



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE
MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

CÁLCULO DE SISMOGRAMAS SINTÉTICOS EN
MEDIOS ESTRATIFICADOS

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Ingeniera Geofísica

P R E S E N T A:

Michelle Sainos Vizuet

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. Francisco José Sánchez Sesma



Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2018

Agradecimientos

Quiero expresar mi gratitud a mi asesor de tesis el Dr. Francisco José Sánchez Sesma por dedicarle gran parte de su tiempo a la revisión de este trabajo, por darme la oportunidad de ser parte de proyectos interesantes y ser un excelente profesor y amigo.

A mis padres Rosa María Vizuet Ángeles y Rafael Sainos Álvarez por apoyarme en todo momento y darme todas las herramientas necesarias para mi crecimiento profesional, cualquier logro en mi vida es un logro suyo por consecuencia.

A Pame y Jaz, gracias por estar tan locas y ser las mejores amigas de mi vida.

A Kevin, mi apoyo moral y mejor amigo, gracias por estar presente en los momentos más difíciles y reír conmigo en los mejores. Gracias por todo el amor.

A Dianita Rega por acompañarme en toda esta travesía de la geofísica y ser la mejor de las mejores amigas.

Al Dr. Martín Cárdenas Soto, M. C. David Escobedo Zenil, Dr. Juan José Pérez-Gavilán Escalante, Dr. Josué Tago Pacheco, Ing. Julio César Pardo Dañino y M.C José Piña Flores por sus revisiones y recomendaciones.

A los compañeros del cubo por sus sugerencias y opiniones que fueron esenciales en este trabajo.

A la máxima casa de estudios, amigos y todas las personas que me han mostrado su apoyo y cariño.

Al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la UNAM en el proyecto IN100917 *Campos difusos en configuraciones irregulares*. Agradezco a la DGAPA-UNAM la beca recibida.

Resumen

En este trabajo se calcularán sismogramas sintéticos para el campo de desplazamientos (U_x , U_y y U_z) debido a fuentes puntuales y fuentes volumétricas actuando en medios horizontalmente estratificados. Para obtener el campo de desplazamientos se usa una formulación en coordenadas polares propuesta por Sánchez-Sesma et al. (2011), aprovechando que el medio es simétrico respecto al eje vertical. Esta formulación facilita el cálculo de las funciones de Green en el dominio del número de onda, debido a que se resuelve una integral en el número de onda radial en lugar de resolver dos integrales en los números de onda horizontales como sucede usando la formulación 3-D en coordenadas cartesianas.

La formulación usada para calcular los coeficientes de los esfuerzos y desplazamientos es la propuesta por Knopoff (1964), mientras que para el cálculo de la integral en el número de onda radial se usa el método del número de onda discreto propuesto por Bouchon y Aki (1977) (DWN por sus siglas en inglés). Para validar el uso de este programa creado a partir de la formulación descrita anteriormente, se calcula el error residual entre los resultados generados y los desplazamientos calculados usando el programa *AXITRA*[®] propuesto por Coutant (1989) para distintos ejemplos.

Abstract

In this work I developed the calculation of synthetic seismograms for the components of the displacement field (U_x , U_y y U_z) due to the application of point forces and explosive sources in horizontally stratified media. To calculate the displacements, I use the formulation in polar coordinates proposed by Sánchez-Sesma et al. (2011) using the advantage that the media is symmetrical in the angular direction. This formulation has the advantage to reduce the computation of the Green functions because, instead of solving two integrals in the horizontal wavenumbers, it just solves one integral in the radial wavenumber.

The formulation used to calculate de coefficients of stresses and displacements is the one proposed by Knopoff (1964), and the radial wavenumber integral is solved using the discrete wavenumber method, commonly known as DWN proposed by Bouchon and Aki (1977). To validate the use of this new code based on the described formulation, I calculated the residual between the generated results and the displacements calculated using the program *AXITRA*[®] proposed by Coutant (1989) for several examples.

ÍNDICE GENERAL

Agradecimientos	i
Resumen	ii
Abstract	iii
Lista de Figuras	vi
1 Introducción	1
1.1 Antecedentes	1
1.2 Objetivos	2
1.3 Justificación y Alcance	2
2 Marco Teórico	4
2.1 Fundamentos de Elastodinámica	4
2.2 Funciones de Green	10
2.3 Integración en el número de onda radial	12
2.4 Método del Número de Onda Discreto	13
3 Formulación para Medio Estratificado	15
3.1 Fuerza Vertical	16
3.2 Fuerzas Horizontales	18
3.3 Fuente Volumétrica	20
3.4 Condiciones de Frontera	21
3.5 Matriz Global	24
3.5.1 Caso Plano	25
3.5.2 Caso Antiplano	27
3.6 Funciones de Green para el medio estratificado	29
4 Resultados	32
4.1 Convergencia del DWN	33
4.2 Calibración en un semiespacio	37
4.3 Estrato sobre un semi-espacio	44
4.4 Medio estratificado con aumento de velocidad	50
4.5 Fuente Volumétrica en medio de un estrato blando	56
4.5.1 Malla de receptores para el desplazamiento radial	58
4.6 Conclusiones	59

Bibliografia

Lista de Figuras

FIGURA 2.1: Medio estratificado en coordenadas cilíndricas.	6
FIGURA 2.2: Funciones de Bessel de primera y segunda especie.	9
FIGURA 2.3: Interpretación gráfica del método de DWN.	13
FIGURA 3.1: Problema del medio estratificado	15
FIGURA 3.2: Esfuerzos y desplazamientos ante una fuerza vertical.	16
FIGURA 3.3: Esfuerzos y desplazamientos ante fuerzas horizontales.	18
FIGURA 3.4: Medio estratificado con ondas planas P y SV	25
FIGURA 3.5: Medio estratificado con ondas planas SH	28
FIGURA 3.6: Pulso de Gauss y su segunda derivada respecto al tiempo, el pulso de Ricker.	31
FIGURA 4.1: Convergencia del DWN variando el número de términos de la integral (N) con la solución analítica. Los receptores varían respecto al radio.	34
FIGURA 4.2: Convergencia del DWN variando el número de términos de la integral (N) con la solución analítica. Los receptores varían respecto al eje vertical.	35
FIGURA 4.3: Convergencia del DWN variando la distancia entre fuentes virtuales (L) con la solución analítica.	36
FIGURA 4.4: Esquema del arreglo de receptores en el semi-espacio, la fuente se encuentra a 10 metros de profundidad.	37
FIGURA 4.5: Sismogramas sintéticos de la componente de desplazamiento U_x debido a una fuerza aplicada en dirección x para un semi-espacio. Estos sismogramas fueron generados con el código del DWN y con $AXITRA^{\text{®}}$	38
FIGURA 4.6: Sismogramas sintéticos de la componente de desplazamiento U_y debido a una fuerza aplicada en dirección x para un semi-espacio. Estos sismogramas fueron generados con el código del DWN y con $AXITRA^{\text{®}}$	39
FIGURA 4.7: Sismogramas sintéticos de la componente de desplazamiento U_z debido a una fuerza aplicada en dirección x para un semi-espacio. Estos sismogramas fueron generados con el código del DWN y con $AXITRA^{\text{®}}$	39
FIGURA 4.8: Sismogramas sintéticos de la componente de desplazamiento U_x debido a una fuerza aplicada en dirección y para un semi-espacio. Estos sismogramas fueron generados con el código del DWN y con $AXITRA^{\text{®}}$	40
FIGURA 4.9: Sismogramas sintéticos de la componente de desplazamiento U_y debido a una fuerza aplicada en dirección y para un semi-espacio. Estos sismogramas fueron generados con el código del DWN y con $AXITRA^{\text{®}}$	41

FIGURA 4.10: Sismogramas sintéticos de la componente de desplazamiento U_z debido a una fuerza aplicada en dirección y para un semi-espacio. Estos sismogramas fueron generados con el código del DWN y con <i>AXITRA</i> [®]	41
FIGURA 4.11: Sismogramas sintéticos de la componente de desplazamiento U_x debido a una fuerza aplicada en dirección z para un semi-espacio. Estos sismogramas fueron generados con el código del DWN y con <i>AXITRA</i> [®]	42
FIGURA 4.12: Sismogramas sintéticos de la componente de desplazamiento U_y debido a una fuerza aplicada en dirección z para un semi-espacio. Estos sismogramas fueron generados con el código del DWN y con <i>AXITRA</i> [®]	43
FIGURA 4.13: Sismogramas sintéticos de la componente de desplazamiento U_z debido a una fuerza aplicada en dirección z para un semi-espacio. Estos sismogramas fueron generados con el código del DWN y con <i>AXITRA</i> [®]	43
FIGURA 4.14: Modelo de velocidades propuesto para un estrato sobre un semi-espacio y esquema de los receptores.	44
FIGURA 4.15: Campo de desplazamientos U_x debido a una fuerza horizontal F_x para el modelo de un estrato sobre un semiespacio.	45
FIGURA 4.16: Mapa de contornos para visualizar el error residual entre la solución con DWN y la solución con <i>AXITRA</i> [®] para el campo de desplazamientos U_x debido a una fuerza horizontal F_x para el modelo de un estrato sobre un semiespacio.	45
FIGURA 4.17: Campo de desplazamientos U_x debido a una fuerza horizontal F_z para el modelo de un estrato sobre un semiespacio.	46
FIGURA 4.18: Mapa de contornos para visualizar el error residual entre la solución con DWN y la solución con <i>AXITRA</i> [®] para el campo de desplazamientos U_z debido a una fuerza horizontal F_x para el modelo de un estrato sobre un semiespacio.	46
FIGURA 4.19: Campo de desplazamientos U_y debido a una fuerza horizontal F_y para el modelo de un estrato sobre un semiespacio.	47
FIGURA 4.20: Mapa de contornos para visualizar el error residual entre la solución con DWN y la solución con <i>AXITRA</i> [®] para el campo de desplazamientos U_y debido a una fuerza horizontal F_y para el modelo de un estrato sobre un semiespacio.	47
FIGURA 4.21: Campo de desplazamientos U_x debido a una fuerza horizontal F_z para el modelo de un estrato sobre un semiespacio.	48
FIGURA 4.22: Mapa de contornos para visualizar el error residual entre la solución con DWN y la solución con <i>AXITRA</i> [®] para el campo de desplazamientos U_x debido a una fuerza horizontal F_z para el modelo de un estrato sobre un semiespacio.	48
FIGURA 4.23: Campo de desplazamientos U_z debido a una fuerza horizontal F_z para el modelo de un estrato sobre un semiespacio.	49

FIGURA 4.24: Mapa de contornos para visualizar el error residual entre la solución con DWN y la solución con <i>AXITRA</i> [®] para el campo de desplazamientos U_z debido a una fuerza horizontal F_z para el modelo de un estrato sobre un semiespacio.	49
FIGURA 4.25: Modelo de velocidades para dos estratos sobre un semi-espacio y esquema de la posición de los receptores a profundidad.	50
FIGURA 4.26: Campo de desplazamientos U_x debido a una fuerza en dirección x para el caso de 2 estratos sobre un semiespacio.	51
FIGURA 4.27: Mapa de contornos que representa el error residual entre los desplazamientos U_x debido a una fuerza en dirección x	51
FIGURA 4.28: Campo de desplazamientos U_z debido a una fuerza en dirección x para el caso de 2 estratos sobre un semiespacio.	52
FIGURA 4.29: Mapa de contornos que representa el error residual entre los desplazamientos U_z debido a una fuerza en dirección x	52
FIGURA 4.30: Campo de desplazamientos U_y debido a una fuerza en dirección y para el caso de 2 estratos sobre un semiespacio.	53
FIGURA 4.31: Mapa de contornos que representa el error residual entre los desplazamientos U_y debido a una fuerza en dirección y	53
FIGURA 4.32: Campo de desplazamientos U_x debido a una fuerza en dirección z para el caso de 2 estratos sobre un semiespacio.	54
FIGURA 4.33: Mapa de contornos que representa el error residual entre los desplazamientos U_x debido a una fuerza en dirección z	54
FIGURA 4.34: Campo de desplazamientos U_z debido a una fuerza en dirección z para el caso de 2 estratos sobre un semiespacio.	55
FIGURA 4.35: Mapa de contornos que representa el error residual entre los desplazamientos U_z debido a una fuerza en dirección z	55
FIGURA 4.36: Modelo de velocidades para estrato blando que se encuentra entre dos capas más rígidas.	56
FIGURA 4.37: Sismogramas sintéticos de la componente radial de un estrato blando entre dos estratos más rígidos.	57
FIGURA 4.38: Sismogramas sintéticos de la componente vertical de un estrato blando entre dos estratos más rígidos.	57
FIGURA 4.39: Desplazamiento radial para fuente volumétrica en un estrato blando rodeado de estratos de mayor velocidad.	58

INTRODUCCIÓN

1.1 Antecedentes

Desde que Lamb (1904) calculó el campo de desplazamientos de un semi-espacio elástico debido a una fuerza aplicada en la superficie libre, otros autores como Pekeris (1955) y Chao (1960) estudiaron la solución a este problema, pero sólo en el caso particular de $\nu = \frac{1}{4}$. El problema fue retomado por Mooney (1974), quien extendió la solución de Pekeris a una relación de Poisson arbitraria para la componente vertical del campo de desplazamientos. La modelación de este problema clásico de la elastodinámica ayudó a entender la física de la propagación de las ondas en medios elásticos, sin embargo, este modelo era poco realista para entender el desplazamiento del suelo debido a una fuente sísmica por tratarse de un semi-espacio elástico homogéneo e isótropo.

En el siglo pasado se desarrollaron varios métodos que permiten estimar la respuesta dinámica de un medio estratificado. La contribución de ondas superficiales a la respuesta total ha sido examinada por Haskell (1964), Ben-Menahem y Harkrider (1964) y Harkrider (1964). Por otro lado, expansiones asintóticas con teoría de rayos fueron desarrolladas por Hron y Kanasevich (1971), Kanasevich et al. (1973) y Hron et al. (1974). Aunque las técnicas basadas en síntesis de ondas superficiales y expansiones de teoría de rayos son excelentes aproximaciones, debido a la interpretación física que se le puede dar a los distintos términos involucrados, estos no otorgan una representación completa de la respuesta de un medio estratificado y no fueron desarrollados para ese propósito (Luco y Apsel, 1983). Otra técnica es el método de reflectividades de Fuchs y Müller (1971) en el cual la respuesta en la superficie libre para una fuente volumétrica, se obtiene mediante la integración sobre un rango de números de onda radiales. La técnica está limitada para ondas compresionales refractadas en las capas consideradas.

En los últimos años se ha dado más atención a métodos que permiten calcular la respuesta dinámica completa. Herrmann (1977) obtuvo el campo de desplazamientos completo de la onda SH-Love para un medio estratificado en el dominio de la frecuencia usando integración de contorno empleada por Lamb y evaluando numéricamente las integrales de línea. Alekseev

y Mikhajlenko (1976) calcularon la respuesta en el dominio del tiempo para fuentes axisimétricas usando diferencias finitas con un esquema unidimensional espacial para propagar ondas con diferentes números de onda en la dirección vertical combinado con integración directa sobre el número de onda radial. Una variación de esta técnica fue propuesta por Olson (1978) quien emplea un esquema de elemento finito combinado con una expansión discreta Fourier-Bessel en el número de onda horizontal. Estas técnicas aunque parecen bastante razonables son poco eficientes en componentes de alta frecuencia (Luco y Apsel, 1983). Bouchon (1981) propuso una técnica analítica para obtener las funciones de Green basada en la discretización de la integración del número de onda considerando fuentes circulares distribuidas a intervalos de radios iguales. Este método del número de onda discreto, DWN por sus siglas en inglés, es usado en códigos comerciales que permiten obtener el campo de desplazamientos en medios estratificados debido a diversos tipos de fuente.

1.2 Objetivos

En este trabajo se busca desarrollar una herramienta capaz de calcular sismogramas sintéticos usando la formulación Sánchez-Sesma et al. (2011) desarrollando el método de Bouchon y Aki (1977) para obtener la respuesta dinámica debido a una fuente actuando en un medio estratificado en las tres direcciones del espacio. El desarrollo del programa para calcular estos desplazamientos cumple los siguientes objetivos particulares:

- ▶ El programa debe ser capaz permitir el cálculo de la respuesta tanto en la superficie libre como a cualquier profundidad.
- ▶ El tipo de fuentes que deberá permitir calcular el código serán fuentes puntuales y fuentes volumétricas.
- ▶ El programa debe permitir colocar la fuente a cualquier profundidad.
- ▶ Conocer las suposiciones y simplificaciones hechas en sismogramas sintéticos que se usan hoy en día como práctica rutinaria sismológica.

1.3 Justificación y Alcance

Obtener el campo de desplazamientos con una formulación en el dominio de la frecuencia y del número de onda resulta muy conveniente para medios estratificados sin irregularidad lateral porque se considera que existe simetría del medio respecto al eje vertical. En la formulación se aprovecha esta simetría ya que en lugar de calcular dos integrales en los números de onda horizontales cartesianos sólo se calcula una integral en el número de onda radial. Esto reduce los cálculos significativamente.

Aunque existen diversos métodos para resolver la integral en el número de onda radial. Muchos de los métodos, como la regla de Simpson, exigen una discretización costosa para aproximar la

solución a la solución analítica y los límites de la integral deben estar definidos. El DWN tiene la ventaja de que la discretización depende de la velocidad máxima del medio y la ventana de tiempo que se requiere. Otra ventaja es que a pesar de que el intervalo de la integral es indefinido se puede hacer un análisis paramétrico para truncar el número de términos de la suma del DWN para que sea convergente con la solución analítica.

Se usa la formulación de Knopoff (1964) para calcular los coeficientes de esfuerzo y desplazamiento debido a su estabilidad en el cálculo de altas frecuencias. Esta formulación presenta desventajas en el tiempo de cálculo pero este defecto puede ser compensado usando métodos eficientes para calcular sistemas de ecuaciones lineales. Además, en esta formulación es sencillo introducir los términos de fuente como discontinuidades en las condiciones de frontera.

La razón principal por la que se desarrolla esta herramienta es para contar con una formulación bien documentada que, de ser necesario, pueda ser modificada para validar resultados con distintos métodos. Además, entender esta formulación y sus suposiciones ayuda a ser un usuario consciente de paquetería existente y también ayuda a tener un mejor uso del mismo.

MARCO TEÓRICO

2.1 Fundamentos de Elastodinámica

El estudio de la elastodinámica esta basado en la perturbación de un estado de equilibrio de un sólido elástico (Aki y Richards, 2002). Para poder aplicar la teoría de la elasticidad en geofísica se supone que la tierra es aproximadamente un cuerpo elástico sujeto a fuerzas que perturban su estado de equilibrio. El comportamiento dinámico de un campo elástico está dado por la ecuación de equilibrio para un volumen, V , elástico y homogéneo rodeado por una superficie S , de acuerdo con la formulación de Euler, esta ecuación en notación indicial está dada por (Aki y Richards, 2002):

$$\int_V f_i dV + \int_S T_i dS = \int_V \rho \ddot{u}_i dV \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.1)$$

donde f_i es la fuerza aplicada al sólido por unidad de volumen en dirección i , T_i son las tracciones o vector de esfuerzos en una superficie dS , ρ es la densidad del medio y \ddot{u}_i es la segunda derivada parcial con respecto al tiempo del desplazamiento. De acuerdo con D'Alembert el producto $\rho \ddot{u}_i$ se considera una fuerza por unidad de volumen en sentido opuesto. La relación entre el vector de esfuerzos y el tensor de esfuerzos σ_{ij} esta dado por la relación de Cauchy:

$$T_i = \sigma_{ij} n_j \quad (2.2)$$

con n_j como la normal de dS . Aplicando el teorema de Gauss en la integral de superficie para convertirla en una integral de volumen, obtenemos para un medio infinito (Aki y Richards, 2002)

$$f_i + \sigma_{ij,j} = \rho \ddot{u}_i \quad (i = 1, 2, 3), \quad (2.3)$$

donde $\sigma_{ij,j}$ es el operador divergencia. El tensor de esfuerzos a su vez se relaciona con el tensor de deformaciones mediante la Ley de Hooke generalizada (Aki y Richards, 2002)

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (2.4)$$

donde c_{ijkl} es el tensor de constantes elásticas. El tensor de deformaciones infinitesimales de Cauchy, se puede expresar en términos del campo de desplazamientos como:

$$\epsilon_{kl} = \frac{1}{2}(u_{k,l} + u_{l,k}) \quad (k, l = 1, 2, 3) \quad (2.5)$$

La traza del tensor, es decir, la suma de elementos en la diagonal principal, mide la deformación volumétrica¹. Así, se cumple que $c_{ijkl} = c_{jikl} = c_{klij} = c_{ijlk}$, esto implica que el tensor se simplifica de 81 a 21 constantes independientes. Si además el sólido está sujeto a deformación plana entonces sólo seis constantes se mantienen independientes (Ben-Menahem y Singh, 2012). Sustituyendo la ecuación 2.5 en la ecuación 2.4 y a su vez la ecuación 2.4 en la ecuación 2.3 se obtiene la ecuación dinámica escrita en función de los desplazamientos

$$(c_{ijkl}u_{k,l})_{,j} + f_i = \rho\ddot{u}_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.6)$$

Además, si se considera que el sólido es isótropo, es decir, que tiene las mismas propiedades elásticas en todas las direcciones, el número de constantes elásticas independientes se reduce a dos. Por el teorema de Riulin-Ericksen, λ y μ son las constantes elásticas e independientes de Lamé, donde μ es el módulo de elasticidad en cortante (Ben-Menahem y Singh, 2012); Así, c_{ijkl} adquiere la forma:

$$c_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}), \quad (2.7)$$

donde δ_{ij} es la delta de Kronecker y toma los valores de

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (2.8)$$

Con la relación anterior, la ley de Hooke para un medio continuo e isótropo es

$$\sigma_{ij} = \lambda\delta_{ij}\epsilon_{kk} + 2\mu\epsilon_{ij}, \quad (2.9)$$

donde $\epsilon_{kk} = u_{k,k}$. Sustituyendo la ecuación 2.9 en la ecuación 2.3 se obtiene la ecuación de movimiento para un medio elástico, homogéneo e isótropo (Ben-Menahem y Singh, 2012)

$$(\lambda + \mu)u_{j,ij} + \mu u_{i,jj} + f = \rho\ddot{u}_i, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.10)$$

La ecuación 2.10 es conocida como la ecuación de Navier-Cauchy. Sustituyendo el teorema de Helmholtz en la ecuación 2.10 se obtiene:

$$(\lambda + 2\mu)u_{j,ij} - \mu\epsilon_{ijk}\epsilon_{klm}u_{m,lj} = \rho\ddot{u}_i, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.11)$$

¹Los otros elementos del tensor miden las deformaciones angulares.

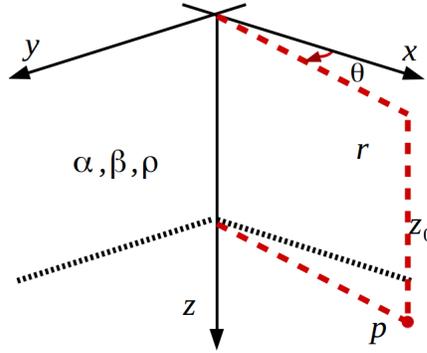


FIGURA 2.1: Medio estratificado en coordenadas cilíndricas. Se muestran las propiedades materiales densidad (ρ), velocidad de onda P (α) y velocidad de onda S (β) que definen al medio elástico, homogéneo e isótropo.

donde ε_{ijk} es el tensor Levi-Civita y se define como

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si } (ijk) \text{ es par} \\ -1 & \text{si } (ijk) \text{ es impar} \\ 0 & \text{si } i = j \text{ ó } j = k \text{ ó } k = i \end{cases} \quad (2.12)$$

Para resolver la ecuación de movimiento 2.11 se debe tomar en cuenta la naturaleza del problema, es decir, las condiciones iniciales y de frontera (Ben-Menahem y Singh, 2012). En este trabajo se adoptará una descripción basada en potenciales. El desplazamiento en términos de esas funciones potenciales se puede expresar como:

$$u_i = \phi_{,i} + \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}\psi_{m,jl} + \varepsilon_{ijk}\chi_{k,j} \quad (2.13)$$

y en notación vectorial se expresa como:

$$\bar{u} = \nabla\phi + \nabla \times \nabla \times \bar{\psi} + \nabla \times \bar{\chi} \quad (2.14)$$

donde ϕ es el potencial escalar para las ondas compresionales P , ψ el potencial vectorial para las ondas transversales polarizadas verticalmente SV y χ el potencial vectorial para las ondas transversales horizontales SH . La divergencia de los potenciales vectoriales es nula, por lo que no causan cambios volumétricos. Mientras que el rotacional del potencial escalar es nulo e implica que no causa rotación (Aki y Richards, 2002).

Las ondas $P - SV$ están acopladas y son independientes de las ondas SH . Sustituyendo los potenciales en la ecuación 2.11, separando la ecuación para cada potencial y descartando

momentáneamente la fuerza externa² obtenemos:

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}; \quad \nabla^2\psi = \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}; \quad \nabla^2\chi = \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2\chi}{\partial t^2} \quad (2.15)$$

las velocidades de onda P y de onda S se definen respectivamente como:

$$\alpha = \sqrt{\frac{(\lambda + 2\mu)}{\rho}} \quad \beta = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (2.16)$$

Cuando el medio es horizontalmente estratificado este desacoplamiento entre $P - SV$ y SH persiste tanto en coordenadas cartesianas como polares (Aki y Richards, 2002), por ello es conveniente tener las ecuaciones potenciales de esta forma. Aplicando la propiedad de diferenciabilidad de la transformada de Fourier³ a las ecuaciones 2.15, se obtienen 3 ecuaciones de Helmholtz:

$$\nabla^2\phi(r, \theta, z, \omega) = -\frac{\omega^2}{\alpha^2}\phi(r, \theta, z, \omega) \quad (2.17)$$

$$\nabla^2\psi(r, \theta, z, \omega) = -\frac{\omega^2}{\beta^2}\psi(r, \theta, z, \omega) \quad (2.18)$$

$$\nabla^2\chi(r, \theta, z, \omega) = -\frac{\omega^2}{\beta^2}\chi(r, \theta, z, \omega) \quad (2.19)$$

transformando el laplaciano de las ecuaciones de Helmholtz a coordenadas cilíndricas obtenemos:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = -\frac{\omega^2}{\alpha^2} \phi \quad (2.20)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -\frac{\omega^2}{\beta^2} \psi \quad (2.21)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \chi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} = -\frac{\omega^2}{\beta^2} \chi \quad (2.22)$$

El sistema de ecuaciones diferenciales (ecuaciones 2.20, 2.21 y 2.22) se pueden resolver usando el método de separación de variables. Esto consiste en que la solución de cada potencial este dada por la multiplicación de funciones independientes entre si, por ejemplo, para el potencial de ondas P :

$$\phi(r, \theta, z) = R(r)\Theta(\theta)Z(z) \quad (2.23)$$

Sustituyendo en la ecuación 2.20 y dividiendo entre $R(r)\Theta(\theta)Z(z)$:

$$-\frac{\omega^2}{\alpha^2} = \frac{1}{r} \frac{(rR'(r))'}{R(r)} + \frac{1}{r^2} \frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} + \frac{Z''(z)}{Z(z)} \quad (2.24)$$

²La fuerza externa f_i de la ecuación de onda se descarta para poder resolver la ecuación de onda homogénea pero se debe retomar en la siguiente sección.

³La convención de la transformada de Fourier directa de una función $f(t)$ al dominio de la frecuencia se define como $f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt$, y la transformada inversa de una función $f(\omega)$ se expresa como $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega)e^{i\omega t} d\omega$. La propiedad de diferenciabilidad de la transformada de Fourier es: $\mathcal{F}\{f^n(t)\} = (i\omega)^n f(\omega)$.

En la ecuación 2.24 se observa la separación de las variables: del lado derecho la ecuación es función de (r, θ, z) ; reacomodando la ecuación:

$$-\frac{Z''(z)}{Z(z)} - \frac{\omega^2}{\alpha^2} = \frac{1}{r} \frac{(rR'(r))'}{R(r)} + \frac{1}{r^2} \frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} \quad (2.25)$$

en esta ecuación se iguala una función de r y una función de θ con una función de z . Entonces tanto el lado izquierdo como el derecho de la ecuación deben ser igual a una constante $-k^2$, que es el número de onda radial, de tal forma que

$$\frac{Z''(z)}{Z(z)} = k^2 - \frac{\omega^2}{\alpha^2}. \quad (2.26)$$

La solución de la ecuación 2.26 es de la forma

$$Z(z) = A_1 e^{\pm i\gamma z} \quad (2.27)$$

donde A_1 es la constante de integración de la ecuación y γ es el número de onda vertical para onda P , dado por:

$$\gamma = \sqrt{\frac{\omega^2}{\alpha^2} - k^2} \quad (2.28)$$

elegimos esta solución pues cumple la condición de irradiación al infinito $Im\{\gamma\} < 0$. Se ha reducido la ecuación 2.24 a una ecuación de la forma

$$r \frac{(rR'(r))'}{R(r)} + k^2 r^2 = -\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} \quad (2.29)$$

Continuando con la separación de variables, ambos lados de la ecuación son iguales a una constante n^2

$$\Theta''(\theta) = -n^2 \Theta(\theta) \quad (2.30)$$

Así, que la solución es de la forma:

$$\Theta(\theta) = A_2 e^{in\theta} = A_2 (\cos n\theta + i \sin n\theta) \quad \theta \in [0, 2\pi) \quad (2.31)$$

Puesto que θ puede tomar los valores de 0 a 2π en el sistema cilíndrico, Θ debe cumplir que

$$\Theta(0) = \Theta(2\pi) \quad (2.32)$$

Esta condición de periodicidad angular obliga a que $n \in \mathbb{Z}$. Tomando en cuenta esta restricción, podemos resolver para $R(r)$ a partir de la ecuación:

$$r \frac{(rR'(r))'}{R(r)} + k^2 r^2 - n^2 = 0 \quad (2.33)$$

Que puede ser reescrita como

$$R''(r) + \frac{1}{r}R'(r) + \left(k^2 - \frac{n^2}{r^2}\right)R(r) = 0 \quad (2.34)$$

Para cada valor de n , ésta es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden, lineal y homogénea conocida como la ecuación de Bessel (Ben-Menahem y Singh, 2012). Las soluciones de esta ecuación son las *funciones de Bessel*, y dependerán del entero n , usado en la ecuación 2.34. Por lo que la solución para la ecuación 2.34 es:

$$R(r) = A_3J_n(kr) + A_4Y_n(kr) \quad (2.35)$$

donde $J_n(kr)$ es la función de Bessel de primera especie de orden n y $Y_n(kr)$ es la función de Bessel de segunda especie y orden n . Las funciones de Bessel son ejemplos de *funciones especiales*.⁴ Las funciones $J_n(r)$ son reales y oscilatorias en r con amplitud decreciente para un r creciente y toman valores finitos en $r = 0$, mientras que las funciones $Y_n(r)$ son indefinidas en $r = 0$, véase figura 2.2.

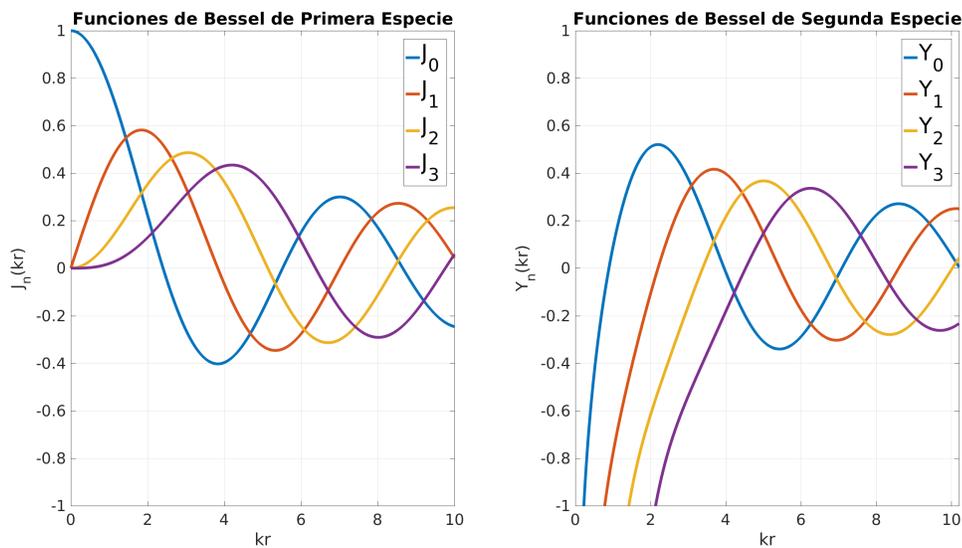


FIGURA 2.2: Funciones de Bessel de primera y segunda especie.

La solución de la ecuación de Helmholtz mediante separación de variables del potencial de ondas P de acuerdo con la ecuación 2.23 es el siguiente catálogo de soluciones:

$$\phi(k, \omega) = Ae^{\pm i\gamma z} \left(A_3J_n(kr) + A_4Y_n(kr) \right) (\cos n\theta + i \sin n\theta) \quad (2.36)$$

⁴Las funciones especiales son soluciones a ecuaciones diferenciales de gran estudio en la física matemática. (Abramowitz y Stegun, 1965).

Análogamente, las soluciones de las ecuaciones de Helmholtz para los potenciales de las ondas SV y SH correspondientemente son de la forma:

$$\psi(k, \omega) = B e^{\pm i\nu z} \left(B_3 J_n(kr) + B_4 Y_n(kr) \right) (\cos n\theta + i \sin n\theta) \quad (2.37)$$

$$\chi(k, \omega) = C e^{\pm i\nu z} \left(C_3 J_n(kr) + C_4 Y_n(kr) \right) (\cos n\theta + i \sin n\theta) \quad (2.38)$$

Donde ν es el número de onda vertical para ondas S y se define:

$$\nu = \sqrt{\frac{\omega^2}{\beta^2} - k^2} \quad \text{que cumple la condición } \text{Im}\{\nu\} < 0. \quad (2.39)$$

En este trabajo, dado que se desarrollará la formulación en coordenadas polares, se usarán las funciones de Bessel de primera especie. Las condiciones $\text{Im}\{\nu\} < 0$ e $\text{Im}\{\gamma\} < 0$ garantizan que las exponenciales complejas de las ecuaciones 2.36, 2.37 y 2.38 sean 0 en el infinito. El número de onda vertical respectivo permite representar a las ondas que se propagan en el sentido positivo del eje z ($e^{-i\nu z}$ ó $e^{-i\gamma z}$) y las ondas que se propagan en el sentido negativo del eje vertical ($e^{+i\nu z}$ ó $e^{+i\gamma z}$). Como estas ecuaciones se resolverán en el dominio de la frecuencia y del número de onda ($f-k$), las ecuaciones 2.36, 2.37 y 2.38 pueden ser reescritas como transformaciones inversas al dominio del espacio, considerando que A , B y C son la multiplicación de las constantes tenemos:

$$\phi(r, \theta, z, \omega) = \int_0^\infty A e^{\pm i\gamma z} J_n(kr) (\cos n\theta + i \sin n\theta) dk \quad (2.40)$$

$$\psi(r, \theta, z, \omega) = \int_0^\infty B e^{\pm i\nu z} J_n(kr) (\cos n\theta + i \sin n\theta) dk \quad (2.41)$$

$$\chi(r, \theta, z, \omega) = \int_0^\infty C e^{\pm i\nu z} J_n(kr) (\cos n\theta + i \sin n\theta) dk. \quad (2.42)$$

Más adelante se ahondará en la integración en el número de onda radial.

2.2 Funciones de Green

Consideremos una ecuación diferencial parcial inhomogénea de la forma

$$L(u(\bar{x}, t)) = f(\bar{x}, t) \quad (2.43)$$

donde L es un operador lineal. En el caso elastodinámico, L corresponde a un operador diferencial vectorial definido en las componentes del campo de desplazamientos $u(\bar{x}, t)$; $f(\bar{x}, t)$ corresponde a la función que representa a una fuerza puntual unidireccional. Usando la relación de la ecuación de onda, el operador L queda definido como:

$$\left(L(u) \right)_i = \rho \ddot{u}_i - (c_{ijkl} u_{k,l})_{,j} \quad (2.44)$$

El problema es resolver el campo de desplazamientos impuesto por una fuerza de cuerpo actuando en un medio elástico y homogéneo (Aki y Richards, 2002). La función de Green de este problema satisface la ecuación

$$L\left(G(\bar{x}, \bar{\xi}, t)\right) = \delta(\bar{x} - \bar{\xi}, t) \quad (2.45)$$

con $\delta(\bar{x} - \bar{\xi}, t)$ como la función delta de Dirac espacial, ésta indica que el impulso está aplicado en la posición $\bar{\xi}$ y el tiempo t . Multiplicando la ecuación 2.45 por la fuerza aplicada en $\bar{\xi}$ e integrando sobre el volumen V alrededor del punto $\bar{\xi}$ se obtiene

$$L\left[\int_V G(\bar{x}, \bar{\xi}, t)f(\bar{\xi}, t)dV\right] = \int_V \delta(\bar{x} - \bar{\xi}, t)f(\bar{\xi}, t)dV. \quad (2.46)$$

Recordando la propiedad de integración de la delta de Dirac la ecuación 2.46 se reescribe como:

$$L\left[\int_V G(\bar{x}, \bar{\xi}, t)f(\bar{\xi}, t)dV\right] = f(\bar{x}, t) \quad (2.47)$$

y relacionando este resultado con la ecuación 2.43 se obtiene

$$u(\bar{x}, t) = \int_V G(\bar{x}, \bar{\xi}, t)f(\bar{\xi}, t)dV \quad (2.48)$$

donde la función de Green es el kernel de la integral de volumen. La fuerza de cuerpo por unidad de volumen se representa con $f_i = \delta(\bar{x} - \bar{\xi})\delta(t)\delta_{ij}$, donde $\delta(t)$ indica que la fuerza se originó en el tiempo $t = 0s$. Si se sustituye la fuerza f_i en la ecuación 2.1, las soluciones son los desplazamientos elásticos para cada punto de coordenadas x_n en cada tiempo t , estos desplazamientos quedarán representados por el tensor $G_{ni}(\bar{x}, \bar{\xi}, t)$ donde i es la dirección de la aplicación de la fuerza y $\bar{\xi}$ es la coordenada de aplicación. La ecuación 2.1 queda expresada como:

$$\int_V \rho \ddot{G}_{ni} dV - \int_S c_{nijkl} G_{ki,l} n_j dS = \int_V \delta(\bar{x} - \bar{\xi})\delta(t)\delta_{ni} dV \quad (2.49)$$

Las soluciones de esta ecuación son las funciones de Green del medio y dependen de sus características, coeficientes elásticos, densidad, forma del volumen y condiciones de frontera en S . Para cada medio existe una función de Green que describe como reacciona el medio mecánicamente a una excitación impulsiva (Aki y Richards, 2002). El teorema de representación es una herramienta con la cual el desplazamiento de modelos de fuentes específicas se sintetiza a partir del desplazamiento producido por fuentes simples, como pulsos unitarios, que actúan en un tiempo y posición en el espacio preciso (Aki y Richards, 2002).

$$\begin{aligned} u_n(x, t) = & \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_V f_i G_{ni} dV \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_S (G_{ni} T_i - c_{ijkl} u_i G_{nk,l} n_j) dS \end{aligned} \quad (2.50)$$

Esta ecuación representa el desplazamiento elástico dentro de un volumen V como la suma de dos integrales dobles. La primera es la integral de volumen de las fuerzas de cuerpo multiplicadas por la función de Green y la segunda es una integral de superficie de las tracciones aplicadas en cada elemento de área dS multiplicados por la función de Green más los desplazamientos por las derivadas de la función de Green. La función de Green actúa como función de transferencia que considera los efectos de fuerzas o esfuerzos en $(\bar{\xi}, t)$ para determinar los desplazamientos en (\bar{x}, t) (Aki y Richards, 2002). En general la determinación de las funciones de Green no es un problema sencillo, el caso más sencillo es para un medio infinito, homogéneo e isótropo. En este trabajo, se calcularán las funciones de Green para un medio estratificado, aprovechando la simetría en la dirección θ . Si tenemos la función de Green para cierto medio, entonces es posible obtener el campo de desplazamientos mediante la relación:

$$u_n(\bar{x}, t) = X_0(t) * G_{ni} \quad (2.51)$$

Donde el desplazamiento es simplemente la convolución de la función de transferencia con la forma de onda en tiempo $X_0(t)$.

2.3 Integración en el número de onda radial

La integración del número de onda radial k sobre el eje real de 0 a ∞ es complicada por varias razones. La primera es que las singularidades de las ondas de cuerpo $k_\alpha = \frac{\omega}{\alpha}$, $k_\beta = \frac{\omega}{\beta}$ y los polos de las ondas de Rayleigh y Love se encuentran en el eje real k . Esto hace que el cálculo de $\phi(r, \theta, z; \omega)$, $\psi(r, \theta, z; \omega)$ y $\chi(r, \theta, z; \omega)$ sea muy inestable. Afortunadamente para un modelo de atenuación, donde las velocidades son complejas, los polos y singularidades del integrando se mueven sobre el eje real k y esto ayuda a estabilizar el cálculo de la integral. Las velocidades de onda longitudinal y cortante son

$$\alpha_I = \alpha \left(1 - \frac{i}{2Q_p}\right) \quad \beta_I = \beta \left(1 - \frac{i}{2Q_s}\right) \quad (2.52)$$

donde Q_p y Q_s son los factores de amortiguamiento histerético. Otra forma de estabilizar la integral a lo largo de la trayectoria de integración en el eje k es introduciendo una pequeña parte imaginaria negativa en la frecuencia angular ω (Bouchon y Aki, 1977), este procedimiento desplaza los polos y las singularidades sobre el eje real k . En lugar de calcular el kernel de la integral en función de ω se calculará en función de $\omega - i\omega_I$. ω_I se puede calcular mediante

$$\omega_I \approx \frac{2\pi}{t_\omega} \quad (2.53)$$

donde t_ω es la ventana de tiempo del sismograma, esta pequeña parte imaginaria ayuda a suavizar la señal en tiempo favoreciendo los primeros arribos esto a su vez reduce el enmascaramiento o aliasing. La atenuación inducida se usa para minimizar la influencia de fuentes virtuales vecinas (Bouchon y Aki, 1977).

2.4 Método del Número de Onda Discreto

El potencial que representa ondas esféricas se puede expresar como la *integral de Sommerfeld*,

$$\Phi(r, z; \omega) = \int_0^\infty \frac{k}{i\gamma} J_0(kr) e^{-i\gamma|z|} dk \quad (2.54)$$

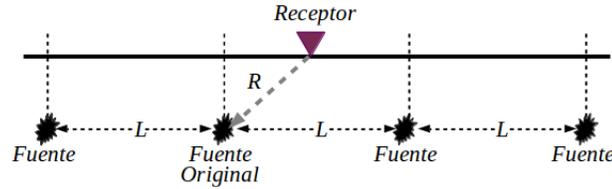


FIGURA 2.3: Interpretación del método de DWN, la fuente original es reemplazada por un arreglo infinito de fuentes distribuidas horizontalmente en un intervalo L . Modificado de Bouchon, (2003).

Cuando el medio es verticalmente heterogéneo el kernel de la integral 2.54 tiene n polos y singularidades, por lo que la integración sobre el número de onda radial se vuelve numéricamente complicada (Bouchon, 2003). Para evitar estas complicaciones se reemplaza el problema de una sola fuente con un problema de múltiples fuentes distribuidas periódicamente en arreglos circulares centrados alrededor de la fuente puntual y distribuidas a un intervalo radial L (Bouchon y Aki, 1977), véase figura 2.3. La discretización de esta función se logra reemplazando el problema de una sola fuente por un arreglo periódico de fuentes. Este arreglo físico implica que la ecuación 2.54 se exprese como:

$$\Phi(r, z; \omega) = \sum_{n=0}^N \frac{k_n}{i\gamma_n} J_0(k_n r) e^{-i\gamma_n |z|} \Delta k \quad (2.55)$$

donde Δk es la frecuencia espacial, k_n es la frecuencia espacial n -ésima. N es el número de términos de la suma. El DWN calcula la ecuación 2.55 en lugar de evaluar la ecuación 2.54. k_n y Δk se expresan como:

$$k_n = \frac{2\pi}{L} n. \quad \text{y} \quad \Delta k = \frac{2\pi}{L} \quad (2.56)$$

donde L es la periodicidad de las fuentes. Para este punto los cálculos se han reducido, sin embargo, hemos reemplazado una integral continua en k con una suma de números de onda radiales discretos, esto equivale físicamente a sumar todas las contribuciones de un número infinito de fuentes puntuales distribuidas uniformemente en el plano horizontal (Bouchon, 1981). La segunda parte del método consiste en encontrar la solución de una sola fuente en el problema de múltiples fuentes. Esto no sería necesario si fuera posible calcular la transformada de Fourier analítica de $\Phi(r, z; \omega)$, ya que se podría aislar el problema de una sola fuente en el dominio del tiempo con espaciamiento L entre fuentes (Bouchon, 2003). Sin embargo, en la práctica sólo podemos calcular $\Phi(r, z; \omega)$ para cierto número de frecuencias y calcular la

transformada rápida de Fourier para regresar al dominio del tiempo. Aplicando la transformada de Fourier:

$$\Phi(r, z; t) = \int_{-\infty+i\omega_I}^{\infty+i\omega_I} \Phi(r, z; \omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (2.57)$$

Donde ω_I representa la frecuencia imaginaria que se ocupa para darle estabilidad al método, evitando que las ondas provenientes de las otras fuentes alteren la respuesta del sistema (Bouchon, 2003). Como se mencionó en la sección anterior, la parte imaginaria de la frecuencia suaviza el espectro aumentando la respuesta de los primeros arribos respecto a los arribos de fuentes más lejanas. Para la integración en la frecuencia temporal, f_{max} y Δf se determinan con Δt y la duración de la señal T de la siguiente forma:

$$f_{max} = \frac{1}{2\Delta t} \quad \Delta f = \frac{1}{T} \quad (2.58)$$

El éxito de calcular la respuesta de desplazamientos usando DWN depende de la selección de los parámetros. Se debe tomar una N lo suficientemente grande ($N \geq k_{\text{modo fundamental}}$) para que en los sismogramas sintéticos se puedan observar ondas superficiales y una Δk lo suficientemente fina para que se puedan muestrear la mayor cantidad de polos posibles.

FORMULACIÓN PARA MEDIO ESTRATIFICADO

En este capítulo se desarrollan las ecuaciones de esfuerzos y desplazamientos en coordenadas cilíndricas en medios estratificados para una fuente puntual actuando en el eje z , y dos fuentes horizontales actuando en los ejes x e y respectivamente de acuerdo con la formulación de Sánchez-Sesma et al. (2011), véase figura 3.1.

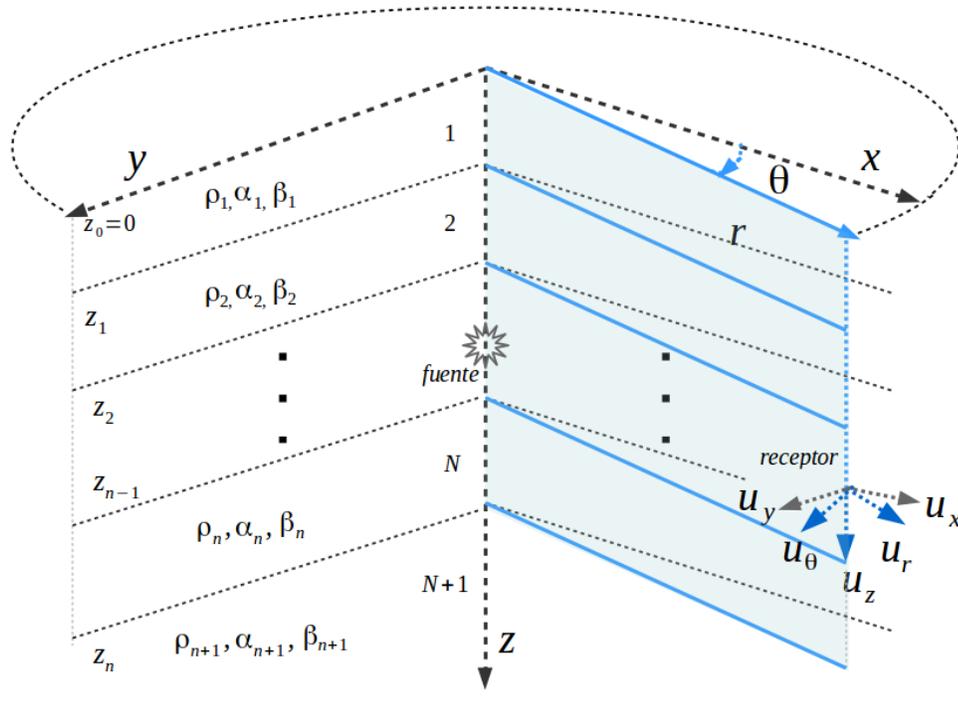


FIGURA 3.1: Problema del medio estratificado de N capas sobre un semi-espacio. La fuente (representada por la combinación de fuentes puntuales) se encuentra sepultada en la j -ésima capa, mientras que el receptor se encuentra en la n -ésima capa donde se obtienen las componentes cilíndricas del campo de desplazamientos.

Partiendo de las ecuaciones 2.36, 2.37 y 2.38 del capítulo 2 se desarrollarán las expresiones que serán útiles para obtener las funciones de Green para medios estratificados y las condiciones de frontera de acuerdo con Harkrider (1964). Para poder aplicar la solución de la ecuación de onda al modelo de n-estratos consideramos que el estrato j-ésimo es homogéneo e isótropo y tiene las siguientes propiedades: μ_j , α_j , β_j y $h_j = z_j - z_{j-1}$. Además el campo de desplazamientos en ese estrato es distinto al calculado para el estrato $j + 1$ puesto que tiene distintas propiedades elásticas (μ_{j+1} , α_{j+1} , β_{j+1} y $h_{j+1} = z_{j+1} - z_j$).

En el sistema de unidades usado en este trabajo, μ_j tiene unidades de $\left[\frac{N}{m^2}\right]$; las velocidades α_j y β_j de $\left[\frac{m}{s}\right]$ y h_j en $[m]$ y la densidad de los materiales, ρ , tiene unidades de $\left[\frac{kg}{m^3}\right]$. Mientras que el número de onda radial (k) y los números de onda verticales (γ_j y ν_j) tienen unidades de $\left[\frac{1}{m}\right]$.

3.1 Fuerza Vertical

Debido a la simetría axial en el eje vertical, una fuerza en dirección z , armónica y unitaria que actúa en un punto específico en el espacio (véase figura 3.2) sólo tiene dependencia radial y vertical (Sánchez-Sesma et al., 2011).

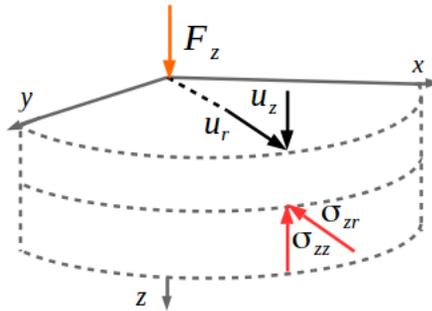


FIGURA 3.2: Esfuerzos y desplazamientos de interés ante una fuerza puntual vertical.

En la interfaz donde se encuentra la fuente los esfuerzos cortantes son nulos mientras que el esfuerzo normal vertical es:

$$\sigma_{zzF} = -\delta(x)\delta(y) \quad (3.1)$$

expresando las funciones delta de Dirac como integrales en los números de onda en x y y , k_x y k_y respectivamente y reexpresando en coordenadas polares tenemos que

$$\sigma_{zzF} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik_x x} e^{ik_y y} dk_x dk_y = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} k J_0(kr) dk \quad (3.2)$$

donde k es el número de onda radial. Además, los únicos desplazamientos de interés son u_r y u_z . Los potenciales para onda P y SV de acuerdo con las ecuaciones 2.36 y 2.37 son

$$\begin{aligned}\phi(r, \theta, z, \omega) &= A e^{\pm i \gamma z} J_0(kr) \\ \psi(r, \theta, z, \omega) &= B e^{\pm i \nu z} J_0(kr)\end{aligned}\quad (3.3)$$

en este caso n toma el valor de cero porque no existe dependencia en θ (Harkrider, 1964). Para el j -ésimo estrato estas ecuaciones se reescriben como:

$$\begin{aligned}\phi_j(r, z) &= \left(A_{2j-1} e^{-i \gamma_j (z-z_j)} + A_{2j} e^{i \gamma_j (z-z_{j+1})} \right) J_0(kr) \\ \psi_j(r, z) &= \left(B_{2j-1} e^{-i \nu_j (z-z_j)} + B_{2j} e^{i \nu_j (z-z_{j+1})} \right) J_0(kr)\end{aligned}\quad (3.4)$$

donde A_{2j-1} y B_{2j-1} son los coeficientes que representan a las ondas P y SV respectivamente que se desplazan en sentido positivo del eje vertical mientras que A_{2j} y B_{2j} son los coeficientes de las ondas que se desplazan hacia arriba según la convención usada en la figura 3.1. La ecuación 3.4 trae consigo el término $e^{i \omega t}$ que permite a los potenciales ser transformados al dominio del tiempo, este término quedará implícito por ahora. Las componentes del campo de desplazamientos para el estrato j -ésimo se expresan en función de los potenciales de acuerdo con Knopoff (1964)

$$\begin{aligned}u_{rj} &= \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial z} \\ u_{zj} &= \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{\beta^2} \psi\end{aligned}\quad (3.5)$$

desarrollando las derivadas de los potenciales se obtienen los siguientes desplazamientos:

$$\begin{aligned}u_{rj}(r, z) &= \left(A_{2j-1} e^{-i \gamma_j (z-z_j)} - i \nu_j B_{2j-1} e^{-i \nu_j (z-z_j)} \right. \\ &\quad \left. + A_{2j} e^{i \gamma_j (z-z_{j+1})} + i \nu_j B_{2j} e^{i \nu_j (z-z_{j+1})} \right) \left(-k J_1(kr) \right)\end{aligned}\quad (3.6)$$

$$\begin{aligned}u_{zj}(r, z) &= \left(-i \gamma_j A_{2j-1} e^{-i \gamma_j (z-z_j)} + k^2 B_{2j-1} e^{-i \nu_j (z-z_j)} \right. \\ &\quad \left. + i \gamma_j A_{2j} e^{i \gamma_j (z-z_{j+1})} + k^2 B_{2j} e^{i \nu_j (z-z_{j+1})} \right) J_0(kr).\end{aligned}\quad (3.7)$$

En la figura 3.2 se observa que los esfuerzos que actúan en la interfaz de una fuerza vertical son σ_{zr} y σ_{zz} . Para obtener dichos esfuerzos, se hace uso de la ecuación 2.9 que corresponde a la *ley de Hooke generalizada*. Si además suponemos que $\xi_j = \nu_j^2 - k^2$, con unidades de $\left[\frac{1}{m^2} \right]$, los esfuerzos se expresan de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\sigma_{zrj} &= \mu_j \left(\frac{\partial u_{rj}}{\partial z} + \frac{\partial u_{zj}}{\partial r} \right) \\ \sigma_{zzj} &= \lambda_j \Theta_j + 2\mu_j \frac{\partial u_{zj}}{\partial z}\end{aligned}\quad (3.8)$$

Donde Θ es la dilatación volumétrica definida como $\Theta = \nabla \cdot u$. Desarrollando las ecuaciones anteriores obtenemos:

$$\begin{aligned} \sigma_{zr_j}(r, z) = & \mu_j \left(-2i\gamma_j A_{2j-1} e^{-i\gamma_j(z-z_j)} - \xi_j B_{2j-1} e^{-i\nu_j(z-z_j)} \right. \\ & \left. + 2i\gamma_j A_{2j} e^{i\gamma_j(z-z_{j+1})} - \xi_j B_{2j} e^{i\nu_j(z-z_{j+1})} \right) (-k J_1(kr)) \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{zz_j}(r, z) = & \mu_j \left(-\xi_j A_{2j-1} e^{-i\gamma_j(z-z_j)} - 2i\nu_j k^2 B_{2j-1} e^{-i\nu_j(z-z_j)} \right. \\ & \left. - \xi_j A_{2j} e^{i\gamma_j(z-z_{j+1})} + 2i\nu_j k^2 B_{2j} e^{i\nu_j(z-z_{j+1})} \right) J_0(kr) \end{aligned} \quad (3.10)$$

con la función de Bessel de primer tipo y primer orden, $J_1(kr)$ obtenida a partir de la derivada de $J_0(kr)$.

3.2 Fuerzas Horizontales

Si se aplica una fuerza puntual en dirección positiva del eje x y otra fuerza en la dirección positiva del eje y , existe una dependencia azimutal. En consecuencia, en $z = z_F$ los esfuerzos que actúan son los cortantes (σ_{zr} y $\sigma_{z\theta}$), mientras que σ_{zz} es nulo en la interfaz (véase figura 3.3).

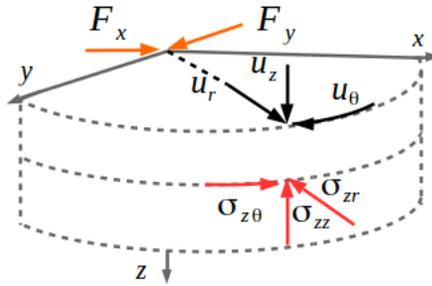


FIGURA 3.3: Esfuerzos y desplazamientos de interés ante la aplicación de fuerzas puntuales horizontales.

Los desplazamientos que se desarrollarán serán u_r , u_θ y u_z . Los potenciales para onda P , SV y SH de acuerdo con las ecuaciones 2.36, 2.37 y 2.38 son

$$\begin{aligned} \phi(r, \theta, z, \omega) &= A e^{\pm i\gamma z} J_1(kr) \cos \theta \\ \psi(r, \theta, z, \omega) &= B e^{\pm i\nu z} J_1(kr) \cos \theta \\ \chi(r, \theta, z, \omega) &= C e^{\pm i\nu z} J_1(kr) \sin \theta \end{aligned} \quad (3.11)$$

como se observa, a n de las ecuaciones 2.36, 2.37 y 2.38 le corresponde el valor de 1 por su dependencia de θ (Harkrider, 1964). Desarrollando las ecuaciones 3.11 para el j -ésimo estrato

$$\begin{aligned}\phi_j(r, \theta, z) &= \left(A_{2j-1} e^{-i\gamma_j(z-z_j)} + A_{2j} e^{i\gamma_j(z-z_{j+1})} \right) J_1(kr) \cos \theta \\ \psi_j(r, \theta, z) &= \left(B_{2j-1} e^{-i\nu_j(z-z_j)} + B_{2j} e^{i\nu_j(z-z_{j+1})} \right) J_1(kr) \cos \theta \\ \chi_j(r, \theta, z) &= \left(C_{2j-1} e^{-i\nu_j(z-z_j)} + C_{2j} e^{i\nu_j(z-z_{j+1})} \right) J_1(kr) \sin \theta,\end{aligned}\quad (3.12)$$

es importante recordar que las ecuaciones 3.12 se multiplican por el término armónico $e^{i\omega t}$. De acuerdo con la figura 3.3 los esfuerzos considerados, debido a la aplicación de fuerzas horizontales, son σ_{zr} , $\sigma_{z\theta}$ y σ_{zz} . El campo de desplazamientos en función de los potenciales de la ecuación 3.12 se expresa como:

$$\begin{aligned}u_{r_j} &= \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial \theta} + \frac{\delta^2 \psi}{\delta r \delta z} \\ u_{\theta_j} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} - \frac{\partial \chi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta \partial z} \\ u_{z_j} &= \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{\beta^2} \psi\end{aligned}\quad (3.13)$$

Derivando los potenciales 3.12 se obtienen los siguientes desplazamientos horizontales:

$$\begin{aligned}u_{r_j}(r, \theta, z) &= \left(A_{2j-1} e^{-i\gamma_j(z-z_j)} - i\nu_j B_{2j-1} e^{-i\nu_j(z-z_j)} \right. \\ &\quad \left. + A_{2j} e^{i\gamma_j(z-z_{j+1})} + i\nu_j B_{2j} e^{i\nu_j(z-z_{j+1})} \right) k \left[J_0 - \frac{J_1}{kr} \right] \cos \theta \\ &\quad + \left(C_{2j-1} e^{-i\nu_j(z-z_j)} + C_{2j} e^{i\nu_j(z-z_{j+1})} \right) k \frac{J_1(kr)}{kr} \cos \theta\end{aligned}\quad (3.14)$$

$$\begin{aligned}u_{\theta_j}(r, \theta, z) &= - \left(A_{2j-1} e^{-i\gamma_j(z-z_j)} - i\nu_j B_{2j-1} e^{-i\nu_j(z-z_j)} \right. \\ &\quad \left. + A_{2j} e^{i\gamma_j(z-z_{j+1})} + i\nu_j B_{2j} e^{i\nu_j(z-z_{j+1})} \right) k \frac{J_1(kr)}{kr} \sin \theta \\ &\quad - \left(C_{2j-1} e^{-i\nu_j(z-z_j)} + C_{2j} e^{i\nu_j(z-z_{j+1})} \right) k \left[J_0 - \frac{J_1}{kr} \right] \sin \theta\end{aligned}\quad (3.15)$$

donde los términos C_{2j-1} y C_{2j} corresponden a las ondas SH que se desplazan en el sentido positivo y negativo del eje vertical respectivamente. Nótese que los términos entre paréntesis de las ecuaciones 3.14 y 3.15 son idénticos. Mientras que los términos dependientes del radio r se intercambian para la parte $P-SV$ y para la parte SH . El término entre paréntesis de la parte $P-SV$ de las ecuaciones 3.14 y 3.15 son iguales al término entre paréntesis de la ecuación u_{r_j} , debido a una fuerza vertical. Mientras tanto, el desplazamiento vertical se expresa como:

$$\begin{aligned}u_{z_j}(r, \theta, z) &= \left(-i\gamma_j A_{2j-1} e^{-i\gamma_j(z-z_j)} + k^2 B_{2j-1} e^{-i\nu_j(z-z_j)} \right. \\ &\quad \left. + i\gamma_j A_{2j} e^{i\gamma_j(z-z_{j+1})} + k^2 B_{2j} e^{i\nu_j(z-z_{j+1})} \right) J_1(kr) \cos \theta,\end{aligned}\quad (3.16)$$

los términos entre paréntesis son los mismos que para el desplazamiento vertical debidos a una fuerza F_z , únicamente cambian los términos radiales y azimutales. Los esfuerzos obtenidos mediante la ley de Hooke se denotan de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{zr_j} &= \mu_j \left(\frac{\partial u_{z_j}}{\partial r} + \frac{\partial u_{r_j}}{\partial z} \right) \\
 \sigma_{z\theta_j} &= \mu_j \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_{z_j}}{\partial \theta} + \frac{\partial u_{\theta_j}}{\partial z} \right) \\
 \sigma_{zz_j} &= \lambda_j \left(-\frac{\omega^2}{\alpha_j^2} \phi \right) + 2\mu_j \left(\frac{\partial u_{z_j}}{\partial z} \right)
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

Desarrollando las ecuaciones 3.17 se obtienen:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{zr_j}(r, \theta, z) &= \mu_j \left(-2i\gamma_j A_{2j-1} e^{-i\gamma_j(z-z_j)} - \xi_j B_{2j-1} e^{-i\nu_j(z-z_j)} \right. \\
 &\quad \left. + 2i\gamma_j A_{2j} e^{i\gamma_j(z-z_{j+1})} - \xi_j B_{2j} e^{i\nu_j(z-z_{j+1})} \right) k \left[J_0 - \frac{J_1}{kr} \right] \cos \theta \\
 &\quad + \left(-i\nu_j C_{2j-1} e^{-i\nu_j(z-z_j)} + i\nu_j C_{2j} e^{i\nu_j(z-z_{j+1})} \right) k \frac{J_1(kr)}{kr} \cos \theta
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{z\theta_j}(r, \theta, z) &= -\mu_j \left(-2i\gamma_j A_{2j-1} e^{-i\gamma_j(z-z_j)} - \xi_j B_{2j-1} e^{-i\nu_j(z-z_j)} \right. \\
 &\quad \left. + 2i\gamma_j A_{2j} e^{i\gamma_j(z-z_{j+1})} - \xi_j B_{2j} e^{i\nu_j(z-z_{j+1})} \right) k \frac{J_1(kr)}{kr} \sin \theta \\
 &\quad - \left(-i\nu_j C_{2j-1} e^{-i\nu_j(z-z_j)} + i\nu_j C_{2j} e^{i\nu_j(z-z_{j+1})} \right) k \left[J_0 - \frac{J_1}{kr} \right] \sin \theta
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{zz_j}(r, \theta, z) &= \mu_j \left(-\xi_j A_{2j-1} e^{-i\gamma_j(z-z_j)} - 2i\nu_j k^2 B_{2j-1} e^{-i\nu_j(z-z_j)} \right. \\
 &\quad \left. - \xi_j A_{2j} e^{i\gamma_j(z-z_{j+1})} + 2i\nu_j k^2 B_{2j} e^{i\nu_j(z-z_{j+1})} \right) J_1(kr) \cos \theta
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

Estos campos de esfuerzos y desplazamientos presentan simetrías útiles, ya que el cálculo dentro de la matriz global se simplifica significativamente.

3.3 Fuente Volumétrica

El potencial de ondas P para una fuente volumétrica en coordenadas cilíndricas se representa a través la integral de Sommerfeld (Bouchon, 2003):

$$\Phi(r, z; \omega) = F(\omega) \int_0^\infty \frac{k}{i\gamma} J_0(kr) e^{-i\gamma|z|} dk, \quad \text{donde} \quad F(\omega) = \frac{M(\omega)}{4\pi\rho\alpha^2} \tag{3.21}$$

y $M(\omega)$ es la magnitud de la fuerza en (N) y ρ es la densidad del medio. El campo de desplazamientos se calcula a partir del potencial Φ como:

$$u_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \quad u_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad (3.22)$$

por lo que los desplazamientos radiales y verticales son:

$$u_r = -F(\omega) \frac{k^2}{i\gamma} J_1(kr) e^{-i\gamma|z-z_F|} \quad (3.23)$$

$$u_z = -F(\omega) k J_0(kr) e^{-\gamma|z-z_F|} \text{sgn}(z - z_F) \quad (3.24)$$

donde $\text{sgn}(z - z_F)$ toma los siguientes valores:

$$\text{sgn}(z - z_F) = \begin{cases} +1 & \text{si } z_j > z_{Fuente} \\ -1 & \text{si } z_j < z_{Fuente} \end{cases} \quad (3.25)$$

de acuerdo con la ley de Hooke generalizada los esfuerzos correspondientes se calculan con las siguientes derivadas:

$$\sigma_{zr} = \mu \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \quad \sigma_{zz} = \lambda \Theta + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (3.26)$$

desarrollando los esfuerzos:

$$\sigma_{zr} = 2\mu F(\omega) k^2 J_1(kr) e^{-i\gamma|z-z_F|} \text{sgn}(z - z_F) \quad (3.27)$$

$$\sigma_{zz} = -\mu F(\omega) \frac{k}{i\gamma} (\nu^2 - k^2) J_0(kr) e^{-i\gamma(z-z_F)} \quad (3.28)$$

En este caso no será necesario calcular los términos SH . Esto se debe a que una fuente volumétrica sólo genera onda P y cuando alcanza alguna interfaz solo se generan ondas $P-SV$.

3.4 Condiciones de Frontera

A continuación se desarrolla la continuidad de esfuerzos y desplazamientos para N estratos sobre un semi-espacio de acuerdo con Harkrider (1964). La representación de la fuerza puntual en la interfaz entre dos estratos se impone como una discontinuidad en los esfuerzos. Para el caso de las fuerzas horizontales existen discontinuidades en los esfuerzos cortantes:

$$\begin{aligned} \sigma_{zr}^+ - \sigma_{zr}^- \Big|_{z=z_F} &= -\delta(x)\delta(y) \cos \theta \\ \sigma_{z\theta}^- - \sigma_{z\theta}^+ \Big|_{z=z_F} &= \delta(x)\delta(y) \sin \theta \end{aligned} \quad (3.29)$$

considerando la identidad de la ecuación 3.2 y desacoplando la parte $P - SV$ con la parte SH :

$$\delta(x)\delta(y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \left[k \left(J_0(kr) - \frac{J_1(kr)}{kr} \right) + k \frac{J_1(kr)}{kr} \right] dk \quad (3.30)$$

debido a que la integral sobre el número de onda radial se resuelve mediante DWN, las discontinuidades en los esfuerzos se representan como:

$$\begin{aligned} \sigma_{zr}^+ - \sigma_{zr}^- \Big|_{z=z_F} &= -\mu_{zF} \left[\frac{k}{2\pi\mu_{zF}} \left(J_0 - \frac{J_1}{kr} \right) + \frac{k}{2\pi\mu_{zF}} \left(\frac{J_1}{kr} \right) \right] \cos \theta \\ \sigma_{z\theta}^- - \sigma_{z\theta}^+ \Big|_{z=z_F} &= +\mu_{zF} \left[\frac{k}{2\pi\mu_{zF}} \left(\frac{J_1}{kr} \right) + \frac{k}{2\pi\mu_{zF}} \left(J_0 - \frac{J_1}{kr} \right) \right] \sin \theta \end{aligned} \quad (3.31)$$

Las condiciones de frontera para el contacto entre la superficie libre y el primer estrato son:

$$\begin{aligned} \sigma_{zr_1} \Big|_{z=0} &= \mu_1 \left(\frac{\partial u_{r_1}}{\partial z} + \frac{\partial u_{z_1}}{\partial r} \right) \Big|_{z=0} = 0 \\ \sigma_{z\theta_1} \Big|_{z=0} &= \mu_1 \left(\frac{\partial u_{\theta_1}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_{z_1}}{\partial \theta} \right) \Big|_{z=0} = 0 \\ \sigma_{zz_1} \Big|_{z=0} &= \lambda_1 \Theta_1 + 2\mu_1 \frac{\partial u_{z_1}}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0 \end{aligned} \quad (3.32)$$

La continuidad de esfuerzos en la interfaz entre el j -ésimo y el estrato $j + 1$ para σ_{zr} , $\sigma_{z\theta}$ y σ_{zz} se escribe como:

$$\begin{aligned} \mu_j \left(\frac{\partial u_{r_j}}{\partial z} + \frac{\partial u_{z_j}}{\partial r} \right) \Big|_{z=z_j} &= \mu_{j+1} \left(\frac{\partial u_{r_{j+1}}}{\partial z} + \frac{\partial u_{z_{j+1}}}{\partial r} \right) \Big|_{z=z_{j+1}} \\ \mu_j \left(\frac{\partial u_{\theta_j}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_{z_j}}{\partial \theta} \right) \Big|_{z=z_j} &= \mu_{j+1} \left(\frac{\partial u_{\theta_{j+1}}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_{z_{j+1}}}{\partial \theta} \right) \Big|_{z=z_{j+1}} \\ \lambda_j \Theta_j + 2\mu_j \frac{\partial u_{z_j}}{\partial z} \Big|_{z=z_j} &= \lambda_{j+1} \Theta_{j+1} + 2\mu_{j+1} \frac{\partial u_{z_{j+1}}}{\partial z} \Big|_{z=z_{j+1}} \end{aligned} \quad (3.33)$$

mientras que la continuidad de desplazamientos para u_r , u_θ y u_z se expresa como:

$$\begin{aligned} u_{r_j} \Big|_{z=z_j} &= u_{r_{j+1}} \Big|_{z=z_j} \\ u_{\theta_j} \Big|_{z=z_j} &= u_{\theta_{j+1}} \Big|_{z=z_j} \\ u_{z_j} \Big|_{z=z_j} &= u_{z_{j+1}} \Big|_{z=z_j}. \end{aligned} \quad (3.34)$$

La continuidad de esfuerzos en la frontera entre el estrato N -ésimo y el semi-espacio solo tendrá los términos de las ondas que bajan P y S debido a que no se reflejan ondas en el semi-espacio.

Esto se expresa como:

$$\begin{aligned}
 \mu_N \left(\frac{\partial u_{rN}}{\partial z} + \frac{\partial u_{zN}}{\partial r} \right) \Big|_{z=z_N} &= \mu_{N+1} \left(\frac{\partial u_{rN+1}}{\partial z} + \frac{\partial u_{zN+1}}{\partial r} \right) \Big|_{z=z_{N+1}} \\
 \mu_N \left(\frac{\partial u_{\theta N}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_{zN}}{\partial \theta} \right) \Big|_{z=z_N} &= \mu_{N+1} \left(\frac{\partial u_{\theta N+1}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_{zN+1}}{\partial \theta} \right) \Big|_{z=z_{N+1}} \\
 \lambda_N \Theta_N + 2\mu_N \frac{\partial u_{zN}}{\partial z} \Big|_{z=z_N} &= \lambda_{N+1} \Theta_{N+1} + 2\mu_{N+1} \frac{\partial u_{zN+1}}{\partial z} \Big|_{z=z_{N+1}}
 \end{aligned} \tag{3.35}$$

mientras que la continuidad de desplazamientos se expresa como:

$$\begin{aligned}
 u_{rN} \Big|_{z=z_N} &= u_{rN+1} \Big|_{z=z_{N+1}} \\
 u_{\theta N} \Big|_{z=z_N} &= u_{\theta N+1} \Big|_{z=z_{N+1}} \\
 u_{zN} \Big|_{z=z_N} &= u_{zN+1} \Big|_{z=z_{N+1}}.
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

Para el caso de una fuerza vertical la discontinuidad se impone en el esfuerzo normal σ_{zz} mientras que la componente cortante es nula (Harkrider, 1964).

$$\sigma_{zz}^+ - \sigma_{zz}^- \Big|_{z=z_F} = \frac{-k}{2\pi} J_0(kr) \tag{3.37}$$

En el caso del contacto entre el primer estrato con la superficie libre existen dos condiciones de frontera, de tal forma que

$$\begin{aligned}
 \sigma_{zr_1} \Big|_{z=0} &= \mu_1 \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \Big|_{z=0} = 0 \\
 \sigma_{zz_1} \Big|_{z=0} &= \lambda_1 \Theta_1 + 2\mu_1 \frac{\partial u_z}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0
 \end{aligned} \tag{3.38}$$

con $\Theta_j = \frac{\partial u_{rj}}{\partial r} + \frac{u_{rj}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_{\theta j}}{\partial \theta} + \frac{\partial u_{zj}}{\partial z}$ para $j = 1$. Es decir, los esfuerzos en el contacto con la superficie libre deben ser nulos a menos que se aplique la fuerza vertical. En la frontera entre el j -ésimo y el siguiente estrato ($j + 1$) debe existir continuidad para los esfuerzos y los desplazamientos de no existir una fuerza en esa interfaz. Para los esfuerzos σ_{zr} y σ_{zz} esto se escribe como:

$$\begin{aligned}
 \mu_j \left(\frac{\partial u_{rj}}{\partial z} + \frac{\partial u_{zj}}{\partial r} \right) \Big|_{z=z_j} &= \mu_{j+1} \left(\frac{\partial u_{rj+1}}{\partial z} + \frac{\partial u_{zj+1}}{\partial r} \right) \Big|_{z=z_j} \\
 \lambda_j \Theta_j + 2\mu_j \frac{\partial u_{zj}}{\partial z} \Big|_{z=z_j} &= \lambda_{j+1} \Theta_{j+1} + 2\mu_{j+1} \frac{\partial u_{zj+1}}{\partial z} \Big|_{z=z_j}
 \end{aligned} \tag{3.39}$$

mientras que la continuidad de desplazamientos se expresa como:

$$\begin{aligned}
 u_{rj} \Big|_{z=z_j} &= u_{rj+1} \Big|_{z=z_j} \\
 u_{zj} \Big|_{z=z_j} &= u_{zj+1} \Big|_{z=z_j}.
 \end{aligned} \tag{3.40}$$

En el caso de la frontera entre el estrato N -ésimo y el semi-espacio (la interfaz z_n) también debe existir continuidad entre los desplazamientos y los esfuerzos si no se está aplicando la

fuerza vertical. Del lado derecho de la ecuaciones de continuidad (ecuaciones 3.40 y 3.39) sólo se tendrán los coeficientes de las ondas P y S que bajan debido a que el último medio es un semi-espacio. Esto se expresa como:

$$\begin{aligned} \mu_N \left(\frac{\partial u_{rN}}{\partial z} + \frac{\partial u_{zN}}{\partial r} \right) \Big|_{z=z_N} &= \mu_{N+1} \left(\frac{\partial u_{rN+1}}{\partial z} + \frac{\partial u_{zN+1}}{\partial r} \right) \Big|_{z=z_N} \\ \lambda_N \Theta_N + 2\mu_N \frac{\partial u_{zN}}{\partial z} \Big|_{z=z_N} &= \lambda_{N+1} \Theta_{N+1} + 2\mu_{N+1} \frac{\partial u_{zN+1}}{\partial z} \Big|_{z=z_N} \end{aligned} \quad (3.41)$$

$$\begin{aligned} u_{rN} \Big|_{z=z_N} &= u_{rN+1} \Big|_{z=z_N} \\ u_{zN} \Big|_{z=z_N} &= u_{zN+1} \Big|_{z=z_N}. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Por lo que se tienen cuatro ecuaciones para resolver y cuatro incógnitas (A_{2j} , B_{2j} , A_{2j-1} y B_{2j-1}) para cada estrato. Esto se retomará en la sección 3.5 donde se usarán estas ecuaciones para obtener la matriz global.

En el caso de la fuente volumétrica las ecuaciones 3.23, 3.24, 3.27 y 3.28 se usan para definir las discontinuidades de desplazamientos y esfuerzos respectivamente. Considerando que en este caso la fuente se encuentra en medio de un estrato, existen 4 ecuaciones de discontinuidad en la interfaz superior y 4 ecuaciones de discontinuidad en la interfaz inferior (i -ésima+1). Las ecuaciones para los desplazamientos radial y vertical son:

$$\begin{aligned} u_{r_i} - u_{r_{i\pm 1}} \Big|_{z=z_F} &= \pm(-1)F(\omega) \frac{k^2}{i\gamma_i} J_1(kr) e^{-i\gamma_i|z-z_F|} \\ u_{z_i} - u_{z_{i\pm 1}} \Big|_{z=z_F} &= \pm(-1)F(\omega) k J_0(kr) e^{-\gamma_i|z-z_F|} \operatorname{sgn}(z - z_F) \end{aligned} \quad (3.43)$$

mientras que para los esfuerzos las ecuaciones son:

$$\begin{aligned} \sigma_{zr_i} - \sigma_{zr_{i\pm 1}} \Big|_{z=z_F} &= \pm 2\mu_i F(\omega) k^2 J_1(kr) e^{-i\gamma_i|z-z_F|} \operatorname{sgn}(z - z_F) \\ \sigma_{zz_i} - \sigma_{zz_{i\pm 1}} \Big|_{z=z_F} &= \pm(-1)\mu_i F(\omega) \frac{k}{i\gamma_i} (\nu_i^2 - k^2) J_0(kr) e^{-i\gamma_i(z-z_F)} \end{aligned} \quad (3.44)$$

Estas ecuaciones se usan para armar los vectores de términos independientes del sistema de ecuaciones de la matriz global.

3.5 Matriz Global

Para resolver el problema de propagación de ondas en un medio que consiste de un gran número de capas, en primer lugar se considera que cada capa es homogénea. Esto se debe a que las ecuaciones para medios homogéneos son más sencillas que aquellas ecuaciones para medio inhomogéneos (Knopoff, 1964). Compensando la facilidad de lo anterior, se deben resolver

muchas ecuaciones simultáneamente con un número correspondiente de incógnitas. La solución de las incógnitas (A_{2j-1} , B_{2j-1} , C_{2j-1} , A_{2j} , B_{2j} y C_{2j}) de un medio estratificado se puede expresar como la solución de ecuaciones simultáneas, donde cada ecuación representa una condición de frontera correspondiente para desplazamientos o esfuerzos en cierta capa. Cuando el número de capas aumenta, el número de ecuaciones también. Considerando nuestro caso de estudio, interesa conocer el movimiento antiplano (SH) y el plano ($P - SV$). Debido a que la matriz $P - SV$ es la misma para las fuerzas horizontales y la fuerza vertical existen dos sistemas de ecuaciones desacoplados, estos sistemas tienen la forma:

$$Mx = b, \tag{3.45}$$

donde M será el kernel, matriz donde se imponen las condiciones de frontera. Por columnas se acomodarán los términos por coeficiente y por renglones las ecuaciones correspondientes a cada condición. x será la matriz de coeficientes y b la matriz de términos independientes. Los términos independientes serán cero excepto para las interfaces donde se aplican las fuentes, en esta interfaz el término será igual al salto en las condiciones de esfuerzos y/o desplazamientos (en el caso de la fuente volumétrica los términos independientes serán distintos de cero en las interfaces entre la posición de la fuente). La solución de estos sistemas de ecuaciones se calculará mediante la factorización LU, debido a su rapidez en el tiempo de cálculo.

3.5.1 Caso Plano

Para el caso $P - SV$ observemos que las ecuaciones que describen los desplazamientos para la fuerza horizontal u_r y u_θ (ecuaciones 3.14 y 3.15 respectivamente) tienen los términos entre paréntesis similares, únicamente cambia el signo y a su vez u_θ , debido a las fuerzas horizontales, tiene esos mismos términos iguales que u_r para el caso de fuerza vertical (ecuación 3.6). Mientras que u_z debido a la fuerza vertical y las fuerzas horizontales (ecuaciones 3.7, 3.16 respectivamente) tiene los términos entre paréntesis iguales. En el caso de los esfuerzos también se repiten estas simetrías.

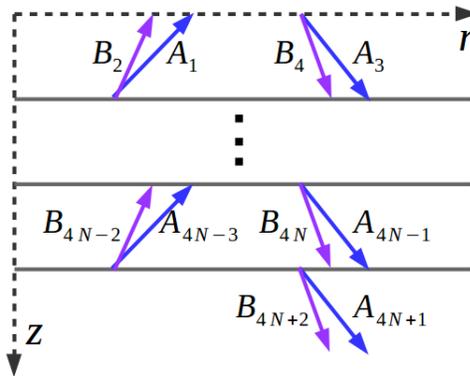


FIGURA 3.4: Medio estratificado con ondas planas P y SV , con amplitudes A_j y B_j respectivamente, que ascienden y descienden.

Por lo anterior, es posible resolver solamente un sistema de ecuaciones para el caso plano ya que sólo cambiaría la excitación, es decir, las discontinuidades en los esfuerzos dentro de los términos independientes. Se expresará a la matriz global M en función de sub-matrices. La sub-matriz de esfuerzos se puede armar usando la contribución plana de σ_{zz} y $\sigma_{z\theta}$ debido a la fuerza horizontal (o σ_{zr} debido a la fuerza vertical). Esta matriz se expresa como:

$$E_j^{P-SV} \begin{bmatrix} A_{2j-1} \\ B_{2j-1} \\ A_{2j} \\ B_{2j} \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

donde

$$E_j^{P-SV} = \mu_j \begin{bmatrix} -\xi_j e^{-i\gamma_j(z-z_j)} & -2i\nu_j k^2 e^{-i\gamma_j(z-z_j)} & -\xi_j e^{i\gamma_j(z-z_{j+1})} & +2i\nu_j k^2 e^{i\nu_j(z-z_{j+1})} \\ 2i\gamma_j e^{-i\gamma_j(z-z_j)} & +\xi_j e^{-i\gamma_j(z-z_j)} & -2i\gamma_j e^{i\gamma_j(z-z_{j+1})} & +\xi_j e^{i\nu_j(z-z_{j+1})} \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

la sub-matriz de desplazamientos se puede expresar a partir del desplazamiento u_z y u_θ debido a la fuente horizontal (o u_r debido a la fuerza vertical)

$$D_j^{P-SV} \begin{bmatrix} A_{2j-1} \\ B_{2j-1} \\ A_{2j} \\ B_{2j} \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

donde:

$$D_j^{P-SV} = \begin{bmatrix} -i\gamma_j e^{-i\gamma_j(z-z_j)} & +k^2 e^{-i\nu_j(z-z_j)} & +i\gamma_j e^{i\gamma_j(z-z_{j+1})} & +k^2 e^{i\nu_j(z-z_{j+1})} \\ -e^{-i\gamma_j(z-z_j)} & +i\nu_j e^{-i\nu_j(z-z_j)} & -e^{i\gamma_j(z-z_{j+1})} & -i\nu_j e^{i\nu_j(z-z_{j+1})} \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

En la condición de frontera libre la ecuación 3.47 se reduce a

$$E_0^{P-SV} = \begin{bmatrix} -\xi_1 & -2i\nu_1 k^2 & -\xi_1 e^{i\gamma_1(z-z_1)} & +2i\nu_1 k^2 e^{i\nu_1(z-z_1)} \\ 2i\gamma_1 & +\xi_1 & -2i\gamma_1 e^{i\gamma_1(z-z_1)} & +\xi_1 e^{i\nu_1(z-z_1)} \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

mientras que los esfuerzos y desplazamientos en el semiespacio son

$$E_{N+1}^{P-SV} = \mu_{N+1} \begin{bmatrix} -\xi_{N+1} & -2i\nu_{N+1} k^2 \\ 2i\gamma_{N+1} & +\xi_{N+1} \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

$$D_{N+1}^{P-SV} = \begin{bmatrix} -i\gamma_{N+1} & +k^2 \\ -1 & +i\nu_{N+1} \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

cada sub-matriz (D_j y E_j) es de 2×4 excepto las sub-matrices D_{N+1} y E_{N+1} que son de 2×2 debido a que no existen reflexiones provenientes del semiespacio. Con base en las ecuaciones

anteriores el sistema de ecuaciones lineales que se debe resolver para las fuerzas puntuales tiene la siguiente forma

$$\begin{bmatrix} E_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ D_1 & -D_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ E_1 & -E_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & D_2 & -D_3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & -E_3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{N-1} & -D_N & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_{N-1} & -E_N & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_N & -D_{N+1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_N & -E_{N+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underbrace{A_1}_{\text{Fuerza}_z} & \underbrace{A_1}_{\text{Fuerza}_h} \\ B_1 & B_1 \\ A_2 & A_2 \\ \vdots & \vdots \\ A_{2j-1} & A_{2j-1} \\ B_{2j-1} & B_{2j-1} \\ A_{2j} & A_{2j} \\ B_{2j} & B_{2j} \\ \vdots & \vdots \\ A_{N+1} & A_{N+1} \\ B_{N+1} & B_{N+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underbrace{0}_{\text{Fuerza}_z} & \underbrace{0}_{\text{Fuerza}_h} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ \frac{-k \operatorname{sgn}(z)}{2\pi\mu_j} & 0 \\ 0 & \frac{ik \operatorname{sgn}(z)}{2\pi\mu_j} \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

Los coeficientes de la primer columna de la matriz de incógnitas corresponden a la fuerza vertical, mientras que los coeficientes de la segunda columna corresponden a las fuerzas horizontales. En el caso de la fuerza vertical, la discontinuidad se encuentra en el esfuerzo normal σ_{zz} , mientras que para las fuerzas horizontales la discontinuidad se encuentra en los esfuerzos cortantes σ_{zr} y $\sigma_{z\theta}$. La matriz de global tiene extensión de $(4N + 2) \times (4N + 2)$ mientras que la matriz de incógnitas (o matriz de coeficientes) tiene una extensión de $(4N + 2) \times 2$ al igual que la matriz de términos independientes. Este sistema de ecuaciones se resolverá para una frecuencia (ω) y un número de onda radial (k) determinado y estará dentro de la integral del número de onda radial, es decir, la matriz se resolverá hasta N_k veces para un receptor.

El caso de una fuente volumétrica es parecido al sistema de ecuaciones 3.5 pero con condiciones de frontera distintas. En el vector de términos independientes se deben imponer continuidades de esfuerzos y desplazamientos en las interfaces que rodean a la fuente.

3.5.2 Caso Antiplano

La matriz global SH es más sencilla en términos de extensión que la matriz $P - SV$ debido a que sólo se tienen dos incógnitas por estrato, la extensión de la matriz M^{SH} es de $(2N + 1) \times (2N + 1)$ y está determinada por los esfuerzos σ_{zr} y los desplazamientos u_z en cada interfaz, que correspondientemente denotaremos como:

$$S_j^{SH} = \mu_j \begin{bmatrix} i\nu_j e^{-i\nu_j(z-z_j)} & +i\nu_j e^{i\nu_j(z-z_{j+1})} \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

$$T_j^{SH} = \begin{bmatrix} +e^{-i\nu_j(z-z_j)} & +e^{i\nu_j(z-z_{j+1})} \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

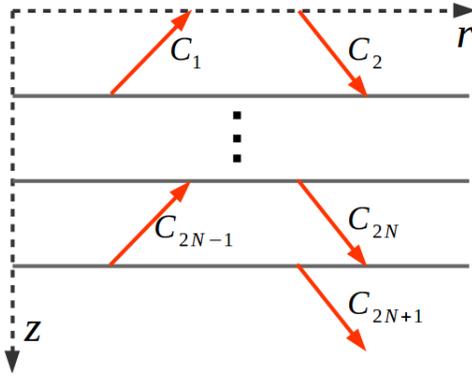


FIGURA 3.5: Medio estratificado con ondas planas SH , con amplitudes C_j , que ascienden y descienden.

La condición de frontera libre se expresa como:

$$S_0^{SH} = \begin{bmatrix} i\nu_1 & +i\nu_1 e^{i\nu_1(z-z_1)} \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

En este caso las sub-matrices son de 1×2 excepto las matrices que definen los esfuerzos y desplazamientos para el semi-espacio, ya que sólo tienen 1 elemento y se definen como:

$$S_{N+1}^{SH} = \mu_{N+1} \begin{bmatrix} -i\nu_{N+1} \end{bmatrix} \quad T_{N+1}^{SH} = \begin{bmatrix} +1 \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

De acuerdo con las matrices anteriores el sistema de ecuaciones SH que se debe resolver queda definido como:

$$\begin{bmatrix} S_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ T_1 & -T_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ S_1 & -S_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & T_2 & -T_3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & S_2 & -S_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & T_N & -T_{N+1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & S_N & -S_{N+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_{2j-1} \\ C_{2j} \\ \vdots \\ C_{N+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{\text{sgn}(z)}{2\pi\mu_j} \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

El vector de términos independientes y el vector de coeficientes tienen dimensiones de $(2N + 1) \times 1$. El término de fuente se ubica en la discontinuidad de esfuerzos entre los estratos donde se encuentra la fuente dentro del vector de términos independientes. Al igual que el sistema $P - SV$, el sistema de ecuaciones SH se resuelve para cada frecuencia y para cada número de onda radial.

3.6 Funciones de Green para el medio estratificado

Una vez resueltos los coeficientes A_{2_j} , $A_{2_{j-1}}$, B_{2_j} , $B_{2_{j-1}}$, C_{2_j} y $C_{2_{j-1}}$ se podrán calcular las funciones de Green. Las funciones de Green debidas a las fuerzas aplicadas en el plano horizontal son:

$$\begin{aligned}
G_{rx} = & \int_0^\infty \left(A_{2_j} e^{-i\gamma_j(z-z_j)} - i\nu_j B_{2_j} e^{-i\nu_j(z-z_j)} \right. \\
& + A_{2_{j-1}} e^{i\gamma_j(z-z_{j+1})} + i\nu_j B_{2_{j-1}} e^{i\nu_j(z-z_{j+1})} \Big) k \left[J_0 - \frac{J_1}{kr} \right] \cos \theta dk \\
& + \int_0^\infty \left(C_{2_j} e^{-i\nu_j(z-z_j)} + C_{2_{j-1}} e^{i\nu_j(z-z_{j+1})} \right) k \frac{J_1(kr)}{kr} \cos \theta dk
\end{aligned} \tag{3.59}$$

$$\begin{aligned}
G_{\theta x} = & - \int_0^\infty \left(A_{2_j} e^{-i\gamma_j(z-z_j)} - i\nu_j B_{2_j} e^{-i\nu_j(z-z_j)} \right. \\
& + A_{2_{j-1}} e^{i\gamma_j(z-z_{j+1})} + i\nu_j B_{2_{j-1}} e^{i\nu_j(z-z_{j+1})} \Big) k \frac{J_1(kr)}{kr} \sin \theta dk \\
& - \int_0^\infty \left(C_{2_j} e^{-i\nu_j(z-z_j)} + C_{2_{j-1}} e^{i\nu_j(z-z_{j+1})} \right) k \left[J_0 - \frac{J_1}{kr} \right] \sin \theta dk
\end{aligned} \tag{3.60}$$

$$\begin{aligned}
G_{zx} = & \int_0^\infty \left(-i\gamma_j A_{2_j} e^{-i\gamma_j(z-z_j)} + k^2 B_{2_j} e^{-i\nu_j(z-z_j)} \right. \\
& + i\gamma_j A_{2_{j-1}} e^{i\gamma_j(z-z_{j+1})} + k^2 B_{2_{j-1}} e^{i\nu_j(z-z_{j+1})} \Big) J_1(kr) \cos \theta dk
\end{aligned} \tag{3.61}$$

$$\begin{aligned}
G_{ry} = & \int_0^\infty \left(A_{2_j} e^{-i\gamma_j(z-z_j)} - i\nu_j B_{2_j} e^{-i\nu_j(z-z_j)} \right. \\
& + A_{2_{j-1}} e^{i\gamma_j(z-z_{j+1})} + i\nu_j B_{2_{j-1}} e^{i\nu_j(z-z_{j+1})} \Big) k \left[J_0 - \frac{J_1}{kr} \right] \sin \theta dk \\
& + \int_0^\infty \left(C_{2_j} e^{-i\nu_j(z-z_j)} + C_{2_{j-1}} e^{i\nu_j(z-z_{j+1})} \right) k \frac{J_1(kr)}{kr} \sin \theta dk
\end{aligned} \tag{3.62}$$

$$\begin{aligned}
G_{\theta y} = & - \int_0^\infty \left(A_{2_j} e^{-i\gamma_j(z-z_j)} - i\nu_j B_{2_j} e^{-i\nu_j(z-z_j)} \right. \\
& + A_{2_{j-1}} e^{i\gamma_j(z-z_{j+1})} + i\nu_j B_{2_{j-1}} e^{i\nu_j(z-z_{j+1})} \Big) k \frac{J_1(kr)}{kr} \cos \theta dk \\
& - \int_0^\infty \left(C_{2_j} e^{-i\nu_j(z-z_j)} + C_{2_{j-1}} e^{i\nu_j(z-z_{j+1})} \right) k \left[J_0 - \frac{J_1}{kr} \right] \cos \theta dk
\end{aligned} \tag{3.63}$$

$$\begin{aligned}
G_{zy} = & \int_0^\infty \left(-i\gamma_j A_{2_j} e^{-i\gamma_j(z-z_j)} + k^2 B_{2_j} e^{-i\nu_j(z-z_j)} \right. \\
& + i\gamma_j A_{2_{j-1}} e^{i\gamma_j(z-z_{j+1})} + k^2 B_{2_{j-1}} e^{i\nu_j(z-z_{j+1})} \Big) J_1(kr) \sin \theta dk
\end{aligned} \tag{3.64}$$

Mientras que para la fuerza aplicada en dirección z

$$G_{rz} = \int_0^\infty \left(-A_{2j} e^{-i\gamma_j(z-z_j)} + i\nu_j B_{2j} e^{-i\nu_j(z-z_j)} - A_{2j-1} e^{i\gamma_j(z-z_{j+1})} - i\nu_j B_{2j-1} e^{i\nu_j(z-z_{j+1})} \right) k J_1(kr) dk \quad (3.65)$$

$$G_{zz} = \int_0^\infty \left(-i\gamma_j A_{2j} e^{-i\gamma_j(z-z_j)} + k^2 B_{2j} e^{-i\nu_j(z-z_j)} + i\gamma_j A_{2j-1} e^{i\gamma_j(z-z_{j+1})} + k^2 B_{2j-1} e^{i\nu_j(z-z_{j+1})} \right) J_0(kr) dk.. \quad (3.66)$$

donde estas funciones dependen de las coordenadas cilíndricas del receptor y la fuente. Para obtener el tensor de Green en coordenadas cartesianas se deben realizar las siguientes proyecciones:

$$\begin{aligned} G_{xx} &= G_{rx} \cos \theta - G_{\theta x} \sin \theta \\ G_{yx} &= G_{rx} \sin \theta + G_{\theta x} \cos \theta \\ G_{zx} &= G_{zx} \\ G_{xy} &= G_{ry} \cos \theta - G_{\theta y} \sin \theta \\ G_{yy} &= G_{ry} \sin \theta + G_{\theta y} \cos \theta \\ G_{zy} &= G_{zy} \\ G_{xz} &= G_{rz} \cos \theta - G_{\theta z} \sin \theta \\ G_{yz} &= G_{rz} \sin \theta + G_{\theta z} \cos \theta \\ G_{zz} &= G_{zz}. \end{aligned} \quad (3.67)$$

La integral en el número de onda radial de estas funciones de Green se resuelve usando el DWN. Usando la ecuación 2.51 del Capítulo 2 podemos obtener los desplazamientos mediante las funciones de Green para el medio. Donde la función $X_0(t)$ puede ser un pulso Gaussiano definido como:

$$X_0(t) = -\frac{t_p^2}{4\pi^2} e^{-a^2} \quad \text{donde} \quad a = \pi \frac{t - t_s}{t_p} \quad (3.68)$$

o un pulso de Ricker que se expresa como:

$$X_0(t) = -\left(a^2 - \frac{1}{2}\right) e^{-a^2} \quad (3.69)$$

donde t_p es el periodo del pulso, y t_s es el corrimiento en el tiempo, ver figura 3.6.

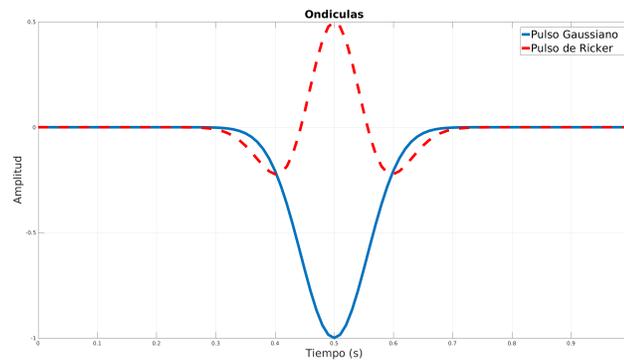


FIGURA 3.6: Pulso de Gauss y su segunda derivada respecto al tiempo, el pulso de Ricker. El periodo de los pulsos es $t_p = 0.25[s]$ y tiempo de amplitud máxima es $t_s = 0.5[s]$.

RESULTADOS

En este capítulo se muestran los resultados obtenidos con los programas creados a partir de las ecuaciones del Capítulo 3. En la primera sección se muestra la calibración del DWN con la solución analítica de la función de Green, con ella es posible determinar los valores para asegurar su convergencia. También se muestran resultados generados con el programa usando DWN en el semiespacio para fuerzas puntuales y su comparación con los desplazamientos generados con el programa *AXITRA*[®] desarrollado por Coutant (1989). Posteriormente se muestran ejemplos calculados con el programa como: un estrato sobre un semiespacio, medio con gradiente de velocidad con fuerzas puntuales y un modelo de inversión de velocidad, propuesto por Chen et al. (1996), con una fuente volumétrica.

El campo de desplazamientos debido a fuentes puntuales se calcula usando las funciones de Green convolucionadas con un pulso de Ricker. Debido a que el kernel está en el dominio de la frecuencia y el número de onda, se debe transformar al dominio del espacio y el tiempo. Esto se logra realizando la suma en k y calculando la transformada inversa de Fourier. Para hacer la transformada inversa de Fourier se usa el código de la transformada rápida de Fourier propuesto por Claerbout (1985), mientras que la integral en el número de onda radial se calcula usando el DWN. El programa para calcular los desplazamientos provocados por cierta fuente para n -estratos y x -receptores sigue el siguiente algoritmo:

```
do i=1,fmax
  do j=1,kmax
    do l=1, # capas
      se calcula la matriz global
    end do
    terminos de la fuente y se resuelven los coeficientes
    do m=1, # estaciones
      se calculan las funciones de Green por receptor
    end do
  end do
end do
se calcula la transformada inversa de Fourier
```

4.1 Convergencia del DWN

A continuación se verifica la convergencia del DWN mediante los parámetros para resolver la integral. Estos parámetros son el número de términos de N de la suma y la distancia entre fuentes ficticias L que a su vez determina el muestreo del número de onda radial Δk . Para lograr este objetivo, se muestra la función de transferencia en función de la frecuencia lineal. Para verificar si los parámetros del DWN dependen de la distancia de la fuente se muestran gráficamente los módulos de la función de transferencia a distintas distancias de la fuente. Para esta calibración se trabaja con la función de Green G_{zz} (ecuación 3.66) y su solución analítica propuesta por Chao (1960). La fuente se encuentra en la posición $(0, 0, 0)$, y los receptores se encuentran en la superficie libre en el eje x para las figuras 4.1 y 4.3, mientras que para la figura 4.2 los receptores varían su posición respecto a la profundidad, véase tabla 4.1. Estos distintos arreglos de receptores permiten entender mejor la convergencia del parámetro N .

Modelo de velocidades

α [km/s]	β [km/s]	ρ [g/cm ³]
6.3	3.5	1.0

Parámetros para receptores con variación horizontal

\bar{x}_{fuente} [km]	$\bar{r}_{inicial}$ [km]	\bar{r}_{final} [km]
(0, 0, 0)	(0.08, 0, 0)	(0.7, 0, 0)

Parámetros para receptores con variación vertical

\bar{x}_{fuente} [km]	$\bar{r}_{inicial}$ [km]	\bar{r}_{final} [km]
(0, 0, 0)	(0.01, 0, 0)	(0.01, 0, 0.5)

TABLA 4.1: Parámetros usados para la verificar la convergencia de los parámetros del DWN. \bar{x}_{fuente} son las coordenadas de la fuente, $\bar{r}_{inicial}$ son las coordenadas del receptor inicial y \bar{r}_{final} son las coordenadas del último receptor.

En la figura 4.1 se compara la solución analítica contra las soluciones calculadas con diferentes N , nótese que mientras el número N aumenta el cálculo discreto se aproxima mejor a la curva analítica. Se observa que en las primeras frecuencias la convergencia de la solución discreta es mayor para las soluciones mayor distinto número de términos y al aumentar la frecuencia, la solución requiere más términos de la suma para asegurar que la curva sea parecida a la analítica. Recordando que k_{max} es el número de onda radial máximo, el número de términos de la suma se calcula como:

$$N = \frac{k_{max}}{\Delta k} \tag{4.1}$$

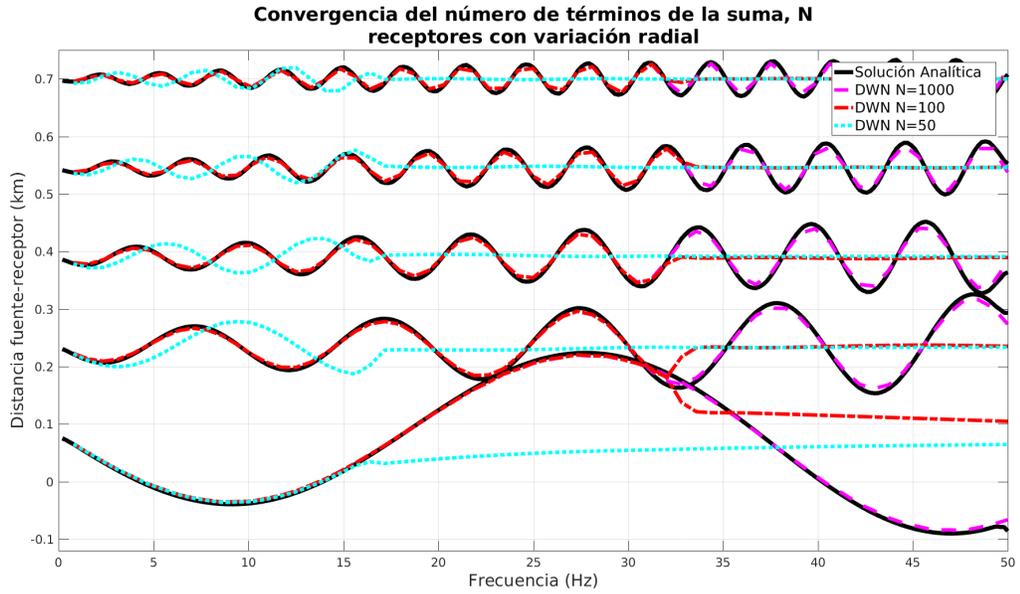


FIGURA 4.1: Convergencia del DWN usando distinto número de términos (N). Se muestra el módulo de la función de transferencia de cinco estaciones contra la frecuencia. En color negro se observa la solución analítica, en cian la función de transferencia calculada con 50 términos de la suma, la curva roja es la función de transferencia calculada con 100 términos de la suma y la curva magenta representa la función de transferencia calculada con $N=1000$ términos. Nótese que la función de transferencia se vuelve más oscilatoria a mayor distancia de la fuente r y la solución falla al aumentar la frecuencia.

por lo que el número de onda radial máximo se calcula como:

$$k_{max} > F_k \left(\frac{\omega}{v_{min}} \right), \quad (4.2)$$

donde v_{min} es la menor velocidad dentro del modelo de velocidades propuesto y F_k es un factor empírico. Este criterio ayuda a calcular una k_{max} suficiente para que la solución sea convergente. El valor de F_k varía con la posición del receptor respecto a la fuente, cuanto más cerca se encuentre el receptor de la fuente en profundidad necesita más términos de la suma para converger a la solución analítica, esto sucede porque al ser la exponencial de la propagación vertical igual a cero el integrando oscila lentamente con el número de onda (Hisada, 1994).

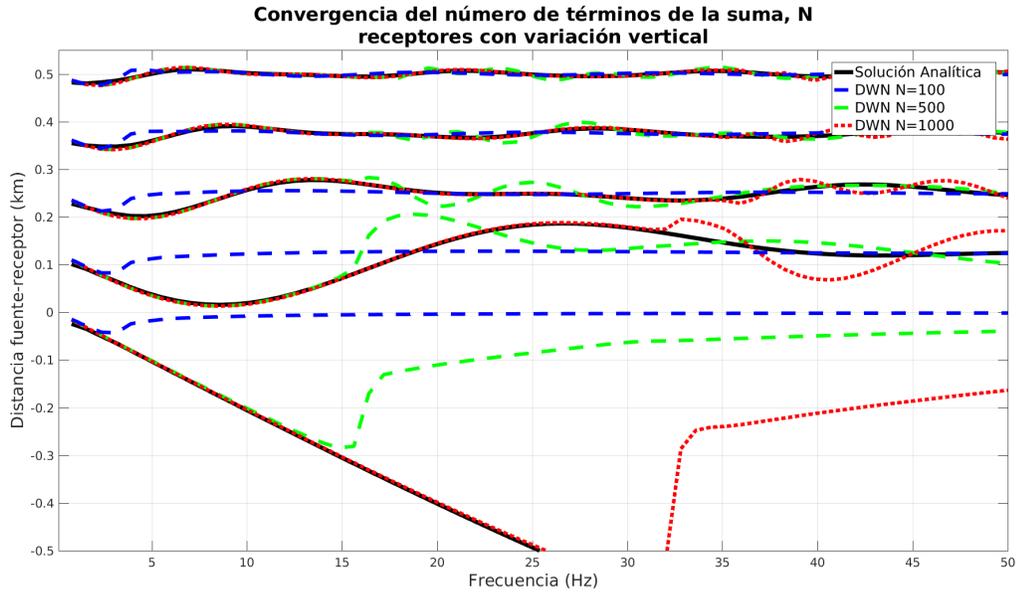


FIGURA 4.2: Convergencia del DWN usando distinto número de términos (N). Los receptores varían respecto al eje vertical. Se muestra el módulo de la función de transferencia (G_{zz}) de cinco estaciones que varían respecto a la vertical contra la frecuencia. En color negro se observa la solución analítica, en azul la solución con $N=100$ términos, en verde la solución con $N=500$ términos y en rojo la solución con $N=1000$. En este caso se requiere mayor número de términos para que la solución sea convergente.

En este análisis tanto la fuente como los receptores se encuentran a la misma profundidad y por esta razón se requieren alrededor de 1000 términos para asegurar la convergencia ($F_k > 10$). Sin embargo cuando la fuente está a distinta profundidad de los receptores, véase figura 4.2, se requiere un menor número de términos, es decir, un factor $F_k \approx 3$.

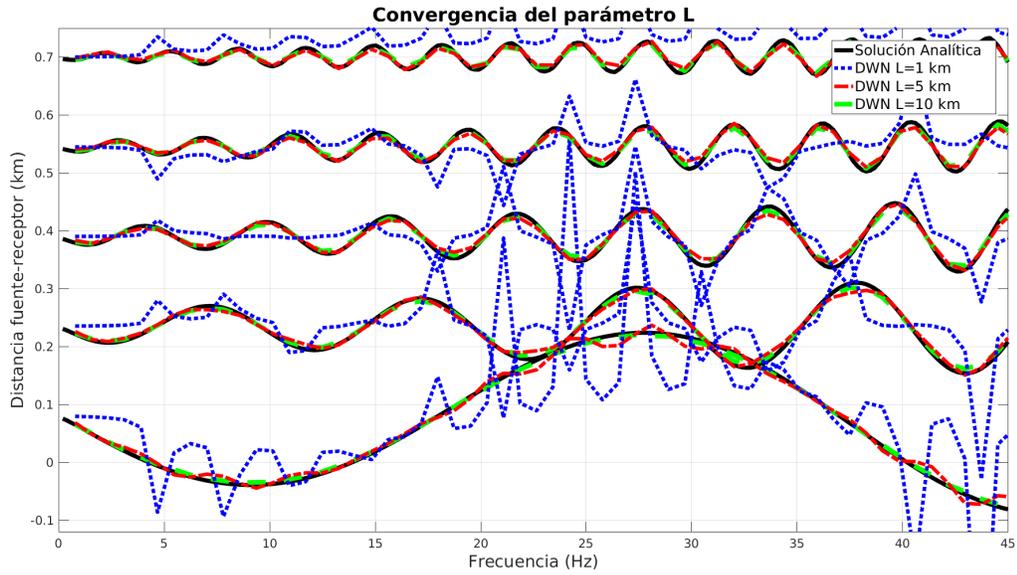


FIGURA 4.3: Convergencia del DWN variando la distancia entre fuentes virtuales (L). Los receptores varían respecto al radio y se encuentran en la superficie libre. Se observa el módulo de la función de transferencia de cinco estaciones contra la frecuencia. En negro se observa la representación de la solución analítica, en azul la solución de la función de transferencia con $L = 1\text{ km}$, en rojo la solución de la función de transferencia usando $L = 5\text{ km}$ y en verde la función de transferencia con $L = 10\text{ km}$.

Por otro lado, en la figura 4.3, se observa la convergencia de la solución variando el factor L . Recordemos que L está relacionada con Δk mediante la ecuación:

$$\Delta k = \frac{2\pi}{L}, \quad (4.3)$$

por lo que entre mayor sea la distancia entre fuentes virtuales, menor será la tasa de muestreo de las frecuencias, es decir, se obtendrá mejor resolución de las singularidades de la integral. La distancia L necesariamente depende de la distancia a la que se encuentre el receptor. En la figura 4.3 se observa como se deteriora la convergencia a mayor distancia de la fuente original y no depende de la frecuencia. Una regla conveniente para determinar la distancia L es

$$L > 2v_{max}t_{\omega} \quad (4.4)$$

donde v_{max} es la velocidad máxima del medio y t_{ω} es la duración de la ventana de tiempo. De cumplir con la regla 4.4, el campo de desplazamientos no será perturbado por fuentes vecinas.

4.2 Calibración en un semiespacio

A continuación se muestran los sismogramas sintéticos calculados con el programa del DWN usando matriz global y los sismogramas generados con el programa de *AXITRA*[®] desarrollado por Coutant (1989) para un semi-espacio infinito. Los parámetros usados para calcular estos sismogramas sintéticos se describen en la tabla 4.2.

Modelo de velocidades						
α	$[\frac{km}{s}]$	β	$[\frac{km}{s}]$	ρ	$[\frac{g}{cm^3}]$	Q
2.0		1.0		1.0		1000
Parámetros de tiempo						
t_p	[seg]	t_s	[seg]	Δt	[seg]	N_{frec}
0.03		0.075		0.001		128
Parámetros de DWN y Fuente						
L	[km]	ω_I	$[\frac{rad}{seg}]$	z_{fuente}	[km]	F_k
1.024		1.0		0.01		3.0

TABLA 4.2: Parámetros usados para la verificación del método en un semi-espacio. N_{frec} es el número de frecuencias calculadas, L es la distancia entre fuentes virtuales, ω_I es la parte imaginaria de la frecuencia, z_{fuente} es la profundidad a la que se encuentra la fuente y F_k es el factor para determinar cuantos números de onda radiales (k) se calcularán para cada frecuencia.

El arreglo de los receptores se observa en la figura 4.4. La línea de receptores se encuentran en la superficie del semi-espacio a una $\theta = 45^\circ$. Esta alineación de los receptores a superficie implica que todas las componentes del tensor de Green son distintas de cero puesto que los receptores no se encuentran en planos nodales.

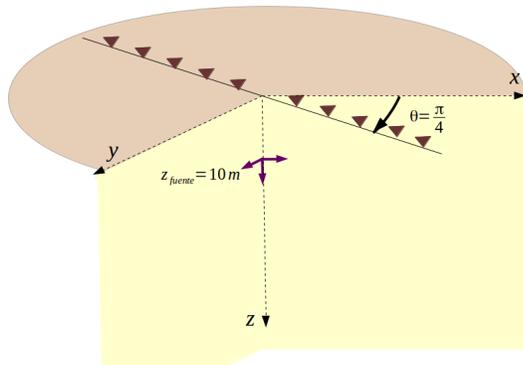


FIGURA 4.4: Esquema del arreglo de receptores en el semi-espacio, la fuente se encuentra a 10 metros de profundidad.

En las figuras 4.5, 4.6 y 4.7 se observa el campo de desplazamientos para una fuerza horizontal aplicada en dirección x . En la figura 4.5 se observa la componente de desplazamiento U_x con un error residual entre los sismogramas calculados con *AXITRA*[®] y el código generado

en este trabajo del orden de 7×10^{-3} en los receptores más cercanos a la fuente. En la componente de desplazamiento U_y (figura 4.6) se observa un error residual de 3.5×10^{-3} en los receptores cercanos a la fuente provocado principalmente por la diferencia de amplitud entre la onda S . Mientras que en la componente de desplazamiento U_z (figura 4.7) el error residual en las componentes más cercanas a la fuente es de 16×10^{-3} .

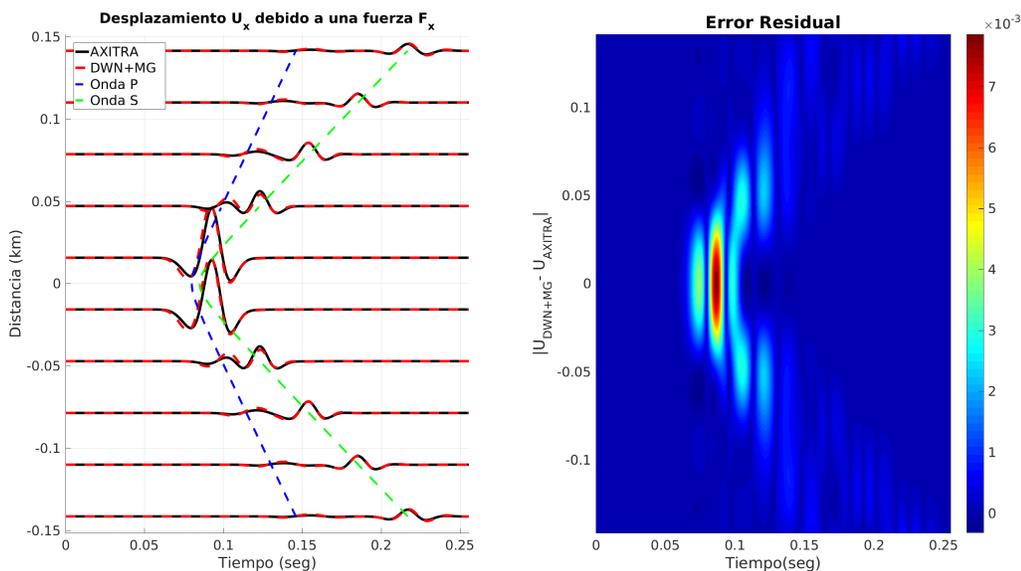


FIGURA 4.5: Sismogramas sintéticos de la componente de desplazamiento U_x debido a una fuerza aplicada en dirección x para un semi-espacio. *a)* Sismogramas sintéticos generados con el código del DWN usando matriz global (línea roja) y con *AXITRA*[®] (línea negra). *b)* Mapa de contornos para visualizar el error relativo entre ambos resultados.

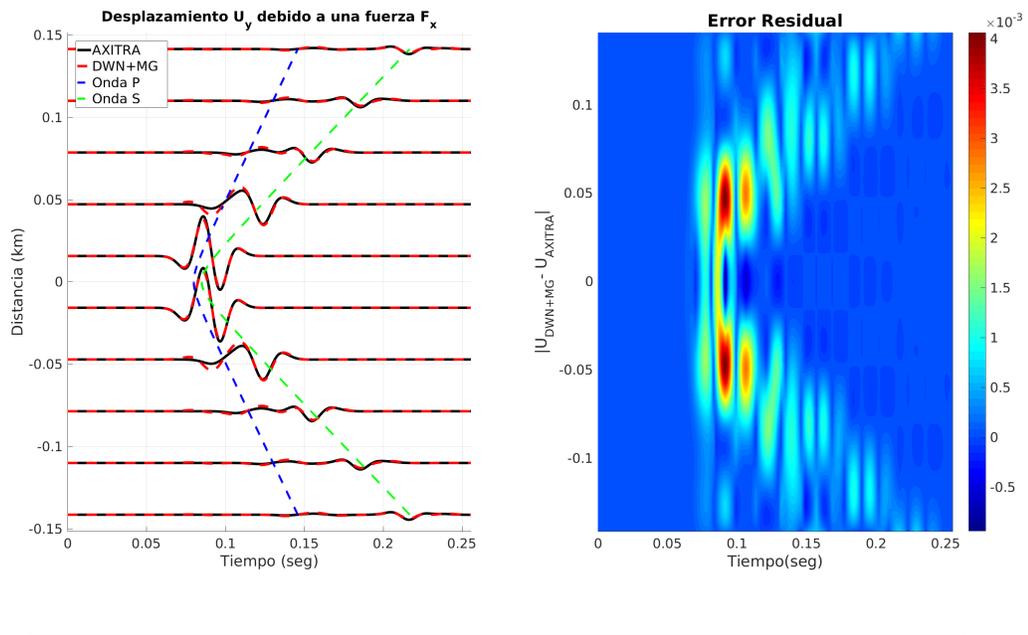


FIGURA 4.6: Sismogramas sintéticos de la componente de desplazamiento U_y debido a una fuerza aplicada en dirección x para un semi-espacio. *a)* Sismogramas sintéticos generados con el código del DWN usando matriz global (línea roja) y con *AXITRA*[®] (línea negra). *b)* Mapa de contornos para visualizar el error relativo entre ambos resultados.

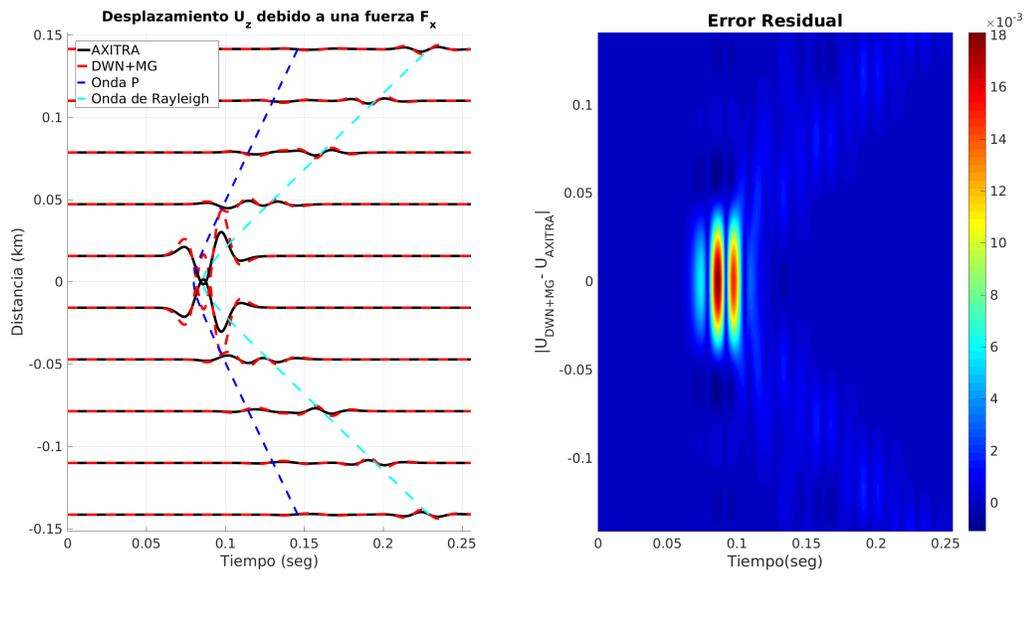


FIGURA 4.7: Sismogramas sintéticos de la componente de desplazamiento U_z debido a una fuerza aplicada en dirección x para un semi-espacio. *a)* Sismogramas sintéticos generados con el código del DWN usando matriz global (línea roja) y con *AXITRA*[®] (línea negra). *b)* Mapa de contornos para visualizar el error relativo entre ambos resultados.

Las figuras 4.8, 4.9 y 4.10 representan el campo de desplazamientos para una fuerza horizontal aplicada en dirección y . Para la componente de desplazamientos U_x (figura 4.8) el error residual entre los sismogramas calculados con $AXITRA^{\text{®}}$ y el código del DWN usando matriz global es de 3.5×10^{-3} en las componentes más cercanas a la posición de la fuente. Debido a la simetría del tensor de Green y que la línea de receptores se encuentra a $\theta = 45^\circ$, esta componente es igual a la componente U_y debido a F_x . En la componente de desplazamiento U_y (figura 4.9) se observa un error residual de 7×10^{-3} en los receptores cercanos a la fuente. En la componente de desplazamiento U_z (figura 4.10) el error residual en las componentes más cercanas a la fuente es de 12×10^{-3} .

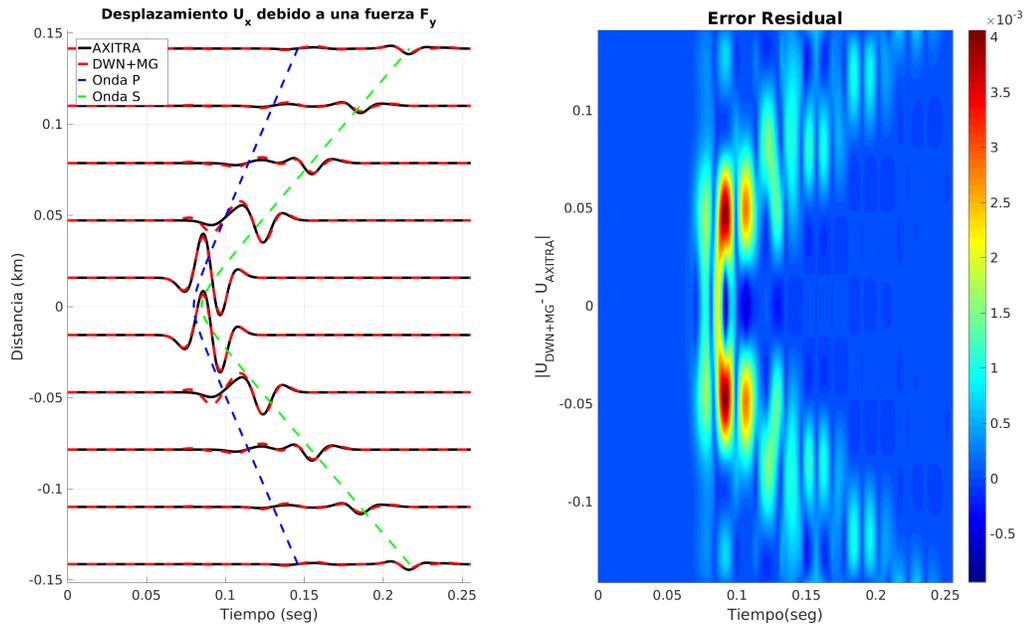


FIGURA 4.8: Componente de desplazamiento U_x debido a una fuerza aplicada en dirección y para un semi-espacio. *a)* Sismogramas sintéticos generados con el código del DWN usando matriz global (línea roja) y con $AXITRA^{\text{®}}$ (línea negra). *b)* Mapa de contornos para visualizar el error relativo entre ambos resultados.

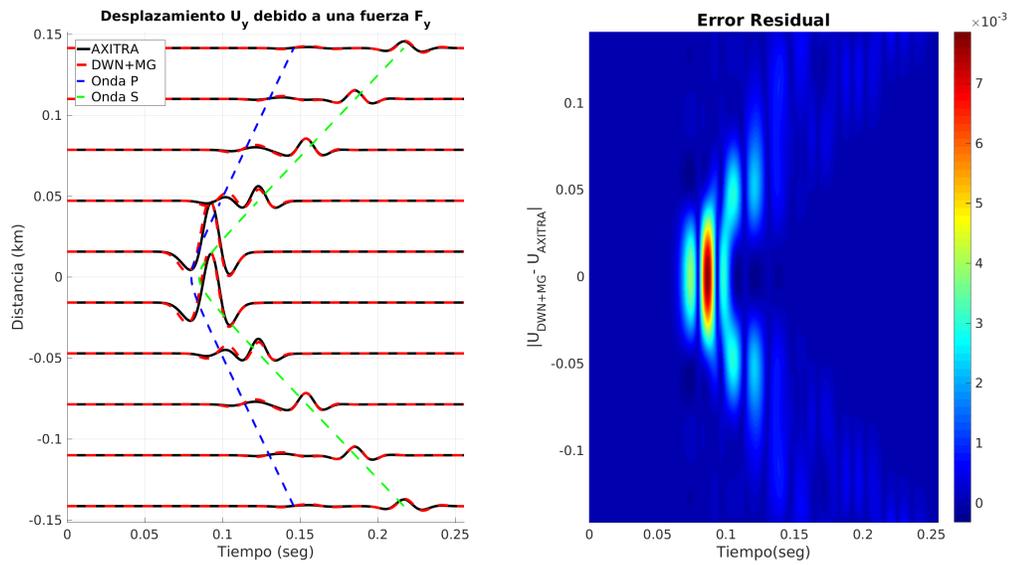


FIGURA 4.9: Componente de desplazamiento U_y debido a una fuerza aplicada en dirección y para un semi-espacio. *a)* Sismogramas sintéticos generados con el código del DWN usando matriz global (línea roja) y con *AXITRA*[®] (línea negra). *b)* Mapa de contornos para visualizar el error relativo entre ambos resultados.

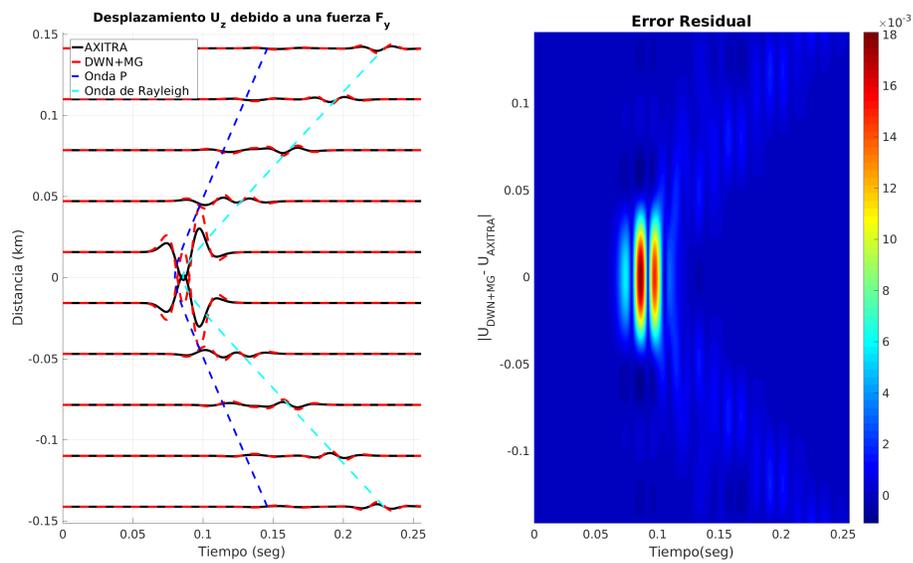


FIGURA 4.10: Componente de desplazamiento U_z debido a una fuerza aplicada en dirección y para un semi-espacio. *a)* Sismogramas sintéticos generados con el código del DWN usando matriz global (línea roja) y con *AXITRA*[®] (línea negra). *b)* Mapa de contornos para visualizar el error relativo entre ambos resultados.

En las figuras 4.11, 4.12 y 4.13 se representa el campo de desplazamientos para una fuerza vertical aplicada en dirección positiva del eje z . En teoría, la componente de desplazamientos U_x (figura 4.11) debe ser igual a la componente de desplazamiento U_x debido a F_z para un semiespacio homogéneo, sin embargo el error residual es del orden de 16×10^{-3} . Esto se debe a la simetría del tensor de Green y que la línea de receptores se encuentra a $\theta = 45^\circ$. En la componente de desplazamiento U_y (figura 4.12) se observa un error residual de 16×10^{-3} en los receptores cercanos a la fuente, esta componente de desplazamiento debe ser igual a el desplazamiento U_z debido a una fuerza en dirección F_y . La componente de desplazamiento U_z (figura 4.13) presenta un error residual en las componentes más cercanas a la fuente de 0.035.

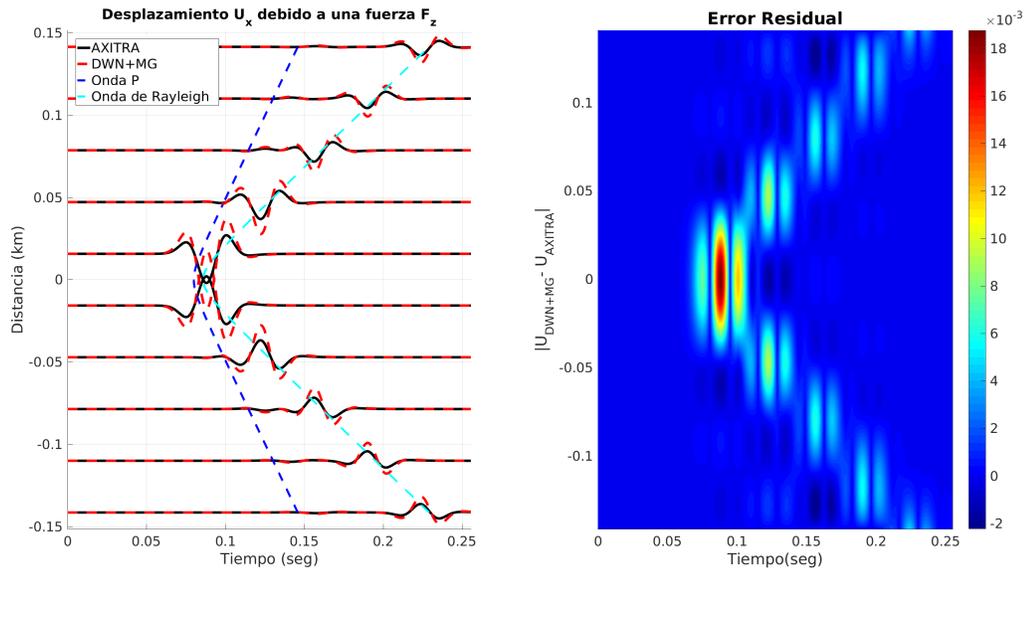


FIGURA 4.11: Componente de desplazamiento U_x debido a una fuerza aplicada en dirección z para un semi-espacio. *a)* Sismogramas sintéticos generados con el código del DWN usando matriz global (línea roja) y con *AXITRA*[®] (línea negra). *b)* Mapa de contornos para visualizar el error relativo entre ambos resultados.

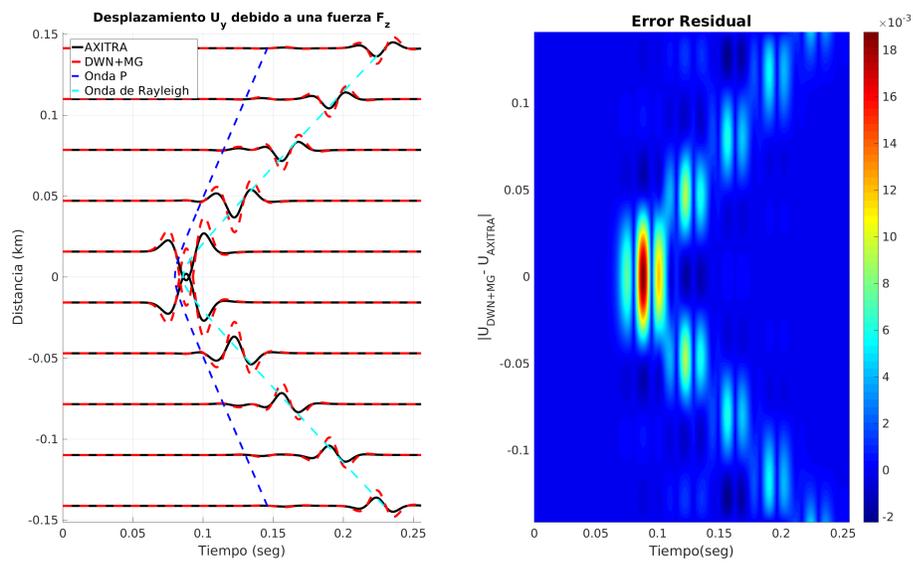


FIGURA 4.12: Componente de desplazamiento U_y debido a una fuerza aplicada en dirección z para un semi-espacio. *a)* Sismogramas sintéticos generados con el código del DWN usando matriz global (línea roja) y con *AXITRA*[®] (línea negra). *b)* Mapa de contornos para visualizar el error relativo entre ambos resultados.

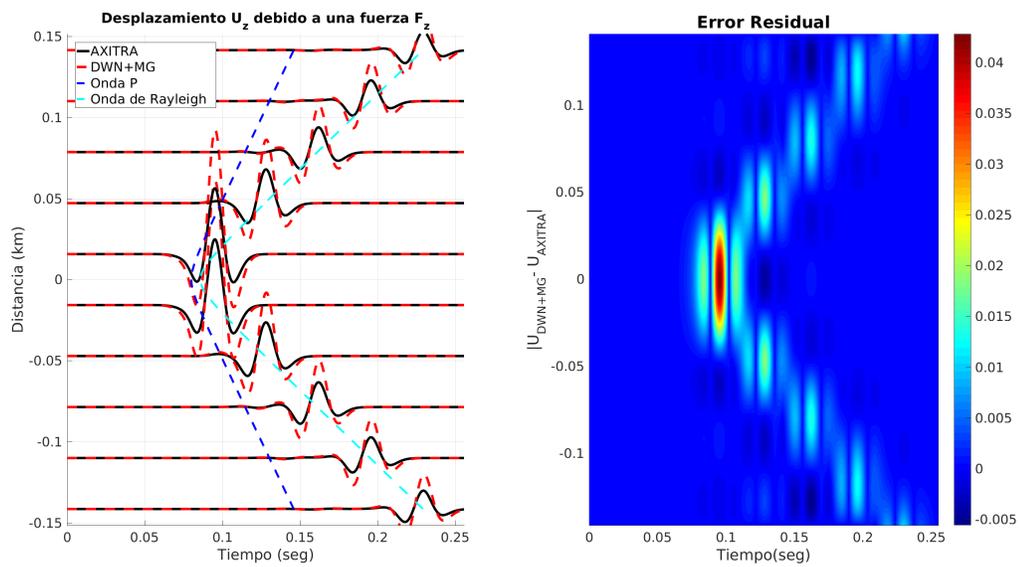


FIGURA 4.13: Componente de desplazamiento U_z debido a una fuerza aplicada en dirección z para un semi-espacio. *a)* Sismogramas sintéticos generados con el código del DWN usando matriz global (línea roja) y con *AXITRA*[®] (línea negra). *b)* Mapa de contornos para visualizar el error relativo entre ambos resultados.

4.3 Estrato sobre un semi-espacio

A continuación se desarrolla el caso de un estrato sobre un semi-espacio, donde la fuente se encuentra enterrada a una profundidad de $z = 50m$. Los parámetros usados para calcular estos sismogramas se encuentran en la tabla 4.3 mientras que el modelo de velocidades y el arreglo de receptores se observa en la figura 4.14. En este modelo la línea de receptores se encuentra sobre el eje horizontal x , esto implica que los receptores se encuentran en un plano nodal donde las componentes del tensor de Green G_{yx} , G_{xy} , G_{zy} y G_{yz} son iguales a cero.

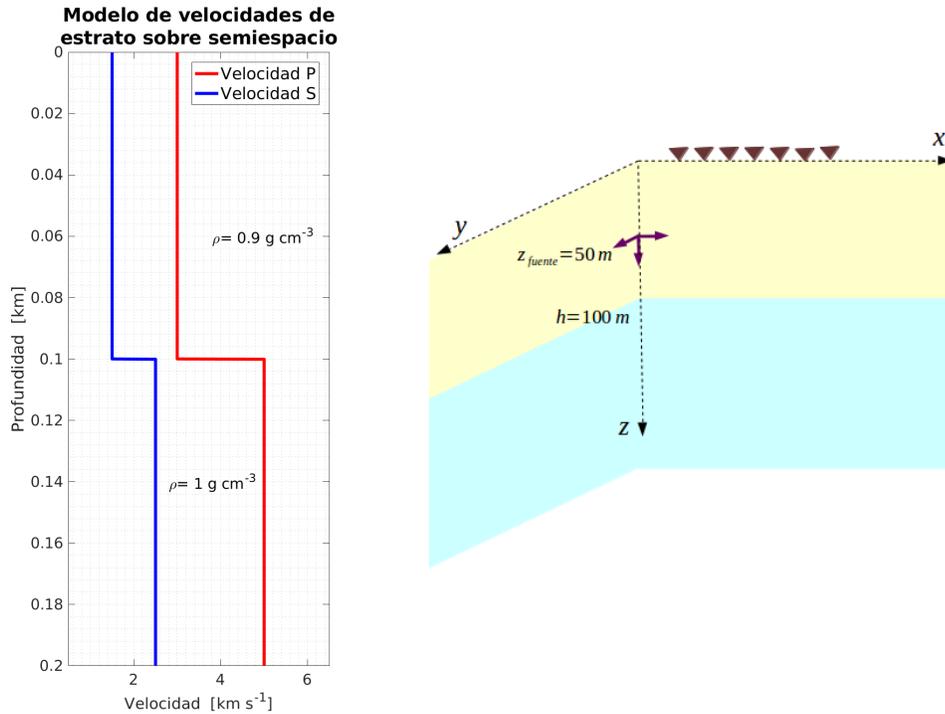


FIGURA 4.14: a) Modelo de velocidades propuesto para un estrato sobre un semi-espacio. b) Esquema de un estrato sobre un semi-espacio, la fuente se encuentra a 50 metros de profundidad.

Parámetros de tiempo

t_p	[seg]	t_s	[seg]	Δt	[seg]	N_{frec}
0.004		0.008		0.0004		512

Parámetros de DWN y Fuente

L	[km]	ω_I	$\left[\frac{rad}{seg}\right]$	z_{fuente}	[km]	F_k
5.0		1.0		0.05		3

TABLA 4.3: Parámetros para un estrato sobre un semiespacio.

Las figuras 4.15 - 4.24 representan el campo de desplazamientos (U_x , U_y y U_z) debido a cada una de las fuerzas (F_x , F_y y F_z) con su respectivo error relativo máximo entre la curva

del *AXITRA*[®] y la curva del DWN. En las figuras 4.15 y 4.19 se observa en la primera traza un arribo calculado con el programa del DWN que no se calcula con *AXITRA*[®].

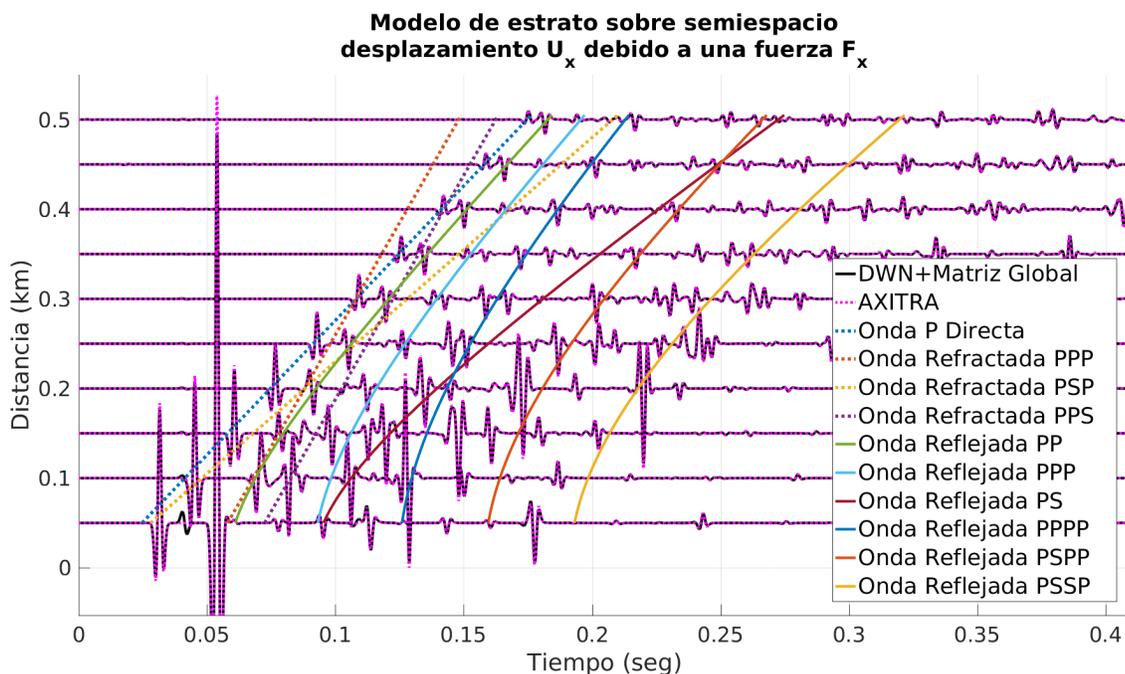


FIGURA 4.15: Campo de desplazamientos U_x debido a una fuerza horizontal F_x para el modelo de un estrato sobre un semiespacio. Sismogramas sintéticos, la curva de color negro representa el campo de desplazamientos calculado con el código del DWN usando matriz global mientras que la curva en magenta representa el campo de desplazamientos calculado con *AXITRA*[®].

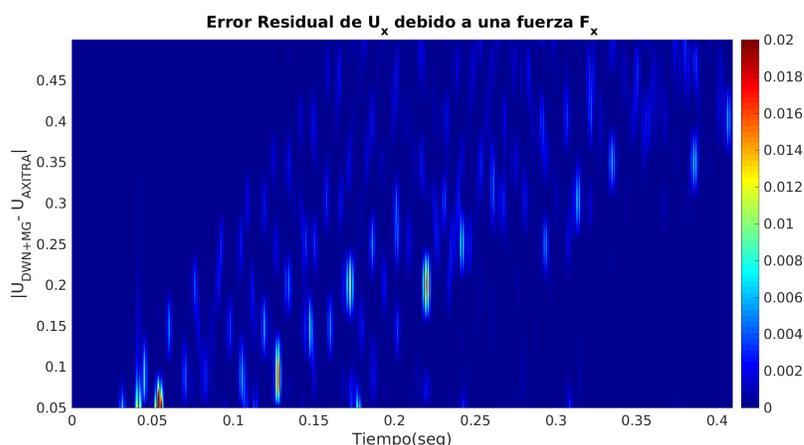


FIGURA 4.16: Mapa de contornos para visualizar el error residual entre la solución con DWN y la solución con *AXITRA*[®] para el campo de desplazamientos U_x debido a una fuerza horizontal F_x para el modelo de un estrato sobre un semiespacio.

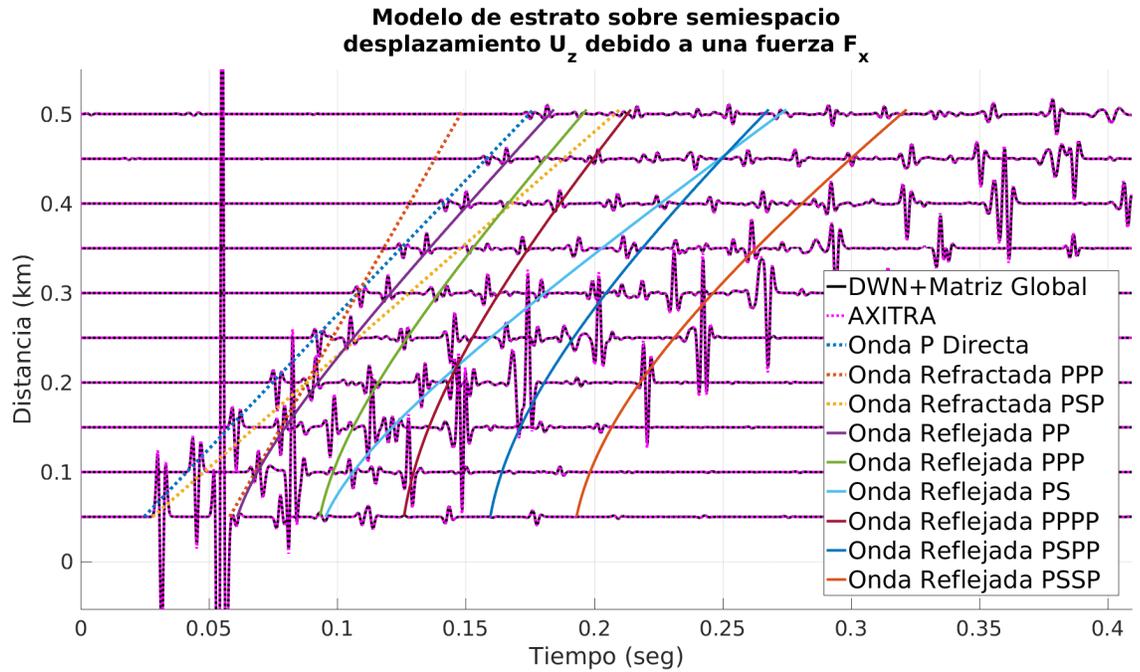


FIGURA 4.17: Campo de desplazamientos U_x debido a una fuerza horizontal F_z para el modelo de un estrato sobre un semiespacio. Sismogramas sintéticos, la curva de color negro representa el campo de desplazamientos calculado con el código del DWN usando matriz global mientras que la curva en magenta representa el campo de desplazamientos calculado con $AXITRA^{\text{®}}$.

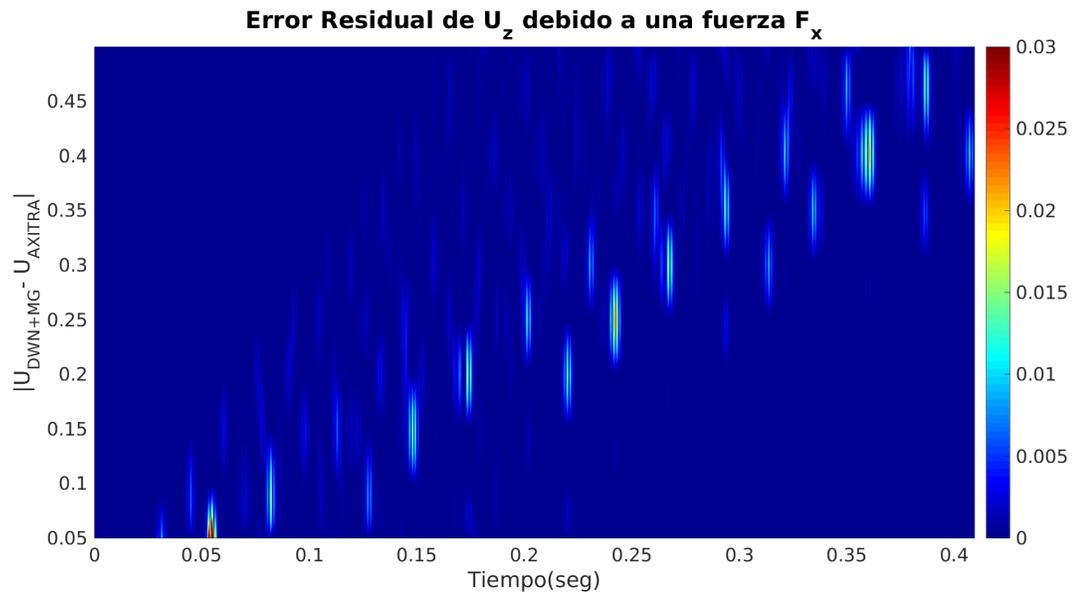


FIGURA 4.18: Mapa de contornos para visualizar el error residual entre la solución con DWN y la solución con $AXITRA^{\text{®}}$ para el campo de desplazamientos U_z debido a una fuerza horizontal F_x para el modelo de un estrato sobre un semiespacio.

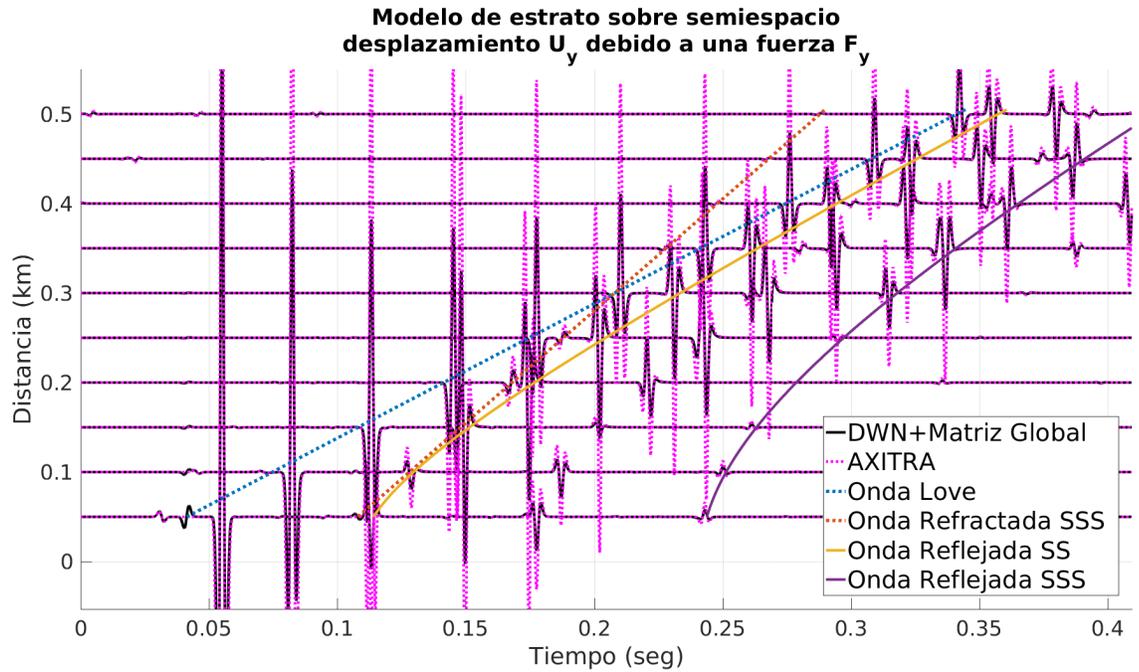


FIGURA 4.19: Campo de desplazamientos U_y debido a una fuerza horizontal F_y para el modelo de un estrato sobre un semiespacio. Sismogramas sintéticos, la curva de color negro representa el campo de desplazamientos calculado con el código del DWN usando matriz global mientras que la curva en magenta representa el campo de desplazamientos calculado con *AXITRA*[®].

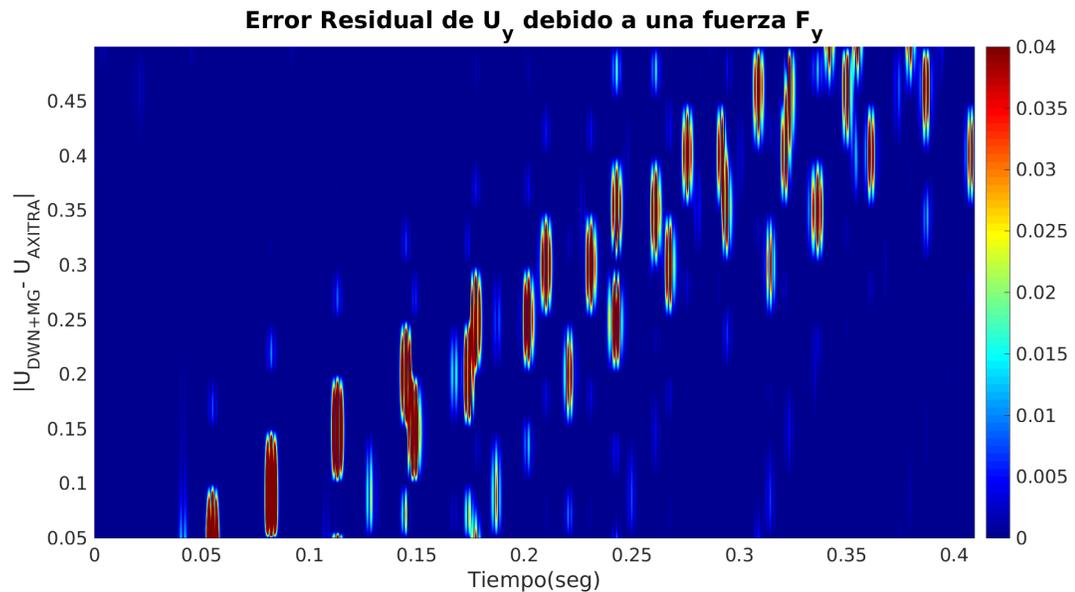


FIGURA 4.20: Mapa de contornos para visualizar el error residual entre la solución con DWN y la solución con *AXITRA*[®] para el campo de desplazamientos U_y debido a una fuerza horizontal F_y para el modelo de un estrato sobre un semiespacio.

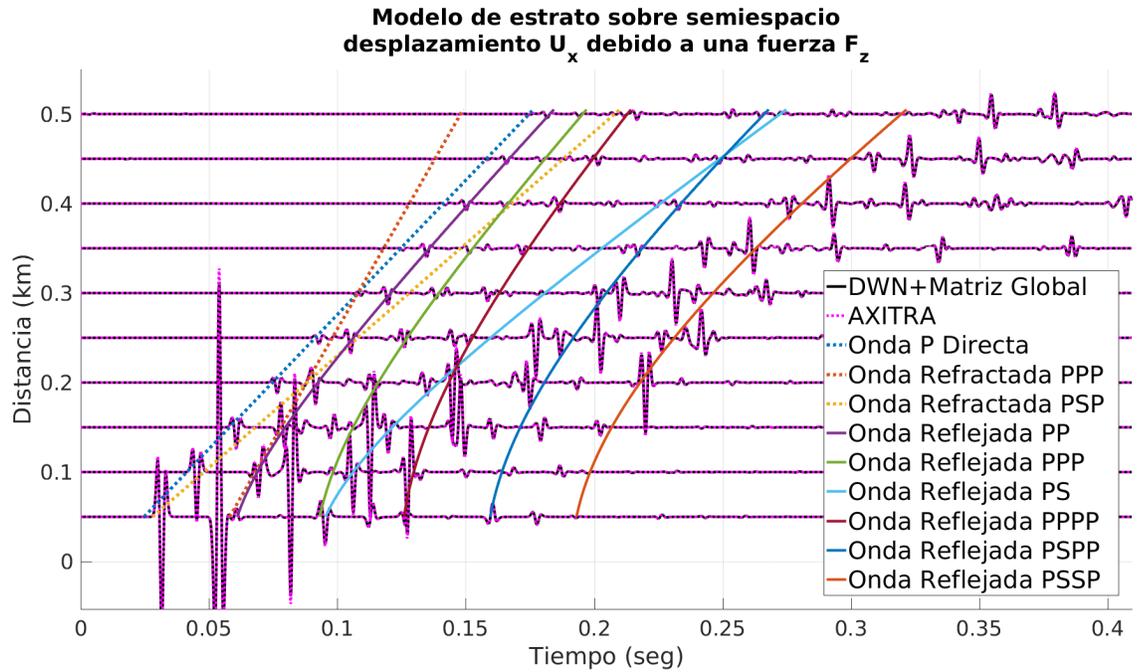


FIGURA 4.21: Campo de desplazamientos U_x debido a una fuerza horizontal F_z para el modelo de un estrato sobre un semiespacio. La curva de color negro representa el campo de desplazamientos calculado con el código del DWN usando matriz global mientras que la curva en magenta representa el campo de desplazamientos calculado con *AXITRA*[®].

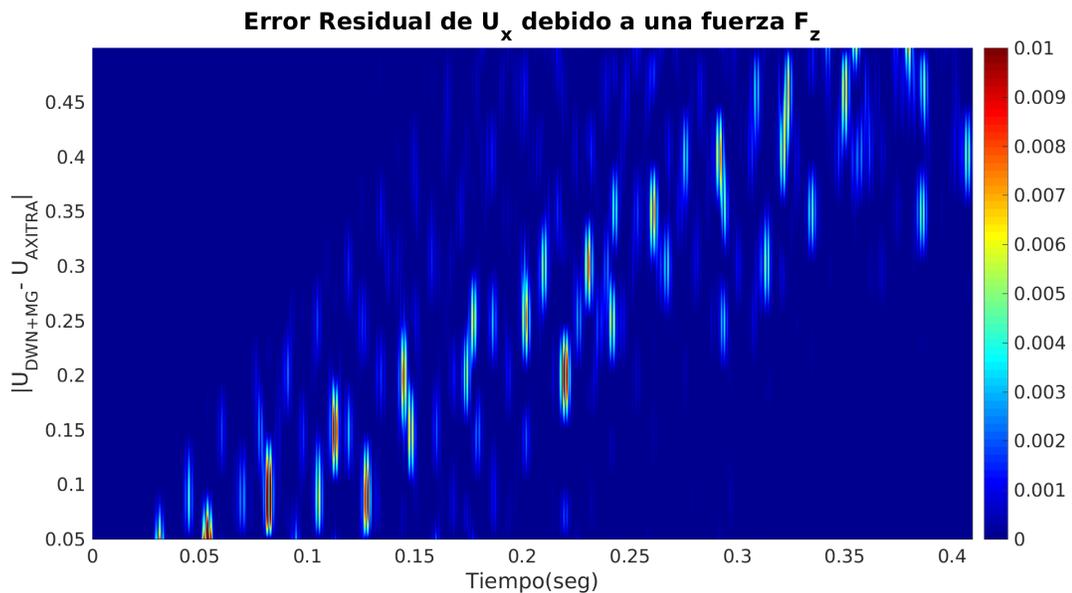


FIGURA 4.22: Mapa de contornos para visualizar el error residual entre la solución con DWN y la solución con *AXITRA*[®] para el campo de desplazamientos U_x debido a una fuerza horizontal F_z .

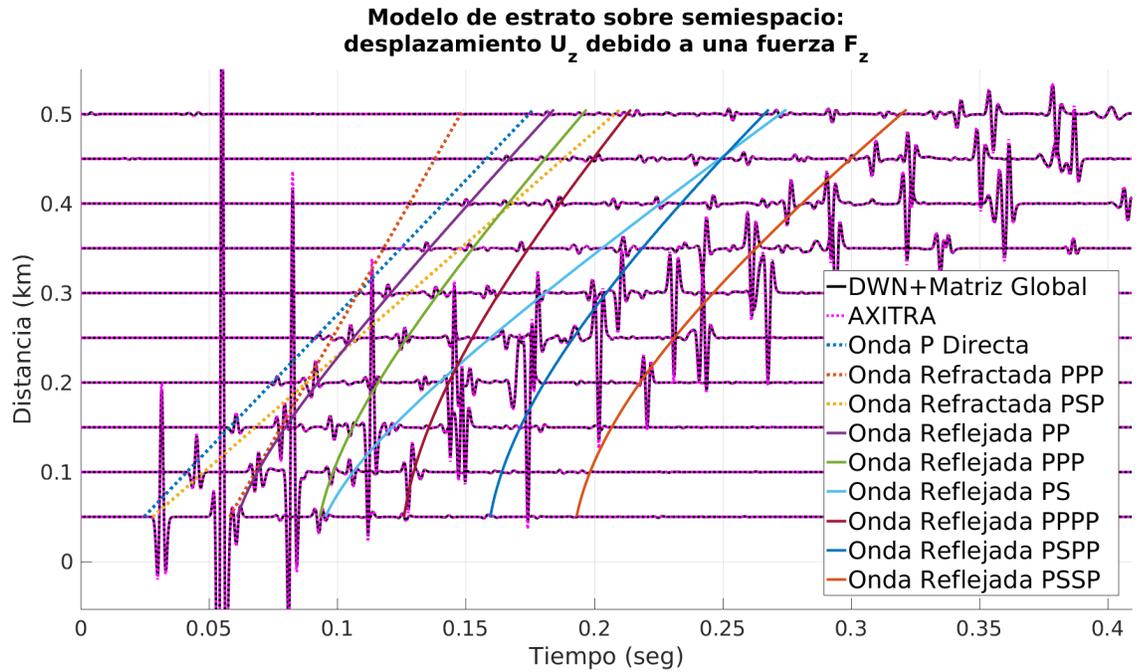


FIGURA 4.23: Campo de desplazamientos U_z debido a una fuerza horizontal F_z para el modelo de un estrato sobre un semiespacio. La curva de color negro representa el campo de desplazamientos calculado con el código del DWN usando matriz global mientras que la curva en magenta representa el campo de desplazamientos calculado con *AXITRA*[®].

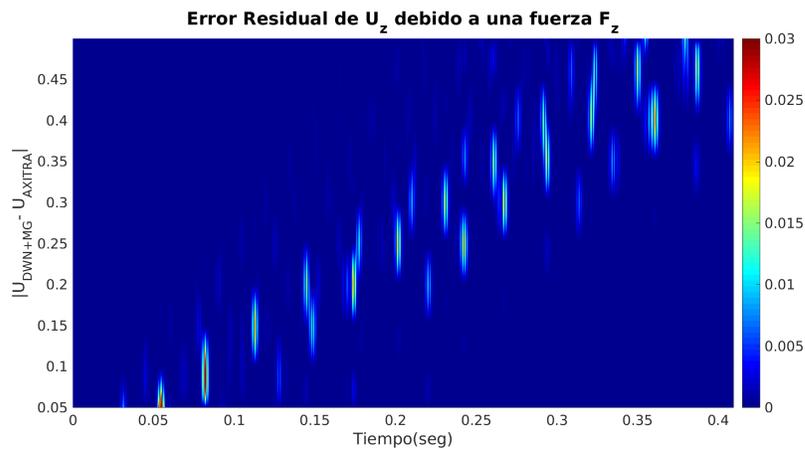


FIGURA 4.24: Mapa de contornos para visualizar el error residual entre la solución con DWN y la solución con *AXITRA*[®] para el campo de desplazamientos U_z debido a una fuerza horizontal F_z .

4.4 Medio estratificado con aumento de velocidad

En esta sección se muestran los resultados para el caso de 2 estratos sobre un semi-espacio. En este modelo las velocidades aumentan respecto a la profundidad, véase figura 4.25. La fuente se encuentra a una profundidad de 30 metros y los receptores se encuentran a un radio fijo y profundidad variable. Los parámetros usados para calcular estos sismogramas se encuentran en la tabla 4.4.

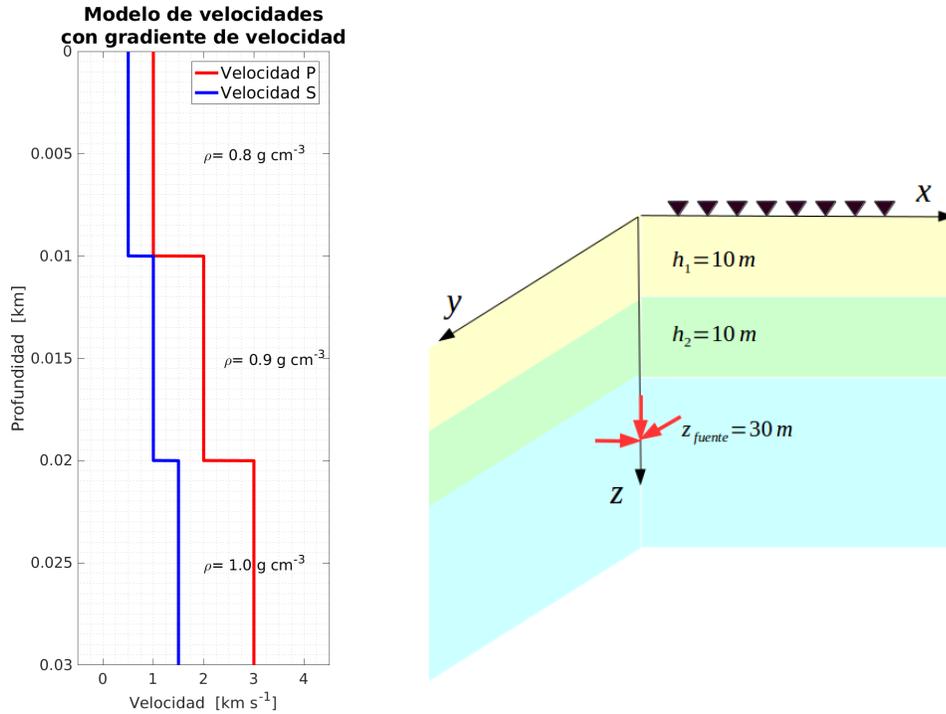


FIGURA 4.25: a) Modelo de velocidades propuesto para dos estratos sobre un semi-espacio. b) Esquema de la posición de los receptores a profundidad.

Parámetros de tiempo

t_p [seg]	t_s [seg]	Δt [seg]	N_{frec}
0.005	0.01	0.0005	512

Parámetros de DWN y Fuente

L [km]	ω_I [$\frac{rad}{seg}$]	z_{fuente} [km]	F_k
4	1.0	0.03	6

TABLA 4.4: Modelo para 2 estratos sobre un semi-espacio.

En los sismogramas mostrados a continuación, se observa el fenómeno de refracción, donde las ondas viajan por el medio más rápido y a una distancia determinada llegan antes que la onda directa.

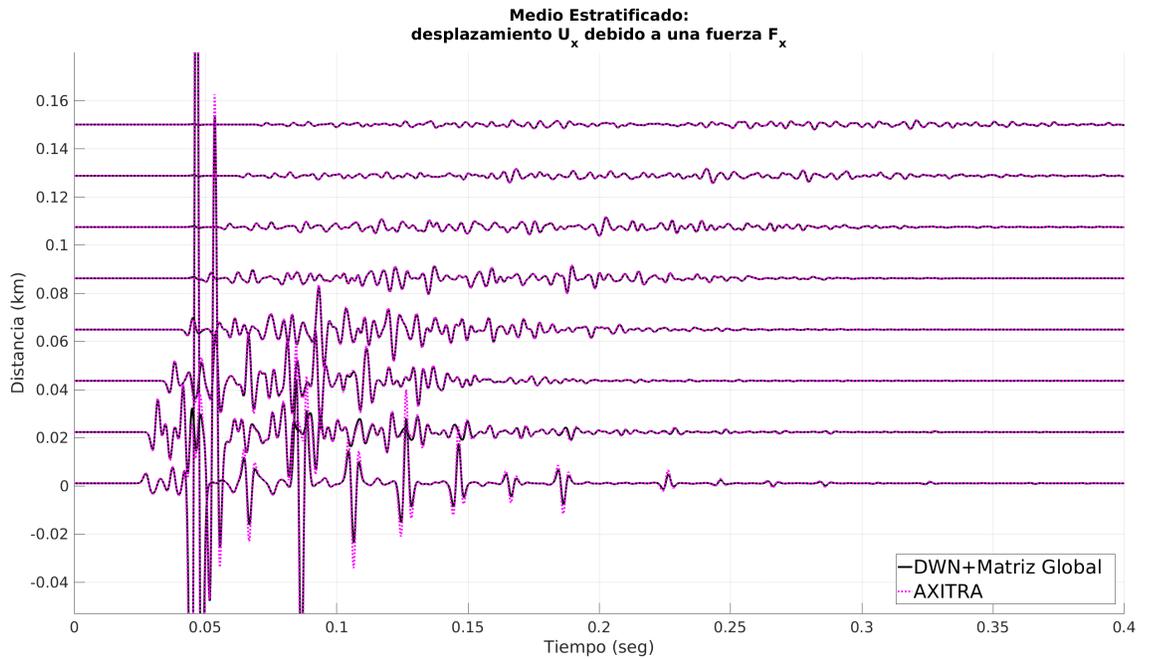


FIGURA 4.26: Campo de desplazamientos U_x debido a una fuerza en dirección x para el caso de 2 estratos sobre un semiespacio. La curva negra representa los desplazamientos calculados con el programa del DWN usando matriz global mientras que la curva magenta representa los desplazamientos calculados con el programa AXITRA.

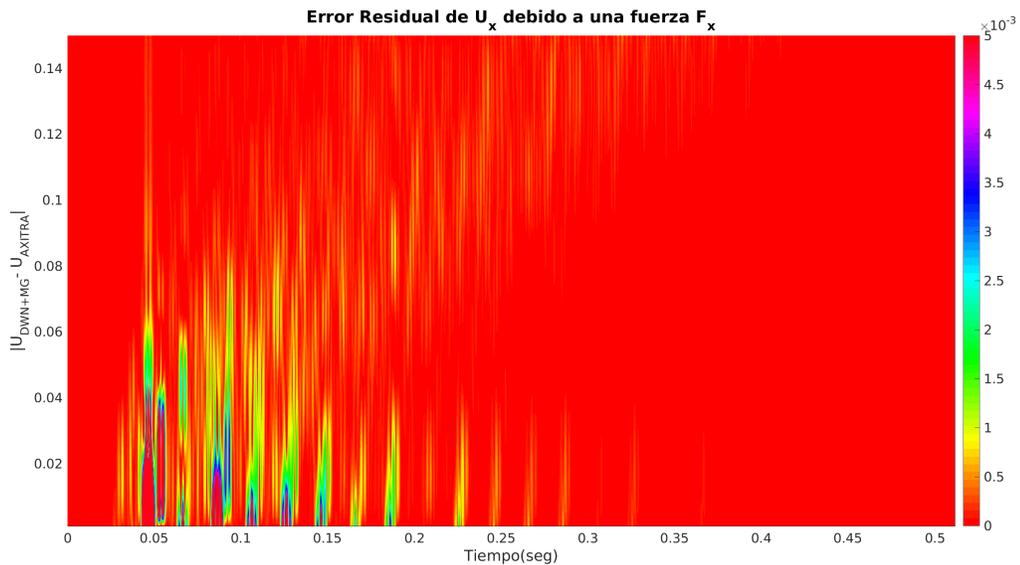


FIGURA 4.27: Mapa de contornos que representa el error residual entre los desplazamientos U_x debido a una fuerza en dirección x .

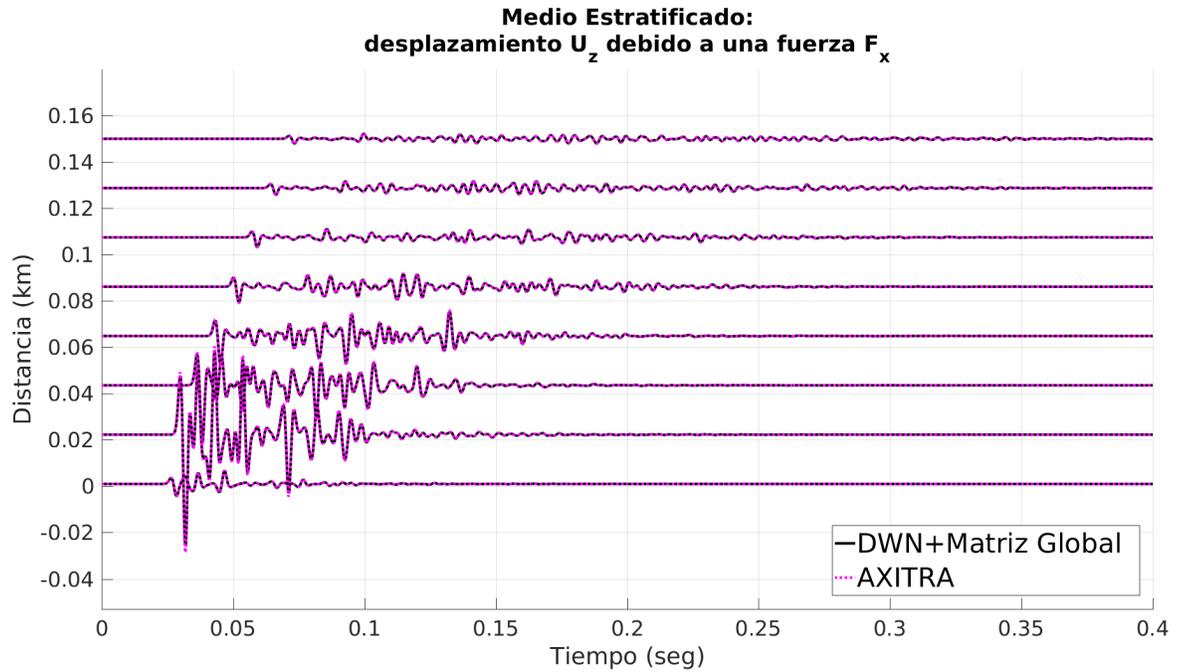


FIGURA 4.28: Campo de desplazamientos U_z debido a una fuerza en dirección x para el caso de 2 estratos sobre un semiespacio. La curva negra representa los desplazamientos calculados con el programa del DWN usando matriz global mientras que la curva magenta representa los desplazamientos calculados con el programa AXITRA.

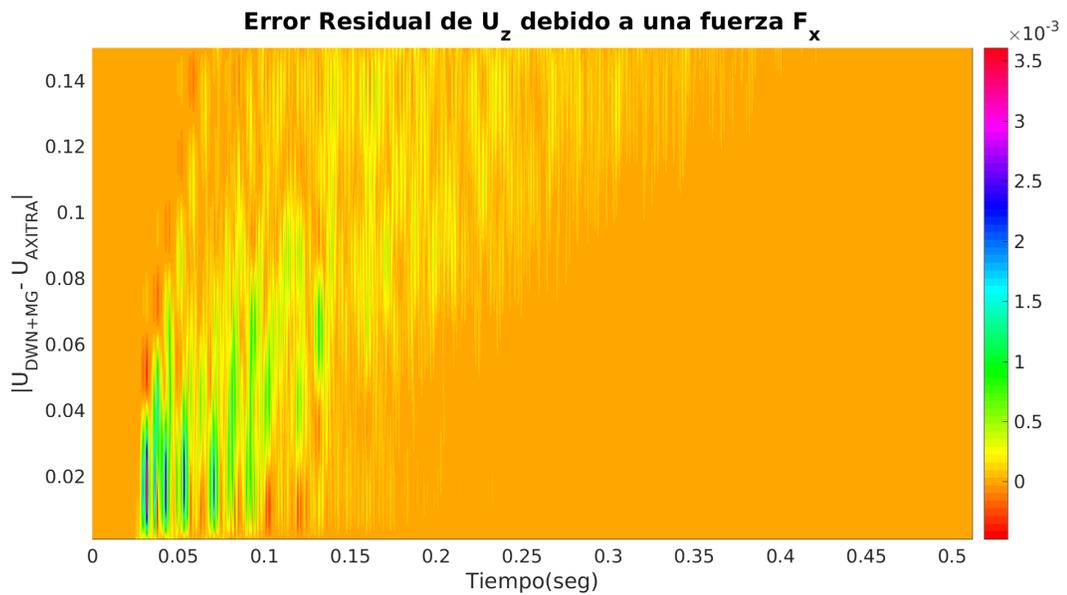


FIGURA 4.29: Mapa de contornos que representa el error residual entre los desplazamientos U_z debido a una fuerza en dirección x .

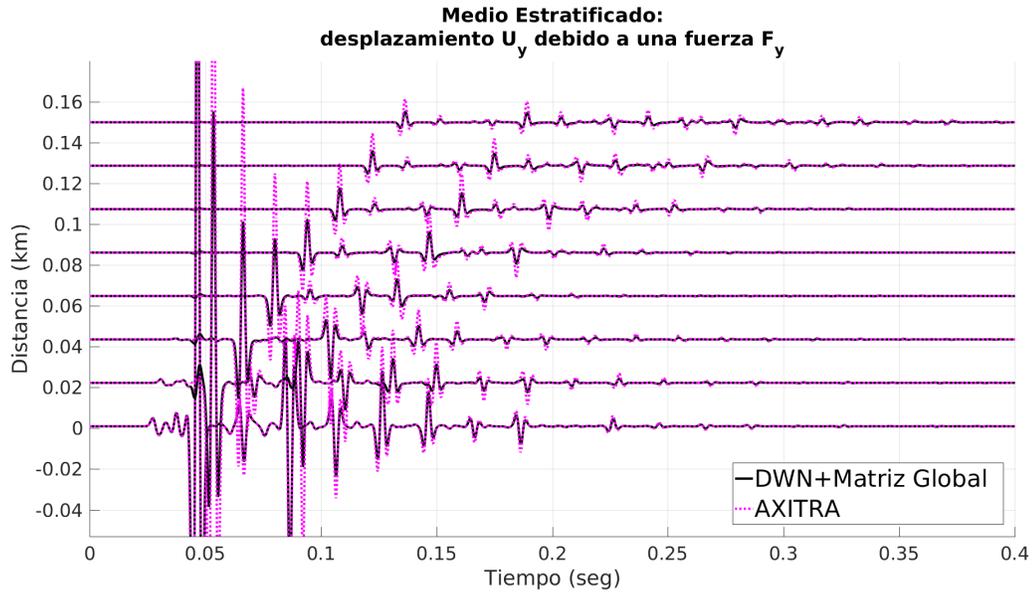


FIGURA 4.30: Campo de desplazamientos U_y debido a una fuerza en dirección y para el caso de 2 estratos sobre un semiespacio. La curva negra representa los desplazamientos calculados con el programa del DWN usando matriz global mientras que la curva magenta representa los desplazamientos calculados con el programa AXITRA.

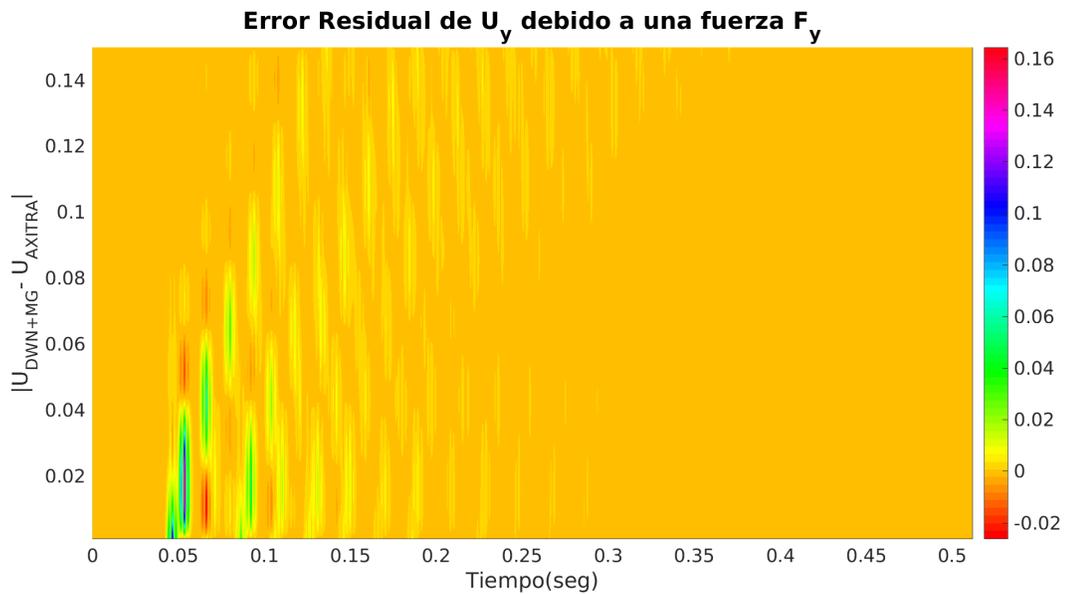


FIGURA 4.31: Mapa de contornos que representa el error residual entre los desplazamientos U_y debido a una fuerza en dirección y .

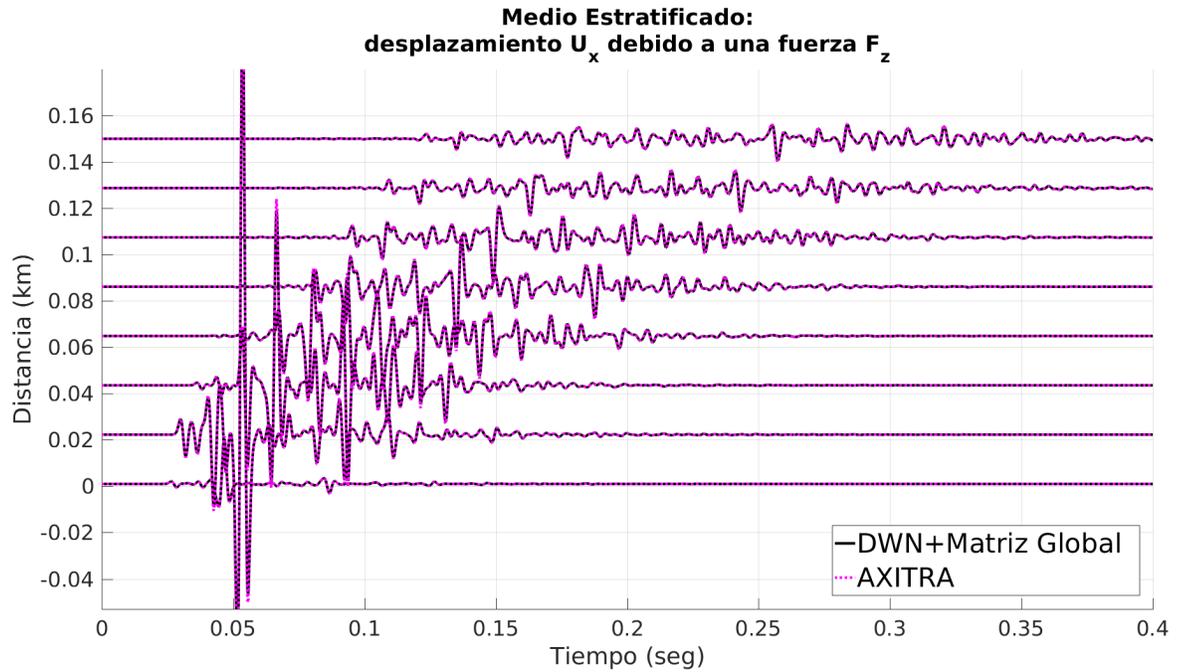


FIGURA 4.32: Campo de desplazamientos U_x debido a una fuerza en dirección z para el caso de 2 estratos sobre un semiespacio. La curva negra representa los desplazamientos calculados con el programa del DWN usando matriz global mientras que la curva magenta representa los desplazamientos calculados con el programa AXITRA.

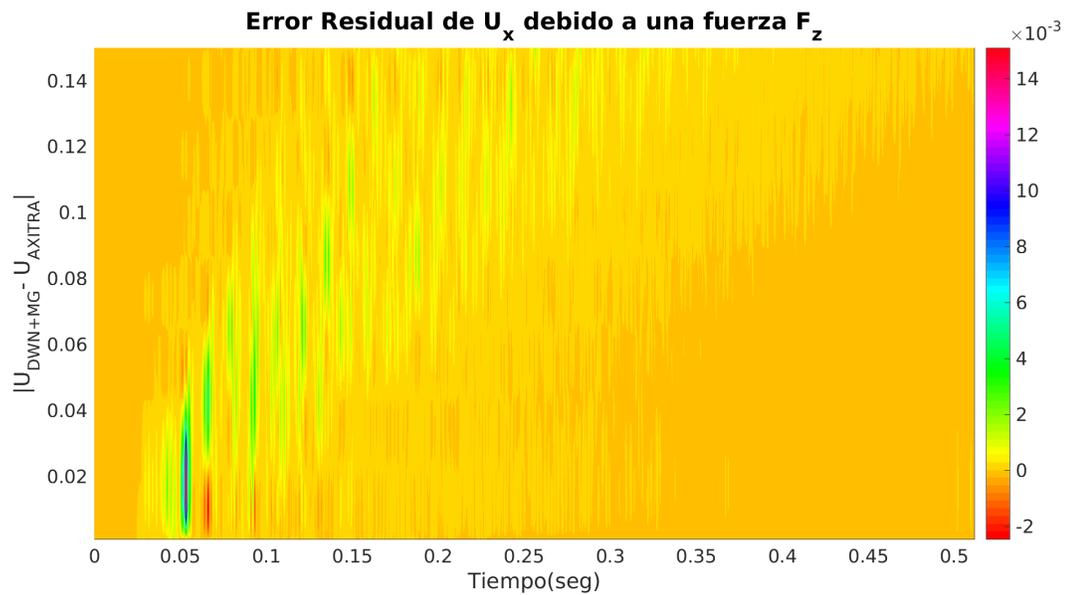


FIGURA 4.33: Mapa de contornos que representa el error residual entre los desplazamientos U_x debido a una fuerza en dirección z .

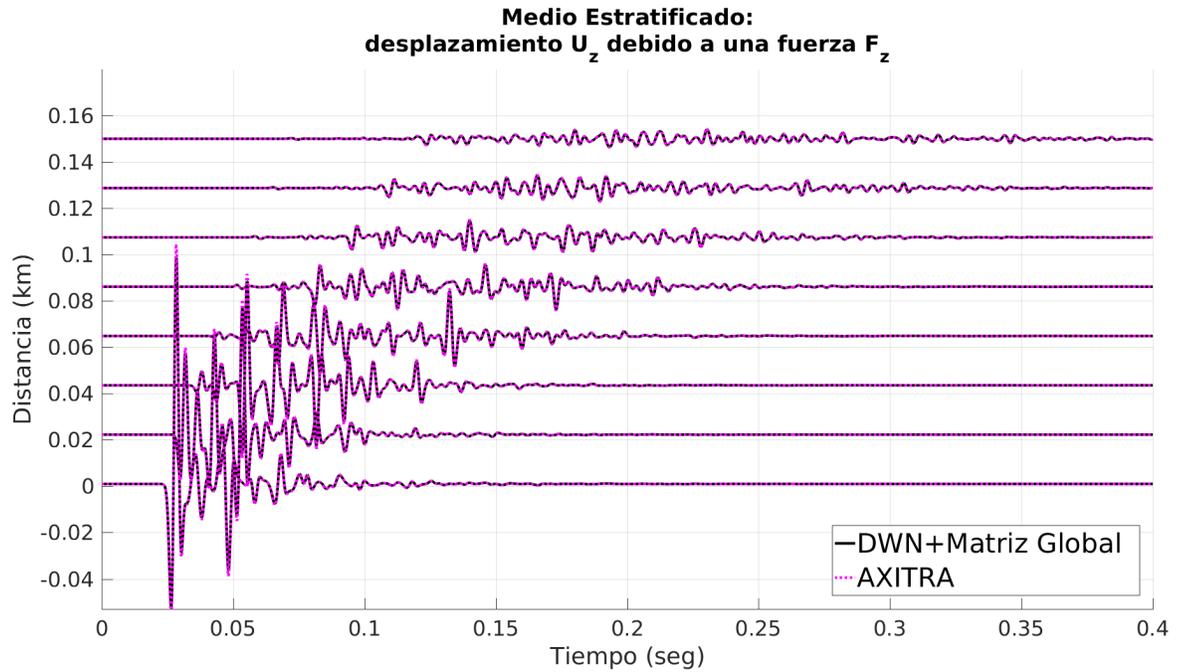


FIGURA 4.34: Campo de desplazamientos U_z debido a una fuerza en dirección z para el caso de 2 estratos sobre un semiespacio. La curva negra representa los desplazamientos calculados con el programa del DWN usando matriz global mientras que la curva magenta representa los desplazamientos calculados con el programa AXITRA.

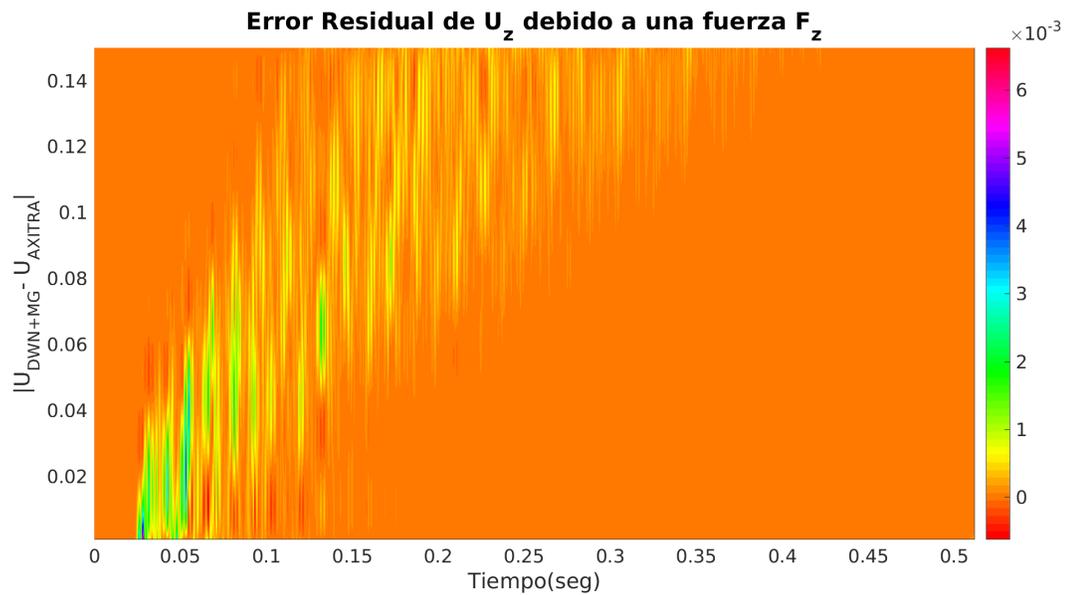


FIGURA 4.35: Mapa de contornos que representa el error residual entre los desplazamientos U_z debido a una fuerza en dirección z .

4.5 Fuente Volumétrica en medio de un estrato blando

A continuación se muestran los resultados para el ejemplo de una fuente volumétrica en un estrato blando que se encuentra entre dos capas más rígidas. El modelo de velocidades es el propuesto por Chen et al. (1996) y se muestra en la figura 4.36. Los parámetros para calcular los sismogramas sintéticos se encuentran en la tabla 4.5.

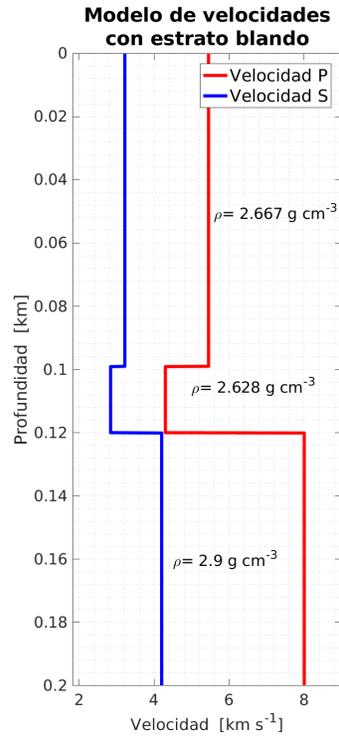


FIGURA 4.36: Modelo de velocidades para estrato blando que se encuentra entre dos capas más rígidas.

Parámetros de tiempo

t_p [seg]	t_s [seg]	Δt [seg]	N_{frec}
0.0013	0.00013	0.00013	512

Parámetros de DWN y Fuente

L [km]	ω_I [$\frac{rad}{seg}$]	z_{fuente} [km]	F_k
2	1.0	0.1095	3

TABLA 4.5: Modelo para inversión de velocidad.

En los sismogramas se observa que los arribos tienen velocidad predominante del medio rígido superior. La mayoría de la energía que se quedó en los dos medios subyacentes no llegó

a la superficie libre. Lo que se observa en los sismogramas es la energía que logró escapar del medio blando.

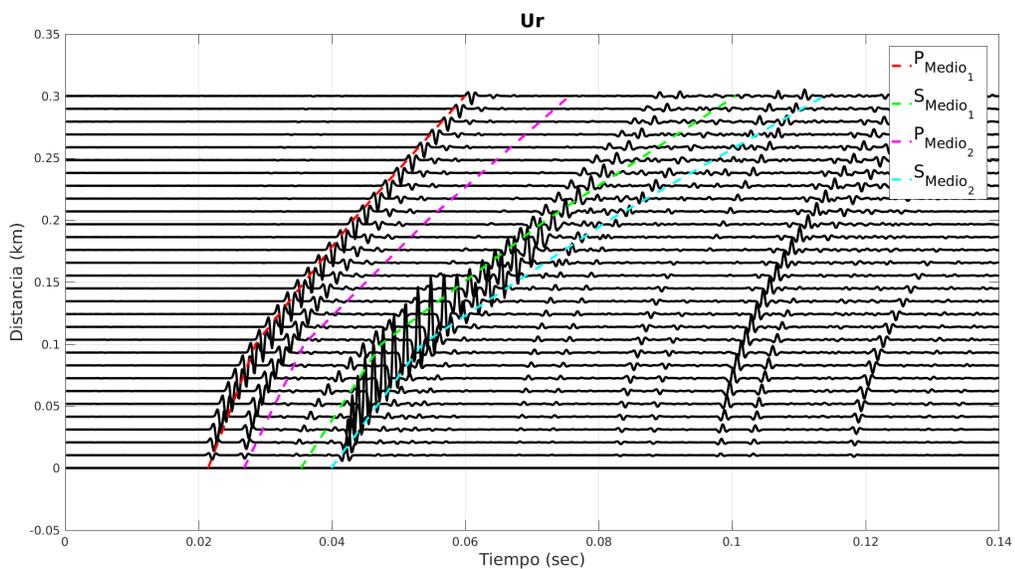


FIGURA 4.37: Sismogramas sintéticos de la componente radial de un estrato blando entre dos estratos más rígidos.

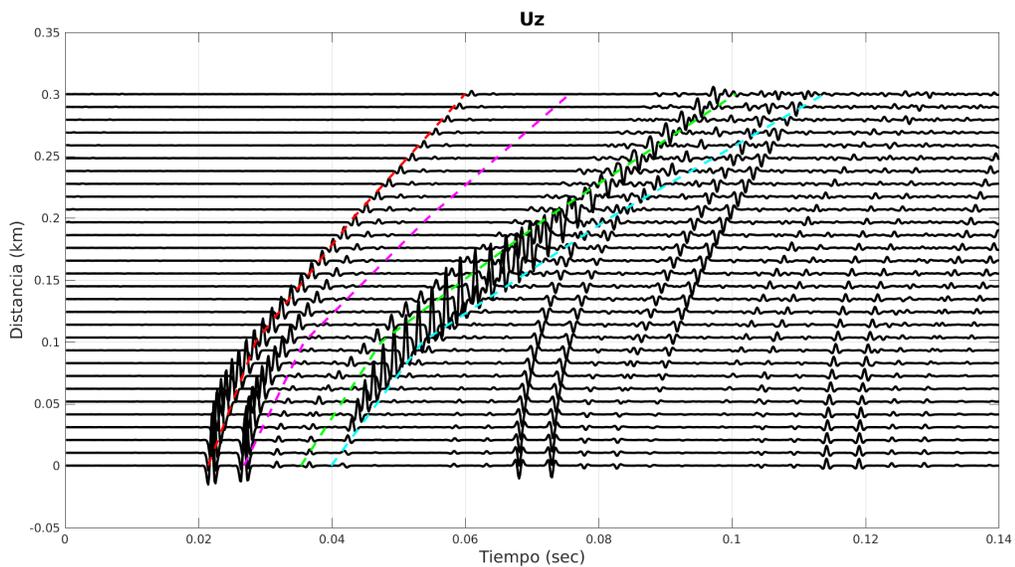


FIGURA 4.38: Sismogramas sintéticos de la componente vertical de un estrato blando entre dos estratos más rígidos.

4.5.1 Malla de receptores para el desplazamiento radial

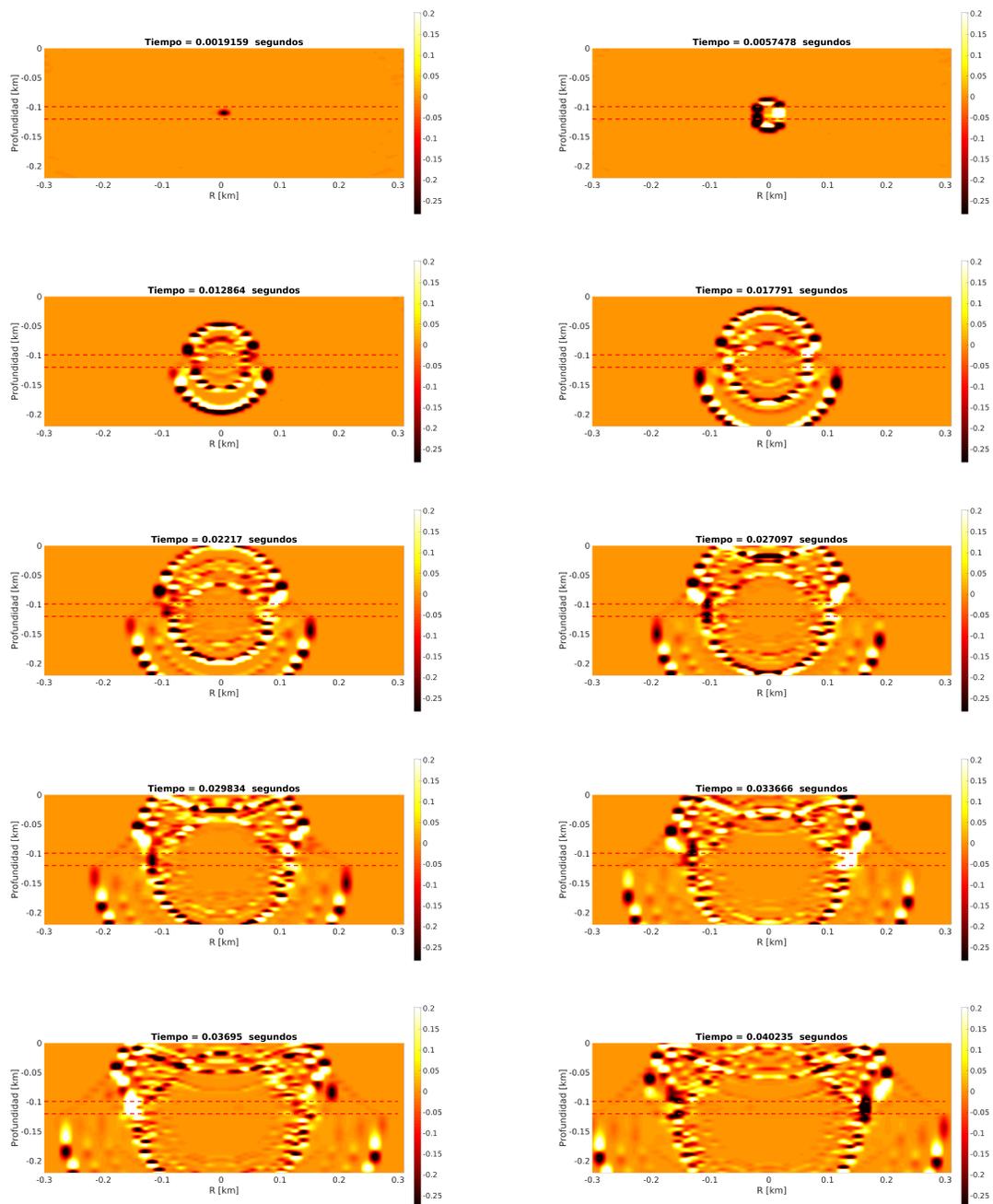


FIGURA 4.39: Desplazamiento radial para fuente volumétrica en un estrato blando rodeado de estratos de mayor velocidad.

4.6 Conclusiones

Se ha obtenido una herramienta que calcula el campo de desplazamientos en medios estratificados debido a fuerzas puntuales y a una fuente volumétrica. Para entender el comportamiento de los parámetros del DWN se ha hecho el análisis paramétrico para asegurar su convergencia a la solución analítica. En este análisis se demostró que el número de onda radial máximo depende de la frecuencia máxima y que la distancia entre fuentes virtuales depende de la distancia fuente-receptor.

Los resultados obtenidos a partir de esta herramienta se han validado para fuerzas puntuales con los resultados generados por *AXITRA*[®] calculando el error residual entre ambos. Este error residual principalmente se debe a la diferencia de amplitudes y no a los tiempos de arribo, es decir, los arribos tanto en los resultados de *AXITRA*[®] como en los resultados del programa generado y las polaridades de los pulsos son iguales excepto en las figuras 4.15 y 4.19 donde se observan arribos que no se tienen los cálculos con *AXITRA*[®]. La componente de desplazamiento que presentó mayor error en los medios estratificados fue el desplazamiento U_y debido a una fuerza aplicada en dirección y , mientras que en el semiespacio fueron las componentes de desplazamiento debido a la fuerza vertical. La discrepancia entre amplitudes de los sismogramas sintéticos puede ser debido a las diferencias entre los modelos de atenuación usados en *AXITRA*[®] y en el programa generado en este trabajo, en este programa se usa amortiguamiento histerético.

Para trabajos posteriores se debe validar la solución para fuentes volumétricas con otro código comercial en medios estratificados, de esta forma el código generado en este trabajo podrá ser útil para hacer validaciones para cálculos de desplazamiento e incluso para calcular el modelo directo dentro de un problema de inversión. También se planea extender esta formulación con potenciales para introducir fuentes de dislocación estáticas.

Este trabajo es útil para comprender la propagación de ondas en medios estratificados. Puede ser usado en problemas de exploración sísmica, ya que se puede calcular la respuesta que se esperaría obtener para cierto arreglo fuente-receptor y ciertas propiedades del medio. También es posible usar esta herramienta como el modelo directo en un problema de inversión de propiedades del medio, aunque se recomienda resolver los sistemas de ecuaciones lineales con métodos eficientes para matrices bandedas para acelerar los cálculos significativamente.

Bibliografía

- Abramowitz, Milton and Irene A Stegun (1965). *Handbook of mathematical functions: with formulas, graphs, and mathematical tables*. Vol. 55. Courier Corporation.
- Aki, Keiiti and Paul G Richards (2002). *Quantitative seismology*. University Science Books.
- Alekseev, As and Bg Mikhajlenko (1976). “Solution for Lamb’s problema for a vertical nonhomogeneous elastic half-space.” In: *Izvestiya Akademi Nauk SSR Fizika Zemli* 12, pp. 11–25.
- Ben-Menahem, Ari and David G Harkrider (1964). “Radiation patterns of seismic surface waves from buried dipolar point sources in a flat stratified earth.” In: *Journal of Geophysical Research* 69.12, pp. 2605–2620.
- Ben-Menahem, Ari and Sarva Jit Singh (2012). *Seismic waves and sources*. Springer Science & Business Media.
- Bouchon, Michel (1981). “A simple method to calculate Green’s functions for elastic layered media.” In: *Bulletin of the Seismological Society of America* 71.4, pp. 959–971.
- (2003). “A review of the discrete wavenumber method.” In: *Pure and applied Geophysics* 160.3-4, pp. 445–465.
- Bouchon, Michel and Keiiti Aki (1977). “Discrete wave-number representation of seismic-source wave fields.” In: *Bulletin of the Seismological Society of America* 67.2, pp. 259–277.
- Chao, Chi-Chang (1960). “Dynamical response of an elastic half-space to tangential surface loadings.” In: *Journal of Applied Mechanics* 27.3, pp. 559–567.
- Chen, Xiaofei, Youli Quan, and Jerry M Harris (1996). “Seismogram synthesis for radially layered media using the generalized reflection/transmission coefficients method: Theory and applications to acoustic logging.” In: *Geophysics* 61.4, pp. 1150–1159.
- Claerbout, Jon F (1985). *Fundamentals of geophysical data processing*. Citeseer.
- Cotton, Fabrice and Olivier Coutant (1997). “Dynamic stress variations due to shear faults in a plane-layered medium.” In: *Geophysical Journal International* 128.3, pp. 676–688.
- Coutant, O (1989). “Programme de simulation numerique AXITRA.” in: *Rapport LGIT*.

- Fuchs, K and G Müller (1971). “Computation of synthetic seismograms with the reflectivity method and comparison with observations.” In: *Geophysical Journal International* 23.4, pp. 417–433.
- García-Jerez, Antonio, José Piña-Flores, Francisco J Sánchez-Sesma, Francisco Luzón, and Mathieu Pertou (2016). “A computer code for forward calculation and inversion of the H/V spectral ratio under the diffuse field assumption.” In: *Computers & Geosciences* 97, pp. 67–78.
- Harkrider, David G (1964). “Surface waves in multilayered elastic media I. Rayleigh and Love waves from buried sources in a multilayered elastic half-space.” In: *Bulletin of the Seismological Society of America* 54.2, pp. 627–679.
- Haskell, NA (1964). “Radiation pattern of surface waves from point sources in a multi-layered medium.” In: *Bulletin of the Seismological Society of America* 54.1, pp. 377–393.
- Herrmann, RB (1977). *Research study of earthquake generated SH waves in the near-field and nearregional field. Final report.* Tech. rep. contact DACW39-76-C-0058, Waterways Experiment Station, Vicksburg, Miss.
- Hisada, Yoshiaki (1994). “An efficient method for computing Green’s functions for a layered half-space with sources and receivers at close depths.” In: *Bulletin of the Seismological Society of America* 84.5, pp. 1456–1472.
- (1995). “An efficient method for computing Green’s functions for a layered half-space with sources and receivers at close depths (Part 2).” In: *Bulletin of the Seismological Society of America* 85.4, pp. 1080–1093.
- Hron, F and ER Kanasewich (1971). “Synthetic seismograms for deep seismic sounding studies using asymptotic ray theory.” In: *Bulletin of the Seismological Society of America* 61.5, pp. 1169–1200.
- Hron, F, ER Kanasewich, and T Alpaslan (1974). “Partial ray expansion required to suitably approximate the exact wave solution.” In: *Geophysical Journal International* 36.3, pp. 607–625.
- Kanasewich, ER, T Alpaslan, and F Horn (1973). “The importance of S-wave precursors in shear-wave studies.” In: *Bulletin of the Seismological Society of America* 63.6-1, pp. 2167–2176.
- Kausel, Eduardo (2006). *Fundamental solutions in elastodynamics: a compendium.* Cambridge University Press.
- Knopoff, L (1964). “A matrix method for elastic wave problems.” In: *Bulletin of the Seismological Society of America* 54.1, pp. 431–438.
- Lamb, Horace (1904). “On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid.” In: *Proceedings of the Royal Society of London* 72.477-486, pp. 128–130.

- Lay, Thorne and Terry C Wallace (1995). *Modern global seismology*. Vol. 58. Academic press.
- Lee, William HK, Paul Jennings, Carl Kisslinger, and Hiroo Kanamori (2002). *International handbook of earthquake & engineering seismology*. Elsevier.
- Luco, J Enrique and Randy J Apsel (1983). “On the Green’s functions for a layered half-space. Part I.” in: *Bulletin of the Seismological Society of America* 73.4, pp. 909–929.
- Mooney, Harold M (1974). “Some numerical solutions for Lamb’s problem.” In: *Bulletin of the Seismological Society of America* 64.2, pp. 473–491.
- Olson, A (1978). “Synthesizing ground motion using a discrete wavenumber finite element representation.” In: *Transactions American Geophysical Union*. Vol. 59. 12. American Geophysical Union 2000 Florida Ave NW, Washington, DC 20009, pp. 1128–1129.
- Pekeris, CL (1955). “The seismic surface pulse.” In: *Proceedings of the National Academy of Sciences* 41.7, pp. 469–480.
- Piña-Flores, José, Mathieu Perton, Antonio García-Jerez, Enrique Carmona, Francisco Luzón, Juan C Molina-Villegas, and Francisco J Sánchez-Sesma (2016). “The inversion of spectral ratio H/V in a layered system using the diffuse field assumption (DFA).” in: *Geophysical Journal International*, ggw416.
- Poruchikov, Vladimir B (2012). *Methods of the classical theory of elastodynamics*. Springer Science & Business Media.
- Robayo, Juan Daniel Moya (2010). “Aplicación del método de número de onda discreto en la propagación de ondas SH en medios estratificados.” In: *Revista de Ingeniería* 32, pp. 62–68.
- Sánchez-Sesma, Francisco J, Miguel Rodríguez, Ursula Iturrarán-Viveros, Francisco Luzón, Michel Campillo, Ludovic Margerin, Antonio García-Jerez, Martha Suarez, Miguel A Santoyo, and Alejandro Rodríguez-Castellanos (2011). “A theory for microtremor H/V spectral ratio: application for a layered medium.” In: *Geophysical Journal International* 186.1, pp. 221–225.
- Sasatani, Tsutomu (1985). “Seismic wave propagation in a stratified half-space.” In: *Journal of the Faculty of Science, Hokkaido University. Series 7, Geophysics* 7.5, pp. 401–420.
- Torre, Charles G (2012). *Foundations of wave phenomena*. Vol. 6. 07, p. 08.