



Universidad Nacional Autónoma de México

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA

**Control de posición/fuerza para  
manipuladores rígidos basado  
en cuaterniones unitarios**

**T E S I S**

QUE PARA OPTAR AL GRADO DE  
MAESTRÍA EN INGENIERÍA

Área: Eléctrica, Campo: Control

**P R E S E N T A:**

JUAN CARLO RIVERA DUEÑAS

Director de tesis:

Dr. MARCO ANTONIO ARTEAGA PÉREZ



MÉXICO, D.F.

2007

## **JURADO ASIGNADO:**

Presidente:	Dr. Tang Xu Yu
Secretario:	Dr. Alvarez Icaza Longoría Agustín
Vocal:	Dr. Arteaga Pérez Marco
1 <sup>er</sup> . Suplente:	Dr. Benitez Pérez Héctor
2 <sup>er</sup> . Suplente:	Dr. Espinosa Pérez Gerardo René

Lugar o lugares donde se realizó la tesis:

Laboratorio de robótica del Edificio de Posgrado de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de Mexico (UNAM).

## **TUTOR DE TESIS:**

Dr. Marco Antonio Artega Pérez

---

**FRIMA**

**CONTROL DE POSICIÓN/FUERZA PARA  
MANIPULADORES RIGIDOS BASADO EN CUATERNIONES  
UNITARIOS**

**Juan Carlo Rivera Dueñas**

**Dirigida por:  
Dr. Marco Antonio Arteaga Pérez**

**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO  
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN  
INGENIERÍA  
MARZO 2007**

## Dedicatorias

A Dios.  
A mi madre.  
A mis hermanos.

CUANDO EL ALUMNO ESTE PREPARADO APARECERÁ EL MAESTRO.

*«Antiguo proverbio Zen»*

## Agradecimientos

- A Dios por haberme guiado y permitido la realización de uno de los sueños (la realización de la maestría en la UNAM), además de poner en mi camino la experiencia, sabiduría y conocimiento brindado por mis maestros, amigos y compañeros dentro de esta institución; gracias por haberme bendecido grandemente con la familia de la cual soy parte.
- A mi Mamá Lic. Sonia E. Dueñas Fernández por su sacrificio y ejemplo, por enseñarme cuales son las cosas importantes de la vida; por mostrarme que los sueños se hacen realidad en la medida en que uno desee conseguirlos, y ...en fin por todo lo que eres, gracias.
- A mis hermanos: Claudia, Alejandra y Rafael; las personas junto con mi madre de mayor influencia en mi vida personal, gracias por las risas y tristezas, consejos y experiencias, por enseñarme y tratarme como una persona de gran valor, son prioridad en mi vida.
- A mis abuelos: lolita y chanito por ayudarme durante los primeros años de mis estudios de ingeniería y por la experiencia que me compartieron.
- A mis tíos: Jorge, Ara, Pablo y Nora, por su ayuda, enseñanzas y consejos que han hecho de mi una persona mejor.
- A mis primos: Moncho, Bety, Nata, Judith, Dany, Yuri, Banchi y Gutty; de los cuales por sus alegrías y tristezas e aprendido directa eh indirectamente como tomar decisiones en mi vida.
- A mis sobrinos: Chucho, Abi, Cacho, Sonia, Bere, Salma, David, Fany, Jorge Antonio, Polcillo, Jessy; por medio de ustedes eh entendido la importancia de la familia.
- A mi cuñado Paul y su familia (Elenita y Alvaro): por la ayuda, apoyo y consejos que me han dado durante mi estancia en el DF.

- A la Lic. Sara Maria de los Reyes por todo el apoyo moral y económico durante mi formación académica, y por el conocimiento de una nueva forma de pensamiento que sin duda mejoro mi forma de comprender el universo.
- A mis maestros: Dr. Luis A. Álvarez Icaza Longoria, Dr. Leonid M. Fridman, Dr. Yu Tang Xu, Dr. Gerardo René Espinosa Pérez, Dr. Jaime Moreno Pérez, Dra. Cristina Verde Rodarte, Dr. Hector Benitez y en especial al Dr. Marco Antonio Arteaga Pérez; por la paciencia, ayuda, tiempo y consejos que siempre hubo para atender las consultas que surgieron en el transcurso de mis estudios de maestría.
- A mis compañeros de generación y laboratorio: Juvenal Villanueva, Alejandra Ferrería, Sergio del Moral y Paul Erick Mendez; por su ayuda, convivencia y comentarios, fuera y dentro de las aulas de clase; A Juan C. Rosas, Ricardo Pérez, Eduardo Pérez, Rene Sagredo, Angélica y Jens por sus comentarios y aportaciones que ofrecieron en el desarrollo de esta tesis.
- A la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM) por el orgullo de pertenecer a tan honorable e importante institución de nuestro país.
- A CONACyT por el apoyo económico durante mis estudios de maestría.
- A todas las personas que de una u otra forma han contribuido en mi formación académica, personal y espiritual.

!lo logramos!, mil gracias.

## Resumen

En esta tesis se presenta un esquema controlador-observador de posición-fuerza usando cuaterniones unitarios, la teoría desarrollada fue probada en el robot A465 de *CRS Robotics* de seis grados de libertad que se encuentra ubicado en el laboratorio de robótica del Edificio de Posgrado de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), el cual no cuenta con transductores de velocidad; pero sí con sensores de posición y fuerza. El robot realiza tareas en movimiento restringido, que consisten en el seguimiento de trayectorias deseadas tanto de posición como de fuerza sobre dos tipos de superficies: plana y esférica. Para el primer tipo se realizan movimientos en 3D (X,Y,Z) con una pendiente predeterminada dentro del espacio de trabajo, en cuanto a la segunda superficie consta de un movimiento en 2D (X,Z); sin conocimiento de la dinámica del robot ni de la superficie. No es necesario el uso de la cinemática inversa para realizar el control, sino solo la retroalimentación de posición articular y fuerza son utilizadas. El esquema de control propuesto es un enfoque PID de posición/fuerza explícito con un observador no lineal, contemplando una restricción holónoma para la ecuación que rige a la superficie. La estabilidad del sistema en lazo cerrado se prueba empleando la teoría de Lyapunov; aunque cabe mencionar que las pruebas matemáticas son de tipo local. Los experimentos se realizaron con un tiempo de muestreo de 10 milisegundos, con el que se obtienen errores de posición menores de  $\pm 2$  mm. y errores del observador de  $\pm 0.75$  mm; los errores de fuerza oscilan en un rango de  $\pm 7$  Newtons, para las diferentes trayectorias de fuerza contempladas. Por lo tanto es posible el control de posición-fuerza de un robot de seis grados de libertad sin contar con transductores de velocidad.

## Prólogo

La robótica es un concepto de dominio público. La mayor parte de la gente tiene una idea de lo que es la robótica, sabe sus aplicaciones y el potencial que tiene; sin embargo, no conocen el origen de la palabra robot, ni tienen idea del origen de las aplicaciones útiles de la robótica como ciencia. La robótica como hoy en día la conocemos, tiene sus orígenes hace miles de años. Nos basaremos en hechos registrados a través de la historia, y comenzaremos aclarando que antiguamente los robots eran conocidos con el nombre de autómatas, y la robótica no era reconocida como ciencia, es más, la palabra robot surgió hace mucho después del origen de los autómatas.

Desde el principio de los tiempos, el hombre ha deseado crear vida artificial. Se ha empeñado en dar vida a seres artificiales que le acompañen en su morada, seres que realicen sus tareas repetitivas, tareas pesadas o difíciles de realizar por un ser humano. De acuerdo a algunos autores, como J. J. C. Smart y Jasia Reichardt, consideran que el primer autómata en toda la historia fue Adán creado por Dios. De acuerdo a esto, Adán y Eva son los primeros autómatas inteligentes creados, y Dios fue quien los programó y les dio sus primeras instrucciones que debieran de seguir. Dentro de la mitología griega se puede encontrar varios relatos sobre la creación de vida artificial, por ejemplo, Prometeo creó el primer hombre y la primera mujer con barro y animados con el fuego de los cielos. De esta manera nos damos cuenta de que la humanidad tiene la obsesión de crear vida artificial desde el principio de los tiempos.

Muchos han sido los intentos por lograrlo. Los hombres creaban autómatas como un pasatiempo, eran creados con el fin de entretener a su dueño. Los materiales que se utilizaban se encontraban al alcance de todo el mundo, esto es, utilizaban maderas resistentes, metales como el cobre y cualquier otro material moldeable, esto es, que no necesitara o requiriera de algún tipo de transformación para poder ser utilizado en la creación de los autómatas. Estos primeros autómatas utilizaban, principalmente, la fuerza bruta para poder realizar sus movimientos. A las primeras máquinas herramientas que

ayudaron al hombre a facilitarle su trabajo no se les daba el nombre de autómatas, sino más bien se les reconocía como artefactos o simples máquinas.

Por siglos el ser humano ha construido máquinas que imiten las partes del cuerpo humano. Los antiguos egipcios unieron brazos mecánicos a las estatuas de sus dioses. Estos brazos fueron operados por sacerdotes, quienes clamaban que el movimiento de estos era inspiración de sus dioses. Los griegos construyeron estatuas que operaban con sistemas hidráulicas, los cuales se utilizaban para fascinar a los adoradores de los templos. Durante los siglos XVII y XVIII en Europa fueron construidos muñecos mecánicos muy ingeniosos que tenían algunas características de robots. Jacques de Vaucansans construyó varios músicos de tamaño humano; esencialmente se trataba de robots mecánicos diseñados para un propósito específico: la diversión.

En 1805, Henri Maillardert construyó una muñeca mecánica que era capaz de hacer dibujos. Una serie de levas se utilizaban como “el programa” para el dispositivo en el proceso de escribir y dibujar. Estas creaciones mecánicas de forma humana deben considerarse como inversiones aisladas que reflejan el genio de hombres que se anticiparon a su época. Hubo otras invenciones mecánicas durante la revolución industrial, creadas por mentes de igual genio, muchas de las cuales estaban dirigidas al sector de la producción textil. Entre ellas se puede citar la hiladora giratoria de Hargreaves en (1770), la hiladora mecánica de Crompton en (1779), el telar mecánico de Cartwright en (1785), el telar de Jacquard en (1801), y otros.

El desarrollo en la tecnología, donde se incluyen las poderosas computadoras electrónicas, los actuadores de control retroalimentados, transmisión de potencia a través de engranes, y la tecnología en sensores han contribuido a flexibilizar los mecanismos autómatas para desempeñar tareas dentro de la industria. Son varios los factores que intervienen para que se desarrollaran los primeros robots en la década de los 50's. La investigación en inteligencia artificial desarrolló maneras de emular el procesamiento de información humana con computadoras electrónicas e inventó una variedad de mecanismos para probar sus teorías.

No obstante las limitaciones de las máquinas robóticas actuales, el concepto popular de un robot es que tiene una apariencia humana y que actúa como tal. Este concepto humanoide ha sido inspirado y estimulado por varias narraciones de ciencia ficción. Una obra checoslovaca publicada en 1917 por Karel Kapek, denominada *Rossum's Universal Robots*, dio lugar al término robot. La palabra checa *Robota* significa servidumbre o trabajador forzado, y cuando se tradujo al inglés se convirtió en el término robot. Dicha narra-

ción se refiere a un brillante científico llamado Rossum y su hijo, quienes desarrollan una sustancia química que es similar al protoplasma. Utilizan ésta sustancia para fabricar robots, y sus planes consisten en que los robots sirvan a la clase humana de forma obediente para realizar todos los trabajos físicos. Rossum sigue realizando mejoras en el diseño de los robots, elimina órganos y otros elementos innecesarios, y finalmente desarrolla un ser “perfecto”. El argumento experimenta un giro desagradable cuando los robots perfectos comienzan a no cumplir con su papel de servidores y se revelan contra sus dueños, destruyendo toda la vida humana.

Entre los escritores de ciencia ficción, Isaac Asimov contribuyó con varias narraciones relativas a robots, comenzó en 1939, a él se atribuye el acuñamiento del término Robótica. La imagen de robot que aparece en su obra es el de una máquina bien diseñada y con una seguridad garantizada que actúa de acuerdo con tres principios. Estos principios fueron denominados por Asimov *Tres Leyes de la Robótica* son:

1. Un robot no debe dañar a un ser humano o, por su inacción, dejar que un ser humano sufra daño.
2. Un robot debe obedecer las órdenes que le son dadas por un ser humano, excepto cuando estas órdenes están en oposición con la Primera Ley.
3. Un robot debe proteger su propia existencia, hasta donde esta protección no esté en conflicto con la Primera o Segunda Ley.

Consecuentemente todos los robots de Asimov son fieles sirvientes del ser humano, de ésta forma su actitud contraviene a la de Kapek. A continuación se presenta un cronograma de los avances de la robótica desde sus inicios:

**Siglo XVIII** – A mediados del J. de Vaucanson construyó varias muñecas mecánicas de tamaño humano que ejecutaban piezas de música.

**1801** – J. Jacquard invento su telar, que era una máquina programable para la urdimbre.

**1805** – H. Maillardet construyó una muñeca mecánica capaz de hacer dibujos.

**1946** – El inventor americano G.C Devol desarrolló un dispositivo controlador que podía registrar señales eléctricas por medio magnéticos y reproducirlas para accionar un máquina mecánica. La patente estadounidense se emitió en 1952.

**1947** – Se desarrolla el primer teleoperador servo-eléctrico.

**1948** – Un teleoperador es mejorado incorporando retroalimentación de fuerza.

**1949** – Se inicia la búsqueda de la fabricación de una maquina de control numérico.

**1951** – Trabajo de desarrollo con teleoperadores (*manipuladores de control remoto*), para manejar materiales radiactivos. Patente de Estados Unidos emitidas para Goertz en (1954) y Bergsland en (1958).

**1952** – Una máquina prototipo de control numérico fue objetivo de demostración en el Instituto Tecnológico de Massachusetts después de varios años de desarrollo. Un lenguaje de programación de piezas denominado APT (*Automatically Programmed Tooling*) se desarrolló posteriormente y se publicó en 1961.

**1954** – El inventor británico C. W. Kenward solicitó su patente para diseño de robot. Patente británica emitida en 1957. G.C. Devol desarrolla diseños para Transferencia de artículos programada. Patente emitida en Estados Unidos para el diseño en 1961. George Devol diseño el primer robot programable.

**1956** – Joseph Engelberger, en la Universidad de estudios de física de Columbia, compra los derechos para el robot *Devol's* y funda la compañía *Unimation*.

**1959** – Se introdujo el primer robot comercial por *Planet Corporation* que estaba controlado por interruptores de fin de carrera.

**1960** – Se introdujo el primer robot *Unimate*, basada en la transferencia de artículos programada de Devol. Utilizan los principios de control numérico para el control de manipulador y era un robot de transmisión hidráulica.

**1961** – Un robot *Unimate* se instaló en la planta de New Jersey de *Ford Motors Company* para atender una máquina de fundición de troquel. El primer robot con retroalimentación de fuerza es desarrollado.

**1963** – Se desarrolla el primer robot con un sistema de visión.

**1966** – *Trallfa*, una firma noruega, construyó e instaló un robot de pintura por pulverización.

**1968** – Un robot móvil llamado *Shakey* se desarrollo en SRI (*standford Research Institute*), estaba provisto de una diversidad de sensores así como una cámara de visión y sensores táctiles y podía desplazarse por el suelo.

**1971** – El *Standford Arm*, un pequeño brazo de robot de accionamiento eléctrico, se desarrolló en la universidad de Standford.

**1973** – Se desarrolló en SRI el primer lenguaje de programación de robots del tipo de computadora para la investigación con la denominación *WAVE*. Fue seguido por el lenguaje *AL* en 1974; posteriormente en el lenguaje *VAL* comercial para *Unimation* por Víctor Scheinman y Bruce Simano.

**1974** – *ASEA* introdujo el robot *Irb6* de accionamiento completamente eléctrico. Kawasaki, bajo licencia de *Unimation*, instaló un robot para soldadura por arco para estructuras de motocicletas. *Cincinnati Milacron* introdujo el robot *T3* con control por computadora. El primer robot programado en lenguaje *WAVE* es desarrollado en Stanford.

**1975** – El robot *Sigma de Olivetti* se utilizó en operaciones de montaje, una de las primitivas aplicaciones de la robótica al montaje. *Inc. Unimation* registro sus primeras ganancias financieras.

**1976** – Un dispositivo de *Remote Center Compliance* (RCC) para la inserción de piezas en la línea de montaje se desarrolló en los laboratorios *Charles Stara Draper Labs en Boston, Estados Unidos*.

**1978** – El robot *T3 de Cincinnati Milacron* se adaptó y programó para realizar operaciones de taladro y circulación de materiales en componentes de aviones, bajo el patrocinio de *Air Force ICAM (Integrated Computer- Aided Manufacturing)*. Se introdujo el robot *PUMA (Programmable Universal Machine for Assambly)* para tareas de montaje por *Unimation*, basándose en diseños obtenidos en un estudio de la *General Motors*.

**1979** – Desarrollo del robot tipo *SCARA (Selective Compliance Arm for Robotic Assambly)* en la Universidad de Yamanashi en Japón para montaje. Varios robots *SCARA* comerciales se introdujeron hacia 1981.

**1980** – Un sistema robótico de captación de recipientes fue objeto de demostración en la Universidad de Rhode Island. Con el empleo de visión de máquina el sistema era capaz de captar piezas en orientaciones aleatorias y posiciones fuera de un recipiente.

**1981** – Se desarrolló en la Universidad de Carnegie-Mellon un robot de impulsión directa. Utilizaba motores eléctricos situados en las articulaciones del manipulador sin las transmisiones mecánicas habituales empleadas en la mayoría de los robots.

**1982** – *IBM* introdujo el robot *RS-1* para montaje, basado en varios años de desarrollo interno. Se trata de un robot de estructura de caja que utiliza un brazo constituido por tres dispositivos de deslizamiento ortogonales. El lenguaje del robot *AML*, desarrollado por *IBM*, se introdujo también para programar el robot *SR-1*. *FAPUC* de Japón y *General Motors* forman *GM FAPUC* para comercializar robots en Norteamérica.

**1983** – Informe emitido por la investigación de *Westinghouse Corp.* bajo el patrocinio de *National Science Foundation* sobre un sistema de montaje programable adaptable (APAS), un proyecto piloto para una línea de montaje automatizada flexible con el empleo de robots. *Adept Technology* es fundada y comercializa exitosamente estaciones de manejo para robots.

**1984** – Sistema *Robots 8*. La operación típica de estos sistemas permitía que se desarrollaran programas de robots utilizando gráficos interactivos en una computadora personal y luego se cargaban en el robot.

**1986** – El robot submarino *Jason*, del Instituto Oceanográfico *Woods Hole*, explora los restos del *Titanic*, fundado en un año por Dr. Robert Barnard.

**1988** – El *IEEE Robotics y Automation Society* son formadas.

**1993** – El robot experimental *ROTEX*, de la *German Aerospace Agency* (DLR) voló a bordo del trasbordador espacial *Columbia* y realizó una variedad de tareas mediante teleoperación y modos de programación autónomo basado en sensores.

1996 – *Honda* revelo un robot humanoide; el cual fue un proyecto iniciado en secreto desde el año 1986.

**1997** – El primer robot jugador de soccer *RobotCup-97*, en Nagoya, Japón y es todo como modelo para 40 equipos a lo largo del mundo. El *Sojourner* robot móvil viaja a Marte a bordo de la nave guía de la *NASA* en su misión a Marte.

**2001** – *Sony* inicia la producción en masa del primer robot casero, un perro robot de nombre *Aibo*. El *Space station remote manipulation system* (SSRMS) es lanzado al espacio a bordo del trasbordador *Endeavor* para facilitar la construcción continua de la estación espacial. La primera telecirugía es realizada por cirujanos en New York, para hacer una laparoscopia de la vesícula en una mujer en Strasbourg, France. Robots son usados para buscar víctimas en el *World Trade Center* después de la tragedia del 11 de septiembre.

**2002** – Robots humanoides *ASIMO* de *Honda* tocan las campanas de apertura de la casa de cambio de New Cork el 15 de febrero.

**2005** – *ROKVISS* (*Robotic Component Verification on board the International Space Station*), la construcción del robot experimental teleoperado por el *German Aerospace center* (DLR), sufre sus primeras pruebas en el espacio.

La robótica en la actualidad tiene dos ramas: una que trata con ambientes

---

preparados (industriales) y la otra que trata con ambientes no estructurados y no predecibles (submarinos, catástrofes y el espacio). En algún tiempo se pensó erróneamente que se necesitaría de un gran desarrollo en sensado, percepción y razonamiento aún para robots industriales. Actualmente, la robótica industrial se está extendiendo en muchos países, especialmente en Japón, debido exactamente a que se tiene disponibles el tiempo y el ambiente para preparar al robot en su tarea a realizar para practicarla y perfeccionarla, de tal forma que se pueda repetir muchas veces. El sensado se utiliza raramente para cubrir cosas ligeramente impredecibles. Sin embargo, lo del proceso anterior es suficiente dado que la planeación y preparación son las palabras claves en manufactura.

Los investigadores en robótica han tenido que enfocarse en ambientes no estructurados para poder justificar mucha de la investigación en sensado y habilidad de manejo que se ha hecho en la última década. Obviamente, el hombre puede hacer muchas más cosas que un robot, pero la pregunta continúa: si la robótica lo reemplazará o no.

Teóricamente el uso de sistemas robóticos podría extenderse a casi todas las áreas imaginables en donde se necesite de la ejecución de tareas mecánicas, tareas hoy ejecutadas por el hombre o imposibles de ejecutar por él (por ejemplo una exploración sobre el terreno de la superficie marciana). Se entiende, en este contexto, que tarea mecánica es toda actividad que involucra presencia física y movimiento por parte de su ejecutor. Pero al situarnos en el contexto real, en la práctica, nos damos cuenta de que existen factores que limitan el vuelo de nuestra imaginación, los que mencionaremos en el siguiente punto.

Algunos de los campos de aplicación actuales de la robótica son:

- **Investigación-Exploración.-** En donde los robots presentan la ventaja de resistir mejor el medio ambiente hostil que el ser humano.
- **Entretenimiento.-** Esta industria se favorece del uso de robots para recrear situaciones ficticias o posibles, haciendo uso de los llamados "efectos especiales".
- **Construcción.-** Industria en que ya se registran proyectos que incluyen el uso de robots como ejecutores de tareas de dimensionamiento, transporte, montaje, entre otras.

- **Automatización Industrial.-** Es el más relevante y de interés para nosotros. Corresponde al uso de robots en la industria a fin de mejorar, agilizar y aumentar la producción en los diferentes procesos.

Como mencionamos anteriormente, las aplicaciones de los sistemas robóticos podrían ser innumerables. Pero existen dos factores, fuertes y decisivos, que inhiben el crecimiento y desarrollo de esta tecnología; el primero de ellos son las limitaciones económicas, dado que la robótica es una disciplina de avanzada y en desarrollo, los costos asociados a ella son altísimos, puesto que se necesitan recursos no sólo para su construcción. Hay muchas áreas de investigación relacionadas que también son fuentes de costo, y hacen que en la actualidad un sistema robótico sea un producto carísimo y no masificado. El segundo son las limitaciones tecnológicas, un campo de investigación como la robótica está orientado a tratar de llevar a la práctica ideas que pueden haber sido concebidas hace ya mucho tiempo, por lo tanto la implementación de dichas ideas dependerá de que se hayan encontrado o desarrollado los medios tecnológicos que la permitan.

La robótica nace en décadas recientes para complementarse con la automatización, aportándole como elemento innovador cierto grado de inteligencia. En el contexto industrial, la automatización es como una tecnología que está relacionada con el empleo de sistemas mecánicos, electrónicos y basados en la informática en la operación y control de la producción. Este concepto, para ser actualizado, debe incluir el uso de robots. El robot industrial forma parte del progresivo desarrollo de la automatización industrial, favorecido notablemente por el avance de las técnicas de control por computadora, y contribuye de manera decisiva a la automatización en los procesos de fabricación de series de mediana y pequeña escala.

Hay tres clases muy amplias de automatización industrial:

automatización fija, automatización programable, y automatización flexible.

1. **La automatización fija.-** se utiliza cuando el volumen de producción es muy alto, y por tanto se puede justificar económicamente el alto costo del diseño de equipo especializado para procesar el producto, con un rendimiento alto y tasas de producción elevadas. Además de esto, otro inconveniente de la automatización fija es su ciclo de vida que va de acuerdo a la vigencia del producto en el mercado.

2. **La automatización programable.-** se emplea cuando el volumen de producción es relativamente bajo y hay una diversidad de producción a obtener. En este caso el equipo de producción es diseñado para adaptarse a la variaciones de configuración del producto; ésta adaptación se realiza por medio de un programa (Software).
3. **La automatización flexible.-** por su parte, es más adecuada para un rango de producción medio. Estos sistemas flexibles poseen características de la automatización fija y de la automatización programada.

Los sistemas flexibles suelen estar constituidos por una serie de estaciones de trabajo interconectadas entre sí por sistemas de almacenamiento y manipulación de materiales, controlados en su conjunto por una computadora. De los tres tipos de automatización, la robótica coincide más estrechamente con la automatización programable.

Un robot industrial es una máquina programable de uso general que tiene algunas características antropomórficas o “humanoides”. Las características humanoides más típicas de los robots actuales es la de sus brazos móviles, los que se desplazarán por medio de secuencias de movimientos que son programados para la ejecución de tareas de utilidad.

La definición oficial de un robot industrial se proporciona por la *Robotics Industries Association* (RIA), anteriormente el *Robotics Institute of América*:

*“Un robot industrial es un manipulador multifuncional reprogramable diseñado para desplazar materiales, piezas, herramientas o dispositivos especiales, mediante movimientos variables programados para la ejecución de una diversidad de tareas”.*

Estas definiciones indudablemente no abarcan todas las posibilidades de aplicación presente y futuras de los Robots y en opinión de quienes escriben, el Robot es para la producción, lo que el computador es para el procesamiento de datos. Es decir, una nueva y revolucionaria concepción del sistema productivo cuyos alcances recién comienzan a percibirse en los países altamente industrializados.

Realmente, los Robots no incorporan nada nuevo a la tecnología en general, la novedad radica en la particularidad de su arquitectura y en los objetivos que se procura con los mismos. El trabajo del Robot se limita generalmente a pocos movimientos repetitivos de sus ejes, estos son casi siempre

tres para el cuerpo y tres para la mano o puño, su radio de acción queda determinado por un sector circular en el espacio donde este alcanza a actuar. Cuando las partes o piezas a manipular son idénticas entre sí y se presentan en la misma posición, los movimientos destinados a reubicar o montar partes se efectúan mediante dispositivos articulados que a menudo finalizan con pinzas.

La sucesión de los movimientos se ordena en función del fin que se persigue, siendo fundamental la memorización de las secuencias correspondientes a los diversos movimientos. Puede presentarse el caso en el que las piezas o partes a ser manipuladas no se presenten en posiciones prefijadas, en este caso el robot deberá poder reconocer la posición de la pieza y actuar u orientarse para operar sobre ella en forma correcta, es decir se lo deberá proveer de un sistema de control adaptativo.

Si bien no existen reglas acerca de la forma que debe tener un robot industrial, la tecnología incorporada a él está perfectamente establecida y en algunos casos esta procede de las aplicadas a las máquinas-herramientas. Los desplazamientos rectilíneos y giratorios son neumáticos, hidráulicos o eléctricos. Como es sabido, los sistemas neumáticos no proveen movimientos precisos debido a la compresibilidad del aire y en ellos deben emplearse topes positivos para el posicionamiento, lo que implica la utilización de dispositivos de desaceleración. Los Robots Neumáticos poseen una alta velocidad de operación manipulando elementos de reducido peso.

Los accionamientos hidráulicos proporcionan elevadas fuerzas, excelente control de la velocidad y posicionamiento exacto. En cuanto a los sistemas eléctricos se utilizan motores de corriente continua o motores paso a paso. Estos dos tipos de Robots quedan reservados a la manipulación de elementos más pesados o los procesos de trayectorias complejas como las tareas de soldadura por punto o continua. Una clasificación del grado de complejidad del Robot puede establecerse de la siguiente forma:

- **Robots de primera generación.-** Dispositivos que actúan como “esclavo” mecánico de un hombre, quien provee mediante su intervención directa el control de los órganos de movimiento. Esta transmisión tiene lugar mediante servomecanismos actuados por las extremidades superiores del hombre, caso típico manipulación de materiales radiactivos, obtención de muestras submarinas, etc.
- **Robots de segunda generación.-** El dispositivo actúa automáticamente sin intervención humana frente a posiciones fijas en las que el

trabajo ha sido preparado y ubicado de modo adecuado ejecutando movimientos repetitivos en el tiempo, que obedecen a lógicas combinatorias, secuenciales, programadores paso a paso, neumáticos o controladores lógicos programables (PLC). Un aspecto muy importante está constituido por la facilidad de rápida reprogramación que convierte a estos Robots en unidades “versátiles” cuyo campo de aplicación no sólo se encuentra en la manipulación de materiales sino en todo los procesos de manufactura, como por ejemplo: en el estampado en frío y en caliente asistiendo a las máquinas-herramientas para la carga y descarga de piezas. En la inyección de termoplásticos y metales no ferrosos, en los procesos de soldadura a punto y continúa en tareas de pintado y reemplazando con ventaja algunas operaciones de máquinas convencionales.

- **Robots de tercera generación.-** Son dispositivos que habiendo sido contruidos para alcanzar determinados objetivos serán capaces de elegir la mejor forma de hacerlo teniendo en cuenta el ambiente que los circunda. Para obtener estos resultados es necesario que el robot posea algunas condiciones que posibiliten su interacción con el ambiente y los objetos. Las mínimas aptitudes requeridas son: capacidad de reconocer un elemento determinado en el espacio y la capacidad de adoptar propias trayectorias para conseguir el objetivo deseado. Los métodos de identificación empleados hacen referencia a la imagen óptica por ser esta el lenguaje humano en la observación de los objetos, sin embargo no puede asegurarse que la que es natural para el hombre, constituye la mejor solución para el robot.

Se espera en un futuro no muy lejano que la tecnología en robótica se desplace en una dirección que sea capaz de proporcionar a éstas máquinas capacidades más similares a las humanas.



---

# Índice general

<b>Índice de Figuras</b>	<b>XIX</b>
<b>Índice de Tablas</b>	<b>XXIII</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Clasificación . . . . .	1
1.2. Factores que condicionan la eficiencia . . . . .	2
1.3. Antecedentes . . . . .	5
1.3.1. Estrategias de control . . . . .	9
1.4. Contribuciones . . . . .	13
1.5. Organización de la tesis . . . . .	13
<b>2. Preliminares Matemáticas</b>	<b>14</b>
2.1. Efectos de la fuerza en las superficies . . . . .	14
2.1.1. Trabajo y trabajo virtual . . . . .	14
2.1.2. Relación entre la fuerza del efector final y el torque de las articulaciones . . . . .	15
2.1.3. Restricciones Naturales y Artificiales . . . . .	16

---

2.1.4.	Modelos de contacto . . . . .	20
2.1.5.	Principio de ortogonalización . . . . .	24
2.2.	Modelo dinámico . . . . .	25
2.2.1.	Modelo dinámico con movimiento libre . . . . .	26
2.2.2.	Dinámica de los actuadores . . . . .	26
2.2.3.	Modelo dinámico con movimiento restringido . . . . .	28
2.3.	Modelo cinemático . . . . .	30
2.3.1.	Cinemática directa . . . . .	31
2.3.2.	Jacobiano geométrico . . . . .	32
2.3.3.	Singularidades . . . . .	34
2.4.	Parametrización de la Orientación . . . . .	35
2.4.1.	Representación Eje/Angulo . . . . .	37
2.4.2.	Cuaternión unitario . . . . .	39
<b>3.</b>	<b>Ley de Control</b> . . . . .	<b>44</b>
3.1.	Modelo del robot . . . . .	44
3.2.	Diseño del Controlador-Observador de Fuerza . . . . .	48
3.3.	Uso del cuaternión unitario . . . . .	54
<b>4.</b>	<b>Resultados experimentales</b> . . . . .	<b>58</b>
4.1.	Descripción de experimentos . . . . .	59
4.1.1.	Ganancias de controlador . . . . .	59
4.1.2.	Parámetros de trayectoria, superficie y opciones de con- trol . . . . .	60
4.2.	Experimentos . . . . .	63
4.2.1.	Superficie plana . . . . .	63
4.2.2.	Superficie esférica . . . . .	84
4.2.3.	Discusión . . . . .	105
<b>5.</b>	<b>Conclusiones</b> . . . . .	<b>110</b>
5.1.	Problemas abiertos . . . . .	111
<b>A.</b>	<b>DESCRIPCIÓN DEL SISTEMA</b> . . . . .	<b>113</b>
A.1.	Robot industrial A465 . . . . .	113
A.2.	Sensor de fuerza . . . . .	114
A.3.	Protección contra impactos SR-45 . . . . .	115
A.4.	Tarjetas PCI-Flex Motion-6C . . . . .	116

---

---

A.5. Computadora y lenguaje de programación . . . . .	117
<b>B. Elección de trayectorias</b>	<b>118</b>
B.1. Interfaz gráfica . . . . .	118
B.2. Descripción de trayectorias . . . . .	123
B.2.1. Trayectorias basadas en polinomios . . . . .	123
B.2.2. Implementación para superficie plana . . . . .	125
B.2.3. Implementación para superficies esféricas . . . . .	131
<b>C. DEMOSTRACIONES</b>	<b>137</b>
C.1. Prueba del Teorema 3.2.1 . . . . .	137
<b>Bibliografía</b>	<b>144</b>



---

# Índice de figuras

1.1. Sensor fuerza-torque <i>JR3</i> . . . . .	4
2.1. Diagrama del desplazamiento de una partícula debido a una fuerza. . . . .	15
2.2. Efecto final de un robot en contacto con su entorno . . . . .	16
2.3. Inserción de una barra en un hoyo . . . . .	18
2.4. Rotación de un cigüeñal . . . . .	20
2.5. Interpretación geométrica del Modelo de fricción de Coulomb .	21
2.6. Tipos de contacto comunes . . . . .	24
2.7. Descomposición geométrica en el punto de contacto . . . . .	25
2.8. Diagrama de un motor de corriente directa. . . . .	27
2.9. Asignación de sistemas de coordenadas del brazo manipulador <i>CRS Robotics A465</i> . . . . .	33
2.10. Singularidades comunes que se presentan en los manipuladores	35
2.11. Rotación sobre un eje arbitrario . . . . .	38
4.1. Gráficas de posición X-Z de trayectoria deseada vs real, (a) Con mediciones físicas, (b) Con mediciones calibradas. . . . .	61

4.2. Experimento 1. Trayectoria deseada (—) vs trayectoria real (- -) vs trayectoria observada (- · -), de $\mathbf{x}=[x \ y \ z \ \phi_x \ \phi_y \ \phi_z]^T$ . . .	64
4.3. Experimento 1. Vector $\Delta\mathbf{x}$ de error de seguimiento ( $\mathbf{x} - \mathbf{x}_a$ ). . .	65
4.4. Experimento 1. Vector $\mathbf{z}$ de error de observación ( $\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$ ). . .	66
4.5. Experimento 1. Orientación deseada ${}^0\mathbf{R}_d$ (—) vs orientación real ${}^0\mathbf{R}_n$ (- · -). . . . .	67
4.6. Experimento 1. Fuerza deseada $\lambda_d$ (—) vs fuerza real $\lambda$ (- · -) y su correspondiente error de seguimiento ( $\lambda - \lambda_d$ ). . . . .	68
4.7. Experimento 2. Trayectoria deseada (—) vs trayectoria real (- -) vs trayectoria observada (- · -), de $\mathbf{x}=[x \ y \ z \ \phi_x \ \phi_y \ \phi_z]^T$ . . .	69
4.8. Experimento 2. Vector $\Delta\mathbf{x}$ de error de seguimiento ( $\mathbf{x} - \mathbf{x}_a$ ). . .	70
4.9. Experimento 2. Vector $\mathbf{z}$ de error de observación ( $\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$ ). . .	71
4.10. Experimento 2. Orientación deseada ${}^0\mathbf{R}_d$ (—) vs orientación real ${}^0\mathbf{R}_n$ (- · -). . . . .	72
4.11. Experimento 2. Fuerza deseada $\lambda_d$ (—) vs fuerza real $\lambda$ (- · -) y su correspondiente error de seguimiento ( $\lambda - \lambda_d$ ). . . . .	73
4.12. Experimento 3. Trayectoria deseada (—) vs trayectoria real (- -) vs trayectoria observada (- · -), de $\mathbf{x}=[x \ y \ z \ \phi_x \ \phi_y \ \phi_z]^T$ . . .	74
4.13. Experimento 3. Vector $\Delta\mathbf{x}$ de error de seguimiento ( $\mathbf{x} - \mathbf{x}_a$ ). . .	75
4.14. Experimento 3. Vector $\mathbf{z}$ de error de observación ( $\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$ ). . .	76
4.15. Experimento 3. Orientación deseada ${}^0\mathbf{R}_d$ (—) vs orientación real ${}^0\mathbf{R}_n$ (- · -). . . . .	77
4.16. Experimento 3. Fuerza deseada $\lambda_d$ (—) vs fuerza real $\lambda$ (- · -) y su correspondiente error de seguimiento ( $\lambda - \lambda_d$ ). . . . .	78
4.17. Experimento 4. Trayectoria deseada (—) vs trayectoria real (- -) vs trayectoria observada (- · -), de $\mathbf{x}=[x \ y \ z \ \phi_x \ \phi_y \ \phi_z]^T$ . . .	79
4.18. Experimento 4. Vector $\Delta\mathbf{x}$ de error de seguimiento ( $\mathbf{x} - \mathbf{x}_a$ ). . .	80
4.19. Experimento 4. Vector $\mathbf{z}$ de error de observación ( $\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$ ). . .	81
4.20. Experimento 4. Orientación deseada ${}^0\mathbf{R}_d$ (—) vs orientación real ${}^0\mathbf{R}_n$ (- · -). . . . .	82
4.21. Experimento 4. Fuerza deseada $\lambda_d$ (—) vs fuerza real $\lambda$ (- · -) y su correspondiente error de seguimiento ( $\lambda - \lambda_d$ ). . . . .	83
4.22. Experimento 1. Trayectoria deseada (—) vs trayectoria real (- -) vs trayectoria observada (- · -), de $\mathbf{x}=[x \ y \ z \ \phi_x \ \phi_y \ \phi_z]^T$ . . .	85
4.23. Experimento 1. Vector $\Delta\mathbf{x}$ de error de seguimiento ( $\mathbf{x} - \mathbf{x}_a$ ). . .	86
4.24. Experimento 1. Vector $\mathbf{z}$ de error de observación ( $\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$ ). . .	87
4.25. Experimento 1. Orientación deseada ${}^0\mathbf{R}_d$ (—) vs orientación real ${}^0\mathbf{R}_n$ (- · -). . . . .	88

4.26. Experimento 1. Fuerza deseada $\lambda_d$ (—) vs fuerza real $\lambda$ (- -) y su correspondiente error de seguimiento ( $\lambda - \lambda_d$ ). . . . .	89
4.27. Experimento 2. Trayectoria deseada (—) vs trayectoria real (- -) vs trayectoria observada (- · -), de $\mathbf{x}=[x \ y \ z \ \phi_x \ \phi_y \ \phi_z]^T$ . . .	90
4.28. Experimento 2. Vector $\Delta \mathbf{x}$ de error de seguimiento ( $\mathbf{x} - \mathbf{x}_a$ ). . .	91
4.29. Experimento 2. Vector $\mathbf{z}$ de error de observación ( $\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$ ). . .	92
4.30. Experimento 2. Orientación deseada ${}^0\mathbf{R}_d$ (—) vs orientación real ${}^0\mathbf{R}_n$ (- -). . . . .	93
4.31. Experimento 2. Fuerza deseada $\lambda_d$ (—) vs fuerza real $\lambda$ (- -) y su correspondiente error de seguimiento ( $\lambda - \lambda_d$ ). . . . .	94
4.32. Experimento 3. Trayectoria deseada (—) vs trayectoria real (- -) vs trayectoria observada (- · -), de $\mathbf{x}=[x \ y \ z \ \phi_x \ \phi_y \ \phi_z]^T$ . . .	95
4.33. Experimento 3. Vector $\Delta \mathbf{x}$ de error de seguimiento ( $\mathbf{x} - \mathbf{x}_a$ ). . .	96
4.34. Experimento 3. Vector $\mathbf{z}$ de error de observación ( $\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$ ). . .	97
4.35. Experimento 3. Orientación deseada ${}^0\mathbf{R}_d$ (—) vs orientación real ${}^0\mathbf{R}_n$ (- -). . . . .	98
4.36. Experimento 3. Fuerza deseada $\lambda_d$ (—) vs fuerza real $\lambda$ (- -) y su correspondiente error de seguimiento ( $\lambda - \lambda_d$ ). . . . .	99
4.37. Experimento 4. Trayectoria deseada (—) vs trayectoria real (- -) vs trayectoria observada (- · -), de $\mathbf{x}=[x \ y \ z \ \phi_x \ \phi_y \ \phi_z]^T$ . . .	100
4.38. Experimento 4. Vector $\Delta \mathbf{x}$ de error de seguimiento ( $\mathbf{x} - \mathbf{x}_a$ ). . .	101
4.39. Experimento 4. Vector $\mathbf{z}$ de error de observación ( $\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$ ). . .	102
4.40. Experimento 4. Orientación deseada ${}^0\mathbf{R}_d$ (—) vs orientación real ${}^0\mathbf{R}_n$ (- -). . . . .	103
4.41. Experimento 4. Fuerza deseada $\lambda_d$ (—) vs fuerza real $\lambda$ (- -) y su correspondiente error de seguimiento ( $\lambda - \lambda_d$ ). . . . .	104
A.1. Sistema experimental con componentes . . . . .	114
A.2. Sensor de fuerza JR3 modelo 67M25A-U560. . . . .	115
A.3. Protector neumático . . . . .	116
A.4. Tarjeta PCI-Flex Motion-6C . . . . .	116
B.1. Interfaz gráfica diseñada . . . . .	119
B.2. Trayectoria creada por un polinomio de orden 6, para las articulaciones del Robot A465 . . . . .	125
B.3. Diagrama de la ecuación de una pendiente . . . . .	126
B.4. Mapeo de las Matriz $\mathbf{P}_x(x)$ y $\mathbf{Q}_x(x)$ . . . . .	127
B.5. Definición de la matriz de orientación ${}^0\mathbf{R}_d$ . . . . .	128

---

B.6. Diagrama base para calcular la matriz de orientación ${}^0R_d$ utilizando como parámetro a la pendiente $m$ . . . . .	129
B.7. Diagrama para superficie plana con parámetros . . . . .	131
B.8. Trayectoria en 3D sobre una superficie, a una pendiente determinada . . . . .	132
B.9. Diagrama de la ecuación matemática de una esfera . . . . .	133
B.10. Casquete esférico usado para experimentos . . . . .	134
B.11. Diagrama de superficie esférica con parámetros . . . . .	135
B.12. Trayectoria en 3D sobre una superficie, a una pendiente determinada . . . . .	136



---

# Índice de Tablas

2.1. Coeficientes de fricción para materiales comunes (fuente: CRC Handbook of Chemistry and Physics) . . . . .	22
4.1. Experimentos para la superficie plana . . . . .	63
4.2. Experimentos para la superficie esférica . . . . .	84
4.3. Índices de desempeño general de fuerza, seguimiento, observación y orientación. . . . .	107
4.4. Índices de desempeño de seguimiento y observación por elemento de $\Delta x$ y $z$ respectivamente. . . . .	108
A.1. Características más importantes del Robot A465. . . . .	115

---

# Introducción

La robótica es un campo interdisciplinario en el que se involucran disciplinas tales como: física, diseño mecánico, electrónica, teoría de control, instrumentación, procesamiento de señales, programación computacional, inteligencia artificial y manufactura y producción. Además se puede dividir en cinco grandes áreas (Lewis *et al.* 1993): control de movimiento, sensores y visión, planeación y coordinación, inteligencia artificial y toma de decisiones, e interfaces hombre-maquina.

## 1.1. Clasificación

Los robots han sido clasificados de acuerdo a su nivel de control, a su nivel de lenguaje de programación y a su nivel de inteligencia. Cinco generaciones pueden ser asignadas para entender el desarrollo de los robots industriales. La tercera generación es actualmente utilizada en la industria, la cuarta se desarrolla en los laboratorios de investigación, y la quinta generación es un gran sueño.

1. **Robots Play-back.-** Siguen una secuencia de instrucciones grabadas,

como un robot utilizado en recubrimiento por spray o soldadura por arco. Estos robots comúnmente tienen un control de tipo on-off.

2. **Robots controlados por sensores.-** Tienen un control en lazo cerrado de movimientos manipulados, y hacen decisiones basados en datos obtenidos por sensores.
3. **Robots controlados por visión.-** Pueden manipular un objeto al utilizar información desde un sistema de visión.
4. **Robots controlados adaptablemente.-** Los robots pueden automáticamente reprogramar sus acciones sobre la base de los datos obtenidos por los sensores.
5. **Robots con inteligencia artificial.-** Utilizan las técnicas de inteligencia artificial para hacer sus propias decisiones y resolver problemas.

## 1.2. Factores que condicionan la eficiencia

La ejecución de una tarea de manipulación requiere a menudo la interacción entre el manipulador y el ambiente. Una clasificación completa de las tareas de manipulación es compleja en vista de la gran variedad de casos que pueden ocurrir. Los ejemplos típicos de las tareas de manipulación son: el acoplamiento de partes mecánicas, el seguimiento superficial del contorno de un objeto y el empleo de herramientas para ensamblar piezas mecánicas. Durante la interacción el entorno fija restricciones en las trayectorias geométricas que pueden ser seguidas por el efector final del manipulador. Esta situación es generalmente llamada *movimiento restringido* (Sciavicco y Siciliano 2000). los casos estacionarios y no estacionarios fueron discutidos mediante restricciones *holónomicas* (*estáticas, es decir son invariantes respecto al tiempo*) y *reholónomicas* (*dinámicas, varían respecto al tiempo*); Todos los elementos del manipulador fueron considerados rígidos.

El uso de una estrategia simple de control de movimiento para interacción requiere que la trayectoria de la tarea del efector final sea planeada con elevada exactitud. Así mismo, el sistema de control debe garantizar que la posición real del efector final se desvíe lo menos posible de la posición deseada a lo largo de la trayectoria especificada. Por lo tanto, el éxito de una tarea de interacción con el ambiente, usando algoritmos de control de movimiento

depende enteramente de la exactitud del planteamiento y del funcionamiento del controlador. Para esto es necesario tener un modelo preciso del manipulador y del entorno; en donde una descripción detallada del entorno es más difícil de obtener.

Otro factor que condiciona la eficacia de un planteamiento de control de movimiento en el problema de controlar movimientos en el espacio restringido es la exactitud del posicionamiento del efector final del manipulador con respecto al entorno; la dificultad inherente en el planteamiento y control de movimiento exacto del manipulador necesariamente lleva a la cuestión de analizar los efectos de la desviación en la trayectoria. Cuando el manipulador es controlado por algoritmos de control de posición, cualquier desviación de la trayectoria real provoca una reacción del sistema de control, el cual tiende a reducir al mínimo tal desviación; por lo tanto, si la desviación de la trayectoria planeada es debida a la interacción del manipulador con su entorno, se presentan fuerzas de reacción que dificultan el movimiento y como el controlador intenta reducir la desviación como haría para cualquier perturbación, en este caso, el efecto de la acción de control podría aumentar la fuerza de contacto, la cual no es necesariamente acompañada por una reducción de la desviación. Está situación puede conducir a un aumento de la fuerza de contacto hasta el límite natural de saturación de los actuadores del manipulador o una crisis mecánica de algún elemento que toma parte de la interacción del manipulador con su entorno. Entre más grande sea la rigidez del ambiente y la exactitud del control de posición, más probable es caer en un caso de contacto inestable como el descrito anteriormente.

Una medida del estado de la interacción es proporcionada por las características de la fuerza de contacto entre el manipulador y el ambiente. Por lo tanto, es necesario considerar estrategias de control que permitan respetar las restricciones impuestas por las fuerzas de interacción, ya sea directa o indirectamente. La principal diferencia entre estas dos, es que la primera logra el control de fuerza vía control de movimiento, sin cierre explícito del lazo de control de retroalimentación de fuerza; mientras que la segunda ofrece la posibilidad de controlar la fuerza de contacto a un valor deseado, gracias al cierre del lazo de control para la retroalimentación de la fuerza.

Hay tres tipos principales de sensores para la retroalimentación de fuerza:

1. **De muñeca.-** Consiste de un arreglo de medidores de deformación que generalmente puede precisar las tres componentes del vector de fuerza. a lo largo de los tres ejes del marco de coordenadas del sensor y las tres

componentes de torque sobre estos ejes.

2. **De torque articular.-** Consiste también en medidores de deformación (tensión) situados en el eje del actuador articular. En el caso de actuadores eléctricos puede utilizarse la corriente del motor como indicación del esfuerzo de torsión (torque) en el eje del motor.
3. **Táctiles o de mano.-** Están situados en los dedos de la pinza y son generalmente útiles para detectar la fuerza de agarre y para la detección de la forma de los objetos.

Para propósitos de controlar las interacciones entre el efector final y el entorno, el sensor de muñeca de seis ejes generalmente proporciona los mejores resultados, Figura 1.1. En adelante se asumirá que al referirse a un sensor de fuerza será de este tipo.

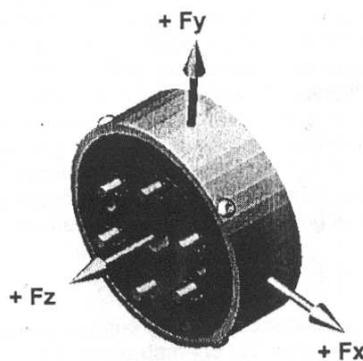


Figura 1.1: Sensor fuerza-torque *JR3*.

Otro problema puede aparecer, los efectos de deformación presentes en el material y la fricción inherente al contacto del manipulador con su entorno, por lo que un modelo dinámico del mismo podría ser necesario.

Los efectos de deformación presentes en la vecindad del punto de contacto son los más interesantes. Dos cuerpos en contacto producen una fuerza, el uno en el otro, está depende estrechamente de las propiedades de elasticidad; por lo tanto, si se desea un modelo de contacto exacto, la elastodinámica tiene que ser tomada en cuenta. En trabajos presentados a lo largo de los años, el eslabón terminal (efector final) del robot a sido asumido no deformable. Está consideración puede justificarse debido a que en algunas aplicaciones

industriales las herramientas generalmente son más duras que los objetos sobre los cuales actúan; pero una aproximación más exacta puede requerir el análisis de deformación de ambas partes.

Los efectos de fricción están presentes en todas las maquinas que incorporan partes con movimiento relativo, los efectos de fricción son locales y tienen un carácter disipativo. Aunque la fricción puede ser una propiedad deseable, como lo es para los sistemas de frenado, es en general un impedimento para controlar servo mecanismos. Ideas importantes se han encontrado en publicaciones de control: Tribología (frotamiento), Ingeniería de fluidos, acústica y en general ingeniería y física. Cuando se aplican controladores retroalimentados a cuerpos en movimiento, es inevitable que se presente este fenómeno que actúa sobre las fuerzas generadas por el movimiento, en modelos clásicos es tomada como una fuerza proporcional a la carga, opuesta al movimiento o independiente al area de contacto, la tribología cuestiona aspectos básicos de desgaste de mecanismos, ciertas areas de contacto, como se relacionan con la fricción, propiedades de los materiales y procesos de lubricación.

### 1.3. Antecedentes

En robots manipuladores se desarrollan diferentes líneas de investigación como: el control de robots cooperativos, control de robots manipuladores para escritura, el control de fuerza sin retroalimentación de ésta, control de brazos para el reconocimiento de superficies, etc. Los sistemas de visión también desarrollan líneas de investigación dentro del campo de la robótica. La descripción y el reconocimiento de objetos o el seguimiento del efector final de un robot manipulador son una de las tantas aplicaciones de éste campo. Todo esto ha dado las nuevas metas para el control en tareas como: soldar, ensamblar, afilar y esmerilar, lo cual requiere de una medición externa dada por los sensores de fuerza, o por el reconocimiento de objetos mediante la visión<sup>1</sup>.

A continuación se mencionarán algunos avances realizados en materia de generación de trayectorias, observadores, formas de representar la orientación del efector final, compensación de fricción y control de fuerza.

La generación de trayectorias en coordenadas cartesianas para el extremo del manipulador (efector final) es muy importante para aplicaciones tales

---

<sup>1</sup>Aquí nos referimos a cámaras colocadas en el brazo del robot o en lugares que proveen una buena percepción.

como soldadura, pegado de piezas y pintura. Estas aplicaciones requieren de movimientos suaves del PCH (punto central de la herramienta) del robot dado en trayectorias cartesianas. En algunas aplicaciones tales como soldadura y pintura se requiere que la orientación de la herramienta cambie continuamente respecto a la superficie sobre la cual se realiza la tarea. En Rojas-Angeles y Lopez (1988) se presenta un procedimiento sistemático para trayectorias planas en configuración espacial, donde la orientación del efector final es referida a un marco definido único y ortogonal en cualquier punto dado en una trayectoria continua. Ellos usan el vector *Darboux* para representar la velocidad angular y la aceleración del efector final sigue una trayectoria dada por la velocidad. En Taylor (1979) se introduce una técnica de derivación acotada para lograr hacer movimientos en línea recta del PCH del manipulador; el movimiento es una interpolación lineal entre una serie de puntos medios y propone una función de desviación de la posición. En Kiritsis (1991) se presenta un algoritmo generador de curvas paramétricas por determinación de un conjunto mínimo de segmentos de líneas rectas, y solución de dos ecuaciones no lineales usando el método de Newton-Raphson. En Aspragathos (1998) se presentan dos técnicas para generación de trayectorias, las cuales generan aproximaciones de la trayectoria del efector final de un robot dado; la máxima desviación permitida se especifica mediante la operación del robot acorde a los requerimientos de la aplicación. La primera de las técnicas se basa en un método de bisección que es aplicado a a partir de un punto de la curva que se supone conocido para generar una trayectoria cartesiana del efector final bajo una pequeñas desviaciones de posición acotada. La segunda se basa en encontrar un conjunto mínimo de puntos conocidos en la curva cartesiana para generar la trayectoria con una aproximación de error acotado en posición.

Otros trabajos para la generación de trayectorias se han realizado mediante el empleo de cámaras; principalmente para aplicaciones como la tele-robótica en donde en algunas ocasiones es necesario que el manipulador evada superficies. En Dooley (1994) se propone como estrategia usar restricciones cinemáticas surgidas a partir de formulaciones de dinámicas y cinemáticas en el espacio de la imagen de coordenadas de cuaternión dual <sup>2</sup>; a través de un multiplicador de Lagrange, las restricciones son incorporadas directamente en la dinámica y se usa la fuerza aplicada por el efector final del

---

<sup>2</sup>el cuaternión dual es la representación de la orientación del efector final del robot o de alguno de sus elementos con respecto a la orientación del sistema de visión

manipulador para seguir una trayectoria a lo largo de una superficie deseada. Las restricciones aparecen algebraicamente y por consiguiente pueden ser utilizadas estrategias para evitar colisiones con la superficie.

En Caccavale *et al.* (1999) se presenta el problema de seguimiento de posición y orientación del efector final de un robot manipulador; el cuaternión unitario es utilizado en la ley de control para dar una parametrización mínima de la orientación. Puesto que a menudo la velocidad tiene que ser estimada, por lo tanto se propone un esquema controlador-observador para garantizar el seguimiento en el espacio de trabajo sin el empleo de medición de velocidad; los resultados obtenidos son comparados con el algoritmo de control y el uso de derivación numérica de la medición de posición, mostrando que el empleo de observadores mejora el desempeño del algoritmo de control. En Arteaga-Pérez y Tang (2001) se presenta un controlador robusto para robots en coordenadas articulares en el cual se emplea el modelo dinámico del robot y un observador lineal para tener acceso a la velocidad articular; se garantiza un seguimiento y observación uniforme y finalmente acotado. En Parra *et al.* (2002) se presenta el problema de control de movimiento restringido; se propone un controlador localmente estable para convergencia exponencial simultánea de trayectorias de fuerza y posición, con la estructura de técnicas de modos deslizantes de segundo orden para movimiento libre, compensación de dinámicas provenientes de la restricción, bajo una conveniente elección de error del sistema coordinado; el nuevo lazo de retroalimentación del modo deslizante induce rápidamente seguimiento exponencial para cualquier condición inicial. En Arteaga y Kelly (2004) se presenta un controlador robusto con un observador lineal que garantizan que los errores de seguimiento son uniforme y finalmente acotados. Los experimentos realizados muestran que el desempeño de la nueva ley junto con el observador son mejores, en comparación con los ya bien conocidos algoritmos reportados en la literatura; los autores concluyen a partir de resultados experimentales que este esquema de control tiene las siguientes ventajas:

- Las entradas de torque generalizadas producidas por el algoritmo propuesto son suaves en comparación con los otros algoritmos de control y no saturan sus actuadores, lo cual mejora el desempeño y la vida útil de los motores.
- Las trayectorias articulares obtenidas son suaves en todos los casos.
- Los errores de seguimiento y observación son pequeños.

- Se prueba que el uso de observadores tiene significativa ventaja con respecto a la diferenciación numérica, utilizada comúnmente para obtener un valor aproximado de las velocidades articulares. los experimentos muestran que el uso de un observador (digitalizado) mejora el desempeño del sistema en lazo cerrado.

Uno de los principales trabajos utilizados como referencia para el desarrollo de este trabajo es Arteaga-Pérez *et al.* (2006) en donde se desarrolla la teoría necesaria para especificar las tareas en coordenadas cartesianas y con esto eliminar el cálculo de cinemática inversa para la implementación de la ley de control; nuevamente se utiliza un esquema controlador-observador para lograr un seguimiento exacto en coordenadas cartesianas sin hacer uso del modelo dinámico del manipulador y sólo la medición articular es necesaria. El observador es similar al que se presenta en Arteaga y Kelly (2004); se hace uso del jacobiano analítico y la orientación del efector final se especifica mediante una representación mínima; al final del artículo se proporcionan algunas recomendaciones para sintonizar las ganancias. Aunque los experimentos son realizados utilizando solo tres articulaciones, reduciendo el área de trabajo a un plano, puede verse en las gráficas cómo el objetivo de control es alcanzado logrando buenos resultados.

En Arteaga y Martínez (2006) se propone el diseño de un controlador de fuerza/posición para robots cooperativos durante movimiento restringido; el esquema propuesto se basa en el conocimiento de la dinámica del manipulador y no requiere de medición de velocidad articular, ni tampoco necesita medición de fuerza de contacto en el efector final; el observador de velocidad está basado en el artículo de Arteaga y Kelly (2004), y se añade el diseño del observador de fuerza. El desempeño decrece a bajas velocidades.

Además de la literatura ya mencionada, se han hecho avances en la forma en la que se controla la orientación de los manipuladores en su espacio de trabajo. Por ejemplo, en Joseph y Yuan (1988) se muestra un esquema de control articular en lazo cerrado usando la retroalimentación del cuaternión unitario para resolver el problema de error de orientación. Se muestra que de esta forma se simplifica el análisis de estabilidad de la dinámica del error de orientación. Existen dos formas de utilizar esta retroalimentación; la primera usa solamente la parte vectorial del error del cuaternión y se logra una convergencia global y asintótica, mientras que la segunda está basada en representaciones de rotaciones de ángulos de Euler y se obtiene sólo estabilidad local y asintótica; debido a que cuenta con una singularidad cuando

la orientación difiere de la orientación deseada por una rotación de  $180^\circ$ . En Caccavale *et al.* (1998) se usan argumentos basados en energía para deducir ecuaciones dinámicas de impedancia mecánica en el efector final de un robot manipulador. El empleo del cuaternión unitario para describir los desplazamientos de la orientación conducen a una definición geométrica de la matriz de rigidez (no diagonal) en la ecuación de impedancia; es decir, los elementos fuera de la diagonal representan acoplamientos, acoplándose fuerzas con desplazamientos en la orientación y momentos con desplazamiento en posición. En Caccavale *et al.* (1999) se muestra un controlador por impedancia para un robot industrial de seis grados de libertad basado en una representación eje/ángulo en el espacio operacional, la cual mitiga las representaciones singulares. Al igual que en Caccavale *et al.* (1998), esta representación es utilizada para deducir las ecuaciones dinámicas de la parte rotacional del efector final en la ecuación de impedancia, trabajando en movimiento restringido y uso de sensor de fuerza. En Xian *et al.* (2001) se considera el problema de control de seguimiento en el espacio de trabajo de manipuladores redundantes, basado en el cuaternión para representar la orientación del efector final; el diseño del controlador asegura seguimiento asintótico de la posición y la orientación del efector final; para facilitar el diseño del controlador se considera un controlador de estado completo adaptable. Después se proporciona el modelo basado en un controlador de retroalimentación de salida y se elimina la necesidad de medición de velocidad mediante el empleo de un observador basado en el modelo dinámico.

### 1.3.1. Estrategias de control

De una manera breve se explicarán las ideas fundamentales de los métodos más comunes para controlar la fuerza de contacto actuando en movimiento restringido.

1. Métodos que implican la relación entre la posición y la fuerza aplicada.
  - **Control de rigidez pasivo.** También conocido como control *compliance* pasivo, es una solución simple para reducir las fuerzas de contacto entre el robot y su entorno. Básicamente, consiste en interponer entre la parte manipulada y el robot un dispositivo mecánico capaz de cambiar su configuración bajo los efectos de las fuerzas de contacto, agregando a la estructura un comportamiento elástico que compense los errores de posición (Drake

y Simunovic 1977). Este método es utilizado para manejar problemas de inserción de objetos (peg-in-hole) pues ofrece algunas ventajas, tales como inserciones rápidas y precisas de partes sin requerir estrategias complejas.

- **Control de rigidez activo.** Este método controla activamente la rigidez aparente del efector final del robot y permite controlar la fuerza y posición simultáneamente. El usuario especifica la rigidez traslacional y rotacional deseadas del sistema de referencia de contacto. Una alta ganancia es asignada a las direcciones en que las posiciones deben ser controladas, mientras que ganancias bajas son asignadas a las direcciones de las fuerzas deseadas. La ventaja del método es que es relativamente simple y la matriz de rigidez necesaria para implementar el controlador puede ser cambiada en línea para adaptar el comportamiento del robot a tareas restringidas.

2. Métodos que usan la relación entre la velocidad y la fuerza aplicada.

- **Control por impedancia.** La idea básica del comportamiento por impedancia es asignar un comportamiento dinámico preestablecido para el robot mientras su efector final está interactuando con el entorno. El desempeño deseado es especificado por una impedancia dinámica generalmente representando un sistema masa-resorte-amortiguador. Este método se puede implementar con o sin retroalimentación de fuerza (Khalil y Dombre 2002).
- **Control por acomodación.** Este esquema fue desarrollado por Whitney (1977); comparado con el control de rigidez, este es un controlador integral en el cual las fuerzas sensadas dan lugar a modificaciones en velocidad, que resultan de multiplicar las fuerzas medidas por una matriz de admitancia (velocidad/fuerza). En este método las señales deseadas son la velocidad del efector final y la fuerza de contacto.

3. Métodos utilizando retroalimentación de fuerza y posición.

- **Control híbrido de posición/fuerza.** Diseñado para tareas en donde la fuerza y la posición deben ser controladas simultáneamente, Raibert y Craig (1981) propusieron este esquema de control caracterizado por la distinción de las componentes de control

de posicionamiento de las de control de fuerza en coordenadas cartesianas. MaClamroch y Wang (1988) dieron una prueba de estabilidad local de un controlador en lazo cerrado usando retroalimentación lineal para un punto de operación cuando los objetivos de posición y fuerza de contacto son constantes para el manipulador. Arimoto *et al.* (1993) renuevan el concepto para una clase de tareas donde el efector final toca una superficie suave, proponiendo el método por el principio de ortogonalización que distingue las señales de retroalimentación de posición de las de fuerza, al introducir una matriz de proyección en coordenadas de las articulaciones.

- **Control híbrido de posición/fuerza paralelo.** Este método encuentra sus raíces en el trabajo de Raibert y Craig (1981). La ley de control satisface simultáneamente la posición deseada y la fuerza restringida de la tarea. Las posiciones y las fuerzas son especificadas de acuerdo a la formulación de Mason: las direcciones que están restringidas en posición son controladas en fuerza, mientras que las direcciones que son restringidas en fuerza cero son controladas en velocidad o posición. Duffy (1990) ha demostrado que no es correcto considerar el subespacio de la velocidad y el subespacio de la fuerza como ortogonales como lo sugieren Raibert y Craig (1981). Mejor dicho, son las direcciones de posición o velocidad controladas y las direcciones de fuerza controladas las que tienen que ser ortogonales en el marco de referencia de contacto. En el método de control híbrido paralelo, el robot es controlado por dos lazos de retroalimentación complementarios, uno para la posición y otro para la fuerza. Cada uno tiene su forma de monitoreo y ley de control. Las leyes de control de ambos lazos son sumadas antes de ser enviadas al actuador. Este método comprende el uso de una matriz de selección que permite que cada grado de libertad del manipulador sea controlado por el lazo de control de fuerza o de posición.
- **Control híbrido externo.** Este esquema se compone de dos lazos de control anidados: el lazo externo controla la fuerza mientras el lazo interno controla la posición (DeShutter y Brussel 1988). La salida del lazo exterior es transformada en una entrada de posición deseada para el lazo interior. El desplazamiento resultante del

robot permite ejercer la fuerza de contacto sobre el entorno. Este esquema es relativamente fácil de implementar y requiere pocos recursos computacionales; puede ser implementada en robots industriales mientras se mantienen sus controladores convencionales.

4. Métodos sin retroalimentación de fuerza.

- **Control de fuerza implícito.** El termino implícito se refiere a los controladores sin retroalimentación de fuerza. Huang y Tzeng (1989), utilizan una transformación no lineal para cambiar el modelo dinámico de un robot manipulador calculado por la formulación Euler-Lagrange, con el fin de obtener un representación entrada-salida para facilitar el diseño de un observador de fuerza. Liu y Arimoto (1996) proponen un algoritmo basado en la estructura del controlador híbrido obtenido por el principio de ortogonalización demostrando que la fuerza real converge a la deseada exponencialmente.

5. Métodos sin utilizar retroalimentación de fuerza ni retroalimentación de velocidad.

- Son realmente pocos los trabajos que consideran la eliminación de sensores. Queiroz *et al.* (1996) proponen dos controladores de posición/fuerza para robots manipuladores con movimiento restringido considerando el conocimiento exacto del modelo dinámico; en este trabajo se mencionan dos trabajos previos de Han-Pang Huang sobre controladores de posición/fuerza que no requieren de la medición de la fuerza de contacto ni de la velocidad de las articulaciones. Queiroz *et al.* (1997) presentan un controlador adaptable; en este trabajo se obtiene el modelo reducido de un manipulador de 2 grados de libertad, y con base en este modelo dividen el problema en componentes de fuerza y componentes de posición; también proponen un filtro para estimar la velocidad de las articulaciones.

Los anteriores fueron algunos de los trabajos que se han realizado a partir de los años 80's y que muestran algunas de las ventajas de los métodos que se han utilizado en el desarrollo de este trabajo.

## 1.4. Contribuciones

El diseño del controlador-observador propuesto en este trabajo tiene una estructura relativamente sencilla lo que permite que sea fácilmente implementado en ambientes industriales en donde los controladores son programados directamente en consolas de microcontroladores o PLC's. Al utilizar cuaterniones unitarios para representar la orientación se facilita la prueba de estabilidad. El esquema propuesto puede emplearse en tareas que involucren movimientos en 3D de forma precisa siempre y cuando no se pase por una singularidad. A diferencia de la mayoría de los esquemas citados anteriormente, el controlador puede trabajar de manera eficiente a diferentes velocidades. Una característica importante es que no se requiere el conocimiento del modelo dinámico del manipulador. La generación de trayectorias no depende del uso de la cinemática inversa. El esquema de control puede trabajar en movimiento restringido siguiendo una trayectoria de fuerza y posición simultáneamente, como lo muestran los resultados experimentales. Si bien se requiere retroalimentación de posición y fuerza; la velocidad se estima mediante un observador que trabaja en coordenadas cartesianas. El esquema de control propuesto puede verse como un enfoque PID no-lineal de posición/fuerza con un observador no-lineal, contemplando una restricción holónoma para la ecuación que rige a la superficie. La estabilidad del esquema controlador-observador del esquema se comprueba mediante la teoría de Lyapunov. Cabe mencionar que las pruebas matemáticas son de tipo local y la estabilidad es uniforme y asintóticamente estable. Por lo tanto hay que tener cuidado con las condiciones iniciales en las que se realiza la tarea (posición-fuerza); en la mayoría de los casos las condiciones iniciales son conocidas.

## 1.5. Organización de la tesis

Esta tesis se encuentra organizada en cinco capítulos; el primero de ellos corresponde a la introducción. El Capítulo 2 presenta un panorama de conceptos básicos, necesarios para comprender la teoría desarrollada en esta tesis; en el Capítulo 3 se encuentra la ley de control propuesta y un análisis detallado de estabilidad del mismo. El Capítulo 4 describe los experimentos realizados, junto con los resultados obtenidos para cada uno de ellos y una discusión acerca de los mismos. Finalmente, el Capítulo 5 menciona las conclusiones obtenidas, junto con algunas propuestas para trabajos futuros.

---

# Preliminares Matemáticas

En este capítulo se introducirán los conceptos matemáticos e ideas principales para el diseño del algoritmo de control propuesto para robots manipuladores rígidos.

## 2.1. Efectos de la fuerza en las superficies

### 2.1.1. Trabajo y trabajo virtual

En mecánica, una fuerza  $\mathbf{F}$  aplicada a una partícula efectúa trabajo solo cuando existe un desplazamiento en el mismo sentido de la fuerza. Por ejemplo, considérese la fuerza  $\mathbf{F}$  en la Figura 2.1 que se localiza en la trayectoria  $\mathbf{s}$  especificada por el vector de posición  $\mathbf{r}$ . Si la fuerza se mueve a lo largo de la trayectoria a una nueva posición  $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + d\mathbf{r}$ , el desplazamiento  $d\mathbf{r}$  y, por tanto, el trabajo  $dU$  es una cantidad escalar, definida por el producto escalar

$$dU = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (2.1)$$

Denotando por  $F$  la magnitud de la fuerza y puesto que  $d\mathbf{r}$  es infinitesimal, la magnitud de  $d\mathbf{r}$  puede representarse por  $d\mathbf{s}$ , el segmento diferencial de arco

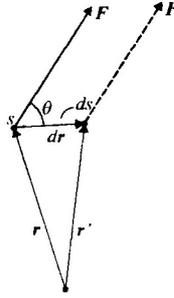


Figura 2.1: Diagrama del desplazamiento de una partícula debido a una fuerza.

a lo largo de la trayectoria. Si el ángulo entre los segmentos representativos de  $d\mathbf{r}$  y de  $\mathbf{F}$  es  $\theta$ , entonces por definición del producto punto o producto escalar, la ecuación anterior se puede escribir como

$$dU = \mathbf{F}d\mathbf{s} \cos \theta \quad (2.2)$$

Nótese que si  $0^\circ \leq \theta < 90^\circ$ , el desplazamiento y la componente de fuerza tienen el mismo sentido, de modo que el trabajo es positivo; en tanto que si  $90^\circ < \theta \leq 180^\circ$ , los vectores en cuestión tienen sentidos contrarios y por tanto el trabajo es negativo. Además,  $dU = 0$  si la fuerza es perpendicular al desplazamiento, pues  $\cos 90^\circ = 0$ , o si la fuerza se aplica en un solo punto, porque en este último caso  $d\mathbf{s} = 0$ .

### 2.1.2. Relación entre la fuerza del efector final y el torque de las articulaciones

La interacción del manipulador con el entorno produce fuerzas y momentos en el efector final o la herramienta. Sea  $\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z, n_x, n_y, n_z)^T$  el vector de fuerzas y torques en el efector final, expresado en el sistema coordenado de la herramienta.  $F_x, F_y, F_z$  son las componentes de fuerza en el efector final y  $n_x, n_y, n_z$  del torque. Sea  $\boldsymbol{\tau}$  el vector de torques en las articulaciones y  $\delta\mathbf{x}$  el desplazamiento virtual del efector final causado por la fuerza  $\mathbf{F}$ . Finalmente, sea  $\delta\mathbf{q}$  el correspondiente desplazamiento virtual de las articulaciones. Estos desplazamientos son relacionados a través del Jacobiano  $\mathbf{J}(\mathbf{q})$  del manipulador de acuerdo con

$$\delta\mathbf{x} = \mathbf{J}(\mathbf{q})\delta\mathbf{q} \quad (2.3)$$

El trabajo virtual  $\delta W$  del sistema es

$$\delta W = \mathbf{F}^T \delta \mathbf{x} - \boldsymbol{\tau}^T \delta \mathbf{q} \quad (2.4)$$

Sustituyendo (2.3) en (2.4) se obtiene

$$\delta W = (\mathbf{F}^T \mathbf{J}(\mathbf{q}) - \boldsymbol{\tau}^T) \delta \mathbf{q} \quad (2.5)$$

Nótese que (2.5) es igual a cero si el manipulador está en equilibrio. Puesto que las coordenadas generalizadas  $\mathbf{q}$  son independientes se tiene la igualdad

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}(\mathbf{q})^T \mathbf{F} \quad (2.6)$$

En otras palabras las fuerzas del efector final se relacionan con los torques en las articulaciones por la transpuesta del Jacobiano del manipulador, de acuerdo con la ecuación anterior.

### 2.1.3. Restricciones Naturales y Artificiales

El control de tareas de fuerza puede tratarse en términos de restricciones impuestas por la interacción de un robot con su entorno. Un manipulador moviéndose en su espacio de trabajo tridimensional no tiene restricciones de movimiento y, por lo tanto, no existen fuerzas de reacción con su entorno. Un sensor de muñeca en tal caso podría registrar sólo fuerzas de inercia debido a aceleración del efector final.

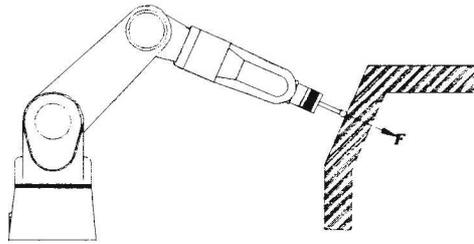


Figura 2.2: Efector final de un robot en contacto con su entorno

Cuando el manipulador tiene contacto con su entorno, como una superficie rígida (Figura 2.2), uno o más grados de libertad de movimiento pueden perderse, por lo que el manipulador no podrá moverse a través de la superficie, sin embargo al mismo tiempo el manipulador puede ejercer fuerza normal

sobre la superficie. Esto es, el movimiento es posible a lo largo de la dirección de los vectores tangentes a la superficie de restricción, mientras que las fuerzas pueden ser ejercidas a lo largo de la dirección de los vectores perpendiculares a la superficie. De este modo, el control de posición y el control de fuerza se excluyen mutuamente y no se puede controlar una fuerza y una posición a lo largo de la misma dirección simultáneamente.

Para describir la interacción robot/entorno, sea  $\boldsymbol{\xi} = [\mathbf{v}^T, \mathbf{w}^T]^T$  representa la velocidad lineal y angular instantánea del efector final y sea  $\mathbf{F} = [\mathbf{f}^T, \mathbf{n}^T]^T$  que representa las fuerzas y momentos instantáneos que actúan en el efector final. Los vectores  $\boldsymbol{\xi}, \mathbf{F} \in \mathbb{R}^6$  que pertenecen a los espacios  $\mathcal{M}$  y  $\mathcal{F}$ , de movimiento y fuerza, respectivamente. Los vectores  $\boldsymbol{\xi}$  se le conoce como torsión (*Twist*),  $\mathbf{F}$  como tirón (*Wrenches*), en adelante se les llamará simplemente vectores de velocidad y fuerza por simplicidad.

**Definición 2.1.1** 1. Si  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_6)$  son una base para el espacio vectorial  $\mathcal{M}$ , y  $(\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_6)$  son una base para  $\mathcal{F}$ , se dice que estas bases son *recíprocas* si

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_i^T \mathbf{f}_j &= 0 & \text{si } i \neq j \\ \mathbf{e}_i^T \mathbf{f}_i &= 1 & \text{si } i = j \end{aligned} \quad (2.7)$$

2. Un vector velocidad  $\boldsymbol{\xi} \in \mathcal{M}$  y un vector fuerza  $\mathbf{F} \in \mathcal{F}$  son recíprocos si

$$\boldsymbol{\xi}^T \mathbf{F} = \mathbf{v}^T \mathbf{f} + \mathbf{w}^T \mathbf{n} = 0 \quad (2.8)$$

La ventaja del uso de vectores base recíprocos es que el producto  $\boldsymbol{\xi}^T \mathbf{F}$  es entonces invariante con respecto a un cambio lineal de la base de un sistema coordenado recíproco a otro. De esta manera la *condición de reciprocidad* dada por la ecuación (2.8) es invariante con respecto a como se escojan las bases de  $\mathcal{M}$  y  $\mathcal{F}$ .

A continuación se discutirán las **restricciones naturales** que son definidas usando la condición de reciprocidad de la ecuación (2.8). También se discutirá la noción de **restricciones artificiales**, que son usadas para definir entradas de referencia para tareas de control de movimiento y fuerza.

Para describir las tareas de control de fuerza se acostumbra introducir un marco de referencia  $O_c x_c y_c z_c$  (también llamado marco de restricción), de modo que la tarea que será realizada sea descrita fácilmente. Por ejemplo, en una aplicación para lavar una ventana se puede definir un marco de referencia

en la herramienta con el eje  $\mathbf{z}$  a lo largo de la dirección normal de la superficie. La especificación de la tarea entonces sería expresada en función de mantener una fuerza constante en la dirección  $\mathbf{z}_c$  mientras se sigue una trayectoria prescrita en el plano  $\mathbf{x}_c - \mathbf{y}_c$ . Más específicamente, un marco de restricción es un sistema coordenado (variante en el tiempo), cuyos ejes coordenados descomponen la tarea en direcciones a lo largo de las cuales los comandos de posición pura o de fuerza pura pueden ser programados.

Con respecto al marco de restricción coordenado se pueden asociar ciertos conjuntos de restricciones que definen la tarea. Por ejemplo, una restricción de la posición en la dirección de  $\mathbf{z}_c$  que se presenta por la presencia de una superficie rígida es una *restricción natural*, mientras que la trayectoria  $\mathbf{x}_c - \mathbf{y}_c$  necesaria para lavar la ventana es una *restricción artificial*. Si no hay restricciones causadas por el entorno (cuerpos rígidos), una velocidad deseada en la dirección  $\mathbf{z}_c$  podría entonces considerarse como una restricción artificial que puede ser mantenida por un sistema de control.

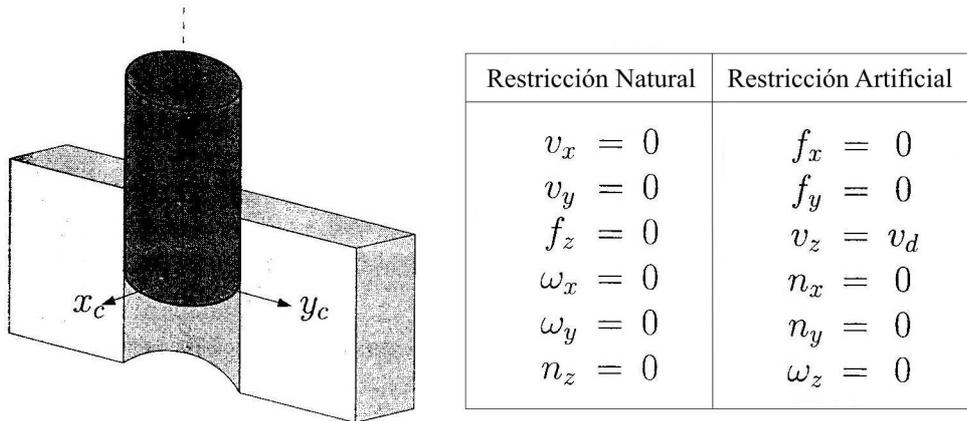


Figura 2.3: Inserción de una barra en un hoyo

La Figura (2.3) muestra una tarea típica con respecto a un sistema restringido  $O_c x_c y_c z_c$  (como se muestra en el extremo de la barra), en el cual puede fijarse un sistema de base ortogonal en  $\mathbb{R}^6$  mediante  $\mathcal{M}$  y  $\mathcal{F}$ , en este caso

$$\boldsymbol{\xi}^T \mathbf{F} = v_x \mathbf{f}_x + v_y \mathbf{f}_y + v_z \mathbf{f}_z + w_x \mathbf{n}_x + w_y \mathbf{n}_y + w_z \mathbf{n}_z = \mathbf{0} \quad (2.9)$$

si asumimos que la pared del hoyo y la barra son perfectamente rígidos y no

hay fricción, se puede mostrar que

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_x = 0 \quad \mathbf{v}_y = 0 \quad \mathbf{f}_z = 0 \\ \mathbf{w}_x = 0 \quad \mathbf{w}_y = 0 \quad \mathbf{n}_z = 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

y entonces, la condición de reciprocidad  $\boldsymbol{\xi}^T \mathbf{F} = 0$  se satisface. La ecuación anterior es relacionada a la *restricción natural*. Examinando la ecuación (2.9) puede verse que las variables

$$\mathbf{f}_x, \mathbf{f}_y, \mathbf{v}_z, \mathbf{n}_x, \mathbf{n}_y, \mathbf{w}_z \quad (2.11)$$

son desconocidas en el ambiente. En otras palabras, dada la restricción natural de la ecuación (2.10), la condición de reciprocidad  $\boldsymbol{\xi}^T \mathbf{F} = 0$  se mantiene para todos los valores de las variables de la ecuación (2.11). De este modo se puede asignar un valor de referencia arbitrario (llamadas restricciones artificiales), de las variables que tienen que ser forzadas por el sistema de control para llevar a cabo la tarea. Por ejemplo en la tarea de poner la barra en el hoyo (*peg in hole*), podemos definir restricciones artificiales como

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_x = 0 \quad \mathbf{f}_y = 0 \quad \mathbf{v}_z = \mathbf{v}_d \\ \mathbf{n}_x = 0 \quad \mathbf{n}_y = 0 \quad \mathbf{w}_z = 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

donde  $\mathbf{v}_d$  es la velocidad deseada de inserción para la barra sobre la dirección de  $z$ .

En la Figura 2.4 se muestran las restricciones naturales y artificiales para la tarea de rotar un cigüeñal.

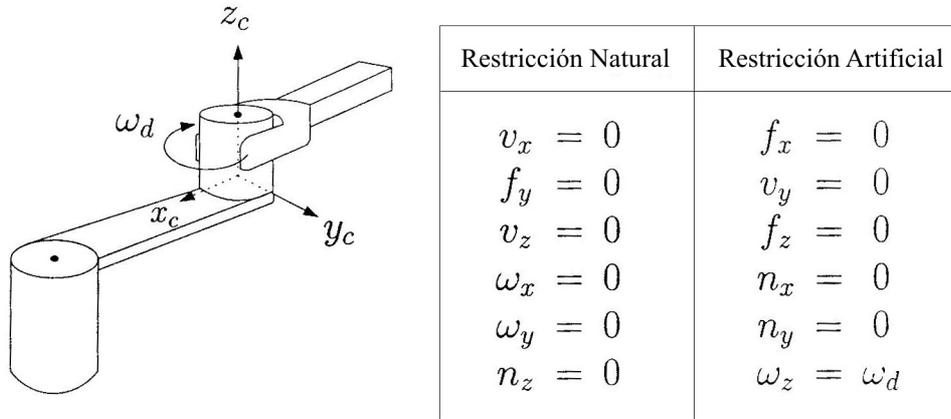


Figura 2.4: Rotación de un cigüeñal

#### 2.1.4. Modelos de contacto

Un *contacto* entre un dedo y un objeto puede ser descrito como un mapeo entre fuerzas ejercidas por el dedo en un punto de contacto y fuerzas de reacción en algún punto de referencia en el objeto.

Algunos modelos de contacto son usados para clasificar configuraciones de contacto comunes, el cual puede extenderse para considerar efectos de fricción (Murray *et al.* 2004).

- **En un punto de contacto sin fricción.-** Se obtiene cuando no se considera fricción entre la punta del dedo y el objeto. En este caso, las fuerzas solo pueden ser aplicadas en la dirección normal a la superficie de contacto del objeto y podemos representar la aplicación de fuerza de empuje como

$$F_{c_i} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} f_{c_i} \quad f_{c_i} \geq 0, \quad (2.13)$$

donde  $f_{c_i} \in \mathbb{R}$  es la magnitud de la fuerza aplicada por el efector final en la dirección normal al contacto. El requisito en el modelo para  $f_{c_i}$

positivo viene del hecho de que contactos de este tipo pueden empujar al objeto, pero no lo pueden jalar. Contactos sin fricción nunca ocurren en situaciones prácticas, pero pueden ser utilizados para aplicaciones en las cuales la fricción es lo suficientemente baja.

Para aplicaciones en los que se requiere sujetar un objeto pueden usarse fuerzas de fricción, por lo cual deben considerarse en el modelo. Podemos usar simplemente un modelo de fricción de Coulomb. Por ejemplo la fricción de Coulomb es un modelo empírico que afirma que las fuerzas tangenciales son proporcionales a la aplicación de la fuerza normal, y la constante de proporcionalidad es una función de los materiales que están en contacto.

Se define a  $f^t \in \mathbb{R}$  como la magnitud de la fuerza tangencial y  $f^n \in \mathbb{R}$  como la magnitud de la fuerza normal, las leyes de Coulomb establecen que el deslizamiento en el contacto inicia cuando

$$|f^t| > \mu f^n, \quad (2.14)$$

donde  $\mu > 0$  es el coeficiente de fricción estática. Esto implica que el rango de las fuerzas tangentes que pueden ser aplicadas en el contacto está dada por

$$|f^t| \leq \mu f^n. \quad (2.15)$$

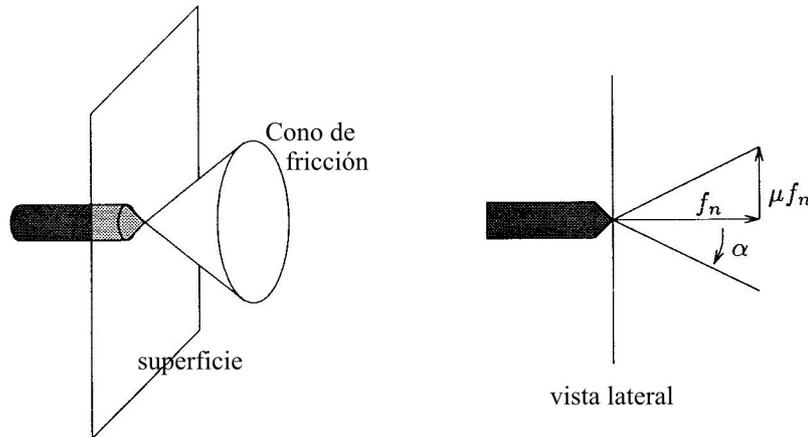


Figura 2.5: Interpretación geométrica del Modelo de fricción de Coulomb

Materiales	$\mu$	Materiales	$\mu$
Acero en acero	0.58	Madera en madera	0.25-0.5
Polietileno en acero	0.3-0.35	Madera en metal	0.2-0.6
Polietileno en polietileno	0.5	Madera en piel	0.3-0.4
Caucho en solidos	1-4	Piel en metal	0.6

Tabla 2.1: Coeficientes de fricción para materiales comunes (fuente: CRC Handbook of Chemistry and Physics)

En particular, se observa que  $f^n$  tiene que ser positiva debido a que esta relación es válida para valores diferentes de cero de  $f^t$ . La ecuación (2.15) puede ser representada geoméricamente, como muestra la Figura 2.5. El conjunto de fuerzas que pueden ser aplicadas en un contacto tienen que estar en un cono centrado sobre la superficie normal. Este cono es llamado *cono de fricción*; el ángulo del cono con la normal está dado por

$$\alpha = \tan^{-1} \mu. \quad (2.16)$$

En la tabla (2.1) se dan algunos valores para el coeficiente de fricción para materiales comunes. Los valores típicos para  $\mu$  son menores que 1, y para el cono de fricción los ángulos típicos son menores de  $45^\circ$ .

- **En un punto de contacto con fricción.-** Es usado cuando existe fricción entre la punta del efector final y el objeto, en este caso las fuerzas pueden ser ejercidas en cualquier dirección dentro del cono de fricción. Podemos representar la aplicación del empuje ejercido sobre el objeto con respecto a una base de direcciones que son congruentes con el modelo de fricción:

$$\mathbf{F}_{c_i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} f_{c_i} \quad f_{c_i} \in \mathbf{FC}_{c_i} \quad (2.17)$$

donde

$$\mathbf{FC}_{c_i} = \left( f \in \mathbb{R}^3, \quad \sqrt{f_1^2 + f_2^2} \leq \mu f_3, \quad f_3 \geq 0 \right) \quad (2.18)$$

- **Modelo dedo flexible (soft/finger).**- Es un modelo más realista, donde no solo son consideradas fuerzas aplicadas en el cono sobre la superficie normal, sino que también se consideran torques sobre la normal. Por simplicidad, el modelo presentado considera un limite inicial para el torque mediante un coeficiente de fricción de torsión. El modelo está representado mediante

$$\mathbf{F}_{c_i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} f_{c_i} \quad f_{c_i} \in FC_{c_i} \quad (2.19)$$

y el cono de fricción

$$\mathbf{FC}_{c_i} = \left( f \in \mathbb{R}^4, \sqrt{f_1^2 + f_2^2} \leq \mu f_3, f_3 \geq 0, |f_4| \leq \gamma f_3 \right) \quad (2.20)$$

donde  $\gamma > 0$  es el coeficiente de fricción de torsion.

En general, se modela un contacto usando bases de empuje,  $\mathbf{B}_{c_i} \in \mathbb{R}^{p \times m_i}$ , y un cono de fricción,  $\mathbf{FC}_{c_i}$ . En los ejemplos se ha escogido  $p = 6$ , la dimensión en el espacio para fuerzas generalizadas que pueden ser aplicadas en  $\mathbf{SE}(3)$ . Otra opción posible, y un poco más común es  $p = 3$ , que se utiliza en aplicaciones de agarre planas. La dimensión de la base de empuje,  $m_i$ , indica el número de fuerzas independientes que pueden aplicarse al momento del contacto y donde se requiere que  $\mathbf{FC}_{c_i}$  satisfaga las siguientes propiedades:

1.  $\mathbf{FC}_{c_i}$  es un subconjunto cerrado de  $\mathbb{R}^{m_i}$  con un interior no vacío.
2.  $f_1, f_2 \in FC_{c_i} \rightarrow \alpha f_1 + \beta f_2 \in \mathbf{FC}_{c_i}$  para  $\alpha, \beta > 0$ .

El conjunto de fuerzas de contacto aplicadas que cumplen con las propiedades anteriores para un contacto dado son

$$\mathbf{F}_{c_i} = B_{c_i} f_{c_i} \quad f_{c_i} \in \mathbf{FC}_{c_i} \quad (2.21)$$

Algunos tipos de contacto comunes son suministrados en la Figura 2.6.

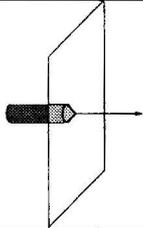
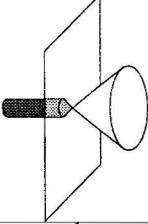
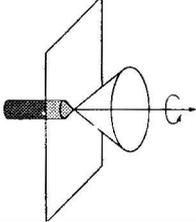
Tipo de Contacto	Diagrama	Componentes base	FC
Contacto en un punto sin fricción		$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$f_1 \geq 0$
Contacto en un punto con fricción		$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\sqrt{f_1^2 + f_2^2} \leq \mu f_3$ $f_3 \geq 0$
... con flexión		$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\sqrt{f_1^2 + f_2^2} \leq \mu f_3$ $f_3 \geq 0$ $ f_4  \leq \gamma f_3$

Figura 2.6: Tipos de contacto comunes

### 2.1.5. Principio de ortogonalización

El principio de ortogonalización está basado en la propiedad física de que cuando se imprime fuerza sobre una superficie rígida (restricción), y al mismo tiempo existe un desplazamiento sobre ella, el vector de velocidad está contenido en el plano tangente al punto de contacto, mientras que la aplicación de la fuerza es perpendicular al plano, (véase la Figura 2.7). Para preservar esta propiedad, la restricción es manipulada para obtener dos subespacios ortogonales. Estos subespacios dan origen a dos transformaciones que son usadas para obtener una representación conveniente que permita eliminar términos cruzados en el análisis de estabilidad, de manera que puedan formularse controladores sencillos con pruebas de estabilidad simples, y con propiedades de convergencia de posición y fuerza. Estas transformaciones se utilizan para hacer la proyección ortogonal del vector  $\boldsymbol{x}$  sobre un espacio de dimensión  $(n - 1)$  (espacio tangente) ortogonal al vector Jacobiano  $\boldsymbol{J}_{\varphi\boldsymbol{x}}^T$ ; el

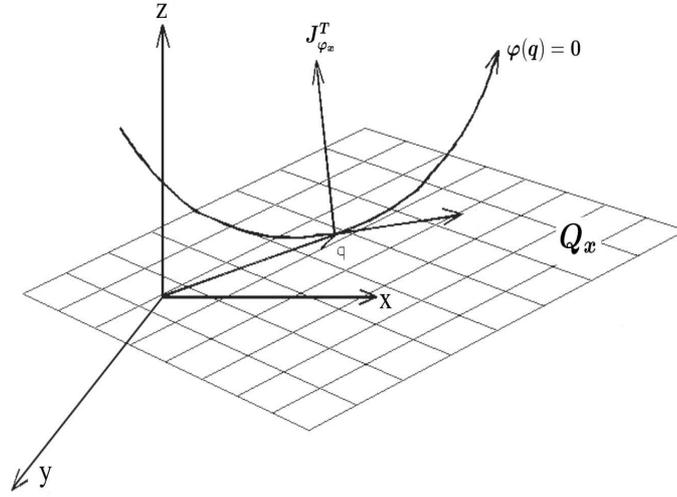


Figura 2.7: Descomposición geométrica en el punto de contacto

plano tangente puede ser representado en forma matricial por

$$\mathbf{Q}_x = \mathbf{I} - \mathbf{J}_{\varphi_x}^T (\mathbf{J}_{\varphi_x} \mathbf{J}_{\varphi_x}^T)^{-1} \mathbf{J}_{\varphi_x} \quad (2.22)$$

donde  $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz identidad. Mientras el manipulador se mueva sobre la superficie se cumple  $\mathbf{Q}_x \dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{x}}$ .

## 2.2. Modelo dinámico

El empleo de las ecuaciones de Lagrange para el modelado, requiere la noción de la energía cinética  $K$  y la energía potencial  $P$ . El Lagrangiano  $L$  de un sistema mecánico, que depende de las coordenadas generalizadas, se define como la diferencia entre estas energías, *i.e.*

$$L = K - P, \quad (2.23)$$

donde se considera que la energía potencial  $P$  es debida a fuerzas conservativas como la fuerza de gravedad o fuerzas debidas a resortes.

Las ecuaciones de movimiento de Lagrange para un manipulador de  $n$  g.d.l. (grados de libertad), están dadas por:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \tau_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.24)$$

donde  $\tau_i$  la fuerza generalizada<sup>1</sup> generada por los actuadores en cada articulación y fuerzas no conservativas<sup>2</sup>. Por último, cabe hacer notar que se tendrán tantas ecuaciones dinámicas como g.d.l. tenga el robot.

### 2.2.1. Modelo dinámico con movimiento libre

Empleando las ecuaciones de Euler-Lagrange para el movimiento, la ecuación dinámica de un manipulador está dada por

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau}, \quad (2.25)$$

donde sus elementos  $\mathbf{H}(\mathbf{q})$ ,  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  y  $\mathbf{g}(\mathbf{q})$  son en general función de la posición y la velocidad de las articulaciones, esto es  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$  y  $\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$ .  $\mathbf{H}(\mathbf{q})$ ,  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  y  $\mathbf{g}(\mathbf{q})$  son por supuesto dependientes de la geometría del robot. El significado de las matrices y vectores en la ecuación (2.25) es el siguiente<sup>3</sup>:

donde

- $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$  es el vector de las articulaciones generalizadas.
- $\mathbf{H}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la matriz de inercia simétrica positiva definida.
- $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$  es el vector de Coriolis y torques centrífugos.
- $\mathbf{g}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^n$  es el vector de los torques gravitacionales.
- $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la matriz diagonal semidefinida positiva de acuerdo con los coeficientes de fricción viscosa de las articulaciones.
- $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^n$  es el vector de torques actuando sobre las articulaciones.

### 2.2.2. Dinámica de los actuadores

En un robot, el vector de pares  $\boldsymbol{\tau}$  en la ecuación (2.25) es suministrado por actuadores, que tradicionalmente son de tipo electromagnético, hidráulico o neumático. De esta forma, el par de entrada  $\boldsymbol{\tau}$  está íntimamente relacionado

<sup>1</sup>Se utiliza el término de *fuerza* tanto para describir la fuerza de las articulaciones prismáticas como el *torque* de las articulaciones de revolución.

<sup>2</sup>Son las fuerzas que resisten al movimiento de un objeto, como la fuerza de fricción. En general dependen del tiempo y la velocidad.

<sup>3</sup>Refiérase a (Martínez Rosas 2002) si se desea conocer el cálculo de dichas matrices.

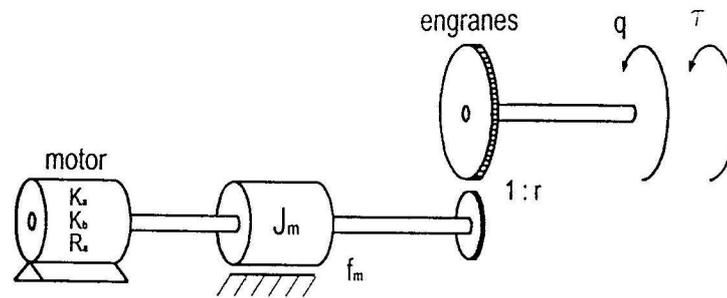


Figura 2.8: Diagrama de un motor de corriente directa.

con la dinámica de los actuadores. En el caso de actuadores electromecánicos la entrada puede ser un voltaje o corriente, y flujo o presión para los hidráulicos. En este trabajo se utilizan motores de corriente directa CD, como el que se muestra en la Figura 2.8.

El modelo dinámico relacionando con el voltaje  $v$  aplicado a la armadura del motor con el par  $\tau$  suministrado por dicho motor está dado por (Kelly 1994)

$$J_{m_i} \ddot{q}_i + f_{m_i} \dot{q}_i + \frac{K_{a_i} K_{b_i}}{R_{a_i}} \dot{q}_i + \frac{\tau_i}{r_i^2} = \frac{K_{a_i}}{r_i R_{a_i}} v_i, \quad (2.26)$$

que representa un modelo dinámico lineal simplificado de un motor de CD con inductancia de armadura despreciable, donde

- $J_{m_i}$  inercia del rotor ( $\text{Kg} \cdot \text{m}^2$ )
- $K_{a_i}$  constante motor-par ( $\text{Nm/A}$ )
- $R_{a_i}$  resistencia de la armadura ( $\Omega$ )
- $k_{b_i}$  constante de contrareacción electromotriz ( $\text{V} \cdot \text{s/rad}$ )
- $f_{m_i}$  coeficiente de fricción con sus soportes ( $\text{N} \cdot \text{m}$ )
- $\tau_i$  par neto aplicado después del juego de engranes sobre el eje de la carga ( $\text{N} \cdot \text{m}$ )
- $q_i$  posición angular del eje de la carga (rad)
- $r_i$  relación de reducción de los engranes (en general  $r_i \gg 1$ )

- $v_i$  voltaje de la armadura (V)

La ecuación (2.26) se puede representar en forma matricial como:

$$\mathbf{D}_j \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}_f \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}_n \boldsymbol{\tau} = \mathbf{D}_k \mathbf{v} \quad (2.27)$$

con

$$\mathbf{D}_j = \text{diag}\{J_{m_i}\} \quad (2.28)$$

$$\mathbf{D}_f = \text{diag}\{f_{m_i} + (\frac{K_{a_i} K_{b_i}}{R_{a_i}})\} \quad (2.29)$$

$$\mathbf{D}_n = \text{diag}\{\frac{1}{r_i^2}\} \quad (2.30)$$

$$\mathbf{D}_k = \text{diag}\{(\frac{K_{a_i}}{R_{a_i} r_i})\} \quad (2.31)$$

$$(2.32)$$

El modelo dinámico completo de un manipulador cuyos actuadores se localizan en las articulaciones, se obtiene sustituyendo  $\boldsymbol{\tau}$  de (2.27) en (2.25)

$$(\mathbf{H}(\mathbf{q}) + \mathbf{D}_n^{-1} \mathbf{D}_j) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + (\mathbf{D} + \mathbf{D}_n^{-1} \mathbf{D}_f) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{D}_n^{-1} \mathbf{D}_k \mathbf{v} \quad (2.33)$$

La ecuación anterior puede ser vista como un sistema dinámico cuya entrada es  $\mathbf{v}$  y sus salidas son  $\mathbf{q}$  y  $\dot{\mathbf{q}}$ .

### 2.2.3. Modelo dinámico con movimiento restringido

Cuando un robot manipulador está en contacto con el entorno, se producen fuerzas adicionales debido a la interacción entre el efector final del robot y este. Sea  $\mathbf{f}_e$  la fuerza ejercida por el robot debido al contacto con el entorno. Es fácil demostrar, mediante el método de trabajo virtual (ver sección 2.1.1), que el torque en las articulaciones del robot debido a las fuerzas externas está dado por  $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}^T(\mathbf{q}) \mathbf{f}_e$ , donde  $\mathbf{J}^T(\mathbf{q})$  es el Jacobiano del manipulador. Así, la ecuación (2.25), puede ser modificada como

$$\mathbf{H}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} - \mathbf{J}^T(\mathbf{q}) \mathbf{f}_e, \quad (2.34)$$

para incorporar la fuerza externa debida a la interacción con el entorno.  $\mathbf{f}_e^T = (\mathbf{f}^T \quad \mathbf{m}^T) \in \mathbb{R}^6$  representa las fuerzas ( $\mathbf{f}$ ) y los torques ( $\mathbf{m}$ ) en el sistema

coordinado de referencia en el punto de contacto. La fuerza de contacto  $\mathbf{f}_e$  es determinada por la ecuación (2.25) y por la dinámica del entorno, cuyo modelo dinámico se caracteriza por:

- La cinemática de la geometría de contacto.- Esto es, en que direcciones los movimientos del manipulador están restringidos.
- La relación entre la fuerza aplicada y la deformación de la superficie de restricción.

Generalmente se consideran dos casos: (1) el robot y el ambiente son perfectamente rígidos y (2) el entorno se comporta como un sistema masa-resorte-amortiguador. El primero modelo es más apropiado para:

- Propósitos de especificación de movimiento.- El usuario tiene que especificar el movimiento deseado del robot, así como la fuerza de contacto deseada. Esto es fácil dentro de un modelo cartesiano, rígido y restringido geoméricamente.
- Propósitos teóricos.- Una interacción rígida entre el robot y su entorno es un caso limite ideal interesante, con el cual otros métodos de control pueden ser comparados.

Dos casos son considerados para entornos rígidos:

1. Las restricciones son formuladas en el espacio de las articulaciones.
2. Las restricciones son formuladas en el espacio cartesiano. Esta tesis sólo contempla la representación para el espacio cartesiano.

Supónganse ahora que las restricciones cinemáticas impuestas por el entorno son expresadas en el espacio cartesiano por  $m$  ecuaciones algebraicas

$$\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{0}. \quad (2.35)$$

Esta ecuación asume que la restricción es rígida, bilateral y holónomica, y que las  $m$  restricciones son independientes entre sí; por lo tanto, el manipulador queda con  $n - m$  grados de libertad. La dinámica para el robot restringido es obtenida a partir del modelo sin restricciones (2.25) por la técnica clásica de incorporar las restricciones dentro de la función Lagrangiana. Para el sistema sin restricción, el Lagrangiano es la diferencia entre la energía cinética

del sistema  $K$  y su energía potencial  $P$ . Para que el método de Lagrange satisfaga las ecuaciones dinámicas del sistema y las restricciones se define el Lagrangiano extendido

$$L = K - P + \sum_{j=1}^m \lambda_j \varphi_j(\mathbf{q}), \quad (2.36)$$

con  $\lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_m]$ . La solución de las ecuaciones Lagrangianas

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \tau_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.37)$$

resulta en

$$H(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + D\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} - \mathbf{J}_\varphi^T(\mathbf{q})\boldsymbol{\lambda}, \quad (2.38)$$

donde  $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^m$  es el vector multiplicador de Lagrange (físicamente representa la fuerza aplicada en el punto de contacto).  $\mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q}) = \nabla \varphi(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$  es una matriz ortogonal, cuyo rango se asume completo debido a que se considera que todas las restricciones son independientes.  $\nabla \varphi(\mathbf{q})$  denota el vector gradiente de la superficie del objeto  $\varphi \in \mathbb{R}^m$ , el cual mapea un vector sobre el plano normal al plano tangente en el punto de contacto  $\mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q})$  representa la fuerza de contacto ideal, esto es, contacto sin fricción.

## 2.3. Modelo cinemático

Para que un robot manipulador pueda realizar una gama de operaciones físicas es necesario que se componga de varios eslabones (elementos) interconectados por medio de uniones o articulaciones, formando una especie de *brazo*. El movimiento de su estructura se obtiene por la composición de movimientos elementales de cada articulación con respecto a la anterior. Entonces, uno de los objetivos es determinar el efecto acumulativo del conjunto de movimientos articulares con el propósito de describir la posición y orientación del extremo final del brazo articulado. El análisis cinemático describe los movimientos respecto a un sistema coordinado fijo, ignorando las fuerzas y momentos que causan el movimiento de la estructura. Esto nos lleva a distinguir entre la *cinemática* y la *cinemática diferencial*. La cinemática describe la relación entre la posición articular y la correspondiente

posición y orientación del extremo de un robot manipulador, mientras que la cinemática diferencial se refiere a la relación entre los movimientos articulares y los movimientos de la parte terminal del robot en términos de las velocidades.

### 2.3.1. Cinemática directa

El problema de la cinemática directa de un robot manipulador rígido es determinar la posición y la orientación del extremo del manipulador, conocidos los ángulos de desplazamiento de las articulaciones. En esta tesis sólo se abordan articulaciones de rotación debido a que los robots en los cuales se basa este trabajo están constituidos por articulaciones de revolución. El número de uniones en un brazo articulado determina su grado de movilidad y típicamente, un robot manipulador industrial dispone de seis grados de libertad de los cuales 3 ubican la posición del último eslabón en el espacio y tres más especifican su orientación.

Las posiciones articulares correspondientes a cada articulación del robot, las cuales son medidas por medio de transductores (encoders) colocados en los actuadores, son agrupadas para propósitos analíticos en el vector de posiciones

$$\mathbf{q} = [ q_1 \quad q_2 \quad \dots \quad q_n ]^T, \quad (2.39)$$

donde  $n$  es el número de articulaciones. Para describir la relación traslacional y rotacional entre elementos adyacentes, Denavit y Hartenberg en 1955, propusieron un método matricial para establecer de forma sistemática un sistema inercial de coordenadas para cada elemento de un robot (Spong y Vidyasagar 2006). Tal representación tiene como resultado una matriz de transformación homogénea  $4 \times 4$  que representa cada uno de los sistemas de coordenadas de los elementos en la articulación con respecto al sistema de coordenadas del elemento previo. De este modo mediante transformaciones secuenciales, el efector final expresado en las coordenadas de la herramienta se puede transformar y expresar en las coordenadas de la base (cabe hacer notar que esta metodología no puede ser utilizada en robot flexibles).

Para determinar las ecuaciones cinemáticas del brazo de un robot se opta por la forma más común de representar la cinemática directa a través de una matriz de transformación homogénea  ${}^0\mathbf{T}_n \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ , donde  $n$  es el número de articulaciones del robot. La matriz  ${}^0\mathbf{T}_n$  está definida como

$$\begin{aligned}
{}^0\mathbf{T}_n(\mathbf{q}) &= {}^0\mathbf{A}_1(q_1) {}^1\mathbf{A}_2(q_2) \cdots {}^{n-1}\mathbf{A}_n(q_n) \\
&= \begin{bmatrix} {}^0\mathbf{R}_n(\mathbf{q}) & {}^0\mathbf{d}_n(\mathbf{q}) \\ 0 & 1 \end{bmatrix},
\end{aligned} \tag{2.40}$$

donde  ${}^{i-1}\mathbf{A}_i \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  con  $i = 1, 2, \dots, n$  es la matriz homogénea que transforma las coordenadas de un punto del sistema  $i$  al sistema  $i - 1$ .  ${}^0\mathbf{R}_n \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  es una matriz ortogonal de rotación que representa la rotación del sistema coordenado  $O_{n x_n y_n z_n}$  con respecto al sistema de la base  $O_{0 x_0 y_0 z_0}$ , debiendo satisfacer

$${}^0\mathbf{R}_n = ({}^n\mathbf{R}_0)^{-1} = ({}^n\mathbf{R}_0)^T, \tag{2.41}$$

que es una característica de las matrices *ortogonales* y

$$\det({}^0\mathbf{R}_n) = +1, \tag{2.42}$$

que las define como *matrices rotacionales*.  ${}^0\mathbf{d}_n \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$  es el vector que indica la posición del origen del sistema  $n$  ligado al efector final, medido desde el origen del sistema de referencia  $O_{0 x_0 y_0 z_0}$ .

Con estos conceptos la cinemática directa queda descrita, donde el cálculo de la matriz  $\mathbf{A}_i$  se realiza utilizando la convención de Denavit-Hartenberg (Spong y Vidyasagar 2006). La Figura 2.9 ilustra la ubicación de los sistemas de coordenadas para el robot A465.

Ver Castillo Sanchez (2004) para conocer las matrices homogéneas utilizadas.

### 2.3.2. Jacobiano geométrico

La cinemática diferencial, proporciona la relación entre la velocidad de las articulaciones y la correspondiente velocidad lineal y angular del efector final. Este mapeo es descrito por una matriz, referida como Jacobiano geométrico, la cual depende de la configuración del robot. Alternativamente, si la localización del efector final es expresada con referencia a una representación mínima en el espacio operacional, es posible calcular la matriz Jacobiana vía la diferenciación de la función de cinemática directa con respecto a las variables de las articulaciones; el Jacobiano resultante es el Jacobiano Analítico (ver Spong y Vidyasagar (2006) y/o Niku (2001)), que en general difiere del

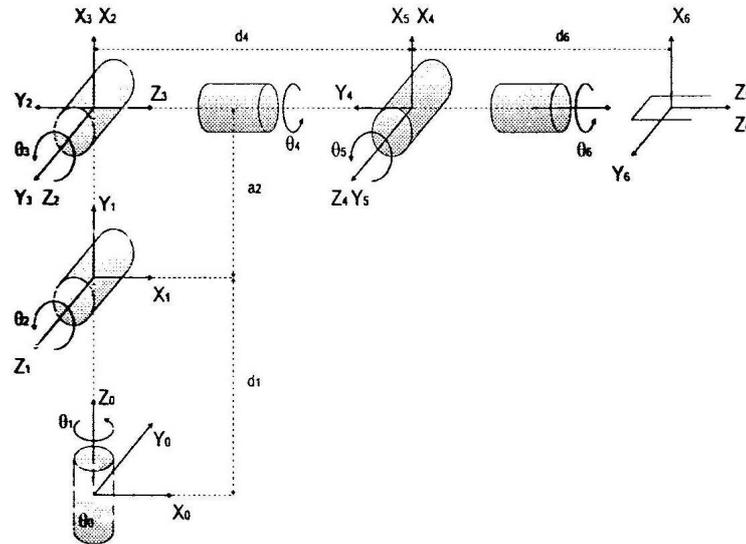


Figura 2.9: Asignación de sistemas de coordenadas del brazo manipulador *CRS Robotics A465*.

Jacobiano geométrico. Cualquier Jacobiano es útil para encontrar configuraciones singulares, análisis de redundancia, mapeo de fuerzas aplicadas por el efector final y los torques resultantes en las articulaciones, así como la obtención de las ecuaciones de movimiento del manipulador.

Considérese un manipulador de  $n$  grados de libertad. La correspondencia entre las velocidades de las articulaciones y la velocidad lineal y angular de la parte terminal del último eslabón (efector final) se establece por la ecuación diferencial

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{d}} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} = \mathbf{J}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}, \quad (2.43)$$

donde  $\dot{\mathbf{d}} \in \mathbb{R}^3$  expresa la velocidad lineal;  $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^3$ , la velocidad angular y  $\mathbf{J}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{6 \times n}$  es el Jacobiano geométrico. La obtención de esta matriz usualmente sigue un procedimiento geométrico basado en las contribuciones de las velocidades articulares a la velocidad lineal y angular del extremo del último eslabón. En síntesis, el Jacobiano relaciona los movimientos de una articulación individual a los movimientos globales del mecanismo, y se puede

particionar en vectores columna de  $(3 \times 1)$  como:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_d \\ \mathbf{J}_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j_{d_1} & \cdots & j_{d_n} \\ j_{o_1} & \cdots & j_{o_n} \end{bmatrix}, \quad (2.44)$$

donde se observa que:

$$\dot{\mathbf{d}} = \mathbf{J}_d(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad (2.45)$$

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{J}_o(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}. \quad (2.46)$$

sustituyendo (2.44) en (2.43), se obtiene

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{d}} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j_{d_1} & \cdots & j_{d_n} \\ j_{o_1} & \cdots & j_{o_n} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_i. \quad (2.47)$$

En esta ecuación es importante resaltar que el término  $j_{d_i} \dot{q}_i$  representa la contribución de una articulación a la velocidad lineal del efector final y el término  $j_{o_i} \dot{q}_i$ , similarmente, es la contribución a la velocidad angular del efector final.

El cálculo del Jacobiano para manipuladores en donde se aplica Denavit-Hatemberg se obtiene de

$$\begin{bmatrix} \mathbf{J}_{d_i} \\ \mathbf{J}_{o_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{i-1} \times (\mathbf{d} - \mathbf{d}_{i-1}) \\ \mathbf{z}_{i-1} \end{bmatrix}, \quad (2.48)$$

donde  $\mathbf{z}_i$  son los vectores unitarios que representan el eje donde giran las articulaciones y  $\mathbf{d}_i$  los vectores de posición de cada una de las articulaciones.

### 2.3.3. Singularidades

El Jacobiano en la ecuación cinemática diferencial

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{d}} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} = \mathbf{J}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}, \quad (2.49)$$

define un mapeo lineal entre el vector de las velocidades  $\dot{\mathbf{q}}$  y el vector de velocidad del efector final. El Jacobiano se relaciona con el tiempo, ya que los valores de cada uno de sus elementos y la magnitud del conjunto de elementos cambia con respecto a este. En general, el Jacobiano es función de la configuración del brazo y aquellas configuraciones en las que no tiene rango completo se llaman *singularidades cinemáticas*. Éstas se pueden clasificar como:

- **Singularidades de contorno.** Ocurren cuando el manipulador se extiende o se contrae. Esto resulta cuando el extremo del manipulador llega a la frontera de su espacio alcanzable. Esta desventaja se puede evitar en la programación de la trayectoria.
- **Singularidades internas.** Ocurren dentro del espacio alcanzable y son generalmente causadas por el alineamiento de dos o más ejes de movimiento o por la configuración del efector final. Al contrario de la anterior, constituyen un problema debido a que se pueden dar en cualquier punto dentro del espacio alcanzable.

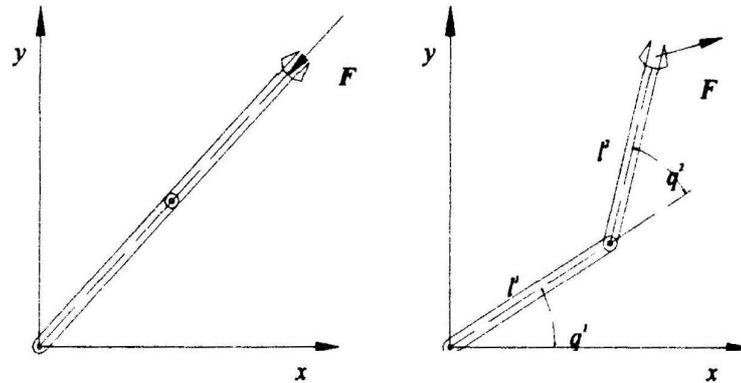


Figura 2.10: Singularidades comunes que se presentan en los manipuladores

Se puede observar que el Jacobiano juega un papel importante en las fuerzas y torques que actúan en un manipulador. Por lo tanto, se espera que configuraciones singulares den lugar a un comportamiento especial con respecto a fuerzas y torques. En una configuración singular, es decir una configuración de  $\mathbf{q}$  donde el espacio nulo del  $\mathbf{J}(\mathbf{q})$  no sea vacío, un vector  $\mathbf{F}$  en este espacio no produce ningún torque en las articulaciones. Así mismo, en una configuración singular hay direcciones en el espacio cartesiano en el cual el manipulador no puede ejercer fuerza (ver Figura 2.10).

## 2.4. Parametrización de la Orientación

Los nueve elementos  $r_{ij}$  en una transformación rotacional  $\mathbf{R} \in SO(3)$  son cantidades no independientes. De hecho, un cuerpo rígido posee como

máximo tres grados de libertad, y en consecuencia son requeridos máximo tres parámetros para especificar la orientación. Esto puede establecerse fácilmente mediante el análisis de las restricciones que gobiernan la matriz en  $SO(3)$ :

$$\sum_i r_{ij}^2 = 1, \quad j \in 1, 2, 3 \quad (2.50)$$

$$r_{1i}r_{j1} + r_{2i}r_{j2} + r_{3i}r_{j3} = 0, \quad i \neq j \quad (2.51)$$

La ecuación (2.50) viene del hecho de que las columnas de una matriz de rotación son vectores unitarios, y la ecuación (2.51) viene del hecho de que las columnas de una matriz de rotación son mutuamente ortogonales; otra forma de expresar esto es

$$\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I} \quad (2.52)$$

donde  $\mathbf{I}$  es una matriz identidad de (3x3). La transpuesta de una matriz de rotación es igual a su inversa

$$\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}. \quad (2.53)$$

Juntas, las restricciones definen seis ecuaciones independientes con nueve incógnitas, lo que implica que hay tres variables libres.

La *velocidad lineal* de un cuerpo está descrita por la derivada en el tiempo del vector de posición, *i.e.*  $\dot{\mathbf{p}}$ , mientras que la *velocidad angular*  $\mathbf{w}$  puede ser definida mediante la derivada en el tiempo de la matriz de rotación por la siguiente relación (Siciliano y Villani 1999)

$$\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{S}(\mathbf{w})\mathbf{R}, \quad (2.54)$$

donde  $\mathbf{S}(\cdot)$  es el operador que desempeña la tarea del producto cruz entre dos vectores de 3x1. Dado  $\mathbf{w} = [w_x \ w_y \ w_z]^T$ ,  $\mathbf{S}(\mathbf{w})$  toma la forma

$$\mathbf{S}(\mathbf{w}) = \begin{bmatrix} 0 & -w_z & w_y \\ w_z & 0 & -w_x \\ -w_y & w_x & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.55)$$

puede mostrarse fácilmente que  $\mathbf{S}$  es una matriz antisimétrica

$$\mathbf{S}^T(\mathbf{w}) = -\mathbf{S}(\mathbf{w}). \quad (2.56)$$

también, puede mostrarse que (Siciliano y Villani 1999)

$$\mathbf{R}\mathbf{S}(\mathbf{w})\mathbf{R}^T = \mathbf{S}(\mathbf{R}\mathbf{w}). \quad (2.57)$$

Considere ahora dos sistemas coordenados, llamados  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_2$ . Permita  ${}^0\mathbf{R}_1$  ser la matriz de rotación que expresa la orientación de  $\Sigma_1$  con respecto a un sistema de referencia, y  ${}^1\mathbf{R}_2$  la matriz de rotación que expresa la orientación de  $\Sigma_2$  con respecto a  $\Sigma_1$ . Entonces, la orientación de  $\Sigma_2$  con respecto a la base es obtenida por composición de cambios de orientación sucesivas con respecto al sistema coordenado correspondiente, *i.e.*

$${}^0\mathbf{R}_2 = {}^0\mathbf{R}_1 {}^1\mathbf{R}_2. \quad (2.58)$$

El superíndice denota el marco con respecto al cual el vector o matriz es referido. De (2.58), la *orientación mutua* entre los dos sistemas puede ser descrita por la matriz de rotación

$${}^1\mathbf{R}_2 = {}^0\mathbf{R}_1^T {}^0\mathbf{R}_2. \quad (2.59)$$

Diferenciando (2.59) con respecto al tiempo se obtiene

$$\begin{aligned} {}^1\dot{\mathbf{R}}_2 &= {}^0\mathbf{R}_1^T (\mathbf{S}^T({}^0\mathbf{w}_1) + \mathbf{S}({}^0\mathbf{w}_2)) {}^0\mathbf{R}_2 \\ &= {}^0\mathbf{R}_1^T \mathbf{S}({}^0\mathbf{w}_2 - {}^0\mathbf{w}_1) {}^0\mathbf{R}_1 {}^0\mathbf{R}_1^T {}^0\mathbf{R}_2 \\ &= \mathbf{S}(\Delta^1\mathbf{w}_{21}) {}^1\mathbf{R}_2 \end{aligned} \quad (2.60)$$

donde

$$\Delta^1\mathbf{w}_{21} = \mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_1 \quad (2.61)$$

es la velocidad angular de  $\Sigma_1$  relativa a  $\Sigma_2$ ; el operador  $\Delta$  es utilizado para denotar el vector de diferencia entre ellos.

En esta sección se explicarán dos formas de representar la orientación de un sistema de coordenadas con respecto a otro; la representación **Eje/Angulo** y la representación por medio de **cuaterniones**; la última representación fue la seleccionada para implementar el algoritmo de control.

### 2.4.1. Representación Eje/Angulo

Las rotaciones no siempre se hacen sobre los ejes coordenados principales. A veces es necesario hacer una rotación sobre un eje arbitrario en el

espacio. Esto es conveniente para describir la orientación y una alternativa para parametrizar las matrices de rotación. Se define un vector unitario  $\mathbf{k} = [k_x, k_y, k_z]^T$  que representa un eje expresado en el marco  $O_0x_0y_0z_0$ . Se desea deducir la matriz de rotación  $\mathbf{R}_{\mathbf{k},\theta}$  que representa una rotación de  $\theta$  sobre este eje. Una forma de hacer esto es

$$\mathbf{R}_{\mathbf{k},\theta} = \mathbf{R}\mathbf{R}_{z,\alpha}\mathbf{R}_{-1} \quad (2.62)$$

$$= \mathbf{R}_{z,\alpha}\mathbf{R}_{y,\beta}\mathbf{R}_{z,\theta}\mathbf{R}_{y,-\beta}\mathbf{R}_{z,-\alpha} \quad (2.63)$$

donde los angulos correspondientes  $\alpha$  y  $\beta$  se muestran en la Figura 2.11

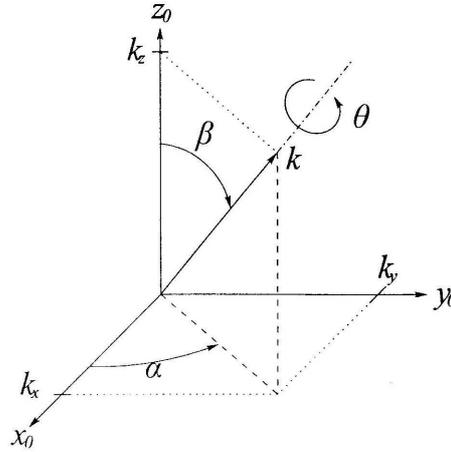


Figura 2.11: Rotación sobre un eje arbitrario

De la Figura 2.11 se puede ver que

$$\text{sen } \alpha = \frac{k_y}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}}, \quad \text{cos } \alpha = \frac{k_x}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}}, \quad (2.64)$$

$$\text{sen } \beta = \frac{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}}, \quad \text{cos } \beta = \frac{k_z}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}} \quad (2.65)$$

Nótese que las dos ultimas ecuaciones resultan del hecho de que  $\mathbf{k}$  es un vector unitario.

Cualquier matriz de rotación  $\mathbf{R} \in \mathbf{SO}(3)$  puede ser representada por una simple rotación sobre un eje conveniente en el espacio y ángulo apropiado, *i.e.*

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_{\mathbf{k},\theta} \quad (2.66)$$

donde  $\mathbf{k}$  es un vector unitario que define el eje de rotación, y  $\theta$  es el ángulo de rotación sobre  $\mathbf{k}$ . El par  $(\mathbf{k}, \theta)$  se conoce como la **Representación Eje/Ángulo** de  $\mathbf{R}$ . La matriz de rotación correspondiente a una representación *eje/ángulo* es

$$\mathbf{R}_{\mathbf{k},\theta} = \mathbf{k}\mathbf{k}^T + \cos \theta (I - \mathbf{k}\mathbf{k}^T) + \sin \theta \mathbf{S}(\mathbf{k}) \quad (2.67)$$

Dada una matriz de rotación arbitraria  $\mathbf{R}$  con componentes  $r_{ij}$  el ángulo y eje equivalentes están dados por las expresiones

$$\theta = \cos^{-1} \left( \frac{r_{11} + r_{22} + r_{33} - 1}{2} \right) \quad (2.68)$$

$$\mathbf{k} = \frac{1}{2 \sin \theta} \begin{bmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{bmatrix} \quad (2.69)$$

La representación Eje/Ángulo no es única, ya que una rotación de  $\theta$  sobre  $\mathbf{k}$  es la misma que una rotación de  $-\theta$  sobre  $-\mathbf{k}$  es decir

$$\mathbf{R}_{\mathbf{k},\theta} = \mathbf{R}_{-\mathbf{k},-\theta} \quad (2.70)$$

Si  $\theta = 0$  entonces  $\mathbf{R}$  es la matriz identidad y el eje de rotación es desconocido (una representación singular). En cambio si  $r_{11} + r_{22} + r_{33} = -1$ , entonces  $\theta = \pi$

Los tres componentes  $k_x, k_y$  y  $k_z$  del vector unitario  $\mathbf{k}$  pueden ser calculados como en (Siciliano y Villani 1999); para el caso de la primera columna de  $\mathbf{R}_{\mathbf{k},\theta}$

$$k_x = \pm \sqrt{\frac{r_{11} + 1}{2}}, \quad k_y = \frac{r_{12}}{2k_x}, \quad k_z = \frac{r_{13}}{2k_x} \quad (2.71)$$

Sin embargo, si  $k_x \approx 0$ , entonces el calculo de  $k_y$  y  $k_z$  está condicionado. En este caso, es mejor utilizar otra columna para calcularlos.

### 2.4.2. Cuaternión unitario

Los cuaterniones son un álgebra inventada por Sir William Rowan Hamilton en 1843. Originalmente fue definida como la relación de velocidad angular (cociente) entre pares de vectores en  $\mathbb{R}^3$ . Algebraicamente, el cuaternión es

una extensión de los números complejos. Su interpretación geométrica es equivalente a la parametrización de Euler en mecanismos.

Los cuaterniones (parametrización simétrica de Euler) han demostrado su utilidad para representar rotaciones. En términos de los ejes de Euler  $\mathbf{k} = [k_x, k_y, k_z]^T$  y un ángulo  $\theta$  (Parametrización Eje/Angulo) el cuaternión puede expresarse como

$$\eta = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (2.72)$$

$$\epsilon_x = k_x \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (2.73)$$

$$\epsilon_y = k_y \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (2.74)$$

$$\epsilon_z = k_z \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (2.75)$$

Formalmente, un cuaternión es un vector de la forma

$$\boldsymbol{\nu} = \eta + \epsilon_x \mathbf{i} + \epsilon_y \mathbf{j} + \epsilon_z \mathbf{k} \quad (2.76)$$

donde  $\eta$  es la componente escalar de  $\boldsymbol{\nu}$  y  $\boldsymbol{\epsilon} = [\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z]$  es el vector de componentes. Una notación abreviada es  $\boldsymbol{\Gamma} = (\eta, \boldsymbol{\epsilon})$  con  $\eta \in \mathbb{R}$ ,  $\boldsymbol{\epsilon} \in \mathbb{R}^3$ . El conjunto de cuaterniones  $\boldsymbol{\Gamma}$  es un vector de cuarta dimension, y la forma en que se representa una multiplicación entre cuaterniones es mediante la notación  $\cdot$ . La multiplicación es distributiva y asociativa, pero no conmutativa. El conjugado del cuaternión  $\boldsymbol{\Gamma} = (\eta, \boldsymbol{\epsilon})$  de  $\mathbf{R}$  que representa a la matriz  $\mathbf{R}^{-1}$  está dado por

$$\boldsymbol{\Gamma}^{-1} = (\eta, -\boldsymbol{\epsilon}) \quad (2.77)$$

El producto entre dos cuaterniones tiene una forma simple en términos del producto cruz y el producto interno entre los vectores en  $\mathbb{R}^3$ . Si  $\boldsymbol{\Gamma}_1 = (\eta_1, \boldsymbol{\epsilon}_1)$  y  $\boldsymbol{\Gamma}_2 = (\eta_2, \boldsymbol{\epsilon}_2)$  son cuaterniones, donde  $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}$  son las partes escalares de  $\boldsymbol{\Gamma}_1$  y  $\boldsymbol{\Gamma}_2$ , y  $\boldsymbol{\epsilon}_1, \boldsymbol{\epsilon}_2 \in \mathbb{R}^3$  son la parte vectorial, puede mostrarse algebraicamente que el producto de dos cuaterniones satisface

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Gamma}_1 \cdot \boldsymbol{\Gamma}_2 &= (\eta_1 \eta_2 - \boldsymbol{\epsilon}_1 \cdot \boldsymbol{\epsilon}_2, \quad \eta_1 \boldsymbol{\epsilon}_2 + \eta_2 \boldsymbol{\epsilon}_1 + \boldsymbol{\epsilon}_1 \times \boldsymbol{\epsilon}_2) \\ &= (\eta_1 \eta_2 - \boldsymbol{\epsilon}_1 \cdot \boldsymbol{\epsilon}_2, \quad \eta_1 \boldsymbol{\epsilon}_2 + \eta_2 \boldsymbol{\epsilon}_1 + S(\boldsymbol{\epsilon}_1) \boldsymbol{\epsilon}_2) \end{aligned} \quad (2.78)$$

La parametrización vía cuaternión obedece la siguiente restricción

$$\eta^2 + \epsilon_x^2 + \epsilon_y^2 + \epsilon_z^2 = 1 \quad (2.79)$$

o en forma simplificada

$$\eta^2 + \boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{\epsilon} = 1 \quad (2.80)$$

La restricción (2.80) da al cuaternión el nombre cuaternión unitario. Al igual que en la parametrización eje/ángulo, existen dos expresiones que describen la misma orientación  $(\eta, \boldsymbol{\epsilon})$  y  $(-\eta, -\boldsymbol{\epsilon})$ . Pero si el ángulo de rotación es restringido a un rango  $\theta \in [-\pi, \pi]$ , entonces el escalar  $\eta$  nunca será negativo y la representación del cuaternión es única; con lo cual se resuelve el problema de no-unicidad. Así mismo el cuaternión está libre de singularidades (Siciliano y Villani 1999).

La matriz de rotación correspondiente a un cuaternión dado, puede obtenerse mediante

$$\mathbf{R}(\eta, \boldsymbol{\epsilon}) = (\eta^2 - \boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{\epsilon})\mathbf{I} + 2\boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{\epsilon}^T + 2\eta\mathbf{S}(\boldsymbol{\epsilon}). \quad (2.81)$$

Por otro lado, el cuaternión correspondiente a una matriz de rotación es

$$\eta = \frac{1}{2}\sqrt{r_{11} + r_{22} + r_{33} + 1} \quad (2.82)$$

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \text{sgn}(r_{32} - r_{23})\sqrt{r_{11} - r_{22} - r_{33} + 1} \\ \text{sgn}(r_{13} - r_{31})\sqrt{r_{22} - r_{33} - r_{11} + 1} \\ \text{sgn}(r_{21} - r_{12})\sqrt{r_{33} - r_{11} - r_{22} + 1} \end{bmatrix} \quad (2.83)$$

Supóngase que el sistema  $\boldsymbol{\Sigma}_1$  rota instantáneamente con una velocidad angular  $\mathbf{w}$  sobre  $\boldsymbol{\Sigma}_0$ . Entonces, el cuaternión unitario  $\boldsymbol{\Sigma} = (\eta, \boldsymbol{\epsilon})$  que representa  $\boldsymbol{\Sigma}_1$  relativo a  $\boldsymbol{\Sigma}_0$  evoluciona en el tiempo conforme a la siguiente ecuación diferencial (Joseph y Yuan 1988)

$$\begin{bmatrix} \dot{\eta} \\ \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{w}^T \\ \mathbf{w} & \mathbf{S}(\mathbf{w}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta \\ \boldsymbol{\epsilon} \end{bmatrix} \quad (2.84)$$

Es decir, la relación entre la derivada temporal del cuaternión y la velocidad angular de un cuerpo se establece mediante la así llamada regla de propagación

$$\dot{\eta} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{\epsilon}^T \mathbf{w} \quad (2.85)$$

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \frac{1}{2}\mathbf{E}(\eta, \boldsymbol{\epsilon})\mathbf{w}, \quad (2.86)$$

donde

$$\mathbf{E}(\eta, \boldsymbol{\epsilon}) = \eta \mathbf{I} - \mathbf{S}(\boldsymbol{\epsilon}) \quad (2.87)$$

Para referirse al problema de describir la orientación mutua entre dos sistemas coordenados,

$$\mathbf{\Gamma}_{21} = (\eta_{21}, {}^1\boldsymbol{\epsilon}_{21}) \quad (2.88)$$

representa el cuaternión que es extraído directamente de  ${}^1\mathbf{R}_2$ . Nótese que la parte vectorial del cuaternión es la misma cuando nos referimos a  $\boldsymbol{\Sigma}_2$ , *i.e.*  ${}^1\boldsymbol{\epsilon}_{21} = {}^2\boldsymbol{\epsilon}_{21}$ .

La ecuación (2.58) puede expresarse en forma de cuaternión como

$$\mathbf{\Gamma}_2 = \mathbf{\Gamma}_1 \cdot \mathbf{\Gamma}_{21} \quad (2.89)$$

donde  $(\eta_2, \boldsymbol{\epsilon}_2)$  se obtienen usando (2.82 y 2.83), y la expresión de la orientación mutua entre dos sistemas como en (2.59) puede ser calculado como

$$\mathbf{\Gamma}_{21} = \mathbf{\Gamma}_1^{-1} \cdot \mathbf{\Gamma}_2. \quad (2.90)$$

Usando (2.77) y (2.89), el par  $(\eta_{21}, \boldsymbol{\epsilon}_{21})$  representa el error de orientación (Siciliano y Villani 1999).

$$\eta_{21} = \delta\eta = \eta_1\eta_2 + \boldsymbol{\epsilon}_1^T \boldsymbol{\epsilon}_2 \quad (2.91)$$

$$\boldsymbol{\epsilon}_{21} = \delta\boldsymbol{\epsilon} = \eta_1\boldsymbol{\epsilon}_2 - \eta_2\boldsymbol{\epsilon}_1 - \mathbf{S}(\boldsymbol{\epsilon}_1)\boldsymbol{\epsilon}_2 \quad (2.92)$$

donde el par  $(\delta\eta, \delta\boldsymbol{\epsilon})$  es la orientación relativa entre los marcos de referencia  $\boldsymbol{\Sigma}_1$  y  $\boldsymbol{\Sigma}_2$ ; si  $\boldsymbol{\Sigma}_1$  y  $\boldsymbol{\Sigma}_2$  denotaran la orientación deseada y actual relativa a la base del manipulador, entonces las ecuaciones (2.91) y (2.92) pueden interpretarse como un error de orientación. Cuando los dos marcos coinciden,  $\eta_1 = \eta_2$  y  $\boldsymbol{\epsilon}_1 = \boldsymbol{\epsilon}_2$ , se obtiene de la ecuación (2.80) que

$$\delta\eta = 1 \quad \delta\boldsymbol{\epsilon} = 0. \quad (2.93)$$

recíprocamente a  $\delta\boldsymbol{\epsilon} = 0$ ,

$$\eta_1\boldsymbol{\epsilon}_2 - \eta_2\boldsymbol{\epsilon}_1 = \mathbf{S}(\boldsymbol{\epsilon}_1)\boldsymbol{\epsilon}_2 \quad (2.94)$$

pero el vector  $\eta_1 \boldsymbol{\epsilon}_2 - \eta_2 \boldsymbol{\epsilon}_1$  y  $\mathcal{S}(\boldsymbol{\epsilon}_1) \boldsymbol{\epsilon}_2$  son ortogonales entre si. De esta manera, la ecuación (2.94) sólo puede ser válida si ambos vectores son cero; en otras palabras,

$$\boldsymbol{\epsilon}_2 = \frac{\eta_2}{\eta_1} \boldsymbol{\epsilon}_1. \quad (2.95)$$

Además, por medio de la condición de norma de la ecuación (2.80),  $\delta \boldsymbol{\epsilon} = 0$  implica

$$\delta \eta = \eta_1 \eta_2 + \boldsymbol{\epsilon}_1^T \boldsymbol{\epsilon}_2 = \pm 1. \quad (2.96)$$

Sustituyendo (2.95) en (2.96) y haciendo uso de la normalidad de  $(\eta_1, \boldsymbol{\epsilon}_1)$ , se obtiene

$$(\eta_1, \boldsymbol{\epsilon}_1) = (\pm \eta_2, \pm \boldsymbol{\epsilon}_2), \quad (2.97)$$

donde ambos describen la misma orientación.

Ahora puede establecerse que  $\delta \boldsymbol{\epsilon}$  es de hecho una representación lógica para el error de orientación entre dos sistemas coordenados (Joseph y Yuan 1988).

La regla de propagación (2.85) y (2.86) para el cuaternión unitario (2.88) puede escribirse como

$$\dot{\eta}_{21} = -\frac{1}{2} \boldsymbol{\epsilon}_{21}^T \Delta^1 \boldsymbol{w}_{21} \quad (2.98)$$

$${}^1 \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{21} = \frac{1}{2} \boldsymbol{E}(\eta_{21}, {}^1 \boldsymbol{\epsilon}_{21}) \Delta^1 \boldsymbol{w}_{21} \quad (2.99)$$

con  $\boldsymbol{E}$  definido como en (2.87) (Siciliano y Villani 1999).

---

## Ley de Control

### 3.1. Modelo del robot

Considérese un robot rígido de  $n$ -grados de libertad (DOF) en contacto con su entorno, representado por una restricción de dimensión  $m$ . La dinámica del sistema está dada por (Parra-Vega *et al.* 2001):

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} - \mathbf{J}_\varphi^T(\mathbf{q})\boldsymbol{\lambda}, \quad (3.1)$$

donde  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$  es el vector de coordenadas articulares generalizadas,  $\mathbf{H}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la matriz de inercia definida simétrica positiva,  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$  es el vector de coriolis y fuerzas centrífugas,  $\mathbf{g}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^n$  es el vector de fuerzas gravitacionales,  $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la matriz diagonal semidefinida positiva de los coeficientes de fricción viscosa de las articulaciones,  $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^n$  es el vector de torque que actúa sobre las articulaciones, y  $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^m$  es el vector de multiplicadores de Lagrange (representación de la fuerza aplicada sobre un punto de contacto).  $\mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q}) = \nabla\varphi(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$  es asumida de rango completo es este trabajo.  $\nabla\varphi(\mathbf{q})$  denota el gradiente del vector de superficie  $\varphi \in \mathbb{R}^m$  que mapea un vector al plano normal del plano tangente que surge en el punto

de contacto descrito por:

$$\varphi(\mathbf{q}) = \mathbf{0}. \quad (3.2)$$

Nótese que la ecuación (3.2) significa que las restricciones consideradas son homogéneas (Parra-Vega *et al.* 2001). El valor propio máximo (mínimo) de una matriz se denota por  $\lambda_{\max}(\cdot)$  ( $\lambda_{\min}(\cdot)$ ). La norma de un vector  $\mathbf{x}$  de dimensión  $n \times 1$  está definida por  $\|\mathbf{x}\| \triangleq \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{x}}$ , mientras que la norma de una matriz  $\mathbf{A}$  de dimensión  $m \times n$  es la correspondiente norma inducida  $\|\mathbf{A}\| \triangleq \sqrt{\lambda_{\max}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})}$ . Tomando en cuenta que se consideran articulaciones de revolución, las siguientes propiedades pueden ser establecidas (Gudiño Lau *et al.* 2004):

**Propiedad 3.1.1** *Se satisface  $\lambda_h \|\mathbf{x}\|^2 \leq \mathbf{x}^T \mathbf{H}(\mathbf{q}) \mathbf{x} \leq \lambda_H \|\mathbf{x}\|^2 \quad \forall \mathbf{q}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  y  $0 < \lambda_h \leq \lambda_H < \infty$ , con  $\lambda_h \triangleq \min_{\forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n} \lambda_{\min}(\mathbf{H}(\mathbf{q}))$ ,  $\lambda_H \triangleq \max_{\forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n} \lambda_{\max}(\mathbf{H}(\mathbf{q}))$ .*  $\triangle$

**Propiedad 3.1.2** *Mediante el uso de símbolos de Christoffel (de la primera clase) para calcular  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ ,  $\dot{\mathbf{H}}(\mathbf{q}) - 2\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  antisimétrica.*  $\triangle$

**Propiedad 3.1.3** *Se satisface que  $\|\mathbf{C}(\mathbf{q}, \mathbf{x})\| \leq k_c \|\mathbf{x}\|$  con  $0 < k_c < \infty$ ,  $\forall \mathbf{x}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ .*  $\triangle$

**Propiedad 3.1.4** *Con una definición apropiada de los parámetros del modelo del robot, se satisface que*

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) &= \boldsymbol{\tau} - \mathbf{J}_{\varphi}^T(\mathbf{q})\boldsymbol{\lambda} \\ &= \mathbf{Y}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})\boldsymbol{\varphi} - \mathbf{J}_{\varphi}^T(\mathbf{q})\boldsymbol{\lambda}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

donde  $\mathbf{Y}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{n \times p}$  es el regresor y  $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbb{R}^p$  es un vector de parámetros constante.  $\triangle$

Considérese a continuación la conocida relación:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{a}} \\ \dot{\boldsymbol{\phi}} \end{bmatrix} = \mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}, \quad (3.4)$$

donde  $\mathbf{J}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es el Jacobiano analítico o el geométrico,  $\boldsymbol{\phi} \in \mathbb{R}^\nu$  es una representación mínima de la orientación del efector final para el primer caso, ó  $\boldsymbol{\omega} = \dot{\boldsymbol{\phi}} \in \mathbb{R}^\nu$  es la velocidad angular del efector final para el segundo caso, mientras que  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{(n-\nu)}$  es la posición del efector final. Usualmente,  $n = 6$  y  $\nu = 3$ . Siempre que el robot no se encuentre en una singularidad, también se tiene la siguiente relación:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{x}}. \quad (3.5)$$

**Suposición 3.1.1** *El robot no se encuentra en una singularidad.*  $\triangle$

Bajo la suposición (3.1.1) el diseño de la ley de control es más simple. Está suposición puede ser removida como se explica en Arteaga-Pérez *et al.* (2006). Nótese que en (3.5) se supone implícitamente que el robot no es redundante, para tener una matriz cuadrada. Se quiere diseñar una ley de control de fuerza donde la tarea deseada esté directamente dada en las coordenadas del espacio de trabajo. Para hacer esto se supone que se puede reescribir la restricción (3.2) en coordenadas cartesianas, *i. e.*

$$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}. \quad (3.6)$$

Entonces

$$\mathbf{J}_{\varphi\mathbf{x}} = \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}, \quad (3.7)$$

significa que

$$\mathbf{J}_{\varphi}(\mathbf{q}) = \mathbf{J}_{\varphi\mathbf{x}}\mathbf{J}(\mathbf{q}). \quad (3.8)$$

Reescribiendo (3.1) como:

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} - \mathbf{J}^T(\mathbf{q})\mathbf{J}_{\varphi\mathbf{x}}^T\boldsymbol{\lambda}. \quad (3.9)$$

se pueden plantear otras propiedades.

**Propiedad 3.1.5** *El vector  $\dot{\mathbf{x}}$  puede ser escrito como:*

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Q}_x(\mathbf{x})\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{P}_x(\mathbf{x})\dot{\mathbf{x}}, \quad (3.10)$$

con  $\mathbf{Q}_x(\mathbf{x}) \triangleq (\mathbf{I}_{n \times n} - \mathbf{P}_x(\mathbf{x}))$ ,  $\mathbf{P}_x(\mathbf{x}) \triangleq \mathbf{J}_{\varphi_x}^+ \mathbf{J}_{\varphi_x}$  y  $\mathbf{J}_{\varphi_x}^+ \triangleq \mathbf{J}_{\varphi_x}^T (\mathbf{J}_{\varphi_x} \mathbf{J}_{\varphi_x}^T)^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times m}$  de la pseudoinvertiva de Penrose y  $\mathbf{Q}_x \in \mathbb{R}^{n \times n}$  satisface que el rango  $(\mathbf{Q}_x) = n - m$ . Estas dos matrices son ortogonales, i. e.  $\mathbf{Q}_x \mathbf{P}_x = \mathbf{0}$  (y de hecho,  $\mathbf{Q}_x \mathbf{J}_{\varphi_x}^T = \mathbf{0}$  y  $\mathbf{J}_{\varphi_x} \mathbf{Q}_x = \mathbf{0}$ ). Alternativamente, (3.10) puede escribirse como:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Q}_x(\mathbf{x})\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{J}_{\varphi_x}^+ \dot{\mathbf{p}}, \quad (3.11)$$

donde  $\dot{\mathbf{p}} \triangleq \mathbf{J}_{\varphi_x} \dot{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^m$  se conoce como la restricción de velocidad. Además, de la restricción (3.6) se puede observar que si está se cumple

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{0} \quad \text{y} \quad \mathbf{p} = \mathbf{0}. \quad (3.12)$$

Nótese que  $\mathbf{p} = \varphi(\mathbf{x})$  y estas son las llamadas restricciones de posición. Cabe hacer notar que el diseño de este algoritmo de control asume que el robot nunca pierde contacto perpendicular con la superficie asumida rígida, por lo que la ecuación anterior puede ser satisfecha.  $\triangle$

Ahora bien, cuando un robot manipulador está en contacto con su entorno, el modelo del mismo puede ser escrito como (Siciliano y Villani 1999):

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} - \mathbf{J}^T(\mathbf{q})\mathbf{f}_e, \quad (3.13)$$

donde  $\mathbf{f}_e \in \mathbb{R}^n$  es el vector de torques y fuerzas externas. Comparando con (3.9) se puede obtener:

$$\mathbf{f}_e = \mathbf{J}_{\varphi_x}^T \boldsymbol{\lambda}. \quad (3.14)$$

Nótese que  $\mathbf{P}_x \mathbf{f}_e = \mathbf{f}_e$  y  $\mathbf{Q}_x \mathbf{f}_e = \mathbf{0}$ . Un modelo bastante simple para representar el vector de fuerza-torque es:

$$\mathbf{f}_e = k_s \mathbf{P}_x (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \quad (3.15)$$

donde  $k_s > 0$  es el coeficiente de rigidez, y  $\mathbf{x}_0$  es la posición de la superficie de apoyo.

**Suposición 3.1.2** *La superficie de contacto es plana, por lo tanto la matriz  $J_{\varphi_x}$  es constante.*  $\triangle$

Una consecuencia directa de la suposición 3.1.2 es que las matrices  $Q_x$  and  $P_x$  son constantes también. Se asume esto para simplificar el diseño del controlador-observador, pero es posible relajar la suposición mediante un análisis de estabilidad local. Puesto que el análisis de estabilidad se vuelve demasiado complejo, se ha preferido mostrar que el esquema de control también puede emplearse en superficies curvas mediante experimentos con una esfera como restricción.

Cabe mencionar que la restricción holónomica juega un papel muy importante debido a que, si se calcula adecuadamente, es posible saber que debe satisfacer la trayectoria del robot para garantizar que el manipulador permanecerá en contacto con la superficie del objeto.

### 3.2. Diseño del Controlador-Observador de Fuerza

Para diseñar la ley de control, primero se considera una variable auxiliar  $\mathbf{x}_a$ , que permita definir el error de seguimiento como:

$$\Delta \mathbf{x} \triangleq \mathbf{x} - \mathbf{x}_a, \quad (3.16)$$

donde se asume que  $\mathbf{x}_a$  y su primera derivada  $\dot{\mathbf{x}}_a$  están acotadas. Por el momento, se puede pensar en  $\mathbf{x}_a$  como el valor deseado de  $\mathbf{x}$ . Por otro lado, suponga que las mediciones de velocidad no están disponibles. Entonces, un estimado de  $\mathbf{x}$  está dado por  $\hat{\mathbf{x}}$ , y se puede definir el error de observación como

$$\mathbf{z} \triangleq \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}. \quad (3.17)$$

Finalmente, como en Arteaga-Pérez *et al.* (2006), se define una variable de error auxiliar

$$\bar{\mathbf{x}} \triangleq \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_a. \quad (3.18)$$

El error de fuerza está dado por:

$$\Delta \boldsymbol{\lambda} \triangleq \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_d, \quad (3.19)$$

donde  $\lambda_d \in \mathbb{R}^m$  es el valor de fuerza deseada. A continuación se define la variable deslizante:

$$\mathbf{s} \triangleq \mathbf{Q}_x (\dot{\hat{\mathbf{x}}} + \Lambda_x \bar{\mathbf{x}}) + \mathbf{J}_{\varphi_x}^+ \boldsymbol{\xi}_2 \Delta \mathbf{F} \triangleq \mathbf{s}_p + \mathbf{s}_f, \quad (3.20)$$

donde  $\Lambda_x \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y  $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2 \in \mathbb{R}^{m \times m}$  son matrices positivas definidas y

$$\Delta \mathbf{F} = \int_0^t \Delta \lambda d\vartheta. \quad (3.21)$$

El diseño se basa en hacer que  $\mathbf{s}$  tienda a cero. Antes que nada, nótese que  $\mathbf{s}_p$  y  $\mathbf{s}_f$  son vectores ortogonales, y que  $\mathbf{P}_x \mathbf{J}_{\varphi_x}^+ = \mathbf{J}_{\varphi_x}^+$ . Entonces, tanto  $\mathbf{s}_p$  como  $\mathbf{s}_f$  tienen que ser cero si  $\mathbf{s}$  lo es. En este caso, ya que  $\mathbf{J}_{\varphi_x}^T$  se supone que es de rango completo, también lo es  $\mathbf{J}_{\varphi_x}^+$ , y se tiene que si:

$$\mathbf{s} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta \mathbf{F} = \mathbf{0}, \quad (3.22)$$

porque  $\boldsymbol{\xi}_2$  es una matriz definida positiva. Por otro lado, que el factor de  $\mathbf{s}_p$  tienda a cero no implica necesariamente que  $\dot{\hat{\mathbf{x}}}$  y  $\Lambda_x \bar{\mathbf{x}}$  hagan también lo mismo. Para garantizar esto, el observador tiene que ser diseñado apropiadamente. Primero, si se consideran nuevamente las ecuaciones (3.10)–(3.12) y la suposición 3.1.2 se tiene que  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Q}_x \dot{\hat{\mathbf{x}}}$ ; pero en general se tiene

$$\mathbf{x} = \mathbf{Q}_x \mathbf{x} + \mathbf{P}_x \mathbf{x}, \quad (3.23)$$

con  $\mathbf{P}_x \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  en general. Esto significa que la parte del vector  $\mathbf{x}$  en el espacio dado por  $\mathbf{P}_x$  es constante. Entonces,  $\mathbf{x}_a$  tiene que ser elegida para satisfacer

$$\mathbf{x}_a = \mathbf{Q}_x \mathbf{x}_a + \mathbf{P}_x \mathbf{x}_a \equiv \mathbf{Q}_x \mathbf{x}_a + \mathbf{P}_x \mathbf{x} \quad (3.24)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_a = \mathbf{Q}_x \dot{\mathbf{x}}_a. \quad (3.25)$$

por otro lado, para la variable estimada  $\hat{\mathbf{x}}$  se tiene:

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{Q}_x \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{P}_x \hat{\mathbf{x}} \quad (3.26)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{Q}_x \dot{\hat{\mathbf{x}}} + \mathbf{P}_x \dot{\hat{\mathbf{x}}}. \quad (3.27)$$

El observador tiene que ser diseñado para cumplir con  $\mathbf{P}_x \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{P}_x \mathbf{x}$  asintóticamente y de esta manera  $\mathbf{P}_x \dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{0}$ . Para lograr este objetivo, se

propone

$$\hat{\mathbf{x}} = \int_0^t \dot{\hat{\mathbf{x}}} d\vartheta + \mathbf{P}_x \mathbf{x} \quad (3.28)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{Q}_x \left( \dot{\mathbf{x}}_a - \mathbf{\Lambda}_x \bar{\mathbf{x}} + k_d \mathbf{\Lambda}_z \int_0^t \mathbf{z}(\vartheta) d\vartheta + \mathbf{\Lambda}_z \mathbf{z} + k_d \mathbf{z} \right), \quad (3.29)$$

donde  $\mathbf{\Lambda}_z \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz diagonal positiva definida y  $k_d$  es una constante positiva. Obviamente,  $\mathbf{P}_x \dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{0}$  en vista de (3.29), pero, puesto que  $\mathbf{Q}_x$  y  $\mathbf{P}_x$  son constantes de acuerdo con la suposición (3.1.2), entonces se tiene que:

$$\int_0^t \dot{\hat{\mathbf{x}}} d\vartheta = \int_0^t \mathbf{Q}_x \dot{\hat{\mathbf{x}}} d\vartheta = \mathbf{Q}_x \int_0^t \dot{\hat{\mathbf{x}}} d\vartheta. \quad (3.30)$$

Para calcular (3.30), se hace uso del hecho de que  $\mathbf{Q}_x \mathbf{Q}_x = \mathbf{Q}_x$ . Esto significa que el primer término de la derecha de (3.28) está sólo en el espacio abarcado por  $\mathbf{Q}_x$ , lo cual significa que la parte del vector de estimación  $\hat{\mathbf{x}}$  está en el espacio expandido por  $\mathbf{P}_x$ , que es lo que se estaba buscando. Nótese que al ser  $\mathbf{Q}_x$  y  $\mathbf{P}_x$  constantes es en realidad inútil multiplicar (3.29) por  $\mathbf{Q}_x$ . La razón es que la integral de cualquier variable que pertenece al espacio expandido por  $\mathbf{Q}_x$ , está también en este espacio, como se mostró en (3.30) para  $\dot{\hat{\mathbf{x}}}$ . Por otro lado, ya que  $\mathbf{P}_x \mathbf{x} = \mathbf{P}_x \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{P}_x \mathbf{x}_a$ , se obtiene

$$\mathbf{z} = \mathbf{Q}_x \mathbf{z} \quad (3.31)$$

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{Q}_x \bar{\mathbf{x}}. \quad (3.32)$$

En otras palabras  $\mathbf{P}_x \mathbf{z} = \mathbf{P}_x \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ . Ya que  $\mathbf{Q}_x \dot{\mathbf{x}}_a = \dot{\mathbf{x}}_a$ ,  $\dot{\hat{\mathbf{x}}}$  está siempre en  $\mathbf{Q}_x$ . Nótese que de hecho se tiene también

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{Q}_x \dot{\mathbf{z}} \quad (3.33)$$

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}} = \mathbf{Q}_x \dot{\bar{\mathbf{x}}}. \quad (3.34)$$

A continuación, supóngase que se tiene  $\mathbf{Q}_x \mathbf{\Lambda}_x = \mathbf{\Lambda}_x \mathbf{Q}_x$  (esto puede ser fácilmente conseguido si se hace  $\mathbf{\Lambda}_x = k_x \mathbf{I}$ , con  $k_x > 0$ ). Entonces,  $\mathbf{s}_p$  en (3.20) puede ser reescrita como:

$$\mathbf{s}_p = \mathbf{Q}_x (\dot{\hat{\mathbf{x}}} + \mathbf{\Lambda}_x \bar{\mathbf{x}}) = \dot{\hat{\mathbf{x}}} + \mathbf{\Lambda}_x \bar{\mathbf{x}}. \quad (3.35)$$

De (3.35) se puede concluir que  $\bar{\mathbf{x}}$  y  $\dot{\bar{\mathbf{x}}}$  tienden a cero si  $\mathbf{s}_p$  tiende a cero, *i. e.* si  $\mathbf{s}$  tiende a cero.

Mostrar que  $\bar{\mathbf{x}}$  y  $\dot{\bar{\mathbf{x}}}$  tienden a cero si  $\mathbf{s}$  lo hace, puede ser interesante, pero esto no es la meta principal, sino que  $\Delta\mathbf{x}$ ,  $\Delta\dot{\mathbf{x}}$ ,  $\mathbf{z}$  y  $\dot{\mathbf{z}}$  también tienden a cero. Esto tiene que llevarse a cabo diseñando el controlador apropiadamente. Considere la siguiente definición:

$$\dot{\mathbf{x}}_r = \mathbf{Q}_x (\dot{\mathbf{x}}_a - \Lambda_x \bar{\mathbf{x}}) - \mathbf{J}_{\varphi_x}^+ \boldsymbol{\xi}_2 \Delta \mathbf{F} + \mathbf{s}_d - \mathbf{K}_\gamma \boldsymbol{\sigma}, \quad (3.36)$$

dónde  $\mathbf{K}_\gamma \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz diagonal definida positiva y  $\boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{R}^n$ , con:

$$\mathbf{s}_d = \mathbf{s}(0) e^{-k_1 t} \quad (3.37)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \int_0^t \{ \mathbf{K}_\beta \mathbf{s}_1(\vartheta) + \text{sign}(\mathbf{s}_1(\vartheta)) \} d\vartheta \quad \boldsymbol{\sigma}(0) = \mathbf{0} \quad (3.38)$$

$$\mathbf{s}_1 = \mathbf{s} - \mathbf{s}_d, \quad (3.39)$$

donde  $\mathbf{K}_\beta \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz diagonal definida positiva,  $k_1$  es una constante positiva, y

$$\text{sign}(\mathbf{s}_1) \triangleq [\text{sign}(s_{11}) \quad \cdots \quad \text{sign}(s_{1n})]^T, \quad (3.40)$$

con  $s_{1i}$  elementos de  $\mathbf{s}_1$ ,  $i = 1, \dots, n$ . El significado de  $\mathbf{s}_d \in \mathbb{R}^n$  se explica detalladamente en Arteaga-Pérez *et al.* (2006). Como se señala en la referencia, esta función puede ser fijada en cero sin afectar el análisis de estabilidad, porque se usa sólo para mejorar el desempeño transitorio. Alternativamente a (3.38) puede usarse

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{K}_\beta \mathbf{s}_1 + \text{sign}(\mathbf{s}_1). \quad (3.41)$$

Entonces, considérense las siguientes definiciones:

$$\mathbf{s}_x \triangleq \dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{x}}_r = \mathbf{Q}_x (\Delta\dot{\mathbf{x}} + \Lambda_x \bar{\mathbf{x}}) + \mathbf{J}_{\varphi_x}^+ \boldsymbol{\xi}_2 \Delta \mathbf{F} - \mathbf{s}_d + \mathbf{K}_\gamma \boldsymbol{\sigma} \quad (3.42)$$

$$\mathbf{s}_r \triangleq \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_r = \mathbf{J}_x^{-1}(\mathbf{q}) (\dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{x}}_r) = \mathbf{J}_x^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{s}_x. \quad (3.43)$$

El siguiente paso es reescribir la dinámica del robot (3.9) en términos de  $\mathbf{s}_r$  como sigue:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} - \mathbf{J}^T(\mathbf{q}) \mathbf{J}_{\varphi_x}^T \boldsymbol{\lambda} &= \mathbf{H}(\mathbf{q}) (\dot{\mathbf{s}}_r + \ddot{\mathbf{q}}_r) + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) (\mathbf{s}_r + \dot{\mathbf{q}}_r) \\ &+ \mathbf{D}(\mathbf{s}_r + \dot{\mathbf{q}}_r) + \mathbf{g}(\mathbf{q}), \end{aligned} \quad (3.44)$$

o

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{s}}_r + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{s}_r + \mathbf{D}\mathbf{s}_r = \boldsymbol{\tau} - \mathbf{J}^T(\mathbf{q})\mathbf{J}_{\varphi_x}^T\boldsymbol{\lambda} - \mathbf{Y}_a\boldsymbol{\varphi}, \quad (3.45)$$

donde

$$\mathbf{Y}_a\boldsymbol{\varphi} \triangleq \mathbf{Y}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}_r, \ddot{\mathbf{q}}_r)\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{g}(\mathbf{q}). \quad (3.46)$$

Antes de definir la ley de control, considérense las variables auxiliares:

$$\dot{\mathbf{x}}_o \triangleq \dot{\hat{\mathbf{x}}} - \boldsymbol{\Lambda}_z\mathbf{z} \quad (3.47)$$

$$\mathbf{r} \triangleq \dot{\hat{\mathbf{x}}} - \dot{\mathbf{x}}_o = \dot{\mathbf{z}} + \boldsymbol{\Lambda}_z\mathbf{z} \quad (3.48)$$

$$\mathbf{s}_o \triangleq \dot{\mathbf{x}}_o - \dot{\mathbf{x}}_r. \quad (3.49)$$

Entonces, la ley de control propuesta está dada por:

$$\boldsymbol{\tau} = -\mathbf{K}_p\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{s}_o + \mathbf{J}^T(\mathbf{q})\mathbf{J}_{\varphi_x}^T\boldsymbol{\lambda}_d - \mathbf{J}^T(\mathbf{q})\mathbf{J}_{\varphi_x}^T\boldsymbol{\xi}_1\Delta\mathbf{F}, \quad (3.50)$$

con  $\mathbf{K}_p \in \mathbb{R}^{n \times n}$  una matriz definida positiva. Sustituyendo (3.50) en (3.45) y tomando en cuenta que  $\mathbf{s}_o = \mathbf{s}_x - \mathbf{r}$ , se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{s}}_r + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{s}_r + \mathbf{K}_{DP}\mathbf{s}_r & \quad (3.51) \\ = -\mathbf{J}^T\mathbf{J}_{\varphi_x}^T\Delta\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{K}_p\mathbf{J}^{-1}\mathbf{r} - \mathbf{J}^T\mathbf{J}_{\varphi_x}^T\boldsymbol{\xi}_1\Delta\mathbf{F} - \mathbf{Y}_a\boldsymbol{\varphi}, \end{aligned}$$

donde  $\mathbf{K}_{DP} \triangleq \mathbf{D} + \mathbf{K}_p$ . Se necesita describir la dinámica del error de observación. Para hacerlo, se reescribe (3.29) como:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} - \boldsymbol{\Lambda}_z\mathbf{Q}_x\mathbf{z} - k_d\mathbf{Q}_x\mathbf{z} = \mathbf{Q}_x(\dot{\hat{\mathbf{x}}}_a - \boldsymbol{\Lambda}_x\bar{\mathbf{x}}) + k_d\boldsymbol{\Lambda}_z\mathbf{Q}_x \int_0^t \mathbf{z}(\vartheta)d\vartheta, \quad (3.52)$$

donde se asume que  $\boldsymbol{\Lambda}_z\mathbf{Q}_x = \mathbf{Q}_x\boldsymbol{\Lambda}_z$ . Como antes, esto puede ser fijado haciendo  $\boldsymbol{\Lambda}_z = k_z\mathbf{I}$ , con  $k_z > 0$ . De (3.36), se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{x}}} - \dot{\mathbf{x}}_r & = \dot{\hat{\mathbf{x}}} - \dot{\hat{\mathbf{x}}} + \boldsymbol{\Lambda}_z\mathbf{z} + k_d\mathbf{z} + k_d\boldsymbol{\Lambda}_z \int_0^t \mathbf{z}(\vartheta)d\vartheta \quad (3.53) \\ & + \mathbf{J}_{\varphi_x}^+\boldsymbol{\xi}_2\Delta\mathbf{F} - \mathbf{s}_d + \mathbf{K}_\gamma\boldsymbol{\sigma}, \end{aligned}$$

donde se utilizan (3.31) y (3.33). Por otro lado, de (3.42) y(3.48) se obtiene

$$\mathbf{s}_x = \mathbf{r} + k_d \int_0^t \mathbf{r}(\vartheta) d\vartheta + \mathbf{J}_{\varphi_x}^+ \boldsymbol{\xi}_2 \Delta \mathbf{F} - \mathbf{s}_d + \mathbf{K}_\gamma \boldsymbol{\sigma}; \quad (3.54)$$

pero, de (3.42) se tiene

$$\mathbf{r} + k_d \int_0^t \mathbf{r}(\vartheta) d\vartheta = \mathbf{Q}_x (\Delta \dot{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\Lambda}_x \bar{\mathbf{x}}). \quad (3.55)$$

Alternativamente, también se puede escribir 3.55 como:

$$\dot{\mathbf{r}} + k_d \mathbf{r} = \mathbf{Q}_x (\Delta \ddot{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\Lambda}_x \dot{\bar{\mathbf{x}}}). \quad (3.56)$$

A continuación se puede establecer el siguiente teorema.

**Teorema 3.2.1** *Considérese una trayectoria continua y acotada  $\mathbf{x}_a$ , con primera y segunda derivadas acotadas, elegida lejos de cualquier singularidad. Entonces, para el observador (3.28)–(3.29) y la ley de control (3.50) en lazo cerrado con el sistema (3.9), una combinación apropiada de ganancias  $k_1$ ,  $k_d$ ,  $\boldsymbol{\Lambda}_x$ ,  $\boldsymbol{\Lambda}_z$ ,  $\mathbf{K}_\beta$ ,  $\mathbf{K}_\gamma$  y  $\mathbf{K}_p$  puede ser siempre encontrada, tal que las variables de las dinámicas de error dadas por (3.21), (3.51) y (3.56) están acotadas para todo tiempo y los errores de seguimiento, de fuerza y de observación  $(\Delta \mathbf{x}, \Delta \dot{\mathbf{x}}, \Delta \mathbf{F}, \Delta \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}})$  tienden a cero.  $\triangle$*

Un desarrollo matemático detallado de la demostración, así como las condiciones necesarias para las ganancias del controlador-observador son proporcionadas en el Apéndice C. Como se aclara en los comentarios de Arteaga-Pérez *et al.* (2006), la expresión “lejos de alguna singularidad” usada en el Teorema 3.2.1, para validar la suposición 3.1.1, pero esto puede ser eliminado como se explica en la referencia. Es importante señalar que una característica importante de la ley de control (3.50) es que puede ser vista como un PID no lineal. Esto lleva a concluir que  $k_d$  y  $\boldsymbol{\Lambda}_x$  tienen que ser elegida bastante grandes,  $\boldsymbol{\Lambda}_z$  puede ser escogida igual a  $\boldsymbol{\Lambda}_x$  (como un caso particular), y las otras ganancias serían pequeñas. Pruebas de acierto y error pueden ser usadas para mejorar el desempeño.

### 3.3. Uso del cuaternión unitario

Como se dijo en la sección 3.1, el Jacobiano dado en (3.4) puede ser analítico o geométrico. La definición de  $\mathbf{x}_a$  en (3.16) depende del tipo de Jacobiano escogido. Si se elige el Jacobiano analítico como en Arteaga-Pérez *et al.* (2006), entonces  $\mathbf{x}_a$  será una representación simple de posición y orientación deseada del efector final, *i. e.*

$$\mathbf{x}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_d \\ \boldsymbol{\phi}_d \end{bmatrix}. \quad (3.57)$$

$\mathbf{p}_d \in \mathbb{R}^3$  es la posición deseada y  $\boldsymbol{\phi}_d \in \mathbb{R}^3$  es el valor deseado de la representación mínima de la orientación del efector final. Nótese que para simplificar la discusión se asume que  $n = 6$ . Sin embargo, como se muestra en Siciliano y Villani (1999), cuando se trabaja con orientación es mejor utilizar el cuaternión unitario. Para hacer esto, el Jacobiano geométrico tiene que ser utilizado. En lugar de la definición  $\mathbf{x}_a$ , se define:

$$\dot{\mathbf{x}}_a = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}}_d \\ {}^0\boldsymbol{\omega}_d - \mathbf{k}_\varepsilon {}^0\mathbf{R}_d {}^d\boldsymbol{\varepsilon}_n \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

y

$$\mathbf{x}_a = \int_0^t \dot{\mathbf{x}}_a d\vartheta. \quad (3.59)$$

$\mathbf{p}_d$  es la posición deseada del efector final igual que antes,  ${}^0\boldsymbol{\omega}_d \in \mathbb{R}^3$  es la velocidad angular deseada, y  ${}^0\mathbf{R}_d \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  es la matriz de orientación entre las coordenadas del sistema deseado y las del marco de la base, *i. e.* representa la orientación deseada.  ${}^d\boldsymbol{\varepsilon}_n \in \mathbb{R}^3$  representa la parte vectorial del cuaternión asociado a la matriz de rotación dada por:

$${}^d\mathbf{R}_n = {}^0\mathbf{R}_d^T {}^0\mathbf{R}_n, \quad (3.60)$$

donde  ${}^0\mathbf{R}_n \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  es la matriz de rotación entre el efector final y el sistema de coordenadas de la base. Recuérdese que la siguiente relación debe ser satisfecha

$${}^d\eta_n^2 + {}^d\boldsymbol{\varepsilon}_n^T {}^d\boldsymbol{\varepsilon}_n = 1, \quad (3.61)$$

donde  ${}^d\eta_n \in \mathbb{R}$  es la parte escalar. El cuaternión unitario se relaciona con la representación eje/ángulo mediante

$${}^d\eta_n = \cos\left(\frac{{}^d\theta_n}{2}\right) \quad (3.62)$$

$${}^d\boldsymbol{\varepsilon}_n = \sin\left(\frac{{}^d\theta_n}{2}\right) {}^d\mathbf{r}_n, \quad (3.63)$$

donde  ${}^d\theta_n$  y  ${}^d\mathbf{r}_n$  son el ángulo y eje de rotación, respectivamente. Si  ${}^d\eta_n = +1$ , esto significa que  ${}^d\theta_n \equiv 0$ , lo que implica que el error de orientación es cero. Nótese que la posición y orientación tienen que ser elegidas de tal forma que se satisfaga (3.6), y con cuidado para evitar valores no acotados de  $\mathbf{x}_a$ . Conforme al teorema 3.2.1, se garantiza que  $\Delta\mathbf{x} \rightarrow 0$  y  $\Delta\dot{\mathbf{x}} \rightarrow 0$ . Claramente, el error de posición no necesita un análisis extra, pero hay que analizar la orientación. Considérese entonces que para un tiempo  $t$  bastante largo se puede suponer que

$$\Delta\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_a \stackrel{\Delta}{=} \mathbf{0}, \quad (3.64)$$

o bien de la parte baja del vector (3.58)

$${}^0\boldsymbol{\omega}_n - {}^0\boldsymbol{\omega}_d + k_\varepsilon {}^0\mathbf{R}_d {}^d\boldsymbol{\varepsilon}_n = \mathbf{0}. \quad (3.65)$$

Equivalentemente se tiene:

$${}^0\Delta\boldsymbol{\omega}_n + k_\varepsilon {}^0\mathbf{R}_d {}^d\boldsymbol{\varepsilon}_n = \mathbf{0}, \quad (3.66)$$

con  ${}^0\Delta\boldsymbol{\omega}_n \stackrel{\Delta}{=} {}^0\boldsymbol{\omega}_n - {}^0\boldsymbol{\omega}_d$ . Para lograr la orientación deseada con velocidad angular deseada se tiene que demostrar que  ${}^0\Delta\boldsymbol{\omega}_n \rightarrow 0$  y  ${}^d\boldsymbol{\varepsilon}_n \rightarrow 0$ . Nótese que se puede emplear cualquier marco de referencia, por lo tanto, para simplificar aún más el análisis, es conveniente hacer

$${}^0\mathbf{R}_d^{\text{T}0} \Delta\boldsymbol{\omega}_n + k_\varepsilon {}^0\mathbf{R}_d^{\text{T}0} \mathbf{R}_d {}^d\boldsymbol{\varepsilon}_n = \mathbf{0}, \quad (3.67)$$

de tal forma que se obtiene

$${}^d\Delta\boldsymbol{\omega}_n = -k_\varepsilon {}^d\boldsymbol{\varepsilon}_n. \quad (3.68)$$

Entonces, demostrar que  ${}^0\Delta\boldsymbol{\omega}_n \rightarrow 0$ , es equivalente a mostrar que  ${}^d\Delta\boldsymbol{\omega}_n \rightarrow 0$ . Además, se necesita la dinámica del comportamiento dinámico del cuaternión dada por (Siciliano y Villani 1999)

$${}^d\dot{\eta}_n = -\frac{1}{2}{}^d\boldsymbol{\varepsilon}_n^{\text{Td}}\Delta\boldsymbol{\omega}_n \quad (3.69)$$

$${}^d\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_n = \frac{1}{2}\mathbf{E}({}^d\eta_n, {}^d\boldsymbol{\varepsilon}_n){}^d\Delta\boldsymbol{\omega}_n, \quad (3.70)$$

donde

$$\mathbf{E}({}^d\eta_n, {}^d\boldsymbol{\varepsilon}_n){}^d\Delta\boldsymbol{\omega}_n = {}^d\eta_n\mathbf{I} - \mathbf{S}({}^d\boldsymbol{\varepsilon}_n) \quad (3.71)$$

$$\mathbf{S}({}^d\boldsymbol{\varepsilon}_n) = \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & -\varepsilon_z & \varepsilon_y \\ \varepsilon_z & 0 & -\varepsilon_x \\ -\varepsilon_y & \varepsilon_x & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.72)$$

$\varepsilon_x, \varepsilon_y$  y  $\varepsilon_z$  son elementos de  ${}^d\boldsymbol{\varepsilon}_n$ . El sistema dado por (3.69)–(3.70) tiene dos puntos de equilibrio  $({}^d\eta_n, {}^d\boldsymbol{\varepsilon}_n) = (+1, \mathbf{0})$  y  $({}^d\eta_n, {}^d\boldsymbol{\varepsilon}_n) = (-1, \mathbf{0})$ . Retomando (Siciliano y Villani 1999)

$${}^d\mathbf{R}_n = ({}^d\eta_n^2 - {}^d\boldsymbol{\varepsilon}_n^{\text{Td}}\boldsymbol{\varepsilon}_n)\mathbf{I} + 2{}^d\boldsymbol{\varepsilon}_n{}^d\boldsymbol{\varepsilon}_n^{\text{T}} + 2{}^d\eta_n\mathbf{S}({}^d\boldsymbol{\varepsilon}_n). \quad (3.73)$$

Se observa que si  ${}^d\boldsymbol{\varepsilon}_n = \mathbf{0}$  se tiene  ${}^d\mathbf{R}_n = \mathbf{I}$ . Pero, ya que  ${}^d\mathbf{R}_n = {}^0\mathbf{R}_d^{\text{T}0}\mathbf{R}_n$  entonces  ${}^0\mathbf{R}_d = {}^0\mathbf{R}_n$ . Así mismo, de (3.68) se tiene  ${}^d\Delta\boldsymbol{\omega}_n = \mathbf{0}$ , que al final significa, tal como se discutió antes, que  ${}^0\boldsymbol{\omega}_n = {}^0\boldsymbol{\omega}_d$ . Entonces, sólo es necesario probar que el punto de equilibrio  $(+1, \mathbf{0})$  es estable, mientras que el punto de equilibrio  $(-1, \mathbf{0})$  es inestable. Para hacer esto, se utiliza un procedimiento similar al proporcionado en Siciliano y Villani (1999). Considérese la siguiente función candidata de Lyapunov positiva definida:

$$V_q = ({}^d\eta_n - 1)^2 + {}^d\boldsymbol{\varepsilon}_n^{\text{Td}}\boldsymbol{\varepsilon}_n. \quad (3.74)$$

La derivada de  $V_q$  a lo largo de (3.69)–(3.70) puede ser fácilmente calculada como:

$$\dot{V}_q = -{}^d\eta_n{}^d\boldsymbol{\varepsilon}_n^{\text{Td}}\Delta\boldsymbol{\omega}_n + {}^d\boldsymbol{\varepsilon}_n^{\text{Td}}\Delta\boldsymbol{\omega}_n + {}^d\eta_n{}^d\boldsymbol{\varepsilon}_n^{\text{Td}}\Delta\boldsymbol{\omega}_n - {}^d\boldsymbol{\varepsilon}_n^{\text{T}}\mathbf{S}({}^d\boldsymbol{\varepsilon}_n){}^d\Delta\boldsymbol{\omega}_n. \quad (3.75)$$

ya que  ${}^d\boldsymbol{\varepsilon}_n^{\text{T}}\mathbf{S}({}^d\boldsymbol{\varepsilon}_n) = 0$ . De (3.68) finalmente se obtiene:

$$\dot{V}_q = -k_\varepsilon{}^d\boldsymbol{\varepsilon}_n^{\text{Td}}\boldsymbol{\varepsilon}_n. \quad (3.76)$$

Nótese que de (3.61),  $\bar{V}_q$  podría también ser escrita en términos de  ${}^d\eta_n$ , pero es más conveniente trabajar usando la forma dada por (3.76). Ya que  $V_q$  es negativa, si  ${}^d\boldsymbol{\varepsilon}_n = \mathbf{0}$  se tiene de (3.61)  ${}^d\eta_n = \pm 1$ . Sólo se está interesado en  ${}^d\eta_n = +1$ , debido a que de (3.62) esto significa que el error de orientación es cero. En efecto, como se muestra en Siciliano y Villani (1999),  ${}^d\eta_n = -1$  representa un punto de equilibrio inestable. Para mostrar esto, se tiene que  $V_q$  es una función decreciente ya que su derivada es negativa. Entonces, para el punto de equilibrio  $({}^d\eta_n, {}^d\boldsymbol{\varepsilon}_n) = (-1, \mathbf{0})$ ,  $V_q({}^d\eta_n, {}^d\boldsymbol{\varepsilon}_n) = V_q(-1, \mathbf{0})$  toma el valor

$$V_q(-1, \mathbf{0}) = \bar{V}_q = 4. \quad (3.77)$$

Si se considera una perturbación pequeña  $\beta > 0$ , *i. e.*  ${}^d\eta_n = -1 + \beta$ , esto es

$$V'_q(-1 + \beta, \mathbf{0}) = 4 - 2\beta. \quad (3.78)$$

Ya que  $V'_q < \bar{V}_q$  y  $V_q$  es decreciente, se puede concluir que el punto de equilibrio  $(-1, 0)$  es inestable. Por otro lado, para  $({}^d\eta_n, {}^d\boldsymbol{\varepsilon}_n) = (1, \mathbf{0})$  se tiene

$$V_q(1, \mathbf{0}) = \bar{V}_q = 0. \quad (3.79)$$

Entonces, si se introduce una perturbación pequeña  $\beta > 0$  como  ${}^d\eta_n = 1 - \beta$ , se tiene

$$V'_q(1 - \beta, \mathbf{0}) = 2\beta. \quad (3.80)$$

En este caso,  $V'_q > \bar{V}_q$  y, puesto que  $V_q$  es decreciente, se puede concluir que el punto de equilibrio  $({}^d\eta_n, {}^d\boldsymbol{\varepsilon}_n) = (1, \mathbf{0})$  es asintóticamente estable, por lo que se concluye que

$${}^0\mathbf{R}_n \rightarrow {}^0\mathbf{R}_d \quad (3.81)$$

$${}^0\Delta\boldsymbol{\omega}_n = {}^0\boldsymbol{\omega}_n - {}^0\boldsymbol{\omega}_d \rightarrow \mathbf{0}. \quad (3.82)$$

---

## Resultados experimentales

En este capítulo se presentan los resultados obtenidos al implementar el algoritmo de control propuesto en el Capítulo 3, para robots industriales que realizan seguimiento de fuerza y posición simultáneamente. Los experimentos se realizaron en el sistema robótico que se encuentra en el Laboratorio de Robótica del Edificio de Posgrado e Investigación de la Facultad de Ingeniería de la UNAM. El laboratorio cuenta con dos robots de la compañía *CR-Robotics* modelos A255 y A465, de cinco y seis grados de libertad respectivamente. En esta tesis se empleó únicamente el robot A465. Ambos robots cuentan con transductores de posición ópticos (encoders) en cada articulación, así como con sensores de fuerza de la marca *JR3* ubicados en el extremo final de los robots. Se cuenta con protectores contra choques y fuerzas excesivas. Todo el sistema está conectado a una PC por medio de una interfaz a base de tarjetas de puerto PCI. En el Apéndice A se proporciona una breve descripción del equipo experimental; para mayores detalles consultar (Castillo Sanchez 2002). Además se presentan errores de coordenadas cartesianas y articulares, observación, orientación y fuerza, y una discusión sobre los resultados.

## 4.1. Descripción de experimentos

La realización de experimentos consiste de dos pasos principales; el primero es fijar ganancias de controladores, el segundo es fijar parámetros de trayectorias y opciones de control.

### 4.1.1. Ganancias de controlador

Es el primer paso para realizar los experimentos, es definir las ganancias para el controlador-observador de movimiento restringido. Los valores utilizados de las ganancias fueron los mismos para todos los experimentos, ya que se busca que el robot pueda trabajar de forma eficiente en cualquier trayectoria programada y a diferentes inclinaciones.

La sintonización de las ganancias del controlador-observador se realizó fundamentalmente por *prueba y error*, tomando en cuenta algunas prioridades como:

1. Debido a la semejanza con Arteaga-Pérez *et al.* (2006), se utilizó como base el método propuesto en el artículo para sintonización de ganancias.

Primero considérese la ganancia  $\mathbf{K}_d$  del observador, la cual puede ser escogida muy grande debido a (C.29). Para las demás variables se propone la siguiente aproximación. Puesto que el Teorema (3.2.1) se satisface, el error de observación tiende a cero. Para un determinado tiempo  $t$ , se puede decir que  $\mathbf{z} = 0$  y  $\dot{\mathbf{z}} = 0$ , lo cual significa que  $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}$  y  $\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \dot{\mathbf{x}}$ . En este caso se puede reescribir la ley de control como:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} = & -\mathbf{K}_p \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}) \left( \underbrace{\mathbf{Q}_x \boldsymbol{\Lambda}_x \Delta \mathbf{x}}_P - \underbrace{\mathbf{K} \boldsymbol{\gamma} \boldsymbol{\sigma}}_I - \underbrace{\mathbf{Q}_x \Delta \dot{\mathbf{x}}}_D \right) \quad (4.1) \\ & + \mathbf{J}^T(\mathbf{q}) \mathbf{J}_{\varphi x}^T \boldsymbol{\lambda}_d - \mathbf{J}^T(\mathbf{q}) \mathbf{J}_{\varphi x}^T \Delta F(\boldsymbol{\xi}_1 + \boldsymbol{\xi}_2) \end{aligned}$$

De (4.1) puede concluirse que las ganancias  $\mathbf{K}_p$  y  $\mathbf{K}_\gamma$  son pequeñas, pero  $\boldsymbol{\Lambda}_x$  puede ser escogida grande. De la ecuación (3.20) se puede decir que  $\boldsymbol{\xi}_2$  debe ser pequeña ya que la variable  $\mathbf{s}$  juega un papel importante en la función *signo* de la ecuación (3.41), lo que puede causar vibraciones si llegase a tomar valores grandes.  $\boldsymbol{\xi}_1$  es ajustada a prueba y error.

2. La ganancia  $\mathbf{k}_e$  del cuaternión debe ser baja para generar una respuesta suave en la velocidad angular de referencia. Pero lo suficiente para llevarla a cero.
3.  $\mathbf{s}_d = \mathbf{s}(0)e^{-k_1(t)}$  hace que  $\mathbf{s}_1(0) = \mathbf{s}(0) - \mathbf{s}_d = 0$  en  $t = 0$  lo cual mejora la respuesta transitoria, debido a que se tiene una señal suave en  $\mathbf{s}_1$ .
4. Como un caso particular se puede elegir  $\mathbf{\Lambda}_x = \mathbf{\Lambda}_z$ , y por supuesto un método de prueba y error puede ser empleado para mejorar el desempeño.

Con base en los puntos anteriores los valores numéricos de ganancias escogidas para realizar todos los experimentos en este trabajo son los siguientes:

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_p &= \text{diag} [2.625, 1.75, 2.625, 2.625, 2, 2.625] \\
\lambda_x &= \text{diag} [46.5, 44, 47, 46.5, 44, 46.5] \\
\mathbf{K}_\gamma &= \text{diag} [0.07, 0.07, 0.07, 0.7, 0.7, 0.7] \\
\mathbf{K}_\beta &= \text{diag} [20, 19, 20, 19, 19, 19] \\
\xi_1 &= 10.7 \quad \xi_2 = 0.00001, \quad \mathbf{k}_1 = 0.01, \quad \mathbf{k}_e = 0.001,
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Las ganancias para el observador son las siguientes:

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_d &= \text{diag} [100, 100, 100, 100, 100, 100] \\
\lambda_z &= \text{diag} [45, 45, 45, 45, 45, 45]
\end{aligned} \tag{4.3}$$

#### 4.1.2. Parámetros de trayectoria, superficie y opciones de control

En esta etapa del experimento se definen los parámetros de superficie (Apéndice B), junto con la duración y características del experimento.

El parámetro más complicado de definir para la superficie es el ángulo de inclinación, que es utilizado para orientar el efector final del robot de forma perpendicular a la superficie y para calcular la pendiente  $m$  utilizada en la generación de trayectorias de posición deseada. Debido a que la ley de control propuesta parte del hecho de conocer perfectamente a la restricción física, es estrictamente necesario definir los parámetros de la restricción de la forma más precisa posible.

A continuación se presenta un ejemplo comparativo entre las mediciones físicas tomadas para un experimento y los valores calibrados utilizados como parámetros de superficie para el controlador. Físicamente, los parámetros de superficie son los siguientes:

$$Dz = 0.069[mts], \quad Dx = 0.337[mts], \quad Ix = 0.027[mts], \quad Ang \simeq 54.8^\circ, \quad (4.4)$$

y los valores calibrados de la superficie son:

$$Dz = 0.0735[mts], \quad Dx = 0.338[mts], \quad Ix = 0.031[mts], \quad Ang = 53.5^\circ \quad (4.5)$$

En la Figura 4.1 se muestran las gráficas de trayectoria X-Z de las mediciones físicas y los valores calibrados, en donde los valores calibrados tienen un mejor seguimiento de la trayectoria de aproximadamente 2mm menos; lo cual muestra la influencia que tiene la calibración de la restricción en el seguimiento de la trayectoria.

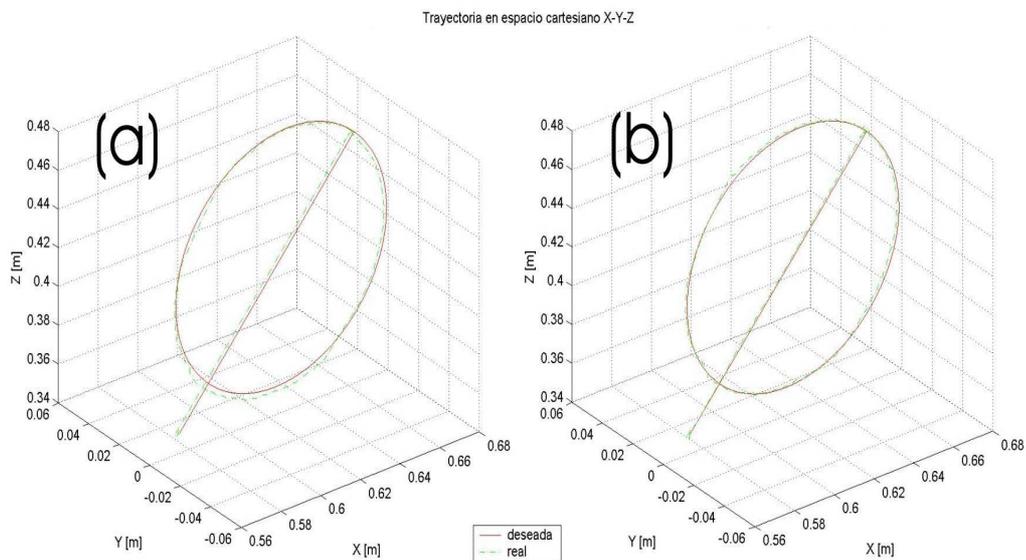


Figura 4.1: Gráficas de posición X-Z de trayectoria deseada vs real, (a) Con mediciones físicas, (b) Con mediciones calibradas.

Se contemplaron algunas opciones de trayectoria en fuerza y en posición para facilitar la conclusión de resultados. En términos de fuerza se contemplaron las siguientes opciones:

- Fuerza *constante*

$$F_d = 65[N] \quad \text{ó} \quad F_d = 10[N] \quad (4.6)$$

- Fuerza *senoidal*

$$F_d = 50 + 5 \sin(0.5t - t_p)[N] \quad (4.7)$$

donde  $t_p$  es el tiempo que tarda el robot en realizar la parte de la trayectoria comprendida en el espacio X-Z.

- Fuerza *para círculo*

$$F_d = \begin{cases} 65 - 2t[N] & \text{si } t < \frac{t_p}{3} \\ 50[N] & \text{si } \frac{t_p}{3} \leq t \leq \frac{2t_p}{3} \\ 50 + 5 \sin(0.5t - t_p)[N] & t > \frac{2t_p}{3} \end{cases} \quad (4.8)$$

Para las trayectorias de posición en 3D se utilizaron dos criterios; el primero es mediante un polinomio de quinto orden para el ángulo  $w_c$  en la ecuación (4.9) que es la parametrización de un círculo modificada para considerar condiciones iniciales en el plano Y-Z, de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} X_{a_y} &= y_c + r \cos(w_c + v) \\ X_{a_z} &= z_c + r \sin(w_c + v) \cos(\text{Ang}) \end{aligned} \quad (4.9)$$

donde  $y_c, z_c$ , es el centro del círculo,  $r$  es el radio,  $v$  es una variable auxiliar para especificar la posición inicial en la que se realiza la circunferencia, y el término  $\cos(\text{Ang})$  es utilizado para tomar en cuenta el ángulo de la pendiente.

La otra opción es utilizar un valor de cambio constante referido al tiempo; es decir, sustituir  $w_c$  por  $w * t$  con  $w$  constante en la ecuación (4.9). En adelante cuando se mencione el experimento *con trayectoria no suave* se estará hablando de ello; de otra forma se hablará de la trayectoria generada por un polinomio.

Experimento	Tiempo[s]	Tray. Posición	Tray. Fuerza
1	45	De A a B con círculo	Para círculo
2	45	De A a B con círculo	Constante en 65N
3	30	Sólo círculo suave	Senoidal
4	30	Sólo círculo no suave	Senoidal

Tabla 4.1: Experimentos para la superficie plana

## 4.2. Experimentos

Se realizaron experimentos en dos tipos de superficies, una esférica y otra plana; los experimentos se clasificaron con base en las trayectorias que se ejecutan, especificadas en la Sección 4.1.2.

Se consideró el criterio de la raíz media cuadrática del error ( $CE_{RMS}$ ) para tener un criterio matemático acerca de la magnitud del error. La siguiente es la relación empleada:

$$CE_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T e^2 dt} \quad (4.10)$$

Este es un índice de la desviación estándar del error y se utilizó para medir el desempeño de la fuerza, posición, orientación y observación, es decir, para tener una medida cuantitativa.

### 4.2.1. Superficie plana

Se contemplaron dos trayectorias. La primera es una línea recta de un punto **A** a un punto **B** y la segunda es un círculo que inicia y termina en el punto **B**, como se muestra en la Figura B.8. En la Tabla 4.1 se describen los experimentos con base en la duración y trayectorias (posición y fuerza). El experimento 1 consiste en seguir las trayectorias descritas por la Tabla 4.1 y tiene una duración de 45 segundos. En el experimento 2 se cambia la trayectoria en fuerza por un valor constante. Los experimentos 3 y 4 se utilizan para comparar la influencia que tiene la forma de generar las trayectorias sobre la ley de control. De este modo, mientras que en el experimento 3 la trayectoria es generada por un polinomio de quinto orden (ecuación B.1), en

el experimento 4 está se genera como una función constante dependiente del tiempo (ecuación 4.9)<sup>1</sup>.

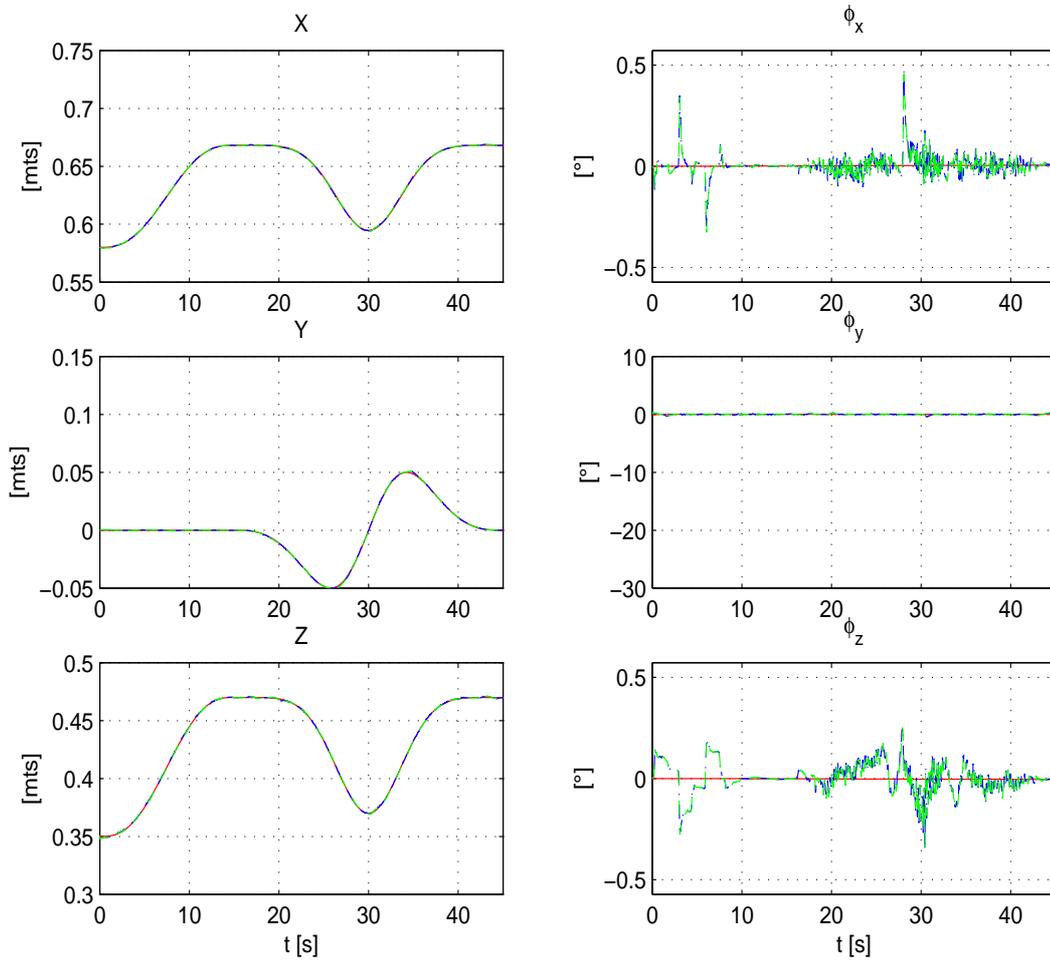


Figura 4.2: Experimento 1. Trayectoria deseada (—) vs trayectoria real (- -) vs trayectoria observada (- · -), de  $\mathbf{x}=[x \ y \ z \ \phi_x \ \phi_y \ \phi_z]^T$ .

<sup>1</sup>En los experimentos las trayectorias siguen la nomenclatura utilizada en la ecuación B.10 que define al vector  $\mathbf{x}$ .

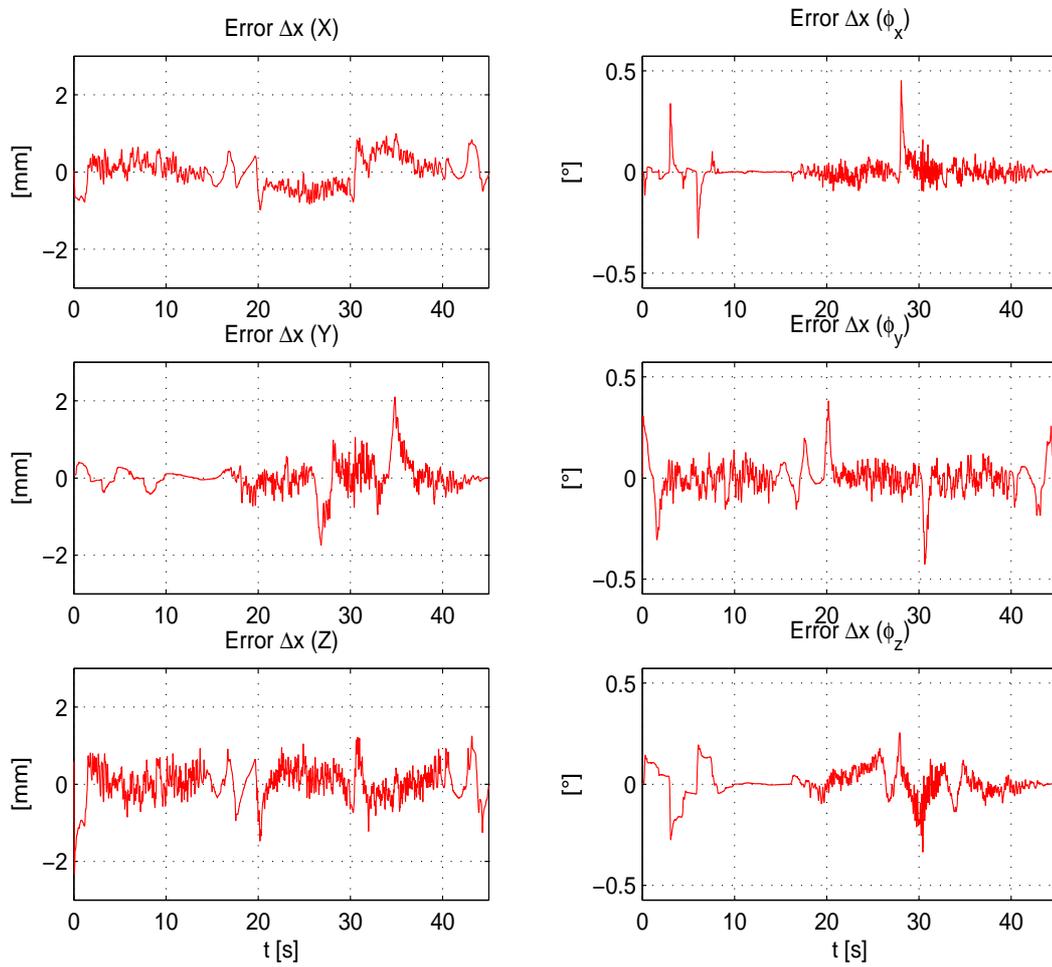


Figura 4.3: Experimento 1. Vector  $\Delta \mathbf{x}$  de error de seguimiento ( $\mathbf{x} - \mathbf{x}_a$ ).

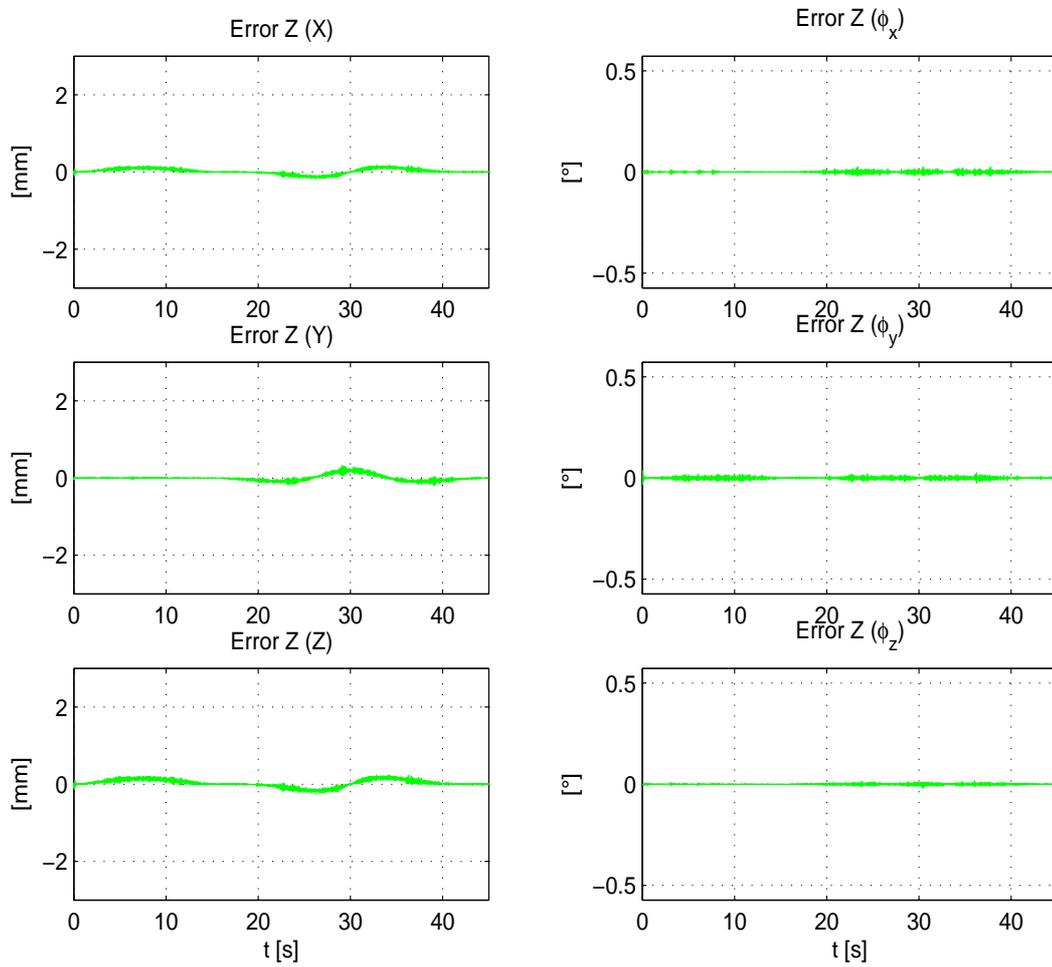


Figura 4.4: Experimento 1. Vector  $\mathbf{z}$  de error de observación ( $\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$ ).

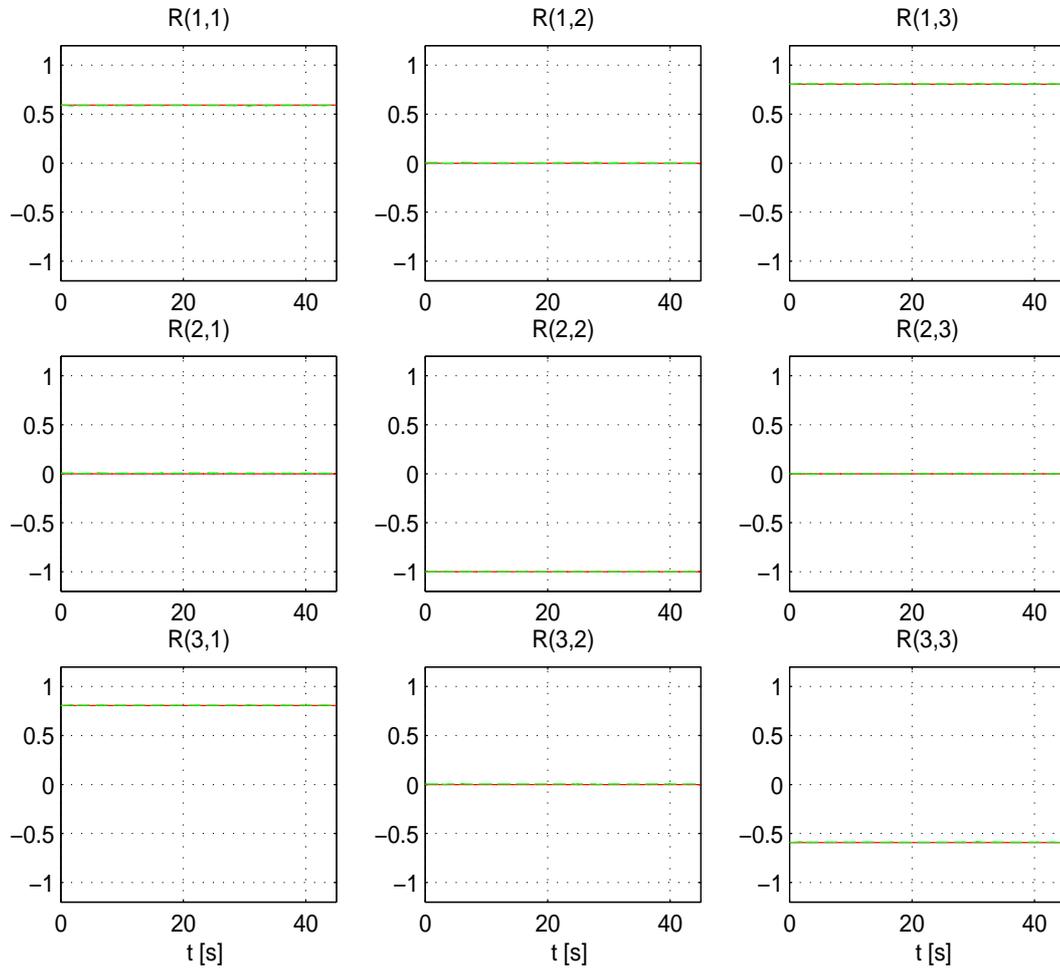


Figura 4.5: Experimento 1. Orientación deseada  ${}^0R_d$  (—) vs orientación real  ${}^0R_n$  (- -).

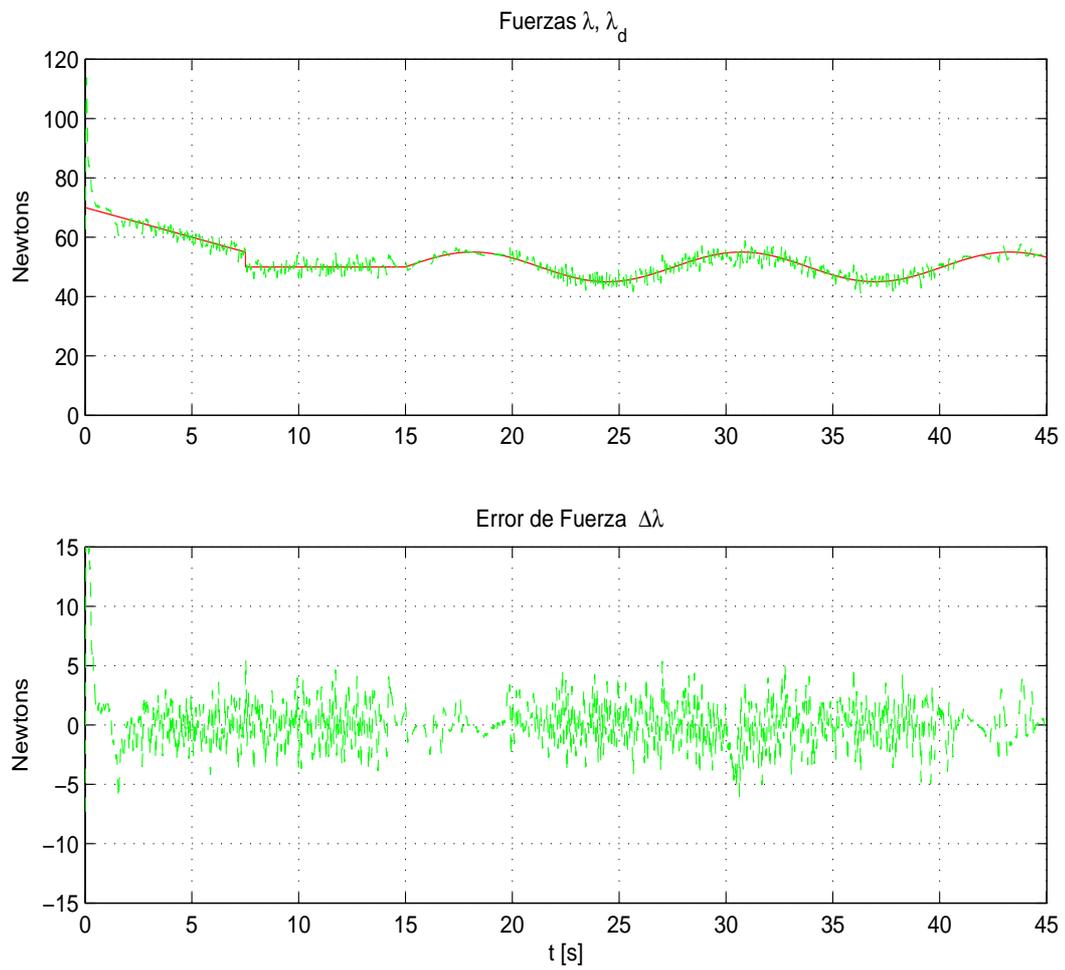


Figura 4.6: Experimento 1. Fuerza deseada  $\lambda_d$  (—) vs fuerza real  $\lambda$  (- -) y su correspondiente error de seguimiento ( $\lambda - \lambda_d$ ).

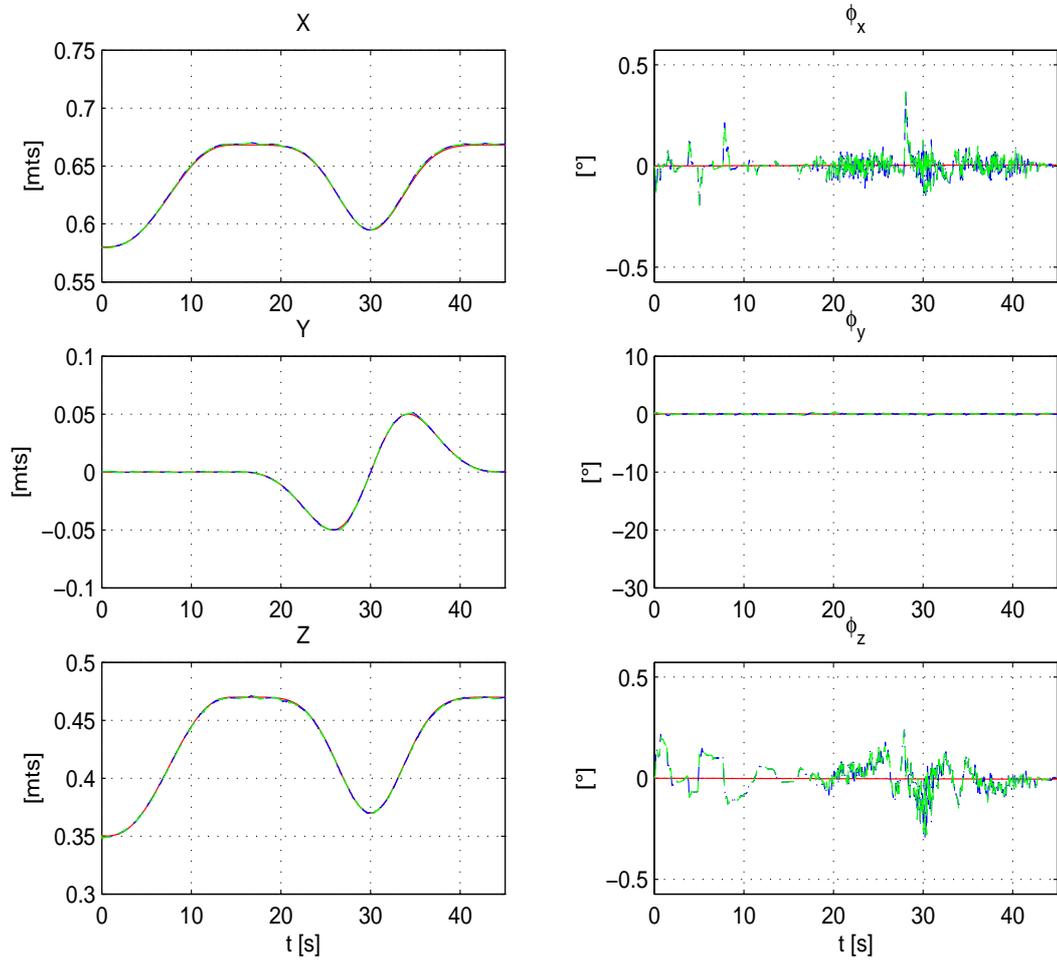


Figura 4.7: Experimento 2. Trayectoria deseada (—) vs trayectoria real (- -) vs trayectoria observada (- · -), de  $\mathbf{x}=[x \ y \ z \ \phi_x \ \phi_y \ \phi_z]^T$ .

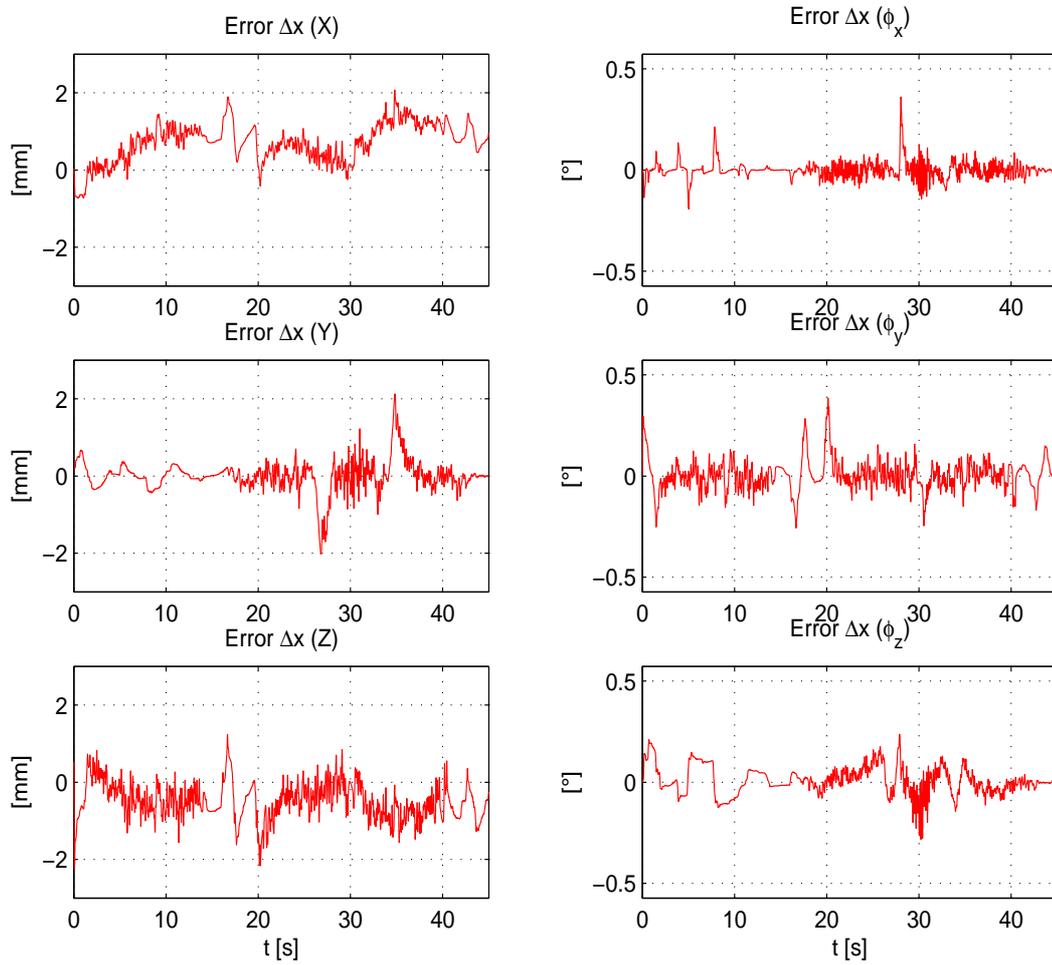


Figura 4.8: Experimento 2. Vector  $\Delta \mathbf{x}$  de error de seguimiento ( $\mathbf{x} - \mathbf{x}_a$ ).

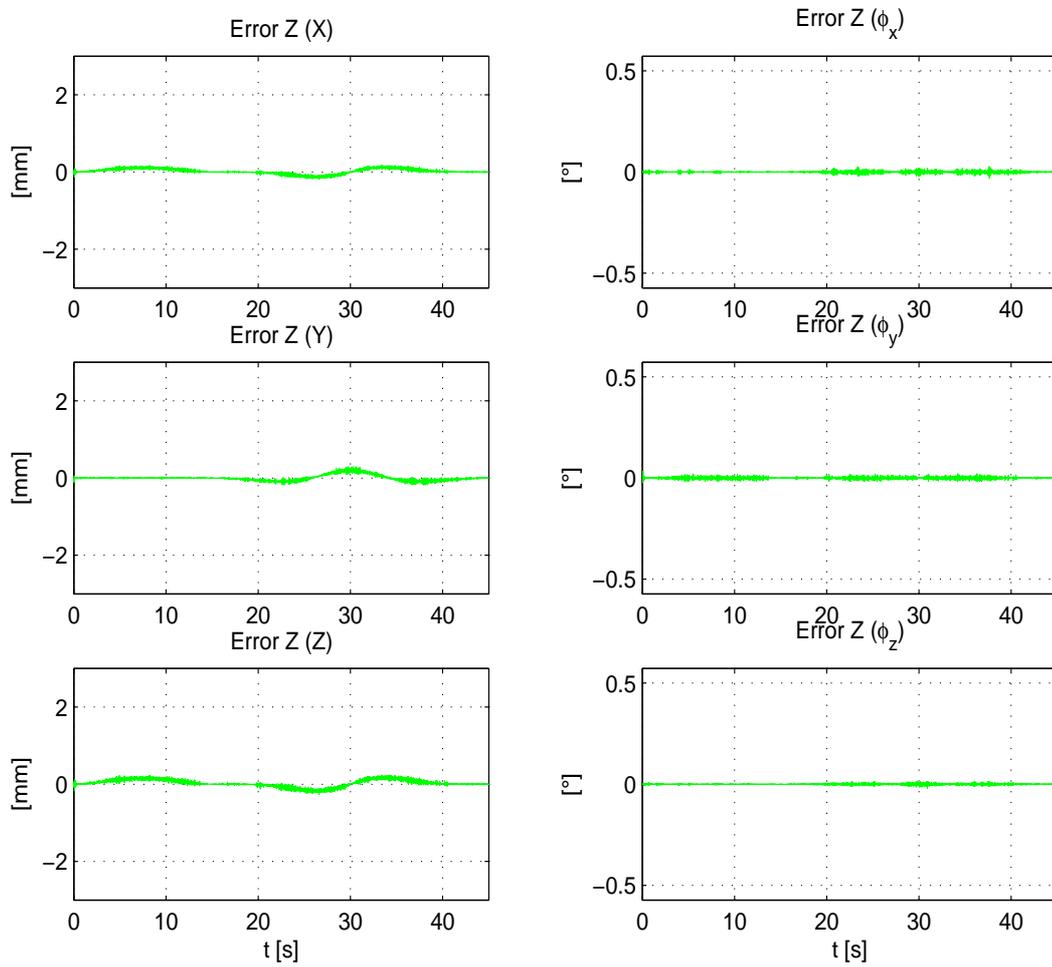


Figura 4.9: Experimento 2. Vector  $z$  de error de observación ( $x - \hat{x}$ ).

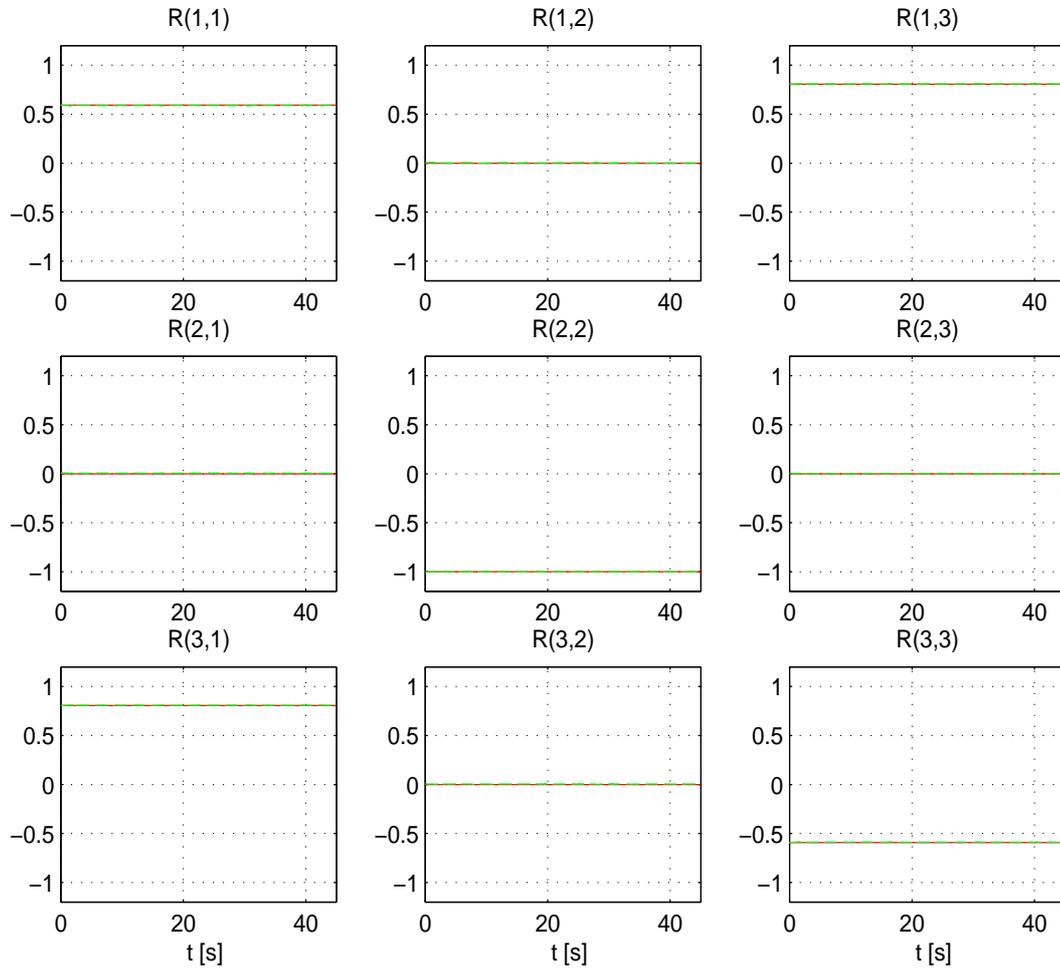


Figura 4.10: Experimento 2. Orientación deseada  ${}^0\mathbf{R}_d$  (—) vs orientación real  ${}^0\mathbf{R}_n$  (- -).

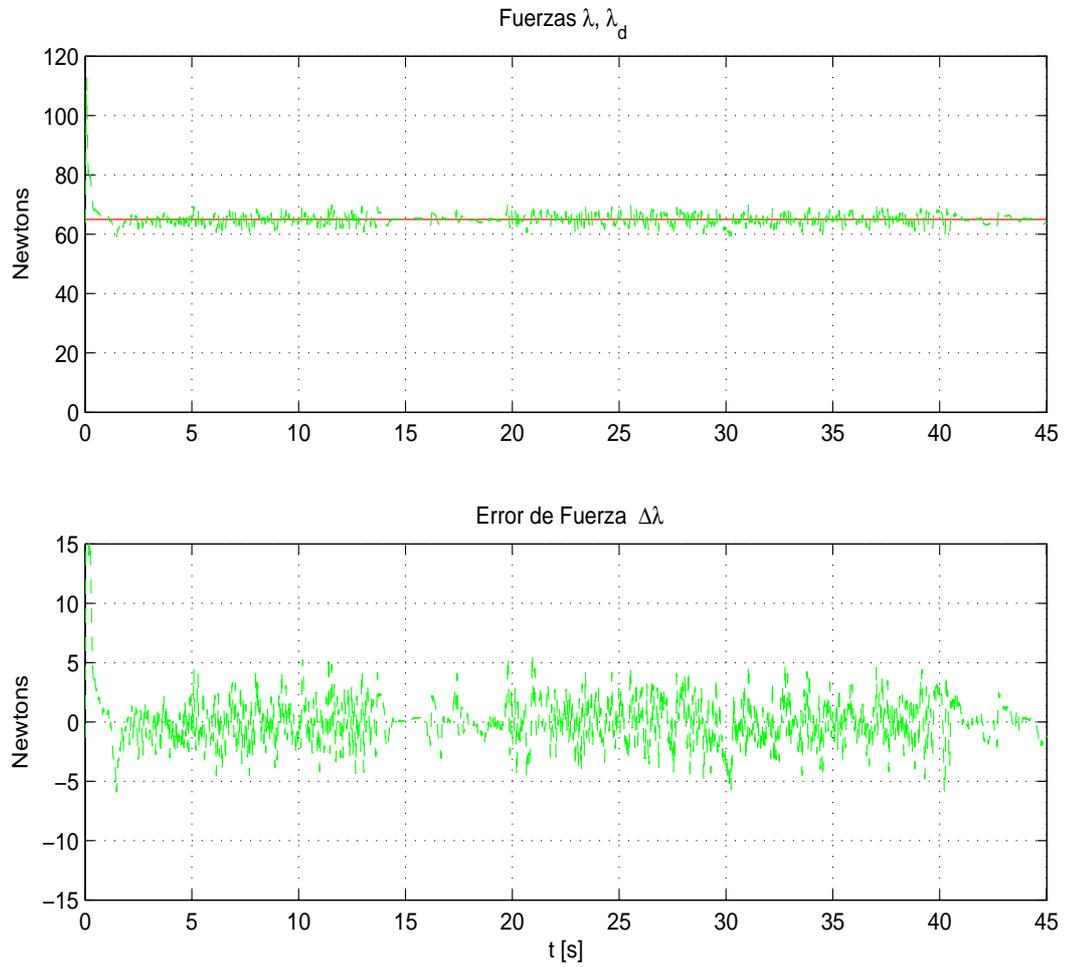


Figura 4.11: Experimento 2. Fuerza deseada  $\lambda_d$  (—) vs fuerza real  $\lambda$  (- -) y su correspondiente error de seguimiento ( $\lambda - \lambda_d$ ).

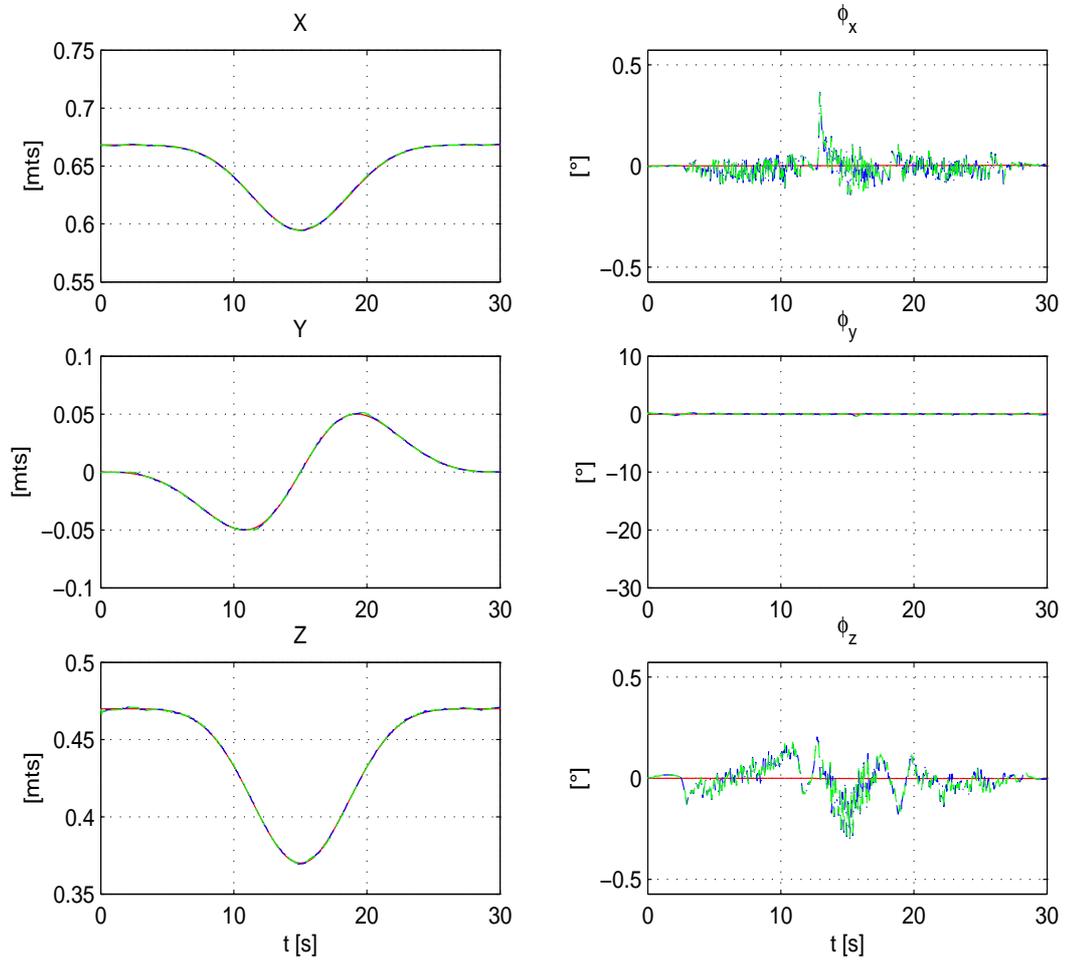


Figura 4.12: Experimento 3. Trayectoria deseada (—) vs trayectoria real (- -) vs trayectoria observada (- · -), de  $\mathbf{x}=[x \ y \ z \ \phi_x \ \phi_y \ \phi_z]^T$ .

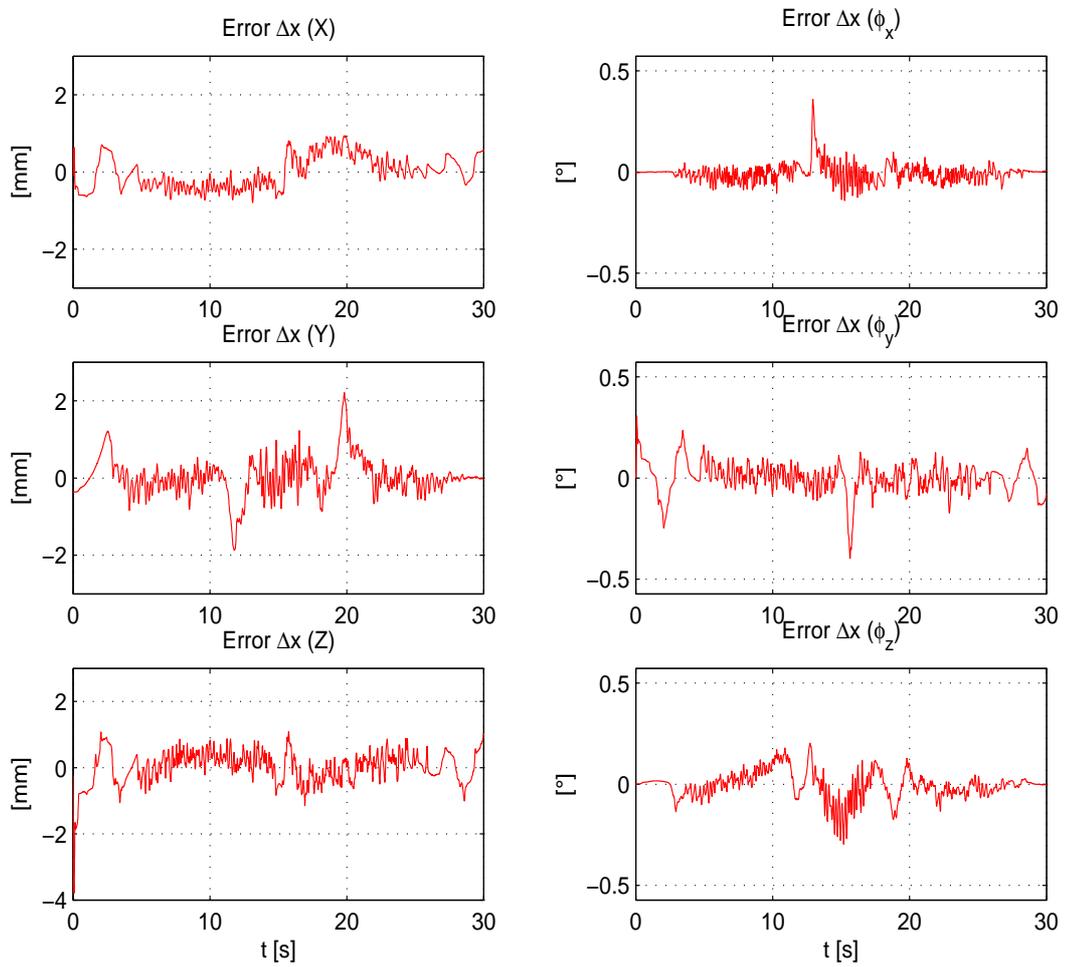


Figura 4.13: Experimento 3. Vector  $\Delta \mathbf{x}$  de error de seguimiento ( $\mathbf{x} - \mathbf{x}_a$ ).

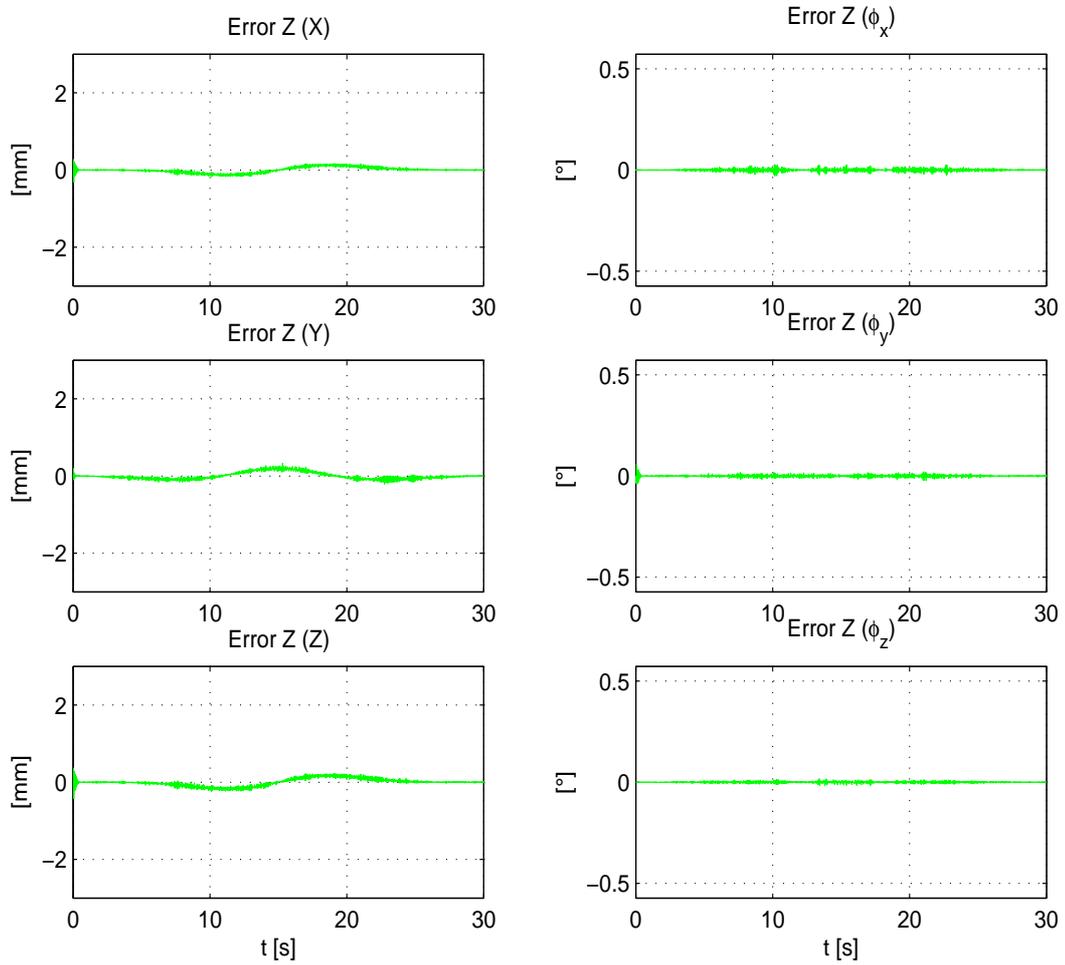


Figura 4.14: Experimento 3. Vector  $\mathbf{z}$  de error de observación ( $\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$ ).

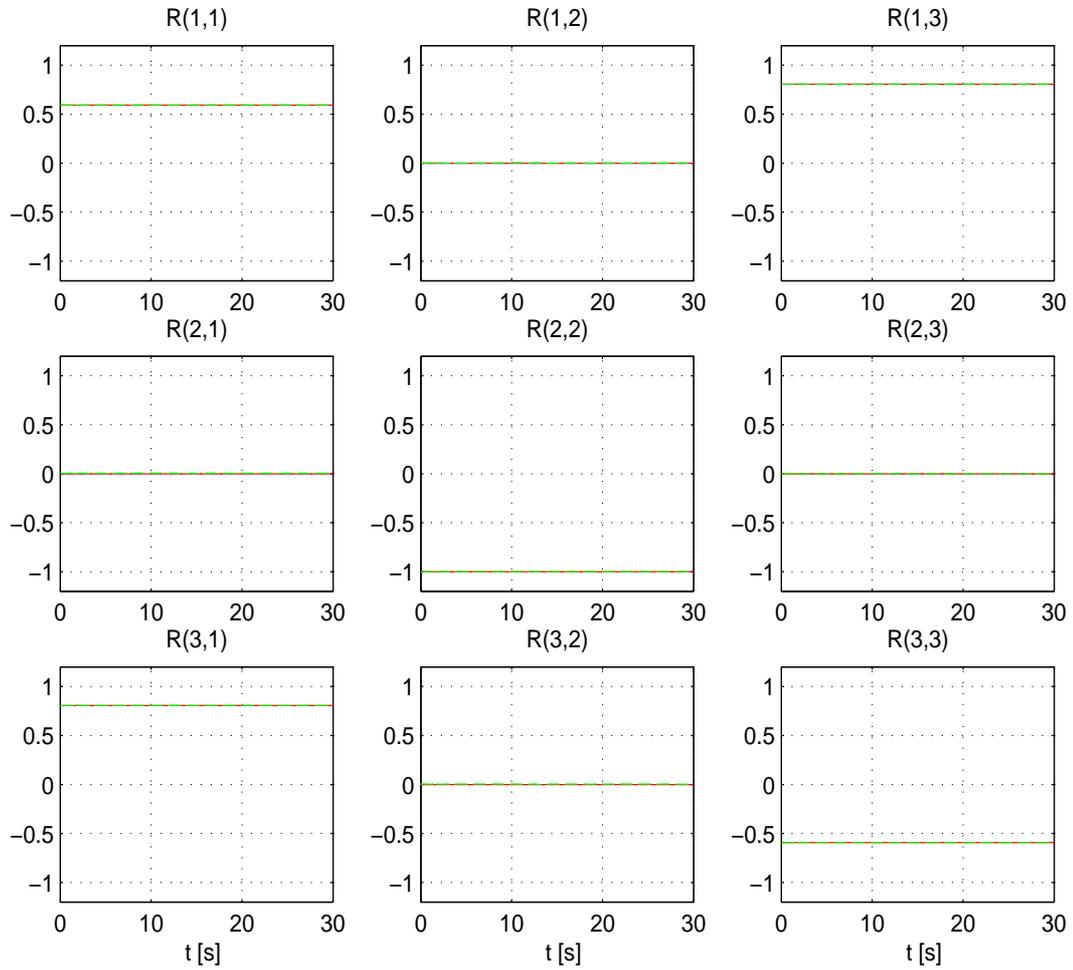


Figura 4.15: Experimento 3. Orientación deseada  ${}^0\mathbf{R}_d$  (—) vs orientación real  ${}^0\mathbf{R}_n$  (- -).

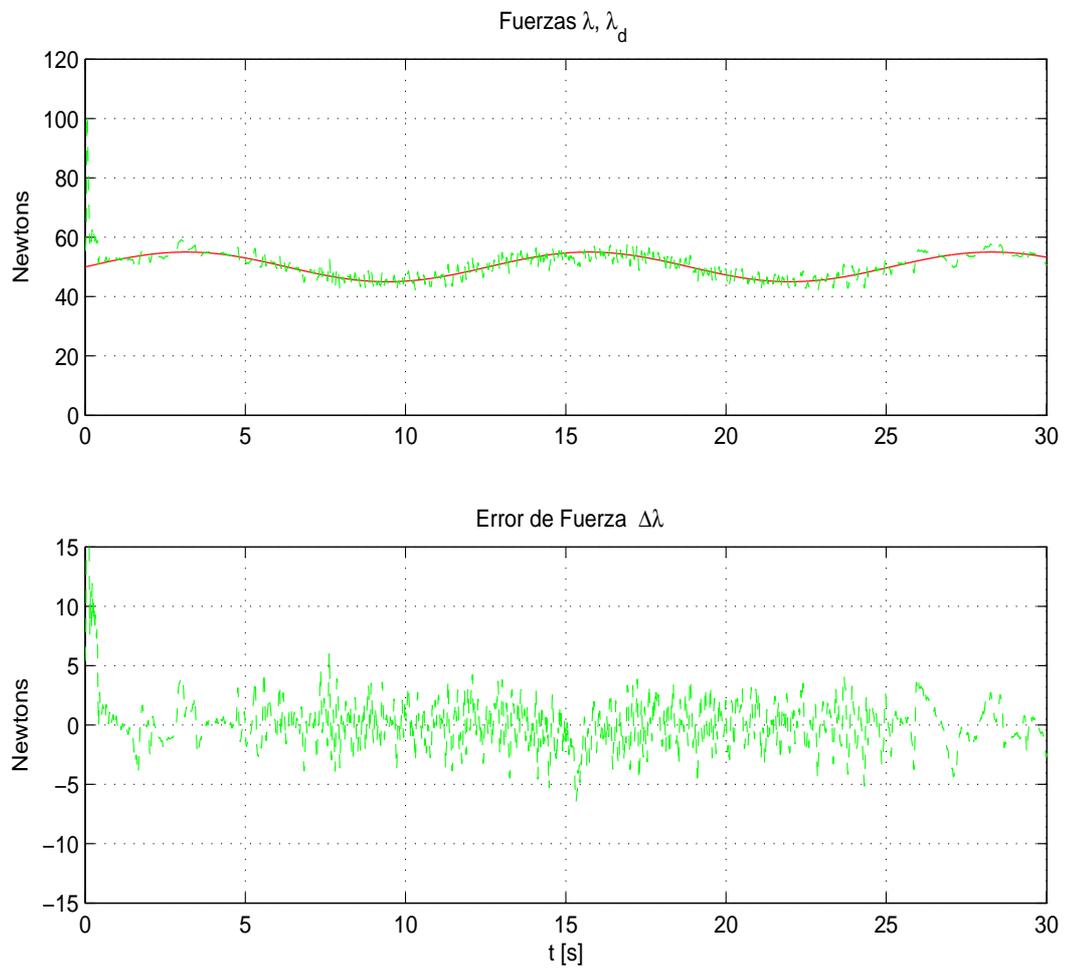


Figura 4.16: Experimento 3. Fuerza deseada  $\lambda_d$  (—) vs fuerza real  $\lambda$  (- -) y su correspondiente error de seguimiento ( $\lambda - \lambda_d$ ).

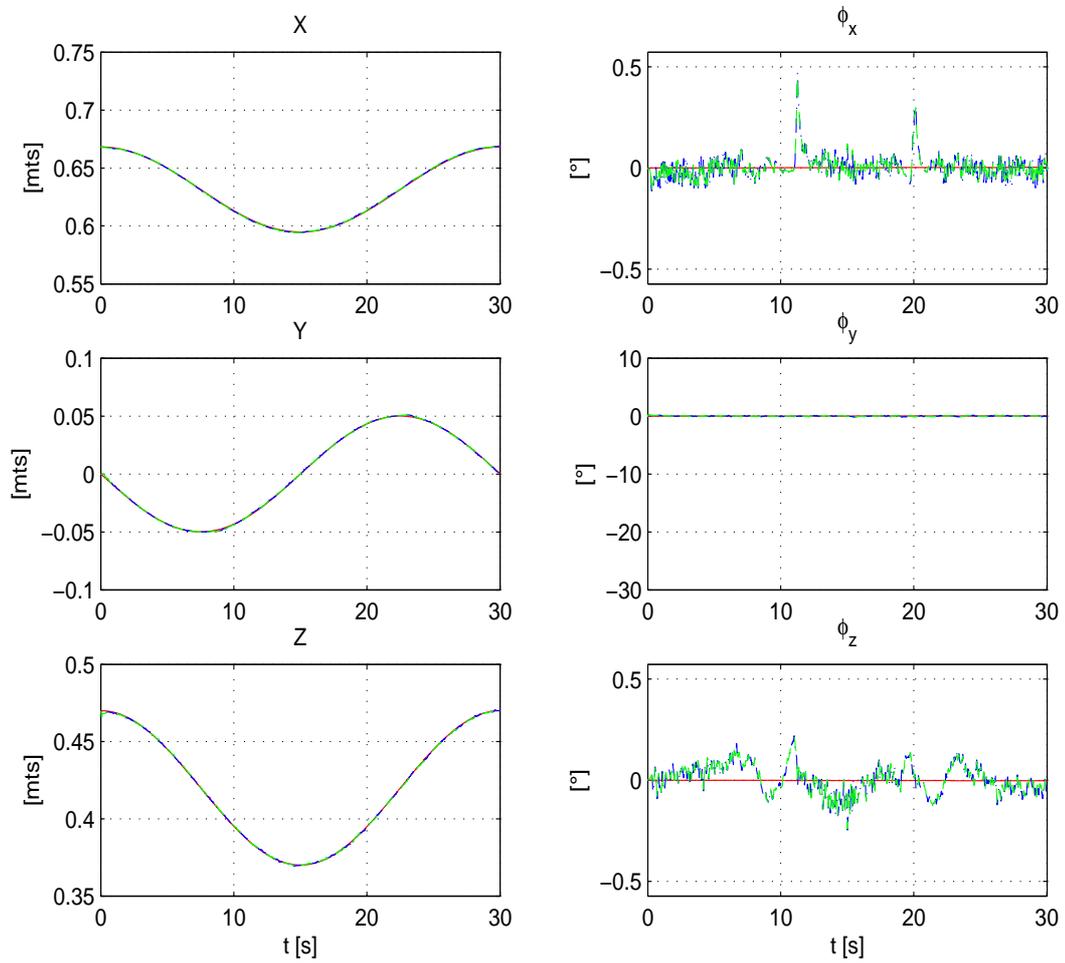


Figura 4.17: Experimento 4. Trayectoria deseada (—) vs trayectoria real (- -) vs trayectoria observada (- · -), de  $\mathbf{x}=[x \ y \ z \ \phi_x \ \phi_y \ \phi_z]^T$ .

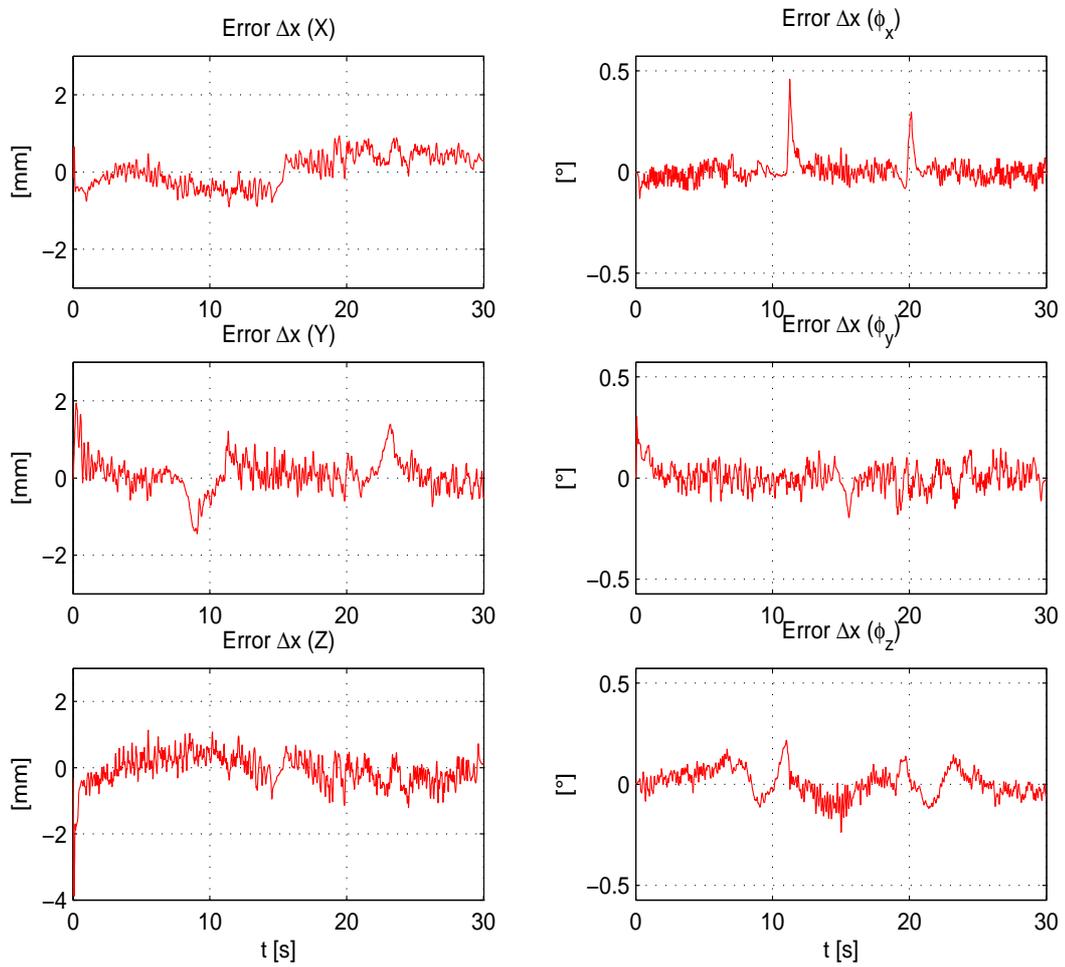


Figura 4.18: Experimento 4. Vector  $\Delta \mathbf{x}$  de error de seguimiento ( $\mathbf{x} - \mathbf{x}_a$ ).

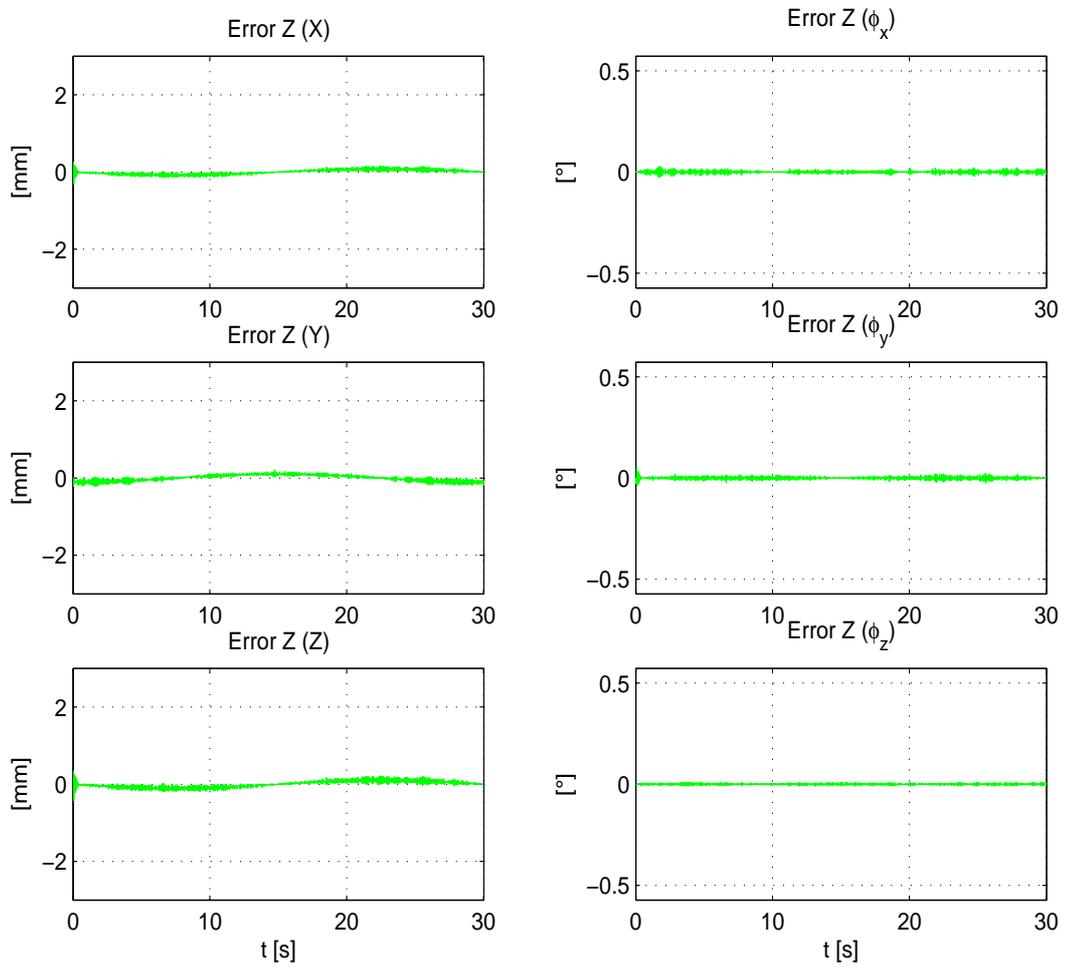


Figura 4.19: Experimento 4. Vector  $\mathbf{z}$  de error de observación ( $\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$ ).

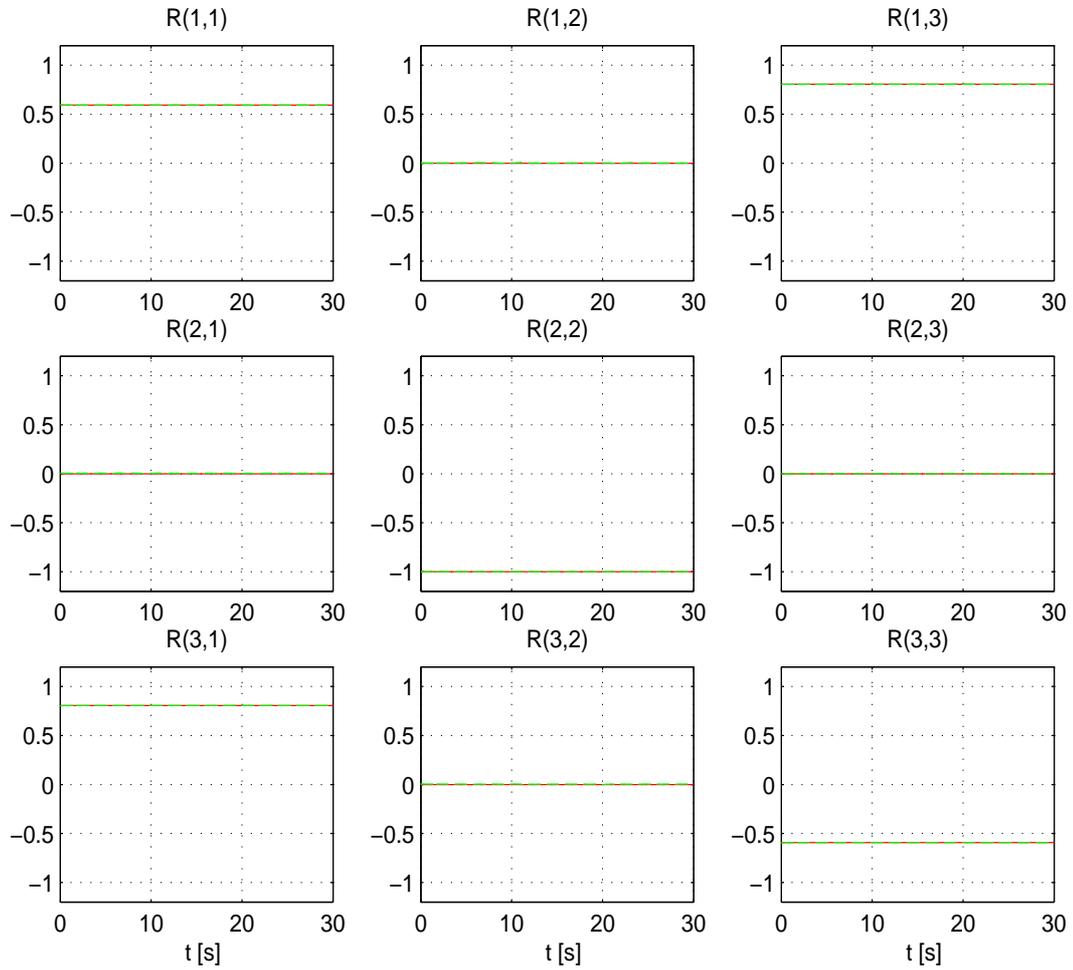


Figura 4.20: Experimento 4. Orientación deseada  ${}^0\mathbf{R}_d$  (—) vs orientación real  ${}^0\mathbf{R}_n$  (- -).

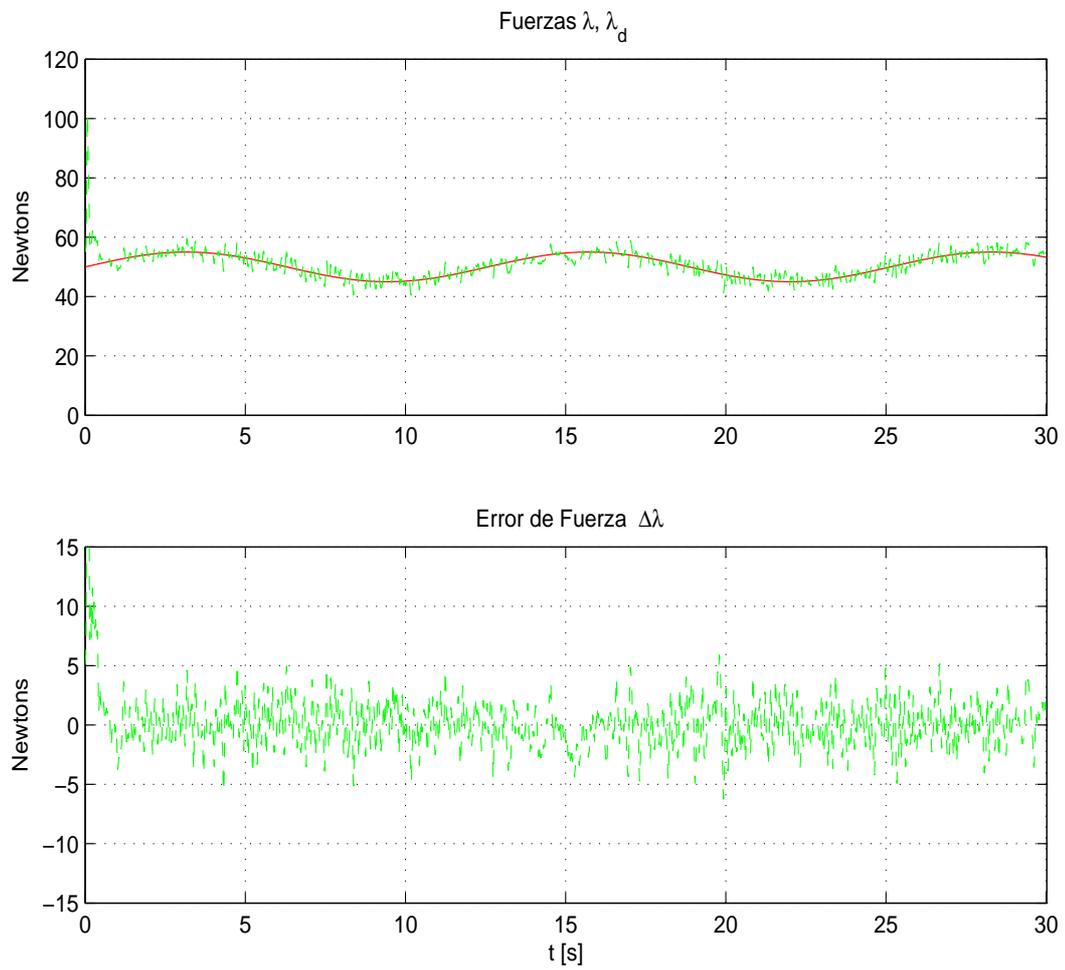


Figura 4.21: Experimento 4. Fuerza deseada  $\lambda_d$  (—) vs fuerza real  $\lambda$  (- -) y su correspondiente error de seguimiento ( $\lambda - \lambda_d$ ).

---

Experimento	Tiempo[s]	Tray. Posición	Tray. Fuerza
1	15	De A a B	Para círculo
2	30	De A a B	Para círculo
3	10	De A a B	Constante en 10N
4	10	Regulación en un punto	Constante en 65N

Tabla 4.2: Experimentos para la superficie esférica

### 4.2.2. Superficie esférica

La trayectoria en posición es la misma para todos los experimentos: de acuerdo con la Figura B.12, el movimiento inicia en el punto **A** y termina en **B**. En la tabla 4.2 se describen los experimentos con base en la duración y trayectoria en fuerza: El experimento 1 consiste en seguir las trayectorias descritas por la Tabla 4.2 aplicando fuerza; primero como una rampa decreciente, después toma un valor constante y por último describe una senoide. El experimento 2 sigue las mismas trayectorias con la diferencia de que dura el doble de tiempo. En el tercer experimento se aplica fuerza constante considerablemente pequeña. Finalmente en el cuarto experimento se tiene una tarea de regulación en un punto con fuerza constante.

## Experimento 1

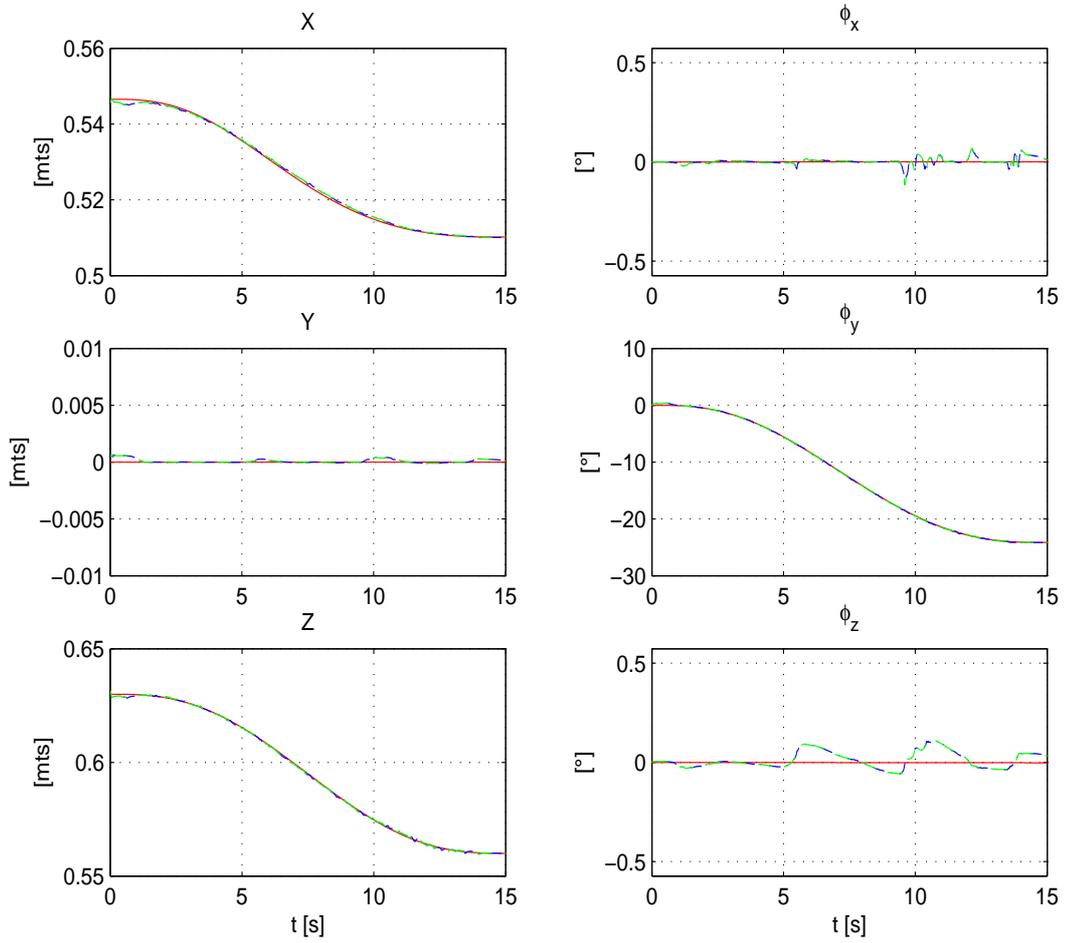


Figura 4.22: Experimento 1. Trayectoria deseada (—) vs trayectoria real (- -) vs trayectoria observada (- · -), de  $\mathbf{x}=[x \ y \ z \ \phi_x \ \phi_y \ \phi_z]^T$ .

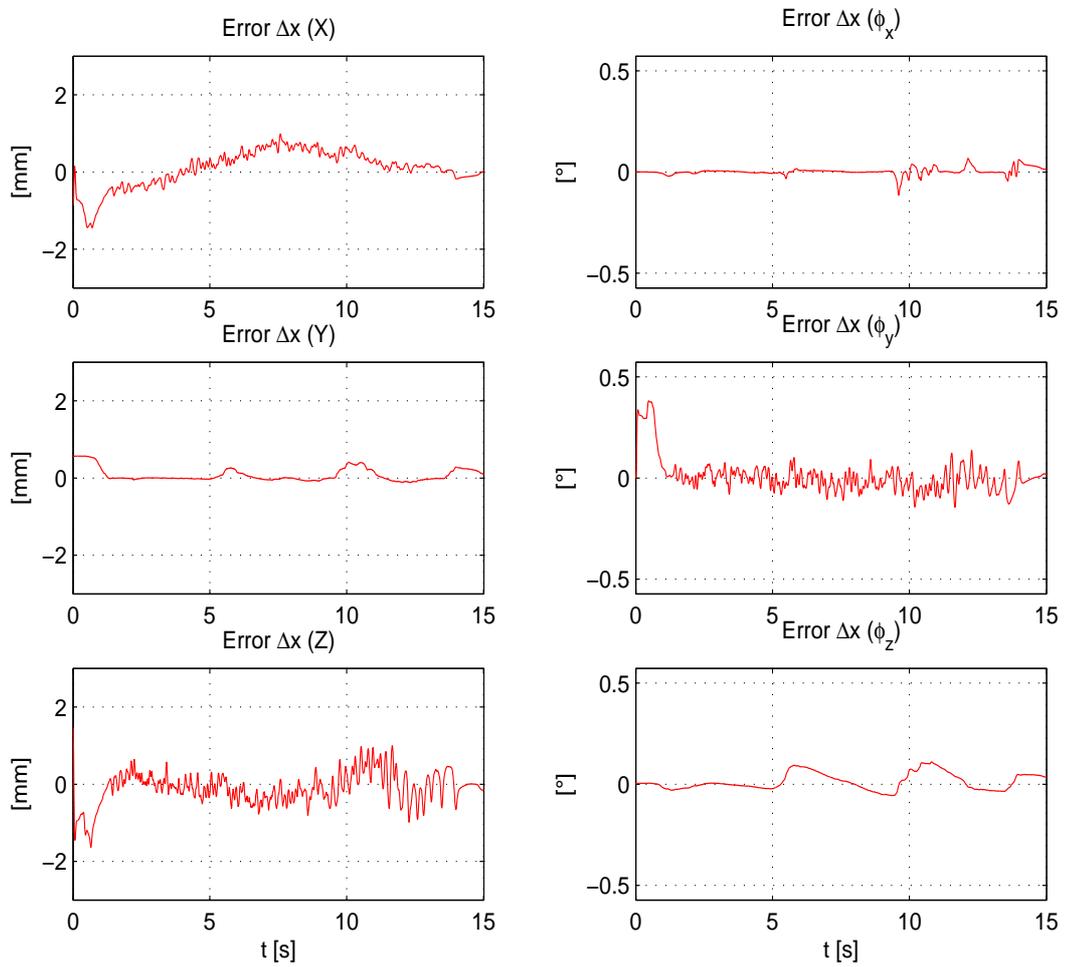


Figura 4.23: Experimento 1. Vector  $\Delta \mathbf{x}$  de error de seguimiento ( $\mathbf{x} - \mathbf{x}_a$ ).

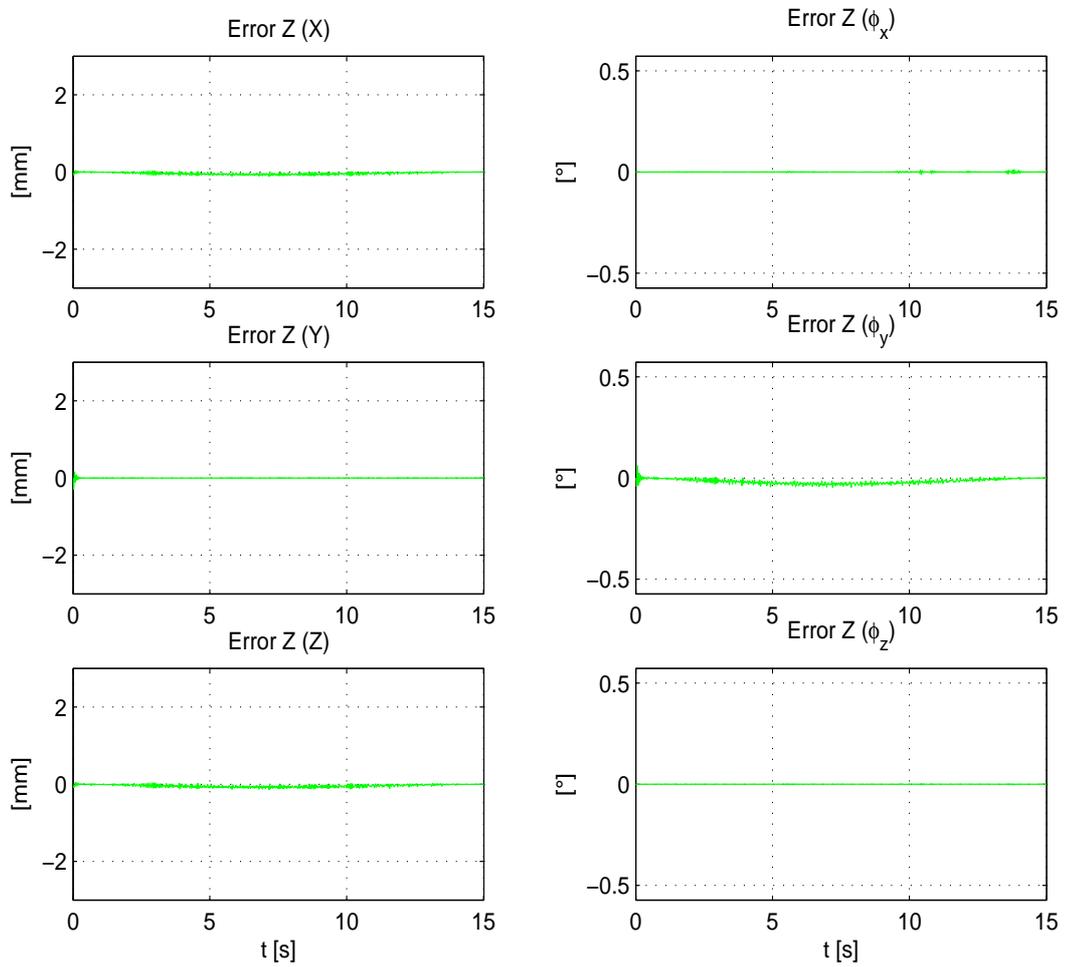


Figura 4.24: Experimento 1. Vector  $\mathbf{z}$  de error de observación ( $\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$ ).

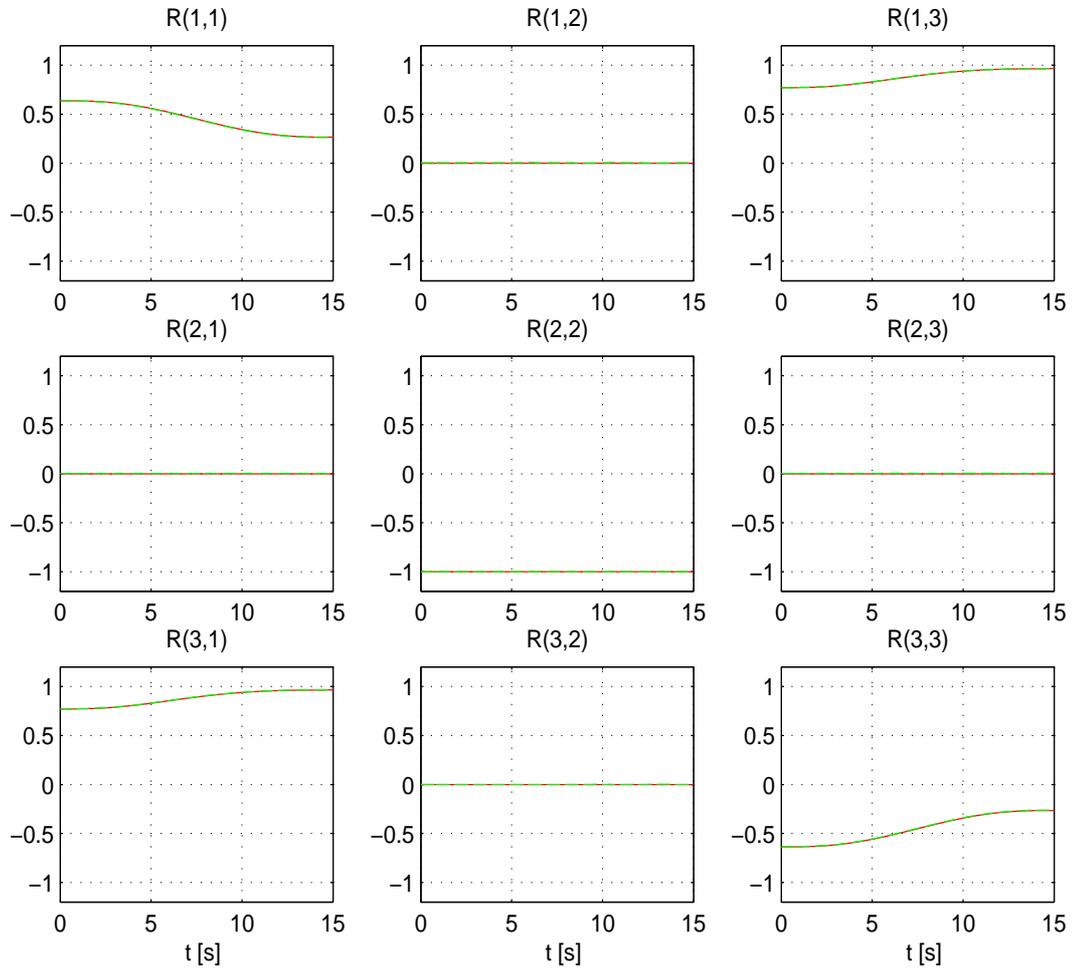


Figura 4.25: Experimento 1. Orientación deseada  ${}^0\mathbf{R}_d$  (—) vs orientación real  ${}^0\mathbf{R}_n$  (- -).

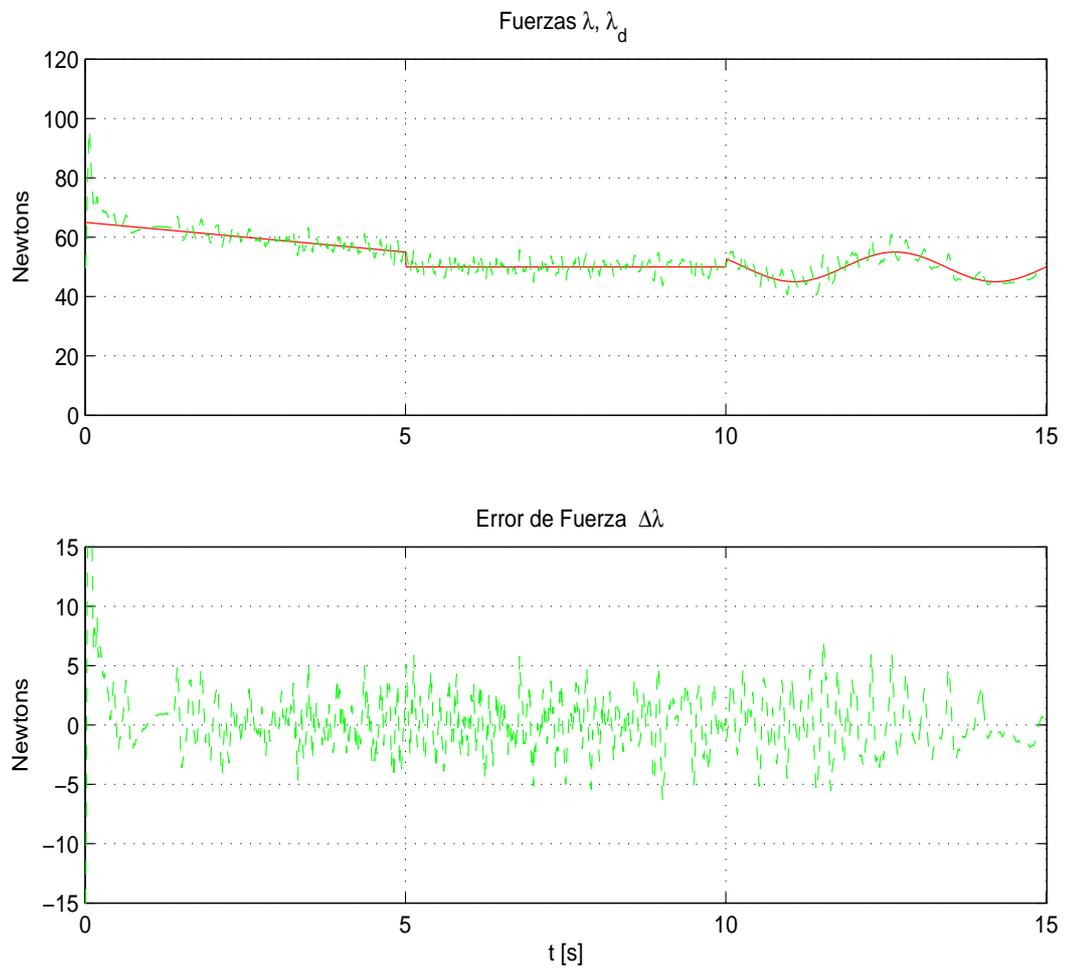


Figura 4.26: Experimento 1. Fuerza deseada  $\lambda_d$  (—) vs fuerza real  $\lambda$  (- -) y su correspondiente error de seguimiento ( $\lambda - \lambda_d$ ).

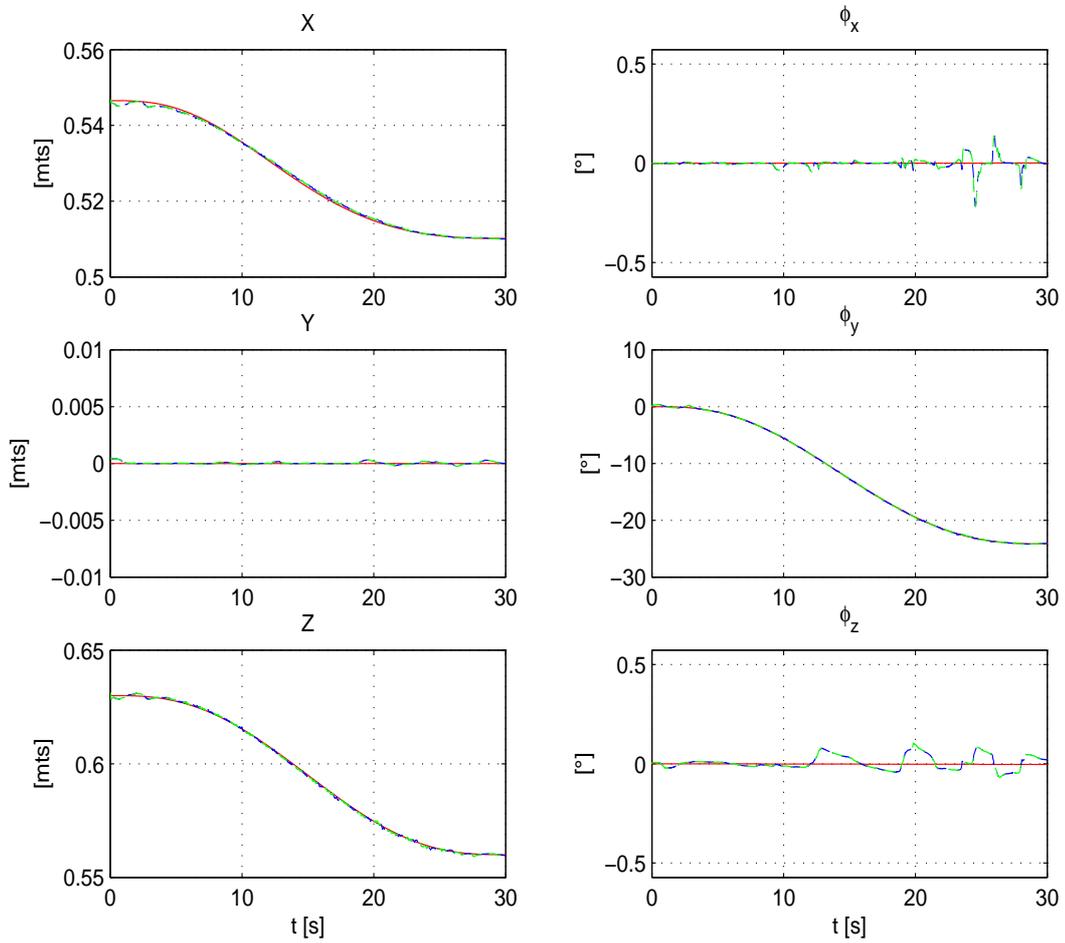


Figura 4.27: Experimento 2. Trayectoria deseada (—) vs trayectoria real (- -) vs trayectoria observada (- · -), de  $\mathbf{x}=[x \ y \ z \ \phi_x \ \phi_y \ \phi_z]^T$ .

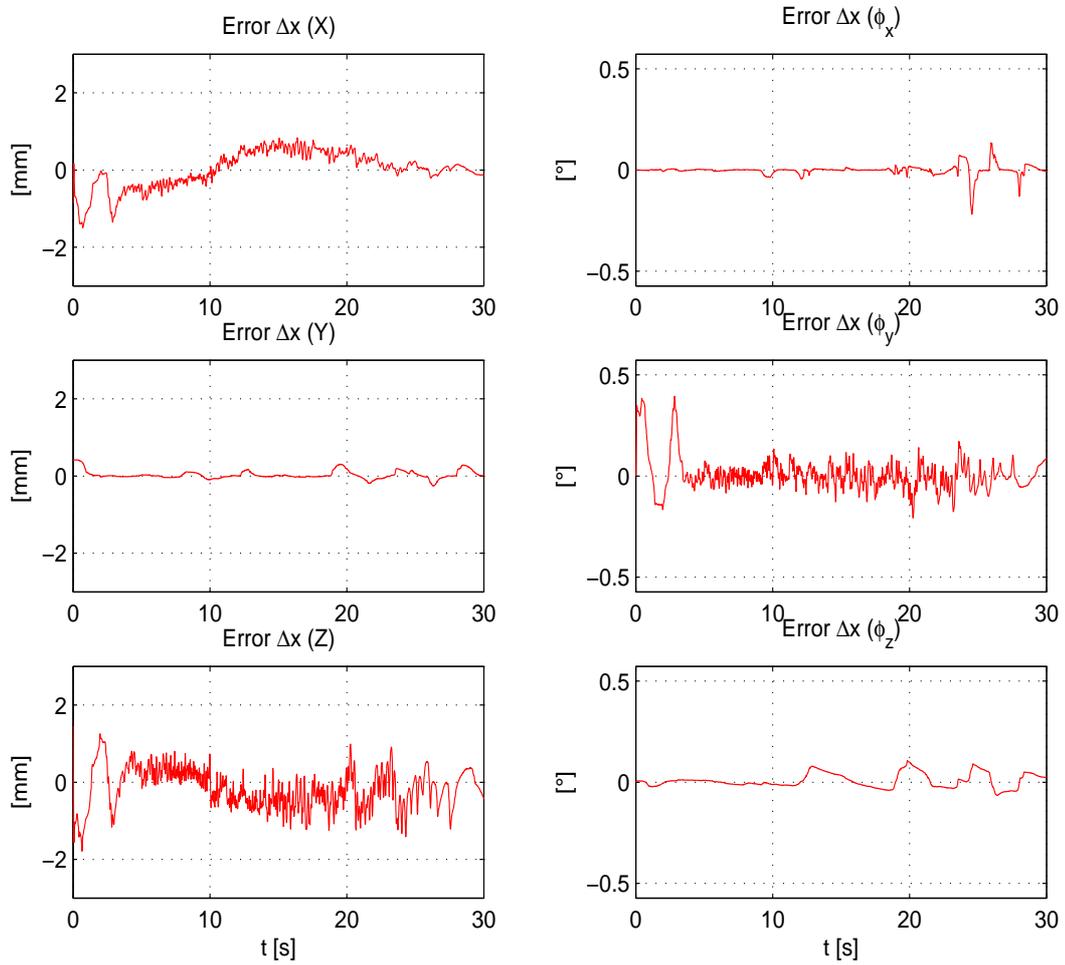


Figura 4.28: Experimento 2. Vector  $\Delta \mathbf{x}$  de error de seguimiento ( $\mathbf{x} - \mathbf{x}_a$ ).

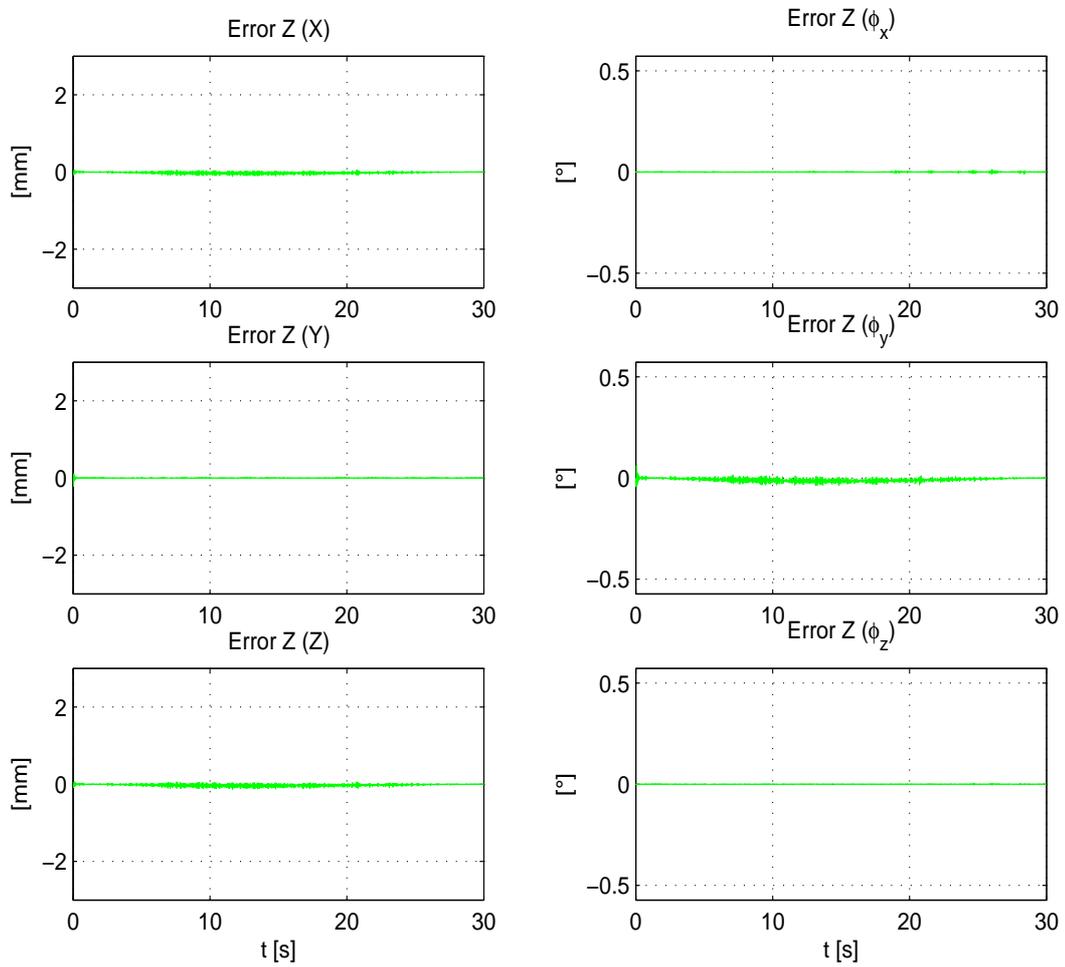


Figura 4.29: Experimento 2. Vector  $\mathbf{z}$  de error de observación ( $\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$ ).

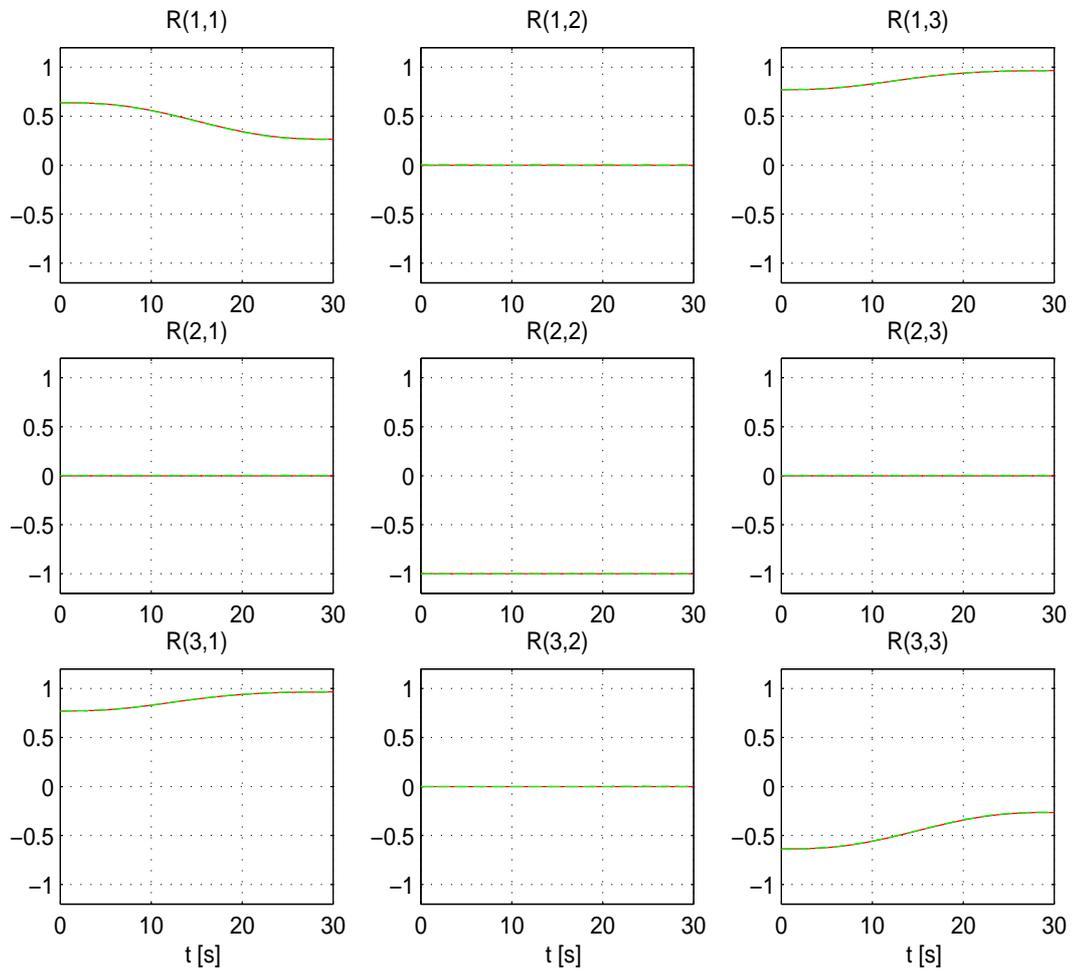


Figura 4.30: Experimento 2. Orientación deseada  ${}^0\mathbf{R}_d$  (—) vs orientación real  ${}^0\mathbf{R}_n$  (- -).

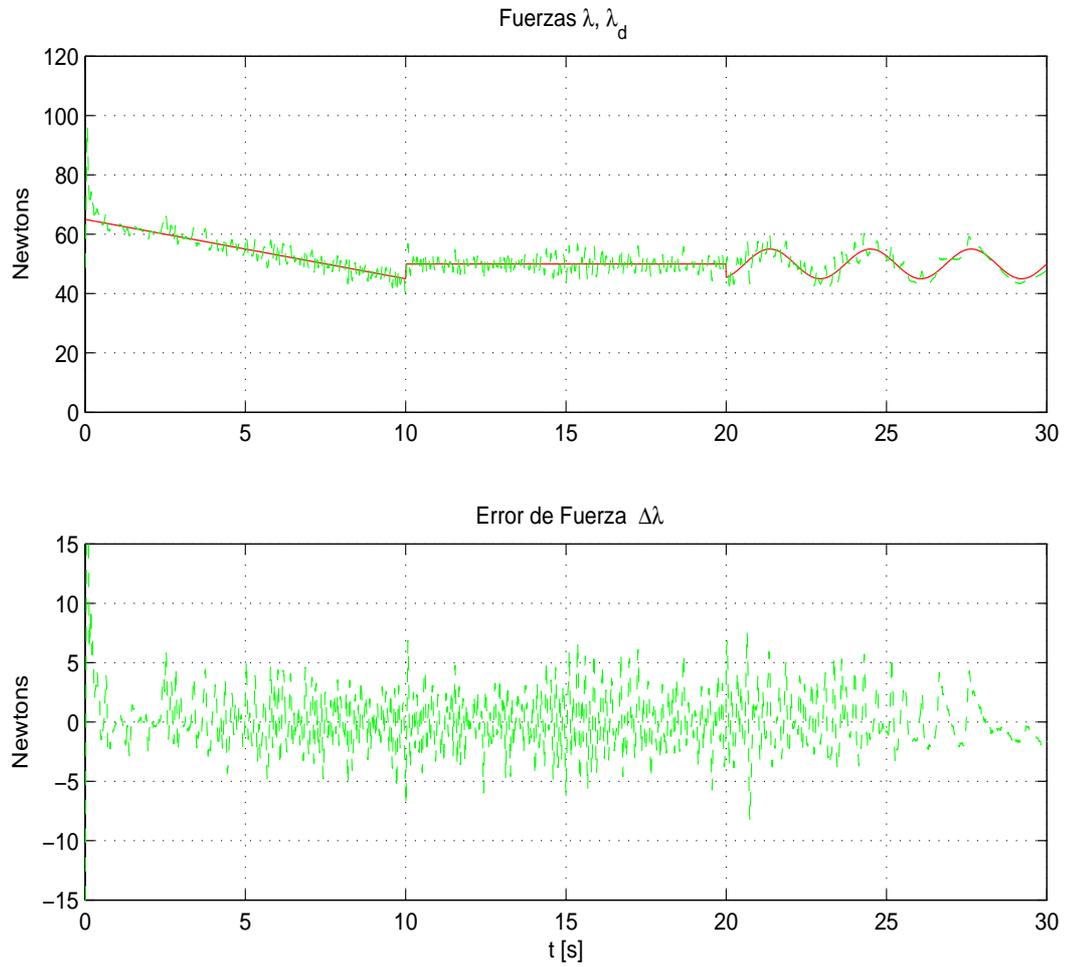


Figura 4.31: Experimento 2. Fuerza deseada  $\lambda_d$  (—) vs fuerza real  $\lambda$  (- -) y su correspondiente error de seguimiento ( $\lambda - \lambda_d$ ).

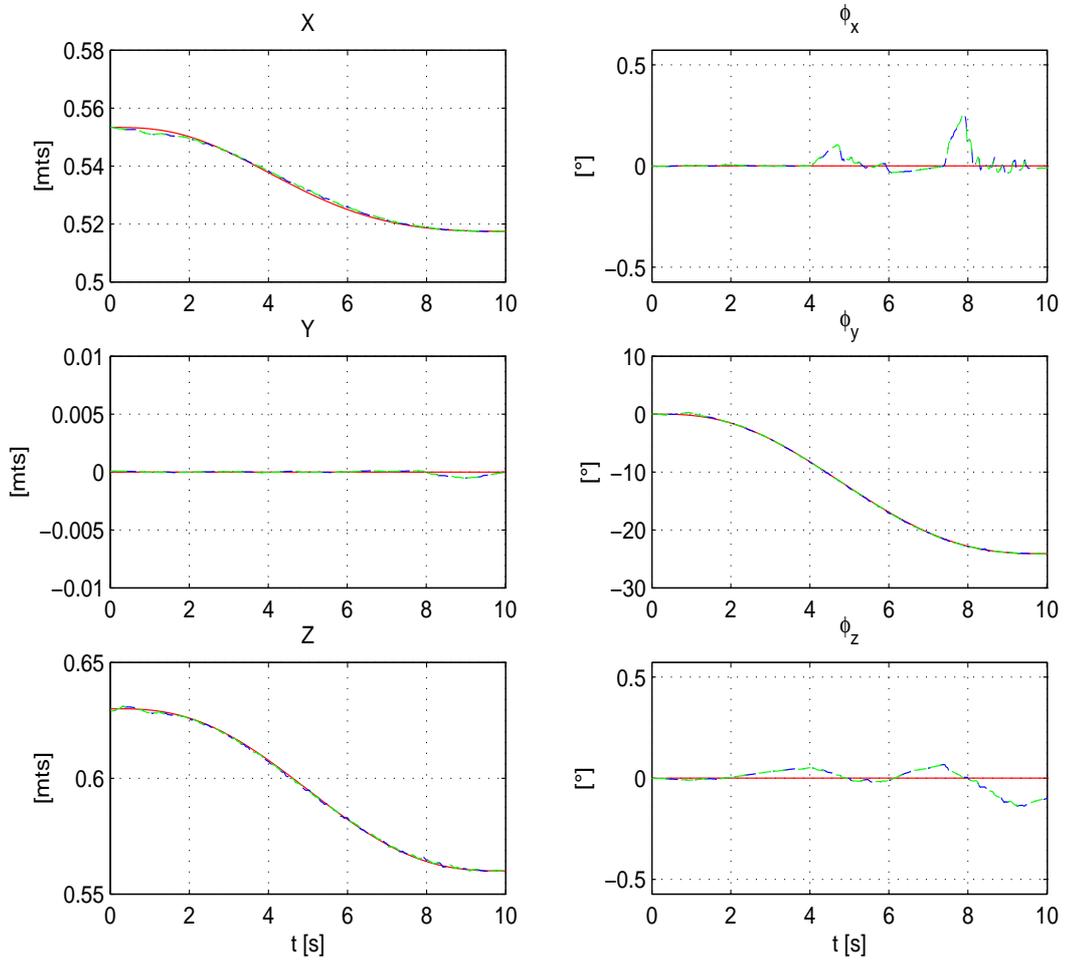


Figura 4.32: Experimento 3. Trayectoria deseada (—) vs trayectoria real (- -) vs trayectoria observada (- · -), de  $\mathbf{x}=[x \ y \ z \ \phi_x \ \phi_y \ \phi_z]^T$ .

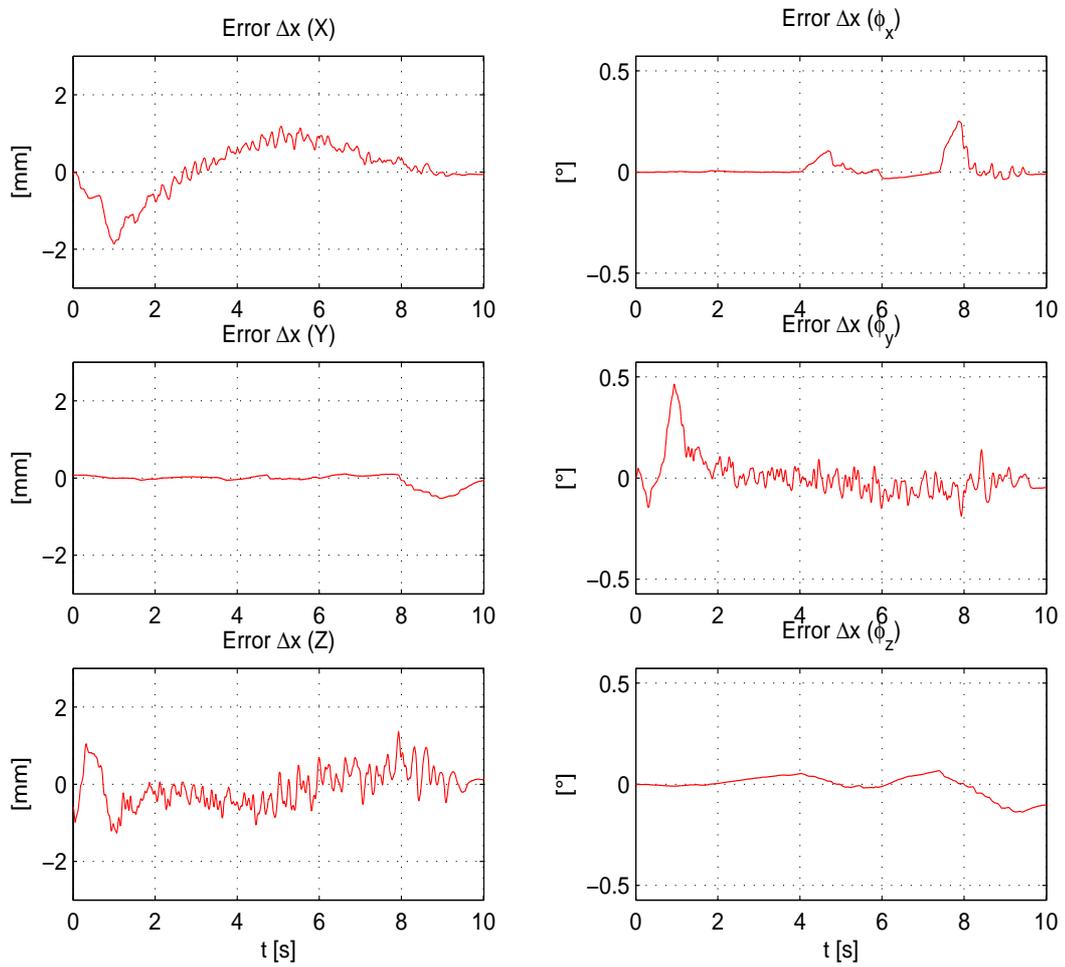


Figura 4.33: Experimento 3. Vector  $\Delta \mathbf{x}$  de error de seguimiento ( $\mathbf{x} - \mathbf{x}_a$ ).

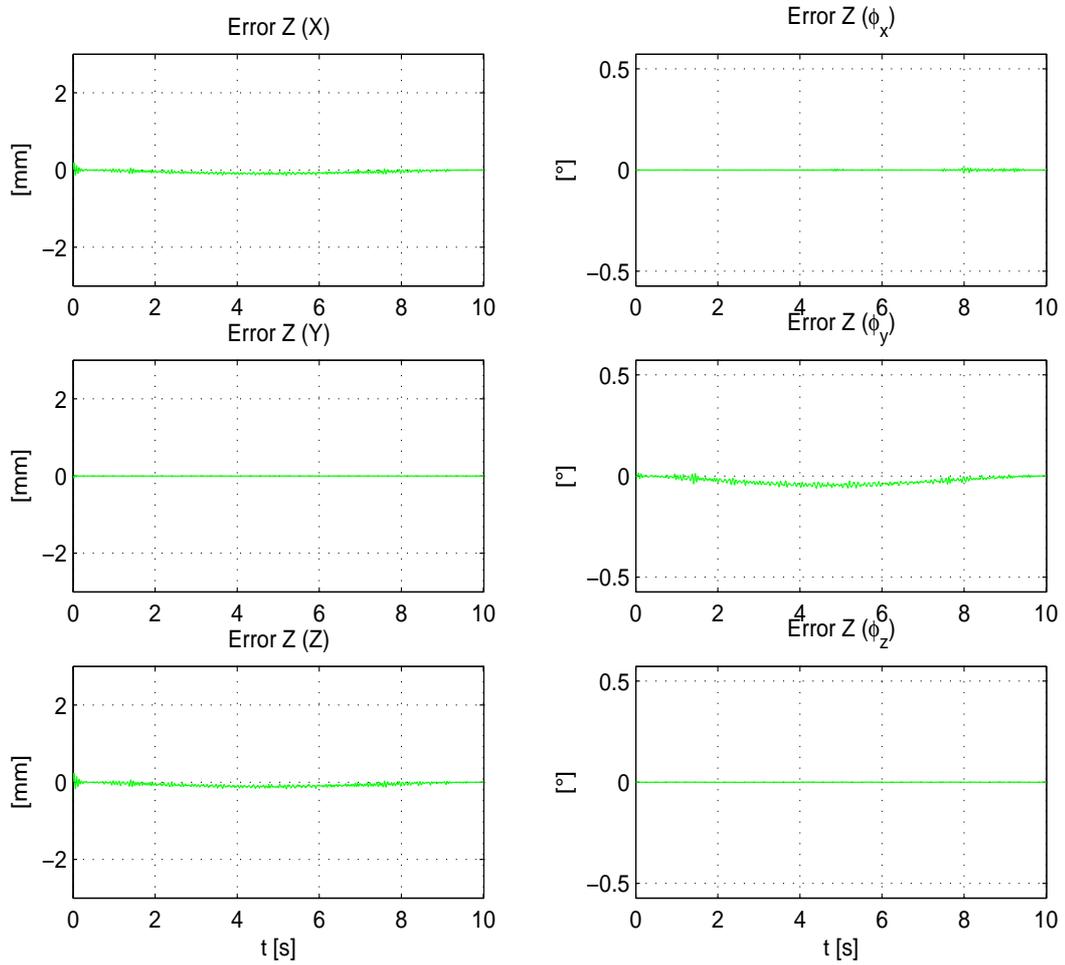


Figura 4.34: Experimento 3. Vector  $\mathbf{z}$  de error de observación ( $\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$ ).

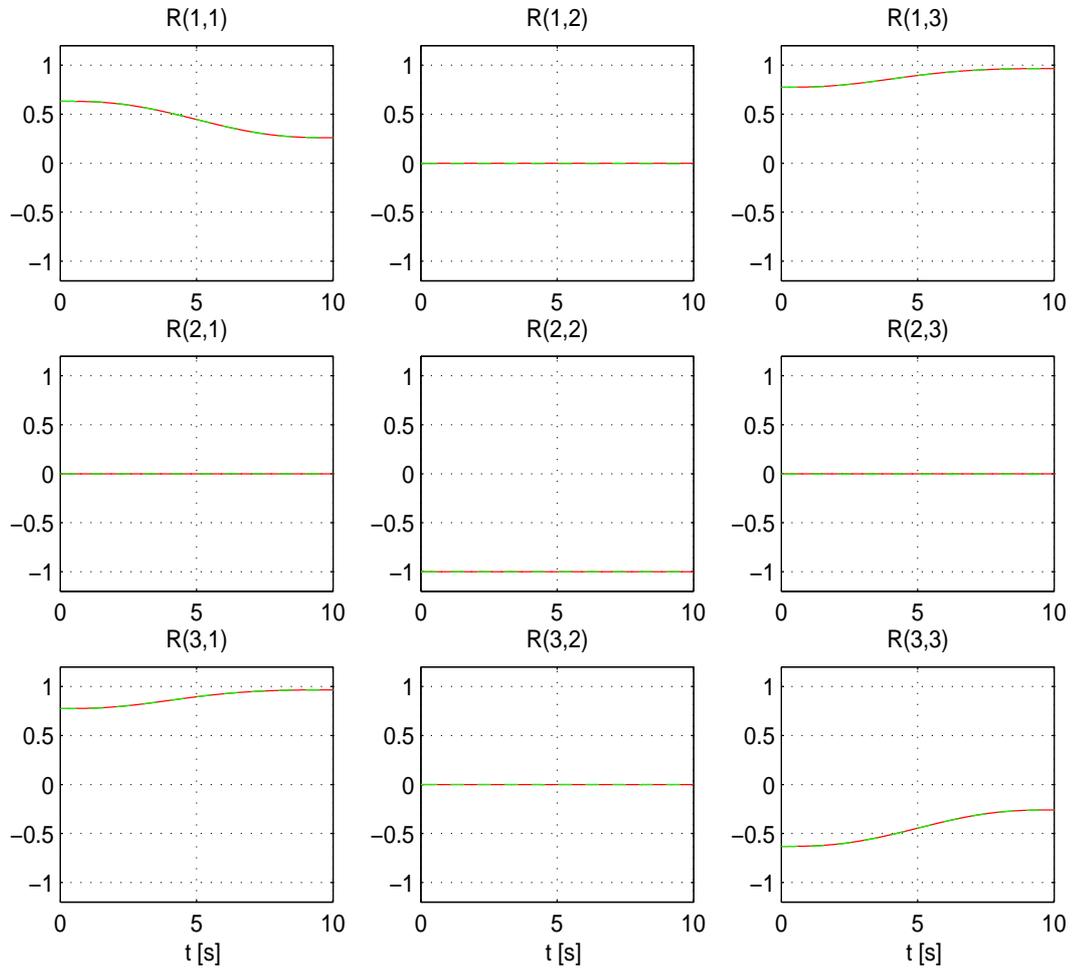


Figura 4.35: Experimento 3. Orientación deseada  ${}^0\mathbf{R}_d$  (—) vs orientación real  ${}^0\mathbf{R}_n$  (- -).

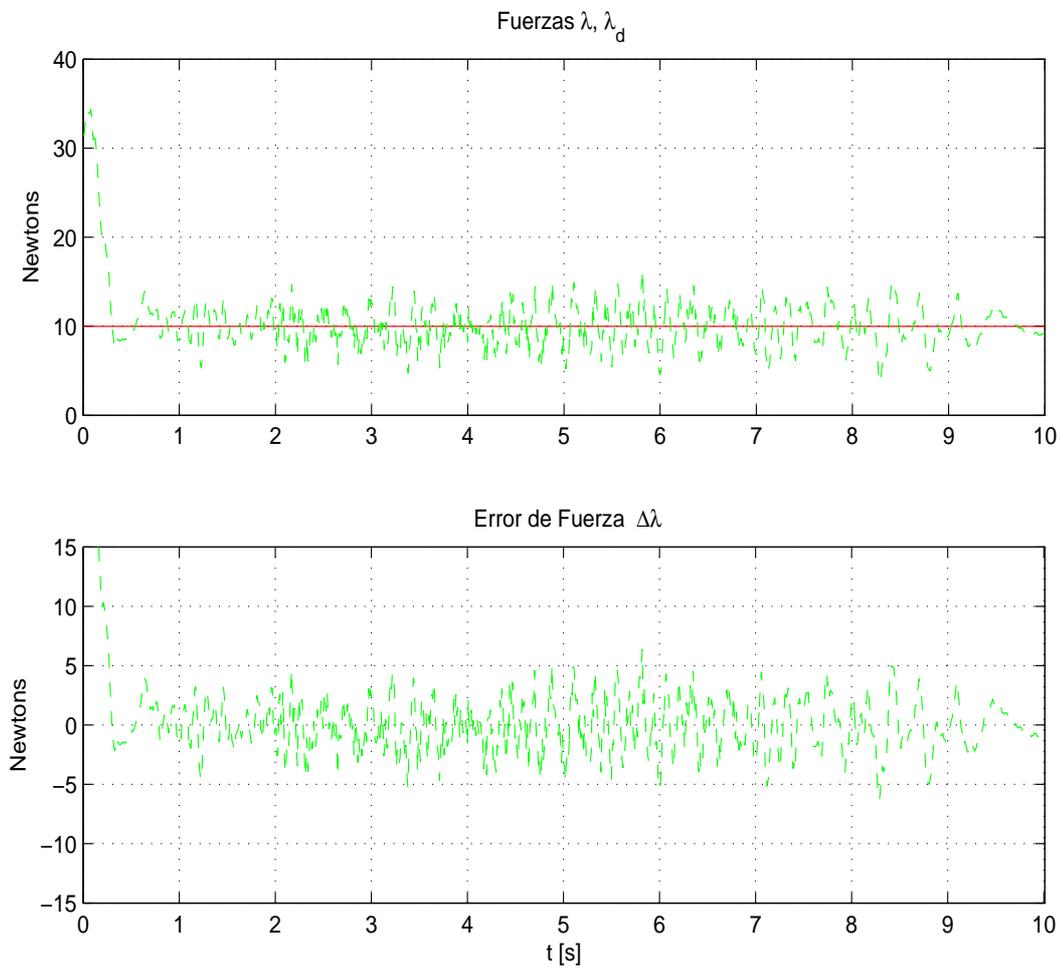


Figura 4.36: Experimento 3. Fuerza deseada  $\lambda_d$  (—) vs fuerza real  $\lambda$  (- -) y su correspondiente error de seguimiento ( $\lambda - \lambda_d$ ).

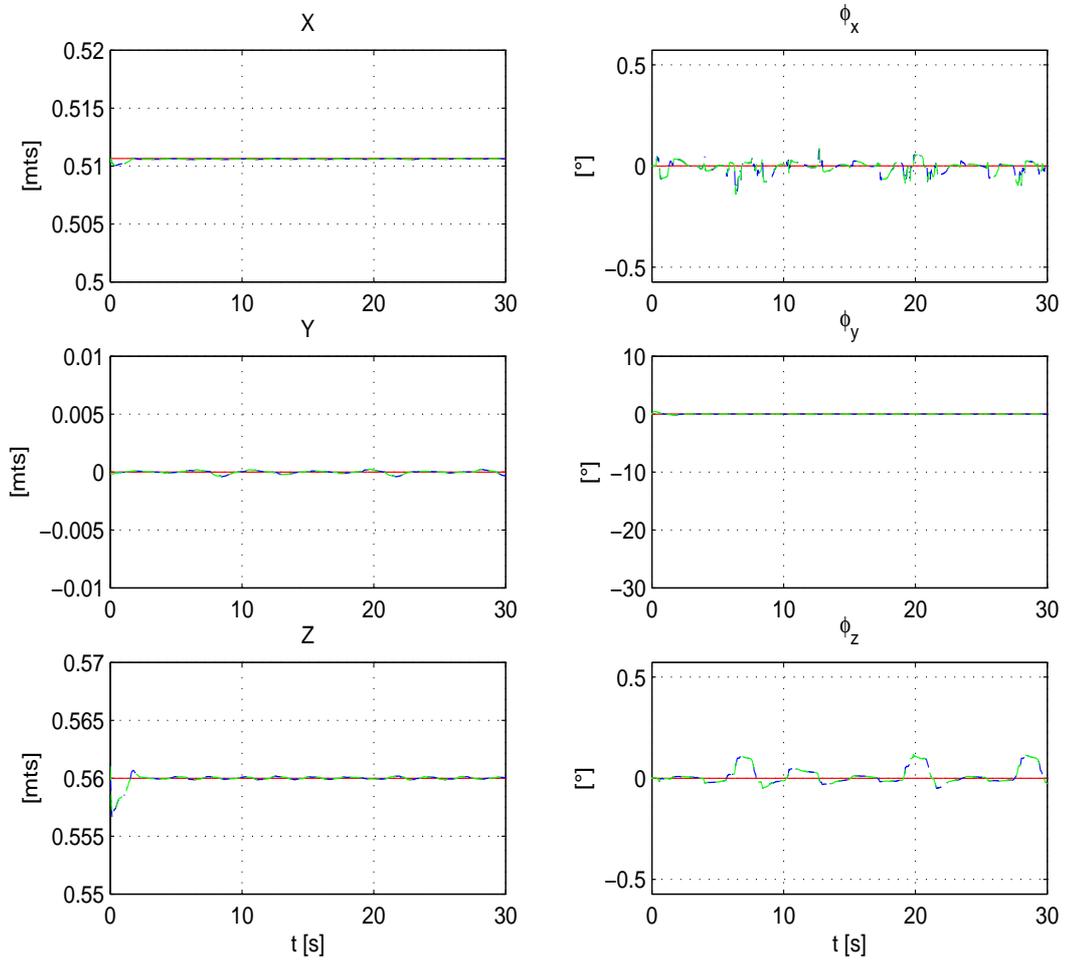


Figura 4.37: Experimento 4. Trayectoria deseada (—) vs trayectoria real (- -) vs trayectoria observada (- · -), de  $\mathbf{x}=[x \ y \ z \ \phi_x \ \phi_y \ \phi_z]^T$ .

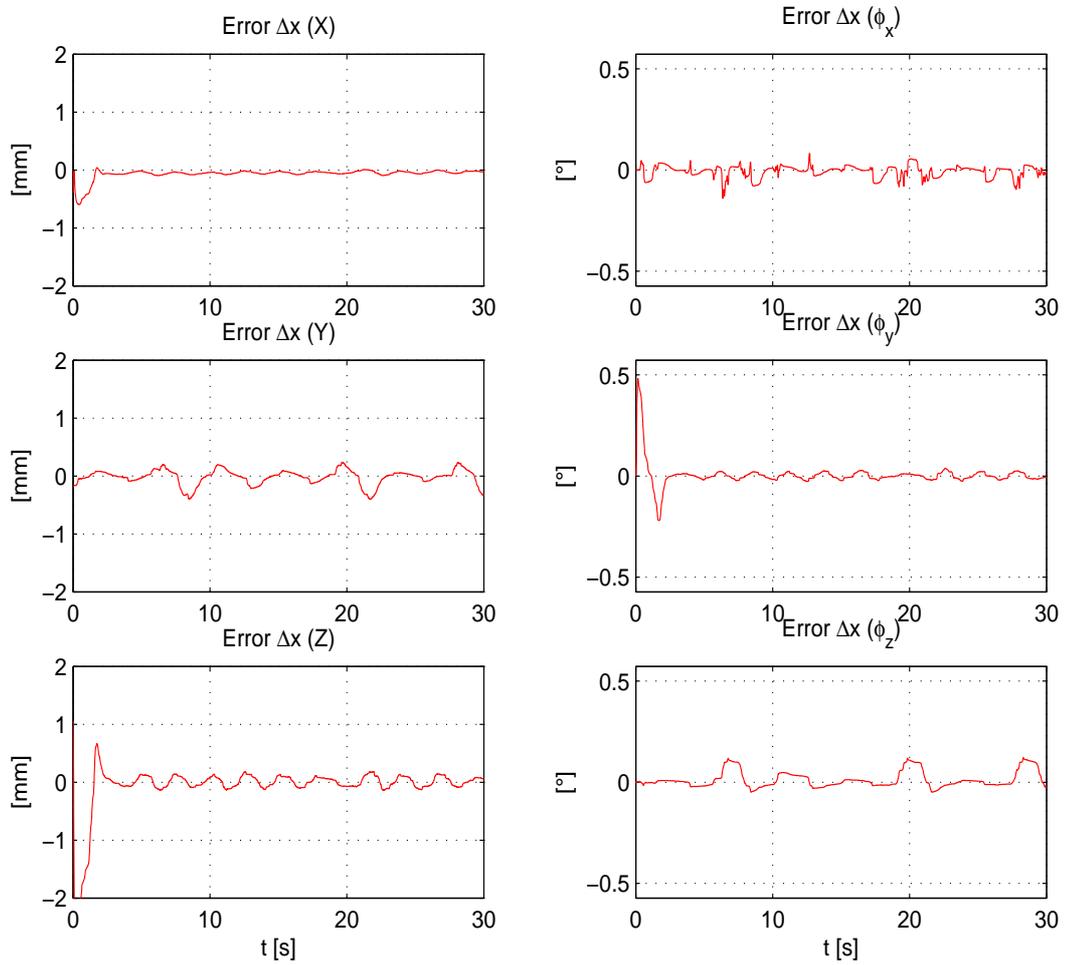


Figura 4.38: Experimento 4. Vector  $\Delta \mathbf{x}$  de error de seguimiento ( $\mathbf{x} - \mathbf{x}_a$ ).

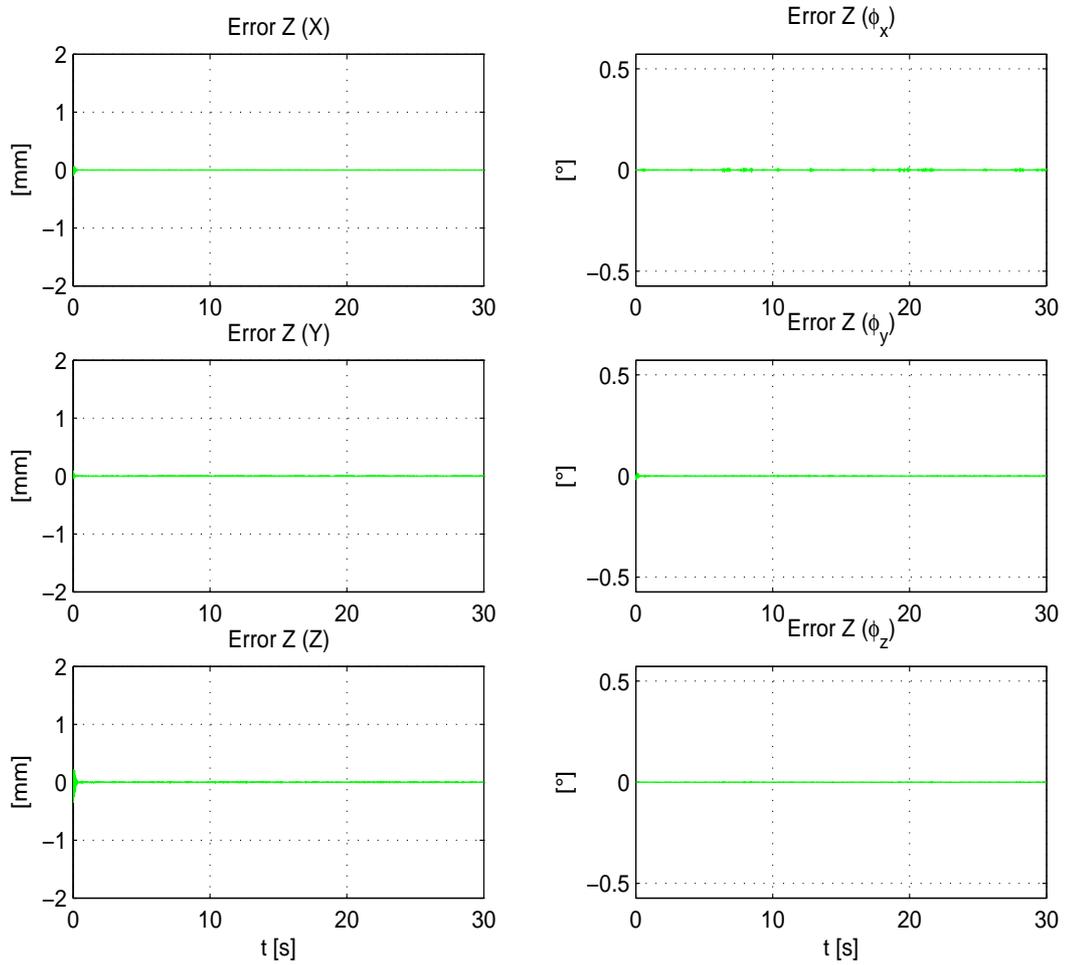


Figura 4.39: Experimento 4. Vector  $\mathbf{z}$  de error de observación ( $\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$ ).

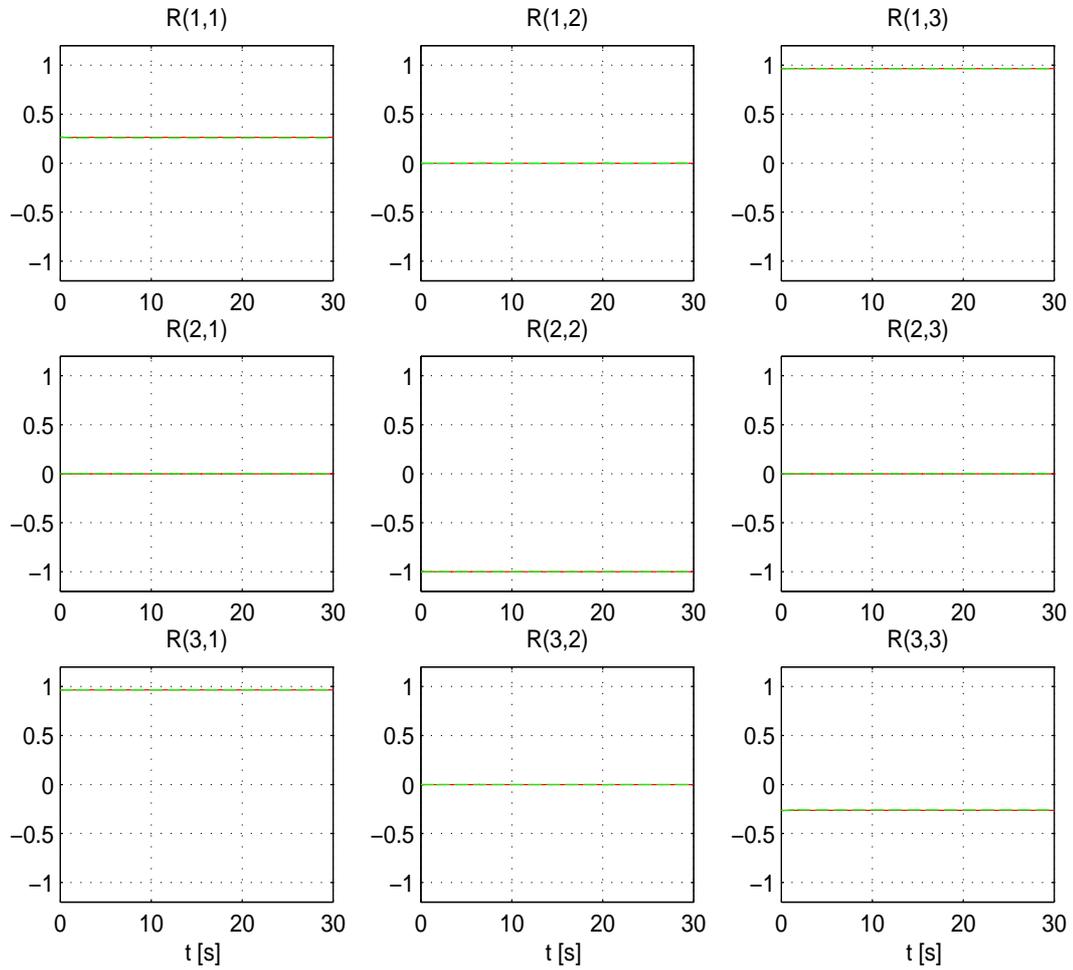


Figura 4.40: Experimento 4. Orientación deseada  ${}^0\mathbf{R}_d$  (—) vs orientación real  ${}^0\mathbf{R}_n$  (- -).

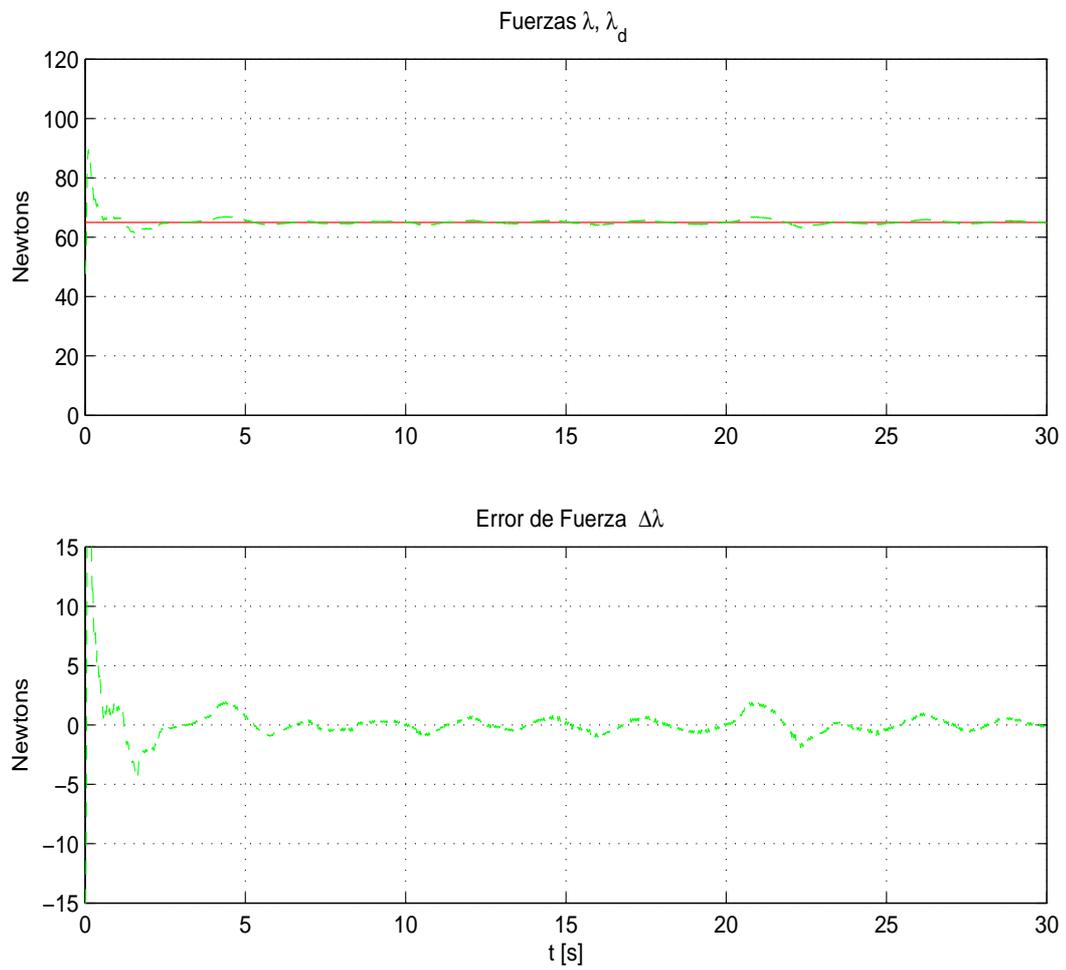


Figura 4.41: Experimento 4. Fuerza deseada  $\lambda_d$  (—) vs fuerza real  $\lambda$  (- -) y su correspondiente error de seguimiento ( $\lambda - \lambda_d$ ).

### 4.2.3. Discusión

En todos los casos se observó un seguimiento asintótico de las trayectorias con errores menores a 2 mm, como se muestra en las Figuras 4.2, 4.7, 4.12, 4.17, 4.22, 4.27, 4.32, 4.37, 4.3, 4.8, 4.13, 4.18, 4.23, 4.28, 4.33, 4.38. En las gráficas de  $\Delta \mathbf{x}$  para la superficie plana puede verse un fenómeno que no se esperaba; cuando se involucra movimiento a lo largo del *eje y*, es decir, cuando el robot realiza el círculo en el plano  $Y_o - Z_o$  (movimiento en 3D), justo después de pasar por sus valores máximo y mínimo sobre el eje  $Y_o$  existen errores de posición inducidos por el cuaternión unitario, que son detectables debido a que el patrón aparece en todos los experimentos como puede apreciarse en las Figuras.

En vista de esto se realizaron los Experimentos 3 y 4, en donde se comparan dos formas distintas de generar la trayectoria; el tercer experimento sigue el mismo esquema del Experimento 1 pero sólo realiza la trayectoria circular. Como se esperaba, presenta aproximadamente la misma magnitud de error (alrededor de 2 mm) al pasar por las zonas antes mencionadas. En el Experimento 4 se plantea un esquema no suave (ver Sección 4.1.2), y puede verse en la Figura 4.18 como el error disminuye aproximadamente un 15%.

Los resultados de observación  $\mathbf{z}$  se muestran en las Figuras 4.4, 4.9, 4.14, 4.19 para la superficie plana y en las Figuras 4.24, 4.29, 4.34, 4.39 para la superficie esférica. Los resultados son muy buenos, especialmente si se les compara con los obtenidos de las gráficas concernientes a  $\Delta \mathbf{x}$  que se discutieron anteriormente.

Las gráficas concernientes al seguimiento de orientación se presentan mediante los elementos de las matrices de rotación  ${}^0\mathbf{R}_d$  y  ${}^0\mathbf{R}_n$  Figuras 4.5, 4.10, 4.15, 4.20 para la superficie plana y en las Figuras 4.25, 4.30, 4.35, 4.40 para la superficie esférica. La orientación en el plano se definió perpendicular a la superficie y puede interpretarse como una tarea de regulación de orientación debido a que no se modifica durante los experimentos; en la superficie curva se contempla que la orientación cambia a lo largo de la trayectoria debido a que está se calcula automáticamente para mantener el efector final perpendicular a la superficie. En todos los experimentos puede verse que los resultados son muy buenos; en lugar de incluir gráficas de error para la matriz de rotación, se incluye una discusión basado en su índice de desempeño.

En lo que respecta a las gráficas de fuerza, lo primero que se puede observar es un impulso de fuerza presente en todos los experimentos, que se genera en el momento en que la herramienta hace contacto con la superficie; esto es

debido al efecto de impacto que se presenta al conmutar de un controlador en movimiento libre a otro en espacio restringido. Su efecto dura hasta que la acción integral del controlador en movimiento restringido se ajusta. Al observar las Figuras 4.6, 4.11, 4.16, 4.21 para la superficie plana y las Figuras 4.26, 4.31, 4.36, 4.41 para la superficie esférica, puede verse que el error de fuerza es regularmente menor a 5 Newtons para todas las trayectorias de fuerza contempladas. Si bien esto puede considerarse aceptable para fuerzas grandes, su desempeño cuando se aplican fuerzas pequeñas como en la Figura 4.36 es malo ya que significa un error porcentual de aproximadamente 50%. Intuitivamente puede pensarse que debe funcionar mejor a bajas velocidades. Para comprobar esto, se llevaron a cabo los experimentos que se muestran en las Figuras 4.16 y 4.21, donde puede apreciarse cómo el error de fuerza en la primera gráfica se mantiene la mayor parte del tiempo entre  $\pm 5$  y en su principio y final se destacan los errores más pequeños<sup>2</sup>. Por otro lado la gráfica de la Figura 4.21 se genera cuando la velocidad de las trayectorias de posición es constante, y puede apreciarse cómo existen más picos de fuerza cercanos a 5 Newtons.

En las Tabla 4.3<sup>3</sup> y 4.4 se muestran los índices de desempeño obtenidos para todos los experimentos, lo que representa una forma cuantitativa de ver cuáles son las tareas que realiza con mayor eficiencia. En la Tabla 4.3 puede verse como el índice de desempeño para la fuerza en el caso de la esfera es un poco menor que en la pendiente, influenciado en su mayoría por errores de calibración de la superficie en donde se realizan movimientos en 3D (experimento sobre de la pendiente). Al comparar los experimentos 1 y 2 de la pendiente puede verse que el algoritmo tiene una pequeña mejora en el índice de desempeño cuando se le pide seguir también una trayectoria de fuerza. Si se comparan los experimentos 3 y 4 puede decirse que las trayectorias suaves ayudan en la reducción del error de fuerza, pero con el inconveniente de que el desempeño en posición sufra una disminución. En cambio las trayectorias no suaves tienen un efecto contrario.

Si para la superficie esférica se comparan los experimentos 1 y 2, puede establecerse que el controlador funciona mejor a velocidades más bajas; esto es debido a que la diferenciación numérica usada para  $\dot{\mathbf{q}}$  funciona mejor cuando las desviaciones en posición articular son pequeñas. Del experimento

<sup>2</sup>recuerde que la figura (4.16) es generada cuando la posición cartesiana es creada por un polinomio de quinto orden y por lo tanto el principio y final de la gráfica de error de fuerza se genera a velocidades bajas.

<sup>3</sup>E.R. representa el error entre las matrices de rotación expresada como  ${}^0\mathbf{R}_n - {}^0\mathbf{R}_d$

	PENDIENTE				ESFERA			
	1	2	3	4	1	2	3	4
$\Delta\lambda[N]$	2.422	2.577	2.764	2.799	2.053	2.111	2.021	0.770
$\Delta x_p[\times 10^{-3}m]$	0.705	1.182	0.820	0.775	0.533	0.656	0.763	0.228
$\Delta x_\phi[\times 10^{-3}m]$	2.100	1.966	2.004	1.898	1.146	1.425	1.807	1.036
$z_p[\times 10^{-3}m]$	0.140	0.141	0.149	0.132	0.068	0.045	0.096	0.005
$z_\phi[\times 10^{-3}m]$	0.131	0.133	0.148	0.168	0.348	0.201	0.512	0.036
E.R. $[\times 10^{-2}]$	1.077	1.068	0.752	0.762	0.842	0.774	0.499	0.666

Tabla 4.3: Indices de desempeño general de fuerza, seguimiento, observación y orientación.

3 podría decirse que el desempeño; es aproximadamente equivalente a los demas, pero en la Figura 4.36 puede verse que el algoritmo no es bueno trabajando en niveles bajos de fuerza.

En el experimento 4 se probó la influencia del movimiento del robot cuando aplica fuerza en una superficie, y claramente puede observarse que el desempeño en fuerza es mucho menor cuando el robot no tiene que seguir alguna trayectoria en posición, lo cual puede apreciarse en la Figura 4.41.

En la Tabla 4.4 se presenta el índice de desempeño por elemento para los vectores  $\Delta\mathbf{x}$  y  $\mathbf{z}$ . Donde se pueden detectar efectos físicos, tales como la fricción y la gravedad. Por ejemplo en  $\Delta\mathbf{x}_x$  y  $\Delta\mathbf{x}_z$  se presentan valores más grandes en la mayoría de los experimentos que podrían ser causados por efectos de gravedad, dado que en los experimentos realizados en la superficie esférica donde el movimiento se restringe al plano  $(X_o - Z_o)$ , se presentan diferencias mayores en el desempeño de  $\Delta\mathbf{x}_x$  y  $\Delta\mathbf{x}_z$  comparado con el obtenido para  $\Delta\mathbf{x}_y$ . Algo interesante es que los valores más elevados de desempeño se encuentran en los elementos  $\mathbf{x}_{\phi_x}$ ,  $\Delta\mathbf{x}_{\phi_y}$  y  $\Delta\mathbf{x}_{\phi_z}$  que nos dan información acerca de la orientación; lo cual podría explicarse como un efecto causado por la fricción de contacto de los materiales.

Si se compara el experimento 3 y 4 se puede afirmar que las trayectorias no suaves reducen los índices de desempeño en casi todos los elementos; pero como ya se vio en la discusión de la Tabla 4.3 est acción incrementa el índice de desempeño en fuerza. En conclusión para seleccionar la mejor forma de generar trayectorias es necesario contemplar el tipo de tarea que se va a realizar.

	PENDIENTE				ESFERA			
	1	2	3	4	1	2	3	4
$\Delta x_x [\times 10^{-3}m]$	0.390	0.872	0.416	0.420	0.394	0.418	0.609	0.068
$\Delta x_y [\times 10^{-3}m]$	0.386	0.414	0.504	0.449	0.127	0.091	0.158	0.130
$\Delta x_z [\times 10^{-3}m]$	0.442	0.681	0.494	0.471	0.334	0.496	0.432	0.175
$\Delta x_{\phi_x} [\times 10^{-3}m]$	0.870	0.746	0.798	0.998	0.306	0.463	0.873	0.521
$\Delta x_{\phi_y} [\times 10^{-3}m]$	1.449	1.338	1.375	1.068	0.803	1.194	1.306	0.499
$\Delta x_{\phi_z} [\times 10^{-3}m]$	1.246	1.232	1.219	0.121	0.758	0.625	0.891	0.742
$z_x [\times 10^{-3}m]$	0.071	0.071	0.071	0.061	0.043	0.029	0.060	0.001
$z_y [\times 10^{-3}m]$	0.073	0.073	0.089	0.081	0.003	0.003	0.003	0.002
$z_z [\times 10^{-3}m]$	0.096	0.097	0.096	0.084	0.052	0.035	0.075	0.004
$z_{\phi_x} [\times 10^{-3}m]$	0.078	0.079	0.100	0.108	0.026	0.020	0.034	0.032
$z_{\phi_y} [\times 10^{-3}m]$	0.094	0.093	0.091	0.114	0.347	0.200	0.511	0.013
$z_{\phi_z} [\times 10^{-3}m]$	0.048	0.051	0.062	0.060	0.009	0.007	0.008	0.007

Tabla 4.4: Índices de desempeño de seguimiento y observación por elemento de  $\Delta \mathbf{x}$  y  $\mathbf{z}$  respectivamente.

En lo que respecta al error de observación  $\mathbf{z}$  puede verse en la Tabla 4.4 que aproximadamente uniforme con valores muy bajos; con excepción del elemento  $\Delta \mathbf{x}_{\phi_y}$  que en los experimentos 1, 2 y 3 concernientes a la esfera presenta valores elevados si se le compara con los obtenidos en los demás elementos.

Durante los experimentos existieron factores y dinámicas no modeladas que condicionaron la eficiencia del controlador. El primer problema fue la calibración de la superficie, debido a que el equipo de medición utilizado no tiene la resolución necesaria para calcular posiciones menores al milímetro o menores a un grado, lo que dificulta la obtención de buenos resultados. Así mismo, los efectos de fricción de contacto y deformaciones que sufren los materiales cuando se les aplica fuerza no son compensados y la bala <sup>4</sup> no cuenta con un balero rígido lo cual provoca desviaciones no compensadas del efector final. Otro factor importante es que el tiempo de muestreo de 10 milisegundos que se tenía en los experimentos repercutió en el desempeño del controlador, ya que resulta ser demasiado alto para la integración. Toman-

<sup>4</sup>elemento metálico y esférico montado en el efector final que tiene contacto directo con la restricción

do en cuenta todos estos factores, se considera que el esquema de control propuesto demuestra tener buenos resultados, con la excepción de tareas que necesiten aplicar fuerza pequeñas.

---

## Conclusiones

En esta tesis se presenta un algoritmo de control de posición/fuerza para robots manipuladores en movimiento restringido. El algoritmo propuesto se compone de un controlador-observador que necesita únicamente posición articular y fuerza como retroalimentación.

A pesar de no hacer uso del modelo del manipulador, y carecer de medición de velocidad, el controlador provee seguimiento asintótico en las trayectorias prescritas tanto en posición-orientación como en fuerza; presentando resultados locales de estabilidad asintótica.

Se hace uso del principio de ortogonalización para diseñar el controlador y poder distinguir señales de posición retroalimentadas de señales de fuerza mediante matrices de proyección.

Se realizaron pruebas experimentales en tareas de contacto que permiten tener un mejor conocimiento de los alcances de algoritmo de control propuesto. Se obtuvieron errores pequeños para el seguimiento de trayectorias de posición y mejores resultados en los errores de observación y seguimiento de orientación; en lo que respecta a control de fuerza, los resultados son aceptables para Fuerza de alrededor de 65N en el cual se obtienen errores porcentuales de aproximadamente el 7%, pero para valores de referencia

pequeños de alrededor de 10N, los resultados son malos. El índice de desempeño propuesto  $CE_{RMS}$ , permitió tener una forma cuantitativa para evaluar el desempeño del algoritmo en diversas tareas, siendo el mejor (como se esperaba) el experimento 4 de las pruebas realizadas concerniente a la superficie esférica. Pudo mostrarse experimentalmente que el algoritmo es capaz de seguir trayectorias en superficies curvas aunque el diseño se sustente en que el Jacobiano de la restricción es constante (es decir supone superficies planas).

De una forma global, los resultados obtenidos pueden considerarse buenos, considerando que los experimentos fueron realizados en un manipulador industrial de seis grados de libertad del que no se emplea su modelo dinámico, ni su cinemática inversa y no se tiene un conocimiento exacto de las superficies en las que tiene que aplicar fuerza. El tiempo de muestreo de 10 milisegundos es uno de los principales obstáculos en el desempeño del algoritmo. Utilizando simulaciones, se puede demostrar que la disminución del tiempo de muestreo mejora considerablemente el desempeño, permitiendo una mejor sintonización de las ganancias.

Como trabajo futuro podría utilizarse un esquema de compensación para la fricción de contacto, introducir un observador de velocidad articular, investigar por qué el cuaternión genera errores en determinadas zonas del espacio de trabajo, mejorar los resultados de fuerza introduciendo una acción PID para las variables de fuerza y reducir el tiempo de muestreo, aunque este sea un problema de hardware.

## 5.1. Problemas abiertos

Existen varios problemas que pueden atacarse para mejorar aún más el desempeño. Uno de ellos es implementar un observador de velocidad articular debido a que la posición real del robot se construye a partir de las velocidades articulares y como ya se mostró en (Arteaga y Kelly 2004) la utilización de observadores mejora el desempeño del sistema si se compara con la obtención de velocidad articular mediante una diferenciación numérica. Otro de los problemas que puede atacarse es referente al cuaternión unidad debido a que existen discontinuidades prácticas, por ejemplo cuando la quinta articulación pasa por su valor cero provoca un giro de  $180^\circ$  sobre la articulación 4 y 6. También puede atacarse el problema de compensación de gravedad ya que cuando se trabaja en movimiento libre está causa oscilaciones menores de la

posición. Podrían considerarse los efectos de fricción en articulaciones y en mayor medida los efectos de fricción por contacto con la superficie; los cuales mediante la experimentación en diferentes superficies crean la intuición de tener un efecto mayor en el desempeño. Por ultimo podría modificarse el esquema de control para considerar una estructura PID en la parte concerniente a la fuerza; debido a que la actual forma integral presenta incrementos iniciales considerables de fuerza cuando se trabaja en movimiento restringido.

---

# DESCRIPCIÓN DEL SISTEMA

El sistema experimental consiste de un robot industrial A465 de seis grados de libertad en arquitectura abierta, un sensor de fuerza montado sobre la muñeca del manipulador, una bala o balero colocado sobre el sensor, una placa de Nylamid lubricado, una lamina de acero inoxidable de 2 milímetros y un casquete esférico de plomo de 1 centímetro con baño metálico, que hacen la función de restricción geométrica y una computadora personal, encargada del calculo de la ley de control. En la Figura A.1 se muestra una fotografía de la plataforma experimental en la que se identifica la disposición de los componentes.

## A.1. Robot industrial A465

El robot manipulador considerado en está tesis para llevar a cabo la implementación en tiempo real es un robot de seis grados de libertad con articulaciones de revolución de la empresa canadiense *CRS Robotics*. Los actuadores de las articulaciones son servomotores de CD con retroalimentación por codificador óptico (encoder) por cuadratura, estos son del tipo incremental. Las características más importantes del robot A465 son presentadas en la Tabla



Figura A.1: Sistema experimental con componentes

A.1, para mayores detalles ver (CRS Robotics 2001).

## A.2. Sensor de fuerza

El sensor de fuerza empleado, es el sensor *JR3* modelo 67M25A 63N4 que se muestra en la Figura A.2, cuyas características de operación son las indicadas en el (JR3 2006). Es un dispositivo de aluminio monolítico, compuesto de galgas extensiométricas que sensa las cargas impuestas al sensor, para producir señales que representan las fuerza sobre los tres ejes y momentos alrededor de estos. Los ejes del sensor JR3 son orientados de tal forma que los ejes  $x$  y  $y$  se encuentran sobre el cuerpo del sensor y el eje  $z$  perpendicular al plano  $xy$ . El punto de referencia para todos los datos de la carga es el centro geométrico del sensor. Con el objeto de reducir al máximo la fricción entre el manipulador y la restricción se utilizó un bala o balero colocado en la parte

Parámetro	Descripción
Numero de articulaciones	6
Peso	31 kg
Carga de Trabajo	2 kg
Repetibilidad	$\pm 0.05$ mom
Transmisión	Drive armónico
Actuadores	servomotores de CD

Tabla A.1: Características más importantes del Robot A465.



Figura A.2: Sensor de fuerza JR3 modelo 67M25A-U560.

frontal del sensor.

### A.3. Protección contra impactos SR-45

El dispositivo contra impactos SR-45 es fabricada por *ATI Industrial Automation*. Cuando el robot realiza tareas de interacción con ambientes rígidos es susceptible de sufrir daños en caso de impacto, esfuerzo torsional excesivo, momentos o por cualquier combinación de estos. Para dar solución a este problema, existen dispositivos neumáticos que ofrecen protección a los robots industriales y herramientas en caso de impactos accidentales o cargas inesperadas (ver Figura A.3).

Cuando un impacto ocurre, el protector proporciona una señal al controlador del manipulador para detener el funcionamiento antes de que ocurra

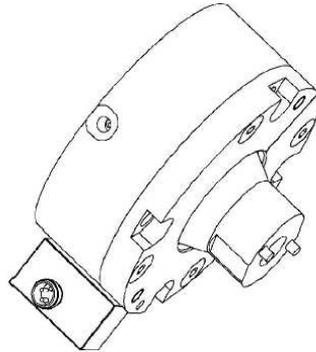


Figura A.3: Protector neumático

algún daño irreparable al robot o herramienta. El umbral al que el protector trabaja es ajustable controlando la presión de aire. Para desactivar el protector es necesario quitar la fuerza perturbadora, para así permitir al protector tomar su geometría normal activa. Para más información consultar ATI Industrial (2001).

#### A.4. Tarjetas PCI-Flex Motion-6C



Figura A.4: Tarjeta PCI-Flex Motion-6C

En la Figura A.4 se muestran las tarjetas fabricadas por la compañía *National Instruments*; en este equipo experimental se hace uso de dos de ellas para crear la interfaz entre la PC y el robot. La primera para realizar la

interfaz con los sensores de posición de las articulaciones, y la segunda para mandar las señales de voltajes a los actuadores. Cabe mencionar que existen dos módulos de conexión entre la PC y los robots; estos son el controlador C500 (viene junto con los robots y es utilizado como acondicionador de señal) y modulo de interconexión UMI; los cuales pueden verse de manera más especifica en Castillo Sanchez (2002).

Las tarjetas son compatibles con ranuras PCI, cuentan con 6 salidas y 8 entradas analógicas multiplexadas y los voltajes de entrada/salida pueden variar en un rango de  $\pm 10V$  y la corriente de salida fluctúa en un rango de  $\pm 10mA$ .

## **A.5. Computadora y lenguaje de programación**

La computadora empleada tiene un procesador Intel Pentium IV a 2.4 Ghz con memoria RAM de 512 MB, como características importantes para la implementación, el lenguaje de programación utilizado está basado en C bajo el entorno del programa *LabWindows 6.0* de la compañía *National Instruments*; que brinda la opción de diseñar interfaces gráficas que permiten una mejor visualización e implementación de lo que se hace en los experimentos. El programa final de control para las 6 articulaciones permite utilizar de forma segura un tiempo de muestreo de 10ms, debido al tiempo que tarda la interfaz en adquirir las señales de encoder y fuerza; tomando en cuenta el tiempo de procesamiento matemático para el cálculo de los voltajes de salida para actuadores.

---

## Elección de trayectorias

En este apéndice se explicará de manera general el desarrollo de la interfaz gráfica para el usuario empleada para realizar los experimentos, el significado de los parámetros que se ajustan en pantalla y la forma en la cual se generaron las trayectorias.

### **B.1. Interfaz gráfica**

LabWindows/CVI es un ambiente de desarrollo gráfico con librerías que ayudan a crear programas de múltiples aplicaciones. Este paquete contiene un conjunto de herramientas que facilitan la adquisición, análisis y presentación de datos. Para esto es necesario la creación de una interfaz gráfica de usuario que tiene como objetivo crear un ambiente amigable entre el operador y el computador. La interfaz gráfica de usuario que se diseñó fue pensada para realizar tres tareas principales: control, ajuste de parámetros, monitoreo y generación de trayectorias. En la Figura B.1 se muestra la interfaz gráfica en donde se identifican zonas de importancia.

Basados en la Figura B.1 se describirán a continuación de una forma breve las funciones que cumplen los elementos ahí señalados:

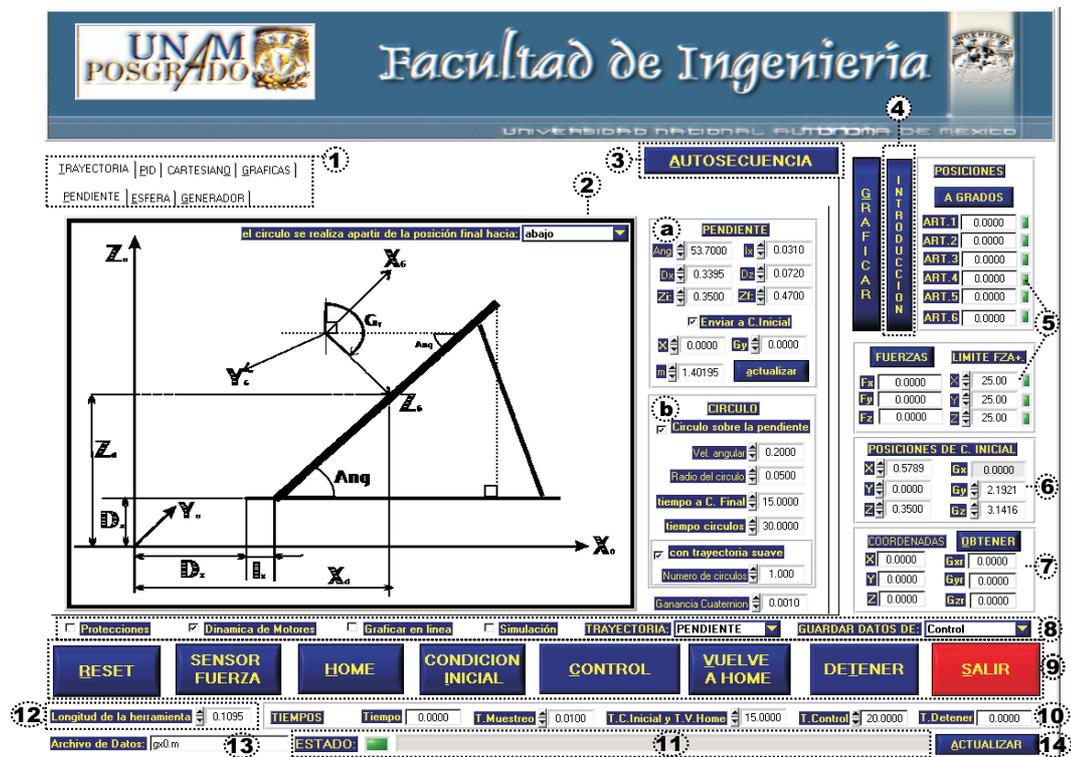


Figura B.1: Interfaz gráfica diseñada

1. **Selector de ventana de parámetros.-** Permite seleccionar la ventana de parámetros que se desee ajustar:

- *TRAYECTORIA.-* Para superficie plana (PENDIENTE) y para superficie esférica (ESFERA), ver sección (B.2.2).
- *CARTESIANO.-* Permite el ajuste de ganancias para el esquema controlador-observador para el movimiento restringido presentado en esta tesis.
- *PID.-* Selecciona la ventana de ajustes de ganancias para el controlador PID utilizado en el control del robot cuando ejecuta movimientos sin restricción; los botones (HOME, CONDICIÓN INICIAL, VUELVE A HOME Y DETENER) utilizan a este controlador.

2. **Ventana de parámetros.-** En ella se despliegan los parámetros nu-

méricos modificables y ayuda visual, tales como:

- a) *Parámetros de superficie.*- Parámetros físicos reales que se toman directamente del equipo de experimentación, ya sean distancias o ángulos.
  - b) *Parámetros de trayectoria.*- Usados para fijar tiempos y tipos de trayectorias.
3. **Autosecuencia.**- Es un botón utilizado para realizar de forma automática los experimentos mediante un proceso preestablecido en el código del programa, que se explicará más adelante en el punto concerniente a *botones de mando manual*.
  4. **Introducción.**- El botón despliega una ventana de información sobre el software y las funciones que posee.
  5. **Indicadores de Posición/Fuerza .-** Despliega información sobre la posición al momento de presionar el botón *A GRADOS* y sobre fuerza cuando se presiona el botón *FUERZAS* tiene la opción de indicar por medio de led's si se violaron límites de fuerza o movimiento (si se activa la opción *Protecciones* de la línea de opciones mencionada más adelante).
  6. **Posiciones de Condición Inicial.**- Sirve para establecer parámetros de posición-orientación basado en ángulos de Euler (ZYZ) para llevar el robot a la superficie e iniciar el control restringido utilizando cinemática inversa.
  7. **Coordenadas.**- Es utilizado para obtener la posición-orientación actual del robot usando cinemática directa, a partir de valores angulares de las articulaciones cuando se presiona el botón *OBTENER*.
  8. **Opciones.**- Son utilizadas para modificar procedimientos del programa fuente y sus funciones son las siguientes:
    - *Protecciones.*- Habilita condiciones de protección para posiciones que el robot no puede alcanzar, fuerzas que exceden los límites

establecidos y limita el voltaje de salida para los actuadores a un límite establecido por el usuario<sup>1</sup>.

- *Dinámica de motores.*- Habilita la utilización de las dinámicas de los motores (actuadores) en el movimiento del robot.
  - *Datos en línea.*- Usado para presentar las gráficas y datos de posición y fuerzas en forma continua durante el tiempo que dura el experimento.
  - *Simulación.*- Habilita un simulador que cumple la función de Matlab y puede generar el archivo de datos como si se realizara el experimento real.
  - *Trayectoria.*- Sirve para seleccionar el tipo de superficie (plano o esfera) en la que se realizará el experimento.
  - *Guardar datos.*- Es utilizado para seleccionar que datos de las etapas de control se almacenarán.
9. **Tiempos.**- Permite fijar el tiempo de muestreo, el tiempo para las etapas de control (en movimiento libre –HOME-VUELVE A HOME– y en movimiento restringido –CONTROL–) y monitorear el tiempo transcurrido del experimento.
10. **Botones de mando manual.**- Son otra opción para realizar experimentos. La ventaja es que son más flexibles, pero las condiciones de conmutación entre las etapas de control son menos precisas con respecto al tiempo; sus funciones son las siguientes.
- *Reset.*- Botón utilizado para restablecer los *timer's* y contadores del programa; también fija posición actual del robot como condición *HOME* (utilizado para establecer la posición al prender el equipo experimental) y no la pierde hasta apagar el equipo.
  - *Salir.*- Botón utilizado para terminar un experimento; al presionar este botón se crea el archivo de datos.
  - *Detener.*- Botón independiente, es utilizado para hacer pausa en el experimentos cuando sea necesario, sin importar en que condiciones se encuentre el experimento; este botón se activa automáti-

---

<sup>1</sup>sirve para evitar movimientos bruscos cuando ocurren o se piensa que pudieran ocurrir singularidades.

amente cuando está habilitada la opción *Protecciones* y se viola alguno de los límites considerados para posición y/o fuerza.

El orden en que se describen los siguientes botones son el procedimiento que realiza el botón *Autosecuencia* de forma automática.

- *Sensor Fuerza.*- Habilita la adquisición de datos del sensor de fuerza.
  - *Home.*- Mantiene al robot en la configuración fijada por el botón *RESET* mediante un controlador PID.
  - *Condición Inicial.*- Es utilizado después del botón *HOME* y su función es llevar al robot de la configuración *HOME* a la establecida por los parámetros de *Posiciones de Condición Inicial*; mediante un controlador PID.
  - *Control.*- Conmuta el controlador PID por el algoritmo de control en movimiento restringido y realiza la tarea seleccionada por la *ventana de parámetros*.
  - *Vuelve a Home.*- Conmuta a un controlador PID (movimiento libre) para regresar el robot a la configuración de *HOME*.
11. **Estado del Experimento.**- Mediante mensajes escritos informa al operador en que etapa del proceso se encuentra el experimento, posibles problemas al establecer trayectorias y, mediante el led ubicado a su izquierda, advierte violaciones de posiciones y/o fuerza y voltajes saturados.
  12. **Archivo de Datos.**- Permite establecer un nombre diferente para el archivo de datos sin necesidad de modificar el código fuente del programa.
  13. **Longitud de la herramienta.**- Permite modificar la longitud de la herramienta para compensar posibles errores cometidos al tomar mediciones, fijar el robot (posición *HOME*) o en parámetros del entorno.
  14. **Botón Actualizar.**- Es utilizado para volver a capturar todos los parámetros una vez iniciado el experimento.

## B.2. Descripción de trayectorias

### B.2.1. Trayectorias basadas en polinomios

Las trayectorias de movimiento deseadas se generan con el propósito de guiar los movimientos del robot de una configuración inicial a otra final. Comúnmente, las trayectorias se describen en el espacio operacional del robot y en seguida se utiliza la cinemática inversa para reconstruir los movimientos que las articulaciones deberán ejecutar. Para asegurar que los valores de la velocidad y la aceleración de la trayectoria no sean discontinuos al inicio y final del recorrido, se proponen polinomios de quinto u sexto orden los cuales trabajan en el espacio de trabajo y en el espacio de las articulaciones, respectivamente.<sup>2</sup>

A continuación se ejemplifica la forma en que se generan las trayectorias tomando como referencia un polinomio de quinto orden

$$p_d(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 + a_4t^4 + a_5t^5, \quad (\text{B.1})$$

donde  $p_d(t)$  representa la posición deseada en función del tiempo. Los coeficientes  $a_i$  deben ser calculados para satisfacer valores preestablecidos de  $p_d(t_0)$ ,  $p_d(t_f)$  y sus derivadas.

Tomando la primera y segunda derivada de (B.1) se obtiene la velocidad y aceleración correspondiente. *i.e.*,

$$\dot{p}_d(t) = a_1 + 2a_2t + 3a_3t^2 + 4a_4t^3 + 5a_5t^4 \quad (\text{B.2})$$

$$\ddot{p}_d(t) = 2a_2 + 6a_3t + 12a_4t^2 + 20a_5t^3 \quad (\text{B.3})$$

Evalutando (B.1)-(B.3) en un tiempo inicial  $t_0 = 0$ , se obtiene

$$\begin{aligned} p_d(0) &= a_0 & a_0 &= p_i \\ \dot{p}_d(0) &= a_1 & \Rightarrow & a_1 = 0 \\ \ddot{p}_d(0) &= 2a_2 & & a_2 = 0, \end{aligned}$$

donde  $p_i$  es la posición inicial. Para un tiempo final  $t_f = t$  los polinomios correspondientes a la posición, velocidad y aceleración (B.1)-(B.2) están dados

---

<sup>2</sup>Cabe hacer notar que este esquema también podría utilizarse para trayectorias de fuerza y/o torques.

como sigue:

$$\begin{aligned} p_f &= p_i + a_1 t_f + a_2 t_f^2 + a_3 t_f^3 + a_4 t_f^4 + a_5 t_f^5 \\ 0 &= a_1 + 2a_2 t_f + 3a_3 t_f^2 + 4a_4 t_f^3 + 5a_5 t_f^4 \\ 0 &= 2a_2 + 6a_3 t_f + 12a_4 t_f^2 + 20a_5 t_f^3, \end{aligned}$$

donde  $p_d(t)$  se sustituye por  $p_f$  que es la posición final y  $a_0$  ha sido sustituido por  $p_i$ . La correspondiente velocidad y aceleración se igualan a cero con el propósito de que el efector final llegue a la posición final deseada con una velocidad y aceleración cero. En forma matricial se tiene

$$\begin{bmatrix} p_f - p_i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_f^3 & t_f^4 & t_f^5 \\ 3t_f^2 & 4t_f^3 & 5t_f^4 \\ 6t_f & 12t_f^2 & 20t_f^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.4})$$

o en forma compacta (B.4) se puede escribir como una ecuación lineal

$$\mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{a} \quad (\text{B.5})$$

De esta manera conociendo las posiciones y el tiempo requerido para que el efector final del robot llegue de una posición inicial  $\mathbf{p}_i$  a una final  $\mathbf{p}_f$ , se pueden obtener los coeficientes  $a_3$ ,  $a_4$  y  $a_5$ ; despejando la expresión algebraica (B.5), *i.e.*

$$\mathbf{a} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{x} \quad (\text{B.6})$$

Por ejemplo, la Figura B.2 muestra las trayectorias de posición deseada para el robot A465 para los primeros quince segundos ( $t = 15$ ), que es el tiempo en el cual los robots parten de su posición inicial (*HOME*) y se acercan a la superficie (*CONDICIÓN INICIAL*); cabe hacer notar que cuando el robot ejecuta movimiento libre se utilizaron polinomios de sexto orden.

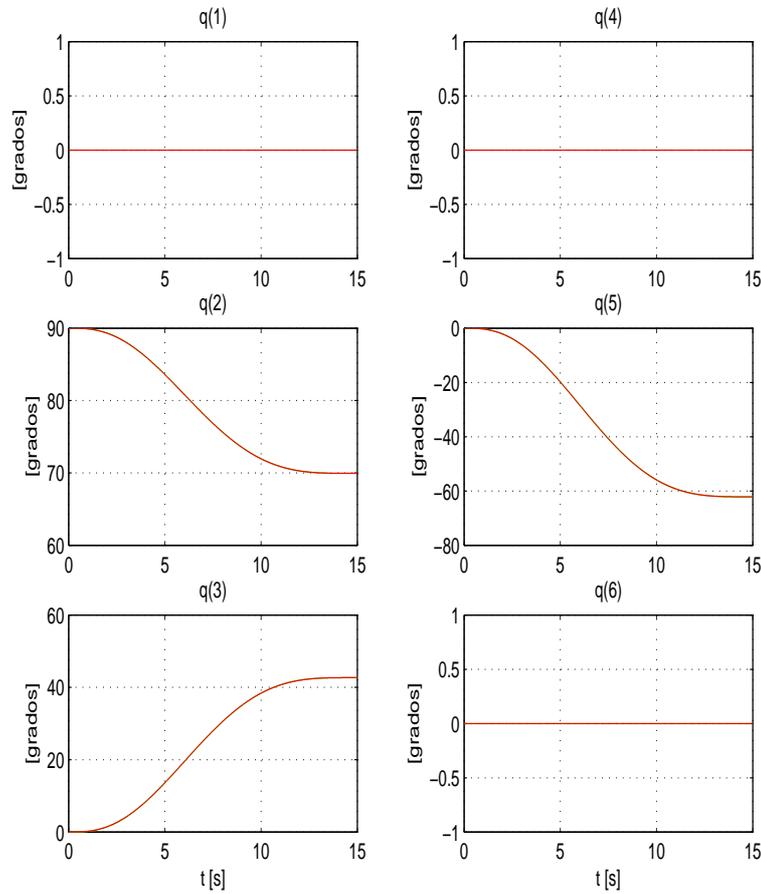


Figura B.2: Trayectoria creada por un polinomio de orden 6, para las articulaciones del Robot A465

### B.2.2. Implementación para superficie plana

El primer paso para implementar el algoritmo, es describir la superficie, para lo cual se utiliza la Figura B.3, donde

$$z = m(x - b) = mx - mb = mx - \bar{b}, \quad (\text{B.7})$$

con  $\bar{b} = mb$ ; esto quiere decir que la restricción está dada por

$$\varphi(x) = mx - z - \bar{b} = 0. \quad (\text{B.8})$$

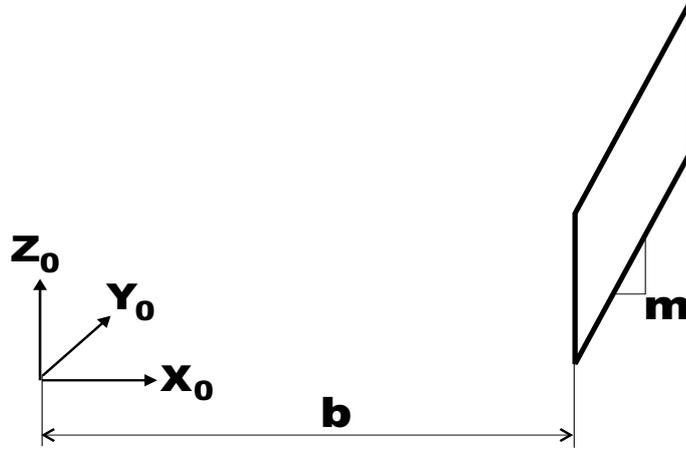


Figura B.3: Diagrama de la ecuación de una pendiente

También es posible normalizar la restricción como

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{m^2 + 1}}(mx - z - \bar{b}) \quad (\text{B.9})$$

Puesto que  $\mathbf{x}$  está dado por

$$\mathbf{x} = [x \ y \ z \ \phi_x \ \phi_y \ \phi_z]^T \quad (\text{B.10})$$

Nótese que se usa  $\mathbf{x}$  como vector y  $x$  como escalar.

$$\dot{\mathbf{x}} = [\dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z} \ w_x \ w_y \ w_z]^T \quad (\text{B.11})$$

se obtiene

$$\mathbf{J}_{\varphi\mathbf{x}} = \frac{\partial\varphi(x)}{\partial\mathbf{x}} = \frac{1}{\sqrt{m^2 + 1}} [m \ 0 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0] \quad (\text{B.12})$$

y como  $\mathbf{P}_x(x) \triangleq \mathbf{J}_{\varphi\mathbf{x}}^+ \mathbf{J}_{\varphi\mathbf{x}}$  la matriz  $\mathbf{P}_x(x)$  que proyecta al vector  $\mathbf{x}$  sobre la normal a la superficie es la siguiente

$$\mathbf{P}_x(x) = \frac{1}{\sqrt{m^2 + 1}} \begin{bmatrix} m^2 & 0 & -m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -m & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.13})$$

La matriz que mapea al vector  $\mathbf{x}$  sobre la tangente de la superficie es  $\mathbf{Q}_x(x) \triangleq \mathbf{I}_{n \times n} - \mathbf{P}_x(x)$ . Del primer y tercer elementos se tiene

$$1 - \frac{m^2}{m^2 + 1} = \frac{1}{m^2 + 1}, \quad 1 - \frac{1}{m^2 + 1} = \frac{m^2}{m^2 + 1},$$

De este modo así

$$\mathbf{Q}_x(x) = \frac{1}{\sqrt{m^2 + 1}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m & 0 & m^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.14})$$

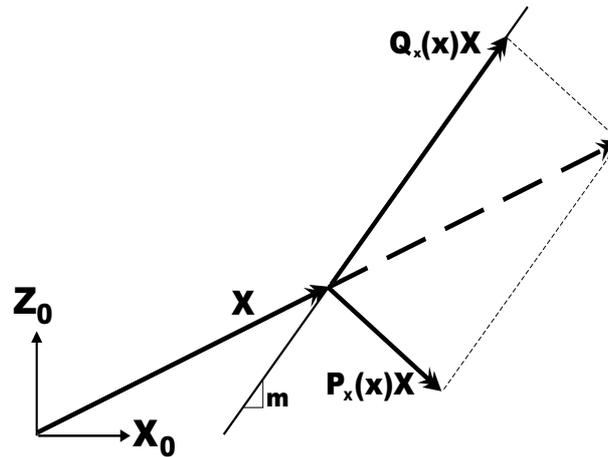


Figura B.4: Mapeo de las Matriz  $\mathbf{P}_x(x)$  y  $\mathbf{Q}_x(x)$

para entender de forma más clara la funciones de estas matrices véase la Figura B.4.

Utilizando 3.3 y B.2, se puede construir una metodología para implementar el algoritmo. De acuerdo con las ecuaciones (3.58) y (3.59), para reconstruir el vector de estados  $\mathbf{x}_a$  a partir de

$$\dot{\mathbf{x}}_a = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}}_d \\ {}^0\boldsymbol{\omega}_d - \mathbf{k}_\varepsilon {}^0\mathbf{R}_d^d \boldsymbol{\varepsilon}_n \end{bmatrix}, \quad (\text{B.15})$$

se tiene que  $\dot{\mathbf{p}}_d$  puede generarse mediante polinomios usando la ecuación (B.2) y el despeje de la ecuación (B.7);  $\mathbf{w}_d = 0$  debido a que no se quiere que la orientación cambie cuando se mueve en la superficie,  $\mathbf{k}_\varepsilon$  es una ganancia, y  ${}^0\mathbf{R}_d$  y  ${}^0\boldsymbol{\varepsilon}_n$  deben calcularse.

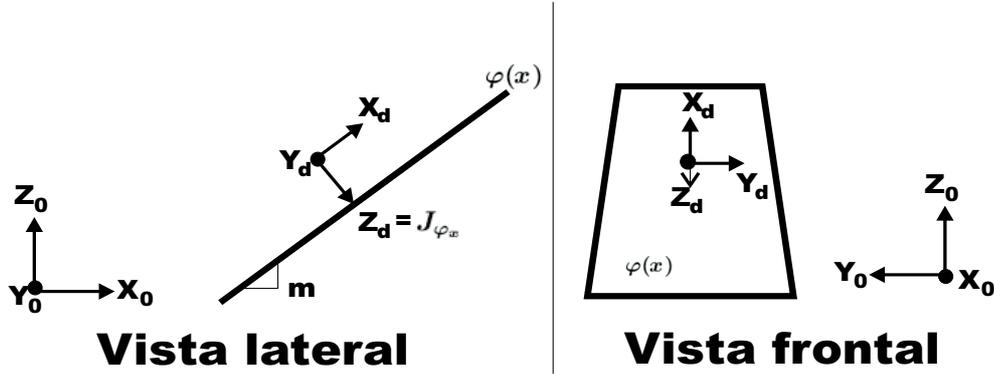


Figura B.5: Definición de la matriz de orientación  ${}^0\mathbf{R}_d$ .

También se necesita definir la orientación deseada  ${}^0\mathbf{R}_d$ . Para ello se usa la Figura B.5. Hay dos posibles formas de generar la matriz  ${}^0\mathbf{R}_d$ , la primera es a partir del Jacobiano de la restricción  $\mathbf{J}_{\varphi x}$  y definir la orientación del eje  $y$ ; la segunda es a partir del valor de la pendiente  $m$  en la cual está la superficie. En ambos el resultado es el mismo. A continuación se explicarán las dos maneras <sup>3</sup>.

Si se utiliza el Jacobiano de la restricción (B.12)<sup>4</sup>, es posible obtener el vector  $\mathbf{z}_d$ , perpendicular a la superficie. Además se define el eje  $\mathbf{z}_d = [0 \ -1 \ 0]^T$  debido a que apunta en sentido contrario a  $\mathbf{y}_0$  y se utiliza el producto cruz para obtener el vector correspondiente al eje  $\mathbf{x}_d$  de la siguiente manera

$$\mathbf{x}_d = \mathbf{y}_d \times \mathbf{z}_d = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{d2}z_{d3} - \mathbf{y}_{d3}z_{d2} \\ \mathbf{y}_{d3}z_{d1} - \mathbf{y}_{d1}z_{d3} \\ \mathbf{y}_{d1}z_{d2} - \mathbf{y}_{d2}z_{d1} \end{bmatrix} \quad (\text{B.16})$$

<sup>3</sup>se utilizó la segunda para hacer la implementación.

<sup>4</sup>la ecuación B.12 es un vector de magnitud unitaria, por lo que puede utilizarse como sustituto.

con lo cual se puede definir la matriz de rotación de la siguiente manera

$${}^0\mathbf{R}_d = [\mathbf{x}_d \quad \mathbf{y}_d \quad \mathbf{z}_d] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{m^2+1}} & 0 & \frac{m}{\sqrt{m^2+1}} \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{m}{\sqrt{m^2+1}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{m^2+1}} \end{bmatrix} \quad (\text{B.17})$$

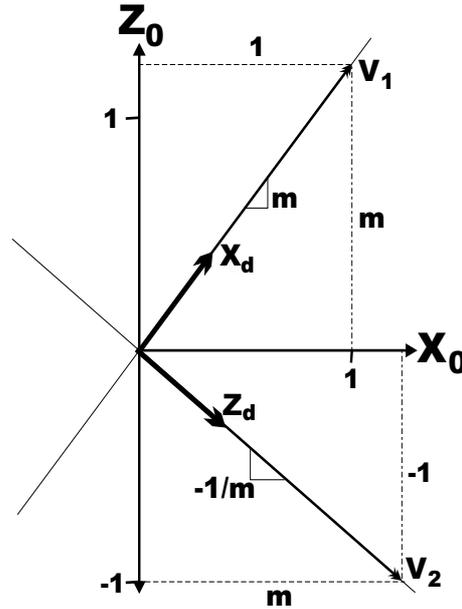


Figura B.6: Diagrama base para calcular la matriz de orientación  ${}^0\mathbf{R}_d$  utilizando como parámetro a la pendiente  $m$ .

Si se usa la pendiente  $m$ , el eje  $\mathbf{y}_d = [0 \quad -1 \quad 0]^T$  puede definirse igual, y se usa la Figura B.6 para ilustrar los siguientes argumentos:

1. El sistema coordenado  $\mathbf{O}_0x_0y_0z_0$  base es ortonormal, es decir sus ejes coordenados son ortogonales y tienen magnitud 1.
2. La ecuación de la pendiente entre dos puntos es  $m = \frac{z_f - z_i}{x_f - x_i}$ . Si se define  $z_i = 0$  y  $x_i = 0$ , la ecuación de la pendiente se reduce a  $m = \frac{z_f}{x_f}$ .
3. La pendiente de la perpendicular a la pendiente  $m$  es  $m_p = \frac{-1}{m}$ .

4. La norma de un vector  $\mathbf{v} = [x \ y \ z]^T$  es

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (\text{B.18})$$

Con base en los puntos anteriores y haciendo uso de la Figura B.6 se obtiene que  $\mathbf{v}_1 = [1 \ 0 \ m]^T$  y  $\mathbf{v}_2 = [m \ 0 \ -1]^T$ . Estos vectores no son unitarios, por lo que hay que normalizarlos para que tengan la propiedad de tener magnitud unitaria:

$$\|\mathbf{v}_1\| = \|\mathbf{v}_2\| = \sqrt{m^2 + 1} \quad (\text{B.19})$$

$$\mathbf{x}_d = \frac{1}{\|\mathbf{v}_1\|} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ m \end{bmatrix} \quad (\text{B.20})$$

$$\mathbf{z}_d = \frac{1}{\|\mathbf{v}_2\|} \begin{bmatrix} m \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.21})$$

lo que genera la misma matriz  ${}^0\mathbf{R}_d$  de la ecuación (B.17).

Una vez calculada la matriz de orientación deseada, es necesario calcular  ${}^0\boldsymbol{\varepsilon}_n$  mediante las ecuaciones (2.83) y (3.60), donde la matriz  ${}^0\mathbf{R}_d$  de la ecuación (3.60) se genera mediante la evaluación de los valores angulares de las articulaciones.

Debido a características específicas del equipo experimental, fue necesario modificar la ecuación (B.7) para lograr calcular la posición y orientación de *CONDICIÓN INICIAL* (punto en la superficie donde empieza la trayectoria) de forma exacta; para ello se utilizó la Figura B.7, con lo cual se reescribe la ecuación de la siguiente forma

$$x = (z - Dz) \tan\left(\frac{Ang * \pi}{180}\right) + Dx + Ix \quad (\text{B.22})$$

donde  $Dz$  es un incremento en distancia sobre el eje  $z$ ,  $Ang$  es el ángulo de inclinación de la pendiente,  $Dx$  y  $Ix$  son incrementos en distancia sobre el eje  $x$  correspondientes a la estructura física real. Con estos datos se calcula el valor de la pendiente  $m$  y el ángulo  $G_y$  utilizados para la matriz de rotación, mediante las siguientes ecuaciones

$$m = \frac{z - Dz}{x - Dx - Ix} \quad (\text{B.23})$$

$$G_y = \frac{(180 - ang)\pi}{180} \quad (\text{B.24})$$

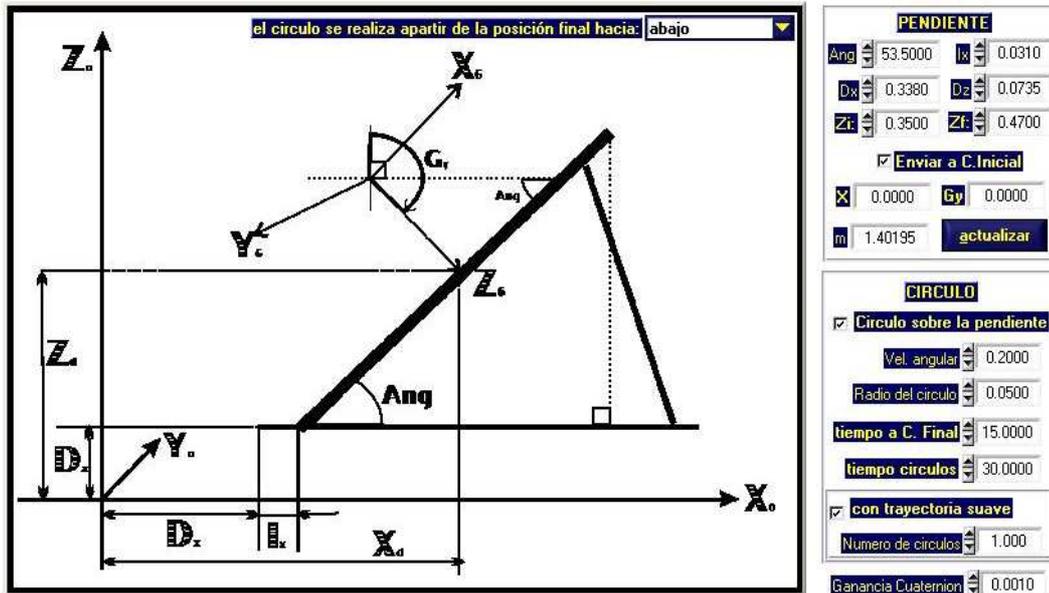


Figura B.7: Diagrama para superficie plana con parámetros

cabe hacer notar que este método no sirve cuando la superficie es totalmente horizontal debido a que las ecuaciones están en función de  $z$  y si la superficie es horizontal, la variable  $z$  pasaría a ser un valor constante. En la Figura B.8 se muestra una de las trayectorias recta-círculo estudiadas en el Capítulo 5.

### B.2.3. Implementación para superficies esféricas

Se utilizó un casquete esférico<sup>5</sup> como superficie, por lo que se puede usar la parametrización de una esfera como base para describir la superficie; mediante la Figura B.9 y la ecuación dada en Swokowski y Earl (1994), para describir una esfera de radio  $r$  con el centro en el punto  $p_0(h, k, l)$  es la siguiente

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 + (z - l)^2 = r^2 \quad (B.25)$$

Como se ilustra en la Figura B.9, un punto  $p(x, y, z)$  está en la esfera si y sólo si  $\|\vec{p_0p}\| = r$ ; equivalentemente

$$\sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2 + (z - l)^2} = r^2 \quad (B.26)$$

<sup>5</sup>Un segmento de una esfera de radio  $r$

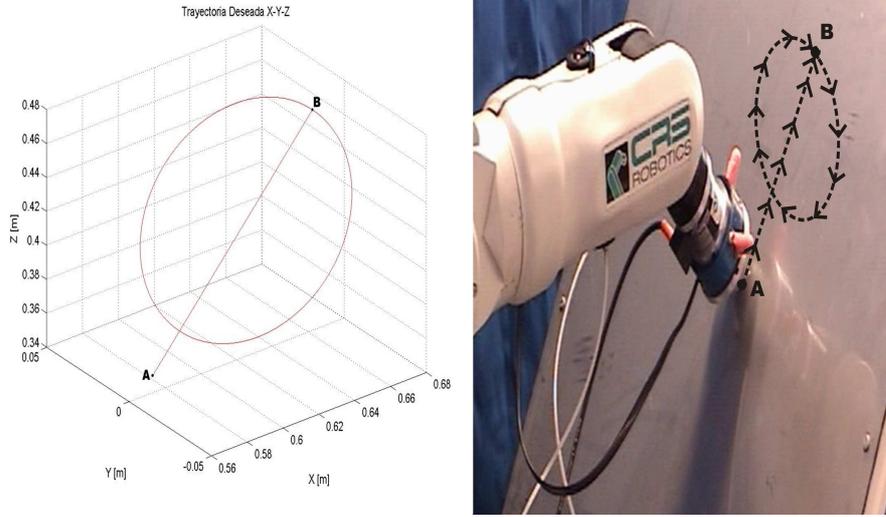


Figura B.8: Trayectoria en 3D sobre una superficie, a una pendiente determinada

Por tanto, la restricción está dada por

$$\varphi(x) = (x - h)^2 + (y - k)^2 + (z - l)^2 - r^2 = 0 \quad (\text{B.27})$$

o bien, normalizando se obtiene

$$\varphi(x) = -\frac{1}{2r}(x - h)^2 + (y - k)^2 + (z - l)^2 - r^2 = 0 \quad (\text{B.28})$$

La razón es que de (3.14) se tiene una representación de fuerza  $\mathbf{f}_e$  dada por

$$\mathbf{f}_e = \mathbf{J}_{\varphi x}^T \lambda. \quad (\text{B.29})$$

La normalización sirve para adecuar  $\mathbf{f}_e$

$$\mathbf{f}_e = \boldsymbol{\eta} \lambda. \quad (\text{B.30})$$

que es usual para describir la fuerza sobre superficies, puesto que  $\boldsymbol{\eta}$  es un vector unitario y  $\lambda$  es la magnitud de la fuerza. por tanto, se emplea la ecuación (B.28) para generar a  $\mathbf{J}_{\varphi x}$  como

$$\mathbf{J}_{\varphi x} = -\frac{1}{r} [(x - h) \quad (y - k) \quad (z - l) \quad 0 \quad 0 \quad 0], \quad (\text{B.31})$$

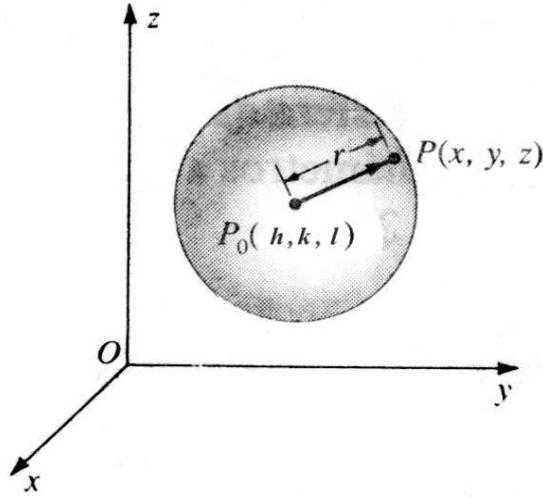


Figura B.9: Diagrama de la ecuación matemática de una esfera

o bien

$$\boldsymbol{\eta} = \mathbf{J}_{\varphi_x}^T \quad (\text{B.32})$$

Con esto se pueden generar las matrices  $\mathbf{P}_x(x)$  y  $\mathbf{Q}_x(x)$  de la misma forma que en la sección anterior.

A continuación se necesita construir el vector  $\dot{\mathbf{x}}_a$ , que después se integra para obtener  $\mathbf{x}_a$ . De la misma forma que en la sección anterior para la ecuación (B.15),  $\dot{\mathbf{p}}_d$  y  $\mathbf{k}_\varepsilon$  se calculan empleando el mismo procedimiento, sin embargo el cálculo de  $\mathbf{w}_d$  y  ${}^0\mathbf{R}_d$  es diferente.

Para generar la matriz  ${}^0\mathbf{R}_d$ , al igual que en la sección anterior se puede utilizar el Jacobiano de la restricción  $\mathbf{J}_{\varphi_x} = \mathbf{z}_d$  (B.31) ya que es normal a la superficie de contacto. Cómo el movimiento será en el plano  $(x, z)$  se puede definir el eje  $\mathbf{y}_d = [0 \ -1 \ 0]^T$  debido a que apunta en sentido contrario a  $\mathbf{y}_0$ . Finalmente se utiliza el producto cruz para obtener el vector correspondiente al eje  $\mathbf{x}_0$ . El resultado de estas operaciones es una matriz  ${}^0\mathbf{R}_d$  variable como función de  $z$

$${}^0\mathbf{R}_d = [\mathbf{x}_d \ \mathbf{y}_d \ \mathbf{z}_d] = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{d1} & \mathbf{y}_{d1} & \mathbf{z}_{d1} \\ \mathbf{x}_{d2} & \mathbf{y}_{d2} & \mathbf{z}_{d2} \\ \mathbf{x}_{d3} & \mathbf{y}_{d3} & \mathbf{z}_{d3} \end{bmatrix}, \quad (\text{B.33})$$

donde

$$\mathbf{x}_d = \mathbf{y}_d \times \mathbf{z}_d = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{d_2} z_{d_3} - \mathbf{y}_{d_3} z_{d_2} \\ \mathbf{y}_{d_3} z_{d_1} - \mathbf{y}_{d_1} z_{d_3} \\ \mathbf{y}_{d_1} z_{d_2} - \mathbf{y}_{d_2} z_{d_1} \end{bmatrix} \quad (\text{B.34})$$

con

$$\mathbf{y}_{d_1} = 0, \quad \mathbf{y}_{d_2} = -1, \quad \mathbf{y}_{d_3} = 0 \quad (\text{B.35})$$

$$z_{d_1} = -\frac{x-h}{r}, \quad z_{d_2} = -\frac{y-k}{r}, \quad z_{d_3} = -\frac{z-l}{r} \quad (\text{B.36})$$

Una vez obtenida la matriz de  ${}^0\mathbf{R}_d$  podemos encontrar el vector  $\mathbf{w}_d$  mediante las ecuaciones (2.54) y (2.55) de la siguiente manera

$$\mathbf{S}(\mathbf{w}) = {}^0\dot{\mathbf{R}}_d {}^0\mathbf{R}_d^T, \quad (\text{B.37})$$

donde  ${}^0\dot{\mathbf{R}}_d$  es la derivada en el tiempo de la matriz  ${}^0\mathbf{R}_d$ , dada en B.33.



Figura B.10: Casquete esférico usado para experimentos

En la Figura B.10 puede verse la superficie empleada, con base en la cual se calculan los parámetros de la ecuación (B.26), que describe matemáticamente a una esfera.

En el diagrama de la Figura B.11 se muestra el casquete esférico ya montado en la plataforma de experimentos con los nuevos parámetros considerados

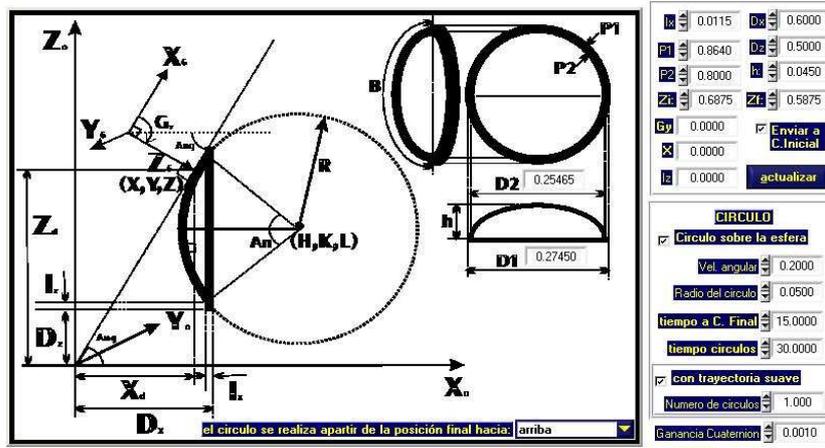


Figura B.11: Diagrama de superficie esférica con parámetros

para lograr calcular la posición y orientación de la *Condición Inicial* de forma exacta. Entonces, la ecuación (B.26) se reescribe como

$$x_d = h_0 - \sqrt{(r^2 - (y_d - k_0)^2 - (z_d - l_0)^2)} \quad (B.38)$$

donde  $(h_0, k_0, l_0)$  son las posiciones con respecto al sistema base  $(x_0, y_0, z_0)$  respectivamente, en la cual se encuentra el centro de la esfera de radio  $r$ .  $(x_d, y_d, z_d)$  son las posiciones deseadas respecto a  $(x_0, y_0, z_0)$  que cumplen con la ecuación (B.38).

Para encontrar los parámetros de la ecuación (B.38) se utilizan las Figuras B.9, B.10 y B.11, de donde se desprenden las siguientes ecuaciones (Gieck 1983)

$$D_1 = \frac{P_1}{\pi} \quad D_2 = \frac{P_2}{\pi} \quad (B.39)$$

$$I_z = \left( \frac{D_1 - D_2}{2} \right) \quad r = \left( \frac{h}{2} \right) + \left( \frac{D_2^2}{8h} \right) \quad (B.40)$$

$$h_0 = D_x - I_x - h + r \quad l_0 = D_z + \frac{D_1}{2} \quad (B.41)$$

$$x_d = h_0 - \sqrt{r^2 - (z - l_0)^2} \quad G_y = \frac{\pi}{2} + a \sin \frac{(z - l_0)}{r} \quad (B.42)$$

Para simplificar la generación de trayectorias se define

$$y = 0 \quad k_0 = 0 \quad (B.43)$$

donde  $P1, P2$  son los perímetros de los dos círculos formados por el segmento esférico desde la perspectiva de una vista frontal (ver Figura B.9);  $D1, D2$  son los diámetros respectivos para los círculos con perímetros  $P1, P2$ ,  $Iz$  es la mitad de la diferencia de los diámetros y se utiliza con otros datos para clasificar posiciones de  $z$  admisibles (que estén en la esfera);  $r$  sigue siendo el radio de la esfera,  $Dx$  y  $Ix$  son incrementos en distancia sobre el eje  $x$  usados para el cálculo de  $h_0$ ,  $Dz$  incremento utilizado para el cálculo de  $l_0$ . Los parámetros anteriores pueden ser fácilmente tomados del equipo experimental con un flexómetro de manera precisa.  $G_y$  al igual que en la sección anterior es uno de los ángulos de Euler (el giro sobre el eje  $y$ ).

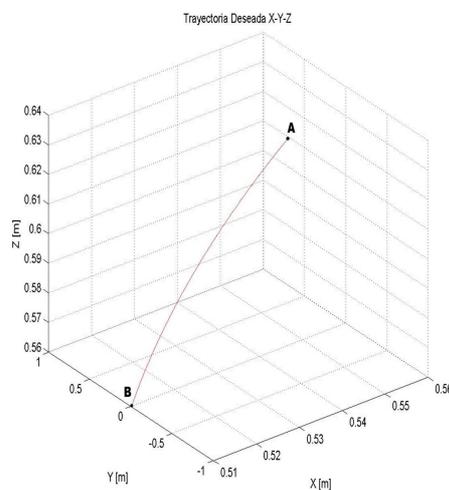


Figura B.12: Trayectoria en 3D sobre una superficie, a una pendiente determinada

De esta forma, el cálculo de la posición y orientación en la superficie esférica se basa en que la distancia  $z$  es conocida,  $y_d = 0$  y  $k_0 = 0$ ; es decir, un movimiento curvo en un plano. En la Figura B.12 se muestra la trayectoria realizada, la cual se analiza con detalle en el Capítulo 5.

---

# DEMOSTRACIONES

## C.1. Prueba del Teorema 3.2.1

Para probar el Teorema 3.2.1, considere el siguiente teorema y lemas.

**Teorema C.1.2** (*Khalil 2002, pp. 172*)

Sea  $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n$  ser un dominio que contenga el origen y  $V : [0, \infty) \times \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$  ser una función continua diferenciable tal que

$$\alpha_1(\|\mathbf{y}\|) \leq V(t, \mathbf{y}) \leq \alpha_2(\|\mathbf{y}\|) \quad (\text{C.1})$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{y}} \mathbf{f}(t, \mathbf{y}) \leq -W_3(\mathbf{y}), \quad \forall \|\mathbf{y}\| \geq \mu > 0, \quad (\text{C.2})$$

$\forall t \geq 0$  y  $\forall \mathbf{y} \in \mathbb{D}$ , donde  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  son funciones clase  $K$ ,  $W_3(\mathbf{y})$  es una función positiva definida y con  $\mathbf{f} : [0, \infty) \times \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$  continua por intervalos en  $t$  y localmente Lipschitz en  $\mathbf{y}$  sobre  $[0, \infty) \times D$ . Sea  $r > 0$  tal que  $\mathbb{B}_r = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{y}\| \leq r\} \subset \mathbb{D}$  y supóngase que

$$\mu < \alpha_2^{-1}(\alpha_1(r)). \quad (\text{C.3})$$

Entonces, existe una función  $\beta$  de clase  $KL$  y para cada estado inicial  $\mathbf{y}(t_0)$ , que satisface

$$\|\mathbf{y}(t_0)\| \leq \alpha_2^{-1}(\alpha_1(r)), \quad (\text{C.4})$$

existe  $T \geq 0$  (dependiente de  $\mathbf{y}(t_0)$  y  $\mu$ ) tal que la solución de  $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y})$  satisface

$$\|\mathbf{y}\| \leq \beta(\|\mathbf{y}(t_0)\|, t - t_0), \quad \forall t_0 \leq t \leq t_0 + T \quad (\text{C.5})$$

$$\|\mathbf{y}\| \leq \alpha_1^{-1}(\alpha_2(\mu)), \quad \forall t \geq t_0 + T. \quad (\text{C.6})$$

Además, si  $\mathbb{D} = \mathbb{R}^n$  y  $\alpha_1$  pertenecen a la clase  $K_\infty$ , entonces (C.5)–(C.6) se satisface para cualquier estado inicial  $\mathbf{y}(t_0)$ , sin restricción de magnitud para  $\mu$ .  $\triangle$

**Lema C.1.1** (Slotine y Li 1991)

Si una función diferenciable  $f(t)$  tiene un límite finito cuando  $t \rightarrow \infty$ , y si  $\dot{f}(t)$  es uniformemente continua, entonces  $\dot{f}(t) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .  $\triangle$

**Lema C.1.2** (Arteaga-Pérez et al. 2006)

Considérese (3.38)–(3.41), y supóngase que se tiene la relación

$$\mathbf{s}_i = \mathbf{s}_1 + \mathbf{K}_\gamma \boldsymbol{\sigma}. \quad (\text{C.7})$$

Si  $\|\mathbf{s}_i\| \leq \bar{s}_i < \infty$  para todo tiempo, entonces  $\boldsymbol{\sigma}$  y  $\mathbf{s}_1$  están acotadas para todo tiempo.  $\triangle$

A continuación, considérese la siguiente definición para la dinámica de error de estados (3.21), (3.51) y (3.56)

$$\mathbf{y} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{s}_r \\ \mathbf{r} \\ \Delta \mathbf{F} \end{bmatrix}. \quad (\text{C.8})$$

Tal como se hizo en Arteaga-Pérez et al. (2006), es posible probar el teorema en tres pasos.

- a) Antes que nada, hay que mostrar que si  $\|\mathbf{y}\|$  está acotada por  $0 < y_{\text{máx}}$ , entonces cualquier otra señal en el sistema está acotada también. Este producto sigue de (3.36) uno tiene

$$-\mathbf{Q}_x (\dot{\mathbf{x}}_a - \Lambda_x \bar{\mathbf{x}}) + \mathbf{J}_{\varphi_x}^+ \boldsymbol{\xi}_2 \Delta \mathbf{F} - \mathbf{s}_d = -\dot{\mathbf{x}}_r - \mathbf{K}_\gamma \boldsymbol{\sigma}. \quad (\text{C.9})$$

Entonces, de (3.20) y (3.39) uno obtiene después de algunas manipulaciones

$$\mathbf{s}_i = \mathbf{s}_1 + \mathbf{K}_\gamma \boldsymbol{\sigma}, \quad (\text{C.10})$$

con

$$\mathbf{s}_i \triangleq \mathbf{s}_x - \dot{\mathbf{z}}, \quad (\text{C.11})$$

donde se obtiene una ecuación de la forma (C.7). Puesto que  $\mathbf{y}$  está acotada, también lo están  $\mathbf{s}_r$  y  $\mathbf{r}$ . Entonces, de (3.43, 3.48) y la suposición 3.1.1,  $\mathbf{s}_x$  y  $\dot{\mathbf{z}}$  tienen que ser acotadas, lo que a su vez implica que  $\mathbf{s}_i$  es acotada. Con la aplicación del Lemma C.1.2, se puede concluir que  $\mathbf{s}_1$  y  $\boldsymbol{\sigma}$  están acotadas.

Si  $\mathbf{s}_1$  está acotada, entonces de (3.39) se tiene que  $\mathbf{s}$  también está acotada. De (3.35), esto implica que  $\bar{\mathbf{x}}$  y  $\dot{\bar{\mathbf{x}}}$  están acotadas. Entonces, mediante el uso de (3.16, 3.17, 3.31 y 3.32), se puede reescribir (3.42) como

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} + \Lambda_x \Delta \mathbf{x} = \mathbf{s}_x + \Lambda_x \mathbf{z} - \mathbf{J}_{\varphi_x}^+ \boldsymbol{\xi}_2 \Delta \mathbf{F} + \mathbf{s}_d - \mathbf{K}_\gamma \boldsymbol{\sigma}. \quad (\text{C.12})$$

Nótese que  $\Delta \mathbf{F}$  está acotada porque  $\mathbf{y}$  está acotada, y de esta manera la parte derecha de (C.12) tiene que estar acotada. Ahora, la parte izquierda representa un filtro lineal estable,  $\Delta \mathbf{x}$  y  $\Delta \dot{\mathbf{x}}$  están también acotadas. Esto a su vez implica que  $\mathbf{x}$  y  $\dot{\mathbf{x}}$  están acotadas, porque  $\mathbf{x}_a$  y  $\dot{\mathbf{x}}_a$  lo están. Debido a esto  $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}(\mathbf{q})^{-1} \dot{\mathbf{x}}$ ,  $\dot{\mathbf{q}}$  tiene que estar acotada. Además, en vista de la suposición 3.1.1,  $\mathbf{q}$  estará acotada ya que ninguna singularidad es alcanzada. Considérese ahora  $\dot{\mathbf{q}}_r = \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{x}}_r$ , que está acotada de acuerdo con (3.36); su derivada está dada por

$$\ddot{\mathbf{q}}_r = \dot{\mathbf{J}}^{-1}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{x}}_r + \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}) (\mathbf{Q}_x (\ddot{\mathbf{x}}_a - \Lambda_x \dot{\bar{\mathbf{x}}}) - \mathbf{J}_{\varphi_x}^+ \boldsymbol{\xi}_2 \Delta \boldsymbol{\lambda} - k_1 \mathbf{s}_d - \mathbf{K}_\gamma \dot{\boldsymbol{\sigma}}). \quad (\text{C.13})$$

Nótese que de (3.41) se sabe que  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$  está acotada. Por lo tanto, sólo hay que mostrar que  $\Delta\boldsymbol{\lambda}$  en (3.19) está acotada. Nótese que  $\boldsymbol{\lambda}_d$  está acotada; entonces de (3.14) y (3.15) se tiene

$$\mathbf{J}_{\varphi x}^T \boldsymbol{\lambda} = k_s \mathbf{P}_x (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0). \quad (\text{C.14})$$

Pero  $\mathbf{J}_{\varphi x}^T$  y  $\mathbf{P}_x$  pertenecen al mismo espacio (de hecho,  $\mathbf{P}_x \mathbf{J}_{\varphi x}^T = \mathbf{J}_{\varphi x}^T$ ) y  $\mathbf{J}_{\varphi x}^T$  se asume de rango completo. Esto significa que  $\boldsymbol{\lambda}$  tiene que estar acotada porque  $\mathbf{x}$  y  $\mathbf{x}_0$  lo son.

El hecho de que  $\boldsymbol{\lambda}$  esté acotada implica que  $\ddot{\mathbf{q}}_r$  lo está. Esto, a su vez, significa que  $\mathbf{Y}_a \boldsymbol{\varphi}$  en (3.46) está acotada. De este modo,  $\dot{\mathbf{s}}_r$  en (3.51) está acotada, y como consecuencia  $\dot{\mathbf{s}}_x = \dot{\mathbf{J}}(\mathbf{q}) \mathbf{s}_r + \mathbf{J}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{s}}_r$ . Ahora, de (3.53) se obtiene

$$\dot{\mathbf{r}} + k_d \mathbf{r} = \dot{\mathbf{s}}_x - \mathbf{J}_{\varphi x}^+ \boldsymbol{\xi}_2 \Delta\boldsymbol{\lambda} - k_1 \mathbf{s}_d - \mathbf{K}_\gamma \dot{\boldsymbol{\sigma}}, \quad (\text{C.15})$$

lo que significa que  $\dot{\mathbf{r}}$  está acotada, y de este modo  $\Delta\ddot{\mathbf{x}}$  en (3.56), estará acotada también. Finalmente, nótese que de (3.48 y C.11),  $\dot{\mathbf{s}}_i \triangleq \dot{\mathbf{s}}_x - \ddot{\mathbf{z}}$  está acotada.

- b) El siguiente paso es mostrar que con la selección apropiada de ganancias, puede lograrse que  $\|\mathbf{y}\| \leq y_{\text{máx}}$ , siempre que  $\mathbf{x}_d$  y por lo menos su primera y segunda derivadas sean acotadas. Para ello se utiliza el Teorema C.1.2. Debe entenderse bien como emplearlo. En primer lugar, este teorema es útil para probar que una trayectoria, en este caso  $\mathbf{y}$ , es uniforme y finalmente acotada, significando no sólo que permanece acotada para todo tiempo, sino también que tiende a una región donde permanece para siempre después de un tiempo finito  $T$ . El análisis es local y requiere de una región  $\mathbb{D}$ , que se define como

$$\mathbb{D} \triangleq \{ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{(2n+m)} \mid \|\mathbf{y}\| \leq y_{\text{máx}} \}, \quad (\text{C.16})$$

y dónde las condiciones (C.1) y (C.2) tienen que ser satisfechas. El punto clave es entender que no se está interesado en la región a la que  $\mathbf{y}$  tiende, dada por (C.6), sino en el hecho de que  $\mathbf{y}$  nunca abandona  $\mathbb{D}$ . Es importante notar que en el Teorema C.1.2 se asume que  $\mathbf{y}(0)$

está en una subregion de  $\mathbb{D}$ , como indica la expresión (C.4). De modo que se asume esto también. Al final, esta aseveración significa que si (C.1 y C.2) son satisfechas en  $\mathbb{D}$ , entonces  $\mathbf{y}$  nunca abandonaría  $\mathbb{D}$  y de esta manera se tiene que  $\|\mathbf{y}\| \leq y_{\text{máx}}$  para todo tiempo.

A continuación se define

$$V(\mathbf{y}) = \frac{1}{2} \mathbf{y}^T \mathbf{M} \mathbf{y}, \quad (\text{C.17})$$

con  $\mathbf{M} \triangleq$  bloque diagonal  $\{\mathbf{H}(\mathbf{q}) \quad \mathbf{I} \quad \boldsymbol{\xi}_2\}$ . Claramente, satisface

$$\lambda_1 \|\mathbf{y}\|^2 \leq V(\mathbf{y}) \leq \lambda_2 \|\mathbf{y}\|^2, \quad (\text{C.18})$$

con

$$\lambda_1 \triangleq \frac{1}{2} \min_{\forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n} \lambda_{\text{mín}}(\mathbf{M}(\mathbf{q})) \quad (\text{C.19})$$

$$\lambda_2 \triangleq \frac{1}{2} \max_{\forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n} \lambda_{\text{máx}}(\mathbf{M}(\mathbf{q})). \quad (\text{C.20})$$

Ahora se usa  $V(\mathbf{y})$  en (C.17) y el Teorema C.1.2, con  $\alpha_1 = \lambda_1 \|\mathbf{y}\|^2$  y  $\alpha_2 = \lambda_2 \|\mathbf{y}\|^2$ . Usando la Propiedad 3.1.2, la derivada de  $V$  a lo largo de (3.21), (3.51) y (3.56) está dada por

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -\mathbf{s}_r^T \mathbf{K}_{\text{DP}} \mathbf{s}_r - \Delta \mathbf{F}^T \boldsymbol{\xi}_1 \boldsymbol{\xi}_2 \Delta \mathbf{F} - k_d \mathbf{r}^T \mathbf{r} \quad (\text{C.21}) \\ & + (\mathbf{s}_d - \mathbf{K}_\gamma \boldsymbol{\sigma})^T \mathbf{J}_{\varphi_x}^T (\Delta \boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\xi}_1 \Delta \mathbf{F}) \\ & - \mathbf{s}_r^T \mathbf{Y}_a \boldsymbol{\varphi} + \mathbf{r}^T \mathbf{Q}_x (\Delta \ddot{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\Lambda}_x \dot{\ddot{\mathbf{x}}}) + \mathbf{s}_r^T \mathbf{K}_p \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{r}. \end{aligned}$$

Mientras  $V$  es positiva definida para todo  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{(2n+m)}$ , para aplicar el Teorema C.1.2 es necesario utilizar la region  $\mathbb{D}$  en (C.16) y mostrar que (C.2) se satisface. Pero, de acuerdo con lo discutido en el inciso (a), cualquier señal está acotada en  $\mathbb{D}$ , así pueden encontrarse límites para

satisfacer

$$\alpha_1 \triangleq \max_{\forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{(2n+1)}} \| (\mathbf{s}_d - \mathbf{K}_\gamma \boldsymbol{\sigma})^\top \mathbf{J}_{\varphi_x}^\top \boldsymbol{\xi}_1 \| \quad (\text{C.22})$$

$$\alpha_2 \triangleq \max_{\forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{(2n+1)}} \| \mathbf{Y}_a \boldsymbol{\varphi} \| \quad (\text{C.23})$$

$$\alpha_3 \triangleq \max_{\forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{(2n+1)}} \| \Delta \ddot{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\Lambda}_x \dot{\mathbf{x}} \| \quad (\text{C.24})$$

$$\alpha_4 \triangleq \max_{\forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{(2n+1)}} \| (\mathbf{s}_d - \mathbf{K}_\gamma \boldsymbol{\sigma})^\top \mathbf{J}_{\varphi_x}^\top \Delta \boldsymbol{\lambda} \| \quad (\text{C.25})$$

$$c_2 \triangleq \max_{\forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{(2n+1)}} \| \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}) \|. \quad (\text{C.26})$$

Considerando las definiciones (C.22)–(C.26), se obtiene de (C.21)

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\lambda_{\min}(\mathbf{K}_{\text{DP}}) \|\mathbf{s}_r\|^2 - \lambda_{\min}(\boldsymbol{\xi}_1 \boldsymbol{\xi}_2) \|\Delta \mathbf{F}\|^2 - k_d \|\mathbf{r}\|^2 \quad (\text{C.27}) \\ &\quad + \alpha_1 \|\Delta \mathbf{F}\| + \alpha_2 \|\mathbf{s}_r\| + \alpha_3 \|\mathbf{r}\| + \alpha_4 + \lambda_{\max}(\mathbf{K}_P) c_2 \|\mathbf{s}_r\| \|\mathbf{r}\| \\ &\leq -\lambda_{\min}(\mathbf{K}_{\text{DP}}) \|\mathbf{s}_r\|^2 - \lambda_{\min}(\boldsymbol{\xi}_1 \boldsymbol{\xi}_2) \|\Delta \mathbf{F}\|^2 - k_d \|\mathbf{r}\|^2 \\ &\quad + \alpha \|\mathbf{y}\| + \alpha_4 + \lambda_{\max}(\mathbf{K}_P) c_2 \|\mathbf{s}_r\| \|\mathbf{r}\|, \end{aligned}$$

donde  $\alpha \triangleq \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ . Para lograr (C.2), se puede elegir

$$\lambda_{\min}(\mathbf{K}_P) = 1 + \delta \quad (\text{C.28})$$

$$k_d = \delta + \frac{1}{4} \lambda_{\max}^2(\mathbf{K}_P) c_2^2 \quad (\text{C.29})$$

$$\lambda_{\min}(\boldsymbol{\xi}_1 \boldsymbol{\xi}_2) = \delta, \quad (\text{C.30})$$

para tener

$$\dot{V} \leq -\delta \|\mathbf{s}_r\|^2 - \delta \|\Delta \mathbf{F}\|^2 - \delta \|\mathbf{r}\|^2 + \alpha \|\mathbf{y}\| + \alpha_4 \quad (\text{C.31})$$

$$\leq -\frac{1}{2} \delta \|\mathbf{y}\| - \left( \frac{1}{2} \delta \|\mathbf{y}\|^2 - \alpha \|\mathbf{y}\| - \alpha_4 \right).$$

Un valor conservador de  $\mu$  puede definirse como

$$\mu \triangleq \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 2\delta\alpha_4}}{\delta} > 0, \quad (\text{C.32})$$

de tal forma que para  $\|\mathbf{y}\| \geq \mu > 0$  se define

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{2}\delta\|\mathbf{y}\|^2 \triangleq -W_3(\mathbf{y}). \quad (\text{C.33})$$

Finalmente, para aplicar el Teorema C.1.2 solo hay que asegurar que una constante  $r$  puede ser encontrada tal que (C.3) sea satisfecha. A su vez, ya que en este caso  $\mu$  es una función de los parámetros de control, esta meta puede siempre alcanzarse si se fija bastante pequeña.

- c) Hasta ahora se ha mostrado que  $\mathbf{y}$  está acotada. Todavía hay que probar el seguimiento de los errores de observación y fuerza tienden a cero. En primer lugar, de (C.10 y C.11) se obtiene

$$\dot{\mathbf{s}}_1 = -\mathbf{K}_\gamma \mathbf{K}_\beta \mathbf{s}_1 - \mathbf{K}_\gamma \text{sign}(\mathbf{s}_1) + \dot{\mathbf{s}}_i. \quad (\text{C.34})$$

Nótese que  $\dot{\mathbf{s}}_i = \dot{\mathbf{s}}_x - \ddot{\mathbf{z}}$ , tiene que estar acotado por lo discutido en el inciso (a). Entonces, si se hace  $V_1 = \frac{1}{2}\mathbf{s}_1^T \mathbf{s}_1 = \frac{1}{2}\|\mathbf{s}_1\|^2$ , se obtiene

$$\|\mathbf{s}_1\| \frac{d\|\mathbf{s}_1\|}{dt} \leq -\lambda_{\min}(\mathbf{K}_\gamma \mathbf{K}_\beta) \|\mathbf{s}_1\|^2 - \lambda_{\min}(\mathbf{K}_\gamma) \|\mathbf{s}_1\| + \|\mathbf{s}_1\| \alpha_5, \quad (\text{C.35})$$

donde  $\alpha_5$  es una cota para  $\dot{\mathbf{s}}_i$  y  $\|\mathbf{s}_1\| = |s_{11}| + \dots + |s_{1n}|$ , con  $s_{1j}$  elementos de  $\mathbf{s}_1$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Puesto que  $\|\mathbf{s}_1\| \leq |\mathbf{s}_1|$ , se tiene

$$\|\mathbf{s}_1\| \frac{d\|\mathbf{s}_1\|}{dt} \leq -(\lambda_{\min}(\mathbf{K}_\gamma) - \alpha_5) \|\mathbf{s}_1\|. \quad (\text{C.36})$$

Si se define  $\phi \triangleq \lambda_{\min}(\mathbf{K}_\gamma) - \alpha_5 > 0$  con una selección apropiada de  $\lambda_{\min}(\mathbf{K}_\gamma)$ , se obtiene

$$\frac{d\|\mathbf{s}_1\|}{dt} \leq -\phi. \quad (\text{C.37})$$

Hay que mostrar que  $\mathbf{s}_1 = \mathbf{0}$  en un tiempo finito  $t_r$ . Esto puede hacerse integrando para obtener  $t_r \leq \frac{\|\mathbf{s}_1(0)\|}{\phi}$ , como se acostumbra en la teoría de modos deslizantes. Como se explica en Arteaga-Pérez *et al.* (2006),  $\mathbf{s}_d = \mathbf{s}(0)e^{-kt}$  hace que  $\mathbf{s}_1(0) = \mathbf{s}(0) - \mathbf{s}_d = \mathbf{0}$  en  $t = 0$ , y es útil para mejorar el desempeño transitorio (ver referencia para más detalles).

Entonces, para  $t \geq t_r$  se tiene  $\mathbf{s}_1(t) = \mathbf{0}$ , así que de (3.39) se obtiene  $\mathbf{s} \rightarrow \mathbf{0}$ . De (3.20) y la discusión de la Sección 3.2, se concluye que  $\Delta \mathbf{F}$ ,  $\bar{\mathbf{x}}$  y  $\dot{\bar{\mathbf{x}}}$  tenderán a cero. Sin embargo, esto solo garantiza que  $\hat{\mathbf{x}} \rightarrow \mathbf{x}_a$  y  $\dot{\hat{\mathbf{x}}} \rightarrow \dot{\mathbf{x}}_a$ . Nótese que si  $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$  y  $\dot{\bar{\mathbf{x}}} = \mathbf{0}$ , entonces  $\Delta \mathbf{x} = \mathbf{z}$  y  $\Delta \dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{z}}$ . entonces, (3.55) se convierte en

$$\mathbf{r} + k_d \int_0^t \mathbf{r}(\vartheta) d\vartheta = \mathbf{Q}_x (\dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{x}}_a) = \dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{x}}_a = \dot{\mathbf{x}} - \dot{\hat{\mathbf{x}}} = \dot{\mathbf{z}}, \quad (\text{C.38})$$

o por derivación y uso de (3.48) se tiene

$$\ddot{\mathbf{z}} + \Lambda_z \mathbf{z} + k_d (\dot{\mathbf{z}} + \Lambda_z \mathbf{z}) = \ddot{\mathbf{z}}. \quad (\text{C.39})$$

Finalmente

$$(\Lambda_z + k_d \mathbf{I}) \dot{\mathbf{z}} + k_d \Lambda_z \mathbf{z} = \mathbf{0}. \quad (\text{C.40})$$

La ecuación (C.40) representa un filtro lineal estable para  $\mathbf{z}$ , así que  $\mathbf{z}$  y  $\dot{\mathbf{z}}$  tienden a cero. Esto a su vez significa que  $\Delta \mathbf{x}$  y  $\Delta \dot{\mathbf{x}}$  también tienden a cero.

Sólo se necesita mostrar que  $\Delta \boldsymbol{\lambda} \rightarrow \mathbf{0}$ . Para esto se usa el Lema C.1.1. En primer lugar,  $\Delta \mathbf{F}$  está acotada y tiene un límite ( $\Delta \mathbf{F} \rightarrow 0$ ) cuando  $t \rightarrow \infty$ . Entonces, para que  $\Delta \boldsymbol{\lambda}$  tienda a cero, solo hay que mostrar que es uniformemente continua, o equivalentemente, que  $\frac{d}{dt} \Delta \boldsymbol{\lambda}$  está acotada (Slotine y Li 1991). Pero, ya que  $\Delta \boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_d$  y  $\boldsymbol{\lambda}_d$  y sus derivadas son asumidas acotadas, sólo queda mostrar que  $\frac{d}{dt} \boldsymbol{\lambda}$  está acotada. De (3.14) y (3.15) se tiene

$$\mathbf{J}_{\varphi x}^T \boldsymbol{\lambda} = k_s \mathbf{P}_x (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \quad (\text{C.41})$$

o

$$\mathbf{J}_{\varphi x}^T \frac{d}{dt} \boldsymbol{\lambda} = k_s \mathbf{P}_x \dot{\mathbf{x}}, \quad (\text{C.42})$$

porque  $\mathbf{J}_{\varphi x}^T$ ,  $\mathbf{P}_x$  y  $\mathbf{x}_0$  son constantes. Recordando que  $\mathbf{J}_{\varphi x}$  es de rango completo y  $\dot{\mathbf{x}}$  está acotada, entonces  $\frac{d}{dt} \boldsymbol{\lambda}$  tiene que estar acotada. Por el Lema C.1.1 se puede concluir finalmente que  $\Delta \boldsymbol{\lambda} \rightarrow \mathbf{0}$ .



## Bibliografía

- Arimoto, S., Y. Liu y T. Naniwa.** 1993. Principle of orthogonalization for hybrid control of robot arms. *Proceedings of 12th IFAC World Congress* 1. 507–512.
- Arteaga, P, M. y R. Kelly.** 2004. Robot control without velocity measurements: New theory and experimental results. *IEEE Transactions on Robotics and Automation* 20(2). 297–308.
- Arteaga, P. M. y R. J. C. Martinez.** 2006. Force and velocity observers for cooperative robots control. *Congreso Nacional de Control Automático*. DF, México.
- Arteaga-Pérez, M. A., A. M. Castillo-Sánchez y V. Parra-Vega.** 2006. Cartesian control of robots without dynamic model and observer design. *Automatica* 42. 473–480.
- Arteaga-Pérez, M. A. y Y. Tang.** 2001. Robust control of robots by using a linear observer. *Proc. CD ROM, Conference on Advanced Intelligent Mechatronics (AIM'01)*. Como, Italy.

- Aspragathos, N.** 1998. Cartesian trajectory generation under bounded position deviation. *Elsevier Science* 33(6). 697–709.
- ATI Industrial, A.** 2001. *Robotic Crash Protection Device Catalog 2001.* : www.ati-ia.com.
- Caccavale, F., B. Siciliano y L. Villani.** 1998. Quaternion-based impedance with nondiagonal stiffness for robot manipulators. *Proceedings of the American Control Conference*. Philadelphia, Pennsylvania.
- Caccavale, F., B. Siciliano y L. Villani.** 1999. Six-dof impedance control based on angle/axis representations. *IEEE Transactions on Robotics and Automation* 15(2). 289–300.
- Castillo Sanchez, A. M.** 2002. *Adaptación de dos robots industriales para su utilización en el desarrollo de nuevas técnicas y algoritmos de control.* Programa de Mestría y Doctorado en Ingeniería: Thesis. Universidad Nacional Autónoma de México.
- Castillo Sanchez, A. M.** 2004. *Diseño de un algoritmo de control de posición/fuerza para manipuladores industriales.* Programa de Mestría y Doctorado en Ingeniería: Tesis. Universidad Nacional Autónoma de México.
- CRS Robotics, C.** 2001. *A465 Robot System User Guide UMI-A465-400.* Burlington, Ontario L7L 6A6, Canada: www.crsrobotics.com.
- DeShutter, J. y H. V. Brussel.** 1988. Compliant robot motion a control approach based on external control loop.. *The Int. J. of Robotics Research* 7(4). 18–33.
- Dooley, J.** 1994. A strategy for fine motion manipulation of robots using kinematic constraints. *IEEE* 656–661.
- Drake, S. y S. Simunovic.** 1977. The use of compliance in a robot assembly systems. *IFAC Symp. on Info. and control problems in Manuf. Tech. IFAC. Tokio.*
- Duffy, J.** 1990. The fallacy of modern hybrid control theory that is based on orthogonal complements of twist and wrench spaces.. *J. of Robotic Systems* 7 (No.2). 139–144.

- Gieck, K.** 1983. *Manual de formulas tecnicas*. D.F., Mexico: Representaciones y Servicios de Ingenieria.
- Gudiño Lau, J., M. A. Arteaga-Pérez, L. A. Muñoz y V. Parra-Vega.** 2004. On the control of cooperative robots without velocity measurements. *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 12(4). 600–608.
- Huang, H. y W. Tzeng.** 1989. Robotic force control by using estimated contact force. *Proceedings of the 28th conference on decision y control. IEEE. Tampa, Florida.* 2158–2163.
- Joseph, S. y C. Yuan.** 1988. Closed-loop manipulator control using quaternion feedback. *IEEE Journal of Robotics and Automation* 4(4). 434–440.
- JR3** 2006. *JR3 Multi/axis Force/Torque Sensors connect directly to adept MV controllers*. Woodland: www.jr3.com.
- Kelly, M. R.** 1994. *Control de Movimiento de Robots Manipuladores*. Ensenada B.C.: UNAM.
- Khalil, H. K.** 2002. *Nonlinear Systems, 3rd ed.* Upper Saddle River, New Jersey. U.S.A.: Prentice–Hall.
- Khalil, W. y E. Dombre.** 2002. *Modeling, identification and control of robot.* : Hermes Sciences Europe.
- Kiritsis, D.** 1991. *COMPUGRAPHIC*. Sesimbra, Portugal.
- Lewis, F. L., C. T. Abdallah y D. M. Dawson.** 1993. *Control of robots Manipulators*. NY USA: New York.
- Liu, Y. y S. Arimoto.** 1996. Implicit and explicit force controllers for rheologically cosntrained manipulators and their extensions to distributed cooperation control. *13th triennial World Congress. IFAC. San Francisco, USA.*
- MaClamroch, N. y D. Wang.** 1988. Feedback stabilization and tracking of constrained manipulator. *IEEE Trans. on Automatic Control* (5). 419–426.

- Malan, D. F.** 2004. *3D Tracking between Satelites using Monocular Computer Vision*. Thesis. Stellenbosch University.
- Martínez Rosas, J. C.** 2002. *Identificación Paramétrica de un Robot Industrial con Diferentes Esquemas de control Adaptable*. Instituto de Ingeniería: Tesis. Universidad Veracruzana.
- Murray, R. M., Z. Li y S. S. Sastry.** 2004. *A Mathematical Introduction Robotic Manipulation*. Boca Raton, USA: CRC Press.
- Niku, S. B.** 2001. *Introduction to Robotics. Analysis, Systems, Applications*. Upper Saddle River, N.J.: Pearson–Education.
- Parra, V., T. Castillo y P. M. Arteaga.** 2002. Regressor-free second order sliding mode control for exponential tracking of constrained robot manipulators. *Third International Workshop on Robot Motion and Control* 159–162.
- Parra-Vega, V., A. Rodríguez – Ángeles, S. Arimoto y G. Hirzinger.** 2001. High precision constrained grasping with cooperative adaptive handcontrol. *Journal of Intelligent and Robotic Systems* 32. 235–254.
- Queiroz, M., D. Watson y T. Burg.** 1996. Position/force control of robots manipulators without velocity/force measurements. *Conference on Robotics and Automation. Minnesota, USA*. Minnesota, USA. 2561–2566.
- Queiroz, M., J. Hu y D. Watson.** 1997. Adaptive position/force control of robots manipulators without velocity/force measurements: Theory and experimentation. *IEEE transaction on Systems, Man, and Cybernetics* 27(5). 796–809.
- Raibert, M. y J. Craig.** 1981. Hybrid position/force control of manipulators. *Trans. ASME J. Dyn. Sys. Meas. and control* 102. 126–133.
- Rojas-Angeles, J. y C. Lopez.** 1988. *IEEE Journal of Robotics and Automation*.
- Sciavicco, L. y B. Siciliano.** 2000. *Modeling and Control of Robot Manipulators, 2nd ed.* : Springer–Verlag.

- 
- Siciliano, B.** y **L. Villani.** 1999. *Robot Force Control*. The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Slotine, J. J. E.** y **W. Li.** 1991. *Applied Nonlinear Control*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice–Hall.
- Spong, M. W.** y **M. Vidyasagar.** 2006. *Robot Modeling and Control*. New York: John Wiley & Sons.
- Swokowski, W.** y **W. Earl.** 1994. *Calculo con geometria analitica*. D.F., Mexico: Grupo Editorial Iberoamerica.
- Taylor, R.** 1979. *IBM Journal of Research and Development*.
- Whitney, D.** 1977. Force feedback control of manipulator fine motions. *ASME J. Dyn. Sys. Meas. and control* 91–97.
- Xian, B., M. Queiroz, D. Dawson** y **I. Walker.** 2001. Task-space tracking of redundant robot manipulators via quaternion feedback. *IEEE International Conference on Control Applications*. México City, México.
- Zhou, J.** 1991. *Visualization de Four Dimensional Space and th is Applications*. Thesis. Purdue University.