



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

**Matemáticas aplicadas al
modelado y caracterización
dinámica de yacimientos.**

TESIS

Que para obtener el título de

Ingeniero Petrolero

P R E S E N T A

Jeyson Jesue Torres Latournerie

DIRECTOR DE TESIS

Ing. Héctor Erick Gallardo Ferrera



Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2018

Agradecimientos

Al Dios a quien debo todo lo que soy y lo que seré.

Al mi pequeña Scarlett, mi hermoso regalo de Dios, y por quien estoy dispuesto a enfrentar todo y en todo momento, te amo con todo mi corazón.

Al Bárbara Ivonne Barbosa Rodríguez, el amor de mi vida y madre de mi hija, gracias por tu gran amor, ánimos, apapachos y regaños que me brindas día con día para alcanzar nuevas metas, tanto profesionales como personales, gracias por la hermosa familia que hemos formado, te amo mi ciclo.

Al mis tías Rosa y Maritza, porque tienen un lugar especial en mi corazón, gracias por su amor y valiosos consejos que han contribuido a ser de mí una mejor persona. Gracias por esos tres maravillosos años.

Al mi abuelita Carmita (Q.E.P), quien me amo como una madre y me dio su amor, cuidados, y consejos y aunque la vida no te permitió ver el final de esta etapa, fuiste parte esencial para hoy culminar en este éxito.

Al mis padres, Domingo Torres y Madeline Latournerie; hermanos, Johann y Kathrinne; abuelos José y Virginia (Q.E.P), Juan (Q.E.P) y Dorayma; porque han sido la base de mi formación y me han enseñado a enfrentar los obstáculos de la vida, gracias por todo su apoyo, cariño y consejos incondicionales.

Al la familia Potenciano Galindo: Don Luis, Doña Andrea, Luis y Jonathan, por abrirme las puertas de su casa y su corazón, y permitirme ser parte de su familia, mil gracias, les estaré eternamente agradecido.

Al mis tíos Teodoro y Ricarda, gracias por su respaldo, fraternidad y cariño en los momentos más difíciles y por aquellas palabras de ánimo y superación.

Agradecimientos

A mis tíos Armando, Gregorio, Eric, María Cruz e Indira por ser la familia que nunca cambiaría.

A mis amigos de Catazajá y a los que hice a lo largo de mi vida universitaria, porque, aunque no sean mis hermanos de sangre son los hermanos y hermanas que he elegido tener, les agradezco por las risas, alegrías y también lágrimas que han estado presentes en nuestra amistad.

A mi director el Ing. Héctor Erick Gallardo Ferrera, a quien estimo y agradezco su amistad y tiempo, le doy gracias por su compromiso, paciencia, consejos y enseñanzas depositados en mí.

A mis sinodales por sus valiosas observaciones y correcciones que ayudaron a enriquecer este trabajo.

A mi *Alma máter*, la Universidad Nacional Autónoma de México, y a la Facultad de Ingeniería, por permitirme formar parte de esta gran casa de estudios, por las experiencias vividas y el gran conocimiento que me llevó de sus aulas, profesores y amigos.

“Por mi raza, hablará el espíritu”

Índice de contenido

Agradecimientos	- 1 -
Índice de contenido	- 3 -
Índice de tablas.....	- 7 -
Índice de figuras	- 10 -
Introducción.....	- 14 -
Tema 1 Fundamentos de matemáticas para la ingeniería de yacimientos.....	- 16 -
1.1 límites de funciones.....	- 16 -
1.2 La derivada.....	- 18 -
1.3 La integral.....	- 19 -
1.4 Series de Taylor	- 20 -
1.5 Derivación e integración numérica	- 22 -
1.5.1 Derivación Numérica.....	- 22 -
1.5.2 Integración numérica.....	- 25 -
1.6 Funciones especiales.....	- 28 -
1.7 Método de Mínimos Cuadrados	- 40 -
1.8 Polinomios de ajuste	- 43 -
1.8.1 Polinomios de Lagrange	- 44 -
1.8.2 Polinomios de Chebyshev.....	- 44 -
Referencias	- 45 -
Tema 2 Flujo de fluidos en medios porosos	- 46 -
2.1 Ecuación de continuidad	- 46 -
2.2 Ecuaciones constitutivas	- 48 -
2.2.1 Compresibilidad de los fluidos	- 49 -
2.2.2 Compresibilidad del volumen poroso de una formación.....	- 49 -
2.2.3 Clasificación de los fluidos de acuerdo con su compresibilidad.....	- 49 -

Índice de contenido

2.2.4 Reología de los fluidos.....	- 51 -
2.2.5 Ecuación de transporte	- 57 -
2.3 Ecuación de difusividad.....	- 60 -
2.3.1 Ecuación de difusividad para fluidos incompresibles	- 60 -
2.3.2 Ecuación de difusividad para fluidos ligeramente compresibles	- 62 -
2.3.3 Ecuación de difusividad para fluidos compresibles.....	- 65 -
2.4 Forma General de las ecuaciones de Flujo monofásico.....	- 69 -
2.5 Geometrías de flujo	- 69 -
2.5.1 Flujo lineal.....	- 69 -
2.5.2 Flujo Radial	- 70 -
2.5.3 Flujo esférico.....	- 71 -
2.6 Estados de flujo en el yacimiento	- 71 -
2.6.1 Flujo gobernado por las fronteras	- 71 -
2.6.2 Flujo no gobernado por las fronteras o transitorio.....	- 73 -
2.7 Condiciones necesarias para plantear y solucionar problemas de flujo	- 74 -
2.7.1 Condiciones iniciales.....	- 74 -
2.7.2 Condiciones de contorno o frontera	- 75 -
2.8 Variables adimensionales.....	- 77 -
2.9 Ecuación de difusividad para flujo no Newtoniano	- 83 -
2.9.1 Ecuación de flujo para un fluido ley de potencia	- 84 -
2.9.2 Ecuación de flujo para un fluido plástico de Bingham	- 85 -
2.10 Ecuaciones para flujo multifásico de fluidos en el medio poroso.....	- 86 -
2.11 Modelos de flujo composicionales.....	- 87 -
Referencias	- 90 -
Tema 3 Soluciones mediante Separación de Variables	- 91 -
3.1 Linealidad	- 91 -
3.2 Método Separación de Variables	- 92 -

3.2.1 Homogeneización de las condiciones de frontera.....	- 92 -
3.2.2 Definición de Series de Fourier.....	- 94 -
3.2.3 Propiedades de la Serie de Fourier.....	- 95 -
3.3 Solución a problemas de flujo lineal.....	- 96 -
3.3.1 Yacimiento produciendo a presión de fondo fluyendo constante con mantenimiento de presión en la frontera externa.....	- 96 -
3.3.2 Yacimiento produciendo a presión de fondo fluyendo constante con fronteras externas de no flujo.....	- 106 -
3.4 Solución a problemas de flujo radial.....	- 115 -
3.4.1 Yacimiento radial infinito produciendo a gasto constante	- 115 -
3.4.2 Pozo produciendo a gasto constante en un yacimiento radial con recarga en la frontera externa.....	- 123 -
3.4.3 Pozo produciendo a gasto constante en un yacimiento radial con frontera impermeable	- 127 -
Referencias	- 135 -
Tema 4 Soluciones mediante la transformada de Laplace	- 136 -
4.1 Definición de la transformada de Laplace	- 136 -
4.2 Propiedades de la Transformada de Laplace.....	- 136 -
4.3 Soluciones a problemas de flujo radial a través de la transformada de Laplace	- 138 -
4.3.1 Pozo produciendo a gasto constante en un yacimiento radial infinito ..	- 138 -
4.3.2 Pozo produciendo a gasto constante en un yacimiento radial con mantenimiento en la frontera externa.....	- 146 -
4.3.3 Pozo produciendo a gasto constante en un yacimiento radial con frontera externa de no flujo	- 150 -
Referencias	- 155 -
Tema 5 Soluciones mediante Funciones de Green	- 156 -
5.1 Función Delta de Dirac.....	- 156 -
5.2 Identidades de Green.....	- 158 -
5.3 Funciones de Green.....	- 159 -

Índice de contenido

5.3.1 Funciones de Green para la Ecuación de Difusividad	- 161 -
Referencias	- 166 -
Tema 6 Uso del principio de superposición en problemas de flujo	- 167 -
6.1 Integral de superposición o convolución	- 167 -
6.2 Deconvolución	- 170 -
Referencias	- 171 -
Tema 7 Metodología de solución de problemas de flujo	- 172 -
7.1 Análisis clásico de datos de producción	- 173 -
7.2.3 Modelos de declinación de Fetkovich	- 175 -
7.2.4 Modelos de Arps-Fetkovich	- 181 -
7.2.5 Modelo de Blasingame	- 183 -
Referencias	- 187 -
Tema 8 Caso de Estudio	- 188 -
Referencias	- 204 -
Conclusiones	- 205 -
Recomendaciones	- 206 -
ANEXO A Aproximación polinomial para las funciones de Bessel	- 207 -
ANEXO B Flujo por transporte de masa o flujo convectivo	- 214 -
ANEXO C Derivación de la ecuación de continuidad en diferentes coordenadas. ...	- 217 -
C.1 Derivación en coordenadas cartesianas	- 217 -
C.2 Derivación en coordenadas cilíndricas	- 218 -
C.3 Derivación en coordenadas esféricas	- 219 -
C.4 Forma diferencial general para sistemas ortogonales	- 220 -

Índice de tablas

Tabla 1. 1. Propiedades de los límites	- 17 -
Tabla 1. 2. Reglas de derivación	- 19 -
Tabla 1. 3. Propiedades de la integral.....	- 21 -
Tabla 1. 4. Expresiones para las funciones error $erfx$ y error complementario $erfcx$	- 29 -
Tabla 1. 5. Expresiones para la función Gamma Γx	- 31 -
Tabla 1. 6. Expresiones para la función integral exponencial Eix	- 33 -
Tabla 1. 7. Definiciones de las funciones de Bessel Jvx y Yvx	- 35 -
Tabla 1. 8. Definiciones de las funciones de Bessel Ivx y Kvx	- 38 -
Tabla 2. 1 Definiciones de la pseudo-presión para diferentes fluidos.....	- 67 -
Tabla 2. 2 Definiciones de los operadores divergencia y Laplaciano en diferentes geométricas de flujo (Modificado de Bird et al., 1960).	- 68 -
Tabla 2. 3 condiciones de frontera recurrentes	- 76 -
Tabla 2. 4 Valores de ϵ para las diferentes variables de análisis comúnmente utilizadas.	- 77 -
Tabla 2. 5 Variables adimensionales para las diferentes geometrías de flujo. ...	- 82 -
Tabla 2. 6 Unidades y valores de las variables	- 83 -
Tabla 2. 7 Variables independientes	- 89 -
Tabla 2. 8 Ecuaciones auxiliares.....	- 89 -

Índice de tablas

Tabla 3. 1 Propiedades de las series de Fourier - 95 -

Tabla 3. 2 Planteamiento del problema en variables reales y adimensionales.. - 97 -

Tabla 3. 3 Planteamiento del problema en variables reales y adimensionales.- 107 -

Tabla 3. 4 Planteamiento del problema en variables reales y adimensionales.- 116 -

Tabla 3. 5 Planteamiento del problema en variables reales y adimensionales.- 124 -

Tabla 3. 6 Planteamiento del problema en variables reales y adimensionales.- 128 -

Tabla 4. 1 Propiedades de la Transformada de (Laplace Arfken and Weber [1])...... - 137 -

Tabla 4. 2 Planteamiento del problema en variables reales y adimensionales.- 139 -

Tabla 4. 3 Planteamiento del problema en variables reales y adimensionales.- 147 -

Tabla 4. 4 Planteamiento del problema en variables reales y adimensionales.- 151 -

Tabla 4. 5 Soluciones para distintas condiciones de frontera internas y externas en el espacio de Laplace..... - 153 -

Tabla 5. 1 Relaciones importantes que involucran a la función delta de Dirac.- 157 -

Tabla 5. 2 Representaciones de la función Delta de Dirac $\delta r - r_0$ en varios sistemas de coordenadas..... - 158 -

Tabla 5. 3 Funciones de Green para diferentes sistemas de coordenadas (Duffy [1]). - 165 -

Tabla 8. 1 Propiedades del yacimiento..... - 188 -

Tabla 8. 2 Datos de producción..... - 189 -

Tabla 8. 3 Cálculo de la pseudo-presión. - 191 -

Tabla 8. 4 Resultados de los cálculos de Ψp , $\Delta\Psi\alpha(P)$ y $d\Delta\Psi\alpha(p)/dlnt$ - 195 -

**Tabla 8. 5 Diferentes modelos de flujo con el valor de su pendiente en la derivada.
..... - 199 -**

**Tabla 8. 6 Comparativo de los datos de ajuste con respecto a la variable de análisis.
..... - 203 -**

Índice de figuras

Figura 1. 1. Esquematación del concepto de la derivada.....	- 18 -
Figura 1. 2 Esquematación del concepto de la integral	- 20 -
Figura 1. 3 Aproximación del área bajo la curva por n trapecios.....	- 26 -
Figura 1. 4 Descripción gráfica de la regla de Simpson.....	- 27 -
Figura 1. 5 Comportamiento de la función error.....	- 30 -
Figura 1. 6 Comportamiento de la función error complementario.	- 30 -
Figura 1. 7 Comportamiento de la función Gamma.....	- 32 -
Figura 1. 8 Comportamiento de la función integral exponencial.	- 34 -
Figura 1. 9 Comportamiento de la función Bessel $J_v(x)$	- 37 -
Figura 1. 10 Comportamiento de la función Bessel $Y_v(x)$	- 37 -
Figura 1. 11 Comportamiento de la función Bessel $I_v(x)$	- 39 -
Figura 1. 12 Comportamiento de la función Bessel $K_v(x)$	- 39 -
Figura 2. 1 Superficie arbitraria cerrada de medio poroso.	- 47 -
Figura 2. 2 Comportamiento de la densidad de diferentes fluidos	- 51 -
Figura 2. 3 Relaciones típicas de esfuerzo cortante y velocidad de corte para fluidos no newtonianos (después de Hughes y Brighton).	- 54 -
Figura 2. 4 Curvas de flujo para fluidos no newtonianos tixotrópicos y reopécticos dependientes del tiempo (después de Bear y Skelland).	- 56 -
Figura 2. 5 Esquema del experimento de Darcy en un elemento poroso.	- 57 -

Figura 2. 6 Esquematización de la geometría de flujo lineal. - 70 -

Figura 2. 7 Esquematización de la geometría de flujo radial..... - 70 -

Figura 2. 8 Esquematización de la geometría de flujo esférico..... - 71 -

Figura 2. 9 Representación del estado estacionario en un yacimiento radial. .. - 72 -

Figura 2. 10 Representación del estado pseudo-estacionario en un yacimiento radial..... - 73 -

Figura 2. 11 Representación del estado transitorio en un yacimiento radial que produce con un pozo a condiciones de a) gasto constante, y b) presión de fondo fluyente constante..... - 74 -

Figura 3. 1 Esquema de un yacimiento que presenta flujo lineal y régimen estacionario. - 96 -

Figura 3. 2 Comportamiento de $YDL *$ para valores de λ - 99 -

Figura 3. 3 Esquema de un yacimiento que presenta flujo lineal y régimen pseudo-estacionario. - 106 -

Figura 3. 4 Esquema de un yacimiento que presenta flujo radial y estado transitorio explotado a gasto constante. - 115 -

Figura 3. 5 Esquema de un yacimiento que presenta flujo radial y estado estacionario. - 123 -

Figura 3. 6 Esquema de un yacimiento que presenta flujo radial y estado pseudo-estacionario. - 127 -

Figura 4. 1 Esquema de un yacimiento que presenta flujo radial y estado transitorio. - 138 -

Índice de figuras

Figura 4. 2 Comportamiento de la función Bessel $I_v(x)$.....	- 143 -
Figura 4. 3 Comportamiento de la función Bessel $K_v(x)$.	- 143 -
Figura 4. 4 Esquema de un yacimiento que presenta flujo radial y estado estacionario.	- 146 -
Figura 4. 5 Esquema de un yacimiento que presenta flujo radial y estado pseudo-estacionario.	- 150 -
Figura 6. 1 Comportamiento de un sistema que se produce a gastos múltiples.....	- 168 -
Figura 7. 1 Curvas tipo de Arps.....	- 175 -
Figura 7. 2 Curvas tipo de Fetkovich para el periodo transitorio.....	- 178 -
Figura 7. 3 Curvas tipo de Fetkovich para qDd con reD de 10 a 106.....	- 180 -
Figura 7. 4 Curva tipo del modelo de Arps-Fetkovich.....	- 182 -
Figura 7. 5 Esquemmatización del tiempo de balance de materia.	- 184 -
Figura 7. 6 Solución de Fetkovich evaluada en tDd y $tcDd$ en $reD = 100$.....	- 185 -
Figura 7. 7 Comportamiento de las soluciones de Fetkovich y Blasingame para un yacimiento cerrado a presión de fondo y gasto constantes contra $tcDd$, $reD = 100$.	- 186 -
Figura 8. 1 Ajuste de la curva de tendencia.	- 193 -
Figura 8. 2 Gráfico de diagnóstico.....	- 197 -
Figura 8. 3 Modelo del yacimiento.	- 198 -

Figura 8. 4 Comportamiento a las condiciones originales. - 201 -

Figura 8. 5 Mejor Ajuste de las Curvas..... - 202 -

Figura 8. 6 Comparativa del uso de la ψ_{wf} y la p_{wf} - 203 -

Figura B. 1 Flujo convectivo a través de una superficie S - 214 -

Figura B. 2 Volumen generado por las partículas - 215 -

Figura C. 1. Flujo en un elemento de volumen en coordenadas cartesianas. . - 217 -

Figura C. 2. Flujo en un elemento de volumen en coordenadas cilíndricas. ... - 219 -

Figura C. 3. Flujo en un elemento de volumen en coordenadas esféricas..... - 220 -

Introducción

La ingeniería de yacimientos es una rama de la ingeniería petrolera que tiene como fin estudiar y representar los fenómenos que afectan el flujo de los fluidos en el yacimiento para optimizar la productividad de los sistemas de producción. De esta manera, con ayuda de un equipo multidisciplinario, pueden definirse las mejores prácticas de explotación de los campos petroleros y maximizar el valor de los hidrocarburos.

Dentro de las diferentes áreas que existen en la ingeniería de yacimientos, este trabajo se enfocará en estudiar aspectos fundamentales del modelado y caracterización de sistemas de flujo a nivel macroscópico, donde las soluciones abordadas se encuentran definidas para su aplicación a nivel pozo-yacimiento.

El desarrollo de las áreas indicadas requiere que el ingeniero de yacimientos tenga bases sólidas de física, matemáticas aplicadas y métodos numéricos. Considerando lo anterior, este trabajo busca definir un marco fundamental para el desarrollo de la disciplina, tanto a nivel académico como práctico, en el que se aborden tanto la metodología de resolución de los problemas de flujo, como algunos de los métodos más utilizados dentro de este segmento. Finalmente, con la intención de reducir las brechas existentes entre el modelado y la aplicación, se define un flujo de trabajo escalable a los procesos de caracterización en la industria petrolera.

Para la consecución de los objetivos anteriores:

1. se realizará una revisión extensa de la literatura,
2. se presentará la resolución de algunos de los problemas de flujo que definen a los modelos clásicos utilizados en la disciplina, y
3. se ilustrará el proceso de caracterización mediante modelos analíticos.

El desarrollo de estos puntos se presenta en la investigación como se indica en seguida:

- En el Tema 1 se presentan conceptos y definiciones matemáticas básicas para abordar el análisis y resolución de problemas de la ingeniería de yacimientos.

- En el Tema 2 se desarrollan las ecuaciones fundamentales de flujo, las variables y conjuntos adimensionales que se utilizarán a lo largo de la investigación, así como otros modelos que resultan relevantes para la disciplina.
- En los Temas 3, 4 y 5 se presentan diferentes herramientas para la solución de los problemas de flujo, de acuerdo con las características definidas por: geometrías de flujo, condiciones de pozo y de frontera.
- En el Tema 6 se introducen los conceptos de convolución y deconvolución, así como su aplicación para extender el análisis de datos de producción.
- En el Tema 7 se define la metodología de resolución a los problemas de flujo de interés para la disciplina. Para ello se analizan las expresiones utilizadas en el análisis de datos de producción.
- En el Tema 8 se presenta un flujo de trabajo para la caracterización de sistemas de flujo macroscópico mediante modelos analíticos, mismo que se ilustra mediante un caso de estudio.
- Por último, se presentan las conclusiones de este trabajo escrito, así como también recomendaciones para profundizar los alcances de esta tesis.
- En adición, se presentan anexos que complementan lo presentado en algunos temas.

Tema 1 Fundamentos de matemáticas para la ingeniería de yacimientos

Las matemáticas son las bases primordiales en cualquier área de las ingenierías, y la ingeniería de yacimientos no es la excepción, por lo que, en este primer tema, algunas definiciones matemáticas básicas e importantes para entender y abordar el desarrollo de problemas en esta área, y porque no en otras, son presentadas. Tales definiciones tienen un carácter puramente informativo, ya que, para definiciones más formales, así como para el desarrollo detallado de algunos procedimientos, se recomienda consultar las referencias del capítulo.

Dentro de los conceptos básicos presentados está el del límite, útiles para entender la definición de la derivada y la integral, dos de los conceptos, que sin duda conglomeran muchos de los problemas de ingeniería, por lo que se considera importante su conocimiento y entendimiento. Además, es de suma importancia conocer métodos de aproximación numérica, ya que en muchas ocasiones no es posible encontrar una solución analítica a nuestro problema, así que se introducen algunos métodos de aproximación numérica, así como métodos de ajuste por medio de polinomios y series.

1.1 límites de funciones

Los límites son una herramienta útil para analizar la aproximación de un valor a otro, y son de gran ayuda para definir conceptos fundamentales como la convergencia, la continuidad, la derivación o la integración. De esta manera, siendo f una función definida en un intervalo abierto que contiene a c (salvo posiblemente en c) y L un número real, la afirmación:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L, \quad \dots\dots\dots 1.1$$

significa que para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$, tal que, si $0 < |x - c| < \delta$, entonces $|f(x) - L| < \epsilon$. Esto lleva implícito que el límite existe y es igual a L (**Larson [1]**). Informalmente, el hecho de que una función f tiene un límite L en un punto, a , significa que el valor de f puede ser tan cercano a L como se desee, tomando puntos suficientemente cercanos a a , pero distintos de a .

Algunas de las propiedades de los límites de interés en este trabajo se presentan en la **Tabla 1. 1.**

Tabla 1. 1. Propiedades de los límites

Límite de una constante	$\lim_{x \rightarrow a} c = c$	1. 2
Conmutatividad del límite	$\lim_{x \rightarrow a} mx + b = ma + b$	1. 3
Límite de una suma de funciones	$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$	1. 4
Límite de un producto de funciones	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) * g(x) = [\lim_{x \rightarrow a} f(x)] * [\lim_{x \rightarrow a} g(x)]$	1. 5
Límite de un cociente de funciones	$\lim_{x \rightarrow a} f(x)/g(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)},$ cuando $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$	1. 6
Regla de la potencia	$\lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n$	1. 7

1.2 La derivada

La derivada es un operador matemático que permite medir el cambio de una variable como consecuencia del cambio en otra, y permite analizar la variación puntual de una función, está definida en x para una función f como:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}, \dots\dots\dots 1.8$$

donde $f'(x)$ representa la primera derivada de la función f en x , en la misma forma que lo indica la notación dy/dx , siendo que y corresponde a $f(x)$. La **Figura 1. 1** representa el concepto gráfico de la derivada, en ella puede verse que siendo dos puntos cualesquiera de la curva $f(x)$, de coordenadas $(x, f(x))$ y $(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$, se puede trazar una recta secante, a medida que el valor de Δx tiende a cero, el valor Δy también decrece y los puntos en cuestión se aproximan. En el límite, cuando Δx tiende a cero, la recta secante inicial tiende a compartir un solo punto con la curva de $f(x)$, es decir, tiende a ser una recta tangente. En este punto, como se estudia en la Geometría analítica elemental, la expresión $\Delta y/\Delta x$ es una medida de la pendiente de la recta. Así, es válida la interpretación de la derivada de una función en un punto como la pendiente de la recta tangente a este punto.

En la **Tabla 1. 2** se muestran algunas reglas de derivación de interés.

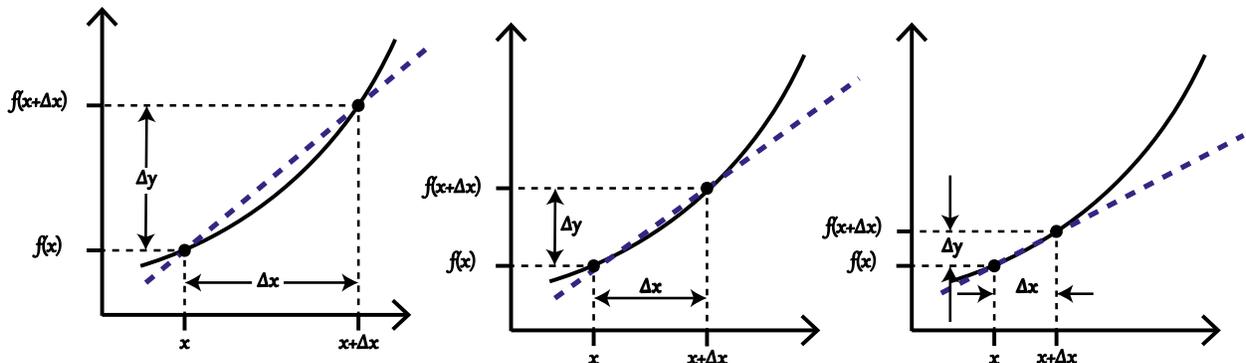


Figura 1. 1. Esquemización del concepto de la derivada

Tabla 1. 2. Reglas de derivación

Aplicación de la regla de la cadena	$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}$	1. 9
Regla del producto	$\frac{d}{dx}(uv) = u \frac{d}{dx}(v) + v \frac{d}{dx}(u)$	1. 10
Regla del coeficiente	$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \frac{d}{dx}(u) - u \frac{d}{dx}(v)}{v^2} = \frac{1}{v} \frac{du}{dx} - \frac{u}{v^2} \frac{dv}{dx}$	1. 11
Regla de la potencia	$\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1} \frac{du}{dx}$	1. 12

1.3 La integral

El Teorema fundamental del Cálculo (estudiado en cursos de cálculo elemental) establece que la integral indefinida de una función continua es su antiderivada general. Es decir, si F es una función continua de x tal que $F = f'(x)$, según el teorema antedicho,

$$\int F dx = \int f'(x) dx = f(x) + C, \quad \dots\dots\dots 1. 13$$

donde C es un número real arbitrario. Asimismo, nótese entonces que:

$$\frac{d}{dx} \left(\int F dx \right) = \frac{d}{dx} \left(\int f'(x) dx \right) = \frac{d}{dx} (f(x) + C) = f'(x) = F, \quad \dots\dots\dots 1. 14$$

por lo tanto, la integral puede verse como una operación inversa a la diferenciación, por lo que su uso permite apreciar el comportamiento promedio de una variable en un intervalo definido. De esta manera, para una función $f(x) = dg(x)/dx$, su integral definida puede escribirse como:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \frac{d}{dx} [g(x)]dx = g(x)|_a^b = g(b) - g(a) . \dots\dots\dots 1.15$$

Geoméricamente, la integral definida en un intervalo puede interpretarse como el área bajo la curva de la función $f(x)$ en dicho intervalo, tal y como se muestra en la **Figura 1. 2** . Algunas propiedades de integración útiles se presentan en la **Tabla 1. 3**.

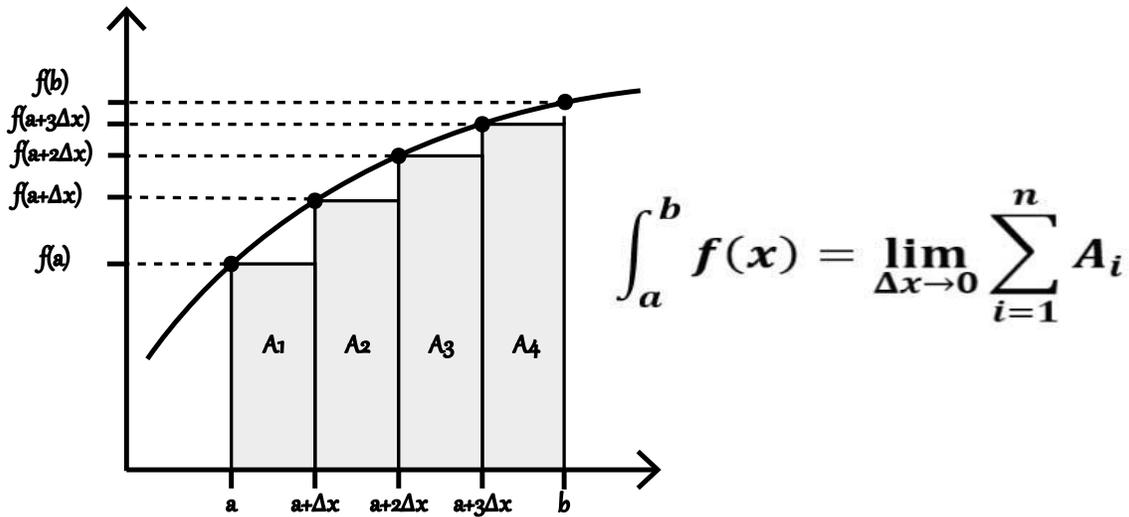


Figura 1. 2 Esquematización del concepto de la integral

1.4 Series de Taylor

Muchas veces es de gran utilidad expresar algunas funciones o el valor en un punto de una función como una serie de polinomios simples, esta es la función principal de las Series de Taylor, las cuales para una función f , en el punto x_0 , están definidas como:

Tabla 1. 3. Propiedades de la integral

Relación base	$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) = f(b) - f(a)$	1. 16
Relación de reflexión	$\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx \text{ (para } b > a \text{)}$	1. 17
Superposición	$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$	1. 18
Homogeneidad	$\int_a^b cf(x)dx = c \int_a^b f(x)dx$	1. 19
Propiedad partitiva del intervalo de integración	$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ $= \int_c^b f(x)dx - \int_c^a f(x)dx, \quad a < c < b$	1. 20
Cambio de variable	$\int_a^b f[g(x)]g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du \text{ (} u = g(x)\text{)}$	1. 21

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{n=1}^N \frac{(x - x_0)^n}{n!} \frac{d^n f}{dx^n} + R_{N+1}, \quad \dots\dots\dots 1. 22$$

donde R_{N+1} , representa el residuo (**Ertekin et. al [2]**) e incluirlo en la serie define una representación completa de la función $f(x)$, y está dado por:

$$R_{N+1} = \frac{1}{(N + 1)!} \int_{x_0}^x (x - x_0)^{N+1} \frac{d^{N+1}f}{dx^{N+1}} dx, \quad \dots\dots\dots 1. 23$$

si se desea, este último término puede eliminarse, resultando en la mera aproximación de la serie a la función. Cuando la **Ec. 1. 22** se evalúa en $x_0 = 0$, la serie lleva el nombre de Serie de Maclaurin (**Larson [1]**).

La **Ec. 1. 22** puede extenderse para n variables:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n!} \left[\sum_{k=1}^n (x_k - x_{0k}) \frac{\partial}{\partial x_k} \right]^n f(x_{0_1}, x_{0_2}, \dots, x_{0_n}) \right\}, \quad \dots\dots\dots 1. 24$$

y para una función que depende de dos variables, $f(x, y)$, se define como sigue:

$$f(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[(x - x_0) \frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0) \frac{\partial}{\partial y} \right]^n f(x_0, y_0). \quad \dots\dots\dots 1. 25$$

1.5 Derivación e integración numérica

Debido a que muchos problemas de ingeniería se apoyan en herramientas computacionales para facilitar los procesos de solución de problemas, es importante aproximar funciones o ecuaciones a través de métodos numéricos, por lo que en este apartado se presentan métodos de derivación e integración numérica, que pueden ser de utilidad en la solución de problemas de la ingeniería de yacimientos.

1.5.1 Derivación Numérica

A partir de las series de Taylor es posible definir aproximaciones a las derivadas de una función, para los fines del presente trabajo se presentan los métodos de diferenciación a través de diferencias finitas (**Chapra [3]**) y el método de Runge-Kutta:

Diferencias finitas hacia adelante

$$\frac{df(x_i)}{dx} = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}, \dots\dots\dots 1.26$$

$$\frac{d^2f(x_i)}{dx} = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{(x_{i+1} - x_i)^2}, \dots\dots\dots 1.27$$

Diferencias finitas hacia atrás

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}, \dots\dots\dots 1.28$$

$$\frac{d^2f(x_i)}{dx} = \frac{f(x_i) - 2f(x_{i-1}) + f(x_{i-2}))}{(x_i - x_{i-1})^2}, \dots\dots\dots 1.29$$

Diferencias finitas centradas

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}))}{2(x_{i+1} - x_{i-1})}, \dots\dots\dots 1.30$$

$$\frac{d^2f(x_i)}{dx} = \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1}))}{(x_{i+1} - x_{i-1})^2}, \dots\dots\dots 1.31$$

para lograr mayor exactitud en las fórmulas de derivación, basta con emplear más términos de la serie de Taylor.

Método de Runge-Kutta

En la derivación de las diferencias finitas, cabe señalar que el error disminuye con forme se empleen más elementos de la serie, lo cual conlleva al empleo de derivadas de orden superior para calcular la derivada deseada. Para evitar tal inconveniente, se presenta un método que logra la misma exactitud que las series de Taylor, pero sin emplear las derivadas consecuentes, tal método es conocido como *Runge-Kutta* (Carnahan et al. [4]).

El método de Runge-Kutta presenta la forma siguiente:

$$y_{i+1} = y_i + [\phi(x_i, y_i, h)]h, \quad \dots\dots\dots 1.32$$

donde h es el paso o tamaño del incremento y el término ϕ , es llamado *función incremento*, y representa la mejor aproximación a la función en el intervalo $x_i \leq x \leq x_{i+1}$, y se define como:

$$\phi = a_1k_1 + a_2k_2 + \dots + a_nk_n, \quad \dots\dots\dots 1.33$$

donde a_n son constantes y las k_n son:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_i, y_i) \\ k_2 &= f(x_i + p_1h, y_i + q_{11}k_1h) \\ k_3 &= f(x_i + p_2h, y_i + q_{21}k_1h + q_{22}k_2h) \\ &\vdots \\ k_n &= f(x_i + p_{n-1}h, y_i + q_{n-1,1}k_1h + q_{n-1,2}k_2h + \dots + q_{n-1,n-1}k_{n-1}h) \end{aligned}, \quad \dots\dots\dots 1.34$$

Donde las p y las q son constantes. Para encontrar el valor de las constantes debe elegirse un grado del polinomio, n , una vez que se elige n , se obtienen las a, p, q igualando la **Ec. 1.33** a los términos en la expansión de la serie de Taylor. Para un procedimiento más detallado véase (**Chapra [3]**). Aquí se presenta el resultado de este procedimiento para los polinomios de RK de orden 4:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h, \quad \dots\dots\dots 1.35$$

donde:

$$\left\{ \begin{array}{l} k_1 = f(x_i, y_i) \\ k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1h\right) \\ k_3 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2h\right) \\ k_4 = f(x_i + h, y_i + k_3h) \end{array} \right. \dots\dots\dots 1.36$$

1.5.2 Integración numérica

Entre los métodos de integración numérica, destacan aquellos que buscan aproximar el valor de la integral de un conjunto de datos mediante el empleo de un polinomio. Estos métodos son conocidos como *fórmulas de Newton-Cotes cerradas* (**Chapra [3]**). Entre estos métodos encontramos la Regla Trapezoidal y la Regla de Simpson.

Regla trapezoidal

Consiste en aproximar la integral mediante un polinomio de primer grado. Esto es, aproximar la integral mediante el área formada bajo la recta entres dos puntos de la curva, lo cual da como resultado una figura trapezoidal, si se utilizan n trapecios, como se muestra en la **Figura 1. 3**.

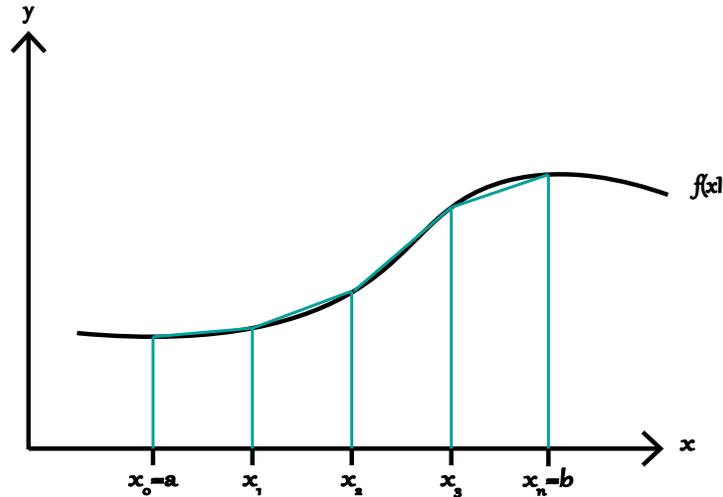


Figura 1. 3 Aproximación del área bajo la curva por n trapecios.

La regla de los trapecios para aproximar $\int_a^b f(x)dx$ estará dada por:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2n} \left[f(x_0) + f(x_n) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right]. \dots\dots\dots 1.37$$

Regla de Simpson

La regla de Simpson nos permite aproximar la integral mediante un polinomio de segundo grado, **Figura 1. 4**. Así pues, dada la continuidad de f en el intervalo $[a, b]$ y sea n un número entero par, la regla de Simpson para aproximar $\int_a^b f(x)dx$ viene dada por:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{3n} \left[f(x_0) + f(x_n) + 4 \sum_{i=1,3,5\dots}^{n-1} f(x_i) + 2 \sum_{i=2,4,6\dots}^{n-2} f(x_i) \right]. \dots\dots\dots 1.38$$

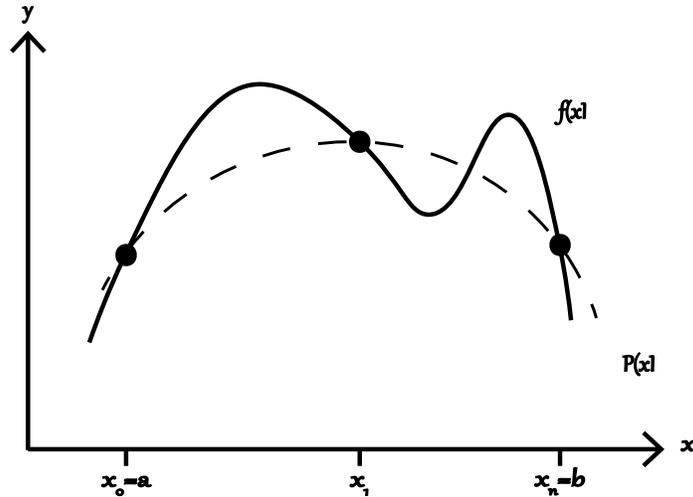


Figura 1. 4 Descripción gráfica de la regla de Simpson.

Cuadratura Gaussiana

Además de las fórmulas de Newton-Cotes, encontramos las llamadas *fórmulas de integración mediante polinomios ortogonales*, entre las cuales está la Cuadratura de Gauss, que consisten en seleccionar los puntos de la evaluación de manera óptima y no en una forma igualmente espaciada como sucede con los métodos anteriores, la integral $\int_a^b f(x)dx$ es aproximada entonces como:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^n w_i f(z_i) \text{ donde } z_i = \left[\frac{b-a}{2} \right] x_i + \left[\frac{b+a}{2} \right], \dots\dots\dots 1.39$$

donde las abscisas, x_i , y las ponderaciones, w_i , para el presente trabajo se obtienen de las tablas 25.4 de (Abramowitz & Stegun [5]) págs. 916-919.

1.6 Funciones especiales

El uso de funciones especializadas para describir el comportamiento de variables de producción es común en los modelos de ingeniería yacimientos. Algunos casos de interés son:

1. Función error y función error complementario. **Tabla 1. 4, Figura 1. 5 y Figura 1. 6.**
2. Función gamma. **Tabla 1. 5 y Figura 1. 7.**
3. Función integral exponencial. **Tabla 1. 6 y Figura 1. 8.**
4. Funciones de Bessel J y Y . **Tabla 1. 7, Figura 1. 9 y Figura 1. 10.**
5. Funciones de Bessel I y K . **Tabla 1. 8, Figura 1. 11 y Figura 1. 12.**

Además de las definiciones y aproximaciones presentadas, en el **Anexo A** se incluyen algunos polinomios útiles para su cálculo. Otras expresiones auxiliares para determinarlas, así como tablas de valores, son presentadas por (**Abramowitz & Stegun [5]**).

Tabla 1. 4. Expresiones para las funciones error $erf(x)$ y error complementario $erfc(x)$.

Definición	$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt, \quad erfc(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt = 1 - erf(x)$	1. 40
Representación como una serie	$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n! (2n + 1)}$	1. 41
Aproximación Racional	$erf(x) = 1 - (a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5) e^{-x^2}, \quad t = \frac{1}{1 + px}$	1. 42
$0 \leq x \leq \infty$	$p = 0.3275911, \quad a_1 = 0.254829592, \quad a_2 = -0.284496736$ $a_3 = 1.421413741, \quad a_4 = -1.453152027, \quad a_5 = 1.061405429$	

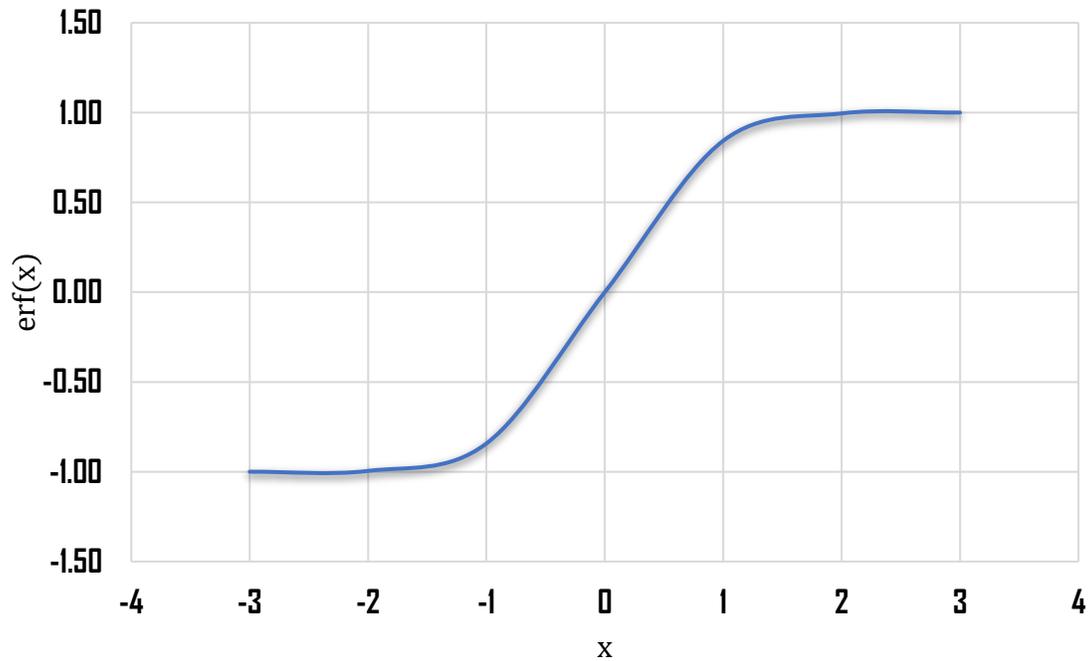


Figura 1. 5 Comportamiento de la función error.

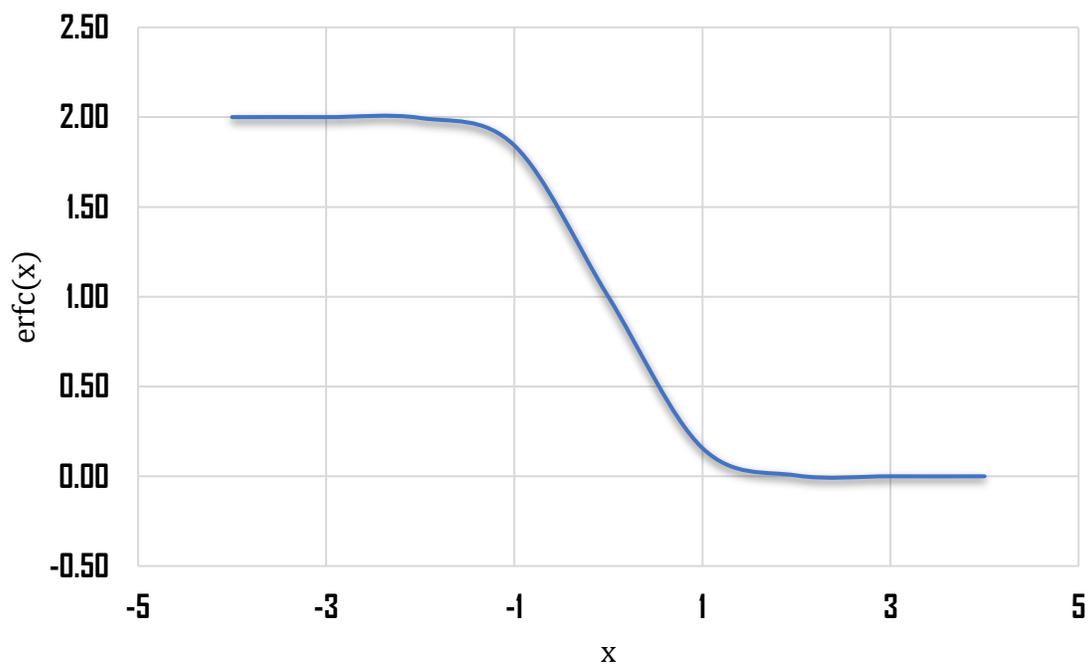


Figura 1. 6 Comportamiento de la función error complementario.

Tabla 1. 5. Expresiones para la función Gamma $\Gamma(x)$.

Definición	$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$	1. 43
Representación como una serie¹	$\frac{1}{\Gamma(x)} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k x^k$	1. 44
Aproximación Polinomial	$\Gamma(x + 1) = x! = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5$	
$0 \leq x \leq \infty$	$a_1 = -0.5748646, \quad a_2 = 0.9512363, \quad a_3 = -0.6998588$ $a_4 = 0.4245549, \quad a_5 = -0.1010678$	1. 45

¹ Para los coeficientes c_k véase las tablas de H. T. Davis [5].

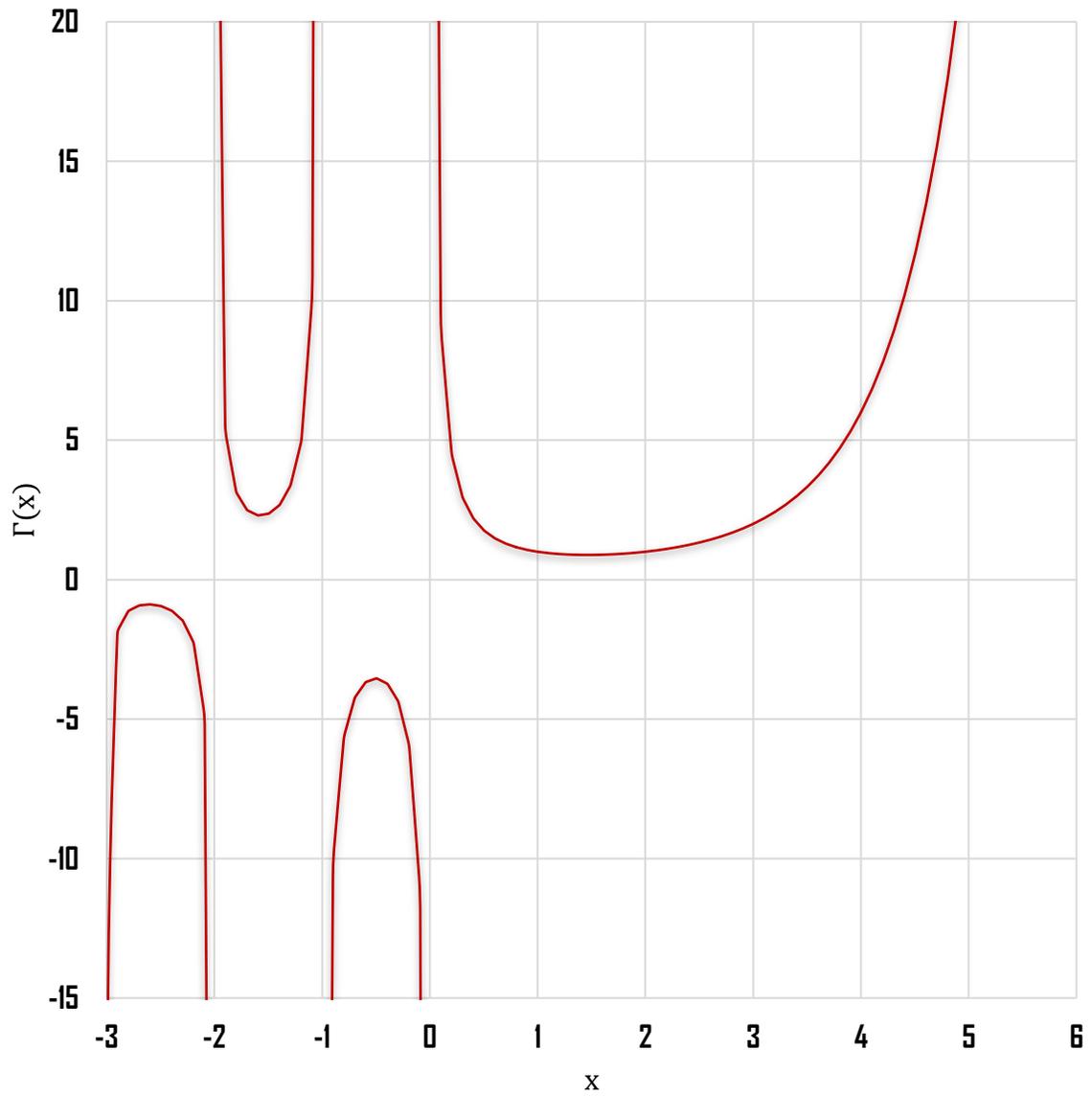


Figura 1. 7 Comportamiento de la función Gamma.

Tabla 1. 6. Expresiones para la función integral exponencial $E_i(x)$.

Definición	$E_i(x) = - \int_{-x}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt = \int_{-\infty}^x \frac{e^t}{t} dt, \quad x > 0$	1. 46
Representación como una serie	$E_i(x) = \gamma + \ln(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{nn!}, \quad x > 0$ $\gamma = \text{constante de Euler} = 0.5772156649$	1. 47
Aproximación polinomial	$E_i(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 - \ln(x)$	1. 48
$0 \leq x \leq 1$	$a_0 = -0.57721566, \quad a_1 = 0.99999193, \quad a_2 = -0.24991055$ $a_3 = 0.05519968, \quad a_4 = -0.00976004, \quad a_5 = 0.00107857$	
Aproximación racional	$xe^xE_i(x) = \frac{x^2 + a_1x + a_2}{x^2 + b_1x + b_2}$	1. 49
$1 \leq x \leq \infty$	$a_1 = 2.33473, \quad a_2 = 0.25062, \quad b_1 = 3.33066, \quad b_2 = 1.68153$	

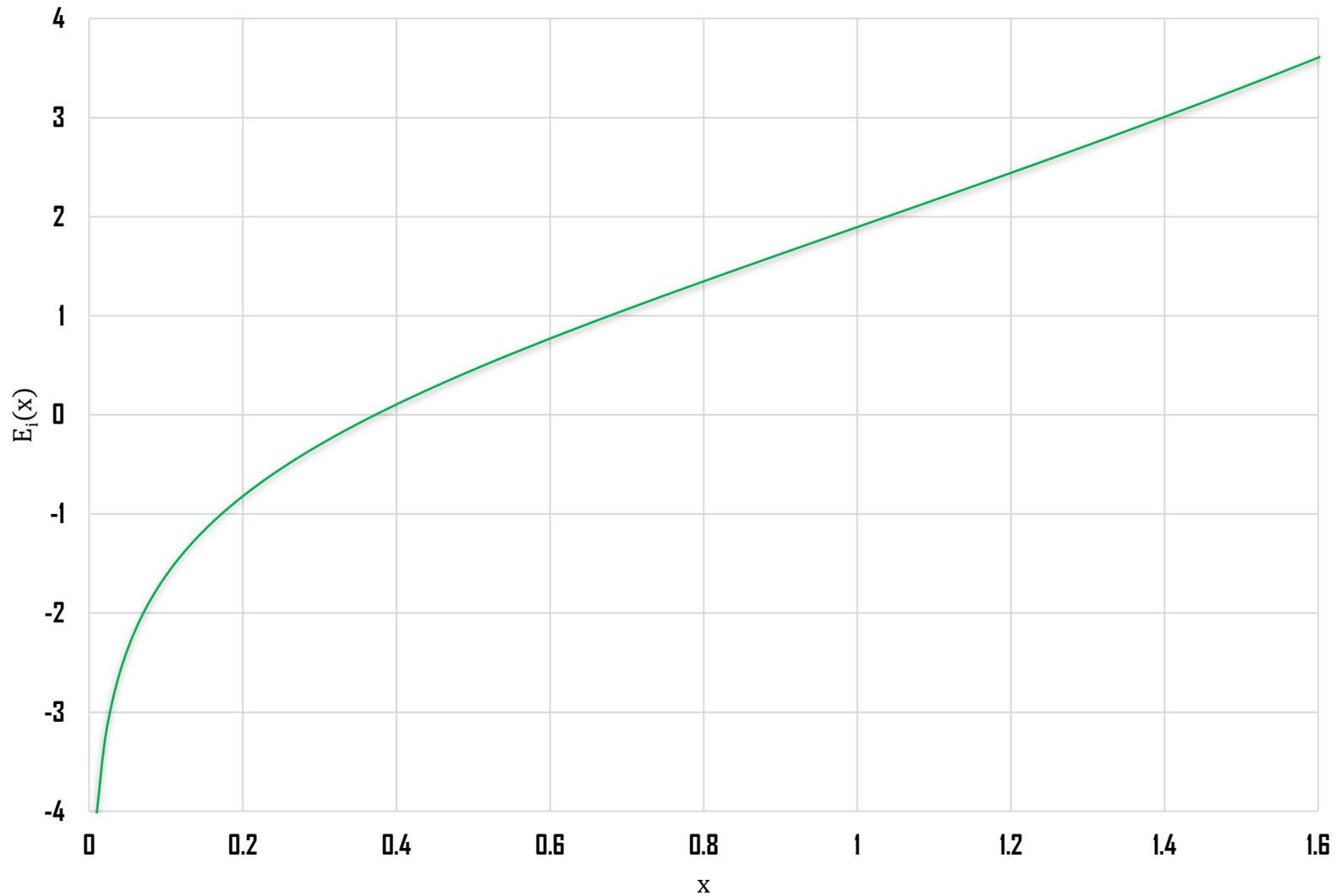


Figura 1. 8 Comportamiento de la función integral exponencial.

Tabla 1. 7. Definiciones de las funciones de Bessel² $J_\nu(x)$ y $Y_\nu(x)$.

Ecuación diferencial	$x^2 \frac{d^2 w}{dx^2} + x \frac{dw}{dx} + (x^2 - \nu^2)w = 0$	1. 50
Representación de $J_\nu(x)$ como una serie	$J_\nu(x) = \left(\frac{1}{2}x\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{4}x^2\right)^k}{k! \Gamma(\nu + k + 1)}$	1. 51
Relación³ entre las soluciones $J_\nu(x)$ y $Y_\nu(x)$	$Y_\nu(x) = \frac{J_\nu(x) \cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)}, \quad \mathfrak{b}_{-n}(z) = (-1)^n \mathfrak{b}_n(z),$	1. 52
Fórmulas de derivación	$\left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx}\right)^k \{x^\nu \mathfrak{b}_\nu(x)\} = x^{\nu-k} \mathfrak{b}_{\nu-k}(x)$ $\left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx}\right)^k \{x^{-\nu} \mathfrak{b}_\nu(x)\} = (-1)^k x^{-\nu-k} \mathfrak{b}_{\nu+k}(x)$	1. 53

² Los polinomios de las funciones se presentan en el **Anexo A**.

³ Donde \mathfrak{b} representa a las funciones de Bessel J o Y .

Tabla 1. 7. Definiciones de las funciones de Bessel $J_v(x)$ y $Y_v(x)$ (continuación).

	<p>sean</p> $p_v = J_v(a)Y_v(b) - J_v(b)Y_v(a), \quad q_v = J_v(a)Y'_v(b) - J'_v(b)Y_v(a)$ $r_v = J'_v(a)Y_v(b) - J_v(b)Y'_v(a), \quad s_v = J'_v(a)Y'_v(b) - J'_v(b)Y'_v(a)$	<p>1. 54</p>
Relaciones de recurrencia	<p>Entonces</p> $p_{v+1} - p_{v-1} = -\frac{2v}{a}q_v - \frac{2v}{b}r_v, \quad q_{v+1} + r_v = \frac{v}{a}p_v - \frac{v-1}{b}p_{v+1}$ $r_{v+1} + q_v = \frac{v}{b}p_v - \frac{v+1}{a}p_{v+1}, \quad s_v = \frac{1}{2}p_{v+1} + \frac{1}{2}p_{v-1} - \frac{v^2}{ab}p_v$ $p_v s_v - q_v r_v = \frac{4}{\pi^2 ab}$	<p>1. 55</p>

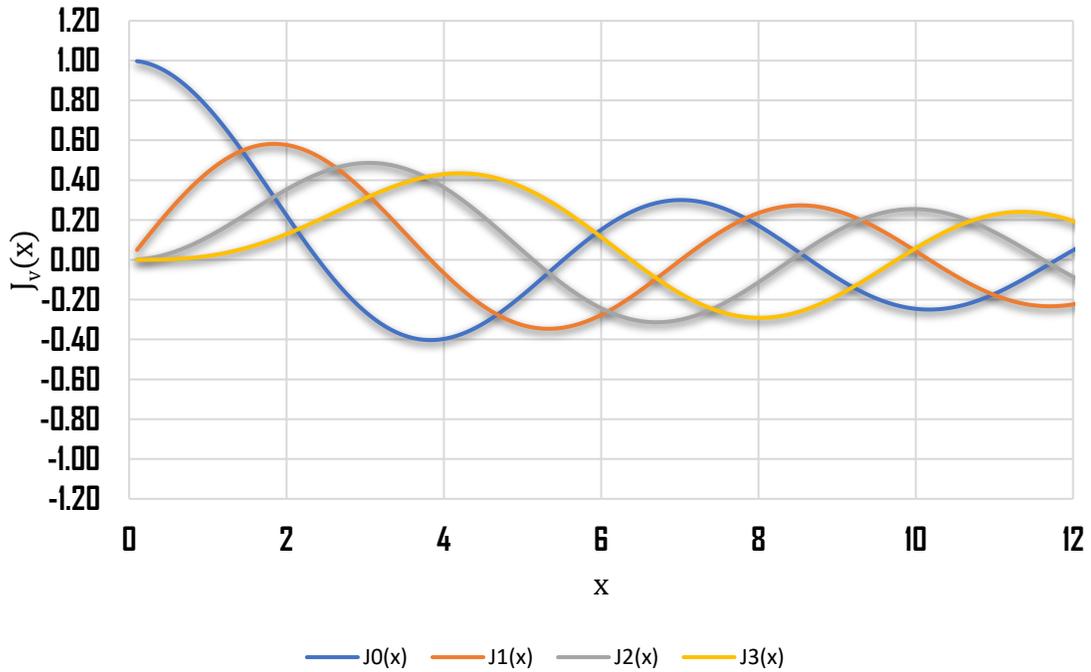


Figura 1. 9 Comportamiento de la función Bessel $J_v(x)$.

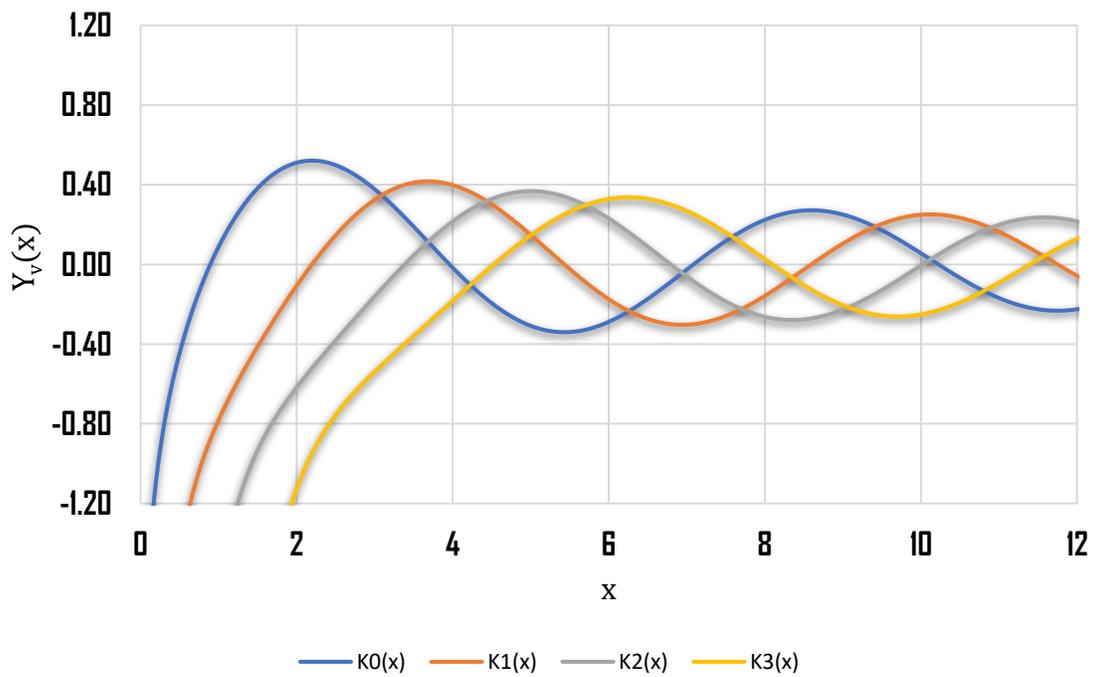


Figura 1. 10 Comportamiento de la función Bessel $Y_v(x)$.

Tabla 1. 8. Definiciones de las funciones de Bessel⁴ $I_\nu(x)$ y $K_\nu(x)$.

Ecuación diferencial	$x^2 \frac{d^2 w}{dx^2} + x \frac{dw}{dx} - (x^2 + \nu^2)w = 0$	1. 56
Representación de $I_\nu(x)$ como una serie	$I_\nu(x) = \left(\frac{1}{2}x\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{4}x^2\right)^k}{k! \Gamma(\nu + k + 1)}$	1. 57
Relación entre las soluciones $I_\nu(x)$ y $K_\nu(x)$⁵	$K_\nu(x) = \frac{1}{2}\pi \frac{I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)}{\sin(\nu\pi)}, \quad \mathfrak{b}_{-n}(z) = \mathfrak{b}_n(z),$	1. 58
Fórmulas de derivación	$\left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx}\right)^k \{x^\nu \mathfrak{b}_\nu(x)\} = x^{\nu-k} \mathfrak{b}_{\nu-k}(x), \quad \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx}\right)^k \{x^{-\nu} \mathfrak{b}_\nu(x)\} = x^{-\nu-k} \mathfrak{b}_{\nu+k}(x)$ $I'_0(x) = I_1(x), \quad K'_0(x) = -K_1(x)$	1. 59
Relaciones de recurrencia	$\mathfrak{b}_{\nu-1}(x) - \mathfrak{b}_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} \mathfrak{b}_\nu(x), \quad \mathfrak{b}'_\nu(x) = \mathfrak{b}_{\nu-1}(x) - \frac{\nu}{x} \mathfrak{b}_\nu(x)$ $\mathfrak{b}_{\nu-1}(x) + \mathfrak{b}_{\nu+1}(x) = 2\mathfrak{b}'_\nu(x), \quad \mathfrak{b}'_\nu(x) = \mathfrak{b}_{\nu+1}(x) + \frac{\nu}{x} \mathfrak{b}_\nu(x)$	1. 60

⁴ Los polinomios de las funciones se presentan en el **Anexo A**.

⁵ Donde \mathfrak{b} representa a las funciones de Bessel I o K .

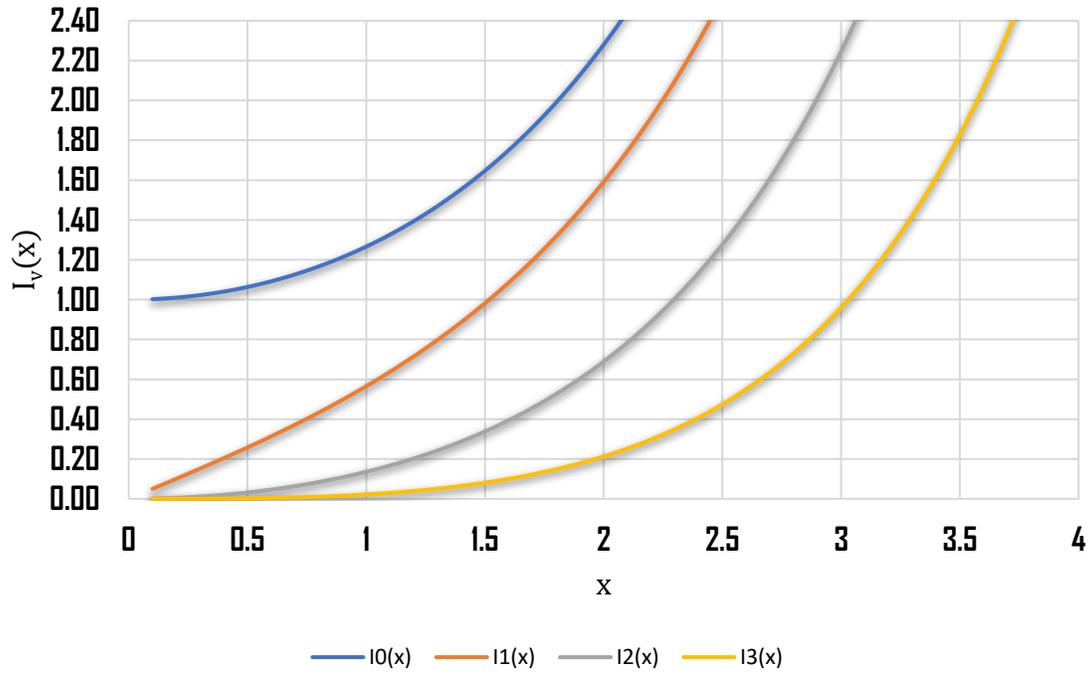


Figura 1. 11 Comportamiento de la función Bessel $I_\nu(x)$.

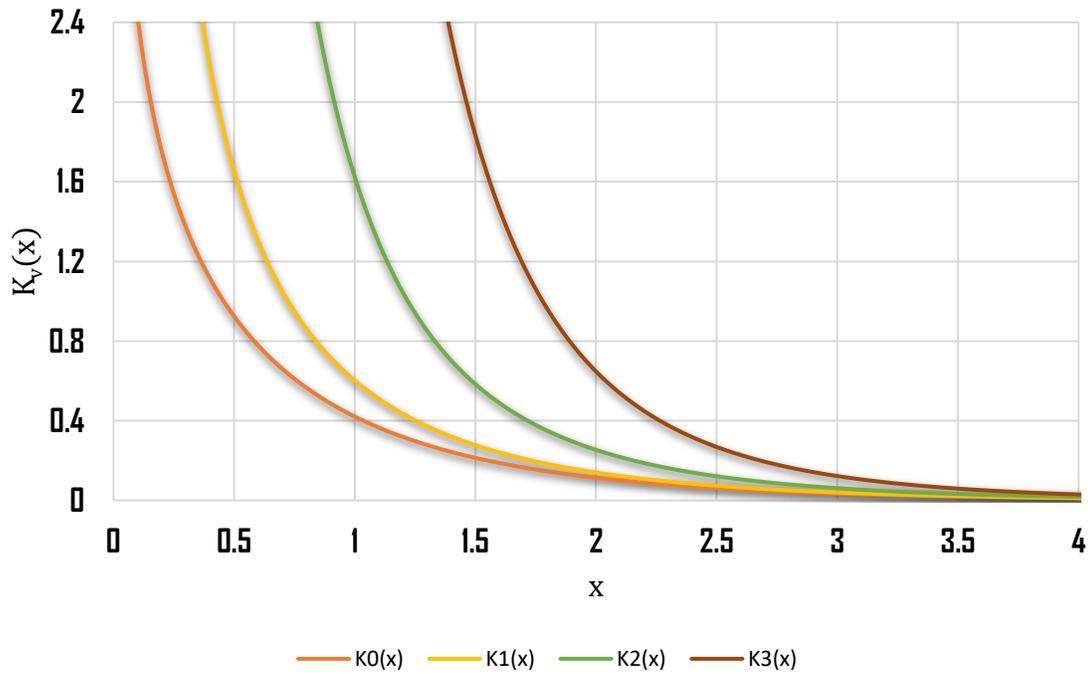


Figura 1. 12 Comportamiento de la función Bessel $K_\nu(x)$.

1.7 Método de Mínimos Cuadrados

El método consiste en aproximar la tendencia de una serie de datos a un polinomio, P , de grado m , es decir:

$$P(x) = \alpha_1 + \alpha_2x + \alpha_3x^2 + \dots + \alpha_{m+1}x^m . \quad \dots\dots\dots 1.61$$

Como todos los puntos de la serie deben aproximarse al mismo polinomio, se tendrá un sistema de n ecuaciones:

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2x_1 + \alpha_3x_1^2 + \dots + \alpha_{m+1}x_1^m &= \hat{y}_1 \\ \alpha_1 + \alpha_2x_2 + \alpha_3x_2^2 + \dots + \alpha_{m+1}x_2^m &= \hat{y}_2, \quad \dots\dots\dots 1.62 \\ &\vdots \\ \alpha_1 + \alpha_2x_n + \alpha_3x_n^2 + \dots + \alpha_{m+1}x_n^m &= \hat{y}_n \end{aligned}$$

donde \hat{y}_i , es una aproximación de la coordenada y de cada punto. Las ecuaciones anteriores pueden escribirse en forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^m \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \\ \alpha_{m+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{y}_1 \\ \hat{y}_2 \\ \vdots \\ \hat{y}_n \end{bmatrix} \Rightarrow Ax = v . \quad \dots\dots\dots 1.63$$

La matriz que contiene a los x_i se le ha identificado como A , al vector de incognitas α_i , como x y al vector que contiene a las \hat{y}_i como v . Dado que para todo x_i habrá una \hat{y}_i diferente de y_i , ya que el polinomio no necesariamente pasará por todos los puntos. Entonces esta diferencia, que será la distancia entre \hat{y}_i y y_i , será el error, e^2 , el cual estará dado por:

$$e^2 = (y_i - \hat{y}_i)^2 = \left(y_i - (\alpha_1 + \alpha_2x_i + \alpha_3x_i^2 + \dots + \alpha_{m+1}x_i^m) \right)^2 , \quad \dots\dots\dots 1.64$$

y el error total, ε^2 , de todo el método, estará dado por lo siguiente:

$$\varepsilon^2 = \sum_{i=1}^n [e_i^2] = \sum_{i=1}^n [y_i - \hat{y}_i]^2 = \sum_{i=1}^n [y_i - (\alpha_1 + \alpha_2 x_i + \dots + \alpha_{m+1} x_i^m)]^2. \quad \dots\dots\dots 1.65$$

Podemos escribir el error en forma vectorial, como se muestra a continuación:

$$e = |v - Ax| = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{y}_1 - (\alpha_1 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 x_1^2 + \dots + \alpha_{m+1} x_1^m) \\ \hat{y}_2 - (\alpha_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_2^2 + \dots + \alpha_{m+1} x_2^m) \\ \hat{y}_3 - (\alpha_1 + \alpha_2 x_3 + \alpha_3 x_3^2 + \dots + \alpha_{m+1} x_3^m) \\ \vdots \\ \hat{y}_n - (\alpha_1 + \alpha_2 x_n + \alpha_3 x_n^2 + \dots + \alpha_{m+1} x_n^m) \end{bmatrix}. \quad \dots\dots\dots 1.66$$

Donde la norma del vector error, se obtiene como sigue:

$$|e| = \left\| \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + \dots + e_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n [e_i^2]} = \varepsilon. \quad \dots\dots\dots 1.67$$

Una manera de garantizar que se tenga la mejor curva de ajuste es minimizando, la suma de los cuadrados de los residuos, ε^2 , esto es:

$$S_r = \varepsilon^2 = \sum_{i=1}^n [e_i^2] = \sum_{i=1}^n [y_i - \hat{y}_i]^2 = \sum_{i=1}^n [y_i - (\alpha_1 + \alpha_2 x_i + \dots + \alpha_{m+1} x_i^m)]^2, \quad \dots 1.68$$

para ello debe derivarse la expresión anterior respecto a todos los coeficientes:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_r}{\partial \alpha_1} &= -2 \sum_{i=1}^n [y_i - (\alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 x_i^2 + \dots + \alpha_{m+1} x_i^m)] \\ \frac{\partial S_r}{\partial \alpha_2} &= -2 \sum_{i=1}^n x_i [y_i - (\alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 x_i^2 + \dots + \alpha_{m+1} x_i^m)] \quad , \quad \dots \quad 1.69 \\ &\vdots \\ \frac{\partial S_r}{\partial \alpha_{m+1}} &= -2 \sum_{i=1}^n x_i^m [y_i - (\alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 x_i^2 + \dots + \alpha_{m+1} x_i^m)] \end{aligned}$$

si las ecuaciones anteriores se igualan a cero y se reordenan como se muestra:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \alpha_1 + \sum_{i=1}^n \alpha_2 x_i + \sum_{i=1}^n \alpha_3 x_i^2 + \dots + \sum_{i=1}^n \alpha_{m+1} x_i^m &= \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n \alpha_1 x_i + \sum_{i=1}^n \alpha_2 x_i^2 + \sum_{i=1}^n \alpha_3 x_i^3 + \dots + \sum_{i=1}^n \alpha_{m+1} x_i^{m+1} &= \sum_{i=1}^n y_i x_i \quad \dots \quad 1.70 \\ &\vdots \\ \sum_{i=1}^n \alpha_1 x_i^m + \sum_{i=1}^n \alpha_2 x_i^{m+1} + \sum_{i=1}^n \alpha_3 x_i^{m+2} + \dots + \sum_{i=1}^n \alpha_{m+1} x_i^{2m} &= \sum_{i=1}^n y_i x_i^m \end{aligned}$$

Si se observa que $\sum_{i=1}^n \alpha_1 = n\alpha_1$. Las ecuaciones anteriores pueden escribirse de manera matricial como:

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 & \dots & \sum_{i=1}^n x_i^m \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i^3 & \dots & \sum_{i=1}^n x_i^{m+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^n x_i^m & \sum_{i=1}^n x_i^{m+1} & \sum_{i=1}^n x_i^{m+2} & \dots & \sum_{i=1}^n x_i^{2m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \\ \alpha_{m+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n y_i x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n y_i x_i^m \end{bmatrix} \quad \dots \quad 1.71$$

Si nombramos al vector de $\sum x_i$ como S_x , al vector de coeficientes α_i como A , y al vector $\sum y_i x_i$ como S_{xy} :

$$S_x A = S_{xy}, \dots\dots\dots 1.72$$

y A es obteniendo mediante cualquier método de solución de sistemas de ecuaciones, algunos de los cuales se presentan en (**Chapra [3]**).

El *error estándar del estimado* (**Chapra [3]**) se calcula como:

$$S_{y/x} = \sqrt{\frac{S_r}{n - (m + 1)}}, \dots\dots\dots 1.73$$

y el *coeficiente de determinación* como:

$$r^2 = \frac{S_t - S_r}{S_t}. \dots\dots\dots 1.74$$

Donde S_t es la *suma total de los cuadrados alrededor de la media* (**Chapra [3]**) y está definida como:

$$S_t = (y_i - \bar{y})^2. \dots\dots\dots 1.75$$

1.8 Polinomios de ajuste

Los polinomios de ajuste son herramientas que, dado un conjunto de puntos, nos permiten encontrar una función del tipo polinomial que pase por tales puntos, este procedimiento es conocido como interpolación (**Ahmed [6]**), aquí se presentan dos métodos mediante los cuales es posible encontrar dichos polinomios interpoladores.

1.8.1 Polinomios de Lagrange

Los polinomios de Lagrange asociados a los puntos $x_i, i = 0, 1, \dots, n$, son los polinomios de grado n definidos por:

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n L_i(x)f(x_i), \dots\dots\dots 1.76$$

Donde:

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \left(\frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right), \dots\dots\dots 1.77$$

donde el polinomio L_i será de orden n , con igual número de raíces (**Ahmed [6]**).

1.8.2 Polinomios de Chebyshev

Para $n \in \mathbb{N}$, se define:

$$T_n(x) = \cos(n \cos^{-1} x). \dots\dots\dots 1.78$$

Para el intervalo $[-1,1]$. Se tiene entonces que:

$$T_0(x) = 1, \dots\dots\dots 1.79$$

$$T_1(x) = x, \dots\dots\dots 1.80$$

y para $n \geq 1$, la función $T_n(x)$ satisface la relación inductiva (**Ahmed [6]**):

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \dots\dots\dots 1.81$$

Referencias

1. Larson, R. and Edwards, B. (2010). *Calculus*. 9th ed. Belmont, CA.: Cengage Learning
2. Ertekin, T., Abou-Kassem, J. and King, G. (2009). *Basic applied reservoir simulation*. 1st ed. Richardson, TX: Henry L. Doherty Memorial Fund of AIME, Society of Petroleum Engineers.
3. Chapra, S. and Canale, R. (2015). *Numerical methods for engineers*. 5th ed. New York: McGraw-Hill Education.
4. Carnahan, B., Luther, H. and Wilkes, J. (1990). *Applied numerical methods*. 1st ed. Malabar, Fla.: Krieger.
5. Abramowitz, M. and Stegun, I. (1965). *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables, edited by Milton Abramowitz and Irene A. Stegun*. 3rd print., with corr. 9th ed. Washington: U.S. Govt. Print. Off.
6. Ould Khaoua, A. (2010). *Análisis numérico avanzado* (1st ed.).

Tema 2 Flujo de fluidos en medios porosos

Para abordar los problemas de flujo de fluidos en el medio poroso es necesario obtener una ecuación que modele tal flujo y para ello se requiere conocer ciertas expresiones que nos ayudarán en el proceso, tales expresiones son:

1. Ecuación de continuidad: modela el flujo de materia dentro del medio poroso.
2. Ecuación de transporte: modela como se transmite la cantidad de movimiento en un sistema.
3. Ecuaciones constitutivas: expresiones auxiliares que representan el comportamiento de variables específicas.

2.1 Ecuación de continuidad

La formulación matemática de este principio se lleva a cabo sobre el flujo a través de una superficie cerrada arbitraria, S , de medio poroso, que encierra un volumen material V , **Figura 2. 1**. El principio de conservación de la masa requiere que la diferencia entre las velocidades a las que el líquido ingresa y sale del volumen a través de su superficie debe ser igual a la velocidad a la que la masa se acumula dentro del volumen.

Dicho lo anterior se tiene entonces que la masa de fluido, M_f , encerrada dentro de la superficie, está dada por la siguiente expresión:

$$M_f = \iiint_V \rho\phi dV . \quad \dots\dots\dots 2.1$$

Ahora bien, la tasa de cambio de masa dentro de S , esta dada por:

$$\frac{dM_f}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_V \rho\phi dV = \iiint_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho\phi) dV . \quad \dots\dots\dots 2.2$$

Y por el principio de conservación de masa, esta relación debe ser igual a la tasa a la cual la masa atraviesa la superficie S .

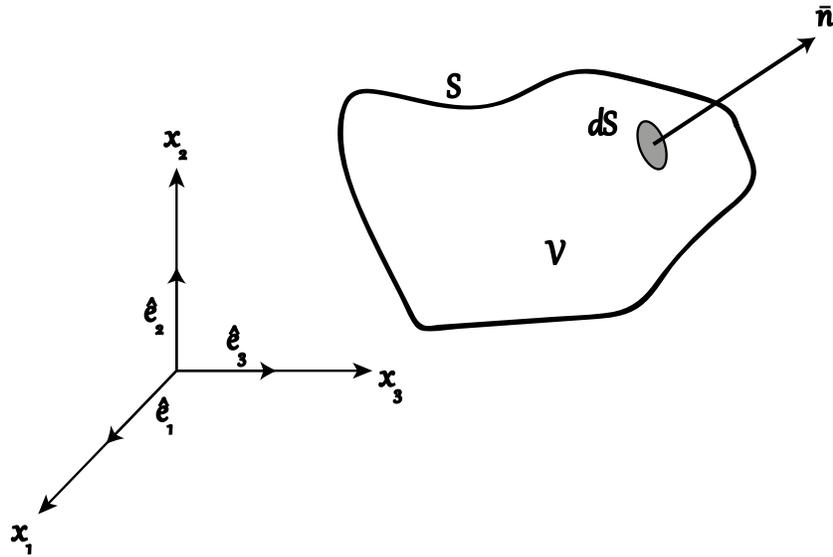


Figura 2. 1 Superficie arbitraria cerrada de medio poroso.

Considerando un diferencial de superficie, dS , la tasa a la cual el fluido a traviesa la superficie⁶, está dada por:

$$\frac{dM_f}{dt} = - \iint_S \rho \phi \bar{v} \cdot \bar{n} dS. \quad \dots\dots\dots 2.3$$

Dado el principio de conservación de masa, las **Ecs. 2.2** y **2.3**, son iguales:

$$\iiint_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho \phi) dV = - \iint_S \rho \phi \bar{v} \cdot \bar{n} dS, \quad \dots\dots\dots 2.4$$

⁶ Para un desarrollo más explícito de esta formulación véase el **Anexo B**.

y aplicando el Teorema de Divergencia o de Gauss al lado derecho de la **Ec. 2.4**:

$$\iiint_V \frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) dV = - \iiint_V \nabla \cdot (\rho\phi\vec{v}) dV$$

$$\iiint_V \left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \nabla \cdot (\rho\phi\vec{v}) \right] dV = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \nabla \cdot (\rho\phi\vec{v}) = 0 . \quad \dots\dots\dots 2.5$$

De la **Ec. 2.5** se observa que el producto $\vec{v}\phi$ representa la velocidad de flujo \vec{v} , que representa la velocidad media de flujo a través de la garganta de los poros. De esta manera se llega a

$$\frac{\partial\rho\phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{v}\rho) = 0 , \quad \dots\dots\dots 2.6$$

que es la ecuación de continuidad, en forma general para cualquier geometría de flujo. En el **Anexo C** se desarrolla la ecuación de continuidad para las geometrías de flujo lineal, radial y esférico. Cabe señalar que para utilizar esta expresión es necesario describir cada uno de los términos que le constituyen.

2.2 Ecuaciones constitutivas

Existen diferentes tipos expresiones constitutivas que describen el estado de un sistema a condiciones de presión y temperatura de interés. Algunos modelos útiles se presentan a continuación, considerando:

1. La compresibilidad de los fluidos.
2. La compresibilidad del volumen poroso de una formación.
3. Las fuerzas intermoleculares de los fluidos.
4. La reología de los fluidos.

2.2.1 Compresibilidad de los fluidos

La compresibilidad isotérmica, en general, se define como el cambio de volumen que sufre un volumen unitario por unidad de variación de presión (**Garaicochea [1]**):

$$c = \frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial p} \cdot \dots\dots\dots 2.7$$

Y para un fluido su compresibilidad c_F puede definirse en términos de su densidad, como sigue:

$$c_F = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p} \cdot \dots\dots\dots 2.8$$

2.2.2 Compresibilidad del volumen poroso de una formación

Es definida de igual manera que la compresibilidad, con la particularidad de que esta representa el cambio en las partículas contenidas en la matriz rocosa de la formación, y se define como el cambio en el volumen poroso unitario por unidad de cambio en la presión (**Garaicochea [1]**), es decir,

$$c_f = \frac{1}{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial p} \cdot \dots\dots\dots 2.9$$

2.2.3 Clasificación de los fluidos de acuerdo con su compresibilidad

El cambio en el volumen del fluido está estrechamente relacionado con los cambios en su densidad, esto es, dada la definición de la densidad. Por lo anterior, los fluidos pueden caracterizarse de acuerdo con el comportamiento de su densidad ρ con respecto de la presión p , como:

Fluido incompresible: al no variar el volumen total del fluido y mantener la masa constante, la densidad de fluido no varía con los cambios de la presión, p , que existen en el sistema, y se tiene que:

$$\frac{\partial \rho}{\partial p} = 0, \dots\dots\dots 2.10$$

este es el caso de un fluido ideal.

Fluido ligeramente compresible de compresibilidad constante: en este caso la densidad de los fluidos cambia en forma lineal con la presión, y se cumple que:

$$\frac{\partial \rho}{\partial p} = cte, \dots\dots\dots 2.11$$

este comportamiento es característico de sistemas que sufren variaciones pequeñas respecto a los cambios que ocurren de presión, P.E. el agua o el aceite bajo-saturado.

Fluido compresible: el comportamiento de estos no mantiene una pendiente constante, y representa el caso general de cualquier sistema de fluidos. De esta manera, la densidad respecto de la presión es:

$$\frac{\partial \rho}{\partial p} \neq cte, \dots\dots\dots 2.12$$

ejemplos de estos fluidos son los gases y el aceite saturado. Para el primero se tiene que la densidad es, $\rho = pM/zRT$ y derivando respecto a p :

$$\frac{\partial \rho}{\partial p} = \frac{M}{RT} \left(\frac{1}{Z} + \frac{p}{Z^2} \frac{\partial Z}{\partial p} \right). \dots\dots\dots 2.13$$

donde M es el peso molecular del gas, R la constante universal de los gases, T la temperatura del medio y Z el factor de desviación del gas a dichas condiciones.

Por otro lado, para líquidos con gas en solución, pueden utilizarse modelos de ecuaciones de estado, como correlaciones, para obtener el cambio en su densidad respecto de la presión.

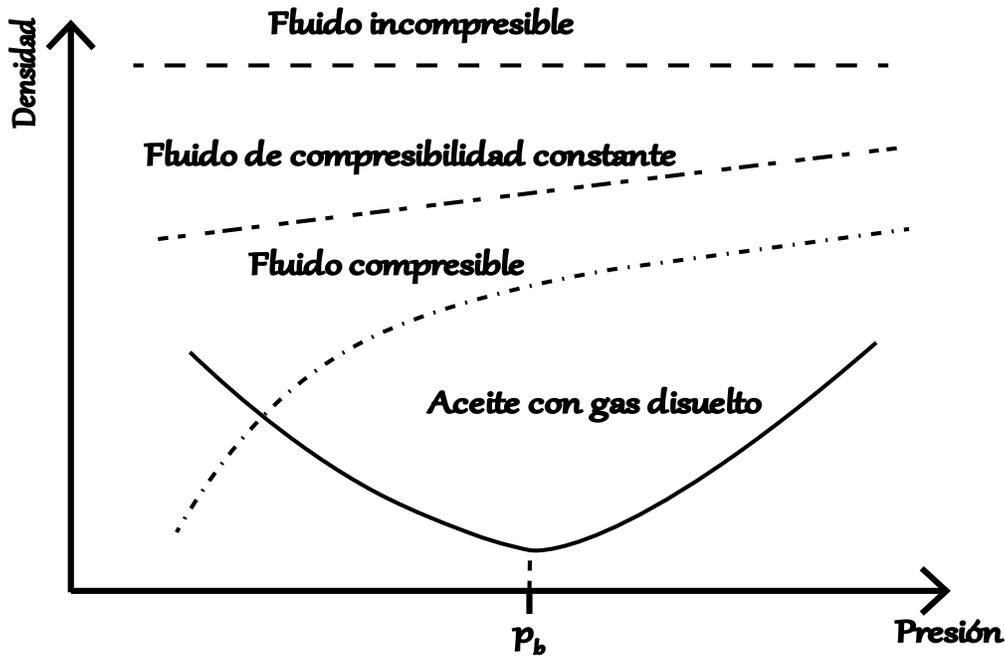


Figura 2. 2 Comportamiento de la densidad de diferentes fluidos

2.2.4 Reología de los fluidos

El término reología, inventado por el profesor Bingham de la Lafayette College, Indiana y aceptado por la Sociedad Americana de Reología en 1929, es definido como la rama de la física de medios continuos que se dedica al estudio de la deformación y el fluir de la materia (**Barnes [2]**). Su objetivo principal recae en la observación del comportamiento de los materiales sometidos a deformaciones, para posteriormente obtener el modelo matemático que permita describir sus parámetros reológicos. Dentro de los parámetros reológicos importantes se encuentran:

Tema 2 Flujo de fluidos en medios porosos

1. Viscosidad (μ): Definida como la resistencia del fluido a sufrir una deformación en presencia de esfuerzos cortantes.
2. Esfuerzo de cortante (τ): es la componente tangencial de una fuerza que actúa sobre una superficie, por unidad de área.
3. Razón de deformación ($\dot{\gamma}$): Gradiente de la velocidad de flujo en la dirección perpendicular a la velocidad. Por ende, si la velocidad v (la componente x) del flujo que fluye en la misma dirección x varía en y , la razón de corte es du/dy .

De acuerdo con si estos parámetros varían o no con el tiempo se pueden clasificar a los fluidos en dos grandes grupos:

2.2.4.1 Fluidos independientes del tiempo

Para los cuales la razón de deformación en un punto dado depende únicamente del esfuerzo instantáneo en ese momento. Además, las propiedades viscosas de un fluido se determinan de acuerdo con el grado de correspondencia entre el esfuerzo cortante ejercido (τ) y la velocidad corte ($\dot{\gamma}$) del material. Dentro de estos están:

Fluidos Newtonianos

Los fluidos newtonianos se definen como aquellos que muestran una proporcionalidad directa entre el esfuerzo y la velocidad de corte, esto es:

$$\tau = \mu \dot{\gamma}, \quad \dots\dots\dots 2.14$$

donde μ es la viscosidad dinámica. En general, los fluidos para los cuales la **Ec. 2.14** no se cumple, se conocen como no newtonianos.

Modelos de ley de potencia

La ley de potencia de Ostwald-de Waele es el modelo reológico más utilizado para problemas de flujo en medios porosos. Como se desarrolló originalmente, la ley de potencia se representa como:

$$\tau = H\dot{\gamma}^n, \dots\dots\dots 2.15$$

donde n es el índice de la ley de potencia; y H se llama coeficiente de consistencia. Para $n = 1$, el coeficiente de consistencia se convierte en la viscosidad dinámica. Cuando se compara con **Ec. 2. 14**, la ley de potencia conduce a la definición de la viscosidad aparente (μ_a):

$$\mu_a = H\dot{\gamma}^{n-1}. \dots\dots\dots 2.16$$

Modelo plástico de Bingham

El plástico Bingham es un tipo de fluido no newtoniano que posee una estructura interna que impide el movimiento para valores de esfuerzo de corte inferiores a un valor de cedencia (τ_y); y para $\tau > \tau_y$, la estructura interna colapsa por completo, lo que permite que se produzca un movimiento de corte. Una vez que el fluido comienza a fluir, exhibe una pseudo-viscosidad constante (μ_B). El modelo resultante para un plástico Bingham es:

$$\tau = \tau_y + \mu_B\dot{\gamma}. \dots\dots\dots 2.17$$

Modelo Herschel-Bulkley

El modelo de Herschel-Bulkley se desarrolló como una generalización para fluidos no newtonianos independientes del tiempo. Está dado por:

$$\tau = \tau_y + H\dot{\gamma}^{n-1}, \dots\dots\dots 2.18$$

donde τ_y es el límite elástico por encima del cual la sustancia comienza a fluir, H es el coeficiente de consistencia y n es el índice de comportamiento de flujo.

La **Figura 2. 3** muestra el comportamiento de los diferentes modelos de fluidos cuya reología es independiente del tiempo.

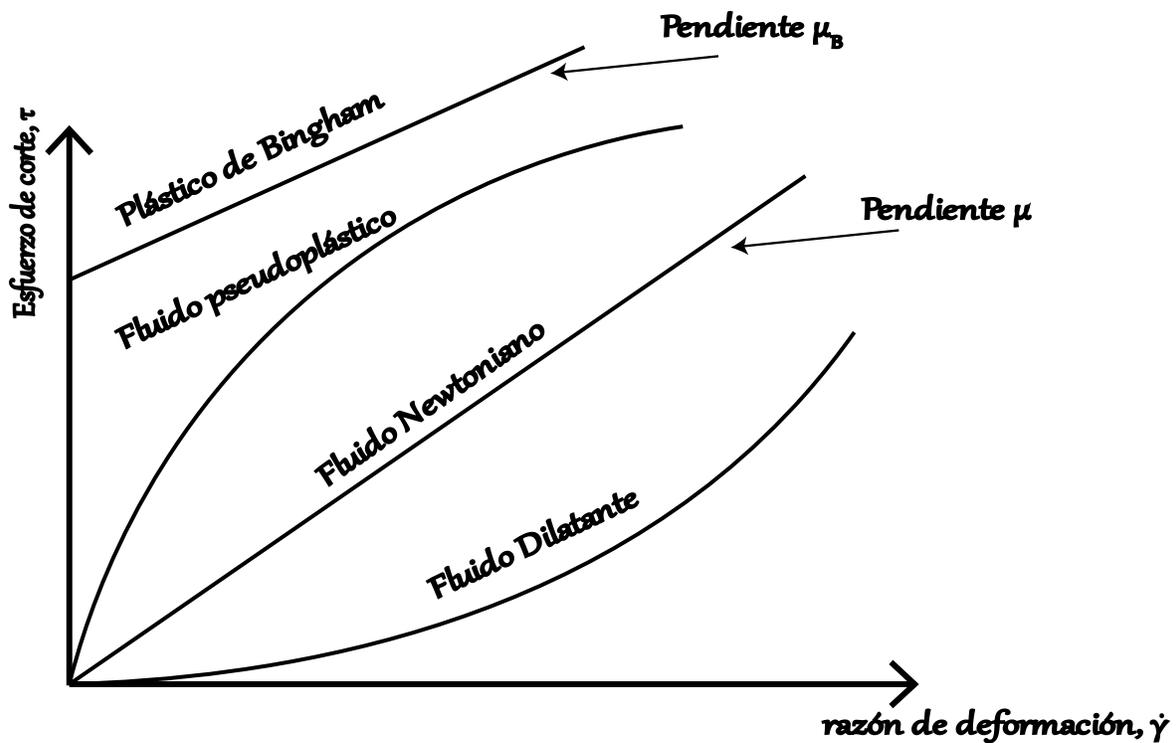


Figura 2. 3 Relaciones típicas de esfuerzo cortante y velocidad de corte para fluidos no newtonianos (después de Hughes y Brighton).

2.2.4.2 Fluidos dependientes del tiempo

Son aquellos para los cuales la tasa de deformación es una función tanto de la magnitud como de la duración del esfuerzo. Estos fluidos se clasifican como:

Tixotrópicos (work softening)

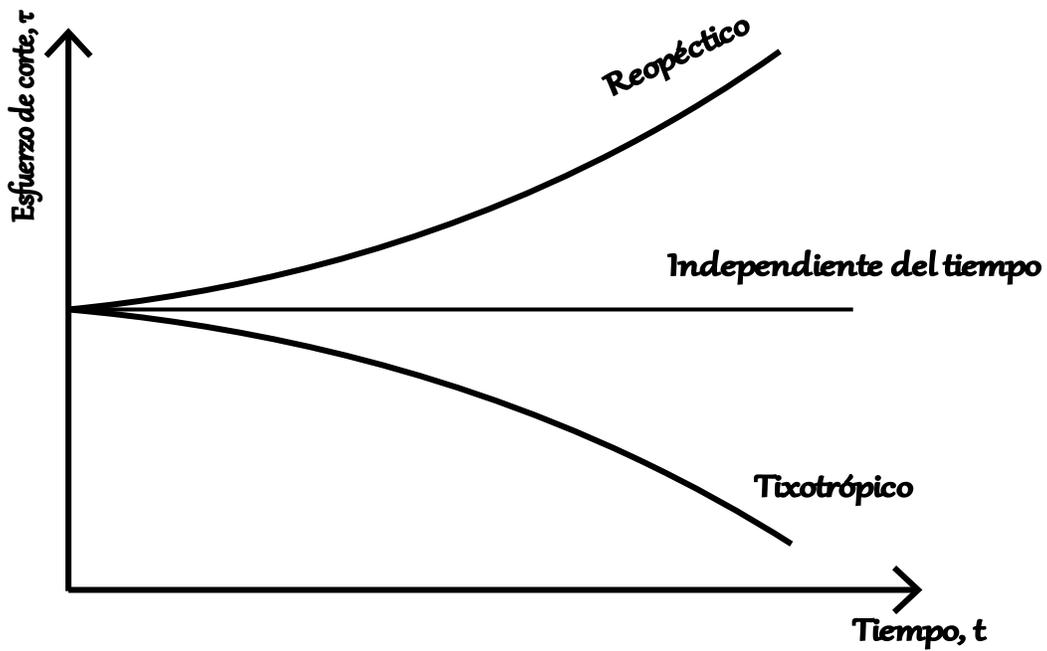
Al actuar una tensión tangencial a este fluido desde el estado de reposo, sufre un proceso, de fraccionamiento a escala molecular seguido de una reconstitución estructural a medida que transcurre el tiempo. Eventualmente y en ciertas circunstancias, se logra un estado de equilibrio donde el fraccionamiento molecular iguala a la reconstitución. Si la tensión tangencial cesa, el fluido se recupera lentamente y vuelve a adquirir su consistencia original en un proceso que se caracteriza por su reversibilidad.

Reopéticos (work hardening).

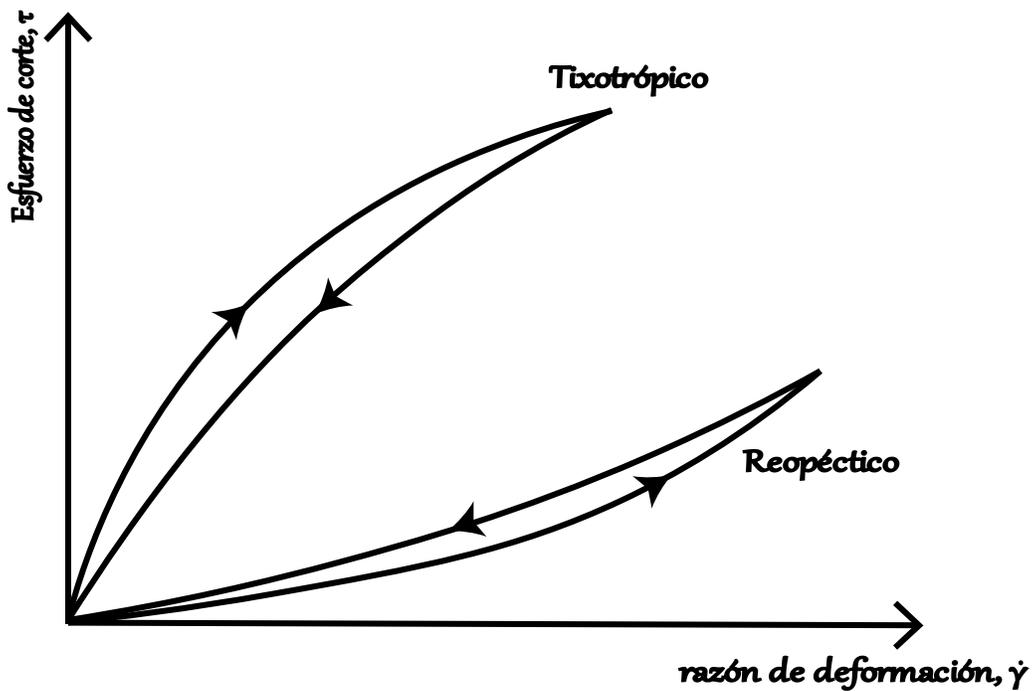
Los fluidos reopéticos se comportan en forma parecida a los tixotrópicos, pero en ellos la variable μ tiene un incremento con la velocidad de deformación similarmente a la de un fluido dilatante en su fase inicial de deformación hasta alcanzar un valor límite donde τ comienza a disminuir con $\dot{\gamma}$.

Fluidos viscoelásticos

Poseen propiedades tanto de fluidos como de sólidos elásticos, que muestran una recuperación elástica tras la eliminación de un esfuerzo deformante; y el estudio de su comportamiento reológico requiere la inclusión de las derivadas temporales del esfuerzo cortante y la velocidad de deformación.



a) Comportamiento de los fluidos no newtonianos bajo el efecto de un esfuerzo de corte



b) Comportamiento de fluidos no newtonianos dependientes del periodo de corte

Figura 2. 4 Curvas de flujo para fluidos no newtonianos tixotrópicos y reopécticos dependientes del tiempo (después de Bear y Skelland).

2.2.5 Ecuación de transporte

Son aquellas que nos permiten modelar la cantidad de movimiento que se transmiten entre las moléculas de un fluido. De acuerdo con el modelo reológico utilizado, se pueden obtener diversas ecuaciones de transporte.

Antes de presentar las ecuaciones de transporte, se tiene que entender el experimento de Darcy en el que se hace pasar un gasto q de un fluido a través de un medio poroso de longitud L , área transversal A y en el cual se observa un diferencial de presión, Δp , entre la entrada y la salida, **Figura 2. 5**:

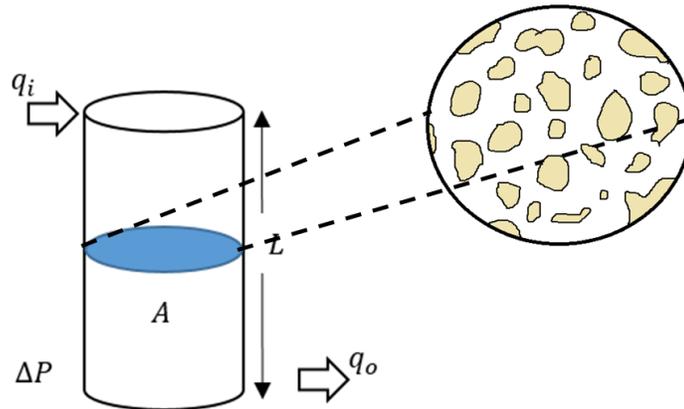


Figura 2. 5 Esquema del experimento de Darcy en un elemento poroso.

A partir de este experimento se puede definir a la velocidad de flujo como un promedio de las diferentes velocidades \vec{v} con las que el fluido atraviesa el medio poroso, que pueden ser altas, si el paso es a través de una garganta de poro estrecha, o bajas, si es en una de mayor tamaño. Además, Darcy observó que esta velocidad tenía cierta proporcionalidad con los parámetros del experimento, esto es:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{v} \propto \frac{\Delta p}{L} \\ \vec{v} \propto \mu_{eff} \\ \vec{v} \propto k \end{array} \right. \dots\dots\dots 2.19$$

2.2.5.1 Ecuación de Darcy

Una expresión muy completa de la ley de Darcy es presentada por (Rodríguez [3]). En la cual se tiene que la suma de todas las fuerzas que actúan sobre el elemento dV da una resultante \vec{F}_R , a la cual se opone (y es igual) a la fuerza de inercia. Como ésta es muy pequeña, en la mayor parte de los casos de flujo de fluidos en medios porosos, (el flujo en régimen laminar) entonces se puede despreciar, resultando así la siguiente aproximación:

$$\left(-\nabla p + \vec{k}(\rho_1 - \rho_2)g - \frac{\mu}{k} \vec{v} + \frac{2\vec{\sigma} \cos\theta}{rh} \right) dV = \vec{0}. \dots\dots\dots 2.20$$

De donde:

$$\vec{v} = -\frac{k}{\mu} \left[\nabla p - \vec{k}(\rho_1 - \rho_2)g - \frac{2\vec{\sigma} \cos\theta}{rh} \right]. \dots\dots\dots 2.21$$

Los últimos dos términos representan los efectos gravitacionales y capilares, respectivamente, sobre la velocidad del fluido. En general, una expresión más utilizada de esta Ley es presentada por Hubbert:

$$\vec{v} = -\frac{k}{\mu} [\nabla p - \vec{k}(\rho_1 - \rho_2)g] = -\frac{k}{\mu} \nabla \Phi, \dots\dots\dots 2.22$$

donde Φ es el potencial de flujo del fluido.

2.2.5.2 Ecuación para ley de potencia

La **Ec. 2. 16** se utiliza para desarrollar una ecuación de transporte de tipo Darcy para fluidos de ley de potencia (**Gallardo [4]**). Por lo tanto, despreciando los efectos de la gravedad, la expresión resultante es:

$$u^n = -\frac{k}{\mu_{eff}} \nabla p, \dots\dots\dots 2.23$$

donde μ_{eff} es una viscosidad efectiva dada por:

$$\mu_{eff} = \frac{H}{12} (9 + 3/n)^n (150k\phi)^{(1-n)/2}, \dots\dots\dots 2.24$$

Y ∇p es el gradiente de presión.

2.2.5.3 Ecuación para plástico de Bingham

Al igual que con los fluidos de ley de potencia, una ecuación de transporte se formula como (**Gallardo [4]**):

$$u = \begin{cases} -\frac{k}{\mu_B} \left(1 - \frac{G}{|\nabla p|}\right) \nabla p & \text{para } |\nabla p| > G, \\ 0 & \text{para } |\nabla p| \leq G. \end{cases} \dots\dots\dots 2.25$$

Donde el parámetro G representa el gradiente de presión mínimo requerido para iniciar el flujo, y se define como:

$$G = \frac{\tau_y}{d}. \dots\dots\dots 2.26$$

siendo d el tamaño de poro característico del medio poroso.

2.2.5.4 Ecuación para Herschel-Bulkley

La ecuación de transporte correspondiente es (**Gallardo [4]**):

$$u = \begin{cases} \left(-\frac{k}{\mu_{eff}} \nabla p\right)^{\frac{1}{n}} \left[1 - \alpha \frac{G}{|\nabla p|}\right] & \text{for } |\nabla p| > G, \\ 0 & \text{for } |\nabla p| \leq G, \end{cases} \dots\dots\dots 2.27$$

donde μ_{eff} es:

$$\mu_{eff} = 2H(1/n + 3)^n k^{1-n} r^{n-1}, \dots\dots\dots 2.28$$

y α :

$$\alpha = \frac{n + 4 + 1/n}{1 + 3n + 2n^2}. \dots\dots\dots 2.29$$

2.3 Ecuación de difusividad

Haciendo uso de las tres ecuaciones anteriores se puede llegar a una ecuación que modela el flujo de fluidos en el medio poroso, así, dependiendo de la naturaleza del fluido se tendrán tres casos:

2.3.1 Ecuación de difusividad para fluidos incompresibles

Partiendo de las **Ecs. 2. 6, 2. 22**, y sustituyendo 2. 22 en 2. 6 se tendrá que:

$$\frac{\partial \rho \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\left(-\frac{k}{\mu} \Phi\right) \rho \right) = 0, \dots\dots\dots 2.30$$

que para flujo monofásico incompresible pueden hacer algunas consideraciones que ayudan a simplificar el desarrollo de la ecuación de difusividad, tales como:

- Los términos capilares y gravitacionales de la ecuación de Darcy pueden considerarse despreciables.
- La densidad y viscosidad del fluido pueden tomarse como constantes, con lo que:

$$\frac{\partial \rho \phi}{\partial t} = \rho \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \left(\rho \frac{k}{\mu} \nabla p \right) = \rho \frac{k}{\mu} \nabla \cdot (\nabla p)$$

- El medio es homogéneo e isótropo respecto de la permeabilidad.

De acuerdo con las consideraciones anteriores, la **Ec. 2. 30** se reduce a:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{k}{\mu} \nabla \cdot (\nabla p) = 0, \quad \dots\dots\dots 2.31$$

y aplicando la regla de la cadena al primer término para la presión, como sigue:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial p}{\partial p} = \frac{\partial \phi}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t}$$

la **Ec. 2. 31** puede reescribirse como:

$$\frac{\partial \phi}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{k}{\mu} \nabla^2 p = 0, \quad \dots\dots\dots 2.32$$

donde ∇^2 es el laplaciano de la función p .

Multiplicando y dividiendo el primer término por ϕ :

$$\phi \left(\frac{1}{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial p} \right) \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{k}{\mu} \nabla^2 p = 0, \quad \dots\dots\dots 2.33$$

que, en términos de la compresibilidad de la formación, c_f , es:

$$\phi c_f \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{k}{\mu} \nabla^2 p = 0, \quad \dots\dots\dots 2.34$$

multiplicando toda la ecuación anterior, por μ/k :

$$\frac{\mu \phi c_f}{k} \frac{\partial p}{\partial t} - \nabla^2 p = 0, \quad \dots\dots\dots 2.35$$

que, en términos del coeficiente de difusividad hidráulica, $\eta = k/\mu\phi c_f$, la ecuación resultante es la ecuación de difusividad para fluidos incompresibles:

$$\frac{1}{\eta} \frac{\partial p}{\partial t} - \nabla^2 p = 0, \quad \dots\dots\dots 2.36$$

2.3.2 Ecuación de difusividad para fluidos ligeramente compresibles

Partiendo de la **Ec. 2.30** se tendrá que:

$$\frac{\partial \rho \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\left(-\frac{k}{\mu} \Phi \right) \rho \right) = 0. \quad \dots\dots\dots 2.37$$

Las consideraciones que se harán son las siguientes:

- La viscosidad se mantiene constante a lo largo de la vida productiva del yacimiento.
- El yacimiento es homogéneo e isotrópico respecto de la permeabilidad.

- Los efectos gravitacionales y viscosos son despreciables.

En este caso la densidad del fluido varía conforme la presión varía, por lo cual este término no puede considerarse constante, la **Ec. 2.37** puede simplificarse como:

$$\frac{\partial \rho \phi}{\partial t} - \frac{k}{\mu} \nabla \cdot (\rho \nabla p) = 0, \quad \dots\dots\dots 2.38$$

expandiendo la ecuación anterior:

$$\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \phi \frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{k}{\mu} [\nabla \rho \nabla p + \rho \nabla^2 p] = 0, \quad \dots\dots\dots 2.39$$

factorizando $\rho \phi$ de los dos primeros términos, y ρ del tercero:

$$\rho \phi \left(\frac{1}{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) - \rho \frac{k}{\mu} \left[\frac{1}{\rho} \nabla \rho \nabla p + \nabla^2 p \right] = 0, \quad \dots\dots\dots 2.40$$

a partir de aquí es conveniente encontrar una expresión que relaciona la densidad y la porosidad con la presión, para poder incluir las expresiones de la compresibilidad, por ello se aplica la regla de la cadena a los siguientes términos:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial \rho}{\partial p} = \frac{\partial \phi}{\partial p} \frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} \frac{\partial p}{\partial p} = \frac{\partial \rho}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t}, \quad \nabla \rho \frac{\partial p}{\partial p} = \nabla p \frac{\partial \rho}{\partial p}$$

de acuerdo con lo anterior, y simplificando términos, la **Ec. 2.40**, resulta en:

$$\phi \left(\frac{1}{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial p} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} \right) - \frac{k}{\mu} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p} \nabla p \nabla p + \nabla^2 p \right] = 0. \quad \dots\dots\dots 2.41$$

Ahora bien, factorizando $\partial p / \partial t$ del primer término:

$$\phi \left(\frac{1}{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial p} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p} \right) \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{k}{\mu} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p} (\nabla p)^2 + \nabla^2 p \right] = 0, \quad \dots\dots\dots 2.42$$

Tema 2 Flujo de fluidos en medios porosos

y recordando la definición de c_f y c_F , se tiene:

$$\phi(c_f + c_F) \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{k}{\mu} [c_F(\nabla p)^2 + \nabla^2 p] = 0, \quad \dots\dots\dots 2.43$$

el producto $c_F(\nabla p)^2$, puede despreciarse ya que la compresibilidad resulta ser un número de orden pequeño, la cual multiplicada por el gradiente de presión al cuadrado, $(\nabla p)^2$, resulta ser aún más pequeña en comparación con el laplaciano de p , $\nabla^2 p$, por lo cual la **Ec. 2.43** se reescribe como:

$$\phi(c_f + c_F) \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{k}{\mu} \nabla^2 p = 0, \quad \dots\dots\dots 2.44$$

y en términos de la compresibilidad total, $c_t = c_f + c_F$:

$$\phi c_t \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{k}{\mu} \nabla^2 p = 0. \quad \dots\dots\dots 2.45$$

Multiplicando toda la ecuación por μ/k :

$$\frac{\mu \phi c_t}{k} \frac{\partial p}{\partial t} - \nabla^2 p = 0, \quad \dots\dots\dots 2.46$$

que, en términos de la difusividad hidráulica, resulta en la ecuación de difusividad para fluidos ligeramente compresibles de compresibilidad constante:

$$\frac{1}{\eta} \frac{\partial p}{\partial t} - \nabla^2 p = 0. \quad \dots\dots\dots 2.47$$

2.3.3 Ecuación de difusividad para fluidos compresibles

En esta categoría, como se mencionó anteriormente, recaen aquellos fluidos que sufren un cambio drástico en su densidad conforme ocurren cambios en la presión, motivo por el cual, las consideraciones hechas anteriormente no son válidas. Dicho lo anterior, para el desarrollo de la ecuación de difusividad, antes es necesario, definir un concepto denominado pseudo-presión:

$$pseudo - presión = m(p) = \Psi = 2 \int_{p_0}^p \frac{\rho k}{\mu} dp. \quad \dots\dots\dots 2.48$$

Así, la **Ec. 2.30** una vez despreciado los efectos gravitacionales y viscosos, es:

$$\frac{\partial \rho \phi}{\partial t} - \nabla \cdot \left(\rho \frac{k}{\mu} \nabla p \right) = 0, \quad \dots\dots\dots 2.49$$

aplicando la regla de la cadena como se muestra:

$$\nabla p \frac{\partial \Psi}{\partial \Psi} = \nabla \Psi \frac{\partial p}{\partial \Psi}$$

se tendrá que la **Ec. 2.49**, puede reescribirse como:

$$\frac{\partial \rho \phi}{\partial t} - \nabla \cdot \left(\rho \frac{k}{\mu} \nabla \Psi \frac{\partial p}{\partial \Psi} \right) = 0 \quad \dots\dots\dots 2.50$$

donde la derivada de la pseudo-presión con respecto a p , es:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial p} \left(2 \int_{p_0}^p \frac{\rho k}{\mu} dp \right) = 2 \frac{\partial}{\partial p} \left(\int_{p_0}^p \frac{\rho k}{\mu} dp \right) = 2 \left(\frac{\rho k}{\mu} \right)$$

y, por ende:

$$\frac{\partial p}{\partial \Psi} = \frac{\mu}{2\rho k}$$

Tema 2 Flujo de fluidos en medios porosos

substituyendo en la **Ec. 2. 50**:

$$\frac{\partial \rho \phi}{\partial t} - \nabla \cdot \left(\rho \frac{k}{\mu} \nabla \Psi \left(\frac{\mu}{2\rho k} \right) \right) = 0, \quad \dots\dots\dots 2.51$$

simplificando:

$$\frac{\partial \rho \phi}{\partial t} - \frac{1}{2} \nabla^2 \Psi = 0. \quad \dots\dots\dots 2.52$$

Ahora bien, si se expande el primer término y haciendo las operaciones necesarias, tales como en el caso de los fluidos ligeramente compresibles, se llega a:

$$\rho \phi c_t \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{1}{2} \nabla^2 \Psi = 0, \quad \dots\dots\dots 2.53$$

a la cual puede aplicarse el siguiente cambio de variable:

$$\frac{\partial p}{\partial t} \frac{\partial \Psi}{\partial p} = \frac{\partial \Psi}{\partial t} \frac{\partial p}{\partial \Psi} = \frac{\partial \Psi}{\partial t} \left(\frac{\mu}{2\rho k} \right)$$

substituyendo en la **Ec. 2. 53**:

$$\rho \phi c_t \frac{\partial \Psi}{\partial t} \left(\frac{\mu}{2\rho k} \right) - \frac{1}{2} \nabla^2 \Psi = 0, \quad \dots\dots\dots 2.54$$

y simplificando:

$$\frac{\mu \phi c_t}{k} \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \nabla^2 \Psi = 0, \quad \dots\dots\dots 2.55$$

que, en términos de la difusividad hidráulica, η , se obtiene:

$$\frac{1}{\eta} \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \nabla^2 \Psi = 0, \dots\dots\dots 2.56$$

que es la ecuación de difusividad para un fluido compresible. En la **Tabla 2. 1**, se presentan las diferentes formas de la pseudo-presión de acuerdo con el fluido estudiado, respectivamente. La divergencia y el laplaciano de una función, F , sea presión o pseudo-presión, se presenta en la **Tabla 2. 2**.

Tabla 2. 1 Definiciones de la pseudo-presión para diferentes fluidos.

Variable	Definición	Ec.
Pseudo-presión	$\Psi = 2 \int_{p_0}^p \frac{k\rho}{\mu} dp = 2\rho_e \int_{p_0}^p \frac{k}{B\mu} dp$	2.57
Pseudo-presión para sistemas de gas*	$\Psi = 2 \int_{p_0}^p \frac{k\rho}{\mu Z} dp$	2.58
Pseudo-presión en sistemas donde k no depende de p	$\Psi = 2 \int_{p_0}^p \frac{\rho}{\mu} dp = 2\rho_e \int_{p_0}^p \frac{dp}{B\mu}$	2.59
Pseudo-presión en sistemas de gas donde k no depende de p^*	$\Psi = 2 \int_{p_0}^p \frac{p}{\mu Z} dp$	2.60

*La definición de ψ para sistemas de gas se obtuvo al incluir la ecuación de los gases reales ($pV = ZnRT$).

Tabla 2. 2 Definiciones de los operadores divergencia y Laplaciano en diferentes geométricas de flujo (Modificado de Bird et al., 1960)⁷.

Tres dimensiones	Una dimensión
Coordenadas Rectangulares	
$(\nabla \cdot \mathbf{F}) = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$ $(\nabla^2 F) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}$	$(\nabla \cdot \mathbf{F}) = \frac{\partial F_x}{\partial x}$ $(\nabla^2 F) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$
Coordenadas Cilíndricas	
$(\nabla \cdot \mathbf{F}) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r F_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$ $(\nabla^2 F) = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(r \frac{\partial F}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}$	$(\nabla \cdot \mathbf{F}) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r F_r)$ $(\nabla^2 F) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial F}{\partial r} \right)$
Coordenadas Esféricas	
$(\nabla \cdot \mathbf{F}) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 F_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta F_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial F_\sigma}{\partial \sigma}$ $(\nabla^2 F) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial F}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial F}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 F_\sigma}{\partial \sigma^2}$	$(\nabla \cdot \mathbf{F}) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 F_r)$ $(\nabla^2 F) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial F}{\partial r} \right)$
Coordenadas Ortogonales Generales⁸	
$(\nabla \cdot \mathbf{F}) = \frac{1}{a_{x_1} a_{x_2} a_{x_3}} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} (a_{x_2} a_{x_3} R_{x_1}) + \frac{\partial}{\partial x_2} (a_{x_1} a_{x_3} R_{x_2}) + \frac{\partial}{\partial x_3} (a_{x_1} a_{x_2} R_{x_3}) \right]$ $(\nabla^2 F) = \frac{1}{a_{x_1} a_{x_2} a_{x_3}} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{a_{x_2} a_{x_3}}{a_{x_1}} \frac{\partial F}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{a_{x_1} a_{x_3}}{a_{x_2}} \frac{\partial F}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{a_{x_1} a_{x_2}}{a_{x_3}} \frac{\partial F}{\partial x_3} \right) \right]$	

⁷ Donde \mathbf{F} es una función vectorial y F es una función escalar

⁸ Donde a_{x_1} , a_{x_2} y a_{x_3} son los factores de escalamiento

2.4 Forma General de las ecuaciones de Flujo monofásico

Como las Ecs. 2.36, 2.47 y 2.56 poseen la misma forma y características (ecuaciones homogéneas parabólicas de segundo grado), estas pueden generalizarse en términos de la variable de análisis Y y el coeficiente ω como:

$$\nabla^2 Y = \frac{1}{\omega} \frac{\partial Y}{\partial t}, \dots\dots\dots 2.61$$

donde Y representa a la presión o la pseudo-presión y ω al coeficiente de difusividad correspondiente, de acuerdo con el modelo utilizado.

2.5 Geometrías de flujo

Los diversos modelos desarrollados para describir el avance de la onda de presión en el yacimiento dependen de la configuración del pozo y las fronteras existentes. Considerando que el movimiento de los fluidos ocurre en forma perpendicular a las isobaras que se forman en el medio poroso, en esta sección se describen los modelos de flujo en geometrías de expansión lineal, radial y esférico, así como el caso del flujo pseudo-estacionario.

2.5.1 Flujo lineal

Este modelo puede ser utilizado cuando la sección drenada asemeja un canal alargado, el potencial cambia en dirección a x y las líneas de flujo son paralelas entre sí, habiendo simetría respecto a los ejes y y z , **Figura 2. 6.**

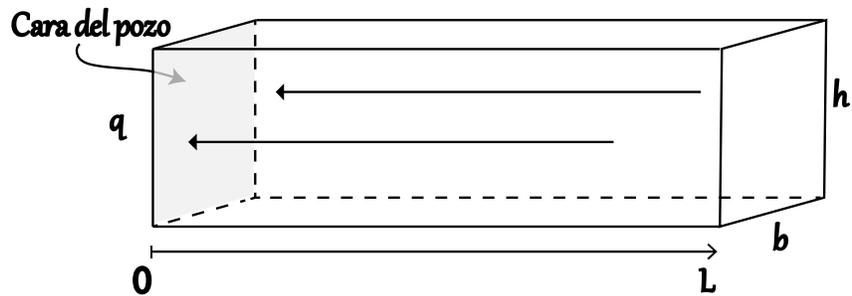


Figura 2. 6 Esquematación de la geometría de flujo lineal.

Algunas aplicaciones del modelo de flujo lineal sirven para describir: pozos hidráulicamente fracturados de conductividad infinita, canales alargados, pozos horizontales, acuíferos con un empuje lateral, y yacimientos naturalmente fracturados.

2.5.2 Flujo Radial

El modelo más común de flujo en un yacimiento corresponde al radial, donde las líneas de corriente convergen a una sección cilíndrica dentro del yacimiento, por lo que hay simetría respecto a los ejes θ y z , **Figura 2. 7.**

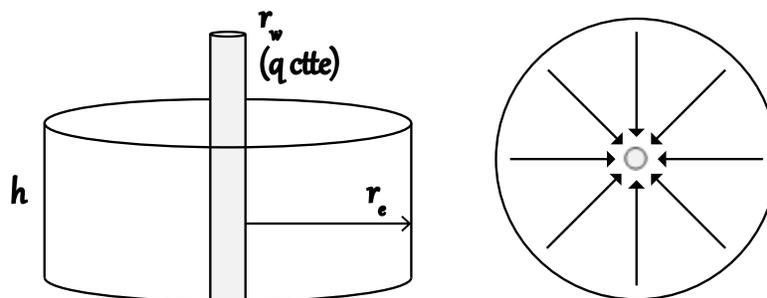


Figura 2. 7 Esquematación de la geometría de flujo radial.

2.5.3 Flujo esférico

Este modelo ocurre al superponer dos componentes radiales, uno vertical y otro horizontal, que convergen a un mismo origen, **Figura 2. 8**.

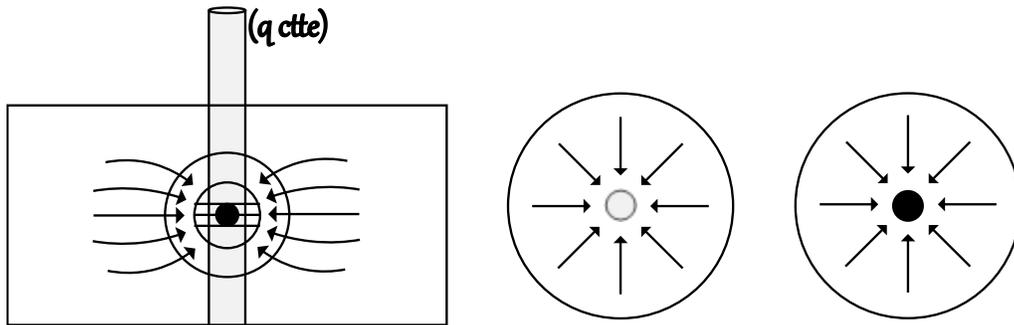


Figura 2. 8 Esquematación de la geometría de flujo esférico.

2.6 Estados de flujo en el yacimiento

Los estados de flujo en el yacimiento se pueden dividir en dos tipos, de acuerdo con la influencia de las fronteras del yacimiento sobre el mismo, en:

- i) Flujo gobernado por las fronteras
- ii) Flujo no gobernado por las fronteras

2.6.1 Flujo gobernado por las fronteras

Este tipo de yacimientos son aquellos en los cuales la onda de presión, causada por la producción de los pozos, ha viajado por todo el yacimiento y ya ha conocido las fronteras de este, una vez que ha sucedido esto, pueden ocurrir dos cosas: (1) que la frontera sea de no flujo y por tanto exista una caída de presión a lo largo del yacimiento o (2) que exista una frontera permeable con mantenimiento de presión. De acuerdo con lo anterior, dentro de los yacimientos gobernados por las fronteras, podemos reconocer dos casos particulares:

Estado Estacionario

Este estado de flujo es característico de los yacimientos en los cuales existe un mantenimiento de presión, esto debido a un acuífero asociado y una frontera que permite que los fluidos de este ingresen al yacimiento, o por la inyección de fluidos de manera artificial al yacimiento La representación de este estado se muestra en la **Figura 2. 9**. Lo que en términos de la presión es:

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = 0. \dots\dots\dots 2. 62$$

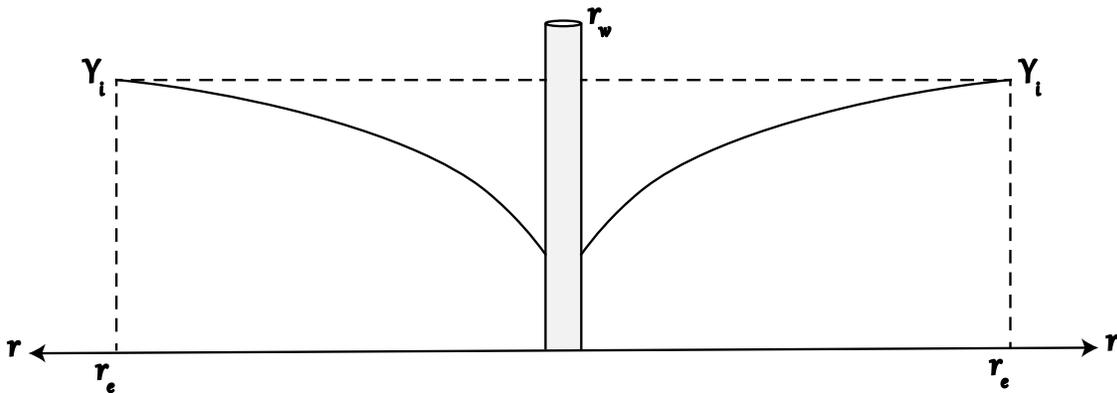


Figura 2. 9 Representación del estado estacionario en un yacimiento radial.

Estado pseudo-estacionario

En este caso podemos encontrar aquellos yacimientos que en sus fronteras no existe flujo, ya sea porque no exista un acuífero asociado o porque la frontera sea impermeable, de tal manera que una vez que la onda de presión, generada por la explotación del yacimiento, alcance las fronteras, ocurrirá un abatimiento de presión, **Figura 2. 10**. En estos yacimientos, el comportamiento de la presión respecto al tiempo será:

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = \text{constante} . \dots\dots\dots 2.63$$

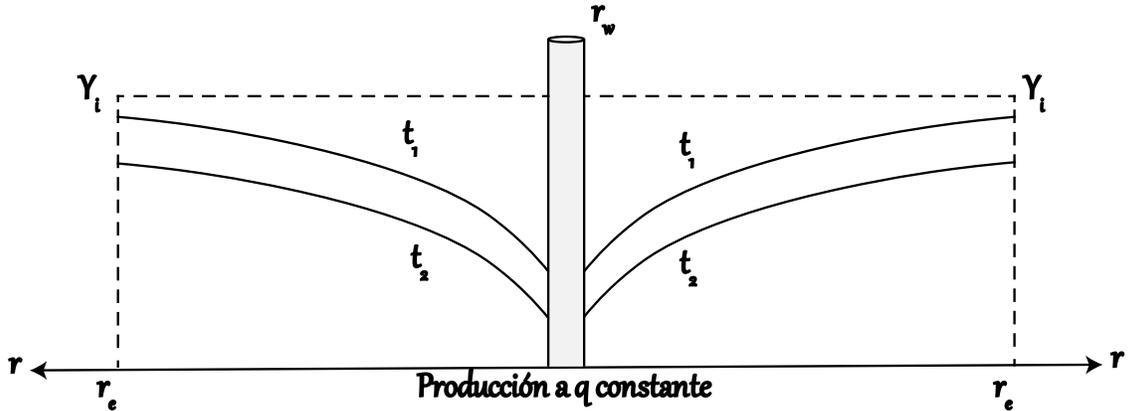


Figura 2. 10 Representación del estado pseudo-estacionario en un yacimiento radial.

2.6.2 Flujo no gobernado por las fronteras o transitorio

Es el caso de cualquier tipo de yacimientos, sea volumétrico o no, pero en este estado de flujo, se considera que la onda de presión aún no reconoce las fronteras, por lo que el yacimiento se comporta como un yacimiento infinito.

En la **Figura 2. 11** se muestra el avance del frente de presión cuando a) se mantiene constante la presión de fondo del pozo (p_w), y en b) cuando se mantiene el gasto constante. El comportamiento de la presión respecto al tiempo para este estado de flujo será variable y será una función del tiempo y en qué punto del yacimiento nos encontremos:

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = \text{variable} . \dots\dots\dots 2.64$$

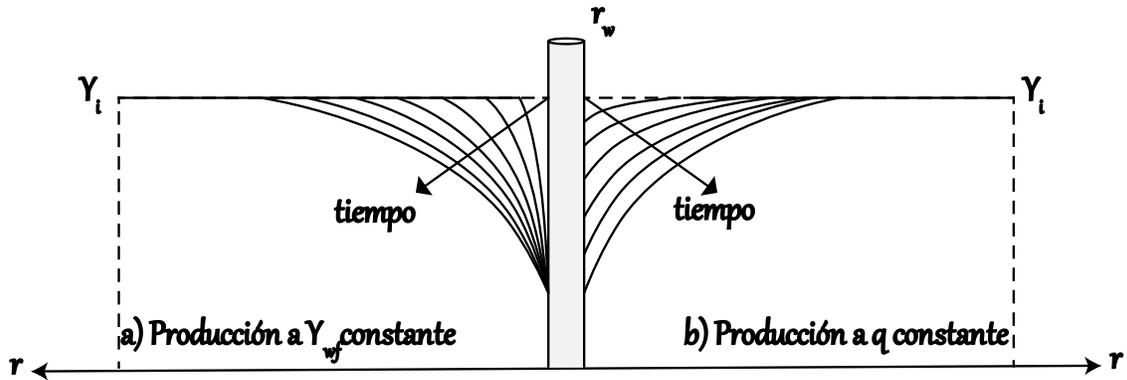


Figura 2. 11 Representación del estado transitorio en un yacimiento radial que produce con un pozo a condiciones de a) gasto constante, y b) presión de fondo fluyente constante.

2.7 Condiciones necesarias para plantear y solucionar problemas de flujo

Antes de abordar los problemas de flujo es necesario definir ciertas condiciones que nos permitan formular soluciones a problemas específicos, es decir, limitar el espacio en el cual se requiere conocer la solución del problema. Para ello existen condiciones iniciales y de frontera.

2.7.1 Condiciones iniciales

Las condiciones iniciales reflejan el comportamiento de la variable de análisis cuando $t = 0$, para el caso particular de la ingeniería de yacimientos, representan aquellas condiciones que se tienen al inicio de la explotación del yacimiento. Una condición inicial muy recurrente, es la de expresar la presión en cualquier punto del yacimiento (s) como igual a la original o inicial del yacimiento, esto es:

$$Y(s, t = 0) = Y_i. \dots\dots\dots 2. 65$$

2.7.2 Condiciones de contorno o frontera

Son aquellas que reflejan el comportamiento, ya sea del flujo o de la presión, en el límite o borde de nuestro sistema analizado, que puede ser el pozo, las fronteras del yacimiento o las fronteras del acuífero, si lo existiera. Dentro de las condiciones de frontera podemos encontrar dos tipos:

Condiciones tipo Dirichlet

Las condiciones de este tipo expresan los valores que toma la función en la frontera (s_e), es decir, son expresiones de la presión en un punto definido:

$$Y(s, t > 0)_{s_e} = g(x). \dots\dots\dots 2.66$$

Condiciones Tipo Neumann

Expresan el valor que toma el gradiente de la función en la frontera:

$$\left. \frac{\partial Y}{\partial s} \right|_{s_e} = g(x). \dots\dots\dots 2.67$$

Condiciones tipo Robin

Expresan las condiciones de frontera como una combinación del tipo Neumann y tipo Dirichlet, esto es:

$$Y(s, t < 0)_{s_e} + \left. \frac{\partial Y}{\partial s} \right|_{(s_e)} = g(x). \dots\dots\dots 2.68$$

Una vez entendido lo anterior, se presentan en la **Tabla 2. 3**, algunas condiciones de frontera recurrentes en problemas, tanto analizados a gasto constante, como para presión de fondo fluyendo constante, donde ϵ es un factor de cambio definido en la **Tabla 2. 4** con los subíndices 1, 2, 3 y 4 para los casos de las Ecs. 2. 57 a 2. 60, respectivamente.

Tabla 2. 3 condiciones de frontera recurrentes

	Representación	Ec.
Pozo fluyente a presión constantes	$Y(s = w, t > 0) = Y_w$	2. 69
Pozo fluyente a gasto constante	$\frac{dY}{dx_n}(s = w, t > 0) = Y'_w = -\epsilon \frac{q_w B \mu}{kA}$	2. 70
Pozo fluyente en un yacimiento infinito	$Y(s \rightarrow \infty, t > 0) = Y_i$	2. 71
Frontera de mantenimiento de presión	$Y(s = e, t > 0) = Y_e$	2. 72
Frontera de no-flujo	$\frac{dY}{dx_n}(s = e, t > 0) = Y'_e = 0$	2. 73

Tabla 2. 4 Valores de ϵ para las diferentes variables de análisis comúnmente utilizadas.

Variable	Representación	Ec.
p	$\epsilon = 1$	2.74
Ψ_1	$\epsilon = 2 \frac{k\rho}{\mu} = 2 \frac{\rho_e k}{B\mu}$	2.75
Ψ_2	$\epsilon = 2 \frac{p_e k}{T_e B\mu} T$	2.76
Ψ_3	$\epsilon = 2 \frac{\rho}{\mu} = 2 \frac{\rho_e}{B\mu}$	2.77
Ψ_4	$\epsilon = 2 \frac{p_e T}{T_e B\mu}$	2.78

2.8 Variables adimensionales

En muchas ocasiones, los problemas de flujo resultan mucho más prácticos de resolver si se utilizan variables adimensionales, esto debido a que simplifican muchos cálculos. El proceso para transformar la ecuación de difusividad de variables reales a variables adimensionales se realizará sobre a ecuación de difusividad en coordenadas radiales, que de acuerdo con la **Tabla 2. 2** y la **Ec. 2. 61**, es:

$$\frac{1}{\omega} \frac{\partial Y}{\partial t} - \frac{1}{r} \frac{\partial Y}{\partial r} - \frac{\partial^2 Y}{\partial r^2} = 0, \quad \dots\dots\dots 2.79$$

o:

$$\frac{1}{\omega} \frac{\partial Y}{\partial t} - \frac{1}{r} \frac{\partial Y}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial Y}{\partial r} \right) = 0. \quad \dots\dots\dots 2.80$$

Para continuar es necesario definir los siguientes términos adimensionales:

$$\left\{ \begin{array}{l} r_D = \frac{r}{r_{ref}} \\ Y_D = \frac{\Delta Y}{Y_{ref}} = \frac{Y_i - Y}{Y_{ref}} \\ t_D = \frac{t}{t_{ref}} \end{array} \right. \dots\dots\dots 2.81$$

Que expresan el cociente entre cualquier radio, caída de presión y tiempo, y sus respectivos valores de referencia, lo cuales se encontrarán al final de este apartado.

Otras de las expresiones que ayudarán en el proceso de adimensionamiento serán las derivadas de las expresiones anteriores respecto de los valores r , Y y t respectivamente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial r_D}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r}{r_{ref}} \right) = \frac{1}{r_{ref}} \\ \frac{\partial Y_D}{\partial Y} = \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\Delta Y}{Y_{ref}} \right) = \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{Y_i - Y}{Y_{ref}} \right) = -\frac{1}{Y_{ref}} \\ \frac{\partial t_D}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{t}{t_{ref}} \right) = \frac{1}{t_{ref}} \end{array} \right. \dots\dots\dots 2.82$$

Una vez definidas las **Ecs. 2.79** a **2.82**, se procede a aplicar la regla de la cadena al primer término de la **Ec. 2.80**, como se muestra a continuación:

$$\frac{\partial Y}{\partial t} \left(\frac{\partial Y_D}{\partial Y} \right) \left(\frac{\partial t_D}{\partial t} \right) = \frac{\partial Y_D}{\partial t_D} \frac{\partial Y}{\partial Y_D} \frac{\partial t_D}{\partial t}$$

y de la **Ec. 2.82** se sabe que:

$$\frac{\partial Y_D}{\partial t_D} \frac{\partial Y}{\partial Y_D} \frac{\partial t_D}{\partial t} = \frac{\partial Y_D}{\partial t_D} (-Y_{ref}) \left(\frac{1}{t_{ref}} \right) = \left(-\frac{Y_{ref}}{t_{ref}} \right) \frac{\partial Y_D}{\partial t_D} \dots\dots\dots 2.83$$

De igual manera para el segundo término:

$$\frac{\partial Y}{\partial r} \left(\frac{\partial Y_D}{\partial Y_D} \right) \left(\frac{\partial r_D}{\partial r_D} \right) = \frac{\partial Y_D}{\partial r_D} \frac{\partial Y}{\partial Y_D} \frac{\partial r_D}{\partial r}$$

$$\frac{\partial Y_D}{\partial r_D} \frac{\partial Y}{\partial Y_D} \frac{\partial r_D}{\partial r} = \frac{\partial Y_D}{\partial r_D} (-Y_{ref}) \left(\frac{1}{r_{ref}} \right) = \left(-\frac{Y_{ref}}{r_{ref}} \right) \frac{\partial Y_D}{\partial r_D}. \quad \dots\dots\dots 2.84$$

Por último, aplicando la regla de la cadena al tercer término:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial r_D}{\partial r_D} \right) \left[\frac{\partial Y}{\partial r} \left(\frac{\partial Y_D}{\partial Y_D} \right) \left(\frac{\partial r_D}{\partial r_D} \right) \right] = \frac{\partial}{\partial r_D} \frac{\partial r_D}{\partial r} \left(\frac{\partial Y_D}{\partial r_D} \frac{\partial Y}{\partial Y_D} \frac{\partial r_D}{\partial r} \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r_D} \frac{\partial r_D}{\partial r} \left(\frac{\partial Y_D}{\partial r_D} \frac{\partial Y}{\partial Y_D} \frac{\partial r_D}{\partial r} \right) &= \frac{\partial}{\partial r_D} \left(\frac{1}{r_{ref}} \right) \left[\frac{\partial Y_D}{\partial r_D} (-Y_{ref}) \left(\frac{1}{r_{ref}} \right) \right] \\ &= \left(-\frac{Y_{ref}}{r_{ref}^2} \right) \frac{\partial}{\partial r_D} \left(\frac{\partial Y_D}{\partial r_D} \right). \end{aligned} \quad \dots\dots\dots 2.85$$

Substituyendo las **Ecs. 2.83 a 2.85** en **2.80**, se tendrá:

$$\frac{1}{\omega} \left(-\frac{Y_{ref}}{t_{ref}} \right) \frac{\partial Y_D}{\partial t_D} - \frac{1}{r_D r_{ref}} \left(-\frac{Y_{ref}}{r_{ref}} \right) \frac{\partial Y_D}{\partial r_D} - \left(-\frac{Y_{ref}}{r_{ref}^2} \right) \frac{\partial}{\partial r_D} \left(\frac{\partial Y_D}{\partial r_D} \right) = 0, \quad \dots\dots\dots 2.86$$

simplificando:

$$-\frac{1}{\omega} \left(\frac{Y_{ref}}{t_{ref}} \right) \frac{\partial Y_D}{\partial t_D} + \frac{1}{r_D} \left(\frac{Y_{ref}}{r_{ref}^2} \right) \frac{\partial Y_D}{\partial r_D} + \left(\frac{Y_{ref}}{r_{ref}^2} \right) \frac{\partial^2 Y_D}{\partial r_D^2} = 0, \quad \dots\dots\dots 2.87$$

multiplicando la **Ec. 2.87**, por r_{ref}^2/Y_{ref} :

$$-\frac{1}{\omega} \left(\frac{r_{ref}^2}{t_{ref}} \right) \frac{\partial Y_D}{\partial t_D} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial Y_D}{\partial r_D} + \frac{\partial^2 Y_D}{\partial r_D^2} = 0. \quad \dots\dots\dots 2.88$$

Tema 2 Flujo de fluidos en medios porosos

Ahora bien, se debe de cumplir que toda la ecuación anterior es adimensional, por lo tanto, el término:

$$\frac{1}{\omega} \left(\frac{r_{ref}^2}{t_{ref}} \right) = 1. \quad \dots\dots\dots 2.89$$

Esto se comprueba rápidamente, realizando un análisis dimensional:

$$\frac{1}{\omega} \left(\frac{r_{ref}^2}{t_{ref}} \right) = \frac{\mu \phi c_f}{k} \left(\frac{r_{ref}^2}{t_{ref}} \right) = \frac{(ML^{-1}T^{-1})(1)(ML^{-1}T^{-2})^{-1} L^2}{L^2} \frac{L^2}{T} = \frac{(ML^{-1}T^{-1})(1)(M^{-1}LT^2) L^2}{L^2} \frac{L^2}{T} = 1$$

Por lo cual la **Ec. 2.88**, resulta en:

$$-\frac{\partial Y_D}{\partial t_D} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial Y_D}{\partial r_D} + \frac{\partial^2 Y_D}{\partial r_D^2} = 0. \quad \dots\dots\dots 2.90$$

Que es la ecuación de difusividad en coordenadas radiales y variables adimensionales. Donde el radio adimensional se define, a partir de considerar al radio del pozo, r_w , como el radio de referencia, como:

$$r_D = \frac{r}{r_w}, \quad \dots\dots\dots 2.91$$

por lo tanto y a partir de la **Ec. 2.89**, tendremos que el tiempo de referencia será:

$$t_{ref} = \frac{r_w^2}{\omega}, \quad \dots\dots\dots 2.92$$

Y en consecuencia el tiempo adimensional, t_D :

$$t_D = \frac{t}{t_{ref}} = \frac{t}{\frac{r_w^2}{\omega}} = \frac{\omega t}{r_w^2}. \quad \dots\dots\dots 2.93$$

Ahora bien, para conocer la presión adimensional se parte de la ecuación de Darcy:

$$q = -\frac{kA}{\epsilon B \mu} \frac{\partial Y}{\partial r},$$

donde el área de flujo, A, considerando la cara del pozo, será:

$$A = 2\pi r h ,$$

por lo que:

$$q = -\frac{kh}{\epsilon \alpha_R B \mu} r \frac{\partial Y}{\partial r} \rightarrow.$$

Así, despejando $r \partial Y / \partial r$:

$$r \frac{\partial Y}{\partial r} = -\epsilon \frac{\alpha_R q B \mu}{kh} ,$$

que en variables adimensionales será:

$$r_D r_w \left(-\frac{Y_{ref}}{r_w} \right) \frac{\partial Y_D}{\partial r_D} = -\epsilon \frac{\alpha_R q B \mu}{kh} ,$$

y:

$$r_D \frac{\partial Y_D}{\partial r_D} = \epsilon \frac{\alpha_R q B \mu}{kh} \frac{1}{Y_{ref}} .$$

Para que toda la ecuación sea adimensional se debe cumplir que:

$$\epsilon \frac{\alpha_R q B \mu}{kh} \frac{1}{Y_{ref}} = 1 ,$$

así, realizando el análisis dimensional:

$$\epsilon \frac{\alpha_R q B \mu}{kh} \frac{1}{Y_{ref}} = \frac{(L^3 T^{-1})(1)(ML^{-1} T^{-1})}{(L^2)(L)} \frac{1}{ML^{-1} T^{-2}} = 1$$

por lo tanto:

$$Y_{ref} = \epsilon \frac{\alpha_R q B \mu}{kh}$$

lo que implica que:

$$Y_D = \frac{\Delta Y}{Y_{ref}} = \frac{\Delta Y}{\epsilon \frac{\alpha_R q B \mu}{kh}} = \frac{kh}{\epsilon \alpha_R q B \mu} \Delta Y . \quad \dots\dots\dots 2.94$$

En la **Tabla 2. 5** se presentan los valores de las variables adimensionales, para las diferentes geometrías de flujo, así como las respectivas ecuaciones en variables adimensionales, las cuales pueden obtenerse por un camino similar, y en la **Tabla 2. 6** se presentan las unidades y valores de las variables utilizadas.

Tabla 2. 5 Variables adimensionales para las diferentes geometrías de flujo.

Geometría	Lineal	Radial	Esférica
distancia adimensional	$x_D = \frac{x}{L}$	$r_D = \frac{r}{r_w}$	$r_{D_{sph}} = \frac{r}{r_w}$
Tiempo adimensional	$t_{DL} = \frac{\beta kt}{\phi \mu c_t L^2}$	$t_D = \frac{\beta kt}{\phi \mu c_t r_w^2}$	$t_{D_{sph}} = \frac{\beta kt}{\phi \mu c_t r_w^2}$
Presión adimensional	$Y_{DL} = \frac{kbh}{\epsilon \alpha_L q B \mu L} \Delta Y$	$Y_D = \frac{kh}{\epsilon \alpha_R q B \mu} \Delta Y$	$Y_{D_{sph}} = \frac{kr_w}{\epsilon \alpha_{sph} q B \mu} \Delta Y$
Ecuación de Flujo en 2D adimensional	$\frac{\partial^2 Y_{DL}}{\partial x_D^2} = \frac{\partial Y_{DL}}{\partial t_D}$	$\frac{\partial^2 Y_D}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial Y_D}{\partial r_D} = \frac{\partial Y_{DR}}{\partial t_D}$	$\frac{\partial^2 Y_D}{\partial r_D^2} + \frac{2}{r_D} \frac{\partial Y_D}{\partial r_D} = \frac{\partial Y_{D_{sph}}}{\partial t_D}$

Tabla 2. 6 Unidades y valores de las variables

Variable	Darcy	Unidades en el Sistema Internacional	Unidades de campo en sistema inglés	Unidades de campo en sistema métrico
k	<i>darcy</i>	m^2	<i>md</i>	<i>md</i>
Y	<i>atm</i>	<i>Pa</i>	<i>psia</i>	kg/cm^2
q	cm^3/s	m^3/s	<i>bpd</i>	m^3/d
μ	<i>cp</i>	$Pa \cdot s$	<i>cp</i>	<i>cp</i>
B	$\frac{rcm^3}{stcm^3}$	$\frac{rm^3}{stm^3}$	$\frac{rbl}{stb}$	$\frac{rm^3}{sm^3}$
t	<i>s</i>	<i>s</i>	<i>h</i>	<i>h</i>
c_t	atm^{-1}	Pa^{-1}	$[psia]^{-1}$	$[kg/cm^2]^{-1}$
$h - r_w$	<i>cm</i>	<i>m</i>	<i>ft</i>	<i>m</i>
A	cm^2	m^2	ft^2	m^2
α_L	1	1	887.2	119.58
α_R	2π	2π	141.2	19.03
α_{Sph}	2π	2π	70.6	9.52
β	1	1	2.637×10^{-4}	3.489×10^{-4}

2.9 Ecuación de difusividad para flujo no Newtoniano

Además de las ecuaciones presentadas anteriormente, algunos autores desarrollaron ecuaciones de flujo para cuando se presentará un fluido que no fuera newtoniano, estas ecuaciones son:

2.9.1 Ecuación de flujo para un fluido ley de potencia

Para este tipo de fluidos la ecuación de difusividad presentada es:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{n}{r} \frac{\partial p}{\partial r} = c_t \phi n \left(\frac{\mu_{eff}}{k} \right)^{\frac{1}{n}} \left(-\frac{\partial p}{\partial r} \right)^{1-\frac{1}{n}} \frac{\partial p}{\partial t} \quad \dots\dots\dots 2.95$$

Para simplificar y generalizar la **Ec. 2. 95**, Ikoku y Ramey (**Gallardo [4]**) propusieron los siguientes grupos adimensionales:

$$p_{DNN} = \frac{k}{\mu_{eff} r_w^{1-n}} \left(\frac{2\pi h}{qB} \right)^n (p_i - p), \quad \dots\dots\dots 2.96$$

$$r_D = r/r_w, \quad \dots\dots\dots 2.97$$

$$t_{DNN} = \frac{\eta}{r_w^{3-n}} t, \quad \dots\dots\dots 2.98$$

y η esta definida como:

$$\eta = \frac{k}{\phi \mu_{eff} c_t n} \left(\frac{2\pi h}{qB} \right)^{n-1} \quad \dots\dots\dots 2.99$$

Substituyendo las **Ecs. 2. 96 a 2. 99** en la ecuación 2. 95, se obtiene:

$$\frac{\partial^2 p_{DNN}}{\partial r_D^2} + \frac{n}{r_D} \frac{\partial p_{DNN}}{\partial r_D} = \left(-\frac{\partial p_{DNN}}{\partial r_D} \right)^{1-\frac{1}{n}} \frac{\partial p_{DNN}}{\partial t_{DNN}} \quad \dots\dots\dots 2.100$$

2.9.2 Ecuación de flujo para un fluido plástico de Bingham

Para estos fluidos la ecuación de flujo obtenida es:

$$\frac{\partial^2 p_{DNN}}{\partial r_D^2} + \frac{n}{r_D} \frac{\partial p_{DNN}}{\partial r_D} = \left(-\frac{\partial p_{DNN}}{\partial r_D} \right)^{1-\frac{1}{n}} \frac{\partial p_{DNN}}{\partial t_{DNN}}. \quad \dots\dots\dots 2.101$$

donde η es definida como:

$$\eta = \frac{k}{\phi \mu_B c_t}. \quad \dots\dots\dots 2.102$$

Y el subsecuente grupo de variables adimensionales para este problema, como:

$$p_{DNN} = \frac{2\pi kh}{qB\mu_B} (p_i - p), \quad \dots\dots\dots 2.103$$

$$r_D = r/r_w, \quad \dots\dots\dots 2.104$$

$$t_{DNN} = \frac{\eta}{r_w^2} t, \quad \dots\dots\dots 2.105$$

$$G_D = \frac{2\pi kh r_w}{qB\mu_B} G. \quad \dots\dots\dots 2.106$$

Sustituyendo las **Ecs. 2. 103 a 2. 106** en la **Ec. 2. 101**, se tendrá:

$$\frac{\partial^2 p_{DNN}}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial p_{DNN}}{\partial r_D} + \frac{G_D}{r_D} = \frac{\partial p_{DNN}}{\partial t_{DNN}}. \quad \dots\dots\dots 2.107$$

2.10 Ecuaciones para flujo multifásico de fluidos en el medio poroso

En este caso se tiene el flujo de tres fluidos presentes en el yacimiento: agua, aceite y gas, pero asumiendo que no existe transferencia de masa entre las fases, para un análisis sin este supuesto véase (**Peaceman [6]**). Para el desarrollo de la ecuación de difusividad se deben tener en cuenta las siguientes expresiones:

$$S_g + S_w + S_o = 1, \quad \dots\dots\dots 2.108$$

Se asume que las tres fases saturan todo el medio poroso en sus respectivas proporciones.

Se añade el concepto de presiones capilares entre las fases:

$$\begin{cases} p_{c_{ow}} = p_o - p_w \\ p_{c_{go}} = p_g - p_o, \quad \dots\dots\dots 2.109 \\ p_{c_{gw}} = p_g - p_w \end{cases}$$

donde los subíndices o , w y g representan al agua, aceite y gas respectivamente, y los subíndices ow , go y gw representa la interacción entre las fases correspondientes.

Se define de igual manera la ecuación de Darcy, pero para cada fase:

$$\begin{cases} \vec{v}_o = -\frac{Kk_{ro}}{\mu_o} \left[\nabla p_o - \vec{k}(\rho_{o_1} - \rho_{o_2})g - \frac{2\vec{\sigma}\cos\theta}{rh} \right] \\ \vec{v}_w = -\frac{Kk_{rw}}{\mu_w} \left[\nabla p_w - \vec{k}(\rho_{w_1} - \rho_{w_2})g - \frac{2\vec{\sigma}\cos\theta}{rh} \right], \quad \dots\dots\dots 2.110 \\ \vec{v}_g = -\frac{Kk_{rg}}{\mu_g} \left[\nabla p_g - \vec{k}(\rho_{g_1} - \rho_{g_2})g - \frac{2\vec{\sigma}\cos\theta}{rh} \right] \end{cases}$$

donde K es la permeabilidad efectiva, y k_{ri} es la permeabilidad relativa de cada fase, μ_i es la viscosidad de cada fase, y ρ , la densidad de cada fase.

Y se tendrá una ecuación de difusividad para cada fase:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho_o \phi S_o}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\left(-\frac{Kk_{ro}}{\mu_o} \left[\nabla p_o - \vec{k}(\rho_{o1} - \rho_{o2})g - \frac{2\vec{\sigma} \cos \theta}{rh} \right] \right) \rho_o \right) = 0 \\ \frac{\partial \rho_w \phi S_w}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\left(-\frac{Kk_{rw}}{\mu_w} \left[\nabla p_w - \vec{k}(\rho_{w1} - \rho_{w2})g - \frac{2\vec{\sigma} \cos \theta}{rh} \right] \right) \rho_w \right) = 0 \\ \frac{\partial \rho_g \phi S_g}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\left(-\frac{Kk_{rg}}{\mu_g} \left[\nabla p_g - \vec{k}(\rho_{g1} - \rho_{g2})g - \frac{2\vec{\sigma} \cos \theta}{rh} \right] \right) \rho_g \right) = 0 \end{array} \right. \dots 2.111$$

2.11 Modelos de flujo composicionales

Muchas veces, además de representar con mejor exactitud el número de fases que fluyen en el yacimiento, se busca analizar el cambio que sufren los componentes de cada fase a medida que se explota el yacimiento, para ello se recurren a modelos composicionales.

Balances Composicionales

A medida que se extrae materia del yacimiento, con el paso del tiempo no se tendrá la misma cantidad de masa de las fases. Además, debe tenerse en cuenta la transferencia de masa entre las fases. En cambio, para cada componente la masa total si debe conservarse. Ahora bien, como las densidades de flujo de masa para cada una de las fases son $\rho_g \vec{v}_g$, $\rho_o \vec{v}_o$ y $\rho_w \vec{v}_w$ (en masa por unidad de área por unidad de tiempo), entonces la densidad de flujo de masa para el i -ésimo componente debe ser:

$$C_{ig}\rho_g\vec{v}_g + C_{io}\rho_o\vec{v}_o + C_{iw}\rho_w\vec{v}_w, \dots\dots\dots 2.112$$

donde C_{ig} , es la fracción másica del i-ésimo componente en la fase gaseosa, C_{io} la fracción másica del i-ésimo componente en la fase oleosa, y C_{iw} , la fracción másica del i-ésimo componente en la fase acuosa.

La masa del componente i por volumen total unitario de medio poroso es entonces:

$$\phi(C_{ig}\rho_gS_g + C_{io}\rho_oS_o + C_{iw}\rho_wS_w), \dots\dots\dots 2.113$$

por lo tanto, la ecuación de continuidad, sin término fuente o sumidero, será:

$$\frac{\partial}{\partial t} [C_{ig}\rho_g\vec{v}_g + C_{io}\rho_o\vec{v}_o + C_{iw}\rho_w\vec{v}_w] + \nabla \cdot [\phi(C_{ig}\rho_g\vec{v}_g + C_{io}\rho_o\vec{v}_o + C_{iw}\rho_w\vec{v}_w)] = 0, \dots\dots\dots 2.114$$

y substituyendo la ecuación de Darcy en la ecuación anterior, se obtiene la ecuación de difusividad composicional:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{C_{ig}\rho_g K k_{rg}}{\mu_g} \left(\nabla p_g - \vec{k}(\rho_{g1} - \rho_{g2})g - \frac{2\vec{\sigma}\cos\theta}{rh} \right) \right. \\ + \frac{C_{io}\rho_o K k_{ro}}{\mu_o} \left(\nabla p_o - \vec{k}(\rho_{o1} - \rho_{o2})g - \frac{2\vec{\sigma}\cos\theta}{rh} \right) \\ \left. + \frac{C_{iw}\rho_w K k_{rw}}{\mu_w} \left(\nabla p_w - \vec{k}(\rho_{w1} - \rho_{w2})g - \frac{2\vec{\sigma}\cos\theta}{rh} \right) \right] \\ + \nabla \cdot [\phi(C_{ig}\rho_gS_g + C_{io}\rho_oS_o + C_{iw}\rho_wS_w)] = 0, \dots\dots\dots 2.115 \end{aligned}$$

En esta ecuación diferencial hay tantas ecuaciones como componentes se tengan, o se requieran analizar. Sin embargo, se tendrán $3N + 15$ variables dependientes, por lo cual para dar solución se requieren igual número de ecuaciones. En la **Tabla 2. 7** y **Tabla 2. 8** se listan las variables dependientes y las ecuaciones auxiliares, respectivamente:

Tabla 2. 7 Variables independientes

Variables	Número
C_{ig}	N
C_{io}	N
C_{iw}	N
p_g, p_o, p_w	3
S_g, S_o, S_w	3
ρ_g, ρ_o, ρ_w	3
μ_g, μ_o, μ_w	3
k_{rg}, k_{ro}, k_{rw}	3
<i>Total = 3N + 15</i>	

Tabla 2. 8 Ecuaciones auxiliares

Relación	Ec.	Número
<i>ecuación de difusividad</i>	2. 116	N
ΣS_i	2. 117	1
ΣC_i	2. 118	3
ρ	2. 119	3
μ	2. 120	3
k_r	2. 121	3
<i>Presiones Capilares</i>	2. 122	2
<i>Equilibrio de Fases</i>	2. 123	$2N$
<i>Total = 3N + 15</i>		

Referencias

1. Garaicochea, F., & Bashbush, J. Apuntes de Comportamiento de los Yacimientos (1st ed.). México: FI-DICT.
2. Barnes, H., Hutton, J., & Walters, K. (1998). An introduction to rheology (5th ed.). Elsevier.
3. Rodríguez N., R. Principios de Mecánica de Yacimientos (1st ed.). México: FI-DICT.
4. Gallardo, H.E. (2016). Flow Models for Non-Newtonian Fluids. CDMX.
5. Gallardo, H.E. (2016). Flujo Monofásico de Fluidos en el Yacimiento. CDMX.
6. Peaceman, D. (2000). Fundamentals of Numerical Reservoir Simulation. Burlington: Elsevier Science.

Tema 3 Soluciones mediante Separación de Variables

Para resolver problemas de valores iniciales y en la frontera definidos por EDP de segundo orden lineales, quizá la técnica más común es la separación de variables. La idea inicial es suponer que la solución de la EDP se descompone como producto de funciones de las distintas variables independientes. Esto reduce el problema a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, más un conjunto de condiciones de frontera. La solución de estos sistemas está dada, en general, por un número infinito de funciones de tal forma que la solución al problema original resulta ser una suma de estas. Finalmente, partiendo de esta solución superpuesta, se determinan los coeficientes de la expansión de tal manera que se satisfaga la o las condiciones iniciales (**Zamora [1]**).

3.1 Linealidad

En el estudio de las ecuaciones diferenciales ordinarias, el concepto de linealidad será de mucha importancia. Un operador lineal L por definición satisface:

$$L(c_1u_1 + u_2c_2) = c_1L(u_1) + c_2L(u_2), \dots\dots\dots 3.1$$

para cualesquiera dos funciones u_1 y u_2 , donde c_1 y c_2 son dos constantes arbitrarias, además cabe recalcar que cualquier combinación lineal de operadores lineales es un operador lineal (**Haberman [2]**).

Una ecuación lineal es de la forma:

$$L(u) = f, \dots\dots\dots 3.2$$

donde L es el operador lineal y f es una función conocida. Cuando $f = 0$, la **Ec. 3. 2** resulta en $L(u) = 0$, y es llamada ecuación lineal homogénea. Por otro lado, si $f \neq 0$, se dice que la ecuación es no homogénea. La propiedad fundamental de los operadores lineales, representada en la **Ec. 3. 1**, da pauta al siguiente principio:

Principio de superposición: Si u_1 y u_2 satisfacen una ecuación lineal homogénea, entonces una combinación lineal arbitraria de ellas, $c_1u_1 + c_2u_2$, también satisface la misma ecuación lineal homogénea (**Haberman [2]**).

3.2 Método Separación de Variables

En el método de separación de variables, las soluciones de los problemas son en la forma de producto:

$$u(x, t) = \phi(x)G(t), \quad \dots\dots\dots 3.3$$

donde $\phi(x)$ es una función únicamente de x y $G(t)$, únicamente de t . La **Ec. 3. 3** debería satisfacer la ecuación lineal homogénea y sus condiciones de frontera. Para los casos en los que se resuelva una ecuación diferencial parcial, mediante el método de separación de variables, es conveniente que sus condiciones de frontera se encuentren homogeneizadas, es decir, valuadas en cualquier punto de la región estudiada, sean iguales a cero, por lo que se dedica un apartado para presentar un método práctico para ello.

3.2.1 Homogeneización de las condiciones de frontera

En este método se busca una función $w(x, t)$ tal que:

$$U_1(w(x, t)) = h_1(t), \quad U_2(w(x, t)) = h_2(t) ,$$

donde U_i , representa la condición de frontera y h_i , representa el valor de la condición de frontera valuada en el punto de interés. De acuerdo con, el tipo de condición que se tenga

(véase cap. 2), se presentan una serie de ecuaciones para obtener el valor de $w(x, t)$ (Rodellar [3]).

Condiciones tipo Dirichlet:

$$U_1(w) = w(0, t) = h_1(t) \text{ y } U_2(w) = w(L, t) = h_2(t) . \quad \dots\dots\dots 3.4$$

Para tal caso se propone la siguiente expresión para determinar $w(x, t)$:

$$w(x, t) = \frac{x}{L} [(h_2(t) - h_1(t))] + h_1(t) . \quad \dots\dots\dots 3.5$$

Condiciones tipo Neumann

$$U_1(w) = \frac{\partial w(0, t)}{\partial x} = h_1(t) \text{ y } U_2(w) = \frac{\partial w(L, t)}{\partial x} = h_2(t) . \quad \dots\dots\dots 3.6$$

$$w(x, t) = \frac{x^2}{2L} [h_2(t) - h_1(t)] + xh_1(t) . \quad \dots\dots\dots 3.7$$

Condiciones de Robin

$$U_1(w) = a_1 w(0, t) + a_2 \frac{\partial w(0, t)}{\partial x} = h_1(t) \quad \dots\dots\dots 3.8$$

$$U_2(w) = b_1 w(L, t) + b_2 \frac{\partial w(L, t)}{\partial x} = h_2(t)$$

$$w(x, t) = \frac{[a_1 h_2(t) - b_1 h_1(t)]x + [b_1 L + b_2]h_1(t) - a_2 h_2(t)}{a_1 b_1 L + a_1 b_2 - b_1 a_2} . \quad \dots\dots\dots 3.9$$

Para la resolución del problema, hacemos entonces uno nuevo en términos de esta nueva variable, como:

$$v(x, t) = u(x, t) - w(x, t), \dots\dots\dots 3.10$$

donde $u(x, t)$ es nuestra variable inicial, y $v(x, t)$ es la nueva variable por resolver, la solución es hallada en términos de esta nueva variable, para posteriormente expresarla en términos de la variable original.

Es común, a la hora de encontrar las soluciones mediante el método de separación de variables, que nos encontremos con expresiones agrupadas en sumatorios, estas tienen una característica especial, y es que asemejan a un tipo especial de series, conocidas como Series de Fourier.

3.2.2 Definición de Series de Fourier

Supóngase que f es seccionalmente continua en el intervalo $-L \leq x < L$. Supóngase además que f está definida fuera del intervalo $-L \leq x < L$, de modo que es periódica de periodo $2L$ sobre todo \mathbb{R} . Entonces f tiene una representación en serie de Fourier:

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right), \dots\dots\dots 3.11$$

con los coeficientes dados por las fórmulas de Euler-Fourier:

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \left(\frac{n\pi}{L} x \right) dx, \dots\dots\dots 3.12$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \text{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x \right) dx, \dots\dots\dots 3.13$$

para $n = 1, 2, 3 \dots$ la serie de Fourier converge a $f(x)$ en los puntos donde f es continua y a $[f(x+) + f(x-)]/2$ en todos los puntos en los que f es discontinua (**Zamora [1]**).

Si una función definida en el intervalo $(-L, L)$ tiene simetría impar, ésta puede representarse como una serie de senos; en cambio, si la función tiene simetría par, ésta puede representarse como una serie de cosenos. No obstante, en un caso general, para representar una función con simetría arbitraria, se incluyen ambos términos.

3.2.3 Propiedades de la Serie de Fourier

En la **Tabla 3. 1** se presentan algunas de las propiedades de las series de Fourier de interés para este trabajo.

Tabla 3. 1 Propiedades de las series de Fourier

Propiedad		Coefficientes de la serie	Ec.
Linealidad	$Ax_p(t) + Bv_p(t)$	$\{Ac_n + Bd_n\}$	3. 14
Multiplicación	$x_p(t) \cdot v_p(t)$	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_k \cdot d_{n-k}$	3. 15
Desplazamiento en el tiempo	$x_p(t - \tau)$	$c_n e^{-jn\omega_0\tau}$	3. 16
Conjugación	$\overline{x_p(t)}$	$\overline{c_{-n}}$	3. 17
Inversión en el tiempo	$x_p(-t)$	c_{-n}	3. 18
Escalamiento en el tiempo	$x_p(at)$	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 at}$	3. 19

3.3 Solución a problemas de flujo lineal

3.3.1 Yacimiento produciendo a presión de fondo fluyendo constante con mantenimiento de presión en la frontera externa

El primer caso, esquematizado en la **Figura 3. 1**, presenta un yacimiento en el cual se tiene flujo lineal hacia el pozo y además es un yacimiento con mantenimiento de presión en la frontera externa, es decir presenta flujo estacionario.

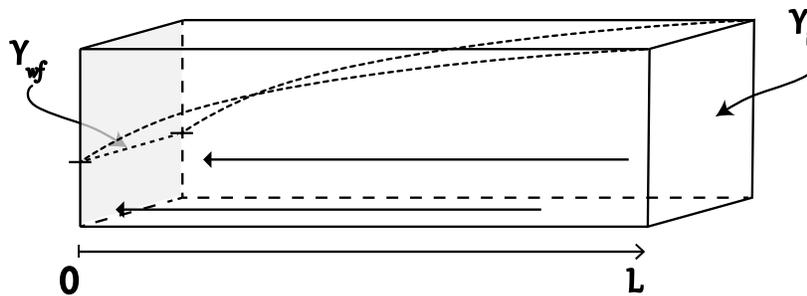


Figura 3. 1 Esquema de un yacimiento que presenta flujo lineal y régimen estacionario.

La ecuación de flujo que modela este sistema y sus respectivas condiciones iniciales y de frontera se presentan en la **Tabla 3. 2**, tanto para variables reales como para variables adimensionales.

La resolución de este problema se hará con las variables adimensionales, ya que resulta más práctico, y evita el acarreo de variables en el proceso. Ahora bien, el método de solución propuesto es mediante separación de variables, pero para ello, antes se debe garantizar que las condiciones de frontera sean homogéneas y se observa que la CFI no lo es, por lo cual se propone el método presentado anteriormente para homogenizarlas.

Tabla 3. 2 Planteamiento del problema en variables reales y adimensionales.

	Variables Reales	Variables Adimensionales
Ecuación de flujo	$\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} = \frac{1}{\omega} \frac{\partial Y}{\partial t}$	$\frac{\partial^2 Y_{DL}}{\partial x_D^2} = \frac{\partial Y_{DL}}{\partial t_D}$
Condición Inicial	$Y(x, t = 0) = Y_i$	$Y_{DL}(x_D, t_D = 0) = 0$
Condición de Frontera Interna	$Y(x = 0, t) = Y_{wf}$	$Y_{DL}(x_D = 0, t_D) = 1$
Condición de frontera Externa	$Y(x = L, t > 0) = Y_i$	$Y_{DL}(x_D = 1, t_D) = 0$

Sean las condiciones de frontera:

$$u(x, t)|_{x=0} = h_1(t), \quad u(x, t)|_{x=L} = h_2(t)$$

Tenemos entonces que $w(x, t) = h_1(t) + [h_2(t) - h_1(t)] \frac{x}{L}$. Que para nuestro caso $w(x, t) = 1 + (0 - 1) \frac{x}{L} = 1 - x_D$, por lo tanto:

$$Y_{DL} = Y_{DL}^* + 1 - x_D, \quad \dots\dots\dots 3.20$$

y la solución se reescribe en términos de Y_{DL}^* , por lo cual se tiene el nuevo problema:

$$\frac{\partial^2 Y_{DL}^*}{\partial x_D^2} = \frac{\partial Y_{DL}^*}{\partial t_D}, \quad \dots\dots\dots 3.21$$

sujeto a las condiciones, ahora homogéneas, siguientes:

Tema 3 Soluciones mediante Separación de Variables

$$Y_{D_L}^*(x_D, t_D = 0) = x_D - 1 , \quad \dots\dots\dots 3.22$$

$$Y_{D_L}^*(x_D = 0, t_D) = 0 , \quad \dots\dots\dots 3.23$$

$$Y_{D_L}^*(x_D = 1, t_D) = 0 . \quad \dots\dots\dots 3.24$$

Dado que se cumple que las condiciones de frontera son homogéneas, el método de separación de variables puede ser aplicado, para ello se buscan las soluciones que tengan la forma:

$$Y_{D_L}^* = X(x_D)T(t_D) = XT , \quad \dots\dots\dots 3.25$$

cuyas derivadas parciales respecto de x_D y t , respectivamente son:

$$\frac{\partial^2 Y_{D_L}^*}{\partial x_D^2} = X''T , \quad \dots\dots\dots 3.26$$

$$\frac{\partial Y_{D_L}^*}{\partial t} = XT'$$

sustituyendo lo anterior en la **Ec. 3.21**:

$$X''T = XT' \Leftrightarrow \frac{X''}{X} = \frac{T'}{T} , \quad \dots\dots\dots 3.27$$

se ve entonces que un lado de la igualdad solo depende de X , mientras que el otro miembro solo depende de T . Puesto que X y T son variables independientes, ellas no dependen entre sí, y por tanto la **Ec. 3.27** puede ser cierta si y solo si cada miembro de ella es igual a la misma constante, λ , llamada constante de separación. De la **Ec. 3.27** se tiene que:

$$\begin{aligned} X'' - \lambda X &= 0 \\ T' - \lambda T &= 0 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots 3.28$$

que al resolver para T , se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt_D} &= \lambda T \\ \int \frac{dT}{T} &= \int \lambda dt_D \\ \ln(T) &= \lambda t_D + C \end{aligned}$$

$$T(t_D) = e^{\lambda t_D + C} = e^C e^{\lambda t_D} = A e^{\lambda t_D} \quad \dots\dots\dots 3.29$$

Como se sabe, el siguiente paso en el método de separación de variables es conocer si λ es positiva, negativa o nula, para ello nos apoyaremos de la **Figura 3. 2**, en ella se puede observar el comportamiento de la variable Y_{DL}^* en cualquiera de los tres supuestos anteriores, y de acuerdo con el comportamiento esperado en un yacimiento, el valor de λ tiene que ser negativo, ya que con ello se logra que la presión decaiga con el tiempo, lo cual es un comportamiento congruente con la realidad.

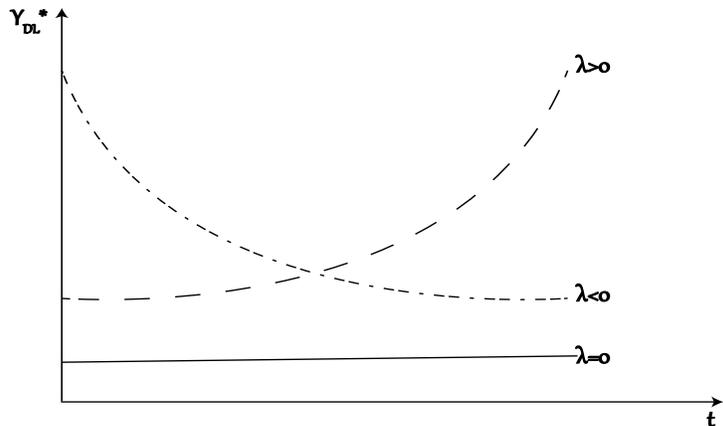


Figura 3. 2 Comportamiento de Y_{DL}^* para valores de λ .

Por lo tanto, la **Ec. 3.29**, es:

$$T(r_D) = Ae^{-\lambda t_D} . \dots\dots\dots 3.30$$

Ya que se conoce el signo de λ , se procede a solucionar en X:

$$X'' + \lambda X = 0$$

Lo cual en términos del operador derivada puede escribirse como:

$$(D^2 + \lambda)X = 0$$

Cuyo polinomio asociado es:

$$m^2 + \lambda = 0$$

Y cuyas raíces son:

$$m = \pm\sqrt{-\lambda} = \pm\sqrt{-1 * \lambda} = \pm i\sqrt{\lambda}$$

Dado que las raíces son complejas conjugadas de la forma $a + bi$, la solución está dada por $e^{(a+bi)x} = e^{ax}(\cos(bx) + i \text{seno}(bx))$, por lo tanto:

$$X_h = C_1 e^{i\sqrt{\lambda}x_D} + C_2 e^{-i\sqrt{\lambda}x_D}$$

$$X_h = C_1(\cos(x_D\sqrt{\lambda}) + i \text{seno}(x_D\sqrt{\lambda})) + C_2(\cos(-x_D\sqrt{\lambda}) + i \text{seno}(-x_D\sqrt{\lambda}))$$

$$X_h = C_1(\cos(x_D\sqrt{\lambda}) + i \text{seno}(x_D\sqrt{\lambda})) + C_2(\cos(x_D\sqrt{\lambda}) - i \text{seno}(x_D\sqrt{\lambda}))$$

$$X_h = (C_1 + C_2) \cos(x_D\sqrt{\lambda}) + (C_1 - C_2) i \text{sen}(x_D\sqrt{\lambda})$$

Redefiniendo a $B = C_1 + C_2$ y $C = (C_1 - C_2)i$, la solución para X, esta dada por:

$$X(x_D) = B \cos(x_D \sqrt{\lambda}) + C \operatorname{sen}(x_D \sqrt{\lambda}) . \quad \dots\dots\dots 3.31$$

Para encontrar el valor de las constantes se evalúan las condiciones de frontera.
Evaluando la condición de frontera interna:

$$Y_{D_L}^*(x_D = 0, t_D) = 0$$

Se tendrá que:

$$X(x_D = 0) = B \cos(0 * \sqrt{\lambda}) + C \operatorname{sen}(0 * \sqrt{\lambda}) = 0$$

$$B(1) + C(0) = 0$$

$$B = 0 .$$

Evaluando la condición de frontera externa:

$$Y_{D_L}^*(x_D = 1, t_D) = 0 .$$

Se tendrá:

$$X(x_D = 1) = 0 * \cos(1 * \sqrt{\lambda}) + C \operatorname{sen}(1 * \sqrt{\lambda}) = 0$$

$$C(\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda})) = 0 .$$

En este punto se tienen dos posibilidades: que $C = 0$, y que $\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}) = 0$, dado que si $B = C = 0$, se tienen las soluciones triviales, las cuales no nos interesan en este caso, se plantea entonces la segunda opción.

Para que $\operatorname{sen}(x)$ asuma el valor de cero, se tienen las siguientes posibilidades:

$$\operatorname{sen}(0) = \operatorname{sen}(\pi) = \operatorname{sen}(2\pi) = \dots \operatorname{sen}(n\pi) = 0, \quad \forall n = 0,1,2,3 \dots$$

Por lo tanto:

$$\operatorname{seno}(\sqrt{\lambda}) = 0 ,$$

Tema 3 Soluciones mediante Separación de Variables

$$\text{angseno}(\text{seno}(\sqrt{\lambda})) = \text{angseno}(0),$$

$$\sqrt{\lambda} = n\pi$$

$$\lambda = (n\pi)^2$$

Sustituyendo este valor en las **Ecs. 3. 30** y **3. 31**, se tiene:

$$T(r_D) = Ae^{-(n\pi)^2 t_D} \dots\dots\dots 3. 32$$

$$X(x_D) = C\text{sen}(n\pi x_D),$$

Por lo cual la solución, planteada como $Y_{D_L}^* = X(x_D)T(t_D)$, es:

$$Y_{D_L}^* = C\text{sen}(n\pi x_D) * Ae^{-(n\pi)^2 t_D} \dots\dots\dots 3. 33$$

$$Y_{D_L}^* = D\text{sen}(n\pi x_D) * e^{-(n\pi)^2 t_D}, \quad \forall n = 0,1,2,3 \dots, \dots\dots\dots 3. 34$$

donde $D = C * A$. Esta es la solución al problema descrito en la **Ec. 3. 21**, pero puede observarse que existen n soluciones al problema a lo cual, echando mano del principio de superposición, se tiene entonces que:

$$Y_{D_L}^* = \sum_{n=0}^{\infty} D_n \text{sen}(n\pi x_D) * e^{-(n\pi)^2 t_D} \dots\dots\dots 3. 35$$

Observe que en la ecuación anterior tiene la forma de una serie de Fourier, y además se tiene aún, una constante de la cual se desconoce su valor, para ello se hace uso de la condición inicial.

$$Y_{D_L}^*(x_D, t_D = 0) = x_D - 1$$

Por lo tanto, la **Ec. 3. 35** valuada en la C.I. es:

$$Y_{D_L}^*(x_D, t_D = 0) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n \text{sen}(n\pi x_D) * e^{-(n\pi)^2(0)} = x_D - 1.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} D_n \text{sen}(n\pi x_D) * (1) = x_D - 1.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} D_n \text{sen}(n\pi x_D) = x_D - 1. \quad \dots\dots\dots 3.36$$

La **Ec. 3.36** representa una ecuación en un número infinito de incógnitas, pero debe ser válida en cada valor de x . Si sustituimos mil valores diferentes de x en **3.36**, cada una de las mil ecuaciones se mantendría, pero todavía habría un número infinito de incógnitas. Esta no es una forma eficiente de determinar el D_n . En cambio, con frecuencia se emplea una técnica extremadamente importante basada en notar (quizás desde una tabla de integrales) que las funciones propias $\text{sen}(n\pi x_D)$ satisfacen la siguiente propiedad integral:

$$\int_0^1 \text{sen}(n\pi x_D) * \text{sen}(m\pi x_D) dx_D = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \frac{1}{2}, & m = n \end{cases}, \quad \dots\dots\dots 3.37$$

donde m y n son enteros positivos. Para usar esta condición, para determinar D_n , multiplicamos ambos lados de la **Ec. 3.36** por $\text{sen}(m\pi x_D)$, y llamando $f(x_D) = x_D - 1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} D_n \text{sen}(n\pi x_D) * \text{sen}(m\pi x_D) = f(x_D) * \text{sen}(m\pi x_D).$$

Integrando de 0 a 1, (limites adimensionales de nuestro problema):

$$\sum_{n=1}^{\infty} D_n \int_0^1 \text{sen}(n\pi x_D) * \text{sen}(m\pi x_D) = \int_0^1 f(x_D) * \text{sen}(m\pi x_D).$$

Tema 3 Soluciones mediante Separación de Variables

Para series finitas, la integral de una suma de términos es igual a la suma de las integrales. Se supone que esto es válido para esta serie infinita. Ahora evaluamos la suma infinita. De la propiedad integral representada en la **Ec. 3.37**, vemos que cada término de la suma es cero siempre que $m \neq n$. Por lo cual el único término restante es cuando $m = n$, lo cual nos da el valor de $1/2$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} D_n \left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^1 f(x_D) * \text{sen}(n\pi x_D) .$$

$$\frac{D_m}{2} = \int_0^1 f(x_D) * \text{sen}(n\pi x_D) .$$

Integrando el lado derecho:

$$\begin{aligned} \int_0^1 (x_D - 1) * \text{sen}(n\pi x_D) &= \int_0^1 x_D * \text{sen}(n\pi x_D) - \int_0^1 \text{sen}(n\pi x_D) \\ &= -\frac{1}{n\pi} x_D \cos(n\pi x_D) \Big|_0^1 + \frac{1}{(n\pi)^2} \text{sen}(n\pi x_D) \Big|_0^1 + \frac{1}{n\pi} \cos(n\pi x_D) \Big|_0^1 \\ &= -\frac{1}{n\pi} \cos(n\pi) + \frac{1}{(n\pi)^2} \text{sen}(n\pi) + \frac{1}{n\pi} \cos(n\pi) - \frac{1}{n\pi} \\ \int_0^1 (x_D - 1) * \text{sen}(n\pi x_D) &= -\frac{1}{n\pi} \Leftrightarrow D_m = -\frac{2}{n\pi} \end{aligned}$$

Que al sustituir en la **Ec. 3.35**, se obtiene:

$$Y_{D_L}^* = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-2}{n\pi} \text{sen}(n\pi x_D) * e^{-(n\pi)^2 t_D} .$$

$$Y_{D_L}^* = -\frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} \text{sen}(n\pi x_D) * e^{-(n\pi)^2 t_D} .$$

Sustituyendo en la **Ec. 3.20**:

$$Y_{D_L} = -\frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} \text{sen}(n\pi x_D) * e^{-(n\pi)^2 t_D} + 1 - x_D$$

$$Y_{DL} = 1 - x_D - \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} \text{sen}(n\pi x_D) * e^{-(n\pi)^2 t_D} . \dots\dots\dots 3.38$$

Que en variables reales es:

$$\frac{Y_i - Y}{Y_i - Y_{wf}} = 1 - \frac{x}{L} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) * e^{-\frac{(n\pi)^2 \beta k}{\phi \mu c_t L^2} t}$$

$$Y_i - Y = (Y_i - Y_{wf}) \left(1 - \frac{x}{L} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) * e^{-\frac{(n\pi)^2 \beta k}{L^2} \frac{\beta k}{\phi \mu c_t} t} \right)$$

$$Y = Y_i - (Y_i - Y_{wf}) \left(1 - \frac{x}{L} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) * e^{-\frac{(n\pi)^2 \beta k}{L^2} \frac{\beta k}{\phi \mu c_t} t} \right)$$

$$Y = Y_i - (Y_i - Y_{wf}) + (Y_i - Y_{wf}) \left(\frac{x}{L} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) * e^{-\frac{(n\pi)^2 \beta k}{L^2} \frac{\beta k}{\phi \mu c_t} t} \right)$$

$$Y = Y_{wf} + (Y_i - Y_{wf}) \left(\frac{x}{L} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) * e^{-\frac{(n\pi)^2 \beta k}{L^2} \frac{\beta k}{\phi \mu c_t} t} \right)$$

$$Y = Y_{wf} + \Delta Y \left(\frac{x}{L} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) * e^{-\frac{(n\pi)^2 \omega \beta t}{L^2}} \right) . \dots\dots\dots 3.39$$

3.3.2 Yacimiento produciendo a presión de fondo fluyendo constante con fronteras externas de no flujo

En este caso, se trata de un yacimiento en el cual se tiene flujo lineal hacia el pozo y además es un yacimiento con frontera de no flujo, es decir presenta flujo pseudo-estacionario, **Figura 3. 3**. En otras palabras, es un yacimiento volumétrico.

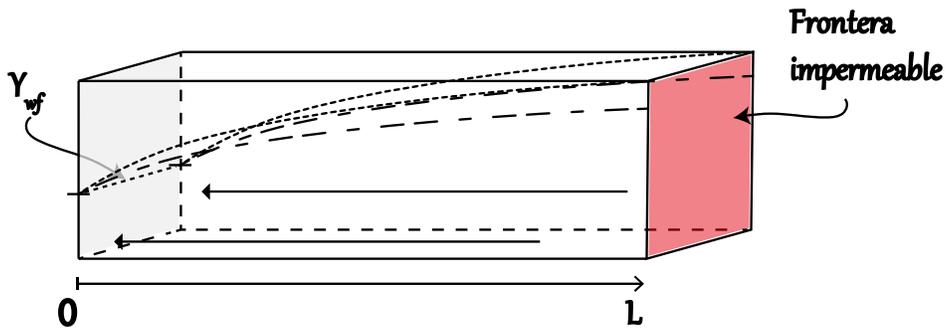


Figura 3. 3 Esquema de un yacimiento que presenta flujo lineal y régimen pseudo-estacionario.

De igual manera que en el caso anterior, la resolución de este problema se hará con las variables adimensionales, para después hacer la transformación a variables reales. En la **Tabla 3. 3** se presenta la ecuación de flujo que modela este sistema y sus respectivas condiciones iniciales y de frontera, tanto para variables reales como para variables adimensionales:

Tabla 3. 3 Planteamiento del problema en variables reales y adimensionales.

	Variables Reales	Variables Adimensionales
Ecuación de flujo	$\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} = \frac{1}{\omega} \frac{\partial Y}{\partial t}$	$\frac{\partial^2 Y_{DL}}{\partial x_D^2} = \frac{\partial Y_{DL}}{\partial t_D}$
Condición Inicial	$Y(x, t = 0) = Y_i$	$Y_{DL}(x_D, t_D = 0) = 0$
Condición de Frontera Interna	$Y(x = 0, t) = Y_{wf}$	$Y_{DL}(x_D = 0, t_D) = 1$
Condición de frontera Externa	$\left. \frac{\partial Y}{\partial x} \right _{x=L} = 0$	$\left. \frac{\partial Y_{DL}}{\partial x_D} \right _{x_D=1} = 0$

Cabe señalar que una característica que presenta este problema es que se requiere de homogeneizar sus condiciones de frontera, pero en este caso al tratarse de condiciones mixtas (tipo Robin), se procede de la siguiente forma:

Sean las condiciones tipo Robin de la forma:

$$U_1(w) = a_1 w(0, t) + a_2 \frac{\partial w(0, t)}{\partial x} = h_1(t) \text{ y } U_2(w) = b_1 w(L, t) + b_2 \frac{\partial w(L, t)}{\partial x} = h_2(t).$$

y las condiciones de frontera del problema:

$$a_1 u(x, t)|_{x=0} + a_2 \left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = h_1(t), \quad b_1 u(L, t) + b_2 \left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right|_{x=L} = h_2(t)$$

Se tiene, que:

$$w(x, t) = \frac{[a_1 h_2(t) - b_1 h_1(t)]x + [b_1 L + b_2]h_1(t) - a_2 h_2(t)}{a_1 b_1 L + a_1 b_2 - b_1 a_2}$$

Tema 3 Soluciones mediante Separación de Variables

$$w(x, t) = \frac{[(1)(0) - (0)(1)]x + [(0)L + (1)](1) - (0)(0)}{(1)(0)L + (1)(1) - (0)(0)} = \frac{1}{1} = 1$$

y por lo tanto:

$$Y_D = Y_{D_L}^* + 1 . \quad \dots\dots\dots 3.40$$

La solución es reescrita en términos de $Y_{D_L}^*$, por lo cual se tiene el nuevo problema:

$$\frac{\partial^2 Y_{D_L}^*}{\partial x_D^2} = \frac{\partial Y_{D_L}^*}{\partial t_D} . \quad \dots\dots\dots 3.41$$

Sujeto a las condiciones, ahora homogéneas:

$$Y_{D_L}^*(x_D, t_D = 0) = -1 , \quad \dots\dots\dots 3.42$$

$$Y_{D_L}^*(x_D = 0, t_D) = 0 , \quad \dots\dots\dots 3.43$$

$$\left. \frac{\partial Y_{D_L}^*}{\partial x_D} \right|_{x_D=1} = 0 . \quad \dots\dots\dots 3.44$$

Se procede de la misma manera que en caso anterior, se buscan las soluciones que tengan la forma:

$$Y_{D_L}^* = X(x_D)T(t_D) = XT , \quad \dots\dots\dots 3.45$$

cuyas derivadas parciales respecto de x_D y t , respectivamente son:

$$\frac{\partial^2 Y_{DL}^*}{\partial x_D^2} = X''T, \dots\dots\dots 3.46$$

$$\frac{\partial Y_{DL}^*}{\partial t} = XT'$$

sustituyendo lo anterior en la **Ec. 3.41**:

$$X''T = XT' \Leftrightarrow \frac{X''}{X} = \frac{T'}{T}, \dots\dots\dots 3.47$$

y:

$$\begin{aligned} X'' - \lambda X &= 0 \\ T' - \lambda T &= 0 \end{aligned}, \dots\dots\dots 3.48$$

que al resolver para T , se tiene lo siguiente:

$$T(t_D) = e^{\lambda t_D + C} = e^C e^{\lambda t_D} = A e^{\lambda t_D}, \dots\dots\dots 3.49$$

de igual manera la única λ que proporciona un comportamiento congruente al real es para $\lambda = -\lambda$ Por lo tanto la **Ec. 3.49**, es:

$$T(t_D) = A e^{-\lambda t_D}. \dots\dots\dots 3.50$$

Ya que se conoce el signo de λ , se procede a solucionar en X :

$$X'' + \lambda X = 0$$

y se llega al mismo resultado anterior:

$$X(x_D) = B \cos(x_D \sqrt{\lambda}) + C \text{sen}(x_D \sqrt{\lambda}). \dots\dots\dots 3.51$$

Tema 3 Soluciones mediante Separación de Variables

Para encontrar el valor de las constantes se evalúan las condiciones de frontera.
Para el caso de la condición de frontera interna:

$$Y_{D_L}^*(x_D = 0, t_D) = 0$$

Se tendrá que:

$$X(x_D = 0) = B \cos(0 * \sqrt{\lambda}) + C \operatorname{sen}(0 * \sqrt{\lambda}) = 0$$

$$B(1) + C(0) = 0$$

$$B = 0 .$$

Para el caso de la condición de frontera externa:

$$\left. \frac{\partial Y_{D_L}^*}{\partial x_D} \right|_{x_D=1} = 0 .$$

Se tendrá:

$$X(x_D) = C \operatorname{sen}(x_D \sqrt{\lambda})$$

$$\frac{\partial X}{\partial x_D} = C \sqrt{\lambda} \cos(x_D \sqrt{\lambda})$$

$$\left. \frac{\partial X}{\partial x_D} \right|_{x_D=1} = C \sqrt{\lambda} \cos((1) * \sqrt{\lambda}) = 0$$

$$C * \cos(\sqrt{\lambda}) = 0 .$$

En este punto se tienen dos posibilidades: que $C = 0$, y que $\cos(\sqrt{\lambda}) = 0$, dado que si $B = C = 0$, se tienen las soluciones triviales, las cuales no nos interesan en este caso, se plantea entonces la segunda opción.

Para que $\cos(x)$ asuma el valor de cero, se tienen las siguientes posibilidades:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{2}\right) = \dots \cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\right) = 0, \quad \forall n = 1, 2, 3 \dots$$

Por lo tanto:

$$\cos(\sqrt{\lambda}) = 0,$$

$$\text{angcos}(\cos(\sqrt{\lambda})) = \text{angcos}(0),$$

$$\sqrt{\lambda} = \frac{(2n - 1)\pi}{2}$$

$$\lambda = \left(\frac{(2n - 1)\pi}{2}\right)^2$$

Sustituyendo este valor en las **Ecs. 3.50** y **3.51**, se tiene:

$$\begin{aligned} T(x_D) &= Ae^{-\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\right)^2 t_D} \\ X(x_D) &= C \text{sen}\left(\frac{(2n - 1)\pi}{2} x_D\right) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots 3.52$$

Por lo cual la solución, planteada como $Y_{DL}^* = X(x_D)T(t_D)$, es:

$$Y_{DL}^* = C \text{sen}\left(\frac{(2n - 1)\pi}{2} x_D\right) * Ae^{-\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\right)^2 t_D}, \quad \dots\dots\dots 3.53$$

$$Y_{DL}^* = D \text{sen}\left(\frac{(2n - 1)\pi}{2} x_D\right) * e^{-\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\right)^2 t_D}, \quad \forall n = 1,2,3 \dots, \quad \dots\dots\dots 3.54$$

donde $D = C * A$. Esta es la solución al problema descrito en **3.41**, pero puede observarse que existen n soluciones al problema, a lo cual, echando mano del principio de superposición, se tiene entonces que:

$$Y_{DL}^* = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \text{sen}\left(\frac{(2n - 1)\pi}{2} x_D\right) * e^{-\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\right)^2 t_D}. \quad \dots\dots\dots 3.55$$

Tema 3 Soluciones mediante Separación de Variables

Observe que en la ecuación anterior tiene la forma de una serie de Fourier, y además se tiene aún, una constante de la cual se desconoce su valor, para ello se hace uso de la condición inicial.

$$Y_{D_L}^*(x_D, t_D = 0) = -1$$

Por lo tanto, la **Ec. 3.55** valuada en la C.I. es:

$$Y_{D_L}^*(x_D, t_D = 0) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n \operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi}{2} x_D\right) * e^{-\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\right)^2 (0)} = -1.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} D_n \operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi}{2} x_D\right) * (1) = -1.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} D_n \operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi}{2} x_D\right) = -1. \quad \dots\dots\dots 3.56$$

Para determinar D_n , multiplicamos ambos lados de la **Ec. 3.56** por $\operatorname{sen}\left(\frac{(2m-1)\pi}{2} x_D\right)$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} D_n \operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi}{2} x_D\right) * \operatorname{sen}\left(\frac{(2m-1)\pi}{2} x_D\right) = -\operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi}{2} x_D\right).$$

Integrando de 0 a 1, (limites adimensionales del problema):

$$\sum_{n=1}^{\infty} D_n \int_0^1 \operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi}{2} x_D\right) * \operatorname{sen}\left(\frac{(2m-1)\pi}{2} x_D\right) = \int_0^1 -\operatorname{sen}\left(\frac{(2m-1)\pi}{2} x_D\right)$$

De la propiedad integral 3.37, vemos que cada término de la suma es cero siempre que $m \neq n$. Por lo cual el único término restante es cuando $m = n$, lo cual nos da el valor de 1/2.

$$\sum_{n=1}^{\infty} D_n \left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^1 -\operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi}{2} x_D\right).$$

$$\frac{D_m}{2} = \int_0^1 -\text{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}x_D\right).$$

Integrando el lado derecho:

$$\begin{aligned} \int_0^1 -\text{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}x_D\right) &= \frac{2}{(2n-1)\pi} \cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}x_D\right) \Big|_0^1 \\ &= \frac{2}{(2n-1)\pi} \cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\right) - \frac{2}{(2n-1)\pi} \\ &= \frac{2}{(2n-1)\pi} \left(\cos\left(\frac{2}{(2n-1)\pi}\right) - 1\right) \end{aligned}$$

$$\int_0^1 -\text{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}x_D\right) = \frac{2}{(2n-1)\pi} \left(\cos\left(\frac{2}{(2n-1)\pi}\right) - 1\right) \Leftrightarrow D_m = -\frac{4}{(2n-1)\pi}$$

Que al sustituir en la **Ec. 3.55**, se obtiene:

$$Y_{DL}^* = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{(2n-1)\pi} \text{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}x_D\right) * e^{-\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\right)^2 t_D}.$$

$$Y_{DL}^* = -\frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)} \text{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}x_D\right) * e^{-\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\right)^2 t_D}.$$

De tal forma que la solución en términos de Y_{DL} , es:

$$Y_{DL} = -\frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)} \text{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}x_D\right) * e^{-\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\right)^2 t_D} + 1$$

$$Y_{DL} = 1 - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)} \text{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}x_D\right) * e^{-\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\right)^2 t_D}, \quad \dots\dots\dots 3.57$$

que en variables reales es:

$$\frac{Y_i - Y}{Y_i - Y_{wf}} = 1 - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)} \text{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\right) * e^{-\left(\frac{(2n-1)\pi}{2L}\right)^2 \frac{\beta k}{\phi \mu c_t} t}$$

Tema 3 Soluciones mediante Separación de Variables

$$Y_i - Y = (Y_i - Y_{wf}) \left(1 - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)} \operatorname{sen} \left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L} \right) * e^{-\left(\frac{(2n-1)\pi}{2L}\right)^2 \frac{\beta k}{\phi \mu c_t} t} \right)$$

$$Y = Y_i - (Y_i - Y_{wf}) \left(1 - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)} \operatorname{sen} \left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L} \right) * e^{-\left(\frac{(2n-1)\pi}{2L}\right)^2 \omega \beta t} \right)$$

$$Y = Y_i - (Y_i - Y_{wf}) + (Y_i - Y_{wf}) \left(\frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)} \operatorname{sen} \left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L} \right) * e^{-\left(\frac{(2n-1)\pi}{2L}\right)^2 \omega \beta t} \right)$$

$$Y = Y_{wf} + (Y_i - Y_{wf}) \left(\frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)} \operatorname{sen} \left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L} \right) * e^{-\left(\frac{(2n-1)\pi}{2L}\right)^2 \omega \beta t} \right)$$

$$Y = Y_{wf} + \Delta Y \left(\frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)} \operatorname{sen} \left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L} \right) * e^{-\left(\frac{(2n-1)\pi}{2L}\right)^2 \omega \beta t} \right). \quad \dots\dots 3.58$$

3.4 Solución a problemas de flujo radial

3.4.1 Yacimiento radial infinito produciendo a gasto constante

Para el caso de estudio, de un yacimiento radial infinito produciendo a presión de fondo fluyendo constante, **Figura 3. 4**, la ecuación diferencial que modela el comportamiento de la presión a lo largo del yacimiento y a través del tiempo, como las respectivas condiciones se presentan en la **Tabla 3. 4**:

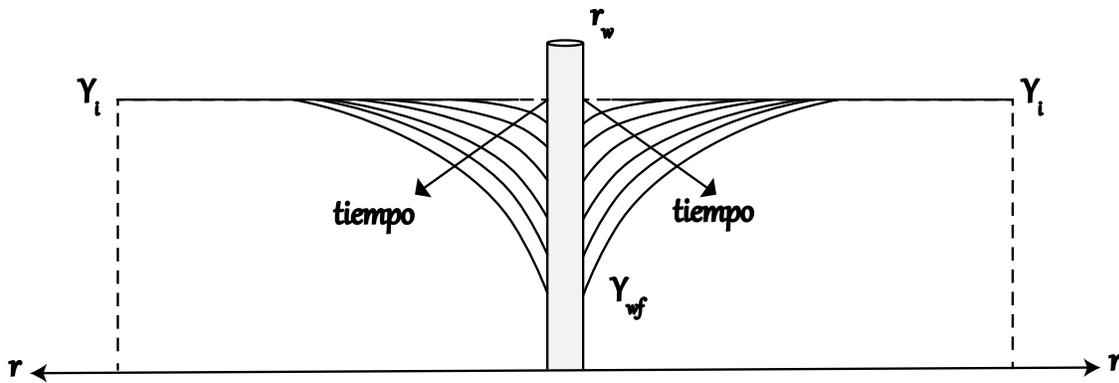


Figura 3. 4 Esquema de un yacimiento que presenta flujo radial y estado transitorio explotado a gasto constante.

Tabla 3. 4 Planteamiento del problema en variables reales y adimensionales.

	Variables Reales	Variables Adimensionales
Ecuación de flujo	$\frac{\partial^2 Y}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial Y}{\partial r} - \frac{1}{\omega} \frac{\partial Y}{\partial t} = 0$	$\frac{\partial^2 Y_D}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial Y_D}{\partial r_D} - \frac{\partial Y_D}{\partial t_D} = 0$
Condición Inicial	$Y(r, t = 0) = Y_i$	$Y_D(r_D, t_D = 0) = 0$
Condición de Frontera Interna	$r \frac{\partial Y}{\partial r} \Big _{r \rightarrow 0} = -\epsilon \frac{qB\mu}{kh}$	$r_D \frac{\partial Y_D}{\partial r_D} \Big _{r_D \rightarrow 0} = -1$
Condición de frontera Externa	$Y(r \rightarrow \infty, t) = Y_i$	$Y_D(r_D \rightarrow \infty, t_D) = 0$

A simple vista las ecuaciones no permiten aplicar el método de separación de variables, ya que constan de más términos, es por lo que, se emplea un cambio de variable denominado, Transformación de Boltzmann.

3.4.1.2 Transformada de Boltzmann

El cambio de variable a través de la transformada de Boltzmann es un método que permite pasar de una ecuación diferencial parcial a una ecuación diferencial ordinaria, por medio de la inclusión de una nueva variable, denominada “Variable de Boltzmann”, lo cual se realiza mediante un procedimiento puramente algebraico.

Para el problema descrito en variables adimensionales, llamaremos B , en a la relación:

$$B = ar_D^b t_D^c, \dots\dots\dots 3.59$$

y cuyas derivadas parciales respecto de r_D y t_D , respectivamente son:

$$\frac{\partial B}{\partial r_D} = abr_D^{b-1}t_D^c, \dots\dots\dots 3.60$$

$$\frac{\partial^2 B}{\partial r_D^2} = ab(b-1)r_D^{b-2}t_D^c, \dots\dots\dots 3.61$$

$$\frac{\partial B}{\partial t_D} = acr_D^b t_D^{c-1}. \dots\dots\dots 3.62$$

La **Ec. 3.59** será la variable de Boltzmann que utilizaremos para transformar nuestra ecuación a una que permita aplicar el método de separación de variables. Para encontrar el valor de los coeficientes a , b y c , se parte de la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial^2 Y_D}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial Y_D}{\partial r_D} - \frac{\partial Y_D}{\partial t_D} = 0, \dots\dots\dots 3.63$$

que en forma expandida es:

$$\frac{\partial}{\partial r_D} \left(\frac{\partial Y_D}{\partial r_D} \right) + \frac{1}{r_D} \frac{\partial Y_D}{\partial r_D} - \frac{\partial Y_D}{\partial t_D} = 0. \dots\dots\dots 3.64$$

Aplicando regla de la cadena para B :

$$\frac{\partial}{\partial r_D} \frac{\partial B}{\partial B} \left(\frac{\partial Y_D}{\partial r_D} \frac{\partial B}{\partial B} \right) + \frac{1}{r_D} \frac{\partial Y_D}{\partial r_D} \frac{\partial B}{\partial B} - \frac{\partial Y_D}{\partial t_D} \frac{\partial B}{\partial B} = 0$$

$$\frac{\partial B}{\partial r_D} \frac{\partial}{\partial B} \left(\frac{\partial Y_D}{\partial B} \frac{\partial B}{\partial r_D} \right) + \frac{1}{r_D} \frac{\partial B}{\partial r_D} \frac{\partial Y_D}{\partial B} - \frac{\partial B}{\partial t_D} \frac{\partial Y_D}{\partial B} = 0$$

Desarrollando:

$$\frac{\partial B}{\partial r_D} \left[\frac{\partial^2 Y_D}{\partial B^2} \frac{\partial B}{\partial r_D} + \frac{\partial}{\partial B} \left(\frac{\partial B}{\partial r_D} \right) * \frac{\partial Y_D}{\partial B} \right] + \frac{1}{r_D} \frac{\partial B}{\partial r_D} \frac{\partial Y_D}{\partial B} - \frac{\partial B}{\partial t_D} \frac{\partial Y_D}{\partial B} = 0$$

Tema 3 Soluciones mediante Separación de Variables

$$\frac{\partial^2 Y_D}{\partial B^2} \left(\frac{\partial B}{\partial r_D} \right)^2 + \frac{\partial B}{\partial r_D} \frac{\partial}{\partial B} \left(\frac{\partial B}{\partial r_D} \right) \frac{\partial Y_D}{\partial B} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial B}{\partial r_D} \frac{\partial Y_D}{\partial B} - \frac{\partial B}{\partial t_D} \frac{\partial Y_D}{\partial B} = 0$$

$$\frac{\partial^2 Y_D}{\partial B^2} \left(\frac{\partial B}{\partial r_D} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial r_D} \frac{\partial B}{\partial r_D} \frac{\partial Y_D}{\partial B} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial B}{\partial r_D} \frac{\partial Y_D}{\partial B} - \frac{\partial B}{\partial t_D} \frac{\partial Y_D}{\partial B} = 0$$

$$\frac{\partial^2 Y_D}{\partial B^2} \left(\frac{\partial B}{\partial r_D} \right)^2 + \frac{\partial^2 B}{\partial r_D^2} \frac{\partial Y_D}{\partial B} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial B}{\partial r_D} \frac{\partial Y_D}{\partial B} - \frac{\partial B}{\partial t_D} \frac{\partial Y_D}{\partial B} = 0$$

Factorizando $\partial Y_D / \partial B_D$ del segundo, tercer y cuarto término:

$$\frac{\partial^2 Y_D}{\partial B^2} \left(\frac{\partial B}{\partial r_D} \right)^2 + \frac{\partial Y_D}{\partial B} \left(\frac{\partial^2 B}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial B}{\partial r_D} - \frac{\partial B}{\partial t_D} \right) = 0, \quad \dots\dots\dots 3.65$$

Dividendo entre $\left(\frac{\partial B}{\partial r_D} \right)^2$:

$$\frac{\partial^2 Y_D}{\partial B^2} + \frac{\partial Y_D}{\partial B} \left(\frac{1}{\left(\frac{\partial B}{\partial r_D} \right)^2} \right) \left(\frac{\partial^2 B}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial B}{\partial r_D} - \frac{\partial B}{\partial t_D} \right) = 0, \quad \dots\dots\dots 3.66$$

sustituyendo las **Ecs. 3. 60 a 3. 62** en **3. 66**:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Y_D}{\partial B^2} + \frac{\partial Y_D}{\partial B} \left(\frac{1}{(abr_D^{b-1}t_D^c)^2} \right) \left(ab(b-1)r_D^{b-2}t_D^c + \frac{1}{r_D} abr_D^{b-1}t_D^c - acr_D^b t_D^{c-1} \right) &= 0 \\ \frac{\partial^2 Y_D}{\partial B^2} + \frac{\partial Y_D}{\partial B} \left(\frac{1}{a^2 b^2 r_D^{2b-2} t_D^{2c}} \right) \left(ab^2 r_D^{b-2} t_D^c - abr_D^{b-2} t_D^c + \frac{1}{r_D} abr_D^{b-1} t_D^c - acr_D^b t_D^{c-1} \right) &= 0 \\ \frac{\partial^2 Y_D}{\partial B^2} + \frac{\partial Y_D}{\partial B} \left(\frac{ab^2 r_D^{b-2} t_D^c}{a^2 b^2 r_D^{2b-2} t_D^{2c}} - \frac{abr_D^{b-2} t_D^c}{a^2 b^2 r_D^{2b-2} t_D^{2c}} + \frac{1}{r_D} \frac{(abr_D^{b-1} t_D^c)}{a^2 b^2 r_D^{2b-2} t_D^{2c}} - \frac{acr_D^b t_D^{c-1}}{a^2 b^2 r_D^{2b-2} t_D^{2c}} \right) &= 0 \\ \frac{\partial^2 Y_D}{\partial B^2} + \frac{\partial Y_D}{\partial B} \left(a^{-1} r_D^{-b} t_D^{-c} - a^{-1} b^{-1} r_D^{-b} t_D^{-c} + a^{-1} b^{-1} r_D^{-b} t_D^{-c} - a^{-1} b^{-2} c r_D^{-b+2} t_D^{-c-1} \right) &= 0 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 Y_D}{\partial B^2} + \frac{\partial Y_D}{\partial B} (a^{-1} r_D^{-b} t_D^{-c} - a^{-1} b^{-2} c r_D^{-b+2} t_D^{-c-1}) = 0, \quad \dots\dots\dots 3.67$$

para que la **Ec. 3.67** se reduzca, se toman valores de a, b y c que simplifiquen la ecuación, para tal caso se supone un valor de $b = 2$ y $c = -1$, con lo cual la ecuación se reduce a:

$$\frac{\partial^2 Y_D}{\partial B^2} + \frac{\partial Y_D}{\partial B} (a^{-1} r_D^{-2} t_D - a^{-1} (2^{-2}) (-1) r_D^0 t_D^0) = 0$$

$$\frac{\partial^2 Y_D}{\partial B^2} + \frac{\partial Y_D}{\partial B} \left(a^{-1} \frac{t_D}{r_D^2} + \frac{1}{4} a^{-1} \right) = 0, \quad \dots\dots\dots 3.68$$

y si $a = 1/4$, entonces:

$$\frac{\partial^2 Y_D}{\partial B^2} + \frac{\partial Y_D}{\partial B} \left(\frac{4t_D}{r_D^2} + 1 \right) = 0, \quad \dots\dots\dots 3.69$$

regresando a la **Ec. 3.59**, la variable de Boltzmann queda definida como:

$$B = \frac{4t_D}{r_D^2}, \quad \dots\dots\dots 3.70$$

y por lo tanto, la **Ec. 3.69**, es:

$$\frac{\partial^2 Y_D}{\partial B^2} + \frac{\partial Y_D}{\partial B} \left(\frac{1}{B} + 1 \right) = 0, \quad \dots\dots\dots 3.71$$

la cual al depender solo de la variable B , puede escribirse como una ecuación diferencial ordinaria:

$$\frac{d^2 Y_D}{dB^2} + \frac{dY_D}{dB} \left(\frac{1}{B} + 1 \right) = 0, \quad \dots\dots\dots 3.72$$

Tema 3 Soluciones mediante Separación de Variables

Para comprobar que la **Ec. 3.72** puede solucionarse en la variable de Boltzmann se debe de cumplir que el número de condiciones deben ser iguales en número, en la ecuación original y en la ecuación transformada.

Ecuación original	Ecuación transformada
$Y_D(r_D, t_D = 0) = 0$	$Y_D(B \rightarrow \infty) = 0$
$Y_D(r_D \rightarrow \infty, t_D > 0) = 0$	$Y_D(B \rightarrow \infty) = 0$
$r_D \frac{\partial Y_D}{\partial r_D}(r_D \rightarrow 0, t_D > 0) = -1$	$2B_D \frac{dY_D}{dB}(B \rightarrow 0) = -1$

Comprobado lo anterior, se puede decir la ecuación transformada tiene solución en la variable de Boltzmann, se procede a solucionar la **Ec. 3.72** por el método de separación de variables:

Si $U = dY_D/dB$

$$\frac{dU}{dB} + U \left(\frac{1}{B} + 1 \right) = 0$$

$$\frac{dU}{U} + \frac{dB}{B} + dB = 0, \dots\dots\dots 3.73$$

e integrando:

$$\ln|U| + \ln|B| + B = C, \dots\dots\dots 3.74$$

donde C es una constante de integración. Si simplificamos la ecuación inmediata anterior:

$$\ln|UB| = C - B$$

$$UB = e^{C-B}$$

$$UB = C_2 e^{-y}$$

y recordando que $U = dY_D/dB$:

$$B \frac{dY_D}{dB} = C_2 e^{-y}, \quad \dots\dots\dots 3.75$$

y de la tercera condición:

$$B \frac{dY_D}{dB} (B \rightarrow 0) = C_2 \lim_{B \rightarrow 0} e^{-B} = -\frac{1}{2}$$

$$C_2 = -\frac{1}{2}$$

Sustituyendo en 3.75:

$$B \frac{dY_D}{dB} = -\frac{1}{2} e^{-B} \Leftrightarrow dY_D = -\frac{1}{2} \frac{e^{-B}}{B} dB$$

e integrando en ambos lados:

$$\int_0^{Y_D} dY_D = -\frac{1}{2} \int_{\infty}^B \frac{e^{-B}}{B} dB$$

La integral del lado derecho es una integral muy interesante en el ámbito de las matemáticas, esta es conocida como, Integral Exponencial y se denota por $E_i(x)$. Entonces la solución a la **Ec. 3.63** viene dada por:

$$Y_D = -\frac{1}{2} E_i(-B) = -\frac{1}{2} E_i\left(-\frac{r_D^2}{4t_D}\right), \quad \dots\dots\dots 3.76$$

Que en variables reales es:

Tema 3 Soluciones mediante Separación de Variables

$$\frac{kh}{\epsilon\alpha_R q B \mu} \Delta Y = -\frac{1}{2} E_i \left(-\frac{\frac{r^2}{r_w^2}}{4 \frac{\beta k t}{\phi \mu c_t r_w^2}} \right)$$

$$Y_i - Y_{wf} = -\frac{\epsilon\alpha_R q B \mu}{2kh} E_i \left(-\frac{\phi \mu c_t r_w^2 r^2}{4\beta k t r_w^2} \right)$$

$$Y_{wf} = Y_i + \frac{\epsilon\alpha_R q B \mu}{2kh} E_i \left(-\frac{\phi \mu c_t r^2}{4\beta k t} \right). \dots\dots\dots 3.77$$

3.4.2 Pozo produciendo a gasto constante en un yacimiento radial con recarga en la frontera externa

Un yacimiento radial cuya frontera externa tiene un mantenimiento de presión en la cual un pozo se encuentra produciendo a presión de fondo fluyendo constante, se esquematiza en la **Figura 3. 5**. La ecuación diferencial que modela este yacimiento, así como las respectivas condiciones del problema se presentan en la **Tabla 3. 5**:

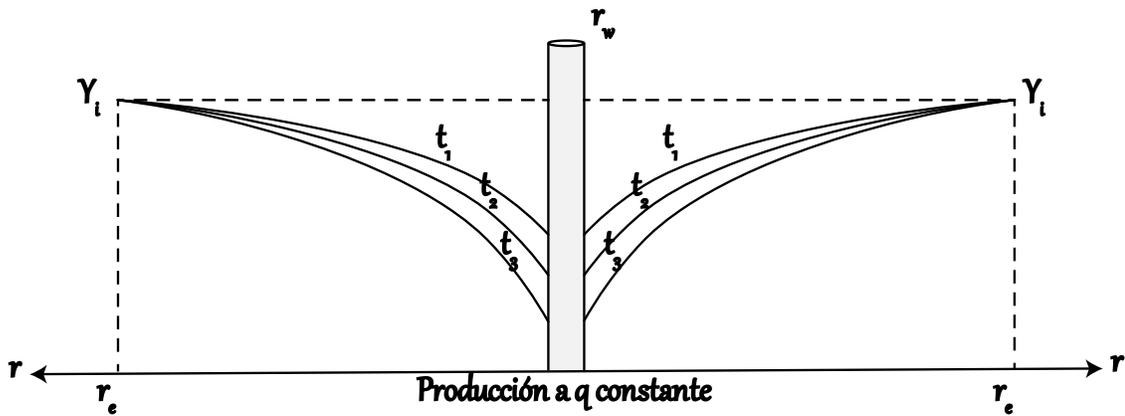


Figura 3. 5 Esquema de un yacimiento que presenta flujo radial y estado estacionario.

Un dato, de mucha utilidad en este problema, es que, al tratarse de un yacimiento con mantenimiento de presión, el estado de flujo en el yacimiento es estacionario, lo cual implica que:

$$\frac{\partial Y_D}{\partial t_D} = 0, \dots\dots\dots 3.78$$

Tabla 3. 5 Planteamiento del problema en variables reales y adimensionales.

	Variables Reales	Variables Adimensionales
Ecuación de flujo	$\frac{\partial^2 Y}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial Y}{\partial r} - \frac{1}{\omega} \frac{\partial Y}{\partial t} = 0$	$\frac{\partial^2 Y_D}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial Y_D}{\partial r_D} - \frac{\partial Y_D}{\partial t_D} = 0$
Condición Inicial	$Y(r, t = 0) = Y_i$	$Y_D(r_D, t_D = 0) = 0$
Condición de Frontera Interna	$r \frac{\partial Y}{\partial r} \Big _{r=r_w} = -\epsilon \frac{qB\mu}{kh}$	$r_D \frac{\partial Y_D}{\partial r_D} \Big _{r_D=1} = -1$
Condición de frontera Externa	$Y(r = r_e, t) = Y_i$	$Y_D(r_D = r_{eD}, t_D) = 0$

Esto debido a que, para este caso particular, se obtendrán la solución asintótica del problema, en el capítulo posterior, se abordará el tema de las transformada de Laplace, con lo cual se obtendrá la solución completa para este caso. Teniendo en cuenta lo anterior, el problema puede reducirse a:

$$\frac{\partial^2 Y_D}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial Y_D}{\partial r_D} = 0, \quad \dots\dots\dots 3.79$$

que, al tratarse de una expresión en una sola variable, podemos escribirla en términos de derivadas ordinarias:

$$\frac{d^2 Y_D}{dr_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{dY_D}{dr_D} = 0, \quad \dots\dots\dots 3.80$$

a la cual podemos aplicarle el método de separación de variables. Si tomamos a $U = dY_D/dr_D$, entonces la **Ec. 3.80**:

$$\frac{dU}{dr_D} + \frac{U}{r_D} = 0, \dots\dots\dots 3.81$$

Y multiplicando por dr_D/U :

$$\frac{dU}{U} + \frac{dr_D}{r_D} = 0, \dots\dots\dots 3.82$$

E integrando:

$$\int \frac{dU}{U} + \int \frac{dr_D}{r_D} = 0$$

$$\ln(U) + \ln(r_D) = C$$

$$\ln(Ur_D) = C$$

$$Ur_D = A, \dots\dots\dots 3.83$$

Y como $U = dY_D/dr_D$:

$$\frac{dY_D}{dr_D} r_D = A$$

$$dY_D = \frac{A}{r_D} dr_D$$

$$Y_D = A \ln(r_D) + B, \dots\dots\dots 3.84$$

y de la condición de frontera interna:

$$r_D \left. \frac{\partial Y_D}{\partial r_D} \right|_{r_D=1} = -1$$

$$\frac{\partial Y_D}{\partial r_D} = \frac{A}{r_D} \Leftrightarrow r_D \frac{\partial Y_D}{\partial r_D} = A$$

Tema 3 Soluciones mediante Separación de Variables

$$A = -1$$

De la misma manera, para la condición de frontera externa:

$$Y_D(r_D = r_{eD}, t_D) = 0$$

$$(-1) * \ln(r_{eD}) + B = 0$$

$$B = \ln(r_{eD})$$

Por lo tanto, la solución es:

$$Y_D = -\ln(r_D) + \ln(r_{eD}),$$

$$Y_D = \ln(r_{eD}/r_D), \dots\dots\dots 3.85$$

que en variables reales es:

$$\frac{kh}{\epsilon\alpha_R q B \mu} \Delta Y = \ln\left(\frac{r_e}{\frac{r_w}{r}}\right)$$

$$Y_i - Y_{wf} = \frac{\epsilon\alpha_R q B \mu}{kh} \ln\left(\frac{r_e}{r}\right)$$

$$Y_{wf} = Y_i - \frac{\epsilon\alpha_R q B \mu}{kh} \ln\left(\frac{r_e}{r}\right). \dots\dots\dots 3.86$$

3.4.3 Pozo produciendo a gasto constante en un yacimiento radial con frontera impermeable

Un yacimiento radial cuya frontera externa no presenta flujo y que se encuentra produciendo a presión de fondo fluyendo constante, se esquematiza en la **Figura 3. 6**. La ecuación diferencial que modela este yacimiento, así como las respectivas condiciones del problema se presentan en la **Tabla 3. 6**:

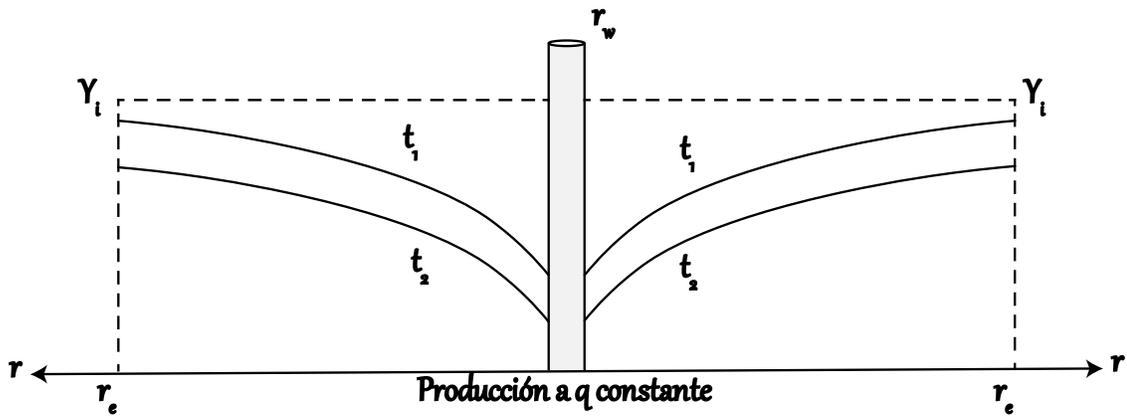


Figura 3. 6 Esquema de un yacimiento que presenta flujo radial y estado pseudo-estacionario.

Para este caso se tiene un yacimiento que presenta un estado de flujo pseudo-estacionario, por lo cual:

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = cte . \dots\dots\dots 3.87$$

Tabla 3. 6 Planteamiento del problema en variables reales y adimensionales.

	Variables Reales	Variables Adimensionales
Ecuación de flujo	$\frac{\partial^2 Y}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial Y}{\partial r} - \frac{1}{\omega} \frac{\partial Y}{\partial t} = 0$	$\frac{\partial^2 Y_D}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial Y_D}{\partial r_D} - \frac{\partial Y_D}{\partial t_D} = 0$
Condición Inicial	$Y(r, t = 0) = Y_i$	$Y_D(r_D, t_D = 0) = 0$
Condición de Frontera Interna	$r \frac{\partial Y}{\partial r} \Big _{r=r_w} = -\epsilon \frac{qB\mu}{kh}$	$r_D \frac{\partial Y_D}{\partial r_D} \Big _{r_D=1} = -1$
Condición de frontera Externa	$r \frac{\partial Y}{\partial r} \Big _{r=r_e} = 0$	$r_D \frac{\partial Y_D}{\partial r_D} \Big _{r_D=r_{eD}} = 0$

Dado que no se tiene más información sobre a que es igual la constante, pero se sabe que el yacimiento es volumétrico, se puede emplear la ecuación de balance de materia para un yacimiento de aceite bajo-saturado (**Gallardo [7]**):

$$N_p B_o = N B_{oi} \left[\frac{B_o - B_{oi}}{B_{oi}} + C_t \Delta Y \right]$$

$$N_p B_o = N(B_o - B_{oi}) + N B_{oi} C_t \Delta Y, \quad \dots\dots\dots 3.88$$

despejando a ΔY :

$$\Delta Y = \frac{N_p B_o}{N B_{oi} C_t} - \frac{B_o - B_{oi}}{B_{oi} C_t}$$

y derivando con respecto de t :

$$\frac{d\Delta Y}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{N_p B_o}{N B_{oi} C_t} - \frac{B_o - B_{oi}}{B_{oi} C_t} \right)$$

$$\frac{d}{dt}(Y_i - Y) = \frac{d}{dt}\left(\frac{N_p B_o}{NB_{oi}C_t}\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{B_o - B_{oi}}{B_{oi}C_t}\right)$$

Dado que el factor de volumen (B_o), la compresibilidad (C_o), el volumen original (N) y la presión inicial (Y_i) pueden considerarse constantes, se tiene que:

$$-\frac{d}{dt}Y = \frac{B_o}{NB_{oi}C_t} \frac{d}{dt}N_p, \quad \dots\dots\dots 3.89$$

y recordando que la producción acumulada de aceite es igual a la integral de 0 a t , del gasto, es decir:

$$N_p = \int_0^t q(t)dt \Leftrightarrow \frac{dN_p}{dt} = q(t). \quad \dots\dots\dots 3.90$$

Sustituyendo la **Ec. 3.90** en la **Ec. 3.89** :

$$-\frac{d}{dt}Y = \frac{B_o}{NB_{oi}C_t} q$$

$$\frac{dY}{dt} = -\frac{qB_o}{NB_{oi}C_t}. \quad \dots\dots\dots 3.91$$

La **Ec. 3.91** representa la variación de la presión con respecto del tiempo en un sistema cerrado. Sustituyendo en la ecuación de flujo se tendrá que:

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial Y}{\partial r} + \frac{1}{\omega NB_{oi}C_t} q = 0$$

y dado que ahora solo se tiene la derivada con respecto de r , se puede reescribir en forma compacta, como:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dY}{dr} \right) + \frac{1}{\omega NB_{oi} C_t} \frac{qB_o}{\omega NB_{oi} C_t} = 0. \quad \dots\dots\dots 3.92$$

Recordando que el volumen original de hidrocarburos a condiciones de yacimiento es $V_{HCS} = NB_{oi} = \pi h(r_e^2 - r_w^2)\phi$, y haciendo que:

$$W = \frac{qB_o}{\omega NB_{oi} C_t} = \frac{\phi \mu C_t}{k} \frac{qB_o}{V_{HCS} C_t} = \frac{qB_o \mu \phi}{k \pi h (r_e^2 - r_w^2) \phi} = \frac{qB_o \mu}{k \pi h (r_e^2 - r_w^2)}$$

sustituyendo W en la **Ec. 3.92** y procediendo a aplicar el método de separación de variables, se tendrá que:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dY}{dr} \right) = -W$$

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dY}{dr} \right) = -Wr$$

e integrando con respecto a r :

$$\int \frac{d}{dr} \left(r \frac{dY}{dr} \right) dr = -W \int r dr$$

$$r \frac{dY}{dr} = -\frac{W}{2} r^2 + C. \quad \dots\dots\dots 3.93$$

Evaluando la segunda condición de frontera:

$$r \frac{\partial Y}{\partial r} \Big|_{r=r_e} = 0$$

se tendrá:

$$C - \frac{W}{2} r_e^2 = 0$$

$$C = \frac{W}{2} r_e^2. \dots\dots\dots 3.94$$

Sustituyendo la **Ec. 3.94** en la **Ec. 3.93**:

$$r \frac{dY}{dr} = -\frac{W}{2} r^2 + \frac{W}{2} r_e^2$$

y dividiendo ambos lados entre r , e integrando de r_w a r :

$$\int_{r_w}^r \frac{dY}{dr} dr = -\int_{r_w}^r \frac{W}{2} r dr + \int_{r_w}^r \frac{W r_e^2}{2 r} dr$$

$$\int_{r_w}^r \frac{dY}{dr} dr = -\frac{W}{2} \int_{r_w}^r r dr + \frac{W}{2} r_e^2 \int_{r_w}^r \frac{1}{r} dr$$

$$Y(r) - Y(r_w) = -\frac{W r^2}{2} \Big|_{r_w}^r + \frac{W}{2} r_e^2 \ln|r| \Big|_{r_w}^r$$

$$Y(r) - Y_{wf} = -\frac{W}{4} (r^2 - r_w^2) + \frac{W}{2} r_e^2 \ln \left| \frac{r}{r_w} \right|. \dots\dots\dots 3.95$$

Recordando que $W = qB_o\mu/k\pi h(r_e^2 - r_w^2)$. Sustituyendo W en la ecuación anterior:

$$Y(r) = Y_{wf} + \frac{qB\mu}{2\pi kh} \frac{r_e^2}{r_e^2 - r_w^2} \ln \left| \frac{r}{r_w} \right| - \frac{qB\mu}{4\pi kh} \frac{r^2 - r_w^2}{r_e^2 - r_w^2}$$

$$Y(r) = Y_{wf} + \frac{qB\mu}{2\pi kh} \frac{r_e^2}{r_e^2 - r_w^2} \ln \left| \frac{r}{r_w} \right| - \frac{qB\mu}{4\pi kh} \frac{r^2 - r_w^2}{r_e^2 - r_w^2}. \dots\dots\dots 3.96$$

La **Ec. 3.96** es la solución al problema para cualquier radio. Para obtener una expresión que incluya al tiempo, basta con integrar la **Ec. 3.91** con respecto de t desde 0 hasta t .

$$\int_0^t \frac{dY}{dt} dt = -\frac{qB_o}{NB_{oi}C_t} \int_0^t dt$$

$$Y(t) - Y(0) = -\frac{qB_o}{\pi h(r_e^2 - r_w^2)\phi C_t} t$$

$$Y(t) - Y_i = -\frac{qB_o}{\pi h(r_e^2 - r_w^2)\phi C_t} t$$

$$Y(t) = Y_i - \frac{qB_o}{\pi h(r_e^2 - r_w^2)\phi C_t} t. \dots\dots\dots 3.97$$

Igualando las Ecs. 3.96 y 3.97:

$$Y_i - \frac{qB_o}{\pi h(r_e^2 - r_w^2)\phi C_t} t = Y_{wf} + \frac{qB\mu}{2\pi kh} \frac{r_e^2}{r_e^2 - r_w^2} \ln \left| \frac{r}{r_w} \right| - \frac{qB\mu}{4\pi kh} \frac{r^2 - r_w^2}{r_e^2 - r_w^2}$$

$$Y_{wf} = Y_i + \frac{qB\mu}{4\pi kh} \frac{r^2 - r_w^2}{r_e^2 - r_w^2} - \frac{qB_o}{\pi h(r_e^2 - r_w^2)\phi C_t} t - \frac{qB\mu}{2\pi kh} \frac{r_e^2}{r_e^2 - r_w^2} \ln \left| \frac{r}{r_w} \right|. \dots\dots\dots 3.98$$

La **Ec. 3.98** es una expresión que relaciona a Y_{wf} en términos del radio y del tiempo. Si se desea obtener la solución en términos de \bar{Y} (promedio), se procede a calcularla como:

$$\bar{Y} = \frac{\iiint_V Y(r) dV}{\iiint_V dV}$$

$$\bar{Y}(r) = \frac{\int_{r_w}^r \int_0^h \int_0^{2\pi} Y(r) r d\theta dz dr}{\int_{r_w}^r \int_0^h \int_0^{2\pi} r d\theta dz dr} = \frac{2\pi h \int_{r_w}^r Y(r) r dr}{\pi h(r^2 - r_w^2)} = \frac{2 \int_{r_w}^r Y(r) r dr}{(r^2 - r_w^2)}, \dots\dots\dots 3.99$$

donde $Y(r)$ de la **Ec. 3.95**:

$$\int_{r_w}^r Y(r) r dr = \int_{r_w}^r \left[Y_{wf} + \frac{W}{2} r_e^2 \ln \left| \frac{r}{r_w} \right| - \frac{W}{4} (r^2 - r_w^2) \right] r dr$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{r_w}^r Y_{wf} r dr + \int_{r_w}^r \frac{W}{2} r_e^2 \ln \left| \frac{r}{r_w} \right| r dr - \int_{r_w}^r \frac{W}{4} (r^2 - r_w^2) r dr \\
 &= Y_{wf} \int_{r_w}^r r dr + \frac{W}{2} r_e^2 \int_{r_w}^r \ln \left| \frac{r}{r_w} \right| r dr - \frac{W}{4} \int_{r_w}^r (r^2 - r_w^2) r dr \\
 &= Y_{wf} \frac{r^2}{2} \Big|_{r_w}^r + \frac{W}{2} r_e^2 \left(\frac{r^2}{2} \ln \left| \frac{r}{r_w} \right| - \frac{r^2}{4} \right) \Big|_{r_w}^r - \frac{W}{4} \left(\frac{r^4}{4} - r_w^2 \frac{r^2}{2} \right) \Big|_{r_w}^r
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_{r_w}^r Y(r) r dr &= Y_{wf} \frac{r^2 - r_w^2}{2} + \frac{W}{2} r_e^2 \left(\frac{r^2}{2} \ln \left| \frac{r}{r_w} \right| - \frac{r^2 - r_w^2}{4} \right) \\
 &\quad - \frac{W}{4} \left(\frac{r^4 - r_w^4}{4} - r_w^2 \frac{r^2 - r_w^2}{2} \right). \quad \dots\dots\dots 3.100
 \end{aligned}$$

Sustituyendo la **Ec. 3.100** en la **Ec. 3.99**:

$$\begin{aligned}
 \bar{Y}(r) &= \frac{2}{r^2 - r_w^2} \left[Y_{wf} \frac{r^2 - r_w^2}{2} + \frac{W}{2} r_e^2 \left(\frac{r^2}{2} \ln \left| \frac{r}{r_w} \right| - \frac{r^2 - r_w^2}{4} \right) - \frac{W}{4} \left(\frac{r^4 - r_w^4}{4} - r_w^2 \frac{r^2 - r_w^2}{2} \right) \right] \\
 &= Y_{wf} + \frac{2W r_e^2}{2(r^2 - r_w^2)} \left(\frac{r^2}{2} \ln \left| \frac{r}{r_w} \right| - \frac{r^2 - r_w^2}{4} \right) - \frac{2W}{4} \left(\frac{r^4 - r_w^4}{4(r^2 - r_w^2)} - r_w^2 \frac{r^2 - r_w^2}{2(r^2 - r_w^2)} \right) \\
 &= Y_{wf} + W \frac{r_e^2}{r^2 - r_w^2} \left(\frac{r^2}{2} \ln \left| \frac{r}{r_w} \right| - \frac{r^2 - r_w^2}{4} \right) - \frac{W}{2} \left(\frac{(r^2 + r_w^2)(r^2 - r_w^2)}{4(r^2 - r_w^2)} - \frac{r_w^2}{2} \right) \\
 &= Y_{wf} + W \frac{r_e^2}{2} \left(\frac{r^2}{r^2 - r_w^2} \ln \left| \frac{r}{r_w} \right| - \frac{1}{2} \right) - \frac{W}{2} \left(\frac{r^2 + r_w^2}{4} - \frac{r_w^2}{2} \right).
 \end{aligned}$$

Sustituyendo $W = qB_o\mu/k\pi h(r_e^2 - r_w^2)$ en la ecuación anterior:

$$\begin{aligned}
 \bar{Y}(r) &= Y_{wf} + \frac{qB\mu}{2\pi kh} \frac{r_e^2}{r_e^2 - r_w^2} \left(\frac{r^2}{r^2 - r_w^2} \ln \left| \frac{r}{r_w} \right| - \frac{1}{2} \right) \\
 &\quad - \frac{qB\mu}{2\pi kh} \left(\frac{r^2 + r_w^2}{4(r_e^2 - r_w^2)} - \frac{r_w^2}{2(r_e^2 - r_w^2)} \right). \quad \dots\dots\dots 3.101
 \end{aligned}$$

La **Ec. 3.101** es la solución al problema original en términos de la variable Y promedio del yacimiento. De igual manera basta con igualar las **Ecs. 3.97** y **3.101**, para obtener:

$$Y_{wf} = Y_i - \frac{qB_o}{\pi h(r_e^2 - r_w^2)\phi C_t} t - \frac{qB\mu}{2\pi kh} \frac{r_e^2}{r_e^2 - r_w^2} \left(\frac{r^2}{r^2 - r_w^2} \ln \left| \frac{r}{r_w} \right| - \frac{1}{2} \right) + \frac{qB\mu}{2\pi kh} \left(\frac{r^2 + r_w^2}{4(r_e^2 - r_w^2)} - \frac{r_w^2}{2(r_e^2 - r_w^2)} \right).$$

..... 3.102

La **Ec. 3.102** representa a la presión de fondo como una función del radio y del tiempo.

Referencias

1. Zamora, A. (2012). Ecuaciones diferenciales parciales. México: UVM.
2. Haberman, R. (2014). Applied partial differential equations. Harlow: Pearson Education.
3. Rodellar, J., & Encinas, A. (2002). Método de separación de variables (1st ed.). Barcelona.
4. Tolstov, G., & Silverman, R. (1962). Fourier Series ... Translated ... by Richard A. Silverman. Pp. x. 336. Prentice-Hall International: London; printed in U.S.A.
5. Rainville, E., Flores López, A., & García Blanco, M. (2006). Ecuaciones diferenciales elementales. México: Trillas.
6. Villalpando Mota, M. (2017). Generación de curvas tipo para flujo lineal mediante algoritmos de inversión numérica, basados en series de Fourier para la transformada de Laplace (Licenciatura). UNAM.
7. Gallardo, H.E. (2018). Fundamentos de la caracterización dinámica de yacimientos, Notas de Clase, Universidad Nacional Autónoma de México. Ciudad de México.

Tema 4 Soluciones mediante la transformada de Laplace

La transformada de Laplace (representado por el operador \mathcal{L}) es una herramienta matemática muy poderosa en la solución de ecuaciones diferenciales, en especial aquellas que pueden ser imposibles de resolver por métodos convencionales. En esta sección se discuten algunas de sus propiedades, así como su aplicación en problemas de flujo.

4.1 Definición de la transformada de Laplace

Para una función $f(t)$ la cual se encuentra definida en el intervalo $[0, \infty)$, su transformada ($\mathcal{L}\{f(t)\}$) se define como la integral impropia de la **Ec. 4.1 (Arfken and Weber [1])**:

$$F(s) = \{f(t)\} \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt. \dots\dots\dots 4.1$$

Al utilizar la transformada de Laplace se pasa el problema de un dominio t a otro Z , con lo que se facilita el tratamiento de las ecuaciones al convertir las integrales y derivadas en operaciones algebraicas de multiplicación y división de menor complejidad. Esto permite obtener soluciones prácticas a los problemas planteados.

4.2 Propiedades de la Transformada de Laplace

Para poder solucionar un problema que se ha trasladado al espacio de Laplace, es importante tener conocimientos sobre el álgebra y sus propiedades. La **Tabla 4.1** presenta algunas propiedades que son de interés para el presente Tema.

Tabla 4. 1 Propiedades de la Transformada de (Laplace Arfken and Weber [1]).

Linealidad	$\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} = a\mathcal{L}[f(t)] + b\mathcal{L}[g(t)]$	4. 2
Cambio de escala	$\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a}F\left(\frac{Z}{a}\right)$	4. 3
Primera propiedad de translación	$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(Z - a)$	4. 4
Segunda propiedad de translación	$\mathcal{L}\{u(t - a)f(t - a)\} = e^{-aZ}\mathcal{L}\{f(t)\}$	4. 5
Transformada de una derivada	$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = \frac{Z^n F(Z) - Z^{n-1}f(0) - Z^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)}{1}$	4. 6
Derivada de una transformada	$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n F^{(n)}(Z)$	4. 7
Transformada de una integral	$\frac{F(Z)}{Z} = \mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u) du\right\}$	4. 8
Integral de una transformada	$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_0^\infty F(u) du$	4. 9
Convulación	$\mathcal{L}\{f(t) * g(t)\} = \int_0^\infty e^{-Zt} \left\{ \int_0^t f(\tau)g(t - \tau) d\tau \right\} dt$	4. 10

4.3 Soluciones a problemas de flujo radial a través de la transformada de Laplace

4.3.1 Pozo produciendo a gasto constante en un yacimiento radial infinito

En la **Figura 4. 1**, se esquematiza el modelo de yacimiento planteado, y en la **Tabla 4. 2** se muestra la ecuación de flujo fundamental, así como la condición inicial y de frontera, ambos en variables reales y adimensionales.

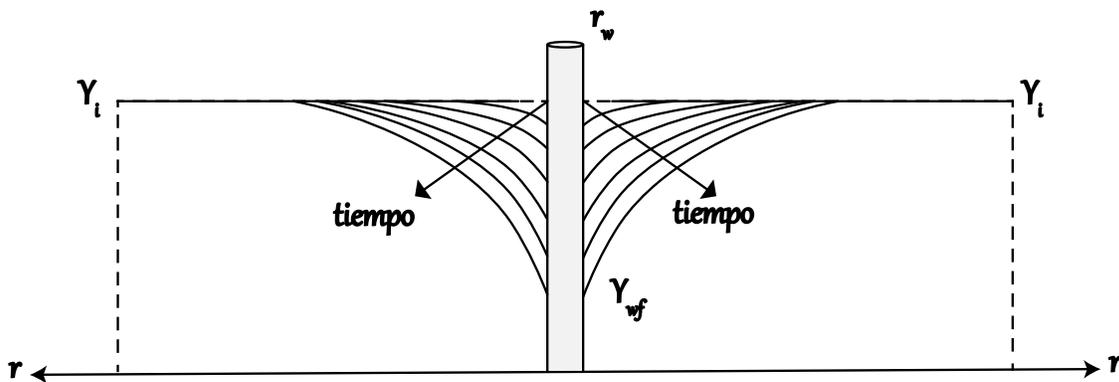


Figura 4. 1 Esquema de un yacimiento que presenta flujo radial y estado transitorio.

Para encontrar las soluciones en el espacio de Laplace debe definirse la siguiente transformación:

$$\mathcal{L}\{(Y_D)\}\{Z\} = \bar{Y}_D = \int_0^{\infty} Y_D e^{-Zt_D} dt_D . \quad \dots\dots\dots 4.11$$

Tabla 4. 2 Planteamiento del problema en variables reales y adimensionales.

	Variables Reales	Variables Adimensionales
Ecuación de flujo	$\frac{\partial^2 Y}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial Y}{\partial r} - \frac{\partial Y}{\partial t} = 0$	$\frac{\partial^2 Y_D}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial Y_D}{\partial r_D} - \frac{\partial Y_D}{\partial t_D} = 0$
Condición Inicial	$Y(r, t = 0) = Y_i$	$Y_D(r_D, t_D = 0) = 0$
Condición de Frontera Interna	$r \frac{\partial Y}{\partial r} \Big _{r \rightarrow 0} = -\frac{qB\mu}{kh}$	$r_D \frac{\partial Y_D}{\partial r_D} \Big _{r_D \rightarrow 0} = -1$
Condición de frontera Externa	$Y(r \rightarrow \infty, t) = Y_i$	$Y_D(r_D \rightarrow \infty, t_D) = 0$

Teniendo en cuenta la definición anterior y la ecuación de flujo en variables adimensionales:

$$\mathcal{L} \left\{ \left(\frac{\partial^2 Y_D}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial Y_D}{\partial r_D} - \frac{\partial Y_D}{\partial t_D} = 0 \right) \right\}$$

que, por la propiedad de linealidad presentada en la **Ec. 4. 2**:

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{\partial^2 Y_D}{\partial r_D^2} \right\} + \mathcal{L} \left\{ \frac{1}{r_D} \frac{\partial Y_D}{\partial r_D} \right\} - \mathcal{L} \left\{ \frac{\partial Y_D}{\partial t_D} \right\} = \mathcal{L}\{0\}$$

Debe observarse que, de la definición presentada en la **Ec. 4. 11**, la transformación es llevada a cabo sobre t_D , por lo cual puede aplicarse lo siguiente:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}\{Y_D\}}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial \mathcal{L}\{Y_D\}}{\partial r_D} - \mathcal{L} \left\{ \frac{\partial Y_D}{\partial t_D} \right\} = 0,$$

que por definición resulta en:

Tema 4 Soluciones mediante la transformada de Laplace

$$\frac{\partial^2 \bar{Y}_D}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial \bar{Y}_D}{\partial r_D} - Z \bar{Y}_D - \bar{Y}_D(t_D = 0) = 0. \quad \dots\dots\dots 4.12$$

Para continuar es necesario de las condiciones de frontera, y debido a que se pretende llevar el problema a otro espacio, debe entonces llevarse al mismo espacio las condiciones iniciales y de frontera como se muestra a continuación:

$$\mathcal{L}\{Y_D(r_D, t_D = 0)\} = 0 \Rightarrow \bar{Y}_D(r_D, t_D = 0) = 0. \quad \dots\dots\dots 4.13$$

$$\mathcal{L}\left\{r_D \frac{\partial Y_D}{\partial r_D} \Big|_{r_D \rightarrow 0}\right\} = -1 \Rightarrow r_D \frac{\partial \bar{Y}_D}{\partial r_D} \Big|_{r_D \rightarrow 0} = -\frac{1}{Z}. \quad \dots\dots\dots 4.14$$

$$\mathcal{L}\{Y_D(r_D \rightarrow \infty, t_D)\} = 0 \Rightarrow \bar{Y}_D(r_D \rightarrow \infty, t_D) = 0. \quad \dots\dots\dots 4.15$$

Dado lo anterior, aplicando la condición inicial presentada en la **Ec. 4.13** en la **Ec. 4.12**:

$$\frac{\partial^2 \bar{Y}_D}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial \bar{Y}_D}{\partial r_D} - Z \bar{Y}_D - 0 = 0$$

$$\frac{\partial^2 \bar{Y}_D}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial \bar{Y}_D}{\partial r_D} - Z \bar{Y}_D = 0. \quad \dots\dots\dots 4.16$$

Aplicando el siguiente cambio de variables (que puede obtenerse mediante el procedimiento descrito en el **Tema 3** para la obtención de la variable de Boltzmann) se llega al siguiente resultado:

$$\chi = \sqrt{Z} r_D$$

Aplicando la regla de la cadena a la **Ec. 4.16**:

$$\frac{\partial}{\partial r_D} \frac{\partial \chi}{\partial \chi} \left(\frac{\partial \bar{Y}_D}{\partial r_D} \frac{\partial \chi}{\partial \chi} \right) + \frac{\sqrt{Z}}{\chi} \frac{\partial \bar{Y}_D}{\partial r_D} \frac{\partial \chi}{\partial \chi} - Z \bar{Y}_D = 0$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial r_D} \frac{\partial}{\partial \chi} \left(\frac{\partial \bar{Y}_D}{\partial \chi} \frac{\partial \chi}{\partial r_D} \right) + \frac{\sqrt{Z}}{\chi} \frac{\partial \bar{Y}_D}{\partial \chi} \frac{\partial \chi}{\partial r_D} - Z \bar{Y}_D = 0$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial r_D} \frac{\partial}{\partial \chi} \left(\frac{\partial \bar{Y}_D}{\partial \chi} \right) \frac{\partial \chi}{\partial r_D} + \frac{\sqrt{Z}}{\chi} \frac{\partial \bar{Y}_D}{\partial \chi} \frac{\partial \chi}{\partial r_D} - Z \bar{Y}_D = 0$$

$$\left(\frac{\partial \chi}{\partial r_D} \right)^2 \frac{\partial^2 \bar{Y}_D}{\partial \chi^2} + \frac{\sqrt{Z}}{\chi} \frac{\partial \chi}{\partial r_D} \frac{\partial \bar{Y}_D}{\partial \chi} - Z \bar{Y}_D = 0$$

y puede verse rápidamente que $\partial \chi / \partial r_D = \sqrt{Z}$, por lo tanto:

$$(\sqrt{Z})^2 \frac{\partial^2 \bar{Y}_D}{\partial \chi^2} + \frac{\sqrt{Z}}{\chi} (\sqrt{Z}) \frac{\partial \bar{Y}_D}{\partial \chi} - Z \bar{Y}_D = 0$$

$$Z \frac{\partial^2 \bar{Y}_D}{\partial \chi^2} + \frac{Z}{\chi} \frac{\partial \bar{Y}_D}{\partial \chi} - Z \bar{Y}_D = 0$$

multiplicando y dividiendo por χ^2/Z :

$$\chi^2 \frac{\partial^2 \bar{Y}_D}{\partial \chi^2} + \chi \frac{\partial \bar{Y}_D}{\partial \chi} - \chi^2 \bar{Y}_D = 0, \quad \dots\dots\dots 4.17$$

y recordando la ecuación de Bessel, presentada en la **Ec. 1.50**:

$$x^2 \frac{d^2 w}{dx^2} + x \frac{dw}{dx} + (x^2 - v^2)w = 0, \quad \dots\dots\dots 4.18$$

y cuya solución presenta la forma:

$$w = AI_v(x) + BK_v(x), \quad \dots\dots\dots 4.19$$

donde A y B son constates. Tomando en cuenta lo anterior, se tiene entonces que para la **Ec. 4.17**, $v = 0$, por lo que la solución tendrá la forma:

$$\bar{Y}_D = AI_0(\chi) + BK_0(\chi). \quad \dots\dots\dots 4.20$$

Para encontrar el valor de las constantes se emplean las condiciones de frontera. Para ello se necesita el valor de la derivada con respecto a r_D , de tal manera que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{Y}_D}{\partial r_D} &= A \frac{\partial I_0(\chi)}{\partial r_D} + B \frac{\partial K_0(\chi)}{\partial r_D} \\ \frac{\partial \bar{Y}_D}{\partial r_D} &= A \frac{\partial I_0(\sqrt{Z}r_D)}{\partial r_D} + B \frac{\partial K_0(\sqrt{Z}r_D)}{\partial r_D} \\ \frac{\partial \bar{Y}_D}{\partial r_D} &= A \frac{\partial I_0(\sqrt{Z}r_D)}{\partial r_D} + B \frac{\partial K_0(\sqrt{Z}r_D)}{\partial r_D} \\ \frac{\partial \bar{Y}_D}{\partial r_D} &= A\sqrt{Z} \frac{\partial I_0(\sqrt{Z}r_D)}{\partial r_D} + B\sqrt{Z} \frac{\partial K_0(\sqrt{Z}r_D)}{\partial r_D} \end{aligned}$$

De las fórmulas de derivación presentadas en la **Ec. 1.59**.

$$I'_0(x) = I_1(x), \quad K'_0(x) = -K_1(x)$$

$$\frac{\partial \bar{Y}_D}{\partial r_D} = A\sqrt{Z}I_1(\chi) - B\sqrt{Z}K_1(\chi)$$

multiplicando por r_D :

$$r_D \frac{\partial \bar{Y}_D}{\partial r_D} = A\chi I_1(\chi) - B\chi K_1(\chi), \quad \dots\dots\dots 4.21$$

evaluando la condición de frontera interna transformada, **Ec. 4.14**, se tiene que:

$$r_D \frac{\partial \bar{Y}_D}{\partial r_D} \Big|_{r_D \rightarrow 0} = r_D \frac{\partial \bar{Y}_D}{\partial r_D} \Big|_{\chi \rightarrow 0} = \lim_{\chi \rightarrow 0} [A\chi I_1(\chi) - B\chi K_1(\chi)] = -\frac{1}{Z}$$

Recordando el comportamiento de las funciones I_ν y K_ν , vistas en el **Tema 1**:

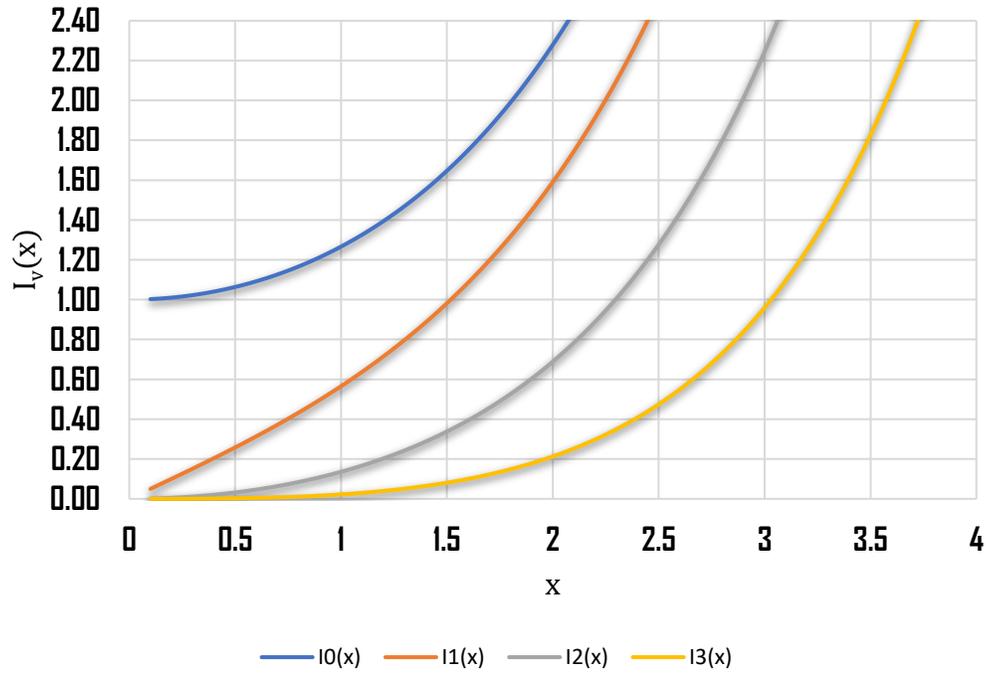


Figura 4. 2 Comportamiento de la función Bessel $I_\nu(x)$.

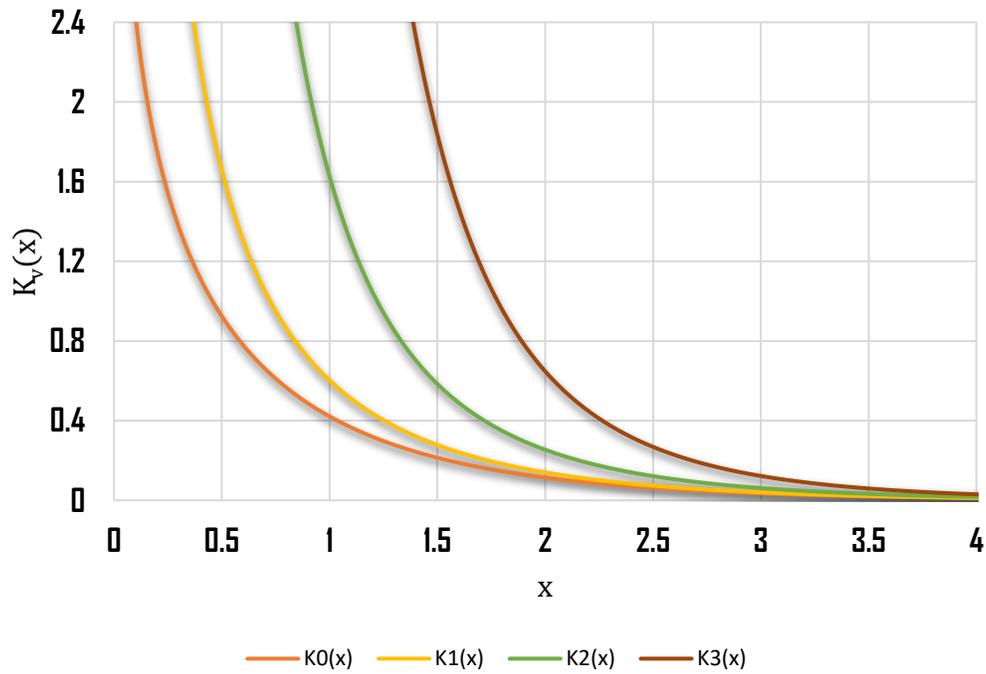


Figura 4. 3 Comportamiento de la función Bessel $K_\nu(x)$.

Tema 4 Soluciones mediante la transformada de Laplace

Se puede observar que:

$$I_1(\chi \rightarrow 0) = 0$$

$$K_1(\chi \rightarrow) = \frac{1}{\chi}$$

Por lo cual:

$$\lim_{\chi \rightarrow 0} \left[A\chi * 0 - B\chi * \frac{1}{\chi} \right] = -\frac{1}{Z}$$

$$-B\chi * \frac{1}{\chi} = -\frac{1}{Z}$$

$$B = -\frac{1}{Z}. \dots\dots\dots 4.22$$

De la misma manera valuando la condición de frontera externa, **Ec. 4. 15**, en la **Ec. 4. 20**:

$$\bar{Y}_D(r_D \rightarrow \infty, t_D) = AI_0(\chi \rightarrow \infty) + BK_0(\chi \rightarrow \infty) = 0$$

Analizando el comportamiento de I_0 y K_0 , se tiene que:

$$I_0(\chi \rightarrow \infty) = 1$$

$$K_0(\chi \rightarrow \infty) = 0$$

por lo cual:

$$A * 1 + B * 0 = 0$$

$$A = 0. \dots\dots\dots 4.23$$

Substituyendo A y B en **4. 20**:

$$\bar{Y}_D = 0 * I_0(\chi) + \left(\frac{1}{Z}\right) K_0(\chi)$$

$$\bar{Y}_D = \frac{K_0(\chi)}{Z}$$

$$\bar{Y}_D = \frac{K_0(\sqrt{Z}r_D)}{Z}. \dots\dots\dots 4.24$$

Que es la solución en el espacio de Laplace, para obtener la solución en el espacio de Y_D debe emplearse algún método de inversión numérica.

4.3.2 Pozo produciendo a gasto constante en un yacimiento radial con mantenimiento en la frontera externa

En la **Figura 4. 4**, se esquematiza el modelo de yacimiento planteado, y en la

Tabla 4. 3 se muestra la ecuación de flujo fundamental, así como la condición inicial y de frontera, ambos en variables reales y adimensionales.

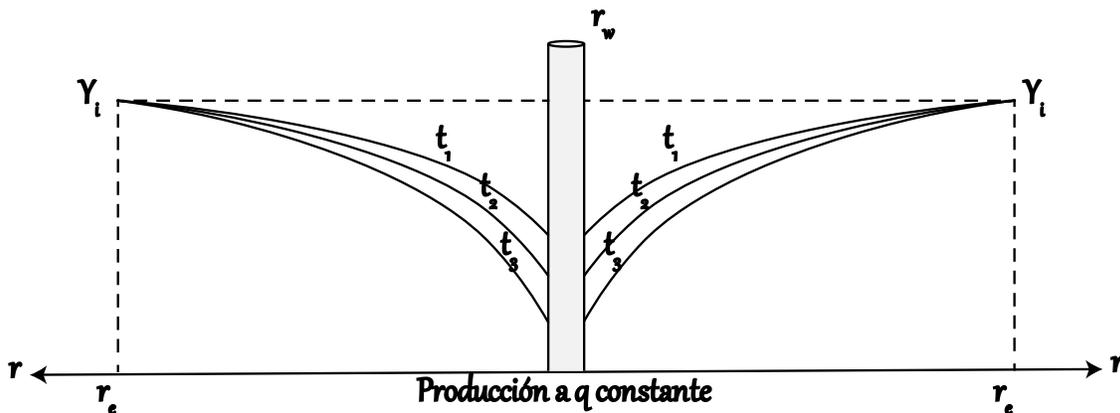


Figura 4. 4 Esquema de un yacimiento que presenta flujo radial y estado estacionario.

De la misma forma que en el caso anterior, la ecuación resultante será:

$$\chi^2 \frac{\partial^2 \bar{Y}_D}{\partial \chi^2} + \chi \frac{\partial \bar{Y}_D}{\partial \chi} - \chi^2 \bar{Y}_D = 0, \quad \dots\dots\dots 4.25$$

Y cuya solución presenta la forma:

$$\bar{Y}_D = AI_0(\chi) + BK_0(\chi), \quad \dots\dots\dots 4.26$$

Tabla 4. 3 Planteamiento del problema en variables reales y adimensionales.

	Variables Reales	Variables Adimensionales
Ecuación de flujo	$\frac{\partial^2 Y}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial Y}{\partial r} - \frac{\partial Y}{\partial t} = 0$	$\frac{\partial^2 Y_D}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial Y_D}{\partial r_D} - \frac{\partial Y_D}{\partial t_D} = 0$
Condición Inicial	$Y(r, t = 0) = Y_i$	$Y_D(r_D, t_D = 0) = 0$
Condición de Frontera Interna	$r \frac{\partial Y}{\partial r} \Big _{r=r_w} = -\epsilon \frac{qB\mu}{kh}$	$r_D \frac{\partial Y_D}{\partial r_D} \Big _{r_D=1} = -1$
Condición de frontera Externa	$Y(r = r_e, t) = Y_i$	$Y_D(r_D = r_{eD}, t_D) = 0$

pero sujeta a las condiciones siguientes (en el espacio de Laplace):

$$\bar{Y}_D(r_D, t_D = 0) = 0. \quad \dots\dots\dots 4.27$$

$$r_D \frac{\partial \bar{Y}_D}{\partial r_D} \Big|_{r_D=1} = -\frac{1}{Z}. \quad \dots\dots\dots 4.28$$

$$\bar{Y}_D(r_D = r_{eD}, t_D) = 0. \quad \dots\dots\dots 4.29$$

Evaluando la condición de frontera interna:

$$r_D \frac{\partial \bar{Y}_D}{\partial r_D} \Big|_{r_D=1} = A(\sqrt{Z} * 1)I_1(\sqrt{Z} * 1) - B(\sqrt{Z} * 1)K_1(\sqrt{Z} * 1) = -\frac{1}{Z}$$

$$A\sqrt{Z}I_1(\sqrt{Z}) - B\sqrt{Z}K_1(\sqrt{Z}) = -\frac{1}{Z}. \quad \dots\dots\dots 4.30$$

De la misma manera para la condición de frontera externa:

$$\bar{Y}_D(r_D = r_{eD}, t_D) = AI_0(\sqrt{Z}r_{eD}) + BK_0(\sqrt{Z}r_{eD}) = 0$$

$$AI_0(\sqrt{Z}r_{eD}) + BK_0(\sqrt{Z}r_{eD}) = 0$$

despejando a B:

$$B = -A \frac{I_0(\sqrt{Z}r_{eD})}{K_0(\sqrt{Z}r_{eD})}, \quad \dots\dots\dots 4.31$$

y sustituyendo 4.31 en 4.30 y despejando a A:

$$A\sqrt{Z}I_1(\sqrt{Z}) - \left(-A \frac{I_0(\sqrt{Z}r_{eD})}{K_0(\sqrt{Z}r_{eD})}\right)\sqrt{Z}K_1(\sqrt{Z}) = -\frac{1}{Z}$$

$$A\sqrt{Z} \left[I_1(\sqrt{Z}) + \frac{I_0(\sqrt{Z}r_{eD})K_1(\sqrt{Z})}{K_0(\sqrt{Z}r_{eD})} \right] = -\frac{1}{Z}$$

$$A\sqrt{Z} \left[\frac{I_1(\sqrt{Z})K_0(\sqrt{Z}r_{eD}) + I_0(\sqrt{Z}r_{eD})K_1(\sqrt{Z})}{K_0(\sqrt{Z}r_{eD})} \right] = -\frac{1}{Z}$$

$$A = -\frac{1}{Z\sqrt{Z}} \frac{K_0(\sqrt{Z}r_{eD})}{I_1(\sqrt{Z})K_0(\sqrt{Z}r_{eD}) + I_0(\sqrt{Z}r_{eD})K_1(\sqrt{Z})}$$

$$A = -\frac{1}{Z^{3/2}} \frac{K_0(\sqrt{Z}r_{eD})}{I_1(\sqrt{Z})K_0(\sqrt{Z}r_{eD}) + I_0(\sqrt{Z}r_{eD})K_1(\sqrt{Z})}, \quad \dots\dots\dots 4.32$$

sustituyendo 4.32 en 4.31 :

$$B = \left[-\frac{1}{Z^{\frac{3}{2}}} \frac{K_0(\sqrt{Z}r_{eD})}{I_1(\sqrt{Z})K_0(\sqrt{Z}r_{eD}) + I_0(\sqrt{Z}r_{eD})K_1(\sqrt{Z})} \right] \frac{I_0(\sqrt{Z}r_{eD})}{K_0(\sqrt{Z}r_{eD})}$$

$$B = -\frac{1}{Z^{\frac{3}{2}}} \frac{I_0(\sqrt{Z}r_{eD})}{I_1(\sqrt{Z})K_0(\sqrt{Z}r_{eD}) + I_0(\sqrt{Z}r_{eD})K_1(\sqrt{Z})} \dots\dots\dots 4.33$$

Por lo cual, la solución viene dada por:

$$\begin{aligned} \bar{Y}_D &= \left[-\frac{1}{Z^{\frac{3}{2}}} \frac{K_0(\sqrt{Z}r_{eD})}{I_1(\sqrt{Z})K_0(\sqrt{Z}r_{eD}) + I_0(\sqrt{Z}r_{eD})K_1(\sqrt{Z})} \right] I_0(\chi) \\ &\quad + \left[-\frac{1}{Z^{\frac{3}{2}}} \frac{I_0(\sqrt{Z}r_{eD})}{I_1(\sqrt{Z})K_0(\sqrt{Z}r_{eD}) + I_0(\sqrt{Z}r_{eD})K_1(\sqrt{Z})} \right] K_0(\chi) \\ \bar{Y}_D &= -\frac{1}{Z^{\frac{3}{2}}} \frac{I_0(\chi)K_0(\sqrt{Z}r_{eD}) + I_0(\sqrt{Z}r_{eD})K_0(\chi)}{I_1(\sqrt{Z})K_0(\sqrt{Z}r_{eD}) + I_0(\sqrt{Z}r_{eD})K_1(\sqrt{Z})} \end{aligned}$$

$$\bar{Y}_D = \frac{I_0(\sqrt{Z}r_D)K_0(\sqrt{Z}r_{eD}) + I_0(\sqrt{Z}r_{eD})K_0(\sqrt{Z}r_D)}{Z^{\frac{3}{2}}[I_0(\sqrt{Z}r_{eD})K_1(\sqrt{Z}) - I_1(\sqrt{Z})K_0(\sqrt{Z}r_{eD})]} \dots\dots\dots 4.34$$

La cual es la solución en el espacio de Laplace para un pozo produciendo a gasto constante en un yacimiento con régimen estacionario.

4.3.3 Pozo produciendo a gasto constante en un yacimiento radial con frontera externa de no flujo

En la **Figura 4. 5**, se esquematiza el modelo de yacimiento planteado, y en la **Tabla 4. 4** se muestra la ecuación de flujo fundamental, así como la condición inicial y de frontera, ambos en variables reales y adimensionales.

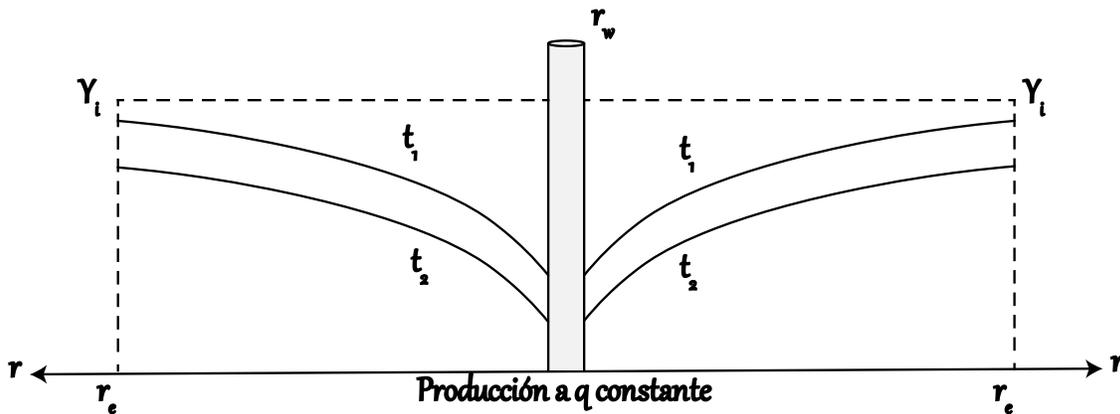


Figura 4. 5 Esquema de un yacimiento que presenta flujo radial y estado pseudo-estacionario.

De la misma forma que en el caso anterior, la ecuación resultante será:

$$\chi^2 \frac{\partial^2 \bar{Y}_D}{\partial \chi^2} + \chi \frac{\partial \bar{Y}_D}{\partial \chi} - \chi^2 \bar{Y}_D = 0, \quad \dots\dots\dots 4.35$$

Tabla 4. 4 Planteamiento del problema en variables reales y adimensionales.

	Variables Reales	Variables Adimensionales
Ecuación de flujo	$\frac{\partial^2 Y}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial Y}{\partial r} - \frac{\partial Y}{\partial t} = 0$	$\frac{\partial^2 Y_D}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial Y_D}{\partial r_D} - \frac{\partial Y_D}{\partial t_D} = 0$
Condición Inicial	$Y(r, t = 0) = Y_i$	$Y_D(r_D, t_D = 0) = 0$
Condición de Frontera Interna	$r \frac{\partial Y}{\partial r} \Big _{r=r_w} = -\epsilon \frac{qB\mu}{kh}$	$r_D \frac{\partial Y_D}{\partial r_D} \Big _{r_D=1} = -1$
Condición de frontera Externa	$r \frac{\partial Y}{\partial r} \Big _{r=r_e} = 0$	$r_D \frac{\partial Y_D}{\partial r_D} \Big _{r_D=r_{eD}} = 0$

Y cuya solución presenta la forma:

$$\bar{Y}_D = A I_0(\chi) + B K_0(\chi), \dots\dots\dots 4.36$$

pero sujeta a las condiciones siguientes (en el espacio de Laplace):

$$\bar{Y}_D(r_D, t_D = 0) = 0, \dots\dots\dots 4.37$$

$$r_D \frac{\partial \bar{Y}_D}{\partial r_D} \Big|_{r_D=1} = -\frac{1}{Z}, \dots\dots\dots 4.38$$

$$r_D \frac{\partial \bar{Y}_D}{\partial r_D} \Big|_{r_D=r_{eD}} = 0. \dots\dots\dots 4.39$$

Si se evalúan las condiciones, 4.38:

Tema 4 Soluciones mediante la transformada de Laplace

$$r_D \frac{\partial \bar{Y}_D}{\partial r_D} \Big|_{r_D=1} = A(\sqrt{Z} * 1)I_1(\sqrt{Z} * 1) - B(\sqrt{Z} * 1)K_1(\sqrt{Z} * 1) = -\frac{1}{Z}$$

$$A\sqrt{Z}I_1(\sqrt{Z}) - B\sqrt{Z}K_1(\sqrt{Z}) = -\frac{1}{Z}, \quad \dots\dots\dots 4.40$$

y 4.39:

$$r_D \frac{\partial \bar{Y}_D}{\partial r_D} \Big|_{r_D=r_{eD}} = A(\sqrt{Z}r_{eD})I_1(\sqrt{Z}r_{eD}) - B(\sqrt{Z}r_{eD})K_1(\sqrt{Z}r_{eD}) = 0$$

$$A(\sqrt{Z}r_{eD})I_1(\sqrt{Z}r_{eD}) - B(\sqrt{Z}r_{eD})K_1(\sqrt{Z}r_{eD}) = 0, \quad \dots\dots\dots 4.41$$

se obtienen las **Ecs. 4.40** y **4.41**, respectivamente. Si despejamos A de la segunda y sustituimos en la primera se llega a:

$$B = -\frac{1}{Z^{\frac{3}{2}}} \frac{I_1(\sqrt{Z}r_{eD})}{I_1(\sqrt{Z})K_1(\sqrt{Z}r_{eD}) - I_1(\sqrt{Z}r_{eD})K_1(\sqrt{Z})}$$

y substituyendo esta expresión en la **Ec. 4.41** se obtiene:

$$A = -\frac{1}{Z^{\frac{3}{2}}} \frac{K_1(\sqrt{Z}r_{eD})}{I_1(\sqrt{Z})K_1(\sqrt{Z}r_{eD}) - I_1(\sqrt{Z}r_{eD})K_1(\sqrt{Z})}$$

Substituyendo A y B en la **Ec. 4.36**:

$$\bar{Y}_D = -\frac{1}{Z^{\frac{3}{2}}} \frac{I_0(\chi)K_1(\sqrt{Z}r_{eD}) + I_1(\sqrt{Z}r_{eD})K_0(\chi)}{I_1(\sqrt{Z})K_1(\sqrt{Z}r_{eD}) - I_1(\sqrt{Z}r_{eD})K_1(\sqrt{Z})}$$

$$\bar{Y}_D = \frac{I_0(\sqrt{Z}r_D)K_1(\sqrt{Z}r_{eD}) + I_1(\sqrt{Z}r_{eD})K_0(\sqrt{Z}r_D)}{Z^{\frac{3}{2}}[I_1(\sqrt{Z}r_{eD})K_1(\sqrt{Z}) - I_1(\sqrt{Z})K_1(\sqrt{Z}r_{eD})]} \quad \dots\dots\dots 4.42$$

En la **Tabla 4.5** se presentan un compendio de las soluciones en el espacio de Laplace (**Gajdica [2]**).

Tabla 4. 5 Soluciones para distintas condiciones de frontera internas y externas en el espacio de Laplace.

Condición de Frontera Interna	Condición de Frontera Externa		
	Yacimiento infinito	Presión constante	No flujo
Gasto Constante	$\bar{Y}_D = \frac{K_0(\sqrt{Z}r_D)}{Z^{\frac{3}{2}}K_1(\sqrt{Z})}$	$\bar{Y}_D = \frac{I_0(\sqrt{Z}r_D)K_0(\sqrt{Z}r_{eD}) + I_0(\sqrt{Z}r_{eD})K_0(\sqrt{Z}r_D)}{Z^{\frac{3}{2}}[I_0(\sqrt{Z}r_{eD})K_1(\sqrt{Z}) - I_1(\sqrt{Z})K_0(\sqrt{Z}r_{eD})]}$	$\bar{Y}_D = \frac{I_0(\sqrt{Z}r_D)K_1(\sqrt{Z}r_{eD}) + I_1(\sqrt{Z}r_{eD})K_0(\sqrt{Z}r_D)}{Z^{\frac{3}{2}}[I_1(\sqrt{Z}r_{eD})K_1(\sqrt{Z}) - I_1(\sqrt{Z})K_1(\sqrt{Z}r_{eD})]}$
Gasto Constante con Almacenamiento	$D = K_1(\sqrt{Z}) + C_D\sqrt{Z}K_0(\sqrt{Z})$ $\bar{Y}_D = \frac{K_0(\sqrt{Z}r_D)}{Z^{\frac{3}{2}}D}$	$D = I_0(\sqrt{Z}r_{eD})K_1(\sqrt{Z}) + I_1(\sqrt{Z})K_0(\sqrt{Z}r_{eD}) + C_D\sqrt{Z}[I_0(\sqrt{Z}r_{eD})K_0(\sqrt{Z}) - I_0(\sqrt{Z})K_0(\sqrt{Z}r_{eD})]$ $\bar{Y}_D = \frac{I_0(\sqrt{Z}r_{eD})K_0(\sqrt{Z}r_D) - I_0(\sqrt{Z}r_D)K_0(\sqrt{Z}r_{eD})}{Z^{\frac{3}{2}}D}$	$D = I_1(\sqrt{Z}r_{eD})K_1(\sqrt{Z}) - I_1(\sqrt{Z})K_1(\sqrt{Z}r_{eD}) + C_D\sqrt{Z}[I_0(\sqrt{Z})K_1(\sqrt{Z}r_{eD}) + I_1(\sqrt{Z}r_{eD})K_0(\sqrt{Z})]$ $\bar{Y}_D = \frac{I_0(\sqrt{Z}r_D)K_1(\sqrt{Z}r_{eD}) + I_1(\sqrt{Z}r_{eD})K_0(\sqrt{Z}r_D)}{Z^{\frac{3}{2}}D}$
Gasto Constante con Almacenamiento y Daño	$D = K_1(\sqrt{Z}) + C_D\sqrt{Z}K_0(\sqrt{Z}) + ZC_DsK_1(\sqrt{Z})$ $\bar{Y}_D = \frac{K_0(\sqrt{Z}r_D)}{Z^{\frac{3}{2}}D}$	$D = (C_DsZ + 1)[I_0(\sqrt{Z}r_{eD})K_1(\sqrt{Z}) + I_1(\sqrt{Z})K_0(\sqrt{Z}r_{eD})] + C_D\sqrt{Z}[I_0(\sqrt{Z}r_{eD})K_0(\sqrt{Z}) - I_0(\sqrt{Z})K_0(\sqrt{Z}r_{eD})]$ $\bar{Y}_D = \frac{I_0(\sqrt{Z}r_{eD})K_0(\sqrt{Z}r_D) - I_0(\sqrt{Z}r_D)K_0(\sqrt{Z}r_{eD})}{Z^{\frac{3}{2}}D}$	$D = (C_DsZ + 1)[I_1(\sqrt{Z}r_{eD})K_1(\sqrt{Z}) - I_1(\sqrt{Z})K_1(\sqrt{Z}r_{eD})] + C_D\sqrt{Z}[I_0(\sqrt{Z})K_1(\sqrt{Z}r_{eD}) + I_1(\sqrt{Z}r_{eD})K_0(\sqrt{Z})]$ $\bar{Y}_D = \frac{I_0(\sqrt{Z}r_D)K_1(\sqrt{Z}r_{eD})I_1(\sqrt{Z}r_{eD})K_0(\sqrt{Z}r_D)}{Z^{\frac{3}{2}}D}$

Tabla 4. 5 Soluciones para distintas condiciones de frontera internas y externas en el espacio de Laplace (continuación).

<p>Presión Constante</p>	$\bar{Y}_D = \frac{K_0(\sqrt{Z}r_D)}{ZK_0(\sqrt{Z})}$ $\bar{q}_D = \frac{-r_D K_1(\sqrt{Z}r_D)}{\sqrt{Z}K_0(\sqrt{Z})}$ $\bar{Q}_D = \frac{-r_D K_1(\sqrt{Z}r_D)}{Z^{\frac{3}{2}}K_0(\sqrt{Z})}$	$\bar{Y}_D = \frac{I_0(\sqrt{Z}r_{eD})K_0(\sqrt{Z}r_D) - I_0(\sqrt{Z}r_D)K_0(\sqrt{Z}r_{eD})}{Z[I_0(\sqrt{Z}r_{eD})K_0(\sqrt{Z}) - I_0(\sqrt{Z})K_0(\sqrt{Z}r_{eD})]}$ $\bar{q}_D = \frac{-r_D[I_0(\sqrt{Z}r_{eD})K_1(\sqrt{Z}r_D) + I_1(\sqrt{Z}r_D)K_0(\sqrt{Z}r_{eD})]}{\sqrt{Z}[I_0(\sqrt{Z}r_{eD})K_0(\sqrt{Z}) - I_0(\sqrt{Z})K_0(\sqrt{Z}r_{eD})]}$ $\bar{Q}_D = \frac{-r_D[I_0(\sqrt{Z}r_{eD})K_1(\sqrt{Z}r_D) + I_1(\sqrt{Z}r_D)K_0(\sqrt{Z}r_{eD})]}{Z^{\frac{3}{2}}[I_0(\sqrt{Z}r_{eD})K_0(\sqrt{Z}) - I_0(\sqrt{Z})K_0(\sqrt{Z}r_{eD})]}$	$\bar{Y}_D = \frac{I_1(\sqrt{Z}r_{eD})K_0(\sqrt{Z}r_D) + I_0(\sqrt{Z}r_D)K_1(\sqrt{Z}r_{eD})}{Z[I_0(\sqrt{Z})K_1(\sqrt{Z}r_{eD}) + I_1(\sqrt{Z}r_{eD})K_0(\sqrt{Z})]}$ $\bar{q}_D = \frac{r_D[I_1(\sqrt{Z}r_D)K_1(\sqrt{Z}r_{eD}) - I_1(\sqrt{Z}r_{eD})K_1(\sqrt{Z}r_D)]}{\sqrt{Z}[I_0(\sqrt{Z})K_1(\sqrt{Z}r_{eD}) + I_1(\sqrt{Z}r_{eD})K_0(\sqrt{Z})]}$ $\bar{Q}_D = \frac{r_D[I_1(\sqrt{Z}r_D)K_1(\sqrt{Z}r_{eD}) - I_1(\sqrt{Z}r_{eD})K_1(\sqrt{Z}r_D)]}{Z^{\frac{3}{2}}[I_0(\sqrt{Z})K_1(\sqrt{Z}r_{eD}) + I_1(\sqrt{Z}r_{eD})K_0(\sqrt{Z})]}$
<p>Presión Constante con daño</p>	$\bar{Y}_D = \frac{K_0(\sqrt{Z}r_D)}{Z[K_0(\sqrt{Z}) + s\sqrt{Z}K_1(\sqrt{Z})]}$ $\bar{q}_D = \frac{-r_D K_1(\sqrt{Z}r_D)}{\sqrt{Z}[K_0(\sqrt{Z}) + s\sqrt{Z}K_1(\sqrt{Z})]}$ $\bar{Q}_D = \frac{-r_D K_1(\sqrt{Z}r_D)}{Z^{3/2}[K_0(\sqrt{Z}) + s\sqrt{Z}K_1(\sqrt{Z})]}$	$D = I_0(\sqrt{Z}r_{eD})K_0(\sqrt{Z}) - I_0(\sqrt{Z})K_0(\sqrt{Z}r_{eD}) + s\sqrt{Z}[I_0(\sqrt{Z}r_{eD})K_1(\sqrt{Z}) + I_1(\sqrt{Z})K_0(\sqrt{Z}r_{eD})]$ $\bar{Y}_D = \frac{I_0(\sqrt{Z}r_{eD})K_0(\sqrt{Z}r_D) - I_0(\sqrt{Z}r_D)K_0(\sqrt{Z}r_{eD})}{ZD}$ $\bar{q}_D = \frac{-r_D[I_0(\sqrt{Z}r_{eD})K_1(\sqrt{Z}r_D) + I_1(\sqrt{Z}r_D)K_0(\sqrt{Z}r_{eD})]}{\sqrt{Z}D}$ $\bar{Q}_D = \frac{-r_D[I_0(\sqrt{Z}r_{eD})K_1(\sqrt{Z}r_D) + I_1(\sqrt{Z}r_D)K_0(\sqrt{Z}r_{eD})]}{Z^{\frac{3}{2}}D}$	$D = I_0(\sqrt{Z})K_1(\sqrt{Z}r_{eD}) + I_1(\sqrt{Z}r_{eD})K_0(\sqrt{Z}) + s\sqrt{Z}[I_1(\sqrt{Z}r_{eD})K_1(\sqrt{Z}) - I_1(\sqrt{Z})K_1(\sqrt{Z}r_{eD})]$ $\bar{Y}_D = \frac{I_1(\sqrt{Z}r_{eD})K_0(\sqrt{Z}r_D) + I_0(\sqrt{Z}r_D)K_1(\sqrt{Z}r_{eD})}{ZD}$ $\bar{q}_D = \frac{r_D[I_1(\sqrt{Z}r_D)K_1(\sqrt{Z}r_{eD}) - I_1(\sqrt{Z}r_{eD})K_1(\sqrt{Z}r_D)]}{\sqrt{Z}D}$ $\bar{Q}_D = \frac{r_D[I_1(\sqrt{Z}r_D)K_1(\sqrt{Z}r_{eD}) - I_1(\sqrt{Z}r_{eD})K_1(\sqrt{Z}r_D)]}{Z^{\frac{3}{2}}D}$

Referencias

1. Arfken, G. and Weber, H. (2013). Mathematical Methods for Physicists. 6th ed. Burlington: Elsevier Science.
2. Gajdica, R., Solutions of the diffusivity equation by the method of Laplace Transforms.

Tema 5 Soluciones mediante Funciones de Green

Las funciones de Green son herramientas matemáticas que nos permiten resolver ecuaciones diferenciales en derivadas ordinarias o parciales no homogéneas, eh ahí la importancia de este método. En el ámbito de la ingeniería petrolera, la ecuación de difusividad se convierte en una EDP no homogénea al incluir en esta un término fuente o sumidero. Dado lo anterior la ecuación de difusividad incluyendo este último término, es:

$$\omega \nabla^2 Y - \frac{\partial Y}{\partial t} = q(\mathbf{r}, t)$$

en la cual, \mathbf{r} , representa el vector de posición correspondiente. Esta ecuación es útil para representar problemas de flujo en los cuales, además de tenerse el pozo, normalmente ubicado donde convergen las líneas de flujo del elemento de volumen representativo como se expuso en temas anteriores, se tiene además en cualquier otra parte de este, un elemento de inyección o producción adicional.

5.1 Función Delta de Dirac

Una de las funciones generalizadas más importantes es quizá la función delta de Dirac, y como se verá posteriormente las funciones de Green están íntimamente ligadas a ella. Por definición la función delta de Dirac, denotada por δ , es (Duffy [1]):

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}, \dots\dots\dots 5.1$$

Tal que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1, \dots\dots\dots 5.2$$

pero una definición más práctica está dada por:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - a)f(t)dt = f(a), \quad \dots\dots\dots 5.3$$

que, en forma multivariable es:

$$\iiint_V \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)f(\mathbf{r})dV = \begin{cases} f(\mathbf{r}_0), & \text{si } \mathbf{r}_0 \text{ esta dentro de } V, \\ 0, & \text{cualquier otro.} \end{cases}, \quad \dots\dots\dots 5.4$$

donde \mathbf{r} es el vector del origen a algún punto $P(x, y, z)$ y \mathbf{r}_0 es el vector del origen a otro punto $P(\xi, \eta, \zeta)$. Algunas relaciones importantes de la función delta de Dirac, así como sus representaciones en diferentes geometrías se presentan en las **Tabla 5. 1** y **Tabla 5. 2**, respectivamente.

Tabla 5. 1 Relaciones importantes que involucran a la función delta de Dirac.

$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1,$	5.5
$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - a)f(t)dt = f(a),$	5.6
$\delta(ct) = \frac{\delta(t)}{ c }, \quad \delta(-t) = \delta(t)$	5.7
$\delta(t) = -t\delta'(t)$	5.8
$f(t)\delta(t - a) = f(a)\delta(t - a)$	5.9
$\delta(t^2 - a^2) = \frac{\delta(t + a) + \delta(t - a)}{2 a }$	5.10
$x^n \delta^{(m)}(x) = 0, \quad 0 \leq m < n$	5.11
$x^n \delta^{(m)}(x) = (-1)^n \frac{m!}{(m - n)!} \delta^{m-n}(x), \quad 0 \leq n < m$	5.12

Tabla 5. 2 Representaciones de la función Delta de Dirac $\delta(r - r_0)$ en varios sistemas de coordenadas.

Coordenadas	Dimensión		
	Tres	Dos	Una
Cartesiana	$\delta(x - x_0)\delta(y - y_0)\delta(z - z_0)$	$\delta(x - x_0)\delta(y - y_0)$	$\delta(x - x_0)$
Cilíndrica	$\frac{\delta(r - r_0)\delta(\theta - \theta_0)\delta(z - z_0)}{r}$	$\frac{\delta(r - r_0)\delta(z - z_0)}{2\pi r}$	$\frac{\delta(r - r_0)}{2\pi r}$
Esférica	$\frac{\delta(r - r_0)\delta(\varphi - \varphi_0)\delta(\theta - \theta_0)}{r^2 \sin(\theta)}$	$\frac{\delta(r - r_0)\delta(\varphi - \varphi_0)}{2\pi r^2 \sin(\theta)}$	$\frac{\delta(r - r_0)}{4\pi r^2}$

5.2 Identidades de Green

Las fórmulas de Green están desarrolladas a partir del teorema de Divergencia del cálculo multivariable (**Duffy [1]**). Existen dos tipos y son denominadas Primera y Segunda fórmula de Green, y son, respectivamente:

$$\iiint_V \nabla u \cdot \nabla v dV + \iiint_V u \nabla^2 v dV = \iint_S u (\nabla v \cdot \mathbf{n}) dS, \quad \dots\dots\dots 5.13$$

y

$$\iiint_V (u \nabla^2 v - v \nabla^2 u) dV = \iint_S (u \nabla v - v \nabla u) \cdot \mathbf{n} dS, \quad \dots\dots\dots 5.14$$

las fórmulas de Green establecen la relación entre las fuentes y el flujo de dos campos escalares.

5.3 Funciones de Green

Se tiene un problema en derivadas parciales con la siguiente estructura:

$$Lu = g, \quad \dots\dots\dots 5.15$$

donde L representa un operador lineal diferencial, de la forma:

$$L = a \frac{\partial^2}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} + c \frac{\partial^2}{\partial y^2} + d \frac{\partial}{\partial x} + e \frac{\partial}{\partial y} + f, \quad \dots\dots\dots 5.16$$

con a, b, c, \dots, f , al igual que la función incógnita u y el termino inhomogéneo g , funciones de (x, y) . Esto es, $L = L(x, y)$.

Para resolver el problema original, se replantea un nuevo problema en términos de la función delta de Dirac, que, para este caso, se utiliza la nomenclatura en dos dimensiones, esto es:

$$LG(x, y; x_0, y_0) = \delta(x - x_0)\delta(y - y_0), \quad \dots\dots\dots 5.17$$

si la ecuación anterior, es multiplicada por la función g evaluada en un punto arbitrario (x_0, y_0) e integrar sobre todos los valores de x_0 y y_0 (suponiendo que son $(-\infty, \infty)$) se obtiene:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} LG(x, y; x_0, y_0)g(x_0, y_0)dx_0dy_0 \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0)\delta(y - y_0)g(x_0, y_0)dx_0dy_0, \end{aligned} \quad \dots\dots\dots 5.18$$

comparase, la **Ec. 5. 18** con la **Ec. 5. 3**, se puede observar que el lado derecho de la **Ec. 5. 18**, es por definición igual a $g(x, y)$, por lo tanto, puede reescribirse como:

Tema 5 Soluciones mediante Funciones de Green

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} LG(x, y; x_0, y_0)g(x_0, y_0)dx_0dy_0 = g(x, y), \quad \dots\dots\dots 5.19$$

Ahora, dado que $L(x, y)$ es un operador diferencial de segundo orden; basta con que $G(x, y; x_0, y_0)$ sea de clase C^2 para que L pueda salir de las integrales. Suponiendo esto, se tiene:

$$L \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(x, y; x_0, y_0)g(x_0, y_0)dx_0dy_0 = g(x, y), \quad \dots\dots\dots 5.20$$

Al compararla con la **Ec. 5.15** obtenemos directamente que:

$$u(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(x, y; x_0, y_0)g(x_0, y_0)dx_0dy_0, \quad \dots\dots\dots 5.21$$

que es la solución al problema original. La función $G(x, y; x_0, y_0)$, que satisface 5.17, es llamada la *función de Green* asociada al operador diferencial lineal L . Dado el carácter de funciones *unidad* de las deltas de Dirac, $G(x, y; x_0, y_0)$ puede pensarse como el operador inverso de L . Otro aspecto notable es que a partir de su conocimiento puede obtenerse la solución general del problema original. En ese sentido la función de Green asociada a L es una *solución fundamental* (**Zamora [2]**).

5.3.1 Funciones de Green para la Ecuación de Difusividad

5.3.1.1 Función de Green para la ecuación de difusividad en coordenadas cartesianas con un término fuente

La ecuación de difusividad considerando un término fuente o sumidero, en coordenadas cartesianas y en una dimensión está dada por la siguiente expresión:

$$\omega \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} - \frac{\partial Y}{\partial t} = q(x, t), \quad \dots\dots\dots 5.22$$

donde $q(x, t)$ representa al gasto como una función de (x, t) .

Para resolver lo anterior, se plantea un subproblema en términos de G :

$$\omega \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} - \frac{\partial G}{\partial t} = \delta(x - x_0)\delta(t - t_0), \quad \dots\dots\dots 5.23$$

aplicando la transformada de Fourier, respecto a x y t respectivamente, como se muestra a continuación:

$$\mathcal{F}_x\{G(x, t; x_0, t_0)\} = U(k, t; x_0, t_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} G(x, t; x_0, t_0) dx, \quad \dots\dots\dots 5.24$$

$$\mathcal{F}_t\{U(k, t; x_0, t_0)\} = V(k, w; x_0, t_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iwt} U(k, t; x_0, t_0) dt, \quad \dots\dots\dots 5.25$$

aplicando la **Ec. 5.24** a **5.23**, se obtiene:

$$(-ik)^2 \omega U - \frac{\partial U}{\partial t} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx_0} \right) \delta(t - t_0), \quad \dots\dots\dots 5.26$$

aplicando ahora la **Ec. 5.25** a **5.26**:

Tema 5 Soluciones mediante Funciones de Green

$$-k^2 \omega V + i\omega V = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx_0}\right) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\omega t_0}\right), \quad \dots\dots\dots 5.27$$

despejando a V :

$$V = \left(\frac{1}{i\omega - \omega k^2}\right) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx_0}\right) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\omega t_0}\right), \quad \dots\dots\dots 5.28$$

tomando la transformada inversa de Fourier, dada por:

$$\mathcal{F}_t^{-1}\{V(k, \omega; x_0, t_0)\} = U(k, t; x_0, t_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} V(k, \omega; x_0, t_0) d\omega, \quad \dots\dots 5.29$$

$$\mathcal{F}_x^{-1}\{U(k, t; x_0, t_0)\} = G(x, t; x_0, t_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} U(k, t; x_0, t_0) dk. \quad \dots\dots 5.30$$

Por lo tanto:

$$\mathcal{F}_t^{-1}\{V\} = U = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx_0}\right) \mathcal{F}_t^{-1}\left\{\left(\frac{1}{i\omega - \omega k^2}\right) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\omega t_0}\right)\right\}$$

o bien, aplicando las propiedades de la convolución:

$$U = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx_0}\right) \mathcal{F}_t^{-1}\left\{\left(\frac{1}{i\omega - \omega k^2}\right)\right\} * \mathcal{F}_t^{-1}\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\omega t_0}\right)\right\}$$

donde:

$$p(t) = \mathcal{F}_t^{-1}\left\{\frac{1}{i\omega - \omega k^2}\right\} = -\sqrt{2\pi} H(t) e^{-k^2 \eta t}$$

$$q(t) = \mathcal{F}_t^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\omega t_0}\right\} = \delta(t - t_0)$$

donde $H(t)$ es la Función de Heaviside (o escalón unitario), y está definida como:

$$H(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t \geq 0 \\ 0, & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

tomando en cuenta lo anterior:

$$U = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx_0} \right) (p * q)(t)$$

por definición la convolución, es:

$$p(t) * q(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} p(t-s)q(s)ds$$

dado lo anterior, la ecuación puede escribirse como:

$$U = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx_0} \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (-\sqrt{2\pi} H(t-s)e^{-k^2\omega(t-s)})\delta(s-t_0)ds . \quad \dots\dots\dots 5.31$$

La **Ec. 5.31** de acuerdo con la **Ec. 5.3**, puede escribirse como:

$$U = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx_0} \right) (-H(t-t_0)e^{-k^2\omega(t-t_0)})$$

continuando de igual manera para la transformada inversa en el espacio, se tiene que:

$$\mathcal{F}_x^{-1}\{U(k, t; x_0, t_0)\} = G(x, t; x_0, t_0) = \mathcal{F}_x^{-1}\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx_0}\right) (-H(t-t_0)e^{-k^2\omega(t-t_0)})\right\}$$

$$G(x, t; x_0, t_0) = \mathcal{F}_x^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx_0}\right\} * \mathcal{F}_x^{-1}\{-H(t-t_0)e^{-k^2\omega(t-t_0)}\}$$

si:

$$P(t) = \mathcal{F}_x^{-1}\{-H(t-t_0)e^{-k^2\omega(t-t_0)}\} = \frac{-H(t-t_0)}{\sqrt{2\omega(t-t_0)}} e^{-\frac{x^2}{4\omega(t-t_0)}}$$

$$Q(x) = \mathcal{F}_x^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx_0}\right\} = \delta(x-x_0)$$

Tema 5 Soluciones mediante Funciones de Green

entonces:

$$G(x, t; x_0, t_0) = P(x) * Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-H(t-t_0)}{\sqrt{2\omega(t-t_0)}} e^{-\frac{(x-s)^2}{4\omega(t-t_0)}} \delta(s-x_0) ds$$

$$G(x, t; x_0, t_0) = \frac{-H(t-t_0)}{\sqrt{2\omega(t-t_0)}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4\omega(t-t_0)}}$$

y por lo tanto:

$$p(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-H(t-t_0)}{\sqrt{2\omega(t-t_0)}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4\omega(t-t_0)}} f(x_0, t_0) dx_0 dt_0 .$$

Si se toma un camino similar para dos y tres dimensiones, además de otras coordenadas, se obtienen las G, presentadas en la **Tabla 5. 3**.

Tabla 5. 3 Funciones de Green para diferentes sistemas de coordenadas (Duffy [1]).

Dimensión	
Dos	
Coordenadas	
Cartesiana	$G(x, y, t; x_0, y_0, t_0) = \frac{H(t - t_0)}{4\pi\omega(t - t_0)} e^{\left[-\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{4\omega(t-t_0)}\right]}$
	$G(r, \theta, t; x_0, \theta_0, t_0) = \frac{H(t - t_0)}{4\pi\omega(t - t_0)} e^{\left[-\frac{r^2+r_0^2-2rr_0 \cos(\theta-\theta_0)}{4\omega(t-t_0)}\right]}$
Cilíndrica	$G(r, z, t; x_0, z_0, t_0) = \frac{H(t - t_0)}{8[\pi\omega(t - t_0)]^{\frac{3}{2}}} I_0 \left[\frac{rr_0}{2\omega(t-t_0)} \right] e^{\left[-\frac{r^2+r_0^2+(z-z_0)^2}{4\omega(t-t_0)}\right]}$
Tres	
Cartesiana	$G(x, y, z, t; x_0, y_0, z_0, t_0) = \frac{H(t - t_0)}{[4\pi\omega(t - t_0)]^{\frac{3}{2}}} e^{\left[-\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}{4\omega(t-t_0)}\right]}$
Cilíndrica	$G(r, \theta, z, t; x_0, \theta_0, z_0, t_0) = \frac{H(t - t_0)}{[4\pi\omega(t - t_0)]^{\frac{3}{2}}} e^{\left[-\frac{r^2+r_0^2-2rr_0 \cos(\theta-\theta_0)+(z-z_0)^2}{4\omega(t-t_0)}\right]}$

Referencias

1. Duffy, D. (2017). Green's Functions With Applications. [S.L.]: Chapman & Hall Crc.
2. Zamora, A. (2012). Ecuaciones diferenciales parciales. México: UVM.

Tema 6 Uso del principio de superposición en problemas de flujo

En este capítulo se presenta un tratamiento fundamental de la integral de convolución y su aplicación en las pruebas de pozo y de presión transitoria. La integral de convolución es usada para resolver ecuaciones diferenciales parciales parabólicas lineales, aplicables a la transferencia de calor o masa, y difusión de la presión en medios porosos con condiciones de frontera dependientes del tiempo.

6.1 Integral de superposición o convolución

En pruebas transitorias de presión, la integral de convolución es una expresión matemática de la presión del pozo en términos de la tasa de flujo medida y el comportamiento de la tasa constante de presión del yacimiento, esto es un problema directo (**Kuchuk [1]**). Un problema inverso, se tiene cuando la presión del pozo con la correspondiente tasa de flujo es medida, es entonces posible identificar el sistema y estimar sus parámetros, para ello se utiliza la deconvolución, de la cual posteriormente se hablará más a detalle.

Para obtener la integral de superposición o convolución obsérvese la **Figura 6. 1**, si se quiere calcular la caída de presión total en el pozo debido a una variación en el gasto, es necesario hacer uso del principio de superposición, el cual establece que la caída de presión total será igual a la suma de las caídas de presión causados por cada cambio en el gasto desde el momento de cada cambio, es decir:

$$\Delta Y_t = \Delta Y_w(t) + \Delta Y_w(t - t_1) + \Delta Y_w(t - t_2) + \dots + \Delta Y_w(t - t_{N-1})$$

$$\Delta Y_t = \sum_{j=1}^N \Delta Y_j(t_j - t_{j-1})$$

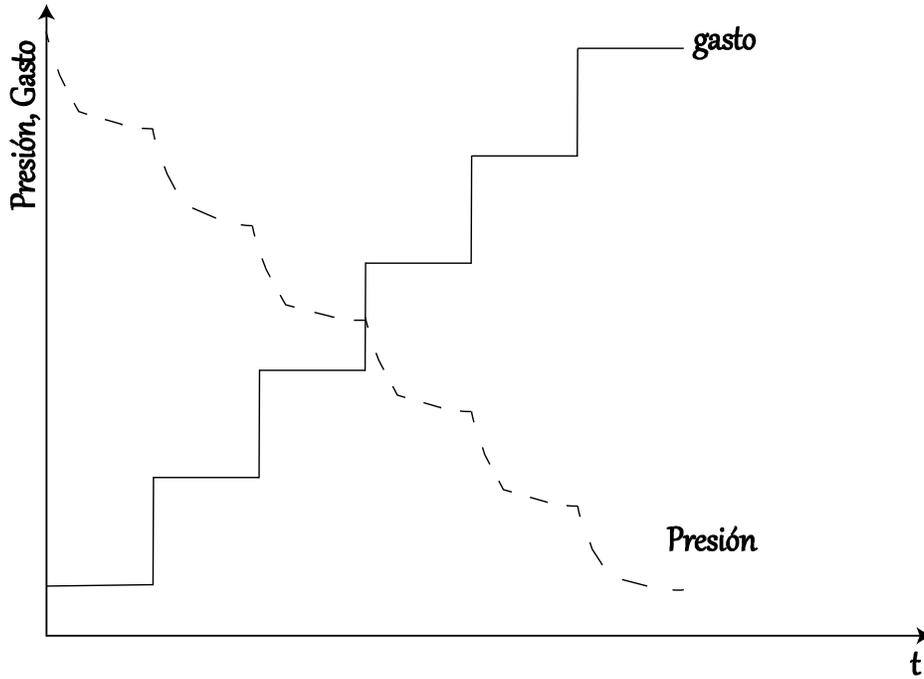


Figura 6. 1 Comportamiento de un sistema que se produce a gastos múltiples.

Recordando la definición de la presión adimensional, y tomando en cuenta que, del lado izquierdo puede existir una q que puedan representar el comportamiento total del sistema, se puede obtener la siguiente expresión:

$$\frac{\alpha \epsilon q_{eq} B \mu}{kh} Y_D(t_D) = \frac{\alpha \epsilon B \mu}{kh} \sum_{j=1}^N \Delta q_j Y_D(t_D - t_{D_{j-1}})$$

reduciendo términos:

$$q_{eq} Y(t_D) = \sum_{j=1}^N \Delta q_j Y_D(t_D - t_{D_{j-1}})$$

despejando a p_D y multiplicando el lado derecho por $\Delta t_{D_j} / \Delta t_{D_j}$:

$$Y_D(t_D) = \sum_{j=1}^N \frac{\Delta q_j}{q_{eq}} Y_D(t_D - t_{Dj-1}) \frac{\Delta t_{Dj}}{\Delta t_{Dj}}$$

renombrando a $\Delta q_{Dj} = \Delta q_j / q_{eq}$:

$$Y_D(t_D) = \sum_{j=1}^N \Delta q_{Dj} Y_D(t_D - t_{Dj-1}) \frac{\Delta t_{Dj}}{\Delta t_{Dj}} = \sum_{j=1}^N \frac{\Delta q_{Dj}}{\Delta t_{Dj}} Y_D(t_D - t_{Dj-1}) \Delta t_{Dj}$$

y tomando limites cuando $\Delta q_{Dj} \rightarrow 0$ y $\Delta t_{Dj} \rightarrow 0$:

$$Y_D(t_D) = \int_0^{t_D} \frac{dq_D}{dt_D} Y_D(t_D - \tau) d\tau. \quad \dots\dots\dots 6.1$$

Si se sigue un camino similar para el gasto se llega:

$$q_D(t_D) = \int_0^{t_D} \frac{dY_D}{dt_D} q_D(t_D - \tau) d\tau. \quad \dots\dots\dots 6.2$$

La **Ec. 6.1** y la **Ec. 6.2**, son conocidas como integrales de convolución, donde dq_D/dt_D y dp_D/dt_D son conocidas como funciones de influencia, y son soluciones de la ecuación de difusividad. Las funciones $q_D(t_D - \tau)$ y $p_D(t_D - \tau)$, son llamadas funciones de forzamiento, y suelen ser condiciones de frontera dependientes del tiempo (**Kuchuk [1]**). En la terminología de pruebas de pozos, normalmente se genera la presión del pozo, se ingresa la tasa de producción y el modelo del yacimiento es el núcleo de convolución.

Cada una de estas integrales nos permiten:

- Analizar gastos múltiples, en una prueba de presión.
- Obtener una relación entre q_D y Y_D en el espacio de Laplace
- A través de la convolución extender el periodo de análisis de un sistema fluyente.

6.2 Deconvolución

En los últimos años, la deconvolución se ha utilizado cada vez más para la interpretación de pruebas transitorias de presión. La deconvolución simplemente es la resolución de la integral de convolución para el núcleo de convolución, es decir, despejar de alguna manera a dY_D/dt_D o dq_D/dt_D de las **Ecs. 6. 1** o **6. 2**. En otras palabras, la deconvolución es una herramienta que permite reconstruir (calcular) una respuesta de la reducción constante del gasto equivalente (extrapolado) para todos los periodos de producción y cierre combinados.

En las pruebas transitorias de presión, la deconvolución se define como la determinación de la función de influencia o el comportamiento de la respuesta unitaria de un sistema (una respuesta constante equivalente) a partir de la presión transitoria medida y los datos de la tasa de flujo.

Si tomamos la transformada de Laplace de la **Ec. 6. 1**, se obtiene:

$$\mathcal{L}\{Y_D(t_D)\}\{Z\} = \bar{Y}_D(Z) = \mathcal{L}\left\{\frac{dq_D}{dt_D}\right\} \mathcal{L}\{Y_D(t_D)\}$$

y despejando a $\mathcal{L}\{dq_D/dt_D\}$:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dq_D}{dt_D}\right\} = \bar{Y}_D(s) \frac{1}{\mathcal{L}\{Y_D(t_D)\}} \dots\dots\dots 6.3$$

Tomando la transformada inversa de la **Ec. 6. 3**:

$$\frac{dq_D}{dt_D} = \int F(\tau)Y_D(t - \tau)d\tau \dots\dots\dots 6.4$$

donde $F = \mathcal{L}^{-1}\{1/\mathcal{L}\{Y_D\}\}$. La Ec. 6. 4 representa la integral de deconvolución para el gasto.

Referencias

1. Kuchuk, F. (2010). Convolution and deconvolution in pressure transient formation and well testing. 1st ed. Amsterdam: Elsevier Science

Tema 7 Metodología de solución de problemas de flujo

Con base en los casos previamente revisados, se propone la siguiente metodología útil para la resolución de problemas de flujo en el yacimiento:

1. Planteamiento del problema. En este paso se requieren definir las características básicas del problema a resolver:

- i. Escala de estudio (p.e. a nivel de poro, a nivel de pozo, a nivel de yacimiento u otras similares).
- ii. Las variables involucradas (como los gastos de inyección y producción, el número de fases en el yacimiento, y las presiones que pueden tener lugar).
- iii. Sistema coordinado (cartesiano, radial, esférico u otro que simplifique el análisis de las variables al considerar las simetrías existentes en el problema).
- iv. Expresiones fundamentales que representan el comportamiento del sistema (como las distribuciones de permeabilidad, la velocidad de Darcy, la continuidad de la materia, y el modelo del fluido).
- v. Condiciones iniciales y de frontera (de acuerdo con las características de producción, los fenómenos observados en los límites físicos del sistema estudiado y los estados de flujo existentes).

2. Definición del modelo. Con los elementos anteriores, se deben conformar las ecuaciones fundamentales de flujo correspondientes, cuidando que las condiciones de frontera elegidas sean representativas de la situación y consistentes para su uso en las formulaciones elegidas.

Asimismo, es conveniente considerar el uso de conjuntos adimensionales que permitan parametrizar los problemas, simplificar los procesos de resolución y generalizar las soluciones obtenidas.

- 3. Elegir el método de solución.** Para este punto se identifican las características de las expresiones fundamentales de flujo conformadas: su tipo, linealidad, condiciones de frontera y homogeneidad, así como las dimensiones en las que se encuentran definidas.

Antes de solucionar el problema es conveniente realizar una búsqueda en la literatura de problemas análogos previamente resueltos.

- 4. Analizar y validar las soluciones obtenidas.** Es conveniente inspeccionar las soluciones generadas, si los comportamientos obtenidos al evaluarlas corresponden con lo esperado. En muchos casos, es posible utilizar un modelo asintótico como referencia, permitiendo validar los resultados obtenidos.

A continuación, se presenta la aplicación de esta metodología para la obtención de las soluciones de Fetkovich en el análisis de datos de producción, así como métodos para su aplicación basados en el principio de superposición.

7.1 Análisis clásico de datos de producción

Una de las formas más recurrentes de analizar los datos de producción es mediante los modelos de declinación de la producción de Arps, estos están basados en relaciones tiempo-gasto puramente empíricas, desarrolladas a partir de la observación de la declinación de los pozos, y están limitadas a dos aspectos (**Sun [1]**):

1. La recuperación final estimada puede ser estimada bajo la asunción de que las condiciones de producción se mantendrán inmutables en el tiempo.
2. La representación de la curva de declinación está definida a condiciones de flujo dominado por las fronteras, por lo que no puede ser usada para analizar datos bajo el periodo de flujo transitorio.

De manera general las ecuaciones de Arps están dadas por:

$$\frac{q(t)}{q_i} = \frac{1}{(1 + bD_i t)^{\frac{1}{b}}}. \quad \dots\dots\dots 7.1$$

Donde b es el factor de forma de la curva, D_i es el índice de declinación y q_i es el gasto inicial del modelo. Para $b = 0$, se obtiene la ecuación para la declinación exponencial:

$$q(t) = q_i e^{-D_i t}, \quad \dots\dots\dots 7.2$$

y para $b = 1$, se refiere a la declinación armónica, dada por:

$$q(t) = \frac{q_i}{1 + D_i t}. \quad \dots\dots\dots 7.3$$

Para valores de $0 < b < 1$, la **Ec. 7.1** Describe un comportamiento hiperbólico. Una manera práctica de presentar las curvas de declinación de Arps, es a través del uso de variables adimensionales. Tales variables adimensionales fueron propuestas por Gendry (**Sun [1]**), y son:

$$t_{Dd} = D_i t, \quad \dots\dots\dots 7.4$$

$$q_{Dd} = \frac{q}{q_i} = e^{-t_{Dd}}. \quad \dots\dots\dots 7.5$$

Las curvas de las **Ecs. 7.1 a 7.3** en variables adimensionales se presentan en la **Figura 7.1**.

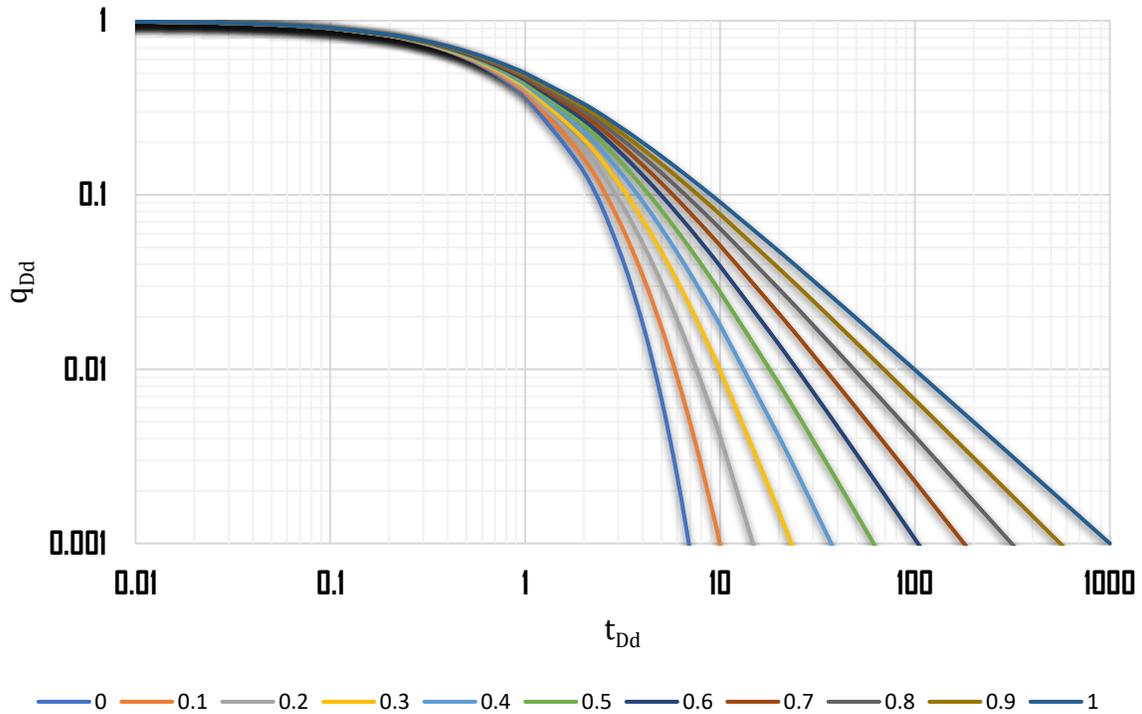


Figura 7. 1 Curvas tipo de Arps.

7.2.3 Modelos de declinación de Fetkovich

Las soluciones de Fetkovich complementan el trabajo de Arps en el período de flujo transitorio. Buscando un sustento matemático que explicará el porqué de las curvas de Arps logran representar el comportamiento de la producción, siendo que estas se basan en conocimientos empíricos.

Para obtener los modelos de este autor se utilizará la metodología de resolución de problemas presentada:

1. Dado que el análisis se realizará para un sistema pozo-yacimiento, para la definición del problema se supone un yacimiento radial volumétrico, cuya presión de fondo fluyendo permanece constante.
2. La ecuación diferencial parcial, así como las condiciones iniciales y de frontera que representan el problema están dadas (en variables adimensionales) por:

$$\frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D \frac{\partial Y_D}{\partial r_D} \right) = \frac{\partial Y_D}{\partial t_D}, \quad \dots\dots\dots 7.6$$

$$Y_D(r_D, 0) = 0, \quad \dots\dots\dots 7.7$$

$$Y_D(1, t_D) = 1, \quad \dots\dots\dots 7.8$$

$$r_D \frac{\partial Y_D}{\partial r_D} \Big|_{r_D=r_{eD}} = 0, \quad \dots\dots\dots 7.9$$

$$q_D = - \left(r_D \frac{\partial Y_D}{\partial r_D} \right)_{r_D=1} \cdot \quad \dots\dots\dots 7.10$$

Para lo cual las variables adimensionales correspondientes se definen como:

$$Y_D = \frac{Y_i - Y}{Y_i - Y_{wf}}, \quad t_D = \frac{kt}{\phi \mu C_t r_w^2}, \quad r_D = \frac{r}{r_w}, \quad r_{eD} = \frac{r_e}{r_w}, \quad q_D = \frac{qB\mu}{2\pi kh(Y_i - Y_{wf})}.$$

3. Dado que el problema presentado es similar a otros presentados en la literatura (**Van Everdingen y Hurst [2]**), se propone el uso de la Transformada de Laplace (**Tema 4**), obteniéndose como solución a \bar{Y}_D las **Ecs. 7.11 a 7.13**:

$$\bar{Y}_D = A I_0(\sqrt{Z} r_D) + B K_0(\sqrt{Z} r_D), \quad \dots\dots\dots 7.11$$

$$A = \frac{1}{Z} \frac{K_1(\sqrt{Z} r_{eD})}{I_0(\sqrt{Z}) K_1(\sqrt{Z} r_{eD}) + I_1(\sqrt{Z} r_{eD}) K_0(\sqrt{Z})}, \quad \dots\dots\dots 7.12$$

$$B = \frac{1}{Z} \frac{I_1(\sqrt{Z}r_{eD})}{I_0(\sqrt{Z})K_1(\sqrt{Z}r_{eD}) + I_1(\sqrt{Z}r_{eD})K_0(\sqrt{Z})}, \quad \dots\dots\dots 7.13$$

luego, para obtener la solución del gasto en el pozo, se deriva a la **Ec. 7.10** con respecto de r_D y se multiplica por esta misma variable:

$$r_D \frac{\partial \bar{Y}_D}{\partial r_D} = r_D [A\sqrt{Z}I_1(\sqrt{Z}r_D) - B\sqrt{Z}K_1(\sqrt{Z}r_D)]$$

con lo que al evaluar en $r_D = 1$ se obtiene

$$r_D \left. \frac{\partial \bar{Y}_D}{\partial r_D} \right|_{r_D=1} = A\sqrt{Z}I_1(\sqrt{Z}) - B\sqrt{Z}K_1(\sqrt{Z}) = -\bar{q}_D$$

o bien, sustituyendo las **Ecs. 7.12** y **7.13**:

$$\bar{q}_D = \frac{1}{\sqrt{Z}} \left[\frac{I_1(\sqrt{Z}r_{eD})K_1(\sqrt{Z}) - K_1(\sqrt{Z}r_{eD})I_1(\sqrt{Z})}{I_0(\sqrt{Z})K_1(\sqrt{Z}r_{eD}) + I_1(\sqrt{Z}r_{eD})K_0(\sqrt{Z})} \right]. \quad \dots\dots\dots 7.14$$

La **Ec. 7.14** es la solución de Fetkovich para el periodo transitorio, que al evaluar a diferentes tiempos adimensionales y utilizando el método de inversión numérica de Stehfest (**Reyes [3]**) resulta en la **Figura 7.2**.

4. Para validar la solución obtenida se analiza el comportamiento a tiempos largos del sistema. En este caso, al ser un yacimiento cerrado, se espera que durante el período dominado por las fronteras ($t_D = t_{Deia}$) el gasto se ajuste a la declinación exponencial de Arps.

Una vez validada la solución, para extender la aplicación de la solución obtenida, Fetkovich planteó el uso del principio de superposición presentado por (**Van Everdingen y Hurst [2]**), en el cual la solución para la presión a gasto contante y la solución para el gasto a presión de fondo fluyendo constante, pueden relacionarse como:

$$\bar{Y}_{wD}(Z)\bar{q}_D(Z) = \frac{1}{Z^2}.$$

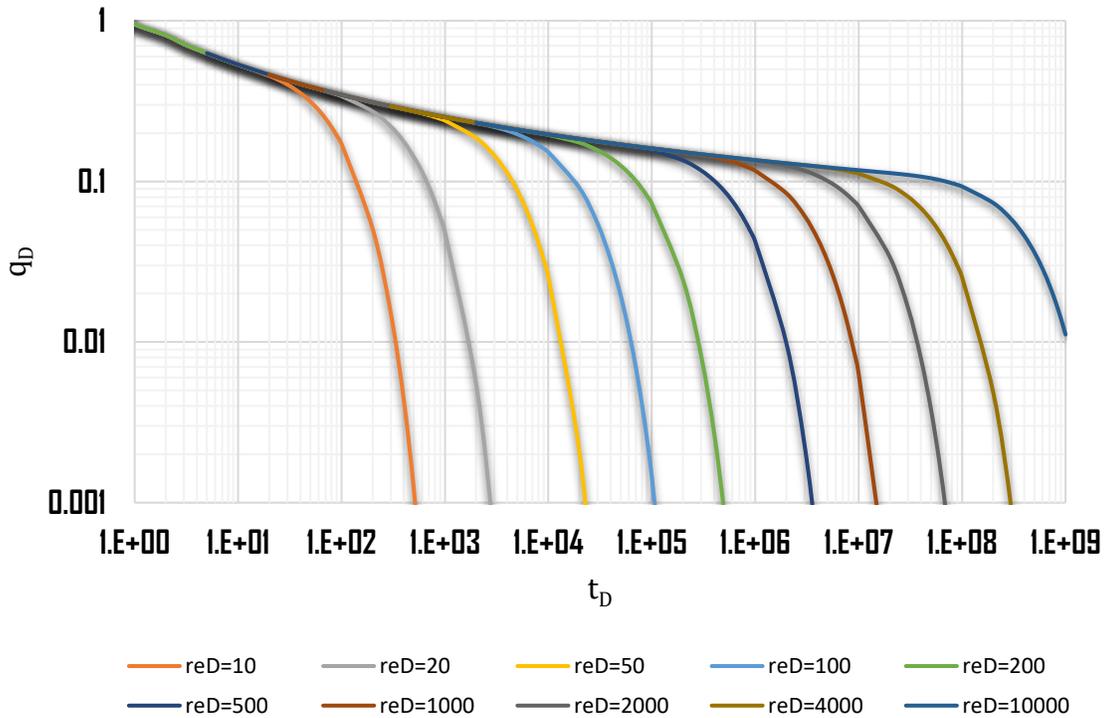


Figura 7. 2 Curvas tipo de Fetkovich para el periodo transitorio.

Así, despejando a $\bar{q}_D(Z)$ y sustituyendo la solución para la presión de fondo en el espacio de Laplace para flujo pseudo-estacionario, se tiene que:

$$\bar{q}_D(Z) = \frac{1}{Z^2} \frac{1}{\frac{2}{Z^2 r_{eD}^2} + \frac{1}{Z} \left(\ln|r_{eD}| - \frac{3}{4} \right)} = \frac{1}{\frac{2}{r_{eD}^2} + Z \left(\ln|r_{eD}| - \frac{3}{4} \right)},$$

que al obtener su transformada inversa resulta en:

$$q_D = \frac{1}{\ln|r_{eD}| - \frac{3}{4}} e^{-\frac{2t_D}{r_{eD}^2 \left(\ln|r_{eD}| - \frac{3}{4} \right)}}.$$

Considerando lo anterior, Fetkovich comparo esta solución con la ecuación exponencial de Arps (en variables adimensionales):

$$\alpha q_D = e^{-\beta t_D},$$

y a partir de esto, formuló dos nuevas variables:

$$q_{Dd} = \alpha q_D = \left(\ln|r_{eD}| - \frac{3}{4} \right) q_D, \quad \dots\dots\dots 7.15$$

$$t_{Dd} = \beta t_D = \frac{2}{r_{eD}^2 \left(\ln|r_{eD}| - \frac{3}{4} \right)} t_D. \quad \dots\dots\dots 7.16$$

Incluyendo estas nuevas variables en la ecuación de difusividad (**Ec. 7.6**) se tiene el problema:

$$\frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D \frac{\partial Y_D}{\partial r_D} \right) = \beta \frac{\partial Y_D}{\partial t_{Dd}}. \quad \dots\dots\dots 7.17$$

Sujetas a las condiciones:

$$Y_D(r_D, 0) = 0, \quad \dots\dots\dots 7.18$$

$$Y_D(1, t_D) = 1, \quad \dots\dots\dots 7.19$$

$$r_D \frac{\partial Y_D}{\partial r_D} \Big|_{r_D=r_{eD}} = 0, \quad \dots\dots\dots 7.20$$

$$q_D = -\alpha \left(r_D \frac{\partial Y_D}{\partial r_D} \right)_{r_D=1}, \quad \dots\dots\dots 7.21$$

de manera similar al primer caso, si se soluciona este nuevo problema en el espacio de Laplace el lector podrá llegar fácilmente a la solución siguiente:

$$\bar{q}_D = \frac{\alpha\sqrt{\beta}}{\sqrt{Z}} \left[\frac{I_1(\sqrt{\beta Z} r_{eD})K_1(\sqrt{\beta Z}) - K_1(\sqrt{\beta Z} r_{eD})I_1(\sqrt{\beta Z})}{I_0(\sqrt{\beta Z})K_1(\sqrt{\beta Z} r_{eD}) + I_1(\sqrt{\beta Z} r_{eD})K_0(\sqrt{\beta Z})} \right]. \quad \dots\dots\dots 7.22$$

La cual, con ayuda de un inversor numérico, se obtiene sus representaciones en el espacio real, **Figura 7. 3**, en la cual se observa cómo antes del periodo dominado por las fronteras, el flujo es controlado por r_{eD} , para cuando $t_{Dd} > t_{Ddeia}$, el periodo de flujo cambia a ser gobernado por las fronteras y coincide con la declinación exponencial.

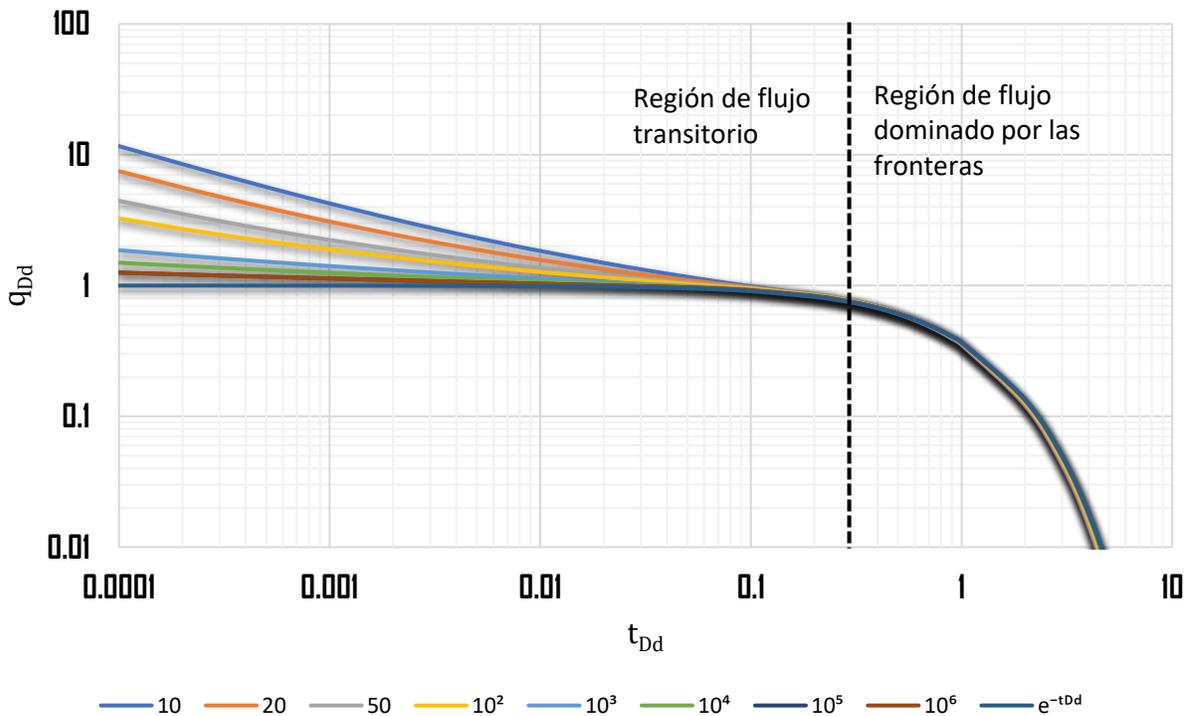


Figura 7. 3 Curvas tipo de Fetkovich para q_{Dd} con r_{eD} de 10 a 10^6 .

7.2.4 Modelos de Arps-Fetkovich

Considerando que los modelos de Fetkovich, en el periodo dominado por las fronteras, muestran una declinación exponencial, es posible incluir los modelos de Arps a partir del momento en el que concluye el periodo transitorio de flujo en las curvas. De esta manera puede extenderse la aplicación para el análisis de datos de producción, como se muestra en la **Figura 7. 4**.

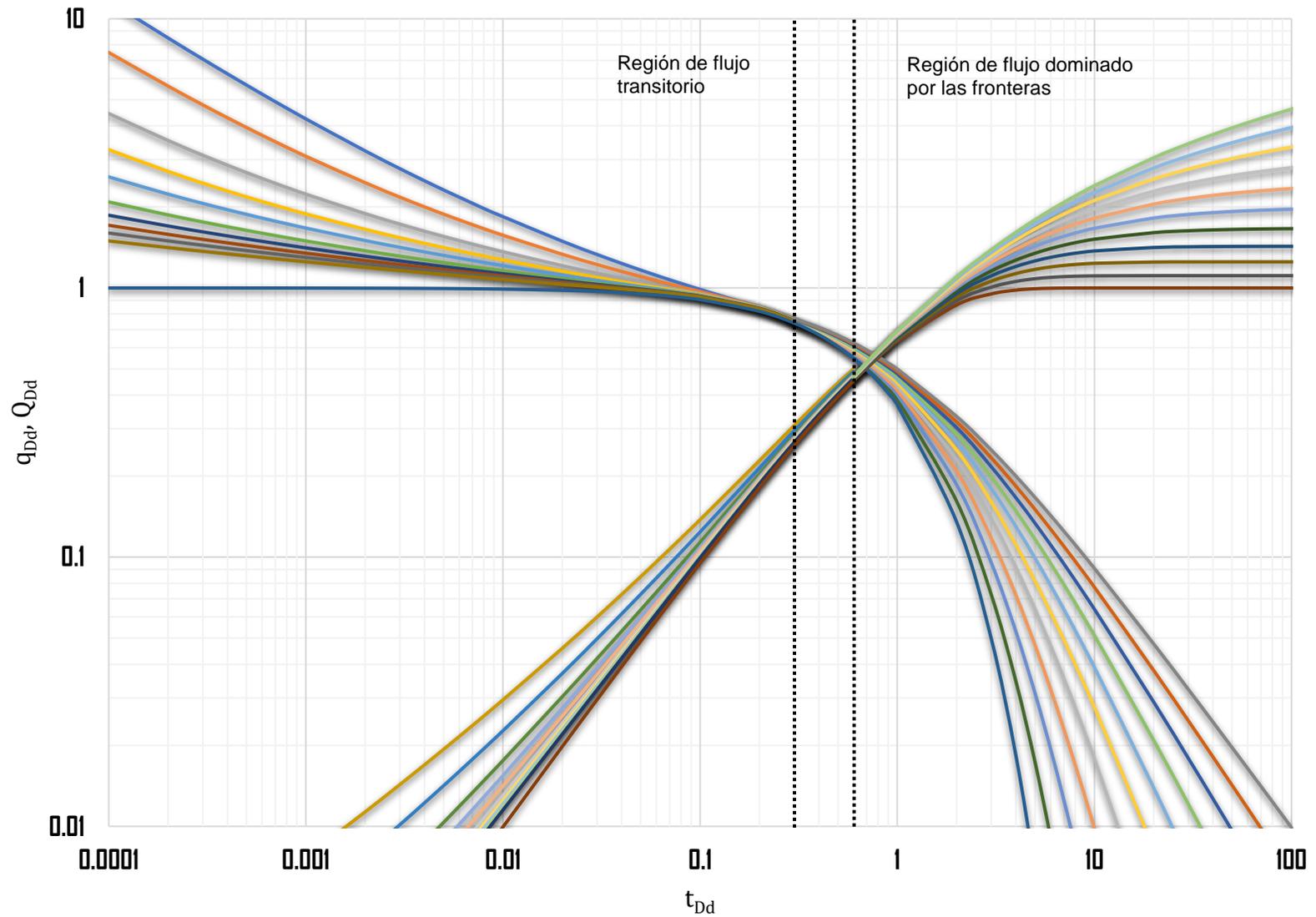


Figura 7. 4 Curva tipo del modelo de Arps-Fetkovich.

7.2.5 Modelo de Blasingame

Tanto los modelos de Arps como de Fetkovich, se basan en el supuesto de que la presión de fondo fluyendo se mantiene constante y consideran principalmente los datos de gasto, además de no considerar el cambio en las propiedades de presión-volumen-temperatura (PVT) con la presión del yacimiento. Sin embargo, el método de Blasingame tiene en cuenta la condición de presión de fondo variable y las propiedades PVT, que cambian con la presión del yacimiento, además de que hace uso del tiempo de balance de materia para superponer las diferentes tasas de flujo (**Sun [1]**).

El tiempo de balance de material es la relación entre la producción acumulada actual y la tasa de flujo diaria, que podría describirse como:

$$t_c = \frac{Q_p}{q} = \frac{1}{q} \int_0^t q(t) dt, \quad \dots\dots\dots 7.23$$

o en términos de variables adimensionales:

$$t_{cD} = \frac{Q_{pD}}{q_D}, \quad \dots\dots\dots 7.24$$

y para las variables de Arps-Fetkovich, la **Ec. 7.24** resulta:

$$t_{cDd} = \frac{Q_{pDd}}{q_{Dd}}. \quad \dots\dots\dots 7.25$$

Su significado geométrico se muestra en la **Figura 7.5**. Basados en la **Ec. 7.25** una relación equivalente entre producir a una tasa constante y variable podría ser construida.

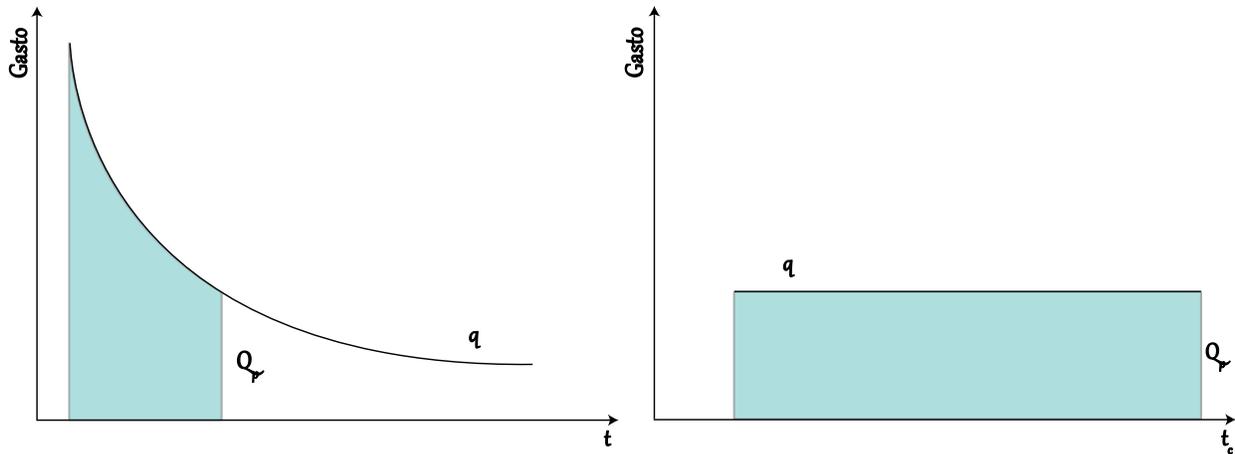


Figura 7. 5 Esquematzación del tiempo de balance de materia.

Para ejemplificar el efecto del tiempo de balance de materia sobre las soluciones de flujo, se incluye la **Figura 7. 6**, en la cual se muestra la solución de Fetkovich evaluada en términos de t_{Dd} y t_{cDd} . Se observa que durante el periodo transitorio la correspondencia de las escalas de tiempo es lineal, lo que provoca que los valores obtenidos para ambos casos sean similares. No obstante, a partir del periodo dominado por las fronteras, el tiempo de balance de materia extiende el comportamiento observado de las soluciones, como consecuencia de lo expuesto en la Figura 7. 6.

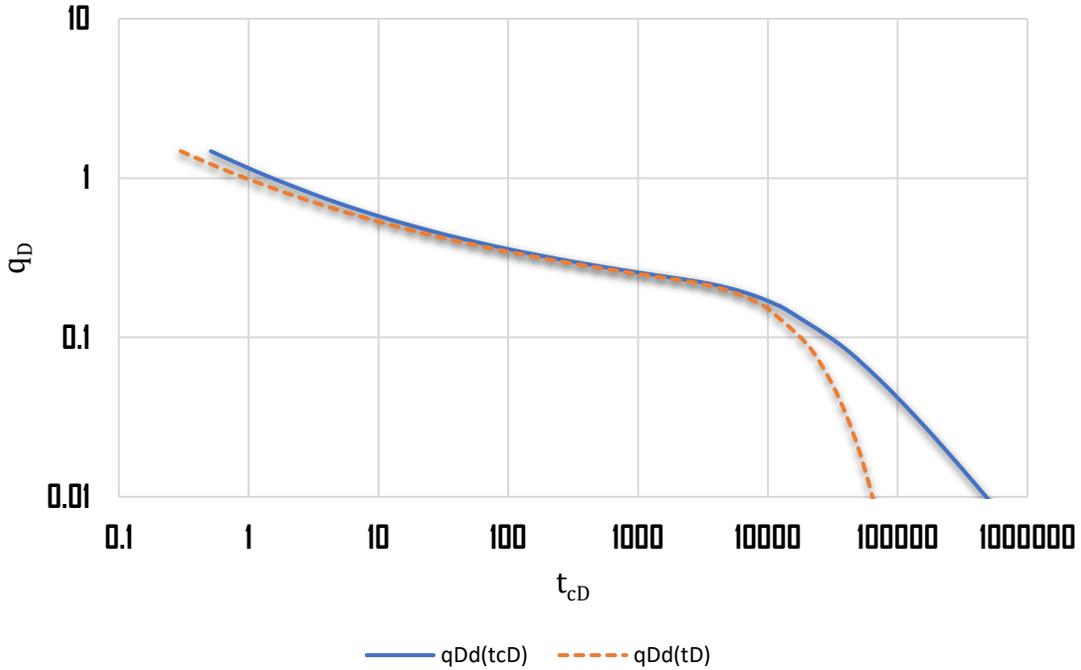


Figura 7. 6 Solución de Fetkovich evaluada en t_{Dd} y t_{cDd} en $r_{eD} = 100$.

Además, por el principio de superposición, el tiempo de balance de materia permite usar soluciones obtenidas a condiciones de producción a gasto constante, como:

$$q_{Dd} = q_{Dd}(\ln r_{eD} - \omega, t_{cDd}) = \frac{\ln r_{eD} - \omega}{L^{-1}[\bar{Y}_D]}, \quad \dots\dots\dots 7.26$$

donde \bar{Y}_D es la solución para la presión de fondo en el espacio de Laplace, obtenida a condiciones de producción a gasto constante. Por ejemplo, la **Figura 7. 7** muestra los comportamientos de la solución de Fetkovich y su caso análogo, **Ec. 7. 27**, contra el tiempo de balance de materia, observándose que ambas se sobreponen.

$$\bar{Y}_D = \frac{1}{z\sqrt{\beta z}} \left[\frac{\frac{K_1(r_{eD}\sqrt{\beta z})}{I_1(r_{eD}\sqrt{\beta z})} + \frac{K_0(\sqrt{\beta z})}{I_0(\sqrt{\beta z})}}{\frac{K_1(\sqrt{\beta z})}{I_0(\sqrt{\beta z})} - \frac{I_1(\sqrt{\beta z})K_1(r_{eD}\sqrt{\beta z})}{I_0(\sqrt{\beta z})I_1(r_{eD}\sqrt{\beta z})}} \right] \dots\dots\dots 7.27$$

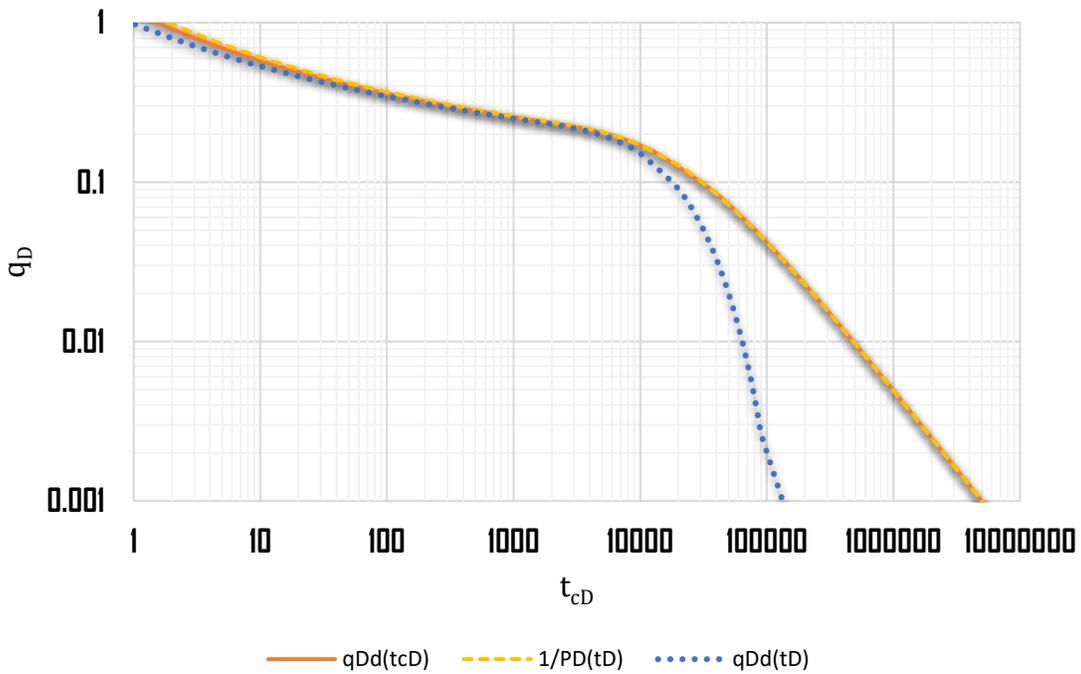


Figura 7. 7 Comportamiento de las soluciones de Fetkovich y Blasingame para un yacimiento cerrado a presión de fondo y gasto constantes contra t_{cDd} , $r_{eD} = 100$.

Referencias

1. Sun, H. (2015). Advanced production decline analysis and application.
2. Van Everdingen, A., & Hurst, W. (1949). The Application of the Laplace Transformation to Flow Problems in Reservoirs. *Journal Of Petroleum Technology*, 1(12), 305-324. doi: 10.2118/949305-g.
3. Reyes Bautista, J. (2016). Aplicaciones de Métodos de Inversión Numérica para la Generación de Curvas Tipo Mediante la Transformada de Laplace (Licenciatura). Universidad Nacional Autónoma de México.

Tema 8 Caso de Estudio

Para este último capítulo se plantea el problema de un yacimiento de gas, cuya temperatura es de 176 [°F] y cuyas propiedades se presentan en la **Tabla 8. 1**. Además, se tiene información de producción, reportadas en la **Tabla 8. 2**. Se requiere conocer el modelo de yacimiento, así como sus parámetros.

Tabla 8. 1 Propiedades del yacimiento.

p_i [psia]	4351.13	μ_{g_i} [cp]	0.0228
k [mD]	2	B_{g_i} [cft/scf]	0.00395
c_t [1/psi]	1.73×10^{-4}	γ_g	0.6
s	-5.52	T_{pc} [°R]	352.25
h [ft]	32.8	p_{pc} [psia]	677
ϕ [fracc.]	0.1	r_w [ft]	0.328
G [MMscf]	7063	r_e [ft]	1640.42

Para el estudio de este caso se propone la siguiente metodología una vez validada la información:

1. Analizar el comportamiento de los datos deconvolucionados de la presión y su función derivada para conceptualizar el modelo de flujo.
2. Identificado el modelo, analizar el gráfico especializado para determinar los parámetros correspondientes a cada etapa de flujo.

- Una vez obtenidos los parámetros, evaluar la solución general del caso de producción mediante uno o más tipos de soluciones. En este trabajo se propone el uso de las curvas de Arps-Fetkovich.

Por tratarse de un yacimiento de gas, en el cual se asume que la permeabilidad no depende de la presión, se recomienda el uso de la **Ec. 2. 60**, presentada en el **Tema 2** de este trabajo.

Tabla 8. 2 Datos de producción.

Tiempo	Gasto	Presión de fondo fluyendo	Gp	Tiempo	Gasto	Presión de fondo fluyendo	Gp
Días	Mpcd	psi	MMpc	Días	Mpcd	psi	MMpc
1	7055.87	4020.45	7.06	350	395.52	2327.86	2155.25
2	7052.34	3949.38	14.13	360	5297.2	2295.95	2208.23
3	7045.28	3904.42	21.19	370	5254.82	2264.04	2261.2
4	7041.74	3872.51	28.25	380	5212.44	2232.13	2313.46
5	7034.68	3847.85	35.32	390	5170.07	2201.67	2365.38
6	7027.62	3826.10	42.38	400	5127.69	2171.22	2416.94
7	7024.09	3808.69	49.44	410	5088.84	2140.76	2467.79
8	7017.02	3794.19	56.15	420	5046.47	2110.3	2518.64
9	7013.49	3779.68	63.21	430	5007.62	2079.84	2568.79
10	7006.43	3768.08	70.28	440	4968.77	2050.83	2618.58
20	6949.93	3685.41	140.2	450	4926.4	2021.83	2668.02
30	6896.95	3627.39	209.42	460	4887.55	1992.82	2717.11
40	6840.45	3573.73	277.93	470	4848.7	1963.81	2765.84
50	6787.48	3522.97	346.08	480	4809.86	1934.8	2814.23
60	6730.98	3472.20	413.54	490	4771.01	1907.25	2861.9
70	6678.00	3422.89	480.63	500	4735.7	1878.24	2909.58
80	6625.03	3375.03	547.02	510	4696.85	1850.68	2956.54
90	6572.06	3327.17	613.06	520	4658	1823.12	3003.51
100	6519.09	3280.75	678.4	530	4622.69	1795.57	3049.78
110	6469.65	3235.79	743.02	540	4583.84	1768.01	2989.74
120	6416.67	3190.83	807.65	550	4548.53	1740.45	3141.59
130	6363.70	3145.87	871.57	560	4513.21	1714.35	3186.8
140	6314.26	3102.36	935.13	570	4477.9	1686.79	3231.64
150	6264.82	3060.30	997.99	580	4442.58	1660.68	3276.14
160	6215.38	3018.24	1060.15	590	4407.27	1634.58	3320.28

Tema 8 Caso de Estudio

170	6165.94	2992.13	1122.30	600	4371.96	1608.47	3364.43
180	6116.5	2937.01	1183.39	610	4336.64	1582.36	3407.86
190	6067.06	2896.4	1244.49	620	4301.33	1556.26	3450.95
200	6017.62	2857.24	1304.88	630	4266.01	1530.15	3493.68
210	5971.71	2818.08	1364.91	640	4234.23	1504.04	3536.41
220	5922.27	2780.37	1424.24	650	4198.91	1479.39	3578.44
230	5876.36	2742.66	1483.22	660	4167.13	1453.28	3620.11
240	5830.45	2704.95	1541.84	670	4131.82	1427.17	3661.78
250	5781.01	2668.69	1599.75	680	4100.03	1402.52	3702.74
260	5735.1	2632.44	1657.32	690	4068.25	1377.86	3743.71
270	5689.19	2597.63	1714.53	700	4032.94	1351.75	3783.97
280	5646.82	2561.37	1771.03	710	4001.15	1327.1	3824.22
290	5600.91	2526.56	1827.18	720	3969.37	1302.44	3864.13
300	5555	2493.2	1882.98	730	3937.58	1276.33	3903.68
310	5512.62	2458.39	1938.42	740	3905.8	1251.68	3942.88
320	5466.71	2425.03	1993.16	750	3877.55	1227.02	3981.73
330	5424.33	2391.67	2047.54	760	3845.77	1202.36	4020.22
300	5555	2493.2	1882.98	770	3813.98	1177.71	4058.72
310	5512.62	2458.39	1938.42	780	3785.73	1153.05	4096.5
320	5466.71	2425.03	1993.16	790	3753.95	1126.94	4134.29
330	5424.33	2391.67	2047.54	800	3725.7	1102.29	4171.72
340	5381.96	2359.76	2101.58				

El procedimiento para el cálculo de la pseudo-presión es el siguiente:

1. Definir un rango de presiones a los cuales se requiera calcular la pseudo-presión, normalmente desde la presión atmosférica (14.7 [psia]) hasta la presión inicial del yacimiento (4351.13 [psia]).
2. Calcular las propiedades necesarias (viscosidad y factor Z).
3. Cálculo de la pseudo-presión. El cálculo de la pseudo-presión puede ser calculada mediante algún método de integración numérica presentadas en el **Tema 1**, de este trabajo; para este caso se empleó la Regla Trapezoidal. Recordando la **Ec. 1.37**, la pseudo-presión puede aproximarse como:

$$\Psi(p) = 2 \int_a^b \frac{p}{\mu_g Z} dp \approx 2 \left\{ \frac{b-a}{2n} \left[f(x_0) + f(x_n) + 2 \sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) \right] \right\}, \quad \dots\dots \quad \mathbf{8.1}$$

Donde:

$$f(x_j) = \frac{p_j}{\mu_{g_j} Z_j}, \dots\dots\dots 8.2$$

$$\frac{b - a}{2n} = \frac{p_i - p_{atm}}{2n} \dots\dots\dots 8.3$$

Los resultados para los pasos 1. al 3. Quedan resumidos en la **Tabla 8. 3**, en la cual se han omitido algunos valores con el propósito de no hacer tan extensa la tabla.

Tabla 8. 3 Cálculo de la pseudo-presión.

Presión Psia	Z	μ_g cp	$\Psi(p) \times 10^{-6}$	Presión Psia	Z	μ_g cp	$\Psi(p) \times 10^{-6}$
14.7	0.9987	0.0133	0.0	2190	0.9039	0.0167	343.1
30	0.9974	0.0133	0.1	2205	0.9040	0.0167	347.5
45	0.9961	0.0133	0.2	2220	0.9040	0.0168	351.9
60	0.9948	0.0133	0.3	2235	0.9040	0.0168	356.3
75	0.9935	0.0133	0.4	2250	0.9040	0.0168	360.7
150	0.9873	0.0134	1.7	2325	0.9043	0.0170	383.1
165	0.9861	0.0134	2.1	2340	0.9044	0.0171	387.7
180	0.9848	0.0134	2.4	2355	0.9045	0.0171	392.2
195	0.9836	0.0134	2.9	2370	0.9046	0.0171	396.8
210	0.9824	0.0134	3.3	2385	0.9048	0.0172	401.4
225	0.9813	0.0134	3.8	2400	0.9049	0.0172	406.0
240	0.9801	0.0134	4.4	2415	0.9050	0.0172	410.7
255	0.9789	0.0135	4.9	2430	0.9052	0.0173	415.3
375	0.9699	0.0136	10.7	2550	0.9066	0.0176	453.2
390	0.9688	0.0136	11.5	2565	0.9069	0.0176	458.0
405	0.9677	0.0136	12.4	2580	0.9071	0.0176	462.8
420	0.9666	0.0136	13.4	2595	0.9073	0.0177	467.7
615	0.9535	0.0138	28.7	2790	0.9113	0.0182	532.1
630	0.9526	0.0138	30.1	2805	0.9117	0.0182	537.2
645	0.9517	0.0139	31.6	2820	0.9121	0.0182	542.2
660	0.9507	0.0139	33.1	2835	0.9125	0.0183	547.3
675	0.9498	0.0139	34.6	2850	0.9129	0.0183	552.4
855	0.9395	0.0141	55.4	3030	0.9183	0.0188	614.7
870	0.9387	0.0142	57.3	3045	0.9188	0.0188	620.0
885	0.9380	0.0142	59.3	3060	0.9194	0.0189	625.3

Tema 8 Caso de Estudio

900	0.9372	0.0142	61.3	3075	0.9199	0.0189	630.6
915	0.9364	0.0142	63.4	3090	0.9204	0.0189	635.9
930	0.9356	0.0142	65.4	3105	0.9210	0.0190	641.2
945	0.9349	0.0143	67.6	3120	0.9216	0.0190	646.6
960	0.9341	0.0143	69.7	3135	0.9221	0.0191	651.9
975	0.9334	0.0143	71.9	3150	0.9227	0.0191	657.3
990	0.9327	0.0143	74.1	3165	0.9233	0.0191	662.6
1200	0.9235	0.0147	108.2	3375	0.9325	0.0197	738.9
1215	0.9229	0.0147	110.9	3390	0.9332	0.0197	744.4
1395	0.9165	0.0150	145.3	3570	0.9426	0.0202	811.4
1410	0.9160	0.0150	148.4	3585	0.9434	0.0202	817.1
1425	0.9156	0.0151	151.4	3600	0.9443	0.0202	822.7
1440	0.9151	0.0151	154.6	3615	0.9451	0.0203	828.4
1455	0.9147	0.0151	157.7	3630	0.9460	0.0203	834.0
1470	0.9142	0.0152	160.9	3645	0.9469	0.0204	839.7
1485	0.9138	0.0152	164.1	3660	0.9478	0.0204	845.4
1500	0.9134	0.0152	167.3	3675	0.9486	0.0204	851.1
1515	0.9130	0.0152	170.5	3690	0.9495	0.0205	856.8
1530	0.9126	0.0153	173.8	3705	0.9505	0.0205	862.5
1545	0.9122	0.0153	177.1	3720	0.9514	0.0205	868.2
1560	0.9118	0.0153	180.5	3735	0.9523	0.0206	873.9
1575	0.9114	0.0154	183.8	3750	0.9533	0.0206	879.6
1590	0.9111	0.0154	187.2	3765	0.9542	0.0206	885.3
1605	0.9107	0.0154	190.6	3780	0.9552	0.0207	891.1
1620	0.9104	0.0154	194.1	3795	0.9561	0.0207	896.8
1635	0.9100	0.0155	197.5	3810	0.9571	0.0208	902.6
1650	0.9097	0.0155	201.0	3825	0.9581	0.0208	908.3
1665	0.9094	0.0155	204.6	3840	0.9591	0.0208	914.1
1680	0.9091	0.0156	208.1	3855	0.9601	0.0209	919.9
1695	0.9088	0.0156	211.7	3870	0.9611	0.0209	925.6
1710	0.9085	0.0156	215.3	3885	0.9621	0.0209	931.4
1725	0.9082	0.0157	218.9	3900	0.9632	0.0210	937.2
1740	0.9079	0.0157	222.5	3915	0.9642	0.0210	943.0
2115	0.9040	0.0165	321.6	4290	0.9932	0.0219	1089.6
2130	0.9040	0.0166	325.9	4305	0.9944	0.0219	1095.5
2145	0.9040	0.0166	330.2	4320	0.9957	0.0219	1101.5
2160	0.9040	0.0166	334.5	4335	0.9970	0.0220	1107.4
2175	0.9040	0.0167	338.8	4351	0.9984	0.0220	1113.3

Una vez calculada la pseudo-presión para el rango de presiones, se grafica en escala normal p vs $\Psi(p)$, y ajustarse una curva de tendencia, en el rango de valores que se tengan para p_{wf} y p_i , tal y como se muestra en la **Figura 8. 1**.

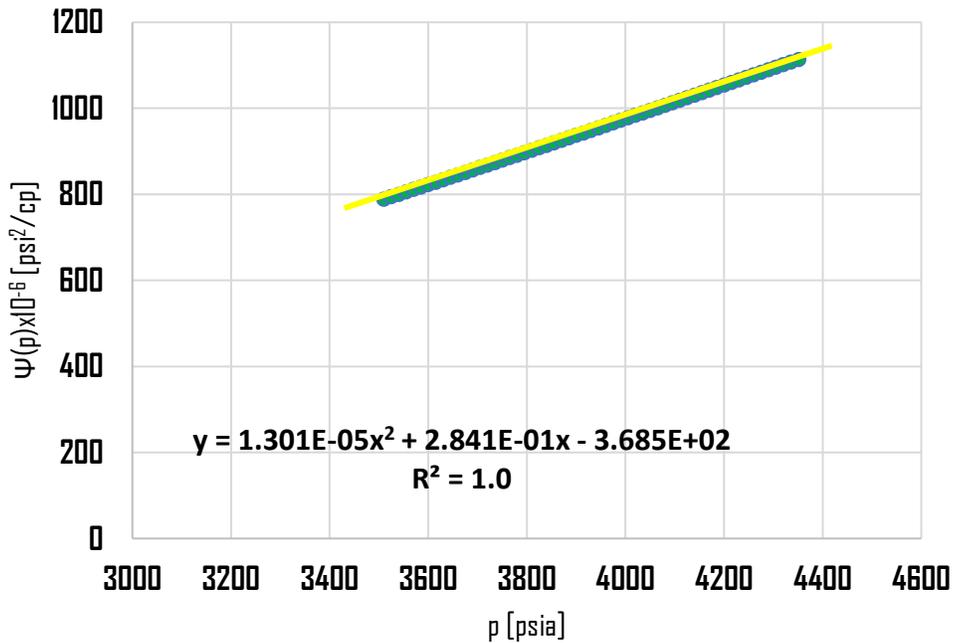


Figura 8. 1 Ajuste de la curva de tendencia.

Con la ecuación de la curva de ajuste, se calculan la pseudo-presión para los valores de Δp_{wf} , cabe destacar que estos valores fueron calculados mediante el proceso de deconvolución y son presentados por **Martínez [2]**. Posteriormente el cálculo del cambio de pseudo-presión aparente, $\Delta\Psi_a(p)$, y su derivada con respecto del $\ln|t|$. Las ecuaciones correspondientes son:

$$\Psi(p_{wf})_j = 1.30 \times 10^{-5} (p_i - \Delta p_{wfj}) + 2.84 \times 10^{-1} (p_i - \Delta p_{wfj}) - 368.5, \quad \dots \quad 8.4$$

$$\Delta\Psi_a(p_{wf})_j = \frac{\mu_{gi}Z_i}{p_i} (\Psi_i(p_{wf}) - \Psi(p_{wf})_j), \quad \dots\dots\dots 8.5$$

y la derivada puede ser calcula por la fórmula de Bourdet:

$$\left(\frac{d\Delta\Psi_a(p_{wf})}{d\ln|t|}\right)_j = a\Delta\Psi_a(p_{wf})_{j-1} + b\Delta\Psi_a(p_{wf})_j + c\Delta\Psi_a(p_{wf})_{j+1}. \quad \dots\dots\dots 8.6$$

Donde los pesos a , b y c están dados por (**Gallardo [1]**):

$$a = -\frac{\ln\left(\frac{t_{i+1}}{t_i}\right)}{\ln\left(\frac{t_i}{t_{i-1}}\right)\ln\left(\frac{t_{i+1}}{t_{i-1}}\right)}. \quad \dots\dots\dots 8.7$$

$$b = \frac{\ln\left(\frac{t_{i+1}t_{i-1}}{t_i^2}\right)}{\ln\left(\frac{t_{i+1}}{t_i}\right)\ln\left(\frac{t_i}{t_{i-1}}\right)}. \quad \dots\dots\dots 8.8$$

$$c = \frac{\ln\left(\frac{t_i}{t_{i-1}}\right)}{\ln\left(\frac{t_{i+1}}{t_i}\right)\ln\left(\frac{t_{i+1}}{t_{i-1}}\right)}. \quad \dots\dots\dots 8.9$$

En la **Tabla 8. 4** se presentan los resultados para el cálculo de estas variables. Posteriormente se presenta el grafico de $\Delta\Psi$ vs t y $\Delta\Psi_a(p)/d\ln|t|$ vs t , ambas en escala doble logaritmo, en la **Figura 8. 2**. Además, en la **Figura 8. 3**, representa el esquema general de flujo presente en este yacimiento, como puede observarse, describe el flujo de fluidos del yacimiento hacia una fractura. Este modelo puede ser simplificado a partir del supuesto de considerar un yacimiento con flujo radial con daño por flujo hacia una fractura.

Tabla 8. 4 Resultados de los cálculos de $\Psi(p)$, $\Delta\Psi_a(P)$ y $d\Delta\Psi_a(p)/d\ln|t|$.

tiempo Horas	Δp_{wf} psia	$\Psi(p)$ psia ² /cp	$\Delta\Psi_a(p)$	$d\Psi_a(p)/d\ln t$
0.001	0.175	1113.896	0.000	
0.01	0.854	1113.626	0.676	0.505
0.1	2.912	1112.809	2.723	1.433
0.2	4.039	1112.361	3.845	1.938
0.6	6.866	1111.238	6.657	3.166
0.7	7.362	1111.041	7.150	3.376
0.8	7.831	1110.855	7.616	3.581
0.9	8.264	1110.683	8.047	3.762
1.0	8.652	1110.529	8.433	3.925
2.0	11.703	1109.318	11.467	5.178
5.0	17.615	1106.971	17.344	7.454
7.0	20.289	1105.910	20.002	8.413
9.9	23.458	1104.653	23.151	9.491
10.1	23.618	1104.589	23.310	9.547
50.4	43.317	1096.780	42.870	14.631
100	54.020	1092.541	53.486	16.045
199	65.389	1088.041	64.755	16.614
298	72.210	1085.343	71.513	17.065
303	72.499	1085.229	71.799	17.082
403	77.574	1083.222	76.824	18.157
501	81.782	1081.559	80.990	19.710
603	85.706	1080.009	84.873	22.028
701	89.247	1078.610	88.376	24.765
801	92.743	1077.229	91.834	26.842
901	96.143	1075.887	95.197	30.320
1013	99.905	1074.402	98.916	33.141
1515	116.552	1067.834	115.364	49.480
2014	132.945	1061.374	131.544	64.764
3012	164.606	1048.917	162.743	91.464
3502	179.585	1043.033	177.480	104.132
3561	181.371	1042.332	179.237	105.564
4005	194.628	1037.130	192.266	116.728
4503	209.319	1031.370	206.692	130.917

Tema 8 Caso de Estudio

6089	255.574	1013.272	252.019	167.556
8097	310.245	991.952	305.415	207.697
10068	361.147	972.173	354.954	248.917
14804	476.182	927.721	466.287	329.188
15055	481.912	925.516	471.810	331.422
18720	563.051	894.381	549.789	

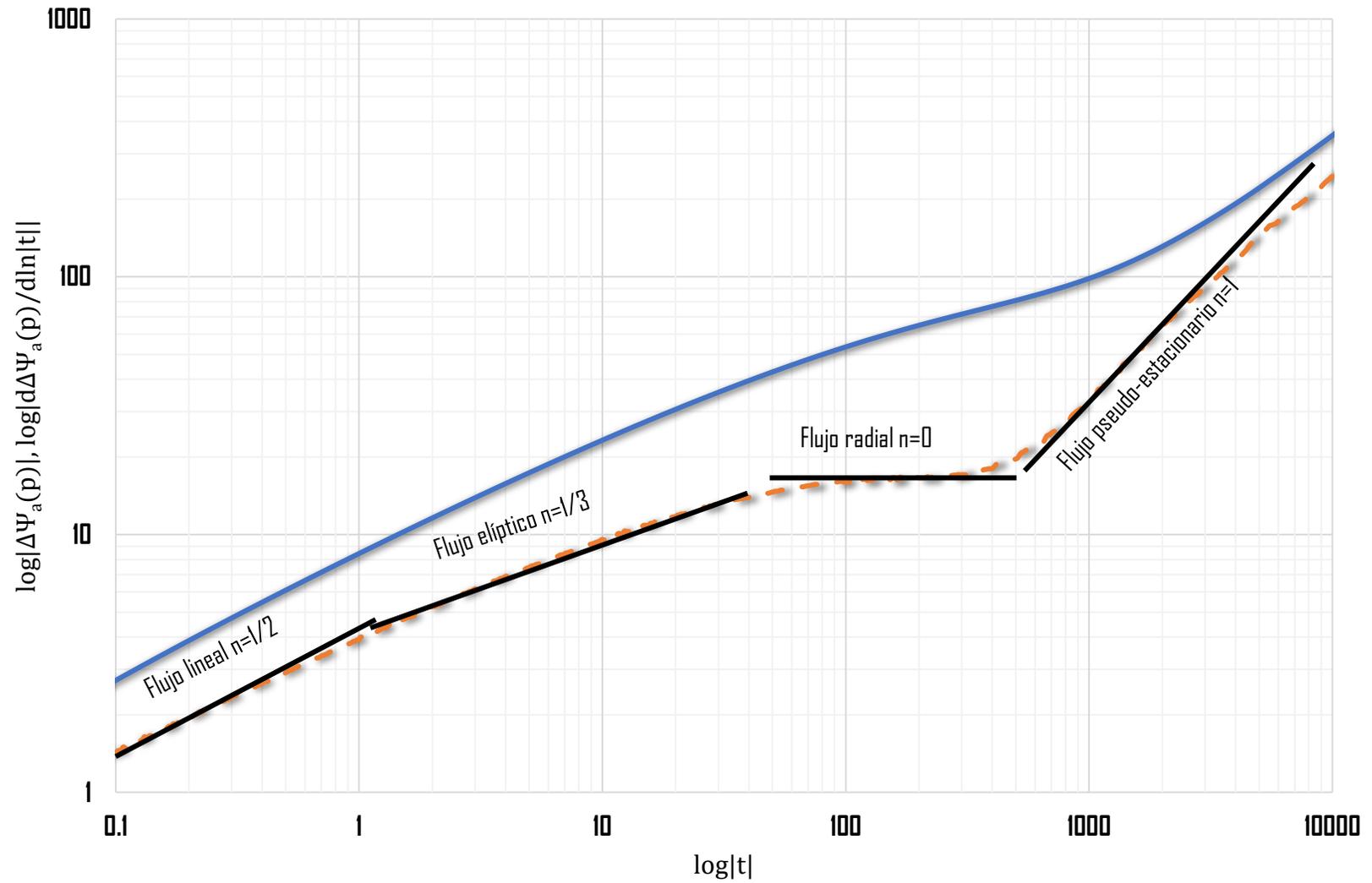


Figura 8. 2 Gráfico de diagnóstico.

En la **Figura 8. 2** se puede identificar 4 geometrías de flujo: lineal, elíptico, radial y pseudo-estacionario, con lo cual se puede concluir que el sistema está afectado por una fractura y además es un sistema cerrado. El modelo de yacimiento interpretado se presenta en la **Figura 8. 3**, en la cual se representa el flujo lineal muy cerca de la fractura, para dar paso al flujo elíptico, presente en la transición hacia el flujo radial tardío.

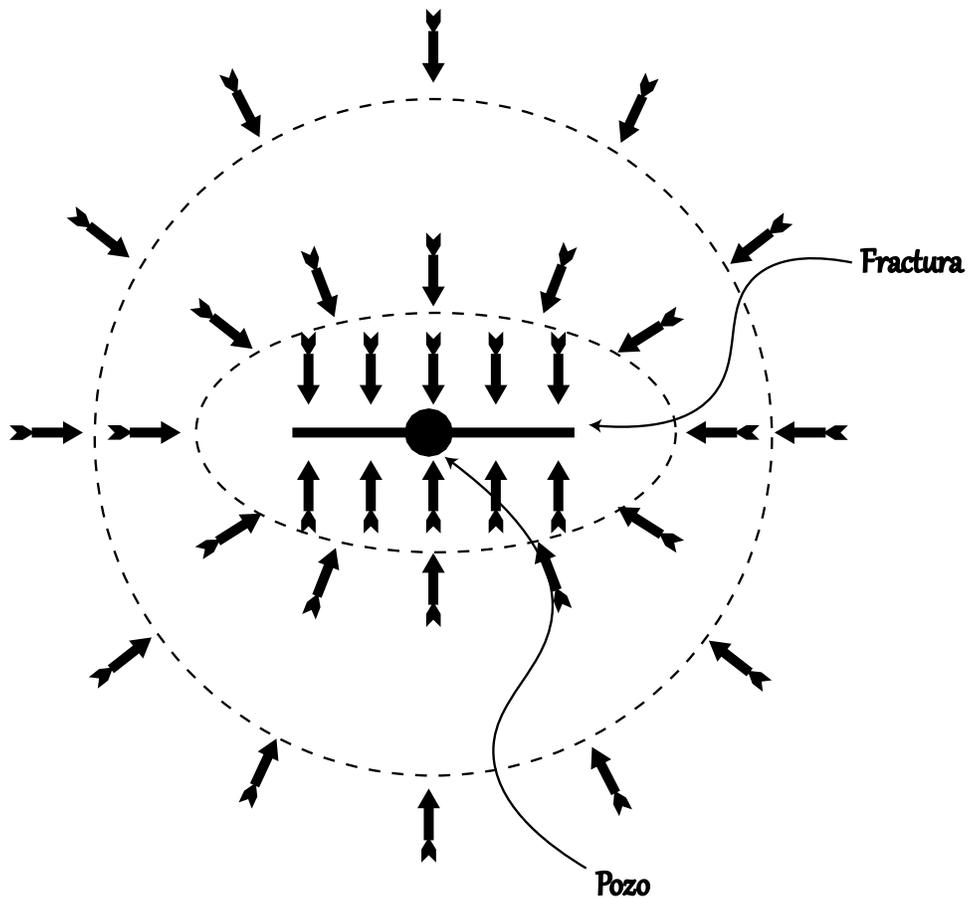


Figura 8. 3 Modelo del yacimiento.

Una vez que se ha identificado el modelo de yacimiento, es necesario identificar los parámetros característicos del mismo, tales como, la permeabilidad, el daño, la longitud de la fractura y el radio de drenaje, para ello en la **Tabla 8. 5** se presenta un

compendio de fórmulas para obtenerlos mediante la interpretación de las pendientes de los flujos característicos.

Tabla 8. 5 Diferentes modelos de flujo con el valor de su pendiente en la derivada.

Modelo	b	m	Ec.
Radial	$70.6 \frac{qB\mu}{kh}$	0	8. 10
Lineal	$0.1964 \frac{qB\mu^{\frac{1}{2}}}{wh\sqrt{k_f(\phi c_t)_f}}$	1/2	8. 11
Bilineal	$9.4925 \frac{qB\mu}{h\sqrt{k_f w_f (\phi \mu c_t k)^{1/4}}}$	1/4	8. 12
Esférico	$1226.5 \frac{qB\mu\sqrt{\phi\mu c_t}}{k_s^{\frac{3}{2}}}$	-1/2	8. 13
Pseudo-estacionario	$0.234 \frac{qB}{\phi c_t h A}$	1	8. 14
Almacenamiento	$\frac{qB}{24C}$	1	8. 15

Por consiguiente, se tiene que, para el periodo de flujo radial, se estima un valor de la intersección entre el eje de las presiones y la línea horizontal de 18, con lo cual podemos obtener el valor de la permeabilidad, dada por la **Ec. 8. 10**:

Tema 8 Caso de Estudio

$$b = \frac{70.6qB\mu}{kh} \rightarrow k = \frac{70.6qB\mu}{kh} = \frac{70.6 \left(\frac{1E6 \text{ ft}^3}{5.615 \frac{\text{ft}^3}{\text{bbl}}} \right) \left(0.00395 \frac{\text{cft}}{\text{scf}} \right) (0.0228 \text{ cp})}{(18)(32.8 \text{ ft})}$$

$$k = 1.92 \text{ mD}$$

Para el periodo de flujo lineal, el valor de la ordenada al origen leída a 1 [hr] es igual a 4.5, con la cual se puede obtener el valor de la longitud de factura con ayuda de la **Ec. 8.11**:

8.11:

$$b = 2.032 \frac{qB\mu^{\frac{1}{2}}}{wh\sqrt{k_f(\phi c_t)_f}} \rightarrow w = 2.032 \frac{\left(\frac{1E6 \text{ ft}^3}{5.615 \frac{\text{ft}^3}{\text{bbl}}} \right) \left(0.00395 \frac{\text{cft}}{\text{scf}} \right) (0.0228 \text{ cp})^{1/2}}{(4.5)(32.8)\sqrt{(1.92 \text{ mD})(0.1)(1.73 \times 10^{-4} \text{ 1/psi})}}$$

$$w = 253.87 \text{ ft}$$

y por lo tanto el daño, s :

$$s = \ln \left| 2 \frac{r_w}{w} \right| \rightarrow \ln \left| 2 \frac{0.238}{253.87} \right|$$

$$s = -5.958$$

Por último, para el periodo dominado por las fronteras es posible conocer el radio de drene, si se toma el valor leído a 1 [hr], se tiene el valor de 0.03, y por ende de la **Ec. 8.14**:

8.14:

$$b = 0.234 \frac{qB}{\phi c_t h A} \rightarrow A = 0.234 \frac{\left(\frac{1000000 \text{ ft}^3}{5.615 \frac{\text{ft}^3}{\text{bbl}}} \right) \left(0.00395 \frac{\text{cft}}{\text{scf}} \right)}{(0.1) \left(1.73 \times 10^{-4} \frac{1}{\text{psi}} \right) (32.8 \text{ ft})(0.03)}$$

$$A = 9'669,900 \text{ ft}^2$$

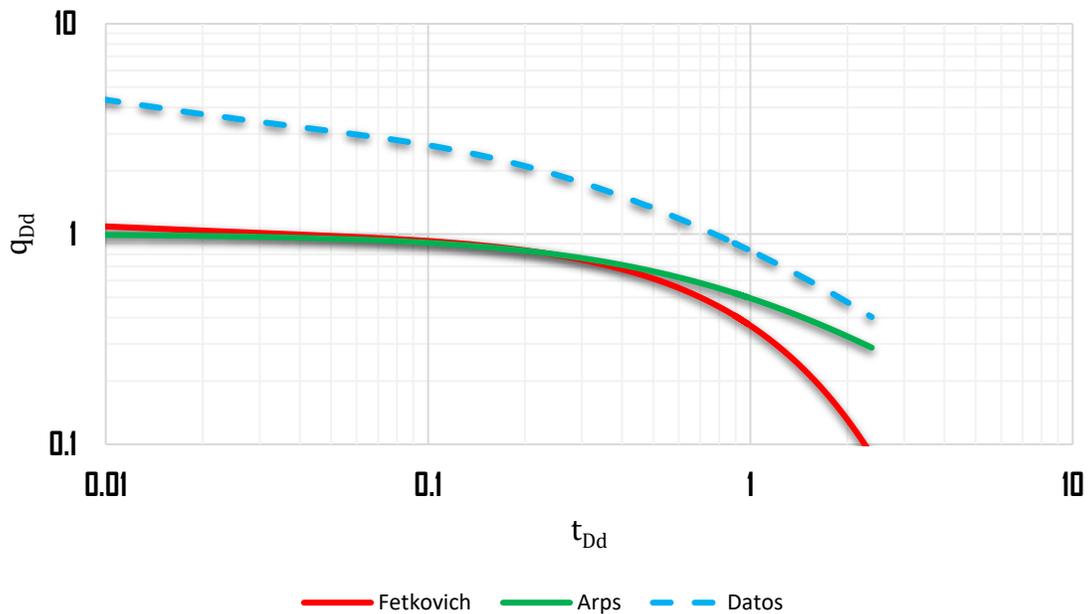
Y por ende el radio de drene:

$$r_e = \sqrt{\frac{A}{2\pi}} \rightarrow r_e = \sqrt{\frac{9669900 \text{ ft}^2}{2\pi}}$$

$$r_e = 1,754 \text{ ft}$$

Por último, es importante ajustar un modelo de flujo para tener mayor certidumbre en los parámetros obtenidos mediante el gráfico de diagnóstico y reducir los problemas de unicidad asociados. Para este caso se propone el modelo de Fetkovich.

Haciendo uso de las variables de Fetkovich y partiendo de los datos proporcionados en la **Tabla 8. 1**, se presenta la **Figura 8. 4**, en esta se puede observar el comportamiento de los datos de producción en relación con las curvas de Arps y Fetkovich. El mejor ajuste se logrará cuando la serie de datos se empalme con la curva de Fetkovich en el periodo transitorio y con la curva de Arps en el periodo dominado por las fronteras.

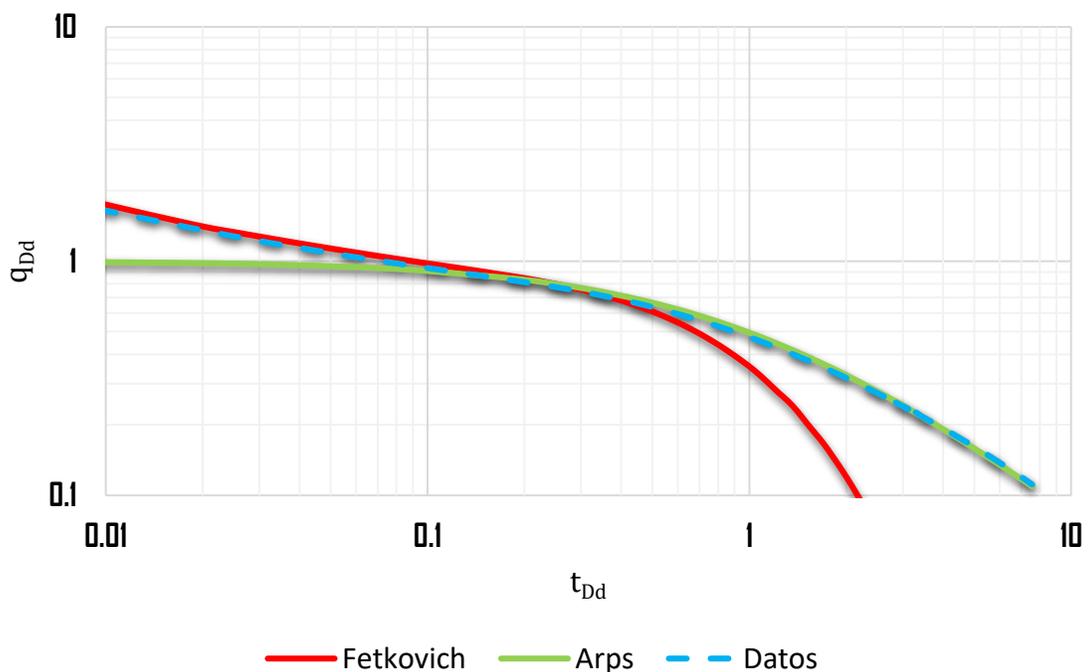


k [mD]	s	r_w [ft]	r_e [ft]
2	-5.52	0.328	1640.42

Figura 8. 4 Comportamiento a las condiciones originales.

Tema 8 Caso de Estudio

Para lograr el ajuste se varían aquellas propiedades en las cuales se tiene mayor incertidumbre como la permeabilidad, el radio de drene y el daño. En la **Figura 8. 5** se muestra el resultado del proceso de ajuste, en esta se puede observar como la serie de datos se empalma en el periodo transitorio con la curva generada por el modelo de Fetkovich y para el periodo dominado con las fronteras con un modelo de declinación hiperbólica. Para el periodo dominado por las fronteras el modelo que logra el mejor ajuste es con una declinación hiperbólica y un valor de $b = 0.95$



$k [mD]$	s	$r_w [ft]$	$r_w^* [ft]$	$r_e [ft]$	b
1.92	-5.96	0.328	126	1754	0.95

Figura 8. 5 Mejor Ajuste de las Curvas.

Es importante recalcar la importancia del uso de la pseudo-presión como variable de análisis en este problema. La **Figura 8. 6** y la **Tabla 8. 6** muestran una comparativa entre los resultados obtenidos al utilizarla respecto a aquellos que se tendrían al usar

ambas variables. De esta manera, con la pseudo-presión se obtiene un valor de $b = 0.95$, mientras que el factor de forma de la curva con la presión resultó de 0.8. Esto es importante ya que puede dar un valor erróneo para el cálculo de las presiones de abandono y por ende el cálculo de las reservas, que en este caso serían subestimadas.

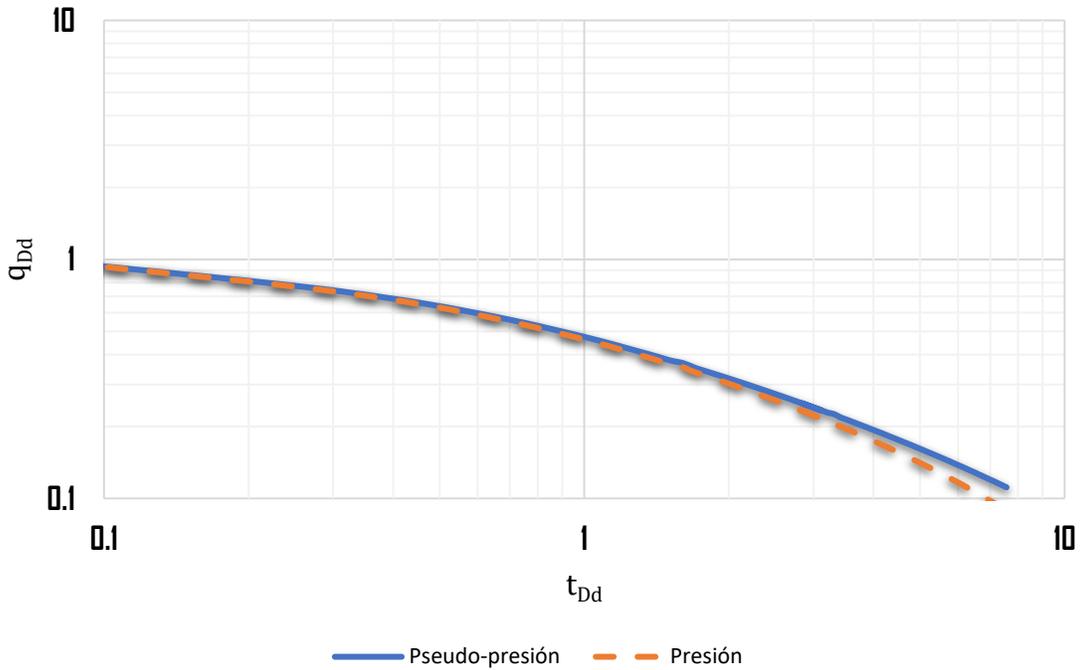


Figura 8. 6 Comparativa del uso de la ψ_{wf} y la p_{wf} .

Tabla 8. 6 Comparativo de los datos de ajuste con respecto a la variable de análisis.

<i>Pseudo – presión (Ψ_{wf})</i>		<i>Presión (p_{wf})</i>	
<i>k [mD]</i>	1.92	<i>k [mD]</i>	1.92
<i>s</i>	-5.958	<i>s</i>	-5.894
<i>rw [ft]</i>	0.328	<i>rw [ft]</i>	0.328
<i>r * w [ft]</i>	126	<i>r * w [ft]</i>	119
<i>re [ft]</i>	1754	<i>re [ft]</i>	1754
<i>b</i>	0.95	<i>b</i>	0.8

Referencias

1. Gallardo, H.E. (2018). Fundamentos de la caracterización dinámica de yacimientos, Notas de Clase, Universidad Nacional Autónoma de México. Ciudad de México.
2. Martínez, J. (2018). Estudio comparativo entre los modelos y métodos de análisis de pruebas de presión y datos de producción como herramientas para la caracterización dinámica de yacimientos (Licenciatura). Universidad Nacional Autónoma de México.

Conclusiones

A continuación, se enlistan las conclusiones obtenidas durante el desarrollo de este trabajo:

1. Se generó un marco conceptual en el que se presentan los fundamentos matemáticos necesarios para el desarrollo y aplicación de modelos útiles en la caracterización dinámica de yacimientos.
2. Se presentaron diferentes esquemas de solución a la ecuación de difusividad, acorde a las condiciones del problema, utilizando para ello una variable general que puede representar tanto a la presión como a la pseudo-presión.
Los esquemas abordados incluyen el uso de herramientas matemáticas, tales como, Series de Fourier, Transformada de Boltzmann, Transformada de Laplace, Funciones de Bessel y Funciones de Green.
3. Se presentaron algunas aplicaciones del principio de superposición utilizadas en la ingeniería de yacimientos para extender la aplicación de modelos analíticos y reducir los problemas de unicidad presentes durante la caracterización.
4. Se presentó una metodología para la resolución a los problemas de flujo. Para ello se solucionó el problema de Fetkovich, validando los resultados con las soluciones empíricas de Arps.
5. Se mostró un caso práctico para ilustrar la aplicación avanzada de modelos analíticos de flujo para la caracterización de sistemas macroscópicos. Para esto, se elaboraron rutinas de cómputo para mejorar la precisión de los cálculos.

Recomendaciones

Se recomienda extender el análisis aquí presentado a problemas de flujo en 3 dimensiones, esto con el propósito de poder aplicarlo en la validación de simuladores numéricos. De igual manera se propone ampliar y mejorar los contenidos de este trabajo con miras al futuro de su publicación en la Facultad de Ingeniería. Además es recomendable ahondar en la literatura presentada al final de cada Tema con el propósito de profundizar y/o entender de mejor manera los procedimientos aquí expuestos.

Cabe señalar que debido a las aplicaciones tan relevantes que tienen las soluciones fuentes obtenidas mediante el método de Funciones de Green, se hace especial hincapié en desarrollar y mejorar el apartado dedicado a ello, con el fin de presentar algunas de las aplicaciones de estas en la ingeniería de yacimientos.

ANEXO A Aproximación polinomial para las funciones de Bessel

Para $J_0(x)$:

Si $-3 \leq x \leq 3$

$$J_0(x) = 1 - 2.2499997 \left(\frac{x}{3}\right)^2 + 1.2656208 \left(\frac{x}{3}\right)^4 - 0.3163866 \left(\frac{x}{3}\right)^6 + 0.0444479 \left(\frac{x}{3}\right)^8 \\ - 0.0039444 \left(\frac{x}{3}\right)^{10} + 0.00021 \left(\frac{x}{3}\right)^{12} + \epsilon \\ |\epsilon| < 5x10^{-8}$$

si $3 \leq x < \infty$

$$J_0(x) = x^{-1/2} f_0 \cos \theta_0$$

$$f_0 = 0.79788456 - 0.0000077 \left(\frac{3}{x}\right) - 0.0055274 \left(\frac{3}{x}\right)^2 - 0.00009512 \left(\frac{3}{x}\right)^3 \\ + 0.00137237 \left(\frac{3}{x}\right)^4 - 0.00072805 \left(\frac{3}{x}\right)^5 + 0.00014476 \left(\frac{3}{x}\right)^6 + \epsilon \\ |\epsilon| < 1.6x10^{-8}$$

$$\theta_0 = x - 0.78539816 - 0.04166397 \left(\frac{3}{x}\right) - 0.00003954 \left(\frac{3}{x}\right)^2 + 0.00262573 \left(\frac{3}{x}\right)^3 \\ - 0.00054125 \left(\frac{3}{x}\right)^4 - 0.00029333 \left(\frac{3}{x}\right)^5 + 0.00013558 \left(\frac{3}{x}\right)^6 + \epsilon \\ |\epsilon| < 7x10^{-8}$$

ANEXO A Aproximación polinomial para las funciones de Bessel

Para $J_1(x)$:

Si $-3 \leq x \leq 3$

$$\begin{aligned}x^{-1}J_1(x) &= \frac{1}{2} - 0.56249985 \left(\frac{x}{3}\right)^2 + 0.21093573 \left(\frac{x}{3}\right)^4 - 0.03954289 \left(\frac{x}{3}\right)^6 \\ &\quad + 0.00443319 \left(\frac{x}{3}\right)^8 - 0.00031761 \left(\frac{x}{3}\right)^{10} + 0.00001109 \left(\frac{x}{3}\right)^{12} + \epsilon \\ |\epsilon| &< 1.3 \times 10^{-8}\end{aligned}$$

Para $3 \leq x < \infty$

$$J_1(x) = x^{-\frac{1}{2}} f_1 \cos \theta_1$$

$$\begin{aligned}f_1 &= 0.79788456 + 0.00000156 \left(\frac{3}{x}\right) + 0.01659667 \left(\frac{3}{x}\right)^2 + 0.00017105 \left(\frac{3}{x}\right)^3 \\ &\quad - 0.00249511 \left(\frac{3}{x}\right)^4 + 0.00113653 \left(\frac{3}{x}\right)^5 - 0.00020033 \left(\frac{3}{x}\right)^6 + \epsilon \\ |\epsilon| &< 4 \times 10^{-8}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\theta_1 &= x - 2.35619449 + 0.12499612 \left(\frac{3}{x}\right) + 0.0000565 \left(\frac{3}{x}\right)^2 - 0.00637879 \left(\frac{3}{x}\right)^3 \\ &\quad + 0.00074348 \left(\frac{3}{x}\right)^4 + 0.00079824 \left(\frac{3}{x}\right)^5 - 0.00029166 \left(\frac{3}{x}\right)^6 + \epsilon \\ \epsilon &< 9 \times 10^{-8}\end{aligned}$$

Para $Y_0(x)$

Si $0 < x \leq 3$

$$Y_0(x) = \left(\frac{2}{\pi}\right) \ln\left(\frac{1}{2}x\right) J_0(x) + 0.36746691 + 0.60559366 \left(\frac{x}{3}\right)^2 - 0.74350384 \left(\frac{x}{3}\right)^4 \\ + 0.25300117 \left(\frac{x}{3}\right)^6 - 0.04261214 \left(\frac{x}{3}\right)^8 + 0.00427916 \left(\frac{x}{3}\right)^{10} \\ - 0.00024846 \left(\frac{x}{3}\right)^{12} + \epsilon$$

$$\epsilon < 1.4x10^{-8}$$

Si $3 \leq x < \infty$

$$Y_0(x) = x^{-\frac{1}{2}} f_0 \sin \theta_0$$

$$f_0 = 0.79788456 - 0.0000077 \left(\frac{3}{x}\right) - 0.0055274 \left(\frac{3}{x}\right)^2 - 0.00009512 \left(\frac{3}{x}\right)^3 \\ + 0.00137237 \left(\frac{3}{x}\right)^4 - 0.00072805 \left(\frac{3}{x}\right)^5 + 0.00014476 \left(\frac{3}{x}\right)^6 + \epsilon$$

$$|\epsilon| < 1.6x10^{-8}$$

$$\theta_0 = x - 0.78539816 - 0.04166397 \left(\frac{3}{x}\right) - 0.00003954 \left(\frac{3}{x}\right)^2 + 0.00262573 \left(\frac{3}{x}\right)^3 \\ - 0.00054125 \left(\frac{3}{x}\right)^4 - 0.00029333 \left(\frac{3}{x}\right)^5 + 0.00013558 \left(\frac{3}{x}\right)^6 + \epsilon$$

$$|\epsilon| < 7x10^{-8}$$

ANEXO A Aproximación polinomial para las funciones de Bessel

Para $Y_1(x)$:

Si $0 < x \leq 3$

$$\begin{aligned} xY_1(x) = & \left(\frac{2}{\pi}\right) x \ln\left(\frac{1}{2}x\right) J_1(x) - 0.6366198 + 0.2212091 \left(\frac{x}{3}\right)^2 + 2.1682709 \left(\frac{x}{3}\right)^4 \\ & - 1.3164827 \left(\frac{x}{3}\right)^6 + 0.3123951 \left(\frac{x}{3}\right)^8 - 0.0400976 \left(\frac{x}{3}\right)^{10} + 0.0027873 \left(\frac{x}{3}\right)^{12} \\ & + \epsilon \end{aligned}$$

$$|\epsilon| < 1.1x10^{-7}$$

Si $3 \leq x < \infty$

$$Y_1(x) = x^{-\frac{1}{2}} f_1 \sin \theta_1$$

$$\begin{aligned} f_1 = & 0.79788456 + 0.00000156 \left(\frac{3}{x}\right) + 0.01659667 \left(\frac{3}{x}\right)^2 + 0.00017105 \left(\frac{3}{x}\right)^3 \\ & - 0.00249511 \left(\frac{3}{x}\right)^4 + 0.00113653 \left(\frac{3}{x}\right)^5 - 0.00020033 \left(\frac{3}{x}\right)^6 + \epsilon \end{aligned}$$

$$|\epsilon| < 4x10^{-8}$$

$$\begin{aligned} \theta_1 = & x - 2.35619449 + 0.12499612 \left(\frac{3}{x}\right) + 0.0000565 \left(\frac{3}{x}\right)^2 - 0.00637879 \left(\frac{3}{x}\right)^3 \\ & + 0.00074348 \left(\frac{3}{x}\right)^4 + 0.00079824 \left(\frac{3}{x}\right)^5 - 0.00029166 \left(\frac{3}{x}\right)^6 + \epsilon \end{aligned}$$

$$\epsilon < 9x10^{-8}$$

Para $I_0(x)$:

Si $-3.75 \leq x \leq 3.75$

$$I_0(x) = 1 + 3.5156229t^2 + 3.0899424t^4 + 1.2067492t^6 + 0.2659732t^8 + 0.0360768t^{10} + 0.0045813t^{12} + \epsilon$$

$$|\epsilon| < 1.6x10^{-7}$$

Si $3.75 \leq x < \infty$

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2}e^{-x}I_0(x) &= 0.39894228 + 0.01328592t^{-1} + 0.00225319t^{-2} - 0.00157565t^{-3} \\ &+ 0.00916281t^{-4} - 0.02057706t^{-5} + 0.02635537t^{-6} - 0.01647633t^{-7} \\ &+ 0.00392377t^{-8} + \epsilon \end{aligned}$$

$$|\epsilon| < 1.9x10^{-7}$$

Para $I_1(x)$:

Si $-3.75 \leq x \leq 3.75$

$$\begin{aligned} x^{-1}I_1(x) &= \frac{1}{2} + 0.87890594t^2 + 0.51498869t^4 + 0.15084934t^6 + 0.02658733t^8 \\ &+ 0.00301532t^{10} + 0.00032411t^{12} + \epsilon \end{aligned}$$

$$|\epsilon| < 8x10^{-9}$$

ANEXO A Aproximación polinomial para las funciones de Bessel

Si $-3.75 \leq x \leq \infty$

$$\begin{aligned}x^{\frac{1}{2}}e^{-x}I_1(x) &= 0.39894228 - 0.03988024t^{-1} - 0.00362018t^{-2} + 0.00163801t^{-3} \\ &\quad - 0.01031555t^{-4} + 0.02282967t^{-5} - 0.02895312t^{-6} + 0.01789654t^{-7} \\ &\quad - 0.00420059t^{-8} + \epsilon\end{aligned}$$

$$|\epsilon| < 2.2 \times 10^{-7}$$

Donde $t = x/3.75$

Para $K_0(x)$:

Si $0 < x \leq 2$

$$\begin{aligned}K_0(x) &= -\ln\left(\frac{x}{2}\right)I_0(x) - 0.57721566 + 0.42278420\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 0.23069756\left(\frac{x}{2}\right)^4 \\ &\quad + 0.0348859\left(\frac{x}{2}\right)^6 + 0.00262698\left(\frac{x}{2}\right)^8 + 0.0001075\left(\frac{x}{2}\right)^{10} + 0.0000074\left(\frac{x}{2}\right)^{12} \\ &\quad + \epsilon\end{aligned}$$

$$\epsilon < 1 \times 10^{-8}$$

Si $2 \leq x < \infty$

$$\begin{aligned}x^{\frac{1}{2}}e^xK_0(x) &= 1.25331414 - 0.07832358\left(\frac{2}{x}\right) + 0.02189568\left(\frac{2}{x}\right)^2 - 0.01062446\left(\frac{2}{x}\right)^3 \\ &\quad + 0.00587872\left(\frac{2}{x}\right)^4 - 0.0025154\left(\frac{2}{x}\right)^5 + 0.0053208\left(\frac{2}{x}\right)^6 + \epsilon\end{aligned}$$

$$|\epsilon| < 1.9 \times 10^{-7}$$

Para $K_1(x)$:

Si $0 \leq x \leq 2$

$$xK_1(x) = x \ln\left(\frac{x}{2}\right) I_1(x) + 1 + 0.15443144 \left(\frac{x}{2}\right)^2 - 0.67278579 \left(\frac{x}{2}\right)^4 - 0.18156897 \left(\frac{x}{2}\right)^6 \\ - 0.01919402 \left(\frac{x}{2}\right)^8 - 0.00110404 \left(\frac{x}{2}\right)^{10} - 0.00004686 \left(\frac{x}{2}\right)^{12} + \epsilon$$

$$|\epsilon| < 8x10^{-9}$$

Si $2 \leq x < \infty$

$$x^{\frac{1}{2}}e^x K_1(x) = 1.25331414 + 0.23498619 \left(\frac{2}{x}\right) - 0.0365562 \left(\frac{2}{x}\right)^2 + 0.01504268 \left(\frac{2}{x}\right)^3 \\ - 0.00780353 \left(\frac{2}{x}\right)^4 + 0.00325614 \left(\frac{2}{x}\right)^5 - 0.00068245 \left(\frac{2}{x}\right)^6 + \epsilon$$

$$|\epsilon| < 2.2x10^{-7}$$

ANEXO B Flujo por transporte de masa o flujo convectivo

Consideremos una superficie de control (fija en el espacio) S , **Figura B. 1**. Debido al movimiento de las partículas del medio, existirá una cierta cantidad de la propiedad \mathcal{A} que, asociada al transporte de masa, atraviesa la superficie de control S por unidad de tiempo.

Se define como flujo convectivo (o flujo por transporte de masa) de una propiedad genérica \mathcal{A} a través de una superficie de control S a la cantidad de \mathcal{A} que, debido al transporte de masa, atraviesa la superficie S por unidad de tiempo.

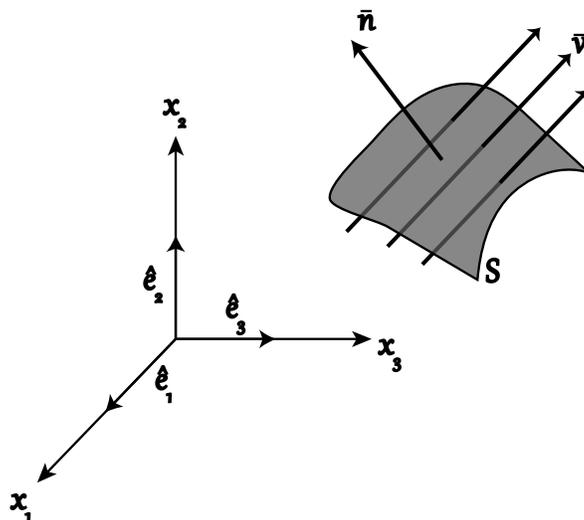


Figura B. 1 Flujo convectivo a través de una superficie S .

Para obtener la expresión matemática del flujo convectivo de \mathcal{A} a través de la superficie S , consideraremos un elemento diferencial de superficie dS y el vector de velocidades v de las partículas que en el instante t están sobre dS , **Figura B. 2**. En un diferencial de tiempo, dt , estas partículas habrán recorrido un trayecto $dx = vdt$, de forma tal que en el instante de tiempo $t + dt$ ocuparán una nueva posición en el espacio.

Si se consideran todas las partículas que han atravesado dS en el intervalo $[t, t + dt]$, éstas ocuparán el cilindro generado al trasladar la base dS sobre la generatriz $dx = v dt$, cuyo volumen viene dado por:

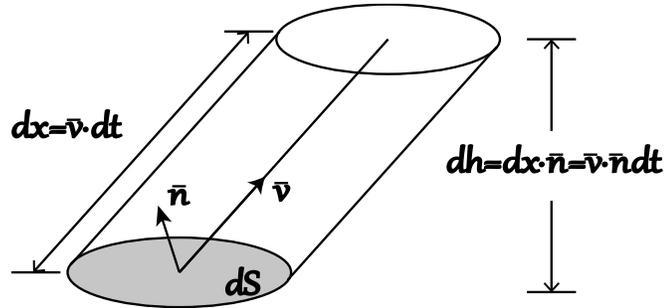


Figura B. 2 Volumen generado por las partículas

$$dV = dS \cdot dh = v \cdot n dt ds . \quad \dots\dots\dots \text{B. 1}$$

Conociendo el volumen, dV , de partículas que atraviesan dS en el intervalo de tiempo $[t, t + dt]$, podemos obtener la masa que atraviesa dS en el intervalo de tiempo $[t, t + dt]$, multiplicando la **Ec. B. 1** por la densidad:

$$dm = \rho dV = \rho v \cdot n dt ds \quad \dots\dots\dots \text{B. 2}$$

y multiplicando por la función M (cantidad de \mathcal{A} por unidad de masa), se obtiene la cantidad de \mathcal{A} que atraviesa dS :

$$M dm = \rho M v \cdot n dt ds \quad \dots\dots\dots \text{B. 3}$$

Dividiendo por dt la **Ec. B. 2**, obtendremos la cantidad de la propiedad que atraviesa el diferencial de superficie de control dS por unidad de tiempo:

ANEXO B Flujo por transporte de masa o flujo convectivo

$$d\Phi_S = \frac{Mdm}{dt} = \rho Mv \cdot n dS \quad \dots\dots\dots \mathbf{B.4}$$

Integrando la **Ec. B.4** sobre la superficie de control S , tendremos la cantidad de la propiedad \mathcal{A} que atraviesa la totalidad de la superficie S por unidad de tiempo, es decir, el flujo convectivo de la propiedad \mathcal{A} a través de S :

$$\Phi_S = \iint_S \rho Mv \cdot n dS \quad \dots\dots\dots \mathbf{B.5}$$

Ahora bien, si la propiedad analizada es la masa, entonces M será la masa por unidad de masa, es decir, la unidad:

$$\frac{dm}{dt} = \iint_S \rho v \cdot n dS \quad \dots\dots\dots \mathbf{B.6}$$

ANEXO C Derivación de la ecuación de continuidad en diferentes coordenadas.

C.1 Derivación en coordenadas cartesianas

Al realizar un balance de materia sobre el EVR de la **Figura C. 1**, se tiene que la cantidad de materia de un fluido f acumulada en el elemento, en un momento dado, es igual a la diferencia entre la masa que entra y sale por cada una de sus caras:

$$(m_i - m_o)_{f,x} + (m_i - m_o)_{f,y} + (m_i - m_o)_{f,z} = m_{f,a} \cdot \dots\dots\dots \text{C. 1}$$

donde m_i representa la cantidad de materia que entra al sistema, m_o la que sale, m_a la que permanece acumulada, y los subíndices x , y y z , las direcciones de flujo. A su vez, los términos que refieren al transporte de materia en dirección a n pueden reescribirse como en la **Ec. C. 2**, y el acumulado como en la **Ec. C. 3**.

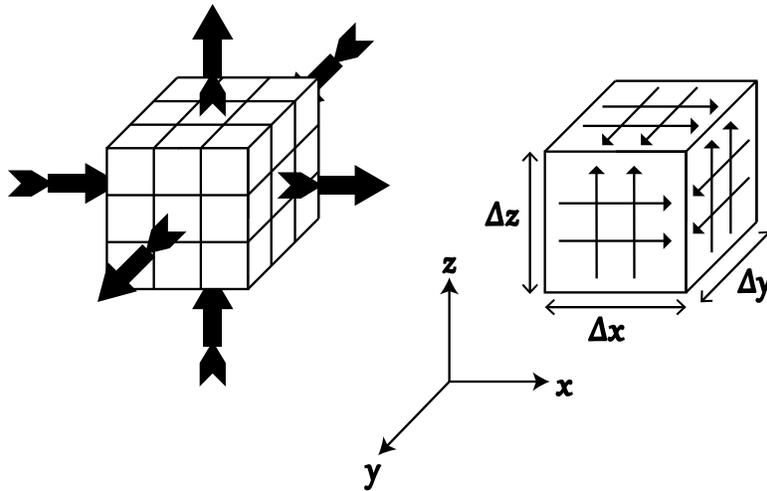


Figura C. 1. Flujo en un elemento de volumen en coordenadas cartesianas.

ANEXO C Derivación de la ecuación de continuidad en diferentes coordenadas.

$$m_{f,n} = (\dot{m}A\Delta t)_{f,n} = (\rho vA\Delta t)_{f,n} \dots\dots\dots \text{C. 2}$$

$$m_{ac} = m_{t+\Delta t} - m_t = [V_b\phi(s\rho)_f]_{t+\Delta t} - [V_b\phi(s\rho)_f]_t \dots\dots\dots \text{C. 3}$$

Dado que el fluido entra en las caras situadas en x , y y z , y sale en las que están en $x + \Delta x$, $y + \Delta y$ y $z + \Delta z$; y si V_b y ϕ son constantes, la **Ec. C. 1** se reescribe como:

$$\begin{aligned} [(\rho uA)_x - (\rho uA)_{x+\Delta x} + (\rho uA)_y - (\rho uA)_{y+\Delta y} + (\rho uA)_z - (\rho uA)_{z+\Delta z}]_f \Delta t \\ = V_b\phi[(s\rho)_{f,t+\Delta t} - (s\rho)_{f,t}], \dots \text{C. 4} \end{aligned}$$

o bien, al dividir por Δt y V_b :

$$\begin{aligned} \frac{[(\rho uA)_x - (\rho uA)_{x+\Delta x} + (\rho uA)_y - (\rho uA)_{y+\Delta y} + (\rho uA)_z - (\rho uA)_{z+\Delta z}]_f}{V_b} \\ = \frac{[(\phi s_f \rho_f)_{t+\Delta t} - (\phi s_f \rho_f)_t]}{\Delta t}, \dots \text{C. 5} \end{aligned}$$

y como

$$V_b = \Delta x\Delta y\Delta z, \quad A_x = \Delta y\Delta z, \quad A_y = \Delta x\Delta z, \quad A_z = \Delta x\Delta y, \dots\dots\dots \text{C. 6}$$

al aplicar límites cuando $\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0$ y $\Delta t \rightarrow 0$ sobre la **Ec. C. 5**, y considerando que sólo una fase satura al medio poroso ($s_f = 1$) se llega a la siguiente expresión, donde f se omite por comodidad:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho u_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho u_z) = -\frac{\partial}{\partial t}(\phi\rho) \dots\dots\dots \text{C. 7}$$

C.2 Derivación en coordenadas cilíndricas

En este caso, el balance de materia sobre el elemento de la **Figura C. 2**, se tiene:

$$(m_i - m_o)_{f,r} + (m_i - m_o)_{f,\theta} + (m_i - m_o)_{f,z} = m_{f,a} \dots\dots\dots \text{C. 8}$$

donde los subíndices r , θ y z son las direcciones de flujo. En forma similar a la **Ec. C. 5**, la **Ec. C. 8** puede ser expresada como:

$$\frac{[(\rho uA)_r - (\rho uA)_{r+\Delta r} + (\rho uA)_\theta - (\rho uA)_{\theta+\Delta\theta} + (\rho uA)_z - (\rho uA)_{z+\Delta z}]_f}{V_b} \dots \text{C. 9}$$

$$= \frac{[(\phi s_f \rho_f)_{t+\Delta t} - (\phi s_f \rho_f)_t]}{\Delta t},$$

y como en una geometría cilíndrica se tiene que:

$$V_b = r\Delta r\Delta\theta\Delta z, \quad A_r = r\Delta\theta\Delta z, \quad A_\theta = \Delta r\Delta z, \quad A_z = r\Delta r\Delta\theta, \quad \dots\dots\dots \text{C. 10}$$

al tomar limites, considerando que sólo una fase satura al medio ($s_f = 1$), se llega a

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r\rho u_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho u_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho u_z) = -\frac{\partial}{\partial t}(\phi\rho), \quad \dots\dots\dots \text{C. 11}$$

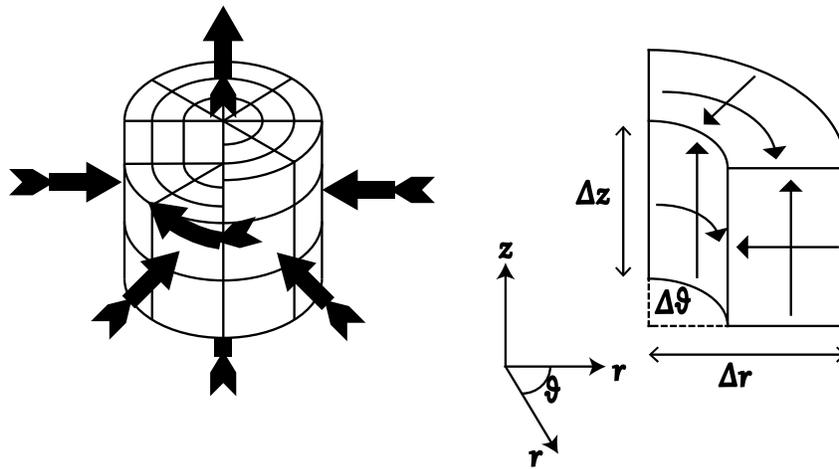


Figura C. 2. Flujo en un elemento de volumen en coordenadas cilíndricas.

C.3 Derivación en coordenadas esféricas

En este caso, el balance de materia sobre el elemento de la **Figura C. 3**, se tiene:

$$(m_i - m_o)_{f,r} + (m_i - m_o)_{f,\theta} + (m_i - m_o)_{f,\phi} = m_{f,t}. \quad \dots\dots\dots \text{C. 12}$$

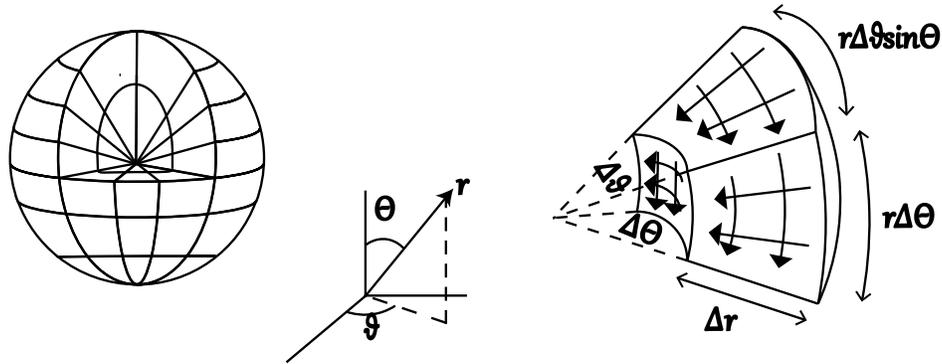


Figura C. 3. Flujo en un elemento de volumen en coordenadas esféricas.

donde los subíndices r , θ y ϕ son las direcciones de flujo. En este caso, los balances resultan en:

$$\frac{[(\rho u A)_r - (\rho u A)_{r+\Delta r} + (\rho u A)_\theta - (\rho u A)_{\theta+\Delta\theta} + (\rho u A)_\phi - (\rho u A)_{\phi+\Delta\phi}]_f}{V_b} = \frac{[(\phi s_f \rho_f)_{t+\Delta t} - (\phi s_f \rho_f)_t]}{\Delta t}, \quad \dots \quad \text{C. 13}$$

donde:

$$V_b = r^2 \Delta r \Delta\theta \Delta\phi \sin \theta, \quad A_r = r^2 \Delta\theta \Delta\phi \sin \theta, \quad A_\theta = r \Delta r \Delta\phi, \quad A_\phi = r \Delta r \Delta\theta, \quad \dots \quad \text{C. 14}$$

al tomar límites, y como una fase saturada al medio poroso ($s_f = 1$), se llega a

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \rho u_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho u_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} (\sin \theta \rho u_\phi) = - \frac{\partial}{\partial t} (\phi \rho), \quad \dots \quad \text{C. 15}$$

C.4 Forma diferencial general para sistemas ortogonales

Las Ecs. C. 7, C. 11 y C. 15 pueden ser generalizadas considerando la siguiente definición para la divergencia ($\nabla \cdot$):

$$\nabla \cdot \mathbf{R} = \frac{1}{a_{x_1} a_{x_2} a_{x_3}} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} (a_{x_2} a_{x_3} R_{x_1}) + \frac{\partial}{\partial x_2} (a_{x_1} a_{x_3} R_{x_2}) + \frac{\partial}{\partial x_3} (a_{x_1} a_{x_2} R_{x_3}) \right]. \quad \dots \quad \text{C. 16}$$

ANEXO C Derivación de la ecuación de continuidad en diferentes coordenadas.

donde $\nabla \cdot$ es el operador divergencia; a_{x_1} , a_{x_2} y a_{x_3} son los factores de escalamiento para la geometría de interés; y \mathbf{R} es una función vectorial cualquiera. Así, la ecuación de continuidad resulta en:

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\phi \rho), \dots\dots\dots \mathbf{C.17}$$

donde $\rho \mathbf{u}$ es el vector de flujo másico por unidad de área. Los factores de escalamiento usados en la **Ec. C. 7** son todos iguales a la unidad, en la **Ec. C. 11** son $a_{x_1} = a_{x_3} = 1$ y $a_{x_2} = r$, y en la **Ec. C. 15** $a_{x_1} = 1$, $a_{x_2} = r \sin \theta$ y $a_{x_3} = r$.