



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

PROGRAMA DE MAESTRIA Y DOCTORADO EN  
INGENIERIA

FACULTAD DE INGENIERIA

CONTROL POR RETROALIMENTACION DE  
SALIDA PARA SISTEMAS CON  
INCERTIDUMBRES USANDO OBSERVADORES  
VIA MODOS DESLIZANTES DE ORDEN  
SUPERIOR

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

MAESTRA EN INGENIERIA

MAESTRIA EN INGENIERÍA ELECTRICA CONTROL

P R E S E N T A :

D. ALEJANDRA FERREIRA DE LOZA

TUTOR:

DR. LEONID FRIDMAN

2007



**JURADO ASIGNADO:**

Presidente: DRA. CRISTINA VERDE RODARTE

Secretario: DR. LUIS ÁLVAREZ-ICAZA LONGORIA

Vocal: DR. LEONID FRIDMAN

1<sup>er</sup> Suplente: DR. GERARDO ESPINOSA PÉREZ

2<sup>do</sup> Suplente: DR. JAIME ALBERTO MOREN PÉREZ

Lugar o lugares donde se realizó la tesis:

NOMBRE DEL LUGAR

**TUTOR DE TESIS:**

DR. LEONID FRIDMAN

**FIRMA**

## **AGRADECIMIENTOS**

Al Dr. Leonid Fridman por todo el apoyo otorgado en la realización de este trabajo.  
A los proyectos CONACyT 43807 Y y PAPIIT IN07006-2.

## RESUMEN DEL TRABAJO

En este trabajo se aborda el problema de control robusto por salida de sistemas con entradas desconocidas. Se considera el caso en que las entradas desconocidas se encuentran acopladas a la señal de control. Se usa un observador vía modos deslizantes de segundo orden para identificar las entradas desconocidas y obtener los estimados exactos del estado. La convergencia finita de los errores de observación e identificación permite la compensación de las entradas desconocidas.

Se considera como caso de estudio la estabilización del sistema. La compensación de entradas desconocidas se aborda de dos maneras distintas. En la primera se usa la señal identificada para realizar una compensación continua, mientras que la segunda emplea un compensador discontinuo basado en el control por modos deslizantes integrales.

Se analiza la exactitud de los procesos de identificación y observación considerando el tiempo de muestreo del sistema y se discute el efecto que producen en las estrategias de compensación propuestas. Los resultados se simulan e implementan en un péndulo invertido rotatorio.

---

---

# Índice general

---

## Capítulo

|                                                                              |          |
|------------------------------------------------------------------------------|----------|
| <b>1. Introducción</b>                                                       | <b>1</b> |
| 1.1. Motivación . . . . .                                                    | 1        |
| 1.2. Contribución . . . . .                                                  | 3        |
| 1.3. Estructura de la tesis . . . . .                                        | 4        |
| <b>2. Observador jerárquico basado en el algoritmo <i>Super-Twisting</i></b> | <b>5</b> |
| 2.1. Formulación del problema . . . . .                                      | 5        |
| 2.2. Conceptos preliminares . . . . .                                        | 6        |
| 2.3. Recuperación del estado . . . . .                                       | 9        |
| 2.4. Observador jerárquico por modos deslizantes . . . . .                   | 12       |
| 2.4.1. Sistema dinámico auxiliar . . . . .                                   | 13       |
| 2.4.2. Procedimiento para recuperar $M_k x(t)$ . . . . .                     | 13       |
| 2.4.3. Diseño del observador . . . . .                                       | 17       |
| 2.5. Identificación de entradas desconocidas . . . . .                       | 18       |

|           |                                                                                                              |    |
|-----------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 2.5.1.    | Identificación vía filtrado del control equivalente . . . . .                                                | 19 |
| 2.5.2.    | Identificación usando el algoritmo de <i>Super-Twisting</i> . . . . .                                        | 20 |
| 2.6.      | Discusión sobre la exactitud del observador y de la identificación de las<br>entradas desconocidas . . . . . | 20 |
| 2.6.1.    | Exactitud del observador jerárquico . . . . .                                                                | 21 |
| 2.6.2.    | Exactitud de la identificación por filtrado del control equivalente                                          | 22 |
| 2.6.3.    | Exactitud de la señal identificada usando el algoritmo de <i>Super-<br/>Twisting</i> . . . . .               | 22 |
| 2.7.      | Péndulo Invertido Rotatorio . . . . .                                                                        | 23 |
| 2.7.1.    | Modelado matemático . . . . .                                                                                | 23 |
| 2.7.2.    | Observación e identificación de entradas desconocidas para el PIR                                            | 27 |
| <b>3.</b> | <b>Control por salida</b>                                                                                    | 32 |
| 3.1.      | Descripción del problema . . . . .                                                                           | 32 |
| 3.2.      | Control óptimo robusto por retroalimentación de salida CORRS . . . . .                                       | 33 |
| 3.3.      | Ejemplo . . . . .                                                                                            | 34 |
| <b>4.</b> | <b>Modos deslizantes integrales por salida</b>                                                               | 37 |
| 4.1.      | Descripción del problema . . . . .                                                                           | 37 |
| 4.2.      | Control por modos deslizantes integrales por salida CMDIS . . . . .                                          | 38 |
| 4.3.      | Ejemplo . . . . .                                                                                            | 40 |
| <b>5.</b> | <b>Análisis del error</b>                                                                                    | 41 |
| 5.1.      | Exactitud del control . . . . .                                                                              | 41 |
| 5.1.1.    | Precisión del control óptimo robusto por retroalimentación de<br>salida CORRS . . . . .                      | 41 |

---

|                                                                                                                       |               |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------|
| 5.1.2. Precisión del control con modos deslizantes integrales por salida                                              |               |
| CMDIS . . . . .                                                                                                       | 42            |
| 5.2. Discusión entre CORRS y CMDIS . . . . .                                                                          | 42            |
| 5.3. Ejemplo . . . . .                                                                                                | 43            |
| 5.4. Experimentos . . . . .                                                                                           | 48            |
| <b>6. Conclusiones</b>                                                                                                | <b>56</b>     |
| <br><b>Apéndice</b>                                                                                                   |               |
| <b>A. Algoritmo <i>Super-Twisting</i></b>                                                                             | <b>58</b>     |
| <b>B. Análisis del error en las derivadas consecutivas aplicando el diferenciador basado en <i>Super-Twisting</i></b> | <b>63</b>     |
| <br><b>Bibliografía</b>                                                                                               | <br><b>67</b> |

# Capítulo 1

---

## Introducción

---

### 1.1 Motivación

El control de los sistemas con incertidumbres y sujetos a perturbaciones es uno de los problemas principales de la teoría de control. Una de las estrategias más efectivas para abordar este tipo de sistemas es el control por modos deslizantes.

Los modos deslizantes son robustos ante incertidumbres e insensibles a las perturbaciones acopladas a la señal de control. No obstante, existen inconvenientes en su implementación. Uno de estos inconvenientes son las oscilaciones de alta frecuencia comúnmente conocidas como *chattering* debidas a la imposibilidad de los actuadores para conmutar a una frecuencia infinita; este efecto puede llegar a ser muy dañino para el sistema. Otro inconveniente reside en la necesidad de conocer el estado completo. Además no son robustos a las perturbaciones no acopladas y, en el caso de los modos deslizantes convencionales, es necesario que el sistema llegue a la superficie deslizante para garantizar insensibilidad a las perturbaciones. Antes de que eso ocurra el sistema es vulnerable incluso a las perturbaciones acopladas. Los modos deslizantes integrales no presentan este último inconveniente [31].

En muchas aplicaciones no siempre es posible contar con todo el estado, ya sea por

razones prácticas o económicas. En [9] se aborda el problema del control por modos deslizantes por salida, para el caso en que el sistema es de grado relativo uno.

Cuando no se cuenta con todo el estado y el sistema está sujeto a incertidumbres es menester aplicar un observador robusto que garantice la convergencia de los estados en presencia de entradas desconocidas. En los últimos años se ha prestado gran atención a la observación de este tipo de sistemas y existen varias alternativas. Por ejemplo, los observadores de alta ganancia. Estos, sin embargo, no llegan a ser exactos y presentan el llamado efecto de pico durante el transitorio del observador.

Usualmente, el diseño de observadores para sistemas con entradas desconocidas requiere que el sistema tenga grado relativo uno con respecto a la entrada desconocida. Esta restricción permite descomponer el vector de estado en dos partes, una que no es afectada directamente por las entradas desconocidas la cual además es observable. La otra parte del vector es completamente conocida. Otra característica especial es que estos observadores son asintóticos, es decir, el estimado del estado converge en un tiempo infinito [23].

Los observadores basados en modos deslizantes son ampliamente utilizados debido a sus características de robustez con respecto a incertidumbres (acopladas y acotadas) y a la posibilidad de identificar las incertidumbres a través de la inyección de salida equivalente (ver los capítulos correspondientes en [9] y [30]). Su realización requiere que el sistema sea transformado a una forma triangular para después aplicarle un observador en modos deslizantes de primer orden y reconstruir sucesivamente (paso a paso) las componentes del vector de estado a través de los valores de control equivalente [5]. Esta metodología asegura teóricamente una convergencia en tiempo finito del estado, no obstante, se requiere el filtrado del control equivalente en cada paso para su realización.

En las dos últimas décadas se han desarrollado algoritmos de observación basados en modos deslizantes de orden superior, los cuales reconstruyen exactamente el estado en tiempo finito para sistemas fuertemente observables (ver [8] y [4]). Además, iden-

tifican las perturbaciones en un tiempo finito. En particular, en [4] se propone un observador jerárquico basado en el algoritmo de *Super-Twisting* (AST) [19], que garantiza la observación exacta del estado del sistema en un tiempo finito, así como la identificación de las perturbaciones de los sistemas lineales invariantes en el tiempo con entradas desconocidas que satisfacen las condiciones de observabilidad fuerte. Este tipo de observadores se basan en las reconstrucciones sucesivas del producto de los bloques de la matriz de observabilidad por el vector de estado vía un diferenciador basado en *Super-Twisting* [19]. Una vez que el producto de la matriz de observabilidad por el vector de estado es reconstruido, lo único que se necesita para la observación e identificación del sistema es premultiplicar el producto antes mencionado por la pseudoinversa de la matriz de observabilidad. Esto permite reconstruir los estados y las perturbaciones suaves y acotadas exactamente y en un tiempo finito. El objetivo de esta tesis es implementar un control de salida basado en este observador.

## 1.2 Contribución

En este trabajo se usa un observador jerárquico basado en AST para reconstruir el vector de estado y las perturbaciones acopladas en tiempo finito y compensarlas vía el control. Se proponen dos estrategias:

- Control continuo por retroalimentación de salida con compensación de entradas desconocidas usando el estimado exacto de los estados y la señal identificada. Este control garantiza robustez y evita el *chattering*.
- Control discontinuo basado en Modos Deslizantes Integrales usando los estimados exactos. Este control es insensible a perturbaciones acopladas pero presenta *chattering*.

Se realiza un análisis de los controladores antes mencionados considerando en cada caso la información acerca de la discretización tanto del controlador (actuador) como del

observador:

- Se estima la precisión del controlador continuo por retroalimentación de salida con compensación debida a la discretización del observador, a la precisión de la identificación de la señal desconocida y al actuador del controlador.
- Se estima la precisión debida a la discretización del observador y del controlador de modos deslizantes integrales.

La información que arroja el análisis comparativo entre las estrategias de control antes mencionadas ayuda al diseñador a tomar una decisión sobre qué método utilizar, el control por modos deslizantes integrales, teóricamente más exacto pero con *chattering*; o bien, el control continuo con compensación, menos preciso pero sin *chattering*.

### 1.3 Estructura de la tesis

En el Capítulo 2 se presentan algunos conceptos de observación y se resume el funcionamiento del observador jerárquico basado en el algoritmo de *Super-Twisting*. Además se presentan las técnicas de identificación de entradas desconocidas y se discute su precisión. Por último, se describe y modela el sistema de péndulo invertido rotatorio.

El Capítulo 3 describe la metodología de control por salida con compensación de incertidumbres. En el Capítulo 4 se proponen los modos deslizantes integrales por retroalimentación de salida. El Capítulo 5 está dedicado al análisis de la precisión de los controladores tomando en cuenta la discretización del observador, de la identificación y del actuador, se sugiere una estrategia para la elección del controlador y se presentan los resultados experimentales. En el Capítulo 6 se presentan las conclusiones.

## Capítulo 2

---

### Observador jerárquico basado en el algoritmo *Super-Twisting*

---

En este capítulo se aborda el problema de observación para sistemas con incertidumbres. La observación de este tipo de sistemas ha recibido considerable atención en las últimas dos décadas [23]. Las condiciones para la observación de sistemas con entradas desconocidas y su detección han sido estudiadas en distintos trabajos (véase p. e. [22], [27], [14] y [15]).

El problema de observación en sistemas con incertidumbres ha sido abordado ampliamente usando la técnica de los Modos Deslizantes, gracias a sus características de robustez con respecto a incertidumbres acopladas y a la posibilidad de estimar las incertidumbres usando la inyección equivalente de salida.

#### 2.1 Formulación del problema

Considérese un sistema lineal invariante en el tiempo con entradas desconocidas

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + Dw(t), \quad x(0) = x_0 \\ y(t) &= Cx(t), \quad t \geq 0\end{aligned}\tag{2.1}$$

donde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estado,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  es el control,  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  ( $1 \leq p < n$ ) es la salida del sistema. El par  $\{u(t), y(t)\}$  se asume mensurable en

cualquier instante de tiempo  $t \geq 0$ .  $w(t) \in \mathbb{R}^q$  ( $1 \leq q \leq n$ ) es el vector de entradas desconocidas. Las matrices  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , y  $D$  son conocidas y de las dimensiones apropiadas con  $\text{rango}(C) = p$ , y  $\text{rango}(D) = q$ . El estado actual  $x(t)$ , así como el estado inicial  $x_0$  no son medibles.

A lo largo del capítulo se asume que:

A1. La terna  $(A, C, D)$  no tiene ceros invariantes, esto es

$$\forall s \in \mathbb{C} \quad \text{rango}(\mathbf{P}(s)) = n + q, \quad \mathbf{P}(s) := \begin{bmatrix} sI - A & -D \\ C & 0 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

A2. Existe una constante  $w^+$  tal que  $\|w(t)\| \leq w^+$

Para simplificar el análisis del observador se considera que  $u(t) = 0$  dado que el efecto de  $u(t)$  puede ser compensado por cualquier observador. Esto es, se considerará un sistema de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Dw(t), \quad x(0) = x_0 \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Antes de continuar es conveniente hacer las siguientes definiciones.

## 2.2 Conceptos preliminares

**Definición 1.**  $s \in \mathbb{C}$  es llamado un cero invariante de la terna  $\{A, C, D\}$  si

$$\text{rango}(\mathbf{P}(s)) = n + q \quad \mathbf{P}(s) := \begin{bmatrix} sI - A & -D \\ C & 0 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Donde  $\mathbf{P}(s)$  es conocida como la *matriz de Rosenbrock* del sistema (2.3) y se obtiene tomando la transformada de Laplace de dicho sistema y reordenando, es decir

$$\begin{bmatrix} sI - A & -D \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(s) \\ W(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(0) \\ Y(s) \end{bmatrix}$$

Los ceros invariantes son el conjunto de frecuencias complejas  $\{s\}$  tales que una entrada  $u(t) = u(0)e^{st}$  distinta de cero, provoca una respuesta del estado  $x(t) = x(0)e^{st}$  distinta de cero, mientras que la salida del sistema es idénticamente cero para todo tiempo. Una condición necesaria y suficiente para que esto se presente es que  $x$ ,  $x(0)$  y  $u(0)$  satisfagan

$$P(s) \begin{bmatrix} x(0) \\ w(0) \end{bmatrix} = 0 \quad (2.5)$$

Es claro que la información con respecto a la existencia de los ceros invariantes puede obtenerse del análisis del rango de  $P(s)$  en la ecuación (2.5).

**Definición 2.** [16] *El grado relativo del sistema (2.3) con respecto a la entrada desconocida es el número  $r$  tal que para la salida y sus derivadas*

$$\begin{aligned} y &= Cx \\ \dot{y} &= C\dot{x} = CAx + CDw \\ &\vdots \\ y^{(r-2)} &= CA^{(r-2)}x + CA^{(r-1)}Dw \end{aligned}$$

*se tiene*

$$CA^j D = 0, \quad j = 1, \dots, r-2, \quad CA^{r-1} D \neq 0 \quad (2.6)$$

Considérese el caso  $p = q = 1$ . La transformación de coordenadas  $x_o = Ox$ , donde

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

tal que el sistema transformado

$$\dot{x}_o = A_o x_o + D_o w(t)$$

$$y = C_o x_o$$

con

$$A_o = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_n \end{bmatrix}$$

$$D_o = \begin{bmatrix} CD & \dots & CA^2D & CA^{n-2}D & CA^{n-1}D \end{bmatrix}^T$$

$$C_o = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

El polinomio característico  $p(s)$  de la matriz de Rosenbrock  $P(s)$  es invariante con respecto a las transformaciones de coordenadas. Éste se calcula como  $p(s) = \det P(s)$

$$\begin{aligned} \det P(s) &= (s^{n-1} + a_n s^{n-2} + \dots + a_2) CD \\ &\quad + (s^{n-2} + a_n s^{n-3} + \dots + a_3) CAD + \dots \\ &\quad + (s + a_n) CA^{n-2}D + CA^{n-1}D \end{aligned}$$

entonces, la terna  $(A, D, C)$  no tiene ceros invariantes, si y solo si

$$\begin{bmatrix} CD \\ CAD \\ \vdots \\ CA^{n-2}D \end{bmatrix} = 0 \quad CA^{n-1}D \neq 0$$

**Definición 3.** El sistema (2.3) es fuertemente observable si y solo si para cualquier condición inicial  $x_0$  y para cada entrada desconocida  $w(t)$ , la condición  $y(t) = 0$  para todo  $t \geq 0$  implica que  $x(t) = 0$  para todo  $t \geq 0$  [14].

**Definición 4.**  $\mathcal{V}$  es un subespacio de salida nula,  $(A, D)$  invariante, si para toda  $x \in \mathcal{V}$  existe alguna  $w$  tal que  $(Ax + Dw) \in \mathcal{V}$  y  $Cx = 0$ .  $\mathcal{V}^*$  denota el máximo subespacio de salida nula,  $(A, D)$  invariante, i.e.,  $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{V}^*$  para cada subespacio  $\mathcal{V}$  [22].

Los siguientes enunciados son equivalentes (véase por ejemplo, [22], [14], [15], y [28]).

- (i) El sistema (2.3) es fuertemente observable
- (ii) La terna  $(A, D, C)$  no tiene ceros invariantes.
- (iii)  $\mathcal{V}^* = 0$ .

Esto significa que si la terna  $(A, D, C)$  tiene ceros invariantes, entonces existe una condición inicial  $x(0) = x_0$  y una entrada desconocida  $w(t)$  tal que  $y(t) = 0$  para todo  $t \geq 0$  y  $x(t)$  no es igual a cero para todo  $t \geq 0$ . Es decir que, en tal caso sería imposible hacer una estimación del estado  $x(t)$  que sea independiente de  $w(t)$ .

## 2.3 Recuperación del estado

El siguiente algoritmo [4], resume el funcionamiento del observador jerárquico.

La idea principal del estimador consiste en construir un vector tomando la parte desacoplada de las entradas desconocidas de la salida y sus derivadas. Este vector está formado por la multiplicación de la matriz de observabilidad fuerte por el vector de estado. Una vez que se obtiene este vector basta con premultiplicarlo por la inversa de la matriz de observabilidad para obtener el estado. Se usa un diferenciador basado en ST para reconstuir de forma sucesiva el producto de los bloques de la matriz de observabilidad por el vector de estado. A continuación se describe su funcionamiento.

Antes es necesario definir para alguna matriz  $F \in \mathbb{R}^{r \times q}$  ( $r \leq q$ ) que tenga rango  $h$ , la matriz  $F^\perp \in \mathbb{R}^{r-h \times r}$  de rango  $r - h$  tal que  $F^\perp F = 0$ . La matriz  $F^\perp$  no es única.

**Algoritmo 1.**      0. Dado que  $y = Cx$ , se define

$$M_1 := C$$

1. Se propone una combinación lineal de la salida que no este afectada por las entradas desconocidas  $(CD)^\perp y(t)$  y se deriva

$$\frac{d}{dt} (CD)^\perp y(t) = (CD)^\perp CAx(t)$$

después, se construye el vector extendido

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dt} (CD)^\perp y(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} (CD)^\perp CA \\ C \end{bmatrix}}_{M_2} x(t)$$

2. Ahora, se deriva una combinación lineal del vector  $M_2 x(t)$  que no sea afectada por las incertidumbres

$$\frac{d}{dt} (M_2 D)^\perp M_2 x(t) = (M_2 D)^\perp M_2 Ax(t)$$

la derivada tampoco es afectada por las incertidumbres. Ahora, se combina con la salida para construir el vector extendido

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dt} (M_2 D)^\perp M_2 x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} (M_2 D)^\perp M_2 A \\ C \end{bmatrix}}_{M_3} x(t)$$

dando como resultado el vector  $M_3$ .

$\vdots$

*k.* En general, se puede resumir como sigue: derivar una combinación del vector  $M_K x(t)$  que no sea afectada por las incertidumbres

$$\frac{d}{dt} (M_k D)^\perp M_k x(t) = (M_k D)^\perp M_k A x(t)$$

Posteriormente, formar el vector extendido

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dt} (M_k D)^\perp M_k x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} (M_k D)^\perp M_k A \\ C \end{bmatrix}}_{M_{k+1}} x(t). \quad (2.7)$$

El cuál da como resultado el vector  $M_{k+1} x(t)$

Suponiendo que para algún  $\ell$  existe una matriz  $M_\ell$  generada por el algoritmo previo tal que el *rango*  $(M_\ell) = n$ . Esto significa que la ecuación algebraica

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dt} (M_{\ell-1} D)^\perp M_{\ell-1} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = M_\ell x(t)$$

tiene una solución única para  $x(t)$  que podría ser encontrada por medio de la premultiplicación de ambos lados de la ecuación por  $M_\ell^+ := (M_\ell^T M_\ell)^{-1} M_\ell^T$ . Esto es,

$$M_\ell^+ \begin{bmatrix} \frac{d}{dt} (M_{\ell-1} D)^\perp M_{\ell-1} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = x(t) \quad (2.8)$$

Donde  $M_{\ell-1}$  y  $M_\ell$  deben ser diseñadas de acuerdo con (2.7).

En [22] ha sido probado que la existencia de la constante  $\ell$  que satisface  $\text{rango}(M_\ell) = n$  es equivalente a la no existencia de zeros invariantes de la terna  $(A, C, D)$ .

## 2.4 Observador jerárquico por modos deslizantes

Para realizar el proceso de observación es menester usar un diferenciador basado en el algoritmo de *Super-Twisting* (AST) (ver [20]).

El *Super-Twisting* es un algoritmo basado en modos deslizantes de orden dos.

En sistemas de grado relativo uno con perturbaciones suaves, actúa como un control continuo y permite compensar exactamente las perturbaciones absolutamente continuas sin necesidad de usar un filtro. En cambio, modos deslizantes convencionales (de primer orden) es un algoritmo discontinuo que permite compensar las perturbaciones acotadas y medibles a través del filtrado del control equivalente.

Este diferenciador garantiza la convergencia en tiempo finito de las derivadas y provee la mayor exactitud posible tomando en cuenta el paso de muestreo e incluso en presencia de ruidos determinísticos. El apéndice B se presenta un ejemplo de la aplicación consecutiva de este diferenciador.

Debido a que el diferenciador es semiglobal es necesario garantizar que el error de observación sea acotado. El siguiente sistema auxiliar tiene como objetivo hacer cumplir esta condición.

### 2.4.1 Sistema dinámico auxiliar

Para el siguiente sistema dinámico

$$\dot{\tilde{x}}(t) = A\tilde{x}(t) + Bu(t) + L(y(t) - C\tilde{x}(t)) \quad (2.9)$$

donde  $L$  es diseñada tal que

A3. los valores propios de  $\tilde{A} := (A - LC)$  tengan parte real negativa.

Sea el error  $e(t) = x(t) - \tilde{x}(t)$ , entonces, de (2.1) y (2.9), la ecuación dinámica que gobiernan  $e(t)$  es

$$\dot{e}(t) = [A - LC]e(t) + Dw(t) = \tilde{A}e(t) + Dw(t)$$

Dado que A2 es satisfecha, entonces  $e(t)$  tiene norma acotada i.e., existen algunas constantes  $\gamma, \eta, \mu > 0$  tales que

$$\|e(t)\| \leq \gamma \exp(-\mu t) \|e(0)\| + \eta w^+ \quad (2.10)$$

Por lo tanto, la desigualdad en (2.10) conduce al siguiente enunciado. Para alguna constante  $e^+$  que satisface  $e^+ > \eta w^+$  se tiene

$$\|e(t)\| < e^+ \text{ para toda } t > -\frac{1}{\mu} \ln \frac{e^+ - \eta w^+}{\gamma \|e(0)\|} \quad (2.11)$$

Esto significa que si  $e^+ > \eta w^+$  para un tiempo finito,  $e(t)$  será acotada por  $e^+$  y permanecerá en esta situación para todo tiempo siguiente.

Ahora para realizar (2.8) se usa el algoritmo *Super-Twisting* como diferenciador.

### 2.4.2 Procedimiento para recuperar $M_k x(t)$

Como se muestra en (2.8) el estado puede ser recuperado por una combinación lineal de la salida y sus derivadas independientemente de las entradas desconocidas.

Para recuperar el estado es necesario reconstruir los vectores  $M_1x(t), M_2x(t), \dots$  hasta llegar a  $M_\ell x(t)$ , multiplicar por  $M_\ell^+$  para obtener  $x(t)$ . Esta sección resume el método de reconstrucción de dichos vectores. El vector  $M_1x(t)$  es conocido pues se definió como  $M_1 = C$ . La construcción de los vectores subsiguientes implica una diferenciación, por lo que hay que aplicar el algoritmo de *Super Twisting*  $\ell - 1$  veces.

Debido a la inserción del término  $\tilde{x}$ , en el procedimiento que a continuación se describe se usa  $\tilde{A}$  en lugar de  $A$ . Se puede probar que los ceros invariantes de  $(A, D, C)$  son los mismos que los de la terna  $(\tilde{A}, D, C)$ , (véase [4]). Luego entonces el proceso para recuperar  $M_K$  es el mismo.

Durante el procedimiento que se propone un vector auxiliar definido como

$$\dot{x}_a = A\tilde{x} + Bu \quad (2.12)$$

La recuperación de  $M_2x(t)$  está basada en el diseño de la *superficie deslizante*  $s^{(1)}$ <sup>1</sup> y esto corresponde a la *inyección de salida*  $v^{(1)}$  usando el algoritmo *Super-Twisting*[19]. Los componentes de  $v^{(1)}$  se definen como

$$v_i^{(1)} = z_i^{(1)} + \lambda_1 \left| s_i^{(1)} \right|^{1/2} \text{sign} \left( s_i^{(1)} \right), \dot{z}_i^{(1)} = \alpha_1 \text{sign} \left( s_i^{(1)} \right) \quad (2.13)$$

la variable  $s^{(1)}$  está dada por la fórmula

$$s^{(1)}(y(t), x_a(t)) = \left( \begin{array}{c} (CD)^\perp [y(t) - C\tilde{x}(t)] \\ \int_0^t [y(\tau) - C\tilde{x}(\tau)] d\tau \end{array} \right) - \int_0^t v^{(1)}(\tau) d\tau \quad (2.14)$$

Aquí vale la pena notar que todas las soluciones del sistema dinámico están definidas en el sentido de Filippov [11]. La dimensión del vector  $v^{(1)}$  es la misma que la dimensión de  $s^{(1)}$  y esta es igual al número de renglones de  $(CD)^\perp$  que dependen de los valores específicos que toman las matrices de la terna  $(A, C, D)$ . De esta manera, en vista de (2.1), (2.9) y (2.7) la derivada con respecto al tiempo de  $s^{(1)}$  es

$$\dot{s}^{(1)}(t) = M_2[x(t) - \tilde{x}(t)] - v^{(1)}(t) \quad (2.15)$$

---

<sup>1</sup> el superíndice  $(n)$  indica el número de la superficie y no la derivada

Ahora, eligiendo las ganancias escalares  $\lambda_1, \alpha_1$  tal que las siguientes condiciones se cumplan

$$\begin{aligned} \alpha_1 &> \beta_1 \geq M_2 \left( \|\tilde{A}\| e^+ + \|D\| w^+ \right) \\ \lambda_1 &> \frac{(\alpha_1 + \beta_1)(1 + \theta)}{(1 - \theta)} \sqrt{\frac{2}{\alpha_1 - \beta_1}}, 0 < \theta < 1 \end{aligned} \quad (2.16)$$

Donde  $e^+$  satisface (2.11). En vista de (2.11), se puede siempre satisfacer (2.16) en tiempo finito. En [19] se muestra que si las cotas en (2.16) se satisfacen, entonces existe un tiempo finito  $t_1$  tal que las siguientes desigualdades

$$s^{(1)}(t) = \dot{s}^{(1)}(t) = 0, \quad t \geq t_1 \quad (2.17)$$

se cumplen, donde  $t_1$  es el tiempo de alcance. De (2.13), es claro que si  $s^{(1)} = 0$ , entonces  $v^{(1)} \equiv z^{(1)}$ , tal que el vector  $M_2 x(t)$  puede ser recuperado de (2.15) en la siguiente forma:

$$M_2 x(t) - M_2 \tilde{x}(t) = z^{(1)}(t) \text{ for } t \geq t_1 \quad (2.18)$$

Ahora, para recuperar  $M_3 x(t)$  se diseña una superficie deslizante  $s^{(2)}$  y su *inyección de salida* correspondiente  $v^{(2)}$

$$v_i^{(2)} = z_i^{(2)} + \lambda_1 |s_i^{(2)}|^{1/2} \text{sign}(s_i^{(2)}), \dot{z}_i^{(2)} = \alpha_1 \text{sign}(s_i^{(2)})$$

La variable  $s^{(2)}$  esta dada por la fórmula

$$s^{(2)}(y(t), z^{(1)}(t)) = \begin{pmatrix} (M_2 D)^\perp z^{(1)}(t) \\ \int_{\tau=0}^t (y(\tau) - C \tilde{x}(\tau)) d\tau \end{pmatrix} - \int_{\tau=0}^t v^{(2)}(\tau) d\tau \quad (2.19)$$

Sustituyendo (2.18) en (2.19),  $s^{(2)}$  toma la forma

$$s^{(2)}(y(t), z^{(1)}(t)) = \begin{pmatrix} (M_2 D)^\perp M_2 [x(t) - \tilde{x}(t)] \\ \int_{\tau=0}^t (y(\tau) - C \tilde{x}(\tau)) d\tau \end{pmatrix} - \int_{\tau=0}^t v^{(2)}(\tau) d\tau$$

De este modo, la derivada de  $s^{(2)}$  es

$$\begin{aligned} \dot{s}^{(2)}(y(t), z^{(1)}(t)) &= \begin{pmatrix} (M_k D)^\perp M_2 \tilde{A} [x(t) - \tilde{x}(t)] \\ y(t) - C \tilde{x}(t) \end{pmatrix} - v^{(2)}(t) \\ &= M_3 x(t) - M_3 \tilde{x}(t) - v^{(2)}(t) \end{aligned}$$

Ahora, eligiendo las ganancias escalares  $\lambda_2, \alpha_2$  de la siguiente forma

$$\alpha_2 > \beta_2 \geq M_3 \left( \|\tilde{A}\| r^+ + \|D\| w^+ \right)$$

$$\lambda_2 > \frac{(\alpha_2 + \beta_2)(1 + \theta)}{(1 - \theta)} \sqrt{\frac{2}{\alpha_2 - \beta_2}}, 0 < \theta < 1$$

se garantiza la existencia de un tiempo finito  $t_2$  tal que las siguientes igualdades se cumplen

$$s^{(2)}(t) = \dot{s}^{(2)}(t) = 0, \quad t \geq t_2 \geq t_1 \quad (2.20)$$

Por tanto, dado que en el movimiento deslizante  $v^{(2)}(t) \equiv z^{(2)}(t)$ , se tiene que

$$M_3 x(t) - M_3 \tilde{x}(t) = z^{(2)}(t) \text{ for } t \geq t_1$$

Se puede seguir el mismo procedimiento recursivamente para obtener  $M_k x(t)$ ,  $k = 1, \dots, \ell - 1$ . Abajo, se describe el diseño general del sistema auxiliar y las superficies deslizantes con su correspondiente inyección de salida

a) Diseño de la *inyección de salida*  $v^{(k)}$  en el  $k$ -ésimo nivel como un controlador *Super-Twisting* (ver [19]):

$$v_i^{(k)} = z_i^{(k)} + \lambda_k |s_i^{(k)}|^{1/2} \text{sign}(s_i^{(k)}), \quad \dot{z}_i^{(k)} = \alpha_k \text{sign}(s_i^{(k)}) \quad (2.21)$$

donde  $\lambda_k$  y  $\alpha_k$  son constantes que satisfacen

$$\left. \begin{aligned} \alpha_k &> \beta_k \geq M_{k+1} \left( \|\tilde{A}\| r^+ + \|D\| w^+ \right) \\ \lambda_k &> \frac{(\alpha_k + \beta_k)(1 + \theta)}{(1 - \theta)} \sqrt{\frac{2}{\alpha_k - \beta_k}}, 0 < \theta < 1 \end{aligned} \right\} 1 \leq k < \ell - 1$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{\ell-1} &> \beta_{\ell-1} \geq \left( \|\tilde{A}\| e^+ + \|D\| w^+ \right) e^+ \\ \lambda_{\ell-1} &> \frac{(\alpha_{\ell-1} + \beta_{\ell-1})(1 + \theta)}{(1 - \theta)} \sqrt{\frac{2}{\alpha_{\ell-1} - \beta_{\ell-1}}}, 0 < \theta < 1 \end{aligned} \right\}, k = \ell - 1 \quad (2.22)$$

Donde  $e^+$  debe satisfacer (2.11).

b) Las variables  $s^{(k)}$  y  $z^{(k)}$  están relacionadas como

$$s^{(k)}(y, z^{(k-1)}) = \begin{cases} \begin{pmatrix} (M_1 D)^\perp [y(t) - C\tilde{x}(t)] \\ \int_{\tau=0}^t (y(\tau) - C\tilde{x}(\tau)) d\tau \end{pmatrix} - \int_{\tau=0}^t v^{(1)}(\tau) d\tau, & k = 1 \\ \begin{pmatrix} (M_k D)^\perp z^{(k-1)} \\ \int_{\tau=0}^t (y(\tau) - C\tilde{x}(\tau)) d\tau \end{pmatrix} - \int_{\tau=0}^t v^{(k)}(\tau) d\tau, & 1 < k < \ell - 1 \\ M_\ell^+ \begin{pmatrix} (M_{\ell-1} D)^\perp z^{(\ell-2)} \\ \int_{\tau=0}^t (y(\tau) - C\tilde{x}(\tau)) d\tau \end{pmatrix} - \int_{\tau=0}^t v^{(\ell-1)}(\tau) d\tau, & k = \ell - 1 \end{cases} \quad (2.23)$$

Nótese que, debido a que el rango  $(M_\ell) = n$  la matriz  $M_\ell^+ = [M_\ell^T M_\ell]^{-1} M_\ell^T$  está bien definida y  $M_\ell^+ M_\ell = I$ . Este es el porque de incluir  $M_\ell^+$  en la variable  $s^{(\ell-1)}$ , pues esto permite obtener directamente una representación del estado  $x(t)$  esto es mostrado en el siguiente lema.

El siguiente lema establece como los vectores  $M_k x(t)$  pueden ser recuperados por los movimientos deslizantes de segundo orden ( $s^{(k)} = \dot{s}^{(k)} = 0$ ).

**Lema 1.** *Bajo los supuestos A1-A3, si el vector auxiliar del estado  $x_a^{(k)}$  y la variable  $s^{(k)}$ , para toda  $k = 1, \dots, \ell - 1$ , son diseñados como en (2.21)-(2.23), entonces, a partir de algún tiempo finito  $t_k$  se tiene*

$$\begin{aligned} M_{k+1} x(t) &= M_{k+1} \tilde{x}(t) + z^{(k)}(t), \text{ para } k = 1, \dots, \ell - 2 \\ x(t) &= \tilde{x}(t) + z^{(\ell-1)}(t), \text{ para } k = \ell - 1 \end{aligned} \quad (2.24)$$

Los detalles de la prueba en [4].

### 2.4.3 Diseño del observador

De (2.24) se tiene que

$$x(t) = \tilde{x}(t) + z^{(\ell-1)}(t) \text{ para todo } t \geq t_{\ell-1} \quad (2.25)$$

donde  $t_{\ell-1}$  es el tiempo de alcance. Debido a que el lado derecho de la ecuación (2.25) es conocido, el observador se diseña como

$$\hat{x}(t) = \tilde{x}(t) + z^{(\ell-1)}(t) \quad (2.26)$$

Ahora, se pueden resumir los resultados previos en el siguiente teorema

**Teorema 1** Bajo las consideraciones A1-A3,

$$\hat{x}(t) = x(t) \quad \text{para toda } t \geq t_{\ell-1} \quad (2.27)$$

La prueba se sigue directamente de (2.25) y (2.26).

## 2.5 Identificación de entradas desconocidas

Para comenzar el análisis se propone la variable  $\bar{x}$ , la cual satisface la siguiente ecuación

$$\dot{\bar{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + D\bar{u}(t) \quad (2.28)$$

donde  $\bar{u}(t)$  es un pseudo-control. Se define una superficie deslizante  $\sigma(t)$  de la forma

$$\sigma(t) = D^+(\hat{x}(t) - \bar{x}(t)) \quad (2.29)$$

Tomando (2.1) y (2.28), la derivada con respecto al tiempo de  $\sigma(t)$  para todo  $t \geq t_{\ell-1}$  resulta ser

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}(t) &= D^+(\dot{\hat{x}}(t) - \dot{\bar{x}}(t)) \\ &= D^+A(x(t) - \hat{x}(t)) + D^+D(w(t) - \bar{u}(t)); \quad x(t) = \hat{x}(t) \quad \text{para todo } t > t_{\ell-1} \\ &= w(t) - \bar{u}(t) \end{aligned} \quad (2.30)$$

Es decir, cuando el sistema (2.28) llega a la superficie deslizante  $\sigma = \dot{\sigma} = 0$

$$\bar{u}_{eq}(t) = w(t) \quad (2.31)$$

A continuación se proponen dos técnicas de diseño para  $\bar{u}_{eq}(t)$ .

### 2.5.1 Identificación vía filtrado del control equivalente

Sea el pseudo-control

$$\bar{u}(t) = \kappa \frac{\sigma(t)}{\|\sigma(t)\|}$$

con la condición  $\kappa > w^+$ . El control  $\bar{u}(t)$  es una señal de alta frecuencia, para superar este inconveniente, el control  $\bar{u}_{eq}$  se sustituye por la salida del filtro de primer orden

$$\tau \dot{\bar{u}}_{av} + \bar{u}_{av} = \bar{u}_{eq}, \tau > 0$$

Para  $\tau \rightarrow 0$  muy pequeña la salida del filtro se aproxima a el control equivalente  $\bar{u}_{eq}$ , i.e.,  $\lim_{\substack{\tau \rightarrow 0 \\ \Delta/\tau \rightarrow 0}} \bar{u}_{av} = \bar{u}_{eq}$  [29], donde  $\Delta$  es proporcional al tiempo de muestreo del sistema. De este modo, seleccionando  $\tau = \Delta^\eta$  donde  $0 < \eta < 1$  significa que se necesita un intervalo de muestreo  $\Delta$  muy pequeño para identificar  $w(t)$  por medio de la sustitución de  $\bar{u}_{eq}$  por  $u_{av}$  en (2.31), en otras palabras, la identificación de la entrada desconocida  $w$  es alcanzada por medio de la señal  $\hat{w}(t) = \bar{u}_{av}(t)$  donde

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} (w(t) - \hat{w}(t)) = 0 \text{ para todo } t \geq t_{\ell-1}$$

Esto puede verse claramente en el siguiente Lema

**Lema 2** ([29]). *Si en la ecuación diferencial*

$$\tau \dot{z} + z = h(t) + H(t)\dot{s}$$

*donde  $\tau$  es una constante,  $z$ ,  $h$  y  $s$  son vectores de dimensión  $m$ ,*

*1) las funciones  $h(t)$  y  $H(t)$ , y sus derivadas de primer orden son acotadas en magnitud por un cierto número  $M$  y*

*2)  $\|s(t)\| \leq \Delta$ ,  $\Delta$  es un valor constante y positivo, entonces, para cualquier par de números positivos  $\Delta t$  y  $v$  existe un número  $\delta(v, \Delta t, z(0))$  tal que  $\|z(t) - h(t)\| \leq \delta$ ,  $\Delta/\tau \leq \delta$  y  $t \geq \Delta t$*

$$\|z(t) - h(t)\| \leq \|z(0) - h(0)\| \exp(-t/\tau) + M(\tau + \Delta) + 3M \left( \frac{\Delta}{\tau} \right)$$

Evidentemente, para algún  $\Delta t > 0$   $\lim_{\substack{\tau \rightarrow 0 \\ \Delta/\tau \rightarrow 0}} z(t) = h(t)$

### 2.5.2 Identificación usando el algoritmo de *Super-Twisting*

Si la entrada desconocida  $w(t)$  es absolutamente continua, es viable aplicar el AST nuevamente, luego entonces se diseña el pseudo-control como

$$\begin{aligned}\bar{u} &= -\Gamma |\sigma|^{1/2} \text{sign}(\sigma) + \bar{u}_1 \\ \dot{\bar{u}}_1 &= -\gamma \text{sign}(\sigma)\end{aligned}$$

Nótese que el criterio para elegir  $\Gamma$  y  $\gamma$  debe satisfacer ([19]).

$$\begin{aligned}\gamma &> w^+ \\ \Gamma &> \sqrt{\frac{2}{\gamma - w^+}} \frac{(\gamma + w^+)(1 + p)}{(1 - p)}, 0 < p < 1\end{aligned}$$

De esta forma, después de un tiempo finito  $t \geq t_{\ell-1}$  se tendrá  $\sigma(t) = 0$ ,  $\dot{\sigma}(t) = 0$ ; luego entonces,

$$\hat{w}(t) := \bar{u}_1(t) = w(t)$$

## 2.6 Discusión sobre la exactitud del observador y de la identificación de las entradas desconocidas

La exactitud, es decir el orden de error entre el valor real de la variable y el valor estimado por el observador, de las metodologías antes presentadas depende sensiblemente del tiempo de muestreo del sistema  $\delta$ , de los ruidos presentes y del número de veces que se ejecute el diferenciador exacto  $\ell$ . En las siguientes secciones se analiza la exactitud del observador y de cada una de las metodologías de identificación de entradas desconocidas.

### 2.6.1 Exactitud del observador jerárquico

**Lema 3.** *Sea  $\delta$  el tiempo de muestreo del sistema, la exactitud del observador será  $O\left(\delta^{\frac{1}{2^{(\ell-2)}}}\right)$ .*

*Demostración.* Se ha visto que el observador jerárquico calcula un estimado exacto del estado en tiempo finito después de  $\ell - 1$  aplicaciones sucesivas del algoritmo Super-Twisting. Puesto que el AST se lleva a cabo con un tiempo de muestreo igual a  $\delta$ , entonces como se sigue del Teorema A.1 (Apéndice A), después de aplicar por primera vez el AST, el error en la estimación de la primera derivada será  $O(\delta)$ . Este error entrará como un ruido de la salida en la siguiente aplicación del AST, esto significa que después de la segunda aplicación del AST se tendrá un error  $O(\sqrt{\delta})$  (véase Teorema A.2, Apéndice A). Después de  $(\ell - 1)$  aplicaciones del AST se tendrá un error de estimación de estado  $O\left(\delta^{\frac{1}{2^{(\ell-2)}}}\right)$ . □

**Lema 4.** *Sea  $\eta$  un ruido medible en el sentido de Lebesgue en los sensores del sistema entonces, la precisión del observador jerárquico debida a este ruido será  $O\left(\eta^{\frac{1}{2^{(\ell-1)}}}\right)$ .*

*Demostración.* En el Teorema A.2 (ver Apéndice A) se muestra que la precisión de estimación del AST cuando existe un ruido determinístico de magnitud  $\eta$  es de  $O(\sqrt{\eta})$ . Este entrará como ruido en la siguiente aplicación del AST generando un error de  $O\left(\eta^{\frac{1}{4}}\right)$ , después de  $\ell - 1$  aplicaciones del AST se tendrá un error en la estimación del estado de  $O\left(\eta^{\frac{1}{2^{(\ell-1)}}}\right)$ . □

Una vez que se tiene el vector de estado  $x(t)$  disponible, las entradas desconocidas  $w(t)$  pueden ser identificadas usando la técnica de control equivalente [29]. En el caso que  $w(t)$  sea suave es posible derivar la proyección del estado en el espacio de  $w$ , aplicando nuevamente el AST [19].

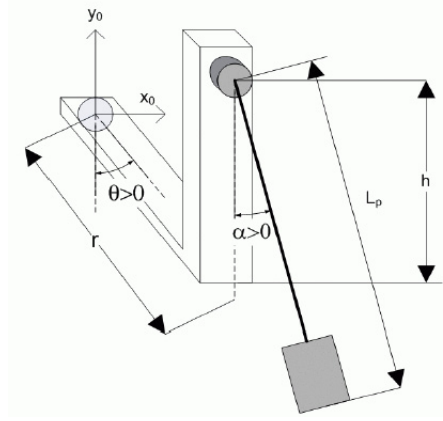


Figura 2.1: Péndulo invertido rotatorio.

### 2.6.2 Exactitud de la identificación por filtrado del control equivalente

**Lema 5.** Tomando en cuenta que la exactitud del observador jerárquico es  $O(\delta^{\frac{1}{2^{\ell-2}}})$ , entonces,  $\Delta = O(\Delta^{\frac{1}{2^{\ell-2}}})$ , si la constante del filtro  $\tau$  se propone como  $\tau = \Delta^{\frac{1}{2}}$  de acuerdo con el lema anterior, el error de identificación conjunto entre el observador y el filtro podría ser (en el peor caso)  $O(\delta^{\frac{1}{2^{\ell-1}}})$ .

*Demostración.* Si  $\tau = \Delta^{\frac{1}{2}}$ , entonces la precisión  $O(\tau) = O(\Delta^{\frac{1}{2}})$  de donde se sigue que la precisión del filtro será de  $O\left(\left(\delta^{\frac{1}{2^{\ell-2}}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)$ , es decir  $O\left(\delta^{\frac{1}{2^{\ell-1}}}\right)$ .  $\square$

### 2.6.3 Exactitud de la señal identificada usando el algoritmo de *Super-Twisting*

**Lema 6.** La exactitud de la señal identificada via AST será  $O(\delta^{\frac{1}{2^{\ell-1}}})$ .

*Demostración.* Realizar la la identificación de la entrada desconocida mediante el AST significa aplicar el diferenciador de manera sucesiva  $\ell - 1$  veces por lo que el orden de exactitud del método será  $O(\delta^{\frac{1}{2^{\ell-1}}})$  como en el caso anterior.  $\square$

## 2.7 Péndulo Invertido Rotatorio

Considérese el sistema mecánico de la Fig.2.1, el cual consiste de un péndulo invertido rotatorio (PIR) . El sistema se compone de dos brazos articulados, un brazo en forma de L que puede girar gracias a la acción de un par  $\tau$ . Al final de este brazo se encuentra conectado un péndulo. El sistema tiene dos direcciones de giro, es decir es un sistema con dos grados de libertad (2GL), Como se puede apreciar en la figura, el brazo en forma de L rota alrededor del eje  $y_0$  y su ángulo es denotado por  $\theta$ , mientras el péndulo unido al brazo rota alrededor del eje  $z_0$  y su ángulo es llamado  $\alpha$ . Supóngase además que el sistema es sometido a perturbaciones.

### 2.7.1 Modelado matemático

Para obtener el modelo del sistema anterior se puede utilizar el método del Lagrangiano.

Expresando la posición  $x_p, y_p$  y la velocidad  $\dot{x}_p, \dot{y}_p$  del centro de gravedad del péndulo en términos de los angulos  $\alpha$  y  $\theta$ .

$$x_p : = r \text{sen}(\theta) - \ell_p \text{sen}(\alpha) \quad (2.32)$$

$$y_p : = h - \ell_p \cos(\alpha) \quad (2.33)$$

derivando (2.32) y (2.33) con respecto al tiempo para obtener las velocidades se tiene

$$\dot{x}_p : = r \cos(\theta) \dot{\theta} - \ell_p \cos(\alpha) \dot{\alpha} \quad (2.34)$$

$$\dot{y}_p : = \text{sen}(\alpha) \dot{\alpha}$$

La energía potencial total del sistema está dada por la ecuación

$$V_t = M_p g (h - \ell_p \cos(\alpha)) \quad (2.35)$$

La energía cinética total incluye la energía cinética rotacional tanto del péndulo ( $T_p$ ) como del brazo ( $T_b$ ), así como la energía cinética traslacional del centro de masa ( $T_{cm}$ ).

$$T_t = T_b + T_p + T_{cm} \quad (2.36)$$

$$= \frac{1}{2}J_{eq}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}J_p\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{7}M_p\left(\dot{x}_p^2 + \dot{y}_p^2\right) \quad (2.37)$$

El lagrangiano del sistema

$$L = T_t - V_t \quad (2.38)$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange están dadas por

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t \partial \dot{\theta}} L - \frac{\partial}{\partial \theta} L &= \tau - B_{eq}\dot{\theta} + w \\ \frac{\partial^2}{\partial t \partial \dot{\alpha}} L - \frac{\partial}{\partial \alpha} L &= -B_p\dot{\alpha} + w_1 \end{aligned} \quad (2.39)$$

Dónde  $w$  y  $w_1$  son perturbaciones, las cuáles pueden deberse a variaciones en el voltaje del motor, fricciones, vibraciones, etc. Sin embargo, los coeficientes de fricción viscosa del brazo  $B_{eq}$ , y del péndulo  $B_p$  son despreciados debido a que su valor es muy pequeño. Por otro lado, en el presente trabajo se abordarán únicamente perturbaciones acopladas  $w$  y se supone que no existen perturbaciones desacopladas, es decir  $w_1 = 0$ . Sustituyendo (2.36)-(2.38) en (2.39) y reorganizando en forma matricial se tiene

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} J_{eq} + M_p r^2 \cos^2 \theta & -M_p r \ell \cos \theta \cos \alpha \\ -M_p r \ell \cos \theta \cos \alpha & J_p + M_p \ell^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} -M_p r^2 \dot{\theta} \cos \theta \text{sen} \theta & M_p r \ell \dot{\alpha} \cos \theta \text{sen} \alpha \\ M_p r \ell \dot{\theta} \text{sen} \theta \cos \alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} 0 \\ m g \ell \text{sen} \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau + w \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Donde el par  $\tau$  geneado en el brazo debido al voltaje del motor  $V_m$  es

$$\tau = \frac{K_t \left( V_m - K_m \dot{\theta} \right)}{R_m}$$

Despejando  $\ddot{\theta}$  y  $\ddot{\alpha}$  se obtiene:

$$\ddot{\theta} = f_1(\theta, \alpha, \dot{\theta}, \dot{\alpha}, \tau, w)$$

$$\ddot{\alpha} = f_2(\theta, \alpha, \dot{\theta}, \dot{\alpha}, \tau, w)$$

$$\begin{aligned} f_1 = & -\frac{M^2 g \ell r \cos(\theta) \alpha}{((Mr^2 \text{sen}\theta)^2 - J_{eq} - Mr^2) J_p - M \ell^2 J_{eq}} \\ & -\frac{J_p Mr^2 \cos \theta \text{sen} \theta \dot{\theta}^2}{((Mr^2 \text{sen}\theta)^2 - J_{eq} - Mr^2) J_p - M \ell^2 J_{eq}} \\ & -\frac{J_p + M \ell^2}{((Mr^2 \text{sen}\theta)^2 - J_{eq} - Mr^2) J_p - M \ell^2 J_{eq}} (\tau + w) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2 = & -\frac{\ell M g (-J_{eq} + Mr^2 \text{sen}^2 \theta - Mr^2)}{((Mr^2 \text{sen}\theta)^2 - J_{eq} - Mr^2) J_p - M \ell^2 J_{eq}} \alpha \\ & -\frac{\ell M r \text{sen} \theta J_{eq} \dot{\theta}^2}{((Mr^2 \text{sen}\theta)^2 - J_{eq} - Mr^2) J_p - M \ell^2 J_{eq}} \\ & +\frac{\ell M r \cos \theta}{((Mr^2 \text{sen}\theta)^2 - J_{eq} - Mr^2) J_p - M \ell^2 J_{eq}} (\tau + w) \end{aligned}$$

Haciendo  $x^T = \begin{bmatrix} \theta & \alpha & \dot{\theta} & \dot{\alpha} \end{bmatrix}$ ,  $u = \tau$ , y linealizando alrededor del punto  $x_r^T = (0, \pi, 0, 0)$  se tiene

$$\dot{x}_1 = x_3$$

$$\dot{x}_2 = x_4$$

$$\dot{x}_3 = f_1(0) + \frac{\partial f_1}{\partial x} \Big|_{x_r} x + \frac{\partial f_1}{\partial u} \Big|_{x_r} u + \frac{\partial f_1}{\partial w} \Big|_{x_r} w + O_2(\theta, \alpha)(u + w)$$

$$\dot{x}_4 = f_2(0) + \frac{\partial f_2}{\partial x} \Big|_{x_r} x + \frac{\partial f_2}{\partial u} \Big|_{x_r} u + \frac{\partial f_2}{\partial w} \Big|_{x_r} w + O_2(\theta, \alpha)(u + w)$$

Se tiene que

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{rM^2\ell^2g}{J_pJ_{eq}+M\ell_p^2J_{eq}+J_pMr^2} & -\frac{K_fK_m(J_p+M\ell^2)}{(J_pJ_{eq}+M\ell_p^2J_{eq}+J_pMr^2)R_m} & 0 \\ 0 & \frac{M\ell g(J_{eq}+Mr^2)}{J_pJ_{eq}+M\ell_p^2J_{eq}+J_pMr^2} & -\frac{M\ell K_t r K_m}{(J_pJ_{eq}+M\ell_p^2J_{eq}+J_pMr^2)R_m} & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{K_t(J_p+M\ell^2)}{(J_pJ_{eq}+M\ell_p^2J_{eq}+J_pMr^2)R_m} \\ \frac{M\ell K_t r}{(J_pJ_{eq}+M\ell_p^2J_{eq}+J_pMr^2)R_m} \end{bmatrix}$$

Donde:

## Observador jerárquico basado en el algoritmo *Super-Twisting*

| Símbolo  | Descripción                                          | Valor   | Unidad         |
|----------|------------------------------------------------------|---------|----------------|
| $M_p$    | Masa del péndulo                                     | 0,027   | $kg$           |
| $\ell$   | Longitud al centro de masa                           | 0,153   | $m$            |
| $L$      | Longitud total del péndulo                           | 0,191   | $m$            |
| $r$      | Longitud del pivote del brazo                        | 0,066   | $m$            |
| $J_{eq}$ | Momento de inercia del brazo                         | 1,23e-4 | $kg \cdot m^2$ |
| $J_p$    | Momento de inercia del péndulo con respecto a su eje | 6.98e-4 | $kg \cdot m^2$ |
| $g$      | Constante de aceleración de la gravedad              | 9,81    | $m/s^2$        |
| $M$      | Masa del brazo                                       | 0.28    | $kg$           |
| $K_m$    | Constante de fuerza electromotriz del motor          | 0,27    | $V/(rad/s)$    |
| $K_t$    | Constante de par del motor                           | 0,27    | $N \cdot m/A$  |
| $R_m$    | Resistencia de armadura del motor                    | 3,30    | $\Omega$       |
| $V_m$    | Voltaje del motor                                    | +/-24   | $V$            |

Finalmente, se tiene

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 82,49 & -1,31 & 0 \\ 0 & 56,81 & -0,37 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 46,75 \\ 13,20 \end{bmatrix} (u(t) + w(t)) \quad (2.40)$$

Se aplica ahora la metodología descrita en este capítulo para diseñar un observador e identificar las perturbaciones acopladas.

### 2.7.2 Observación e identificación de entradas desconocidas para el PIR

Sea el sistema de péndulo invertido descrito como (2.40). Donde  $u(t) = -Kx(t)$ ;  $K$  es elegida tal que la matriz  $A - BK$  sea Hurwitz, la matriz  $L$  es diseñada tal que  $\tilde{A} = A - LC$  es Hurwitz.

$$K = \begin{bmatrix} -9,6e-3 & 6,30 & -49,4e-3 & 0,719 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 11,40 & -0,76 \\ -1,56 & 13,28 \\ 24,70 & 78,54 \\ -12,07 & 100,44 \end{bmatrix}$$

El vector  $D = B$ , la perturbación  $w(t) = 0,2\text{sent} + 0,5$ . Las matrices  $M_k$ ,  $k = 1, 2$  son respectivamente:

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad M_2 = \begin{bmatrix} -11,40 & 0,76 & 1 & 0 \\ 1,56 & -13,28 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Se simulan los resultados usando el método de Euler con un tiempo de integración  $\delta = 10\mu s$ . En la Fig.2.2 se muestra el error de estimación para cada uno de los estados, se aprecia los estimados de las velocidades convergen en tiempo finito al valor real. La exactitud del observador es de aproximadamente  $(10\mu) \approx 2 \times 10^{-5}$ .

En la Fig. 2.2 se muestra la señal identificada por los dos métodos. Identificación usando *Super-Twisting* (Fig. 2.2.a) eligiendo las constantes para (2.5.2) como  $\Gamma = 3,5$  y  $\gamma = 2,5$ . En Fig. 2.2.b se uso filtrado del control equivalente; la constante del filtro  $\tau$ , fue elegida de acuerdo con el lema (6), es decir  $\tau = \sqrt{10^{-6}}s$ . La exactitud en ambos casos es aproximadamente la misma como se esperaba, es decir  $(\sqrt{10\mu}) \approx 0,08$ .

La Fig. 2.4 muestra la identificación de una señal discontinua por medio del filtrado del control equivalente.

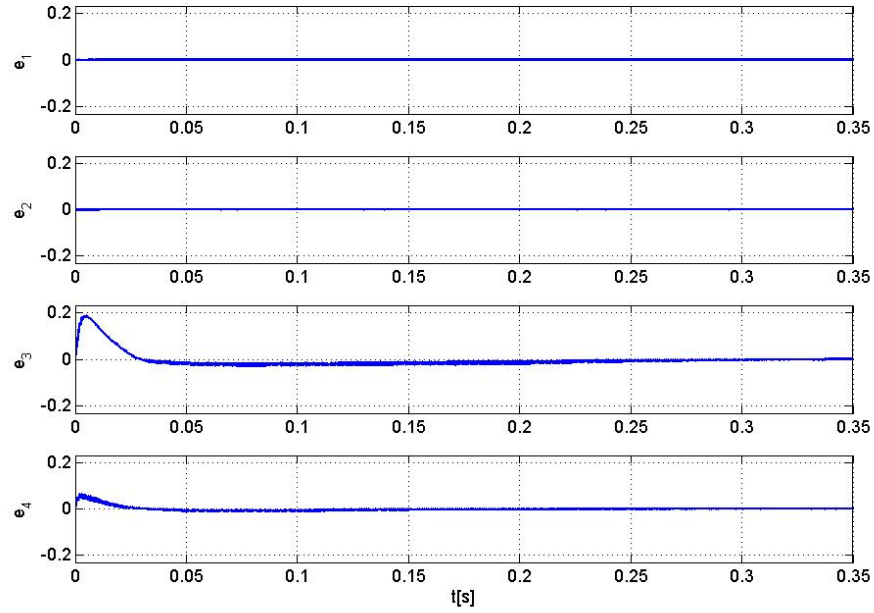


Figura 2.2: Error de estimación  $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$

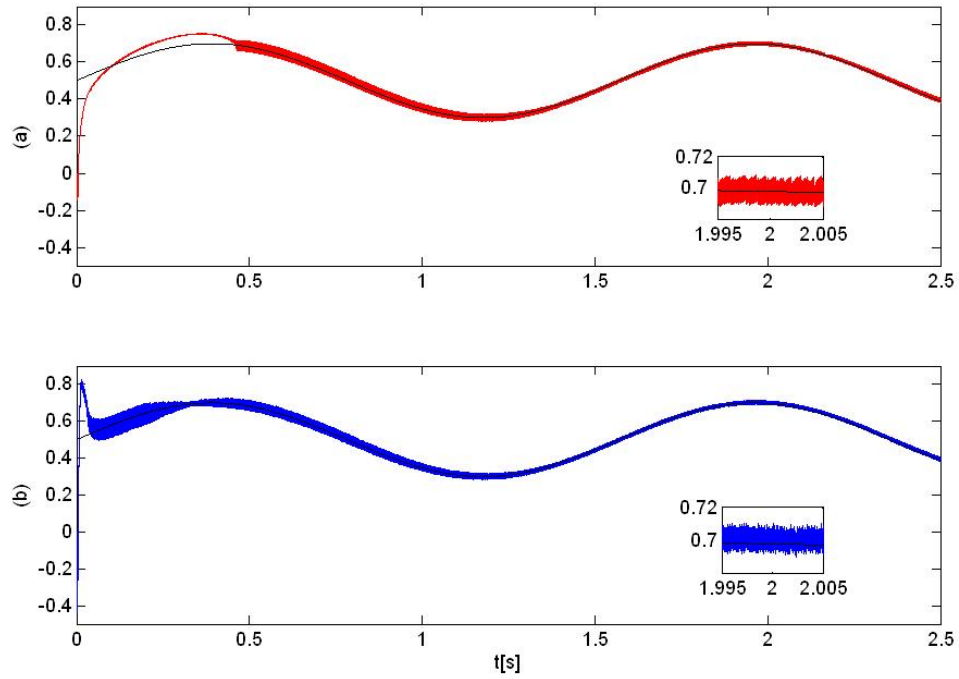


Figura 2.3: Identificación de la perturbación.(a)Usando *Super-Twisting* por filtrado del control equivalente (b).

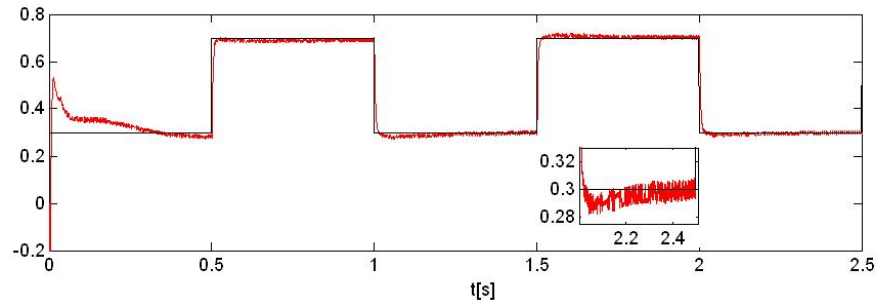


Figura 2.4: Identificación de una perturbación discontinua, por filtrado del control equivalente con  $\tau = \sqrt{10^{-6}}s$ .

La gráfica (Fig. 2.5) muestra la identificación de una señal de frecuencia de  $100rad/s$ , es decir  $w(t) = 0,2\text{sen}(100t) + 0,5$ . Con  $\alpha = 55$ ,  $\lambda = 11$ . El error en este caso es alrededor de  $O(\sqrt{10^{-6}}) \approx 0,14$ . Debido a la presencia de dinámicas parásitas la respuesta del diferenciador se deteriora. Este deterioro aumenta con la frecuencia. En [3] se propone una técnica para analizar la respuesta en el dominio de la frecuencia de los algoritmos de modos deslizantes de segundo orden en presencia de dinámicas parásitas.

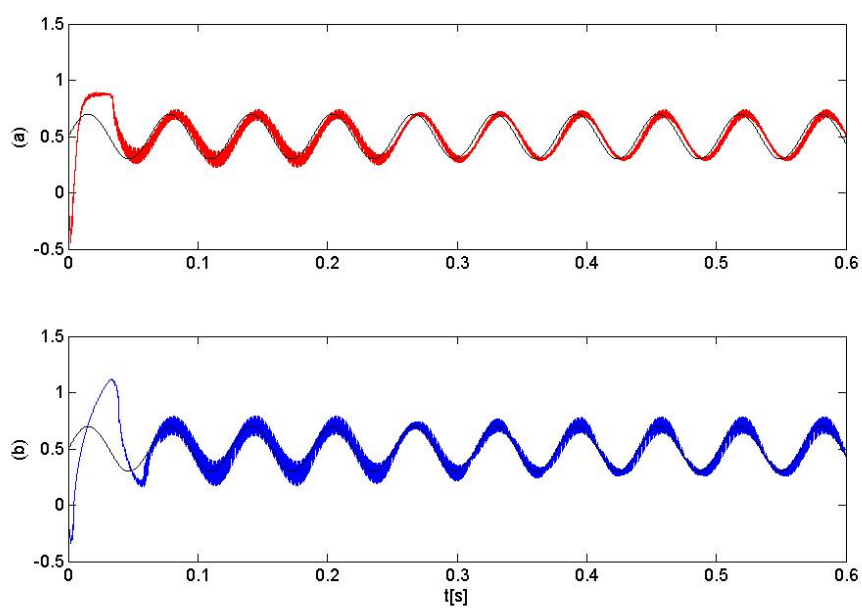


Figura 2.5: Identificación de una perturbación continua de  $100[rad/s]$ . (a) Usando filtrado del control equivalente; (b) usando *Super-Twisting*.

# Capítulo 3

---

## Control por salida

---

En este capítulo se propone un control por retroalimentación de salida con compensación de perturbaciones. Los modos deslizantes han mostrado ser una estrategia de control efectiva cuando se desea controlar un sistema con incertidumbres, no obstante debido a su naturaleza discontinua su implementación se ve afectada por oscilaciones de alta frecuencia conocidas como *chattering*. El objetivo principal es proponer un control robusto a las perturbaciones pero libre de *chattering*.

### 3.1 Descripción del problema

Sea el sistema

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B[u(t) + w(t)] \quad (3.1)$$

$$y(t) = Cx(t), \quad t \geq 0 \quad (3.2)$$

donde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estado,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  es el control,  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  ( $1 \leq p < n$ ) es la salida del sistema. Las matrices  $A$ ,  $B$ ,  $C$  son conocidas y de las dimensiones apropiadas. El par  $\{u(t), y(t)\}$  se asume medible para cualquier instante de tiempo

$t \geq 0$ .  $w(t)$  es el vector de entradas desconocidas. El estado actual  $x(t)$  así como el estado inicial  $x_0$  no son medibles. La perturbación  $w(t)$  es acotada (ver, 2.1 Capítulo 2) y acoplada.

Se considera que el estimado de estado  $\hat{x}$  converge al valor real del estado  $x(t)$  en tiempo finito  $T \geq t_{\ell-1}$  y no asintótico. La incertidumbre  $w(t)$  puede ser identificada por los métodos discutidos en la sección 2.5 dependiendo de su suavidad.

### 3.2 Control óptimo robusto por retroalimentación de salida CORRS

Se desea construir una ley de control robusta de la forma

$$u(t) = u_0(t) + u_1(t) \quad (3.3)$$

Donde  $u_0(t)$  es un control diseñado para el sistema nominal sin perturbaciones ( $w(t) = 0$ )

$$\dot{x}_0(t) = Ax_0(t) + Bu_0(t) \quad (3.4)$$

$u_1(t)$  es un compensador para la perturbación  $w(t)$ .

Se propone como control nominal

$$u(t)_0 = -Kx(t) \quad (3.5)$$

El control  $u_0(t)$  se diseña para el sistema (3.4) tal que minimice el siguiente criterio

$$J = \int_T^\infty (x^T(\tau)Qx(\tau) + u^T(\tau)Ru(\tau)) d\tau \quad (3.6)$$

donde  $Q = Q^T \geq 0$  y  $R = R^T > 0$  son matrices de pesos. El control óptimo que minimiza 3.6 es (ver, [1])

$$K = R^{-1}BP_C \quad (3.7)$$

La matriz  $P_C$  satisface la ecuación algebraica de Riccati

$$AP_C + P_C A^T - P_C B R^{-1} B^T P_C + Q = 0 \quad (3.8)$$

El compensador de la perturbación  $u_1(t)$  se diseña como

$$u_1(t) = -\hat{w}(t); \quad (3.9)$$

donde  $\hat{w}(t)$  es la señal identificada de acuerdo con el procedimiento descrito en la Sección 2.5.

Sustituyendo la ecuación (3.3) en el sistema (3.1) se tiene

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B(u(t) + w(t)) \\ &= Ax(t) + B(-Kx(t) - \hat{w}(t) + w(t)) \\ &= (A - BK)x(t) + B(w(t) - \hat{w}(t)) \end{aligned} \quad (3.10)$$

Es claro que entre mejor sea la identificación de la entrada desconocida  $w(t)$ , la señal de control continua compensará las incertidumbres y las soluciones de los sistemas (3.1) y (3.4) coincidirán.

### 3.3 Ejemplo

En esta sección se aplica el control por salida para el sistema del péndulo invertido. Se simuló usando el método de Euler con un paso de integración de  $10\mu s$ . El observador es el mismo que el que se diseñó en la sección 2.7.2. Las simulaciones se llevaron a cabo con el método de Euler con un paso de integración de  $10^{-6}s$ .

Usando  $w(t) = 0,2\sin(4t) + 0,5$ . En la Fig. 3.1 se muestran los estados no compensados, es decir con  $u(t) = -Kx(t)$ . En la Fig. 3.2 y Fig. 3.3 se muestran los estados cuando se aplica el control compensado  $u(t) = -Kx(t) - B^+ \hat{w}(t)$  usando filtrado de control equivalente en el primer caso y aplicando el AST en el segundo.

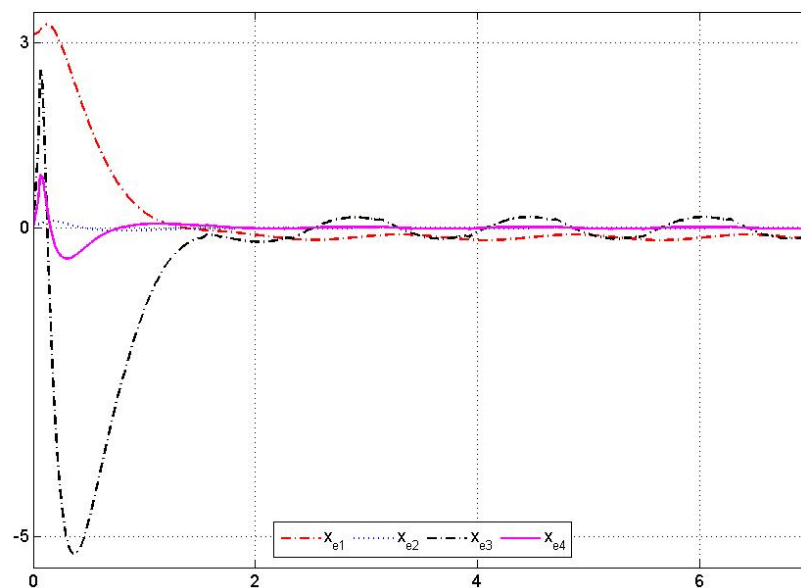


Figura 3.1: En la figura se muestran los estados del sistema sin compensación de incertidumbres.

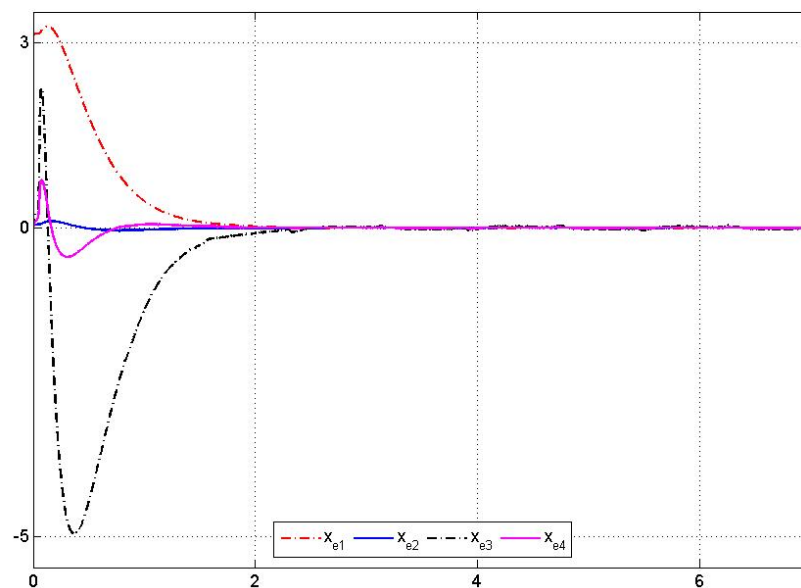


Figura 3.2: En la figura se muestran los estados del sistema con compensación de incertidumbres por filtrado del control equivalente.

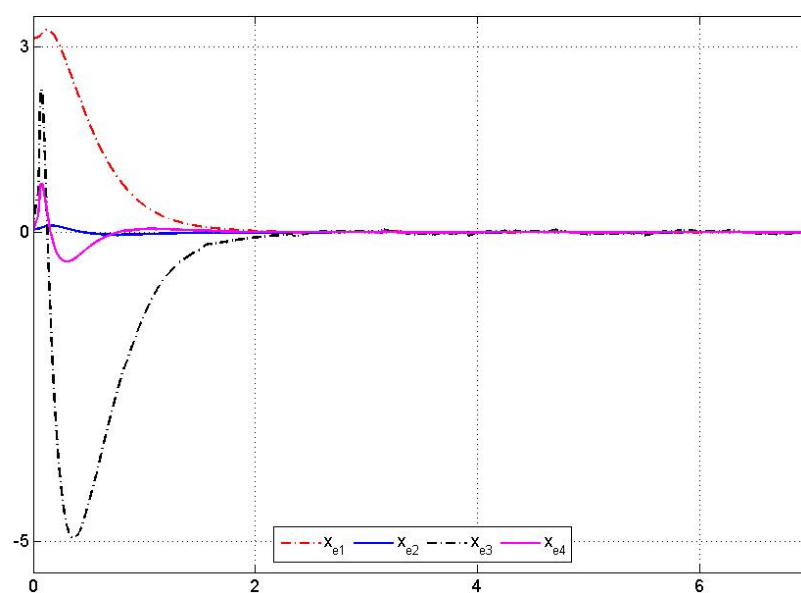


Figura 3.3: En la figura se muestran los estados del sistema con compensación de incertidumbres vía el algoritmo de *Super-Twisting*.

## Capítulo 4

---

### Modos deslizantes integrales por salida

---

Los modos deslizantes integrales (MDI) fueron propuestos por primera vez en [31], se trata de una técnica de control robusto cuya característica principal es la insensibilidad a las perturbaciones acopladas a la señal de control desde el tiempo  $t \geq 0$ . Sin embargo, el diseño de un MDI requiere de la medición de todas las variables de estado, esto limita sus usos ya que en muchos sistemas esto no es posible. En este capítulo se propone un control por modos deslizantes cuando sólo se cuenta con la salida. Para esto, se emplea el estimado exacto del estado obtenido con el observador jerárquico basado en el algoritmo de *Super-Twisting* del Capítulo 2.

#### 4.1 Descripción del problema

Se tiene el sistema lineal perturbado

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + g(t) \quad (4.1)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (4.2)$$

donde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estado,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  es el vector de entradas,  $A, B, C$  son de las dimensiones apropiadas, a salida del sistema es  $y(t) \in \mathbb{R}^p$ . Se asume que

**A1.** El par  $\{A, B\}$  es controlable y que el par  $\{A, C\}$  es observable,

**A2.** La función  $g(t)$  es acotada y acoplada, i.e.

$$\begin{aligned} g(t) &= Bw(t) \\ \|w(t)\| &\leq w^+ \quad w^+ > 0 \end{aligned}$$

**A3.** El sistema es fuertemente observable

Como se presentó en el Capitulo 2, es posible obtener un estimado del estado que converja en un tiempo finito  $T$  al valor exacto.

## 4.2 Control por modos deslizantes integrales por salida CMDIS

Se desea encontrar una ley de control  $u(t)$  tal que el efecto de las incertidumbres representadas por  $g(t)$ , en el sistema (4.1) sea nulo desde el instante inicial  $T$ . Si se considera una entrada de control de la forma

$$u(t) = u_0(t) + u_1(t) \tag{4.3}$$

donde  $u_0(t)$  es el control para el sistema nominal

$$\dot{x}_0(t) = Ax_0(t) + Bu_0(t). \tag{4.4}$$

la ley de control  $u_0(t)$  puede ser continua o discontinua, de tal forma que estabilice al sistema nominal, en este caso  $u_0(t) = -Kx(t)$ , donde  $K$  se calcula de acuerdo con (3.6) - (3.8), La señal de compensación  $u_1(x)$  debe ser diseñada para rechazar la perturbación  $w(t)$  en el modo deslizante  $s(x, t) = 0$ . La función  $s(x, t)$  se define como

$$s(x, t) = s_0(x, t) + z(x, t) \quad s, s_0, \sigma \in \mathbb{R}^m \tag{4.5}$$

la superficie  $s_0(x, t)$  es diseñada como una combinación lineal del estado del sistema  $s_0(x, t) = B^+x(t)$ , donde  $B^+$  es la inversa por la izquierda de  $B$ , esto es  $B^+ =$

$(B^T B)^{-1} B^T$  mientras que la parte integral  $z(x, t)$  es elegida para alcanzar  $x(t) = x_0(t)$  para todo  $t \in [T, \infty)$ . En otras palabras, el estado del sistema pertenece a la superficie deslizante para todo  $t \geq 0$ , y el control equivalente  $u_{eq}(t)$  se encarga de compensar el término de perturbación

$$u_{eq}(t) = -w(t). \quad (4.6)$$

Para alcanzar este propósito,  $z(x, t)$  se obtiene de la ecuación

$$\dot{z}(t) = -\frac{\partial s_0}{\partial x} \{Ax(t) + Bu_0(t)\}, \quad z(0) = -B^+ s(x(t_0)), \quad (4.7)$$

donde  $\frac{\partial s_0}{\partial x} = \nabla \cdot s = B^+$ . Finalmente la superficie deslizante tiene la forma

$$s(x, t) = B^+ \left[ x(t) - x(T) - \int_T^t [Ax(\tau) + Bu_0(\tau)] d\tau \right]. \quad (4.8)$$

El compensador  $u_1(x, t)$  se diseña como un control discontinuo unitario

$$u_1 = -\rho(x) \frac{s(x, t)}{\|s(x, t)\|} \quad (4.9)$$

Calculando la derivada de la función de Lyapunov  $V = (1/2)(s^T s)$ , se tiene

$$\begin{aligned} \dot{V} &= s^T \dot{s}, \\ \dot{V} &= s^T B^+ (\dot{x}(t) - [Ax(t) + Bu_0]), \\ \dot{V} &= s^T B^+ \{Ax(t) + B(u_0 + u_1) + g(t) - [Ax(t) + Bu_0]\} \\ \dot{V} &= s^T B^+ (Bu_1 + Bw(t)) \\ \dot{V} &= s^T \left( -\rho \frac{s}{\|s\|} + w(t) \right) \\ \dot{V} &\leq -\|s\| (\rho - \|w(t)\|) \end{aligned} \quad (4.10)$$

Se observa que  $\dot{V} < 0$  si

$$\rho > \|w(t)\| \quad (4.11)$$

se comprueba entonces que  $s(x, t)$  es atractiva desde  $t \geq T$ .

### 4.3 Ejemplo

Nuevamente se valida para el sistema del PIR. Los resultados fueron obtenidos usando el método de Euler con un paso de integración de  $10(\mu s)$ . Se considera una perturbación  $w(t) = 0,2 \sin t + 0,5$ , de tal modo que  $\rho = 2$  satisface la condición (4.11). El control  $u_0$  es un control lineal cuadrático. En la Fig.4.1 se muestran los estados del sistema PIR usando control por modos deslizantes integrales por salida, se observa que el sistema es robusto a la perturbación.

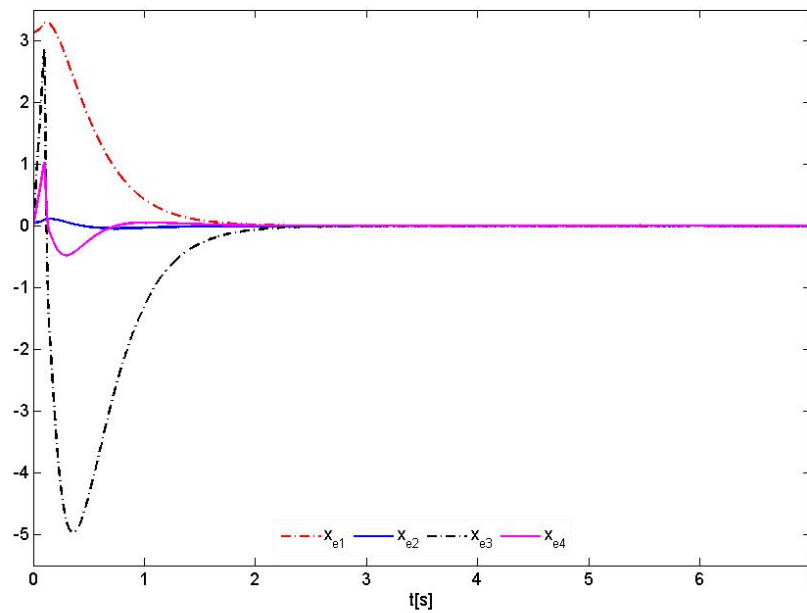


Figura 4.1: Estados del sistema PIR usando un control por modos deslizantes óptimos.

# Capítulo 5

---

## Análisis del error

---

La elección de las metodologías de control por salida propuestas en los capítulos anteriores está sujeta a la discretización de los algoritmos de observación e identificación, así como la implementación del controlador. En este capítulo se realiza un análisis comparativo y se discute bajo que condiciones es más adecuado utilizar el control por modos deslizantes integrales o bien el control continuo con compensación de incertidumbres.

### 5.1 Exactitud del control

La exactitud de los algoritmos de control, representada con la letra  $\varepsilon$ , está en función de los tiempos de discretización (observación - identificación) y de la constante de tiempo  $h$ , la cual depende generalmente de las constantes de tiempo de los actuadores.

#### 5.1.1 Precisión del control óptimo robusto por retroalimentación de salida

##### CORRS

El error del CORRS (Capítulo 3) depende de la discretización del observador y de la compensación de la entrada desconocida así como del control, esto es

$$\varepsilon = O(h) + O(\delta^{\frac{1}{2\ell-2}}) + O(\delta^{\frac{1}{2\ell-1}}) \quad (5.1)$$

### 5.1.2 Precisión del control con modos deslizantes integrales por salida CMDIS

En el caso del CMDIS (Capítulo 4) no es necesario identificar y compensar la entrada desconocida, por lo tanto la precisión queda como

$$\varepsilon = O(h) + O(\delta^{\frac{1}{2\ell-2}}) \quad (5.2)$$

## 5.2 Discusión entre CORRS y CMDIS

Si analizamos el orden de error entre las dos metodologías de control propuestas en este capítulo tenemos que el error causado por el control con identificación y compensación de perturbaciones (5.1) y el error causado por el control por modos deslizantes por salida (5.2) se puede observar que el primero puede ser del orden o incluso mayor que cuando se usan modos deslizantes integrales. Se discuten los siguientes casos

- A. Si  $O\left(\delta^{\frac{1}{\ell-1}}\right) \ll O(h)$ , el ruido del controlador es mayor que el del proceso de identificación. En tal caso, resulta más conveniente usar CORRS y evitar el chattering de CMDIS.
- B. Si  $O\left(\delta^{\frac{1}{\ell-2}}\right) \ll O(h) \ll O\left(\delta^{\frac{1}{\ell-1}}\right)$  el ruido provocado por el controlador será menor que el provocado por el proceso de identificación. Considerando que la precisión de CORRS queda determinada por el proceso de identificación, el uso de CMDIS puede ser una mejor opción en caso de que el sistema sea tolerante al chattering, es decir, a oscilaciones del orden de  $O\left(\frac{1}{h}\right)[2]$ .
- C. Si  $O(h) \ll O\left(\delta^{\frac{1}{\ell-2}}\right)$ , el error provocado por el controlador será menor que el error del proceso de observación. Teóricamente la precisión del CORRS que-

da determinada por la precisión de la etapa de identificación, es decir  $O\left(\delta^{\frac{1}{\ell-2}}\right)$ , mientras que la precisión de CMDIS solo depende del proceso de observación, i.e  $O\left(\delta^{\frac{1}{\ell-2}}\right)$ . No obstante el uso del CMDIS podría amplificar los ruidos del observador en las altas frecuencias [2].

### 5.3 Ejemplo

Se realizaron simulaciones para diferentes tiempos de discretización  $\delta$  y de implementación  $h$  para comparar el desempeño de cada metodología.

Usando una constante de actuador de  $h = 10^{-3}s$ , un tiempo de discretización  $\delta = 10^{-6}s$ , se tiene el caso **A**, donde el error del controlador es mayor que el de identificación. Los resultados de las simulaciones se muestran en Fig.5.1. La columna de la izquierda muestra los estados observados  $x_3$  y  $x_4$ , la columna de la derecha muestra sus respectivas ampliaciones. Se ve claramente que el peor caso es el que se observa en Fig. 5.1.a el cual corresponde a CMDIS como se esperaba. La Fig. 5.1.b y Fig. 5.1.c muestran los resultados para CORRS-AST y CORRS-Filtrado de control equivalente, la precisión es del mismo orden en ambos casos.

Considerando una constante de actuador  $h = 0,001s$  y un tiempo de muestreo  $\delta = 0,00025s$ , que corresponde al caso **B** donde la precisión del controlador  $O(10^{-4})$  es mejor que la de la identificación  $O\left(\sqrt{\delta}\right)$ . La Fig. 5.2 muestra los estados observados  $x_3$  y  $x_4$  en la columna izquierda y su ampliación en la derecha. La Fig. 5.2.a muestra el desempeño del CMDIS, Fig. 5.2.b y Fig. 5.2.c se obtuvieron usando CORRS aplicando el algoritmo Super-Twisting en (b) y filtrado de control equivalente en (c) para identificar y compensar la entrada desconocida. Se observa una mejor precisión con CMDIS (Fig. 5.2.a).

Finalmente se presentan resultados para el caso **C** cuando  $h = 0,00001(s)$  y  $\delta = 0,001(s)$  en la Fig. 5.3. Nuevamente la columna derecha representa los estimados de  $x_3$

y  $x_4$  y la de la derecha su amplificación. El error aproximadamente del mismo orden en los tres casos. Es claro que el control por modos deslizantes integrales amplifica los errores ocurridos en el observador.

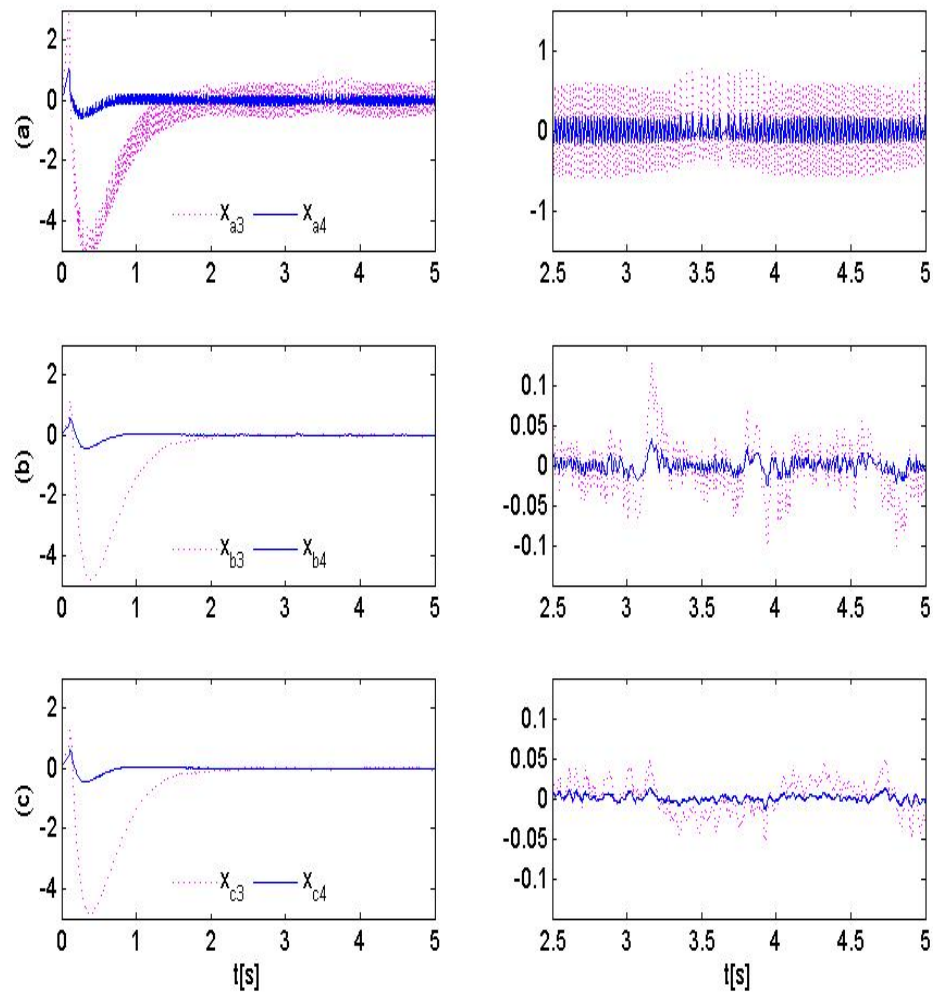


Figura 5.1: Estados  $x_3$  y  $x_4$  para  $h = 0,01(s)$ ,  $\delta = 0,00001(s)$ . El renglón (a) corresponde a CMDIS, el renglón (b) a CORRS-AST y el (c) para CORRS-filtrado de control equivalente. Se aprecia una mejor precisión para CORRS.

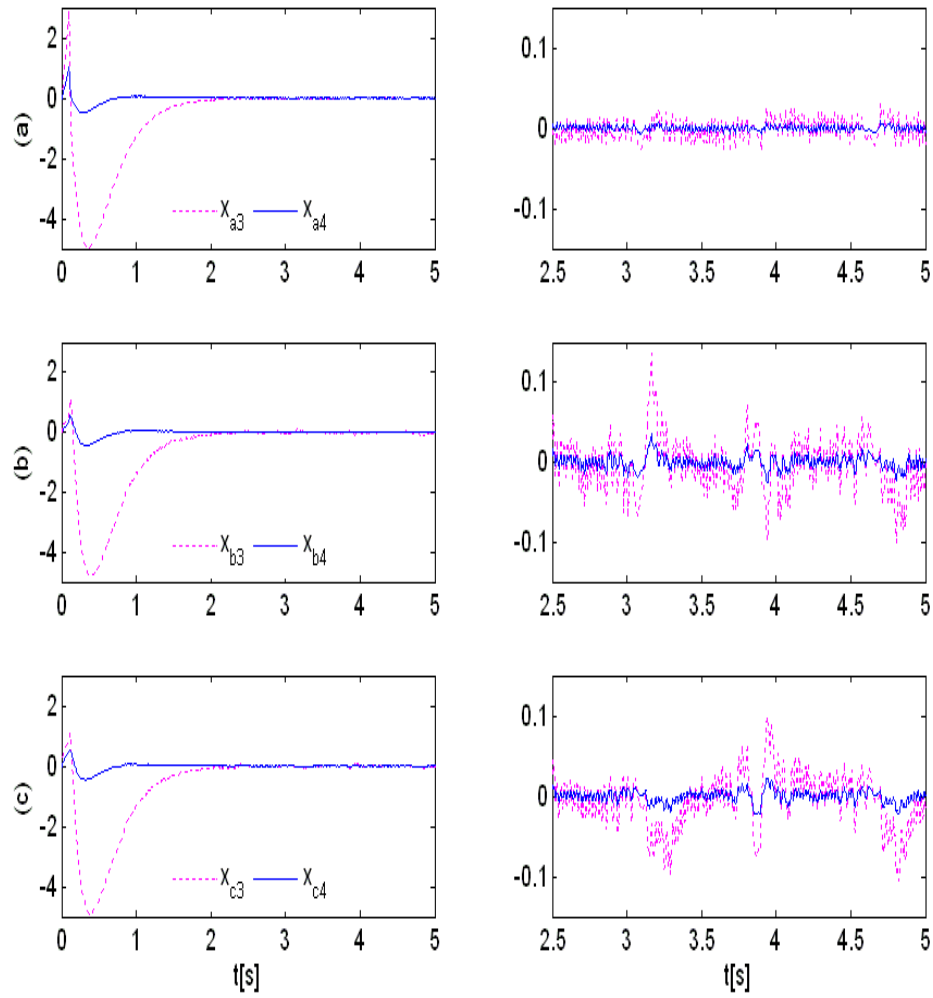


Figura 5.2: Estados  $x_3$  y  $x_4$  para  $h = 0,001(s)$ ,  $\delta = 0,00025(s)$ . El renglón (a) corresponde a CMDIS, el renglón (b) a CORRS-AST y el (c) para CORRS-filtrado de control equivalente. Se aprecia una mejor precisión para CMDIS (a).

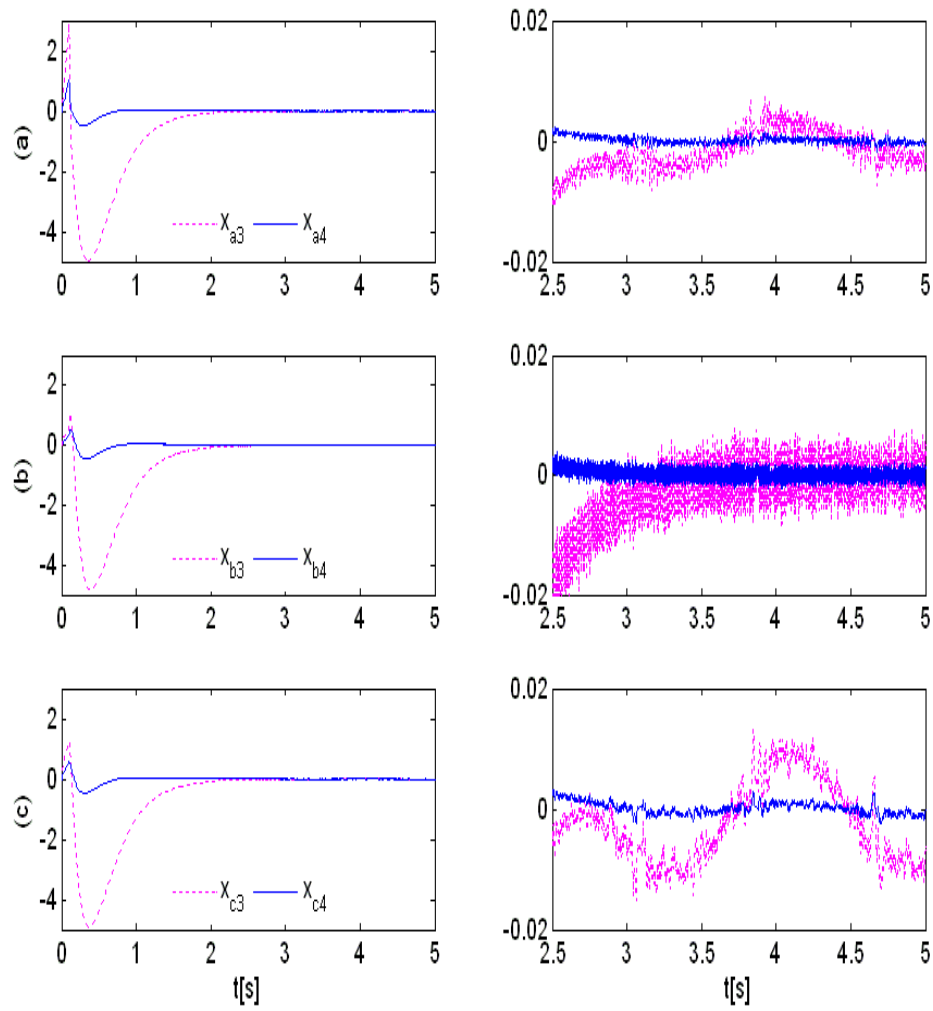


Figura 5.3: Estados  $x_3$  y  $x_4$  para  $h = 0,00001(s)$ ,  $\delta = 0,001(s)$ . El renglón (a) corresponde a CMDIS, el renglón (b) a CORRS-AST y el (c) para CORRS-filtrado de control equivalente. La precisión es aproximadamente igual en los tres casos

## 5.4 Experimentos

Se llevaron a cabo los experimentos en el PIR usando una tarjeta dSPACE 1103. Los programas se realizaron en Simulink, bajo estas condiciones, el tiempo máximo de integración permitido fue de  $\delta = 10\mu s$ , aun cuando este podría ser optimizado si se programa directamente en Lenguaje C. La tarjeta dSPACE recibe la información de los sensores de posición angular del péndulo  $(x_1, x_2)$  y entrega la señal de control a la etapa de potencia, la cual la acondiciona para mandarla al motor. En este caso, la etapa de potencia es la que determina el valor de  $h$ , pues su dinámica es más lenta.

Bajo estas condiciones fue posible realizar los experimentos que a continuación se señalan.

La Fig. 5.4 muestra los resultados de la implementación del control con compensación de entradas desconocidas. Se usó un tiempo de muestreo y de integración de  $10\mu s$ , con una señal modulada en ancho de pulso con frecuencia de  $2,5KHz$  lo que equivale a una constante de actuador  $h = 400\mu s$ . En la figura se muestran los estados estimados  $x_1...x(4)$  y la identificación de la entrada desconocida  $w(t)$ . Se aprecian diferentes eventos: de  $t = 0$  hasta aproximadamente  $t \approx 8s$  el sistema no ha sido compensado; de  $t \approx 8$  a  $t \approx 18$  el sistema es perturbado; en  $t > 18$  se compensa la perturbación, posteriormente se aumenta la frecuencia de la perturbación.

Ahora, aumentando el tiempo de muestreo (e integración) del sistema a  $\delta = 20\mu s$  y manteniendo  $h = 400\mu s$ . La Fig. 5.5 muestra los estados estimados  $x_1...x(4)$  y la identificación de la entrada desconocida  $w(t)$ . Se aprecian los siguientes eventos: de  $t = 0$  hasta  $t \approx 12$  se tiene la respuesta del *sistema nominal*, es decir, sin compensación y *sin perturbaciones*; de  $t = 12$  y hasta aproximadamente  $t = 27$  se agrega la compensación obteniéndose una mejor respuesta, lo que implica que se están eliminando o al menos atenuando las entradas desconocidas; en el tiempo restante se perturba al sistema con una señal conocida.

La Fig. 5.6 muestra el detalle de las señales identificadas para la misma entrada desconocida pero con diferentes tiempos de muestreo. Se espera que el error en ambos casos sea  $O(\sqrt{\delta})$ . La Fig. 5.6.a se identificó con una  $\delta = 10\mu s$ . La señal Fig. 5.6.b se identificó con  $\delta = 20\mu s$ . Vale la pena señalar que la señal identificada corresponde a la señal senoidal propuesta más las entradas desconocidas del sistema.

La respuesta del sistema bajo la acción de una entrada desconocida usando modos deslizantes se muestra en la Fig. 5.7. Se uso un tiempo de integración de  $\delta = 10\mu s$ . Aunque se logra mantener estable el sistema a pesar de la perturbación se aprecian una mayor oscilación en las posiciones.

Usando modos deslizantes por salida con  $\delta = 20\mu s$  (Fig. 5.8 ) con una  $h \approx 70\mu s$  la respuesta presenta *chattering*.

En los experimentos anteriores se logra controlar usando ambas metodologías. No obstante, los modos deslizantes presentan *chattering* lo cual ocasiona un desgaste del sistema.

Para un tiempo de muestreo menor,  $\delta = 70\mu s$  con una constante de actuador de amplificador de aproximadamente  $h = 71\mu s$  que corresponde a una frecuencia máxima de funcionamiento de  $14KHz$ , se obtuvieron las gráficas de la Fig. 5.9. El control CORRS no funcionó en este caso, el ruido de la identificación  $O(\sqrt{70\mu}) \approx 8400\mu$  es mucho mayor que el ocasionado por el actuador.

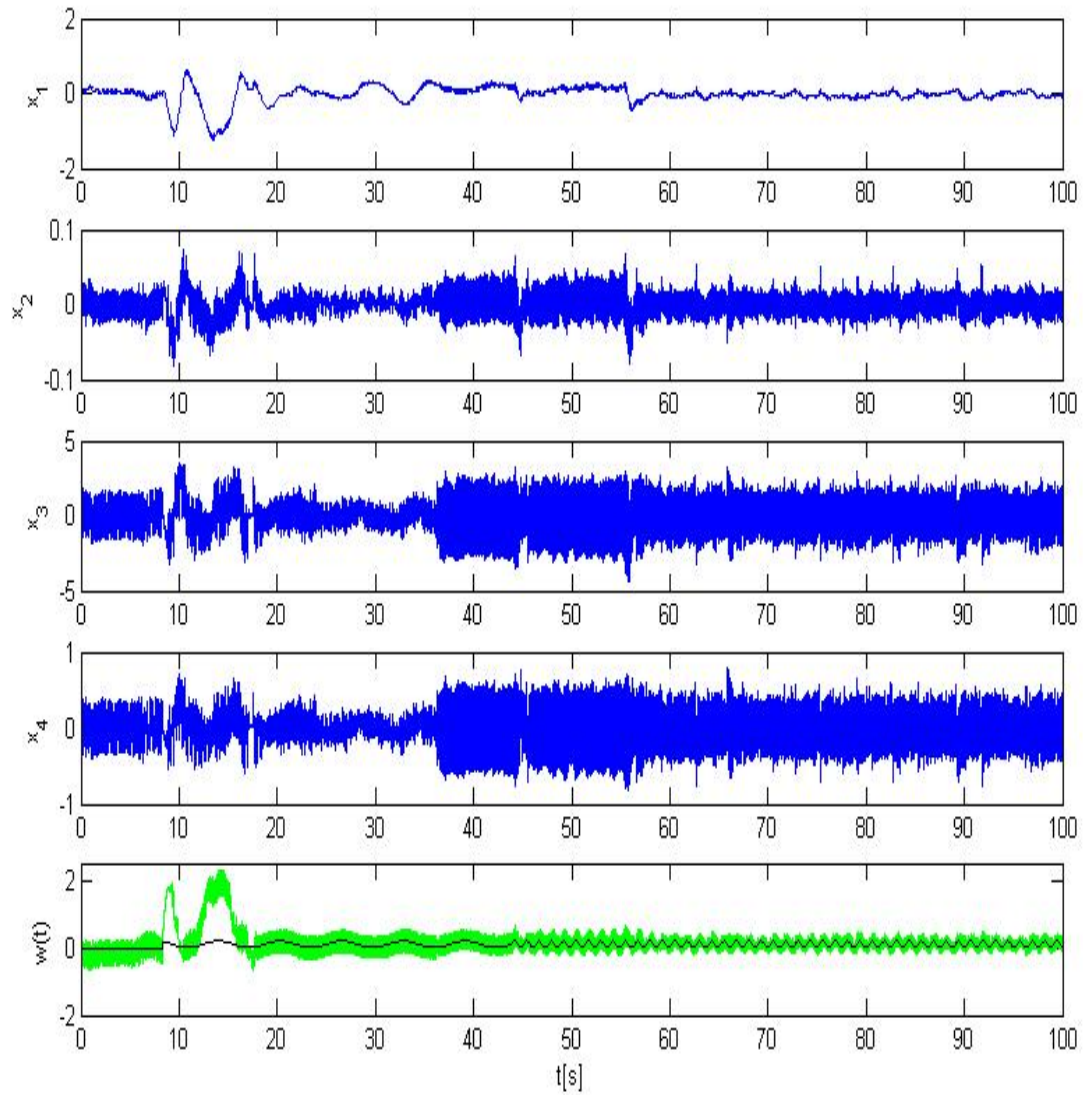


Figura 5.4: Resultados experimentales. Control del PIR usando CORRS con  $\delta = 10\mu s$  y  $h = 400\mu s$ . Del muestran los estados estimados  $x_1[rad]$ ,  $x_2[rad]$ ,  $x_3[rad/s]$ ,  $x_4[rad/s]$  y la identificación de la entrada desconocida  $w(t)$ .

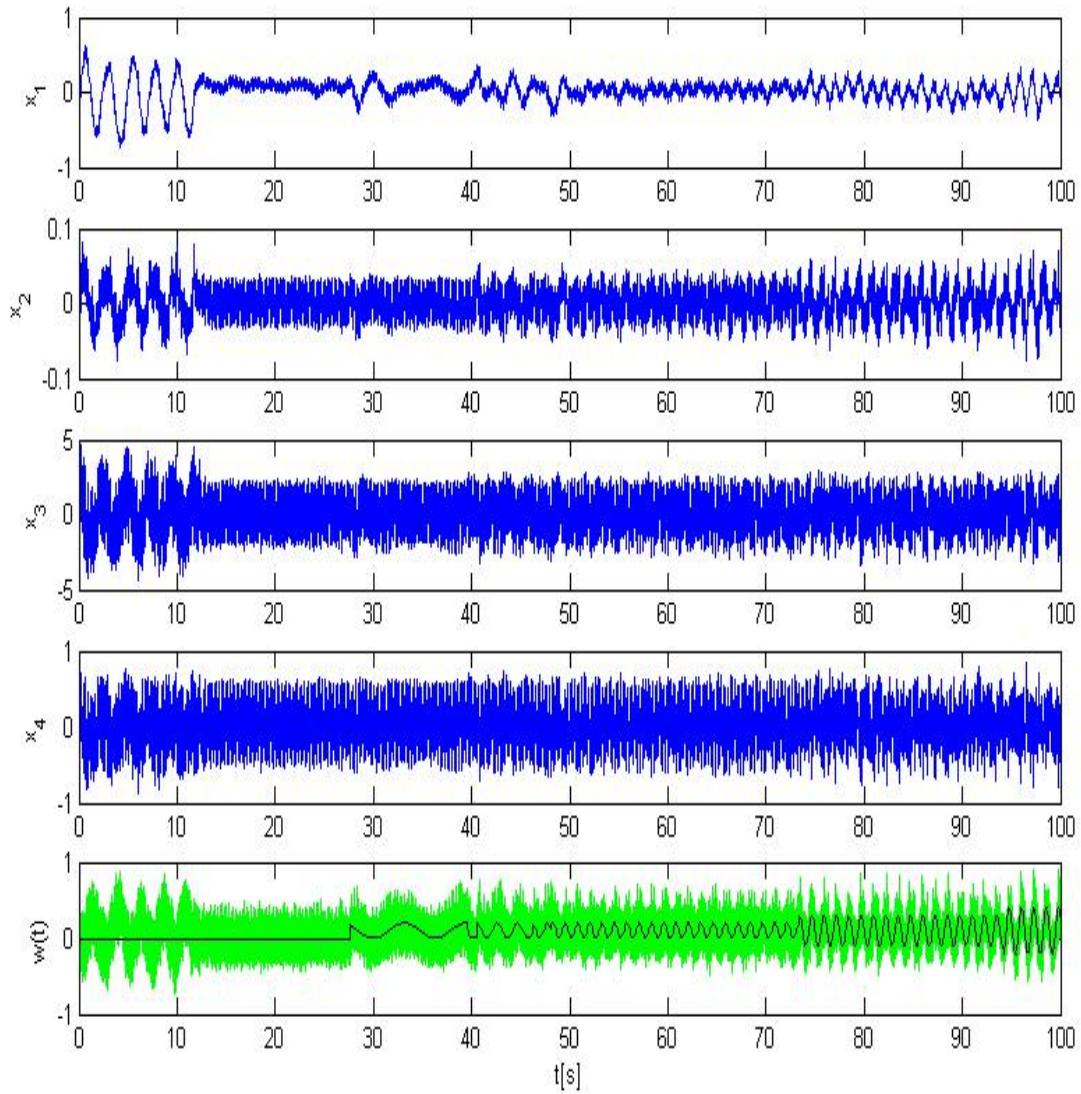


Figura 5.5: Resultados experimentales para el control del PIR usando CORRS con  $\delta = 20\mu s$  y  $h = 400\mu s$ . Del muestran los estados estimados  $x_1[rad]$ ,  $x_2[rad]$ ,  $x_3[rad/s]$ ,  $x_4[rad/s]$  y la identificación de la entrada desconocida  $w(t)$ .

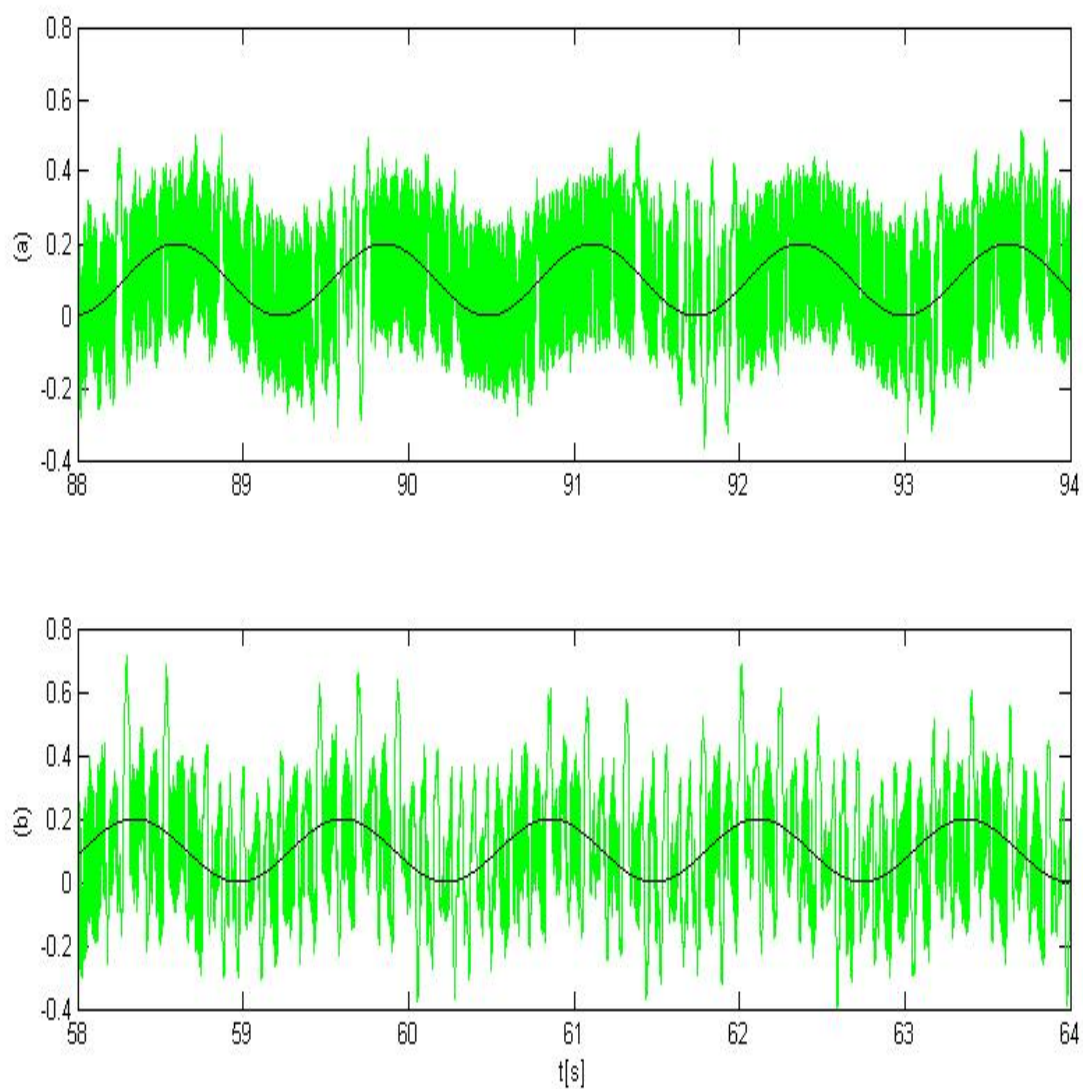


Figura 5.6: Identificación experimental de entradas desconocidas para diferentes tiempos de muestreo. En (a) se usó un  $\delta = 10\mu s$ ; en (b)  $\delta = 20\mu s$ .

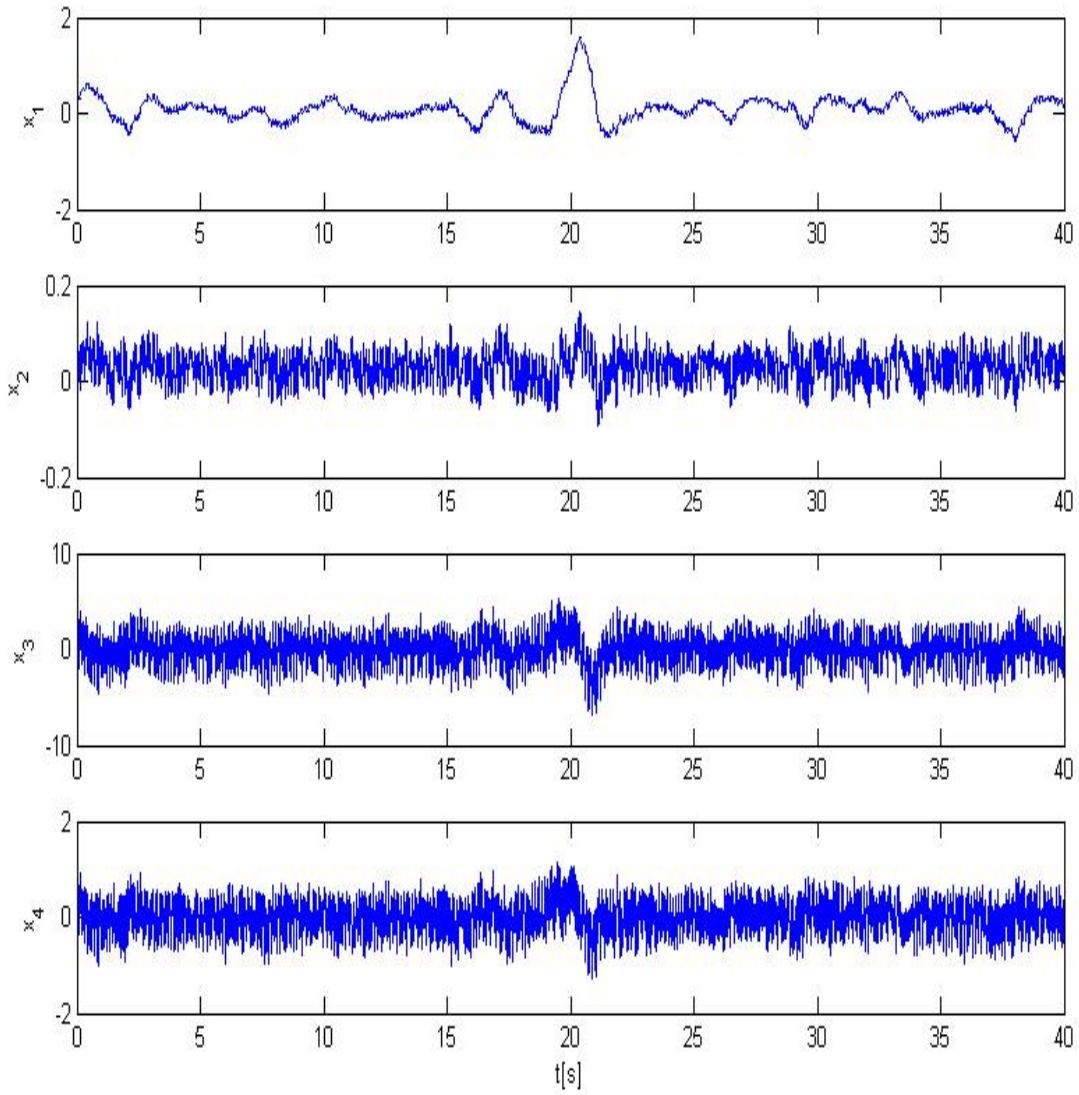


Figura 5.7: Control del PIR usando modos deslizantes con  $\delta = 10\mu s$  y  $h = 400\mu s$ . Del muestran los estados estimados  $x_1[rad]$ ,  $x_2[rad]$ ,  $x_3[rad/s]$ ,  $x_4[rad/s]$

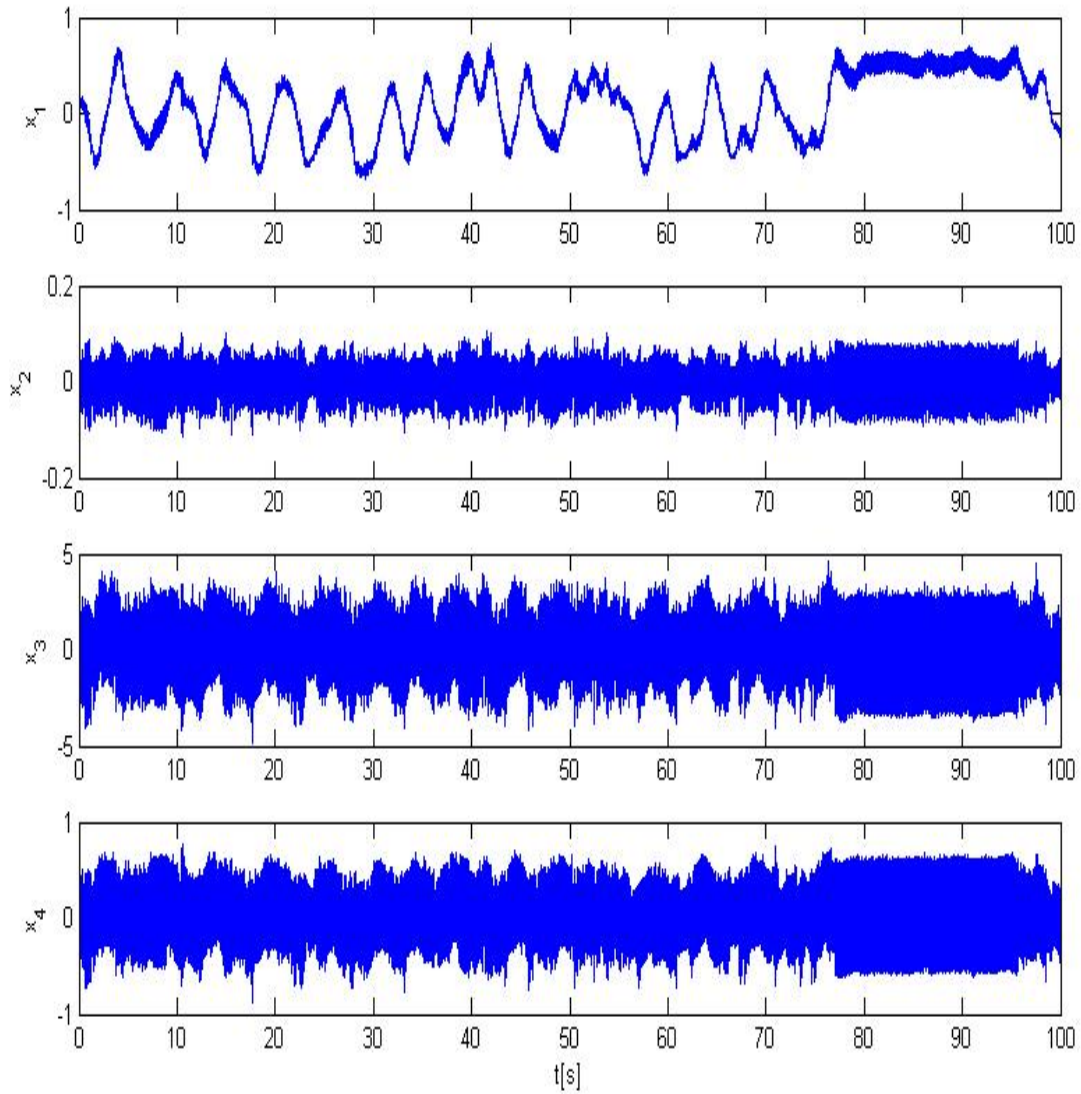


Figura 5.8: Resultados experimentales para el control del PIR usando modos deslizantes con  $\delta = 20\mu s$  y  $h = 70\mu s$ . Del muestran los estados estimados  $x_1[rad]$ ,  $x_2[rad]$ ,  $x_3[rad/s]$ ,  $x_4[rad/s]$  y la identificación de la entrada desconocida  $w(t)$ .

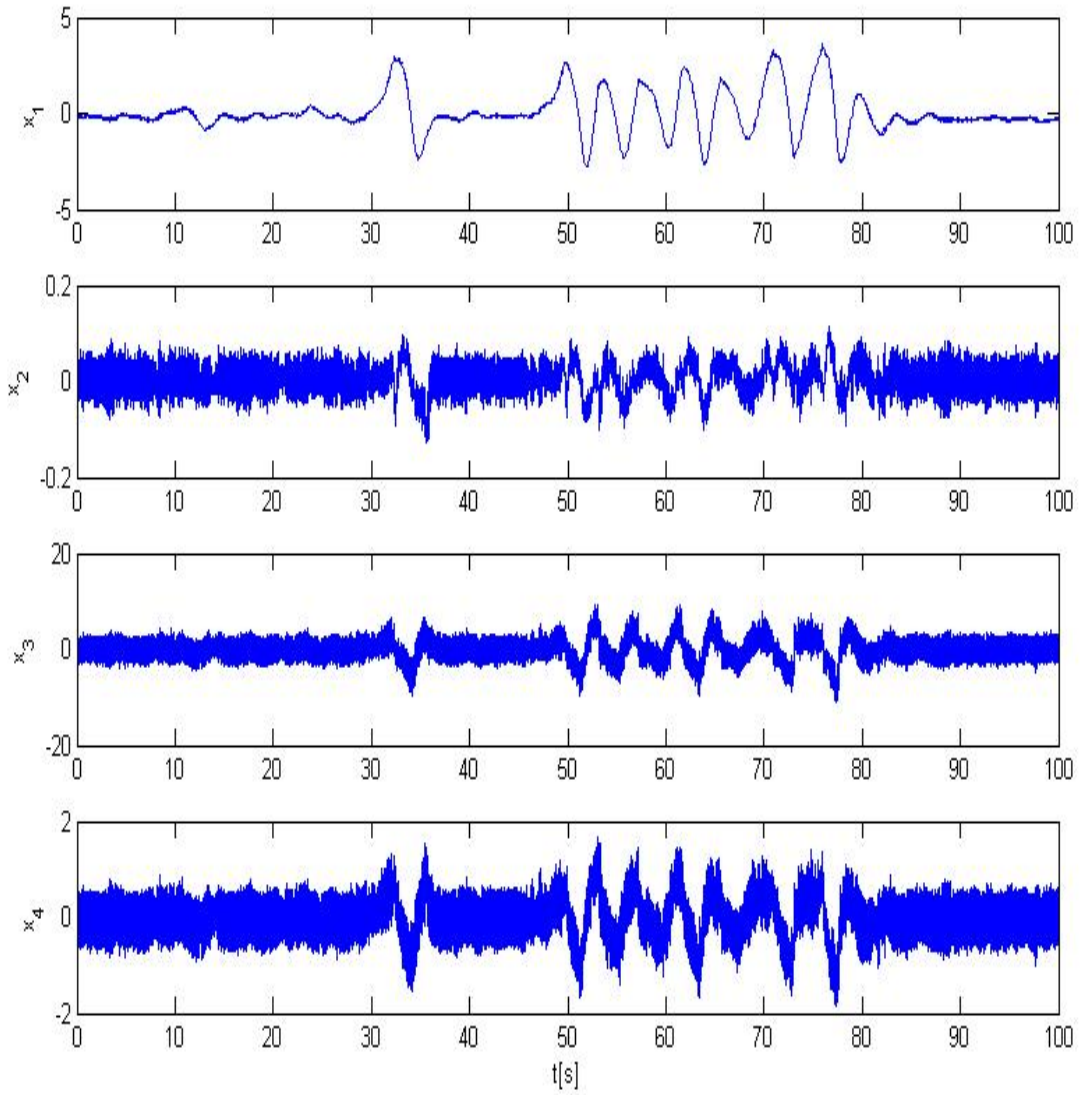


Figura 5.9: Control del PIR usando modos deslizantes con  $\delta = 70\mu s$  y  $h = 70\mu s$ . Estados estimados  $x_1[rad]$ ,  $x_2[rad]$ ,  $x_3[rad/s]$ ,  $x_4[rad/s]$

# Capítulo 6

---

## Conclusiones

---

Se abordó el problema de control de sistemas con entradas desconocidas acopladas cuando sólo se cuenta con la señal de salida. Cuando el sistema es fuertemente observable, es posible reconstruir tanto el estado y las entradas desconocidas en un tiempo finito usando observadores jerárquicos basados en el algoritmo de Super-Twisting.

Se estudiaron dos estrategias de control:

- La primera, el control óptimo robusto por retroalimentación de salida, es un control continuo con compensación de entradas desconocidas. La compensación se lleva a cabo usando el estimado exacto de la perturbación y no presenta chattering.
- La segunda estrategia es un control por modos deslizantes integrales basados en los estimados exactos del observador. Este control recupera las ventajas de los modos deslizantes integrales, es decir, insensibilidad a las perturbaciones acopladas desde el primer momento (i.e. una vez que el observador converge). En este caso la entrada desconocida acoplada es compensada a través de un control discontinuo lo cual provoca chattering.

En el Capítulo 2 se analizaron los errores del observador y de las estrategias de

identificación. Estos se retomaron en el Capítulo 5 donde se comparó la precisión de las metodologías de control y se sugirió un criterio para elegir entre dichas metodologías. Se determinó que teóricamente el control via modos deslizantes por salida tiene mejor precisión pero presenta chattering, en cambio el control continuo con compensación de entradas desconocidas es menos preciso pero esta libre de chattering. Se estudiaron tres casos:

- A. Cuando el ruido del controlador es peor que la del algoritmo de identificación, en ese caso se prefiere usar control continuo y evitar el *chattering*.
- B. Cuando la precisión del controlador es menor que la de la identificación y mayor que la de observación, en este caso el control por modos deslizantes integrales podría ser el indicado en caso de que el sistema sea tolerante a *chattering*.
- C. Finalmente, cuando el ruido del observador es mayor que el del controlador, se observa que el control por modos deslizantes amplifica los errores del observador.

Se realizaron pruebas experimentales con el péndulo invertido, y se analizaron las condiciones en las que resultaba conveniente el empleo de cada uno de los controladores tomando en cuenta el criterio anterior además de las limitantes del propio experimento.

# Apéndice A

---

## Algoritmo *Super-Twisting*

---

Actualmente se han desarrollado algoritmos con modos deslizantes de segundo orden, muchos de los cuales utilizan la derivada del estado como una señal para generar el control (ver i.e. [18] [12]). Estos controles utilizan entonces tanto al estado como su derivada para garantizar que  $x = \dot{x} = 0$  en tiempo finito.

Considere el sistema dinámico dado por

$$\dot{x} = a(x, t) + b(x, t)u \quad (\text{A.1})$$

y suponga que para algunas constantes positivas  $C, K_M, K_m, U_M, q$

$$|\dot{a}| + U_M \left| \dot{b} \right| \leq C, \quad 0 \leq K_m \leq b(x, t) \leq K_M, \quad |a/b| < qU_M, \quad 0 > q > 1. \quad (\text{A.2})$$

El siguiente algoritmo no requiere la medición de  $\dot{x}$  para garantizar la convergencia de  $x = \dot{x} = 0$  [ref 12]

$$u = -\lambda |x|^{1/2} \text{sign}x + u_1, \quad \dot{u}_1 = \begin{cases} -u, & |u| > U_M \\ -\alpha \text{sign}x, & |u| \leq U_M \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

Con  $K_m\alpha > C$  y  $\lambda$  suficientemente grandes, el controlador (A.3) formará un modo deslizante de segundo orden atrayendo todas las trayectorias hacia  $x = \dot{x} = 0$  en tiempo finito [18]. El control entrará en tiempo finito en el segmento  $[-U_M, U_M]$  y se mantendrá dentro. Si el valor inicial se encuentra dentro del segmento, este nunca lo abandonará.

Una condición suficiente para la convergencia está dada por la elección de  $\lambda$  como

$$\lambda > \sqrt{\frac{2}{(K_m\alpha - C)} \frac{(K_m\alpha + C)K_M(1 + q)}{K_m^2(1 - q)}}$$

Calculando  $\dot{u}$  con  $|u| > U_M$  obtenemos  $\dot{u} = -\frac{1}{2}\lambda\dot{x}|x|^{-1/2} - u$ . De la ecuación (A.1) y las restricciones (A.2) se tiene que  $\dot{x}u > 0$  con  $|u| > U_M$ , entonces,  $\dot{u}u < 0$ ,  $|\dot{u}| > U_M$  cuando  $|u| > U_M$  y por lo tanto  $|u| \leq U_M$  se satisface en tiempo finito.

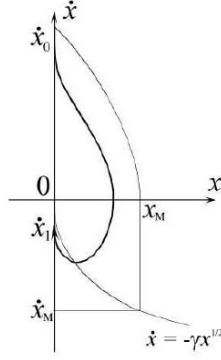
Por el contrario, cuando  $|u| < U_M$ , con  $x \neq 0$ :

$$\ddot{x} = \dot{a} + \dot{b}u - b\frac{1}{2}\lambda\frac{\dot{x}}{|x|^{1/2}} - b\alpha\text{sign}(x) \quad (\text{A.4})$$

en donde se usa la identidad  $\frac{d}{dt}|x| = \dot{x}\text{sign}x$ . Nótese que los valores pertenecientes al conjunto de medida cero no son tomados en cuenta para la diferenciación, entonces la diferencial es realizada cuando  $\text{sign}x = \text{const}$ . Reescribiendo la ecuación (A.4) en forma de inclusión diferencial se tiene

$$\ddot{x} \in [-C, C] - [K_m, K_M] \left( \frac{1}{2}\lambda\frac{\dot{x}}{|x|^{1/2}} + \alpha\text{sign}x \right) \quad (\text{A.5})$$

Las trayectorias del sistema se encontrarán confinadas dentro de la curva más amplia descrita por la inclusión (A.5) llamada curva mayorante, por lo que el cálculo de dicha curva es necesaria para probar la convergencia. Con  $x > 0, \dot{x} > 0$  la trayectoria quedará confinada entre los ejes  $x = 0, \dot{x} = 0$  y la trayectoria descrita por la curva mayorante  $\ddot{x} = -(K_m\alpha - C)$  ver Fig. A.1. Sea  $x_M$  la intersección de esta curva con el eje  $\dot{x} = 0$ . Obviamente  $x(K_m\alpha - C)x_M = \dot{x}_0^2$ . Es fácil ver que


 Figura A.1: Curva mayorante del algoritmo *Super-Twisting*.

$$x > 0, \dot{x} = 0, \quad \frac{1}{2}\lambda \frac{|\dot{x}|}{|x|^{1/2}} > \frac{C}{K_m} + \alpha \rightarrow \ddot{x} > 0$$

Entonces la curva mayorante para  $x > 0$  puede considerarse como

$$\begin{aligned} \dot{x}^2 &= 2(K_m\alpha - C)(x_M - x); \quad \dot{x} > 0. \\ x &= x_M; \quad 0 \geq \dot{x} \geq -\frac{2}{\lambda} \left( \frac{C}{K_m} + \alpha \right) x^{1/2}, \\ \dot{x} &= \dot{x}_M = -\frac{2}{\lambda} \left( \frac{C}{K_m} + \alpha \right) x_M^{1/2}; \quad \dot{x} > -\frac{2}{\lambda} \left( \frac{C}{K_m} + \alpha \right) x^{1/2} \end{aligned}$$

por lo que la curva mayorante tendrá la forma mostrada en la Fig.A.1.

Es suficiente satisfacer  $\left| \frac{\dot{x}_M}{\dot{x}_0} \right| < 1$  para probar la convergencia cuando  $|u| < U_M$ , esto es

$$\frac{2(K_m\alpha + C)^2}{\lambda^2 K_m^2 (K_m\alpha - C)} < 1$$

eligiendo adecuadamente  $\lambda$  de acuerdo a la forma propuesta en (A.2) es fácil ver en la anterior igualdad que el algoritmo converge.

Para probar el tiempo finito de convergencia es suficiente considerar una pequeña vecindad del origen cuando  $|u| < U_M$ . Considere la variable auxiliar  $\xi = a(t) + b(t)u_1$ . Es fácil ver que  $\xi = \dot{x}$  en el momento que  $x = 0$ , y  $u_1 \rightarrow -a/b$  cuando  $t \rightarrow \infty$ ,

entonces  $\xi = b(a/b + u_1)$  tiende a cero. A partir del momento en que  $|u_1| < U_M$ , la derivada  $\dot{\xi} = \dot{a} + \dot{b}u_1 - b\alpha \text{sign}x$  satisface las desigualdades

$$0 > K_m\alpha - C \leq -\dot{\xi}\text{sign}x \leq K_M\alpha + C$$

Entonces la variación total de  $\xi$  estará dada por  $\sum |x_i|$ , la cual es regida por una serie geométrica con índice menor a uno y por lo tanto converge. Entonces el tiempo de convergencia puede estimarse como

$$T \leq \frac{\sum |x_i|}{(K_m\alpha - C)}.$$

La anterior prueba permite garantizar que el conjunto  $\dot{x} = x = 0$  será un conjunto no vacío compuesto por trayectorias en el sentido de Filippov. Por lo que el uso del algoritmo de control (A.3) sobre el sistema (A.1) producirá un modo deslizante de segundo orden atrayendo todas las trayectorias del sistema en tiempo finito.

Analizando el controlador *Super-Twisting*, es posible destacar ciertas características que posibilitarían su aplicación a una dinámica de segundo orden. De la condición  $|\dot{\alpha}| + U_M |\dot{b}| \leq C$  es posible deducir que el algoritmo es aplicable a un sistema que posea una segunda derivada acotada, aún cuando la aplicación del algoritmo de control se lleva a cabo en un sistema de primer orden. El algoritmo (A.3) se encuentra dividido en una parte lineal, que permite la convergencia fuera de la región  $U_M$ , y una parte no lineal, compuesta por el algoritmo de modos deslizantes, que permite la convergencia en la región  $U_M$  del origen y que asegura el tiempo finito de convergencia. La aplicación del algoritmo *Super-Twisting* de control posee cierta robustez a perturbaciones acotadas actuando sobre el sistema.

#### Algunos teoremas del algoritmo de *Super-Twisting*

Sea una señal de entrada  $f(t)$  una función medible y localmente acotada definida sobre  $[0, \infty)$ . Para diferenciar esta señal desconocida, se considera la ecuación auxiliar

$$\dot{x} = u \tag{A.6}$$

Se define la variable deslizante  $s = x - f(t)$ . Aplicando el algoritmo de *Super-Twisting*, tal que  $s = \dot{s} = 0$ , se obtiene

$$v = z - \lambda |s|^{1/2} \text{sign}(s) \tag{A.7}$$

$$\dot{z} = -\alpha \text{sign}(s) \tag{A.8}$$

con  $\alpha, \lambda > 0$ . Aquí,  $u(t)$  es la salida del diferenciador. Las soluciones de (A.6) y (A.7) son entendidas en el sentido de Filippov [11].

**Teorema A.1** (*Teorema 3, [20]*) Se define  $\delta$  como el tiempo de muestreo, para una señal de entrada  $f(t)$  diferenciable con constante de Lipschitz  $C > 0$ . Después de un tiempo finito  $t > 0$  se tiene que

$$|u(t) - \dot{f}(t)| \leq \mu_1 \delta$$

**Teorema A.2** (*Teorema 2, [20]*) Sea  $f(t) = f_o(t) + n(t)$ , donde  $f_o(t)$  es una señal diferenciable, con constante de Lipschitz  $C > 0$ , y  $n(t)$  es un ruido  $|n(t)| \leq \varepsilon$ . Entonces, existe una constante  $\mu_2$  tal que después de un tiempo finito  $t > 0$  se cumple la desigualdad

$$|u(t) - \dot{f}(t)| \leq \mu_2(\varepsilon)^{1/2}$$

## Apéndice B

---

### Análisis del error en las derivadas consecutivas aplicando el diferenciador basado en *Super-Twisting*

---

Se obtienen derivadas consecutivas de una señal  $f(t)$  aplicando un diferenciador basado en el algoritmo de *Super-Twisting*. La salida del diferenciador consiste esencialmente de la derivada exacta de la señal y una señal pequeña de alta frecuencia. Al volver a diferenciar, esta señal entrará como un ruido en la siguiente etapa. Los ejemplos que se presentan muestran que el error es proporcional al tiempo de integración. En general se puede afirmar que el error en la  $i$ -ésima aplicación del diferenciador es  $O\left(2^{\frac{1}{2^i-1}}\right)$ . Los resultados se simularon usando el método de Euler para distintos tiempos de integración.

$$\begin{aligned}v^{(i)} &= z^{(i)} - \lambda_i |s^{(i)}|^{1/2} \text{sign}(s^{(i)}) \\z^{(i)} &= -\alpha_i \text{sign}(s^{(i)})\end{aligned}\tag{B.1}$$

Como ejemplo se propone la señal  $f(t) = \text{sen}(t) + 5t$ , con  $\alpha_i = 8$ ,  $\lambda_i = 6$ , ( $i = 1, \dots, 3$ ). Se comparó la precisión obtenida con diferentes tiempos de integración  $\delta$ , los resultados se muestran en la siguiente tabla.

|             | $\dot{f}(t)$ | $\ddot{f}(t)$      | $\dddot{f}(t)$                       |
|-------------|--------------|--------------------|--------------------------------------|
| $\delta$    | $O(\delta)$  | $O(\sqrt{\delta})$ | $O\left(\delta^{\frac{1}{4}}\right)$ |
| $80\mu s$   | 0,0010       | 0,20               | 2,42                                 |
| $100\mu s$  | 0,0012       | 0,18               | 2,20                                 |
| $200\mu s$  | 0,0022       | 0,22               | 3,00                                 |
| $400\mu s$  | 0,0042       | 0,40               | 4,00                                 |
| $1000\mu s$ | 0,0100       | 0,50               | 6,00                                 |

Los resultados son representados en Fig.B.1.

Ahora, se tiene la función  $f(t) = 0,1\text{sen}(10t) + 5t$ , aplicando (B) con  $\alpha_i = 1,1a_i$ ,  $\lambda_i = 1,5\sqrt{a_i}$ , ( $i = 1, \dots, 3$ ), donde  $a_i$  representa el valor de la aceleración para cada caso. La precisión obtenida con diferentes tiempos de integración  $\delta$ , se muestra en la

siguiente tabla.

|             | $\dot{f}(t)$ | $\ddot{f}(t)$      | $\dddot{f}(t)$                       |
|-------------|--------------|--------------------|--------------------------------------|
| $\delta$    | $O(\delta)$  | $O(\sqrt{\delta})$ | $O\left(\delta^{\frac{1}{4}}\right)$ |
| $80\mu s$   | 0,0008       | 0,42               | 34                                   |
| $100\mu s$  | 0,0010       | 0,48               | 38                                   |
| $200\mu s$  | 0,0022       | 0,70               | 45                                   |
| $400\mu s$  | 0,0050       | 1,00               | 50                                   |
| $1000\mu s$ | 0,0100       | 1,50               | 60                                   |

La Fig. B.2 representa el incremento del error en función del orden del diferenciador.

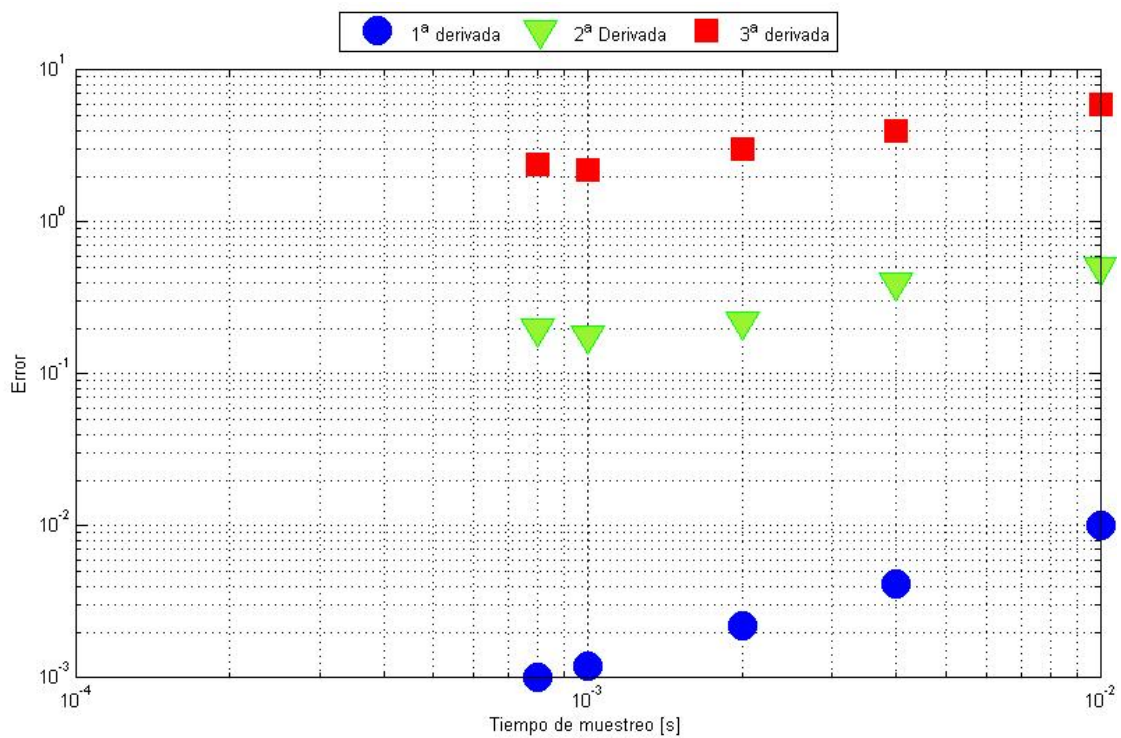


Figura B.1: Errores del diferenciador para las derivadas consecutivas de  $f(t) = \sin(t) + 5t$  con diferentes tiempos de integración

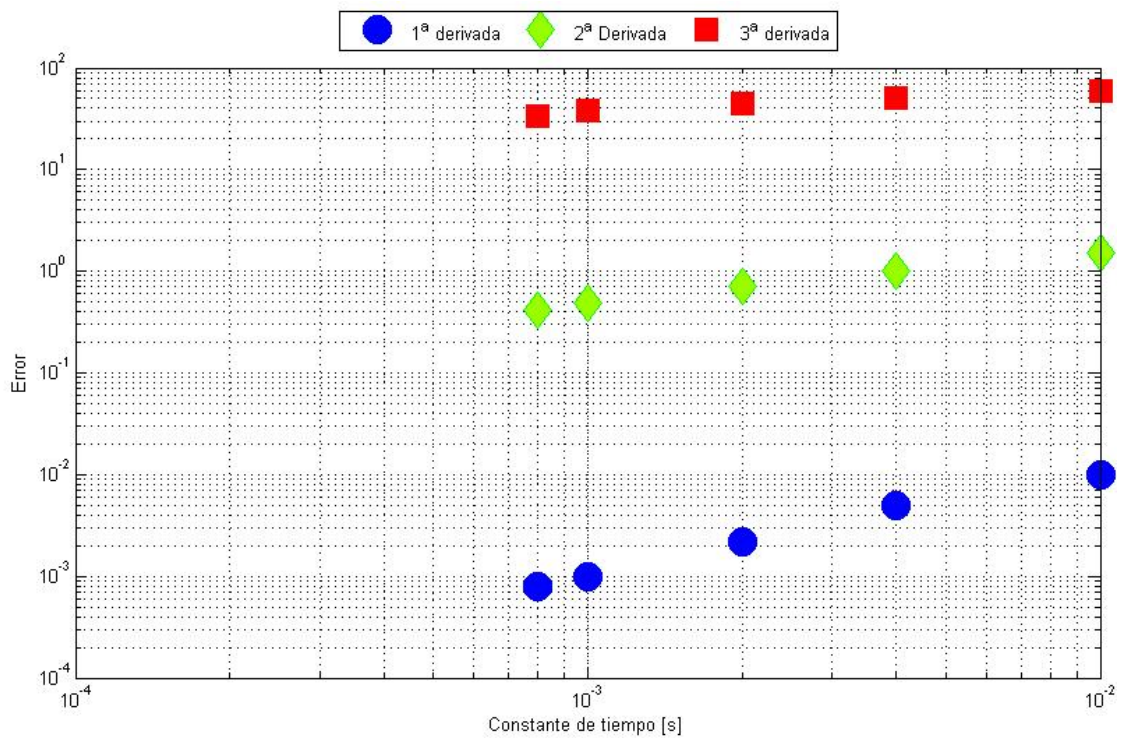


Figura B.2: Errores del diferenciador para las derivadas consecutivas de  $f(t) = 0.1\sin(10t) + 5t$  con diferentes tiempos de integración.

---

---

## Bibliografía

---

- [1] B. D. O. Anderson and J. M. Moore. Optimal Control. Linear Quadratic Methods, Prentice Hall, NJ; 1971.
- [2] I.Boiko. Analysis of sliding modes in the frequency domain. Optimal and robust sliding mode control for linear systems with multiple time delays in control input. Int. Journal of Control, vol. 78, no. 13, pp. 969-981, 2005.
- [3] I. Boiko, I. Castellanos, L. Fridman. Analysis of response of second-order sliding mode controllers to external inputs in frequency domain. International Journal of Robust and Nonlinear Control. In press.
- [4] J. F. Bejarano, L. Fridman, A.Poznyak. Exact state estimation for linear systems with unknown inputs based on hierarchical super-twisting algorithm, Int. Journal on Robust and Nonlinear Control, 2007, Published Online: 28 Mar 2007.
- [5] J. Barbot, T. Boukhobza, and M. Djemal. Sliding mode observer for triangular input form. In 35th IEEE Conference on Decision and Control, pp. 1489-1490, Japan 1996.
- [6] J.P. Barbot, M. Djemai, and T. Boukhobza. Sliding mode observers. In W. Perquetti and J.P. Barbot, editors, Sliding Mode Control in Engineering, Control Engineering, pp. 103-130. Marcel Dekker, New York, 2002.
- [7] F. Castaños and L. Fridman. Optimal and Robust sliding mode filter for systems with continuous and delayed measurements. In IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 51, no. 5, pp. 853-858, 2006.

- [8] J. Dávila and L. Fridman and A. Levant. Second-Order Sliding-Mode Observer for Mechanical Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 50(11):1785-1789, 2005.
- [9] C. Edwards and S.K. Spurgeon. *Sliding Mode Control*. Taylor and Francis. London, 1998.
- [10] C. Edwards, S.K. Spurgeon, and R. G. Hebden. On development and applications of sliding mode observers. In J. Xu and Y. Xu, editors, *Variable Structure Systems: Towards XXIst Century*, Lecture Notes in Control and Information Science, pp. 253-282. Springer Verlag, Berlin, Germany, 2002.
- [11] A.F. Filippov. *Differential Equations with Discontinuous Right-hand Sides*. The Neederlands: Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1988.
- [12] L. Fridman, A. Levant. Higher order sliding modes as the natural phenomena of control theory. In: *Robust Control Variable Structure and Lyapunov Techniques*, F. Garafalo and G. Glielmo (Eds). Lecture Notes in Control and Information Science, 217, Springer Verlag, London, 1996.
- [13] H. Hashimoto, V. Utkin, Jian Xin Xu, Hiroyuki Suzuki, and F. Harashima. Vss observer for linear time varying system. In *Proceedings of IECON90*. 34-39, 1990.
- [14] M. L. J. Hautus. Strong detectability and observers. *Linear Algebra and its Applications*, v. 50, pp. 353-368, April 1983.
- [15] M. L. J. Hautus and L. M. Silverman. System structure and singular control. *Linear Algebra and its Applications*, vol. 50, pp. 369-402, 1983.
- [16] A. Isidori. *Nonlinear Control Systems*. Springer-Verlag, London: England, 1996.
- [17] H. Kwakernaak and R. Sivan. *Linear Optimal Control Systems* John Wiley and Sons Inc.; 1972.
- [18] A. Levant, L. Fridman. Higher order sliding modes. In: *Sliding Mode Control in Engineering*, W. Perruquetti, J. P. Barbot. (Eds). Marcel Dekker, New York, 2002.
- [19] A. Levant. Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control. *International Journal of Control*, vol. 58, pp. 1247-1263, 1993.
- [20] A. Levant, Robust exact differentiation via sliding mode technique, *Automatica*, 34(3):379-384, 1998.
- [21] J. M. Maciejowski. *Multivariable Feedback Design*. Addison-Wesley Publishing Company; 1994.

- [22] B. P. Molinari. A strong controllability and observability in linear multivariable control. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 21(5):761-764, October 1976.
- [23] J. Nijmeijer (Ed.). *New Directions in Nonlinear Observer Desing*. Springer Verlag 1999.
- [24] A.S. Poznyak. Deterministic output noise effects in sliding mode observation. In Sabanovic, Asif and Fridman, Leonid and Spurgeon, Sarah. *Variable structure systems: from principles to implementation*. IEEE control engineering series. pp. 45-80, IEE London, 2004.
- [25] A. Pisano and E. Usai. Output-feedback control of an underwater vehicle prototype by higher-order sliding modes *Automatica*. 40:1525-1531, 2004.
- [26] A. Rapaport and J. L. Gouze. Practical observers for uncertain affine output injection systems. In *ECC 1999*, 1999.
- [27] Rocha Cozatl Edmundo Gabriel, Moreno Pérez Jaime A. Diseño de observadores con entradas desconocidas para sistemas no lineales por medio de propiedades de disipatividad México, 2006. Tesis Doctorado (Doctorado en Ingenieria Electrica)-UNAM, Facultad de Ingenieria.
- [28] H.L. Trentelman, A.A. Stoorvogel, M. Hautus. *Control theory for linear systems*. Springer-Verlag. London, Great Britain, 2001.
- [29] V. I. Utkin. *Sliding Modes Control and Optimization*. Springer-Verlag, Berlin; 1992.
- [30] V. Utkin and J. Guldner and J. Shi. *Sliding Modes in Electromechanical Systems*. Taylor and Francis. London, 1999.
- [31] V. I. Utkin and L. Shi. Integral sliding mode in systems operating under uncertainty conditions. *Proc. 35th Conference on Decision and Control*, Kobe, Japan, 1996, pp.4591-4596.