UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

Material didáctico de Análisis Numérico

MATERIAL DIDÁCTICO

Que para obtener el título de

Ingeniero Geofísico

P R E S E N T A

Juan Manuel Romero Bravo

ASESORA DE MATERIAL DIDÁCTICO

Dra. Miriam Estela Lemus

Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2019

JURADO ASIGNADO

Presidente:	**Ing. Salvador García Burgos**
Vocal:	**Dra. Miriam Estela Lemus**
Secretario:	**M. E. Rosalba Rodríguez Chávez**
1er. Suplente:	**Dra. Iza Canales García**
2do. Suplente:	**Ing. Liliana Flores García**

A mis padres, hermanas y abuelos, que me han apoyado en todo momento. Gracias por conducirme por la vida con amor y paciencia. Se hace realidad un deseo con mucho esfuerzo y trabajo.

A mis grandes amigos, que siempre han alegrado mi vida y me han acompañado en este camino.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo está dedicado a:

A mis padres Manuel y Clementina quienes con amor, paciencia y esfuerzo me han permitido llegar a cumplir hoy un sueño más, gracias por inculcar en mí el ejemplo de esfuerzo y constancia.

A mis hermanas por su apoyo en cada una las etapas de mi vida, principalmente durante todo este proceso, por estar conmigo en todo momento, gracias. A mis abuelos Juan y Lucila, a toda mi familia porque con sus oraciones, consejos y palabras de aliento hicieron de mí una mejor persona. Y de una u otra forma me acompañan en todos mis sueños y metas.

Finalmente quiero dedicar este trabajo a mis amigos, por apoyarme cuando más los he necesitado, por el amor brindado cada día que siempre llevaré en mi corazón.

ÍNDICE

RESUMEN

En el presente trabajo de apoyo a la docencia en la asignatura de Análisis Numérico se aborda la importancia del docente y las estrategias que se deben implementar para cautivar al alumno y lograr que sea autodidacta. Igualmente lo importante de motivar al estudiante para que siempre esté con ganas de aprender, esto se debe hacer mediante un proceso de comunicación con el docente.

Dentro del trabajo se abordan los objetivos y organización del plan de estudios 2016 de Análisis Numérico. Para ello hago mención del proceso de enseñanza y de aprendizaje, en el cual se requieren diversas estrategias para la motivación del alumno. Además existe un perfil profesiográfico de quien puede impartir la asignatura.

Así como la importancia de comenzar a usar software de programación para el análisis y diseño de sistemas. El caso particular MATLAB para este trabajo.

Abstract

In the present work to support teaching in the firms of the Numerical Analysis, the importance of the teacher and the strategies that must be implemented to prevent and prevent self-learning are discussed. Just as important is to motivate the student to always learn, this must be done through a process of communication with the teacher.

Within the work, the objectives and organization of the 2016 Numerical Analysis study plan are addressed. For him to mention the teaching and learning process, in which several strategies for the motivation of aluminum are required. In addition there is a professional profile that can give the signal.

As well as the importance of starting to use programming software for the analysis and design of systems. The particular case of MATLAB for this work.

1. INTRODUCCIÓN

En México se cuenta con pocas Instituciones que formen docentes, una de ellas es la Universidad Nacional Autónoma de México. La docencia, es la labor de los profesores en el aula, en el laboratorio, en el campo, que va formando al estudiante para llegar a ser un ingeniero, con alta calidad profesional y responsabilidad social que distingue a los universitarios, en su trabajo de servicio a la sociedad de México.

Otro ámbito es la didáctica que es la disciplina de la pedagogía que se encarga del estudio del proceso de aprendizaje, en el cual los sujetos participantes son el estudiante y el profesor; mientras que los elementos que estructuran dicho proceso son la planeación, los objetivos, los contenidos, los métodos, las estrategias, el diseño, el uso de material didáctico, la evaluación, además de factores que están involucrados, como la motivación y la comunicación, los cuales son de suma importancia.

Los docentes tienen un compromiso social al servicio público que es formar profesionales íntegros altamente competitivos, capaces de aportar soluciones a las problemáticas más relevantes de la sociedad bajo una estricta ética profesional.

La Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de México consciente de la importancia de la docencia intensifica la generación de objetos de aprendizaje y recursos didácticos que refuercen el proceso de aprendizaje a través del aprovechamiento del potencial creativo y de innovación de los estudiantes. Con estas propuestas académicas se mejora la calidad del aprendizaje y se favorece la creatividad, el desarrollo de habilidades, destrezas, actitudes y valores, y aviva el interés por la ingeniería de quien la desarrolle.

A partir de los cambios aprobados al Reglamento de Titulación por el Consejo Técnico de la Facultad de Ingeniería en su sesión ordinaria del 22 de abril de 2015, con el nuevo plan de estudios de la Licenciatura en Ingeniería Geofísica vigente a partir de la generación 2016-1 surge la necesidad de elaborar material didáctico de apoyo a la docencia, en este caso, para la asignatura de Análisis Numérico; guardando la coherencia con el programa de estudio y convirtiéndolo en un instrumento del ejercicio académico.

La asignatura consta de seis temas fundamentales: aproximación numérica y errores; solución numérica de ecuaciones algebraicas y trascendentes; solución numérica de sistemas de ecuaciones lineales; interpolación, derivación e integración numéricas; solución numérica de ecuaciones y sistemas de ecuaciones diferenciales y solución numérica de ecuaciones en derivadas parciales.

El material didáctico presentado, es la expresión de un compromiso del autor por la mejora continua en la formación de estudiantes a nivel licenciatura de la carrera de Ingeniería Geofísica, al concluir sus estudios satisfactoriamente, son motor de desarrollo social, económico y cultural del país, dan solución a las diversas problemáticas en forma oportuna, responsable, cuidando el impacto en el ambiente y en su entorno social. Todo ello realizando el uso de software de programación como lo es MATLAB.

2. MARCO CONTEXTUAL.

El estudiante de hoy en día en las aulas universitarias pertenece a la generación Z, rondando entre los 18 y 21 años de edad en la asignatura de Análisis Numérico.

La generación Z contempla a personas nacidas a mediados de los 90's y hasta el año 2009 aproximadamente; son considerados "nativos digitales" pues están impuestos a la tecnología como tal, obtienen información cualquier día, a cualquier hora, acortan distancias, distribuyen información de manera más rápida y eficiente, se comunican constantemente, prefieren un ambiente de autoaprendizaje, entre muchas otras cosas que les permite hacer las Tecnologías de Información (Valles Acosta, 2014).

Bajo este perfil el alumno emplea una manera de aprendizaje autónoma. Y además dicho alumno no cumple un perfil pasivo de esperar a que todo se lo dé el profesor en el aula. Sino que él busca enriquecerse por su cuenta, con ello llegamos a que cada alumno aprende de distintas formas, puede ser kinestésico, auditivo o visual utilizando las herramientas a su alcance como son las tecnológicas.

La evolución tecnológica de estas últimas décadas ha tenido importantes repercusiones en el ámbito de la educación superior, no sólo ha modernizado los procesos de gestión, sino que también ha generado nuevos espacios y nuevas modalidades de formación (Adell, 1997; Baelo y Cantón, 2009, Marqués, 2000).

Con el fin de apoyar dicho rasgo generacional y al docente de la asignatura de análisis numérico se elabora este material didáctico, dándole una guía al alumno para mejorar sus conocimientos y una herramienta extra al docente.

3. MARCO TEÓRICO.

3.1 El docente de ingeniería.

Tanto el ingeniero como el profesor adquieren, a lo largo de su formación y práctica profesional, ciertas formas características de pensamiento. La manera de pensar del ingeniero es concreta y directa. Su pensamiento va dirigido a obtener resultados reales y mensurables mediante la utilización de conceptos y conocimientos que aplica a casos específicos. Su trabajo se concentra completamente en conseguir una meta, como, por ejemplo, el objeto o dispositivo que está desarrollando o la producción de la que es responsable.

El docente de ingeniería posee una formación y un currículo que son comunes a las necesidades de los docentes de cualquier otro nivel de estudios o área de especialidad. Evidentemente, desarrolla cualidades específicas acordes y dictadas por su campo de acción, pero cuestiones como la vocación, la actitud y el compromiso por su actividad deben ser un común denominador en el docente de cualquier área o nivel.

Un trabajo fundamental del docente es no generar aversión, temor o desinterés por su asignatura; por el contrario, concibe que el estudiante se incorpore a la búsqueda de la parte central del conocimiento con seguridad, y con una genuina actitud de cooperación y compromiso con su formación y su aprendizaje personal.

El docente, en especial el de ingeniería, tiene la tarea de favorecer actitudes especiales en sus estudiantes; destacan entre éstas la actitud crítica y la actitud creativa. La creatividad implica la capacidad de aportar ideas o soluciones nuevas a un problema o situación conflictiva. Esta capacidad, como todas las del ser humano, son susceptibles de ser desarrolladas y el docente del área de ingeniería debe reconocerlo y estar preparado para inducir y guiar ese desarrollo creativo.

Por otra parte, el pensamiento crítico es la capacidad de cuestionar con seriedad las bases de las propuestas, creencias, valores e ideas de nuestros semejantes. Bajo esta actitud, es innegable que el analizar una propuesta sometiéndola a un proceso inquisitivo lleva en lo individual, o en grupo, a adoptar la mejor solución que pudiera presentarse para resolver un problema.

Una actitud que favorece los resultados del docente es la congruencia. El estudiante puede tenerla o no, sí existe, el estudiante participa de forma entusiasta y comprometida en su educación. El docente no tiene la opción de tenerla o no, siempre deberá estar comprometido al igual o más que el alumno.

3.2 Los objetivos del proceso de aprendizaje.

Los docentes tienen la responsabilidad de fijar objetivos, diseñar actividades de aprendizaje, seleccionar recursos y evaluar lo aprendido dentro de un marco institucional. Además la didáctica sugiere el estudio y análisis de los elementos fundamentales del proceso de aprendizaje: el estudiante, el profesor, los objetivos, los contenidos, los métodos y la evaluación.

En el proceso de aprendizaje: Los objetivos son las metas más particulares e inmediatas de alcance directo, del trabajo del profesor en el aula. Son las pequeñas, pero fundamentales unidades de aprendizaje que gradualmente van alcanzando los estudiantes bajo la orientación del profesor.

Es muy importante que el profesor al planear su trabajo de clase se pregunte lo que quiere enseñar, y de qué manera lo hará. De esta forma podrá enseñar con certeza y cumplir sus objetivos.

Los objetivos de una asignatura constituyen la base indispensable para poder apreciar los resultados de la enseñanza y el aprendizaje. Así entonces, de manera muy general, se pueden dividir de la siguiente forma:

- Los objetivos de aprendizaje: Representan una parte para la evaluación, pues constituyen la meta en función de la cual se puede apreciar el avance del aprendizaje del estudiante.
- Los objetivos de enseñanza: Son los productos del aprendizaje que se toman en cuenta en la planeación, conscientemente previstos y deseados (Bloom, 1971).

3.3 Motivación

Motivación es el proceso de estimular a un individuo para que se realice una acción que satisfaga alguna de sus necesidades y alcance alguna meta deseada para el motivador. (Sexton, 1977).

La motivación es el motor que impulsa al profesor y al estudiante a hacer las cosas, lo que genera ánimo en el docente para obtener un mejor desempeño en cada uno de los estudiantes. El docente puede crear climas necesarios que generen automotivación, que ayuden al estudiante a conseguir un deseo o una meta. (Charney, 2003)

Los niveles de rendimiento (obtención de calificaciones positivas) de los estudiantes suelen verse afectados por la actitud del profesor (comportamiento hacia su clase). Es frecuente que rindan bien los alumnos a las órdenes de docentes autoritarios y competentes, pero que tengan malos sentimientos hacia el trabajo que realizan. Análogamente, se presenta también el caso de estudiantes que disfruten y estén contentos con las actividades que realizan, y aun así no alcanzan los objetivos planteados. En un entorno ideal se necesita un buen ajuste entre el profesor y el estudiante. (Rees, 2003)

A menudo, castigos y recompensas son las únicas herramientas que usan los docentes para motivar a los estudiantes. Si bien, estas dos tácticas sirven para controlar el comportamiento de muchos estudiantes, su uso indiscriminado puede debilitar la motivación del estudiante por el estudio. Se les puede incentivar con promesas de recompensa o castigo; pero con eso, únicamente se logra que su atención se enfoque a ganar el premio o evitar el castigo. (Raffini, 1998)

El deseo de enfrentar y resolver desafíos es inherente a la motivación del estudiante en clase. Ésta se alimenta de la necesidad del estudiante por hacer las cosas de manera satisfactoria (aptitud); sentir que forma parte de algo mayor (pertenencia y relación); sentirse bien consigo mismo (autoestima); hallar placer con lo que hace (participación y estímulo); y controlar sus propias decisiones (autonomía). (Zarzar, 1993)

3.4 Actividades de aprendizaje

Las actividades de aprendizaje ayudan a reforzar los conocimientos vistos en clase buscando que el alumno no adopte un rol pasivo en su educación, sino que tome el control de ella. La actividad del estudiante, debe estar enfocada a la construcción, a la asimilación y a la acomodación del objeto de conocimiento en sus estructuras mentales (Piaget, 1975). Seleccionar actividades que motiven la participación y reacción del estudiante es un aspecto crucial del proceso de enseñanza y aprendizaje (Villalobos, 2003). Es por esto que conviene que el estudiante realice actividades aplicadas a sus asignaturas (ejecución de programas en lenguaje de programación, por ejemplo), pero también es indispensable que realice actividades de pensamiento, de análisis y de síntesis siendo función del profesor el propiciarlas.

3.5 Manejo de material didáctico.

Edgar Dale fue un pedagogo estadounidense, conocido por su famoso Cono de la experiencia. Hizo diversas contribuciones a la instrucción visual y auditiva. Además en 1969 propuso "la pirámide del aprendizaje", a partir de ésta se han realizado varios estudios a nivel internacional sobre la capacidad de retención de la información, en los cuales ha quedado demostrado que, si una persona solamente escucha la información, después de seis meses solamente será capaz de recordar un cinco por ciento de ella. En contraste, si se prepara la información para enseñar a otros se recuerda hasta un noventa por ciento. Esta pirámide se muestra en la figura 1.

Figura 1. La pirámide del aprendizaje, (Dale, 1969).

De acuerdo a la figura anterior se llega a que la durabilidad de la retención dependiendo de los procedimientos de enseñanza. En la siguiente tabla se muestra el porcentaje de retención.

Procedimientos de enseñanza	Retención después de tres horas	Retención después de tres días
Oral	**70%**	**10%**
Visual	**72%**	**20%**
Audiovisual	**82%**	**65%**

Tabla 1. La durabilidad de la retención.

La razón por la que se tiende a olvidar lo que se dice es que el estudiante solamente concentra uno de sus cinco sentidos al escuchar una clase, mientras que los demás tienden a distraerse, es por esto que el utilizar material didáctico ayuda a que el estudiante utilice otros de sus sentidos durante la clase, lo que le permitirá una mayor retención, uno de éstos materiales para la retención que propongo es la elaboración de programas.

3.6 Software de programación MATLAB.

Un software es la parte blanda e intangible o lógica de una computadora. Los programas, los sistemas de información, las aplicaciones (como procesadores de texto, hojas de cálculo o bases de datos), los simuladores, las aplicaciones gráficas y los sistemas operativos. MATLAB, es una plataforma que sirve para resolver problemas científicos y de ingeniería. El lenguaje de MATLAB está basado en matrices, es la forma más natural del mundo para expresar las matemáticas computacionales. Las gráficas integradas facilitan la visualización de los datos y la obtención de información a partir de ellos.

4. FUNDAMENTACIÓN

4.1 Descripción de la materia

La materia tiene el nombre oficial de Análisis Numérico, clave 1433 con 8 créditos y se ubica en el cuarto de las carreras de Ingeniería Geofísica, Ingeniería Petrolera, Ingeniería Geomática, Ingeniería Civil, Ingeniería en Minas y Metalurgia, Ingeniería en Computación, Ingeniería Eléctrica Electrónica, Ingeniería en Telecomunicaciones, Ingeniería Mecánica, Ingeniería Mecatrónica e Ingeniería en Sistemas Biomédicos y en el quinto semestre en Ingeniería Mecánica.

Se trata de una asignatura obligatoria con 4.0 horas teóricas a la semana lo que equivale a un total de 64 horas en las 16 semanas de duración del semestre.

Fue aprobada por el Consejo Técnico de la Facultad el 9 de mayo de 2014 así como por el Consejo Académico del Área de las Ciencias Físico-Matemáticas y de las Ingenierías el 6 de mayo de 2015.

La asignatura se imparte bajo la modalidad de curso presencial.

4.2 Ubicación teórica

La materia cuenta con una seriación antecedente con la asignatura de Ecuaciones Diferenciales, pero no tiene seriación consecuente.

4.3 Ubicación práctica

Dentro de las variables que se pueden condicionar al éxito o fracaso del curso, se encuentran las siguientes:

- Dominio de cálculo diferencial y cálculo integral.
- Dominio de ecuaciones diferenciales.
- Manejo de software de programación.

- Responsabilidad del estudiante ante las tareas y proyectos.
- El horario de estudio podrá estar en función de otras actividades y materias.
- Tanto el salón de clases como el mobiliario se encuentran en buenas condiciones.

4.4 Objetivo del curso

El objetivo del curso es el siguiente:

> "El estudiante deducirá y utilizará métodos numéricos para obtener soluciones aproximadas de modelos matemáticos que no se pueden resolver por métodos analíticos. El estudiante contará con elementos de análisis para elegir el método que le proporcione el mínimo error, dependiendo de las condiciones del problema y utilizará equipo de cómputo como herramienta para desarrollar programas. ".

De lo anterior, así como de los objetivos de cada uno de los temas del curso, se desprende la Tabla 2:

TEMA	OBJETIVO
1. Aproximación numérica y errores.	**El estudiante describirá los diferentes tipos de errores que se presentan y las limitaciones de exactitud cuándo se utiliza equipo de cómputo. Aplicará el concepto de polinomios de Taylor para aproximar funciones y medirá el error de la aproximación**
2. Solución numérica de ecuaciones algebraicas y trascendentes.	**El estudiante aplicará algunos métodos para la resolución aproximada de una ecuación algebraica o trascendente, tomando en cuenta el error y la convergencia.**

3. Solución numérica de sistemas de ecuaciones lineales.		**El estudiante aplicará algunos de los métodos para obtener soluciones aproximadas de sistemas de ecuaciones lineales y determinará los valores y vectores característicos de una matriz.**
4. Interpolación, derivación e integración numéricas.		**El estudiante aplicará algunos de los métodos numéricos para interpolar, derivar e integrar funciones.**
5. Solución numérica de ecuaciones y sistemas de ecuaciones diferenciales.		**El estudiante comparará algunos métodos de aproximación para la solución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones diferenciales.**
6. Solución numérica de ecuaciones en derivadas parciales		**El estudiante aplicará el método de diferencias finitas para obtener la solución aproximada de ecuaciones en derivadas parciales.**

Tabla 2. Objetivos del curso de Análisis Numérico por temario.

4.5 Docente

Por las características particulares del temario, el perfil profesiográfico de quienes pueden impartir la asignatura está constituido por las Licenciaturas en Ingeniería, Física o carreras afines. Con deseable experiencia profesional y recomendable con experiencia docente o con preparación en los programas de formación docente de la Facultad en la disciplina y en didáctica.

4.6 Estudiante

El estudiante que cursa esta asignatura es aquél que ha cursado materias básicas y algunas de ciencias aplicadas de cualquiera las Ingenierías impartidas en la

Facultad de Ingeniería y que, en términos generales, tiene una idea de lo que significa su carrera y, al mismo tiempo, está deseoso de adentrarse en los contenidos específicos de la ingeniería y de su profesión en particular. Ante esta situación, se considera que la asignatura debe convertirse en un espacio que pueda realizar la función de servir como puente y una transición, a través del cual los estudiantes puedan obtener, de un modo atractivo e interesante, una visión general de la carrera, sus contenidos y posibilidades.

De esta forma, se considera y se desea que, al concluir la asignatura, se logre un estudiante motivado, que haya adquirido una panorámica amplia y completa de lo que son los métodos numéricos, y que pueda, a partir de ello, tener una participación relevante en su propio proceso de aprendizaje a lo largo de sus restantes semestres.

4.7 Contenido del programa y servicios de información

El contenido del programa se divide en seis capítulos. En el primer capítulo se maneja una introducción a las aproximaciones numéricas y a los errores y se relaciona con algunos de los conceptos más importantes para entender el propósito fundamental de los métodos numéricos. En el capítulo dos se comienza con las soluciones numéricas algebraicas y transcendentes tanto en sistemas abiertos como cerrados. En el tercer capítulo, se introducen ahora solución numérica, pero de sistemas de ecuaciones lineales por distintos métodos iterativos. En el cuarto capítulo, se introducen la interpolación, derivación e integración por distintos métodos. En el quinto capítulo, se hace uso de las ecuaciones diferenciales en métodos numéricos para la resolución de sistemas. Por último, el sexto capítulo, se resuelven ecuaciones en derivadas parciales con problemas de limites iniciales.

Todos los temas anteriormente expuestos, pueden ser consultados en la bibliografía que se encuentra disponible en el sistema de bibliotecas de la Facultad y Universidad. La institución cuenta, además, con publicaciones y revistas.

5. METODOLOGÍA

5.1 Programas de Análisis Numérico.

De acuerdo con la estrategia temática del curso de Análisis Numérico a continuación se presentan diversos programas en MATLAB. Con una breve explicación del método utilizado de acuerdo al plan de estudios. Los programas realizados estarán anexos a este documento; en un apéndice al final.

5.2 Solución numérica de ecuaciones algebraicas y trascendentes.

5.3 Métodos cerrados.

Los métodos cerrados o de intervalos se utilizan cuando la función cambia de signo en la vecindad de una raíz, ya que necesita de dos valores iniciales. Dichos valores iniciales deben “encerrar”, o estar a ambos lados de la raíz.

5.3.1 Método de bisección.

El método de bisección utiliza la característica de los métodos cerrados, aprovecha la característica del cambio de signo en un intervalo, la localización puede ser más exacta al dividir el intervalo en varios subintervalos. Dichos subintervalos se investigan para encontrar el cambio de signo. El proceso se repite y la aproximación a la raíz mejora cada vez más en la medida que los subintervalos se dividen en intervalos cada vez más pequeños. El proceso se realiza con los siguientes pasos:

Paso 1: Elija valores iniciales inferior, x_i, y superior, x_f, que encierren la raíz, de forma tal que la función cambie de signo en el intervalo. Esto se verifica comprobando que $f(X_i)\ f(X_f) < 0$.

Paso 2: Una aproximación de la raíz xr se determina mediante:

$$X_r = \frac{X_i + X_f}{2}$$

Paso 3: Realice las siguientes evaluaciones para determinar en qué subintervalo está la raíz:

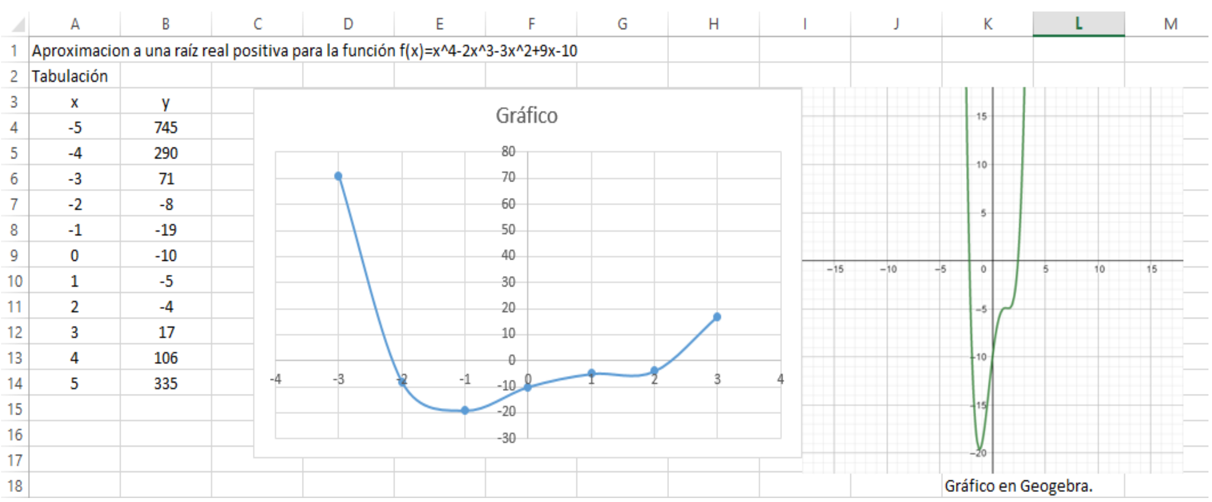
a) Si $f(X_i)\ f(X_f) < 0$, entonces la raíz se encuentra dentro del subintervalo inferior o izquierdo. Por lo tanto, haga $X_f = Xr$ y vuelva al paso 2.

b) Si $f(X_i)\ f(X_f) > 0$, entonces la raíz se encuentra dentro del subintervalo superior o derecho. Por lo tanto, haga $X_i = Xr$ y vuelva al paso 2.

c) Si $f(X_i)\ f(X_f) = 0$, la raíz es igual a Xr; termina el cálculo.

Aplicaciones:

- Encontrar la temperatura ideal a la cual debe enfriarse alguna pieza metálica.
- Cálculo de la profundidad de llenado de agua en un recipiente.
- Cálculo de raíces en intervalos cerrados.



x	y
-5	745
-4	290
-3	71
-2	-8
-1	-19
0	-10
1	-5
2	-4
3	17
4	106
5	335

Figura 2. Aplicación del método de Bisección, (creación propia).

5.4 Métodos abiertos.

Los métodos abiertos requieren únicamente de un solo valor de inicio y que no necesariamente encierra la raíz. Algunas veces estos métodos divergen pero cuando los métodos abiertos convergen llegan a ser más rápido que los métodos cerrados.

5.4.1 Método de Newthon – Raphson.

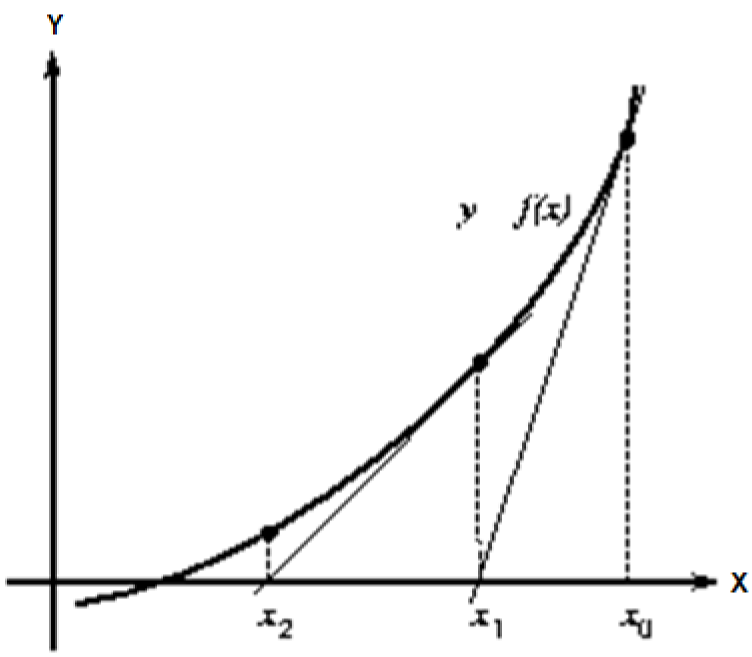
El método de Newthon – Raphson comienza con un valor inicial para la raíz *x*, entonces se puede trazar una tangente desde el punto o [xi, f(xi)] de la curva. El método se define con la siguiente función:

$$f'(x) = \frac{f(Xi) - 0}{X_i - X_{i+1}}$$

Dicha ecuación se arregla para obtener:

$$X_{i+1} = x_i - \frac{f(X_i)}{f'(X_i)}$$

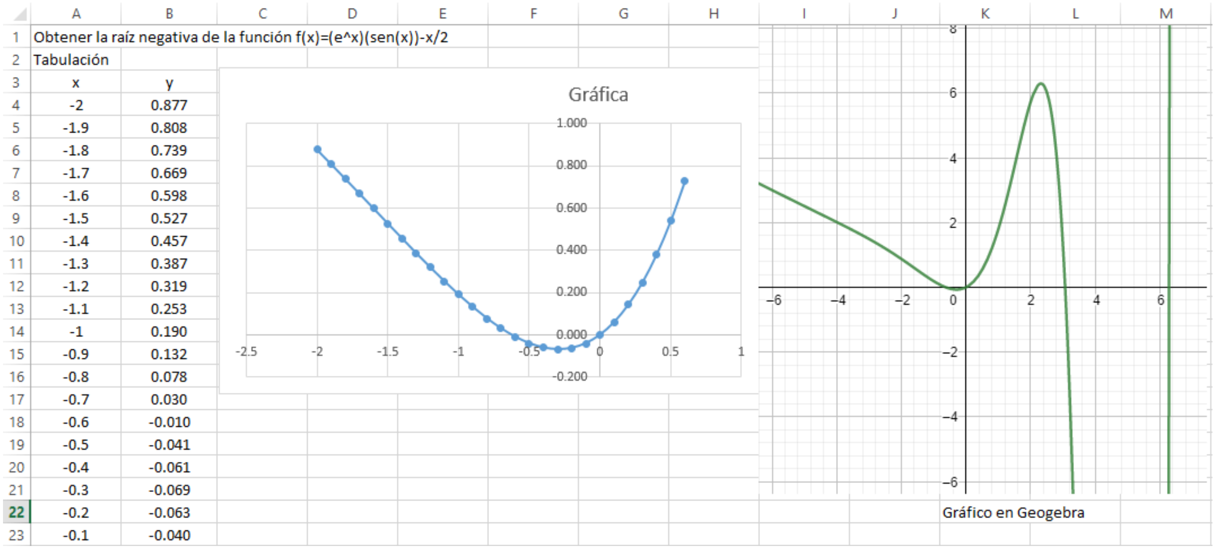
La cual se conoce como la fórmula de Newthon – Raphson.



Gráfica que muestra el método de Newthon – Raphson. (Chapra, 2006).

Aplicaciones:

- En problemas relacionados con cantidad de dinero, cálculo de tasas de interés.
- Determinar el tiempo para que un amortiguador se desplace.
- Cálculo de raíces de una función



x	y
-2	0.877
-1.9	0.808
-1.8	0.739
-1.7	0.669
-1.6	0.598
-1.5	0.527
-1.4	0.457
-1.3	0.387
-1.2	0.319
-1.1	0.253
-1	0.190
-0.9	0.132
-0.8	0.078
-0.7	0.030
-0.6	-0.010
-0.5	-0.041
-0.4	-0.061
-0.3	-0.069
-0.2	-0.063
-0.1	-0.040

Figura 3. Aplicación del método de Newton - Raphson, (creación propia).

5.5 Solución numérica de sistemas de ecuaciones lineales.

5.5.1 Método de Gauss – Jordan.

El método de Gauss – Jordan es una variación de la eliminación de Gauss. La principal diferencia consiste en que cuando una incógnita se elimina en el método de Gauss-Jordan, ésta es eliminada de todas las otras ecuaciones, no sólo de las subsecuentes. Además, todos los renglones se normalizan al dividirlos entre su elemento pivote. De esta forma, el paso de eliminación genera una matriz identidad en vez de una triangular.

Aplicaciones

- Optimización de procesos en número de material.
- Encontrar el tamaño de tanques.
- Optimizar intercambiadores de calor.
- Encontrar valores de un sistema de ecuaciones como el siguiente.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Resolver el siguiente sistema por Gauss - Jordan							
2								
3		3	1	-1	2			
4		1	-4	2	-1			
5		1	1	4	15			
6								
7		1.0000	0.3333	-0.3333	0.6667			
8		0.0000	-4.3333	2.3333	-1.6667			
9		0.0000	0.6667	4.3333	14.3333			
10								
11		1.0000	0.3333	-0.3333	0.6667			
12		0.0000	1.0000	-0.5385	0.3846			
13		0.0000	0.6667	4.3333	14.3333			
14								
15		1.0000	0.0000	-0.1538	0.5384			
16		0.0000	1.0000	-0.5385	0.3846			
17		0.0000	0.0000	4.6923	14.0769			
18								
19		1	0	0	1		X1 =	1
20		0	1	0	2		X2 =	2
21		0	0	1	3		X3 =	3

Figura 4. Aplicación del método de Gauss – Jordan, (creación propia).

5.5.2 Descomposición LU

El principal recurso de la descomposición LU es que el paso de la eliminación que toma mucho tiempo se puede formular de tal manera que involucre sólo operaciones con la matriz de coeficientes [A]. Por esto, es muy adecuado para aquellas situaciones donde se deben evaluar muchos vectores {B} del lado derecho para un solo valor de [A]. Aunque hay muchas formas de hacer esto, el análisis se enfocará en mostrar cómo el método de eliminación de Gauss se implementa como una descomposición LU.

Los métodos de descomposición LU separan el tiempo usado en las eliminaciones para la matriz [A] de las manipulaciones en el lado derecho {B}. Una vez que [A] se ha "descompuesto", los múltiples vectores del lado derecho {B} se pueden evaluar de manera eficiente.

Los resultados se pueden extender en forma directa a sistemas n dimensiones.

La ecuación se reordena como: [A] {X} – {B} = 0

Expresando la ecuación anterior como un sistema triangular superior:

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix}$$

Utilizando la eliminación para reducir el sistema a una forma triangular superior. La ecuación también se expresa en notación matricial y se reordena como: [U]{X} – {D} = 0. Después de ello se obtiene la matriz L que es una matriz diagonal inferior.

$$[L] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

Al multiplicar la matriz L por [U]{X} – {D} = 0 se obtiene [L] {[U]{X} – {D}} = [A] {X} – {B}. Obteniendo así: [L][U]=[A] y [L]{D}={B}. Si desglosamos esto en pasos se tiene:

1. Paso de descomposición de LU. [A] se factoriza o "descompone" en las matrices triangulares inferior [L] y superior [U].
2. Paso de la sustitución. [L] y [U] se usan para determinar una solución {X} para un lado derecho {B}. Este paso, a su vez, se divide en dos. Primero, la ecuación [L]{D}={B} se usa para generar un vector intermedio {D} mediante sustitución hacia adelante. Después, el resultado se sustituye en la ecuación [U]{X} – {D} = 0, la que se resuelve por sustitución hacia atrás para {X}.

Aplicaciones:

- Resolución de sistemas de álgebra lineal
- Obtención de matriz inversa
- Determinante de una matriz

5.5.3 **Método de Jacobi.**

El método de Jacobi es un método iterativo para resolver sistemas de ecuaciones lineales y obtener una más simple. Se aplica sólo a sistemas cuadrados, es decir a sistemas con incógnitas, como lo son las ecuaciones.

Primero se determina la ecuación de recurrencia. Para ello se ordenan las ecuaciones y las incógnitas. De la ecuación *i* se despeja la incógnita *i*. En notación matricial queda como:

$$x = c + Bx$$

Donde x es el vector de incógnitas. Después se toma una aproximación para las soluciones y a ésta se le designa por X_0. Se itera en el ciclo que cambia la aproximación:

$$X_{i+1} = c + Bx_i$$

	A	B	C	D	E	F	G
1	Resolver el siguiente sistema de ecuaciones por Jacobi.						
2							
3		2	-1	0	X1		124
4		-1	2	-1	X2	=	4
5		0	-1	2	X3		14
6							
7							
8	Iteración	X1	X2	X3	EaX1	EaX2	EaX3
9	0	0	0	0			
10	1	62	2	7	100.000	100.000	100.000
11	2	63	36.5	8	1.587	94.521	12.500
12	3	80.25	37.5	25.25	21.495	2.667	68.317
13	4	80.75	54.75	25.75	0.619	31.507	1.942
14	5	89.375	55.25	34.375	9.650	0.905	25.091
15	6	89.625	63.875	34.625	0.279	13.503	0.722
16	7	93.9375	64.125	38.9375	4.591	0.390	11.075
17	8	94.0625	68.4375	39.0625	0.133	6.301	0.320
18	9	96.21875	68.5625	41.21875	2.241	0.182	5.231
19	10	96.28125	70.71875	41.28125	0.065	3.049	0.151

Figura 5. Aplicación del método de Jacobi, (creación propia).

5.5.4 Método de Krylov.

Este método se fundamenta en la aplicación del Teorema de Cayley – Hamilton, dicho teorema dice que cada matriz cuadrada A satisface su ecuación característica: Si $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ es el polinomio característico de A, entonces p(A) es la matriz nula. Es decir, si sustituimos a la matriz A en:

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

El resultado debe ser cero, pero se divide el polinomio entero por a_0. Obteniendo:

$$\lambda^n + b_1\lambda^{n-1} + b_2\lambda^{n-2} + \cdots + b_{n-1}\lambda + b_n = 0$$

Donde los coeficientes b_i se obtienen como $b_i = \frac{a_i}{a_0}$. Aplicando el teorema de Cayley – Hamilton en el polinomio anterior queda:

$$F(A) = A^n + b_1A\lambda^{n-1} + b_2A\lambda^{n-2} + \cdots + b_{n-1}A + b_nI = 0$$

El polinomio anterior representa un sistema de ecuaciones lineales cuyas incógnitas son los coeficientes b_i. La solución de este sistema nos proporciona los coeficientes b_i que sustituidos en el polinomio:

$$\lambda^n + b_1\lambda^{n-1} + b_2\lambda^{n-2} + \cdots + b_{n-1}\lambda + b_n = 0$$

Nos proporciona el polinomio característico de A. Se puede simplificar la elevación de la matriz A las potencias necesarias. Esto se logra multiplicando la matriz A por un vector $\bar{y}$ compatible diferente de cero. Obteniendo un vector. Este vector $\bar{y}$ puede ser libremente elegido, como, por ejemplo:

$$\bar{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Aplicaciones

- Obtención de valores característicos
- Análisis de imágenes
- Rotación de un cuerpo (tensor de inercia)

5.6 Interpolación, derivación e integración numéricas.

5.6.1 Método de Lagrange.

El polinomio de interpolación de Lagrange es simplemente una reformulación del polinomio de Newton que evita el cálculo de las diferencias divididas, y se representa de manera concisa como:

$$f_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x) f(x_i) \quad \text{Donde} \quad L_i(x) = \prod_{\substack{j=o \\ j\neq i}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$$

Y Π designa el “producto de”. Por ejemplo, la versión lineal (n=1) es

$$f_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1)$$

Y la versión de segundo grado es:

$$f_1(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} f(x_1) \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} f(x_2)$$

Aplicaciones

- Datos experimentales
- Problemas de optimización
- En economía

5.6.2 Método de Diferencias Finitas.

Se define una función y=f(x) en forma tabular para la que se desconoce su expresión analítica y vamos a suponer que para valores de "x" se encuentran igualmente espaciada (en incrementos de "h") se tendrá:

X	X_0	$X_1 = X_0 + h$	$X_2 = X_0 + 2h$	…	$Xn = X_0 + nh$
f(x)	Y_0	Y_1	Y_2	…	Y_n

Se les llama diferencias hacia adelante:

Primeras diferencias.

$$a_0 = y_1 - y_0$$
$$a_1 = y_2 - y_1$$
$$a_2 = y_3 - y_2$$
$$\vdots$$
$$a_{n-1} = y_n - y_{n-1}$$

Segundas diferencias.

$$b_0 = a_1 - a_0$$
$$b_1 = a_2 - a_1$$
$$b_2 = a_3 - a_2$$
$$\vdots$$
$$b_{n-2} = a_{n-1} - a_{n-2}$$

Terceras diferencias.

$$c_0 = b_1 - b_0$$
$$c_1 = b_2 - b_1$$
$$c_2 = b_3 - b_2$$
$$\vdots$$
$$c_{n-3} = b_{n-2} - b_{n-3}$$

Y así sucesivamente hasta la infinita diferencia.

Aplicaciones

- En simulación del campo electromagnético
- En geohidrología
- En estudios de pozo petroleras

5.6.3 Método de Derivación Numérica.

La derivación numérica es una técnica para calcular una aproximación a la derivada de una función en un punto utilizando los valores y propiedades de la misma. Si de una función f(x) se conocen sus valores en un determinado soporte de puntos, puede “aproximarse” la función f(x) por otra función p(x) que la interpole en dicho soporte y sustituir el valor de las derivadas de f(x) en un punto x por el valor de las correspondientes derivadas de p(x) en dicho punto x.

Para la derivación numérica se tiene por definición la derivada de una función f(x) como:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Las aproximaciones numéricas que se pueden realizar para h>0 son:

Diferencias hacia adelante:

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Diferencia hacia atrás:

$$f'(\,x_0) \approx \frac{f(x_0) - f(x_0 + h)}{h}$$

Diferencias centrales:

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}$$

$$f''(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h)}{h^2}$$

Aplicaciones

- Análisis de movimiento
- Determinación de la capacidad calorífica
- Cinética de una reacción

5.6.4 Método de Integración Numérica.

Dada una función f(x)=0 se aceptará la aproximación polinomial como aquella que pasa por todos los puntos definidos en la tabulación y se tendrá una aproximación a:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx$$

Los métodos de integración numérica se dividen en 3:

1) Con interpolación de primer orden. Fórmula Trapecial.

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \frac{h}{2}[y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + \cdots + 2y_{n-1} + 2y_n]$$

2) Con interpolación de segundo orden. Fórmula de Simpson de 1/3.

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \frac{h}{3}[y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 \ldots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n]$$

3) Con interpolación de tercer orden. Fórmula de Simpson de 3/8.

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \frac{3h}{8}[y_0 + 3y_1 + 3y_2 + 2y_3 + \cdots + 2y_{n-3} + 3y_{n-2} + 3y_{n-1} + y_n]$$

Ejemplo 1: Usando la regla del trapecio con n=2 y n=4 aproximar:

$$\int_{1}^{2} \frac{dx}{x}$$

Cuyo valor exacto es 0.6931472.

Aplicaciones

- Calculo de la capacidad de un pantano
- Fuerza total ejercida por las alas de un avión
- Cálculo de áreas

5.7 Solución numérica de ecuaciones y sistemas de ecuaciones diferenciales.

5.7.1 Solución aproximada de sistemas de ecuaciones diferenciales.

Solución numérica de sistemas de ecuaciones diferenciales y problemas de valores de frontera. La solución de un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden es de gran utilidad, debido a que cualquier ecuación diferencial de orden superior se puede transformar en un sistema de ecuaciones diferenciales y su solución numérica se puede obtener utilizando los métodos anteriores.

Problemas de valores en la frontera. Teniendo una ecuación de orden superior a la cual se le establecen condiciones en los extremos del intervalo de integración. Los cuales se deben satisfacer.

Existen dos métodos: de aproximaciones sucesivas y el directo. Ambos utilizan la sustitución de las derivadas por formulas numéricas de derivación, valuadas en el mismo punto y con el mismo orden de error.

Método de aproximaciones sucesivas.

1. Se sustituye en la ecuación diferencial las derivadas por fórmulas numéricas de derivación, consistentes usualmente las limitadas a una interpolación de segundo orden.
2. Formada la ecuación de despeja para y_{i+1}, se le conoce como Operador Diferencial.
3. Se divide el intervalo de solución en “n” partes iguales.
4. Se presupone el valor del primer punto de solución, normalmente se considera que la solución es una línea recta y sucesivamente se busca la mejor aproximación.
5. Se calculan con el Operador Diferencial los siguientes puntos, si se satisface la condición final, se termina el proceso, en caso contrario se repiten los cálculos para otra supuesta solución del primer punto del intervalo.

Las ecuaciones diferenciales mayores al orden dos, se pueden resolver de la misma manera pero su solución se vuelve más compleja, ya que hay que suponer dos o más parámetros.

Aplicaciones

- Análisis de cargas estructurales
- Evolución temporal
- Crecimiento poblacional

6. RESULTADOS

En esta sección se presenta por cada tema propuesto problemas resueltos en MATLAB además de ejercicios propuestos para el alumno.

6.1 Método de Bisección.

1. Calcular la raíz de la función f(x) = $2x^3$-3x+4 en el intervalo de -2 a -1, con 10 iteraciones.

```
>> biseccionnuevo
Introduzca el valor de a: -2
Introduzca el valor de b: -1
Introduzca el número de iteraciones cont: 10
Introduzcal a funcion f(x)=2*x^3-3*x+4

    k    a    b    c    f(c)     error
    1.0000   -2.0000   -1.0000   -1.5000    1.7500    0.5000
    2.0000   -2.0000   -1.5000   -1.7500   -1.4688    0.2500
    3.0000   -1.7500   -1.5000   -1.6250    0.2930    0.1250
    4.0000   -1.7500   -1.6250   -1.6875   -0.5483    0.0625
    5.0000   -1.6875   -1.6250   -1.6563   -0.1180    0.0313
    6.0000   -1.6563   -1.6250   -1.6406    0.0899    0.0156
    7.0000   -1.6563   -1.6406   -1.6484   -0.0134    0.0078
    8.0000   -1.6484   -1.6406   -1.6445    0.0384    0.0039
    9.0000   -1.6484   -1.6445   -1.6465    0.0125    0.0020
   10.0000   -1.6484   -1.6465   -1.6475   -0.0005    0.0010

Solución:
 c=-1.64746
f(c)=-0.00046
error= 0.00098
```

Solución de la raíz: -1.64746

2. Calcular la raíz de la ecuación $f(x) = 2x-e^x+1$ en el intervalo de 1 a 2, con 10 iteraciones.

```
>> biseccionnuevo
Introduzca el valor de a: 1
Introduzca el valor de b: 2
Introduzca el número de iteraciones cont: 10
Introduzcal a funcion f(x)=2*x-exp(x)+1

    k   a   b   c   f(c)    error
    1.0000    1.0000    2.0000    1.5000   -0.4817    0.5000
    2.0000    1.0000    1.5000    1.2500    0.0097    0.2500
    3.0000    1.2500    1.5000    1.3750   -0.2051    0.1250
    4.0000    1.2500    1.3750    1.3125   -0.0905    0.0625
    5.0000    1.2500    1.3125    1.2813   -0.0386    0.0313
    6.0000    1.2500    1.2813    1.2656   -0.0141    0.0156
    7.0000    1.2500    1.2656    1.2578   -0.0021    0.0078
    8.0000    1.2500    1.2578    1.2539    0.0038    0.0039
    9.0000    1.2539    1.2578    1.2559    0.0009    0.0020
   10.0000    1.2559    1.2578    1.2568   -0.0006    0.0010

Solución:
 c= 1.25684
f(c)=-0.00061
error= 0.00098
```

Solución de la raíz: 1.25684

Ejercicios propuestos.

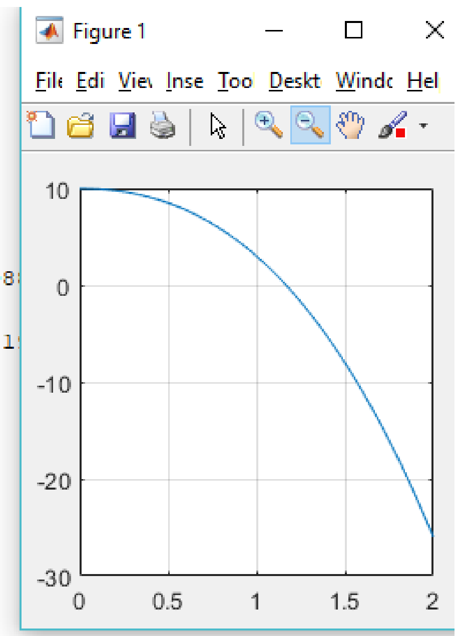
1. Calcular la raíz de la función $f(x) = x^4+3x^2-2$ en el intervalo de -1 a 0, con 10 iteraciones.
2. Calcular la raíz de la función $f(x) = x^3-4x+5$ en el intervalo de -3 a -2, con 10 iteraciones.
3. Calcular la raíz de la función $f(x) = e^x+x-2$ en el intervalo de -1 a 0, con 10 iteraciones.

4. Calcular la raíz de la función f(x) = $-5e^{2x}+2e^{x}+1$ en el intervalo de -2 a 1, con 20 iteraciones.
5. Calcular la raíz de la función f(x) = $(1/(x^2+5x))-2$ en el intervalo de -6 a -5 y 0 a 1, con 20 iteraciones.

6.2 Método de Newton – Raphson

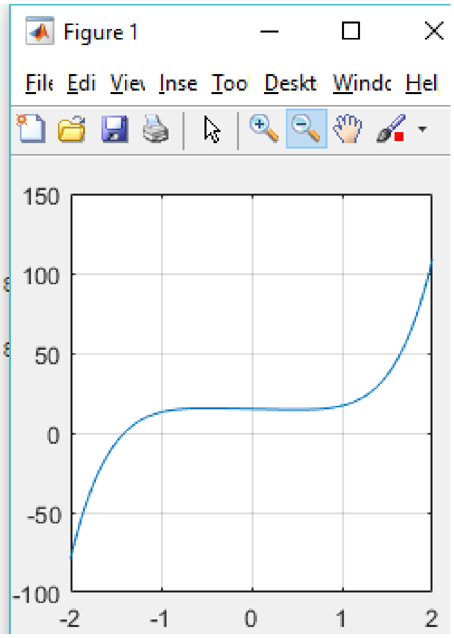
1. Calcular la raíz de la ecuación f(x) = $-2x^3$-5x2+10 en el intervalo de 2 a 0.

```
>> Newton_Raphson
Ingrese la función: -2*x^3-5*x^2+10
Ingrese el limite superior para graficar: 2
Ingrese el limite inferior para la visualización: 0
Ingrese el valor apróximado de la raíz: 1.2

ans =

424684954760349264332828830658285437520362953064194398

>> a=42468495476034926433282883065828543752036295306641

a =

    1.1676

>>
>>
>>
>>
```



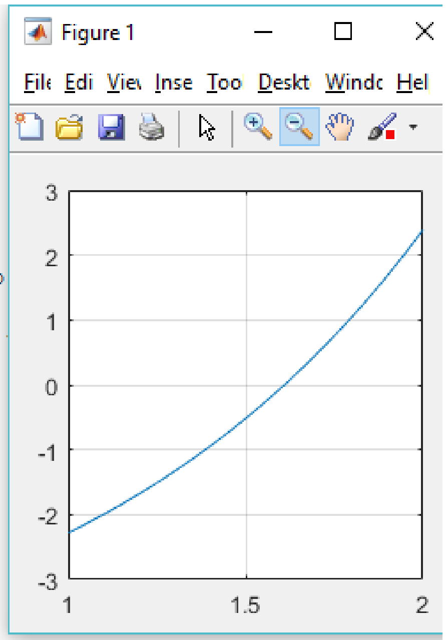
2. Calcular la raíz de la ecuación f(x) = $3x^5$-x+15 en el intervalo de -2 a 2.

```
>> Newton_Raphson
Ingrese la función: 3*x^5-x+15
Ingrese el limite superior para graficar: -2
Ingrese el limite inferior para la visualización: 2
Ingrese el valor apróximado de la raíz: -1.5

ans =

-125477833910517496281999624981711255820401704388345

>> a=-1254778339105174962819996249817112558204017043

a =

 -1.2548e+122

>>
```



3. Calcular la raíz de la ecuación f(x) = e^x-5 en el intervalo de 2 a 1.

```
>> Newton_Raphson
Ingrese la función: exp(x)-5
Ingrese el limite superior para graficar: 2
Ingrese el limite inferior para la visualización: 1
Ingrese el valor apróximado de la raíz: 1.5

ans =

3/2 - exp(exp(exp(exp(-3/2)*(exp(3/2) - 5) - 3/2)*(exp

>> a=3/2 - exp(exp(exp(exp(-3/2)*(exp(3/2) - 5) - 3/2)

a =

    1.6094

>>
```



Ejercicios propuestos.

1. Calcular la raíz de la función $f(x) = -5x^7+2x-6$ en el intervalo de -2 a -1.

2. Calcular la raíz de la función $f(x) = -3e^x+2x+6$ en el intervalo de -3 a -2.

3. Calcular la raíz de la función f(x) = cos(x+1)-sen(x+1)+1 en el intervalo de -5 a -4.

4. Calcular la raíz de la función f(x) = cos(x+1)-sen(x+1)+1 en el intervalo de 6 a 7.

Calcular la raíz de la función f(x) = 2cos(3x+1)-5sen(3x+1)+1 en el intervalo de 0 a 1.

6.3 Método de Gauss – Jordan

1. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{matrix} 2x & +y & -z \\ -3x & -y & +2z \\ -2x & +y & +2z \end{matrix} = \begin{matrix} 8 \\ -11 \\ -3 \end{matrix}$$

```
Command Window
a =

     2     1    -1     8
    -3    -1     2   -11
    -2     1     2    -3


f =

     3


c =

     4


a =

    1.0000    0.5000   -0.5000    4.0000
   -3.0000   -1.0000    2.0000  -11.0000
   -2.0000    1.0000    2.0000   -3.0000
```

```
Command Window

a =

     1     0     0     2
     0     1     0     3
     0     0     1    -1


a =

     1     0     0     2
     0     1     0     3
     0     0     1    -1


a =

     1     0     0     2
     0     1     0     3
     0     0     1    -1

Result
```

Se obtiene la solución: x=2; y=3 y z=-1

Ejercicios propuestos.

1. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{array}{cccc} 4x & +5y & +6z & 24 \\ x & +2y & +3z = & 9 \\ 3x & +y & -2z & 4 \end{array}$$

2. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{array}{cccc} 2x & -y & +z & 0 \\ x & +2y & -2z = & 5 \\ 3x & -4y & -3z & -5 \end{array}$$

3. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{matrix} x & +y & +z & & 2 \\ 3x & -2y & -z & = & 4 \\ -2x & +y & +2z & & 2 \end{matrix}$$

4. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{matrix} x & +y & +z & & 1 \\ 2x & +3y & -4z & = & 9 \\ x & -y & +z & & -1 \end{matrix}$$

5. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{matrix} 2x & +3y & -2z & & 8 \\ x & & -4z & = & 1 \\ 2x & -y & -6z & & 4 \end{matrix}$$

6.4 Método de LU

1. Calcula la matriz LU de la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 10 & -7 & 0 \\ -3 & 2 & 6 \\ 5 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

```
Command Window

L =

    1.0000         0         0
   -0.3000   -0.0400    1.0000
    0.5000    1.0000         0


U =

   10.0000   -7.0000         0
         0    2.5000    5.0000
         0         0    6.2000


ans =

   10.0000   -7.0000         0
   -3.0000    2.0000    6.0000
    5.0000   -1.0000    5.0000
```

```
L =

    1.0000         0         0
    0.5000    1.0000         0
   -0.3000   -0.0400    1.0000


U =

   10.0000   -7.0000         0
         0    2.5000    5.0000
         0         0    6.2000


P =

     1     0     0
     0     0     1
     0     1     0
```

Obteniendo las matrices L y U, además la matriz P que da cuenta del intercambio de filas. Y la multiplicación de L*U.

```
ans =

   10.0000   -7.0000         0
   -3.0000    2.0000    6.0000
    5.0000   -1.0000    5.0000
```

2. Calcula la matriz LU de la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -5 & 5 & 0 \\ -2 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

```
Command Window

L =

   -0.2000   -0.6000    1.0000
    1.0000         0         0
    0.4000    1.0000         0


U =

   -5.0000    5.0000         0
         0   -5.0000   -1.0000
         0         0    2.4000


ans =

    1.0000    2.0000    3.0000
   -5.0000    5.0000         0
   -2.0000   -3.0000   -1.0000
```

```
L =

    1.0000         0         0
    0.4000    1.0000         0
   -0.2000   -0.6000    1.0000


U =

   -5.0000    5.0000         0
         0   -5.0000   -1.0000
         0         0    2.4000


P =

     0     1     0
     0     0     1
     1     0     0
```

Obteniendo las matrices L y U, además la matriz P que da cuenta del intercambio de filas. Y la multiplicación de L*U.

```
ans =

    1.0000    2.0000    3.0000
   -5.0000    5.0000         0
   -2.0000   -3.0000   -1.0000
```

Ejercicios propuestos.

1. Calcular la matriz LU de la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -3 \\ 7 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

2. Calcular la matriz LU de la siguiente matriz:

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 8 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

3. Calcular la matriz LU de la siguiente matriz:

$$C = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 4 \\ 9 & 8 & -7 \\ -6 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

4. Calcular la matriz LU de la siguiente matriz:

$$D = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 5 & -7 & 6 \\ 9 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

5. Calcular la matriz LU de la siguiente matriz:

$$E = \begin{bmatrix} 6 & -3 & -1 \\ 3 & -9 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

6.5 Método de Jacobi

1. Obtener la matriz de transición de Jacobi a partir de la siguiente matriz:

$$\begin{matrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{matrix} = \begin{matrix} 8 \\ -11 \\ 3 \end{matrix}$$

Parte con el vector inicial X_0 = [1, 1, 1] con una tolerancia de 0.1. Realiza 10 iteraciones.

```
Ingrese la matriz de coeficientes:
 [2 1 -1;-3 -1 2;-2 1 2]

Ingrese los términos independientes:
 [8;-11;3]

Ingrese el vector con las aproximacimaciones Iniciales:
 [1;1;1]

Ingrese el número máximo de iteraciones:
 10

Ingrese la tolerancia:
 0.1
condicional=
  44.672322469556562
```

```
     SOLUCION:

La matriz de transicion de jacobi:
                    0  -0.500000000000000   0.500000000000000
  -3.000000000000000                   0   2.000000000000000
   1.000000000000000  -0.500000000000000                   0
```

2. Obtener la matriz de transición de Jacobi a partir de la siguiente matriz:

$$\begin{array}{cccc} 4x & +5y & +6z & 24 \\ x & +2y & +3z = & 9 \\ 3x & +y & -2z & 4 \end{array}$$

Parte con el vector inicial X_0 = [0 ,0, 0] con una tolerancia de 0.01. Realiza 10 iteraciones.

```
Ingrese la matriz de coeficientes:
 [4 5 6;1 2 3;3 1 -2]

Ingrese los términos independientes:
 [24;9;4]

Ingrese el vector con las aproximacimaciones Iniciales:
 [0;0;0]

Ingrese el número máximo de iteraciones:
 10

Ingrese la tolerancia:
 0.01
condicional=
     1.144756969623194e+02
```

```
SOLUCION:

La matriz de transicion de jacobi:

                  0  -1.250000000000000  -1.500000000000000
 -0.500000000000000                   0  -1.500000000000000
  1.500000000000000   0.500000000000000                   0

re =

   1.817993977551710

Radio Espectral mayor que 1
el método no converge
```

Ejercicios propuestos.

1. Obtener la matriz de transición de Jacobi a partir de la siguiente matriz:

$$\begin{matrix} x & +4y & +3z \\ 2x & -3y & -z \\ 4x & +5y & 0 \end{matrix} = \begin{matrix} 12 \\ 20 \\ 15 \end{matrix}$$

Parte con el vector inicial X0 = [0 ,0, 0] con una tolerancia de 0.001. Realiza 10 iteraciones.

2. Obtener la matriz de transición de Jacobi a partir de la siguiente matriz:

$$\begin{matrix} 2x & -y & +z \\ x & +2y & -2z \\ 3x & -4y & -3z \end{matrix} = \begin{matrix} 0 \\ 5 \\ -5 \end{matrix}$$

Parte con el vector inicial X0 = [0 ,0, 0] con una tolerancia de 0.001. Realiza 10 iteraciones.

3. Obtener la matriz de transición de Jacobi a partir de la siguiente matriz:

$$\begin{matrix} x & +y & +z \\ 3x & -2y & -z \\ -2x & +y & +2z \end{matrix} = \begin{matrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{matrix}$$

Parte con el vector inicial X0 = [0 ,0, 0] con una tolerancia de 0.001. Realiza 10 iteraciones.

4. Obtener la matriz de transición de Jacobi a partir de la siguiente matriz:

$$\begin{array}{cccc} x & +y & +z & 1 \\ 2x & +3y & -4z = & 9 \\ x & -y & +z & -1 \end{array}$$

Parte con el vector inicial X0 = [0 ,0, 0] con una tolerancia de 0.001. Realiza 10 iteraciones.

5. Obtener la matriz de transición de Jacobi a partir de la siguiente matriz:

$$\begin{array}{cccc} 2x & +3y & -2z & 8 \\ x & 0 & -4z = & 1 \\ 2x & -y & -6z & 4 \end{array}$$

Parte con el vector inicial X0 = [0 ,0, 0] con una tolerancia de 0.001. Realiza 10 iteraciones.

6.6 Método de Krylov

1. Calcula el polinomio de la siguiente matriz y sus raíces:

$$\begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 9 & 2 \end{bmatrix}$$

```
Introduce el tamaño de matriz:2
Introduce la matriz cuadrada:[5 8;9 2]

p =

x^2 - 7*x - 62


r =

  12.116843969807045
  -5.116843969807042
```

2. Calcula el polinomio de la siguiente matriz y sus raíces:

$$\begin{bmatrix} 12 & 8 \\ 1 & 9 \end{bmatrix}$$

```
Introduce el tamaño de matriz:2
Introduce la matriz cuadrada:[12 8;1 9]

p =

x^2 - 21*x + 100


r =

  13.701562118716424
   7.298437881283576
```

Ejercicios propuestos.

1. Calcula el polinomio de la siguiente matriz y sus raíces:

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$$

2. Calcula el polinomio de la siguiente matriz y sus raíces:

$$B = \begin{bmatrix} 9 & -2 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$$

3. Calcula el polinomio de la siguiente matriz y sus raíces:

$$C = \begin{bmatrix} -8 & 7 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

4. Calcula el polinomio de la siguiente matriz y sus raíces:

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

5. Calcula el polinomio de la siguiente matriz y sus raíces:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

6.7 Método de Lagrange.

1. Obtener el polinomio de grado “n”. Que pasa por los puntos: A(1, 8), B(2, 4), C(3, 2), D(5, 6) y E(8, 5).

```
X =

     1     2     3     5     8


Y =

     8     4     2     6     5


P =

   -0.2203    3.1252  -12.4923   17.7477
```

Se obtiene el polinomio de valores $-0.2203x^3+3.1252x^2-12.4923x+17.7477$

2. Obtener el polinomio de grado "n". Que pasa por los puntos: A(-8, 8), B(-6, 4), C(-4, 2), D(0, -1) y E(8, -5).

```
X =

    -8    -6    -4     0     8


Y =

     8     4     2    -1    -5


P =

  -0.005840348369335   0.037424555273189  -0.433476281236764  -0.941296060991106
```

Se obtiene el polinomio de valores $-0.005840348369335x^3+0.037424555273189x^2-0.433476281236764x-0.941296060991106$

Ejercicios propuestos.

1. Obtener el polinomio de grado "n". Que pasa por los puntos: A(-9,5), B(0,-10) y

C(9,12).

2. Obtener el polinomio de grado “n”. Que pasa por los puntos: A(-5,6), B(-2,-5), C(0,4) y D(3,-8).

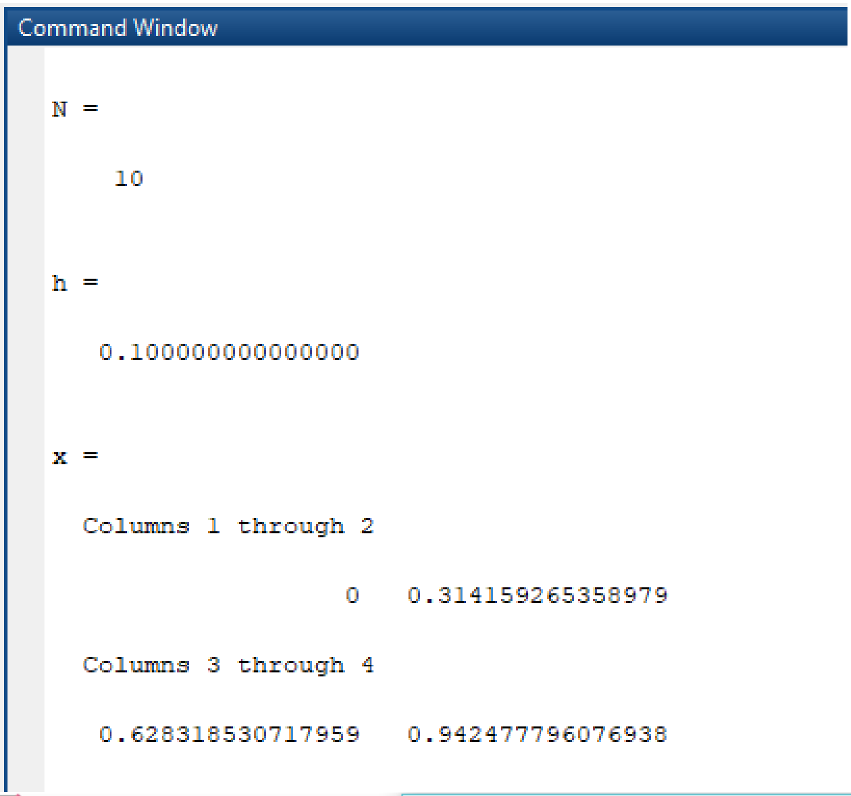
3. Obtener el polinomio de grado “n”. Que pasa por los puntos: A(-9,-9), B(-5,-15), C(-1,-3), D(2,8) y E(8,17).

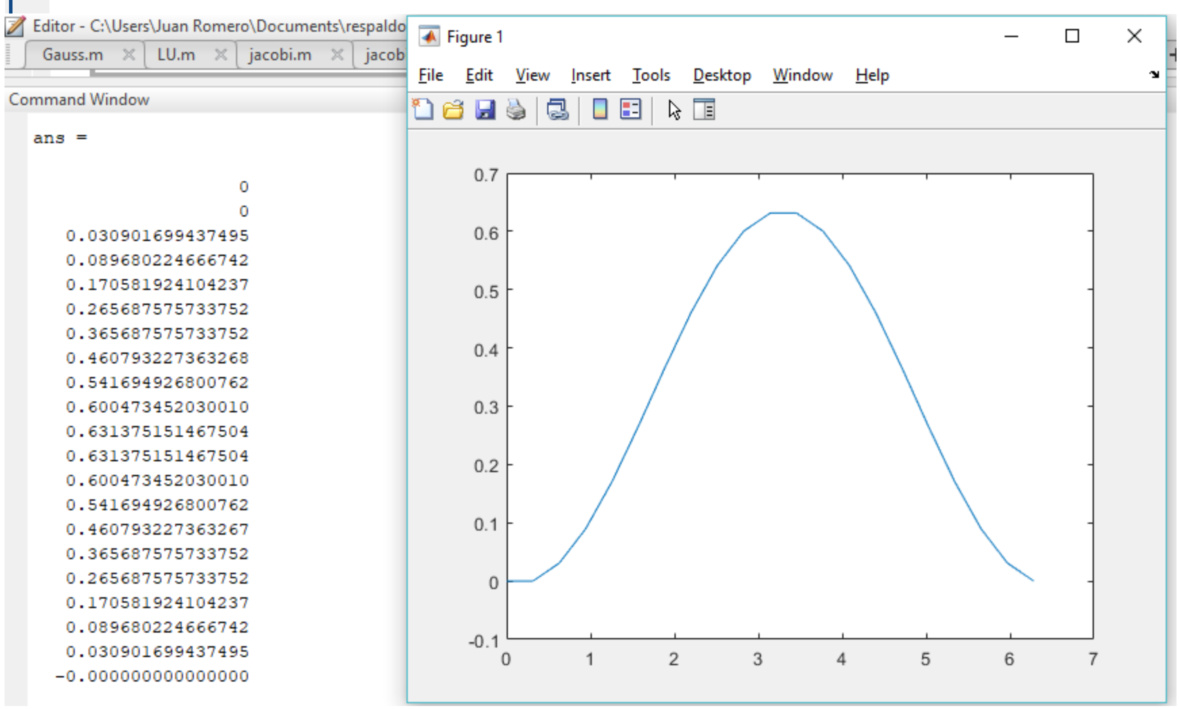
4. Obtener el polinomio de grado “n”. Que pasa por los puntos: A(-2,5), B(-1,3), C(0,8), D(1,2), E(2,-3) y F(3,4).

5. Obtener el polinomio de grado “n”. Que pasa por los puntos: A(-4,5), B(-3,-2), C(-2,4), D(-1,-1), E(0,3), F(1,0), G(2,2) y H(3,1).

6.8 Diferencias Finitas.

1. Resolver la ecuación diferencial y´=sen(x) con n=10 y h=0.1



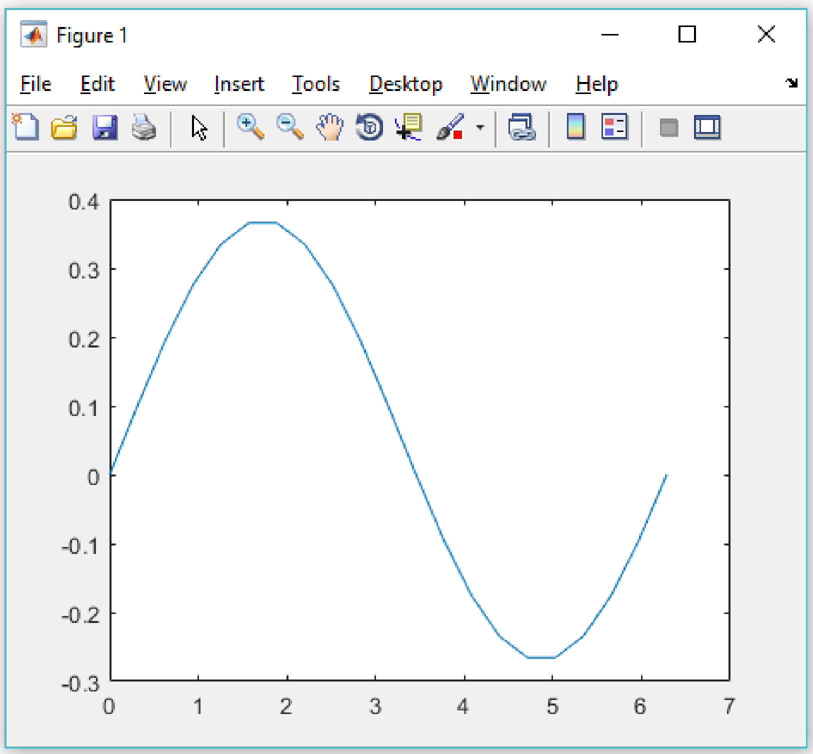


Obteniendo los valores mostrados arriba.

2. Resolver la ecuación diferencial y´=cos(x) con n=10 y h=0.1

```
Command Window

N =

    10

h =

   0.100000000000000

x =

  Columns 1 through 6

                   0   0.314159265358979   0.628318530717959   0.942477796076938   1.256637061435917   1.570796326794897

  Columns 7 through 12

   1.884955592153876   2.199114857512855   2.513274122871835   2.827433388230814   3.141592653589793   3.455751918948772
```

```
ans =

                   0
   0.100000000000000
   0.195105651629515
   0.276007351067010
   0.334785876296257
   0.365687575733752
   0.365687575733752
   0.334785876296258
   0.276007351067010
   0.195105651629515
   0.100000000000000
   0.000000000000000
  -0.095105651629515
  -0.176007351067010
  -0.234785876296257
  -0.265687575733752
  -0.265687575733752
  -0.234785876296257
  -0.176007351067010
  -0.095105651629515
  -0.000000000000000
```



Obteniendo los valores mostrados arriba.

Ejercicios propuestos.

1. Resolver la ecuación diferencial y´=senh(x) con n=10 y h=0.1
2. Resolver la ecuación diferencial y´=cosh(x) con n=15 y h=0.2
3. Resolver la ecuación diferencial y´=tan(x) con n=10 y h=0.3
4. Resolver la ecuación diferencial y´=sen(x)+cos(x) con n=15 y h=0.4
5. Resolver la ecuación diferencial y´=sen(x)-cos(x) con n=20 y h=0.5

6.9 Derivación Numérica.

1. Calcular las diferencias hacia adelante, hacia atrás y centrales de la función f(x)=sen(x)tan^2(x) con h=0.05

```
>> derivacionnumerica
Ingresa función a valuarsin(x).*tan(x).^2

f =

sin(x)*tan(x)^2


f =

     Inline function:
     f(x) = sin(x).*tan(x).^2

Ingresa valor de h*0.05

h =

    0.0500


d1 =

   11.9045
```

```
d2 =

    9.0078


d3 =

    0.0261


dv =

   11.9045    9.0078    0.0261
```

Se obtiene en d1 la diferencia hacia adelante, en d2 la diferencia hacia atrás y en d3 la central, con los valores: 11.9045, 9.0078 y 0.0261 respectivamente.

2. Calcular las diferencias hacia adelante, hacia atrás y centrales de la función f(x)=ln(x)sin(x) con h=0.1

```
>> derivacionnumerica
Ingresa función a valuarlog(x)*sin(x)

f =

log(x)*sin(x)


f =

     Inline function:
     f(x) = log(x).*sin(x)

Ingresa valor de h*0.1

h =

   0.100000000000000


d1 =

   0.849411337303932
```

```
d2 =

   0.825317271270031


d3 =

   0.008373643042870


dv =

   0.849411337303932   0.825317271270031   0.008373643042870
```

Se obtiene en d1 la diferencia hacia adelante, en d2 la diferencia hacia atrás y en d3 la central, con los valores: 0.849411337303932, 0.825317271270031 y 0.008373643042870 respectivamente.

Ejercicios propuestos.

1. Calcular las diferencias hacia adelante, hacia atrás y centrales de la función f(x)=sin(x) con h=0.1

2. Calcular las diferencias hacia adelante, hacia atrás y centrales de la función f(x)=cos(x) con h=0.05

3. Calcular las diferencias hacia adelante, hacia atrás y centrales de la función f(x)=ln(x) con h=0.1

4. Calcular las diferencias hacia adelante, hacia atrás y centrales de la función $f(x)=\ln(x)\tan^2(x)$ con h=0.05

5. Calcular las diferencias hacia adelante, hacia atrás y centrales de la función $f(x)=\sin(x)\cos^2(x)$ con h=0.1

6.10 Integración Numérica.

1. Usando la regla del trapecio con n=2 y n=4 aproximar:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x}$$

Cuyo valor exacto es 0.6931472.

```
>> trapecio
n=2, iaprox=0.708333,error=-0.0151862,ratio=0
n=4, iaprox=0.697024,error=-0.00387663,ratio=3.91736
n=8, iaprox=0.694122,error=-0.00097467,ratio=3.97738
n=16, iaprox=0.693391,error=-0.000244022,ratio=3.99419
n=32, iaprox=0.693208,error=-6.10277e-05,ratio=3.99854
n=64, iaprox=0.693162,error=-1.52583e-05,ratio=3.99963
n=128, iaprox=0.693151,error=-3.81467e-06,ratio=3.99991
n=256, iaprox=0.693148,error=-9.53672e-07,ratio=3.99998
n=512, iaprox=0.693147,error=-2.38418e-07,ratio=3.99999
n=1024, iaprox=0.693147,error=-5.96046e-08,ratio=4
```

2. Usando la regla del trapecio con n=128 y n=512 aproximar:

$$\int_{1}^{2} \sin x \, dx$$

Cuyo valor exacto es 0.9564491

```
>> trapecio
n=2, iaprox=0.93644,error=-0.243292,ratio=0
n=4, iaprox=0.951462,error=-0.258315,ratio=0.941843
n=8, iaprox=0.955203,error=-0.262056,ratio=0.985724
n=16, iaprox=0.956138,error=-0.262991,ratio=0.996447
n=32, iaprox=0.956371,error=-0.263224,ratio=0.999113
n=64, iaprox=0.95643,error=-0.263283,ratio=0.999778
n=128, iaprox=0.956444,error=-0.263297,ratio=0.999945
n=256, iaprox=0.956448,error=-0.263301,ratio=0.999986
n=512, iaprox=0.956449,error=-0.263302,ratio=0.999997
n=1024, iaprox=0.956449,error=-0.263302,ratio=0.999999
```

Como podemos ver con MATLAB se obtienen más aproximaciones.

3. Usando la regla de Simpson 1/3 calcular el valor de la integral de la función con n=8

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan(x) \, dx$$

```
Ingresa la funcion f(x): tanx
Ingrese el numero de subintervalos: 8
Ingrese el limite inferior de la integral: 0
Ingrese el limite superior de la integral: pi/4
El resultado de la integral es 0.30843
```

Obteniendo un valor de la integral de 0.30843

4. Usando la regla de Simpson 1/3 calcular el valor de la integral de la función con n=1024

$$\int_{1}^{2} sinx\, dx$$

```
Ingresa la funcion f(x): sin(X)
Ingrese el numero de subintervalos: 1024
Ingrese el limite inferior de la integral: 1
Ingrese el limite superior de la integral: 2
El resultado de la integral es 0.95645
```

Obteniendo un valor de la integral de 0.95645

5. Usando la regla de Simpson 3/8 calcular el valor de la integral de la función:

$$\int_{0}^{1} x^2 + 1\, dx$$

```
Ingrese la función f(x)= x^2+1
Ingrese el limite inferior: 0
Ingrese el limite superior: 1
VALOR APROXIMADO DE LA INTEGRAL:

I =

   1.583333333333333
```

Obteniendo un valor de 1.58333

6. Usando la regla de Simpson 3/8 calcular el valor de la integral de la función:

$$\int_{2}^{3} 3x^2 + 7x + 2\,dx$$

```
Ingrese la función f(x)= 3*x^2+7*x+2
Ingrese el limite inferior: 2
Ingrese el limite superior: 3
VALOR APROXIMADO DE LA INTEGRAL:

I =

  32.250000000000000
```

Obteniendo un valor de 32.25

Ejercicios propuestos.

1. Usando la regla del trapecio con n=128 aproximar:

$$\int_{0}^{1} \cos x\,dx$$

Cuyo valor exacto es 0.84147098

2. Usando la regla del trapecio con n=256 aproximar:

$$\int_{0}^{2} e^{-x^2} dx$$

Cuyo valor exacto es 0.88208139

3. Usando la regla del trapecio con n=128 aproximar:

$$\int_{0}^{3} \frac{1}{x^2 + 16} dx$$

Cuyo valor exacto es 0.16087527

4. Usando la regla del trapecio con n=512 aproximar:

$$\int_{-1}^{1} e^{2x} dx$$

Cuyo valor exacto es 3.62686040

5. Usando la regla del trapecio con n=1024 aproximar:

$$\int_{0}^{5} \frac{2}{x^3 - 9} dx$$

Cuyo valor exacto es -0.32067743

6. Usando la regla de Simpson 1/3, calcular el valor de la integral de la función con n=2

$$\int_{0}^{1} \cos x \, dx$$

7. Usando la regla de Simpson 1/3, calcular el valor de la integral de la función con n=4

$$\int_{0}^{2} e^{-x^2} dx$$

8. Usando la regla de Simpson 1/3, calcular el valor de la integral de la función con

n=32

$$\int_{0}^{3} \frac{1}{x^2 + 16} dx$$

9. Usando la regla de Simpson 1/3, calcular el valor de la integral de la función con n=128

$$\int_{-1}^{1} e^{2x} dx$$

10. Usando la regla de Simpson 1/3, calcular el valor de la integral de la función con n=256

$$\int_{0}^{5} \frac{2}{x^3 - 9} dx$$

11. Usando la regla de Simpson 3/8, calcular el valor de la integral de la función:

$$\int_{0}^{1} \cos x \, dx$$

12. Usando la regla de Simpson 3/8, calcular el valor de la integral de la función:

$$\int_{0}^{2} e^{-x^2} dx$$

13. Usando la regla de Simpson 3/8, calcular el valor de la integral de la función:

$$\int_{0}^{3} \frac{1}{x^2 + 16} dx$$

14. Usando la regla de Simpson 3/8, calcular el valor de la integral de la función:

$$\int_{-1}^{1} e^{2x} dx$$

15. Usando la regla de Simpson 3/8, calcular el valor de la integral de la función:

$$\int_{0}^{5} \frac{2}{x^3 - 9} dx$$

6.11 Solución Numérica de Ecuaciones Diferenciales

1. Resolver la ecuación diferencial:

$$\frac{dx}{dt} - cx = t$$

En el intervalo 0 < t < 2 con las condiciones de frontera x(0) = 1 y c = -1

```
>> ecuaciondiferencialordinaria

x0 =

     1


tSpan =

     0     2


c =

    -1

fh =

    @(t,x)c*x+t
```

```
tSol =          xSol =

         0      1.0000
    0.0500      0.9525
    0.1000      0.9097
    0.1500      0.8714
    0.2000      0.8375
    0.2500      0.8076
    0.3000      0.7816
    0.3500      0.7594
    0.4000      0.7406
    0.4500      0.7253
    0.5000      0.7131
    0.5500      0.7039
    0.6000      0.6976
    0.6500      0.6941
    0.7000      0.6932
    0.7500      0.6947
    0.8000      0.6987
    0.8500      0.7048
    0.9000      0.7131
    0.9500      0.7235
    1.0000      0.7358
    1.0500      0.7499
```

Obteniendo 0.7499 en la última iteración.

2. Resolver la ecuación diferencial:

$$\frac{dx}{dt} = 5t + 2x$$

En el intervalo 1 < t < 5 con las condiciones de frontera x(0) = 1

```
x0 =                  tSol =                  xSol =

     1                   1.000000000000000       1.0e+04 *
                         1.007176818375742
                         1.014353636751483       0.000100000000000
tSpan =                  1.021530455127225       0.000105072939310
                         1.028707273502967       0.000110245157850
     1     5             1.064591365381675       0.000115518090853
                         1.100475457260383       0.000120893194514
                         1.136359549139091       0.000149354011587
fh =                     1.172243641017800       0.000180599773603
                         2.844492149783188       0.018167690374229
    @(t,x)2*x+5*t        2.944492149783188       0.022349833972279
                         3.044492149783188       0.027462893190715
                         3.144492149783188       0.033714747759913
                         3.244492149783188       0.041358147861254
                         3.344492149783187       0.050696430229432
                         3.444492149783188       0.062106528215850
                         3.544492149783188       0.076051092207585
                         3.644492149783188       0.093092634812477
                         3.744492149783188       0.113906252431058
                         3.844492149783187       0.139330835707517
                         3.944492149783188       0.170396044341128
                         4.044492149783188       0.208353788151487
                         4.144492149783187       0.254706539796493
                         4.244492149783188       0.311321307091428
                         4.344492149783187       0.380489667274560
                         4.444492149783187       0.464997830245122
                         4.544492149783188       0.568189650430356
                         4.644492149783188       0.694220279883109
                         4.744492149783188       0.848189778596661
                         4.808369112337391       0.963945329959424
                         4.872246074891594       1.095470509386082
                         4.936123037445797       1.244914678652678
                         5.000000000000000       1.414731543254916
```

Obteniendo 1.414731543254916 en la última iteración.

Ejercicios propuestos

1. Resolver la ecuación diferencial:

$$\frac{dx}{dt} + 3x = e^{-3t}$$

En el intervalo -5 < t < 52 con las condiciones de frontera x(1) = 5

2. Resolver la ecuación diferencial:

$$\frac{dx}{dt} - 8x = -9t$$

En el intervalo -3 < t < 3 con las condiciones de frontera x(0) = 2

3. Resolver la ecuación diferencial:

$$\frac{dx}{dt} - 5x = 2t$$

En el intervalo -2 < t < 2 con las condiciones de frontera x(0) = 1

4. Resolver la ecuación diferencial:

$$\frac{dx}{dt} - \frac{5}{6}x = -t$$

En el intervalo 0 < t < 6 con las condiciones de frontera x(0) = 3

5. Resolver la ecuación diferencial:

$$\frac{dx}{dt} - \frac{x}{t} = \frac{1}{1+t^2}$$

En el intervalo -5 < t < 5 con las condiciones de frontera x(2) = 0

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

El material didáctico de apoyo a la docencia para la asignatura de Análisis Numérico del plan de estudios 2016 es realizado con la premisa de apoyar al alumno, es la creación de programas sencillos para comprender los métodos vistos en el temario. Desde problemas generales a problemas específicos. Con un enfoque de apoyo por parte del docente, ya que como he mencionado el proceso de aprendizaje involucra ambas partes.

Mediante este trabajo se impulsa al alumno a buscar diferentes criterios de búsqueda de información para el tipo de aprendizaje que mejor le convenga. Resalto la característica de la motivación, puesto que, juega un papel muy importante en el trabajo de clase. Si un alumno no encuentra apoyo y motivación por parte de su profesor, es muy difícil que el alumno muestre interés y empatía a la materia.

Para varios alumnos es difícil la parte de la programación y por el tiempo destinado a la asignatura el profesor se encuentra con el reto de enseñar métodos numéricos tanto en forma escrita como forma programable, con este trabajo se busca ayudar al profesor y al alumno con unos ejemplos de apoyo en diversos temas del programa. De esta forma el alumno tiene un ejemplo para guiarse y poder crear sus propios programas.

Los programas que aquí se presentan sólo son ejemplos de problemas específicos que el alumno pude modificar para diversos problemas. La ventaja de presentar este trabajo en dicha forma, es hacer al alumno consciente de que se puede programar de forma específica un problema y de igual forma el código puede modificarse para obtener la solución a más problemas.

Además los alumnos pueden trabajar en forma grupal en la solución de problemas, ya que, el realizar un código no sólo se rige a una forma, existen diversas posibilidades de programas un problema. Por ello es adecuado para la asignatura el trabajo grupal de esta forma se ayuda a tener una visión diferente de la resolución de problemas, apoyando a la formación del alumno fortaleciendo su ejercicio profesional.

Lo que caracteriza este trabajo es que le da al alumno una herramienta para optimizar la compresión de lo visto en el aula.

El material didáctico de apoyo a la docencia en Análisis Numérico me ha

Como recomendaciones, se tienen las siguientes:

La parte de los programas en MATLAB deberán combinarse con el presente trabajo para garantizar el buen entendimiento de éstos. Impulsar a los alumnos a aprender por su cuenta el uso de diferentes softwares.

Al usarse por los docentes es conveniente que sea lea el trabajo y se familiarice con los códigos propuestos. De igual forma con los alumnos entregar los códigos y los ejemplos aquí descritos.

Como alumno el tener una guía de ejemplos ya programados y descritos siempre se agradecen para poder comenzar con los propios, como profesor el tener una guía de apoyo en la enseñanza mejora y acelera el proceso de enseñanza hacia el alumno.

APÉNDICE. PROGRAMAS EN MATLAB

Método de Bisección.

```
%Método de bisección - MR
clear all
format short;
a=input('Introduzca el valor de a: ');
b=input('Introduzca el valor de b: ');
cont=input('Introduzca el número de iteraciones cont: ');
fun=input('Introduzcal a funcion f(x)=','s');
f=inline(fun);
for k=1:cont
   c=(a+b)/2;
   e=abs((b-a)/2);
   A(k,:)=[k a b c f(c) e];
   if f(a)*f(c)<0
      b=c;
   else
      a=c;
   end
end
fprintf('\n \tk \ta \tb \tc \tf(c) \terror \n')
disp(A)
fprintf('Solución:\n c=%8.5f\n',c)
fprintf('f(c)=%8.5f\n',f(c))
fprintf('error=%8.5f\n',e)
```

Método de Newthon – Raphson

```
%Método de Newton-Raphson - MR
function [X1] = Newton_Raphson()
syms x    %declaramos a X una variable simbólica
Y=input('Ingrese la función: ');  %se solicita la entrada de la función. Graficamos la
función en un intervalo para poder tomar una buena. Estimación de la raíz.
sup = input('Ingrese el limite superior para graficar: ');
in = input('Ingrese el limite inferior para la visualización: ');
t = linspace(in,sup,500);    %generamos un vector con los valores
plot(t,subs(Y,t))              %generamos la gráfica
grid on
Xn=input('Ingrese el valor apróximado de la raíz: ');    %se solicita la estimación inicial
Ydx = diff(Y,x);   %derivamos la funcion Y con respecto a X y lo asignamos a la variable
Ydx
%inicializar varibles
```

```
error = 1;
tolerancia = 0.000001;
   while error>=tolerancia    %condición de terminación cuando el error sea menor a la
tolerancia
         X1 = Xn - (subs(Y,Xn)/subs(Ydx,Xn));  %formula de Newton-Raphson
         error = abs((X1-Xn)/X1);              %calculo del error
         Xn=X1;  %asignación del nuevo valor de Xn para la siguiente iteración
   end
end
```

Método de Gauss – Jordan.

```
%Gauss-Jordan - MR
clear all ;
clc;
a=[2 1 -1 8; -3 -1 2 -11; -2 1 2 -3]
[f,c] = size(a)
for k=1:c-1
  a(k,:)=a(k,:)/a(k,k)
    for j=k+1:f
    a(j,:)=a(j,:)-a(k,:)*a(j,k)
    j=j+1;
    a
    pause
    end
  k=k+1;
  a
  pause
end
for k=f:-1:2
  for j=k-1:-1:1
    a(j,:)=a(j,:)-a(k,:)*a(j,k)
    j=j-1;
    a
    pause
  end
  k=k-1;
  a
  pause
end
fprintf('Result\n');
```

Método de Descomposición LU

```
%Método de LU - MR
clear all ;
clc;
A = [10 -7 0
     -3  2 6
      5 -1 5];
  [L,U]=lu(A)
L*U
[L,U,P] = lu(A)
P'*L*U
```

Método de Jacobi

```
% Método de Jacobi - MR
clc
clear
format long
a=input('Ingrese la matriz de coeficientes:\n ');
b=input('\nIngrese los términos independientes:\n ');
x=input('\nIngrese el vector con las aproximacimaciones Iniciales:\n ');
iter=input('\nIngrese el número máximo de iteraciones:\n ');
tol=input('\nIngrese la tolerancia:\n ');
cond=norm(a)*norm(a^-1);
disp('condicional=')
disp(cond)
determinante=det(a);
if determinante==0
disp('El determinante es cero, el problema no tiene solución única')
return
end
n=length(b);
d=diag(diag(a));
l=d-tril(a);
u=d-triu(a);
fprintf('\n     SOLUCION:\n')
fprintf('\nLa matriz de transicion de jacobi:\n')
T=d^-1*(l+u);
disp(T)
re=max(abs(eig(T)))
if re>1
disp('Radio Espectral mayor que 1')
disp('el método no converge')
return
```

```
end
fprintf('\nEl vector constante es::\n')
C=d^-1*b;
disp(C)
i=0;
err=tol+1;
z=[i,x(1),x(2),x(3),err];
while err>tol & i<iter
  xi=T*x+C;
err=norm(xi-x);
x=xi;
i=i+1;
z(i,1)=i;
z(i,2)=x(1);
z(i,3)=x(2);
z(i,4)=x(3);
z(i,5)=err;
end
fprintf('\nTABLA:\n\n    n                x1                x2                x3                Error\n\n   ');
disp(z)
```

Método de Krylov

```
%Método de Krylov - MR
close all
clear all
clc
%matriz cuadrda
N=input('Introduce el tamaño de matriz:');
A=input('Introduce la matriz cuadrada:');
 % Aqui inicializamos las matrices a rellenar con valores calculados
C=zeros(N,N);
y=zeros(N,1);
y(1)=1;
syms x;
C(:,N)=y;
%Aqui va el ciclo
for i=(N-1):-1:1
C(:,i)=A*C(:,(i+1));
end
a=-(A^N)*y;
%Calcular los coeficientes b1, b2,... bn
b=inv(C)*a;
p=x^(N);
```

```
for i=2:(N+1)
   p=p+x^(N-(i-1))*b(i-1); %el primer termino b va en el 2° de p
end
p
p2=sym2poly(p); %Calculamos las raices del polinomio
r = roots(p2)
```

Método de Lagrange

```
%Método de Lagrange - MR
close all
clear all
clc
%coordenadas en x se pueden variar dependiendo de los puntos
%que se deseen
X = [1 2 3 5 8]
%coordenadas en y
Y = [8 4 2 6 5]
%polinimio de ajuste
P = polyfit(X,Y,3)
```

Método de Diferencias Finitas.

```
%Diferencias Finitas - MR
clc;
clear;
%Diferencias finitas
%ecuación diferencial y´=sin(x)
%(yi+1-yi)/h=sin(xi)
%y(x=1)=0
%yi+1=h*sin(xi)+yi
%necesitamos vector x y un deltax (h)
 N=10  %aumentando el numero de particiones se puede tener más preciso, N=1000
h=1/N
x=[0:0.1*pi():2*pi()]
p=length (x)
 for i=2:p
   y(1)=0 %condicion de frontera
   y(i)=h*sin(x(i-1))+y(i-1)
end
y'
plot(x,y)
```

Método de Derivación Numérica.

```
%Derivación numérica - MR
%f(x*+h)=f(x*)+hf'(x*)+h^2/2!
%f´´(x*)
%Primer derivada
%Diferencias:
%Hacia adelante f´(x*)=(f(x*+h)-f(x*))/h
%Hacia atrás f´(x*)=(f(x*)-f(x*-h)/h
%Central f´(x*)=(f(x*+h)-f(x*-h)/2h

syms x
f=input('Ingresa función a valuar')
f=inline(f)
h=input('Ingresa valor de h*')
d1=[f(1+h)-f(1)]./h
d2=[f(1)-f(1-h)]./h
d3=[f(1+h)-f(1-h)]./2.*h
dv=[d1 d2 d3]
```

Métodos de Integración Numérica.

Trapecio.

```
%Trapecio - MR
clear all
iexacto=log(2);
n=2;
error1=0;
for i=1:10
x=linspace(1,2,n+1);
y=1./x;
iaprox=trapz(x,y);
error=iexacto-iaprox;
ratio=error1/error;
disp(['n=' num2str(n) ', iaprox=' num2str(iaprox,6) ',error=' num2str(error,6) ',ratio='
num2str(ratio,6)])
n=2*n;
error1=error;
end
```

Regla de Simpson 1/3.

```
%Regla de simpson 1/3 - MR
clear all; close all; clc
format long;
fun=input('Ingresa la funcion f(x): ','s');
```

```
f=inline(fun);
n=1;
while mod(n,2)~=0
   n=input('Ingrese el numero de subintervalos: ');
   if mod(n,2)~=0
      disp('El numero de subintervalos debe ser par, pulse una tecla para continuar')
      pause
   end
end
a=input('Ingrese el limite inferior de la integral: ');
b=input('Ingrese el limite superior de la integral: ');
h=(b-a)/n;
sumai=0;
sumap=0;
for i=1:2:n-1
   sumai=sumai+feval(f,h*i+a);
end
for i=2:2:n-2
   sumap=sumap+feval(f,h*i+a);
end
int=(h/3)*(feval(f,a)+4*sumai+2*sumap+feval(f,b));
disp(['El resultado de la integral es ' num2str(int)])
```

Regla de Simpson 3/8.

```
%Regla de Simpson 3/8 - MR
clear all
clc
disp('----METODO SIMPSON 3/8 SIMPLE----')
syms x
f=input('f(x)= ');
g=inline(f);
a=input('Limite inferior: ');
b=input('Limite superior: ');
h=(b-a)/3;
%APROXIMACION DE LA INTEGRAL
disp('VALOR APROXIMADO DE LA INTEGRAL:')
I=(3*h/8)*(g(a) + 3*g((2*a+b)/3)+3*g((2+2*b)/3))
```

Solución de ecuaciones diferenciales.

```
%Solución de Ecuaciones Diferenciales.
clear all
close all
```

```
clc
%Programa para el problema mostrado.
x0=1
tSpan = [0,2]
c=-1
fh = @(t,x)c*x+t
[tSol,xSol]=ode45(fh,tSpan,x0)
plot(tSol,xSol)
```

APENDICE DE DESARROLLO MATEMATICO

Método de Bisección.

Esta técnica se basa en el teorema del valor intermedio y parte del supuesto que f(a) y f(b) tienen signos opuestos. Aunque el procedimiento funciona bien para el caso en el que existe más de una solución en el intervalo [a, b], se considera por simplicidad que es única la raíz en dicho intervalo.

Básicamente, el método consiste en dividir a la mitad repetidamente los subintervalos de [a, b] y en cada paso, localizar la mitad que contiene a la solución, m. Para empezar, hacemos $a_1 = a$ y $b_1 = b$ y calculamos el punto medio del intervalo $[a_1, b_1]$ y lo llamamos

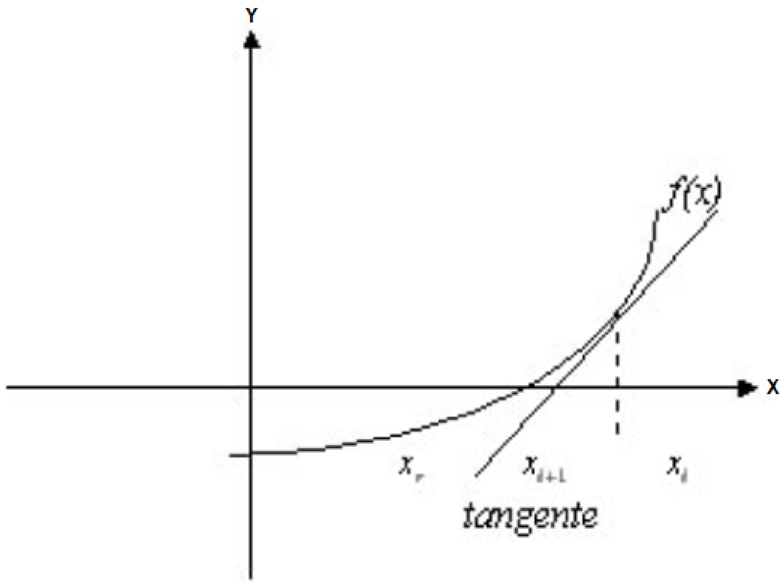
$$m_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$$

Si $f(m_1)=0$, entonces $m = m_1$; si no, $f(m_1)$ tiene el mismo signo que $f(a_1)$ o $f(b_1)$. Si $f(m_1)$ y $f(a_1)$ tienen el mismo signo, entonces m pertenece $[m_1, b_1]$, y tomamos $a_2 = m_1$ y $b_2 = b_1$. Si $f(m_1)$ y $f(b_1)$ tienen el mismo signo, entonces m pertenece $[a_1, m_1]$, y tomamos $a_2 = a_1$ y $b_2 = m_1$. Luego repetimos este proceso al intervalo $[a_2, b_2]$. Esto produce el método de bisección.

Método de Newton – Raphson.

Se requiere que las funciones sean diferenciables, y por tanto, continuas, para poder aplicar este método. Se debe partir de un valor inicial para la raíz: x_i, este puede ser cualquier valor, el método convergirá a la raíz más cercana.

Si se extiende una tangente desde el punto (x_i, $f(x_i)$), el punto donde esta tangente cruza al eje x representa una aproximación mejorada de la raíz.



La fórmula de Newton – Raphson se deduce a partir de la fórmula de la pendiente de una recta.

$$m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = \frac{0 - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

$$m(x_{i+1} - x_i) = -f(x_i)$$

$$x_{i+1} - x_i = \frac{f(x_i)}{m}$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

Se define la derivada de una función en un punto dado como la pendiente a la recta tangente de dicho punto, por lo tanto: m = f´(x)

Método de Gauss – Jordan.

Se trata de transformar el sistema de ecuaciones lineales Ax = b en un sistema equivalente Dx = c, con D una matriz diagonal.

En cada etapa k se deben hacer cero las posiciones:

$$a_{1k}^{(k)}, \quad \ldots, a_{k-1,k}^{(k)}, a_{k+1,k}^{(k)}, \quad \ldots, a_{nk}^{(k)}, donde\ k = 1, \quad \ldots, n$$

Se deberá considerar que se aplica el método teniendo en cuenta si te tiene una solución única (det A ≠ 0) y sin saber si el det A ≠ 0.

Método de LU

Los métodos de descomposición LU separan el tiempo usado en las eliminaciones para la matriz [A] de las manipulaciones en el lado derecho {B}. Una vez que [A] se ha "descompuesto", los múltiples vectores del lado derecho {B} se pueden evaluar de manera eficiente.

Los resultados se pueden extender en forma directa a sistemas n dimensiones.

La ecuación se reordena como: [A] {X} – {B} = 0

Expresando la ecuación anterior como un sistema triangular superior:

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix}$$

Utilizando la eliminación para reducir el sistema a una forma triangular superior. La ecuación también se expresa en notación matricial y se reordena como: [U]{X} – {D} = 0. Después de ello se obtiene la matriz L que es una matriz diagonal inferior.

$$[L] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

Al multiplicar la matriz L por [U]{X} – {D} = 0 se obtiene [L] {[U]{X} – {D}} = [A] {X} – {B}. Obteniendo así: [L][U]=[A] y [L]{D}={B}. Si desglosamos esto en pasos se tiene:

1. Paso de descomposición de LU. [A] se factoriza o “descompone” en las matrices triangulares inferior [L] y superior [U].
2. Paso de la sustitución. [L] y [U] se usan para determinar una solución {X} para un lado derecho {B}. Este paso, a su vez, se divide en dos. Primero, la ecuación [L]{D}={B} se usa para generar un vector intermedio {D} mediante sustitución hacia adelante. Después, el resultado se sustituye en la ecuación [U]{X} – {D} = 0, la que se resuelve por sustitución hacia atrás para {X}.

Método de Jacobi

El método de Jacobi es un método iterativo con el cual se resuelve el sistema lineal Ax = b. Comienza con una aproximación inicial x(0) a la solución x y genera una sucesión de vectores x(k) que convergen a la solución x.

Un sistema de ecuaciones algebraicas lineales es un conjunto de ecuaciones de la forma:

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{gathered}$$

Que a su vez se puede expresar como: Ax = b

Donde A es la matriz de coeficientes, x es el vector de incógnitas y b el vector de términos independientes.

La solución del sistema de ecuaciones es un conjunto de n valores x_1, x_2, x_3,…, x_n que satisfacen simultáneamente todas las ecuaciones.

Así se obtiene el vector de Jacobi: $x^{(k)} = \begin{matrix} x_1^k \\ x_2^k \\ x_3^k \end{matrix}$

Para un sistema de n ecuaciones con n incógnitas se tiene la siguiente notación compactada:

$$x_i^{k+1} = -\frac{1}{a_{ii}}\left(-b_i + \sum_{\substack{j=1 \\ J\neq i}} a_{ij}x_j^k\right)$$

Método de Krylov

Este método se fundamenta en la aplicación del Teorema de Cayley – Hamilton, dicho teorema dice que cada matriz cuadrada A satisface su ecuación característica: Si $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ es el polinomio característico de A, entonces p(A) es la matriz nula. Es decir, si sustituimos a la matriz A en:

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

El resultado debe ser cero, pero se divide el polinomio entero por a_0. Obteniendo:

$$\lambda^n + b_1\lambda^{n-1} + b_2\lambda^{n-2} + \cdots + b_{n-1}\lambda + b_n = 0$$

Donde los coeficientes b_i se obtienen como $b_i = \frac{a_i}{a_0}$. Aplicando el teorema de Cayley – Hamilton en el polinomio anterior queda:

$$F(A) = A^n + b_1A\lambda^{n-1} + b_2A\lambda^{n-2} + \cdots + b_{n-1}A + b_nI = 0$$

El polinomio anterior representa un sistema de ecuaciones lineales cuyas incógnitas son los coeficientes b_i. La solución de este sistema nos proporciona los coeficientes b_i que sustituidos en el polinomio:

$$\lambda^n + b_1\lambda^{n-1} + b_2\lambda^{n-2} + \cdots + b_{n-1}\lambda + b_n = 0$$

Nos proporciona el polinomio característico de A. Se puede simplificar la elevación de la matriz A las potencias necesarias. Esto se logra multiplicando la matriz A por un vector $\bar{y}$ compatible diferente de cero. Obteniendo un vector. Este vector $\bar{y}$ puede ser libremente elegido, como por ejemplo:

$$\bar{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Método de Lagrange

Se considera un polinomio que pasa por todos los puntos; por n puntos pasará un polinomio de enésimo grado o menor y será de la forma:

$$P(x) = a_0x^{n-1} + a_1x^{n-2} + a_2x^{n-3} + \cdots + a_{n-2}x + a_{n-1}$$

Este polinomio puede reescribirse como:

$$\begin{aligned} &p(x) = A_1(x - x_2)(x - x_3) \ldots (x - x_n) + \\ &A_2(x - x_1)(x - x_3) \ldots (x - x_n) + \\ &A_3(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n) + \\ &\vdots \\ &A_n(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n) \end{aligned}$$

Y Π designa el “producto de”. Por ejemplo, la versión lineal (n=1) es

$$f_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1)$$

Y la versión de segundo grado es:

$$f_1(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} f(x_1) \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} f(x_2)$$

Llegando a:

$$f_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x) f(x_i) \quad \text{Donde} \quad L_i(x) = \prod_{\substack{j=o \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Método de Diferencias Finitas

Se define una función y=f(x) en forma tabular para la que se desconoce su expresión analítica y vamos a suponer que para valores de “x” se encuentran igualmente espaciada (en incrementos de “h”) se tendrá:

X	X_0	$X_1 = X_0 + h$	$X_2 = X_0 + 2h$	…	$X_n = X_0 + nh$
f(x)	Y_0	Y_1	Y_2	…	Y_n

Se les llama diferencias hacia adelante:
Primeras diferencias.

$$a_0 = y_1 - y_0$$
$$a_1 = y_2 - y_1$$
$$a_2 = y_3 - y_2$$
$$\vdots$$
$$a_{n-1} = y_n - y_{n-1}$$

Llamada primer diferencia: Δy_i

Segundas diferencias.

$$b_0 = a_1 - a_0$$
$$b_1 = a_2 - a_1$$
$$b_2 = a_3 - a_2$$
$$\vdots$$
$$b_{n-2} = a_{n-1} - a_{n-2}$$

Llamada segunda diferencia: $\Delta^2 y_i$

Terceras diferencias.

$$c_0 = b_1 - b_0$$
$$c_1 = b_2 - b_1$$
$$c_2 = b_3 - b_2$$
$$\vdots$$
$$c_{n-3} = b_{n-2} - b_{n-3}$$

Llamada tercera diferencia: $\Delta^3 y_i$

Y así sucesivamente hasta la infinita diferencia.

Método de Derivación Numérica

Dada una función y = f(x) definida en forma tabular, se obtienen las derivadas en algunos puntos llamados pivotes

Tomando que la función tabular se aproxima por un polinomio que pasa por todos los puntos y se representa por una interpolación.

Para la derivación numérica se tiene por definición la derivada de una función f(x) como:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Las aproximaciones numéricas que se pueden realizar para h>0 son:

Diferencias hacia adelante:

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Diferencia hacia atrás:

$$f'(\,x_0) \approx \frac{f(x_0)-f(x_0+h)}{h}$$

Diferencias centrales:

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$$

$$f''(x_0) \approx \frac{f(x_0+h)-2f(x_0)+f(x_0-h)}{h^2}$$

Método de Integración Numérica

Dada una función f(x)=0 se aceptará la aproximación polinomial como aquella que pasa por todos los puntos definidos en la tabulación y se tendrá una aproximación a:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx$$

Los métodos de integración numérica se dividen en 3:

1) Con interpolación de primer orden. Fórmula Trapecial.

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \frac{h}{2}[y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + \cdots + 2y_{n-1} + 2y_n]$$

2) Con interpolación de segundo orden. Fórmula de Simpson de 1/3.

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \frac{h}{3}[y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 \ldots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n]$$

3) Con interpolación de tercer orden. Fórmula de Simpson de 3/8.

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \frac{3h}{8}[y_0 + 3y_1 + 3y_2 + 2y_3 + \cdots + 2y_{n-3} + 3y_{n-2} + 3y_{n-1} + y_n]$$

REFERENCIAS

Adell, J. (1997). *Tendencias en educación en la sociedad de las tecnologías de la información*. Revista Electrónica de Tecnología Educativa (EDUTEC).

Agud Albesa, Lucía. (2015). *Matlab para matemáticas en ingenierías.* Valencia: Editorial Universitat Politécnica de Valencia.

Baelo, R. y Cantón, I. (2009) *Las tecnologías de la información y la comunicación en la educación superior. Estudio descriptivo y de revisión*. Revista Iberoamericana de Educación.

Besgas Armas, María Concepción. (2006). *Análisis Numérico: resumen teórico y problema con soluciones.* Bilbao: Universidad del País Vasco.

Bleger, J. (1979). *Psicología de la conducta.* Buenos Aires: Paidós.

Bloom, B. (1971). *Taxonomía de los objetivos de la educación.* Buenos Aires: El Ateneo.

Burden Richard L., & Faires, J. Douglas. (2011). *Análisis Numérico*. México: Cengage Learning.

Chapra, Steven C., & Canale, Raymond P. (2011). *Métodos numéricos para ingenieros*. México: McGraw-Hill.

Charney, C. (2003). El ejecutivo instantáneo. México: Diana.

Cheney, Ward, & Kincaid, David. (2011). Métodos numéricos y computación. México: Cengage Learning.

Dale, E. (1969). Audio-Visual Methods in Teaching. New York: Rinehart and Winston.

Gimeno, Á. (1992). *Comprender y transformar la enseñanza.* Madrid: Morata.

Gutiérrez, R. (2009). *Introducción a la didáctica.* México: Esfinge Milenio.

Hunt, Brian R. (2014). *A guide to MATLAB: for beginners and experienced users: updated for MATLAB 8 and Simulink 8.* Cambridge: Cambridge University Press.

Kharab, Abdelwahab. (2002). *An introduction to numerical methods: a MATLAB approach*. Boca Raton: Chapman and Hall.

Jorquera González, Héctor. (2016). *Métodos numéricos aplicados a ingeniería: casos de estudio en ingeniería de procesos usando MATLAB.* Ciudad de México: Alfaomega Grupo Editor.

Kiusalaas, Jaan. (2005). *Numerical methods in engineering with MATLAB.* Cambridge: Cambridge University Press.

Marqués, P. (2000). *Impacto de las TIC en la enseñanza universitaria*. Facultad de Educación Universidad Autónoma de Barcelona.

Mathews, John H. (2000). *Métodos numéricos con MATLAB*. Madrid: Prentice Hall.

Orlich, D. (1985). *Técnicas de enseñanza. Modernización en el aprendizaje.* México: Limusa.

Nakamura, Schoichiro. (1997). *Análisis numérico y visualización grafica con MATLAB*. México: Prentice Hall.

Piaget, J. (1975). Introducción a la epistemología genética. Buenos Aires: Paidós.

Prawda, J., & Flores, G. (2001). *México educativo y revisitado: Reflexiones al comienzo de un nuevo siglo.* México: Océano.

Raffini, J. (1998). *Cien maneras de incrementar la motivación en clase.* Buenos Aires: Troquel.

Rugarcía, A. (1997). *La formación de ingenieros.* México: Golfo Centro.

Rutledge. Rees, D. (2003). Habilidades de dirección. España: Thomson.

Valles Acosta, Y. (2014). De baby boomers a millennials, la necesaria evolución de las estructuras sociales.

Vera, Lázaro, & Alejandro, Segundo. (2013). *Cálculo matemático con Matlab: problemas resueltos*. Lima, Perú: Empresa Editora Macro.

Zarzar, C. (1993). *Habilidades básicas para la docencia.* México: Patria.