo de  $4.6 RC$  o  $4.6$  constantes de tiempo.**

c) La corriente inicial la obtenemos de la siguiente ecuación:

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{\varepsilon}{R} e^{-\frac{t}{RC}} = I_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

ahora obtenemos  $i/I_0$

$$\frac{i}{I_0} = e^{-4.6} = 0.010$$

*Después de 4.6 constantes de tiempo, la corriente ha disminuido al 1.0% de su valor final.*

## 2. Descarga de un capacitor.

El resistor y el capacitor descritos en el ejemplo anterior ahora están conectados como se muestra en la figura (9).

El capacitor tiene una carga de  $50 \text{ } [\mu\text{C}]$ , luego se le descarga cerrando el interruptor en el instante  $t = 0$ . Determine:

- ¿En que instante la carga será igual a  $0.50 \text{ } [\mu\text{C}]$ ?
- ¿Cuál es la corriente en ese momento?

a) Despejando el instante  $t$  de la siguiente ecuación:

$$q = Q_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$t = -RC \ln \frac{q}{Q_0} = -(10 \times 10^6 \Omega)(1.0 \times 10^{-6} F) \ln \frac{0.50 \mu\text{C}}{5.0 \mu\text{C}} = 23 \text{ } [s]$$

Esto es 2.3 veces la constante de tiempo  $\tau = RC = 10 \text{ } [s]$

- b) Empleando la siguiente ecuación con  $Q_0 = 5 \text{ } [\mu\text{C}] = 5.0 \times 10^{-6} \text{ [C]}$ :

$$i = -\frac{Q_0}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} = -\frac{5.0 \times 10^{-6} \text{ C}}{10 \text{ s}} e^{-23} = -5.0 \times 10^{-8} \text{ [A]}$$

*Cuando el capacitor se está descargando, la corriente tiene el signo opuesto que cuando está cargando.*



**FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.  
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA**

# **CURSOS INSTITUCIONALES**

## **DIPLOMADO EN DISEÑO Y ADAPTACIÓN DE ANTENAS**

**MOD. II. AVANZADO DE ELECTRICIDAD  
Y MAGNETISMO**

**DEL 29 DE ABRIL AL 07 DE MAYO DEL 2003**

### ***ANEXOS CUARTA PARTE***

CI - 063

**Instructor: M. en I. César Enrique Benítez Joyner  
SECRETARÍA DE MARINA  
ABRIL/MAYO DEL 2003**

## V. Inducción electromagnética

### V.1 Ley de Faraday y principio de Lenz.

La ley de Faraday establece que la fem inducida en una espira cerrada es igual al valor negativo de la razón temporal de cambio del flujo magnético a través de la espira:

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi_B}{dt}$$

Esta relación es válida si el cambio de flujo producido por un campo magnético variable, el movimiento de la espira o ambos.

La ley de Lenz establece que una corriente o fem inducidas siempre tienden a oponerse al cambio que las produjo o a cancelarlo. Esta ley se puede derivar de la ley de Faraday y a menudo es más fácil de utilizar.

### V.2 Fuerza electromotriz de movimiento

Si un conductor de longitud  $L$  se desplaza con velocidad  $v$  en un campo magnético uniforme  $B$ , y si la longitud y la velocidad de ambos son perpendiculares al campo, la fem inducida es:

$$\mathcal{E} = vBL$$

De manera más general, cuando un conductor se mueve en un campo magnético  $\vec{B}$ , la fem inducida en la dirección que va de  $b$  a  $a$  es:

$$\varepsilon = \int_b^a (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

### V.3 Conceptos de inductancia propia, mutua y de inductor.

Cuando una corriente variable  $i$  en un circuito produce un flujo magnético variable en un segundo circuito, se induce una fem  $\varepsilon_2$  en el segundo circuito; del mismo modo, una corriente variable  $i_2$  en el segundo circuito induce una fem  $\varepsilon_1$  en el primero:

$$\varepsilon_2 = -M \frac{di_1}{dt} \quad \text{y} \quad \varepsilon_1 = -M \frac{di_2}{dt}$$

La constante  $M$ , conocida como inductancia mutua, depende de la geometría de las dos bobinas y del material que haya entre ellas. Si los circuitos son bobinas de alambre con  $N_1$  y  $N_2$  vueltas, respectivamente, la inductancia mutua puede expresarse en términos del flujo medio  $\Phi_{B2}$  a través de cada vuelta de la bobina 2 producido por la corriente de la bobina  $i_1$  o en términos del flujo medio  $\Phi_{B1}$  a través de cada vuelta de la bobina 1 producido por la corriente  $i_2$  de la bobina 2:

$$M = \frac{N_2 \Phi_{B2}}{i_1} = \frac{N_2 \Phi_{B2}}{i_2}$$

La unidad de la inductancia mutua en el SI es el henry, cuya abreviatura es [H].

Las unidades equivalentes son:

$$[ 1 \text{ H} = 1 \text{ Wb/A} = 1 \text{ V s/A} = 1 \text{ W s} ]$$

Una corriente variable  $i$  en cualquier circuito induce una fem  $\varepsilon$  en ese mismo circuito, conocida como fem autoinducida:

$$\varepsilon = -L \frac{di}{dt}$$

La constante  $L$ , conocida como inductancia o autoinductancia, depende de la geometría del circuito y del material que le rodea. La inductancia de una bobina de  $N$  vueltas está relacionada con el flujo medio  $\Phi_B$  a través de cada vuelta producido por la corriente  $i$  en la bobina:

$$L = \frac{N\Phi_B}{i}$$

El inductor es un elemento de circuito que por lo general incluye una bobina de alambre y está diseñada para tener una inductancia grande.

#### V.4 Energía en un inductor

Un inductor con inductancia  $L$  por el que circula una corriente  $I$  tiene una energía:

$$U = \frac{1}{2} LI^2$$

Esta energía está asociada con el campo magnético del inductor. Si el campo está en el vacío, la densidad de energía magnética  $u$  (energía por unidad de volumen) es:

$$u = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

en un material con permeabilidad magnética  $\mu$ , la densidad de energía magnética es:

$$u = \frac{B^2}{2\mu}$$

#### V.5 Circuitos RL y RLC en serie

En un circuito RL que contiene un resistor  $R$ , un inductor  $L$  y una fuente de fem, el crecimiento y la disminución de la corriente son exponenciales, con un tiempo característico  $\tau$  conocido como constante de tiempo:

$$\tau = \frac{L}{R}$$

Éste es el tiempo necesario para que la corriente alcance una fracción  $1/e$  de su valor final.

Un circuito L-C, que contiene una inductancia L y una capacitancia C, produce oscilaciones eléctricas con una frecuencia angular  $\omega$  :

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

Un circuito L-R-C en serie, que contiene inductancia, resistencia y capacitancia, experimenta oscilaciones amortiguadas para una resistencia lo suficientemente pequeña. La frecuencia  $\omega'$  de las oscilaciones amortiguadas es:

$$\omega' = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

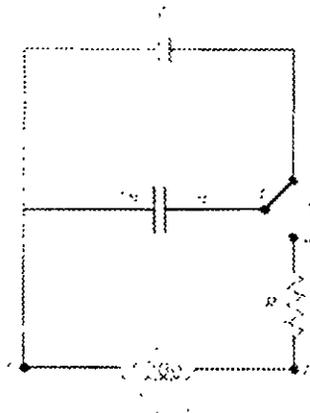


Figura 1 Circuito L-R-C en serie

## V.6 Principio de operación del transformador eléctrico.

Los transformadores se usan para modificar los niveles de corriente y de voltaje en un circuito de ca. En un transformador ideal en el que no haya pérdidas de energía, si el enrollado primario tiene  $N_1$  vueltas y el secundario  $N_2$  vueltas, las amplitudes (o valores RMS) de los dos voltajes están relacionados mediante:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{N_2}{N_1}$$

Las amplitudes de los voltajes y de las corrientes en el primario y en el secundario están relacionadas mediante

$$V_1 I_1 = V_2 I_2$$

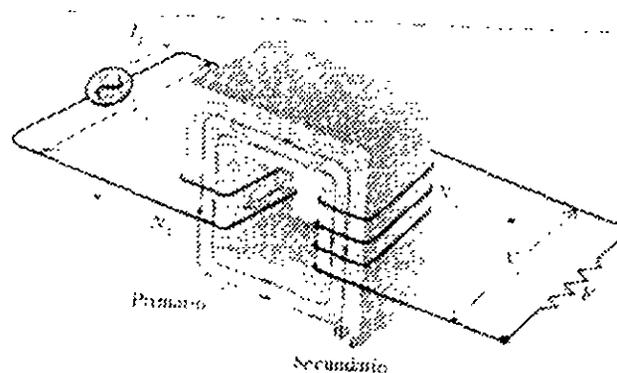


Figura 2. Diagrama esquemático de un transformador elevador idealizado

## VI Propiedades magnéticas de la materia.

### Diamagnetismo, paramagnetismo y ferromagnetismo

Al estudiar como las corrientes eléctricas producen campos magnéticos, hemos supuesto que los conductores están rodeados por el vacío. Pero las bobinas de transformadores, motores, generadores y que el lector imanes casi siempre tienen núcleos de hierro para aumentar la intensidad del campo magnético y confinarlo a las regiones deseadas.

Los imanes permanentes, las cintas magnéticas para grabar y discos para computadora dependen de manera directa de las propiedades magnéticas de los materiales.

Analizaremos tres amplias clases de comportamiento magnético que se presentan en los materiales; éstas son paramagnetismo, diamagnetismo y ferromagnetismo.

#### *Paramagnetismo.*

En un átomo, la mayoría de los momentos magnéticos orbitales y de espín de los electrones se cancelan, pero en algunos casos el átomo tiene un momento magnético neto del orden de  $\mu_B$ . Y si un material se coloca en un campo magnético, éste ejerce un momento de torsión sobre cada momento magnético, dado por la siguiente ecuación:

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$$

Estos momentos de torsión tienden a alinear los momentos magnéticos con el campo como la posición mínima de energía potencial. Ahora, la dirección de las espiras de corriente es tal que aumentan el campo magnético externo.

## Magnetización ( $\vec{M}$ )

El campo  $\vec{B}$  producido por una espira de corriente es proporcional al momento dipolar magnético de la espira. Del mismo modo, el campo adicional  $\vec{B}$  producido por las espiras de corriente microscópicas de los electrones es proporcional al momento magnético total  $\vec{\mu}_{total}$  por unidad de volumen  $V$  en el material.

Esta cantidad vectorial se llama **magnetización** del material y se representa con  $\vec{M}$ :

$$\vec{M} = \frac{\vec{\mu}_{total}}{V}$$

El campo magnético adicional debido a la magnetización del material resulta ser igual a  $\mu_0 \vec{M}$ , donde  $\mu_0$  es la misma constante que aparece en las leyes de Biot - Savart y Ampère. Cuando este material rodea por completo un conductor que lleva corriente, el campo magnético total  $\vec{B}$  en el material es:

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \mu_0 \vec{M}$$

Donde  $\vec{B}_0$  es el campo producido por la corriente en el conductor.

Un material que muestra el comportamiento que se describió, se conoce como **paramagnético**.

### ***Permeabilidad relativa***

El resultado es que el campo magnético en cualquier punto de ese material es mayor en un factor sin dimensiones  $K_m$ , conocido como ***permeabilidad relativa del material***, de lo que sería si el material se sustituyeran por el vacío.

El valor de  $K_m$  es distinto para diferentes materiales; para sólidos y líquidos paramagnéticos comunes a una temperatura ambiente,  $K_m$  varía típicamente desde 1.00001 hasta 1.003.

Todas las ecuaciones de este apartado que relacionan a los campos magnéticos con sus fuentes pueden adaptarse a la situación en la cual el conductor que lleva corriente esté inmerso en el material paramagnético. Todo lo que hay que hacer es sustituir  $\mu_0$  por  $K_m \mu_0$ .

Este producto por lo general se representa así con  $\mu$  y se conoce como la **permeabilidad del material**:

$$\mu = K_m \mu_0.$$

### ***Susceptibilidad magnética.***

La cantidad por la cual la permeabilidad relativa difiere de la unidad se conoce como susceptibilidad magnética y se denota con  $X_m$ :

$$X_m = K_m - 1$$

Siendo ambas cantidades adimensionales.

Tabla de susceptibilidades magnéticas de materiales paramagnéticos y diamagnéticos a  $T = 20^{\circ}\text{C}$ 

MATERIAL	$\chi_m = K_m - 1 (\times 10^{-3})$
<b>Paramagnético</b>	
Alambre de amonio y hierro	66
Uranio	40
Platino	26
Aluminio	2.2
Sodio	0.72
Gas oxígeno	0.19
<b>Diamagnético</b>	
Bismuto	-16.6
Mercurio	-2.9
Plata	-2.6
Carbono (diamante)	-2.1
Plomo	-1.8
Cloruro de sodio	-1.4
Cobre	-1.0

### Diamagnetismo

En algunos materiales el momento magnético total de toda las espiras de corriente atómicas es cero cuando no hay campo magnético. Pero aún es materiales tienen efectos magnéticos debido a que un campo externo altera el movimiento de los electrones dentro de los átomos, produciendo espiras de corriente adicionales y dipolos magnéticos inducidos comparable a los de polos eléctricos inducidos.

Del campo adicional producido por estas espiras de corriente siempre tiene dirección opuesta a la del campo externo.

Se dice que estos materiales son diamagnéticos. Siempre tienen una susceptibilidad negativa y permeabilidad relativa ligeramente menor que la unidad, por lo general del orden de 0.99990 a 0.99999 para sólidos y líquidos

Las susceptibilidades son casi independientes de la temperatura.

## Ferromagnetismo

Existe una tercera clase de material, los ferromagnéticos, como hierro, níquel, cobalto y muchas aleaciones de estos elementos.

En ellos, intensas interacciones entre momentos magnéticos atómicos hacen que estos se alineen paralelos entre sin en regiones llamadas *dominios magnéticos*, aún si no hay un campo magnético externo.

La permeabilidad relativa a  $K_m$  es mucho mayor que 1, por lo general del orden de 1000 a 100 000.

Al aumentar el campo externo, se alcanza un punto en el que casi todos los momentos magnéticos del material ferromagnético están alineados paralelos al campo externo. Esta condición se llama **saturación magnética**

### Curva de magnetización.

Es una gráfica de la magnetización  $M$  en función del campo magnético externo  $B_0$ . La siguiente figura muestra un ejemplo para el hierro dulce.

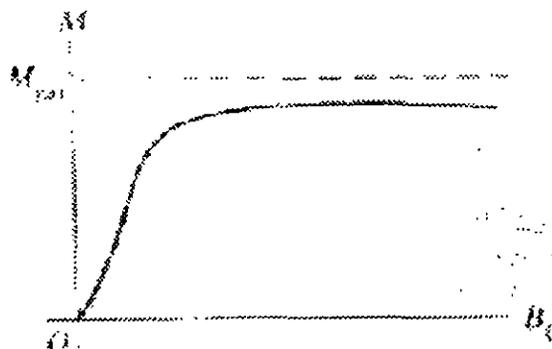


Figura 1. Curva de magnetización para un material ferromagnético

## Magnetización de saturación e Histéresis

En el interior una se observa que cuando aún material se le magnetiza hasta la saturación y después el campo magnético se reduce a cero, permanece algo de magnetización. Este comportamiento es característico de los imanes permanentes, que retienen la mayor parte de su magnetización de saturación cuando se retira el campo magnetizante. Para reducir la magnetización a cero se requiere un campo magnético en la dirección inversa. Este comportamiento se llama histéresis.

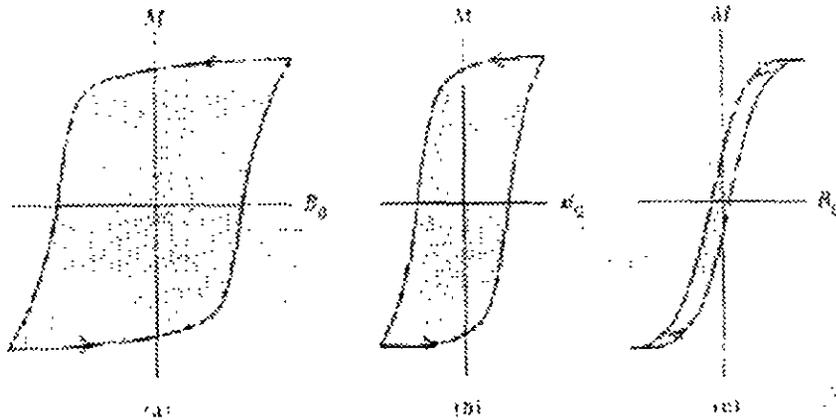


Figura 2. Curvas de histéresis

## IV Magnetostática

### IV.1 Descripción de los imanes y experimento de Oersted.

Los fenómenos magnéticos se observaron por primera vez hace cuando menos 2500 años, en fragmentos de mineral de hierro magnetizado encontrados cerca de la antigua ciudad de Magnesia ( hoy Manisa, en el oeste de Turquía).

Estos fragmentos eran ejemplos de lo que ahora conocemos como imanes permanentes.

Se encontró que los imanes permanentes ejercen fuerzas entre sí y sobre trozos de hierro sin magnetizar.

Se descubrió que cuando unas varillas de hierro se pone en contacto con un imán natural, la varilla se magnetiza.

Cuando esta varilla se hace flotar en agua o se suspende por su parte central, mediante una cuerda, tiende a alinearse de norte a sur; así funciona la aguja de una brújula común.

Antes de que se entendiera la relación de las interacciones con las cargas en movimiento, las interacciones de los imanes permanentes y las agujas de las brújulas se descubrieron en términos de polos magnéticos.

Si un imán permanente como forma de barra o barra imantada, es libre de girar, uno de sus extremos apuntaba hacia el norte. A este se le conoce como polo Norte o polo N; el otro extremo es un polo Sur o polo S.

Los polos opuestos se atraen y los polos iguales se repelen.

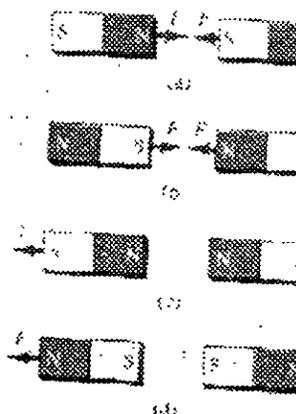


Figura 1. (a), (b) Dos imanes se atraen cuando sus polos opuestos se colocan uno junto a otro. (c), (d) Cuando están juntos los polos iguales se repelen.

Un objeto que contiene hierro no magnetizado (que no tiende a alinearse de norte a sur) es atraído por cualquier polo de un imán permanente.

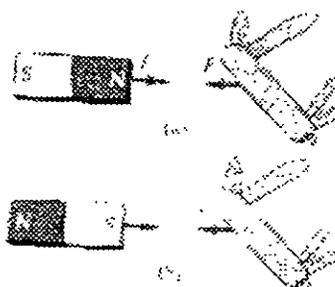


Figura 2. (a), (b) Cualquier polo de un imán atrae a un objeto no magnetizado que contenga hierro.

Una barra imantada establece un campo magnético en el espacio que la rodean y que un segundo cuerpo responde a dicho campo.

*La tierra misma es un imán*; su polo Norte geográfico está cerca de un polo Sur magnético; por eso el polo Norte de la aguja de una brújula apunta hacia el norte.

*El eje magnético terrestre no es paralelo al eje geográfico* (su eje de rotación de modo que la indicación de la aguja está ligeramente desviada del por lo geográfico).

Esta desviación que varía con la ubicación, se conoce como *declinación magnética o variación magnética*.

Además el campo magnético no es horizontal en la mayoría de los puntos de la superficie terrestre; el ángulo que forma con la horizontal, hacia arriba o hacia abajo se conoce como *inclinación magnética*.

En los polos magnéticos el campo es vertical.

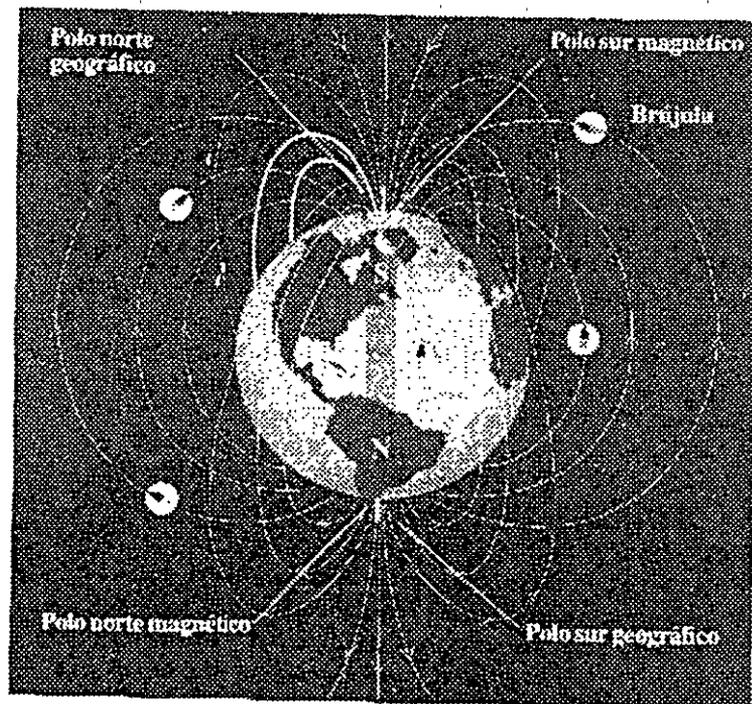


Figura 3 Configuración del campo magnético terrestre.

No hay pruebas de que exista un solo polo magnético aislado: siempre aparecen en parejas.

Si se divide una barra en dos partes cada parte se convierte en un imán con dos polos opuestos.

En la actualidad los imanes son utilizados en medidores, motores, altavoces, cintas para grabación, memorias de computadora, análisis químicos, el enfoque de unas de electrones en el tubo de rayos catódicos de un televisor y una miriada de otras aplicaciones.

**Hans Christian Oersted**, un profesor danés profesaba una creencia metafísica en la unidad de las fuerzas de la naturaleza.

Desde su punto de vista, toda las fuerzas, en particular *la electricidad y magnetismo estaban interconectadas*.

Ya en 1813, comenzó a pensar acerca de *cómo un efecto magnético podría generarse de la electricidad*.

En la primavera de 1820, mientras preparaba una clase para estudiantes avanzados, Oersted observó que una aguja imantada fluctúa durante una tormenta particularmente cuando caían rayos.

*Al final de la clase, colocó una aguja imantada debajo de un alambre de platino orientados de norte a sur.*

Cuando pasó una corriente eléctrica grande *se asombró al ver la aguja girar* de un desde su orientación normal con el campo magnético de la tierra.

**Había descubierto que una corriente eléctrica podría producir un efecto magnético.**

Más tarde mostró que un imán ejerce una fuerza sobre un alambre que lleva corriente.

*Sus resultados publicados en julio de 1820 establecieron hay relación entre la electricidad y el magnetismo.*

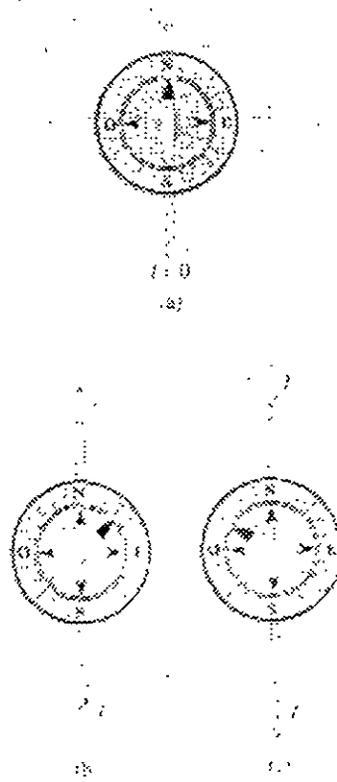


Figura 4. En el experimento de Oersted, se coloca una brújula directamente sobre un cable horizontal. (a) La aguja apunta hacia el norte cuando no hay corriente. (b) La aguja se desvía hacia el este cuando la corriente fluye hacia el norte. (c) La aguja se desvía hacia el oeste cuando la corriente fluye hacia el sur. Si la brújula se coloca directamente bajo el cable, la aguja se desvía en la dirección contraria a la descrita.

## IV.2 Fuerza magnética entre cargas en movimiento. Definición de campo magnético.

Las interacciones magnéticas que se llevan a cabo fundamentalmente entre partículas cargadas en movimiento.

Tales interacciones se describen mediante el vector de campo magnético denotado con  $\vec{B}$ . Una partícula con carga  $q$  que se mueve con velocidad  $\vec{v}$  en un campo magnético  $\vec{B}$  experimenta una fuerza  $\vec{F}$  dada por:

$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}$$

La unidad del campo magnético en el SI es el Tesla:

$$[1\text{T} = 1\text{N} / \text{A m}]$$

$$[1\text{T} = 10\text{G}] \text{-----Gauss}$$

- a) La fuerza sobre una partícula cargada es directamente proporcional a su carga  $q$  y su rapidez  $\vec{v}$ , esto es:

$$F \propto qv$$

- b) Si la velocidad  $v$  de la partícula por un ángulo  $\theta$  con las líneas de  $B$  se encuentra:

$$F \propto \text{sen}\theta$$

combinando ambos resultados

$$F \propto q v \sin\theta$$

La fuerza también debe depender de la intensidad del campo. La proporcionalidad anterior se convierte en una ecuación definiendo la intensidad de campo magnético B como la constante de proporcionalidad:

$$F = q v B \sin\theta$$

c) De la dirección de F es perpendicular a v y a B.

#### IV.5 Ley de Biot-Savart y sus aplicaciones.

El campo magnético  $\vec{B}$ , producido por una carga q que se desplazan con una velocidad  $\vec{v}$  es:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{q \vec{v} \times \vec{r}}{r^2}$$

donde:

r = La distancia desde el punto fuente (la posición de Q) hasta el punto del campo P.

$\hat{r}$  = Es un vector unitario en la dirección de r.

El principio de superposición de los campos magnéticos es:

*“El campo  $\vec{B}$  total producido por varias cargas en movimiento, es la suma vectorial de los campos producidos por las cargas individuales”.*

La ley de Biot-Savart es:

*“El campo magnético  $d\vec{B}$  creado por un elemento  $d\vec{l}$  de un conductor por el que circula una corriente  $I$  es”:*

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}}{r^2}$$

(Campo magnético de un elemento de corriente en forma vectorial).

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl \sin\phi}{r^2}$$

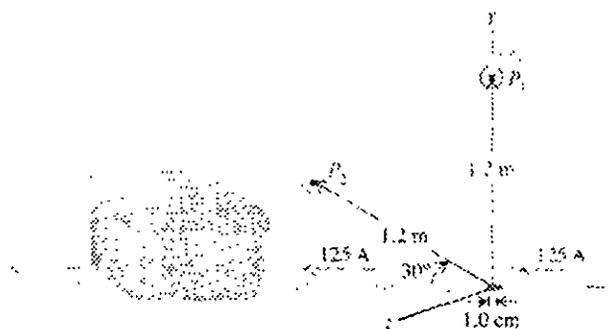
(Campo magnético de un elemento de corriente en forma escalar).

**Ejemplo:****Campo magnético de un segmento de corriente.**

Por un alambre de cobre circula una corriente estacionaria de 125 [A] a un tanque galvanizado.

Encuentre el campo magnético producido por un segmento de 1.0 [cm] de este alambre en un punto que se encuentra a 1.2 [m] de él:

- En  $P_1$ , justo encima del segmento.
- En  $P_2$ , sobre una recta que forma un ángulo de  $30^\circ$  con el segmento como se muestra en la figura.



Solución:

- Según la regla de la mano derecha, la dirección de  $\vec{B}$  en  $P_1$  apunta hacia adentro del plano de la figura.

Utilizando los vectores unitarios, se observa que:

$$d\vec{l} = dl(-\hat{i})$$

En el punto  $P_1$ :

$$\hat{r} = \hat{j}$$

De modo que:

$$d\vec{l} \times \hat{r} = dl(-\hat{i}) \times \hat{j} = dl(\hat{k})$$

La dirección de z negativa es hacia dentro de la hoja en la figura.

Por lo tanto el campo magnético en P<sub>1</sub>:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \sin\phi}{r^2} = (10^{-7} [T \cdot m / A]) \frac{((125A)(1.0 \times 10^{-2})(\sin 90^\circ))}{(1.2m)^2} = 8.7 \times 10^{-8} [T]$$

b) En el punto P2 la dirección de  $\vec{B}$  apunta hacia adentro de la página en la figura, por lo tanto:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \sin\phi}{r^2} = (10^{-7} [T \cdot m / A]) \frac{((125A)(1.0 \times 10^{-2})(\sin 30^\circ))}{(1.2m)^2} = 4.3 \times 10^{-8} [T]$$

El campo producido por un conductor fino por el que circula una corriente es la integral de esta expresión sobre la longitud del conductor.

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{Id\vec{l} \times \vec{r}}{r^2}$$

$$\vec{r} = \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \left[ \frac{N \cdot s}{C^2} \right] = 4\pi \times 10^{-7} \left[ \frac{Wb}{A \cdot m} \right] = 4\pi \times 10^{-7} \frac{T \cdot m}{A}$$

El campo magnético  $\vec{B}$  a una distancia  $r$  de un conductor largo y recto por el que circula una corriente  $I$  tiene una magnitud  $B$ :

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

(conductor largo el recto por el que circula corriente)

$r$  = radio de la circunferencia

Ejemplo:

Por un conductor largo y recto circula una corriente de 100 [A]. ¿A qué distancia del conductor el campo magnético producido por la corriente es igual en magnitud al campo magnético terrestre (aproximadamente  $0.5 \times 10^{-4}$  [T])?

Solución:

Empleando la ecuación:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Despejamos r:

$$r = \frac{\mu_0 I}{2\pi B} = \frac{(4\pi \times 10^{-7} [T \cdot m / A])(100 [A])}{(2\pi)(0.5 \times 10^{-4} [T])} = 0.4 [m]$$

**Nota:** A distancias más pequeñas, el campo se vuelve más intenso.

Las líneas de campo magnético son circunferencias coaxiales con el cable, cuya dirección está dada por la regla de la mano derecha.

La fuerza de interacción por unidad de longitud, entre dos conductores largos paralelos con corrientes I e I' tiene una magnitud:

$$\frac{F}{L} = \frac{\mu_0 I I'}{2\pi r}$$

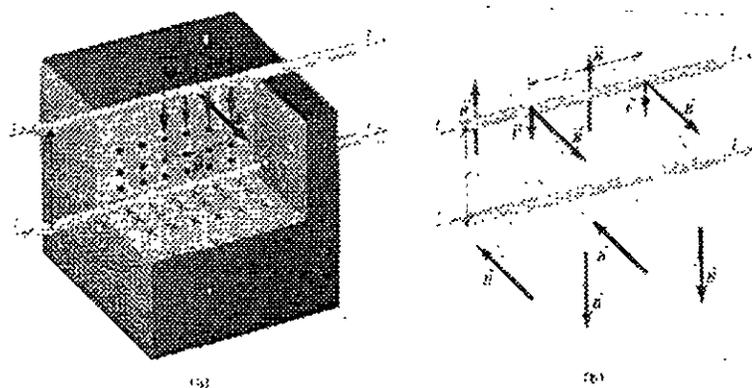


Figura 5. Los conductores paralelos por los que circulan corrientes en la misma direcci3n se atraen entre s3. En los diagramas se muestra la fuerza ejercida sobre el conductor superior por el campo magn3tico producido por la corriente del conductor inferior.

La definici3n del ampere se basa en esta relaci3n. Las corrientes paralelas se atraen si llevan la misma direcci3n y se repelen si llevan direcciones contrarias

### Ejemplo:

*Dos cables superconductores rectos y paralelos entre s3, separados por una distancia de 4,5 mm, llevan corrientes iguales de 15000 [A] en sentido contrario. Debemos preocuparnos por la resistencia mec3nica de sus cables?*

### Soluci3n:

Debido a que las corrientes van en direcciones opuestas los conductores se repelen. La fuerza por unidad de longitud es:

$$\frac{F}{L} = \frac{\mu_0 I I'}{2\pi r} = \frac{(4\pi \times 10^{-7} \text{ [T} \cdot \text{m/A]}) (15000 \text{ [A]})^2}{(2\pi)(4.5 \times 10^{-3} \text{ [m]})} = 1.0 \times 10^4 \text{ [N/m]}$$

Esta es una fuerza grande, de más de una tonelada por metro, de modo que la resistencia mecánica de los conductores y del material aislante debe tomarse en cuenta.

Las corrientes y las separaciones de esta magnitud se utilizan en el lector imanes superconductores en los aceleradores de partículas, y el análisis de tensión mecánica es una parte muy importante del proceso de diseño.

### Definición oficial del Ampere en el SI:

*Un ampere es aquella corriente invariable que si está presente en cada uno de dos conductores paralelos de longitud finita y separados una distancia de un metro en el vacío, ocasiona que cada conductor experimente una fuerza exactamente de  $2 \times 10^{-7}$  [N m].*

El campo magnético producido por una espira conductora circular de radio "a", por la que circula una corriente I, a una distancia x desde su centro a largo de su eje, tiene una magnitud.

$$B_x = \frac{\mu_0 I a^2}{2(x^2 + a^2)^{3/2}} \quad (\text{espiral circular}).$$

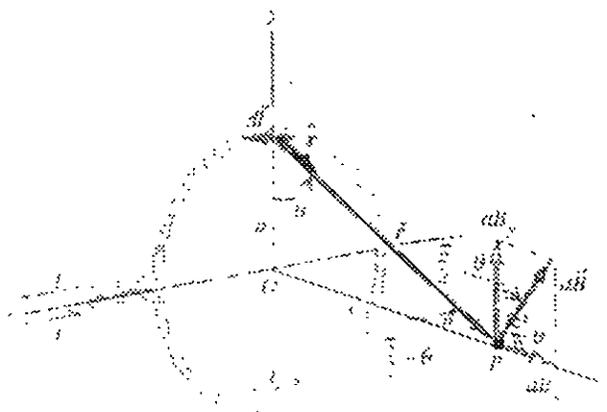


Figura 6. Campo magnético de una espira circular. La corriente en el segmento  $d\vec{l}$  ocasiona el campo  $d\vec{B}$  que se encuentra en el plano xy. Las corrientes en otros elementos  $d\vec{l}$  producen diferentes  $d\vec{B}$  con diferentes componentes perpendiculares al eje x ; la suma de éstas es cero. Las componentes x de los elementos de campo se combinan para dar el campo total  $\vec{B}$  en el punto P

Para N espiras esta expresión se multiplica por N. En el centro de las espiras, donde  $x = 0$ .

$$B_x = \frac{\mu_0 NI}{2a} \quad (\text{centro de que N espiras circulares})$$

## IV.6 Concepto y definición de flujo magnético.

El flujo magnético  $\phi$  a través de una área se define como:

$$\Phi_B = \int B_{\perp} dA = \int B \cos\phi dA = \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

La unidad del flujo magnético en el sistema internacional es el Weber

$$[1 \text{ Wb} = 1 \text{ T m}^2]$$

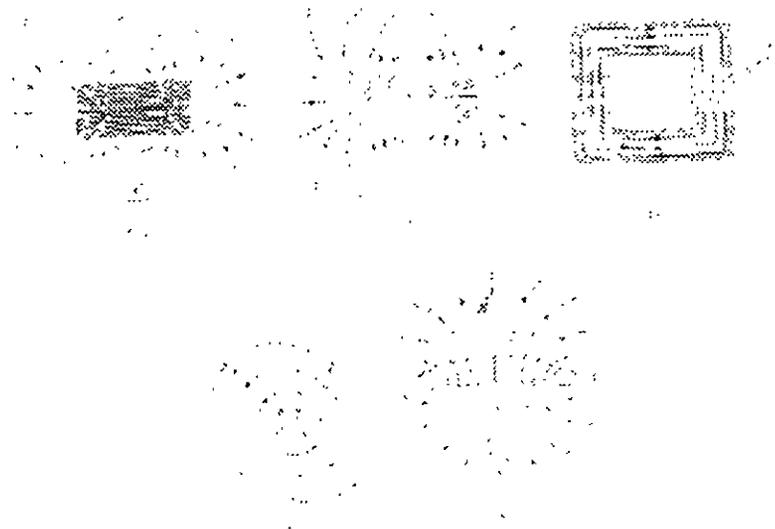


Figura 7. Líneas de campo magnético en un plano que pasa por el centro de (a) un imán permanente, (b) una bobina cilíndrica, (c) un electroimán con núcleo de hierro, (d) Líneas de campo magnético en un plano perpendicular a un cable largo recto por el que circula corriente, (e) Líneas de campo magnético en un plano que contiene al eje de una espira circular de corriente.

El flujo magnético es un escalar.

En el caso especial en que  $\vec{B}$  es uniforme sobre una superficie plana con área total  $A$ ,  $B_{\perp}$  y  $\phi$  son iguales en todos los puntos de la superficie:

$$\Phi_B = B_{\perp} A = BA \cos \phi$$

Si resulta que  $\vec{B}$  es perpendicular a la superficie se reduce a:

$$\Phi_B = BA$$

## IV. 7 Principio de operación del motor de corriente directa.

En un motor, un momento de torsión magnético actúa sobre un conductor por el que circula una corriente, y la energía eléctrica se convierte en energía mecánica. En un tipo sencillo de motor de corriente directa es el que se muestra la siguiente figura:

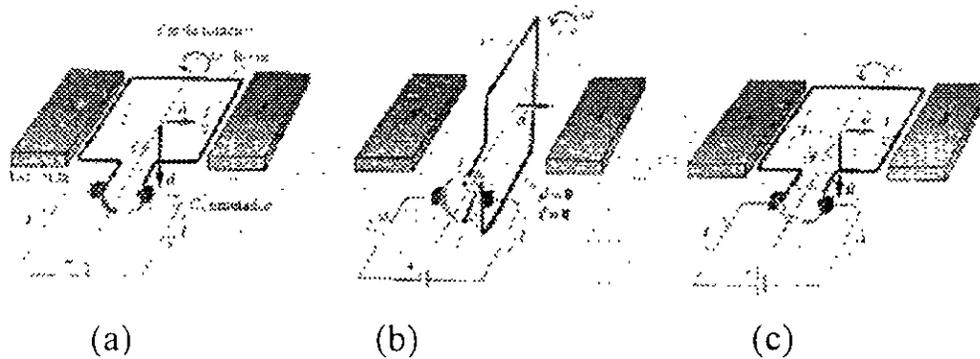


Figura 8. Diagrama esquemático de un motor de corriente directa.

*La parte móvil del motor es el rotor, que consiste en un segmento de cable con la forma de una espira con los extremos abiertos que puede girar libremente alrededor de un eje.*

Los extremos de los cables del rotor están unidos a *segmentos conductores circulares forman un conmutador.*

En la figura (a) cada uno de los dos segmentos del conmutador hace contacto con uno de los terminales, o *escobillas*, de un circuito y externo que incluye una fuente de fem. *Esto hace que fluya una corriente por un lado de rotor, y salga por el otro.*

Por consiguiente, el rotor es una espira de corriente con un momento magnético  $\vec{\mu}$ .

El rotor se encuentra entre los polos opuestos de un imán permanente, de modo que hay un campo magnético  $\vec{B}$  que *ejerce un momento de torsión*  $\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$  sobre el rotor.

Para la orientación del rotor mostrada en la figura (a), el momento de torsión hace que gire en sentido antihorario, en la dirección en que se alineará  $\vec{\mu}$  con  $\vec{B}$ .

En la Figura (b), el rotor ha girado un ángulo recto con respecto a la orientación que tienen la figura (a). Si la corriente a través del rotor fuera constante, éste estaría ahora en su orientación de equilibrio; simplemente oscilaría alrededor de esta orientación.

Pero aquí es donde entra en juego el conmutador, cada escobilla está ahora en contacto con los dos segmentos del conmutador. No hay diferencia de potencial entre los conmutadores, **así que ese instante no fluye corriente por el rotor y el momento magnético es cero.**

El rotor sigue girando en sentido antihorario debido a su inercia, y la corriente fluye de nuevo como en la figura (c).

Pero ahora la corriente entra por el lado contrario al igual que la salida que en la figura (a)

Cuando la dirección de la corriente se ha invertido con respecto al rotor, éste en los  $180^\circ$  y el momento magnético  $\vec{\mu}$  está en la misma dirección respecto al campo magnético.

Por tanto, el momento de torsión magnético  $\vec{\tau}$  apunta en la misma dirección que en la figura (c) y (a).

Gracias al conmutador, la corriente se invierte cada  $180^\circ$ , de modo que el momento de torsión apunta siempre en la dirección tal que el rotor gira en sentido antihorario

Cuando el motor ha adquirido rapidez, y el momento de torsión magnético medio queda equilibrado por un momento de torsión que se opone al movimiento, debido a la resistencia del aire, la fricción en los apoyos del rotor y la fricción entre el conmutador y las escobillas.

El motor simple observado en la figura tiene sólo una vuelta de cable en su rotor. En los motores reales, el rotor tiene muchas vueltas, esto aumenta el momento magnético y el momento de torsión, de modo que el motor puede hacer girar cargas mayores.

También se puede aumentar el momento de torsión utilizando un campo magnético más intenso, por eso muchos diseños de motores utilizan electroimanes en lugar de un imán permanente.

Debido a que un motor convierte energía eléctrica en energía mecánica o en trabajo, requiere un suministro de energía eléctrica. Si la diferencia de potencial entre sus terminales es  $V_{ab}$  y la corriente es  $I$ , entonces la potencia que se le suministra es  $P=V_{ab}I$ .

Incluso si las bobinas del motor tienen resistencia despreciable, debe haber una diferencia de potencial entre las terminales si se quiere que  $P$  sea diferente de cero. Esta diferencia de potencial proviene principalmente de las fuerzas magnéticas ejercidas sobre las corrientes en los conductores del rotor cuando giran en el campo magnético.

La fuerza electromotriz asociada  $\mathcal{E}$  se conoce como fem inducida, también se conoce como fuerza contra electromotriz porque su sentido es opuesto al de la corriente.

En un motor en serie el rotor está conectado en serie con el electroimán que produce el campo magnético; en un motor en derivación están conectados en paralelo.

En un motor en serie con resistencia interna  $r$ ,  $V_{ab}$  es mayor que  $\mathcal{E}$  y la diferencia es la caída de potencial  $Ir$  a través de la resistencia interna. Es decir:

$$V_{ab} = \mathcal{E} + Ir$$

Debido a que la fuerza magnética es proporcional a la velocidad,  $\mathcal{E}$  no es constante sino proporcional a la rapidez de rotación del rotor.