



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

---

**FACULTAD DE INGENIERÍA**

**Cuaderno de Ejercicios para  
Caracterización Dinámica de  
Yacimientos: Flujo en Medios  
Porosos**

**MATERIAL DIDÁCTICO**

Que para obtener el título de

**Ingeniero Petrolero**

**P R E S E N T A**

Martínez Meneses José Henrique

**ASESOR DE MATERIAL DIDÁCTICO**

Ing. Héctor Erick Gallardo Ferrera

**Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2018**





## **Agradecimientos.**

A mi madre, **Araceli Meneses Flores**, que, gracias a tu esfuerzo, amor, dedicación, comprensión y disciplina depositados en mi persona, que me han permitido alcanzar metas y sueños, este trabajo es una muestra de ello. Infinitas gracias. Vamos por más.

A mi padre, †**Carlos Enrique Martínez Jiménez**, que con tu partida me dejaste muchas enseñanzas y me ayudaste a madurar.

A mi abuela **Honoría Flores Olayo**, que en cuyo corazón siempre he encontrado cobijo y atención, así como un amor desbordado. Así como a mis abuelos †**Socorro Jiménez Sánchez** y †**José Meneses Blancas**, el tiempo no me permitió disfrutar de su presencia, pero sé que desde donde estén han sido partícipes de mis logros, como lo es este.

A mi tío **Javier Meneses Flores**, cuyos consejos y charlas motivacionales no han sido en vano. Gracias!

A mis tíos que han partido de este mundo, †**Carolina Hernández Olayo** y †**Miguel Ángel Noxpanco Flores**, en quienes siempre encontré palabras de aliento. Así como a todos **mis familiares y amigos de la familia** con los que siempre he encontrado una plática interesante, un buen consejo, cariño, respeto y muchos momentos agradables.

A **mis amigos**, aquellos que he cultivado a lo largo de más de 20 años de mi vida, les agradezco cada momento. Todos ustedes tienen un valor especial para mí, gracias por esa amistad sincera; mi cariño y respeto a cada uno de ustedes.

A **mis sinodales**, que tuvieron la disposición y el tiempo para la revisión de este trabajo, sus comentarios fueron muy valiosos.

A mi asesor, el **Ing. Héctor Erick Gallardo Ferrera**, cuya orientación, buena disposición, paciencia y dedicación hizo más fácil la elaboración de este trabajo. Además, un gran reconocimiento como catedrático, mi admiración y respeto.

A todas **aquellas instituciones educativas y profesores** que tuve en mi vida de estudiante, que me permitieron llegar hasta donde estoy. Pero en especial a la **UNAM** y a la **Facultad de**

**Ingeniería**, que me brindaron un espacio y me abrieron las puertas del conocimiento. Es un orgullo ser parte de esta maravillosa comunidad universitaria. ¡Goya!

# Contenido

|   |      |
|---|------|
| <i>Agradecimientos</i> .....  | i    |
| Lista de Figuras .....  | ix   |
| Lista de Tablas .....   | xiii |
| Introducción .....  | xv   |
| Tema 2 .....  | 1    |
| Flujo monofásico de fluidos en el yacimiento .....                                      | 1    |
| 2.1 Condiciones necesarias para un problema de flujo .....                              | 1    |
| 2.1.1 Condiciones de frontera .....   | 1    |
| 2.1.2 Condición inicial .....   | 3    |
| <i>Ejercicio 2.1</i> Consistencia de las condiciones en un problema de flujo.....       | 4    |
| <i>Ejercicio 2.2</i> Problema de flujo en un yacimiento heterogéneo.....                | 9    |
| 2.2 Variables adimensionales .....  | 13   |
| <i>Ejercicio 2.3</i> Variables adimensionales para flujo lineal.....                    | 14   |
| <i>Ejercicio 2.4</i> Variables adimensionales para flujo radial.....                    | 17   |
| <i>Ejercicio 2.5</i> Variables adimensionales para un fluido no Newtoniano.....         | 21   |
| 2.3 Uso de las soluciones para flujo radial.....  | 24   |
| 2.3.1 Factor de forma de Dietz .....  | 27   |
| <i>Ejercicio 2.6</i> Uso de la solución línea fuente para obtener perfiles $p - r$ .... | 32   |
| <i>Ejercicio 2.7</i> Uso de la solución línea fuente para obtener perfiles $p - t$ .... | 39   |
| <i>Ejercicio 2.8</i> Uso de los factores de forma de Dietz.....                         | 42   |

|  |     |
|--|-----|
| 2.4 Uso del principio de superposición en espacio y tiempo.....                                | 44  |
| <i>Ejercicio 2.9</i> Principio de superposición en espacio a gasto constante.....              | 46  |
| <i>Ejercicio 2.10</i> Principio de superposición en espacio a gasto constante.....             | 50  |
| <i>Ejercicio 2.11</i> Principio de superposición en tiempo y espacio, a gasto constante .....  | 56  |
| <i>Ejercicio 2.12</i> Principio de superposición en tiempo, a presión de fondo constante. .... | 63  |
| 2.5 Uso de la aproximación de Horner.....  | 69  |
| <i>Ejercicio 2.13</i> Introducción a la aproximación de Horner .....                           | 70  |
| <i>Ejercicio 2.14</i> Superposición en tiempo y aproximación de Horner.....                    | 72  |
| <i>Ejercicio 2.15</i> Superposición en tiempo y aproximación de Horner.....                    | 76  |
| <i>Ejercicio 2.16</i> Yacimiento Volumétrico. ....   | 81  |
| 2.6 Daño y Pseudodaño .....  | 83  |
| 2.6.1 Daño real a la formación ( <i>Str</i> ).....   | 84  |
| 2.6.2 Pseudo-daños .....   | 85  |
| 2.6.3 Eficiencia de flujo .....  | 93  |
| <i>Ejercicio 2.17</i> Pseudo-daño por convergencia por el método de Papatzacos. ....           | 93  |
| <i>Ejercicio 2.18</i> Pseudo-daño por desviación de un pozo por el método de Cinco et al. .... | 95  |
| <i>Ejercicio 2.19</i> Pseudo-daño por disparos por el método gráfico de Hong... ..             | 96  |
| 2.7 Función derivada .....   | 102 |

|  |     |
|--|-----|
| <i>Ejercicio 2.20</i> Determinación de la Eficiencia de flujo y permeabilidad de un pozo .....   | 105 |
| 2.8 Pruebas de presión .....   | 107 |
| 2.8.1 Pruebas de decremento de presión.....  | 107 |
| 2.8.2 Pruebas de incremento de presión.....  | 107 |
| 2.8.3 Pruebas a gasto variable .....   | 108 |
| <i>Ejercicio 2.21</i> Prueba de incremento.....  | 109 |
| <i>Ejercicio 2.22</i> Prueba de decremento .....   | 112 |
| <i>Ejercicio 2.23</i> Prueba de gasto múltiple .....   | 115 |
| 2.9 EJERCICIOS PROPUESTOS.....   | 120 |
| <i>Ejercicio 1. a</i> Consistencia de las condiciones en un problema de flujo....  | 120 |
| <i>Ejercicio 1. b</i> Utilización de la solución línea fuente .....  | 120 |
| <i>Ejercicio 1. c</i> Utilización de la solución línea fuente .....  | 121 |
| <i>Ejercicio 1. d</i> Superposición en espacio a condiciones de gasto constante .....  | 121 |
| <i>Ejercicio 1. e</i> Superposición en espacio a condiciones de gasto constante .....  | 122 |
| <i>Ejercicio 1. f</i> Superposición en espacio y tiempo .....  | 123 |
| <i>Ejercicio 1. g</i> Utilización de la aproximación de Horner.....  | 125 |
| <i>Ejercicio 1. h</i> Cálculo de daño total y de pseudo-daños.....   | 126 |
| <i>Ejercicio 1. i</i> Cálculo de la permeabilidad y la eficiencia del pozo, a partir de la pendiente de un gráfico de diagnóstico..... | 127 |

|   |     |
|---|-----|
| <i>Ejercicio 1. j</i> Prueba de incremento de presión ..... | 128 |
| <i>Ejercicio 1. k</i> Prueba de decremento de presión ..... | 128 |
| ANEXO A .....   | 130 |
| Solución <i>Ejercicio 1. a:</i> .....                       | 130 |
| Solución <i>Ejercicio 1. b:</i> .....                       | 133 |
| Solución <i>Ejercicio 1. c:</i> .....                       | 134 |
| Solución <i>Ejercicio 1. d:</i> .....                       | 135 |
| Solución <i>Ejercicio 1. e:</i> .....                       | 140 |
| Solución <i>Ejercicio 1. f:</i> .....                       | 143 |
| Solución <i>Ejercicio 1. g:</i> .....                       | 144 |
| Solución <i>Ejercicio 1. h:</i> .....                       | 146 |
| Solución <i>Ejercicio 1. i:</i> .....                       | 147 |
| Solución <i>Ejercicio 1. j:</i> .....                       | 148 |
| Solución <i>Ejercicio 1. k:</i> .....                       | 151 |
| Glosario .....  | 153 |
| Bibliografía .....  | 157 |

## Lista de Figuras

|   |    |
|---|----|
| <i>Figura 2.2. Esquema de fronteras tipo: a) Dirichlet y b) Neumann, (Gallardo,2018).</i> .....   | 1  |
| <i>Figura 2.3. Esquema de un problema con flujo lineal (Gallardo, 2018)</i> .....   | 4  |
| <i>Figura 2.4. Gráfico que esquematiza el comportamiento de la presión para el Ejercicio 2.2</i> .....  | 12 |
| <i>Figura 2. 5 Perfiles de presión – distancia para diferentes sistemas.</i> .....  | 13 |
| <i>Figura 2. 6 Comportamiento adimensional de diferentes sistemas de flujo.</i> .....   | 14 |
| <i>Figura 2.7 Esquematación del modelo de flujo lineal en un yacimiento producido por un pozo con gasto constante (Gallardo, 2015).</i> .....   | 14 |
| <i>Figura 2.8 Esquematación del modelo de flujo radial en un yacimiento.</i> .....  | 24 |
| <i>Figura 2.9 Modo de empleo de las tablas para determinar el valor de la integral exponencial cuando <math>x = 0.78</math>. Dependiendo del intervalo en la tabla, la primera parte del argumento se busca en la columna de <math>x</math>, y una vez definido el renglón de interés, los dígitos restantes se presentan en las columnas aledañas.</i> ..... | 35 |
| <i>Figura 2.10 Gráfico de interés para el Ejercicio 2.6</i> .....   | 38 |
| <i>Figura 2.11. Gráfico de comportamiento del Ejercicio 2.7, presión de fondo vs tiempo.</i>  | 41 |
| <i>Figura 2.12 Configuración de pozo para el Ejercicio 2.8</i> .....  | 42 |
| <i>Figura 2.13 Esquematación de la superposición de flujo para un pozo que produce a dos gastos diferentes, y el efecto sobre su presión (Gallardo,2018).</i> .....   | 44 |
| <i>Figura 2.14 Esquematación de la superposición de flujo para un sistema con dos pozos productores y uno observador (<math>q_3 = 0</math>), y el efecto sobre la presión del pozo cerrado (Gallardo,2018).</i> .....   | 45 |
| <i>Figura 2.15 Configuración de pozos para el Ejercicio 2.9</i> .....   | 46 |

|   |           |
|---|-----------|
| <i>Figura 2.16 Modo de empleo de las tablas para determinar el valor de la integral exponencial cuando <math>x = 1.1</math>. Dependiendo del intervalo en la tabla, la primera parte del argumento se busca en la columna de <math>x</math> , y una vez definido el renglón de interés, los dígitos restantes se presentan en las columnas aledañas. ....</i>     | <i>48</i> |
| <i>Figura 2.17. Historia de producción del pozo que se analiza en el Ejercicio 2.10. ....</i>   | <i>51</i> |
| <i>Figura 2.18 Gráfico de comportamiento del Ejercicio 2.10, presión de fondo contra tiempo. ....</i>   | <i>54</i> |
| <i>Figura 2.19 Gráfico de comportamiento semi logarítmico del Ejercicio 2.10, presión de fondo contra tiempo.....</i>   | <i>55</i> |
| <i>Figura 2.20 Gráfico de comportamiento del Ejercicio 2.10, 1/presión de fondo contra tiempo. ....</i>   | <i>55</i> |
| <i>Figura 2.21 Gráfico de comportamiento semi logarítmico del Ejercicio 2.10, presión de fondo vs tiempo. ....</i>  | <i>56</i> |
| <i>Figura 2.22 Historia de producción de los pozos que se analiza en Ejercicio 2.11 .....</i>   | <i>57</i> |
| <i>Figura 2.23. Modo de empleo de las tablas para determinar el valor de la integral exponencial cuando <math>x = -0.0356</math>. Dependiendo del intervalo en la tabla, la primera parte del argumento se busca en la columna de <math>x</math>, y una vez definido el renglón de interés, los dígitos restantes se presentan en las columnas aledañas. ....</i> | <i>59</i> |
| <i>Figura 2.24. Historia de producción del pozo que se analiza en el Ejercicio 2.12 .....</i>   | <i>63</i> |
| <i>Figura 2.25. Gráfico de comportamiento del Ejercicio 2.12, gasto (STBD) contra tiempo. ....</i>  | <i>68</i> |
| <i>Figura 2.26 Historia de producción de los pozos que se analiza en el Ejercicio 2.14 ...</i>  | <i>72</i> |
| <i>Figura 2.27 Historia de producción de los pozos que se analiza en Ejercicio 2.15. ....</i>   | <i>77</i> |
| <i>Figura 2.28. Representación esquemática del daño (Gallardo, 2018) .....</i>  | <i>83</i> |
| <i>Figura 2.29. Esquemmatización del daño real a la formación. (Gallardo,2018) .....</i>  | <i>84</i> |

|  |     |
|--|-----|
| <i>Figura 2.30. Esquematización de algunos efectos típicos de pseudo-daño. (Gallardo,2018)</i> .....   | 85  |
| <i>Figura 2.31 Nomograma para determinar el factor de pseudo-daño por flujo a través de disparos en un patrón simple, disparos de ½ in de diámetro (modificado de Hong, 1975).</i> .....   | 88  |
| <i>Figura 2.32 Nomograma para determinar el factor de pseudo-daño por flujo a través de disparos en un patrón escalonado, disparos de ½ in de diámetro (modificado de Hong, 1975).</i> .....   | 89  |
| <i>Figura 2.33. Factor de pseudo-daño <math>S_p</math> para diámetros de disparos de ¼ y 1 in (modificado de Hong, 1975).</i> .....  | 90  |
| <i>Figura 2.34. Nomograma para determinar el factor de daño de la formación cuando el disparo termina dentro de la zona dañada <math>r_w + a_p &lt; r_s</math> (modificado de Hong, 1975).</i>   | 91  |
| <i>Figura 2.35. Nomograma para determinar el factor de daño de la formación cuando el disparo termina fuera de la zona dañada <math>r_w + a_p &gt; r_s</math> (modificado de Hong, 1975).</i> ..   | 92  |
| <i>Figura 2.36 Método gráfico para la determinación del pseudo-daño por disparos, se inicia con el valor de <math>h_r</math>, para posteriormente alcanzar el <math>r_w</math>, secuencialmente se buscan los grados de la fase, el <math>a_{pr}</math> y al final topar con la relación <math>k_r/k_z</math>, para determinar el valor de <math>s_d</math>.</i> ..... | 98  |
| <i>Figura 2.37. Calculo del valor de <math>s_{d\text{corregido}}</math> debido a que el diámetro de las perforaciones es menor a 1/2 de pulgada</i> .....  | 99  |
| <i>Figura 2.38 Gráfico semilogarítmico para dar solución al Ejercicio 2.21.</i> .....  | 110 |
| <i>Figura 2.39 Gráfico especializado de presión contra tiempo de una prueba de decremento de presión.</i> .....  | 113 |
| <i>Figura 2.40. Histórico de producción para el Ejercicio 2.23</i> .....   | 115 |
| <i>Figura 2.41. Gráfico de comportamiento de la prueba a gasto variable del Ejercicio 2.23.</i> .....  | 118 |

|  |            |
|--|------------|
| <i>Figura 2.42. Configuración de los pozos para el Ejercicio 1. d.....</i>   | <i>122</i> |
| <i>Figura 2. 43 Configuración de pozos para el Ejercicio 1. e .....</i>  | <i>123</i> |
| <i>Figura 2.44 Configuración de pozos para el Ejercicio 1. f .....</i>   | <i>123</i> |
| <i>Figura 2.45 Esquema de producción del pozo 1 del Ejercicio 1. f.....</i>  | <i>124</i> |
| <i>Figura 2.46 Esquema de producción del pozo 2 del Ejercicio 1. f.....</i>  | <i>124</i> |
| <i>Figura 2. 47 Esquema de producción del pozo 3 del Ejercicio 1. f.....</i>   | <i>124</i> |
| <i>Figura 2. 48 Histórico de producción para el Ejercicio 1. g .....</i>   | <i>126</i> |
| <i>Figura 2.49 Gráfico que esquematiza el comportamiento de la presión para el Ejercicio 1. a .....</i>  | <i>132</i> |
| <i>Figura 2. 50 Gráfico de comportamiento del Ejercicio 1. b.....</i>  | <i>134</i> |
| <i>Figura 2.51 Modo de empleo de las tablas para determinar el valor de la integral exponencial cuando <math>x = 0.042</math>. Dependiendo del intervalo en la tabla, la primera parte del argumento se busca en la columna de <math>x</math>, y una vez definido el renglón de interés, los dígitos restantes se presentan en las columnas aledañas. ....</i> | <i>139</i> |
| <i>Figura 2.52 Gráfico semilogarítmico para dar solución al ejercicio 2.19 .....</i>   | <i>149</i> |
| <i>Figura 2.53 Grafico especializado de presión contra tiempo de una prueba de decremento de presión.....</i>  | <i>151</i> |

## Lista de Tablas

|  |     |
|--|-----|
| <i>Tabla 2. 1 Definición de las variables adimensionales.</i> .....  | 20  |
| <i>Tabla 2. 2 Unidades típicas de las variables utilizadas en los problemas de flujo.</i> .....                                      | 20  |
| <i>Tabla 2. 3 Constantes de proporcionalidad para las variables adimensionales.</i> .....  | 21  |
| <i>Tabla 2.5 Algunos valores de <math>-Ei(-x)</math> (Modificada de Lee, 1982).</i> .....  | 26  |
| <i>Tabla 2. 6 Factor de forma para diferentes geometrías del yacimiento.</i> .....   | 29  |
| <i>Tabla 2. 7 Factor de forma para diferentes geometrías del yacimiento.</i> .....   | 30  |
| <i>Tabla 2. 8 Factor de forma para diferentes geometrías del yacimiento.</i> .....   | 31  |
| <i>Tabla 2.9 Resultados de los polinomios de Abramowitz y Stegun para <math>-Ei(-x)</math>.</i> .....                                | 36  |
| <i>Tabla 2.10 Resultados obtenidos del Ejercicio 2.6.</i> .....  | 37  |
| <i>Tabla 2.11 Datos requeridos para el Ejercicio 2.13.</i> .....   | 70  |
| <i>Tabla 2.12. Parámetros de los modelos de flujo para el análisis de pruebas de presión.</i><br>.....                               | 103 |
| <i>Tabla 2. 13 Parámetros de la función derivada de los modelos de flujo para el análisis de pruebas de presión (Ec. 4.7).</i> ..... | 104 |
| <i>Tabla 2.14. Datos de prueba de incremento de presión.</i> .....   | 109 |
| <i>Tabla 2.15 Obtención del tiempo de Horner para el Ejercicio 2.21.</i> .....   | 110 |
| <i>Tabla 2.16 Datos de prueba de decremento de presión</i> .....   | 112 |
| <i>Tabla 2. 17. Datos de prueba de incremento de presión.</i> .....  | 116 |
| <i>Tabla 2.18 Desglose de la Ec 2.101, para el caso particular del Ejercicio 2.23</i> .....  | 117 |
| <i>Tabla 2. 19 Datos de prueba de decremento de presión</i> .....  | 129 |
| <i>Tabla 2. 20 Obtención del tiempo de Horner para el Ejercicio 1. j.</i> .....  | 148 |



# Introducción

La Caracterización Dinámica de Yacimientos tiene un alto impacto en las decisiones que se toman en la industria petrolera, su principal tema de estudio es el comportamiento de los fluidos dentro del medio poroso. Por ello la importancia de impartirla como una materia dentro del plan de estudios de la carrera de Ingeniería Petrolera de la Facultad de Ingeniería.

Es basta la información disponible sobre el tema, es por ello la necesidad de elaborar este Cuaderno de Ejercicios para Caracterización Dinámica, cuyo objetivo es tener una fuente de consulta rápida que no dependa de leer una cantidad exorbitante de teoría, presentando ejercicios resueltos paso a paso que permiten llevar de la mano al alumno o profesor, de esta forma aclarar dudas sobre el tema de manera clara y precisa. Aunado al interés propio derivado de las dificultades que se me presentaron en dicha materia como estudiante, que derivó en la búsqueda de soluciones a esas dificultades; esas soluciones fueron días de estudio para sacar adelante la materia y posteriormente la impartición de un Taller de ejercicios de Caracterización Dinámica como parte de mi Servicio Social, siendo lo anterior el origen de este Cuaderno de Ejercicios para Caracterización Dinámica, cuya elaboración ha sido parte de un proceso largo.

La presentación de los ejercicios se divide en secciones y cada uno de estos cuenta con una detallada solución que evita la omisión de pasos y resultados, además en el inicio cada sección se encuentran las herramientas básicas para la solución de estos. También se presentan ejercicios propuesto con la finalidad de reforzar el entendimiento por parte del lector y cuya solución se encuentra disponible en el Anexo A.

La base de este Cuaderno de Ejercicios para Caracterización Dinámica se centra en el tema número 2 dentro del temario de la materia impartida en la Facultad,

que a consideración propia es el tema esencial y base para el entendimiento correcto de la materia, dicho tema es el “Flujo Monofásico de Fluidos en el Yacimiento”.

La parte teórica, para este cuaderno de ejercicios se encuentra en proceso y próximamente disponible, la cual está a cargo de la coordinación de la carrera de Ingeniería Petrolera. Con la finalidad de tener una parte teórica y una parte práctica que se complementen.

# Tema 2

## Flujo monofásico de fluidos en el yacimiento

### 2.1 Condiciones necesarias para un problema de flujo

El flujo de fluidos en un yacimiento puede ser descrito a través de modelos basados en la ecuación de difusividad:

$$\nabla^2 p = \frac{\phi \mu c_t}{k} \frac{\partial p}{\partial t} \dots\dots\dots 2.1$$

Para su solución deben usarse las condiciones de frontera e iniciales correspondientes.

#### 2.1.1 Condiciones de frontera

El comportamiento de la ecuación de difusividad es definido por las condiciones de frontera utilizadas en los problemas de flujo, tanto internas o externas (de acuerdo con el lugar donde se establece su valor), **Figura 2.1**. Adicionalmente, estas se pueden clasificar como se precisa a continuación.

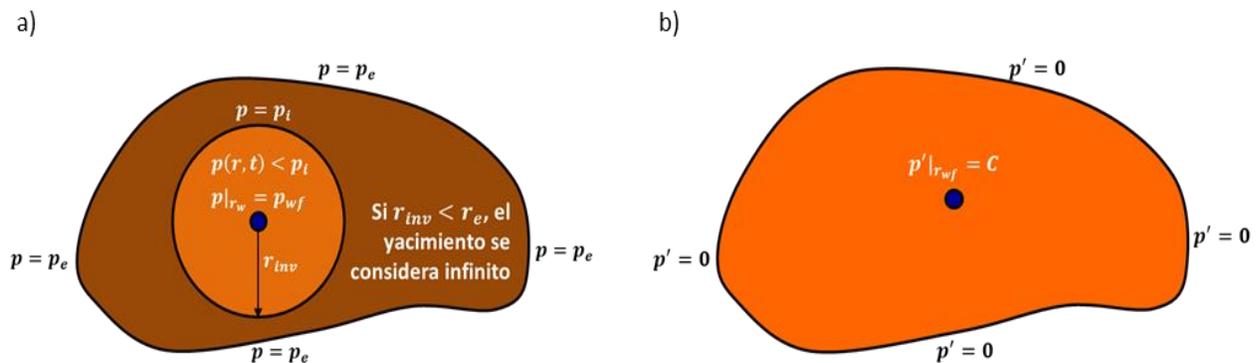


Figura 2.1. Esquema de fronteras tipo: a) Dirichlet y b) Neumann, (Gallardo,2018).

### 2.1.1.1 Condiciones tipo Dirichlet

Las condiciones tipo Dirichlet describen el comportamiento de una variable en un punto definido. Por ejemplo, un sistema radial cilíndrico con un pozo que produce a presión de fondo fluyente constante se representa como:

$$p|_{r_w} = p_{wf} , \dots\dots\dots 2.2$$

mientras que el mantenimiento de presión en el radio externo del yacimiento es

$$p|_{r_e} = p_e \cdot \dots\dots\dots 2.3$$

Finalmente, para flujo transitorio se mantienen las condiciones iniciales en las regiones que no han sido afectadas. Esto implica que

$$p|_{r \rightarrow \infty} = p_i \cdot \dots\dots\dots 2.4$$

Debido a que en el modelo radial utilizado representa a un pozo circunscrito (condición de frontera interna, CFI) en un yacimiento radial infinito (condiciones de frontera externa, CFE).

### 2.1.1.2 Condiciones tipo Neumann

Las condiciones tipo Neumann especifican el comportamiento del gradiente de una variable en un punto cualquiera. Por ejemplo, de la ley de Darcy para flujo radial:

$$q = u \cdot A = - \frac{k \cdot (2\pi r h)}{B\mu} \frac{\partial p}{\partial r} , \dots\dots\dots 2.5$$

un pozo que produce a un gasto  $q_w$  constante puede representarse como

$$r \frac{\partial p}{\partial r} \Big|_{r_w} = - \frac{\mu B q_w}{2\pi k h} , \dots\dots\dots 2.6$$

y una frontera que aporta fluidos a una tasa  $q_e$  constante

$$r \frac{\partial p}{\partial r} \Big|_{r_e} = - \frac{\mu B q_e}{2\pi k h}, \quad \dots\dots\dots 2.7$$

con lo que una frontera de no flujo, donde  $q_e = 0$ , es

$$r \frac{\partial p}{\partial r} \Big|_{r_e} = 0 . \quad \dots\dots\dots 2.8$$

### 2.1.2 Condición inicial

La condición básica para definir las condiciones iniciales en un sistema radial es:

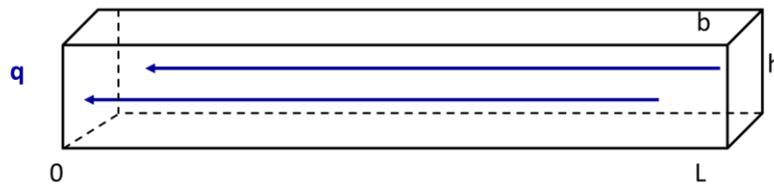
$$p(r, t_0) = p_i . \quad \dots\dots\dots 2.9$$

Los problemas de flujo transitorios poseen soluciones dependientes del tiempo y espacio, por lo que su solución se describe desde  $t_0 = 0$  a  $t_1 = t_0 + \Delta t$ , después de  $t_1$  a  $t_2 = t_1 + \Delta t$ , y así sucesivamente hasta el tiempo final. Este proceso puede ser continuo, como en los siguientes casos, o discreto, como en la simulación de yacimientos. Es importante mencionar que las condiciones de frontera pueden depender del tiempo, por lo que deben especificarse para  $t \geq 0$ .

**Ejercicio 2.1 Consistencia de las condiciones en un problema de flujo.**

Determine cuáles de las siguientes condiciones son apropiadas para resolver el problema de flujo de un fluido incompresible en un yacimiento homogéneo e isótropo, en dirección a  $x$ , **Figura 2.2**.

- 1.  $p = p_0$  en  $x = 0$ ;  $p = p_L$  en  $x = L$  .      2.  $q = C_0$  en  $x = 0$ ;  $q = C_L$  en  $x = L$  .
- 3.  $q = C_0$  en  $x = 0$ ;  $p = p_0$  en  $x = 0$  .      4.  $q = C_0$  en  $x = 0$ ;  $p = p_L$  en  $x = L$  .



**Figura 2.2. Esquema de un problema con flujo lineal (Gallardo, 2018)**

**Solución:**

Partiendo de la ecuación de difusividad dada en la **Ec.2.1**, se tiene que para flujo en dirección a  $x$ :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{1}{\eta} \frac{dp}{dt} , \dots\dots\dots 2.10$$

dado que el fluido es incompresible, se presenta un estado estacionario, definido por:

$$\frac{dp}{dt} = 0 ,$$

y entonces se llega a

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0 , \dots\dots\dots 2.11$$

Para evaluar el conjunto de condiciones indicadas en el problema, debe obtenerse la solución general al mismo. Esto se logra mediante el siguiente cambio de variable:

$$u = \frac{dp}{dx} ,$$

con lo que el problema inicial resulta en:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{du}{dx} = 0 , \dots\dots\dots 2.12$$

De esta manera, al integrar la **Ec. 2.12**, se llega a

$$\int \frac{du}{dx} dx = 0 ,$$

o bien a:

$$u = C_1 ,$$

lo que en términos de la presión resulta:

$$\frac{dp}{dx} = C_1 , \dots\dots\dots 2.13$$

e integrando ahora la **Ec.2.13**:

$$\int \frac{dp}{dx} dx = \int C_1 dx ,$$

se obtiene la solución general de este problema:

$$p(x) = C_1 x + C_2. \dots\dots\dots 2.14$$

Continuando con el proceso de solución, se evaluarán los conjuntos de condiciones particulares para este problema.

### Conjunto de condiciones 1

Evaluando a  $p(x)$  en  $x = 0$  se tiene que

$$p(x = 0) = p_0 = C_1 x|_{x=0} + C_2 ,$$

con lo que:

$$C_2 = p_0 , \dots\dots\dots 2.15$$

Por otro lado, en  $x = L$  se tiene que

$$p(x = L) = p_L = C_1 x|_{x=L} + p_0 ,$$

y al despejar:

$$C_1 = \frac{p_L - p_0}{L} . \dots\dots\dots 2.16$$

En este caso, como es posible determinar las dos constantes de integración, el conjunto de condiciones es consistente y la solución particular es:

$$p(x) = (p_L - p_0) \frac{x}{L} + p_0 .$$

### Conjunto de condiciones 2

Evaluando a  $q(x)$  en  $x = 0$  se tiene que:

$$\left. \frac{dp}{dx} \right|_{x=0} = C_0 , \dots\dots\dots 2.17$$

y como el gradiente de la presión, considerando la ley de Darcy, para este problema es

$$\frac{dp}{dx} = C_1 = - \frac{q(x)B\mu}{kbh} ,$$

se llega a que:

$$C_1 = C_0 = -\frac{q(x=0)B\mu}{kbh}, \dots\dots\dots 2.18$$

por su parte, en  $x = L$  se tiene que

$$\left. \frac{dp}{dx} \right|_{x=L} = C_L, \dots\dots\dots 2.19$$

y al retomar la definición del gradiente de presión, se llega a que

$$C_1 = C_L = -\frac{q(x=L)B\mu}{kbh},$$

lo que resulta en que

$$C_0 = C_L = \frac{q(x=0)B\mu}{kbh} = \frac{q(x=L)B\mu}{kbh}, \dots\dots\dots 2.20$$

o bien, que:

$$\frac{q(x=0)B\mu}{kbh} = \frac{q(x=L)B\mu}{kbh},$$

lo que, al tratarse de un estado estacionario, permite establecer que la producción es igual a la recarga, y que el transporte ocurre por efecto del desplazamiento de las fases:

$$q(x=0) = q(x=L) .$$

Dado que no es posible determinar a  $C_1$  y  $C_2$ , estos conjuntos de condiciones no permiten la resolución consistente del problema para un caso particular.

### Conjunto de condiciones 3

Evaluando a  $q(x)$  en  $x = 0$ , se tiene que:

$$C_1 = C_0 = -\frac{q(x=0)B\mu}{kbh}, \dots\dots\dots 2.21$$

Por otro lado, para  $p(x)$  en  $x = 0$  se tiene que

$$p(x=0) = -\frac{q(x=0)B\mu}{kbh}x|_{x=0} + C_2,$$

y al despejar se tiene que:

$$C_2 = p_0. \dots\dots\dots 2.22$$

Es posible definir a  $C_1$  y  $C_2$ , por lo que el conjunto de condiciones es consistente para la resolución del problema y la solución particular resultante es:

$$p(x) = p_0 - \frac{q(x=0)B\mu}{kbh}x.$$

### Conjunto de condiciones 4

En este caso, al evaluar  $q(x)$  en  $x = 0$  se tiene que:

$$C_1 = C_0 = -\frac{q(x=0)B\mu}{kbh}, \dots\dots\dots 2.23$$

y por su parte con  $p = p_L$  en  $x = L$

$$p(x=L) = -\frac{q(x=0)B\mu}{kbh}L + C_2 = p_L,$$

y al despejar:

$$C_2 = p_L + \frac{q(x=0)B\mu}{kbh}L . \quad \dots\dots\dots 2.24$$

En este caso las condiciones son consistentes, y la solución particular es

$$p(x) = \frac{q_0B\mu}{kbh}(L - x) + p_L$$

**Ejercicio 2.2 Problema de flujo en un yacimiento heterogéneo.**

Un yacimiento heterogéneo e isótropo, que produce a presión de fondo fluyente constante, posee la siguiente distribución de permeabilidades

$$k(x) = \frac{x + 1}{4500 - x} . \quad \dots\dots\dots 2.25$$

Considerando que la ecuación de flujo que representa el problema es:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial p}{\partial x} \right) = 0 , \quad \dots\dots\dots 2.26$$

determine la expresión que permite conocer la presión en cualquier punto y el gasto en el pozo con las siguientes condiciones:

- **Condición de frontera interna:**  $p(x = 0) = 300 \text{ psia} ,$
- **Condición de frontera externa:**  $p(x = L = 3000 \text{ ft}) = 3250 \text{ psia} .$

Grafique sus resultados y explique el comportamiento observado.

**Solución:**

Como primer paso para el desarrollo del problema es necesario realizar la integración de la **Ec.2.26**:

$$\frac{d}{dx} \int \left( k_x \frac{dp}{dx} \right) dx = 0 ,$$

$$k_x \frac{dp}{dx} + C_1 = 0 .$$

Ahora, al reacomodar y separar variables e integrar nuevamente respecto a  $x$  se tiene:

$$\frac{dp}{dx} = \frac{C_1}{k_x} ,$$

$$\int dp = \int \frac{C_1}{k_x} dx ,$$

y considerando la definición de la **Ec.2.25** para el problema:

$$p(x) = C_1 \int \frac{1}{k_x} dx = C_1 \int \frac{4500 - x}{x + 1} dx ,$$

y proponiendo el siguiente cambio de variables para la integración:

$$u = x + 1 , \quad du = dx ,$$

se llega a:

$$- \int \frac{x - 4500}{x + 1} dx = - \int \frac{u - 4501}{u} du = \int du - 4501 \int \frac{du}{u} = u - 4501 \ln|u| + C_2 .$$

De esta manera, al regresar a las variables iniciales y simplificar las constantes de integración, la expresión general que permite conocer la presión en cualquier punto es:

$$p(x) = -C_1(x - 4501 \ln|x + 1|) + C_2 .$$

Ahora, al evaluar en las condiciones de frontera del problema, se tiene que:

**Condición de frontera interna ( $x = 0$ )**

$$p(x = 0) = 300 = -C_1(0 - 4501 \ln|0 + 1|) + C_2 ,$$

por lo que

$$C_2 = 300 .$$

**Condición de frontera externa ( $x = L$ )**

$$p(x = L = 3000) = 3250 = -C_1(3000 - 4501 \ln|3001|) + 300 ,$$

$$3250 - 300 = C_1(-3000 + 36038.16051) ,$$

de esta manera, al despejar  $C_1$  se llega a:

$$C_1 = \frac{2950}{33038.16051} = 0.08929 .$$

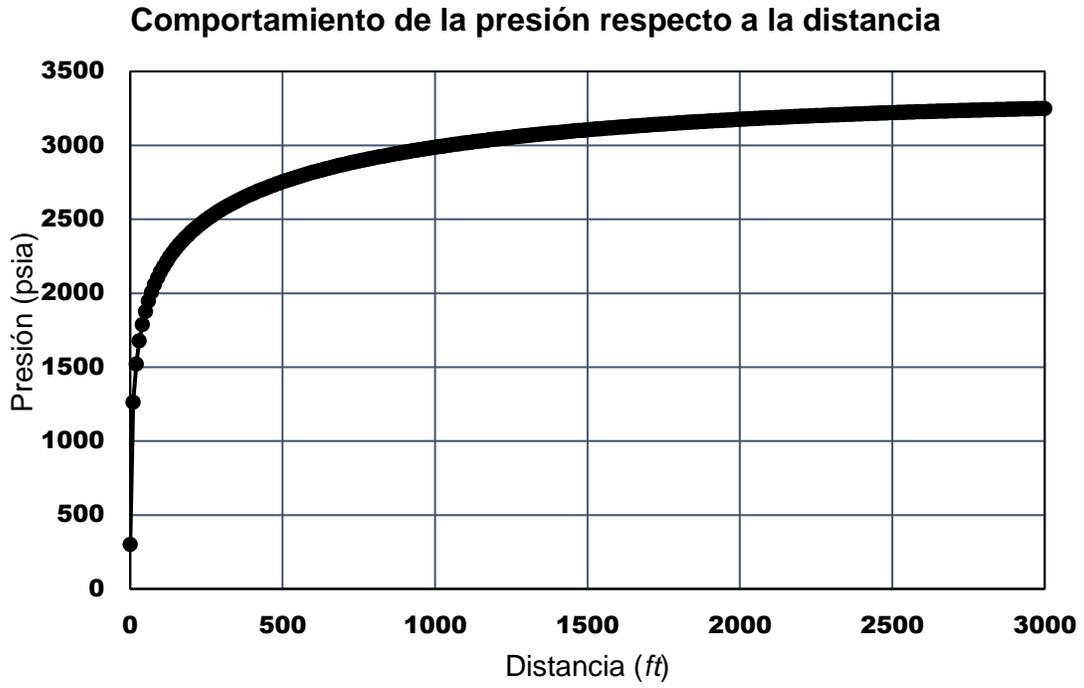
Con los resultados previos, sustituyendo las constantes  $C_1$  y  $C_2$  en la solución general, se llega:

$$p(x) = -0.08929(x - 4501 \ln|x + 1|) + 300 .$$

A su vez, para obtener el gasto, se tiene que:

$$q(x = 0) = -\frac{kA}{\mu} \left. \frac{dp}{dx} \right|_{x=0} = -\frac{A}{4500\mu} [401.4007] = -0.08920 \times \frac{A}{\mu} .$$

El comportamiento gráfico de la solución que muestra el perfil de presiones en el yacimiento se incluye en la **Figura 2.3**.



**Figura 2.3.** Gráfico que esquematiza el comportamiento de la presión para el *Ejercicio 2.2*

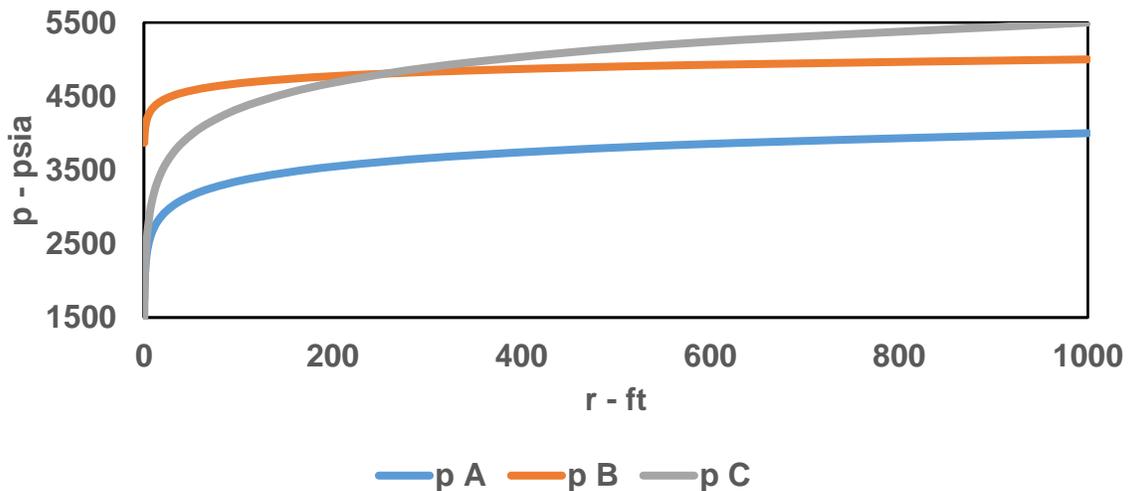
## 2.2 Variables adimensionales

El uso de variables adimensionales en los problemas de flujo permite simplificar el número de incógnitas involucradas y generalizar las posibles soluciones. Estas variables pueden ser definidas como

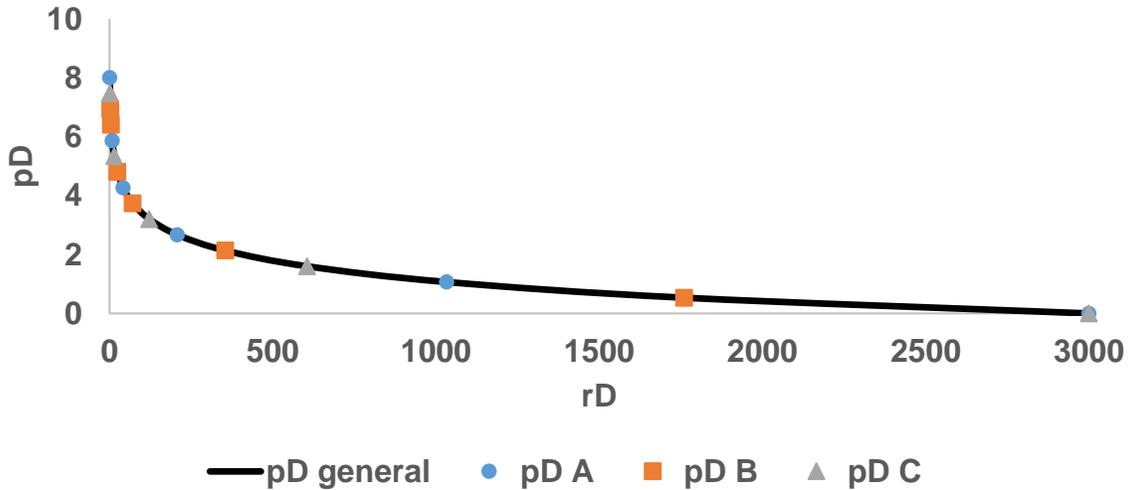
$$\theta_D = \frac{\theta}{\theta_{ref}}, \dots\dots\dots 2.27$$

donde  $\theta$  refiere a la variable de interés, y los subíndices  $D$  y  $ref$  indican que el valor es utilizado en forma adimensional o que se toma alguno de referencia, respectivamente. Cabe señalar que  $\theta_{ref}$  debe ser un valor característico que permita escalar el problema sin complicar el uso de las variables adimensionales.

La importancia del uso de estas variables se ejemplifica al comparar las **Figura 2. 4 y Figura 2. 5**, toda vez que la primera muestra el perfil de presión de tres sistemas distintos a condiciones de flujo estacionario, y la segunda muestra el comportamiento de los mismos en términos de variables adimensionales. Como se observa, los datos de todos los sistemas caen sobre el perfil general de la caída de presión adimensional para flujo radial estacionario.



**Figura 2. 4** Perfiles de presión – distancia para diferentes sistemas.



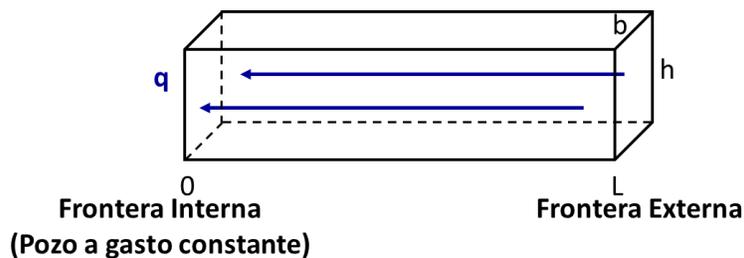
**Figura 2.5** Comportamiento adimensional de diferentes sistemas de flujo.

### Ejercicio 2.3 Variables adimensionales para flujo lineal.

Considerando que el problema de flujo lineal se encuentra dado por la **Ec.2.10**:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{\phi \mu c_t}{k} \frac{\partial p}{\partial t},$$

defina el conjunto de variables que permita parametrizar el problema en términos de variables adimensionales para generalizar las soluciones obtenidas. Considere los parámetros incluidos en la **Figura 2.6**:  $b$  el ancho del canal,  $h$  el espesor y  $L$  la longitud característica, para un pozo que produce a gasto constante.



**Figura 2.6** Esquematización del modelo de flujo lineal en un yacimiento producido por un pozo con gasto constante (*Gallardo, 2015*).

## Solución

Una forma práctica de adimensionalizar un parámetro es normalizarlo con un valor de referencia. Por ejemplo, la distancia adimensional puede definirse como:

$$x_D = \frac{x}{x_{ref}},$$

donde  $x_{ref}$  es un valor de referencia conveniente. Similarmente, el tiempo y la caída de presión adimensionales se definen como:

$$t_D = \frac{t}{t_{ref}},$$

$$p_D = \frac{p_i - p}{p_{ref}}.$$

Para adimensionalizar la **Ec.2.10** se propone realizar cambios de variable, para lo que se divide a la expresión en dos partes. Así, el lado izquierdo resulta:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \times \frac{\partial x_D}{\partial x_D} \left( \frac{\partial p_D}{\partial p_D} \times \frac{\partial x_D}{\partial x_D} \times \frac{\partial p}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x_D} \times \frac{\partial x_D}{\partial x} \left( \frac{\partial x_D}{\partial x} \times \frac{\partial p}{\partial p_D} \times \frac{\partial p_D}{\partial x_D} \right),$$

y para el lado derecho se tiene:

$$\frac{1}{\eta} \frac{\partial p}{\partial \tau} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial t_D}{\partial t_D} \times \frac{\partial p_D}{\partial p_D} \times \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial t_D}{\partial t} \times \frac{\partial p}{\partial p_D} \times \frac{\partial p_D}{\partial t_D},$$

donde los factores de escala se definen en términos de las reglas de correspondencia de las variables adimensionales.

Considerando lo anterior, es necesario definir las siguientes derivadas:

$$\frac{\partial x_D}{\partial x} = \frac{1}{x_{ref}}, \quad \frac{\partial t_D}{\partial t} = \frac{1}{t_{ref}}, \quad \frac{\partial p}{\partial p_D} = -p_{ref},$$

con lo que se obtiene que:

$$\frac{\partial}{\partial x_D} \times \frac{\partial x_D}{\partial x} \left( \frac{\partial x_D}{\partial x} \times \frac{\partial p}{\partial p_D} \times \frac{\partial p_D}{\partial x_D} \right) = \frac{1}{x_{ref}} \frac{\partial}{\partial x_D} \left( -\frac{p_{ref}}{x_{ref}} \frac{\partial p_D}{\partial x_D} \right),$$

$$\frac{1}{\eta} \frac{\partial t_D}{\partial t} \times \frac{\partial p}{\partial p_D} \times \frac{\partial p_D}{\partial t_D} = - \frac{p_{ref}}{\eta t_{ref}} \frac{\partial p_D}{\partial t_D} ,$$

y al igualar términos:

$$\frac{\partial^2 p_D}{\partial x_D^2} = \frac{x_{ref}^2}{\eta t_{ref}} \frac{\partial p_D}{\partial t_D} .$$

En general, se recomienda que las variables de referencia que definen a las variables adimensionales sean parámetros característicos del sistema estudiado. Por ello se propone que para  $x_f$  se utilice la longitud del canal:

$$x_{ref} = L ,$$

y de los cambios de variable realizados es posible definir al tiempo de referencia como:

$$t_{ref} = \frac{L^2}{\eta} .$$

Por su parte, la presión de referencia se obtiene de las condiciones de frontera interna, con lo que al tomar las condiciones de producción a gasto constante se llega a:

$$qB(x = 0, t > 0) = \frac{kA}{\mu L p_{ref}} \frac{\partial p}{\partial x} \times \frac{\partial p_D}{\partial p_D} \times \frac{\partial x_D}{\partial x_D} = \frac{kA}{\mu L p_{ref}} \frac{\partial p_D}{\partial x_D} \times \frac{\partial p}{\partial p_D} \times \frac{\partial x_D}{\partial x} ,$$

y al reacomodar

$$\frac{\partial p_D}{\partial x_D}(x_D = 0, t_D) = - \frac{1}{p_{ref}} \frac{qB\mu L}{kA} .$$

Así, la presión de referencia resulta:

$$p_{ref} = \frac{qB\mu L}{kA} .$$

Cabe señalar que, si las condiciones de producción fueran a presión de fondo constante, se llega a:

$$p_D(p(x=0, t)) = \frac{p_i - p_{wf}}{p_{ref}},$$

y la presión de referencia resulta:

$$p_{ref} = p_i - p_{wf}.$$

### **Ejercicio 2.4 Variables adimensionales para flujo radial.**

Considerando que el problema de flujo radial se encuentra dado por la **Ec 2.10**:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\phi \mu c_t}{k} \frac{\partial p}{\partial t},$$

defina el conjunto de variables que permita parametrizar el problema en términos de variables adimensionales.

#### **Solución:**

Una forma práctica de adimensionalizar un parámetro es normalizarlo con un valor de referencia. Por ejemplo, la distancia adimensional puede definirse como:

$$r_D = \frac{r}{r_{ref}},$$

donde  $r_{ref}$  es un valor de referencia conveniente. Similarmente, el tiempo y la caída de presión adimensionales se definen como:

$$t_D = \frac{t}{t_{ref}}, \quad p_D = \frac{p_i - p}{p_{ref}}.$$

Para adimensionalizar la **Ec.2.10** se propone realizar cambios de variable, para lo que se divide a la expresión en tres partes. Así:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial p}{\partial r} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \times \frac{\partial r_D}{\partial r_D} \left( \frac{\partial p_D}{\partial p_D} \times \frac{\partial r_D}{\partial r_D} \times \frac{\partial p}{\partial r} \right) = \frac{\partial}{\partial r_D} \times \frac{\partial r_D}{\partial r} \left( \frac{\partial r_D}{\partial r} \times \frac{\partial p}{\partial p_D} \times \frac{\partial p_D}{\partial r_D} \right),$$

Para el segundo término:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} \times \frac{\partial p_D}{\partial p_D} \times \frac{\partial r_D}{\partial r_D} = \frac{1}{r} \frac{\partial p_D}{\partial r_D} \times \frac{\partial p}{\partial p_D} \times \frac{\partial r_D}{\partial r},$$

Y finalmente el tercer elemento:

$$\frac{1}{\eta} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial t_D}{\partial t_D} \times \frac{\partial p_D}{\partial p_D} \times \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial t_D}{\partial t} \times \frac{\partial p}{\partial p_D} \times \frac{\partial p_D}{\partial t_D},$$

donde los factores de escala se definen en términos de las reglas de correspondencia de las variables adimensionales.

Considerando lo anterior, es necesario definir las siguientes derivadas:

$$\frac{\partial r_D}{\partial r} = \frac{1}{r_{ref}},$$

$$\frac{\partial t_D}{\partial t} = \frac{1}{t_{ref}},$$

$$\frac{\partial p}{\partial p_D} = -p_{ref},$$

con lo que se obtiene que:

$$\frac{\partial}{\partial r_D} \times \frac{\partial r_D}{\partial r} \left( \frac{\partial r_D}{\partial r} \times \frac{\partial p}{\partial p_D} \times \frac{\partial p_D}{\partial r_D} \right) = \frac{1}{r_{ref}} \frac{\partial}{\partial r_D} \left( -\frac{p_{ref}}{r_{ref}} \frac{\partial p_D}{\partial r_D} \right),$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial p_D}{\partial r_D} \times \frac{\partial p}{\partial p_D} \times \frac{\partial r_D}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial p_D}{\partial r_D} \times -\frac{p_{ref}}{r_{ref}}$$

$$\frac{1}{\eta} \frac{\partial t_D}{\partial t} \times \frac{\partial p}{\partial p_D} \times \frac{\partial p_D}{\partial t_D} = -\frac{p_{ref}}{\eta t_{ref}} \frac{\partial p_D}{\partial t_D},$$

obteniendo la siguiente expresión:

$$-\frac{1}{r_{ref}^2} \frac{\partial^2 p_D}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r \times r_{ref}} \frac{\partial p_D}{\partial r_D} = -\frac{1}{\eta t_{ref}} \frac{\partial p_D}{\partial t_D}.$$

En general, se recomienda que las variables de referencia que definen a las variables adimensionales sean parámetros característicos del sistema. Por ello se propone que:

$$r_{ref} = r_w ,$$

y de los cambios de variable realizados es posible definir al tiempo de referencia como:

$$t_{ref} = \frac{r_w^2}{\eta} .$$

Por su parte, la presión de referencia se obtiene de las condiciones de frontera interna, con lo que al tomar las condiciones de producción a gasto constante se llega a:

$$qB(r_D = 1, t > 0) = \frac{k2\pi rh}{\mu p_{ref}} \frac{\partial p}{\partial r} \times \frac{\partial p_D}{\partial p_D} \times \frac{\partial r_D}{\partial r_D} = \frac{k2\pi h}{\mu p_{ref}} r_w \times r_D \frac{\partial p_D}{\partial r_D} \times \frac{\partial p}{\partial p_D} \times \frac{\partial r_D}{\partial r} ,$$

y al reacomodar

$$r_D \frac{\partial p_D}{\partial r_D} (r_D = 1, t_D) = - \frac{1}{p_{ref}} \frac{qB\mu}{k2\pi h} .$$

Así, la presión de referencia resulta:

$$p_{ref} = \frac{qB\mu}{2\pi kh} .$$

Cabe señalar que, si las condiciones de producción fueran a presión de fondo constante, se llega a:

$$p_D(p(r_w = 0, t)) = \frac{p_i - p_{wf}}{p_{ref}} ,$$

y la presión de referencia resulta:

$$p_{ref} = p_i - p_{wf} .$$

La **Tabla 2. 1** presenta un resumen con las diferentes definiciones de las variables adimensionales típicamente usadas para flujo lineal, radial y esférico. Los valores de  $\alpha$

y  $\beta$  se obtienen de acuerdo a las unidades utilizadas. De esta manera, su valor será unitario cuando estas sean consistentes, mientras que para las unidades de campo presentadas en la **Tabla 2. 2**, las constantes toman los valores indicados en la **Tabla 2. 3**.

**Tabla 2. 1** Definición de las variables adimensionales.

| Variable | Tiempo   | Distancia                | Caída de presión                                      |
|----------|--|--------------------------|---|
| Lineal   | $t_{Dl} = \frac{\beta kt}{\phi \mu c_t L^2}$   | $x_D = \frac{x}{L}$      | $p_{Dl} = \frac{kbh}{\alpha_l q_w B \mu L} (p_i - p)$ |
| Radial   | $t_{Dr} = \frac{\beta kt}{\phi \mu c_t r_w^2}$ | $r_{Dr} = \frac{r}{r_w}$ | $p_{Dr} = \frac{kh}{\alpha_r q_w B \mu} (p_i - p)$    |
| Esférico | $t_{Ds} = \frac{\beta kt}{\phi \mu c_t r_w^2}$ | $r_{Ds} = \frac{r}{r_w}$ | $p_{Ds} = \frac{kr_w}{\alpha_s q_w B \mu} (p_i - p)$  |

**Tabla 2. 2** Unidades típicas de las variables utilizadas en los problemas de flujo.

| Variable  | SI                   | Técnico Inglés                        | Cgs                                   | Darcy                  | Campo             |
|-----------|----------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|------------------------|-------------------|
| $k$       | $m^2$                | $ft^2$                                | $cm^2$                                | <i>darcy</i>           | <i>md</i>         |
| $p$       | $Pa$                 | $\frac{lb_f}{ft^2}$                   | $\frac{dina}{cm^2}$                   | <i>atm</i>             | <i>psia</i>       |
| $q$       | $\frac{m^3}{s}$      | $\frac{ft^3}{s}$                      | $\frac{cm^3}{s}$                      | $\frac{cm^3}{s}$       | <i>bpd</i>        |
| $\mu$     | $Pa \cdot s$         | $lb_f - \frac{s}{ft^2}$               | <i>cp</i>                             | <i>cp</i>              | <i>cp</i>         |
| $B$       | $\frac{rm^3}{stm^3}$ | $\frac{rcf}{scf}$                     | $\frac{rcm^3}{stcm^3}$                | $\frac{rcm^3}{stcm^3}$ | $\frac{rbl}{stb}$ |
| $t$       | $s$                  | $s$                                   | $s$                                   | $s$                    | <i>hr</i>         |
| $c_t$     | $Pa^{-1}$            | $\left[\frac{lb_f}{ft^2}\right]^{-1}$ | $\left[\frac{dina}{cm^2}\right]^{-1}$ | $atm^{-1}$             | $[psia]^{-1}$     |
| $h - r_w$ | $m$                  | $ft$                                  | $cm$                                  | $cm$                   | $ft$              |
| $V_p$     | $m^3$                | $ft^3$                                | $cm^3$                                | $cm^3$                 | $ft^3$            |
| $A$       | $m^2$                | $ft^2$                                | $cm^2$                                | $cm^2$                 | <i>acre</i>       |

**Tabla 2. 3 Constantes de proporcionalidad para las variables adimensionales.**

| Constante  | Valor para unidades prácticas <sup>1</sup> | Valor para el sistema métrico <sup>2</sup> |
|------------|--|--|
| $\alpha_l$ | 887.2                                      | 119.58                                     |
| $\alpha_r$ | 141.2                                      | 19.03                                      |
| $\alpha_s$ | 70.6                                       | 9.52                                       |
| $\beta$    | $2.637 \times 10^{-4}$                     | $3.489 \times 10^{-4}$                     |

**Ejercicio 2.5 Variables adimensionales para un fluido no Newtoniano.**

Considerando las siguientes variables adimensionales para el problema de flujo de un fluido no newtoniano tipo Ley de potencias a través de un medio poroso:

Donde  $\mu_{eff}$  es un parámetro de ajuste y  $n$  indica el exponente de consistencia del fluido. Encuentre el valor de  $t_{ref}$  que permite adimensionalizar la siguiente ecuación de flujo:

$$p_D = \frac{k}{\mu_{eff} r_w^{1-n}} \left( \frac{2\pi h}{qB} \right)^n (p_i - p) , \quad \dots\dots\dots 2.28$$

$$r_D = \frac{r}{r_w} , \quad \dots\dots\dots 2.29$$

$$t_D = \frac{t}{t_{ref}} , \quad \dots\dots\dots 2.30$$

donde  $\mu_{eff}$  es un parámetro de ajuste y  $n$  indica el exponente de consistencia del fluido. Encuentre el valor de  $t_{ref}$  que permite adimensionalizar la siguiente ecuación de flujo **Ec.2.31**:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{n}{r} \frac{\partial p}{\partial r} = C_t \phi n \left( \frac{\mu_{eff}}{k} \right)^{\frac{1}{n}} \left( -\frac{\partial p}{\partial r} \right)^{1-\frac{1}{n}} \frac{\partial p}{\partial t} . \quad \dots\dots\dots 2.31$$

<sup>1</sup> Donde la permeabilidad está e mD

<sup>2</sup> Donde la permeabilidad está e m<sup>2</sup>

## Solución:

Para dar solución al problema se propone que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial p}{\partial r} \times \frac{\partial p_D}{\partial p_D} \times \frac{\partial r_D}{\partial r_D} \right) \times \frac{\partial r_D}{\partial r} + \frac{n}{r_w r_D} \frac{\partial p}{\partial r} \times \frac{\partial p_D}{\partial p_D} \times \frac{\partial r_D}{\partial r_D} \\ = C_t \phi n \left( \frac{\mu_{eff}}{k} \right)^{\frac{1}{n}} \left( -\frac{\partial p}{\partial r} \times \frac{\partial p_D}{\partial p_D} \times \frac{\partial r_D}{\partial r_D} \right)^{1-\frac{1}{n}} \frac{\partial p}{\partial t} \times \frac{\partial p_D}{\partial p_D} \times \frac{\partial t_D}{\partial t_D}, \end{aligned}$$

o bien:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r_D} \left( \frac{\partial p_D}{\partial r_D} \times \frac{\partial p}{\partial p_D} \times \frac{\partial r_D}{\partial r} \right) \times \frac{\partial r_D}{\partial r} + \frac{n}{r_w r_D} \frac{\partial p_D}{\partial r_D} \times \frac{\partial p}{\partial p_D} \times \frac{\partial r_D}{\partial r} \\ = C_t \phi n \left( \frac{\mu_{eff}}{k} \right)^{\frac{1}{n}} \left( -\frac{\partial p_D}{\partial r_D} \times \frac{\partial p}{\partial p_D} \times \frac{\partial r_D}{\partial r} \right)^{1-\frac{1}{n}} \frac{\partial p_D}{\partial t_D} \times \frac{\partial p}{\partial p_D} \times \frac{\partial t_D}{\partial t_D}, \end{aligned}$$

lo que al reducir términos resulta:

$$\frac{\partial p_D}{\partial r_D^2} \times \frac{\partial r_D}{\partial r} \times \frac{\partial r_D}{\partial r} + \frac{n}{r_w r_D} \frac{\partial p_D}{\partial r_D} \times \frac{\partial r_D}{\partial r} = C_t \phi n \left( \frac{\mu_{eff}}{k} \right)^{\frac{1}{n}} \left( -\frac{\partial p_D}{\partial r_D} \times \frac{\partial p}{\partial p_D} \times \frac{\partial r_D}{\partial r} \right)^{1-\frac{1}{n}} \frac{\partial p_D}{\partial t_D} \times \frac{\partial t_D}{\partial t_D},$$

siendo necesario determinar las siguientes derivadas:

$$\frac{\partial r_D}{\partial r}, \quad \frac{\partial p}{\partial p_D}, \quad \frac{\partial t_D}{\partial t}.$$

Para determinar estos valores se deriva la definición de cada uno de los términos adimensionales, para lo que se empezará con la caída de presión:

$$p_D = \frac{k}{\mu_{eff} r_w^{1-n}} \left( \frac{2\pi h}{qB} \right)^n (p_i - p),$$

y agrupando constantes de manera conveniente como:

$$w = \frac{k}{\mu_{eff} r_w^{1-n}} \left( \frac{2\pi h}{qB} \right)^n,$$

se tiene que:

$$p_D = w(pi - p) ,$$

y despejando a  $p$ :

$$p = pi - \frac{1}{w}p_D.$$

Así, la derivada de la presión respecto a la presión adimensional es:

$$\frac{dp}{dp_D} = -\frac{1}{w} .$$

Ahora, para la derivada del tiempo adimensional:

$$\frac{dt_D}{dt} = \frac{1}{t_{ref}} ,$$

de forma similar, la derivada del radio adimensional es:

$$\frac{dr_D}{dr} = \frac{1}{r_w} .$$

Ahora, sustituyendo las derivadas se tiene que:

$$\frac{\partial p_D}{\partial r_D^2} \times \frac{1}{r_w^2} + \frac{n}{r_w r_D} \frac{\partial p_D}{\partial r_D} \times \frac{1}{r_w} = C_t \phi n \left( \frac{\mu_{eff}}{k} \right)^{\frac{1}{n}} \left( \frac{\partial p_D}{\partial r_D} \times \frac{1}{w} \times \frac{1}{r_w} \right)^{1-\frac{1}{n}} \frac{\partial p_D}{\partial t_D} \times \frac{1}{t_{ref}} ,$$

y al reagrupar términos se llega a:

$$\frac{\partial p_D}{\partial r_D^2} + \frac{n}{r_D} \frac{\partial p_D}{\partial r_D} = \frac{r_w^{1+1/n} C_t \phi n}{w^{1-1/n}} \left( \frac{\mu_{eff}}{k} \right)^{\frac{1}{n}} \frac{1}{t_{ref}} \left( \frac{\partial p_D}{\partial r_D} \right)^{1-\frac{1}{n}} \frac{\partial p_D}{\partial t_D} ,$$

donde el  $t_{ref}$  resulta en:

$$\frac{r_w^{1+1/n} C_t \phi n}{w^{1-1/n}} \left( \frac{\mu_{eff}}{k} \right)^{\frac{1}{n}} = t_{ref}$$

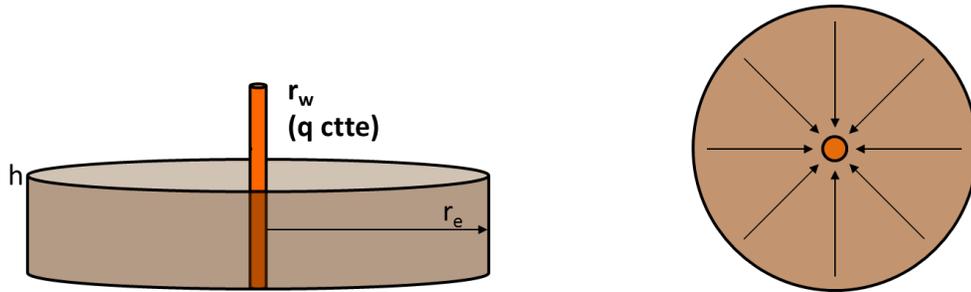
## 2.3 Uso de las soluciones para flujo radial

Un yacimiento radial se define como un sistema en el que el flujo existe a través de dos secciones concéntricas, **Figura 2.7**. De esta manera, considerando una producción a gasto constante, las variables adimensionales de interés serán:

$$r_{Dr} = \frac{r}{r_w}, \dots\dots\dots 2.32$$

$$t_{Dr} = \frac{\beta kt}{\phi \mu c_t r_w^2} \dots\dots\dots 2.33$$

$$p_{Dr} = \frac{kh}{\alpha_r q_w B \mu} (p_i - p) \dots\dots\dots 2.34$$



**Figura 2.7** Esquematización del modelo de flujo radial en un yacimiento.

Los comportamientos observados pueden existir en estado transitorio o gobernado por las fronteras. Para identificar la solución correspondiente se recurre a la definición del radio de investigación:

$$r_i = \left( \frac{kt}{948 \phi \mu C_t} \right)^{1/2}, \dots\dots\dots 2.35$$

donde, despejando a  $t$  y al evaluar  $r_i$  en  $r_e$ , se llega al valor de tiempo al que se conocen las fronteras del sistema ( $t_{pss}$ ):

$$t_{pss} = \frac{948\phi\mu C_t}{k} r_e^2 . \quad \dots\dots\dots 2.36$$

De esta manera, cuando el tiempo de interés es menor a  $t_{pss}$ , se tendrán condiciones de flujo transitorio, y se podrá utilizar la solución línea fuente para determinar el comportamiento del sistema:

$$p_{D_r}(r_D, t_D) = -\frac{1}{2} E_i \left( -\frac{r_D^2}{4t_D} \right) , \quad \dots\dots\dots 2.37$$

o en términos de las variables dimensionales:

$$p(r, t) = p_i + \frac{\alpha_r q_w B \mu}{2kh} E_i \left( -\frac{\phi \mu c_t r^2}{4\beta k t} \right) . \quad \dots\dots\dots 2.38$$

Cabe señalar que la solución línea fuente puede ser aproximada mediante la siguiente expresión cuando  $t_D/r_D^2 \geq 25$ :

$$p_{D_r}(r_D, t_D) \sim \frac{1}{2} \left[ \ln \left| \frac{t_D}{r_D^2} \right| + 0.8091 \right] , \quad \dots\dots\dots 2.39$$

que en variables dimensionales es:

$$p(r, t) \sim p_i - \frac{\alpha_r q_w B \mu}{2kh} \left[ \ln |t| + \ln \left| \frac{\beta k}{\phi \mu c_t r^2} \right| + 0.8091 \right] . \quad \dots\dots\dots 2.40$$

Los valores de la integral exponencial pueden consultarse en la **Tabla 2.4**.

**Tabla 2.4 Algunos valores de  $-Ei(-x)$  (Modificada de Lee, 1982).**

$-Ei(-x)$ ,  $0.000 < 0.209$ , intervalo de 0.001

| x    | 0         | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     |
|------|-----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 0.00 | $+\infty$ | 6.332 | 5.639 | 5.235 | 4.948 | 4.726 | 4.545 | 4.392 | 4.259 | 4.142 |
| 0.01 | 4.038     | 3.944 | 3.858 | 3.779 | 3.705 | 3.637 | 3.574 | 3.514 | 3.458 | 3.405 |
| 0.02 | 3.355     | 3.307 | 3.261 | 3.218 | 3.176 | 3.137 | 3.098 | 3.062 | 3.026 | 2.992 |
| 0.03 | 2.959     | 2.927 | 2.897 | 2.867 | 2.838 | 2.810 | 2.783 | 2.756 | 2.731 | 2.706 |
| 0.04 | 2.681     | 2.658 | 2.634 | 2.612 | 2.590 | 2.568 | 2.547 | 2.527 | 2.507 | 2.487 |
| 0.05 | 2.468     | 2.449 | 2.431 | 2.413 | 2.395 | 2.377 | 2.360 | 2.344 | 2.327 | 2.311 |
| 0.06 | 2.295     | 2.279 | 2.264 | 2.249 | 2.235 | 2.220 | 2.206 | 2.192 | 2.178 | 2.164 |
| 0.07 | 2.151     | 2.138 | 2.125 | 2.112 | 2.099 | 2.087 | 2.074 | 2.062 | 2.050 | 2.039 |
| 0.08 | 2.027     | 2.015 | 2.004 | 1.993 | 1.982 | 1.971 | 1.960 | 1.950 | 1.939 | 1.929 |
| 0.09 | 1.919     | 1.909 | 1.899 | 1.889 | 1.879 | 1.869 | 1.860 | 1.850 | 1.841 | 1.832 |
| 0.10 | 1.823     | 1.814 | 1.805 | 1.796 | 1.788 | 1.779 | 1.770 | 1.762 | 1.754 | 1.745 |
| 0.11 | 1.737     | 1.729 | 1.721 | 1.713 | 1.705 | 1.697 | 1.689 | 1.682 | 1.674 | 1.667 |
| 0.12 | 1.660     | 1.652 | 1.645 | 1.638 | 1.631 | 1.623 | 1.616 | 1.609 | 1.603 | 1.596 |
| 0.13 | 1.589     | 1.582 | 1.576 | 1.569 | 1.562 | 1.556 | 1.549 | 1.543 | 1.537 | 1.530 |
| 0.14 | 1.524     | 1.518 | 1.512 | 1.506 | 1.500 | 1.494 | 1.488 | 1.482 | 1.476 | 1.470 |
| 0.15 | 1.464     | 1.459 | 1.453 | 1.447 | 1.442 | 1.436 | 1.431 | 1.425 | 1.420 | 1.415 |
| 0.16 | 1.409     | 1.404 | 1.399 | 1.393 | 1.388 | 1.383 | 1.378 | 1.373 | 1.368 | 1.363 |
| 0.17 | 1.358     | 1.353 | 1.348 | 1.343 | 1.338 | 1.333 | 1.329 | 1.324 | 1.319 | 1.314 |
| 0.18 | 1.310     | 1.305 | 1.301 | 1.296 | 1.291 | 1.287 | 1.282 | 1.278 | 1.274 | 1.269 |
| 0.19 | 1.265     | 1.261 | 1.256 | 1.252 | 1.248 | 1.243 | 1.239 | 1.235 | 1.231 | 1.227 |
| 0.20 | 1.223     | 1.219 | 1.215 | 1.210 | 1.206 | 1.202 | 1.198 | 1.195 | 1.191 | 1.187 |

$-Ei(-x)$ ,  $0.00 < 2.09$ , intervalo de 0.01

|     |           |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
|-----|-----------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0.0 | $+\infty$ | 4.0380 | 3.3350 | 2.9590 | 2.6810 | 2.4680 | 2.2950 | 2.1510 | 2.0270 | 1.9190 |
| 0.1 | 1.8230    | 1.7370 | 1.6600 | 1.5890 | 1.5240 | 1.4640 | 1.4090 | 1.3580 | 1.3090 | 1.2650 |
| 0.2 | 1.2230    | 1.1830 | 1.1450 | 1.1100 | 1.0760 | 1.0440 | 1.0140 | 0.9850 | 0.9570 | 0.9310 |
| 0.3 | 0.9060    | 0.8820 | 0.8580 | 0.8360 | 0.8150 | 0.7940 | 0.7740 | 0.7550 | 0.7370 | 0.7190 |
| 0.4 | 0.7020    | 0.6860 | 0.6700 | 0.6550 | 0.6400 | 0.6250 | 0.6110 | 0.5980 | 0.5850 | 0.5720 |
| 0.5 | 0.5600    | 0.5480 | 0.5360 | 0.5250 | 0.5140 | 0.5030 | 0.4930 | 0.4830 | 0.4730 | 0.4640 |
| 0.6 | 0.4540    | 0.4450 | 0.4370 | 0.4280 | 0.4200 | 0.4120 | 0.4040 | 0.3960 | 0.3880 | 0.3810 |
| 0.7 | 0.3740    | 0.3670 | 0.3600 | 0.3530 | 0.3470 | 0.3400 | 0.3340 | 0.3280 | 0.3220 | 0.3160 |
| 0.8 | 0.3110    | 0.3050 | 0.3000 | 0.2950 | 0.2890 | 0.2840 | 0.2790 | 0.2740 | 0.2690 | 0.2650 |
| 0.9 | 0.2600    | 0.2560 | 0.2510 | 0.2470 | 0.2430 | 0.2390 | 0.2350 | 0.2310 | 0.2270 | 0.2230 |
| 1.0 | 0.2190    | 0.2160 | 0.2120 | 0.2090 | 0.2050 | 0.2020 | 0.1980 | 0.1950 | 0.1920 | 0.1890 |
| 1.1 | 0.1860    | 0.1830 | 0.1800 | 0.1770 | 0.1740 | 0.1720 | 0.1690 | 0.1660 | 0.1640 | 0.1610 |
| 1.2 | 0.1580    | 0.1560 | 0.1530 | 0.1510 | 0.1490 | 0.1460 | 0.1440 | 0.1420 | 0.1400 | 0.1380 |
| 1.3 | 0.1350    | 0.1330 | 0.1310 | 0.1290 | 0.1270 | 0.1250 | 0.1240 | 0.1220 | 0.1200 | 0.1180 |
| 1.4 | 0.1160    | 0.1140 | 0.1130 | 0.1110 | 0.1090 | 0.1080 | 0.1060 | 0.1050 | 0.1030 | 0.1020 |
| 1.5 | 0.1000    | 0.0985 | 0.0971 | 0.0957 | 0.0943 | 0.0929 | 0.0915 | 0.0902 | 0.0889 | 0.0876 |
| 1.6 | 0.0863    | 0.0838 | 0.0838 | 0.0826 | 0.0814 | 0.0802 | 0.0791 | 0.0780 | 0.0768 | 0.0757 |
| 1.7 | 0.0747    | 0.0725 | 0.0725 | 0.0715 | 0.0705 | 0.0695 | 0.0685 | 0.0675 | 0.0666 | 0.0656 |
| 1.8 | 0.0647    | 0.0638 | 0.0629 | 0.0620 | 0.0612 | 0.0603 | 0.0595 | 0.0586 | 0.0578 | 0.0570 |
| 1.9 | 0.0562    | 0.0554 | 0.0546 | 0.0539 | 0.0531 | 0.0524 | 0.0517 | 0.0510 | 0.0503 | 0.0496 |
| 2.0 | 0.0489    | 0.0482 | 0.0476 | 0.0469 | 0.0463 | 0.0456 | 0.0450 | 0.0444 | 0.0438 | 0.0432 |

$2.0 < x < 10.9$  en intervalos de 0.1

|    |                       |                       |                       |                       |                       |                       |                       |                       |                       |                       |
|----|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| 2  | $4.89 \times 10^{-2}$ | $4.26 \times 10^{-2}$ | $3.72 \times 10^{-2}$ | $3.25 \times 10^{-2}$ | $2.84 \times 10^{-2}$ | $2.49 \times 10^{-2}$ | $2.19 \times 10^{-2}$ | $1.92 \times 10^{-2}$ | $1.69 \times 10^{-2}$ | $1.48 \times 10^{-2}$ |
| 3  | $1.30 \times 10^{-2}$ | $1.15 \times 10^{-2}$ | $1.01 \times 10^{-2}$ | $8.94 \times 10^{-3}$ | $7.89 \times 10^{-3}$ | $6.87 \times 10^{-3}$ | $6.16 \times 10^{-3}$ | $5.45 \times 10^{-3}$ | $4.82 \times 10^{-3}$ | $4.27 \times 10^{-3}$ |
| 4  | $3.78 \times 10^{-3}$ | $3.35 \times 10^{-3}$ | $2.97 \times 10^{-3}$ | $2.64 \times 10^{-3}$ | $2.34 \times 10^{-3}$ | $2.07 \times 10^{-3}$ | $1.84 \times 10^{-3}$ | $1.64 \times 10^{-3}$ | $1.45 \times 10^{-3}$ | $1.29 \times 10^{-3}$ |
| 5  | $1.15 \times 10^{-3}$ | $1.02 \times 10^{-3}$ | $9.08 \times 10^{-4}$ | $8.09 \times 10^{-4}$ | $7.19 \times 10^{-4}$ | $6.41 \times 10^{-4}$ | $5.71 \times 10^{-4}$ | $5.09 \times 10^{-4}$ | $4.53 \times 10^{-4}$ | $4.04 \times 10^{-4}$ |
| 6  | $3.60 \times 10^{-4}$ | $3.21 \times 10^{-4}$ | $2.86 \times 10^{-4}$ | $2.55 \times 10^{-4}$ | $2.28 \times 10^{-4}$ | $2.03 \times 10^{-4}$ | $1.82 \times 10^{-4}$ | $1.62 \times 10^{-4}$ | $1.45 \times 10^{-4}$ | $1.29 \times 10^{-4}$ |
| 7  | $1.15 \times 10^{-4}$ | $1.03 \times 10^{-4}$ | $9.22 \times 10^{-5}$ | $8.24 \times 10^{-5}$ | $7.36 \times 10^{-5}$ | $6.58 \times 10^{-5}$ | $5.89 \times 10^{-5}$ | $5.26 \times 10^{-5}$ | $4.71 \times 10^{-5}$ | $4.21 \times 10^{-5}$ |
| 8  | $3.77 \times 10^{-5}$ | $3.37 \times 10^{-5}$ | $3.02 \times 10^{-5}$ | $2.70 \times 10^{-5}$ | $2.42 \times 10^{-5}$ | $2.16 \times 10^{-5}$ | $1.94 \times 10^{-5}$ | $1.73 \times 10^{-5}$ | $1.55 \times 10^{-5}$ | $1.39 \times 10^{-5}$ |
| 9  | $1.24 \times 10^{-5}$ | $1.11 \times 10^{-5}$ | $9.99 \times 10^{-6}$ | $8.95 \times 10^{-6}$ | $8.02 \times 10^{-6}$ | $7.18 \times 10^{-6}$ | $6.44 \times 10^{-6}$ | $5.77 \times 10^{-6}$ | $5.17 \times 10^{-6}$ | $4.64 \times 10^{-6}$ |
| 10 | $4.15 \times 10^{-6}$ | $3.73 \times 10^{-6}$ | $3.34 \times 10^{-6}$ | $3.00 \times 10^{-6}$ | $2.68 \times 10^{-6}$ | $2.41 \times 10^{-6}$ | $2.16 \times 10^{-6}$ | $1.94 \times 10^{-6}$ | $1.74 \times 10^{-6}$ | $1.56 \times 10^{-6}$ |

Por otro lado, cuando el tiempo es mayor a  $t_{pss}$ , deberá utilizarse una solución para flujo gobernado por las fronteras. De esta manera, para el estado estacionario se tiene:

$$p_{Dr}(r_D = 1, t_D) = \ln|r_{eD}| , \quad \dots\dots\dots 2.41$$

que en variables dimensionales es:

$$p_w(r_w, t) = p_i - \frac{\alpha_r q B \mu}{kh} \ln \left| \frac{r_e}{r_w} \right| . \quad \dots\dots\dots 2.42$$

Mientras que para flujo pseudo-estacionario se tiene que:

$$p_{Dr}(r_D = 1, t_D) = \ln|r_{eD}| - \frac{3}{4} + \frac{2t_{Dr}}{r_{eD}^2 - 1} , \quad \dots\dots\dots 2.43$$

o en variables dimensionales:

$$p_w = p_i - 141.2 \frac{qB\mu}{kh} \left[ \ln \left| \frac{r_e}{r_w} \right| - \frac{3}{4} \right] - 0.074206 \frac{qB\pi}{V_p c_t} t . \quad \dots\dots\dots 2.44$$

### 2.3.1 Factor de forma de Dietz

El factor de forma de Dietz se incluye en los modelos de flujo radial gobernados por las fronteras para extender su uso a diferentes configuraciones geométricas en los yacimientos. Para ello se establece que el volumen total del sistema se expresa como:

$$V = Ah = \pi h(r_e^2 - r_w^2) \approx \pi h r_e^2 . \quad \dots\dots\dots 2.45$$

De esta manera, al retomar la **Ec. 2.41** para flujo radial estacionario se tiene que:

$$p_{wD}(1, t_D) = \ln|r_{eD}| = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{4\pi r_e^2}{4\pi r_w^2} \right| = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1}{C_A} \frac{A}{r_w^2} \right| + 1.1543 , \quad \dots\dots\dots 2.46$$

mientras que para flujo radial pseudo-estacionario, **Ec. 2.43**:

$$p_{wD}(1, t_D) = \ln|r_{eD}| - \frac{3}{4} + \frac{2t_D}{r_{eD}^2 - 1} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1}{C_A} \frac{A}{r_w^2} \right| + 0.4043 + 2 \frac{t_D}{r_{eD}^2 - 1}, \quad \dots\dots\dots \mathbf{2.47}$$

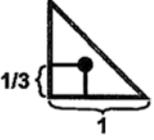
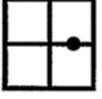
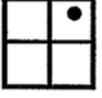
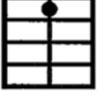
o en términos de la caída de presión:

$$\Delta p_w(r_w, t) = 141.2 \frac{qB\mu}{kh} \left[ \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1}{C_A} \frac{A}{r_w^2} \right| + 1.1543 \right], \quad \dots\dots\dots \mathbf{2.48}$$

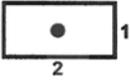
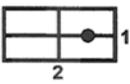
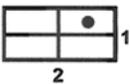
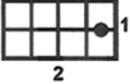
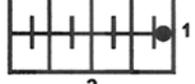
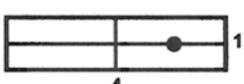
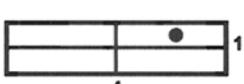
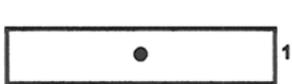
$$\Delta p_w(r, t) = 141.2 \frac{qB\mu}{kh} \left[ \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1}{C_A} \frac{A}{r_w^2} \right| + 0.4043 + 2 \frac{\beta\pi kht}{V_p\mu C_t} \right], \quad \dots\dots\dots \mathbf{2.49}$$

donde  $C_A$  es el factor de forma de Dietz.

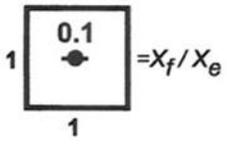
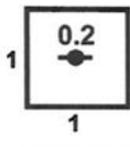
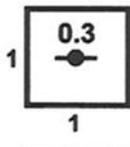
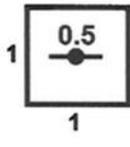
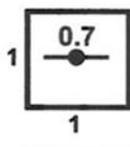
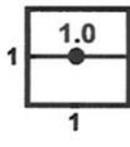
**Tabla 2. 5 Factor de forma para diferentes geometrías del yacimiento.**

| Forma del yacimiento  | $C_A$   | $t_{DA} = t_{Deia}$ | $t_{DA} = t_{Dpss}$ |
|---|---------|---------------------|---------------------|
|    | 31.62   | 0.10                | 0.1                 |
|    | 31.6    | 0.10                | 0.1                 |
|    | 27.6    | 0.09                | 0.2                 |
|    | 27.1    | 0.09                | 0.2                 |
|   | 21.9    | 0.08                | 0.4                 |
|  | 0.098   | 0.015               | 0.9                 |
|  | 30.8828 | 0.09                | 0.1                 |
|  | 12.9851 | 0.03                | 0.7                 |
|  | 4.5132  | 0.025               | 0.6                 |
|  | 3.3351  | 0.01                | 0.7                 |

**Tabla 2. 6 Factor de forma para diferentes geometrías del yacimiento**

| <u>Forma del yacimiento</u>   | <u>C<sub>A</sub></u> | <u>t<sub>DA</sub> = t<sub>Deia</sub></u> | <u>t<sub>DA</sub> = t<sub>Dpss</sub></u> |
|---|----------------------|--|--|
|    | 21.8369              | 0.025                                    | 0.3                                      |
|    | 10.8374              | 0.025                                    | 0.4                                      |
|    | 4.5141               | 0.06                                     | 1.5                                      |
|    | 2.0769               | 0.02                                     | 1.7                                      |
|    | 3.1573               | 0.005                                    | 0.4                                      |
|   | 0.5813               | 0.02                                     | 2.0                                      |
|  | 0.1109               | 0.005                                    | 3.0                                      |
|  | 5.3790               | 0.01                                     | 0.8                                      |
|  | 2.6896               | 0.01                                     | 0.8                                      |
|  | 0.2318               | 0.03                                     | 4.0                                      |
|  | 0.1155               | 0.01                                     | 4.0                                      |
|  | 2.3606               | 0.025                                    | 1.0                                      |

**Tabla 2. 7 Factor de forma para diferentes geometrías del yacimiento.**

| Forma del yacimiento  | $C_A$  | $t_{DA} = t_{Deia}$ | $t_{DA} = t_{Dpss}$ |
|---|--------|---------------------|---------------------|
| <br>$=X_f/X_e$ | 2.6541 | No está definido    | 0.175               |
|                | 2.0348 | No está definido    | 0.175               |
|                | 1.9886 | No está definido    | 0.175               |
|                | 1.6620 | No está definido    | 0.175               |
|               | 1.3127 | No está definido    | 0.175               |
|              | 0.7887 | No está definido    | 0.175               |
| <b>En yacimientos con empuje de agua</b>  |        |                     |                     |
|              | 19.1   | --                  | --                  |
|              | 25.0   | --                  | --                  |

**Ejercicio 2.6** Uso de la solución línea fuente para obtener perfiles  $p - r$ .

Un pozo de aceite produce a un gasto de 20 *STBD* en el siguiente sistema:

$$\mu = 0.72 \text{ cp}, \quad k = 0.1 \text{ md}, \quad c_t = 1.5 \times 10^{-5} \text{ psi}^{-1} \quad p_i = 3000 \text{ psia}, \quad r_w = 1 \text{ ft}, \quad B_o = 1.475 \frac{\text{rbl}}{\text{STB}}$$

$$\phi = 0.23, \quad r_e = 3000 \text{ ft}, \quad h = 150 \text{ ft} .$$

Calcule la presión del yacimiento a 1, 10 y 100 ft después de 3 y 300 horas de producción y grafique sus resultados para conformar los perfiles presión-radio.

**Solución:**

Para este caso, la presión se obtiene con ayuda de la **Ec.2.50**:

$$p(r, t) = p_i - 141.2 \frac{qB\mu}{kh} p_D(r_D, t_D) . \quad \dots\dots\dots 2.50$$

El término  $p_D(r_D, t_D)$  de la **Ec. 2.50** representa el comportamiento fluyente del sistema, y depende del estado de flujo que se presenta en el yacimiento. Por ende, para definir lo anterior, debe determinarse el valor de  $t_{pss}$  como:

$$t_{pss} = \frac{r_e^2}{4\beta\eta} , \quad \dots\dots\dots 2.51$$

recordando que el coeficiente de difusividad hidráulica se define como:

$$\eta = \frac{k}{\phi\mu c_t} , \quad \dots\dots\dots 2.52$$

y el cálculo del tiempo característico resulta:

$$t_{pss} = \frac{r_e^2}{4\beta\eta} = \frac{3000^2}{4 \times 2.637 \times 10^{-4} \times \left(\frac{0.1}{0.23 \times 0.72 \times 1.5 \times 10^{-5}}\right)} = 211945.39 \text{ h} .$$

Como el valor resultante es mucho mayor al tiempo de producción, el modelo a utilizar será uno en estado transitorio. Dado que se hará uso de la solución línea fuente, debe establecerse si se usará la función integral exponencial o la aproximación logarítmica para su cálculo. Para ello se evalúa la condición definida por

$$\frac{t_D}{r_D^2} = \frac{\beta kt}{\phi\mu C_t r^2} \geq 25 , \quad \dots\dots\dots \mathbf{2.53}$$

donde  $t_D$  y  $r_D$  hacen alusión al tiempo y radio adimensionales. Cuando se cumple la **Ec. 2.53** se puede utilizar la aproximación logarítmica, en caso contrario se usará la función integral exponencial. De esta manera, evaluando se tiene:

$$\frac{t_D}{r_D^2} = \frac{2.637 \times 10^{-4} \times 0.1 \times t}{0.23 \times 0.72 \times 1.5 \times 10^{-5} \times r^2} = 10.6159 \times \frac{t}{r^2} .$$

**Cálculos a 1 ft de distancia del pozo**

Con un radio de 1 ft y 3 horas de producción se tiene:

$$\frac{t_D}{r_D^2} = 31.8477 \geq \mathbf{25} ,$$

por lo que se puede hacer uso de la aproximación logarítmica, **Ec.2.39**, como:

$$p_{wf}(r = 1 \text{ ft}, t = 3 \text{ h}) = 3000 - 70.6 \times \frac{20 \times 1.475 \times 0.72}{0.1 \times 150} \times \left[ \ln \left| \frac{31.8477}{1^2} \right| + 0.8091 \right] ,$$

$$p_{wf}(r = \mathbf{1 \text{ ft}}, t = \mathbf{3 \text{ h}}) = \mathbf{2573.1232 \text{ psia}} ,$$

Mientras que para 1 ft y 300 horas de producción la condición resulta

$$\frac{t_D}{r_D^2} = 3184.77 \geq 25 ,$$

y la presión de fondo puede evaluarse como:

$$p_{wf}(r = 1 \text{ ft}, t = 300 \text{ h}) = 3000 - 99.96 \times \left[ \ln \left| \frac{3184.77}{1^2} \right| + 0.8091 \right] ,$$

$$p_{wf}(r = 1 \text{ ft}, t = 300 \text{ h}) = 2112.53 \text{ psia} .$$

### **Cálculos a 10 ft de distancia del pozo**

Con un radio de 10 ft y 3 horas de producción:

$$\frac{t_D}{r_D^2} = \frac{31.8477}{10^2} = 0.3184 < 25 ,$$

y la presión de fondo es

$$p(r = 10 \text{ ft}, t = 3 \text{ h}) = 3000 - 99.96 \times [-E_i(-0.7858)] ,$$

para evaluar la integral exponencial, se utiliza la **Tabla 2.4**, en donde debe identificarse la sección de interés y el valor correspondiente (con los decimales considerados como se muestra en la **Figura 2.8**). De esta manera, el valor es:

$$p_D(10, 31.84) = 0.3220 ,$$

y el valor

$$p(r = 10 \text{ ft}, t = 3 \text{ h}) = 2967.8128 \text{ psia} .$$

| -Ei(-x), 0.00 < 2.09, intervalo de 0.01 |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
|---|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| x                                       | 0      | 1      | 2      | 3      | 4      | 5      | 6      | 7      | 8      |
| 0.0                                     | +∞     | 4.0380 | 3.3350 | 2.9590 | 2.6810 | 2.4680 | 2.2950 | 2.1510 | 2.0270 |
| 0.1                                     | 1.8230 | 1.7370 | 1.6600 | 1.5890 | 1.5240 | 1.4640 | 1.4090 | 1.3580 | 1.3090 |
| 0.2                                     | 1.2230 | 1.1830 | 1.1450 | 1.1100 | 1.0760 | 1.0440 | 1.0140 | 0.9850 | 0.9570 |
| 0.3                                     | 0.9060 | 0.8820 | 0.8580 | 0.8360 | 0.8150 | 0.7940 | 0.7740 | 0.7550 | 0.7370 |
| 0.4                                     | 0.7020 | 0.6860 | 0.6700 | 0.6550 | 0.6400 | 0.6250 | 0.6110 | 0.5980 | 0.5850 |
| 0.5                                     | 0.5600 | 0.5480 | 0.5360 | 0.5250 | 0.5140 | 0.5030 | 0.4930 | 0.4830 | 0.4730 |
| 0.6                                     | 0.4540 | 0.4450 | 0.4370 | 0.4280 | 0.4200 | 0.4120 | 0.4040 | 0.3960 | 0.3880 |
| 0.7                                     | 0.3740 | 0.3670 | 0.3600 | 0.3530 | 0.3470 | 0.3400 | 0.3340 | 0.3280 | 0.3220 |

**Figura 2.8** Modo de empleo de las tablas para determinar el valor de la integral exponencial cuando  $x = 0.78$ . Dependiendo del intervalo en la tabla, la primera parte del argumento se busca en la columna de  $x$ , y una vez definido el renglón de interés, los dígitos restantes se presentan en las columnas aledañas.

A su vez, para 10 ft y 300 horas de producción se obtiene que

$$\frac{t_D}{r_D^2} = \frac{3184.77}{10^2} = 31.8477 > 25 ,$$

y se hará uso la aproximación logarítmica:

$$p(r = 10 \text{ ft}, t = 300 \text{ h}) = 3000 - 99.96 \times \left[ \ln \left| \frac{31.8477}{1^2} \right| + 0.8091 \right] ,$$

$$p(r = 10 \text{ ft}, t = 300 \text{ h}) = 2573.164 \text{ psia} .$$

### Cálculos a 100 ft de distancia del pozo

Finalmente, para el último radio de 100 ft, a 3 horas de producción se obtiene:

$$\frac{t_D}{r_D^2} = \frac{31.8477}{100^2} = 0.00318477 \ll 25 ,$$

con lo que el resultado se evalúa a través de la función integral exponencial:

$$p_D(r_D = 100, t_D = 31.8477) = -\frac{1}{2} E_i \left( -\frac{1}{4 \times 0.00318478} \right) = -\frac{1}{2} E_i(-78.49) ,$$

en este caso, dado que la **Tabla 2.4** no contempla las magnitudes obtenidas por el argumento, se propone utilizar los polinomios de Abramowitz y Stegun (1972) para este valor. La **Tabla 2.8** muestra los resultados de las evaluaciones. Como se observa, conforme el argumento es mayor, la integral exponencial toma valores más pequeños. Para fines prácticos, puede suponerse que en rangos mayores a los que se consideran en la **Tabla 2.4**, los resultados son tan pequeños que resultan despreciables.

**Tabla 2.8** Resultados de los polinomios de Abramowitz y Stegun para  $-E_i(-x)$ .

| X       | $-E_i(-X)$ | X       | $-E_i(-X)$ | X | $-E_i(-X)$ | X  | $-E_i(-X)$ |
|---------|------------|---------|------------|---|------------|----|------------|
| 1.0E-02 | 4.057423   | 1.0E-01 | 1.84241    | 1 | 0.21938395 | 10 | 4.157E-06  |
| 2.0E-02 | 3.374201   | 2.0E-01 | 1.24214    | 2 | 0.04890051 | 20 | 9.8355E-11 |
| 3.0E-02 | 2.978612   | 3.0E-01 | 0.92517    | 3 | 0.01304838 | 30 | 3.0216E-15 |
| 4.0E-02 | 2.700757   | 4.0E-01 | 0.72187    | 4 | 0.00377935 | 40 | 1.04E-19   |
| 5.0E-02 | 2.487392   | 5.0E-01 | 0.57926    | 5 | 0.0011483  | 50 | 3.7833E-24 |
| 6.0E-02 | 2.314800   | 6.0E-01 | 0.47387    | 6 | 0.00036008 | 60 | 1.4359E-28 |
| 7.0E-02 | 2.170332   | 7.0E-01 | 0.39326    | 7 | 0.00011548 | 70 | 5.6003E-33 |
| 8.0E-02 | 2.046434   | 8.0E-01 | 0.33009    | 8 | 3.7666E-05 | 80 | 2.2285E-37 |
| 9.0E-02 | 1.938238   | 9.0E-01 | 0.27967    | 9 | 1.2447E-05 | 90 | 9.0055E-42 |

De esta manera, el valor de la presión se toma como el inicial:

$$p(r = 100 \text{ ft}, t = 3h) = 3000 \text{ psia} .$$

Esto puede ser confirmado al evaluar el radio de investigación, **Ec. 2.35**:

$$r_i = \left( \frac{0.1 \times 3}{948 \times 0.23 \times 0.72 \times 1.5 \times 10^{-5}} \right)^{1/2} = 11.28 \text{ ft} ,$$

que muestra que la onda de presión aún no alcanza el punto deseado, corroborando la aproximación realizada.

Por otro lado, a 300 horas de producción se llega a

$$\frac{t_D}{r_D^2} = \frac{3184.77}{100^2} = 0.318477 \ll 25 ,$$

y al usar la función integral exponencial y por ende la **Tabla 2.4** se tiene:

$$p_D(r_D = 100, t_D = 3184.77) = -\frac{1}{2} E_i \left( -\frac{1}{4 \times 0.318478} \right) = -\frac{1}{2} E_i(-0.7849) ,$$

$$p_D(r_D = 100, t_D = 3184.77) = 0.322 ,$$

que en términos de la presión dimensional se obtiene:

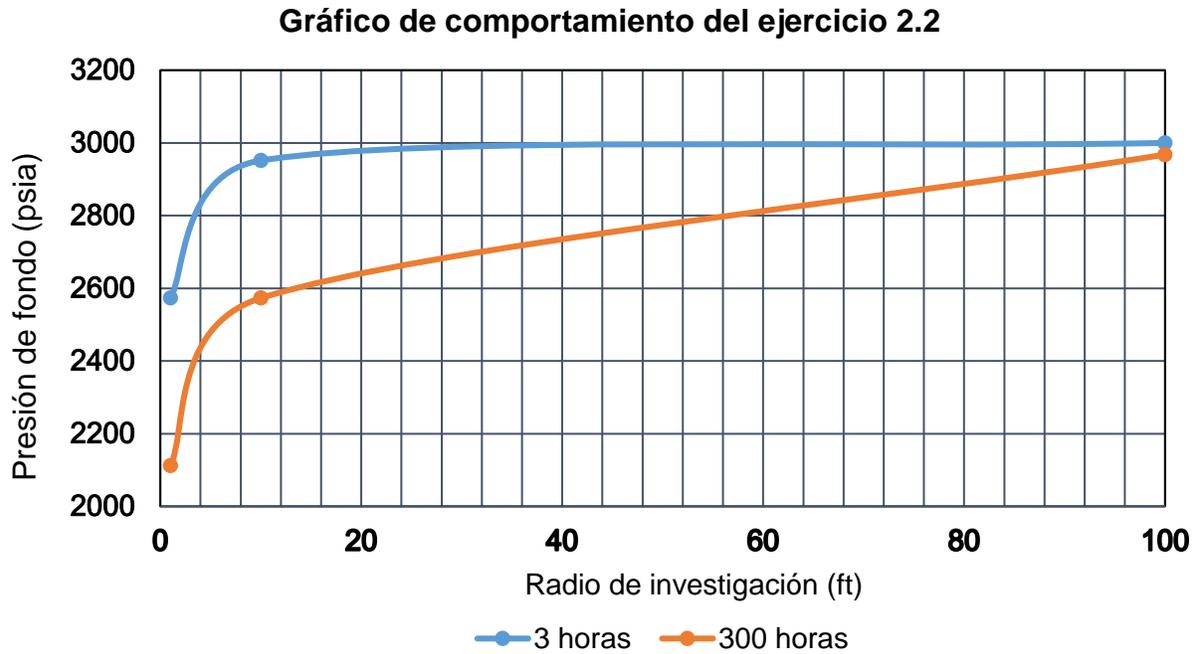
$$p_{wf}(r = 100 \text{ ft}, t = 300 \text{ h}) = 2967.813 \text{ psia.}$$

Para generar el gráfico de interés se recopilan los datos en la **Tabla 2.9**

**Tabla 2.9 Resultados obtenidos del Ejercicio 2.6.**

| <i>r</i> , ft | <i>p<sub>wf</sub></i> , psia |                  |
|---------------|------------------------------|------------------|
|               | <i>t</i> = 3 h               | <i>t</i> = 300 h |
| 1             | 2573.120                     | 2112.530         |
| 10            | 2967.813                     | 2573.120         |
| 100           | 3000.000                     | 2967.813         |

Con dichos valores se obtiene el gráfico de interés (**Figura 2.9**) para el ejercicio:



**Figura 2.9 Gráfico de interés para el Ejercicio 2.6**

Analizando los perfiles se observa que conforme aumenta el tiempo, el frente de presión avanza sobre el yacimiento, afectando una mayor sección del sistema.

**Ejercicio 2.7** Uso de la solución línea fuente para obtener perfiles  $p - t$ .

Un pozo de 1ft de radio está sometido a un gasto de 500 STBD, cuyas propiedades de pozo y yacimiento son las siguientes:

$$\phi = 0.1 [\text{Fracc.}], \quad k = 200 \text{ md}, \quad r_e = 1320 \text{ ft}, \quad S_o = 0.75,$$

$$p_i = 3200 \text{ psia}, \quad B_o = 1.333 \frac{\text{rbbl}}{\text{stb}}, \quad h = 230 \text{ ft}, \quad \mu = 5 \text{ cp},$$

$$C_o = 9 \times 10^{-6} \text{ psi}^{-1}, \quad C_w = 4 \times 10^{-6} \text{ psi}^{-1}, \quad C_f = 3.3 \times 10^{-6} \text{ psi}^{-1}.$$

el modelo de flujo es radial, determine el comportamiento, de 1 a 100 horas, de la caída de presión de fondo ( $\Delta p_{wf}$ ) contra el tiempo.

**Solución:**

Para este caso, se usarán las variables adimensionales para flujo radial, definidas en las **Ecs. 2.32 a 2.34**; así como la **Ec.2.50**

$$p(r, t) = p_i - 141.2 \frac{qB\mu}{kh} p_D(r_D, t_D) ,$$

en donde evaluando los valores constantes la expresión queda:

$$p(1, t) = 3200 - 106.943 p_D(r_D, t_D) ,$$

es necesario determinar si el pozo que se analiza alcanza a conocer las fronteras del sistema por ende debe determinarse el valor de  $t_{pss}$  (**Ec. 2.50**):

$$t_{pss} = \frac{r_e^2}{4\beta\eta} = \frac{1320^2}{4 \times 2.637 \times 10^{-4} \times \left( \frac{200}{0.1 \times 5 \times 1.105 \times 10^{-5}} \right)} = 45.633 \text{ h} .$$

en donde el cálculo de  $c_t$  se obtiene de la siguiente forma:

$$C_t = C_w S_w + C_o S_o + C_f ,$$

$$C_t = 4 \times 10^{-6} \times 0.25 + 9 \times 10^{-6} \times 0.75 + 3.3 \times 10^{-6} = 1.105 \times 10^{-5} ,$$

Retomando, el valor resultante entra dentro del intervalo de interés por ello hasta las 45.633 h se hará uso de la solución línea fuente, pero debe establecerse si se usará la función integral exponencial o la aproximación logarítmica para su cálculo. Para ello se evalúa la condición definida por

$$\frac{t_D}{r_D^2} = \frac{\beta kt}{\phi \mu C_t r^2} \geq 25 , \quad \dots\dots\dots 2.54$$

donde  $t_D$  y  $r_D$  hacen alusión al tiempo y radio adimensionales. Cuando se cumple la **Ec. 2.53** se puede utilizar la aproximación logarítmica, en caso contrario se usará la función integral exponencial. De esta manera, evaluando se tiene que:

$$\frac{t_D}{r_D^2} = \frac{9545.7013t}{1^2} = 25 ,$$

y el tiempo, al cual el argumento se cumple:

$$t = \frac{25}{9545.7013} = 2.62 \times 10^{-3} h .$$

Se determina que el tiempo obtenido permite generalizar la solución del ejercicio, la aproximación logarítmica (**Ec.2.36**). Sustituyendo **2.36** en **2.50**, se obtiene:

$$p_{wf} = 3200 - 106.943 \times \left[ \frac{1}{2} \ln |9545.7013 \times t| + 0.4045 \right] .$$

Una vez que se alcanza la frontera, el sistema entra en un estado de flujo pseudo-estacionario por ello la necesidad de aplicar la **Ec.2.43**:

$$p_{D_r}(r_D = 1, t_D) = \ln |r_{eD}| - \frac{3}{4} + \frac{2t_{Dr}}{r_{eD}^2 - 1} ,$$

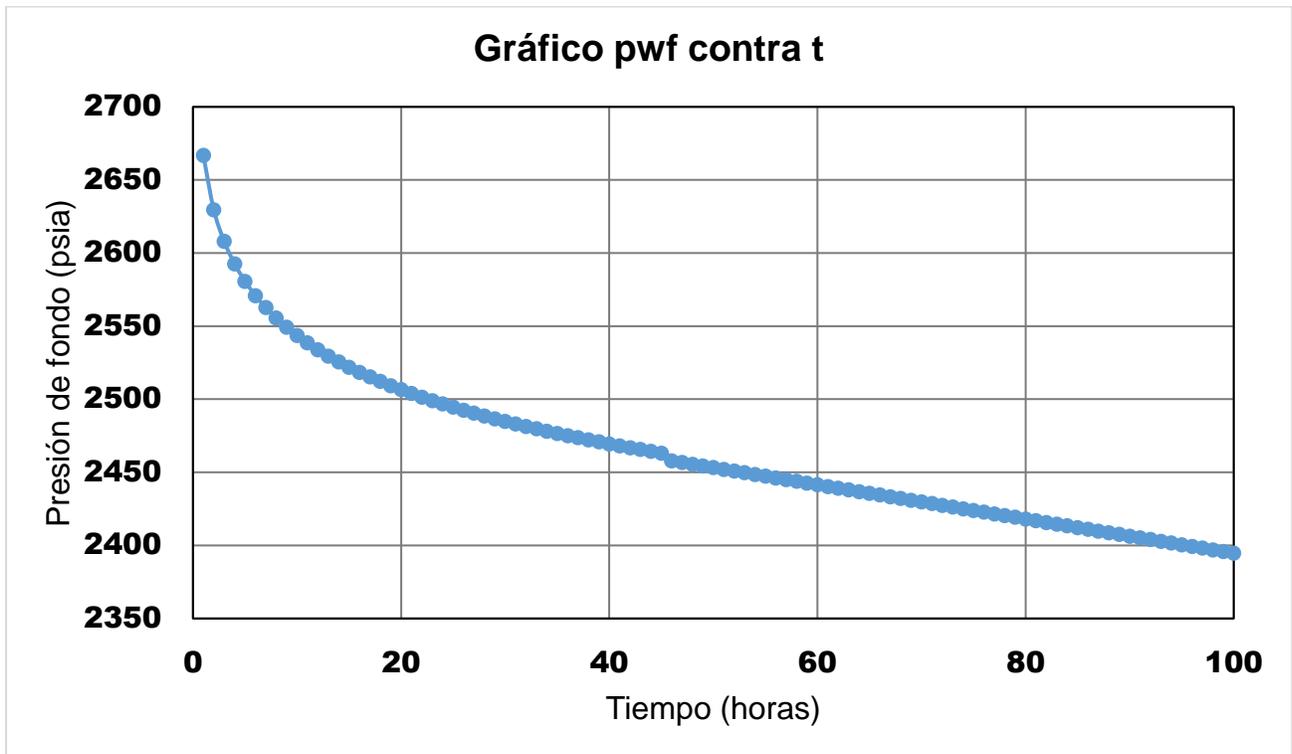
a la cual sustituyendo valores constantes se obtendrá la expresión siguiente:

$$p_{D_r}(r_D = 1, t_D) = 6.435 + \frac{2 \times 9545.7013t}{1742399}.$$

Sustituyendo **2.43** en **2.50**, obteniendo una expresión para el intervalo de 45.633 h en adelante, de presión dimensional:

$$p_{wf} = 3200 - 106.943 \times \left[ 6.435 + \frac{2 \times 9545.7013t}{1742399} \right].$$

Por tanto, el gráfico de 1 a 100 horas de producción de la presión contra el tiempo se observa en la **Figura 2.10**.



**Figura 2.10.** Gráfico de comportamiento del *Ejercicio 2.7*, presión de fondo vs tiempo.

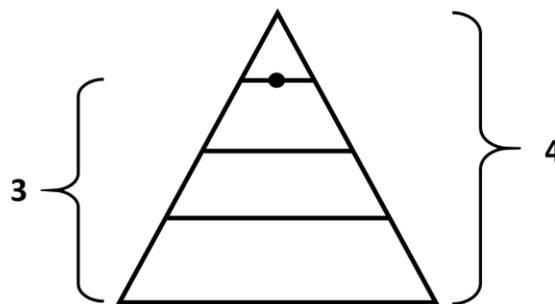
**Ejercicio 2.8 Uso de los factores de forma de Dietz.**

Estimar el tiempo de duración del régimen transitorio tardío en un yacimiento del que se conoce la siguiente información:

$$\phi = 0.23 \text{ [Fracc.]}, k = 0.1 \text{ md}, c_t = 15 \times 10^{-6}, A = 20 \text{ Acres} \times \frac{43560 \text{ ft}}{1 \text{ Acre}} = 871200 \text{ ft},$$

$$p_i = 3000 \text{ psia}, B = 1.475 \frac{\text{rbbl}}{\text{stb}}, h = 150 \text{ ft}, \mu = 0.72 \text{ cp}, r_w = 0.5 \text{ ft}.$$

El pozo produce a gasto constante de 100 STBD en la siguiente configuración (**Figura 2.11**).



**Figura 2.11 Configuración de pozo para el Ejercicio 2.8**

**Solución:**

De los datos del ejercicio se observa que el yacimiento no exhibe un comportamiento radial por ello la **Ec.2.35**, requerirá de una modificación, para volverla más general, aunado a los datos para la configuración obtenida de la **Tabla 2. 5**, quedando de la siguiente forma:

$$t_{DA} = \frac{\beta kt}{\phi \mu c_t A}, \dots\dots\dots 2.55$$

con dicho parámetro se obtiene su valor numérico:

$$t_{DA} = \frac{2.637 \times 10^{-4} \times 0.1 \times t}{0.23 \times 0.72 \times 1.5 \times 10^{-5} \times 871200} = 1.2185 \times 10^{-5}t,$$

con los datos de la **Tabla 2. 5**, se buscan los valores de tiempo real de la duración del período de flujo gobernado por las fronteras y el período de flujo infinito, obteniendo los siguientes valores:

$$t_{DEIA} = 1.2185 \times 10^{-5}t = 0.015,$$

$$t = \frac{0.015}{1.2185 \times 10^{-5}} = 1231 \text{ h},$$

$$t_{DPSS} = 1.2185 \times 10^{-5}t = 0.9,$$

$$t = \frac{0.9}{1.2185 \times 10^{-5}} = 73861.305 \text{ h},$$

por tanto, el tiempo de duración del régimen transitorio tardío se obtiene de:

$$\mathbf{t_{ET} = t_{pss} - t_{EIA} = 72630.305h}$$

## 2.4 Uso del principio de superposición en espacio y tiempo

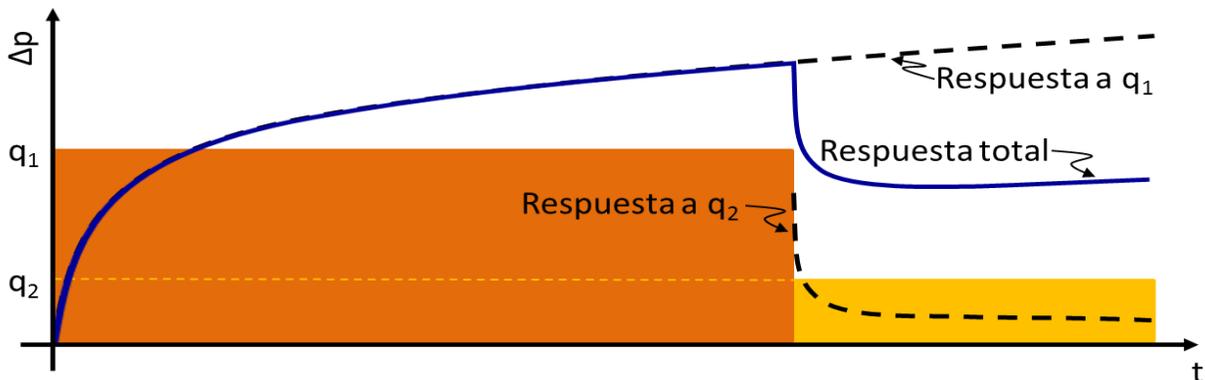
En general, el principio de superposición establece que si una ecuación diferencial tiene  $n$  soluciones independientes, una combinación lineal de ellas también es una solución. Por lo que, cuando las condiciones de frontera varían con el tiempo debido a gastos múltiples o diversos valores de presión en el pozo (**Figura 2.12**), o si se tiene presencia de diferentes pozos (**Figura 2.13**), el principio de superposición puede ser usado para representar estos escenarios al combinar diversas soluciones con condiciones de frontera constantes.

De acuerdo con lo anterior, para los casos de producción a gasto constante, cuando se considera flujo radial y la superposición ocurre únicamente en el tiempo, se tiene que:

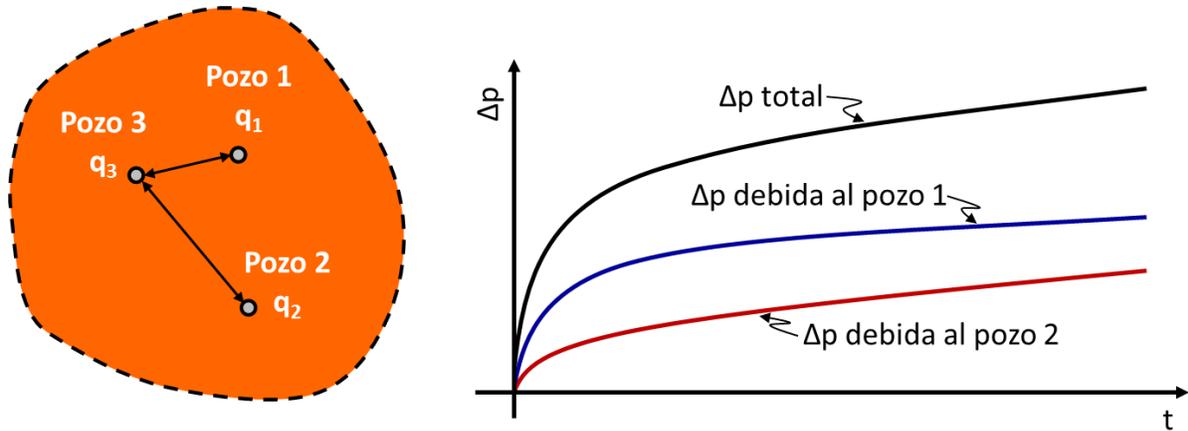
$$\Delta p(r_w, t) = \frac{141.2B\mu}{kh} \sum_{j=1}^N (q_j - q_{j-1}) p_D(r_D, [t - t_{j-1}]_D) , \quad \dots\dots\dots 2.56$$

mientras que, si el problema contempla la interferencia de diferentes pozos en el espacio, la expresión resultante es:

$$\Delta p = \Delta p(t, r) = \frac{141.2B\mu}{kh} \sum_{k=1}^M q_k p_D(r_{D_k}, t_D) . \quad \dots\dots\dots 2.57$$



**Figura 2.12** Esquematización de la superposición de flujo para un pozo que produce a dos gastos diferentes, y el efecto sobre su presión (*Gallardo,2018*).



**Figura 2.13** Esquematización de la superposición de flujo para un sistema con dos pozos productores y uno observador ( $q_3 = 0$ ), y el efecto sobre la presión del pozo cerrado (Gallardo,2018).

En general, si los cambios ocurren en  $r$  y  $t$ , lo que ocurre cuando cada uno de los pozos posee un esquema de producción distinto, puede usarse la siguiente forma del principio de superposición:

$$\Delta p(r_w, t) = \frac{141.2B\mu}{kh} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^M (q_{j,k} - q_{j-1,k}) p_D(r_{Dk}, [t - t_{j-1,k}]_D) . \quad \dots\dots\dots 2.58$$

Mientras que, para los casos de producción a presión constante, cuando se considera flujo radial y la superposición ocurre únicamente en el tiempo, se tiene que:

$$q(t_D) = \frac{kh}{141.2B\mu} \sum_{j=1}^N (p_{wf_{j-1}} - p_{wf_j}) q_D([t - t_{j-1}]_D) , \quad \dots\dots\dots 2.59$$

mientras que, si el problema contempla la interferencia de diferentes pozos en el espacio, la expresión resultante es:

$$q(t_D) = \frac{kh}{141.2B\mu} \sum_{k=1}^M (p_{wf_{j-1}} - p_{wf_j}) q_D(t_D) . \quad \dots\dots\dots 2.60$$

## Ejercicio 2.9 Principio de superposición en espacio a gasto constante

En un yacimiento infinito hay cuatro pozos, cuyos gastos de producción son constantes, dichos gastos son:

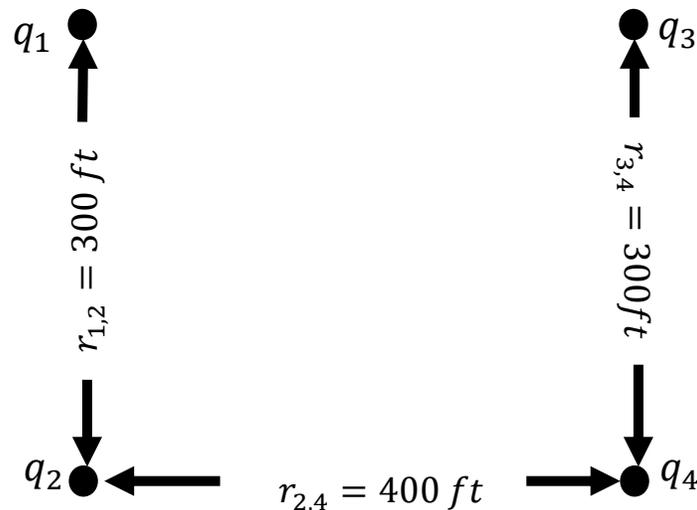
$$q_1 = 3000 \text{ STBD}, q_2 = 0 \text{ STBD}, q_3 = 700 \text{ STBD}, q_4 = 4100 \text{ STBD},$$

y cuyas propiedades de yacimiento y de fluido son las siguientes:

$$\phi = 0.09 [\text{Fracc.}], k = 5 \text{ md}, c_t = 16 \times 10^{-6} \text{ psi}^{-1},$$

$$p_i = 2200 \text{ psia}, B_o = 1.6 \frac{\text{rbbl}}{\text{stb}}, h = 230 \text{ ft}, \mu = 1.2 \text{ cp}.$$

Considerando que el radio de los 4 pozos es  $r_w = 1 \text{ ft}$ ; estime la caída de presión observada en el pozo 2 después que el sistema ha sido producido durante 28 horas a gasto constante. La configuración de los pozos en el yacimiento se presenta en la **Figura 2.14**



**Figura 2.14** Configuración de pozos para el Ejercicio 2.9

### Solución:

Para este caso, se usarán las variables adimensionales para flujo radial, definidas en las **Ecs. 2.32 a 2.34**, así como la forma del principio de superposición dada por la **Ec. 2.57**:

$$\Delta p = \Delta p(t, r) = \frac{141.2B\mu}{kh} \sum_{k=1}^M q_k p_D(r_{D_k}, t_D) ,$$

Que, al evaluar los términos constantes de la expresión, se tiene

$$\Delta p = \Delta p(t, r) = 0.2357 \sum_{k=1}^M q_k p_D \left( r_{D_k}, t_D = \frac{0.0002637(5)(28)}{(0.09)(1.2)(16 \times 10^{-6})(1)} = 21364.5833 \right) .$$

Dado que el yacimiento se supone siempre infinito, se utilizará la solución línea fuente para los cálculos posteriores.

En esta situación, dado que el pozo 2 es afectado por su producción y por la de los otros 3 pozos, después de 28 horas de flujo se tiene:

$$\Delta p_2(r_2, 28h) = \Delta p_{21}(r_2, 28h) + \Delta p_{22}(r_2, 28h) + \Delta p_{23}(r_2, 28h) + \Delta p_{24}(r_2, 28h) ,$$

y cómo a este tiempo todos los pozos sólo han tenido un gasto, la superposición discreta resulta en:

$$\begin{aligned} \Delta p_1(r_2 = r_{w_2}, t = 28h) &= 0.2357 \\ &\times [q_1 \times p_D(r_{D_{21}}, 21364.5833) + q_2 \times p_D(r_{D_{22}}, 21364.5833) \\ &+ q_3 \times p_D(r_{D_{23}}, 21364.5833) + q_4 \times p_D(r_{D_{24}}, 21364.5833)] , \end{aligned}$$

donde  $r_{D_{22}}$  es la distancia adimensional en el fondo del pozo 2,  $r_{D_{12}}$  corresponde a la del pozo 2 al pozo 1,  $r_{D_{23}}$  corresponde a la del pozo 2 al pozo 3 y  $r_{D_{24}}$  corresponde a la del pozo 2 al pozo 4. Para evaluar a  $p_D$  en cada uno de los argumentos indicados, dado

que se utilizará la solución línea fuente, se revisará la condición dada por  $t_D/r_D^2$  en cada radio y tiempo señalados. De esta manera, para el primer término se tiene que:

$$\frac{t_D}{r_D^2} = \frac{21364.5833}{\left(\frac{300}{1}\right)^2} = 0.23738 \ll 25 ,$$

y como el valor es menor a 25, se utilizará la función integral exponencial:

$$p_D(300,21364.5833) = -\frac{1}{2} Ei\left(-\frac{1}{4} \frac{1}{0.23}\right) = -\frac{1}{2} Ei(-1.086).$$

Para evaluar la integral exponencial, se utiliza la **Tabla 2.4**, en donde debe identificarse la sección de interés y el valor correspondiente con el número de decimales considerados como se muestra en la

| -Ei(-x), 0.00 < 2.09, intervalo de 0.01 |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
|---|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| x                                       | 0      | 1      | 2      | 3      | 4      | 5      | 6      | 7      | 8      | 9      |
| 0.6                                     | 0.4540 | 0.4450 | 0.4370 | 0.4280 | 0.4200 | 0.4120 | 0.4040 | 0.3960 | 0.3880 | 0.3810 |
| 0.7                                     | 0.3740 | 0.3670 | 0.3600 | 0.3530 | 0.3470 | 0.3400 | 0.3340 | 0.3280 | 0.3220 | 0.3160 |
| 0.8                                     | 0.3110 | 0.3050 | 0.3000 | 0.2950 | 0.2890 | 0.2840 | 0.2790 | 0.2740 | 0.2690 | 0.2650 |
| 0.9                                     | 0.2600 | 0.2560 | 0.2510 | 0.2470 | 0.2430 | 0.2390 | 0.2350 | 0.2310 | 0.2270 | 0.2230 |
| 1.0                                     | 0.2190 | 0.2160 | 0.2120 | 0.2090 | 0.2050 | 0.2020 | 0.1980 | 0.1950 | 0.1920 | 0.1890 |
| 1.1                                     | 0.1860 | 0.1830 | 0.1800 | 0.1770 | 0.1740 | 0.1720 | 0.1690 | 0.1660 | 0.1640 | 0.1610 |

**Figura 2.15** Modo de empleo de las tablas para determinar el valor de la integral exponencial cuando  $x = 1.1$ . Dependiendo del intervalo en la tabla, la primera parte del argumento se busca en la columna de  $x$ , y una vez definido el renglón de interés, los dígitos restantes se presentan en las columnas aledañas.

De esta manera, el valor resultante es:

$$p_D(300,21364.5833) = \frac{1}{2}(0.2160) = 0.108.$$

El segundo término,  $p_D(r_{D_{22}}, 21364.5833)$ , resulta innecesario calcularlo, ya que al multiplicarlo por un gasto 0, se obtendrá el mismo valor 0. Por tanto, para el tercer término,  $p_D(r_{D_{23}}, 21364.5833)$ , la relación queda:

$$\frac{t_D}{r_D^2} = \frac{21364.5833}{\left(\frac{500}{1}\right)^2} = 0.08545 \ll 25,$$

el valor de  $r_{23}$ , se obtuvo de aplicar el Teorema de Pitágoras, de la siguiente forma:

$$r_{23} = \sqrt{r_{24}^2 + r_{34}^2} = \sqrt{400^2 + 300^2} = 500 \text{ ft}.$$

Retomando el problema, el valor de la relación resultó inferior a 25, se utilizará la función integral exponencial:

$$p_D(500, 21364.5833) = -\frac{1}{2} Ei\left(-\frac{1}{4} \frac{1}{0.08545}\right) = -\frac{1}{2} Ei(-2.925),$$

Para evaluar la integral exponencial, se utiliza la **Tabla 2.4**, en donde debe identificarse la sección de interés y el valor correspondiente con el número de decimales considerados como se muestra en la

De esta manera, el valor resultante es:

$$p_D(500, 21364.5833) = \frac{1}{2} (1.48 \times 10^{-2}) = 7.4 \times 10^{-3}.$$

Finalmente se realiza el análisis para el cuarto término de la expresión,  $p_D(r_{D_{43}}^2, t_D)$ , obteniendo:

$$\frac{t_D}{r_D^2} = \frac{21364.5833}{\left(\frac{400}{1}\right)^2} = 0.1335 \ll 25,$$

Como el valor es inferior a 25, se hará uso de la función integral exponencial:

$$p_D(400, 21364.5833) = -\frac{1}{2} Ei\left(-\frac{1}{4} \frac{1}{0.1335}\right) = -\frac{1}{2} Ei(-1.8722)$$

para evaluar la integral exponencial, se utiliza la **Tabla 2.4**, en donde debe identificarse la sección de interés y el valor correspondiente con el número de decimales considerados como se muestra en la **Figura 2.15** De esta manera, el valor resultante es:

$$p_D(400,21364.5833) = \frac{1}{2}(0.0586) = 0.0293.$$

De esta manera, al retomar el planteamiento inicial, se llega a:

$$\begin{aligned} \Delta p_2 &= 0.2357 \times [(3000) \times (0.108) + (700) \times (7.4 \times 10^{-3}) + (4100) \times (0.0293)] \\ &= \mathbf{105.90 \text{ psia}} \end{aligned}$$

### **Ejercicio 2.10 Principio de superposición en espacio a gasto constante.**

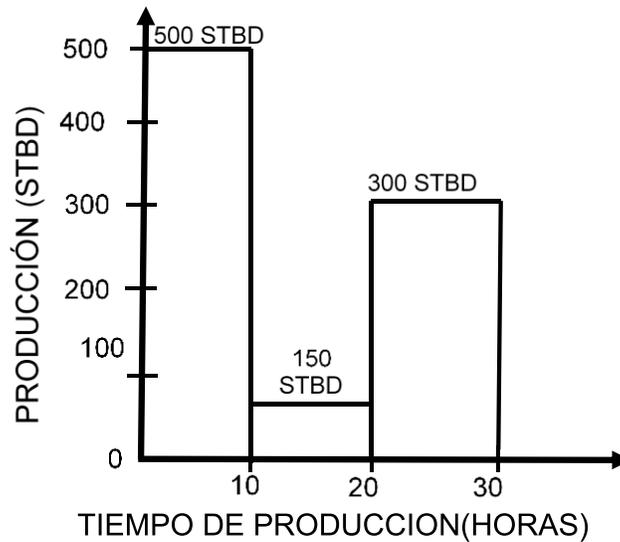
Un yacimiento infinito cuenta con un pozo de 0.25ft de radio cuyas propiedades de pozo y yacimiento son las siguientes:

$$\phi = 0.1 [\text{Fracc.}], \quad k = 200 \text{ md}, \quad r_e = 1320 \text{ ft}, \quad S_o = 0.75,$$

$$p_i = 3200 \text{ psia}, \quad B_o = 1.333 \frac{\text{rbbl}}{\text{stb}}, \quad h = 230 \text{ ft}, \quad \mu = 5 \text{ cp},$$

$$C_o = 9 \times 10^{-6} \text{ psi}^{-1}, \quad C_w = 4 \times 10^{-6} \text{ psi}^{-1}, \quad C_f = 3.3 \times 10^{-6} \text{ psi}^{-1}.$$

Su histórico de producción (**Figura 2.16**) indica que ha sido producido a un gasto constante de 500 *STBD* de cero a diez horas, a 150 *STBD* de diez a 20 horas, y a 300 *STBD* de 20 a 30 horas. Grafique en escala normal y semi-logarítmica los valores de  $p_{wf}$  y  $1/p_{wf}$  contra el tiempo de 1 a 30 horas.



**Figura 2.16.** Historia de producción del pozo que se analiza en el *Ejercicio 2.10*.

**Solución:**

Para este caso, se usarán las variables adimensionales para flujo radial, definidas en las **Ecs. 2.32 a 2.34**; así como la forma del principio de superposición dada por la **Ec. 2.57**:

$$\Delta p(r_w, t) = \frac{141.2B\mu}{kh} \sum_{j=1}^N (q_j - q_{j-1}) p_D(r_D, [t - t_{j-1}]_D) ,$$

que, al evaluar los términos constantes de la expresión, se tiene

$$\Delta p(r_w, t) = 0.0205 \sum_{j=1}^N (q_j - q_{j-1}) p_D \left( r_D, t_D = \frac{0.0002637 \times 200 \times [t - t_{j-1}]}{0.1 \times 5 \times 1.105 \times 10^{-5} \times 0.25} \right) \\ = 38182.805 \times [t - t_{j-1}] ,$$

en donde el cálculo de  $c_t$  se obtiene de la siguiente forma:

$$C_t = C_w S_w + C_o S_o + C_f,$$

$$C_t = 4 \times 10^{-6} \times 0.25 + 9 \times 10^{-6} \times 0.75 + 3.3 \times 10^{-5} = 1.105 \times 10^{-5},$$

la solución para este ejercicio requiere de al menos 30 análisis, para facilitar el proceso será necesario obtener una expresión general para cada intervalo que dependerá del análisis de la relación  $t_D/r_D^2$ . El primer cálculo necesario es para conocer el tiempo mínimo al cuál el argumento de 25 se cumple:

$$\frac{t_D}{r_D^2} = \frac{38182.805t}{\left(\frac{0.25}{0.25}\right)^2} = 25,$$

el tiempo mínimo resulta:

$$t = \frac{25}{38182.805} = 6.547 \times 10^{-4} h,$$

el tiempo mínimo permite generalizar a la aproximación logarítmica como la herramienta de cálculo en todos los intervalos del ejercicio.

Analizando el primer intervalo de  $6.547 \times 10^{-4}$  a 10 horas, haciendo aplicación de la ecuación **2.57**, y dado que el pozo es afectado únicamente por un gasto se tiene:

$$\Delta p_{wf}(r = r_w, 1 - 10h) = \Delta p_{wf}(r = r_w, 1 - 10h),$$

y cómo a este tiempo todos los pozos sólo han tenido un gasto, la superposición discreta resulta en:

$$\Delta p_{wf}(r = r_w, 1 - 10h) = 0.0205 \times [q_1 \times p_D(1, 38182.805 \times t_{interés})] ,$$

y la expresión final de presión de fondo para cualquiera de estos tiempos queda sustituyendo **2.36** en **2.57**:

$$p_{wf}(6.547 \times 10^{-4} - 10h) = 3200 - (10.25 \times [\frac{1}{2} \ln|38182.805 \times t_{interés}| + 0.4045]).$$

La segunda expresión que obtener es la del intervalo de 10.0001 a 20, obteniendo directamente la superposición discreta se tiene que:

$$\begin{aligned} \Delta p_{wf}(r = r_w, (10.001 - 20)h) \\ = 0.0205 \\ \times ([q_1 \times p_D(1,38182.805 \times t_{interés})] \\ + [q_2 - q_1 \times p_D(1,38182.805 \times (t_{interés} - 10))]) , \end{aligned}$$

y evaluando los valores constantes y al mismo tiempo sustituyendo **2.36** en **2.57**, se obtiene la expresión general de presión de fondo para este intervalo:

$$\begin{aligned} p_{wf} = 3200 - ([10.25 \\ \times \frac{1}{2} \ln|38182.805 \times t_{interés}| + 0.4045] \\ - [7.175 \times \frac{1}{2} \ln|38182.805 \times (t_{interés} - 10)| + 0.4045]). \end{aligned}$$

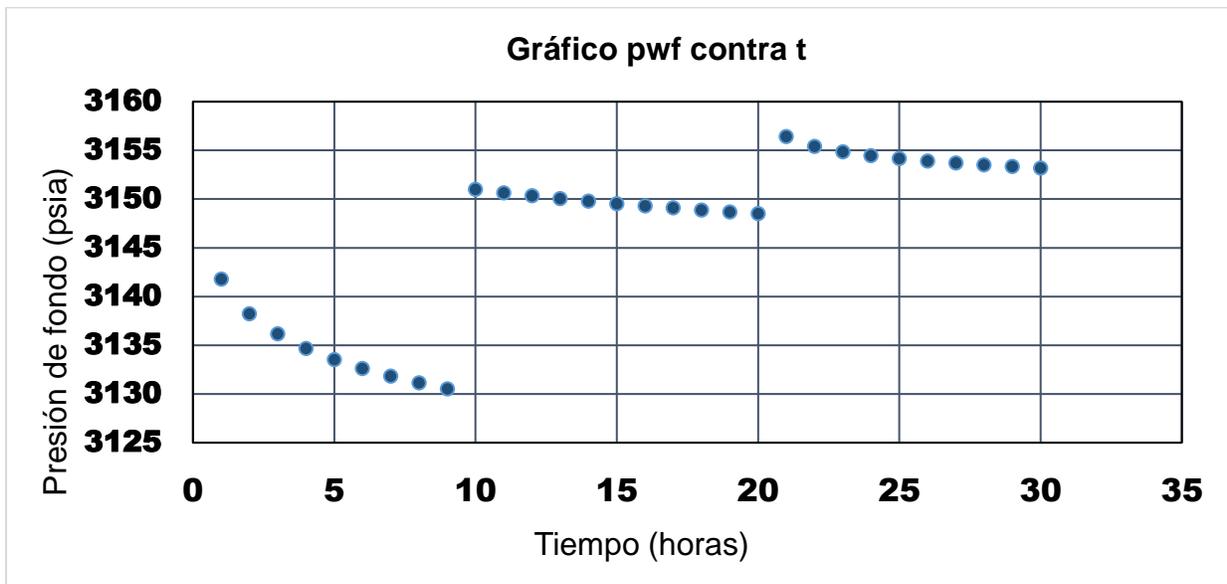
Finalmente, para el intervalo de 20.001 a 30 horas basta agregar un término a la superposición discreta del intervalo anterior, para aplicar a este intervalo obteniendo:

$$\begin{aligned} \Delta p_{wf}(r = r_w, (10.001 - 20)h) \\ = 0.0205 \\ \times ([q_1 \times p_D(1,38182.805 \times t_{interés})] \\ + [q_2 - q_1 \times p_D(1,38182.805 \times (t_{interés} - 10))] \\ + [q_3 - q_2 \times p_D(1,38182.805 \times (t_{interés} - 20))]) , \end{aligned}$$

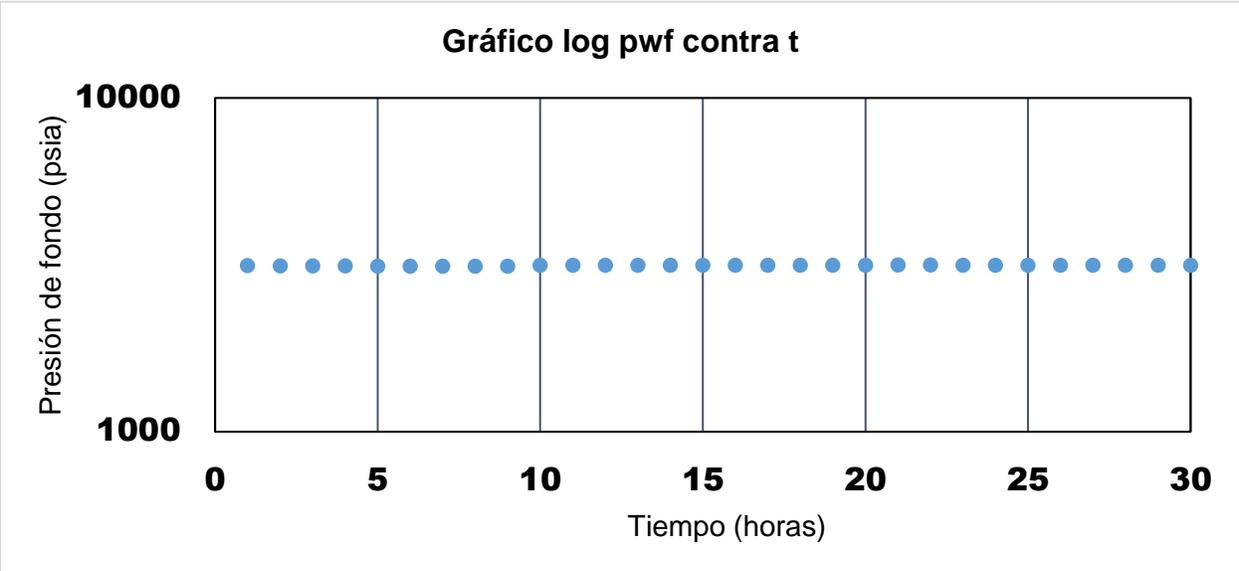
evaluando los valores constantes y nuevamente sustituyendo **2.36** en **2.57**, se obtiene la expresión general de presión de fondo para este intervalo:

$$\begin{aligned}
p_{wf} = & 3200 - ([10.25 \\
& \times \frac{1}{2} \ln|38182.805 \times t_{interés}| + 0.4045] \\
& - [7.175 \\
& \times \frac{1}{2} \ln|38182.805 \times (t_{interés} - 10)| + 0.4045] \\
& + [3.075 \times \frac{1}{2} \ln|38182.805 \times (t_{interés} - 20)| + 0.4045] ) .
\end{aligned}$$

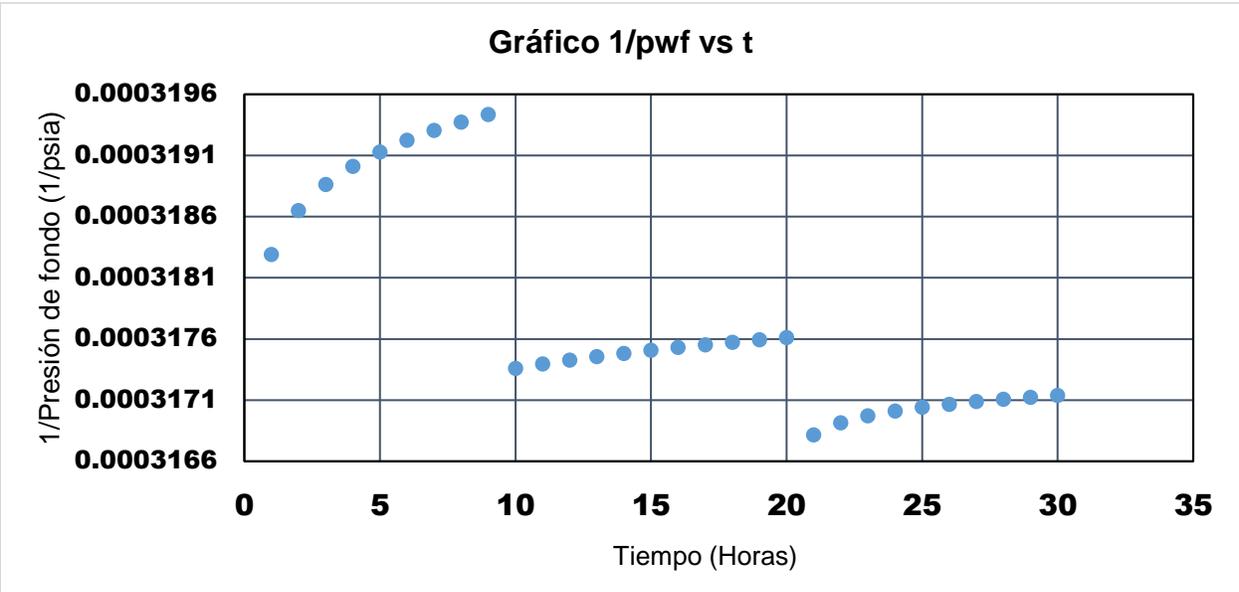
Al tener las expresiones para los tres intervalos en cuestión los gráficos que solicita el ejercicio son los siguientes, para  $p_{wf}$  contra  $t$  (**Figura 2.17**) en escala normal y (**Figura 2.18**) en escala semilogarítmica; en el caso de  $1/p_{wf}$  contra  $t$  en escala normal (**Figura 2.19**) y en escala semilogarítmica (**Figura 2.20**).



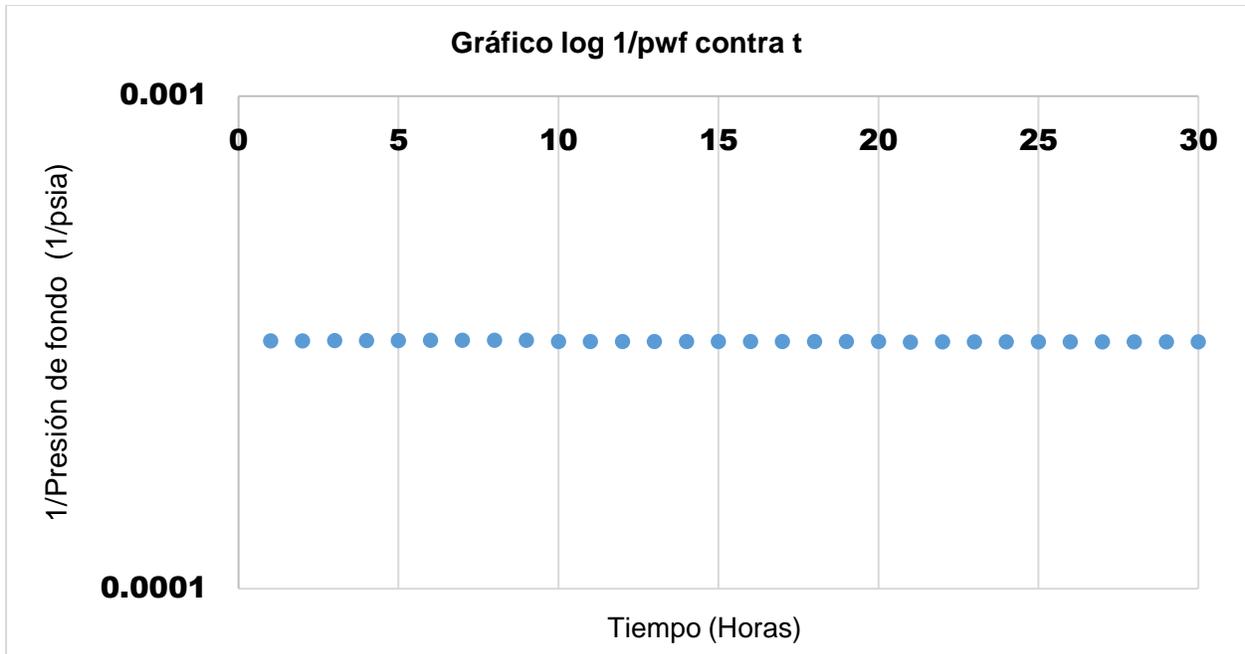
**Figura 2.17** Gráfico de comportamiento del *Ejercicio 2.10*, presión de fondo contra tiempo.



**Figura 2.18** Gráfico de comportamiento semi logarítmico del *Ejercicio 2.10*, presión de fondo contra tiempo.



**Figura 2.19** Gráfico de comportamiento del *Ejercicio 2.10*, 1/presión de fondo contra tiempo.



**Figura 2.20** Gráfico de comportamiento semi logarítmico del *Ejercicio 2.10*, presión de fondo vs tiempo.

**Ejercicio 2.11** Principio de superposición en tiempo y espacio, a gasto constante

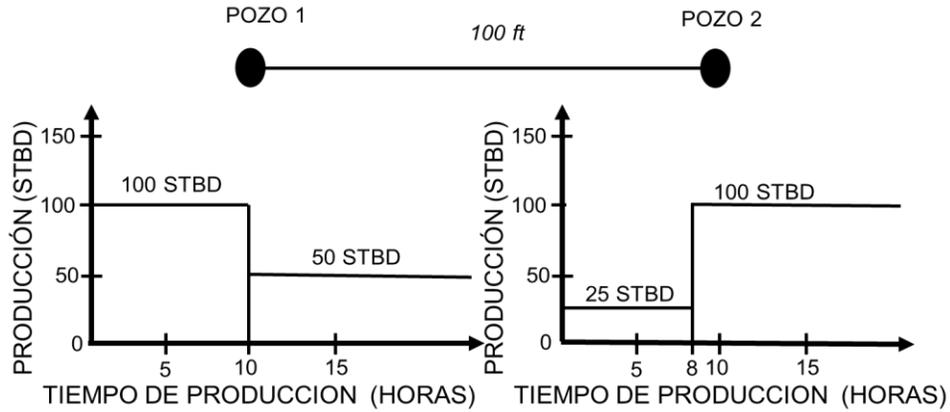
Estime la presión en el pozo 1 después de siete horas de producción y en el pozo 2 después de 11 horas, para ello asuma que el sistema actúa como si fuera infinito.

Los radios del pozo 1 y 2 son de  $r_w = 1 \text{ ft}$ , y los parámetros del yacimiento son:

$$\phi = 0.2 \text{ [Fracc.]}, k = 76 \text{ md}, c_t = 10 \times 10^{-6}$$

$$p_i = 2200 \text{ psia}, B_o = 1.08 \frac{\text{rb}}{\text{stb}}, h = 20 \text{ ft}, \mu = 1 \text{ cp}$$

El programa de producción se muestra en la **Figura 2.21**, donde también se detalla la separación entre los pozos.



**Figura 2.21** Historia de producción de los pozos que se analiza en *Ejercicio 2.11*

**Solución:**

Para este caso, se usarán las variables adimensionales para flujo radial, definidas en las **Ecs. 2.32 a 2.34**; así como la forma del principio de superposición dada por la **Ec. 2.52**:

$$\Delta p(r, t) = \frac{141.2B\mu}{kh} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^M (q_{j,k} - q_{j-1,k}) p_D(r_{Dk}, [t - t_{j-1,k}]_D),$$

que, al evaluar los términos constantes de la expresión, se tiene:

$$\Delta p(r, t) = 0.1003 \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^M \Delta q_{j,k} p_D \left( r_{Dk}, \frac{0.0002637 \times 76 [t - t_{j-1,k}]}{0.2 \times 1 \times 10 \times 10^{-6} \times 1} = 10020.6 [t - t_{j-1,k}] \right).$$

Dado que el yacimiento se supone siempre infinito, se utilizará la solución línea fuente para los cálculos posteriores.

## Evaluación de la presión del pozo 1 a siete horas

En esta situación, dado que el pozo 1 es afectado por su producción y por la del pozo dos, después de siete horas de flujo se tiene:

$$\Delta p_1(r_1, 7h) = \Delta p_{11}(r_1, 7h) + \Delta p_{12}(r_1, 7h) ,$$

y cómo a este tiempo ambos pozos sólo han tenido un gasto, la superposición discreta resulta en:

$$\Delta p_1(r_1 = r_{w1}, t = 7h) = 0.1003[q_1 \times p_D(r_{D11}, 10020.6 \times t) + q_2 \times p_D(r_{D12}, 10020.6 \times t)] ,$$

donde  $r_{D11}$  es la distancia adimensional en el fondo del pozo 1 y  $r_{D12}$  corresponde a la del pozo 1 al pozo 2. Para evaluar a  $p_D$  en cada uno de los argumentos indicados, dado que se utilizará la solución línea fuente, se revisará la condición dada por  $t_D/r_D^2$  en cada radio y tiempo señalados.

Para el primer término,  $p_D(r_{D11}, 10020.6 \times t)$ , se tiene que:

$$\frac{t_D}{r_D^2} = \frac{10020.6 \times 7}{\left(\frac{1}{1}\right)^2} = 70144.2 \gg 25 ,$$

al ser el cociente mucho mayor a 25, se usará la aproximación logarítmica en el cálculo:

$$p_D(1, 10020.6 \times 7) = \frac{1}{2} \ln|70144.2| + 0.4045 = 5.9836 .$$

Por otro lado, en el segundo elemento de la suma,  $p_D(r_{D12}, 10020.6 \times t)$ , se tiene que:

$$\frac{t_D}{r_D^2} = \frac{10020.6(7)}{\left(\frac{100}{1}\right)^2} = 7.01442 < 25 ,$$

y como el valor es menor a 25, se utilizará la función integral exponencial.

$$p_D(100,10020.6 \times 7) = -\frac{1}{2} Ei\left(-\frac{1}{4 \times 7.01442}\right) = -\frac{1}{2} Ei(-0.035).$$

Para evaluar la integral exponencial, se utiliza la **Tabla 2.4**, en donde debe identificarse la sección de interés y el valor correspondiente con el número de decimales considerados como se muestra en la **Figura 2.22**. De esta manera, el valor resultante es:

$$p_D(100,10020.6 \times 7) = 1.405$$

| -Ei(-x), 0.000 < 0.209, intervalo de 0.001 |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|--|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| x  | 0     | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     |
| 0.00                                       | ∞     | 6.332 | 5.639 | 5.235 | 4.948 | 4.726 | 4.545 | 4.392 | 4.259 | 4.142 |
| 0.01                                       | 4.038 | 3.944 | 3.858 | 3.779 | 3.705 | 3.637 | 3.574 | 3.514 | 3.458 | 3.405 |
| 0.02                                       | 3.355 | 3.307 | 3.261 | 3.218 | 3.176 | 3.137 | 3.098 | 3.062 | 3.026 | 2.992 |
| 0.03                                       | 2.959 | 2.927 | 2.897 | 2.867 | 2.838 | 2.810 | 2.783 | 2.756 | 2.731 | 2.706 |

**Figura 2.22.** Modo de empleo de las tablas para determinar el valor de la integral exponencial cuando  $x = -0.0356$ . Dependiendo del intervalo en la tabla, la primera parte del argumento se busca en la columna de  $x$ , y una vez definido el renglón de interés, los dígitos restantes se presentan en las columnas aledañas.

De esta manera, al retomar el planteamiento inicial, se llega a:

$$\Delta p_1(r_1 = r_{w1}, t = 7h) = 0.1003[100 \times 5.5791 + 25 \times 1.405] = 59.4814 \text{ psia} .$$

Finalmente, la presión en el pozo 1 después de siete horas de producción es:

$$p_1(r_1 = r_{w1}, t = 7h) = p_i - \Delta p_1 = 2200 - 59.4814 = 2140.5185 \text{ psia} .$$

## Evaluación de la presión del pozo 2 a 11 h

En esta situación, dado que el pozo 2 es afectado por su producción y por la del pozo uno, después de once horas de flujo se tiene:

$$\Delta p_2(r_2, 11h) = \Delta p_{21}(r_2, 11h) + \Delta p_{22}(r_2, 11h) ,$$

y cómo a este tiempo ambos pozos han tenido una variación de gasto, la superposición discreta resulta en:

$$\begin{aligned} \Delta p_2(r_2 = r_{w2}, t = 11h) &= 0.1003 \left( [q_{11} \times p_D(r_{D_{12}}, 10020.6 \times t_i) \right. \\ &+ (q_{21} - q_{11}) \times p_D(r_{D_{12}}, 10020.6 \times (t_i - 10))] \\ &+ [q_{12} \times p_D(r_{D_{22}}, 10020.6 \times t_i) \\ &+ (q_{22} - q_{12}) \times p_D(r_{D_{22}}, 10020.6 \times (t_i - 8))] \left. \right) , \end{aligned}$$

donde  $r_{D_{22}}$  es la distancia adimensional en el fondo del pozo 2 y  $r_{D_{12}}$  corresponde a la del pozo 1 al pozo 2. Para evaluar a  $p_D$  en cada uno de los argumentos indicados, dado que se utilizará la solución línea fuente, se revisará la condición dada por  $t_D/r_D^2$  en cada radio y tiempo señalados. De esta manera, para el primer término se tiene que:

$$\frac{t_D}{r_D^2} = \frac{10020.6(11)}{\left(\frac{100}{1}\right)^2} = 11.02266 \ll 25 ,$$

y al ser el cociente menor a 25, se usará la integral exponencial en el cálculo:

$$p_D(100, 10020.6 \times 11) = -\frac{1}{2} E_i \left( -\frac{1}{4 \times 11.02266} \right) = -\frac{1}{2} E_i(-0.02268) .$$

Para evaluar la integral exponencial, se utiliza la **Tabla 2.4**, en donde debe identificarse la sección de interés y el valor correspondiente con el número de decimales

considerados como se muestra en la **Figura 2.22** De esta manera, el valor resultante es:

$$p_D(100,110226.6) = \frac{1}{2}[3.261] = 1.6305 ,$$

Por otro lado, en el segundo elemento de la suma  $p_D(100,10020.6 \times (11 - 10))$ , se tiene que:

$$\frac{t_D}{r_D^2} = \frac{10020.6(1)}{\left(\frac{100}{1}\right)^2} = 1.00206 < 25 ,$$

y como el valor es menor a 25, se utilizará la función integral exponencial:

$$p_D(100,10020.6) = -\frac{1}{2}Ei\left(-\frac{1}{4 \times 1.00206}\right) = -\frac{1}{2}Ei(-0.2495) .$$

Para evaluar la integral exponencial, se utiliza la **Tabla 2.4**, en donde debe identificarse la sección de interés y el valor correspondiente con el número de decimales considerados como se muestra en la **Figura 2.22**. De esta manera, el valor resultante es:

$$p_D(100,110226.6) = \frac{1}{2}[1.076] = 0.538 ,$$

El tercer elemento de la suma  $p_D(r_{D_{22}}, 10020.6 \times t_i)$ , se tiene que:

$$\frac{t_D}{r_D^2} = \frac{10020.6(11)}{\left(\frac{1}{1}\right)^2} = 110226.6 \gg 25 ,$$

y al ser el cociente mucho mayor a 25, se usará la aproximación logarítmica en el cálculo:

$$p_D(1,10020.6 \times 11) = \frac{1}{2} \ln|110226.6| + 0.4045 = 6.2096 .$$

Finalmente, el cuarto valor de la suma  $p_D(r_{D_{22}}, 10020.6 \times (t_i - 8))$ , se tiene que:

$$\frac{t_D}{r_D^2} = \frac{10020.6(11 - 8)}{\left(\frac{1}{1}\right)^2} = 30061.8 \gg 25 ,$$

Nuevamente el cociente resulta mucho mayor a 25, se usará la aproximación logarítmica en el cálculo:

$$p_D(1,10020.6 \times 3) = \frac{1}{2} \ln|30061.8| + 0.4045 = 5.56 .$$

De esta manera, al retomar el planteamiento inicial, se llega a:

$$\begin{aligned} \Delta p_2(r_2 = r_{w2}, t = 11h) & \\ &= 0.1003([100 \times 1.6035 + (-50) \times 0.538] + [25 \times 6.2096 + 75 \times 5.56]) \\ &= 70.7807 \text{ psi} , \end{aligned}$$

Finalmente, la presión en el pozo 2 después de siete horas de producción es:

$$p_2(r_2 = r_{w2}, t = 11h) = p_i - \Delta p_2 = 2200 - 70.7807 = \mathbf{2129.2193 \text{ psia}} .$$

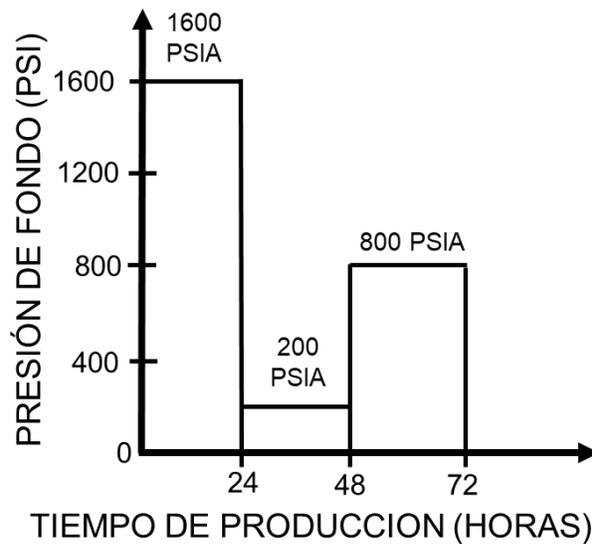
**Ejercicio 2.12 Principio de superposición en tiempo, a presión de fondo constante.**

Un yacimiento infinito cuenta con un pozo de 0.45 ft de radio cuyas propiedades de pozo y yacimiento son las siguientes:

$$\phi = 0.22 [\text{Fracc.}], k = 183 \text{ md}, r_e = 1320 \text{ ft},$$

$$p_i = 3200 \text{ psia}, B_o = 1.433 \frac{\text{rbbl}}{\text{stb}}, h = 34 \text{ ft}, \mu = 5 \text{ cp}, C_t = 8 \times 10^{-6} \text{ psi}^{-1}.$$

Su histórico de producción (**Figura 2.23**) indica que ha sido producido a presión de fondo fluyente constante de 1600 psia de cero a 24 horas, a 200 psia de 24 a 48 horas, y a 800 psia de 48 a 72 horas. Grafique en escala normal sus resultados contra el tiempo de 1 a 72 horas.



**Figura 2.23.** Historia de producción del pozo que se analiza en el *Ejercicio 2.12*

Para la solución de este ejercicio será necesario presentar las soluciones a condiciones de presión constante exclusivamente en un estado infinito; donde el gasto adimensional se evaluará mediante los polinomios de Edwarson *et al.*

Si se cumple que  $0.01 < t_D < 200$ , entonces el gasto adimensional se obtiene de la siguiente forma:

$$q_D = \frac{26.7544 + 43.5537t_D^{0.5} + 13.3813t_D + 0.492949t_D^{1.5}}{47.421t_D^{0.5} + 35.5372t_D + 2.60967t_D^{1.5}}, \quad \dots\dots\dots 2.61$$

ahora bien, si cumple que  $200 < t_D < 1/4 r_{eD}^2$ , el gasto adimensional se obtendrá:

$$q_D = \frac{3.90086 + 2.0623t_D(\ln|t_D| - 1)}{t_D(\ln|t_D|)^2}, \quad \dots\dots\dots 2.62$$

o si cumple que  $t_D \geq 1/4 r_{eD}^2$ , el gasto adimensional se obtendrá de la siguiente forma:

$$q_D = 0. \quad \dots\dots\dots 2.63$$

Para de esta forma poder expresar el gasto en variables reales de la siguiente forma:

$$q = \frac{kh\Delta p}{141.2 B_o \mu} q_D. \quad \dots\dots\dots 2.64$$

**Solución:**

Para este caso, se usarán las variables adimensionales para flujo radial, definidas en las **Ecs. 2.32 a 2.33**; así como la forma del principio de superposición dada por la **Ec. 2.59**:

$$q(t_D) = \frac{kh}{141.2B\mu} \sum_{j=1}^N (p_{wf_{j-1}} - p_{wf_j}) q_D ([t - t_{j-1}]_D).$$

Con la finalidad de ser congruentes con el texto, hay que comprobar que se presenta un estado transitorio en el yacimiento, con la finalidad de poder aplicar los polinomios de Edwarson *et al*; para ello será necesario conocer el tiempo de pseudo-producción.

Por ende, para definir lo anterior, debe determinarse el valor de  $t_{pss}$  (**Ec. 2.51**) como:

$$t_{pss} = \frac{r_e^2}{4\beta\eta},$$

recordando que el coeficiente de difusividad hidráulica (**Ec. 2.52**) se define como:

$$\eta = \frac{k}{\phi\mu C_t},$$

y el cálculo del tiempo característico resulta:

$$t_{pss} = \frac{r_e^2}{4\beta\eta} = \frac{\frac{1}{4} \left( \frac{1320}{0.45} \right)^2}{\frac{2.637 \times 10^{-4} (183)}{(0.22)(5)(8 \times 10^{-6})(0.45)^2}} = 79.4345h,$$

es decir, es el tiempo necesario para que se conozcan las fronteras del yacimiento y ya no se pueda considerar un yacimiento infinito, y debido a que nuestro análisis de estudio alcanza las 72 horas de producción, se puede garantizar la aplicación de los polinomios de Edwarson.

El ejercicio requiere de al menos 72 análisis, por ello, se obtendrán las tres expresiones necesarias para dar solución al ejercicio que representarán los intervalos 0 a 24, 24-48, 48-72 horas.

Paso siguiente será obtener la expresión general de  $t_D$  (**Ec. 2.33**), obteniendo:

$$t_D = \frac{2.637 \times 10^{-4} \times 183}{0.22 \times 5 \times 8 \times 10^{-6} \times 0.45^2} t = 27080.3030t.$$

El intervalo en general es de 0 a 72 horas de producción, para todo este intervalo se cumple con las siguientes condiciones  $t < t_{pss}$  y  $200 < t_D < 1/4 r_{eD}^2$ , ya que  $1/4 r_{eD}^2$  es:

$$\frac{1}{4} r_{eD}^2 = \frac{1}{4} \left( \frac{1320}{0.45} \right)^2 = 2.151 \times 10^6,$$

con lo cual el polinomio de Edwarson *et al* adecuado para este intervalo será el que expresa la **Ec. 2.62**.

Al no exhibir hasta las 24 horas una variación el presión de fondo basta con sustituir **2.33 y 2.62** en **2.64**, obteniendo la expresión general para el gasto del intervalo de 0 a 24 horas:

$$q = 9840 \times \frac{3.90086 + 2.02623 \times 27080.3030t \times (\ln|27080.3030t| - 1)}{27080.3030t \times (\ln|27080.3030t|)^2}.$$

El análisis de 24.001 a 48 horas requiere de la aplicación de la superposición en el tiempo mediante la **Ec. 2.59** a la cual se le sustituyen los valores constantes para obtener:

$$q(t_D) = 6.15 \sum_{j=1}^N (p_{wf_{j-1}} - p_{wf_j}) q_D([t - t_{j-1}]_D),$$

cuya superposición discreta queda:

$$\begin{aligned} q(27080.3030t) &= 6.15005 \left( [(3200 - 1600) \times q_D(27080.3030(t))] \right. \\ &\quad \left. + [(1600 - 200) \times q_D(27080.3030(t) - 27080.3030(24))] \right), \end{aligned}$$

y aplicando el polinomio de Edwarson (**Ec.2.62**), se obtiene la expresión general para este intervalo:

$$\begin{aligned}
& q(27080.3030t) \\
&= 6.15005 \left( \left[ 1600 \times \frac{3.90086 + 2.02623 \times 27080.3030t \times (\ln|27080.3030t| - 1)}{27080.3030t \times (\ln|27080.3030t|)^2} \right] \right. \\
&+ \left[ 1400 \right. \\
&\times \left. \left. \frac{3.90086 + 2.02623 \times (27080.3030t - 649927.272) \times (\ln|27080.3030t - 649927.272| - 1)}{(27080.3030t - 649927.272) \times (\ln|27080.3030t - 649927.272|)^2} \right] \right),
\end{aligned}$$

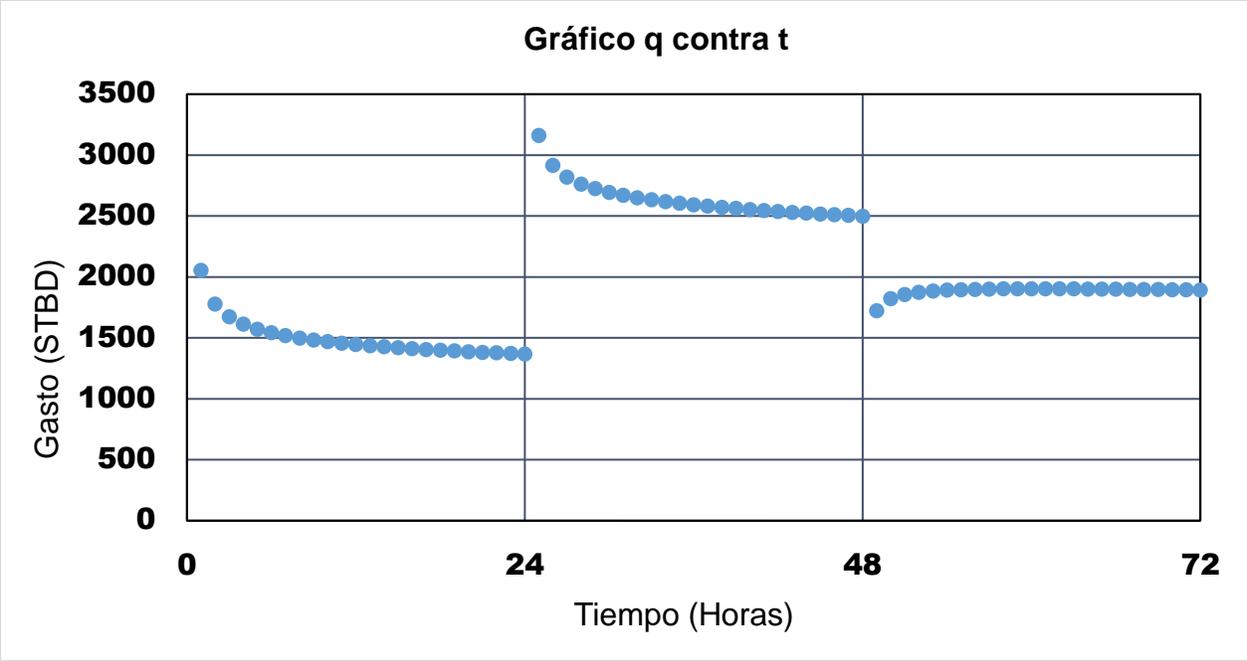
finalmente, el análisis para el intervalo de 48.001 a 72 horas quedará como una expansión de la superposición discreta del intervalo previo inmediato quedando:

$$\begin{aligned}
& q(27080.3030t) \\
&= 6.15005 \left( [(3200 - 1600) \times q_D(27080.3030(t))] \right. \\
&+ [(1600 - 200) \times q_D(27080.3030(t) - 27080.3030(24))] \\
&+ [(200 - 800) \times q_D(27080.3030(t) - 27080.3030(48))] \left. \right),
\end{aligned}$$

y aplicando el polinomio de Edwarson (**Ec.2.62**), se obtiene la expresión general para este intervalo:

$$\begin{aligned}
& q(27080.3030t) \\
&= 6.15005 \left( \left[ 1600 \times \frac{3.90086 + 2.02623 \times 27080.3030t \times (\ln|27080.3030t| - 1)}{27080.3030t \times (\ln|27080.3030t|)^2} \right] \right. \\
&+ \left[ 1400 \right. \\
&\times \left. \frac{3.90086 + 2.02623 \times (27080.3030t - 649927.272) \times (\ln|27080.3030t - 649927.272| - 1)}{(27080.3030t - 649927.272) \times (\ln|27080.3030t - 649927.272|)^2} \right] \\
&- \left[ 600 \right. \\
&\times \left. \frac{3.90086 + 2.02623 \times (27080.3030t - 1299854.544) \times (\ln|27080.3030t - 1299854.544| - 1)}{(27080.3030t - 1299854.544) \times (\ln|27080.3030t - 1299854.544|)^2} \right] \left. \right).
\end{aligned}$$

Al tener las tres expresiones generales de los intervalos, basta con sustituir cada uno de los 72 casos para obtener el gráfico que pide el ejercicio,  $q$  contra  $t$ , (**Figura 2.24**)



**Figura 2.24.** Gráfico de comportamiento del *Ejercicio 2.12*, gasto (STBD) contra tiempo.

## 2.5 Uso de la aproximación de Horner

Una de las complicaciones de utilizar el principio de superposición para modelar la historia de un pozo producido a condiciones variables recae en el número de cálculos requeridos para este fin. Por ello, Horner (1951) reportó una aproximación que puede ser utilizada para simplificar este procedimiento, esta consiste en considerar que el sistema sólo ha sido afectado por el último gasto existente, distinto a cero y que en adelante se denominará  $q_N$ ; y que la respuesta obtenida se evalúa a un tiempo equivalente de producción denominado *tiempo de balance de materia* ( $t_c$ ), que se determina como:

$$t_c = \frac{Q_p}{q_N}, \quad \dots\dots\dots 2.65$$

donde  $Q_p$  es el volumen producido acumulado del fluido estudiado:

$$Q_p = \int_{t_0}^t q(t)dt = \sum_{i=1}^n N_{pi}, \quad \dots\dots\dots 2.66$$

además, Horner propuso una aproximación para conocer la caída de presión:

$$\Delta p(t) = 141.2 \frac{q_{last} B \mu}{kh} \times \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\beta \eta}{r_w^2} \times t_p \right| + 0.4045, \quad \dots\dots\dots 2.67$$

### Ejercicio 2.13 Introducción a la aproximación de Horner

Un pozo es producido por corto intervalo de tiempo y es cerrado para una prueba de incremento. La historia de producción se muestra en la **Tabla 2.11**.

- a) Calcule el tiempo de pseudo-producción.
- b) Determine si la aproximación de Horner puede ser utilizada en este caso

**Tabla 2.10** Datos requeridos para el **Ejercicio 2.13**

| Tiempo de Producción (horas) | Producción Total (STB) |
|------------------------------|------------------------|
| 25                           | 52                     |
| 12                           | 0                      |
| 26                           | 46                     |
| 72                           | 68                     |

#### Solución:

El tiempo de pseudo-producción se calculará con ayuda de la **Ec.2.53**, es necesario conocer el volumen producido acumulado, aplicando la **Ec.2.66**, se obtiene:

$$Q_p = 52 + 46 + 68 = 166 \text{ STB.}$$

El último gasto reportado no es un valor conocido, pero contando con la producción acumulada se puede conocer con ayuda de la siguiente expresión:

$$q_N = \frac{N_p}{t_{duracion}}, \dots\dots\dots 2.68$$

$$q_N = \frac{68}{72} = 0.944444 \frac{STB}{hora}.$$

De esta forma es posible conocer el valor de tiempo de pseudo-producción también conocido como tiempo de balance de materia:

$$t_c = \frac{166 (STB)}{22.666 \left(\frac{STB}{h}\right)} = 175.6 \approx \mathbf{176 h},$$

Para corroborar el inciso b del problema, hay que garantizar que al menos el último periodo de tiempo es al menos el doble que el periodo de tiempo anterior. Para ello:

$$\frac{\Delta t_{\text{último}}}{\Delta t_{\text{anterior}}} = \frac{72}{26} = \mathbf{2.77} > \mathbf{2},$$

Por tanto, la aproximación de Horner es aplicable en este caso.

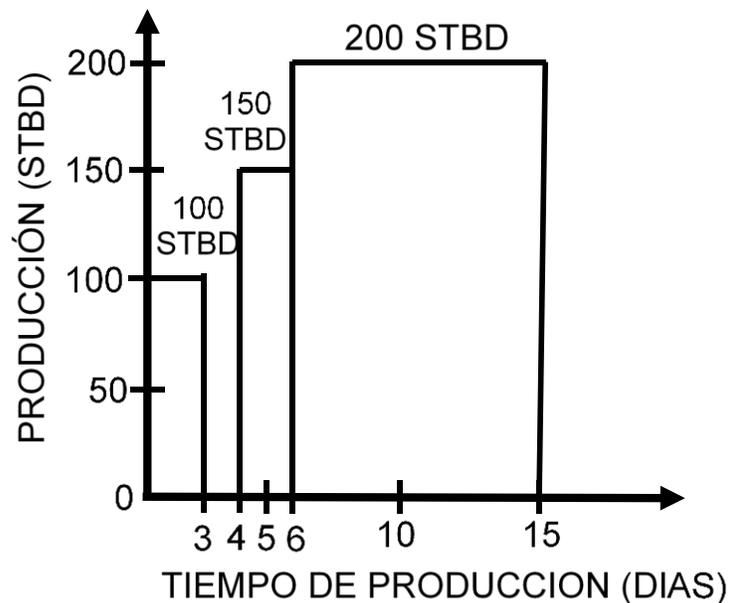
### Ejercicio 2.14 Superposición en tiempo y aproximación de Horner.

Un pozo de 1 ft de radio es producido en una formación con las siguientes propiedades:

$$\phi = 0.2 \text{ [Fracc.], } k = 25 \text{ md, } c_t = 10 \times 10^{-6}$$

$$p_i = 3000 \text{ psia, } B = \frac{1.0 \text{ rbl}}{\text{stb}}, h = 10 \text{ ft, } \mu = 1 \text{ cp}$$

El pozo produjo a 100 STBD por tres días. Luego fue cerrado por un día, producido a 150 STBD durante los dos días siguientes, y producido a 200 STBD por los siguientes días (**Figura 2.25**).



**Figura 2.25** Historia de producción de los pozos que se analiza en el *Ejercicio 2.14*

- a) Calcule la caída de presión después de quince días con la aproximación de Horner.

- b) Calcule la caída de presión en el yacimiento después de quince días de producción mediante el principio de superposición.
- c) Compare los resultados y discuta la precisión del método.

**Solución:**

El procedimiento para dar solución al inciso a, inicia conociendo el valor de tiempo de balance de materia, para ello es necesario conocer el volumen producido acumulado:

$$Q_p = \int_{t_0}^t q(t)dt = (100 \times 3) + (0 \times 1) + (150 \times 2) + (200 \times 9) = 2400STB ,$$

y al conocer el último gasto al cual estuvo sometido el pozo, basta aplicar la **Ec.2.65** para conocer el tiempo de balance de materia:

$$t_c = 24 \times \frac{2400 (STB)}{200(BPD)} = 288 h ,$$

de esta forma aplicando la **Ec.2.67** se puede conocer la caída de presión:

$$\Delta p(t) = \frac{141.2 \times 200 \times 1 \times 1}{25 \times 10} \times \left( \frac{1}{2} \ln \left| \frac{2.637 \times 10^{-4} \times \frac{25}{(0.2)(1)(10 \times 10^{-6})}}{1} \times 288 \right| + 0.4045 \right) ,$$

$$\Delta p(t) = 823.0548 \text{ psia} .$$

Para el inciso b, Para este caso, se usarán las variables adimensionales para flujo radial, definidas en las **Ecs. 2.32 a 2.34**; así como la forma del principio de superposición dada por la **Ec. 2.50**

$$\Delta p = \frac{141.2B\mu}{kh} \sum_{j=1}^n (q_j - q_{j-1}) p_D(r_D, [t - t_{j-1}]_D) ,$$

que, al evaluar los términos constantes de la expresión, se tiene

$$\Delta p = 0.5648 \sum_{j=1}^4 (q_j - q_{j-1}) p_D \left( 1, \frac{0.0002637 \times 25 [t - t_{j-1,k}]}{0.2 \times 1 \times 10 \times 10^{-6} \times 1} = 3296.25 [t - t_{j-1,k}] \right) .$$

Dado que el yacimiento se supone siempre infinito, se utilizará la solución línea fuente para los cálculos posteriores.

En esta situación, dado que el pozo es afectado por su producción después de quince días de flujo se tiene que, la superposición discreta resulta en:

$$\begin{aligned} \Delta p_{15 \text{ dias}}(r_w = 1, t = (15 \times 24)h) \\ = 0.5648 \times \left[ ((100 - 0) \times p_D(1, 3295.25(15 \times 24))) + ((0 - 100) \times p_D(1, \right. \\ \left. 3295.25 \times ((15 - 3) \times 24) + (200 - 150) \times p_D(1, 3295.25((15 - 6) \times 24)) \right) \\ \left. + ((150 - 0) \times p_D(1, 3295.25((15 - 4) \times 24)) \right] , \end{aligned}$$

donde  $r_D$  es la distancia adimensional en el fondo del pozo 1. Para evaluar a  $p_D$  en cada uno de los argumentos indicados, dado que se utilizará la solución línea fuente, se revisará la condición dada por  $t_D/r_D^2$  en cada radio y tiempo señalados. De esta manera, para el término  $p_D(1, 3295.25(15 \times 24))$  se tiene que:

$$\frac{t_D}{r_D^2} = \frac{3295.25(15 \times 24)}{\left(\frac{1}{1}\right)^2} = 1186650 \gg 25 ,$$

y al ser el cociente mucho mayor a 25, se usará la aproximación logarítmica en el cálculo:

$$p_D(1, 3295.25(15 \times 24)) = \frac{1}{2} \ln|1186650| + 0.4045 = 7.3978.$$

Para el segundo término de la expresión  $p_D(1, 3295.25 \times ((15 - 3) \times 24))$ , se tiene que:

$$\frac{t_D}{r_D^2} = \frac{3295.25(12 \times 24)}{\left(\frac{1}{1}\right)^2} = 949392 \gg 25 ,$$

y al ser el cociente mucho mayor a 25, se usará la aproximación logarítmica en el cálculo:

$$p_D(1, 3295.25(12 \times 24)) = \frac{1}{2} \ln|949392| + 0.4045 = 7.2863.$$

Para el tercer término de la expresión  $p_D(1, 3295.25 \times ((15 - 4) \times 24))$ , se tiene que:

$$\frac{t_D}{r_D^2} = \frac{3295.25(11 \times 24)}{\left(\frac{1}{1}\right)^2} = 870302 \gg 25 ,$$

y al ser el cociente mucho mayor a 25, se usará la aproximación logarítmica en el cálculo:

$$p_D(1, 3295.25(11 \times 24)) = \frac{1}{2} \ln|870302| + 0.4045 = 7.2428.$$

Y por último el cuarto término de la expresión,  $p_D(1, 3295.25((15 - 6) \times 24))$ , se tiene que:

$$\frac{t_D}{r_D^2} = \frac{3295.25(9 \times 24)}{\left(\frac{1}{1}\right)^2} = 712134 \gg 25 ,$$

y al ser el cociente mucho mayor a 25, se usará la aproximación logarítmica en el cálculo:

$$p_D(1, 3295.25(9 \times 24)) = \frac{1}{2} \ln|712134| + 0.4045 = 7.1425.$$

De esta manera, al retomar el planteamiento inicial, se llega a:

$$\begin{aligned}
& \Delta p_{15 \text{ dias}}(r_w = 1, t = (15 \times 24)h) \\
& = 0.5648 \\
& \times ((100 \times 7.3978) + (-100 \times 7.2863) + (150 \times 7.2428) \\
& + (50 \times 7.1425)) = \mathbf{821.611 \text{ psia}},
\end{aligned}$$

Realizando la comparación del inciso c, los dos métodos por los cuales fue evaluada la caída de presión puede observarse que la aproximación de Horner tiene una buena precisión siempre y cuando el último período de producción haya sido lo suficientemente largo en la historia de producción; y por su parte el principio de superposición es muy efectivo siempre y cuando se tenga la precaución al momento de manejar la ecuación.

### **Ejercicio 2.15 Superposición en tiempo y aproximación de Horner**

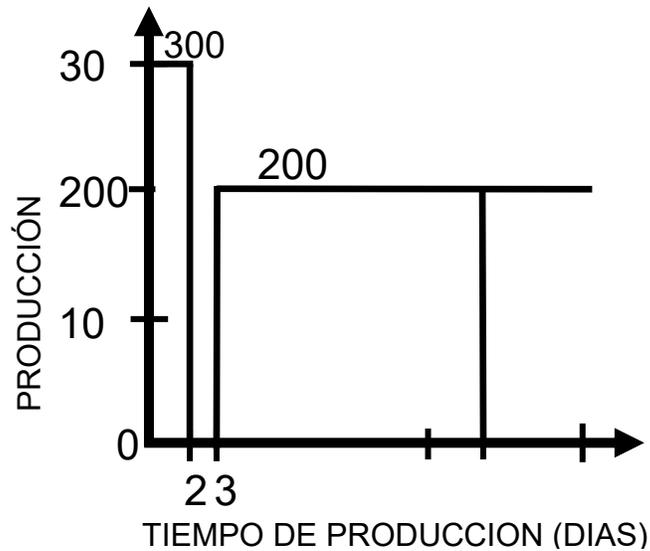
Un pozo de 1 *ft* de radio fue terminado en un yacimiento infinito que posee las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned}
\phi & = 0.2 [\text{Fracc.}], \quad k = 25 \text{ md}, \quad c_t = 10 \times 10^{-6} \\
p_i & = 3000 \text{ psia}, \quad B = 1.0 \frac{rb}{stb}, \quad h = 10 \text{ ft}, \quad \mu = 1 \text{ cp}
\end{aligned}$$

El pozo produjo a un gasto constante de 300 STBD por 2 días, posteriormente fue cerrado durante un día y nuevamente abierto a producción a 200 STBD durante los siguientes días.

- a) Calcule el tiempo de balance de materia, compárelo con el tiempo total, compárelo con el tiempo total.

- b) Calcule y grafique el comportamiento de la presión en el yacimiento al paso de 12 días utilizando la aproximación de Horner y también mediante el principio de superposición.
- c) Compare los resultados y discuta la precisión del método.



**Figura 2.26** Historia de producción de los pozos que se analiza en *Ejercicio 2.15*.

**Solución:**

El procedimiento para dar solución al inciso a, requiere de conocer el volumen producido acumulado:

$$Q_p = \int_{t_0}^t q(t)dt = (300 \times 2) + (0 \times 1) + (200 \times 9) = 2400 \text{ STB},$$

y al conocer el último gasto al cual estuvo sometido el pozo, basta aplicar la **Ec.2.65** para conocer el tiempo de balance de materia:

$$t_c = 24 \times \frac{2400 \text{ (STB)}}{200 \text{ (BPD)}} = 288 \text{ h},$$

de esta forma aplicando la **Ec.2.67** se puede conocer la caída de presión y por ende dar solución al inciso b:

$$\Delta p(t) = \frac{141.2 \times 200 \times 1 \times 1}{25 \times 10} \times \left( \frac{1}{2} \ln \left| \frac{2.637 \times 10^{-4} \times \frac{25}{(0.2)(1)(10 \times 10^{-6})}}{1} \times 288 \right| + 0.4045 \right),$$

$$\begin{aligned} \Delta p(t) \\ = 823.0548 \text{ psia} . \end{aligned}$$

Para el inciso b, Para este caso, se usarán las variables adimensionales para flujo radial, definidas en las **Ecs. 2.32 a 2.34**; así como la forma del principio de superposición dada por la **Ec. 2.50**.

$$\Delta p = \frac{141.2B\mu}{kh} \sum_{j=1}^n (q_j - q_{j-1}) p_D(r_D, [t - t_{j-1}]_D),$$

que, al evaluar los términos constantes de la expresión, se tiene

$$\Delta p = 0.5648 \sum_{j=1}^4 (q_j - q_{j-1}) p_D \left( 1, \frac{0.0002637 \times 25 [t - t_{j-1,k}]}{0.2 \times 1 \times 10 \times 10^{-6} \times 1} = 3296.25 [t - t_{j-1,k}] \right) .$$

Dado que el yacimiento se supone siempre infinito, se utilizará la solución línea fuente para los cálculos posteriores.

En esta situación, dado que el pozo es afectado por su producción después de doce días de flujo se tiene que, la superposición discreta resulta en:

$$\begin{aligned} \Delta p_{12 \text{ dias}}(r_w = 1, t = (12 \times 24)h) \\ = 0.5648 \times [(300 \times p_D(1, 3295.25(12 \times 24)) + ((0 - 300) \times p_D(1, \\ 3295.25((12 - 2) \times 24) + ((200 - 0) \times p_D(1, 3295.25((12 - 3) \times 24))], \end{aligned}$$

donde  $r_D$  es la distancia adimensional en el fondo del pozo 1. Para evaluar a  $p_D$  en cada uno de los argumentos indicados, dado que se utilizará la solución línea fuente, se revisará la condición dada por  $t_D/r_D^2$  en cada radio y tiempo señalados. De esta manera, para el término  $p_D(1, 3295.25(12 \times 24))$  se tiene que:

$$\frac{t_D}{r_D^2} = \frac{3295.25(12 \times 24)}{\left(\frac{1}{1}\right)^2} = 949032 \gg 25 ,$$

y al ser el cociente mucho mayor a 25, se usará la aproximación logarítmica en el cálculo:

$$p_D(1, 3295.25(12 \times 24)) = \frac{1}{2} \ln|949032| + 0.8091 = 7.2861 .$$

Para el segundo término de la expresión  $p_D(1, 3295.25 \times ((12 - 2) \times 24))$ , se tiene que:

$$\frac{t_D}{r_D^2} = \frac{3295.25(10 \times 24)}{\left(\frac{1}{1}\right)^2} = 790860 \gg 25 ,$$

y al ser el cociente mucho mayor a 25, se usará la aproximación logarítmica en el cálculo:

$$p_D(1, 3295.25(10 \times 24)) = \frac{1}{2} \ln|790860| + 0.8091 = 7.1949 .$$

Para el tercer y último término de la expresión  $p_D(1, 3295.25((12 - 3) \times 24))$ , se tiene que:

$$\frac{t_D}{r_D^2} = \frac{3295.25(9 \times 24)}{\left(\frac{1}{1}\right)^2} = 870302 \gg 25 ,$$

y al ser el cociente mucho mayor a 25, se usará la aproximación logarítmica en el cálculo:

$$p_D(1, 3295.25(12 \times 24)) = \frac{1}{2} \ln|870302| + 0.4045 = 7.2428.$$

Y por último el cuarto término de la expresión,  $p_D(1, 3295.25((15 - 6) \times 24))$ , se tiene que:

$$\frac{t_D}{r_D^2} = \frac{3295.25(9 \times 24)}{\left(\frac{1}{1}\right)^2} = 712134 \gg 25 ,$$

y al ser el cociente mucho mayor a 25, se usará la aproximación logarítmica en el cálculo:

$$p_D(1, 3295.25(9 \times 24)) = \frac{1}{2} \ln|711774| + 0.4045 = 7.1423$$

De esta manera, al retomar el planteamiento inicial, se llega a:

$$\begin{aligned} \Delta p_{12 \text{ días}}(r_w = 1, t = (12 \times 24)h) & \\ &= 0.5648 \\ &\times ((300 \times 7.2861) + (-300 \times 7.1949) + (200 \times 7.1423)) \\ &= \mathbf{822.248 \text{ psia}} . \end{aligned}$$

Realizando la comparación del inciso c, los dos métodos por los cuales fue evaluada la caída de presión puede observarse que la aproximación de Horner tiene una buena precisión siempre y cuando el último período de producción haya sido lo suficientemente largo en la historia de producción; por su parte el principio de superposición es muy efectivo siempre y cuando se tenga la precaución al momento de manejar la ecuación.

## Ejercicio 2.16 Yacimiento Volumétrico.

Un pozo de  $r_w = 0.25 \text{ ft}$  de radio produce 500 *STBD* de aceite

$$\phi = 0.1 [\text{Fracc.}], k = 200 \text{ md}, c_t = 1.105 \times 10^{-6}$$

$$p_i = 3200 \text{ psia}, B_o = 1.333 \frac{\text{rbbl}}{\text{stb}}, h = 22 \text{ ft}, \mu = 5 \text{ cp}$$

Si el radio externo del sistema es de 1320 ft y el modelo de flujo es radial, determine las condiciones para que el pozo se comporte como si drenase una sección finita volumétrica, y calcule los perfiles de presión contra el radio del yacimiento después de 1, 50 y 100 horas de producción.

### Solución:

En la información del ejercicio se establece que es un yacimiento volumétrico, y con el fin de corroborar el dato se estimara el tiempo de duración del estado de flujo pseudo-estacionario, para ello se aplica la **Ec.2.51** obteniendo que:

$$t_{pss} = \frac{r_e^2}{4\beta\eta} = \frac{\frac{1}{4} \left( \frac{1320}{0.25} \right)^2}{\frac{2.637 \times 10^{-4} (200)}{(0.1)(5)(1.105 \times 10^{-6})}} = 2.23 \times 10^{-5} \text{ h},$$

dicho valor permite garantizar que el sistema ha conocido las fronteras Una vez que se alcanza la frontera, el sistema entra en un estado de flujo pseudo-estacionario por ello la necesidad de aplicar la **Ec.2.43**:

$$p_{D_r}(r_D = 1, t_D) = \ln|r_{eD}| - \frac{3}{4} + \frac{2t_{Dr}}{r_{eD}^2 - 1},$$

a la cual sustituyendo valores constantes se obtendrá la expresión siguiente:

$$p_{D_r}(r_D = 1, t_D) = 7.802 + \frac{2 \times 9545.7013t}{27878399}.$$

Sustituyendo **2.43** en **2.50**, obteniendo una expresión para presión dimensional:

$$p_{wf} = 3200 - 106.943 \times \left[ 7.802 + \frac{2 \times 9545.7013t}{27878399} \right].$$

Finalmente, para 1 hr se obtiene:

$$p_{wf} = 3200 - 106.943 \times \left[ 7.802 + \frac{2 \times 9545.7013}{27878399} \right] = \mathbf{2365.56 \text{ psia}},$$

para 10 hr se obtiene:

$$p_{wf} = 3200 - 106.943 \times \left[ 7.802 + \frac{2 \times 9545.7013 \times 10}{27878399} \right] = \mathbf{2365.9 \text{ psia}},$$

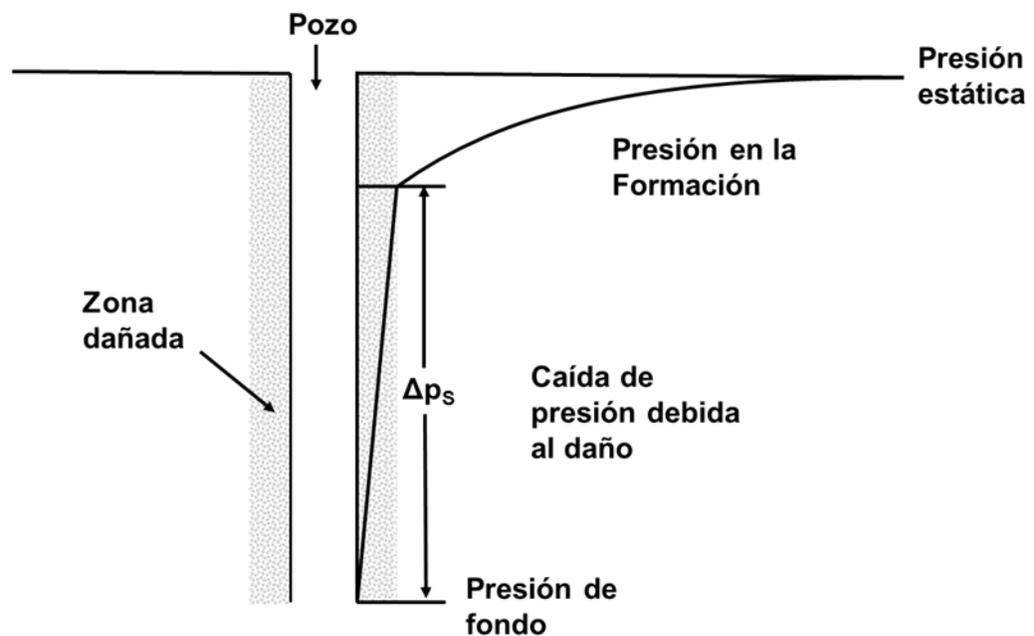
Y finalmente para 50 hr se obtiene

$$p_{wf} = 3200 - 106.943 \times \left[ 7.802 + \frac{2 \times 9545.7013 \times 50}{27878399} \right] = \mathbf{2361.97 \text{ psia}}.$$

## 2.6 Daño y Pseudodaño

El daño en un pozo puede entenderse como una caída de presión adicional observada en el comportamiento de afluencia ideal del sistema. Dependiendo de su naturaleza, este efecto puede clasificarse como daño total, real y de pseudo-daños

Cualquiera que sea la naturaleza del daño no hay razón alguna para asumir que esta condición se extiende por todo el yacimiento, más aún si consideramos que la sección afectada es de tamaño insignificante respecto al área de drene de un pozo, **Figura 2.27**



**Figura 2.27.** Representación esquemática del daño (Gallardo, 2018)

La correcta interpretación del efecto de daño es indispensable para el diagnóstico de las condiciones de producción. En esta sección únicamente se discuten los efectos que pueden interpretarse como una desviación al comportamiento de flujo radial ideal.

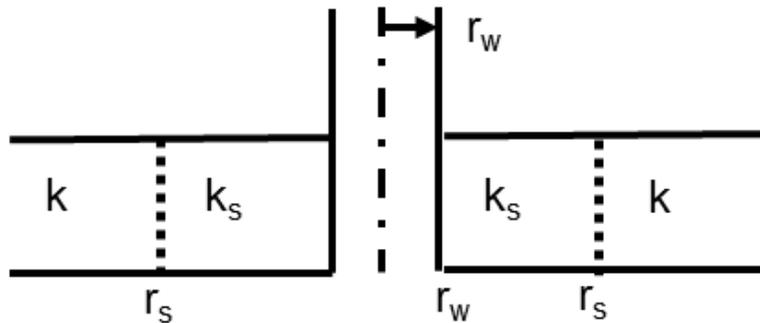
El efecto del daño total, que es resultado de la interacción de todas las condiciones que alteran el comportamiento ideal de un pozo, puede ser representado por una letra  $S$ , y en términos de las variables adimensionales utilizadas se tiene que la caída de presión debida al daño ( $\Delta p_s$ ) se define como:

$$S = \frac{kh}{\alpha_R q B \mu} \Delta p_s , \dots\dots\dots 2.69$$

### 2.6.1 Daño real a la formación ( $S_{tr}$ )

El daño real es aquella alteración mecánica que ocurre en las vecindades de un pozo y que se debe a los trabajos de perforación. El modelo más utilizado para representar este efecto es el desarrollado por Brownscombe y Collins, en el que se visualiza a la región dañada como una sección con permeabilidad alterada ( $k_s$ ) que existe en las vecindades del pozo, hasta un radio  $r_s$ , **Figura 2.28**; mismo que es:

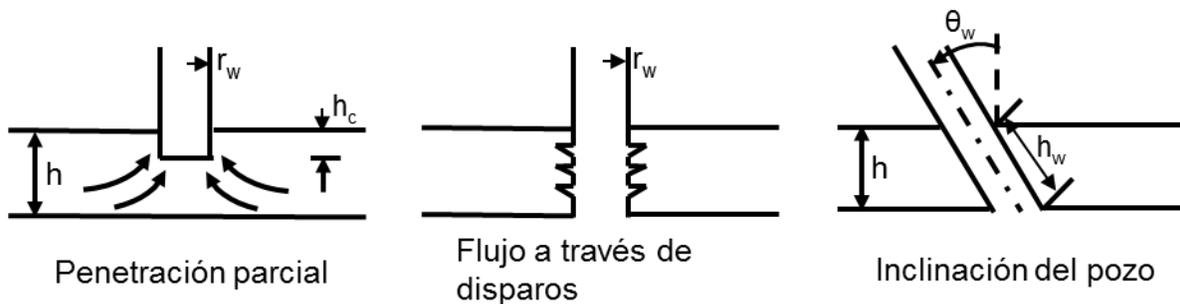
$$S_{tr} = \left( \frac{k}{k_s} - 1 \right) \ln \left| \frac{r_s}{r_w} \right| . \dots\dots\dots 2.70$$



**Figura 2.28.** Esquematización del daño real a la formación. (Gallardo,2018)

### 2.6.2 Pseudo-daños

Los pseudo-daños, por su parte, son en realidad efectos observados debidos a las condiciones de los pozos. Las caídas de presión asociadas a estos pueden deberse a: 1. convergencia hacia un pozo parcialmente penetrante ( $S_c$ ), 2. el aumento del área de contacto entre un pozo desviado y la formación productora ( $S_\theta$ ), y 3. el flujo a través de los disparos ( $S_p$ ), entre otros, **Figura 2.29**.



**Figura 2.29.** Esquematación de algunos efectos típicos de pseudo-daño. (Gallardo,2018)

De acuerdo con lo anterior, es posible discretizar el efecto del daño total como:

$$S_{tr} = S_\theta + S_c + \frac{h}{h_c}(S_{tr} + S_p) \quad \dots\dots\dots 2.71$$

El conjunto de variables adimensionales que serán usadas en esta sección se define a continuación:

$$r_D = \frac{r}{r_w} \quad \dots\dots\dots 2.72$$

$$z_D = \frac{z}{r_w} \sqrt{\frac{k_h}{k_v}}, \dots\dots\dots 2.73$$

$$h_D = \frac{h}{r_w} \sqrt{\frac{k_h}{k_v}}, \dots\dots\dots 2.74$$

$$\theta' = \tan^{-1} \left( \sqrt{\frac{k_v}{k_h}} \tan \theta \right) . \dots\dots\dots 2.75$$

En estas definiciones  $k_v$  y  $k_h$  son las permeabilidades vertical y horizontal, respectivamente, y  $k_w$  es la permeabilidad efectiva en la dirección normal al eje del pozo:

$$k_w = k_h \cos^2 \theta + k_v \sin^2 \theta . \dots\dots\dots 2.76$$

### 2.6.2.1 Pseudo-daños por desviación y penetración parcial ( $S_{\theta+c}$ )

Cinco presentó el siguiente modelo para calcular el pseudo-daño por desviación en un pozo completamente penetrante, válido para intervalos entre 0 y 75 °,

$$S_\theta = - \left( \frac{\theta'}{41} \right)^{2.06} - \left( \frac{\theta'}{56} \right)^{1.865} \log \left( \frac{h_D}{100} \right) , \dots\dots\dots 2.77$$

mientras que Papatzcos propuso una correlación para pozos verticales parcialmente penetrantes en donde el pseudo-daño se debe a la convergencia:

$$s_c = \left( \frac{h - h_w}{h_w} \right) \ln \left| \frac{\pi h}{2r_w} \sqrt{\frac{k_r}{k_z}} \right| + \frac{h}{h_w} \ln \left| \frac{h_w/h}{2 + h_w/h} \sqrt{\frac{A-1}{B-1}} \right| , \dots\dots\dots 2.78$$

$$A = \frac{4h}{4Z_1 + h_w}, \quad \dots\dots\dots 2.79$$

$$B = \frac{4h}{4Z_1 + 3h_w}, \quad \dots\dots\dots 2.80$$

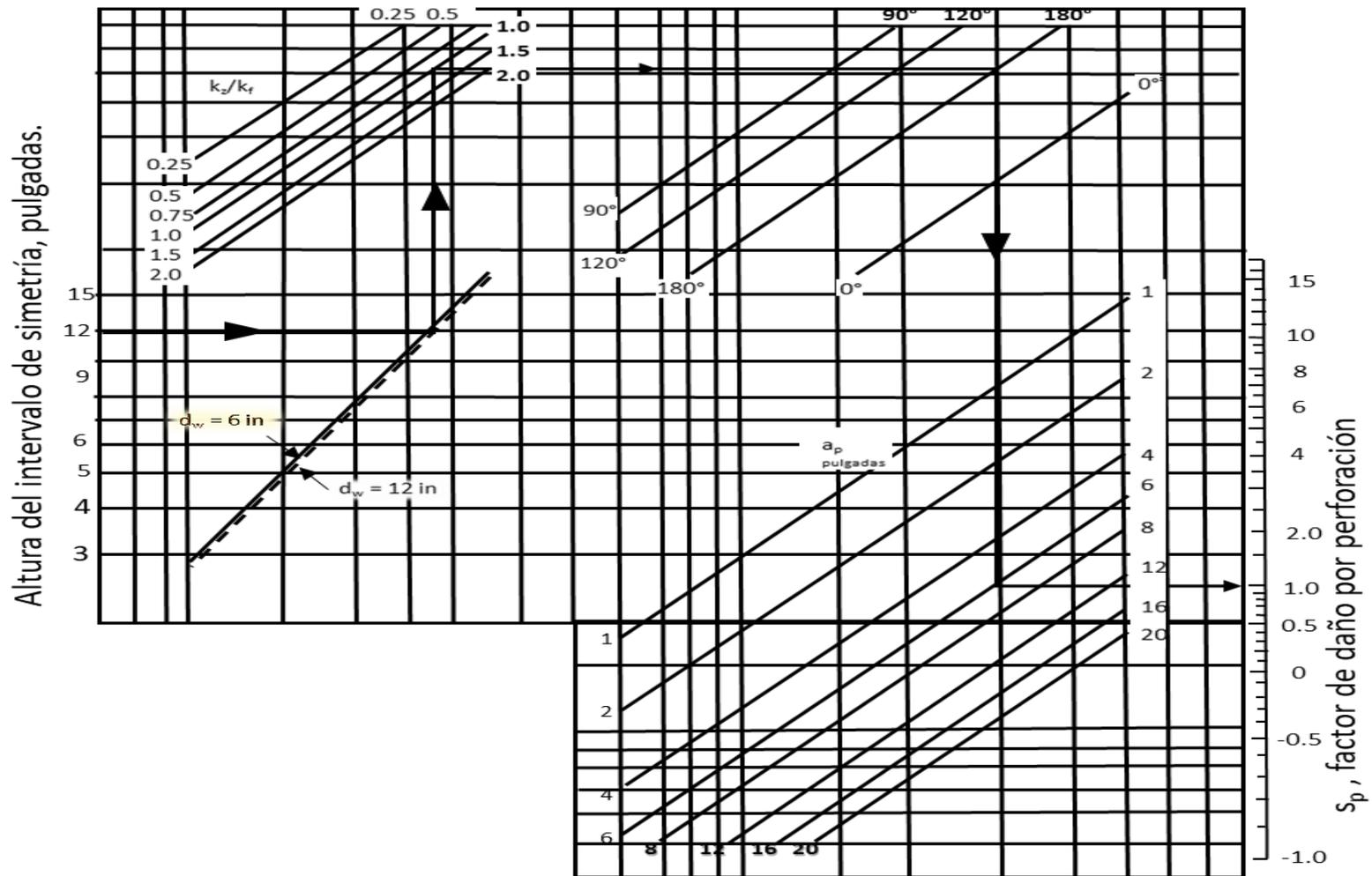
considerando que  $k_r = k_h$  ,  $k_z = k_v$ .

### 2.6.2.2 Pseudo-daño por disparos ( $S_p$ )

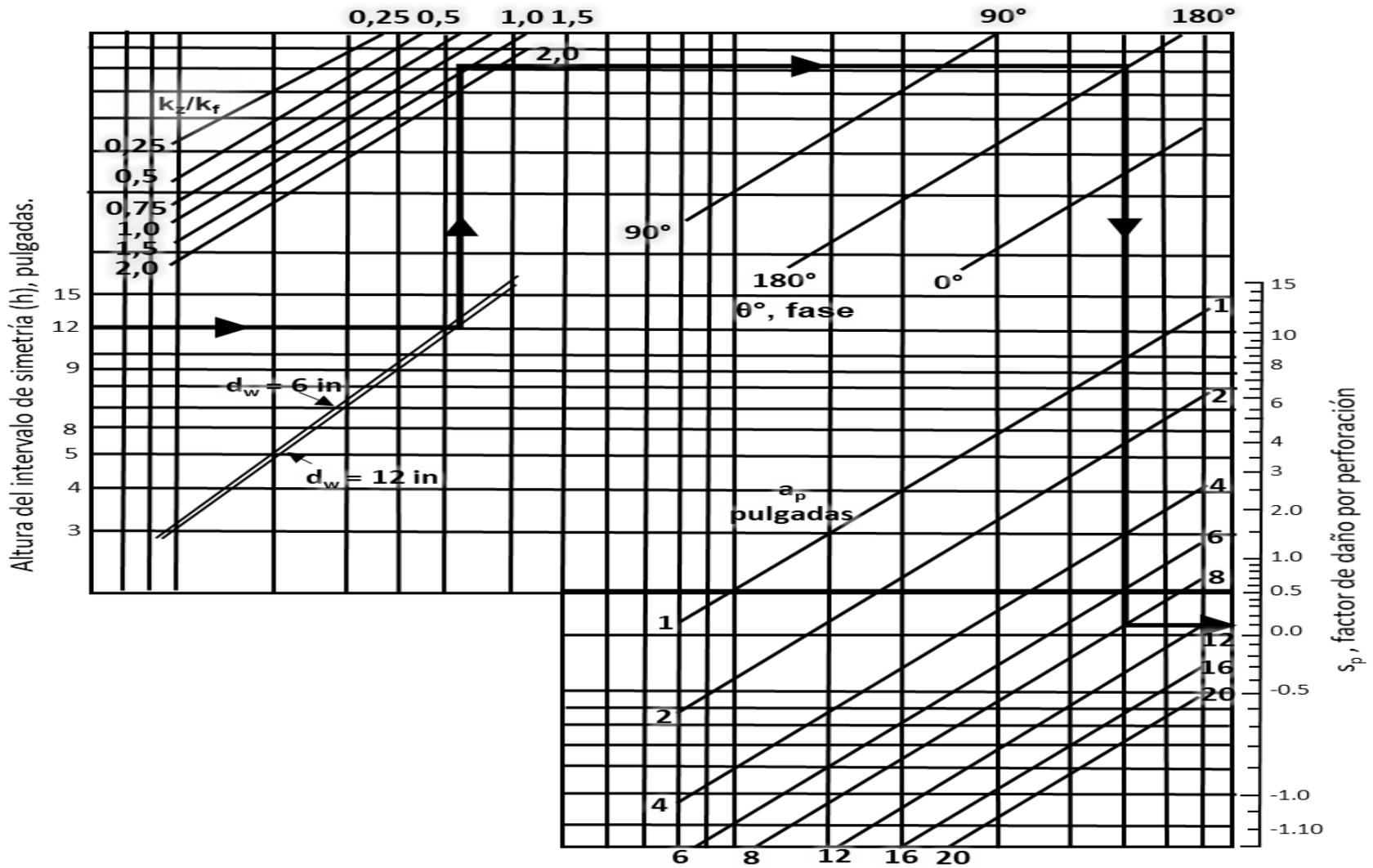
Para estimar el valor de  $S_p$  puede utilizarse la correlación gráfica de Hong (1975), para lo que se definen los siguientes parámetros:

1. Intervalo de simetría de las perforaciones  $h'$ ;
2. El diámetro del pozo  $d_w$ ;
3. La relación de permeabilidades  $k_z/k_r$ ;
4. Distribución angular de las perforaciones ( $\theta_d$ );
5. La longitud media de penetración de las perforaciones  $a_p$ ;
6. El diámetro medio de las perforaciones  $d_p$ .

Los nomogramas de Hong se muestran en la **Figura 2.30** a **Figura 2.32**. Los gráficos de las **Figura 2.30** y **Figura 2.31** permiten estimar el factor de daño considerando  $S_p$  en función del patrón geométrico. Estos gráficos consideran que el diámetro de los disparos es de 0.5 in, por lo que para corregir el valor estimado se incluye la **Figura 2.32**, de ¼ a 1 in.



**Figura 2.30** Nomograma para determinar el factor de pseudo-daño por flujo a través de disparos en un patrón simple, disparos de  $\frac{1}{2}$  in de diámetro (modificado de Hong, 1975).



**Figura 2.31** Nomograma para determinar el factor de pseudo-daño por flujo a través de disparos en un patrón escalonado, disparos de  $\frac{1}{2}$  in de diámetro (modificado de Hong, 1975).

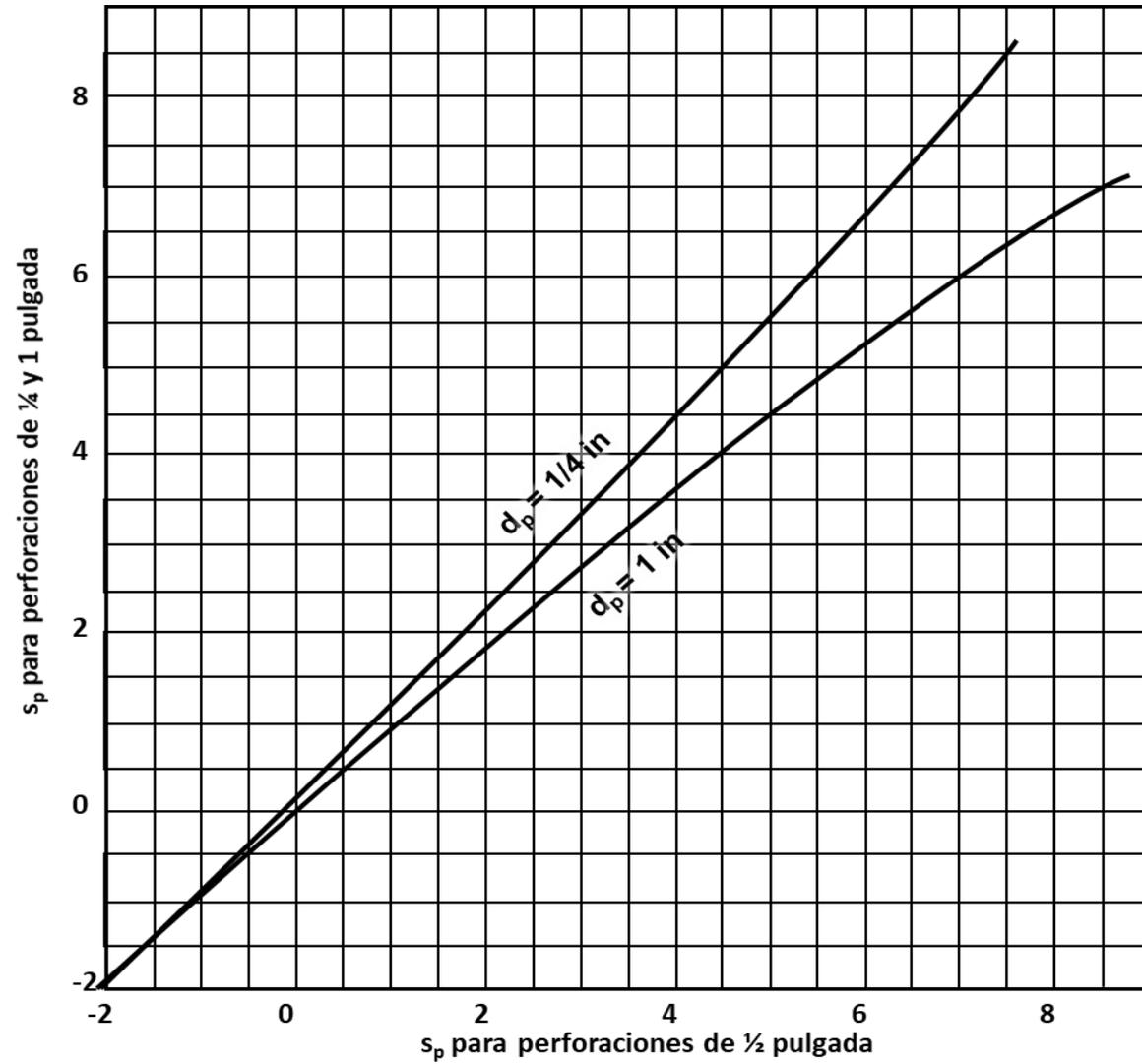


Figura 2.32. Factor de pseudo-daño  $S_p$  para diámetros de disparos de 1/4 y 1 in (modificado de Hong, 1975).

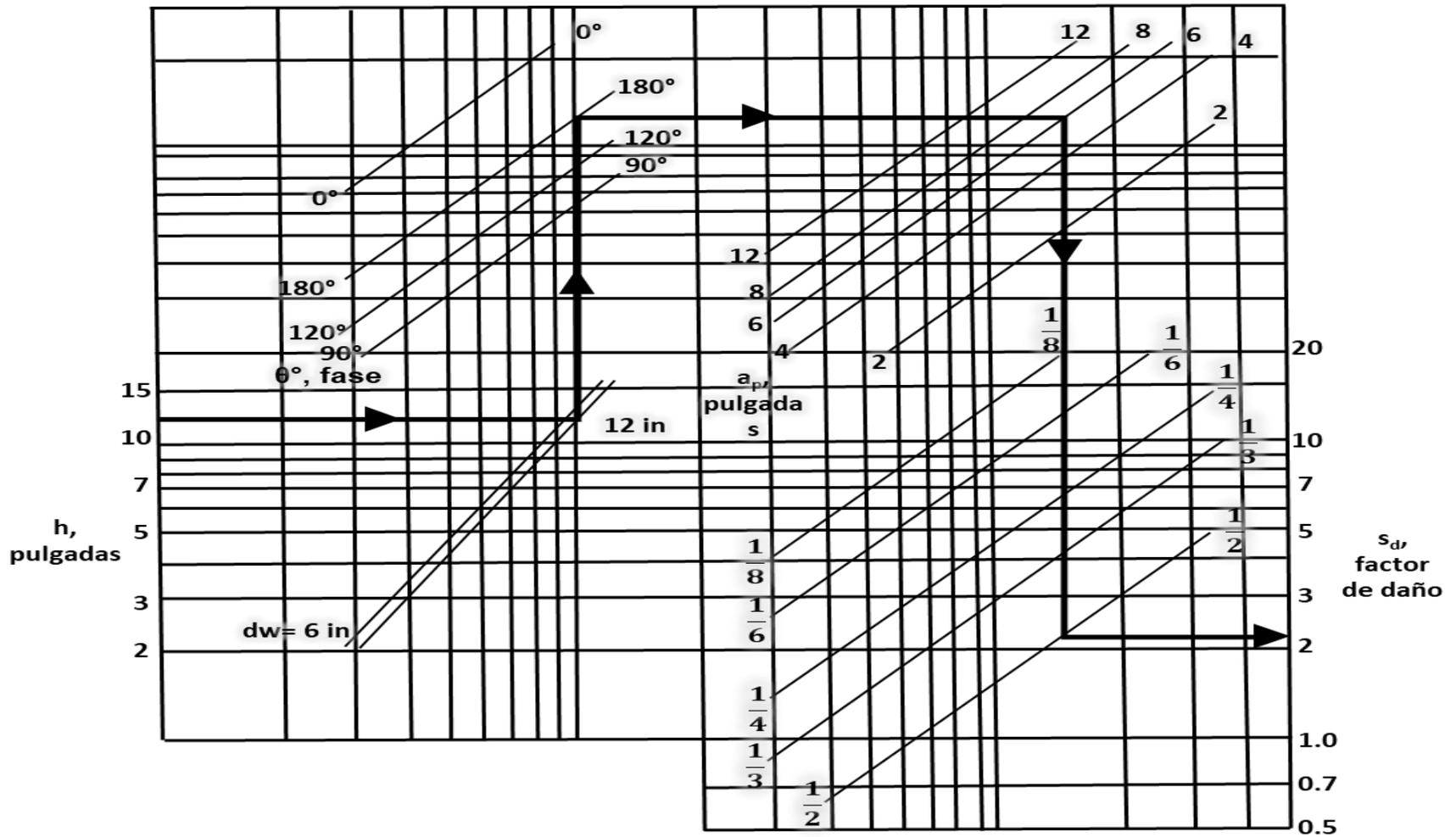


Figura 2.33. Nomograma para determinar el factor de daño de la formación cuando el disparo termina dentro de la zona dañada ( $r_w + a_p < r_s$ ) (modificado de Hong, 1975).

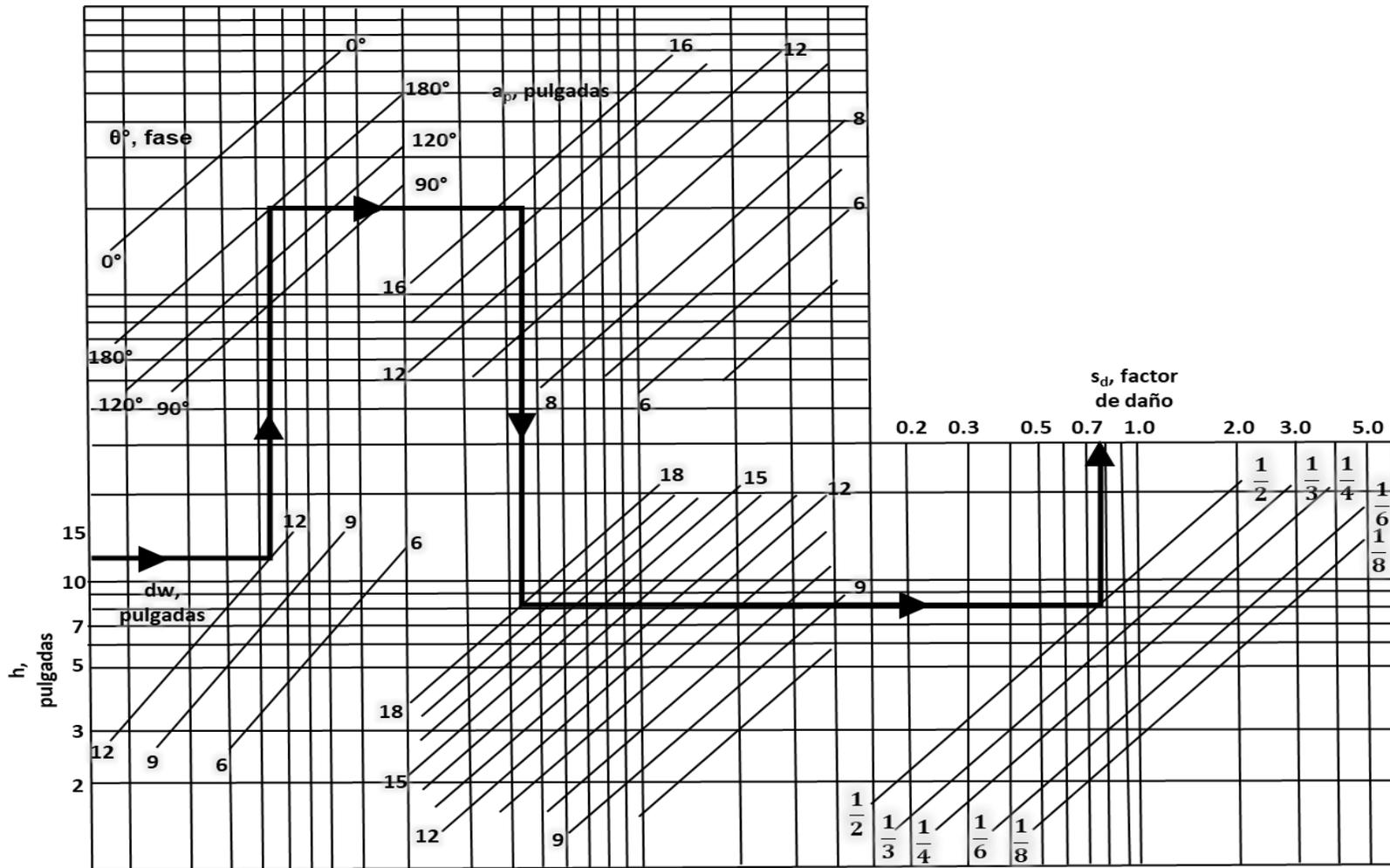


Figura 2.34. Nomograma para determinar el factor de daño de la formación cuando el disparo termina fuera de la zona dañada ( $r_w + a_p > r_s$ ) (modificado de Hong, 1975).

### 2.6.3 Eficiencia de flujo

La inclusión del daño en las ecuaciones de flujo permite estimar la eficiencia de flujo de un pozo como la razón del gasto obtenido de un pozo cuando fluye a condiciones reales respecto al gasto ideal. Esto puede representarse, a través de la solución para flujo estacionario, como:

$$EF = \frac{q}{q_{ideal}} = \frac{\ln \left| \Psi \frac{r_{eq}}{r_w} \right|}{\ln \left| \Psi \frac{r_{eq}}{r_w} \right| + S}, \quad \dots\dots\dots 2.81$$

donde  $\Psi = \sqrt{7.055/C_A}$  y  $r_{eq} = \sqrt{A/\pi}$ .

#### **Ejercicio 2.17 Pseudo-daño por convergencia por el método de Papatzacos.**

Considere la siguiente información conocida del yacimiento y un pozo producido a 120 STBD :

$$h = 600 \text{ ft}, \quad h_w = 90 \text{ ft}, \quad r_w = 0.3,$$

$$Z_1 = 0, \quad \Psi \frac{r_{eq}}{r_w} = 1130, \quad k_v = k_h, \quad k = 200 \text{ md}, \quad B_o = 1.333 \frac{\text{rbbl}}{\text{stb}}, \quad \mu = 5 \text{ cp}.$$

Determine el valor del pseudodaño por convergencia mediante el método de Papatzacos y estime la eficiencia de flujo y la caída de presión producida por el daño considerando que  $s = s_c$  y que es un yacimiento con flujo radial.

**Solución:**

Para este ejercicio se requerirá de la aplicación de las **Ecs. 2.78 a 2.81**, como primer paso será necesario determinar los valores constantes de las **Ecs. 2.78 y 2.79**, obteniendo los siguientes valores:

$$A = \frac{4h}{4Z_1 + h_w} = \frac{4(600)}{4(0) + (90)} = 26.66666 ,$$

$$B = \frac{4h}{4Z_1 + 3h_w} = \frac{4(600)}{4(0) + 3(90)} = 8.88888 .$$

con estos valores se procede a evaluar la **Ec.2.78** y de esta forma se obtiene el valor de pseudo-daño por convergencia que se requiere:

$$s_c = \left( \frac{600 - 90}{90} \right) \ln \left| \frac{\pi(600)}{2(0.3)} \sqrt{1} \right| + \frac{600}{90} \ln \left| \frac{90/600}{2 + 90/600} \sqrt{\frac{26.66666 - 1}{8.88888 - 1}} \right| = 31.4 ,$$

$$s_c = 31.4$$

Para estimar la eficiencia de flujo bastara con aplicar la **Ec.2.81**, obteniendo así:

$$EF = \frac{\ln|1130|}{\ln|1130| + 31.4} = 0.1823 ,$$

Es decir, el pozo está muy lejos de comportarse a condiciones ideales. Y la caída de presión saldrá del despeje de la **Ec 2.69**:

$$S \frac{\alpha_R q B \mu}{kh} = \Delta p_s ,$$

obteniendo una caída de presión de:

$$\Delta p_s = 31.4 \times \frac{141.2 \times 120 \times 1.333 \times 5}{200 \times 600} = 29.55 \text{ psia.}$$

**Ejercicio 2.18 Pseudo-daño por desviación de un pozo por el método de Cinco et al.**

Considere la siguiente información conocida del yacimiento y un pozo:

$$h = 150 \text{ ft}, \quad \theta_w = 24^\circ, 75^\circ$$

$$r_w = 0.29, \quad k_v = k_h$$

Determine el valor del pseudo-daño por la desviación de un pozo mediante el método de Cinco et al.

**Solución:**

El método de Cinco et al (**Ec.2.77**) requiere de considerar que  $k_r = k_h$  y  $k_z = k_v$  y de conocer los valores que arrojan las **Ecs. 2.74 y 2.75**. **Con  $\theta_w = 24^\circ$** , estos valores resultan:

$$h_D = \frac{150}{0.29} \sqrt{1} = 517.24,$$

$$\theta'_w = \tan^{-1}(\sqrt{1} \times \tan 24) = 24,$$

al sustituir estos valores constantes en la **Ec.2.77** se obtiene el valor de pseudodaño por desviación de pozo para este caso:

$$s_\theta = -\left(\frac{24}{41}\right)^{2.06} - \left(\frac{24}{56}\right)^{1.865} \log_{10}\left(\frac{517.24}{100}\right) = -0.471,$$

$$s_\theta = -0.471$$

De forma similar **con  $\theta_w = 75^\circ$** , los valores constantes resultan:

$$h_D = \frac{150}{0.29} \sqrt{1} = 517.24,$$

$$\theta'_w = \tan^{-1}(\sqrt{1} \times \tan 75) = 75,$$

con lo cual se determinan que el valor del pseudodaño por pozo desviado es de:

$$s_{\theta} = -\left(\frac{75}{41}\right)^{2.06} - \left(\frac{75}{56}\right)^{1.865} \log_{10}\left(\frac{517.24}{100}\right) = -4.691,$$

$$s_{\theta} = -4.691,$$

Al comparar los dos casos se observa que a una mayor área de contacto entre el pozo y el yacimiento el valor del pseudo-daño aumentará, el valor negativo indica una estimulación al pozo.

### **Ejercicio 2.19 Pseudo-daño por disparos por el método gráfico de Hong**

Estimar el factor de pseudo-daño por flujo a través de los disparos en el pozo Akbal 1-A de acuerdo con la siguiente información:

$$a_p = 5.5 \text{ in}, \quad d_p = 0.35 \text{ in}, \quad \theta^\circ = 0$$

$$r_w = 6 \text{ in}, \quad h_r = 10 \text{ in}, \quad k_z/k_r = 1/2$$

$$h = 2624.67 \text{ ft}, \quad h_w = 147.638 \text{ ft}, \quad Z_1 = 0, \quad \frac{r_s}{r_w} = 2.7 \times 10^6$$

El pozo fue disparado considerando un patrón simple y se terminó fuera de la región dañada. Estimar el daño total considerando los pseudo-daños por disparos y por convergencia.

Estime cuál sería la mejora si el pozo es disparado nuevamente para aumentar la densidad con  $h_r = 2 \text{ in}$  y el gasto antes de la mejora es de 7032 bpd.

**Solución:**

Como previamente se estableció, este método es puramente gráfico, para determinar cuál gráfico utilizar, hay que basarse primero en que zona se disparó, y como es el caso, si es fuera de la zona dañada determinar si  $r_w + a_p$  es mayor o menor a  $r_s$ . Se tiene como dato la relación  $r_s/r_w$ , bastará despejar y así determinar el valor de  $r_s$ , el cual resulta:

$$r_s = 16.2 \times 10^{-6},$$

por tanto, la relación queda  $r_w + a_p < r_s$ , con lo que se determina que la **Figura 2.33** será el gráfico auxiliar para la solución del ejercicio.

El primer caso de estudio será cuando se tiene un  $h_r = 10 \text{ in}$ , cuyo valor de  $s_d$ , se obtendrá del uso de la **Figura 2.33**, como se muestra en la

**Figura 2.35**, obteniendo un valor de:

$$s_d = 3.9$$

Es necesario hacer una corrección como lo establece Hong (**Figura 2.32**) al tener un valor inferior a 1/2 al diámetro de los disparos (**Figura 2.36**), esta corrección arroja un valor de pseudo-daño por disparos de:

$$s_d = 3.8$$

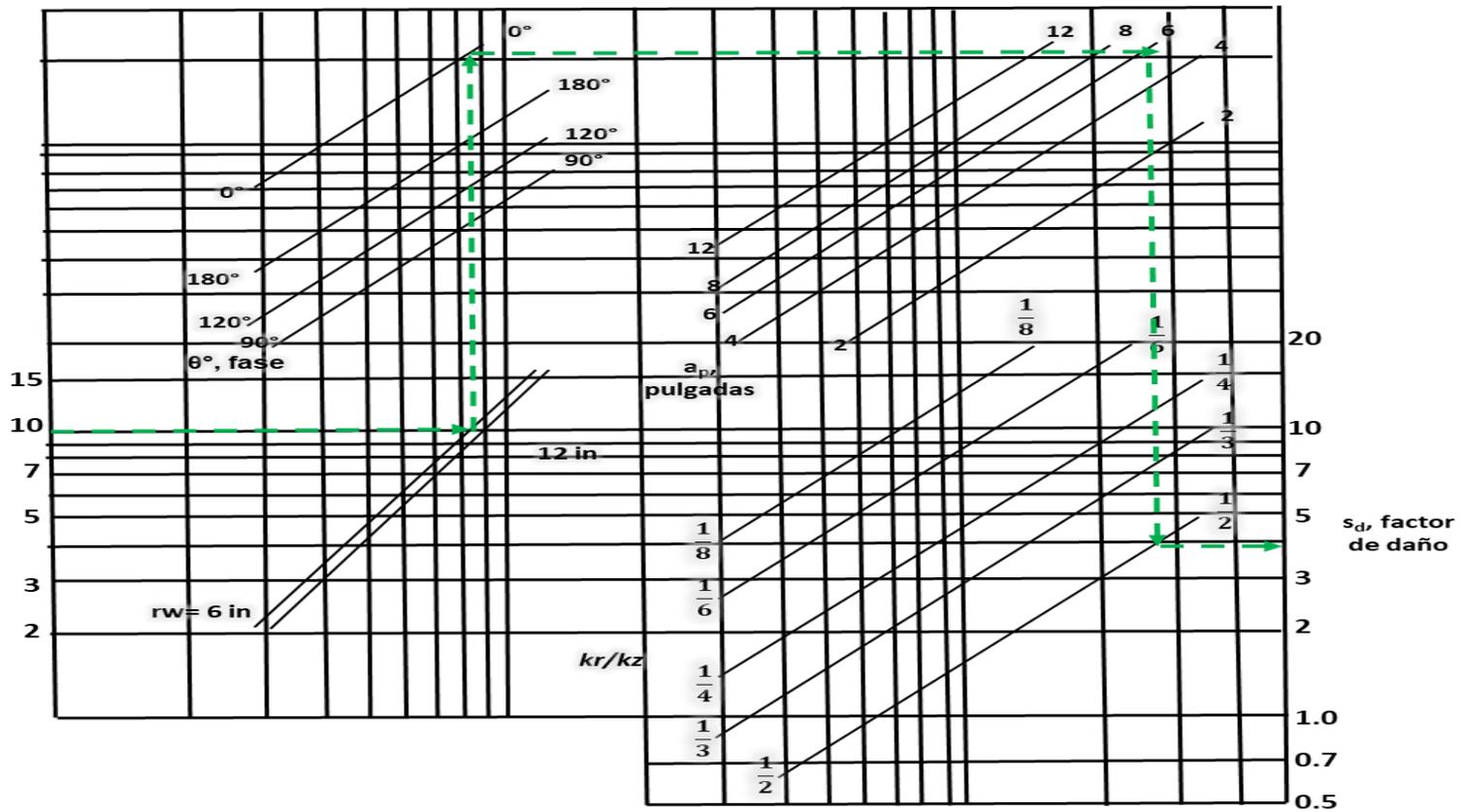


Figura 2.35 Método gráfico para la determinación del pseudo-daño por disparos, se inicia con el valor de  $h_r$ , para posteriormente alcanzar el  $r_w$ , secuencialmente se buscan los grados de la fase, el  $a_p$  y al final topar con la relación  $kr/kz$ , para determinar el valor de  $sd$ .

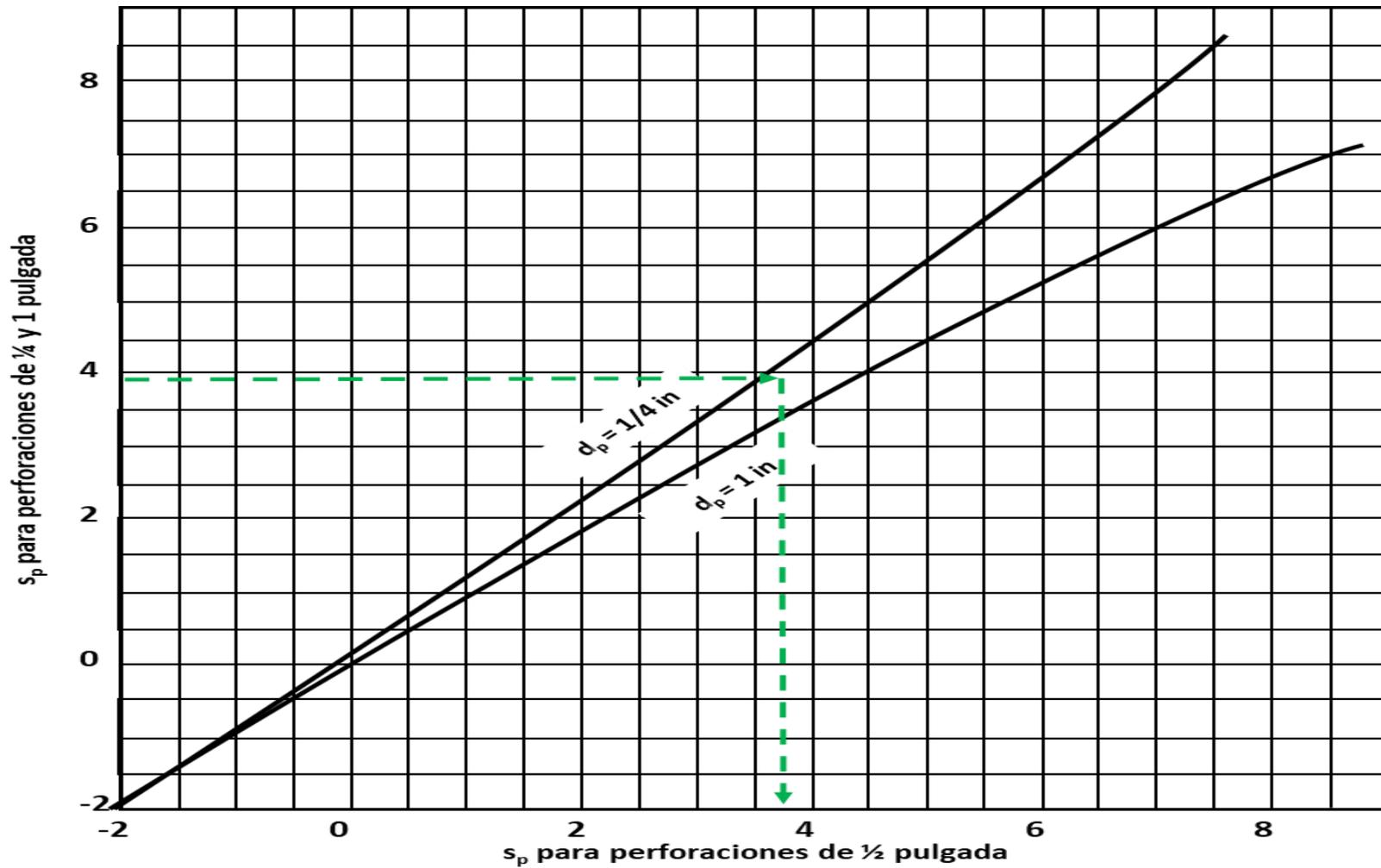


Figura 2.36. Calculo del valor de  $sd_{\text{corregido}}$  debido a que el diámetro de las perforaciones es menor a  $\frac{1}{2}$  de pulgada

Es necesario determinar el pseudo-daño por convergencia mediante el método de Papatzacos por ello se requerirá de la aplicación de las **Ecs. 2.78 a 2.81**, como primer paso será necesario determinar los valores constantes de las **Ecs. 2.78 y 2.79**, obteniendo los siguientes valores:

$$A = \frac{4(2624.67)}{147.638} = 71.1109 ,$$

$$B = \frac{4(2624.67)}{147.638(3)} = 23.70365 ,$$

recordando que  $k_r = k_h$ ,  $k_z = k_v$ , con estos valores se procede a evaluar la **Ec.2.78** de esta forma se obtiene el valor de pseudo-daño por convergencia que se requiere:

$$s_c = \left( \frac{2624.67 - 147.638}{147.638} \right) \ln \left| \frac{\pi(2624.67)}{2(6)} \sqrt{1} \right| + \frac{2624.67}{147.638} \ln \left| \frac{\frac{147.638}{2624.67}}{2 + \frac{147.638}{2624.67}} \sqrt{\frac{71.1109 - 1}{23.70365 - 1}} \right|$$

$$= 69.33.$$

$$s_c = \mathbf{69.33}$$

Con estos datos se puede estimar el daño total (**Ec.2.71**) considerando un daño por pseudo-daño por disparos y por convergencia

$$S_{tr} = s_c + \frac{h}{h_w} s_p,$$

obteniendo así:

$$S_{tr} = 69.33 + (17.77 \times 3.8) = \mathbf{136.856}$$

Para estimar el gasto futuro es necesario realizar el mismo procedimiento solo que ahora se considerara que  $h_r = 2 \text{ in}$ , realizando el mismo procedimiento el primer

pseudo-daño a calcular será por disparos por ello será necesario hacer uso de la **Figura 2.33**, tomando como ejemplo la

**Figura 2.35**, se obtiene un valor:

$$s_d = 1.$$

Es necesario hacer una corrección como lo establece Hong (**Figura 2.32**) al tener un valor inferior a 1/2 al diámetro de los disparos, esta corrección arroja un valor de pseudo-daño por disparos de:

$$s_d = 0.8.$$

:

El pseudo-daño por convergencia es el mismo que se tiene con  $h_r = 10 \text{ in}$ , por tanto, el daño total (**Ec.2.71**) es:

$$S_{tr} = s_c + \frac{h}{h_w} s_p = 69.33 + 17.77 \times 0.8 = 83.546,$$

el proceso para estimación del gasto futuro requiere de presentar la **Ec.2.82**.

$$\frac{q_x}{q_y} = \frac{\ln \left| \frac{r_e}{r_w} \right| + \frac{3}{4} + s_y}{\ln \left| \frac{r_e}{r_w} \right| + \frac{3}{4} + s_x}, \dots\dots\dots 2.82$$

Por tanto, aplicando la **Ec.2.82**, se obtiene:

$$\frac{q_{h_r=2}}{q_{h_r=10}} = \frac{\ln|27000| + \frac{3}{4} + 136.856}{\ln|27000| + \frac{3}{4} + 83.546} = 1.564$$

Por tanto, modificando la ecuación **Ec.2.82** para obtener el gasto  $q_{h_r=2}$ , se obtiene que:

$$q_{h_r=2} = 1.564 \times 7023 = 10984.88 \text{ STB}$$

## 2.7 Función derivada

La función derivada permite analizar los cambios en el comportamiento de la presión respecto al logaritmo natural de tiempo efectivo de estudio ( $\Delta t_e$ ):

$$Der f(p) = \frac{df(p)}{d \ln |\Delta t_e|} = \Delta t_e \frac{df(p)}{d\Delta t_e}, \dots\dots\dots 2.83$$

esta herramienta es especialmente útil para identificar los periodos del modelo de flujo que se aproximan a funciones de tipo exponencial, definidas como aquellas en donde:

$$f(p) = m_j g(\Delta t_e) + b_j, \dots\dots\dots 2.84$$

Y la función derivada resulta

$$d f(p) = w_j \Delta t_e^n, \dots\dots\dots 2.85$$

Donde  $m$ ,  $b$ ,  $\omega$  y  $n$ , son la pendiente, la ordenada al origen, la constante de proporcionalidad y el índice característicos del modelo  $j$  de interés, respectivamente.

Los valores característicos de los parámetros de las **Ecs. 2.84** y **2.85**, para flujo lineal, bilineal, radial, cilíndrico y esférico en estado transitorio, así como para los períodos de almacenamiento y flujo en estado pseudo-estacionario, se muestran en las **Tabla 2.11** y **Tabla 2. 12**.

**Tabla 2.11. Parámetros de los modelos de flujo para el análisis de pruebas de presión.**

| Modelo                         | $m_j$   | $g(\Delta t_e)$        | $b_j$  | Ec.         |
|--------------------------------|---|------------------------|--|-------------|
| Lineal, $j = l$                | $16.257 \frac{B}{bh} \sqrt{\frac{\mu}{k\phi c_t}}$                                      | $\Delta t_e^{1/2}$     | 0  | <b>2.86</b> |
| Bilineal, $j = bl$             | $44.13 \frac{B}{h\sqrt{(kb)_1}} \left( \frac{\mu^{3/4}}{\sqrt[4]{k\phi c_t}} \right)_2$ | $\Delta t_e^{1/4}$     | 0  | <b>2.87</b> |
| Radial, $j = r$                | $162.6 \frac{B\mu}{kh}$   | $\log_{10} \Delta t_e$ | $m_r \left[ \log_{10} \frac{\eta}{r_w^2} - 3.23 + 0.87S \right]$       | <b>2.88</b> |
| Esférico, $j = s$              | $-2452.87 \frac{B\mu}{k_s^{3/2}} \sqrt{\phi\mu c_t}$                                    | $\Delta t_e^{-1/2}$    | $70.6 \frac{B\mu}{k_s r_s}$  | <b>2.89</b> |
| Pseudo-estacionario, $j = pss$ | $0.234 \frac{B}{\phi c_t h A}$  | $\Delta t_e$           | $m_{pss} \left[ \log_{10} \frac{A}{C_A r_w^2} + 0.351 + 0.87S \right]$ | <b>2.90</b> |
| Almacenamiento, $j = ws$       | $\frac{B}{24C}$   | $\Delta t_e$           | 0  | <b>2.91</b> |

**Tabla 2. 12** Parámetros de la función derivada de los modelos de flujo para el análisis de pruebas de presión (Ec. 4.7).

| Modelo                         | $a_j$  | $n$  | Ec.         |
|--------------------------------|--|------|-------------|
| Lineal, $j = l$                | $8.1285 \frac{B}{bh} \sqrt{\frac{\mu}{k\phi c_t}}$                                 | 1/2  | <b>2.92</b> |
| Bilineal, $j = bl$             | $11.033 \frac{B}{h\sqrt{(kb)_1}} \sqrt[4]{\left(\frac{\mu^3}{k\phi c_t}\right)_2}$ | 1/4  | <b>2.93</b> |
| Radial, $j = r$                | $70.6 \frac{B\mu}{kh}$   | 0    | <b>2.94</b> |
| Esférico, $j = s$              | $1226.44 \frac{B\mu}{k_s^{3/2}} \sqrt{\phi\mu c_t}$                                | -1/2 | <b>2.95</b> |
| Pseudo-estacionario, $j = pss$ | $0.234 \frac{B}{\phi c_t h A}$   | 1    | <b>2.96</b> |
| Almacenamiento, $j = ws$       | $\frac{B}{24C}$  | 1    | <b>2.97</b> |

## Ejercicio 2.20 Determinación de la Eficiencia de flujo y permeabilidad de un pozo

Considere la siguiente información conocida del yacimiento y un pozo:

$$q = 1200 \text{ BPD}, \mu = 1.1 \text{ cp}, \phi = 0.13$$

$$r_w = 0.29 \text{ ft}, B = 1.25, h = 190 \text{ ft}$$

$$C_t = 15 \times 10^{-6} \text{ psi}^{-1}, r_{eq} = 1500 \text{ ft}, C_A = 4.5132$$

Se ha diagnosticado flujo radial, y se tiene la siguiente información del gráfico especializado:

$$m = 75 \frac{\text{psi}}{\text{ciclo}}, (\Delta p)_{1hr} = 120 \text{ psi}.$$

Estime la permeabilidad y la eficiencia del pozo.

### Solución:

Para obtener la permeabilidad será necesario ocupar la **Tabla 2.11** para buscar la ecuación de la pendiente para un modelo radial (**Ec.2.88**), a la cual será necesario realizar un sencillo despeje para determinar el valor de la permeabilidad:

$$k = \frac{\alpha q B \mu}{m h},$$

con lo cual la permeabilidad resulta:

$$k = \frac{(162.6)(1200)(1.25)(1.1)}{(75)(190)} = 18.8274 \text{ mD},$$

para la eficiencia de flujo es necesario hacer uso de la **Ec.2.81**,

$$EF = \frac{q}{q_{ideal}} = \frac{\ln \left| \Psi \frac{r_{eq}}{r_w} \right|}{\ln \left| \Psi \frac{r_{eq}}{r_w} \right| + s},$$

donde  $\Psi = \sqrt{7.055/C_A}$  y  $r_{eq} = \sqrt{A/\pi}$ ,

se observa que se carece de un dato para obtener la eficiencia, dicho dato es el daño, para su cálculo se hará uso de la **Ec.2.102**, obteniendo un valor de daño de:

$$s = 1.151 \left[ \left[ \frac{120}{75} \right] - \log_{10} \left( \frac{(18.8274)}{(0.13)(1.1)(15 \times 10^{-6})(0.29)^2} \right) + 3.2275 \right] = -3.6729,$$

$$s = -3.6729,$$

al contar con el daño se aplica la **Ec.2.81**, evaluando los valores constantes:

$$\Psi = \sqrt{\frac{7.055}{C_A}} = \sqrt{\frac{7.055}{4.5132}} = 1.2503,$$

$$r_{eq} = \frac{1500}{0.29} = 5172.413793,$$

para obtener un valor de eficiencia de flujo de:

$$EF = \frac{\ln|(1.2503)(5172.413793)|}{\ln|(1.2503)(5172.413793)| - 3.6729} = 1.7199,$$

$$EF = 1.7199.$$

## 2.8 Pruebas de presión

Las pruebas de presión son estudios controlados de corta duración en los que se generan variaciones en las condiciones de producción para medir cambios en la respuesta de uno o más pozos, mismos que se asume son un reflejo del comportamiento de flujo de los fluidos en el yacimiento; por lo que el objetivo del análisis de estas pruebas es encontrar una posible explicación a los comportamientos observados durante la medición, para lo que se identifica el modelo de interpretación más adecuado que define los parámetros a obtener y el significado de los mismos.

Entre los datos que se pueden conocer en estas pruebas están: la presión inicial del yacimiento  $p_i$ , la permeabilidad efectiva  $k$ , el factor de daño total de un pozo  $s$ , estimaciones del volumen original  $G$  y  $N$ , fronteras de flujo y no flujo. Cuyo método de obtención es mediante un gráfico semi-logarítmico de presión contra tiempo de evaluación.

A continuación, se enlistan los tipos de básicos de pruebas de presión.

### 2.8.1 Pruebas de decremento de presión

En este tipo de pruebas, el gasto se mantiene aproximadamente constante mientras se mide la presión. Para ello, el pozo es cerrado hasta que su presión se iguale con el valor estático y, entonces es puesto a fluir. En donde el tiempo de estudio se calcula con ayuda de la **Ec.2.98**

$$\Delta t_e = \Delta t, \dots\dots\dots 2.98$$

### 2.8.2 Pruebas de incremento de presión

En este tipo de pruebas, requieren producir un pozo a un gasto constante hasta que su presión se estabilice y, entonces, el pozo es cerrado y la presión medida. Dado que el

gasto siempre permanece constante, este tipo de pruebas son las preferidas para determinar los parámetros fluyentes de un pozo. Además, puede determinarse el valor de  $p^*$ . El tiempo de estudio se calcula con ayuda de la **Ec. 2.99**, que para este caso se conoce como el tiempo de Horner:

$$\Delta t_e = \frac{t_p + \Delta t}{t}, \dots\dots\dots 2.99$$

### 2.8.3 Pruebas a gasto variable

Se refiere a pruebas que son conducidas considerando un esquema de gastos múltiples, que son estudiadas a través de la superposición de los efectos. Cuyo tiempo de estudio se calcula con ayuda de la **Ec. 2.100** y para este caso en específico la forma adecuada de obtener la pendiente se basa en la **Ec.2.101**:

$$\Delta t_e = \prod_{j=1}^{n-1} \left( \frac{t_{n-1} - t_{j-1}}{\Delta t + t_{n-1} - t_{j-1}} \right)^{\frac{q_j - q_{j-1}}{q_{n-1} - q_n}}, \dots\dots\dots 2.100$$

$$\frac{\Delta p}{q_N} = m \sum_{j=1}^N \frac{\Delta q_j}{q_j} \log(t - t_{j-1}), \dots\dots\dots 2.101$$

## Ejercicio 2.21 Prueba de incremento

Se realizó una prueba de incremento en un nuevo pozo de aceite que produjo a un gasto de 500 BPD por tres días. La información registrada se muestra a continuación en la **Tabla 2.13**.

**Tabla 2.13. Datos de prueba de incremento de presión**

|                                  |      |      |      |      |      |      |      |
|----------------------------------|------|------|------|------|------|------|------|
| <b>Tiempo de estudio (horas)</b> | 0    | 2    | 4    | 8    | 16   | 24   | 48   |
| <b>Pws (psia)</b>                | 1150 | 1794 | 1823 | 1850 | 1876 | 1890 | 1910 |

$$h = 22 \text{ ft}, B_o = 1.3, \phi = 0.2$$

$$C_t = 20 \times 10^{-6}, \mu = 1 \text{ cp}, r_w = 0.3 \text{ ft}$$

Estime la permeabilidad, presión inicial y el factor de daño.

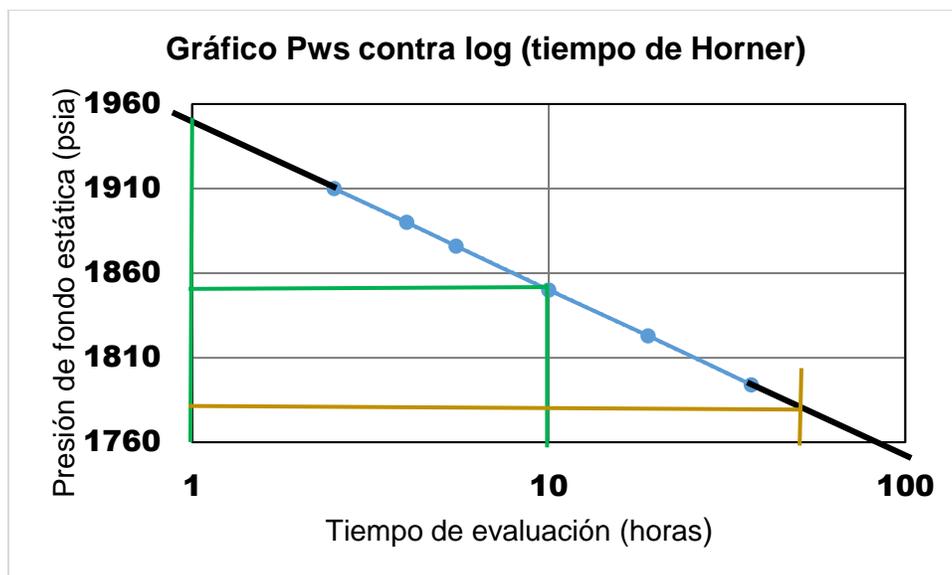
### Solución:

La solución radica en la elaboración de un gráfico de presión contra tiempo, en este caso el tiempo de Horner (**Ec.2.99**), para poder estimar las incógnitas planteadas, como primer paso, con ayuda de la **Ec.2.99**, se obtiene el tiempo de Horner para este ejercicio (**Tabla 2.14**).

**Tabla 2.14** Obtención del tiempo de Horner para el *Ejercicio 2.21*.

| <i>tiempo de Horner</i> |
|-------------------------|
| -                       |
| 37                      |
| 19                      |
| 10                      |
| 5.5                     |
| 4                       |
| 2.5                     |

En el momento en que se obtienen los valores de tiempo de Horner y con los valores de presión reportados se procede a elaborar el gráfico que se requiere para estimar las incógnitas (*Figura 2.37*).



**Figura 2.37** Gráfico semilogarítmico para dar solución al *Ejercicio 2.21*.

Para obtener la permeabilidad será necesario ocupar la **Tabla 2.11** para buscar la ecuación de la pendiente para un modelo radial (**Ec.2.88**), a la cual será necesario realizar un sencillo despeje para determinar el valor de la permeabilidad:

$$k = \frac{\alpha q B \mu}{m h},$$

con lo cual la permeabilidad resulta:

$$k = \frac{162.6(500)(1.3)(1)}{(100)(22)} = 48.041 \text{ mD},$$

donde la pendiente se obtuvo de aplicar la siguiente expresión:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{1 \text{ ciclo}}$$

y los valores  $y_2$  y  $y_1$ , se estiman a partir del gráfico (**Figura 2.37**), con las líneas de color verde, determinando que la pendiente es:

$$m = \frac{1950 - 1850}{1 \text{ ciclo}} = 100 \frac{\text{psi}}{\text{ciclo}}.$$

La presión inicial, se estima a partir de la **Figura 2.37**, extrapolarlo la recta del gráfico al tiempo 0, recordando que el eje del tiempo es logarítmico por tanto  $\ln|0| = 1$ ; con ello se obtiene que la presión inicial (línea negra de la **Figura 2.37**) es de:

$$p_i = 1950 \text{ psia},$$

Para el cálculo del daño, para su cálculo es necesario presentar la **Ec.2.102**, la cual considera valor de la pendiente del gráfico generado de la interpretación de una prueba de presión.

$$s = 1.151 \left[ \left[ \frac{\Delta p_w}{m} \right] - \log_{10} \left( \frac{k}{\phi \mu c_t r_w^2} \right) + 3.2275 \right], \dots\dots\dots 2.102$$

sustituyendo valores en la **Ec.2.102**, se obtiene un daño de:

$$s = 1.151 \left[ \frac{1785 - 1150}{100} - \log_{10} \left( \frac{48}{0.2 \times 1 \times 2 \times 10^{-5} \times 0.3^2} \right) + 3.23 \right] = 1.675,$$

cabe aclarar que el término  $\Delta p_w$ , en una prueba de incremento es igual a  $p_{ws1h} - p_{wsi}$ , por tanto fue necesario determinar  $p_{ws1h}$ , bastó con obtener el tiempo de Horner (**Ec.2.99**), con este valor entrar a la **Figura 2.37**, para así determinar fácilmente el valor de la presión(línea marrón de la **Figura 2.37**).

### **Ejercicio 2.22 Prueba de decremento**

Se realizó una prueba de decremento en un nuevo pozo de aceite que produjo a un gasto de 100 BPD por 400 días. La información registrada se muestra a continuación en la **Tabla 2.15**.

**Tabla 2.15 Datos de prueba de decremento de presión**

|                             |            |            |            |            |            |
|-----------------------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| Tiempo de estudio (horas) 1 | 9.142238   | 10.414514  | 11.863845  | 13.514871  | 15.395663  |
| Pwf (psia) 1                | 1851.92545 | 1829.66413 | 1808.03495 | 1786.90279 | 1766.17104 |
| Tiempo de estudio (horas) 2 | 17.538193  | 19.978888  | 22.759241  | 25.926521  | 29.534574  |
| Pwf (psia) 2                | 1745.76824 | 1725.63982 | 1705.7426  | 1686.04208 | 1666.50978 |
| Tiempo de estudio (horas) 3 | 33.644739  | 38.326895  | 43.66064   | 49.736654  | 56.658233  |
| Pwf (psia) 3                | 1647.1223  | 1627.85973 | 1608.705   | 1589.64418 | 1570.66527 |
| Tiempo de estudio (horas) 4 | 64.543051  | 73.525156  | 83.757252  | 95.413293  | 108.691441 |
| Pwf (psia) 4                | 1551.75749 | 1532.91166 | 1514.12034 | 1495.37666 | 1476.6744  |
| Tiempo de estudio (horas) 5 | 123.817438 | 141.048437 | 160.67738  | 183.037976 | 208.510375 |
| Pwf (psia) 5                | 1458.00869 | 1439.37518 | 1420.76992 | 1402.18942 | 1383.63079 |
| Tiempo de estudio (horas) 6 | 237.527629 | 270.583057 | 308.238628 | 351.13452  | 400        |
| Pwf (psia) 6                | 1365.09137 | 1346.56855 | 1328.06049 | 1309.56567 | 1291.08241 |

Considerando las siguientes propiedades de yacimiento y de fluido:

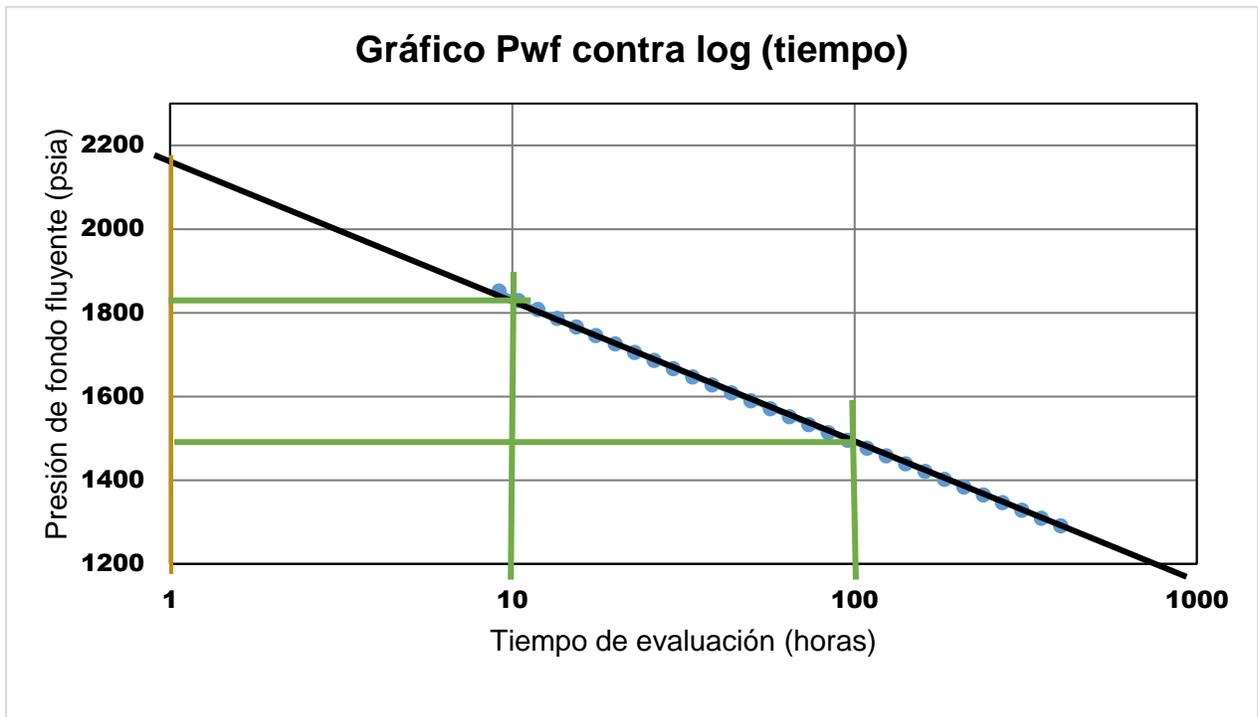
$$h = 50 \text{ ft}, B_o = 1.0, \phi = 0.3, p_i = 2500 \text{ psia}$$

$$C_t = 1 \times 10^{-6}, \mu = 1 \text{ cp}, r_w = 1 \text{ ft}.$$

Estime la permeabilidad y el factor de daño.

**Solución:**

En las pruebas de decremento es necesario elaborar un gráfico especializado de presión contra el tiempo en una escala semilogarítmica, el cual para este caso se observa en la **Figura 2.38**:



**Figura 2.38** Gráfico especializado de presión contra tiempo de una prueba de decremento de presión

Para obtener la permeabilidad será necesario ocupar la **Tabla 2.11** para buscar la ecuación de la pendiente para un modelo radial (**Ec.2.88**), a la cual será necesario realizar un sencillo despeje para determinar el valor de la permeabilidad:

$$k = \frac{\alpha q B \mu}{m h},$$

con lo cual la permeabilidad resulta:

$$k = \frac{162.6(100)(1)(1)}{(350)(50)} = 0.93 \text{ mD},$$

donde la pendiente se obtuvo de aplicar la siguiente expresión:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{1 \text{ ciclo}}$$

y los valores  $y_2$  y  $y_1$ , se estiman a partir del gráfico (**Figura 2.38**), con las líneas de color verde, determinando que la pendiente es:

$$m = \frac{1850 - 1500}{1 \text{ ciclo}} = 350 \frac{\text{psi}}{\text{ciclo}}.$$

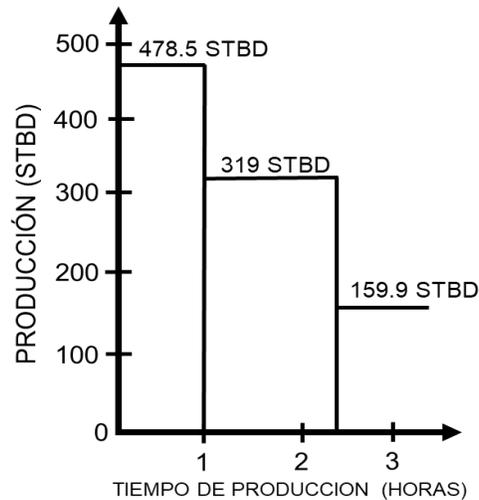
Para el cálculo del daño, para su cálculo es necesario utilizar la **Ec.2.102**, la cual considera valor de la pendiente del gráfico generado de la interpretación de una prueba de presión obteniendo un daño de:

$$s = 1.151 \left[ \frac{2500 - 2180}{350} - \log_{10} \left( \frac{0.93}{0.3 \times 1 \times 1 \times 10^{-6} \times 1^2} \right) + 3.23 \right] = 11.64,$$

cabe aclarar que el término  $\Delta p_w$ , en una prueba de decremento es igual a  $p_{wf_i} - p_{wf_{1hr}}$ , por tanto fue necesario determinar  $p_{wf_{1hr}}$ , bastó determinar la presión (línea marrón de la **Figura 2.38**)

### Ejercicio 2.23 Prueba de gasto múltiple

Una prueba de presión de gastos múltiples fue realizada durante tres horas en un pozo de aceite de 0.333 ft. El histórico de producción se muestra en la **Figura 2.39**.



**Figura 2.39.** Histórico de producción para el **Ejercicio 2.23**

Considerando las siguientes propiedades de yacimiento y de fluido:

$$h = 20 \text{ ft}, \quad B_o = 0.15, \quad \phi = 0.039, \quad p_i = 3000 \text{ psia},$$

$$C_t = 12 \times 10^{-6} \text{ psia}^{-1}, \quad \mu = 0.6 \text{ cp}, \quad r_w = 0.198 \text{ ft},$$

el yacimiento se considera infinito durante la prueba, estime la capacidad de flujo de la formación  $kh$  y el daño.

Para realizar la prueba se utilizó un empacador de fondo para eliminar el almacenamiento. Cuyos datos son los siguientes (**Tabla 2. 16**):

**Tabla 2. 16. Datos de prueba de incremento de presión**

|                           |      |       |       |       |        |       |        |      |
|---------------------------|------|-------|-------|-------|--------|-------|--------|------|
| Tiempo de estudio (horas) | 0    | 0.333 | 0.667 | 1     | 2      | 2.333 | 2.667  | 3    |
| $P_{wf}$ (psia)           | 3000 | 999   | 857   | 778.5 | 1378.5 | 2,043 | 2067.5 | 2094 |

**Solución:**

La solución para este problema, es similar a las pruebas de incremento y decremento, es decir la solución se obtiene mediante el método gráfico, lo que se busca es representar linealmente el comportamiento de la **Ec.2.101** donde:

$$y = \frac{\Delta p}{q_N},$$

$$x = \sum_{j=1}^N \frac{\Delta q_j}{q_j} \log(t - t_{j-1}),$$

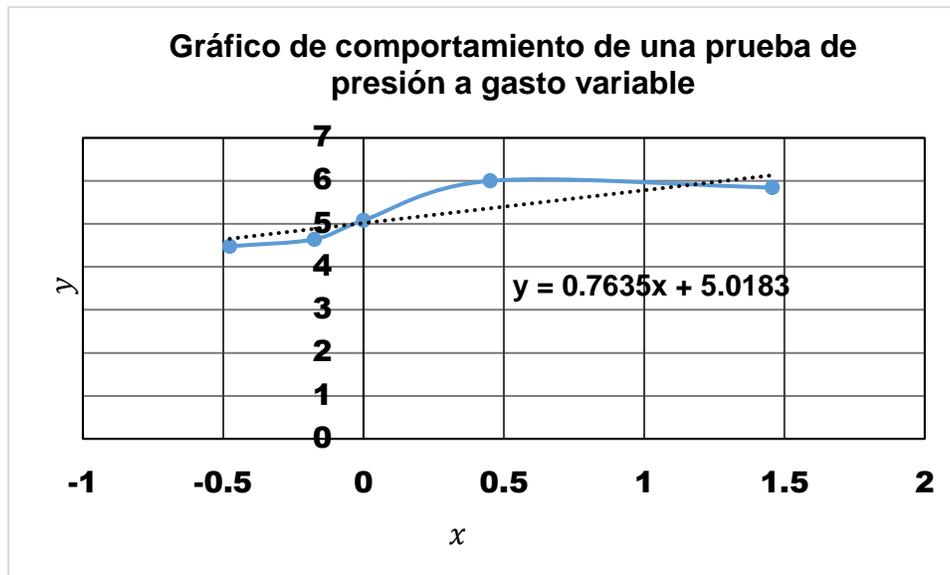
$$b = \text{variable},$$

Para facilitar la comprensión del ejercicio y sobre todo la aplicación de la **Ec.2.101**, esta se desglosa con base al número de intervalos de tiempo y los gasto o gastos al cual se puso en producción dicho intervalo, dicho desglose se presenta en la **Tabla 2.17**.

**Tabla 2.17** Desglose de la Ec 2.101, para el caso particular del **Ejercicio 2.23**

| $t$   | $\frac{\Delta p}{q_N}$        | $\frac{q_1 - q_0}{q_j} \log(t - t_0)$                   | $\frac{q_2 - q_1}{q_j} \log(t - t_1)$                            | $\frac{q_3 - q_2}{q_j} \log(t - t_2)$                            | $\frac{p_i - p_j}{q_N}$       | $g(t)$ |
|-------|-------------------------------|---|--|--|-------------------------------|--------|
| 0     | 0                             | -   | -  | -  | -                             | -      |
| 0.333 | $\frac{3000 - 999}{478.5}$    | $\frac{478.5 - 0}{478.5} \log\left(\frac{1}{3}\right)$  | -  | -  | $\frac{3200 - 999}{478.5}$    | -0.477 |
| 0.667 | $\frac{3000 - 857}{478.5}$    | $\frac{478.5 - 0}{478.5} \log\left(\frac{2}{3}\right)$  | -  | -  | $\frac{3200 - 857}{478.5}$    | -0.175 |
| 1     | $\frac{3000 - 778.5}{478.5}$  | $\frac{478.5 - 0}{478.5} \log(1)$                       | -  | -  | $\frac{3200 - 778.5}{478.5}$  | 0      |
| 2     | $\frac{3000 - 1378.5}{319}$   | $\frac{478.5 - 0}{319} \log(2)$                         | $\frac{319 - 478.5}{319} \log(2)$<br>-1)                         | -  | $\frac{3200 - 1378.5}{319}$   | 0.4515 |
| 2.333 | $\frac{3000 - 2043}{159.5}$   | $\frac{478.5 - 0}{159.5} \log\left(2\frac{1}{3}\right)$ | $\frac{319 - 478.5}{159.5} \log\left(2\frac{1}{3}\right)$<br>-1) | $\frac{159.5 - 319}{159.5} \log\left(2\frac{1}{3}\right)$<br>-2) | $\frac{3200 - 2043}{159.5}$   | 1.4565 |
| 2.667 | $\frac{3000 - 2067.5}{159.5}$ | $\frac{478.5 - 0}{159.5} \log\left(2\frac{2}{3}\right)$ | $\frac{319 - 478.5}{159.5} \log\left(2\frac{2}{3}\right)$<br>-1) | $\frac{159.5 - 319}{159.5} \log\left(2\frac{2}{3}\right)$<br>-2) | $\frac{3200 - 2067.5}{159.5}$ | 1.2320 |
| 3     | $\frac{3000 - 2094}{159.5}$   | $\frac{478.5 - 0}{159.5} \log(3)$                       | $\frac{319 - 478.5}{159.5} \log(3)$<br>-1)                       | $\frac{159.5 - 319}{159.5} \log(3)$<br>-2)                       | $\frac{3200 - 2094}{159.5}$   | 1.1303 |

Una vez obtenidos los valores de  $\frac{p_i - p_j}{q_N}$  y  $\sum_{j=1}^N \frac{\Delta q_j}{q_j} \log(t - t_{j-1})$ , es decir los términos  $y$  y  $x$ , se elabora el gráfico  $x$  contra  $y$  para obtener la pendiente (**Figura 2.40**) y de esta forma conocer el valor de las incógnitas planteadas por el ejercicio.



**Figura 2.40.** Gráfico de comportamiento de la prueba a gasto variable del **Ejercicio 2.23.**

Con ayuda de las herramientas de Excel se busca la ecuación de la línea de tendencia del gráfico plasmado en la **Figura 2.40**, del cual se extrae el valor de la pendiente. Para obtener la permeabilidad será necesario ocupar la **Tabla 2.11** para buscar la ecuación de la pendiente para un modelo radial (**Ec.2.88**), a la cual será necesario realizar un sencillo despeje para determinar el valor de la capacidad de flujo de la formación:

$$kh = \frac{\alpha q B \mu}{m},$$

con lo cual resulta:

$$kh = \frac{\alpha B \mu}{m} = \frac{162.2 \times 0.6 \times 1}{0.7635} = 127.466 \text{ mD.ft.}$$

Para el cálculo del daño es necesario hacer uso de la **Ec.2.102**, con la cual se obtiene un daño de:

$$s = 1.151 \left[ \frac{4.6423}{0.7635} - \log_{10} \left( \frac{5.12}{0.15 \times 0.6 \times 12 \times 10^{-6} \times 0.3332^2} \right) + 3.23 \right] = 1.933$$

cabe aclarar que el término  $\Delta p_w$ , en una prueba a gasto variable no hace alusión  $p_{ws1h} - p_{wsi}$ , más bien hace referencia al término  $\frac{p_i - p_j}{q_N}$ , evaluado a una hora.

## 2.9 EJERCICIOS PROPUESTOS

### **Ejercicio 1. a** Consistencia de las condiciones en un problema de flujo.

Un yacimiento heterogéneo e isótropo, que produce a presión de fondo fluyente constante, posee la siguiente distribución de permeabilidades

$$\frac{1}{k(x)} = \frac{x^4 + 1}{1500} \cdot \dots\dots\dots 2.103$$

Considerando que la ecuación de flujo que representa el problema es:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{k_x} \frac{\partial p}{\partial x} \right) = 0, \dots\dots\dots 2.104$$

determine la expresión que permite conocer la presión en cualquier punto y el gasto en el pozo con las siguientes condiciones:

- **Condición de frontera interna:**  $p(x = 0) = 150 \text{ psia}$  ,
- **Condición de frontera externa:**  $p(x = L = 5000 \text{ ft}) = 6250 \text{ psia}$  .

Grafique sus resultados y explique el comportamiento observado.

### **Ejercicio 1. b** Utilización de la solución línea fuente

Un pozo de 1 ft de radio está sometido a un gasto de 275 STBD, cuyas propiedades de pozo y yacimiento son las siguientes:

$$\phi = 0.1 [\text{Fracc.}], k = 200 \text{ md}, r_e = 1320 \text{ ft}, S_o = 0.60,$$

$$p_i = 3200 \text{ psia}, B_o = 1.15 \frac{\text{rbbl}}{\text{stb}}, h = 123 \text{ ft}, \mu = 0.5 \text{ cp},$$

$$C_o = 9 \times 10^{-6} \text{ psi}^{-1}, \quad C_w = 4 \times 10^{-6} \text{ psi}^{-1}, \quad C_f = 3.3 \times 10^{-6} \text{ psi}^{-1}.$$

el modelo de flujo es radial, determine el comportamiento, de 1 a 100 horas, de la caída de presión de fondo ( $\Delta p_{wf}$ ) contra el tiempo.

### **Ejercicio 1. c Utilización de la solución línea fuente**

Un pozo de 7 ft de radio está sometido a un gasto de 65 STBD, cuyas propiedades de pozo y yacimiento son las siguientes:

$$\phi = 0.32 [\text{Fracc.}], \quad k = 20 \text{ md}, \quad r_e = 1320 \text{ ft},$$

$$p_i = 3200 \text{ psia}, \quad B_o = 1.15 \frac{\text{rbbl}}{\text{stb}}, \quad h = 23 \text{ ft}, \quad \mu = 5 \text{ cp},$$

$$C_t = 1.05 \times 10^{-6}.$$

el modelo de flujo es radial, determine el comportamiento, de 1, 2, y 10 horas, considerando un  $r_D = 7$ .

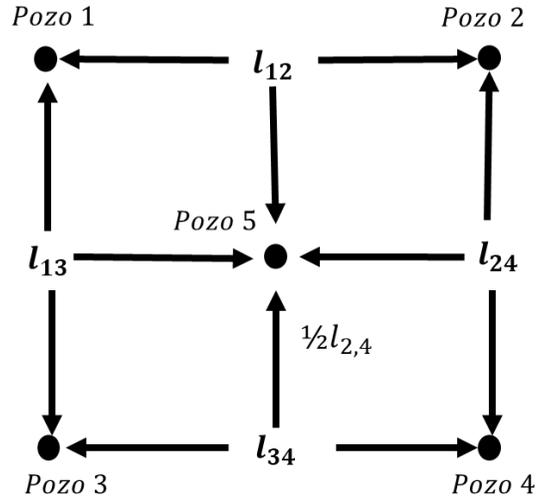
### **Ejercicio 1. d Superposición en espacio a condiciones de gasto constante**

Con base en el arreglo de la **Figura 2.41**, cuyas propiedades de pozo y yacimiento son las siguientes:

$$\phi = 0.1 [\text{Fracc.}], \quad k = 90 \text{ md}, \quad c_t = 1.105 \times 10^{-5}, \quad r_{w1,2,3,4} = 1 \text{ ft},$$

$$p_i = 2000 \text{ psia}, \quad B = 0.7 \frac{\text{rbbl}}{\text{stb}}, \quad h = 50 \text{ ft}, \quad \mu = 5 \text{ cp}, \quad l_{12} = 36.585 \text{ m},$$

$$l_{12} = l_{24} = l_{34} = l_{13},$$



**Figura 2.41. Configuración de los pozos para el Ejercicio 1. d**

considerar que los pozos presentan los siguientes ritmos de producción constantes:

$$q_1 = 100 \text{ STBD}, \quad q_2 = 300 \text{ STBD}, \quad q_3 = 50 \text{ STBD}, \quad q_4 = 180 \text{ STBD}$$

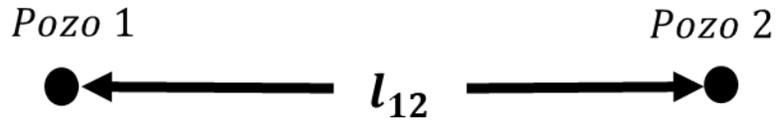
1. Estime la presión observada en el pozo 5 (pozo observador), tras 100 horas de producción.
2. Considerando que  $q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = 200 \text{ STBD}$ , estimar la presión a 20 horas de producción en el pozo 1, pozo 2, pozo 3 y pozo 4.

### **Ejercicio 1. e Superposición en espacio a condiciones de gasto constante**

Bajo la configuración de pozos que se presenta en la **Figura 2. 42** y las propiedades de yacimiento y fluido son las siguientes

$$\phi = 0.1 [\text{Fracc.}], \quad k = 35 \text{ md}, \quad c_t = 1.105 \times 10^{-6}, \quad r_{w1,2} = 1 \text{ ft},$$

$$p_i = 2000 \text{ psia}, \quad B = 0.7 \frac{\text{rb}l}{\text{stb}}, \quad h = 50 \text{ ft}, \quad \mu = 0.5 \text{ cp}, \quad l_{12} = 10,100,1000 \text{ ft},$$



**Figura 2. 42 Configuración de pozos para el Ejercicio 1. e**

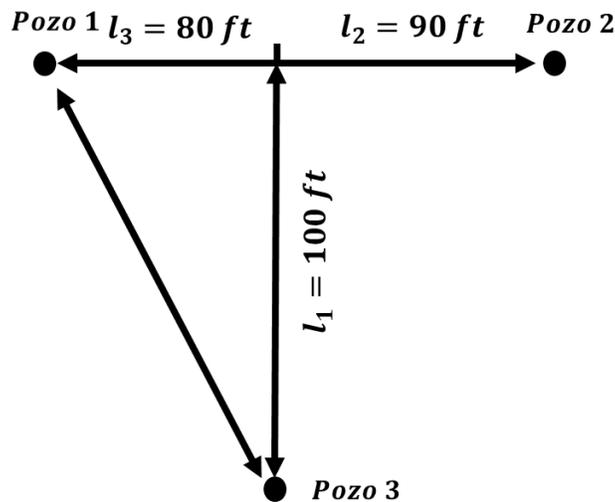
considerar que los pozos presentan los siguientes ritmos de producción constantes:

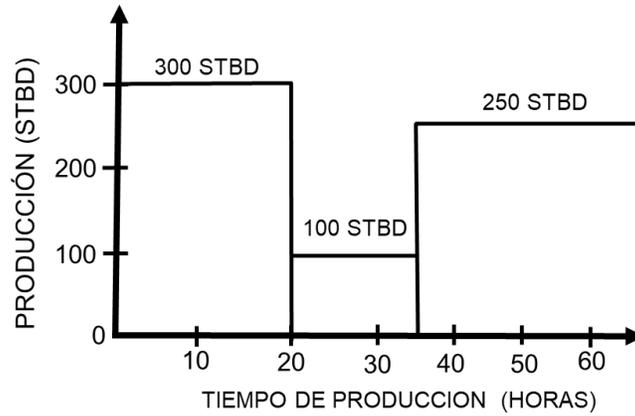
$$q_1 = 200 \text{ STBD}, \quad q_2 = 350 \text{ STBD}.$$

Estime la presión en el pozo 1 para los diversos casos de  $l_{12}$  a 45 horas, y concluya cual es el efecto de la distancia entre pozos.

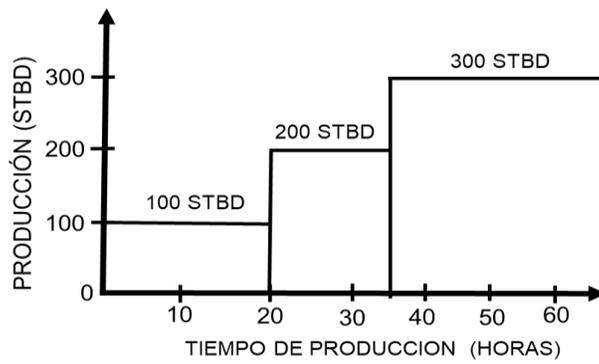
**Ejercicio 1. f Superposición en espacio y tiempo**

En un campo se tienen tres pozos bajo la configuración que muestra la **Figura 2.43**, cada uno de estos pozos ha tenido una variación en su ritmo de producción como se muestra en la **Figura 2.44** para el pozo 1, **Figura 2.45** para el pozo 2 y **Figura 2. 46** para el pozo 3.

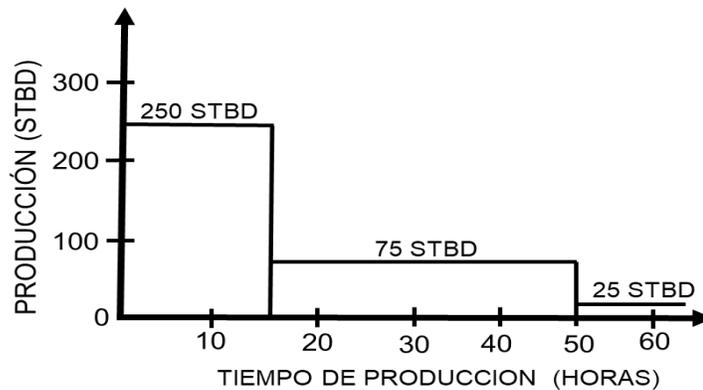




**Figura 2.44** Esquema de producción del pozo 1 del Ejercicio 1. f



**Figura 2.45** Esquema de producción del pozo 2 del Ejercicio 1. f



**Figura 2. 46** Esquema de producción del pozo 3 del Ejercicio 1. f

Cuyas propiedades de yacimiento y fluido son las mismas para los tres pozos, se reportan a continuación:

$$\phi = 0.3 \text{ [Fracc.]}, k = 75 \text{ md}, c_t = 5 \times 10^{-6}, r_{w1,2,3} = 1 \text{ ft},$$

$$p_i = 2500 \text{ psia}, B = 0.85 \frac{\text{rbbl}}{\text{stb}}, h = 100 \text{ ft}, \mu = 5 \text{ cp}.$$

Estime la presión en el pozo 3 después de 60 horas de producción.

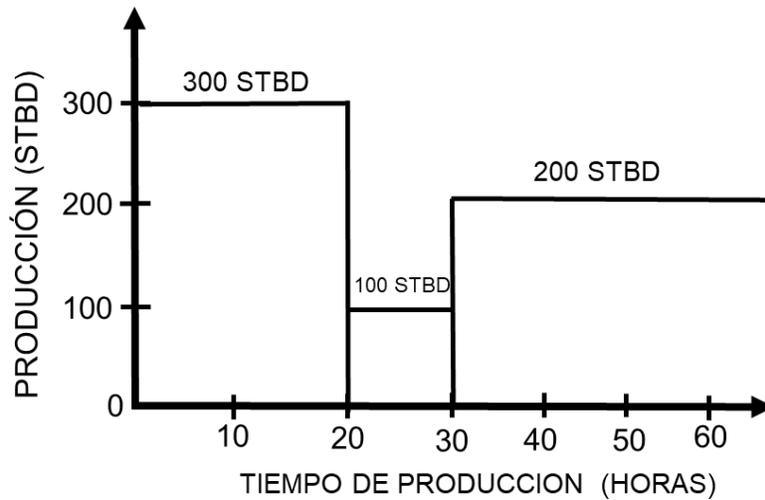
### **Ejercicio 1. g Utilización de la aproximación de Horner**

Con base en los datos del **Ejercicio 1. f**, Estimar si es posible, a 60 horas la caída de presión mediante la aproximación de Horner y calcular el tiempo de balance de materia, por cada pozo, es decir sin considerar los efectos de los pozos vecinos. Recordar que la **Figura 2.44** es para el pozo 1, **Figura 2.45** para el pozo 2 y **Figura 2. 46** para el pozo 3.

Y también realizar el mismo análisis para el pozo de la **Figura 2. 47**. Cuyas propiedades son las siguientes:

$$\phi = 0.2 \text{ [Fracc.]}, k = 25 \text{ md}, c_t = 10 \times 10^{-6}, r_w = 1,$$

$$p_i = 3000 \text{ psia}, B_o = 1.0 \frac{\text{rbbl}}{\text{stb}}, h = 10 \text{ ft}, \mu = 1 \text{ cp}.$$



**Figura 2. 47** Histórico de producción para el *Ejercicio 1. g*

### **Ejercicio 1. h** Cálculo de daño total y de pseudo-daños

Considere la siguiente información conocida del yacimiento y un pozo que produce a 225 STBD:

$$h = 750 \text{ ft}, \quad h_w = 90 \text{ ft}, \quad r_w = 1 \text{ ft} = 12 \text{ in},$$

$$Z_1 = 0, \quad \psi \frac{r_{eq}}{r_w} = 1130, \quad k_v = k_h, \quad \theta_w = 60^\circ, \quad k = 170 \text{ md}, \quad B_o = 0.9 \frac{rb}{stb}, \quad \mu = 2 \text{ cp}.$$

Determine el valor del pseudodaño por convergencia mediante el método de Papatzacos, del pseudo-daño por desviación de un pozo mediante el método de Cinco et al y el factor de pseudo-daño por flujo a través de los disparos por el método gráfico de Hong, para este caso considerar también los siguientes datos:

$$a_p = 8 \text{ in}, \quad d_p = 0.35 \text{ in}, \quad \theta^\circ = 180^\circ$$

$$h_r = 10 \text{ in}, \quad k_z/k_r = 1/2$$

$$Z_1 = 0, \frac{r_s}{r_w} = 2.7 \times 10^6$$

El pozo fue disparado considerando un patrón simple y se terminó fuera de la región dañada. Estimar el daño total considerando los pseudo-daños por disparos y por convergencia.

También estime la eficiencia de flujo del pozo y la caída de presión debido al daño considerando que  $s = S_{tr}$ .

### **Ejercicio 1. i Cálculo de la permeabilidad y la eficiencia del pozo, a partir de la pendiente de un gráfico de diagnóstico**

Considere la siguiente información conocida del yacimiento y un pozo:

$$q = 1700 \text{ BPD}, \mu = 4 \text{ cp}, \phi = 0.23$$

$$r_w = 0.49 \text{ ft}, B_o = 1.25, h = 180 \text{ ft}$$

$$C_t = 1.7 \times 10^{-6} \text{ psi}^{-1}, r_{eq} = 1700 \text{ ft}, C_A = 4.5132$$

Se ha diagnosticado flujo radial, y se tiene la siguiente información del gráfico especializado:

$$m = 125 \frac{\text{psi}}{\text{ciclo}}, (\Delta p)_{1hr} = 250 \text{ psi}.$$

Estime la permeabilidad y la eficiencia del pozo

### **Ejercicio 1. j Prueba de incremento de presión**

Un pozo de aceite que produjo a un gasto de 250 BPD por 13630 horas efectivas hasta su cierre para una prueba de incremento de presión. La información registrada se muestra a continuación en la **Tabla 2. 19**. Considerando las siguientes propiedades de yacimiento y de fluido:

$$h = 69 \text{ ft}, B_o = 1.136, \phi = 0.039,$$

$$C_t = 17 \times 10^{-6}, \mu = 0.8 \text{ cp}, r_w = 0.198 \text{ ft},$$

y el radio equivalente del yacimiento (considerando un pozo centrado en un cuadrado de 2640 ft de largo) es 1489 ft.

Estime la permeabilidad, presión inicial y el factor de daño. Asimismo, determine:

- a) Cuando termina el periodo de distorsión del almacenamiento en el gráfico.
- b) Cuando aparecen los efectos de frontera en el gráfico.

### **Ejercicio 1. k Prueba de decremento de presión**

Se realizó una prueba de decremento en un nuevo pozo de aceite que produjo a un gasto de 10 BPD por 150 días. La información registrada despreciando el período de almacenamiento se muestra a continuación en la **Tabla 2. 18**.

**Tabla 2. 18 Datos de prueba de decremento de presión**

|                              |            |            |            |            |            |            |            |            |
|------------------------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| Tiempo de estudio (horas) 1  | 6.968157   | 7.251524   | 7.546414   | 7.853296   | 8.172657   | 8.505006   | 8.85087    | 9.210799   |
| Pwf (psia) 1                 | 4980.67411 | 4980.62613 | 4980.57971 | 4980.53141 | 4980.48802 | 4980.4428  | 4980.39516 | 4980.34821 |
| Tiempo de estudio (horas) 2  | 9.585365   | 9.975163   | 10.380813  | 10.802958  | 11.242271  | 11.699448  | 12.175217  | 12.670334  |
| Pwf (psia) 2                 | 4980.3031  | 4980.25883 | 4980.21688 | 4980.17111 | 4980.12737 | 4980.08034 | 4980.037   | 4979.99189 |
| Tiempo de estudio (horas) 3  | 13.185585  | 13.721789  | 14.279799  | 14.8605    | 15.464816  | 16.093708  | 16.748174  | 17.429254  |
| Pwf (psia) 3                 | 4979.94905 | 4979.90267 | 4979.8587  | 4979.81708 | 4979.76837 | 4979.72804 | 4979.68128 | 4979.63988 |
| Tiempo de estudio (horas)4   | 18.138031  | 18.875631  | 19.643226  | 20.442037  | 21.273331  | 22.138431  | 23.038712  | 23.975603  |
| Pwf (psia) 4                 | 4979.59997 | 4979.55152 | 4979.50859 | 4979.46794 | 4979.42177 | 4979.38164 | 4979.33721 | 4979.29803 |
| Tiempo de estudio (horas) 5  | 24.950593  | 25.965232  | 27.021133  | 28.119973  | 29.263498  | 30.453526  | 31.691947  | 32.98073   |
| Pwf (psia) 5                 | 4979.25298 | 4979.20941 | 4979.16767 | 4979.12381 | 4979.07924 | 4979.04025 | 4978.9948  | 4978.95152 |
| Tiempo de estudio (horas) 6  | 34.321923  | 35.717656  | 37.170148  | 38.681707  | 40.254735  | 41.891732  | 43.595299  | 45.368143  |
| Pwf (psia) 6                 | 4978.90956 | 4978.87232 | 4978.82695 | 4978.7838  | 4978.74282 | 4978.69985 | 4978.65992 | 4978.61874 |
| Tiempo de estudio (horas) 7  | 47.213081  | 49.133046  | 51.131087  | 53.210381  | 55.374231  | 57.626077  | 59.969495  | 62.408211  |
| Pwf (psia) 7                 | 4978.57284 | 4978.53298 | 4978.49112 | 4978.4479  | 4978.40152 | 4978.36273 | 4978.31824 | 4978.2767  |
| Tiempo de estudio (horas) 8  | 64.9461    | 67.587195  | 70.335692  | 73.195959  | 76.172542  | 79.27017   | 82.493766  | 85.848453  |
| Pwf (psia) 8                 | 4978.23302 | 4978.18842 | 4978.14775 | 4978.10309 | 4978.05491 | 4978.0126  | 4977.96951 | 4977.91964 |
| Tiempo de estudio (horas) 9  | 89.339561  | 92.972638  | 96.753458  | 100.688029 | 104.782603 | 109.043686 | 113.47805  | 118.092742 |
| Pwf (psia) 9                 | 4977.87501 | 4977.82476 | 4977.77715 | 4977.72929 | 4977.68188 | 4977.62848 | 4977.57221 | 4977.51974 |
| Tiempo de estudio (horas) 10 | 122.895095 | 127.89274  | 133.093619 | 138.505996 | 144.138473 | 150        |            |            |
| Pwf (psia) 10                | 4977.4639  | 4977.40781 | 4977.35358 | 4977.28849 | 4977.22641 | 4977.16521 |            |            |

Considerando las siguientes propiedades de yacimiento y de fluido:

$$h = 75 \text{ ft}, B_o = 1.012, \phi = 0.17, p_i = 5000 \text{ psia}$$

$$C_t = 2 \times 10^{-6}, \mu = 6 \text{ cp}, r_w = 0.75 \text{ ft.}$$

Estime la permeabilidad y el factor de daño.

## ANEXO A

### Solucionario Ejercicios Propuestos

#### Solución *Ejercicio 1. a:*

##### Solución:

Como primer paso para el desarrollo del problema es necesario realizar la integración de la **Ec 2.104**:

$$\frac{d}{dx} \int \left( \frac{1}{k_x} \frac{dp}{dx} \right) dx = 0 ,$$

$$\frac{1}{k_x} \frac{dp}{dx} + C_1 = 0 .$$

Ahora, al reacomodar y separar variables e integrar nuevamente respecto a  $x$  se tiene:

$$\frac{dp}{dx} = k_x C_1 ,$$

$$\int dp = \int k_x C_1 dx ,$$

y considerando la definición de la **Ec.2.103** para el problema:

$$p(x) = C_1 \int \frac{1}{k_x} dx = C_1 \int \frac{x^4 + 1}{1500} dx ,$$

De esta manera, la expresión general que permite conocer la presión en cualquier punto es:

$$p(x) = C_1 \left( \frac{x^5}{5} \left( \frac{1}{1500} \right) + \frac{x}{1500} \right) + C_2 .$$

Ahora, al evaluar en las condiciones de frontera del problema, se tiene que:

**Condición de frontera interna ( $x = 0$ )**

$$p(x = 0) = 150 = C_1(0) + C_2 ,$$

por lo que

$$C_2 = 150 .$$

**Condición de frontera externa ( $x = L$ )**

$$p(x = L = 5000) = 6250 = C_1 \left( \frac{5000^5}{5} \left( \frac{1}{1500} \right) + \frac{5000}{1500} \right) + 150 ,$$

$$6250 - 150 = C_1(4.16 \times 10^{14}) ,$$

de esta manera, al despejar  $C_1$  se llega a:

$$C_1 = \frac{6100}{4.16 \times 10^{14}} = 1.464 \times 10^{-11} .$$

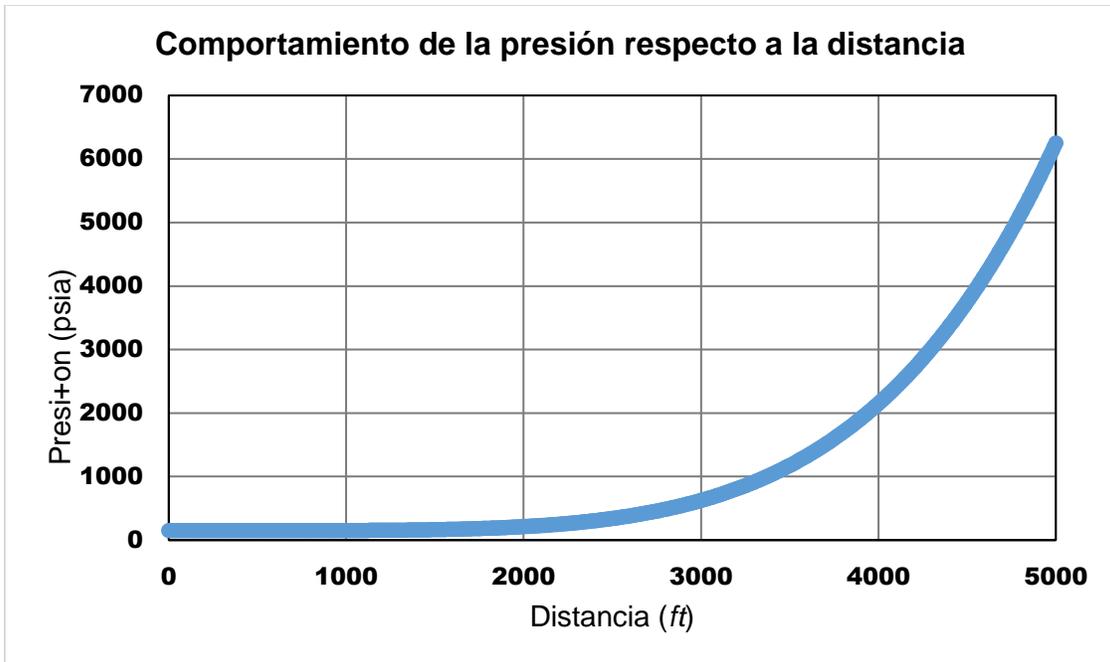
Con los resultados previos, sustituyendo las constantes  $C_1$  y  $C_2$  en la solución general, se llega:

$$p(x) = 1.464 \times 10^{-11} \left( \frac{x^5}{5} \left( \frac{1}{1500} \right) + \frac{x}{1500} \right) + 150 .$$

A su vez, para obtener el gasto, se tiene que:

$$q(x = 0) = - \frac{kA}{\mu} \frac{dp}{dx} \Big|_{x=0} = 1500 \frac{A}{\mu} [9.76 \times 10^{-15}] = 1.464 \times 10^{-11} \times \frac{A}{\mu} .$$

El comportamiento gráfico de la solución que muestra el perfil de presiones en el yacimiento se incluye en la **Figura 2.48**.



**Figura 2.48** Gráfico que esquematiza el comportamiento de la presión para el *Ejercicio 1. a*

### Solución Ejercicio 1. b:

Para este caso, se usarán las variables adimensionales para flujo radial, definidas en las **Ecs. 2.32 a 2.34**; así como la **Ec.2.50**

$$p(r, t) = p_i - 141.2 \frac{qB\mu}{kh} p_D(r_D, t_D) ,$$

en donde evaluando los valores constantes la expresión queda:

$$p(1, t) = 3200 - 0.9076 \times p_D(r_D, t_D) ,$$

la solución para este ejercicio requiere de al menos 100 análisis, para facilitar el proceso será necesario obtener una expresión general para el intervalo o intervalos según el análisis de la relación  $t_D/r_D^2$ . Para determinar los intervalos hay que evaluar la relación igualando a 25:

$$\frac{t_D}{r_D^2} = \frac{136543.69t}{1^2} = 25 ,$$

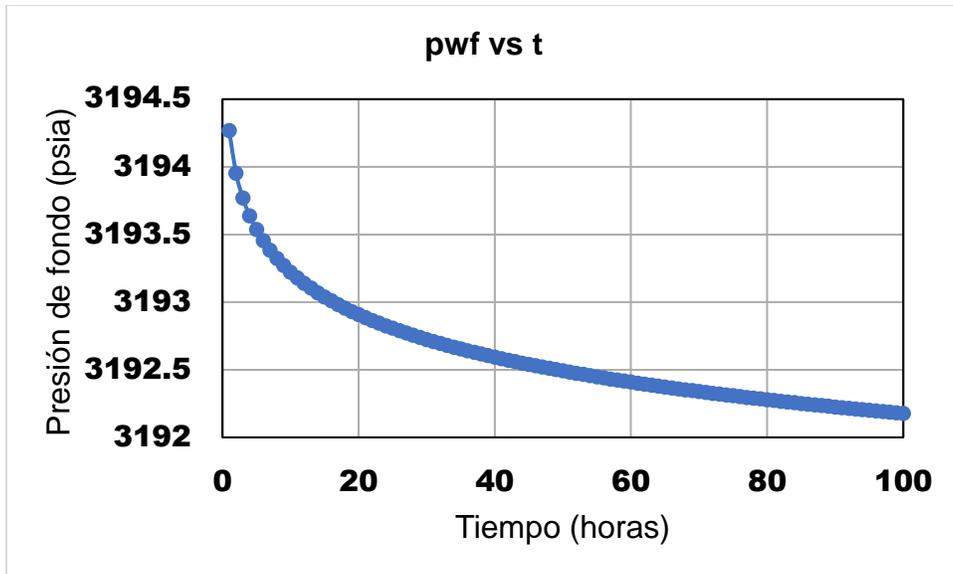
y encontrar el tiempo al cual el argumento se cumple:

$$t = \frac{25}{136543.69} = 1.83 \times 10^{-4} h .$$

Se determina que el tiempo obtenido permite generalizar la solución del ejercicio a una sola herramienta de cálculo, la aproximación logarítmica (**Ec.2.36**). Sustituyendo **2.36** en **2.50**, se obtiene:

$$p_{wf} = 3200 - \left( 0.9076 \times \left[ \frac{1}{2} \ln |136543.69 \times t| + 0.4045 \right] \right) .$$

Por tanto, el gráfico de 1 a 100 horas de producción de la presión contra el tiempo se observa en la **Figura 2. 49**.



**Figura 2. 49** Gráfico de comportamiento del *Ejercicio 1. b*

### **Solución *Ejercicio 1. c:***

Para este caso, se usarán las variables adimensionales para flujo radial, definidas en las **Ec. 2.32 a 2.34**; así como la **Ec.2.50**

$$p(r, t) = p_i - 141.2 \frac{qB\mu}{kh} p_D(r_D, t_D) ,$$

en donde evaluando los valores constantes la expresión queda:

$$p(7, t) = 3200 - 1.765 \times p_D(r_D, t_D) ,$$

la solución para este ejercicio requiere de al menos 100 análisis, para facilitar el proceso será necesario obtener una expresión general para el intervalo o intervalos según el análisis de la relación  $t_D/r_D^2$ . Para determinar los intervalos hay que evaluar la relación igualando a 25:

$$\frac{t_D}{r_D^2} = \frac{448.469t}{7^2} = 25 ,$$

y encontrar el tiempo al cual el argumento se cumple:

$$t = \frac{25}{9.152} = 2.73 \text{ h} .$$

Se determina que el tiempo obtenido permite determinar que para los casos de 1 y 2 horas será necesario estimar el valor de presión mediante la integral exponencial y la **Tabla 2.4** y para 10 horas será necesario utilizar la aproximación logarítmica (**Ec.2.36**). Obteniendo los siguientes valores de presión:

$$p(7ft, 1 h) = 3200 - 1.765 \times 0.1045 = 3199.815 \text{ psia} ,$$

$$p(7ft, 2 h) = 3200 - 1.765 \times 1.8895 = 3196.665 \text{ psia} ,$$

$$p(7ft, 10 h) = 3200 - 1.765 \times 2.663 = 3195.30 \text{ psia} ,$$

### Solución Ejercicio 1. d:

Para este caso, se usarán las variables adimensionales para flujo radial, definidas en las **Ecs. 2.32 a 2.34**; así como la forma del principio de superposición dada por la **Ec. 2.57**:

$$\Delta p = \Delta p(t, r) = \frac{141.2B\mu}{kh} \sum_{k=1}^M q_k p_D(r_{Dk}, t_D) ,$$

que, al evaluar los términos constantes de la expresión, se tiene

$$\Delta p = \Delta p(t, r) = 0.1098 \sum_{k=1}^M q_k p_D \left( r_{Dk}, t_D = \frac{0.0002637 \times 90 \times 100}{0.1 \times 5 \times 1.105 \times 10^{-5} \times 1} = 429556.5611 \right) .$$

Dado que el yacimiento se supone siempre infinito, se utilizará la solución línea fuente para los cálculos posteriores.

En esta situación, dado que el pozo 5 es afectado por su producción y por la de los otros 4 pozos, después de 100 horas de flujo se tiene:

$$\Delta p_5(r_5, 100h) = \Delta p_{51}(r_{51}, 100h) + \Delta p_{52}(r_{52}, 100h) + \Delta p_{53}(r_{53}, 100h) + \Delta p_{54}(r_{54}, 100h) + \Delta p_{55}(r_{55}, 100h),$$

y cómo a este tiempo todos los pozos sólo han tenido un gasto, la superposición discreta resulta en:

$$\begin{aligned} \Delta p_5(r_5 = r_{w_5}, t = 100h) &= 0.1098 \\ &\times [q_1 \times p_D(r_{D_{51}}, 429556.5611) + q_2 \times p_D(r_{D_{52}}, 429556.5611) \\ &+ q_3 \times p_D(r_{D_{53}}, 429556.5611) + q_4 \times p_D(r_{54}, 429556.5611) \\ &+ q_5 \times p_D(r_{55}, 429556.5611)] , \end{aligned}$$

donde  $r_{D_{55}}$  es la distancia adimensional en el fondo del pozo 5,  $r_{D_{51}}$  corresponde a la del pozo 5 al pozo 1, y así de manera similar para los demás radios adimensionales. Para evaluar a  $p_D$  en cada uno de los argumentos indicados, dado que se utilizará la solución línea fuente, se revisará la condición dada por  $t_D/r_D^2$  en cada radio y tiempo señalados. De esta manera, para el primer término se tiene que:

$$\frac{t_D}{r_D^2} = \frac{429556.5611}{\left(\frac{84.853}{1}\right)^2} = 59.66 > 25,$$

recordar la necesidad de tener unidades consistentes por ello se realizó el cambio de metros a pies para el cálculo del argumento, en donde  $l_{51}$ , se realiza lo siguiente:

$$l_{51} = \sqrt{\left(\frac{l_{12}}{2}\right)^2 + \left(\frac{l_{13}}{2}\right)^2} = \sqrt{60^2 + 60^2} = 84.853 \text{ ft},$$

el valor resultado mayor a 25, se utilizará la aproximación logarítmica (**Ec.2.37**):

$$p_D(84.853, 429556.5611) = \frac{1}{2} \ln|59.66| + 0.4045 = 2.448.$$

Para los términos de presión adimensional del segundo al cuarto término, se observa que la longitud respecto al pozo 5 es exactamente la misma que la que tiene el pozo 1 respecto a este, debido a la condición  $l_{12} = l_{24} = l_{34} = l_{13}$ , adicional a que el tiempo adimensional es el mismo, por ende la presión adimensional para estos términos es la misma que para el primer término adicional la caída de presión en el quinto término no es necesario debido a que  $q_5 = 0$ , obteniendo así un valor de caída de presión en el pozo 5 de:

$$\begin{aligned}\Delta p_5 &= 0.1098 \times [100 \times 2.448 + 300 \times 2.448 + 50 \times 2.488 + 180 \times 2.488] \\ &= \mathbf{169.3722 \text{ psia}},\end{aligned}$$

de esta forma la presión en el pozo 5 considerando los efectos de los pozos circunvecinos a 100 horas de producción es:

$$p_5 = 2000 - 169.3722 = \mathbf{1830.627 \text{ psia}}.$$

La segunda parte del problema requiere de reestructurar la **Ec. 2.57**, debido al tiempo de producción:

$$\Delta p = \Delta p(t, r) = 0.1098 \sum_{k=1}^M q_k p_D \left( r_{Dk}, t_D = \frac{0.0002637 \times 90 \times 20}{0.1 \times 5 \times 1.105 \times 10^{-5} \times 1} = 85911.312 \right) .$$

Nuevamente se calcula el tiempo adimensional, pero ahora con 20 horas de producción y con ayuda de la ecuación **2.28**, se obtiene:

$$t_D = \frac{0.0002637 \times 90 \times 20}{0.1 \times 5 \times 1.105 \times 10^{-5}} = 85911.3122,$$

considerando al pozo 1 como el pozo de interés se tiene que la superposición discreta resulta:

$$\begin{aligned}
\Delta p_1(r_1 = r_{w_1}, t = 20h) & \\
&= 0.1098 \\
&\times [q_1 \times p_D(r_{D_{11}}, 85911.3122) + q_2 \times p_D(r_{D_{12}}, 85911.3122) \\
&+ q_3 \times p_D(r_{D_{13}}, 85911.3122) + q_4 \times p_D(r_{14}, 85911.3122) \\
&+ q_5 \times p_D(r_{15}, 85911.3122)] ,
\end{aligned}$$

El argumento  $t_D/r_D^2$  para el primer término resulta:

$$\frac{t_D}{r_D^2} = \frac{85911.3122}{(1)^2} = 85911.3122 \gg 25,$$

el valor es superior a las 25 unidades por tanto la herramienta de cálculo a utilizar será la aproximación logarítmica, **Ec.2.37** adquiriendo el siguiente valor:

$$p_D(1,85911.3122) = \frac{1}{2} \ln|85911.3122| + 0.4045 = 6.085.$$

### Evaluación a 10 ft

El segundo término tiene el siguiente valor en el argumento  $t_D/r_D^2$ :

$$\frac{t_D}{r_D^2} = \frac{85911.3122}{\left(\frac{10}{1}\right)^2} = 859.1131 < 25,$$

el valor es superior a las 25 unidades por tanto la herramienta de cálculo a utilizar será la aproximación logarítmica (**Ec.2.37**) adquiriendo el valor de:

$$p_D(1,85911.3122) = \frac{1}{2} \ln|859.113122| + 0.4045 = 6.085.$$

para evaluar la integral exponencial, se utiliza la **Tabla 2.4**, en donde debe identificarse la sección de interés y el valor correspondiente con el número de decimales

considerados como se muestra en la *Error! No se encuentra el origen de la referencia.* De esta manera, el valor resultante es:

$$p_D(119.9988,85911.3122) = -\frac{1}{2} \times -2.634 = 1.317,$$

| -Ei(-x), 0.000 < 0.209, intervalo de 0.001 |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|--|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| x  | 0     | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     |
| 0.00                                       | +∞    | 6.332 | 5.639 | 5.235 | 4.948 | 4.726 | 4.545 | 4.392 | 4.259 | 4.142 |
| 0.01                                       | 4.038 | 3.944 | 3.858 | 3.779 | 3.705 | 3.637 | 3.574 | 3.514 | 3.458 | 3.405 |
| 0.02                                       | 3.355 | 3.307 | 3.261 | 3.218 | 3.176 | 3.137 | 3.098 | 3.062 | 3.026 | 2.992 |
| 0.03                                       | 2.959 | 2.927 | 2.897 | 2.867 | 2.838 | 2.810 | 2.783 | 2.756 | 2.731 | 2.706 |
| 0.04                                       | 2.681 | 2.658 | 2.634 | 2.612 | 2.590 | 2.568 | 2.547 | 2.527 | 2.507 | 2.487 |

**Figura 2.50** Modo de empleo de las tablas para determinar el valor de la integral exponencial cuando  $x = 0.042$ . Dependiendo del intervalo en la tabla, la primera parte del argumento se busca en la columna de  $x$ , y una vez definido el renglón de interés, los dígitos restantes se presentan en las columnas aledañas.

debido a que el tercer término posee las mismas condiciones que el segundo término se considera que se tiene el mismo valor de presión adimensional, por tanto, se procede al cuarto término, iniciando por evaluar el argumento  $t_D/r_D^2$ , se obtiene:

$$\frac{t_D}{r_D^2} = \frac{85911.3122}{\sqrt{(119.9988)^2 + (119.9988)^2}} = 2.98 < 25,$$

como el valor es inferior a 25, se hará uso de la función integral exponencial:

$$p_D(169.704,85911.3122) = -\frac{1}{2} Ei\left(-\frac{1}{4} \frac{1}{2.98}\right) = -\frac{1}{2} Ei(-0.084),$$

para evaluar la integral exponencial, se utiliza la **Tabla 2.4**, en donde debe identificarse la sección de interés y el valor correspondiente con el número de decimales considerados como se muestra en la *Error! No se encuentra el origen de la referencia.* De esta manera, el valor resultante es:

$$p_D(169.704,85911.3122) = -\frac{1}{2} \times -1.982 = 0.991,$$

Para el quinto término nuevamente se vuelve innecesario su cálculo ya que el pozo 5 no presenta gasto, finalmente la caída de presión en el pozo 1 es de:

$$\begin{aligned}\Delta p_1(r_1 = r_{w1}, t = 20h) \\ &= 0.1098 \times [200 \times 6.085 + 200 \times 1.317 + 200 \times 1.317 + 200 \times 0.991] \\ &= \mathbf{213.2316 \text{ psia}} ,\end{aligned}$$

y la presión en el pozo 1 es igual a:

$$p_1 = \mathbf{1786.768 \text{ psia}} .$$

Para los pozos 2,3 y 4 se obtiene la misma presión, esto se debe a que se tienen las mismas longitudes entre pozos y el mismo tiempo adimensional. Puede corroborar realizando su cálculo.

### **Solución Ejercicio 1. e:**

Para este caso, se usarán las variables adimensionales para flujo radial, definidas en las **Ecs. 2.32 a 2.34**; así como la forma del principio de superposición dada por la **Ec. 2.57**:

$$\Delta p = \Delta p(t, r) = \frac{141.2B\mu}{kh} \sum_{k=1}^M q_k p_D(r_{Dk}, t_D) ,$$

Que, al evaluar los términos constantes de la expresión, se tiene

$$\begin{aligned}\Delta p = \Delta p(t, r) &= 0.02824 \sum_{k=1}^M q_k p_D \left( r_{Dk}, t_D = \frac{0.0002637 \times 35 \times 45}{0.1 \times 0.5 \times 1.105 \times 10^{-6} \times 1} \right) \\ &= 7517230.82) .\end{aligned}$$

Dado que el yacimiento se supone siempre infinito, se utilizará la solución línea fuente para los cálculos posteriores.

En esta situación, dado que el pozo 1 es afectado por su producción y por la del pozo 2, después de 45 horas de flujo se tiene:

$$\Delta p_1(r_1, 45h) = \Delta p_{11}(r_{11}, 45h) + \Delta p_{12}(r_{12}, 45h) ,$$

y cómo a este tiempo todos los pozos sólo han tenido un gasto, la superposición discreta resulta en:

$$\begin{aligned} \Delta p_1(r_1 = r_{w1}, t = 45h) \\ = 0.02824 \times [q_1 \times p_D(r_{D11}, 7517230.82) + q_2 \times p_D(r_{D12}, 7517230.82)] , \end{aligned}$$

donde  $r_{D11}$  es la distancia adimensional en el fondo del pozo 1,  $r_{D12}$  corresponde a la del pozo 2 al pozo 1. Para evaluar a  $p_D$  en cada uno de los argumentos indicados, dado que se utilizará la solución línea fuente, se revisará la condición dada por  $t_D/r_D^2$  en cada radio y tiempo señalados. De esta manera, para el primer término se tiene que:

$$\frac{t_D}{r_D^2} = \frac{7517230.82}{(1)^2} = 7517230.82 > 25,$$

el valor resulto mayor a 25, se utilizará la aproximación logarítmica (**Ec.2.37**):

$$p_D(1,7517230.82) = \frac{1}{2} \ln|7517230.82| + 0.4045 = 8.321.$$

El segundo término se evalúa de forma similar obteniendo:

### **EVALUACIÓN A 10 ft**

el segundo término con 10 ft tiene el siguiente valor en el argumento  $t_D/r_D^2$ :

$$\frac{t_D}{r_D^2} = \frac{7517230.82}{\left(\frac{10}{1}\right)^2} = 75172.3082 > 25,$$

nuevamente aplicando la aproximación logarítmica se obtiene:

$$p_D(1,7517230.82) = \frac{1}{2} \ln|75172.3082| + 0.4045 = 6.0183.$$

Con esto se determina que la caída de presión es igual a:

$$\Delta p_1(r_1 = r_{w1}, t = 45h) = 0.02824 \times [200 \times 8.321 + 350 \times 6.0183] = 106.482 \text{ psia},$$

y una presión de:

$$p_1 = 2000 - 106.482 = \mathbf{1893.518 \text{ psia.}}$$

### **EVALUACIÓN A 100 ft**

el segundo término con 100 ft tiene el siguiente valor en el argumento  $t_D/r_D^2$ :

$$\frac{t_D}{r_D^2} = \frac{7517230.82}{\left(\frac{100}{1}\right)^2} = 751.723 > 25,$$

nuevamente aplicando la aproximación logarítmica se obtiene:

$$p_D(1,7517230.82) = \frac{1}{2} \ln|751.723| + 0.4045 = 3.716.$$

Con esto se determina que la caída de presión es igual a:

$$\Delta p_1(r_1 = r_{w1}, t = 45h) = 0.02824 \times [200 \times 8.321 + 350 \times 3.716] = 83.723 \text{ psia},$$

y una presión de:

$$p_1 = 2000 - 83.723 = \mathbf{1916.277 \text{ psia.}}$$

### **EVALUACIÓN A 1000 ft**

el segundo término con 100 ft tiene el siguiente valor en el argumento  $t_D/r_D^2$ :

$$\frac{t_D}{r_D^2} = \frac{7517230.82}{\left(\frac{1000}{1}\right)^2} = 75.1723 > 25,$$

nuevamente aplicando la aproximación logarítmica se obtiene:

$$p_D(1,7517230.82) = \frac{1}{2} \ln|75.1723| + 0.4045 = 2.564.$$

Con esto se determina que la caída de presión es igual a:

$$\Delta p_1(r_1 = r_{w_1}, t = 45h) = 0.02824 \times [200 \times 8.321 + 350 \times 2.564] = 72.343 \text{ psia},$$

y una presión de:

$$p_1 = 2000 - 72.343 = \mathbf{1927.6565 \text{ psia}}.$$

### Solución Ejercicio 1. f:

Para este caso se debe considerar el siguiente análisis:

$$\Delta p(r, t) = \Delta p_{31} + \Delta p_{32} + \Delta p_{33},$$

se usarán las variables adimensionales para flujo radial, definidas en las **Ecs. 2.32 a 2.34**; así como la forma del principio de superposición dada por la **Ec. 2.52**:

$$\Delta p(r, t) = \frac{141.2B\mu}{kh} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^M (q_{j,k} - q_{j-1,k}) p_D \left( r_{Dk}, [t - t_{j-1,k}]_D \right),$$

que, al evaluar los términos constantes de la expresión, se tiene:

$$\Delta p_3(r_3, t = 45h)$$

$$\begin{aligned} &= 0.08001 \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^M \Delta q_{j,k} p_D \left( r_{Dk}, \frac{0.0002637 \times 75 [t - t_{j-1,k}]}{0.3 \times 5 \times 5 \times 10^{-6} \times 1} \right) \\ &= 2637 [t - t_{j-1,k}]. \end{aligned}$$

Obteniendo una superposición discreta para el ejercicio:

$$\Delta p_3(r_3, t = 45h) = 0.08001 [((300 \times p_D(128.06, 2637 \times 60) + (-200 \times p_D(128.06, 2637 \times 40) + (150 \times p_D(128.06, 2637 \times 25))) + ((100 \times p_D(134.5362, 2637 \times 60) + (100 \times p_D(134.5362 \times 40) + (100 \times p_D(134.5362 \times 20))) + ((250 \times p_D(1, 2637 \times 60) + (-200 \times p_D(1, 2637 \times 50) + (-50 \times p_D(1, 2637 \times 10))))],$$

será necesario evaluar el argumento  $t_D/r_D^2$ , para aplicar la aproximación logarítmica (**Ec.2.37**) o la integral exponencial con ayuda de la **Tabla 2.4**, para así poder obtener la caída de presión en el pozo 3 como se muestra a continuación:

$$\Delta p_3(r_3, t = 45h) = 0.08001 [((300 \times 3.137) + (-200 \times 2.959) + (150 \times 2.264)) + ((100 \times 3.026) + (100 \times 2.634) + (100 \times 1.971)) + ((250 \times 6.7949) + (-200 \times 6.299) + (-50 \times 5.4944)] = 128.311 \text{ psia},$$

por tanto, la presión en el pozo 3 después de 60 horas de producción es de:

$$p_3(r_3, t = 45h) = 2500 - 128.311 = \mathbf{2370.688 \text{ psia}}$$

### **Solución Ejercicio 1. g:**

Para el pozo 1 (**Figura 2.44**), se analiza si es aplicable la aproximación de Horner

$$\frac{\Delta t_{\text{último}}}{\Delta t_{\text{anterior}}} = \frac{25}{15} = \mathbf{1.66 < 2},$$

no es aplicable la aproximación de Horner, para el pozo 2 (**Figura 2.45**):

$$\frac{\Delta t_{\text{último}}}{\Delta t_{\text{anterior}}} = \frac{20}{20} = \mathbf{1 < 2},$$

la aproximación de Horner no se puede aplicar, para el pozo 3 (**Figura 2. 46**):

$$\frac{\Delta t_{\text{último}}}{\Delta t_{\text{anterior}}} = \frac{10}{35} = 0.2857 < 2,$$

nuevamente es imposible la aplicación de la aproximación de Horner, finalmente se corrobora para el pozo de la **Figura 2. 47**.

$$\frac{\Delta t_{\text{último}}}{\Delta t_{\text{anterior}}} = \frac{30}{10} = 3 > 2,$$

En este caso es posible ocupar la aproximación de Horner, ahora será necesario conocer el volumen de hidrocarburo producido:

$$Q_p = \int_{t_0}^t q(t)dt = (300 \times 20) + (100 \times 10) + (200 \times 30) = 13000 \text{ STB},$$

y al conocer el último gasto al cual estuvo sometido el pozo, basta aplicar la **Ec.2.65** para conocer el tiempo de balance de materia:

$$t_c = 24 \times \frac{13000 \text{ (STB)}}{200 \text{ (BPD)}} = 1560 \text{ h},$$

de esta forma aplicando la **Ec.2.67** se puede conocer la caída de presión:

$$\Delta p(t) = \frac{141.2 \times 200 \times 1 \times 1}{25 \times 10} \times \left( \frac{1}{2} \ln \left| \frac{2.637 \times 10^{-4} \times \frac{25}{(0.2)(1)(10 \times 10^{-6})}}{1} \times 1560 \right| + 0.4045 \right),$$

$$\Delta p(t) = 918.48 \text{ psia}.$$

Y la presión resulta:

$$p(t) = 2081.523 \text{ psia} .$$

### Solución *Ejercicio 1. h*:

Para este ejercicio se requerirá de la aplicación de las **Ecs. 2.78 a 2.81**, obteniendo el valor de pseudo-daño por convergencia que se requiere:

$$s_c = \left(\frac{750 - 90}{90}\right) \ln \left| \frac{\pi(600)}{2(1)} \sqrt{\frac{1}{0.5}} \right| + \frac{750}{90} \ln \left| \frac{90/750}{2 + 90/750} \sqrt{\frac{33.33 - 1}{11.11 - 1}} \right| = 33.68 ,$$

El método de Cinco et al (**Ec 2.77**) requiere de considerar que  $k_r = k_h$  y  $k_z = k_v$  y de conocer los valores que arrojan las **Ecs. 2.74 y 2.75**. El valor de pseudodaño por desviación de pozo para este caso:

$$s_\theta = -\left(\frac{60}{41}\right)^{2.06} - \left(\frac{60}{56}\right)^{1.865} \log_{10} \left(\frac{750}{100}\right) = -3.186 ,$$

El método de Hong es puramente gráfico, por ello se necesita seleccionar adecuadamente de entre las **Figura 2.30 a Figura 2.32**, en las cuales se incluye la que permite hacer correcciones, con los datos proporcionados se obtiene un valor de

$$s_p = 1.8 .$$

Con estos datos se puede estimar el daño total (**Ec.2.71**) considerando un daño por pseudo-daño por disparos, convergencia e inclinación del pozo, obteniendo así:

$$s_{tr} = 33.68 + (8.33 \times 1.8) - 3.186 = 45.488 ,$$

finalmente, la eficiencia del flujo (**Ec.2.81**) en el pozo es de:

$$EF = \frac{\ln|1130|}{\ln|1130| + 45.488} = 0.1338,$$

la caída de presión saldrá del despeje de la **Ec 2.69**:

$$\Delta p_s = \frac{141.2 \times 225 \times 0.9 \times 2}{170 \times 750} \times 45.488 = 20.402 \text{ psia.}$$

### Solución Ejercicio 1. i:

Para obtener la permeabilidad será necesario ocupar la **Tabla 2.11** para buscar la ecuación de la pendiente para un modelo radial (**Ec.2.88**), a la cual será necesario realizar un sencillo despeje para determinar el valor de la permeabilidad:

$$k = \frac{\alpha q B \mu}{m h},$$

con lo cual la permeabilidad resulta:

$$k = \frac{(162.6)(1700)(1.25)(4)}{(125)(180)} = 61.426 \text{ mD},$$

para la eficiencia de flujo es necesario hacer uso de la **Ec.2.81**,

$$EF = \frac{q}{q_{ideal}} = \frac{\ln \left| \Psi \frac{r_{eq}}{r_w} \right|}{\ln \left| \Psi \frac{r_{eq}}{r_w} \right| + s},$$

donde  $\Psi = \sqrt{7.055/C_A}$  y  $r_{eq} = \sqrt{A/\pi}$ ,

se observa que se carece de un dato para obtener la eficiencia, dicho dato es el daño, para su cálculo se hará uso de la **Ec 2.102**, obteniendo un valor de daño de:

$$s = 1.151 \left[ \left[ \frac{250}{125} \right] - \log_{10} \left( \frac{(64.426)}{(0.23)(4)(1.7 \times 10^{-6})(0.49)^2} \right) + 3.2275 \right] = -3.461,$$

$$s = -3.461,$$

al contar con el daño se aplica la **Ec.2.81**, evaluando los valores constantes:

$$\Psi = \sqrt{\frac{7.055}{C_A}} = \sqrt{\frac{7.055}{4.5132}} = 1.2503,$$

$$r_{eq} = \frac{1700}{0.49} = 3469.39,$$

para obtener un valor de eficiencia de flujo de:

$$EF = \frac{\ln|(1.2503)(3469.39)|}{\ln|(1.2503)(3469.39)| - 3.461} = 1.136,$$

$$EF = 1.136.$$

### Solución Ejercicio 1. j:

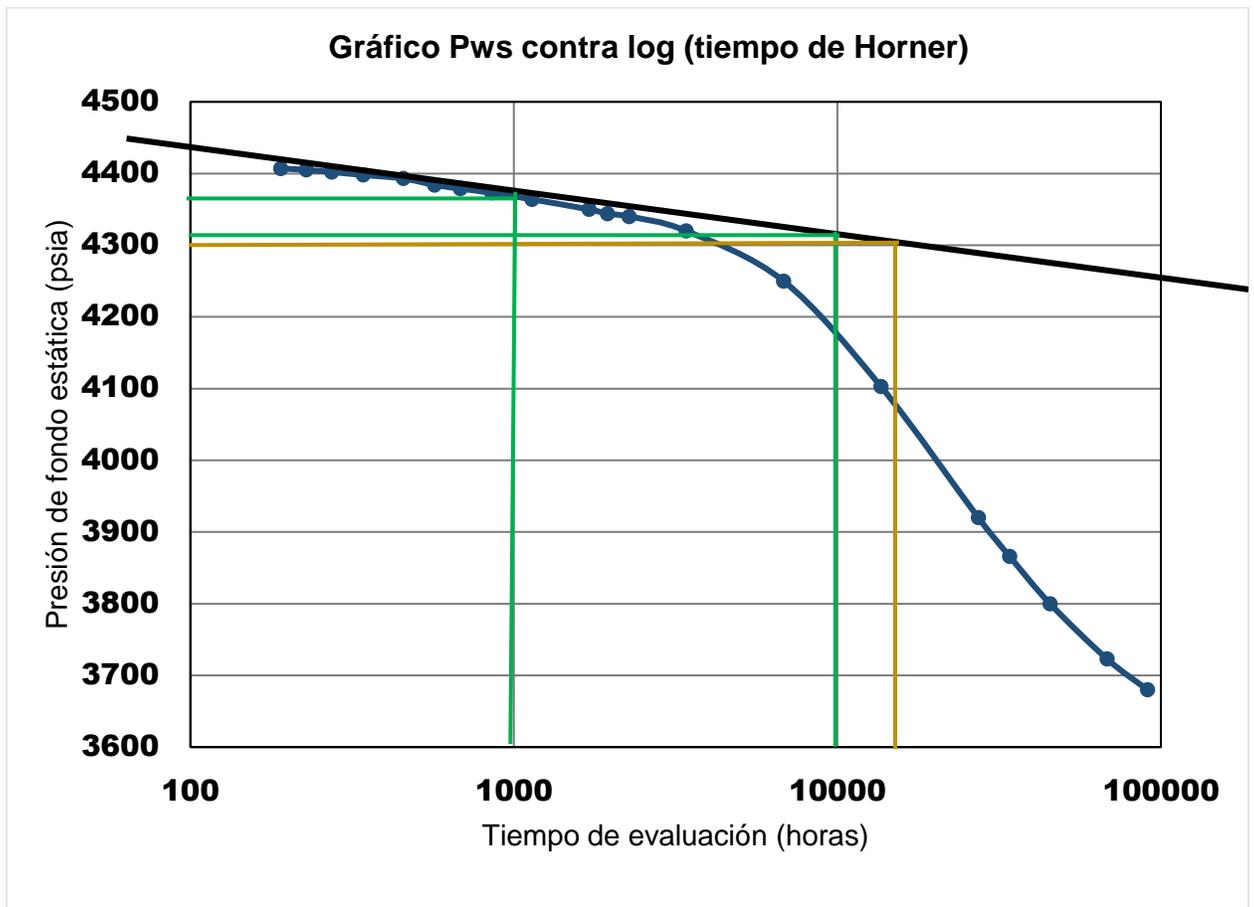
La solución radica en la elaboración de un gráfico de presión contra tiempo, en este caso el tiempo de Horner (**Ec.2.99**), para poder estimar las incógnitas planteadas, como primer paso, con ayuda de la **Ec.2.99**, se obtiene el tiempo de Horner para este ejercicio (**Tabla 2. 19**).

**Tabla 2. 19** Obtención del tiempo de Horner para el **Ejercicio 1. j**.

| <i>tiempo de Horner</i> |
|-------------------------|
| -                       |
| 90867.66667             |
| 68151                   |
| 45434.33333             |
| 34076                   |
| 27261                   |
| 13631                   |
| 6816                    |
| 3408.5                  |
| 2272.66667              |

|             |
|-------------|
| 1948.142857 |
| 1704.75     |
| 1136.833333 |
| 852.875     |
| 682.5       |
| 568.9166667 |
| 455.3333333 |
| 341.75      |
| 273.6       |
| 228.1666667 |
| 190.3055556 |

Con tiempo de Horner y con los valores de presión reportados se procede a elaborar el gráfico necesario para estimar las incógnitas. (**Figura 2.51**).



**Figura 2.51** Gráfico semilogarítmico para dar solución al ejercicio 2.19

Para obtener la permeabilidad será necesario ocupar la **Tabla 2.11** para buscar la ecuación de la pendiente para un modelo radial (**Ec.2.88**), a la cual será necesario realizar un sencillo despeje para determinar el valor de la permeabilidad:

$$k = \frac{\alpha q B \mu}{m h},$$

con lo cual la permeabilidad resulta:

$$k = \frac{162.6(250)(0.8)(1.136)}{(55)(69)} = 9.73mD,$$

donde la pendiente se obtuvo de aplicar la siguiente expresión:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{1 \text{ ciclo}}$$

y los valores  $y_2$  y  $y_1$ , se estiman a partir del gráfico (**Figura 2.51**), con las líneas de color verde que cruzan a la línea negra que representa el comportamiento ideal, es decir sin la presencia de daño y almacenamiento, determinando que la pendiente es:

$$m = \frac{4375 - 4320}{1 \text{ ciclo}} = 55 \frac{\text{psi}}{\text{ciclo}},$$

Por tanto, la permeabilidad:

$$k = \frac{162.6(250)(0.8)(1.136)}{(55)(69)} = 9.73mD,$$

La presión inicial, se estima a partir de la **Figura 2.51**, extrapolando la recta del gráfico al tiempo 0, recordando que el eje del tiempo es logarítmico por tanto  $\ln|0| = 1$ ; con ello se obtiene que la presión inicial (línea negra de la **Figura 2.51**) es de:

$$p_i = 4450 \text{ psia},$$

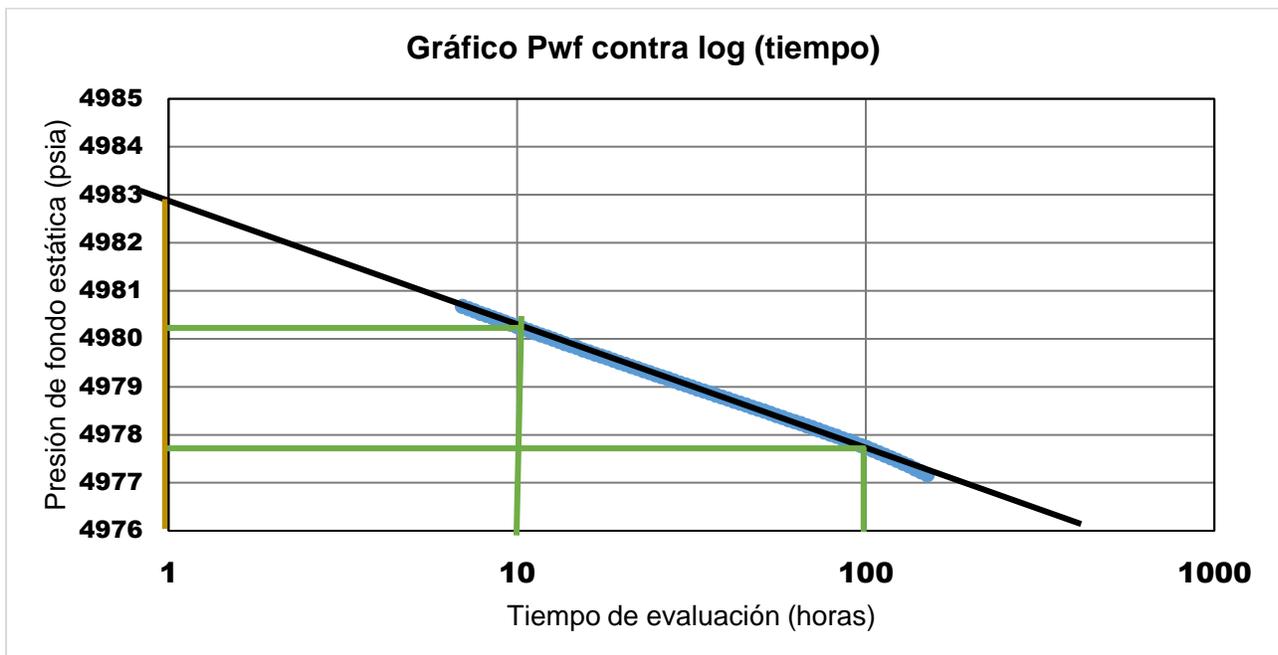
Para el cálculo del daño es necesario hacer uso de la **Ec.2.102**, con la cual se obtiene un daño de:

$$s = 1.151 \left[ \frac{4290 - 3534}{55} - \log_{10} \left( \frac{9.73}{0.039 \times 0.8 \times 17 \times 10^{-6} \times 0.198} \right) + 3.23 \right] = 9.56 ,$$

cabe aclarar que el término  $\Delta p_w$ , en una prueba de incremento es igual a  $p_{ws_{1h}} - p_{wsi}$ , por tanto fue necesario determinar  $p_{ws_{1h}}$ , bastó con obtener el tiempo de Horner (**Ec.2.99**) a una hora y con este valor entrar a la **Figura 2.51**, para así determinar fácilmente el valor de la presión (línea marrón de la **Figura 2.51**)

### Solución Ejercicio 1. k:

En las pruebas de decremento es necesario elaborar un gráfico especializado de presión contra el tiempo en una escala semilogarítmica, el cual para este caso se observa en la **Figura 2.52**:



**Figura 2.52** Grafico especializado de presión contra tiempo de una prueba de decremento de presión

Para obtener la permeabilidad será necesario ocupar la **Tabla 2.11** para buscar la ecuación de la pendiente para un modelo radial (**Ec.2.88**), a la cual será necesario realizar un sencillo despeje para determinar el valor de la permeabilidad:

$$k = \frac{\alpha q B \mu}{mh},$$

con lo cual la permeabilidad resulta:

$$k = \frac{162.6(10)(1.012)(6)}{(2.4)(75)} = 54.85 \text{ mD},$$

donde la pendiente se obtuvo de aplicar la siguiente expresión:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{1 \text{ ciclo}}$$

y los valores  $y_2$  y  $y_1$ , se estiman a partir del gráfico (**Figura 2.52**), con las líneas de color verde, determinando que la pendiente es:

$$m = \frac{4980.2 - 4977.8}{1 \text{ ciclo}} = 2.4 \frac{\text{psi}}{\text{ciclo}}.$$

Para el cálculo del daño, para su cálculo es necesario utilizar la **Ec.2.102**, la cual considera valor de la pendiente del gráfico generado de la interpretación de una prueba de presión obteniendo un daño de:

$$s = 1.151 \left[ \frac{5000 - 4983}{2.4} - \log_{10} \left( \frac{54.85}{0.17 \times 6 \times 2 \times 10^{-6} \times 0.75^2} \right) + 3.23 \right] = 3.032,$$

cabe aclarar que el término  $\Delta p_w$ , en una prueba de decremento es igual a  $p_{wf_i} - p_{wf_{1hr}}$ , por tanto fue necesario determinar  $p_{wf_{1hr}}$ , bastó determinar la presión (línea marrón de la **Figura 2.52**).

## Glosario

| <b>Símbolo</b> | <b>Significado</b>                                 |
|----------------|--|
| $a_p$          | Longitud media de penetración de las perforaciones |
| $A$            | Área   |
| $B_o$          | Factor de volumen del aceite                       |
| $C_A$          | Factor de forma                                    |
| $C_f$          | Coefficiente de la formación                       |
| $C_o$          | Compresibilidad del aceite                         |
| $c_t$          | Compresibilidad total                              |
| $C_w$          | Compresibilidad total                              |
| $d_p$          | Diámetro medio de las perforaciones                |
| $d_w$          | Diámetro del pozo                                  |
| $EF$           | Eficiencia de lujo                                 |
| $Ei$           | Simbología de la integral exponencial              |
| $h$            | Altura   |
| $h'$           | Intervalo de simetría de las perforaciones         |
| $h_D$          | Altura adimensional de la zona disparada           |
| $k_h$          | Permeabilidad horizontal                           |
| $k_s$          | Permeabilidad alterada por el daño                 |
| $k_v$          | Permeabilidad vertical                             |
| $k_w$          | Permeabilidad efectiva                             |
| $kh$           | Capacidad de flujo de la formación                 |
| $k_z/k_r$      | Relación de permeabilidades                        |

|            |                              |
|------------|------------------------------|
| $m$        | Pendiente de una recta       |
| $N_p$      | Producción acumulada         |
| $p$        | Presión                      |
| $p_D$      | Presión adimensional         |
| $p_i$      | Presión inicial              |
| $p_{ref}$  | Presión de referencia        |
| $p_{wf}$   | Presión de fondo fluyente    |
| $Q_p$      | Volumen producido acumulado  |
| $q$        | Gasto                        |
| $q_D$      | Gasto adimensional           |
| $q_e$      | Gasto en el radio externo    |
| $q_{last}$ | Último gasto reportado       |
| $q_w$      | Gasto del pozo               |
| $r$        | Radio                        |
| $r_D$      | Radio adimensional           |
| $r_e$      | Radio externo                |
| $r_{eD}$   | Radio externo adimensional   |
| $r_{eq}$   | Radio equivalente            |
| $r_I$      | Radio de investigación       |
| $r_S$      | Radio de la zona dañada      |
| $r_w$      | Radio del pozo               |
| $S$        | Daño total                   |
| $s_c$      | Pseudo-daño por convergencia |
| $S_o$      | Saturación de aceite         |
| $s_p$      | Pseudo-daño por disparos     |
| $S_{tr}$   | Daño real a la formación     |
| $S_w$      | Saturación de agua           |

|                  |  |
|------------------|--|
| $s_{\theta}$     | Pseudo-daño por pozo desviado  |
| $t$              | Tiempo   |
| $t_c$            | Tiempo de Balance de Materia   |
| $t_D$            | Tiempo adimensional  |
| $t_{DA}$         | Tiempo adimensional según el factor de forma                             |
| $t_{DEIA}$       | Tiempo adimensional para el período de flujo infinito                    |
| $t_{DPSS}$       | Tiempo adimensional para el período de flujo gobernado por las fronteras |
| $t_{duración}$   | Tiempo de duración de un gasto   |
| $t_{ET}$         | Tiempo para el período de flujo del régimen transitorio                  |
| $t_H$            | Tiempo de Horner   |
| $t_{pss}$        | Tiempo característico del estado pseudoestacionario                      |
| $t_{ref}$        | Tiempo de referencia   |
| $u$              | Constante de proporcionalidad de Darcy                                   |
| $V_p$            | Volumen poroso   |
| $x$              | Posición   |
| $x_{ref}$        | Posición de referencia   |
| $Z$              | Profundidad a la zona de disparos  |
| $Z_D$            | Profundidad adimensional a la zona de disparos                           |
| $\alpha_r$       | Valor constante para flujo radial  |
| $\beta$          | Constante de evaluación para el tiempo adimensional                      |
| $\Delta p_s$     | Caída de presión debida al daño  |
| $\Delta p_{wlf}$ | Caída de presión de fondo  |

|            |  |
|------------|--|
| $\Delta t$ | Intervalo de tiempo                              |
| $\eta$     | Coefficiente de difusividad hidráulica           |
| $\theta'$  | Ángulo adimensional de un pozo desviado          |
| $\theta_d$ | Distribución angular de las perforaciones        |
| $\theta_w$ | Ángulo del pozo desviado                         |
| $\mu$      | Viscosidad                                       |
| $\phi$     | Porosidad  |
| $\Psi$     | Valor constante del pseudo-daño por convergencia |

## Bibliografía

Gallardo, H.; ***“Fundamentos Básicos para Caracterización Dinámica de Yacimientos”***, Facultad de Ingeniería, UNAM, 2018.

Lee, J.; ***“Well Testing”***, Vol 1, SPE Textbook, Society of Petroleum Engineers OF AIME, Dallas, Texas, 1982.

