FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA

CURSOS INSTITUCIONALES

DIPLOMADO EN DISEÑO Y ADAPTACIÓN DE ANTENAS

MOD. III. CAMPOS Y ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

DEL 08 AL 16 DE MAYO DEL 2003

APUNTES GENERALES

CI - 067

Instructor: Ing. Federico Espinoza Sandoval
SECRETARÍA DE MARINA
MAYO DEL 2003

Palacio de Minería Calle de Tacuba 5 Primer piso Deleg. Cuauhtémoc 06000 México, D.F. APDO. Postal M-2285
Telefonos 5512-8955 5512-5121 5521-7335 5521-1987 Fax 5510-0573 5521-4021 AL 25

1 Fuentes electromagnéticas, fuerzas y campos

1.1 Carga y densidad de carga

Las partículas cargadas elementales son el electrón y el protón, los cuales tinene cargas que son iguales en magnitud pero opuestos en signo. La carga del electrón es e. donde:

$$e = -1.60210x10^{-19}\,[coulomb]$$

De ésta expresión, vemos que toma muchos electrones $1\,[coulomb]$ de carga

$$1coulomb = \frac{1x10^{19}}{1.60210} = 6.24180762x10^{-18}electrones$$

Los electrones pueden ser considerados "cargas puntuales", por lo tanto poseen una carga finita dentro de un volúmen pequeño.
Las cargas producen efectos que son un función no solamente de ¿Cuánta carga está presente en una región? sino también ¿Cómo esta distribuído?. Debido a esto a menudo es necesario describir a las distribuciones de cargas sobre una base punto por punto. Para carga distribuída a travez de un volúmen. Definimos a la densidad de carga volumétrica como:

$$\rho\nu = \lim_{\Delta\nu \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta\nu}\left[\frac{coulombs}{m^3}\right] \tag{1}$$

Donde como se muestra en la Fig. 1. a., ΔQ es la carga total contenida dentro del volúmen $\Delta\nu$.
Aunque exista siempre algún espacio entre las cargas en una distribución de carga volumétrica las distancias

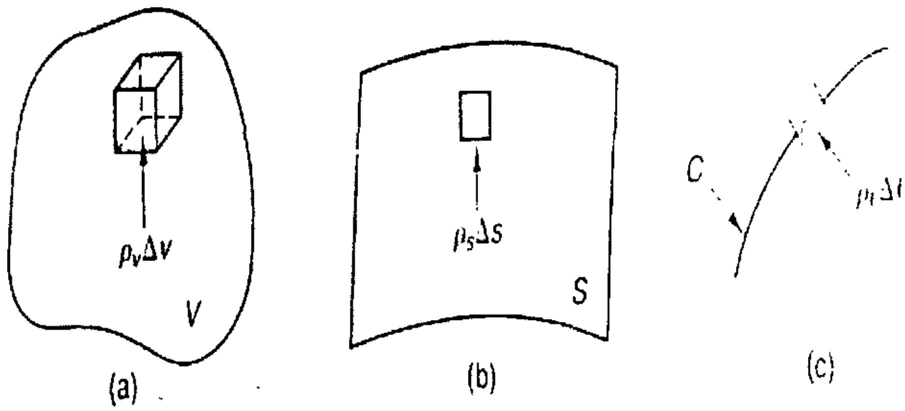


Figure 1: Geometrías usadas para definir distribuciones de carga: a)volumétricas, b)superficial y c)lineal

usualmente son bastante pequeñas tal que la carga pueda ser considerada una distribución contínua.

Existen muchas situaciones en la cual, la carga está confinada a una capa delgada. Por ejemplo, cuando la carga está depositada sobre un conductor, y es siempre dibujado para la superficie.

En casos semejantes a esto, conviene modelar a éstas distribuciones de cargas como: distribuciones de cargas superficiales, donde la carga es supuesta estar dentro de una profundidad infinitesimal. Refiriéndonos a la Fig. 1. b, definimos a la densidad de carga superficial como:

$$\rho s =_{\Delta s \to 0} \lim \frac{\Delta Q}{\Delta s} \left[\frac{coulombs}{m^e} \right] \tag{2}$$

Donde ΔQ es la carga contenida dentro de la superficie Δs.

Existen también situaciones de donde la carga está confinada a líneas con pequeñas secciones transversales, tales como en un alambre o el haz electrónico en un tubo de rayos catódicos (TRC). Por lo tanto la densidad de carga volumétrica para éstas distribuciones son extremadamente grandes dentro de las línas y cero en el exterior. Por lo que es más conveniente considerar a éstas distribuciones como: distribuciones de carga lineales donde la carga es supuesta estar dentro de una sección transversal infinitesimal a lo largo de una línea. Refiriéndonos a la Fig. 1. C. La densidad de carga es:

$$\rho\ell =_{\Delta s \to 0} \lim \frac{\Delta Q}{\Delta \ell} \left[\frac{coulombs}{m}\right] \tag{3}$$

Donde ΔQes la carga que está dentro de la longitud $\Delta \ell$. La carga total contenida dentro de un volúmen, superficie o línea puede ser determinado en términos de las densidades volumétricas, superficiales o lineales por integración de las ecuaciones, 1, 2, y 3 respectivamente, dándonos:

$$Q = \int_{\nu} \rho\nu d\nu \qquad (\rho s = \rho\ell = 0 \text{ en el interior de } \nu) \tag{4}$$

$$Q = \int_{s} \rho s ds \qquad (\rho\ell = 0 \text{ interior de } s) \tag{5}$$

$$Q = \int_{c} \rho\ell d\ell \tag{6}$$

1.2 Corriente y densidad de corriente

La corriente es carga en movimiento. La corriente puede especificarse en dos tipos de cantidades: escalar o un vector.
La cantidad escalar llamada corriente escalar (o simplemente corriente) como es empleado en los análisis de circuitos.

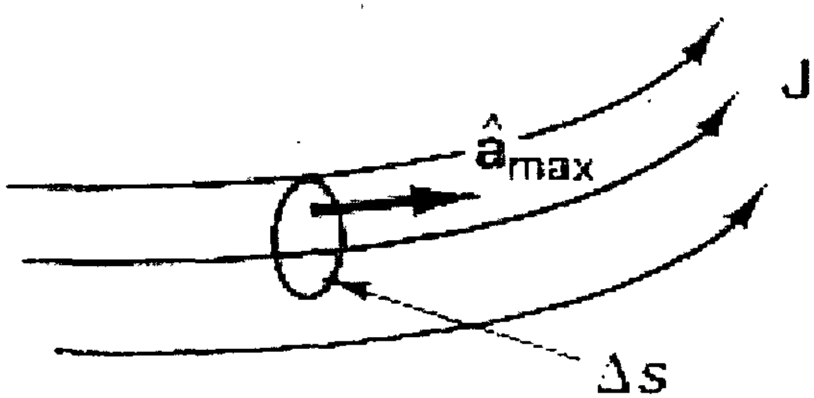


Figure 2: Torrente de líneas de corriente huyendo más allá a una sup. pequeña

$$\overrightarrow{J} \equiv lím_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta s} |_{\max} \hat{a}_{\max} \left[\frac{Ampere}{m^2} \right]$$

Donde $\hat{a}$ max es perpendicular a la superficie Δs y apunta en la dirección que maximiza a la corriente ΔI fluyendo a traves de Δs.
Para ver como la densidad de corriente $\overrightarrow{J}$ y la corriente I están relacionadas, consideremos a la situación mostrado en la Fig. 3. Aquí, una corriente $\overrightarrow{J}$ está fluyendo hacia a fuera a traves de s por la suma de las contribuciones de I que pasan a traves de cada elemento de superficie

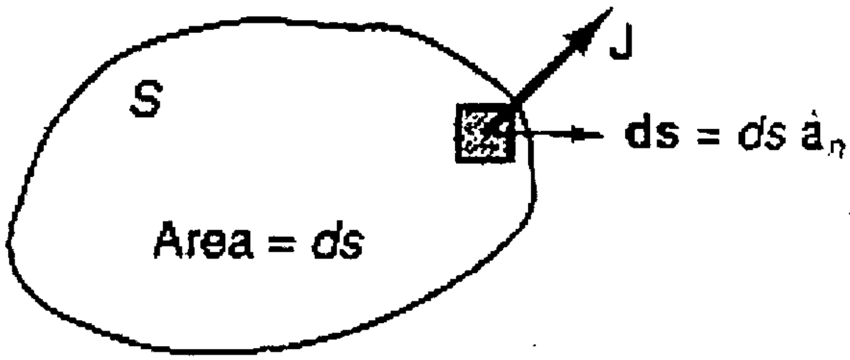


Figure 3: Geometría para la determinación de la corriente pasando a traves de una superficie

diferencial. $d\overrightarrow{s} = ds\hat{a}n$, donde $\hat{a}n$ apunta hacia afuera desde la fuente. Cuando $\overrightarrow{J}$ y $d\overrightarrow{s}$ son perpendiculares $\overrightarrow{J}$ no tiene la tendencia a fluir a traves de la superficie, así dI es cero. De otra manera, cuando $\overrightarrow{J}$ y $d\overrightarrow{s}$ son paralelos, $dI = Jds$. Entonces podemos escribir:

$$di = \overrightarrow{J} \cdot d\overrightarrow{s}$$

Integrando dI sobre toda la superficie de s, obtenemos la corriente total I pasando a través de esta superficie:

$$i = \int_s \overrightarrow{J} \cdot d\overrightarrow{s} \; [Amperes]$$

Cuando s es una superficie cerrada, $d\overrightarrow{s}$ es escogida por convención para apuntar hacia el volumen encerrado, y en esta forma, I es definido como un flujo hacia afuera. Existen muchas situaciones en las cuales una corriente fluye dentro de una capa delgada. Por ejemplo, en las altas frecuencias, la corriente fluye dentro de una capa delgada bajo la superficie de un conductor. Podemos modelar a éstas distribuciones de corriente como: distribuciones de corrientes superficiales, donde la corriente, la densidad de corriente, en otra forma es una cantidad vectorial que especifica ambas características: a la magnitud y dirección del flujo de la corriente en cualquie punto.

1.3 Corriente escalar

La corriente escalar I es definido como la razón en la cual la carga fluye a traves de una superficie especificada en una unidad de tiempo t.

$$I \cong \frac{dQ}{dt}\left[\frac{coulum}{seg}\text{ó Ampere}\right]$$

En ésta definición, dQ es la carga que pasa a través de una superficie s en el tiempo dt. El signo de dQ depende sobre la dirección de este flujo con respecto a la superficie normal $\hat{a}$; positivo carga moviendose a través de s en la dirección indicada por $\hat{a}n$ constituye una corriente positiva, conforme la carga negativa está pasando a traves de s en el sentido opuesto. En los circuitos, la corriente escalar es indicado sobre los diagramas mostrando el valor numérico de I, junto con una flecha que define la dirección de la corriente positiva. como un ejemplo consideremos a los iones positivos y negativos fluyendo en el tubo mostrado en la Fig. 4. Aquí ambos iones positivos y negativos imparten contribuciones positivas para la corriente I, por lo tanto: $\mu + \cdot \hat{a}n > 0$ y $\mu\_ \cdot \hat{a}n < 0$

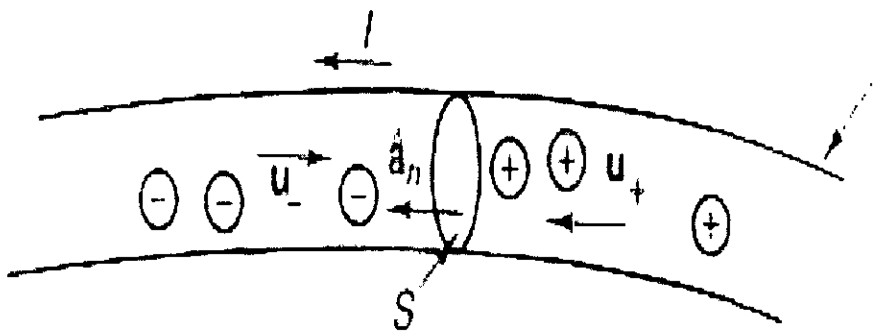


Figure 4: Portadoras de cargas positivas y negativas fluyendo en un tubo

1.4 Densidad de corriente

La descripción para una corriente usando la corriente escalar es aceptable cuando la dirección del flujo es obvio. tal como cuando la corriente fluye sobre los alambres en un circuito de baja frecuencia. Sin embargo existen muchas veces cuando la dirección de la corriente y su magnitud varía a través de un volúmen. En éstos casos es mejor representar a la corriente como: densidad de corriente volumétrica, la cual es una cantidad vectorial. La Figura 2 muestra a varias torrentes de líneas que indican las trayectorias de movimientos de cargas. es supuesta a fluir dentro de una capa de profundidad infinitesimal. Refiriéndonos a la Figua 5, a, definimos a la densidad de corriente superficial como:

$$\overrightarrow{Js} \equiv lím_{\Delta\ell \to 0} \frac{\Delta I}{\Delta \ell} \Big|_{max}^{\hat{a}\, max} \left[\frac{A}{m}\right]$$

De la fórmula escrita arriba $\Delta\ell$ es medido perpendicu-

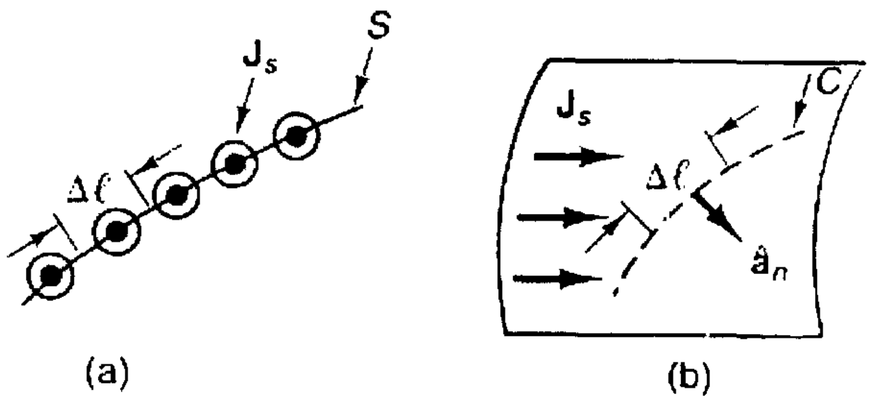


Figure 5: Una corriente superficial : a) vista sección tansversal. b) vista desde arriba

lar a la dirección $\hat{a}\,\mathrm{max}$ que maximiza la razón $\Delta I/\Delta\ell$. En ésta figura, ambos $\hat{a}\,\mathrm{max}$ y $\overrightarrow{Js}$ están dirigidas hacia afuera del papel.

La corriente escalar que fluye pasando a traves de un contorno arbitrario c sobre una superficie puede ser encontrado por la notación como la corriente fluyendo que pasa el segmento en la Fig. 5.b es

$$\Delta I = \overrightarrow{Js} \cdot \Delta\ell\hat{a}_n$$

Donde $\hat{a}n$ está en el plano de la corriente superficial y perpendicular a la trayectoria diferencial $\Delta\ell$. Integrando sobre el contorno entero c, encontramos que la corriente total que atravieza el contorno c es:

$$I = \int_s \overrightarrow{Js} \cdot \hat{a}_n d\ell\,[A]$$

1.5 La ley de Conservación de la carga

Ahora que ya hemos discutido los conceptos de corriente y de carga, estamos listos para introducir la ley de conservación de la carga. Este principio constituye uno de los postulados básicos sobre la cual toda la Teoría Electromagnética se cimenta. $As + 0$ como todas las leyes experimentales, están basados en la observación y es aceptada como cierta, debido a que no existe evidencia contradictoria ha sido encontrado.
La ley de conservación de la carga.- "Establece que la carga contenida en un sistema cerrado permanece constante por todo el tiempo".
Un sistema cerrado es un sistema en el cual (la carga) no puede entrar o salir. Un corolario de esta ley establece que si cada carga total contenida dentro de una región cambia, debe ser acompañada por un flujo de corriente dentro o afuera de la región.
Para ver que restringe a ésta ley se coloca sobre la carga y las distribuciones de corriente, considerando a la correinte I pasando hacia afuera a través de la superficie cerrada s mostrado en la Fig. 6.

$$I = \oint_s \overrightarrow{J} \cdot d\overrightarrow{s} = \frac{dQsalida}{dt}$$

Donde dQ salida es la carga pasando hacia afuera a traves de s en el tiempo dt. De acuerdo a la ley de conservación de la carga, $dQsalida$ no puede ser creada espontaneamente en s, sino más bien debe venir desde dentro del volúmen v que esta limitado por la superficie cerrada s. Esto significa que la carga total Q encerrada dentro

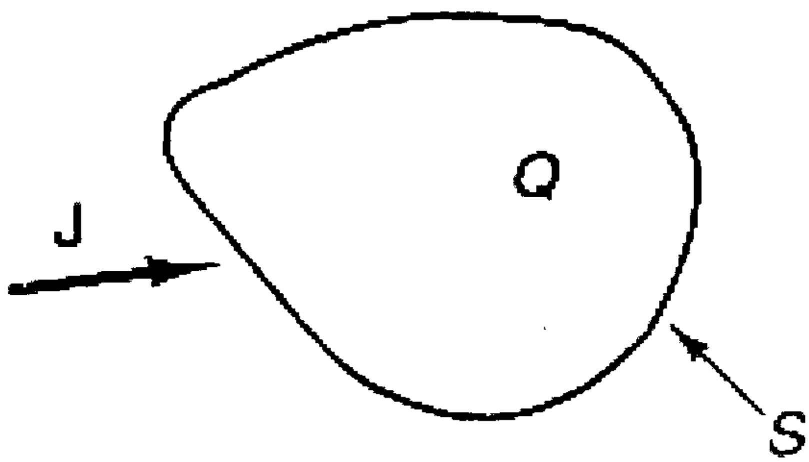


Figure 6· Geometría para la derivación de la ecuación de continuidad

del volúmen v, debe disminuir en exactamente la misma razón en la cual la carga pasa hacia afuera a traves de s. En ésta forma

$$\frac{dQsalida}{dt} = -\frac{dQencerrada}{dt}$$

sustituyendo esta ecuación, en la anterior se obtendrá:

$$\oint_s \overrightarrow{J} \cdot d\overrightarrow{s} = -\frac{dQenc}{dt}$$

Esta expresión es llamada. La ecuación de continuidad, debido a que establece que la carga contenida en una región es constante cuando no fluyen corrientes hacia afuera de la región.

Podemos derivar una forma puntual de la ecuación de continuidad recordando que la carga interior s puede ser expresada como una integral de volúmen de la densidad de carga. En ésta forma:

$$\oint_s \overrightarrow{j} \cdot d\overrightarrow{s} = -\frac{dQenc}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_\nu \rho\nu d\nu$$

Donde ν es el volúmen encerrado por s. Si ν es constante en el tiempo, el orden de la diferenciación e integración puede ser intercambiado, dando

$$\oint_s \overrightarrow{J} \cdot d\overrightarrow{s} = -\int_\nu \frac{\partial\rho\nu}{dt} d\nu$$

Enseguida usando el Teorema de la Divergencia, para escribir la integral doble en el lado izquiedo como una integral de volumen, dándonos:

$$\oint_s \overrightarrow{J} \cdot d\overrightarrow{s} = \int_\nu \nabla \cdot \overrightarrow{J} d\nu = -\int_\nu \frac{\partial\rho\nu}{dt} d\nu$$

Finalmente, ésta expresión es valida para todos los volúmenes v. conforme $v \rightarrow 0$. En ésta forma, los integrandos de ambas integrales de volumen debe ser igual en todos los puntos, dando:

$$\nabla \cdot \overrightarrow{J} = -\frac{\partial\rho\nu}{\partial t}$$

Esta expresión es llamada la forma diferncial (o puntual) de la ecuación de continuidad.

1.6 Leyes de Fuerza. Dos acciones en una distancia

La primera de las leyes que fue propuesta vio los efectos como interacciones punto a punto de cargas y corrientes y son llamadas leyes de acción en una distancia. La más simple de las leyes es la de coulomb.- La cual predice, la fuerza entre dos cargas, y la ley de Ampere que predice, la fuerza entre dos corrientes., Se verá la primera ley.

1.6.1 Ley de fuerza de Coulomb

Esta ley en su forma más simple, describe la fuerza entre dos cargas puntuales estacionarias suspendidas en el espacio libre. la Fig. 7 representa a dos cargas puntuales Q_1 y Q_2 localizados en r_1 y r_2 respectivamente.
La ley de Columb establece que la fuerza ejercida sobre una carga puntual Q_1, por alguna otra carga Q_2 es:

$\overrightarrow{F_1} = \frac{1}{4\pi\epsilon 0}\frac{Q_1 Q_2}{R^2}\hat{a}_{21}\,[N]$ cargas en el espacio libre.

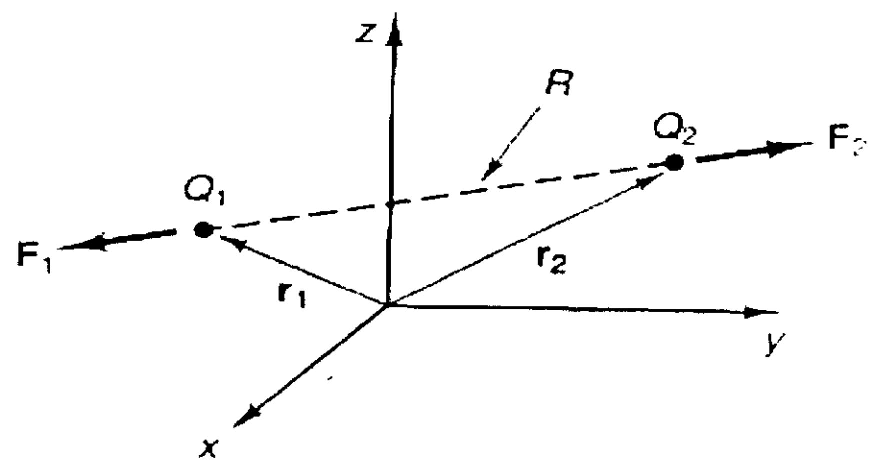


Figure 7: Dos cargas puntuales ejerciendo fuerzas entre si

En donde R es la distancia de $Q_1 a Q_2$, $\hat{a}_{21}$ es el vector unitario dirigido de Q_2 a Q_1

$\epsilon_0 =$ Constante de proporcionalidad llamada permitividad del espacio libre

$\epsilon_0 = 8.854x10^{-12} \approx \frac{10^{-9}}{36\pi}\left[\frac{c^2}{N_0}m^2 ó\ \frac{F}{m}\right]$

En la ecuación, parte superior $\overrightarrow{F_1}$ esta dirigido a lo largo de la línea de unión extendiéndose de Q_1 a Q_2. La magnitud de $\overrightarrow{F_1}$ es proporcional a 1 producto de las magnitudes de las dos cargas y es inversamente proporcional

al cuadrado de la distancia entre ellas.
El signo del producto Q_1Q_2 determine si la fuerza es atractiva o respulsiva, así signo(-) indicara fuera de atración y signo(+) fuerza de repulsión o sea cargas diferentes se atraen y cargas semejantes se repelen, así $\hat{a}_{21} = -\hat{a}_{21}$ y $\overrightarrow{F_1} = -\overrightarrow{F_2}$. En ésta forma la ley de Coulumb es consistente con la Tercera Ley de newton de la Mecánica, la cual establece que cada acción se tiene una reacción igual y opuesta.
La ley de Coulomb, puede expresarse en términos de los vectores de posición de las dos cargas, en la forma siguiente:

$$\hat{a}_{21} = \frac{\overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{r_2}}{|\overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{r_2}|} \quad , \quad R = |\overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{r_2}| \qquad \text{Entonces}$$

$$\overrightarrow{F_1} = \frac{Q_1Q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{r_2}}{|\overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{r_2}|^3} \qquad [N]$$

(cargas en el espacio libre)

1.6.2 Ley de Fuerza de Ampere

La ley de fuerza de Ampere describe la fuerza ejercida por una corriente sobre alguna otra, cuando ambas corrientes son invariantes en el tiempo. Tales corrientes son llamadas corrientes estacionarias. Cuando las corrientes estacionarias fluyen en lazos completos, ninguna carga neta es transportada, y la densidad de carga es constante en donde quiera, (por ejem. la estática) en el tiempo.
La Fig. 8 muestra a dos filamentos de longitudes diferenciales $d\ell_1$ y $d\ell_2$ que llevan corrientes estacionarias I_1 e I_2 respectivamente, tales filamentos deben ser secciones de circuitos completos a lazos, considerando a éstas secciones carta.

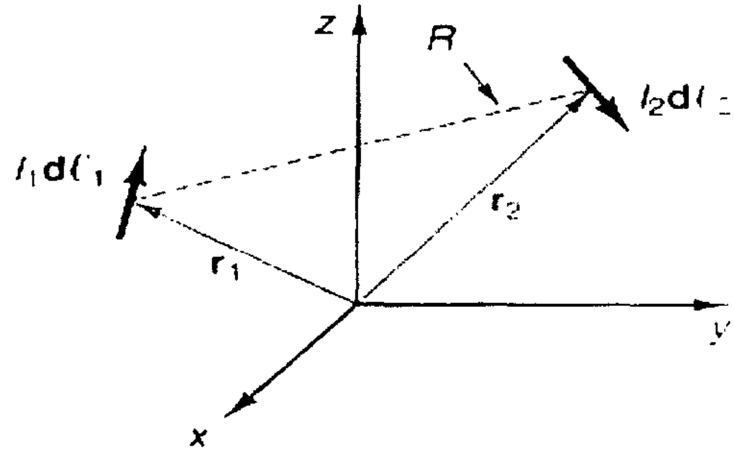


Figure 8: Dos filamentos de corrientes ejerciéndose fuerzas entre si

A travez de una serie de esperímentos Andre Marie Ampera(1775-1836) dedujo que en el espacio libre, el segmento de corriente $I_2 d\ell_2$ ejerce una fuerza sobre el segmento de corriente $I_1 d\ell_1$ que está dada por:
$\overrightarrow{dF_1} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 d\ell_1 x(I_2 d\ell_2 x\hat{a}_{21})}{R^2} [N]$ (corrientes en el espacio libre)
Donde el vector unitario $\hat{a}_{21}$ apunta de segmeto a 2 al segmento 1, y R es la distancia entre los segmentos. No es la constante física de proporcionalidad llamada la permebilidad del espacio libre

$$\mu_0 = 4\pi x 10^{-7} \left[N/A^2 \text{ó } H/m\right]$$

Haciendo uso de la siguiente ec. de productos: $Ax\,(BxC) = (A\cdot C)B - (A\cdot B)C$

$$\overrightarrow{dF_1} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \frac{(d\ell_1 \cdot \hat{a}_{21})\, d\ell_2 - (d\ell_1 \cdot d\ell_2)\,\hat{a}_{21}}{R^2}$$

$$\overrightarrow{F_1} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint \ell_1 \oint \ell_2 \frac{d\ell_1 x\,(d\ell_2 x\hat{a}_{21})}{R^2}$$

Comparando ésta ecuación de la ley de Fuerza de Ampere con la Ley de Fuerza de Coulumb, observamos que las fuerzas entre los filamentos de corrientes infinitesimales, se tienen alguna similitud es con las fuerzas entre cargas puntuales. En particular, ambas fuerzas varían inversamente con el cuadradode la distacia R entre las fuentes, además ambas fuerzas son proporcionales a los productos de los valores de las fuentes, Q_1 y q_2 para las cargas eI_1I_2 para las corriente. Sin embargo mientras la fuerza ejecida por una carga estática sobre alguna otra está siempre dirigida a lo largo de la línea entre ellos, la dirección de la fuerza ejércida por un filamento de corriente estacionaria sobre alguna otra depende de sus orientaciones relativas entre si, como muestra la Figura).

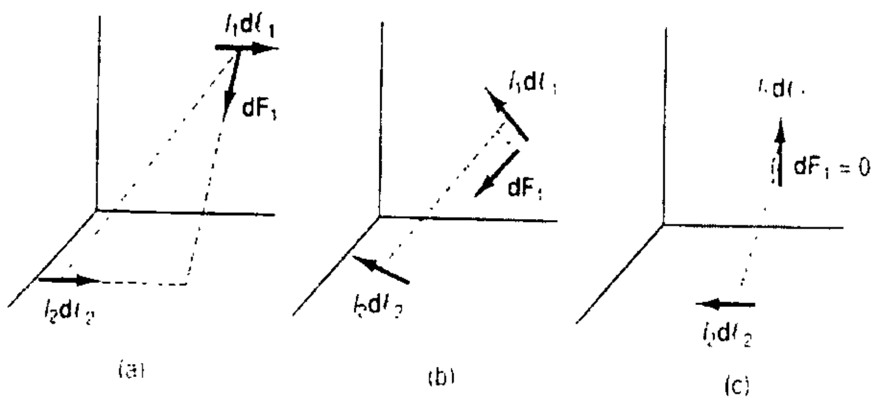


Figure 9: Descripción gráfica de la fuerza entre filamentos de corrientes. a)Filamentos paralelos b)Filamentos No.1 es perpendicular a la línea conectando a los filamentos c)Filamentos No.1 es perpendicular a la línea conectado a los filamentos y los filamentos son perpendiculares entre si

1.6.3 Ley de Fuerza de Lorentz y el Concepto de Electromagnetismo

Fue Michael Faraday el primero que propuso una Teoría de Campo del Electromagnetismo, especuló que "alguna cosa" se propaga hacia afuera desde la cargas y las corrientes manifistandose ellos mismos como dos campos vectoriales; La intensidad de campo electrico $\overrightarrow{E}$ y la densidad de Flujo magnético $\overrightarrow{B}$, siendo una proposición muy valiente en los años de 1830, sin embargo ninguno de estos científicos anteriores había especulado sobre la existencia de fotones, los cuales conocemos ahora como los agentes responsables éstos campos.

El punto de arranque de la Teoría de campo del Electromagnetismo es la Ley de Fuerza de Lorentz, la cual establece "Que la fuerza electromagnética total o actuando sobre un punto (carga de prueba) de valor Q puede ser siempre expresado como"

$$\overrightarrow{F} = Q\left(\overrightarrow{E} + \overrightarrow{U}x\overrightarrow{B}\right)[N]$$

En donde: $\overrightarrow{E}$ = Es la intensidad de campo electrico en Q. $\left[\frac{v}{m}\right]$
$\overrightarrow{B}$; es la densidad de flujo magnético en Q, $\left[\frac{N\cdot S}{C\cdot m}\right] \cong \left[\frac{webbers}{m^2}\right]$ ó $[Testa]$ $\overrightarrow{v}$; Es la velocidad de Q con respecto al marco de referencia del Laboratorio.
La ley de fuerza de Lorentz fue nominada en honor de Hendrik Lorentz (1853-1928) aunque contiene contribuciones de Joseph Thompson y Oliver Heaviside. Semejante a la ley de Coulomb y de Ampere están basadas en evidencias experimentales: Pero difiere de las leyes de fuerza de acción en una distancia en que la fuerza sobre una carga está descrito en términos de los campos $\overrightarrow{E}$

y $\overrightarrow{B}$ generados por otras fuentes cuyas localizaciones y magnitudes no necesitan ser conocidas. La ley de fuerza de Lorents es válidas únicamene para fuentes invariantes con el tiempo.
De acuerdo a la ley de Lorentz, existen dos clases distintas de fuerzas que otras corrientes y cargas pueden ejercer sobre una carga de prueba. La primera es la Fuerza magnética definida como:

$$\overrightarrow{Fe} = Q\overrightarrow{E} \quad [N]$$

Fuerza que depende solamente sobre la magnitud de Q de la carga de prueba y la magnitud de la dirección del campo eléctrico $\overrightarrow{E}$. También su direccióne es siempre colineal con la dirección de $\overrightarrow{E}$. La otra fuerza pridicha por la ley de Lorentz es llamada la fuerza magnética definida como:

$$\overrightarrow{Fm} = Q\overrightarrow{u}x\overrightarrow{B} \quad [N]$$

La fuerza magnetica es proporcional a al magnitud de Q de la carga de prueba.
Estas fuerzas difieren sin embargo en que la fuerza eléctrica es independiente de la velocidad de la carga de prueba, mientras que la fuerza magnética está presente únicamente cuando la carga de prueba está en movimiento. También, la dirección de la fuerza magnética es perpendicular a ambas la dirección de la velocidad de la carga de prueba $\overrightarrow{\nu}$ y la dirección de la magnitud de la densidad de flujo $\overrightarrow{B}$.
Aunque las particulas cargadas pueden experimentar ambas fuerzas electricas y magnéticas, únicamente las fuerzas eléctricas pueden trabajar sobre una carga y cambian su

energía cinética. Esta es debido a que la fuerza magnética es siempre perpendicular al movimiento de la carga. Las fuerzas magnéticas pueden sin embargo, cambiar la dirección de una carga en movimiento.
De las ecuaciones anteriores podemos escribir:

$$\overrightarrow{E} = \frac{\overrightarrow{Fe}}{Q}\left[\frac{N}{c} \text{ó } \frac{v}{m}\right]$$

y que

$$\overrightarrow{E} = \lim_{Q \to 0} \frac{\overrightarrow{Fe}}{Q}$$

$$\overrightarrow{Fm} x \overrightarrow{\nu} = Q\left(\overrightarrow{\nu} x \overrightarrow{B}\right) x \overrightarrow{\nu} = Q\overrightarrow{B}\left|\nu\right|^2 - Q\overrightarrow{\nu}\left(\overrightarrow{\nu} \cdot \overrightarrow{B}\right)$$

En donde se ha usado una prop. producto
Para resolver de ésta ecuación para $\overrightarrow{B}$, necesitamos escoger "la velocidad de prueba $\overrightarrow{\nu}$ tal que $\overrightarrow{\nu} \cdot \overrightarrow{B} = 0$. esta eleción de la dirección de $\overrightarrow{\nu}$, maximiza a $\overrightarrow{Fm}$ por lo tanto $\overrightarrow{\nu} x \overrightarrow{B}$, es maximizado cuando $\overrightarrow{\nu} x \overrightarrow{B}$ son perpendiculares entre (si). Por lo que resolviendo la ecuación anterior para $\overrightarrow{B}$ bajo esta condición se obtendrá:

$$\overrightarrow{B} = \frac{1}{Q}\left[\frac{\overrightarrow{Fm} x \overrightarrow{u}}{\left|u\right|^2}\right]_{\max}$$

Por lo tanto, el propósito de la carga de prueba Q es medir al campo producido por las otras fuentes sin afectarlas. tomando ahora el límite de esta ecuación:

$$\overrightarrow{B} =_{Q \to 0} \lim \left\{\frac{1}{Q}\left[\frac{\overrightarrow{Fm} x \overrightarrow{\nu}}{\left|\nu\right|^2}\right] \max\right\} \quad \left[\frac{N \cdot s}{c \cdot m} \text{ó } Tesla\right]$$

Cuando las cargas están moviéndose. se hace conveniente expresar a la componente magnética de la fuerza ejercida dobre ellos en téminos de corriente de prueba, más bien que una carga de prueba. La Figura 10 muestra a un alambre delgado que lleva una corriente de prueba I. En donde podemos calcular la fuerza $d\overrightarrow{Fm}$ que actuá sobre el segmento

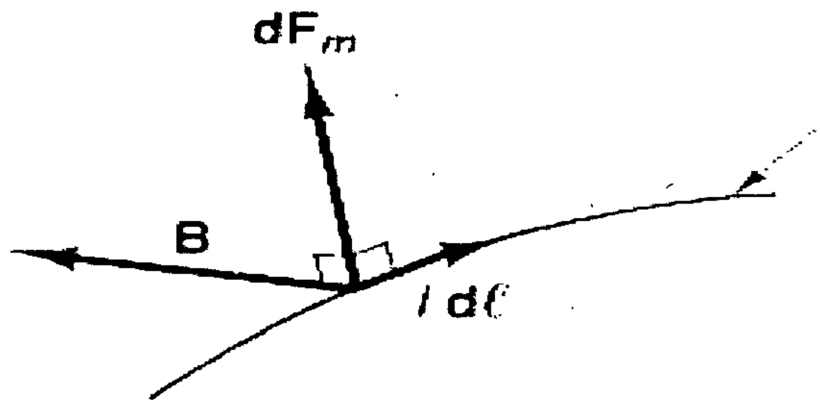


Figure 10: La acción del campo magnético sobre un elemento de corriente

diferencial $Id\ell$ por.

$$Id\overrightarrow{\ell} = \frac{dQ}{dt}d\overrightarrow{\ell} = \frac{dQ}{dt}\overrightarrow{\nu}dt = dQ\overrightarrow{\nu}$$

Donde dQ es la carga contenida dentro de la longitud $d\ell$. Sustituyendo esta ecuación en la de la $\overrightarrow{Fm} = Q\overrightarrow{\nu}x\overrightarrow{B}$. en contramos que:

$$d\overrightarrow{Fm} = Id\overrightarrow{\ell}x\overrightarrow{B}$$

En forma similar, las fuerzas magnéticas actuando sobre la superficie diferencial y elementos de volúmen son:

$$d\overrightarrow{Fm} = \overrightarrow{J}sx\overrightarrow{B}ds$$

y

$$d\overrightarrow{Fm} = \overrightarrow{J}x\overrightarrow{B}$$

La fuerza total $d\overrightarrow{F}$ actuando sobre un volúmen diferencial $d\nu$ en una distribución de carga en movimiento es igual a la suma de las fuerzas eléctricas y magnéticas.

$$d\overrightarrow{F} = d\overrightarrow{Fe} + d\overrightarrow{Fm} = dQ\overrightarrow{E} + \overrightarrow{J}\,x\,\overrightarrow{B}\,d\nu$$

Si reemplazamos dQ con $\rho\nu d\nu$, ésta expresión se convierte en:

$$d\overrightarrow{F} = \left(\rho\nu\overrightarrow{E} + \overrightarrow{J}\,x\,\overrightarrow{b}\right)d\nu$$

Para las distribuciones de carga lineales y de superficie. esta ecuaión se convierte en:

$$d\overrightarrow{F} = \left(\rho s\overrightarrow{E} + \overrightarrow{Js}x\overrightarrow{B}\right)ds$$

y

$$d\overrightarrow{F} = \left(\rho\ell\overrightarrow{E}d\ell + Id\,\overrightarrow{\ell}\,x\overrightarrow{B}\right)$$

respectivamente.

1.7 Campo Eléctrico

El campo eléctrico $\overrightarrow{E}$ es definido como la fuerza por unidad de carga de prueba.

$$\overrightarrow{E} = \frac{\overrightarrow{F}}{q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Q}{r^2}\hat{a}r \quad \left[\frac{N}{C}ó\ \frac{v}{m}\right]$$

La Figura . 11 muestra una carga de prueba q y una carga puntual Q en el origen.
La figura de arriba muestra a un volúmen v que contiene a una distribución volúmetrica de carga con densidad de carga $\rho\nu$. La carga que está contenida dentro del elemento de volúmen diferencial $d\nu$[1] es $dQ = \rho\nu d\nu$; donde

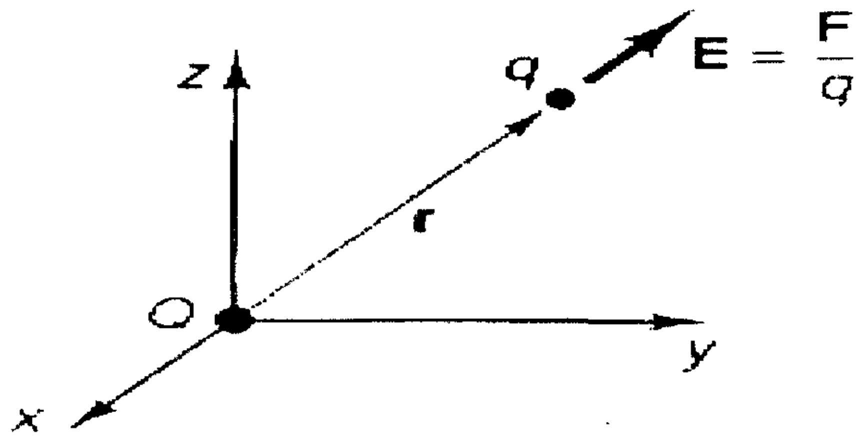


Figure 11: Geometría para la determinación del campo eléctrico E generado por una carga puntual en el origen

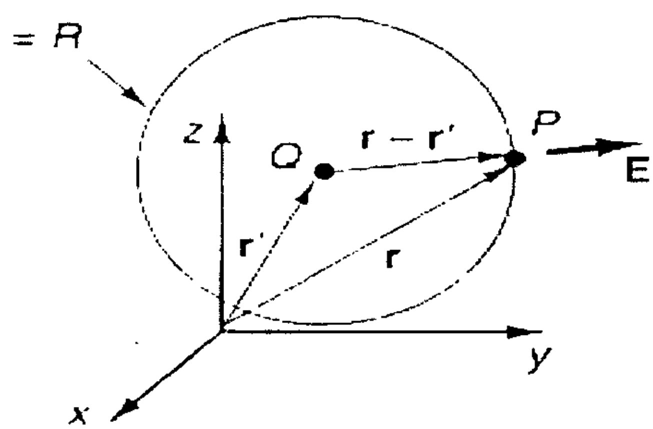


Figure 12: Geometría para la determinación del campo eléctrico $\overrightarrow{E}$ generado por una carga puntual localizado en un punto arbitario

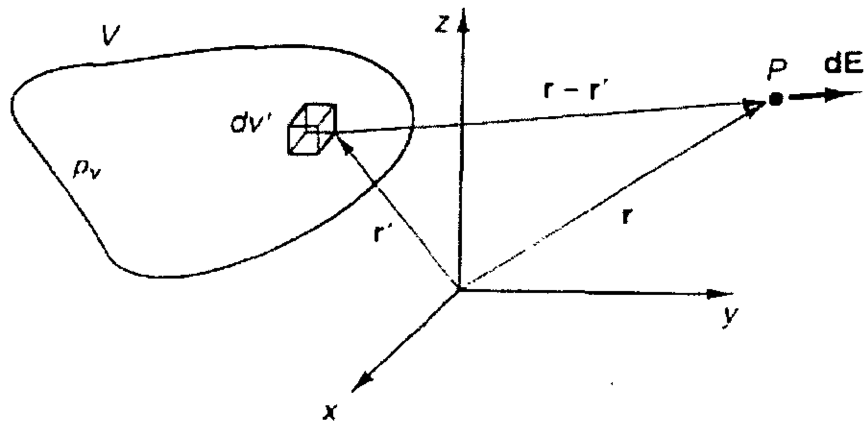


Figure 13: Geometría para la determinación del campo eléctrico $\overrightarrow{E}$ de una distribución de carga volumétrica

$\rho\nu$ es la densidad de carga dentro del volumen diferencial. El campo $d\overrightarrow{E}$ que ésta carga genera en el campo puntual pues

$$d\overrightarrow{E} = \frac{\rho\nu d\nu^1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}^1)}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}^1|^3}\left[\frac{v}{m}\right]$$

donde $\overrightarrow{r}^1$ es el vector de posición que se presenta la posición del volumen diferencial $d\nu^1$ y $\overrightarrow{r}$ es el vector de posición ρ. Por lo tanto $d\overrightarrow{E}$ es proporcional a la densidad de carga $\rho\nu$ y ε_0 es constante. Usando el principio de superposición que establece que la respuesta total en un medio lineal debido al número de fuentes es igual a la suma de las respuestas debido a cada fuente individualmente. Integrando las contribuciones de cada fuente individualmente. Integrando las contribuciones de cada elemento de carga diferencial $\rho\nu d\nu^1$ obtenemos:

Para distribución de carga volumétrica

$$\overrightarrow{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \rho\nu \frac{\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}^1}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}^1|^3} d\nu^1 \quad \left[\frac{v}{m}\right]$$

Para distribución de carga superficial

$$\overrightarrow{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_s \rho s \frac{\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}^1}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}^1|} ds^1 \quad \left[\frac{v}{m}\right]$$

Para distribución de carga lineal

$$\overrightarrow{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_\ell \rho\ell \frac{\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}^1}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}^1|} d\ell^1 \quad \left[\frac{v}{m}\right]$$

1.8 Cálculo de campo usando la Ley de Gauss

La ley de Gauss establece que "El Flujo neto pasando a través de una superficie cerrada es proporcional a la carga Q encerrada por aquella superficie"

$$\oint_s \overrightarrow{E} \cdot D\overrightarrow{S} = \frac{Q \text{ encerrada}}{\varepsilon_0}$$

La superficie S usado cuando evaluamos la ley de Gauss es llamado superficie Gaussiano. Por lo tanto la ley de Gauss es una ecuación explícita para Q enc. Un uso común de la ley Gauss es encontrar la carga total contenida dentro de alguna superficie encerrada.

1.9 Voltaje y Potencial eléctrico

Arrancaremos nuestra discusión de potencial eléctrico recordando que "El campo eléctrico $\overrightarrow{E}$ generado por una distribución de carga estática, tiene cero rotacional en todos los puntos del espacio

$$\nabla x \overrightarrow{E} = 0$$

En forma integral ésta expresión, puede escribirse como:

$$\oint_c \overrightarrow{E} \cdot d\overrightarrow{\ell} = 0$$

Ambas ecuaciones establecen que el campo electrostático $\overrightarrow{E}$ es un campo vectorial conservativo, por lo tanto, cualquier campo vectorial conservativo puede ser representado en cualquier punto como el gradiente de una función escalar. o sea:

$$\overrightarrow{E} = -\nabla v$$

Donde v es llamado función potencial eléctrico. $[volts]$
El signo menos es escogido en ésta expresión tal que $\overrightarrow{E}$ es un campo vectorial conservativo, por lo tanto, cualquier campo vectorial conservativo puede ser representado en cualquier punto como el gradiente de una funciónescalar. o sea:

$$\overrightarrow{E} = -\nabla V$$

Donde v es llamado función petencial eléctrico. $[volts]$.
El signo menos es escogido en ésta expresión tal que $\overrightarrow{E}$ siempre apunta hacia valores decrecientes de v.
Podemos desarrollar una interpretación física de la función potencial eléctrica integrando ésta última ecuación entre dos puntos. Tomando el producto punto de ambos lados con un vector desplazamiento diferencial $d\overrightarrow{\ell}$ e integranodo a lo largo de la trayectoria entre dos puntos Pa y Pb y obtenemos:

$$-\int_b^a \overrightarrow{E} \cdot d\overrightarrow{\ell} = \int_b^a \nabla v \cdot d\overrightarrow{\ell} = \int_b^a dv = Va - Vb$$

La integral de línea en el lado izquierdo de ésta ecuación es definida como el voltaje entre los puntos Pa y Pb y es expresado por el símbolo Vab

$$Vab \equiv - \int_b^a \overrightarrow{E} \cdot d\overrightarrow{\ell} = \int_a^b \overrightarrow{E} \cdot D\overrightarrow{\ell}$$

(campos electrostáticos y variantes con el tiempo). Esta definición es válida tanto para campos electrostáticos y variantes con el tiempo. Vab es igual a la diferencia de potencial de los potenciales en los puntos extremos. Así el término Voltaje y Diferencia de potencial son intercambiables para los campos electrostáticos. Esto significa que el voltaje entre dos puntos en el campo eletrostático es indpendiente de la trayectoria de integración escogida entre los puntos extremos.
"El voltaje entre dos puntos es una medida del trabajo necesario para mover una carga entre dos puntos". Para demostrar esto consideremos dos puntos Pa y Pv mostrado en la Figura 14. También mostraremos dos trayectorias conduciendo desde el punto Pa al punto Pb. la fuerza actuando sobre una carga de prueba Q
es $\overrightarrow{F} = Q\overrightarrow{E}$, así el trabajo por unidad de carga hecha por el campo sobre la carga cuando la movemos desde Pa a Pv es:

$$\frac{-Wab}{Q} = \int_a^b \overrightarrow{E} \cdot d\overrightarrow{\ell} = Vab$$

Usando este resultado podemos ofrecer la siguiente interpretación de los voltajes entre los dos puntos.
"El voltaje Vab entre dos puntos es el trabajo por unidad de carga o carga unitaria hecha por el campo eléctrico, cuando una carga de prueba positiva es movida desde Pa a Pb a lo largo de una trayectoria dada.

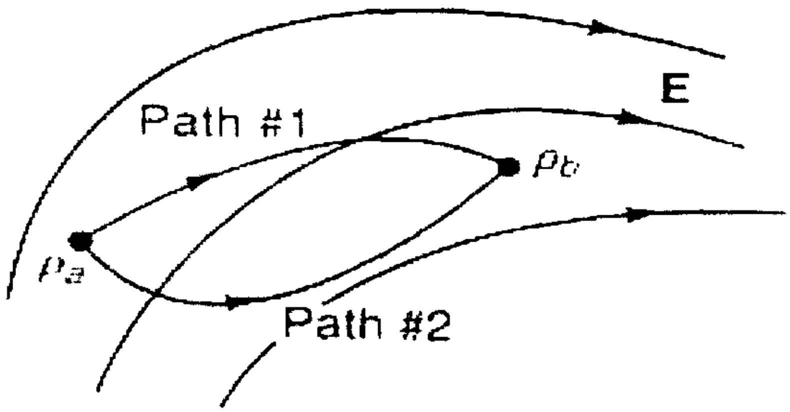


Figure 14. Dos diferentes trayectorias con puntos extremos comunes en un campo electrostático $\overrightarrow{E}$

Es importante especificar que los voltajes con el signo correcto, por convención, la diferencia de potencial Vab es indicado denotando un signo "+" en el primer punto (Pa) y un signo "-" en el segundo punto Pv. Por lo tanto ésta notación claramente indica que v es el voltaje entre los puntos "+" y "-"(como en el análisis de circuitos).
Ha sido definido el potencial eléctrico v en términos de $\overrightarrow{E}$, pero también es posible derivar una expresión para V en términos de la distribución de carga puntual y enseguida generalizaremos ésta expresión para un distribución de carga arbitraria.
La Figura 15 muestra a una carga puntual Q y dos puntos a y b localizados a distancias radiales Ra y Rb de Q, respectivamente.
La diferencia de potencial Vab entre estos puntos es:

$$Vab = -\int_{b}^{a} \overrightarrow{E} \cdot d\overrightarrow{\ell}$$

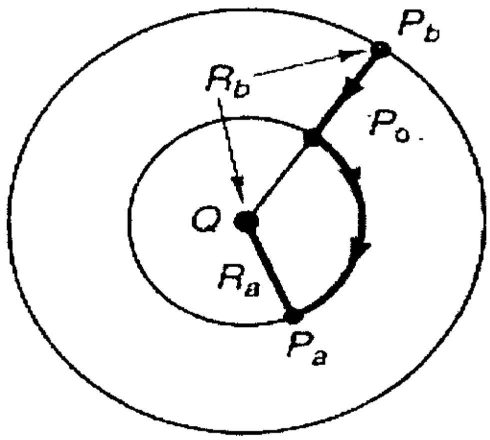


Figure 15: Geometría para la determinación de la diferencia de potencial entre dos puntos. debido al campo electrico$\overrightarrow{E}$ de una carga puntual

La trayectoria más simple entre los puntos mostrada en la figura , es desde Pb, a Po, a Pa. La contribución para Vab a lo largo de ésta porción de la trayectoria es cero. En ésta forma, usando el campo$\overrightarrow{E}$ de una carga puntual, podemos escribir.

$$Vab = -\int_{Rb}^{Ra} \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \frac{Q}{R^2} \hat{a}_R d_R \hat{a}_R = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} \quad \left[\frac{1}{Ra} - \frac{1}{Rb}\right]$$

Donde el vector unitario $\hat{a}_R$ apunta hacia afuera desde Q. Si escogemos a Rb sea infinito se obtendrá la siguiente expresión para el potencial v en una distancia radical R desde una carga puntual Q, referido al infinito.

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} \qquad [V]$$

De ésta expresión. vemos que el potencial crece conforme uno se apoxima a una crga puntual positiva.

Podemos generalizar ésta última ecuación. para encontrar la función potencial generada por una distribución de carga arbitraria. En primer lugar, para una colección de N cargas puntuales, encntramos:

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}\sum_{k=1}^{N}\frac{Qk}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}k|}$$

Donde $\overrightarrow{r}$ es el vector de posición que representa al campo puntual y r_k es el vector de posición de la carga Q_k.
A continuación para una distribución de carga volumétrica. dada por la siguiente Figura No. 16.

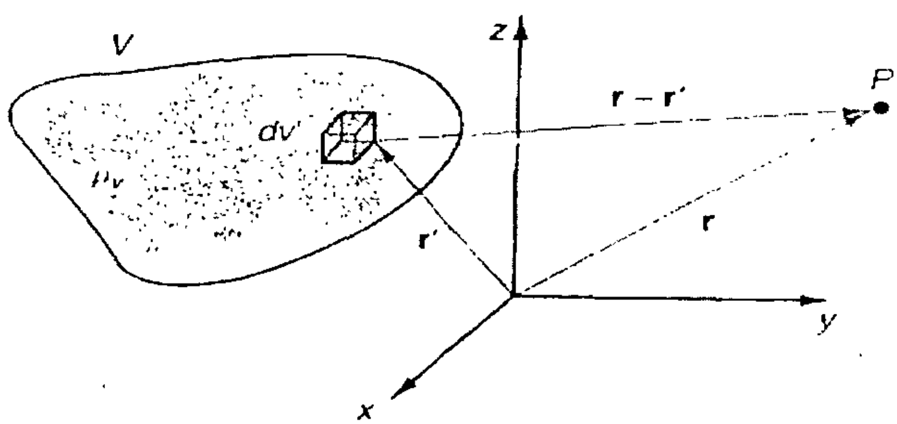


Figure 16: Geometría para la determinación del campo potencial generado por una distribución de carga arbitraria (en este caso volumétrica)

En donde, la contribución de la carga $\rho\nu d\nu^1$ en el volúmen $d\nu^1$ para el potencial en un punto arbitrario es:

$$d\nu = \frac{\rho\nu d\nu^1}{4\pi\varepsilon_0|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}^1|}$$

Donde $\overrightarrow{r}$ y $\overrightarrow{r}^1$ son vectores de posición del campo puntual y ρ y el diferencial de volúmen $d\nu^1$ respectivamente sumando las contribuciones de todas las cargas, obtenemos:

$$\nu = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_\nu \frac{\rho\nu d\nu^1}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}^1|} \qquad [\nu]$$

En esta integral, las variables primadas, son las variables de integración pesadas. También la integración se realiza únicamente en las localizaciones donde la carga está presente. Usando una secuencia similar de pasos, podemos encontrar a las siguientes funciones potenciales para las distribuciones de cargas lineales y superficiales, como se muestran en seguida

$$\nu = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_s \frac{\rho s ds^1}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}^1|} \qquad [\nu]$$

donde la distribución de carga superficial ρs está contenida en la superficie s y

$$\nu = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_\ell \frac{\rho\ell d\ell^1}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}^1|} \qquad [\nu]$$

donde la distribución de carga lineal $\rho\ell$ está contenida sobre el contorno ℓ.

FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA

CURSOS INSTITUCIONALES

DIPLOMADO EN DISEÑO Y ADAPTACIÓN DE ANTENAS

MOD. III. CAMPOS Y ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

DEL 08 AL 16 DE MAYO DEL 2003

ANEXOS PRIMERA PARTE

CI - 067

Instructor: Ing. Federico Espinoza Sandoval
SECRETARÍA DE MARINA
MAYO DEL 2003

La

Onda

Plana

Uniforme

Ing. Federico Espinoza Sandoval

LA ONDA PLANA UNIFORME

En este capítulo se aplicarán las ecuaciones de Maxwell para introducir la teoría fundamental del movimiento de la onda La onda plana uniforme representa una de las aplicaciones más sencillas de las ecuaciones de Maxwell, y sin embargo ilustra los principios que están detrás de la propagación de energía. Se introducirán la velocidad de propagación, la longitud de onda, la impedancia de onda, las constantes de fase y atenuación, así como el uso del teorema de Poynting para encontrar la densidad de potencia. Finalmente, se considerará la reflexión y transmisión de una onda plana uniforme en la frontera entre dos medios diferentes. El uso de la razón de onda estacionaria y la impedancia de entrada nos prepararán para considerar muchos de los problemas prácticos de la transmisión guiada de potencia e información, en el siguiente capítulo.

MOVIMIENTO DE LA ONDA EN EL ESPACIO LIBRE

Como se señaló en el análisis de las condiciones de frontera en el capítulo anterior, la solución de las ecuaciones de Maxwell sin la aplicación de algunas condiciones de frontera representa un tipo de problema muy especial. Aunque se restringe la atención a una solución en coordenadas cartesianas, puede parecer, aun entonces, que se están resolviendo varios problemas diferentes conforme se vayan considerando diversos casos especiales en este capítulo. Las soluciones se obtienen primero para las condiciones del espacio libre, luego para dieléctricos perfectos, después para dieléctricos disipativos y finalmente para buenos conductores. Se hace aprovechando las aproximaciones que se aplican en cada caso especial y dando énfasis a las características especiales de la propagación de onda en estos medios, aunque no es necesario usar tratamientos por separado, es posible (y no muy difícil) resolver el problema general de una vez por todas. El análisis de la propagación en el dieléctrico disipativo comienza con una consideración del caso general, pero luego se simplifica el análisis confinando la atención a dieléctricos con pérdidas relativamente pequeñas

Se considerara primero el movimiento de la onda en el espacio libre, las ecuaciones de Maxwell pueden escribirse en términos de **E** y **H** únicamente, de la siguiente manera

$$\boxed{\nabla \times \mathrm{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial t}} \tag{1}$$

$$\boxed{\nabla \times \mathrm{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial t}} \tag{2}$$

$$\boxed{\nabla \cdot \mathrm{E} = 0} \tag{3}$$

$$\boxed{\nabla \cdot \mathrm{H} = 0} \tag{4}$$

Ahora se verá, si es posible inferir el movimiento de la onda a partir de estas cuatro ecuaciones sin resolverlas realmente. La primera ecuación establece que si **E** está cambiando con el tiempo en algún punto, entonces **H** tiene rotacional en ese punto y puede considerarse como si formara un pequeño circuito cerrado que eslabona o circunda el campo **E** cambiante. También, si **E** cambia con el tiempo, entonces en general, también **H** cambiará con el tiempo, aunque no necesariamente de la misma manera. Después, a partir de la segunda ecuación, se observa que este campo **H** cambiante produce un campo eléctrico que forma pequeños circuitos cerrados sobre las líneas de **H**. Se tiene, ahora, una vez más un campo eléctrico cambiante, la hipótesis original, pero este campo está presente a una distancia pequeña del punto de la perturbación original. Se podría presuponer (correctamente) que la velocidad con la cual el efecto se propaga alejándose del punto original es la velocidad de la luz, sin embargo esto se debe verificar por medio de un análisis más cuantitativo de las ecuaciones de Maxwell.

Se escribirán primero las cuatro anteriores ecuaciones de Maxwell, para el caso especial de una variación senoidal respecto al tiempo (más estrictamente, *cosenoidal*). Esto se logra por medio de notación compleja y fasores. Dado el vector campo

$$\mathrm{E} = E_x \mathrm{a}_x$$

se supone que la componente E_x está dada como

$$E_x = E_{xyz} \cos(\omega t + \psi) \tag{5}$$

donde E_{xyz} es una función real de *x*, *y*, y *z*, y tal vez de ω pero no del tiempo y ψ es un ángulo de fase que puede ser tambien funcion de *x*, *y*, *z* y ω Haciendo uso de la identidad de Euler,

$$e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \operatorname{sen} \omega t$$

se tiene

$$E_x = \operatorname{Re} E_{xyz} e^{j(\omega t + \psi)} = \operatorname{Re} E_{xyz} e^{j\psi} e^{j\omega t} \tag{6}$$

donde **Re** significa que se toma la parte real de la cantidad que le sigue. Simplificando la nomenclatura con la omision de **Re** y suprimiendo $e^{j\omega t}$, la cantidad E_x de campo se convierte en un fasor, o una cantidad compleja, la cual se identifica usando un subindice *s*, E_{xs}. Entonces

$$E_{xs} = E_{xyz} e^{j\psi} \tag{7}$$

y

$$E_s = E_{xs} \mathrm{a}_x$$

Se puede considerar que la *s*, indica una cantidad del dominio de la frecuencia expresada como funcion de la frecuencia compleja *s*, aun cuando sólo se consideren aquellos casos en los cuales *s* es un imaginario puro, $s = j\omega$

Por ejemplo, se puede tomar $E_y = 100\cos(10^8 t - 0.5z + 30°)V/m$ y expresarlo como un fasor. Primero se recurre a la notación exponencial,

$$E_y = \mathrm{Re}[100e^{j(10^8 t - 0.5z + 30^\circ)}]$$

y luego eliminando **Re** y suprimiendo $e^{j10^8 t}$, se obtiene el fasor

$$E_{ys} = 100e^{-j0.5z + j30^\circ}$$

Nótese que E_y es real, pero E_{ys} en general es complejo. Nótese también que comúnmente se utiliza una nomenclatura mezclada para el ángulo. Esto es, -0.5z está en radianes, mientras que 30° está en grados.

Dado un componente escalar o un vector expresados como un fasor, se puede recobrar fácilmente la expresión en el dominio del tiempo. Por ejemplo, considérese el vector de intensidad de campo, identificado como un fasor por su subíndice s,

$$\mathbf{E}_s = 100\angle 30^\circ \mathbf{a}_x + 20\angle -50^\circ \mathbf{a}_y + 40\angle 210^\circ \mathbf{a}_z \qquad V/m$$

Supóngase que la frecuencia está especificada como 1 MHz. Se selecciona primero la notación exponencial para tener claridad matemática,

$$\mathbf{E}_s = 100e^{j30^\circ}\mathbf{a}_x + 20e^{-j50^\circ}\mathbf{a}_y + 40e^{j210^\circ}\mathbf{a}_z$$

Reinsertando el factor $e^{j\omega t}$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_s(t) &= (100e^{j30^\circ}\mathbf{a}_x + 20e^{-j50^\circ}\mathbf{a}_y + 40e^{j210^\circ}\mathbf{a}_z)e^{j2\pi 10^6 t} \\ &= 100e^{j(2\pi 10^6 t + 30^\circ)}\mathbf{a}_x + 20e^{j(2\pi 10^6 t - 50^\circ)}\mathbf{a}_y + 40e^{j(2\pi 10^6 t + 210^\circ)}\mathbf{a}_z \end{aligned}$$

Y tomando la parte real, se obtiene el vector real,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(t) &= 100\cos(2\pi 10^6 t + 30^\circ)\mathbf{a}_x + 20\cos(2\pi 10^6 t - 50^\circ)\mathbf{a}_y \\ &+ 40\cos(2\pi 10^6 t + 210^\circ)\mathbf{a}_z \, V/m \end{aligned}$$

Ninguna de las amplitudes o ángulos de fase en este ejemplo, están expresadas como funciones de x, y o z, pero si alguna lo estuviera el mismo procedimiento resulta efectivo. Por tanto, si $\mathbf{H}_s = 20e^{(0.1 - j20)z}\mathbf{a}_x$ A/m, entonces,

$$\mathbf{H}(t) = \mathrm{Re}[20e^{-0.1z}e^{-j20z}e^{j\omega t}]\mathbf{a}_x = 20e^{-0.1z}\cos(\omega t - 20z)\mathbf{a}_x \qquad A/m$$

Ahora, puesto que

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_x}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}[E_{x,z}\cos(\omega t + \psi)] = -\omega E_{x,z}\mathrm{sen}(\omega t + \psi) \\ &= \mathrm{Re}\, j\omega E_{xs}e^{j\omega t} \end{aligned}$$

Es evidente que tomar la derivada parcial de cualquier cantidad de campo con respecto al tiempo es equivalente a multiplicar el fasor correspondiente por $j\omega$ Por ejemplo, si

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = -\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\partial H_y}{\partial z}$$

la ecuación fasorial correspondiente es

$$j\omega E_{xs} = -\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\partial H_{ys}}{\partial z}$$

donde tanto E_{xs} como H_{ys} pueden ser cantidades complejas.

En seguida se aplicará esta notación a las ecuaciones de Maxwell. Entonces, dada la ecuacion

$$\nabla \times \mathrm{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial t}$$

la relación correspondiente en términos de vectores fasoriales es

$$\boxed{\nabla \times \mathrm{H}_s = j\omega\varepsilon_0 \mathrm{E}_s} \tag{8}$$

La ecuacion (8) y las tres ecuaciones

$$\boxed{\nabla \times \mathrm{E}_s = -j\omega\mu_0 \mathrm{H}_s} \tag{9}$$

$$\boxed{\nabla \cdot \mathrm{E}_s = 0} \tag{10}$$

$$\boxed{\nabla \cdot \mathrm{H}_s = 0} \tag{11}$$

son las cuatro ecuaciones de Maxwell en notación fasorial para una variación senoidal con el tiempo, en el espacio libre. Debe notarse que (10) y (11) no son relaciones independientes ya que se pueden obtener tomando la divergencia de (8) y (9), respectivamente.

El siguiente paso es obtener la forma de estado estable sinusoidal de la ecuación de la onda, paso que podria omitirse porque el sencillo problema que se va a resolver proporciona facilmente un solución simultánea de las cuatro ecuaciones anteriores. Sin embargo, la ecuación de onda es una ecuacion importante, y es un importante punto de partida para muchas investigaciones.

El método por el cual se obtiene la ecuación de la onda podria efectuarse en un solo renglon (con cuatro signos igual utilizando una hoja de papel mas ancha)

$$\nabla \times \nabla \times \mathrm{E}_s = \nabla(\nabla \cdot \mathrm{E}_s) - \nabla^2 \mathrm{E}_s = -j\omega\mu_0 \nabla \times \mathrm{H}_s$$
$$= \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 E_s = -\nabla^2 \mathrm{E}_s$$

puesto que $\nabla \cdot \mathrm{E}_s = 0$. Entonces:

$$\boxed{\nabla^2 \mathrm{E}_s = -\omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 \mathrm{E}_s} \tag{12}$$

Esta concisa ecuación de vectores fasoriales se conoce también como la ecuación vectorial de Helmholtz. Resulta bastante sobrecogedora cuando se desarrolla, aun en coordenadas cartesianas, puesto que resultan tres ecuaciones escalares fasoriales y con cuatro términos cada una. La componente x de (12), conservando la notación del operador del, viene a ser,

$$\nabla^2 E_{xs} = -\omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 E_{xs} \tag{13}$$

y el desarrollo del operador conduce a la ecuación diferencial parcial de segundo orden

$$\frac{\partial^2 E_{xs}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_{xs}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_{xs}}{\partial z^2} = -\omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 E_{xs} \tag{14}$$

Se intentará una solucion para (14) suponiendo que es posible una solución sencilla, en la cual E_{xs} no varia con x o y, de modo que las dos derivadas correspondientes son cero, lo que conduce a la ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{\partial^2 E_{xs}}{\partial z^2} = -\omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 E_{xs} \tag{15}$$

Por inspección, una solución de (15) seria,

$$E_{xs} = A e^{-j\omega z \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \tag{16}$$

Si se vuelve a incluir el factor $e^{j\omega t}$, y si se reduce a la forma trigonométrica al tomar la parte real,

$$E_x = A \cos[\omega(t - z\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0})]$$

donde el factor de amplitud arbitrario puede reemplazarse por E_{x0}, que es el valor de E_x en $z=0$, $t=0$

$$\boxed{E_x = E_{x0} \cos[\omega(t - z\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0})]} \tag{17}$$

El problema 1 al final del capitulo indica que

$$\boxed{E_x = E'_{x0} \cos[\omega(t + z\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0})]} \tag{18}$$

También se puede obtener a partir de una solución alternativa de la ecuación vectorial de Helmholtz

Antes de obtener cualquier otra componente del campo debe entenderse la naturaleza física de la naturaleza física de la única componente del campo eléctrico que se obtuvo en (17). Se ve que es una componente x, que puede describirse como dirigida hacia arriba en la superficie de una tierra plana. El radical $\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$ tiene el valor aproximado de $1/(3\times10^8)$ s/m, que es el recíproco de c, es decir de la velocidad de la luz en el espacio libre,

$$\boxed{c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = 2.998\times10^8 \cong 3\times10^8 \quad m/s}$$

Supóngase que el eje z está dirigido hacia el este y que se toma $z = 0$ en Chicago. Entonces, en Chicago el campo está dado por

$$E_x = E_{x0} \cos \omega t$$

la cual constituye una sencilla y común variación en el tiempo. Una carga libre (tal vez una antena receptora vertical) se acelera hacia arriba y hacia abajo por $\omega/2\pi$ veces por segundo. En Cleveland, cerca de 500 km al este, se encontraría

$$E_x = E_{x0} \cos\left[\omega\left(t - \frac{5\times10^5}{3\times10^8}\right)\right] = E_{x0} \cos[\omega(t - 0.00167)]$$

lo que indica que la intensidad del campo en Cleveland es igual al que existía en Chicago 0.00167s antes. Así, en términos generales, debe esperarse que el campo en cualquier punto z metros al este de Chicago se retrase con respecto al campo de referencia por $z\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$ o $z/(3\times10^8)s$.

Ahora, cambiando el punto de vista e inspeccionando el campo en cualquier parte en $t = 0$.

$$E_x = E_{x0} \cos(-\omega z\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}) = E_{x0} \cos\frac{\omega z}{c}$$

se encuentra una variación periódica con la distancia. El periodo de esta onda coseno medido a lo largo del eje z se le llama *longitud de onda* λ,

$$\frac{\omega\lambda}{c} = 2\pi$$

$$\boxed{\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3\times10^8}{f} \quad (espacio \quad libre)}$$

En cualquier punto, se encuentra una variación senoidal con el tiempo cuyo periodo es $T = 1/f$, en cualquier instante, se encuentra una variación senoidal con la distancia de periodo λ, en todo punto y en cualquier instante de tiempo. E_x está dirigido verticalmente. Ahora considérese la respuesta si ambos, tiempo y localización, varían. Ciertamente se puede decir que E_x no cambia si el ángulo de fase $\omega(t - z\sqrt{\mu_0\varepsilon_0})$ no cambia, o

$$\omega(t - z\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}) = \text{constante}$$

Tomando diferenciales se tiene.

$$\omega(dt - dz\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}) = 0$$

Por consiguiente,

$$\frac{dz}{dt} = v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} = c \tag{19}$$

A esta velocidad se le llama *velocidad de fase* puesto que define un punto de fase constante. Aquí la velocidad de fase es igual a la velocidad de la luz c, y el campo por tanto se está moviendo en la dirección z con la velocidad de la luz c. Cualquiera que sea el valor instantáneo del campo en $z = z_1$, $t = t_1$, tendrá un valor idéntico en z_2 en un tiempo posterior $(z_2 - z_1)/c$, y también tendrá el mismo valor en $t = t_2$ a una distancia $(t_2 - t_1)c$ más lejos hacia el este. El campo eléctrico está en movimiento y se le llama lógicamente *onda viajera.*

La ecuación (18), que también fue una solución de la ecuación de onda, obviamente representa una onda que viaja en la dirección $-z$, u oeste. Por conveniencia se está considerando en este momento, sólo la onda que viaja positivamente.

Considérense, ahora, las ecuaciones de Maxwell, de la (8) a la (11), para determinar la forma del campo H. Dado $\mathbf{E}_s$, $\mathbf{H}_s$ se obtiene más fácilmente a partir de (9).

$$\boxed{\nabla \times \mathrm{E}_s = -j\omega\mu_0 \mathrm{H}_s} \tag{9}$$

que se simplifica enormemente para el caso de una sola componente $\mathbf{E}_{xs}$, que varía sólo con z,

$$\frac{\partial E_{xs}}{\partial z} = -j\omega\mu_0 H_{ys}$$

Al aplicar (16) en E_{xs} con $A = E_{x0}$, se tiene

$$H_{ys} = \frac{1}{j\omega\mu_0} E_{x0}(-j\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0})e^{-j\omega z/c}$$

y

$$\boxed{H_y = E_{x0}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\cos\left[\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)\right]} \tag{20}$$

Se encuentra por lo tanto que esta componente vertical de E que viaja hacia el este, está acompañada por un campo magnético horizontal (norte - sur). Además, la razón de las intensidades de campo electrico y magnético dada por la razón de (17) entre (20),

$$\boxed{\frac{E_x}{H_y} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}} \tag{21}$$

es constante Usando el lenguaje de la teoria de circuitos, podría decirse que E_x y H_y están "en fase", pero esta relación en fase se refiere al espacio así como al tiempo. Se acostumbra dar esto por hecho en un problema de circuitos en el que la corriente $I_m \cos\omega t$ se supone que tiene su maximo de amplitud I_m a lo largo de todo un circuito completo en serie, en el instante t=0. Sin embargo, ambas expresiones, (17) y (20), muestran claramente que el máximo valor de E_x o H_y ocurre cuando $\omega(t - z/c)$ es un múltiplo entero de 2π rad; ninguno de los dos campos, es maximo en todas partes en el mismo instante. Entonces, es un hecho notable que la razón de estas dos componentes, que cambian en el espacio y el tiempo, sea una constante en todas partes

La raiz cuadrada de la razón de la permeabilidad y la permitividad se llama *impedancia intrinseca del medio* η (eta).

$$\boxed{\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}} \tag{22}$$

donde η tiene dimensiones de ohms. La impedancia intrinseca del espacio libre es

$$\boxed{\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \cong 377 \cong 120\pi \cdot \quad \Omega}$$

Esta onda se denomina *onda plana uniforme* porque sus valores son uniformes en otdas partes de cualquier plano, z = constante. Representa un flujo de energía en la dirección z positiva. Tanto el campo electrico como el campo magnético son perpendiculares a la dirección de propagación, es decir, ambos están contenidos en un plano que es transversal a la dirección de propagación; la onda plana uniforme es una onda *electromagnética transversal*, o una onda EMT

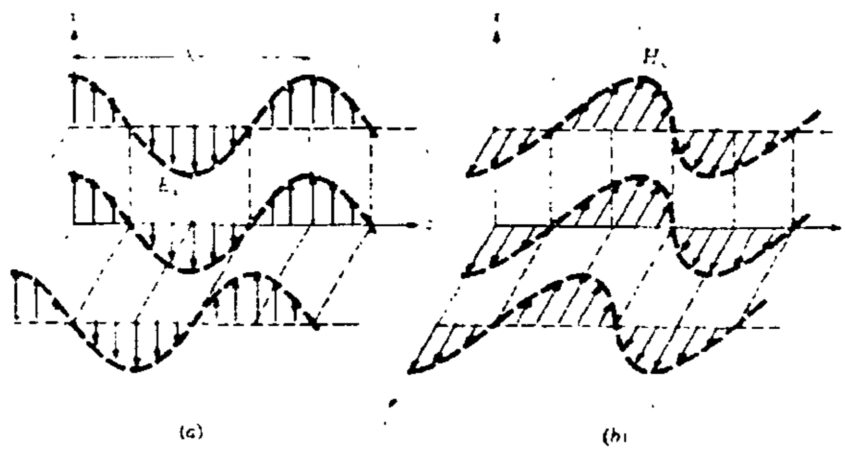


FIGURA 1

a) Las flechas representan los valores instantaneos de $E_{x0}\cos[\omega(t - z/c)]$ en t = O a lo largo de una línea arbitraria en el plano x = O paralela al eje z, y a lo largo de una linea arbitraria en el plano y = O paralela al eje z. *b)* Los valores correspondiese de H_y estan indicados Notese que E_x y H_y estan en fase en todo punto y para todo instante.

Una visualizacion de la forma en que estos campos varian en el espacio puede obtenerse a partir de la figura 1a y 1b La intensidad de campo eléctrico en la figura 1a se muestra para el tiempo t=0 y el valor instantáneo del campo es representado a lo largo de tres líneas, el eje z, y lineas arbitrarias paralelas al eje z en los planos x = O y y = O. Puesto que el campo es uniforme en planos perpendiculares al eje z, la variacion a lo largo de las tres lineas es la misma. Un ciclo completo de la variación ocurre en una longitud de onda λ. Los valores de H_y para los mismos tiempos y posiciones se muestran en la figura 1b.

No puede existir fisicamente una onda plana uniforme porque se extenderia al infinito en dos dimensiones por lo menos, y representaria una cantidad infinita de energía. Sin embargo, el campo distante de una antena de transmision, es esencialmente una onda plana uniforme en alguna region limitada. Una onda que alcanza una antena receptora en Cleveland, desde Chicago, se analiza como una onda plana uniforme en la vecindad de la antena; una señal de radar que incide en un blanco distante también es aproximadamente una onda plana uniforme.

Aunque se ha considerado solamente una onda que varía sinusoidalmente con el tiempo y el espacio, puede hacerse una combinación apropiada de soluciones a la ecuación de la onda para lograr una onda de cualquier forma deseada. La suma de un número infinito de armónicas por medio del uso de las series de Fourier puede producir una onda periódica de forma cuadrada o triangular tanto en espacio como en tiempo. Se pueden obtener ondas no periódicas a partir de la solución básica por métodos de la integral de Fourier. Finalmente, las ondas en otras direcciones se pueden incluir también, representando tal vez una onda que se propaga un poco al sur del este. Estos temas están comprendidos entre aquellos que sé incluyen en libros más avanzados sobre teoría electromagnética.

MOVIMIENTO DE LA ONDA EN DIELÉCTRICOS PERFECTOS

Se ampliará ahora el estudio analítico de la onda plana uniforme para incluir la propagación en un dieléctrico perfecto (sin pérdidas) de permitividad ε y permeabilidad μ. El medio es isotrópico y homogeneo, y la ecuación de onda es ahora

$$\nabla^2 \mathbf{E}_s = -\omega^2 \mu\varepsilon \mathbf{E}_s \tag{23}$$

Para E_{xs} se tiene

$$\frac{\partial^2 E_{xs}}{\partial z^2} = -\omega^2 \mu\varepsilon E_{xs} \tag{24}$$

En lugar de escribir inmediatamente abajo la solución de (24) se hará la hipótesis de una solución de forma más general y se empleará (24) para especificar valores apropiados de los parámetros utilizados. Se permitirá una atenuación exponencial, suponiendo que

$$E_x = E_{x0} e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z)$$

o su equivalente en notacion exponencial compleja,

$$E_{xs} = E_{x0} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z}$$

El factor exponencial real permite ahora considerar casos en los cuales la onda puede atenuarse a medida que se propaga en la direccion + z. a α se le *llama la constante de atenuación*. Dado que el medio es "sin perdidas" se tendrá que demostrar que α es cero. Notando que βz debe medirse en radianes (suponiendo β real), es logico que sea llamada la *constante de fase*. Es una medida del corrimiento de fase, en radianes por metro. En general, se combinan con frecuencia α y β en una *constante de propagacion* compleja γ (gamma).

$$\boxed{\gamma = \alpha + j\beta} \tag{25}$$

asi que se puede escribir

$$E_{xs} = E_{x0} e^{-\gamma z}$$

Al sustituir en (24)

$$\gamma^2 E_{x0} e^{-\gamma z} = -\omega^2 \mu\varepsilon E_{x0} e^{-\gamma z}$$

Así, se requiere que

$$\gamma^2 = -\omega^2 \mu\varepsilon$$

o

$$\boxed{\gamma = \pm j\omega\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

de aquí que

$$\boxed{\alpha = 0}$$

y

$$\boxed{\beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}} \tag{26}$$

donde se ha seleccionado la raíz que produce la propagación en la dirección del eje z positivo. Entonces

$$E_x = E_{x0}\cos(\omega t - \beta z)$$

y puede interpretarse esto como una onda que viaja en la dirección + z con velocidad de fase v

$$v = \frac{\omega}{\beta} \tag{27}$$

Para una onda plana uniforme que se propaga en un dieléctrico perfecto, se encuentra que

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_R\varepsilon_R}}$$

La longitud de onda es la distancia que se requiere para efectuar un cambio de fase de 2π radianes

$$\beta\lambda = 2\pi$$

Lo cual conduce a la definición fundamental para la longitud de onda

$$\boxed{\lambda = \frac{2\pi}{\beta}} \tag{28}$$

Se sigue que

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{1}{f\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{c}{f\sqrt{\mu_R\varepsilon_R}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\mu_R\varepsilon_R}} \tag{29}$$

Donde λ_0 es la longitud de onda del espacio libre. Nótese que $\mu_R\varepsilon_R > 1$, y por consiguiente la longitud de onda es más pequeña y la velocidad es menor en todo medio real, en comparación con el espacio libre

Asociada con E_x esta la intensidad de campo magnético

$$\boxed{H_y = \frac{E_{x0}}{\eta}\cos(\omega t - \beta z)}$$

donde la impedancia intrínseca es

$$\boxed{\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}} \tag{30}$$

Una vez más, los dos campos E_x y H_y, son perpendiculares entre sí, y perpendiculares a la dirección de propagación, y están en fase entre sí, en todas partes. Nótese que cuando se forma el producto vectorial de **E** con **H**, el vector resultante está en la dirección de propagación. Se verá la razón de esto, cuando se estudie el vector de Poynting.

Aplicando estos resultados a una onda de 300 MHz que se propaga a traves del agua dulce, aunque no sea un medio no disipativo o sin pérdidas, se desprecia la atenuación por el momento y se supone $\alpha = 0$. Por lo tanto, $\mu_R = 1$, $\varepsilon_R = 78$ (para 300 MHz), y

$$\beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} = 2\pi\times 300\times 10^6\sqrt{78\mu_0\varepsilon_0} = 55.5 \qquad rad/m$$

u 80 8°/pulg, y

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{6\pi\times 10^8}{55.5} = 0.339\times 10^8 \quad m/s$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{55.5} = 0.113 \quad m$$

mientras que la longitud de onda en el aire habría sido de 1 m Continuando con los cálculos, se encuentra que

$$\eta = \eta_0\sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}} = \frac{377}{\sqrt{78}} = 42.7 \quad \Omega$$

Suponiendo que la intensidad de campo eléctrico tiene una amplitud máxima de 0.1 V/m, entonces

$$E_x = 0.1\cos(6\pi 10^8 t - 55.5z)$$

$$H_y = \frac{E_x}{\eta} = 2.34\times 10^{-3}\cos(6\pi 10^8 t - 55.5z)$$

ONDAS PLANAS EN DIELÉCTRICOS DISIPATIVOS

Todos los materiales dieléctricos tienen alguna conductividad, y aunque puede ser despreciada en muchos casos se considera necesario establecer el criterio para hacerlo. Se continuará confirmando la atenuación a las variaciones temporales de tipo senoidal; de este modo, las ecuaciones de Maxwell son

$$\nabla \times \mathrm{H}_s = \mathrm{J}_s + j\omega\varepsilon \mathrm{E}_s$$

o

$$\nabla \times \mathrm{H}_s = (\sigma + j\omega\varepsilon)\mathrm{E}_s$$

y

$$\nabla \times \mathrm{E}_s = -j\omega\mu \mathrm{H}_s \tag{31}$$

El único efecto que aparece por incluir la conductividad σ es que el factor $j\omega\varepsilon$ se convierte en $\sigma + \omega\varepsilon$. Por tanto se puede calcular inmediatamente el nuevo valor de la constante de propagación,

$$\gamma^2 = (\sigma + j\omega\varepsilon) j\omega\mu$$

$$\gamma = \pm\sqrt{(\sigma + j\omega\varepsilon) j\omega\mu}$$

Dividiendo todo entre un grupo ya familiar de constantes, se obtiene

$$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon}\sqrt{1 - j\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}} \tag{32}$$

donde se ha conservado sólo el signo más del radical por una razón que será evidente en breve. Esta expresión difiere del caso no disipativo o sin perdidas, por la presencia del segundo factor radical, que se hace 1 conforme se hace cero. En el caso general, pueden incluirse valores para σ μ " y ωen (32), luego calcular las partes reales e imaginarias de γ

$$\gamma = \alpha + j\beta$$

y la componente x de la intensidad de campo eléctrico que se propaga en la direccion + z, obteniendose

$$E_{xs} = E_{x0} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z}$$

el uso del signo más para el radical (32) conduce a valores numéricos positivos para α y β, y por lo tanto corresponde a la propagación en la dirección + z

Con (31) es facil mostrar que H_{ys} es

$$H_{ys} = \frac{E_{x0}}{\eta} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z}$$

donde la impedancia intrinseca ahora es una cantidad compleja,

$$\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{1}{\sqrt{1 - j(\sigma/\omega\varepsilon)}} \qquad (33)$$

Los campos eléctrico y magnético ya no están en fase temporal.

Antes de considerar un ejemplo que ilustre estos cálculos, la naturaleza del factor exponencial $e^{-\alpha z}$ merece alguna explicación. Para una onda que se propaga en la dirección + z, este factor provoca una disminución exponencial en la amplitud con el aumento de los valores de z. La constante de atenuación se mide en nepers por metro (Np/m) para que el exponente de e sea medido en las unidades adimensionales llamadas nepers. Entonces si α= 0.01 Np/m la amplitud de la cresta de la onda en z = 50 m será $e^{-0.5}/e^{-0}$ = 0.607 de su valor en z = 0. Recorriendo una distancia $1/\alpha$en la dirección + z, la amplitud de la onda se reduce por el factor de e^{-1}, o 0.368

Algunos resultados numéricos se pueden calcular para agua destilada, que es un dieléctrico bastante malo Con ω= 1011 rad/s o f = 15.9 GHz, valor que cae en la banda de SHF (súper alta frecuencia), los valores representativos de los parámetros μ_R = 1, ε_R = 50 y σ = 20 Ω^{-1}/ m. Trabajando con un poco más de precisión que la normal, se tiene

$$\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} = \frac{20\times10^{12}}{10^{11}\times50\times8.854} = 0.4518$$

Y

$$\begin{aligned}\gamma &= j10^{11}\sqrt{4\pi\times10^{-7}\times8.854\times50\times10^{-12}}\sqrt{1-j0.4518}\\ &= j2359\sqrt{1.0973\angle-24.31^\circ}\\ &= 2471\angle77.84^\circ = 520.3 + j2415 \qquad m^{-1}\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\alpha = 520.3 \qquad Np/m$$

y la amplitud de E_x o H_y, se atenuará por un factor de 0.368 para cada 1/520 m (alrededor de 2 mm) de propagación en el agua. El termino "propaga" se usa sin mucha propiedad. La gran atenuacion indica la razon por la cual el radar es ineficaz en el agua y en su lugar se utiliza el sonar esto tambien sugiere que la humedad o la lluvia en la atmósfera pueden provocar problemas en la propagacion a altas frecuencias

La constante de fase es

$$\beta = 2415 \qquad rad/m$$

y se ha afectado sólo levemente por la conductividad distinta de cero, puesto que los cálculos numericos anteriores muestra que habria sido 2359 rad/m si fuese cero. La longitud de onda en el aire en esta frecuencia es 1.886 cm y dado que $\beta=2\pi/\lambda$, tiene un valor de 2.601 mm en el agua.

Se encuentra que la impedancia intrínseca es

$$\eta = \sqrt{\frac{4\pi10^{-7+12}}{50\times8.854}}\frac{1}{\sqrt{1-j0.4518}} = 50.86\angle12.16^\circ = 49.72 + j10.71 \qquad \Omega$$

y E_x se adelanta a H_y por 12.16° en cada punto.

Se considerará ahora el caso más práctico de un material dieléctrico que tiene cierta pérdida pequeña. El criterio por el cual debe juzgarse si la pérdida es pequeña o no, es que la magnitud de $\sigma/\omega\varepsilon$ sea compatible con la unidad, como muestran (32) y (33). El término $\sigma/\omega\varepsilon$ se refiere a la tangente de pérdida por una razón que será clara cuando se considere la ecuación de Maxwell del rotacional de **H** que constituyó el punto de partida del análisis,

$$\nabla \times \mathrm{H}_s = (\sigma + j\omega\varepsilon)\mathrm{E}_s = \mathrm{J}_{\sigma s} + \mathrm{J}_{ds}$$

La razón de la densidad de corriente de conducción y la densidad de corriente de desplazamiento es

$$\frac{J_{\sigma s}}{J_{ds}} = \frac{\sigma}{j\omega\varepsilon}$$

Es decir, estos dos vectores apuntan en la misma dirección, pero están 90° fuera de fase con respecto al tiempo. La densidad de corriente de desplazamiento adelanta a la densidad de corriente de conducción cerca de 90°, de la misma forma en que la corriente a través de un condensador adelanta a la corriente, a través de una resistencia en serie con él, cerca de 90° en un circuito ordinario. Esta relación de fase se muestra en la figura 2

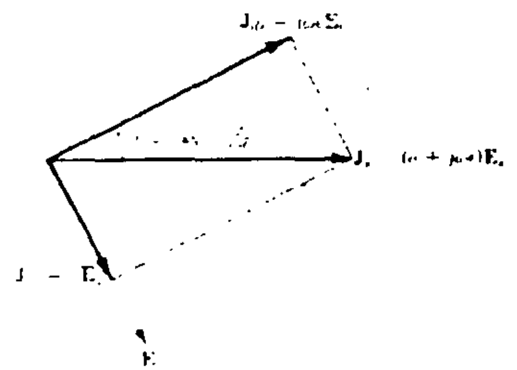


Figura 2

La relación fase-tiempo entre $\mathbf{J}_{ds}$, $\mathbf{J}_{\sigma s}$, $\mathbf{J}_s$ y $\mathbf{E}_s$. La tangente de θ es igual a σ/ωε y 90°-θ es el ángulo común de factor potencia, o el angulo por el cual $\mathbf{J}_s$ adelanta a $\mathbf{E}_s$.

El angulo θ (no se confunda éste con el ángulo polar en coordenadas esféricas) puede por lo tanto identificarse como el ángulo con el cual la densidad de corriente de desplazamiento adelanta a la densidad total de corriente, y

$$\tan\theta = \frac{\sigma}{\omega\varepsilon} \tag{34}$$

Esta relación ha causado que se le dé el nombre de tangente de pérdida a $\sigma/\omega\varepsilon$ La Q de un condensador (su factor de calidad, no su carga), que tiene dieléctrico disipativo, es el recíproco de la tangente de perdida.

Si la tangente de perdida es pequeña, se pueden obtener aproximaciones útiles para las constantes de fase y atenuación, y la impedancia intrinseca. Dado que

$$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon}\sqrt{1 - j\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}} \tag{32}$$

y se puede desarrollar el segundc radical por medio del teorema del binomio

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \dots$$

donde $|x| < 1$. Identificando x como $-j\sigma/\omega\varepsilon$ y n como ½, entonces

$$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon}\left[1 - j\frac{\sigma}{2\omega\varepsilon} + \frac{1}{8}\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2 + \dots\right]$$

de aquí

$$\alpha \cong j\omega\sqrt{\mu\varepsilon}\left(-j\frac{\sigma}{2\omega\varepsilon}\right) = \frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \tag{35}$$

y

$$\beta \cong \omega\sqrt{\mu\varepsilon}\left(1 + \frac{1}{8}\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2\right) \tag{36 a}$$

o en muchos casos,

$$\beta \cong \omega\sqrt{\mu\varepsilon} \tag{36 b}$$

De manera similar, se encuentra

$$\eta \cong \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\left[1 - \frac{3}{8}\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2 + j\frac{\sigma}{2\omega\varepsilon}\right] \tag{37 a}$$

o

$$\eta \cong \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\left[1 + j\frac{\sigma}{2\omega\varepsilon}\right] \tag{37 b}$$

Con el proposito de ilustrar la exactitud de las aproximaciones, se volverá a calcular α β y η para el ejemplo del agua destilada utilizado anteriormente, aun cuando la tangente de pérdida tenga el valor relativamente grande de 0 4518. Con ε_R = 50, σ = 20 Ω^{-1}/m, $\omega = 10^{11}$, y μ_R =1, a partir de (35), se tiene

α= 532.8 Np/m

que es compatible con el valor exacto de 520.3 Np / m. Con (36*a*), la constante de fase es

β = 2419 rad/m

que resulta muy cercana al valor exacto de 2415 rad/m, mientras que (36*b*) proporciona el valor para el caso sin pérdidas o no disipativo,

β= 2359 rad/m

Finalmente se encuentra que la impedancia intrínseca es, por (37b),

$\eta = 50.65\angle 13.75° = 49.20 + j12.03$ Ω

lo cual es compatible con el valor exacto de $50.86\angle 12.16° = 49.72 + j10.71$ Ω, mientras que con (37*b*) se comete un error mayor

$$\eta = 54.62\angle 12.73^{\circ} = 53.28 + j12.03 \quad \Omega$$

Aunque la tangente de pérdida en este ejemplo es 0.4518, los errores involucrados al usar las formulaciones más aproximadas son probablemente poco importantes, porque la conductividad y la constante dieléctrica relativa rara vez son conocidas con una precisión mayor. Sin embargo se recomienda el uso de las aproximaciones sólo cuando $\sigma\ \omega\varepsilon$ < 0.1; cualquier aproximación adicional se debe basar en un juicio de ingeniería.

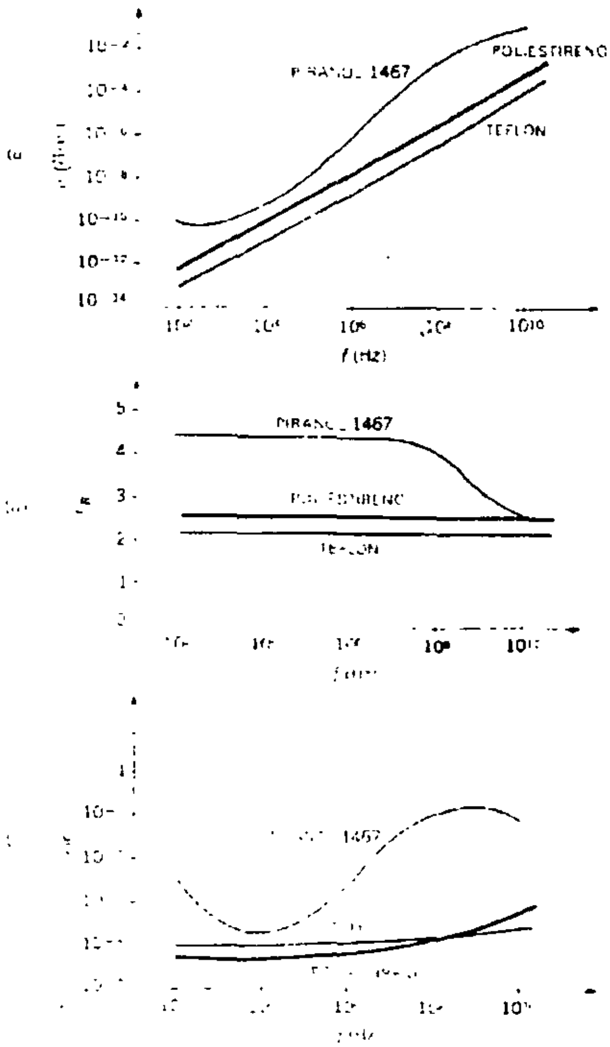


Figura 3

La variacion de σ, ε_R y $\sigma/\omega\varepsilon$ se muestra en a), b) y c), respecivamente, para el piranol 1467, poliestireno y teflon. Notese el uso de escalas logaritmicas para todos los ejes, excepto ε_R.

En la mayor parte de los dielectricos fisicos la tangente de pérdida varia menos con la frecuencia que la conductividad. Esto es, la conductividad tiende a aumentar con la frecuencia aunque no linealmente. Tambien pueden ocurrir cambios relativamente rápidos de conductividad, de permitividad y de tangente de perdida en la region infrarrojo y en la región ultravioleta. Una gráfica de la variación de σ ε_R y $\sigma/\omega\varepsilon$ con la frecuencia se muestra en la figura 3, para el piranol 1467, el teflón y el poliestireno, en una escala logaritmica de frecuencia.

EL VECTOR DE POYNTING Y CONSIDERACIONES DE POTENCIA

Con el propósito de encontrar la potencia de una onda plana uniforme, es necesario desarrollar un teorema de potencia para el campo electromagnético, conocido como el teorema de Poynting. Éste fue postulado originalmente por el físico inglés John H. Poynting.

Se tiene como inicio la ecuación de Maxwell,

$$\nabla \times \mathrm{H} = \mathrm{J} + \frac{\partial \mathrm{D}}{\partial t}$$

Al realizar el producto punto con E en cada lado de la ecuación,

$$\mathrm{E} \cdot \nabla \times \mathrm{H} = \mathrm{J} \cdot \mathrm{E} + \mathrm{E} \cdot \frac{\partial D}{\partial t}$$

Ahora, haciendo uso de la identidad vectorial

$$\nabla \cdot (\mathrm{E} \times \mathrm{H}) \equiv -\mathrm{E} \cdot \nabla \times \mathrm{H} + \mathrm{H} \cdot \nabla \times \mathrm{E}$$

La cual puede comprobarse mediante su desarrollo en coordenadas cartesianas. Entonces

$$\mathrm{H} \cdot \nabla \times \mathrm{E} - \nabla \cdot (\mathrm{E} \times \mathrm{H}) = \mathrm{J} \cdot \mathrm{E} + \mathrm{E} \cdot \frac{\partial \mathrm{D}}{\partial t}$$

pero

$$\nabla \times \mathrm{E} = -\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial t}$$

y por lo tanto

$$-\mathrm{H} \cdot \frac{\partial \mathrm{B}}{\partial t} - \nabla \cdot (\mathrm{E} \times \mathrm{H}) = \mathrm{J} \cdot \mathrm{E} + \mathrm{E} \cdot \frac{\partial \mathrm{D}}{\partial t}$$

o

$$-\nabla \cdot (\mathrm{E} \times \mathrm{H}) = \mathrm{J} \cdot \mathrm{E} + \varepsilon \mathrm{E} \cdot \frac{\partial E}{\partial t} + \mu H \cdot \frac{\partial H}{\partial t}$$

Sin embargo,

$$\varepsilon \mathrm{E} \cdot \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial t} = \frac{\varepsilon}{2} \frac{\partial E^2}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon E^2}{2}\right)$$

y

$$\mu \mathrm{H} \cdot \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mu H^2}{2}\right)$$

entonces

$$-\nabla \cdot (\mathrm{E} \times \mathrm{H}) = \mathrm{J} \cdot \mathrm{E} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon E^2}{2} + \frac{\mu H^2}{2}\right)$$

Finalmente, integrando a traves de un volumen, resulta

$$-\int_{vol} \nabla \cdot (\mathrm{E} \times \mathrm{H}) dv = \int_{vol} \mathrm{J} \cdot \mathrm{E} dv + \frac{\partial}{\partial t} \int_{vol} \left(\frac{\varepsilon E^2}{2} + \frac{\mu H^2}{2} \right) dv$$

y con la aplicación del teorema de la divergencia para obtener

$$\boxed{-\oint_S (\mathrm{E} \times \mathrm{H}) \cdot ds = \int_{vol} \mathrm{J} \cdot \mathrm{E} dv + \frac{\partial}{\partial t} \int_{vol} \left(\frac{\varepsilon E^2}{2} + \frac{\mu H^2}{2} \right) dv} \qquad (38)$$

Si se supone, que no hay fuentes dentro del volumen, entonces la primera integral a la derecha es la potencia óhmica total (e instantánea) disipada dentro del volumen Si hay fuentes presentes dentro del volumen, entonces el resultado de integrar sobre el volumen de la fuente sera positivo si la potencia está siendo suministrada a la fuente, pero será negativa si la potencia es suministrada por la fuente.

La integral en el segundo término de la derecha es la energía total almacenada en los campos electrico y magnético, y las derivadas parciales con respecto al tiempo provocan que este termino sea la razón de cambio con respecto al tiempo de la energía almacenada dentro de ese volumen, o sea, la potencia instantánea que hará que la energía almacenada dentro de este volumen aumente. La suma de las expresiones a la derecha debe ser, por lo tanto, la potencia total que fluye hacia el volumen, en consecuencia, la potencia total que fluye *fuera* del volumen es

$$\oint_S (\mathrm{E} \times \mathrm{H}) \cdot \mathrm{dS}$$

donde la integral es sobre la superficie cerrada que rodea el volumen. El producto cruz **E** x **H**, es conocido como el vector de Poynting **P**,

$$\boxed{\mathrm{P} = \mathrm{E} \times \mathrm{H}} \qquad (39)$$

que se interpreta como una densidad de potencia instantánea medida en watts por metro cuadrado (W/m^2) Esta interpretación, esta sujeta a las mismas consideraciones filosóficas como en el caso de la interpretacion de ½ **D** • **E** o ½ **B** • **H** como densidades de energía. Lo único que se puede demostrar rigurosamente es que la integracion del vector de Poynting sobre una superficie cerrada proporciona la potencia total que atraviesa la superficie en un sentido hacia fuera. Sin embargo, la interpretacion como una densidad de potencia, no está mal encaminada, especialmente cuando el vector de Poynting se aplica a campos que varian sinusoidalmente. Se pueden encontrar resultados extraños cuando el vector de Poynting se aplica a campos constantes en el tiempo.

La dirección del vector de Poynting **P** indica la direccion del flujo de potencia instantaneo en el punto, incluso muchos de ustedes piensan en el vector de Poynting como un vector "apuntante". Este homonimo, aunque accidental, es correcto

Puesto que **P** esta dado por el producto cruz de **E** y **H**, la direccion del flujo de potencia en cualquier punto, es normal a ambos vectores **E** y **H**. Esto concuerda muy bien con la experiencia con la onda plana uniforme puesto que la propagación en la dirección + z estuvo asociada con una componente E_x y una H_y

$$E_x \mathrm{a}_x \times \mathrm{H}_y \mathrm{a}_y = \mathrm{P}_z \mathrm{a}_z$$

En un dieléctrico perfecto, estos campos **E** y **H** estan dados por

$$E_x = E_{x0}\cos(\omega t - \beta z)$$

$$H_y = \frac{E_{x0}}{\eta}\cos(\omega t - \beta z)$$

y por tanto

$$\mathrm{P}_z = \frac{E_{x0}^2}{\eta}\cos^2(\omega t - \beta z)$$

Para encontrar la densidad de potencia promedio en el tiempo, se integra sobre un ciclo y se divide entre el periodo $T = 1/f$.

$$\mathrm{P}_{z,prom} = f\int_0^{1/f}\frac{E_{x0}^2}{\eta}\cos^2(\omega t - \beta z)dt$$

$$= \frac{f}{2}\frac{E_{x0}^2}{\eta}\int_0^{1/f}[1+\cos(2\omega t - 2\beta z)]dt$$

$$= \frac{f}{2}\frac{E_{x0}^2}{\eta}\left[t + \frac{1}{2\omega}\mathrm{sen}(2\omega t - 2\beta z)\right]_0^{1/f}$$

y

$$\boxed{\mathrm{P}_{z,prom} = \frac{1}{2}\frac{E_{x0}^2}{\eta}S \qquad W/m^2} \tag{40}$$

Si se utilizan valores de raíz cuadrática media (R.M.S., por sus siglas en inglés) en lugar de amplitudes pico, podría no aparecer el término ½.

Finalmente, la potencia promedio que fluye a través de cualquier área S normal al eje z es

$$P_{z,prom} = \frac{1}{2}\frac{E_{x0}^2}{\eta}S \qquad W$$

En el caso de un dieléctrico disipativo E_x y H_y no están en fase con el tiempo.
Se tiene

$$Ex = E_{x0}e^{-\alpha z}\cos(\omega t - \beta z)$$

si,

$$\eta = \eta_m\angle\theta_\eta$$

entonces se puede escribir la intensidad de campo magnético como

$$H_y = \frac{E_{x0}}{\eta_m}e^{-\alpha z}\cos(\omega t - \beta z - \theta_\eta)$$

Entonces,

$$P_z = E_x H_y = \frac{E_{x0}^2}{\eta_m} e^{-2\alpha z}\cos(\omega t - \beta z)\cos(\omega t - \beta z - \theta_\eta)$$

Ahora es el momento de usar la identidad cos A cos B = ½ cos (A + B) + ½ cos (A – B), que mejora considerablemente la forma de la última ecuación,

$$P_z = \frac{E_{x0}^2}{\eta_m} e^{-2\alpha z}[\cos(2\omega t - 2\beta z - \theta_\eta) + \cos\theta_\eta]$$

Se encuentra que la densidad de potencia tiene sólo una componente de segunda armónica y una componente de cd. Puesto que el primer término tiene un valor promedio cero sobre un número entero de periodos, el valor promedio en tiempo del vector Poynting es

$$P_{z,\text{prom}} = \frac{1}{2}\frac{E_{x0}^2}{\eta_m} e^{-2\alpha z}\cos\theta_\eta \qquad (41)$$

Nótese que la densidad de potencia se atenúa como e $^{-2\alpha z}$, mientras que E_x y H_y decaen como e $^{-\alpha z}$

Se harán ahora unos cuantos cálculos de potencia para el ejemplo del agua dulce considerado en la sección pasada. Algunos de los datos eran: f = 300 MHz, ϵ_R = 50, σ= 20 Ω^{-1}/ m, α= 520.3 Np/m, β= 2415 rad/m y η = 50.68∠12 16° Ω. Si se selecciona ahora E_{x0} = 100 V/m y z = 1 mm Entonces z = 0.5203 y z = 2 415 rad o 138.4°. Se tiene

$$E_x = 100e^{-0.5203}\cos(6\pi 10^8 t - 138.4°) = 59.4\cos(6\pi 10^8 t - 138.4°) \qquad V/m$$

$$H_y = \frac{100}{50.86} e^{-0.5203}\cos(6\pi 10^8 t - 138.4° - 12.16°) \qquad A/m$$

o

$$H_y = 1.169\cos(6\pi 10^8 t - 150.6°) \qquad A/m$$

De manera que

$$P_z = E_x H_y = 69.4\cos(6\pi 10^8 t - 138.4°\cos(6\pi 10^8 t - 150.6°) \qquad W/m^2$$

o

$$\begin{aligned} P_z &= 34.7[\cos(12\pi 10^8 t - 289.0°) + \cos 12.2°] \\ &= 33.9 + 34.7\cos(12\pi 10^8 t - 289.0°) \qquad W/m^2 \end{aligned}$$

la ecuación (41) da la parte de la repuesta, correspondiente al promedio en tiempo muy rapidamente

$$P_{z,\text{prom}} = \frac{1}{2}\frac{100^2}{50.86} e^{-2\times 0.5203}\cos 12.16° = 33.9 \qquad W/m^2$$

PROPAGACIÓN EN BUENOS CONDUCTORES: EL EFECTO PIEL

Como ejemplo final de una propagación no codificada, se investigará el comportamiento de un buen conductor cuando una onda plana uniforme se establece en él. En lugar de pensar en una fuente encajada en un bloque de cobre y que lanza una onda en ese material, el interés se centrará en una onda establecida por un campo electromagnético existente en algún dieléctrico externo en contacto con la superficie del conductor. Se verá que la transmisión principal de energía debe tener lugar en la región *fuera* del conductor, porque todos los campos variantes con el tiempo se atenúan, muy rápidamente al penetrar *en* un buen conductor.

El buen conductor tiene una conductividad alta y corrientes de conducción grandes. La energía representa por la onda que viaja a través del material disminuye conforme la onda se propaga, porque siempre existen pérdidas óhmicas Cuando se analizó la tangente de pérdida se vio que la razon de la densidad de corriente de conducción y la densidad de corriente de desplazamiento en un material esta dada por $\sigma/\omega\varepsilon$. Si se elige un material conductor metálico y una frecuencia muy alta como un ejemplo conservativo, esta razón para en nicromo (σ = 10^6) a 100 MHz es alrededor de 2 X 10^8 De este modo se tiene una situación donde $\sigma/\omega\varepsilon$ >> 1, y se pueden hacer varias aproximaciones buenas tendientes a encontrar α β y η para un buen conductor.

La expresión general para la constante de propagación es

$$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon}\sqrt{1 - j\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}}$$

La cual se simplifica inmediatamente para obtener

$$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon}\sqrt{-j\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}}$$

o

$$\gamma = j\sqrt{-j\omega\sigma\mu}$$

pero

$$-j = 1\angle -90°$$

y

$$\sqrt{1\angle 90°} = 1\angle -45° = \frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}}$$

por tanto

$$\gamma = j\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sqrt{\omega\mu\sigma}$$

o

$$\gamma = (j1 + 1)\sqrt{\pi f\mu\sigma} \tag{42}$$

de aqui,

$$\alpha = \beta = \sqrt{\pi f\mu\sigma} \tag{43}$$

A pesar de los parámetros y o del conductor, o de la frecuencia del campo aplicado, α y β son iguales Si se supone nuevamente que sólo existe la componente E_x, que viaja en la dirección + z, entonces

$$E_x = E_{x0} e^{-z\sqrt{\pi f\mu\sigma}} \cos(\omega t - z\sqrt{\pi f\mu\sigma}) \tag{44}$$

Se puede atribuir este campo e el conductor a un campo externo en la superficie del conductor Se considera que la región $z > 0$ es el buen conductor y la región $z < 0$ es un dieléctrico perfecto. En la superficie de frontera $z = 0$, (44) viene a ser,

$$E_x = E_{x0} \cos\omega t \qquad (z = 0)$$

Éste se considera como el campo fuente que establece los campos dentro del conductor Dado que la corriente de desplazamiento es despreciable,

$$\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$$

Entonces la densidad de corriente de conducción en cualquier punto dentro del conductor está directamente relacionada con **E**:

$$J_x = \sigma E_x = \sigma E_{x0} e^{-z\sqrt{\pi f\mu\sigma}} \cos(\omega t - z\sqrt{\pi f\mu\sigma}) \tag{45}$$

Las ecuaciones (44) y (45) contienen riqueza de información Considerando primero el termino negativo exponencial, se encuentra una disminución exponencial en la densidad de corriente de conducción y en la intensidad de campo eléctrico a medida que la penetración en el conductor aumenta (alejandose de la fuente) El factor exponencial es uno en $z = 0$ y disminuye a $e^{-1} = 0.368$ cuando

$$z = \frac{1}{\sqrt{\pi f\mu\sigma}}$$

Esta distancia es denotada por δ y es llamada *la profundidad de penetración o profundidad de la piel*

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f\mu\sigma}} = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\beta} \tag{46}$$

Este es un parametro importante en la descripción del comportamiento del conductor en campo electromagnéticos Para tener una idea de la magnitud de la profundidad de la piel, considerese el cobre $\sigma = 5.8 \times 10^7\ \Omega^{-1}/m$, a varias frecuencias diferentes. Se tiene

$$\delta_{Cu} = \frac{0.0661}{\sqrt{f}}$$

A una frecuencia de la fuente de alimentación de 60 Hz, δ_{Cu} = 8.53 mm, alrededor de pulg. Recordando que la densidad de potencia lleva un término exponencial $e^{-2\alpha z}$, se ve que la densidad de potencia se multiplica por un factor de 0.368^2 = o.135 para cada 8.53 mm de penetración en el cobre

A una frecuencia de microondas de 10 000 MHz, δ es 6.61×10^{-4} mm o alrededor de un octavo de la longitud de onda de la luz visible.

Entonces, todos los campos en un buen conductor, como el cobre, son esencialmente cero a distancias mayores que unas cuantas profundidades de piel. Cualquier densidad de corriente o intensidad de campo eléctrico establecida en la superficie de un buen conductor disminuye rápidamente a medida que penetra en el conductor. La energía electromagnética no se transmite en el interior de un conductor; sino que vieja en la región que rodea al conductor, todo lo que hace el conductor es sencillamente guiar las ondas. Las corrientes establecidas en la superficie del conductor, se propagan en el conductor en una dirección perpendicular a la dirección de la densidad de corriente, y son atenuadas por pérdidas óhmicas. Esta potencia perdida es el precio que exige el conductor para actuar como una guía.

Supóngase que se tiene una línea de transmisión de cobre en la subestación de una compañía pública de electricidad, y se desea que conduzca corrientes grandes, por tanto, se seleccionan dimensiones de 2 por 4 pulg. De este modo, se desperdicia mucho cobre pues los campos son reducidos grandemente en una profundidad de piel, alrededor de pulg. Un conductor grueso con un grosor de pared de alrededor de ½ pulg sería un diseño mejor. Aunque se están aplicando los resultados de un análisis para un conductor plano infinito a uno de dimensiones finitas, los campos son atenuados en el conductor de tamaño finito de manera similar (aunque no idéntica).

La profundidad de piel extremadamente corta a frecuencias de microondas muestra que únicamente la capa superficial del conductor guía es importante. Una pieza de vidrio con una superficie de plata evaporada de 0.0001 pulg de grosor es un excelente conductor a estar frecuencias

A continuación se determinarán expresiones para la velocidad y la longitud de onda dentro de un buen conductor, se tiene a partir de (46)

$$\alpha = \beta = \frac{1}{\delta} = \sqrt{\pi f \mu \sigma}$$

Entonces, dado que

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$$

se encuentra que la longitud de onda es

$$\lambda = 2\pi\delta \qquad (47)$$

Tambien, recuerdese la ecuacion (27)

$$v = \frac{\omega}{\beta}$$

Asi,

$$v = \omega\delta \qquad (48)$$

Para el cobre a 60 Hz, λ = 5.36 cm y v = 3.22 m /s, o alrededor de 7.2 mi /h. Muchas personas pueden correr a una velocidad mucho mayor que ésa. Desde luego, en el espacio libre, una onda de 60 Hz tiene una longitud de onda de 3100 mi y viaja a la velocidad de la luz.

Con el propósito de encontrar H_y, se necesita una expresión para la impedancia intrínseca de un buen conductor Comenzando con la ecuacion (33), seccion 1.3,

$$\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + \omega\varepsilon}}$$

Dado que $\sigma \gg \omega\varepsilon$, se tiene

$$\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma}}$$

la cual puede escribirse como

$$\eta = \frac{\sqrt{2}\angle 45^\circ}{\sigma\delta} = \frac{1}{\sigma\delta} + \frac{1}{\sigma\delta} \tag{49}$$

Entonces, rescribiendo (44) en términos de la profundidad de piel.

$$E_x = E_{x0} e^{-z/\delta} \cos\left(\omega - \frac{z}{\delta}\right) \tag{50}$$

luego

$$H_y = \frac{\sigma\delta E_{x0}}{\sqrt{2}} e^{-z/\delta} \cos\left(\omega - \frac{z}{\delta} - \frac{\pi}{4}\right) \tag{51}$$

y se ve que la amplitud máxima de la intensidad de campo magnético ocurre un octavo de ciclo despues que la amplitud maxima de la intensidad de campo eléctrico en cada punto

A partir de (50) y (51) se puede obtener el vector de Poynting promedio en tiempo aplicado (41),

$$P_{z,prom} = \frac{1}{2} \frac{\sigma\delta E_{x0}^2}{\sqrt{2}} e^{-2z/\delta} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

o

$$P_{z,prom} = \frac{1}{4} \sigma\delta E_{x0}^2 e^{-2z/\delta}$$

Se observa nuevamente que a una distancia de una profundidad de piel la densidad de potencia es unicamente $e^{-2} = 0\ 135$ de su valor en la superficie

La perdida total de potencia es una anchura $0 < y < b$ y longitud $0 < x < L$ en dirección de la corriente, como se muestra en la figura 1 4, se obtiene encontrando la potencia que atraviesa la superficie del conductor dentro de esta área.

$$P_{L,prom} = \int_S P_{z,prom} dS = \int_0^b \int_0^L \frac{1}{4} \sigma\delta E_{x0}^2 e^{-2z/\delta} \Big]_{z=0} dx\,dy$$

$$= \frac{1}{4} \sigma\delta b L E_{x0}^2$$

En terminos de la densidad de corriente J_{x0} en la superficie,

$$\mathbf{J}_{x0} = \sigma \mathbf{E}_{x0}$$

Se tiene

$$P_{L,prom} = \frac{1}{4\sigma} \delta b L J_{x0}^2 \tag{52}$$

$$H^{+}_{ys1} = \frac{1}{\eta_1} E^{+}_{x10} e^{-\gamma_1 z} \tag{56}$$

donde η_1 es compleja a menos que σ_1 sea cero. Esta onda plana en la región 1 que viaja hacia la superficie de la frontera en z = 0 es llamada la onda incidente. Puesto que la dirección de propagación de la onda incidente es perpendicular al plano de la frontera se describe esta como incidencia normal.

Ahora se reconoce que es posible la transmisión de energía a través de la superficie de frontera en z = 0 hacia la región 2 considerando que existe una onda con movimiento en la dirección +z en dicho medio

$$E^{+}_{xs2} = E^{+}_{x20} e^{-\gamma_2 z} \tag{57}$$

$$H^{+}_{ys2} = \frac{1}{\eta_2} E^{+}_{x20} e^{-\gamma_2 z} \tag{58}$$

Esta onda que se mueve alejándose de la superficie de la frontera hacia la región 2 se llama la onda transmitida; nótese el uso de las diferentes constantes de propagación γ_2 y la impedancia intrínseca η_2.

Ahora, se deberán satisfacer las condiciones de frontera en z = 0 con estos campos supuestos E_x es un campo tangencial; por tanto, los campos E en las regiones 1 y 2 deben ser iguales en z = 0. Haciendo que z = 0 en (55) y (57) se requiere que $E^{+}_{x10} = E^{+}_{20}$. Sin embargo, H_y es también un campo tangencial y debe ser continuo a lo largo de la frontera (no existen corrientes laminares en medios reales). Sin embargo, cuando se hace z = 0 en (56) y (58), se encuentra que debe tenerse $E^{+}_{x10}/\eta_1 = E^{+}_{x20}/\eta_2$; dado que $E^{+}_{x10} = E^{+}_{x20}$, entonces $\eta_1 = \eta_2$. Pero esta es una condición muy especial que no concuerda con los hechos en general, y por lo tanto no se pueden satisfacer las condiciones de frontera con solamente una onda incidente y una onda transmitida. Se requiere una onda que viaje alejandose de la frontera en la region 1, como muestra la figura 5; esta se llama una onda reflejada,

$$E^{-}_{xs1} = E^{-}_{x10} e^{\gamma_1 z} \tag{59}$$

$$H^{-}_{ys1} = -\frac{E^{-}_{x10}}{\eta_1} e^{\gamma_1 z} \tag{60}$$

Donde puede ser una cantidad compleja. Como este campo esta viajando en la dirección –z, $E_{xs1} = -\eta_1 H_{ys1}$, puesto que el vector de Poynting muestra que $E^{-}_1 \times H^{-}_1$ debe estar en la dirección $-a_z$.

Las condiciones de frontera se pueden satisfacer ahora con facilidad, y en el proceso las amplitudes de las ondas transmitida y reflejada pueden encontrarse en términos de E^{+}_{x10}. La intensidad total del campo eléctrico es continua en z = 0,

$$E_{xs1} = E_{xs2} \qquad (z = 0)$$

o

$$E^{+}_{xs1} + E^{-}_{xs1} = E^{+}_{xs2} \qquad (z = 0)$$

por tanto

$$E^{+}_{x10} + E^{-}_{x10} = E^{+}_{x20} \tag{61}$$

Además,

$$H_{ys1} = H_{ys2} \qquad (z = 0)$$

o

$$H^{+}_{ys1} + H^{-}_{ys1} = H^{+}_{ys2} \qquad (z = 0)$$

Y por consiguiente

$$\frac{E^{+}_{x10}}{\eta_1} - \frac{E^{-}_{x10}}{\eta_1} = \frac{E^{+}_{x20}}{\eta_2} \tag{62}$$

Al resolver (62) para E^{+}_{x20} y sustituir en (61), se encuentra que

$$E^{+}_{x10} + E^{-}_{x10} = \frac{\eta_2}{\eta_1} E^{+}_{x10} - \frac{\eta_2}{\eta_1} E^{-}_{x10}$$

o

$$E^{-}_{x10} = E^{+}_{x10} \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}.$$

La razón de las amplitudes de los campos electricos reflejado e incidente, es llamada el coeficiente de reflexión y se designa por Γ (gamma),

$$\Gamma = \frac{E^{-}_{x10}}{E^{+}_{x10}} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} \tag{63}$$

El coeficiente de reflexión puede ser complejo, en cuyo caso hay un desplazamiento de fase en la onda reflejada

La amplitud relativa de la intensidad de campo eléctrico transmitido se encuentra combinando (63) y (61)

$$\frac{E^{+}_{x20}}{E^{+}_{x10}} = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} \tag{64}$$

Esta se conoce como el coeficiente de transmision, pero como no se usa demasiado no se justifica designarla con un simbolo especial

Se vera como estos resultados se pueden aplicar a varios casos especiales. Primero, sea la region 1 un dieléctrico perfecto y la region 2 un conductor perfecto. Dado que σ_2 es infinita

$$\eta_2 = \sqrt{\frac{j\omega\mu_2}{\sigma_2 + j\omega\varepsilon_2}} = 0$$

Y de (64)

$$E^{+}_{x20} = 0$$

No pueden existir campos variantes con el tiempo en el conductor perfecto. Una forma alternativa de ver esto es notando que la profundidad de piel sea cero.

Dado que $\eta_2 = 0$, entonces (63) muestra que

$$\Gamma = -1$$

y

$$E^{-}_{x10} = -E^{+}_{x10}$$

La onda reflejada es igual en amplitud y de signo opuesto a la onda incidente. Toda la energía incidente es reflejada por el conductor perfecto, y el campo total E en la región 1 es

$$E_{xs1} = E^{+}_{xs1} + E^{-}_{xs1}$$
$$= E^{+}_{x10} e^{-j\beta_1 z} - E^{+}_{x10} e^{j\beta_1 z}$$

donde se ha considerado $\gamma_1 = 0 + j\beta_1$, en el dieléctrico perfecto. Estos términos pueden combinarse y simplificarse,

$$E_{xs1} = (e^{-j\beta_1 z} - e^{j\beta_1 z}) E^{+}_{x10}$$
$$= -j2 sen \beta_1 z sen \omega \tag{65}$$

Multiplicando por $e^{j\omega t}$ y tomando la parte real, se puede eliminar el subíndice s y obtener la funcion real del tiempo

$$E_{x1} = 2E^{+}_{x10} sen \beta_1 z sen \omega \tag{65}$$

Este campo total en la región 1 no es una onda que viaja, a pesar de que se obtuvo combinando dos ondas de igual amplitud que viaian en direcciones opuestas. Si se compara su forma con la de la onda incidente

$$E^{+}_{x1} = E^{+}_{x10} \cos(\omega - \beta_1 z) \tag{66}$$

En esta ultima se ve el término $\omega - \phi_1 z$ u $\omega(t - z/v_1)$, que caracteriza una onda que viaja en la dirección +z con una velocidad $v_1 = w/\beta_1$. Sin embargo, en (65), los factores que involucran tiempo y distancia están separados por términos trigonométricos. En todos los planos para los cuales $\beta_1 z = n\pi$, E_{x1} es cero en todo instante. Ademas, cada vez que $\omega = n\pi$, E_{x1} es cero en todas partes. N campo de la forma de (65) se conoce como onda estacionaria
Los planos en los cuales $E_{x1} = 0$, se localizan donde se cumple

$$\beta_1 z = n\pi \qquad (n = 0, \pm1, \pm2, ...)$$

por tanto

$$\frac{2\pi}{\lambda_1} z = n\pi$$

y

$$z = n\frac{\lambda_1}{2}$$

Por tanto, $E_{x1} = 0$ en la frontera $z = 0$ en cada numero entero de medias longitudes de onda desde la frontera de la región 1, $z < 0$, como se ilustra en la figura 6.

Dado que $E^{+}_{xs1} = H^{+}_{ys1}\eta_1$ y $E^{-}_{xs1} = -H^{-}_{ys1}\eta_1$, el campo magnético es

$$H_{ys1} = \frac{E^{+}_{x10}}{\eta_1}(e^{-j\beta_1 z} + e^{j\beta_1 z})$$

o

$$H_{y1} = 2\frac{E^{+}_{x10}}{\eta_1}\cos\beta_1 z\cos\omega \qquad (67)$$

Esta también es una onda estacionaria, pero muestra un máximo de amplitud en los lugares donde $E_{x1} = 0$. Y esta también 90° fuera de fase con E_{s1} en todas partes. Por lo tanto, no se transmite potencia promedio ni en una ni en otra dirección.

Considérese ahora dieléctricos perfectos en ambas regiones 1 y 2; η_1 y η_2 son cantidades reales positivas y $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. De la ecuación (63) se puede calcular el coeficiente de reflexión y encontrar E_{x1} en términos de la amplitud incidente E^{+}_{x10}. Conociendo E^{+}_{x1} y E^{-}_{x1}, se puede entonces encontrar H^{+}_{y1} y H_{y1}. En la región 2, E^{+}_{x2} se encuentra a partir de (34), y esta determina luego a H^{+}_{y2} Como ejemplo numérico, se seleccionan

$\eta_1 = 300$
$\eta_2 = 100$
$E^{+}_{x10} = 100$ V/m

Entonces

$$\Gamma = \frac{100-300}{100+300} = -0.5$$

$E^{-}_{x10} = -50$ V/m

las intensidades de campo magnetico son

$$H^{+}_{y10} = \frac{100}{300} = 0.333 \quad \text{A/m}$$

$$H^{-}_{y10} = \frac{-50}{300} = 0.167 \quad \text{A/m}$$

la densidad de potencia promedio incidente es

$$P^{+}_{1,prom} = \frac{1}{2}E^{+}_{x10}H^{+}_{y10} = 16.67 \quad \text{W/m}^2$$

mientras que

$$P^{-}_{1,prom} = -\frac{1}{2}E^{-}_{x10}H^{-}_{y10} = 4.17 \quad \text{W/m}^2$$

En la región 2

$$E^{+}_{x20} = \frac{2\eta_2}{\eta_2+\eta_1}E^{+}_{x10} = 50 \quad \text{V/m}$$

y

$$H^{+}_{y20} = \frac{50}{100} = 0.500 \quad \text{A/m}$$

entonces

$$P^{+}_{2,prom} = \frac{1}{2} E^{+}_{x20} H^{+}_{y20} = 12.5 \qquad \text{W/m}^2$$

Notese que la eneregia se conserva:

$$P^{+}_{1,prom} = P^{-}_{1,prom} + P^{+}_{2,prom}$$

La relación de potencia entre las potencias incidentes, reflejada y transmitida debe compararse con la ecuación que expresa la continuidad de la intensidad de campo eléctrico tangencial en la superficie de la frontera,

$$E^{+}_{x10} + E^{-}_{x10} = E^{+}_{x20}$$

Las ondas incidente y reflejada en la región 1 pueden combinarse para producir el campo total ahí, pero esto se reservara para la siguiente sección

RELACION DE ONDA ESTACIONARIA

Una de las mediciones que se realiza fácilmente en sistemas de transmisión es la amplitud relativa de la intensidad de campo eléctrico o magnético, por medio del uso de una sonda. Un pequeño circuito acoplado dara una indicación de la amplitud del campo magnético, mientras que un conductor central extendido levemente de un cable coaxial probara al campo eléctrico Ambos dispositivos son sintonizados generalmente a la frecuencia de operación para proporcionar una mayor sensitividad. La corriente de salida de la sonda es rectificada y conectada directamente a un microamperimetro o puede ser transmitida a un voltimetro electrónico o a un amplificador especial La lectura es proporcional a la amplitud del campo senoidal variante con el tiempo, en el cual la sonda esta inmersa

Cuando una onda plana uniforme viaja a travės de una región no disipativa, y no se presenta una onda reflejada, la sonda indicara la misma amplitud en cada punto, desde luego, el campo instantaneo que muestrea la sonda diferirá en fase por $\beta(z_2 - z_1)$ radianes, a medida que la sonda se mueve de $z = z_1$ a $z = z_2$, pero el sistema es insensible a la fase del campo Los voltajes de amplitud igual son caracteristicos de una onda viajera no atenuada.

Cuando una onda viaja en un medio no disipativo y es reflejada por un conductor perfecto, el campo total es una onda estacionaria y la sonda de voltaje no proporciona ningún voltaje de salida cuando esta situada en un numero entero de medias longitudes de onda desde la superficie reflectora Como la posición de la sonda esta cambiando, su salida varia como $|\text{sen } \beta z|$, donde z es la distancia desde el conductor. La variación senoidal de la amplitud se muestra en la figura 7, es caracteristica de una onda estacionaria.

Una situacion mas complicada se presenta cuando el campo reflejado no es ni el 0 ni el 100 % de la onda incidente Cierta cantidad de energía se transmite a la segunda región y cierta cantidad es reflejada. La región 1, por tanto, sostiene un campo que esta compuesto por ambas, una onda viajera y una onda estacionaria. Se acostumbra describir este campo como una onda estacionaria aunque también este presente una onda viajera. Se verá que ningún punto de los campos mantienen una amplitud cero en todo instante y el grado que el campo se divide entre una onda que viaja y una onda estacionaria verdadera se expresa por la razón entre la maxima amplitud encontrada por la sonda y la amplitud minima.

Utilizando los mismos campos investigados en la sección anterior se pueden combinar la intensidades de campo eléctrico incidente y reflejado

$$E_{x1} = E^{+}_{x1} + E^{-}_{x1}$$

El campo E_{x1} es una función senoidal de t (generalmente con un Angulo de fase distinto de cero), y varia con z de una manera por ahora desconocida. Se inspecciona todo z para encontrar las amplitudes máxima y minima, y determinar su razón. A esta razón se le llama la relacion de onda estacionaria y se simboliza con s.
Ahora se mostrará la mecánica de este procedimiento para el caso en el que el medio 1 sea un dieléctrico perfecto, $\alpha_1 = 0$, pero la región 2 pueda ser cualquier material. Se tiene

$$E^{+}_{xs1} = E^{+}_{x10} e^{-j\beta_1 z}$$
$$E^{-}_{xs1} = \Gamma E^{+}_{x10} e^{j\beta_1 z}$$

donde

$$\Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$$

y η_1 es real y positiva pero η_2 puede ser compleja Entonces Γ puede ser compleja y se toma en cuenta esta posibilidad poniendo

$$\Gamma = |\Gamma| e^{j\phi}$$

Si la region 2 es un conductor perfecto, ϕ es igual a π; y si η_2 es real y menor que η_1, ϕ es tambien igual a π, y si η_2 es real y mas grande que η_1, ϕ es cero. El campo total en la region 1 es

$$E_{xs1} = (e^{-j\beta_1 z} + |\Gamma| e^{j(\beta_1 z + \phi)}) E^{+}_{x10} \qquad (68)$$

Se buscan los valores maximo y minimo de la magnitud de la cantidad compleja dentro del parentesis mas largo Seguramente se tendrá un maximo cuando cada termino en el parentesis largo tenga el mismo angulo de fase entonces, para E^{+}_{x10} positiva y real

$$E_{xs1\,max} = (1 + |\Gamma|) E^{+}_{x10} \qquad (69)$$

y esto sucede cuando

$$-\beta_1 z = \beta_1 z + \phi + 2n\pi \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

Entonces

$$-\beta_1 z_{max} = \frac{\phi}{2} + n\pi \qquad (70)$$

Nótese que un voltaje máximo se encuentra en el plano de la frontera (z = 0) si $\phi = 0$; además $\phi = 0$ cuando Γ es real y positiva. Esto sucede en η_1 y η_2 reales cuando $\eta_2 > \eta_1$. Entonces existe un volumen máximo en la superficie de la frontera cuando la impedancia intrínseca de la región 2 es mayor que la de la región 1 y ambas impedancias son reales.

Para el conductor perfecto $\phi = \pi$, y estos máximos se encuentran en $-\beta_1 z = \pi/2, 3\pi/2$, y así sucesivamente, como se vio antes.

Los mínimos ocurren cuando el ángulo de fase de los dos términos en el paréntesis largo, difiere por 180ª; entonces

$$E_{xs1,min} = (1 - |\Gamma|)E_{x10}^{+} \tag{71}$$

y estos ocurren cuando

$$-\beta_1 z = \beta_1 z + \phi + \pi + 2n\pi \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

o

$$-\beta_1 z_{min} = \frac{\phi}{2} + n\pi + \frac{\pi}{2} \tag{72}$$

Los mínimos estan separados por múltiplos de una media longitud de onda (como los máximos), y para el conductor perfecto el primer mínimo ocurre cuando $-\beta_1 z = 0$, o en la superficie conductora. En general, se encuentra un voltaje mínimo en z = 0 siempre que ϕ = 0, estro ocurre si $\eta_2 < \eta_1$ y ambas son reales

Para ilustrar algunos de estos resultados, considerese una onda de 3 GHz, 100 V/m que se esta propagando en un material que tiene $\varepsilon_{R1} = 4, \mu_{R1} = 1$ y $\sigma_1 = 0$. La onda incide normalmente sobre otro dieléctrico perfecto en la región 2, z > 0 donde $\varepsilon_{R2} = 9$ y $\mu_{R2} = 1$ (Fig. 8).

Se calcula $\omega = 6\pi 10^{9} rad/s$, $\beta_1 = \omega\sqrt{\mu_1 \varepsilon_1} = 40\pi rad/m$, y $\beta_2 = \omega\sqrt{\mu_2 \varepsilon_2} = 60\pi rad/m$. Aunque la longitud de la onda en el aire sería de 10 cm, aquí se encuentra que $\lambda_1 = \frac{2\pi}{\beta_1} = 5cm$, $\lambda_2 = \frac{2\pi}{\beta_2} = 3.33cm$, $\eta_1 = 60\pi\Omega$, $\eta_2 = 40\pi\Omega$ y $\Gamma = \frac{(\eta_2 - \eta_1)}{(\eta_2 + \eta_1)} = -0.2$ Puesto que Γ es real y negativa ($\eta_2 < \eta_1$), habrá un mínimo del campo eléctrico en la frontera, y se repetirá a intervalos de media longitud de onda (2.5 cm) en el dieléctrico 1. Con base en (71), $E_{xs1,min}$ = 80 V/m.

Los máximos de E se encuentran a distancias de 1.25, 3.75, 6.25,...cm desde z = 0 estos máximos tienen todos amplitudes de 120 V/m, como lo predice (69).

No hay máximos o mínimos en la región 2 ya que ahí no existe onda reflejada. La razón de las amplitudes máxima y mínima se llama la relación de onda estacionaria

$$s = \frac{E_{xs1,max}}{E_{xs1,min}} = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|} \tag{73}$$

Puesto que $|\Gamma| \leq 1$, s siempre es positiva y mayor o igual a la unidad. Para el ejemplo anterior.

$$s = \frac{1+|-0.2|}{1-|-0.2|} = \frac{1.2}{0.8} = 1.5$$

Si $|\Gamma| = 1$, las amplitudes reflejada e incidente son iguales, toda la energía incidente es reflejada y s es infinita. Pueden encontrarse planos separados por múltiplos de $\lambda_1/2$, en los que E_{x1} es cero en todo instante. A la mitad entre estos planos, E_{x1} tiene una amplitud máxima de dos veces la longitud de onda incidente.

Si $\eta_2 = \eta_1$, entonces $\Gamma = 0$, no hay energía reflejada y s = 1; las amplitudes máxima y mínima son iguales.

Si la mitad de la potencia incidente es reflejada, $|\Gamma|^2 = 0.5$, $|\Gamma| = 0.707$, y s = 5.83. Como la relacion de onda estacionaria es una razón entre amplitudes, las amplitudes relativas proporcionadas por una sonda permiten su uso para determinar s experimentalmente. Por este motivo la relación de onda estacionaria es un parámetro importante de la línea de transmision, y se usara extensivamente en el siguiente capitulo.

Supóngase ahora que la región 1 es un material disipativo para el cual no es cero. Una onda incidente que viene de la izquierda sufre una atenuación exponencial a medida que se propaga en la dirección +z. La onda reflejada se atenúa conforme se propaga en la dirección –z. Con el tiempo, su amplitud es despreciable comparada con la onda incidente. Entonces, una serie de maximos y mínimos puede percibirse cerca de la superficie reflectora, los cuales se desvanecen a grandes distancias de ella. La figura 9 muestra una gráfica de la amplitud de E_{x1}, cuando la región 2 es un conductor perfecto y la región 1 tiene una constante de propagación $\gamma_1 = 1 + j4\pi$. Debe notarse que ni dos de los máximos tienen la misma amplitud, ni tampoco dos de los mínimos sucesivos. La relacion de onda estacionaria es una función de z, y su valor no puede ser definido específicamente para un caso como el mostrado. A menos que se especifique la posición en la cual se mide la relación de onda estacionaria, resulta mucho mas informativo describir el comportamiento en términos del coeficiente de reflexión y del factor de atenuacion.

Aunque el caso mostrado en la figura 11.9 es extremo, debe notarse también que no existe en la practica la linea de transmisión no disipativa verdadera y la relación de onda estacionaria siempre es una funcion de la posicion con respecto a la carga. El valor de s es plenamente significativo solo cuando no cambia significativamente a través de la región en la cual se esta interesado

Nuevamente restringiendo la atencion a un medio no disipativo 1, se encontrara la relación de las intensidades totales de campo electrico y magnético. Para una onda viajera la relación es igual a $\pm\eta_1$, el signo depende de la direccion de viaje. Sin embargo, la reflexión en un conductor perfecto muestra que existe la posibilidad de que E_{xs1} o H_{ys1} sean iguales a cero en ciertos lugares, y su razon entonces puede variar desde cero hasta un valor infinito. Los campos totales en z = -l son

$$E_{xs1} = (e^{j\beta_1 l} + \Gamma e^{-j\beta_1 l})E_{x10}^{+}$$

$$H_{ys1} = (e^{j\beta_1 l} - \Gamma e^{-j\beta_1 l})\frac{E_{x10}^{+}}{\eta_1}$$

A la relacion se le denomina una impedancia intrinseca de entrada η_{ent},

$$\eta_{ent} = \left.\frac{E_{xs1}}{H_{ys1}}\right|_{z=-l} = \eta_1 \frac{e^{j\beta_1 l} + \Gamma e^{-j\beta_1 l}}{e^{j\beta_1 l} - \Gamma e^{-j\beta_1 l}}$$

Con la expresión $\Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$ y la identidad de Euler, se tiene

$$\eta_{ent} = \eta_1 \times \frac{(\eta_2 + \eta_1)(\cos\beta_1 l + jsen\beta_1 l) + (\eta_2 - \eta_1)(\cos\beta_1 l - jsen\beta_1 l)}{(\eta_2 + \eta_1)(\cos\beta_1 l + jsen\beta_1 l) - (\eta_2 - \eta_1)(\cos\beta_1 l - jsen\beta_1 l)}$$

Esto se simplifica fácilmente para dar

$$\eta_{ent} = \eta_1 \frac{\eta_2 + j\eta_1 \tan\beta_1 l}{\eta_1 + j\eta_2 \tan\beta_1 l} \tag{74}$$

Cuando η_2 es igual a η_1, η_{ent} también es igual a η_1; no existe reflexión, y se dice que el sistema de transmisión es coincidente. Si η_2 = 0 (conductor perfecto), $\eta_{ent} = j\eta_1 \tan\beta_1 l$, la impedancia de entrada es cero cuando $\beta_1 l = n\pi$ y ahí E_{xs1} = 0. También, η_{ent} es infinita en todos los lugares donde H_{ys1} = 0.

Se usara (74) profusamente en el siguiente capitulo en una forma que es aplicable a las lineas de transmisión, pero se concluirá este capitulo sobre ondas planas mostrando como diseñar una ventana transparente para una antena radar. Este problema surge, por que es necesario proteger estas antenas del mal tiempo con cubiertas o domos protectores. Supóngase que la antena esta hacia la izquierda en el espacio libre, z < -l, como muestra la figura 10. La región 1 esta entre z = -l y 0 Se supondrá que la región 1 es una placa de dieléctrico perfecto, haciéndola tan delgada como se pueda, para conservar valida la suposicion de cero perdidas. A la derecha de la region 2, z > 0, esta la region del espacio libre a la cual se envia la señal de radar. Con el propósito de evitar que cualquier reflexión de potencia regrese a la antena o para hacer coincidir la señal de la entena con la que sale al mundo exterior, en la region 2 se hace $\eta_{ent} = \eta_0$ = 377 Ω. Puesto que η_2 = 377, se tiene

$$377 = \eta_1 \frac{3.77 + j\eta_1 \tan\beta_1 l}{\eta_1 + j377\tan\beta_1 l}$$

Multiplicando, se encuentra

$$j377^2 \tan\beta_1 l = j\eta_1^2 \tan\beta_1 l$$

Dado que η_1 < 377 para todos los materiales no magneticos, solo se puede satisfacer esta ecuacion seleccionando $\beta_1 l = n\pi$. El domo protector mas delgado se obtiene cuando $\beta_1 l = \pi$ o $l = \lambda_1/2$. Entonces, si la frecuencia de operacion es 10 000 MHz, se puede seleccionar un plastico ligero bajo en perdidas para el cual ε_{R1} = 2.25 y con un grosor

$$l = \frac{\lambda_1}{2} = \frac{v_1}{2f_1} = \frac{3\times10^8}{2\sqrt{2.25}10^{10}} = 10^{-2}\,m \qquad \text{(o 1 cm)}$$

Si el domo protector fuera de 0.5 cm de grosor, podria mostrarse que η_{ent} = 167.5 Ω y el 14.8% de la potencia incidente podria ser reflejada.

PROBLEMAS A RESOLVER

Problema 1

La intensidad de campo magnético en el aire de una onda plana uniforme es de 20 A/m en la dirección $\mathbf{a}_y$. La onda se propaga en la dirección $\mathbf{a}_z$ a una frecuencia de 2 Grad/s (2 x 10^9(rad/s) Encuentre a) la longitud de onda, b) la frecuencia; c) el periodo; d) la amplitud de **E**.

✓ Resp 0.942 m, 318 MHz; 3.14 ns; 7530 V/m

Problema 2

Sea $\mathbf{E}_s = [500\angle -40^\circ \mathbf{a}_y + (200 - j600)\mathbf{a}_z]e^{-j0.4x}$ V/m en el espacio libre. Encuentre a) ω, b) **E** en (2,3,1), t = 0, c) **E** en (2,3,1) en t = 10 ns, d) **E** en (3,4,2) en t = 20 ns

✓ Resp 119.9 Mrad/s, 36.3$\mathbf{a}_y$ -291$\mathbf{a}_z$ V /m, 478$\mathbf{a}_y$ + 417$\mathbf{a}_z$ V /m; 439$\mathbf{a}_y$ + 632$\mathbf{a}_z$ V /m

Problema 3

Una onda plana uniforme de 9375 MHz se propaga en poliestireno Si la amplitud de la intensidad de campo eléctrico es 20 V/m y el material se supone que es no disipativo, encuentre *a*) la constante de fase, *b*) la longitud de onda (en el poliestireno); *c*) la velocidad de propagación, *d*) la impedancia intrínseca, *e*) la constante de propagación; *f*) la amplitud de la intensidad de campo magnético

✓ *Resp* 314 rad/m, 0.0200 m; 1.877 x 10^8 m/s, 236 Ω; j314 m^{-1}, 0.0848 A/m

Problema 4

Dado un material no magnético, el cual tiene ϵ_R = 2.25 y $\sigma = 10^{-4}$ Ω^{-1}/m encuentre valores numéricos en 2.5 MHz para *a*) la tangente de perdidas, *b*) la constante de atenuación; *c*) la constante de fase, *d*) la impedancia intrínseca

✓ *Resp* 0.320, 0.012 40 Np/m, 0.0796 rad/m, 245∠ 8.86°Ω

Problema 5

Considerese un material para el cual μ_R = 1, ϵ_R = 4, y la tangente de pérdida 0.1. Si estos valores son independientes de la frecuencia para 0.5 MHz ≤ f ≤ 80 MHz, calcule: *a*) σ a 1 y 50 MHz, *b*) λ a 1 y 50 MHz, *c*) v a 1 y 50 MHz

✓ *Resp.* 22.3 y 1113 $\mu\Omega^{-1}$/m, 149.7 y 2.99 m, 1.497 X10^8 m/s dos veces

Problema 6

A frecuencia de 1, 100 y 300 MHz, la constante dieléctrica del hielo hecho de agua pura, tiene valores de 4 15, 3.45 y 3.20, respectivamente, mientras que la tangente de pérdida es 0 12, 0.035, 0 0009, también respectivamente. Si una onda plana uniforme con una amplitud de 100 V/m en z = 0 se propaga a través del hielo, encuentre la densidad de potencia promedio en tiempo en z = 10 m para cada frecuencia

Resp 27 1 y 25 7 W/m^2, 24 7 y 6.31 W/m^2, 23.7 y 8.63 W/m^2

Problema 7

Un tubo de acero esta construido de un material para el cual se puede suponer $\mu_r = 200$ y σ =5x10^6 /m Los radios exterior e interior son de 8 y 6 mm, respectivamente, y la longitud es de 80 m. Si la corriente total transportada por el tubo es 2 cos 10^4 $\pi t A$, encuentre a) la profundidad de piel, b) la resistencia efectiva, c) la resistencia cd, d) la perdidad de potencia promedio en tiempo.

✓ Resp 0.225 mm, 1.1414 Ω, 0 1819Ω, 2.83 W

Problema 8

El plano x = 0 es la frontera entre dos dielectricos perfectos. Para x < 0, $\mu_1 = \mu_0$, ε_1= 3 6π pF/m, y σ = 0, para x > 0, $\mu_2 = \mu_0$, ε_2 = 14 4π pF/m, yσ_2 = 0. Si $E^{+}_{y1}(t) = 60\cos(10^9 t - \beta_1 x)$ V/m, encuentre a) β_1. b) la intensidad de campo magnético incidente como función del tiempo, c) E^{-}_{y1}, d) β_2 e) $E^{+}_{y2}(t)$

✓ Resp. 3 77 rad/m, $H^{+}_{z1}(t)$ = 0 18 cos(10^{9}t – 3 77x) A/m, -20cos(10^{9}t + 3.77x) V/m, 7.54 rad/m; 40cos(10^{9}t – 7 54x) V/m

Problema 9

Sea μ_{R1} = 10, ε_{R1} = 2.5 y σ_1 = 0 en la region 1, z < 0; para z >0, μ_{R1} = 1, ε_{R2} = 4 y σ_2 = 0. Una onda incidente $E^{+}_{x1} = 600\cos(10^9 t - \beta_1 z)$ V/m, se encuentra en la región 1. Encuentre, a) s en la region 1, b) η_{in} en z = -π cm, c) E_{x} en z = -π cm

✓ Resp 4, 470/58.4° Ω ; 523/66 6° V/m

FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA

CURSOS INSTITUCIONALES

DIPLOMADO EN DISEÑO Y ADAPTACIÓN DE ANTENAS

MOD. III. CAMPOS Y ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

DEL 08 AL 16 DE MAYO DEL 2003

ANEXOS SEGUNDA PARTE

CI - 067

Instructor: Ing. Federico Espinoza Sandoval
SECRETARÍA DE MARINA
MAYO DEL 2003

Mg. Federico Espinosa Sandoval.

Velocidad de Fase.

Se sabe que para una onda progresiva $x-vt$ es una constante; por analogía se puede decir que también es una constante $t-\beta x$. Vale decir que t y x deben variar juntos, de tal manera que:

$$\omega t-\beta x=cte$$

Diferenciando con respecto al tiempo se hallará la velocidad de fase constante.

$$\omega-\beta\frac{dx}{dt}=0$$

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\omega}{\beta}$$

Por lo que la velocidad de fase o velocidad de un punto de fase constante está dado por:

$$V=\frac{\omega}{\beta}$$

Si se analiza una sola onda, se podrá observar que la velocidad de fase es igual a la velocidad de propagación.

Consideremos el caso en el que existen dos o más ondas de frecuencias distintas combinándose para formar una onda única modulada en amplitud, como se muestra en la siguiente Figura

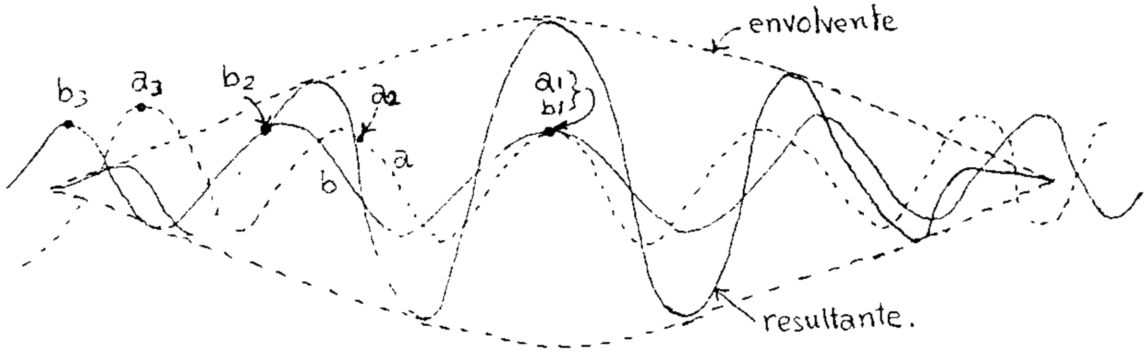


Fig. Ilustración de los fenómenos de velocidad de fase y velocidad de grupo.

a dos ondas de frecuencias ligeramente distintas; si las ondas componentes tienen la misma velocidad, las dos crestas a_1 y b_1 se moverán juntas y el máximo de la envolvente de modulación se moverá con ellas a la misma velocidad. En éstas condiciones la velocidad de fase y velocidad de grupo son iguales.

Si la onda b (que tiene mayor longitud de onda porque tiene menor frecuencia) tiene una velocidad ligeramente mayor que la onda a, las crestas a_1 y b_1 se separan entre sí, y las crestas a_2 y b_2 se juntan, esto hará que en un instante posterior coincidan a_2 y b_2 y generen así otro máximo de la envolvente; habrá otro máximo de la envolvente cuando coincidan a_3 y b_3. Es evidente que la envolvente se desliza hacia atrás, respecto a las ondas componentes, esto quiere decir que la velocidad de grupo es menor que la velocidad de fase de cada una de las ondas componentes, esto es como si las ondas componentes se deslizaran hacia adelante a través de la envolvente.

Si se aumenta la frecuencia, la longitud de onda es menor y si se supone que tiene la mayor velocidad de fase, el caso se invierte totalmente y la envolvente de modulación se desliza hacia adelante, por lo que la velocidad de grupo es mayor que la velocidad de fase de las componentes.

Si se grafica β en función de ω, las velocidades de fase y de grupo pueden determinarse directamente de la gráfica siguiente:

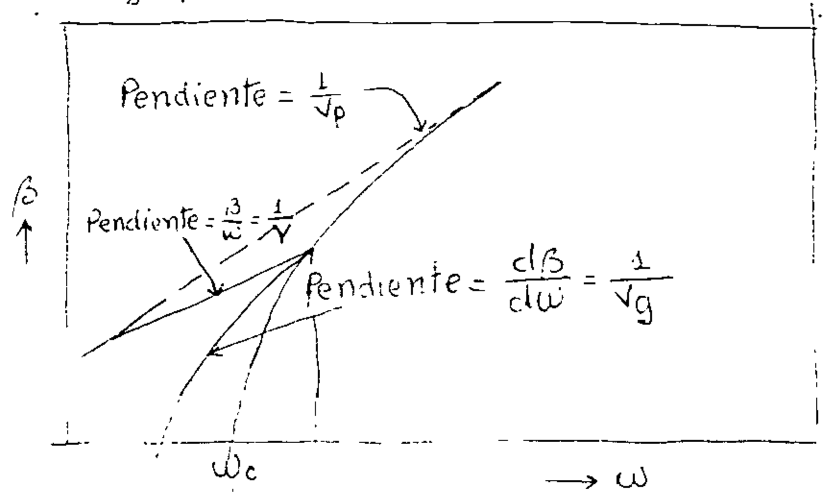


Fig. Muestra de la gráfica de β en función de ω para una línea de transmisión con pérdidas.

Esta es una gráfica típica de β en función de ω para una línea de transmisión con pérdidas y se observa que la pendiente $\frac{1}{V_p} > \frac{d\beta}{d\omega} = \frac{1}{V_g}$ de manera que la velocidad de fase es siempre inferior a la velocidad de grupo pero, si se aumenta la frecuencia, las velocidades se aproximan a la velocidad

$$\frac{1}{\sqrt{LC}} = V_c$$

que se cumple en el caso de líneas sin pérdidas.

En la siguiente Figura se muestra una gráfica de β en función de ω, para una propagación en guías de ondas. Y se observa que $\frac{1}{V_p} < \frac{1}{V_g}$ de manera que la velocidad de fase

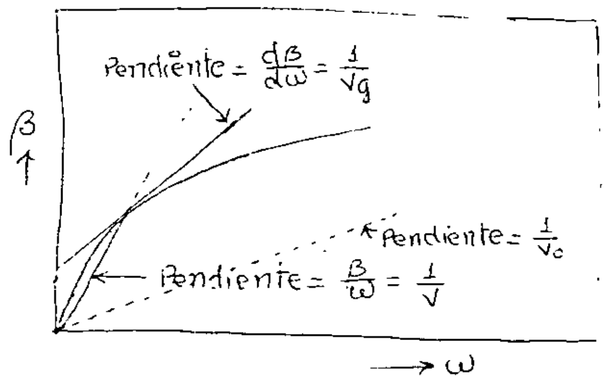


Figura Muestra de la gráfica de β en función de ω para una propagación en guías de onda.

es menor que la velocidad de grupo, pero ambas se aproximan a V_c cuando aumenta la frecuencia.

Para la modulación, si ω varía β permanece constante.
Para medios abiertos o señales a una sola frecuencia, la velocidad de grupo es igual a la velocidad de fase.

Para un dieléctrico perfecto

$$V_p = \frac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = \frac{3 \times 10^8}{\sqrt{\varepsilon_r}} \quad \left[\frac{m}{s}\right]$$

Por otro lado, β se puede expresar en función de las características en la siguiente forma:

$$\beta = \omega \sqrt{LC}$$

$$\beta = \omega \sqrt{\left(\frac{\mu}{\pi} \ln \frac{b}{a}\right)\left(\frac{\pi \varepsilon}{\ln \frac{b}{a}}\right)}$$

$$\beta = \omega \sqrt{\mu \varepsilon}$$

Otra importante relación entre la velocidad de fase y la longitud de onda es:

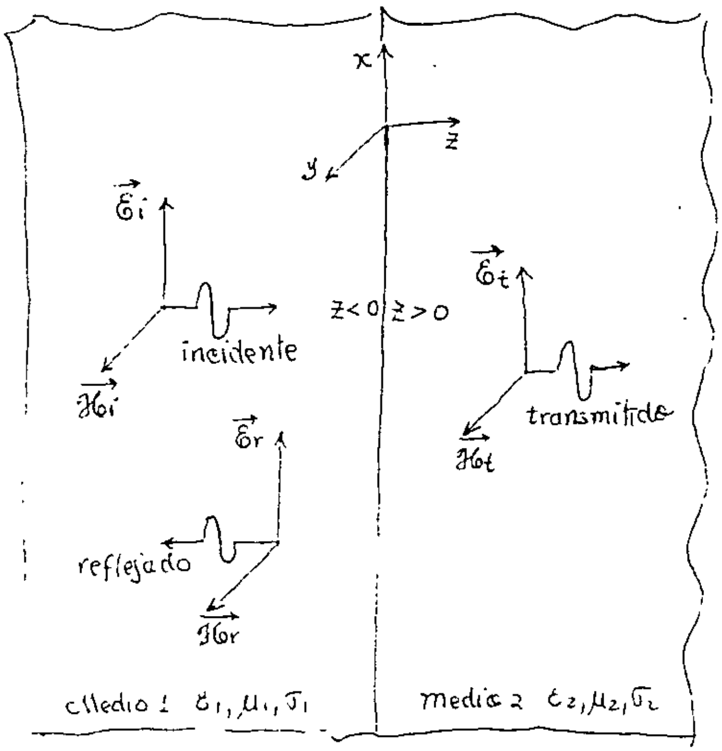
$$V = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi f}{\frac{2\pi}{\lambda}} = \lambda f$$

Puede decirse que la longitud de onda λ es la distancia que debe recorrer una onda para que β de origen a la rotación de fase de 360° ó 2π radianes.

La velocidad de fase es $V_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon}}$ que es igual a la velocidad de propagación.
y $V_g = V_p = \frac{\omega}{\beta}$ en medios no dispersivos.

Incidencia Normal de Ondas planas uniformes Sobre fronteras de planos.

Consideremos la siguiente Figura, la cual muestra un plano de frontera entre dos medios



diferentes, teniendo los materiales propiedades ε_1, μ_1 y σ_1 para el medio 1 y ε_2, μ_2 y σ_2 para el medio 2. Una onda plana viajando hacia adelante y a la derecha en el medio 1 está incidiendo sobre la interface normal a la frontera. Por lo que denotaremos a este campo incidente en forma fasorial como:

$$\hat{E}i = Ei\, e^{-\gamma_1 z}\, \hat{a}_x$$

$$= Ei\, e^{-\alpha_1 z}\, e^{-j\beta_1 z}\, \hat{a}_x \qquad (1)$$

$$\hat{H}i = \frac{Ei}{\hat{\eta}_1}\, e^{-\gamma_1 z}\, \hat{a}_y$$

$$= \frac{Ei}{\eta_1}\, e^{-\alpha_1 z}\, e^{-j\beta_1 z}\, e^{-j\theta_{\eta_1}}\, \hat{a}_y \qquad (2)$$

donde: $\gamma_1 = \alpha_1 + j\beta_1$

$$= \sqrt{j\omega\mu_1(\sigma_1 + j\omega\varepsilon_1)} \qquad (3)$$

y $\hat{\eta}_1 = \eta_1 \angle\theta_{\eta_1}$

$$= \sqrt{\frac{j\omega\mu_1}{\sigma_1 + j\omega\varepsilon_1}} \qquad (4)$$

La frontera da lugar a una onda reflejada, la cual representamos como:

$$\hat{E}_r = E_r e^{\gamma_1 z}\,\hat{a}_x$$
$$= E_r e^{\alpha_1 z} e^{j\beta_1 z}\,\hat{a}_x \qquad (5)$$

$$\hat{H}_r = -\frac{E_r}{\hat{\eta}_1} e^{\gamma_1 z}\,\hat{a}_y$$
$$= -\frac{E_r}{\eta_1} e^{\alpha_1 z} e^{j\beta_1 z} e^{-j\theta_{\eta_1}}\,\hat{a}_y \qquad (6)$$

De acuerdo con la solución general de la ecuación de onda en este material. Una porción de la onda incidente será transmitida en el segundo medio que representamos como:

$$\hat{E}_t = E_t e^{-\gamma_2 z}\,\hat{a}_x$$
$$= E_t e^{-\alpha_2 z} e^{-j\beta_2 z}\,\hat{a}_x \qquad (7)$$

$$\hat{H}_t = \frac{\hat{E}_t}{\hat{\eta}_2} e^{-\gamma_2 z}\,\hat{a}_y$$
$$= \frac{E_t}{\eta_2} e^{-\alpha_2 z} e^{-j\beta_2 z} e^{-j\theta_{\eta_2}}\,\hat{a}_y \qquad (8)$$

donde: $\gamma_2 = \alpha_2 + j\beta_2$

$$= \sqrt{j\omega\mu_2(\sigma_2 + j\omega\varepsilon_2)} \qquad (9)$$

y $\hat{\eta}_2 = \eta_2 \angle\theta_{\eta_2}$

$$= \sqrt{\frac{j\omega\mu_2}{\sigma_2 + j\omega\varepsilon_2}} \qquad (10)$$

Razonamos que allí no estará ninguna componente viajando hacia atrás de la onda transmitida, sin embargo, suponemos que el segundo medio sea infinito en extensión de tal manera que no se produzcan reflexiones allí. Las soluciones generales en las ecuaciones (1) al (6) y (7) al (8) satisfacen a las ecuaciones de Maxwell en las regiones respectivas. Si las incógnitas $\hat{E}_i$, $\hat{E}_r$ y $\hat{E}_t$ en las ecuaciones anteriores puedan hallarse tal que las condiciones de frontera en $z = 0$ se satisfagan, se habrá determinado una solución válida.

En la frontera en $z = 0$, las condiciones requieren que las componentes tangenciales de los campos eléctricos y magnéticos sean continuos. Por lo tanto $\hat{E}_i$, $\hat{E}_r$ y $\hat{E}_t$ se definirán estar en la dirección de x.

$$\hat{E}i + \hat{E}r = \hat{E}t \quad \text{en } z = 0 \tag{11}$$

y similarmente para $\hat{H}i$, $\hat{H}r$ y $\hat{H}t$ las cuales serán definidas estar en la dirección "y"

$$\hat{H}i + \hat{H}r = \hat{H}t \quad \text{en } z = 0 \tag{12}$$

Sustituyendo las formas de los campos vectoriales en $z=0$ en (11) y (12), obtenemos:

$$\frac{\hat{E}r}{\hat{E}i} = \frac{\hat{\eta}_2 - \hat{\eta}_1}{\hat{\eta}_2 + \hat{\eta}_1} = \hat{\Gamma} \tag{13}$$

y $$\frac{\hat{E}t}{\hat{E}i} = \frac{2\hat{\eta}_2}{\hat{\eta}_2 + \hat{\eta}_1} = \hat{T} \tag{14}$$

y podrá probarse un importante resultado:

$$1 + \hat{\Gamma} = \hat{T}$$

por sustitución directa de (13) y (14). Las cantidades $\hat{\Gamma}$ y $\hat{T}$ son los coeficientes de reflexión y transmisión, respectivamente, de la frontera. Por lo que es simple demostrar que $|\hat{\Gamma}| \leq 1$. La magnitud de $\hat{T}$ puede exceder la unidad. Notar que $\hat{\Gamma}$ y $\hat{T}$ serán reales únicamente si ambas regiones son sin pérdidas, por ejm. que $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$. De otra manera $\hat{\Gamma}$ y $\hat{T}$ serán en general complejos, que escribimos como:

$$\hat{\Gamma} = \Gamma \angle \theta_\Gamma \tag{15}$$

$$\hat{T} = T \angle \theta_T \tag{16}$$

Supongamos ahora que la forma incidente es $\hat{E}i = Em\, e^{-\hat{\gamma}_1 z}\, \hat{a}_x$ donde la magnitud de ésta onda incidente es identificada por Em. De ésta manera las formas fasoriales de los campos vectoriales se convierten, en términos de la magnitud del campo incidente, usando las ecuaciones (13) y (14)

$$\hat{E}i = Em\, e^{-\hat{\gamma}_1 z}\, \hat{a}_x \tag{17}$$

$$\hat{H}i = \frac{Em}{\hat{\eta}_1} e^{-\hat{\gamma}_1 z}\, \hat{a}_y \tag{18}$$

$$\hat{E}r = \hat{\Gamma}\, Em\, e^{\hat{\gamma}_1 z}\, \hat{a}_x \tag{19}$$

$$\hat{H}r = -\frac{\hat{\Gamma}\, Em\, e^{\hat{\gamma}_1 z}}{\hat{\eta}_1} \hat{a}_y \tag{20}$$

$$\hat{E}t = \hat{T}\, Em\, e^{-\hat{\gamma}_2 z}\, \hat{a}_x \tag{21}$$

$$\hat{H}t = \frac{\hat{T}\, Em\, e^{-\hat{\gamma}_2 z}}{\hat{\eta}_2} \hat{a}_y \tag{22}$$

multiplicando a las ecuaciones de la (17) a la (22) por $e^{j\omega t}$ y tomando la parte real del resultado, obtendremos las formas en el dominio del tiempo de los campos vectoriales:

$$\hat{\mathcal{E}}i = Em\, e^{-\alpha_1 z} \cos(\omega t - \beta_1 z)\, \hat{a}_x \qquad (23)$$

$$\hat{\mathcal{H}}i = \frac{Em}{\eta_1} e^{-\alpha_1 z} \cos(\omega t - \beta_1 z - \theta_{\eta_1})\, \hat{a}_y \qquad (24)$$

$$\hat{\mathcal{E}}r = \Gamma\, Em\, e^{\alpha_1 z} \cos(\omega t + \beta_1 z + \theta_\Gamma)\, \hat{a}_x \qquad (25)$$

$$\hat{\mathcal{H}}r = -\frac{\Gamma Em}{\eta_1} e^{\alpha_1 z} \cos(\omega t + \beta_1 z + \theta_\Gamma - \theta_{\eta_1})\, \hat{a}_y \qquad (26)$$

$$\hat{\mathcal{E}}t = T\, Em\, e^{-\alpha_2 z} \cos(\omega t - \beta_2 z + \theta_T)\, \hat{a}_x \qquad (27)$$

$$\hat{\mathcal{H}}t = \frac{T Em}{\eta_2} e^{-\alpha_2 z} \cos(\omega t - \beta_2 z + \theta_T - \theta_{\eta_2})\, \hat{a}_y \qquad (28)$$

La densidad de potencia vectorial de la onda transmitida es:

$$\hat{S}_{av,t} = \frac{1}{2} Re\left(\hat{E}_t \times \hat{H}_t^*\right)$$

$$= \frac{1}{2} Re\left(\hat{T}\, Em\, e^{-\gamma_2 z}\, \frac{\hat{T}^* Em\, e^{-\gamma_2^* z}}{\hat{\eta}_2^*}\right) \hat{a}_z$$

$$= \frac{1}{2} \frac{Em^2 T^2}{\eta_2} e^{-2\alpha_2 z} \cos\theta_{\eta_2}\, \hat{a}_z \qquad \left[\frac{W}{m^2}\right] \qquad (29)$$

Donde denotamos $|\hat{T}| = T$ y $|\hat{\eta}_2| = \eta_2$. Observemos que esto es un cálculo sencillo en el segundo medio ya que solamente hay una onda en este medio.

Medio sin Pérdidas ($\sigma_1 = \sigma_2 = 0$)

En este caso, los resultados anteriores, se vuelven completamente sencillos. El coeficiente de reflexión, el coeficiente de transmisión y la Impedancia intrínseca se convierten en números reales

$$\eta_1 = \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}} \qquad (30)$$

$$\eta_2 = \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} \qquad (31)$$

$$\hat{T} = T\,\underline{|0^\circ} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} \qquad (32)$$

$$\hat{\Gamma} = \Gamma\,\underline{|0^\circ} = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} \qquad (33)$$

Como σ_1 y $\sigma_2 = 0$ significa que α_1 y $\alpha_2 = 0$, tal que:

$$\gamma_1 = j\beta_1 \tag{34}$$

$$\gamma_2 = j\beta_2 \tag{35}$$

donde:

$$\beta_1 = \omega\sqrt{\mu_1 \varepsilon_1} \tag{36}$$

$$\beta_2 = \omega\sqrt{\mu_2 \varepsilon_2} \tag{37}$$

Las formas fasoriales de los campos vectoriales en las ecuaciones (17) a la (22) se convierten en:

$$\hat{E}_i = E_m e^{-j\beta_1 z}\,\hat{a}_x \tag{38}$$

$$\hat{H}_i = \frac{E_m}{\eta_1} e^{-j\beta_1 z}\,\hat{a}_y \tag{39}$$

$$\hat{E}_r = \Gamma E_m e^{j\beta_1 z}\,\hat{a}_x \tag{40}$$

$$\hat{H}_r = -\frac{\Gamma E_m}{\eta_1} e^{j\beta_1 z}\,\hat{a}_y \tag{41}$$

$$\hat{E}_t = T E_m e^{-j\beta_2 z}\,\hat{a}_x \tag{42}$$

$$\hat{H}_t = \frac{T E_m}{\eta_2} e^{-j\beta_2 z}\,\hat{a}_y \tag{43}$$

Para este caso, las formas del dominio del tiempo en las ecuaciones (23) al (28) se simplifican en:

$$\hat{\mathcal{E}}_i = E_m \cos(\omega t - \beta_1 z)\,\hat{a}_x \tag{44}$$

$$\hat{\mathcal{H}}_i = \frac{E_m}{\eta_1} \cos(\omega t - \beta_1 z)\,\hat{a}_y \tag{45}$$

$$\hat{\mathcal{E}}_r = \Gamma E_m \cos(\omega t + \beta_1 z)\,\hat{a}_x \tag{46}$$

$$\hat{\mathcal{H}}_r = -\frac{\Gamma E_m}{\eta_1} \cos(\omega t + \beta_1 z)\,\hat{a}_y \tag{47}$$

$$\hat{\mathcal{E}}_t = T E_m \cos(\omega t - \beta_2 z)\,\hat{a}_x \tag{48}$$

$$\hat{\mathcal{H}}_t = \frac{T E_m}{\eta_2} \cos(\omega t - \beta_2 z)\,\hat{a}_y \tag{49}$$

Los campos fasoriales totales en la región 1 son, de las ecuaciones (38) a la (43)

$$\hat{E}_1 = \hat{E}i + \hat{E}r$$
$$= [E_m e^{-j\beta_1 z} + E_m \Gamma e^{j\beta_1}]\,\hat{a}_x$$
$$= E_m e^{-j\beta_1 z}\,[1 + \Gamma e^{j2\beta_1 z}]\,\hat{a}_x \qquad (49)$$

$$\hat{H}_1 = \hat{H}i + \hat{H}r$$
$$= \frac{E_m}{\eta_1} e^{-j\beta_1 z}\,[1 - \Gamma e^{j2\beta_1 z}]\,\hat{a}_y \qquad (50)$$

La magnitud del campo eléctrico total en la región 1 varía con z de acuerdo a la variación del término con barras en las ~~ecuaciones~~ (49):

$$|\hat{E}_1| = E_m \left| 1 + \Gamma e^{j2\beta_1 z} \right| \qquad (51)$$

La magnitud del término entre barras, puede representarse en la siguiente figura.

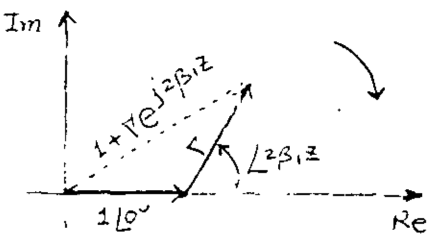


Figura . Diagrama de la manivela .

que muestra la suma de los términos entre barras conforme z varía

Para distancias desde la frontera, z es muy negativo, tal que el vector $\Gamma e^{j2\beta_1 z}$ gira en la dirección ~~contraria~~ de las manecillas del reloj alrededor del tope del vector $1\angle 0°$

Para Γ positivo, el máximo ocurrirá en $z=0$ también como en $2\beta_1 z = -2n\pi$ para $n = 1, 2,$. después que $\beta_1 = 2\pi/\lambda_1$, el máximo ocurre en $z = -n\lambda_1/2$, o en múltiples de una media longitud de onda desde la frontera.

$$z = -\frac{n\lambda_1}{2}$$

$$|\hat{E}_1|_{max} = E_m(1+\Gamma) \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (52)$$

$$\Gamma > 0$$

El mínimo ocurrirá cuando $2\beta_1 z = -m\pi$ para $m = 1, 3, 5, ..$ o $z = -m\lambda_1/4$; Esto es en múltiplos de un cuarto de longitud de onda desde la frontera.

$$z = -\frac{m\lambda_1}{4}$$

$$|\hat{E}_1|min = Em\,(1-\Gamma) \qquad m = 1, 3, 5, \ldots \tag{53}$$

Esto es trazado (para un tiempo fijo) en la siguiente figura.

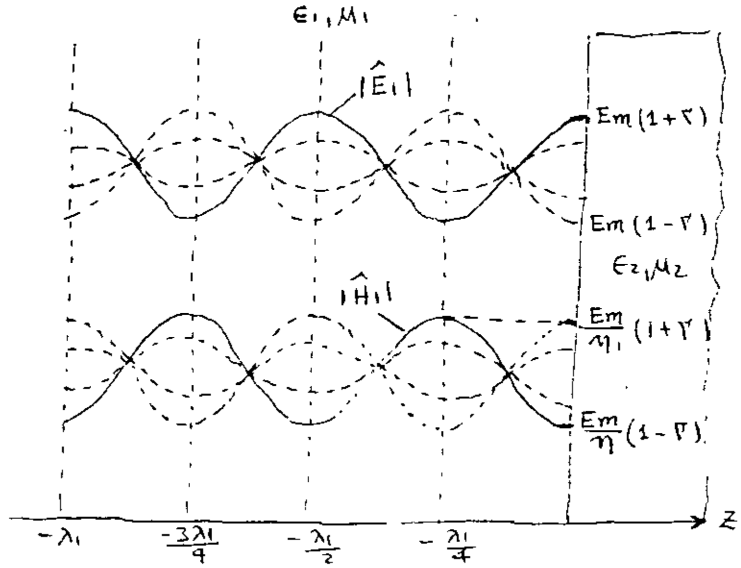


Figura.
Variación de los campos totales en la región 1, $\Gamma > 0$

Note de la ecuación (50) que el campo magnético total tiene las variaciones similares pero está 180° fuera de fase con el campo eléctrico. Observemos también que el máximo adyacente en cada forma de onda están separados por $\lambda_1/2$ y que un máximo y su mínimo adyacente están separados por $\lambda_1/4$.

En el dominio del tiempo en cada z, éstas magnitudes varían sinusoidalmente, los resultados se muestran en la figura de arriba por las líneas punteadas. La combinación de una onda viajando hacia adelante y una onda viajando hacia atrás resultará en una forma de onda estacionaria.

Para un coeficiente de reflexión que sea negativo, $\Gamma < 0$, los resultados anteriores, se invertirán esto es, $|\hat{H}_1|max$ y $|\hat{E}_1|min$ ocurren en $z = 0$. En ésta forma $|\hat{E}_1|max = 1 - \Gamma$ y $|\hat{E}_1|min = 1 + \Gamma$. Para uno u otro caso, $\Gamma < 0$ o $\Gamma > 0$, vemos que:

$$|\hat{E}_1|max = 1 + |\Gamma| \tag{54}$$

$$|\hat{E}_1|\,min = 1 - |\Gamma| \tag{55}$$

La relación entre la máxima y la mínima adyacente, sin embargo, es el mismo para ambos casos; ésto es, el máximo adyacente así como el mínimo están separados por $\lambda/2$ y un máximo y un mínimo adyacente están separados por $\lambda/4$.

La razón de los valores máximos y mínimos es referido como la razón de onda estacionaria (SWR) que será identificado simplemente por el símbolo **S**

$$S = \frac{|\hat{E}_1|\,máx}{|\hat{E}_1|\,mín} = \frac{1+|\Gamma|}{1-|\Gamma|} \qquad (56)$$

resolviendo para $|\Gamma|$ en términos de S, obtendremos:

$$|\Gamma| = \frac{S-1}{S+1} \qquad (57)$$

Para el caso del medio sin pérdidas ($\sigma_1 = \sigma_2 = 0$), se puede calcular la Densidad de Potencia promedio de la onda como:

$$S_{av,i} = \frac{1}{2}\,Re\,(\hat{E}_i \times \hat{H}_i^*)$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{E_m^2}{\eta_1}\,\hat{a}_z \qquad \sigma_1 = \sigma_2 = 0 \qquad (58)$$

y en forma similar:

$$S_{av,r} = -\frac{1}{2}\,\frac{E_m^2\,\Gamma^2}{\eta_1}\,\hat{a}_z \qquad \sigma_1 = \sigma_2 = 0 \qquad (59)$$

$$S_{av,t} = \frac{1}{2}\,\frac{E_m^2\,T^2}{\eta_2}\,\hat{a}_z \qquad \sigma_1 = \sigma_2 = 0 \qquad (60)$$

De estos resultados, puede establecerse la siguiente relación

$$|S_{av,i}| = |S_{av,r}| + |S_{av,t}| \qquad \sigma_1 = \sigma_2 = 0 \qquad (61)$$

La ecuación (61) puede ser proporcionada por sustitución directa de (58), (59) y (60) dándonos:

$$1 = \Gamma^2 + \frac{\eta_1}{\eta_2}\,T^2 \qquad \sigma_1 = \sigma_2 = 0 \qquad (62)$$

y la ecuación (62) podrá ser verificada sustituyendo (32) y (33). (Las cuales son cantidades reales para ésta situación). La contraparte vectorial para la ecuación (61) es:

$$S_{av,i} + S_{av,r} = S_{av,t} \qquad \sigma_1 = \sigma_2 = 0 \qquad (63)$$

La cual indica la conservación de la potencia viajando en la dirección $+z$ que constituye un resultado lógico de ambos medios que son sin pérdidas. Notar que el porcentaje de la potencia total en la región 1, la cual reside en la onda reflejada es proporcional a Γ^2

Incidencia sobre Perfectos Conductores ($\sigma_2 = \infty$)

Supongamos ahora que el medio 2 sea un perfecto conductor ($\sigma_2 = \infty$). Por consiguiente los campos en un perfecto conductor serán iguales a cero, aquí no habrá onda transmitida y las condiciones de frontera en $z = 0$ se convierten en.

$$\hat{E}i + \hat{E}r = 0 \qquad \text{en } z = 0 \qquad (64)$$

$$\hat{E}r = -\hat{E}i \qquad \text{en } z = 0 \qquad (65)$$

$$\hat{E}i = Em\, e^{-\gamma_1 z}\, \hat{a}_x \qquad (66)$$

$$\therefore \quad \hat{E}r = -Em\, e^{\gamma_1 z}\, \hat{a}_x \qquad (67)$$

Notemos que esto puede haberse obtenido directamente por realización que $\hat{\eta}_2 = 0$ y en esta forma el coeficiente de reflexión en la ecuación (13) se convierte en:

$$\hat{\Gamma} = -1 \qquad (68)$$

y el coeficiente de transmisión en la ecuación (14) se convierte en:

$$\hat{T} = 0 \qquad (69)$$

En esta forma los campos totales en la región 1, se convierten a:

$$\hat{E}_1 = \hat{E}i + \hat{E}r$$

$$= Em\,(e^{-\gamma_1 z} - e^{\gamma_1 z})\,\hat{a}_x \qquad (70)$$

$$\hat{H}_1 = \hat{H}i + \hat{H}r$$

$$= \frac{Em}{\eta}\,(e^{-\gamma_1 z} + e^{\gamma_1 z})\,\hat{a}_y \qquad (71)$$

Supongamos ahora que el medio 1 es sin pérdidas, $\sigma_1 = 0$. Los campos totales en el medio 1 se convierte en:

$$\hat{E}_1 = \hat{E}i + \hat{E}r$$

$$= Em\,(e^{-j\beta_1 z} - e^{+j\beta_1})\,\hat{a}_x$$

$$= -2j\,Em\,\operatorname{sen}\beta_1 z\,\hat{a}_x \qquad (72)$$

$$\hat{H}_1 = \hat{H}i + \hat{H}r$$

$$= \left(\frac{Em}{\eta_1}\,e^{-j\beta_1 z} + \frac{Em}{\eta_1}\,e^{j\beta_1 z}\right)\hat{a}_y$$

$$= 2\,\frac{Em}{\eta_1}\cos\beta_1 z\,\hat{a}_y \qquad (73)$$

Las expresiones del dominio de tiempo se convierten en:

$$\mathcal{E}_1 = \mathrm{Re}\,(\hat{E}_1 e^{j\omega t})$$

$$= 2E_m \operatorname{sen}\beta_1 z \operatorname{sen}\omega t\ \hat{a}_x \qquad (74)$$

$$\mathcal{H}_1 = \frac{2E_m}{\eta_1}\cos\beta_1 z \cos\omega t\ \hat{a}_y \qquad (75)$$

Los campos totales representan, una vez más, a las ondas estacionarias.
Las magnitudes de los campos fasoriales son:

$$|\hat{E}_1| = 2E_m\,|\operatorname{sen}\beta_1 z|$$

$$= 2E_m\left|\operatorname{sen}\frac{2\pi z}{\lambda_1}\right| \qquad (76)$$

$$|\hat{H}_1| = 2\frac{E_m}{\eta_1}\left|\cos\frac{2\pi z}{\lambda_1}\right| \qquad (77)$$

Los cuales son trazados en la siguiente figura. En donde notamos que las propiedades

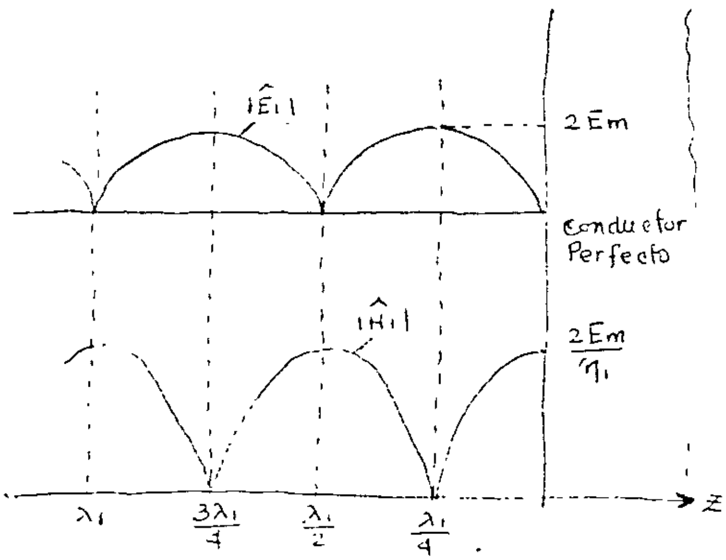


Figura   Variación de los campos totales incidentes a la superficie de un conductor perfecto.

de separación de los máximos y mínimos adyacentes, son los mismos como para el caso general. La única diferencia aquí es que el mínimo sea cero; esto es el campo eléctrico es cero en múltiplos de $\lambda_1/2$ desde la superficie y el campo magnético es cero en múltiplos impares de $\lambda_1/4$ desde la superficie. Por lo tanto el mínimo sea cero, la razón de onda estacionaria S es infinito.

En la superficie del conductor perfecto ($z=0$) el campo magnético tangencial se convierte en:

$$\hat{\mathcal{H}}_{01}\Big|_{z=0} = \frac{2E_m}{\eta_1}\cos\omega t\ \hat{a}_y \qquad (78)$$

Incidencia oblícua de ondas planas Uniformes sobre fronteras planas.

A continuación consideraremos, a las ondas planas uniformes que sean incidentes en los planos de fronteras en ángulos arbitrarios de incidencia. Y nuevamente supondremos que la frontera entre los dos medios está en el plano xy. Los vectores de Poynting de las ondas incidentes, reflejadas y transmitidas se supondrán se encuentren en el plano xy; esto será referido como un plano de incidencia. El ángulo de incidencia, θ_i, será medido con respecto a una normal a la superficie como se muestra en la siguiente Figura.

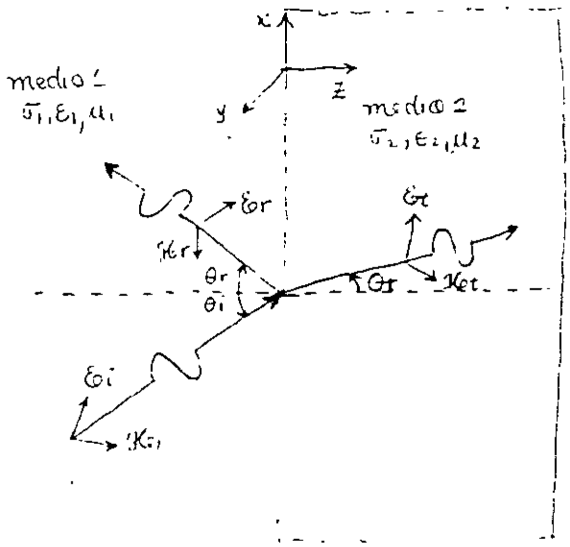


Figura. Incidencia oblícua de ondas planas uniformes sobre fronteras de planos.

Similarmente, el ángulo de reflexión de la onda reflejada, θ_r, será medido también con respecto a la normal. Una porción de la onda incidente será transmitida en el medio 2, y el ángulo de transmisión, y el ángulo de transmisión de ésta onda transmitida, θ_t, será medido también con respecto a una normal a la frontera, como se observa en la figura dada.

En el caso de la incidencia normal considerado anteriormente, podremos suponer sin pérdida de generalidad, que el campo eléctrico de la onda incidente está polarizado en la dirección x. Para la incidencia oblicua, tenemos un número infinito de distintas posibilidades para la polarización del campo eléctrico de la onda incidente.

Propagación en direcciones de espacios arbitrarios.

Considere una onda plana uniforme propagándose en la dirección z' en un sistema coordenado ortogonal compuesto de los ejes x', y' y z' como se ilustra en la siguiente figura.

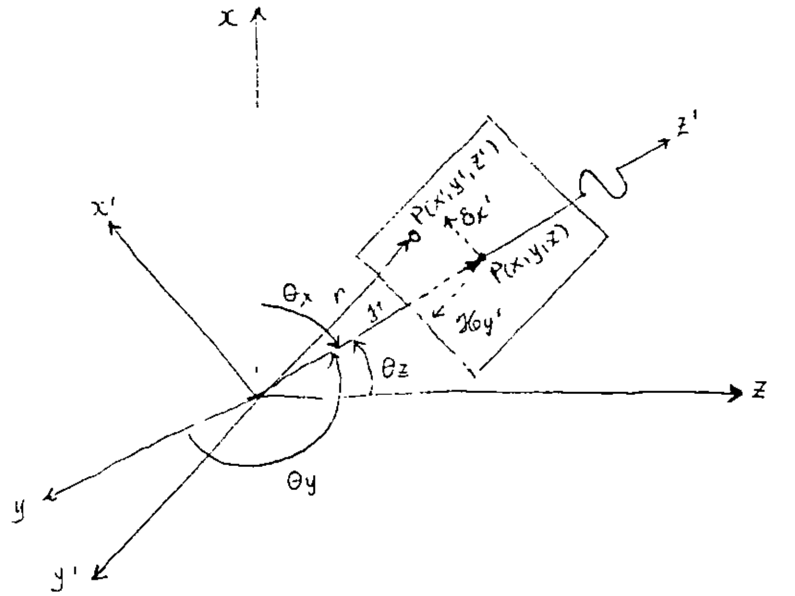


Figura Propagación en direcciones de espacios arbitrarios.

Los campos fasoriales en este sistema coordenado, son tomando en cuenta a nuestros resultados anteriores los escribimos como:

$$\hat{E} = E_m e^{-\gamma z'} \hat{a}_{x'} \qquad (79)$$

$$\hat{H} = \frac{E_m}{\eta} e^{-\gamma z'} \hat{a}_{y'} \qquad (80)$$

Esencialmente, estamos interesados en una rotación de los dos sistemas coordenados. Esto lo acompletamos haciendo uso de los cosenos directores.

$$z' = \cos\theta_x x + \cos\theta_y y + \cos\theta_z z \qquad (81)$$

En esta forma podemos escribir

$$e^{-\gamma z'} = e^{-\gamma(\cos\theta_x x + \cos\theta_y y + \cos\theta_z z)} \qquad (82)$$

Este resultado puede describirse en una forma más compacta, si definimos al vector de propagación como:

$$\gamma = \gamma\, \hat{a}_z \qquad (83)$$

la cual tiene una magnitud γ y una dirección en la dirección de propagación de la onda.

También, podemos definir al radio vectorial dirigido desde el origen común de los sistemas coordenados a un punto en el plano conteniendo a los campos vectoriales eléctrico y magnético de la onda, como fue mostrado en la figura anterior.

$$\begin{aligned} r &= x'\hat{a}_{x'} + y'\hat{a}_{y'} + z'\hat{a}_{z'} \\ &= x\hat{a}_x + y\hat{a}_y + z\hat{a}_z \end{aligned} \tag{84}$$

El producto de γ y r da :

$$\begin{aligned} \gamma \cdot r &= \gamma z' \\ &= \gamma x\, \hat{a}_{z'} \cdot \hat{a}_x - \gamma y\, \hat{a}_{z'} \cdot \hat{a}_y + \gamma z\, \hat{a}_{z'} \cdot \hat{a}_z \end{aligned} \tag{85}$$

Esto se reduce a :

$$\gamma \cdot r = \gamma(\cos\theta_x\, x + \cos\theta_y\, y + \cos\theta_z\, z) \tag{86}$$

ya que :

$$\begin{aligned} \hat{a}_{z'} \cdot \hat{a}_x &= \cos\theta x \\ \hat{a}_{z'} \cdot \hat{a}_y &= \cos\theta_y \\ \hat{a}_{z'} \cdot \hat{a}_z &= \cos\theta_z \end{aligned} \tag{87}$$

Por lo tanto, los términos exponenciales en las ecuaciones (79) y (80), pueden ser escritos en el sistema sin primas en una manera compacta como :

$$\begin{aligned} e^{-\gamma z'} &= e^{-\gamma \cdot r} \\ &= e^{-\gamma_x x - \gamma_y y - \gamma_z z} \\ &= e^{-\gamma_x x} \cdot e^{-\gamma_y y} \cdot e^{-\gamma_z z} \end{aligned} \tag{88}$$

donde :

$$\begin{aligned} \gamma_x &= \gamma\cos\theta_x \\ \gamma_y &= \gamma\cos\theta_y \\ \gamma_z &= \gamma\cos\theta_z \end{aligned} \tag{89}$$

son las proyecciones del vector de propagación sobre los ejes coordenados sin primas, que constituye un resultado importante, ya que aparece que las constantes de atenuación y de fase de la onda en la dirección z' tenga componentes en las direcciones x, y y z.

Notar que, por construcción, la proyección de $\hat{r}$, sobre γ es constante a pesar de la selección del punto P. (El punto P está en un plano que es ortogonal a γ). Confirmándonos esto que el plano conteniendo a los campos vectoriales es un plano de fase constante y amplitud uniforme para la onda.

La tarea que resta es escribir a los campos vectoriales eléctrico y magnético de las ecuaciones (79) y (80) en términos de los ejes del sistema no primados, quedando en la siguiente forma:

$$\hat{E} = (\hat{E}_x \hat{a}_x + \hat{E}_y \hat{a}_y + \hat{E}_z \hat{a}_z)\, e^{-\gamma_x x - \gamma_y y - \gamma_z z} \qquad (90)$$

$$\hat{H} = (\hat{H}_x \hat{a}_x + \hat{H}_y \hat{a}_y + \hat{H}_z \hat{a}_z)\, e^{-\gamma_x x - \gamma_y y - \gamma_z z} \qquad (91)$$

donde $\hat{E}_x$, $\hat{E}_y$, $\hat{E}_z$, y $\hat{H}_x$, $\hat{H}_y$, $\hat{H}_z$ son las proyecciones de los campos vectoriales correspondientes en el sistema coordenado no primado sobre los ejes x, y y z.

Ahora que entendimos el resultado final, será una materia sencilla en cualquier problema específico transformar a los campos vectoriales del sistema coordenado primado al sistema coordenado no primado. El proceso consiste de:

1) Determinar las proyecciones del vector de propagación sobre los ejes no primados para dar γ_x, γ_y, y γ_z.

2) Determinar las proyecciones de los campos vectoriales eléctricos y magnéticos sobre los ejes no primados para dar $\hat{E}_x$, $\hat{E}_y$, $\hat{E}_z$, $\hat{H}_x$, $\hat{H}_y$ y $\hat{H}_z$.

3) Escribir la forma de estos campos vectoriales como en las ecuaciones (90) y (91). Esto constituye la esencia del resultado.

Existe un resultado general adicional. Si definimos a un vector unitario en la dirección de propagación como:

$$\begin{aligned} \hat{a}_n &= a_{z'} \\ &= \frac{\gamma}{|\gamma|} \\ &= \cos\theta_x \hat{a}_x + \cos\theta_y \hat{a}_y + \cos\theta_z \hat{a}_z \end{aligned} \qquad (92)$$

Y podemos obtener una expresión general para el campo magnético como:

$$\hat{H} = \frac{\hat{a}_n \times \vec{E}}{\hat{\eta}} \qquad (93)$$

Una vez, que el campo vectorial eléctrico es escrito en el sistema coordenado sin primas como en la ecuación (90), es una materia sencilla, calcular al campo vectorial magnético correspondiente dado en (91) como

$$(\hat{H}_x \hat{a}_x + \hat{H}_y \hat{a}_y + \hat{H}_z \hat{a}_z) = \frac{\hat{a}_n \times (\hat{E}_x \hat{a}_x + \hat{E}_y \hat{a}_y + \hat{E}_z \hat{a}_z)}{\hat{\eta}} \qquad (94)$$

Raramente se necesitará usar este resultado, por lo que hay que ser muy cuidadosos en efectuar observaciones geométricas correctas que usualmente nos proporcionarán a las componentes que deseemos.

Leyes de Snell.

Retornando al problema general de la incidencia oblicua, representado en la Figura de incidencia oblicua, ahora se mostrarán algunas propiedades generales de los ángulos de incidencia, reflexión y transmisión, θi, θr y θt respectivamente. Estas relaciones entre los variados ángulos están gobernados por la ley de Snell. Para mostrar éstas relaciones, escribimos a los campos vectoriales fasoriales, incidentes, reflejados y transmitidos como en las ecuaciones (90) y (91). Suponemos, sin pérdida de generalidad que todos los tres vectores de propagación están en el plano xz, los cuales nos referiremos como el plano de incidencia. En ésta forma, los vectores de propagación tienen componentes únicamente en las direcciones x y z. Los campos vectoriales eléctrico y magnético pueden tener componentes a lo largo de los tres ejes coordenados. Tomando en cuenta la geometría de la Figura de incidencia oblicua, podremos escribir a los campos fasoriales como:

$$\hat{E}i = [\hat{E}_x^i \hat{a}_x + \hat{E}_y^i \hat{a}_y + \hat{E}_z^i \hat{a}_z]\, e^{-\gamma_1(\operatorname{sen}\theta i x + \cos\theta i z)} \qquad (95)$$

$$\hat{H}i = [\hat{H}_x^i \hat{a}_x + \hat{H}_y^i \hat{a}_y + \hat{H}_z^i \hat{a}_z]\, e^{-\gamma_1(\operatorname{sen}\theta i x + \cos\theta i z)} \qquad (96)$$

$$\hat{E}r = [\hat{E}_x^r \hat{a}_x + \hat{E}_y^r \hat{a}_y + \hat{E}_z^r \hat{a}_z]\, e^{\gamma_1(-\operatorname{sen}\theta r x + \cos\theta r z)} \qquad (97)$$

$$\hat{H}r = [\hat{H}_x^r \hat{a}_x + \hat{H}_y^r \hat{a}_y + \hat{H}_z^r \hat{a}_z]\, e^{\gamma_1(-\operatorname{sen}\theta r x + \cos\theta r z)} \qquad (98)$$

$$\hat{E}t = [\hat{E}_x^t \hat{a}_x + \hat{E}_y^t \hat{a}_y + \hat{E}_z^t \hat{a}_z]\, e^{-\gamma_2(\operatorname{sen}\theta_t x + \cos\theta_t z)} \qquad (99)$$

$$\hat{H}t = [\hat{H}_x^t \hat{a}_x + \hat{H}_y^t \hat{a}_y + \hat{H}_z^t \hat{a}_z]\, e^{-\gamma_2(\operatorname{sen}\theta_t x + \cos\theta_t z)} \qquad (100)$$

Enseguida imponemos las condiciones de frontera en la interface. En $z=0$. Los campos eléctricos tangenciales deben ser continuos. De las ecuaciones (95) a la (100) obtenemos:

$$[\hat{E}_x^i \hat{a}_x + \hat{E}_y^i \hat{a}_y]\, e^{-\gamma_1 \operatorname{sen}\theta i x} + [\hat{E}_x^r \hat{a}_x + \hat{E}_y^r \hat{a}_y]\, e^{-\gamma_1 \operatorname{sen}\theta r x}$$

$$= [\hat{E}_x^t \hat{a}_x + \hat{E}_y^t \hat{a}_y]\, e^{-\gamma_2 \operatorname{sen}\theta t x} \qquad z=0 \qquad (101)$$

En forma similar en $z=0$, el campo magnético tangencial debe ser continuo:

$$[\hat{H}_x^i \hat{a}_x + \hat{H}_y^i \hat{a}_y]\, e^{-\gamma_1 \operatorname{sen}\theta i x} + [\hat{H}_x^r \hat{a}_x + \hat{H}_y^r \hat{a}_y]\, e^{-\gamma_1 \operatorname{sen}\theta r x}$$

$$= [\hat{H}_x^t \hat{a}_x + \hat{H}_y^t \hat{a}_y]\, e^{-\gamma_2 \operatorname{sen}\theta t x} \qquad (102)$$

En ambas ecuaciones (101) y (102) los términos exponenciales deben ser iguales:

$$\bar{e}^{\gamma_1 \operatorname{sen}\theta i\, x} = \bar{e}^{\gamma_1 \operatorname{sen}\theta r x} = \bar{e}^{\gamma_2 \operatorname{sen}\theta_t x} \qquad (103)$$

Esta, resulta en dos condiciones:

$$\theta i = \theta r \qquad (104)$$

$$\gamma_1 \operatorname{sen}\theta i = \gamma_2 \operatorname{sen}\theta_t \qquad (105)$$

La ecuación (104) es referido como "La ley de reflexión de Snell"; El ángulo de incidencia debe ser igual al ángulo de reflexión. La segunda relación dada por la ecuación (105) es referido como: "La ley de refracción de Snell". aunque las interpretaciones pueden ser obtenidas para medios con pérdidas, aquí se supondrán que ambos medios son sin pérdidas ($\sigma_1 = \sigma_2 = 0$) tal que (104) se convierte en:

$$j\beta_1 \operatorname{sen}\theta i = j\beta_2 \operatorname{sen}\theta_t \qquad (106)$$

o

$$\frac{\operatorname{sen}\theta i}{\operatorname{sen}\theta_t} = \frac{\beta_2}{\beta_1} \qquad (107)$$

sin embargo $\beta = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$ esto se convierte

$$\frac{\operatorname{sen}\theta i}{\operatorname{sen}\theta_t} = \sqrt{\frac{\mu_2\epsilon_2}{\mu_1\epsilon_1}} \qquad (108)$$

Esto es, el ángulo de la onda transmitido está relacionado al ángulo de incidencia por las propiedades de los dos medios. Para los medios dieléctricos típicos que no son ferromagnéticos, $\mu_r \simeq 1$, así que.

$$\frac{\operatorname{sen}\theta i}{\operatorname{sen}\theta_\tau} = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} \qquad (109)$$

El índice de refracción de un medio que tiene $\mu_r = 1$ es definido como la razón de la velocidad de la luz en el espacio libre para aquella en el medio.

$$\eta = \frac{u_0}{u_p} = \sqrt{\epsilon_r} \qquad (110)$$

En términos del índice de refracción, La ley de refracción de Snell puede establecerse como:

$$\operatorname{sen}\theta_t = \frac{\eta_1}{\eta_2}\operatorname{sen}\theta i \qquad (111)$$

Para la transmisión de un enrarecedor en un medio más denso, $\epsilon_{r2} > \epsilon_{r1}$, vemos que $\theta r < \theta i$ y que la onda transmitida es curvado hacia la normal. Esto es el caso para la transmisión de luz desde el espacio libre en el agua, cristal, etc.

Incidencia oblicua, medio sin pérdidas.

Consideraremos alguna polarización arbitraria como la superposición lineal de dos ondas, cada una estando compuesta de ondas linealmente polarizadas cuyos campos eléctricos sean ortogonales. El resultado general para la polarización arbitraria será la superposición de estos dos resultados.

Se tomarán en cuenta dos polarizaciones del campo eléctrico incidente. Para la polarización perpendicular el campo vectorial eléctrico incidente es perpendicular al plano de incidencia, como se muestra en la siguiente Figura a. Para la polarización paralela, el campo vectorial eléctrico incidente es paralelo a o en el plano de incidencia, así mostrado en la Figura siguiente b.

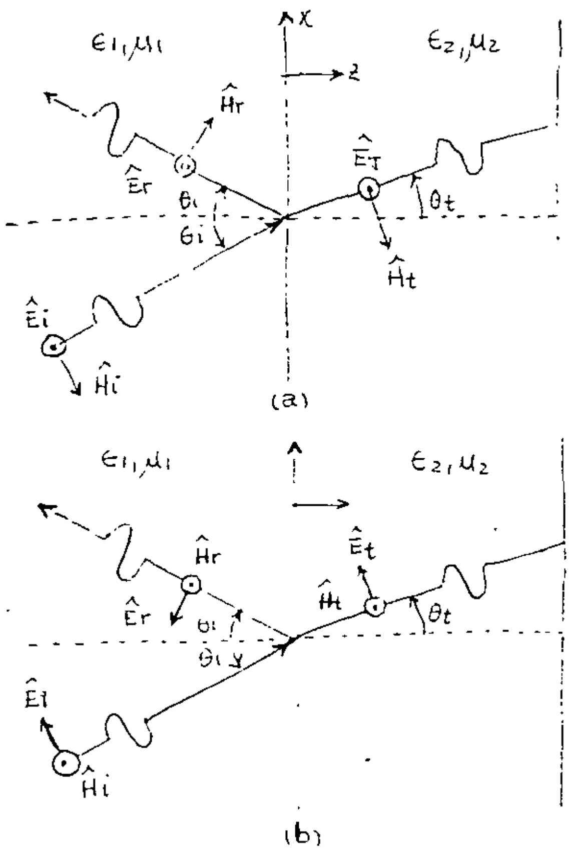


Figura. Incidencia oblicua. (a) Polarización perpendicular; b) Polarización paralela.

Polarización perpendicular

Para el caso de polarización perpendicular mostrado en la Figura a) de arriba, podremos escribir a los campos vectoriales fasoriales en la forma:

$$\hat{E}_i = E_i\, e^{-j\beta_1 (\operatorname{sen}\theta_i x + \cos\theta_i z)}\, \hat{a}_y \tag{112}$$

$$\hat{H}_i = \frac{\hat{E}_i}{\eta_1}(-\cos\theta_i\,\hat{a}_x + \operatorname{sen}\theta_i\,\hat{a}_z)\, e^{-j\beta_1(\operatorname{sen}\theta_i x + \cos\theta_i z)} \tag{113}$$

$$\hat{E}_r = E_r\, e^{j\beta_1(-\operatorname{sen}\theta_i x + \cos\theta_i z)}\, \hat{a}_y \tag{114}$$

$$\hat{H}_r = \frac{E_r}{\eta_1}(\cos\theta_i\,\hat{a}_x + \operatorname{sen}\theta_i\,\hat{a}_z)\, e^{j\beta_1(-\operatorname{sen}\theta_i x + \cos\theta_i z)} \tag{115}$$

$$\hat{E}_t = E_t\, e^{-j\beta_2(\operatorname{sen}\theta_t x + \cos\theta_t z)}\, \hat{a}_y \tag{116}$$

$$\hat{H}_t = \frac{E_t}{\eta_2}(-\cos\theta_t\,\hat{a}_x + \operatorname{sen}\theta_t\,\hat{a}_z)\, e^{-j\beta_2(\operatorname{sen}\theta_t x + \cos\theta_t z)} \tag{117}$$

Donde ha sido sustituído $\theta_i = \theta_r$, de acuerdo a la ley de reflexión de Snell. Las condiciones de frontera requieren continuidad de las componentes tangenciales de los campos eléctricos y magnéticos en $z = 0$:

$$\hat{E}_i\, e^{-j\beta_1 \operatorname{sen}\theta_i x} + \hat{E}_r\, e^{-j\beta_1 \operatorname{sen}\theta_i x} = E_t\, e^{-j\beta_2 \operatorname{sen}\theta_t x} \tag{118}$$

$$\frac{E_t}{\eta_1}(-\cos\theta_i)\, e^{-j\beta_1 \operatorname{sen}\theta_i x} + \frac{E_r}{\eta_1}(\cos\theta_i)\, e^{-j\beta_1 \operatorname{sen}\theta_i x} = \frac{E_t}{\eta_2}(-\cos\theta_t)\, e^{-j\beta_2 \operatorname{sen}\theta_t x} \tag{119}$$

obteniendose otra vez a la ley de refracción de Snell.

$$\frac{\operatorname{sen}\theta_i}{\operatorname{sen}\theta_t} = \frac{\beta_2}{\beta_1} = \sqrt{\frac{\mu_2\epsilon_2}{\mu_1\epsilon_1}} \tag{120}$$

$$E_i + E_r = E_t \tag{121}$$

$$-\frac{E_i}{\eta_1}\cos\theta_i + \frac{E_r}{\eta_1}\cos\theta_i = -\frac{E_t}{\eta_2}\cos\theta_t \tag{122}$$

Resolviendo las ecuaciones (121) y (122) nos proporcionarán a los coeficientes de reflexión y de transmisión para la polarización perpendicular:

$$\Gamma_\perp = \frac{E_r}{E_i} = \frac{\eta_2\cos\theta_i - \eta_1\cos\theta_t}{\eta_2\cos\theta_i + \eta_1\cos\theta_t} = \frac{\eta_2\cos\theta_i - \eta_1\sqrt{1-(u_2/u_1)^2\operatorname{sen}^2\theta_i}}{\eta_2\cos\theta_i + \eta_1\sqrt{1-(u_2/u_1)^2\operatorname{sen}^2\theta_i}} \tag{123}$$

$$T_{\perp} = \frac{E_t}{E_i} = \frac{2\eta_2 \cos\theta_i}{\eta_2 \cos\theta_i + \eta_1 \cos\theta_t}$$

$$= \frac{2\eta_2 \cos\theta_i}{\eta_2 \cos\theta_i + \eta_1 \sqrt{1-(u_2/u_1)^2 \operatorname{sen}^2\theta_i}} \quad (124)$$

Las formas alternas de estas ecuaciones en términos de θ_i se obtienen solamente con la Ley de refracción de Snell en la ecuación (120) y por la realización que $\cos\theta = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta}$. La cantidad $u = 1/\sqrt{\mu\varepsilon}$ es la velocidad de fase en el medio apropiado. Para la incidencia normal ($\theta_i = \theta_t = 0°$), También encontramos la siguiente relación:

$$1 + \Gamma_{\perp} = T_{\perp} \quad (125)$$

como fue el caso para la incidencia normal. Las ecuaciones (123) y (124) son referidas como las ecuaciones de Fresnel. Notar que θ_t está relacionado a θ_i vía la ley de refracción de Snell en la ecuación (120), tal que las ecuaciones (123) y (124) pueden ser calculados solamente de las propiedades del medio y conocimiento del ángulo de incidencia, θ_i

Polarización paralela.

Para el caso de la polarización paralela mostrada en la Fig. Incidencia oblicua b) Polariz. paralela. podemos escribir a los campos vectoriales fasoriales en la forma:

$$\hat{E}_i = E_i (\cos\theta_i \hat{a}_x - \operatorname{sen}\theta_i \hat{a}_z)\, e^{-j\beta_1(\operatorname{sen}\theta_i x + \cos\theta_i z)} \quad (126)$$

$$\hat{H}_i = \frac{E_i}{\eta_1} e^{-j\beta_1(\operatorname{sen}\theta_i x + \cos\theta_i z)}\, \hat{a}_y \quad (127)$$

$$\hat{E}_r = -E_r (\cos\theta_i \hat{a}_x + \operatorname{sen}\theta_i \hat{a}_z)\, e^{j\beta_1(-\operatorname{sen}\theta_i x + \cos\theta_i z)} \quad (128)$$

$$\hat{H}_r = \frac{E_r}{\eta_1} e^{j\beta_1(-\operatorname{sen}\theta_i x + \cos\theta_i z)}\, \hat{a}_y \quad (129)$$

$$\hat{E}_t = E_t (\cos\theta_t \hat{a}_x - \operatorname{sen}\theta_t \hat{a}_z)\, e^{-j\beta_2(\operatorname{sen}\theta_t x + \cos\theta_t z)} \quad (130)$$

$$\hat{H}_t = \frac{E_t}{\eta_2} e^{-j\beta_2(\operatorname{sen}\theta_t x + \cos\theta_t z)}\, \hat{a}_y \quad (131)$$

Aplicando nuevamente las condiciones de frontera de continuidad de las componentes tangenciales de los campos eléctricos y magnéticos en $z = 0$ da:

$$E_i \cos\theta_i e^{-j\beta_1 \operatorname{sen}\theta_i x} - E_r \cos\theta_r e^{-j\beta_1 \operatorname{sen}\theta_i x} = E_t \cos\theta_t e^{-j\beta_2 \operatorname{sen}\theta_t x} \quad (132)$$

$$\frac{E_i}{\eta_1} e^{-j\beta_1 \operatorname{sen}\theta_i x} + \frac{E_r}{\eta_1} e^{-j\beta_1 \operatorname{sen}\theta_i x} = \frac{E_t}{\eta_2} e^{-j\beta_2 \operatorname{sen}\theta_t x} \qquad (133)$$

y nuevamente observamos que la ley de refracción de Snell relaciona a θ_i y θ_t como:

$$\frac{\operatorname{sen}\theta_i}{\operatorname{sen}\theta_t} = \frac{\beta_2}{\beta_1} = \sqrt{\frac{\mu_2\epsilon_2}{\mu_1\epsilon_1}} \qquad (134)$$

En ésta forma, obtenemos:

$$E_i \cos\theta_i - E_r \cos\theta_i = E_t \cos\theta_t \qquad (135)$$

$$\frac{E_i}{\eta_1} + \frac{E_r}{\eta_1} = \frac{E_t}{\eta_2} \qquad (136)$$

Resolviendo las ecuaciones (135) y (136) se obtendrán a los coeficientes de reflexión y de transmisión para la polarización paralela como:

$$\Gamma_{\parallel} = \frac{E_r}{E_t} = \frac{\eta_1 \cos\theta_i - \eta_2 \cos\theta_t}{\eta_1 \cos\theta_i + \eta_2 \cos\theta_t} = \frac{\eta_1 \cos\theta_i - \eta_2\sqrt{1-(u_2/u_1)^2 \operatorname{sen}^2\theta_i}}{\eta_1 \cos\theta_i + \eta_2\sqrt{1-(u_2/u_1)^2 \operatorname{sen}^2\theta_i}} \qquad (137)$$

$$T_{\parallel} = \frac{E_t}{E_i} = \frac{2\eta_2 \cos\theta_i}{\eta_1 \cos\theta_i + \eta_2 \cos\theta_t} = \frac{2\eta_2 \cos\theta_i}{\eta_1 \cos\theta_i + \eta_2\sqrt{1-(u_2/u_1)^2 \operatorname{sen}^2\theta_i}} \qquad (138)$$

Las formas alternas de éstas ecuaciones en términos de θ_i se obtienen otra vez únicamente con la ley de refracción de Snell en la ecuación (134) y por realización que $\cos\theta = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta}$ y sabiendo que $u = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$ es la velocidad de fase en el medio apropiado. Para este caso puede demostrarse que:

$$1 - \Gamma_{\parallel} = T_{\parallel}\left(\frac{\cos\theta_t}{\cos\theta_i}\right) \qquad (139)$$

Ángulo de Brewster de transmisión total.

Para las dos polarizaciones: paralela y perpendicular, los numeradores de los coeficientes de reflexión son las diferencias de los dos términos. Esto nos lleva a indagar si un caso particular del ángulo de incidencia guiará a un coeficiente de reflexión cero, por ejemplo. Sin onda reflejada y por lo tanto transmisión total.

Para la polarización perpendicular $\Gamma_{\perp} = 0$ si:

$$\eta_2 \cos\theta_i = \eta_1 \cos\theta_t \tag{140}$$

elevando al cuadrado ambos miembros da

$$\cos^2\theta_i = 1 - \operatorname{sen}^2\theta_i$$

$$= \left(\frac{\eta_1}{\eta_2}\right)^2 (1 - \operatorname{sen}^2\theta_t) \tag{141}$$

sustituyendo la ley de refracción de Snell da:

$$\operatorname{sen}^2\theta_i = \frac{1 - (\eta_1/\eta_2)^2}{1 - (\eta_1\beta_1/\eta_2\beta_2)^2}$$

$$= \frac{1 - \mu_1\epsilon_2/\mu_2\epsilon_1}{1 - (\mu_1/\mu_2)^2} \tag{142}$$

El ángulo de incidencia que satisface esta ecuación es referido como el ángulo de Brewster identificado como $\theta_{B\perp}$. Notar, en todo caso, que para los materiales que no sean ferromagnéticos, $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$. Así que un ángulo de Brewster para esta polarización no existe.

Para la polarización paralela, $\Gamma_{\parallel} = 0$ si

$$\eta_1 \cos\theta_i = \eta_2 \cos\theta_t \tag{143}$$

elevando al cuadrado y sustituyendo la ley de refracción de Snell da:

$$\operatorname{sen}\theta_i = \sqrt{\frac{1 - \mu_2\epsilon_1/\mu_1\epsilon_2}{1 - (\epsilon_1/\epsilon_2)^2}} \tag{144}$$

Para materiales dieléctricos típicos, un ángulo de incidencia satisfaciendo esta relación puede existir, tal ángulo es referido como el ángulo de Brewster para la polarización paralela y será denotado por $\theta_{B\parallel}$.

Polarización

La polarización de una onda plana es una medida de ¿Cómo? su campo vectorial electrico $\vec{E}$ varía con el tiempo. Simplificaremos nuestra discusión, considerando ondas planas que se propagan en la dirección $+z$. Una onda general de este tipo puede ser representada como:

$$\vec{E} = (|E_{xo}|e^{j\theta x}\hat{a}_x + |E_{yo}|e^{j\theta y}\hat{a}_y)\,e^{-j\beta z}, \qquad (1)$$

donde $|E_{xo}|$ y $|E_{yo}|$ son las amplitudes pico de las componentes "x" y "y" de $\vec{E}$, respectivamente, y θx y θy son las fases de éstas componentes en $z=0$, respectivamente. Transformando ésta expresión al dominio del tiempo, se obtiene:

$$\vec{E} = E_{xo}\cos(\omega t - \beta z + \theta x)\,\hat{a}_x + E_{yo}\cos(\omega t - \beta z + \theta y)\,\hat{a}_y. \qquad (2)$$

En los párrafos que siguen, usaremos ésta expresión para describir a tres clases de polarización: polarización lineal, polarización circular, y polarización elíptica.

Polarización Lineal.- La polarización ocurre cuando $\theta x = \theta y \equiv \theta$. Para este caso la segunda ecuación se convierte en:

$$\vec{E} = (|E_{xo}|\hat{a}_x + |E_{yo}|\hat{a}_y)\cos(\omega t - \beta z + \theta) \qquad (3)$$

Como puede observarse en ésta expresión, las componentes "x" y "y" del campo mantienen la misma razón para todos los valores de t, lo cual significa que $\vec{E}$ siempre está a lo largo de una línea recta en cualquier plano constante z. El ángulo de tilde entre $\vec{E}$ y el eje x es:

$$\tau = \tan^{-1}\frac{|E_{yo}|}{|E_{xo}|} \qquad (4)$$

La siguiente figura muestra a $\vec{E}$ en varios puntos en $z=0$

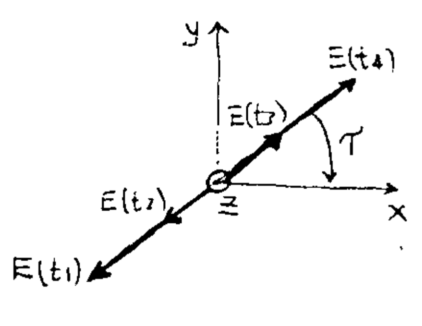


Figura mostrando el campo vectorial $\vec{E}$ de una onda plana polarizada linealmente propagándose en el eje $+z$ como una variación del tiempo en una posición fija.

Muchas fuentes prácticas generan ondas planas polarizadas linealmente. Los laser, por ejemplo, se construyen de tal forma que sus salidas estén polarizadas linealmente. Muchas antenas simples también generan ondas que, cuando son vistas en grandes distancias, se comportan como ondas planas polarizadas linealmente. El ejemplo más común es la antena dipolo.

Polarización Circular. - La polarización circular ocurre cuando las componentes ortogonales de $\vec{E}$ tienen iguales magnitudes, pero difieren en fase por $\pm 90°$. Supongamos que:

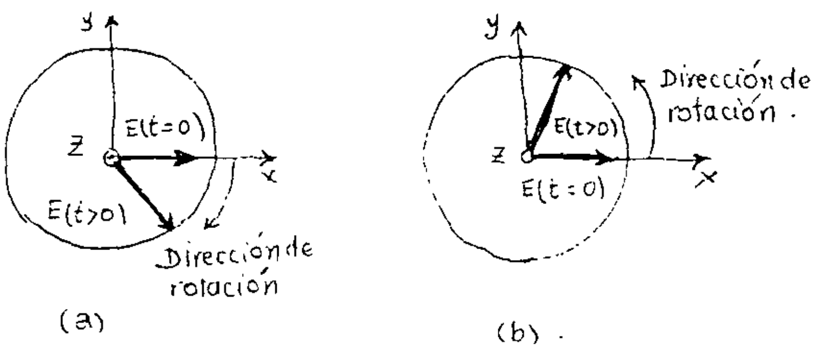
$$|E_{xo}| = |E_{yo}| \equiv E_o, \quad \phi_x = 0 \ y \ \phi_y = \pm 90° \qquad (5)$$

Para este caso; la componente y de $\vec{E}$ conduce o atrasa a la componente de x por $90°$, así $\vec{E}$ puede ser representado en el dominio del tiempo y de la frecuencia como:

$$\vec{E} = E_o(\hat{a}_x \pm j\,\hat{a}_y)\,e^{-j\beta z}, \qquad (6)$$

$$y \qquad \vec{E} = E_o\left[\cos(\omega t - \beta z)\,\hat{a}_x \mp \operatorname{sen}(\omega t - \beta z)\,\hat{a}_y\right] \ (7) \ \text{respectivamente.}$$

La siguiente figura a, muestra a un trazo de $\vec{E}$ para varios valores de t en $z=0$ cuando E_y conduce a E_x por $90°$ (signo superior en la ec. inmediata anterior).



(a) (b)

Figura mostrando rotación del campo $\vec{E}$ de propagación $+z$, ondas planas polarizadas circularmente. a) Polarización izquierda. b) Polarización derecha.

Como puede verse, la magnitud de $\vec{E}$ permanece constante, pero su dirección gira alrededor del eje z una vez cada $2\pi/\omega$ segundos. Entonces el extremo de $\vec{E}$ gira alrededor de la dirección de propagación (el eje z) en el sentido izquierdo, esto es conocido como la polarización de la mano izquierda (LHP).

donde las componentes "x" y "y" de $\vec{E}$ están dadas por:

$$E_x = |E_{xo}| \cos(\omega t) \qquad (9) \quad y$$

$$E_y = |E_{yo}| \cos(\omega t + \Delta\theta) \qquad (10)$$

respectivamente. Por lo tanto E_x y E_y mantienen una relación fija en el tiempo, por lo que es posible escribir una componente en términos de la otra. Para acompletar esto, resolveremos primeramente a la ecuación (9) para $\cos(\omega t)$:

$$\cos(\omega t) = \frac{E_x}{|E_{xo}|} \qquad (11)$$

En forma similar, si resolvemos a la ecuación (10) para $E_y / |E_{xo}|$ y usamos la formula de reducción del coseno, encontramos:

$$\frac{E_y}{|E_{yo}|} = \cos(\omega t + \Delta\theta) = \cos(\omega t)\cos(\Delta\theta) - \operatorname{sen}(\omega t)\operatorname{sen}(\Delta\theta)$$

$$\frac{E_y}{|E_{yo}|} = \frac{E_x}{|E_{xo}|}\cos(\Delta\theta) \pm \sqrt{1 - \left(\frac{E_x}{|E_{xo}|}\right)^2}\,\operatorname{sen}(\Delta\theta) \qquad (12)$$

donde hemos usado a la ecuación (11) para escribir $\operatorname{sen}(\omega t)$ en términos de E_x y $|E_{xo}|$. Finalmente, resolvemos para el término raíz cuadrada, elevando al cuadrado a ambos miembros de la ecuación resultante, y simplificando obtendremos:

$$\left(\frac{E_x}{|E_{xo}|}\right)^2 - \frac{2E_x E_y \cos(\Delta\theta)}{|E_{xo}||E_{yo}|} + \left(\frac{E_y}{|E_{yo}|}\right)^2 = \operatorname{sen}^2(\Delta\theta) \qquad (13)$$

la cual nos representa la ecuación de una elipse, llamado la polarización elíptica.

La Figura muestra a la polarización de la elipse de una onda plana polarizada elípticamente.

Polarización de la elipse.

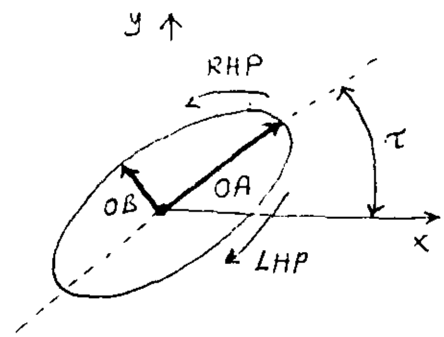


Figura. Una ~~polarización de la~~ elipse de polarización con el eje mayor OA eje menor OB, y ángulo de tildeo τ.

La Figura b) muestra como $\vec{E}$ varía con el tiempo para el caso cuando $\phi_y = -90°$. Este caso corresponde al signo inferior de la ec. (7). Aquí el manejo es básicamente el mismo, excepto que $\vec{E}$ gira alrededor de la dirección de propagación en el sentido derecho. Entonces, esto es llamado polarización de la mano derecha (RHP).

No únicamente hacemos que los campos $\vec{E}$ de una onda polarizada circularmente giré alrededor del eje de propagación como una función del tiempo; los campos hacen lo mismo en el espacio. La Figura a. muestra una "instantánea" de una onda polarizada circularmente izquierda. Aquí vemos que $\vec{E}$ sigue a una hélice derecha, a lo largo de la dirección de propagación. Esto significa que los observadores en diferentes puntos a lo largo de la dirección de propagación detectan a diferentes direcciones de $\vec{E}$ en el mismo tiempo t. En forma similar la FIG. b) muestra $\vec{E}$ para una onda polarizada derecha. En este caso, el vector traza hacia afuera una hélice izquierda a lo largo del eje de propagación cuando el tiempo es congelado.

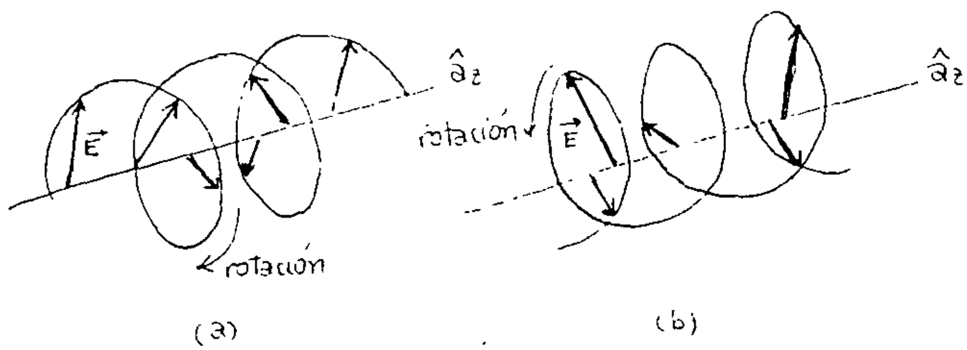


Figura Trayectorias helicoidales trazadas por ondas polarizadas circularmente en instantes fijos en el tiempo: a) Polarización Izquierda. b) Polarización derecha.

Polarización Elíptica.– La polarización lineal y circular ocurren cuando las dos componentes ortogonales de una onda plana poseen relaciones de magnitud y de fase muy específicas. Ahora entenderemos un caso más general en donde las relaciones son independientes del tiempo, pero son arbitrarias. Reescribiendo nuevamente a la ec. (2):

$$\vec{E} = E_{xo}\cos(\omega t - \beta z + \theta)\hat{a}_x + E_{yo}\cos(\omega t - \beta z + \theta_y)\hat{a}_y$$

supongamos que las componentes "x" y "y" de la onda tengan magnitudes pico $|E_{xo}|$ y $|E_{yo}|$, respectivamente, y que la componente y conduzca a la componente x por un ángulo $\Delta\theta$. En ésta forma en $z = 0$.

$$\vec{E} = E_x\hat{a}_x + E_y\hat{a}_y \qquad (8)$$

En este diagrama de polarización, los ejes horizontal y vertical son las partes reales e imaginarias de E_y/E_x, respectivamente, donde E_y y E_x son las amplitudes complejas de las componentes "x" y "y" de $\vec{E}$, respectivamente. Como puede observarse, la polarización lineal ($AR = \infty$) ocurre cuando $Im(E_y/E_x) = 0$, y la polarización circular ($AR = 1$) ocurre cuando $Re(E_y/E_x) = 0$ e $Im(E_y/E_x) = \pm 1$.

La polarización derecha (RHP) ocurre cuando $\Delta\theta < 0$, y la polarización izquierda (LHP) ocurre cuando $\Delta\theta > 0$. Para describir a la elipse de polarización se utilizan dos parámetros que son: La razón axial AR y el ángulo de tildeo τ. La razón axial AR se define como:

$$AR = \frac{\text{Eje mayor}}{\text{Eje menor}} = \frac{OA}{OB} \qquad 1 \leq AR \leq \infty \qquad (14)$$

donde, después de haber efectuado manipulación algebraica, puede demostrarse de la ecuación (13) que

$$OA = \left[\frac{1}{2}\left\{|E_{xo}|^2 + |E_{yo}|^2 + \left[|E_{xo}|^4 + |E_{yo}|^4 + 2|E_{xo}|^2|E_{yo}|^2\cos(2\Delta\theta)\right]^{1/2}\right\}\right]^{1/2} \qquad (15)$$

$$OB = \left[\frac{1}{2}\left\{|E_{xo}|^2 + |E_{yo}|^2 - \left[|E_{xo}|^4 + |E_{yo}|^4 + 2|E_{xo}|^2|E_{yo}|^2\cos(2\Delta\theta)\right]^{1/2}\right\}\right]^{1/2} \qquad (16)$$

El ángulo de tildeo es el ángulo entre el eje mayor de la elipse y el eje x, y es dado por:

$$\tau = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left[\frac{2|E_{xo}||E_{yo}|}{|E_{xo}|^2 - |E_{yo}|^2}\cos(\Delta\theta)\right] \qquad (17)$$

La Figura. muestra a los estados de polarización para una onda plana de propagación $+z$ conforme las amplitudes relativas y las fases de las componentes "x" y "y" de $\vec{E}$ son variados.

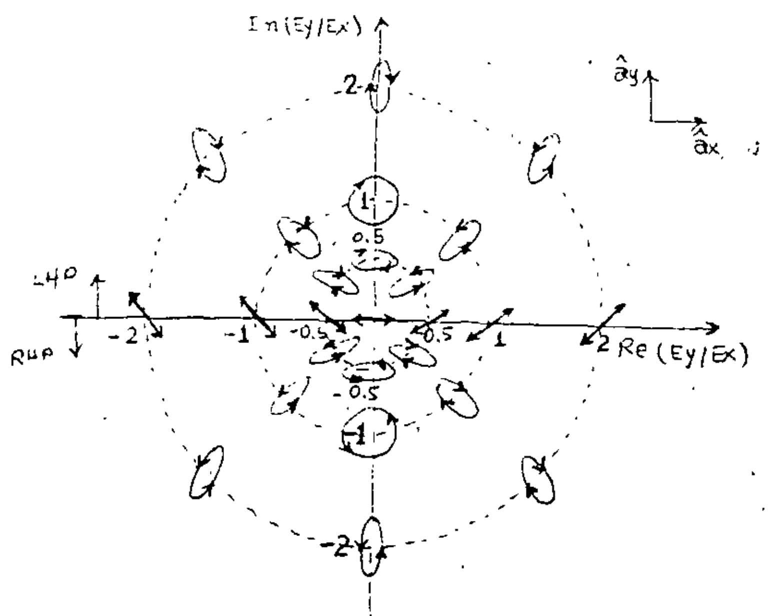


Figura. Diagrama de polarización para una onda plana de propagación $+z$.