

# Capítulo

# 2

## El método de contornos activos *Snake* tradicional.

Un contorno activo, también llamado *Snake* [21], es una curva deformable influenciada por fuerzas internas y externas, que rigen su comportamiento, y cuya minimización proporciona al contorno una conducta dinámica dentro del espacio de la imagen, hasta encontrar y adoptar la forma de la frontera de interés.

El modelo fue propuesto por Kass, Witkin y Terzopoulos en 1987 [21] y a partir de ese trabajo han surgido variantes con el propósito de cubrir las deficiencias del modelo inicial. Una de esas variantes es la que se aborda en el siguiente capítulo, conocida como *Snake GVF*.

Los *Snakes* ofrecen una solución para diferentes problemas, lo que permite su aplicación en análisis de imágenes y visión computacional principalmente, para detectar, localizar y describir la forma de objetos [16], [23].

El modelo de contornos activos, es la parte medular de este trabajo de tesis ya que la literatura del área indica que han sido muy utilizados en la segmentación de imágenes médicas, especialmente en las de origen de resonancia magnética (RM) [20].

## 2.1 Snake tradicional

### 2.1.1 Descripción matemática

Matemáticamente un *Snake* se define por medio de una curva paramétrica, como se muestra en la siguiente ecuación:

$$\mathbf{x}(s) = [x(s), y(s)], \quad s \in [0,1] \quad (2.1)$$

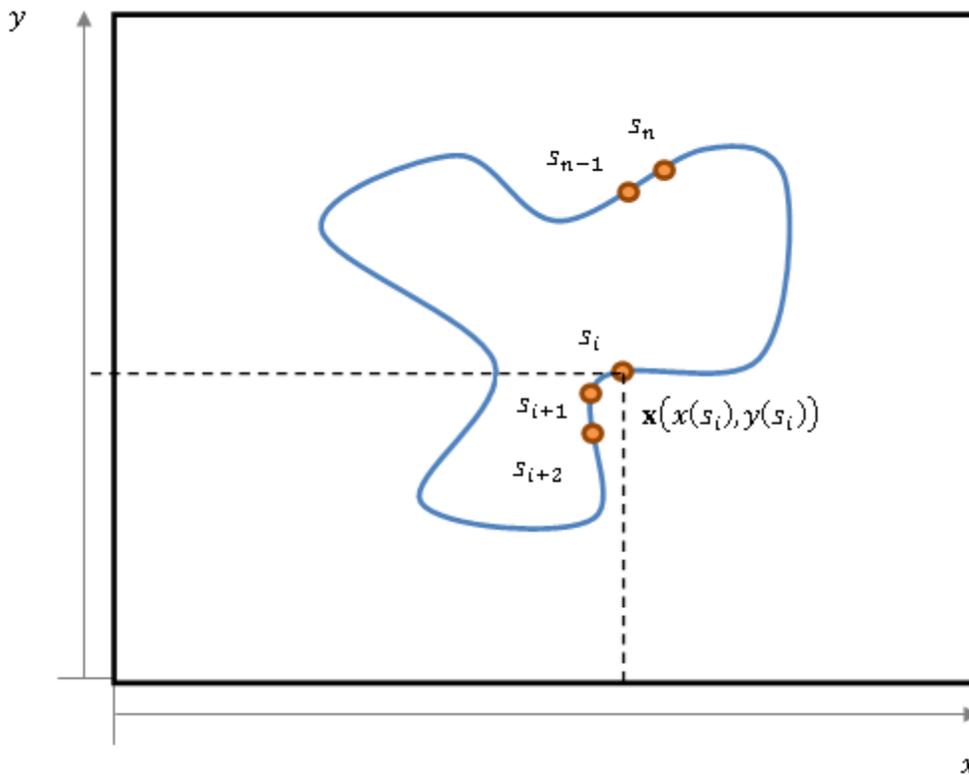


Figura 2.1 El contorno deformable  $\mathbf{x}(s)$  está formado por  $n$  puntos  $s_i$ , llamados puntos de control, los cuales estarán definidos espacialmente por  $x(s_i), y(s_i)$ .

Donde  $s$  es el conjunto de puntos de control que se vincula con las coordenadas  $x$  e  $y$ , que representan la ubicación espacial de los puntos que conforman la curva o contorno (*Snake*) en la imagen, esta curva se desplaza sobre la imagen para minimizar su funcional de energía:

$$E_{snake}^* = \int_0^1 E_{snake}(x(s)) ds \quad (2.2)$$

La energía del *Snake* se divide en energía interna y energía externa, tales energías determinan su forma y las características a las que el *Snake* se verá atraído, siendo la energía total la suma de ambas.

$$E_{snake} = E_{interna} + E_{externa} \quad (2.3)$$

Las funcionales de energía deben ser planteadas para tener valores mínimos en las características de interés y por consiguiente el contorno activo se podrá ajustar a dichas características. Por lo tanto la minimización de la energía determinará la forma y posición final del *Snake* [21].

$$E_{snake}^* = \int_0^1 E_{interna}(\mathbf{x}(s))ds + \int_0^1 E_{externa}(\mathbf{x}(s))ds \quad (2.4)$$

El mecanismo que permitirá la minimización de la energía utilizando la ecuación (2.4) será descrito más adelante. En la siguiente sección se describirán las diferentes energías y la contribución que tienen en el comportamiento del *Snake*.

## 2.2 Energía del *Snake*.

Como se mencionó previamente, la energía del *Snake* se divide en energía interna y energía externa, en esta sección se describirán detalladamente cada una de ellas.

### 2.2.1 Energía Interna.

Se refiere a la energía propia de la curva que controla sus características intrínsecas, las cuales definirán la deformación y capacidad del contorno para adaptarse a la forma de la frontera de interés. Se conforma de dos componentes que proporcionan al *Snake* elasticidad y rigidez.

$$E_{interna} = E_{elastica} + E_{rigidez} \quad (2.5)$$

$$E_{interna} = \frac{1}{2} \left[ \alpha(s) \left| \frac{d\mathbf{x}(s)}{ds} \right|^2 + \beta(s) \left| \frac{d^2\mathbf{x}(s)}{ds^2} \right|^2 \right] \quad (2.6)$$

Dónde:

$\alpha(s)$ : parámetro de peso que controla la elasticidad del *Snake*.

$\beta(s)$ : parámetro de peso que controla la rigidez del *Snake*.

El primer sumando de la ecuación (2.6), corresponde al término de elasticidad, que gobierna la distancia entre los puntos de control que conforman al *Snake*, es decir, que tanto se contrae. Un valor alto de  $\alpha$  es importante cuando el contorno es inicializado lejos de la frontera ya que producirá una rápida convergencia, sin embargo, se debe tener cuidado porque un valor muy alto puede ocasionar que el contorno se contraiga demasiado, sobrepase la frontera de interés y puede llegar a colapsarse.

El segundo sumando de la ecuación (2.6), es el término de rigidez, gobierna la suavidad de la curva, es decir, cuánto va a doblarse. Por lo tanto un valor alto de  $\beta$  hará que el *Snake* sea demasiado suave y no sea capaz de detectar esquinas, lo cual se logra, estableciendo  $\beta = 0$ .

Para facilitar el uso del modelo, los parámetros de peso se consideran constantes de tal forma que  $\alpha(s) = \alpha$  y  $\beta(s) = \beta$  [4], [21].

Recapitulando, la energía interna, es la encargada de establecer las características deseadas del contorno, continuidad y suavidad, de las cuales se habló en el capítulo 1. El establecer los parámetros óptimos implica tener una idea del objeto a segmentar, para establecer el comportamiento más o menos guiado del *Snake*, por lo tanto este método incluye información *a priori*.

## 2.2.2 Energía externa

Es la energía que guía o “empuja” al *Snake* hacia la frontera de interés. Esta clase de energía se encuentra compuesta por dos tipos: la energía de la imagen y la energía externa restrictiva impuesta por el usuario:

$$E_{externa} = E_{imagen} + E_{externa\ restrictiva} \quad (2.7)$$

### 2.2.2.1 Energía de la imagen

Es la energía que se calcula a partir de la información de la imagen y que permitirá atraer al *Snake* a la característica de interés. El modelo original [21] considera tres funcionales de energía de la imagen cuya combinación brinda al *Snake* la capacidad de detectar líneas, bordes y terminaciones:

$$E_{imagen} = w_{linea}E_{linea} + w_{borde}E_{borde} + w_{termino}E_{termino} \quad (2.8)$$

Donde  $w$  representa el peso de cada una de estas componentes y dependiendo de ese peso será la tendencia del *Snake* hacia esa característica.

Las funcionales de energía se diseñaron de tal manera que presenten valores mínimos en las características de interés, a continuación se definirá cada una de estas funcionales.

#### Funcional de línea

Esta funcional se define como el mapa de intensidades de la imagen y es la característica más simple y útil que se puede encontrar. Esta funcional se representa como:

$$E_{linea} = I(x, y) \quad (2.9)$$

donde:

$I(x, y)$  es una imagen en escala de grises.

El signo de  $w_{line}$  define si el *Snake* es atraído por las líneas claras o por las líneas oscuras, como se ilustra en la figura 2.2:

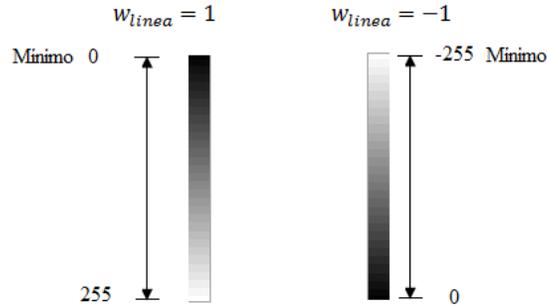


Figura 2.2 Con  $w_{linea} = 1$  el *Snake* es atraído hacia los tonos oscuros, mientras que  $w_{linea} = -1$  lo atrae hacia tonos cercanos al blanco. Este ejemplo ha considerado un rango de intensidades de  $[0,255]$ .

### Funcional de borde

Para dirigir al *Snake* hacia un borde se usa el siguiente funcional:

$$E_{borde} = -|\nabla I(x, y)|^2 \quad (2.10)$$

donde:

$\nabla I(x, y)$  es el gradiente de una imagen en escala de grises.

La operación gradiente permite detectar bordes gruesos, por lo tanto el *Snake* se ve atraído por contornos con magnitud alta del gradiente, es decir, se dirige hacia donde hay cambios bruscos de intensidad, sin embargo, se pueden perder detalles. Cabe señalar que existe la posibilidad de utilizar otro operador, el Laplaciano (resta de dos Gaussianas), el cual detecta detalles más finos como líneas delgadas y puntos aislados, sin embargo, esto lo hace más sensible al ruido y puede fácilmente desviar al *Snake*.

Para atraer al *Snake* desde una posición inicial alejada del contorno de interés, se hace uso de la función  $G_\sigma$ , la cual es una función Gaussiana con desviación estándar  $\sigma$ , que en conjunto con la funcional de línea o la de borde, producen una funcional con borrosidad

lo cual permite incrementar el rango de captura<sup>1</sup> del *Snake*, sin embargo, provoca que los contornos no sean detectados con precisión, ya que una desviación estándar muy grande, ocasiona que las fronteras se vuelvan borrosas y gruesas, por lo cual se recomienda incrementar la borrosidad de la funcional para atraer al *Snake* y una vez que se encuentra lo suficientemente cerca, se disminuye la borrosidad, así se obtiene una segmentación precisa del contorno y sin pérdida de información.

Después de adicionar la función Gaussiana, las ecuaciones (2.9) y (2.10), se convierten en:

$$E_{linea} = G_{\sigma}(x, y) * I(x, y) \quad (2.11)$$

$$E_{borde} = -|\nabla[G_{\sigma}(x, y) * I(x, y)]|^2 \quad (2.12)$$

Podemos observar de las ecuaciones (2.11) y (2.12) que la función Gaussiana se convoluciona con la imagen en escala de grises para obtener una funcional de línea borrosa, y la funcional de borde borroso se obtiene de una manera análoga, haciendo la convolución entre la función Gaussiana y el gradiente de la imagen.

Dado que las funcionales de línea solo sirven para detectar líneas homogéneas en un fondo igualmente homogéneo, prácticamente no se utilizan porque en imágenes reales esta condición difícilmente se cumple.

### **Funcional de terminales**

La energía de terminales permite localizar las terminaciones de línea y esquinas. Para ello se toma una versión borrosa de la imagen para incrementar el rango de captura, mediante la siguiente ecuación:

$$C(x, y) = G_{\sigma}(x, y) * I(x, y) \quad (2.13)$$

---

<sup>1</sup> Rango de captura: se define como la región alrededor del contorno donde actúa el campo de fuerzas externas y por lo tanto son capaces de guiar al *Snake* hacia su objetivo. Por lo tanto es deseable tener un rango de captura grande para no limitar la inicialización del contorno [24].

Una vez que se ha aplicado la ecuación anterior, se obtiene el ángulo del gradiente de la siguiente manera:

$$\theta = \text{angtan} \left[ \frac{\frac{\partial C}{\partial y}}{\frac{\partial C}{\partial x}} \right] \quad (2.14)$$

La ecuación (2.14) es el parámetro del vector, llamado vector tangente a la dirección del gradiente:

$$\mathbf{n} = (\cos\theta, \text{sen}\theta) \quad (2.15)$$

Aprovechando la perpendicularidad de las funciones seno y coseno, podemos calcular el vector normal a la dirección del gradiente:

$$\mathbf{n}_{\perp} = (-\text{sen}\theta, \cos\theta) \quad (2.16)$$

Con estas ecuaciones, se define la energía de término como:

$$E_{\text{término}} = \left[ \frac{\partial \mathbf{n}_{\perp}}{\partial \theta} \right]^{-1} = \frac{\frac{\partial^2 C}{\partial \mathbf{n}_{\perp}^2}}{\frac{\partial C}{\partial \mathbf{n}}} \quad (2.17)$$

Cuando se presenta una esquina o una terminación de una línea, se presenta un cambio abrupto del ángulo del gradiente, esto es lo que la energía  $E_{\text{término}}$  cuantifica e identifica, y puesto que la derivada parcial tendrá valores altos en dichos cambios, es entonces que aparece su recíproco para lograr la minimización buscada por el *Snake*.

Con esta funcional se proporciona la capacidad del *Snake* para detectar bordes subjetivos, por lo tanto es útil también en el análisis de ilusiones visuales [25].

### 2.2.2.2 Energía externa restrictiva

Es la funcional de energía, impuesta por el usuario, encargada de poner al *Snake* cerca del contorno deseado para evitar que pudiese converger en una solución no deseada.

Estas fuerzas pueden provenir [24] de:

- Interpretaciones de alto nivel.
- Del usuario mediante una interfaz.
- Mecanismos automatizados.

Kass, Witkin y Terzopoulos [21], [26] proponen dos tipos de energías externas restrictivas:

- *Energía externa de atracción* (conocida como *energía de muelle*): como su nombre lo indica, esta energía tiene el objetivo de guiar al *Snake* hacia cierta característica de la imagen. Esto se hace mediante la ubicación de dos puntos: uno ubicado en el contorno paramétrico y otro en la imagen; lo cual matemáticamente se expresa como:

$$E_{muelle} = k|x_1 - x_2|^2 \quad (2.18)$$

en donde:

$x_1$ : punto en la imagen.

$x_2$ : punto ubicado en el *Snake*

$k$  : constante de rigidez, análoga a la constante de Hooke si se hace la analogía con la ecuación de un resorte.

- *Energía externa de repulsión* (conocida como *energía de volcán*): esta fuerza permite que el *Snake* sea repelido de cierta región de la imagen, lo cual resulta útil para poner al *Snake* fuera de un mínimo local y de esa manera pueda converger hacia otro mínimo que sea de interés, matemáticamente se expresa como:

$$E_{volcán} = \frac{k}{|x_1 - x_2|^2} \quad (2.19)$$

Si  $k$  toma valores negativos, la función de energía hará la función contraria: la energía de muelle se hará pseudo-repulsiva y la energía de volcán se hará pseudo-atractiva [26].

### 2.3 Solución al problema de minimización de energía.

Hablar de *Snakes* es hablar de minimización de energía, la cual consiste en encontrar la curva  $\mathbf{x}(s)$  que genere un valor mínimo del funcional de energía, este es un procedimiento que cae dentro del campo de estudio del cálculo variacional<sup>2</sup>, lo cual da lugar al uso de la ecuación de Euler-Lagrange para obtener una solución al modelo:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0 \quad (2.20)$$

Tomando la ecuación (2.20) como fundamento, la ecuación para resolver nuestro problema queda expresada como:

$$\alpha \frac{d^2 \mathbf{x}(s)}{ds^2} - \beta \frac{d^4 \mathbf{x}(s)}{ds^4} - \nabla E_{ext} = 0 \quad (2.21)$$

La ecuación diferencial (2.21) tiene un conjunto de soluciones correspondientes a mínimos locales, sin embargo, la solución útil es la que se ajusta en forma a la frontera de interés, esto puede verse como un inconveniente dado que el contorno puede orientarse a un mínimo local que sea solución de la ecuación, pero no una correcta interpretación. En un planteamiento de Kass, Witkin y Terzopoulos [21], se establece que una característica deseable y propósito del método, consiste en tener varias soluciones para no limitar las interpretaciones de alto nivel, a decisiones irreversibles de bajo nivel, pues establecer una sola interpretación correcta no es posible. Por lo tanto en lugar de establecer un solo mínimo global se establecen varios mínimos locales, sin embargo, esto implica que la inicialización del contorno es, como se comentó en la sección anterior, un factor determinante para una segmentación aceptable.

Otra forma de estudiar la ecuación (2.21), es considerando un balance de fuerzas:

$$F_{interna} + F_{externa}^{(p)} = 0 \quad (2.22)$$

donde:

---

<sup>2</sup> El cálculo variacional busca la mejor trayectoria que logre la minimización del funcional.

- $F_{interna} = \alpha \frac{d^2 \mathbf{x}(s)}{ds^2} - \beta \frac{d^4 \mathbf{x}(s)}{ds^4}$  : la fuerza interna se encarga de controlar las características intrínsecas del contorno.
- $F_{externa}^{(p)} = -\nabla E_{ext}$  : la fuerza externa se refiere al campo de fuerzas que guían al contorno a la característica de interés; es importante recordar el superíndice p, el cual significa *particular* y que será de gran ayuda recordar cuando se exponga el concepto de *Snake GVF*.

Para encontrar la solución de la ecuación (2.21) se introduce la variable tiempo, haciendo entonces al *Snake* dinámico  $\mathbf{x}(s, t)$ , es decir, que se moverá en el espacio de la imagen hasta presentar un equilibrio de fuerzas, lo cual significa que ha encontrado la frontera de interés, o un mínimo local. Aunque es importante mencionar que el tiempo puede ser visto como el número de iteraciones [4], por lo tanto existen dos posibilidades por las que el *Snake* se detenga, ya sea porque:

- Encontró un mínimo local, o
- Se alcanzó el número de iteraciones.

Por lo tanto es un parámetro que debe cuidarse. Después de introducir la variable tiempo a la ecuación (2.21) se obtiene:

$$\alpha \mathbf{x}''(s, t) - \mathbf{x}''''(s, t) \beta - \nabla E_{ext} = -\frac{\partial \mathbf{x}(s, t)}{\partial t} \quad (2.23)$$

Además de introducir la variable tiempo, se iguala la ecuación a la derivada parcial del *Snake* con respecto al tiempo  $-\frac{\partial \mathbf{x}(s, t)}{\partial t}$ . Suponiendo que el *Snake* se detiene porque encontró un mínimo local, en ese momento el término del miembro derecho de la ecuación (2.23) desaparece, logrando así encontrar una solución de la ecuación (2.21).

Para su implementación es necesario hacer una discretización, y aproximar las derivadas de la ecuación de Euler-Lagrange mediante diferencias finitas.

Considerando  $\mathbf{x}_i = (x_i, y_i) = (x(ih), y(ih))$  se realizan las siguientes aproximaciones usando Diferencias Finitas [27]:

$$\frac{d\mathbf{x}(s_i)}{ds_i} \cong \frac{\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i-1}}{h} = \frac{\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i}{h} \quad (2.24)$$

$$\frac{d^2\mathbf{x}(s_i)}{ds_i^2} \cong \frac{\mathbf{x}_{i+1} - 2\mathbf{x}_i + \mathbf{x}_{i-1}}{h^2} \quad (2.25)$$

donde:

$h = (s_{i+1} - s_i)$ : tamaño del paso o incremento en el espacio.

$\mathbf{x}_i$ : valor de la función en el punto  $i$ .

Aplicando estas aproximaciones en la ecuación (2.6) y considerando el modelo original donde  $\alpha$  y  $\beta$  no son constantes, se tienen los siguientes resultados tomados del trabajo de Kass, Witkin y Terzopoulos [21]:

$$E_{interna}(i) = \frac{\alpha_i |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i-1}|^2}{2h^2} + \frac{\beta_i |\mathbf{x}_{i+1} - 2\mathbf{x}_i + \mathbf{x}_{i-1}|^2}{2h^4} \quad (2.26)$$

donde se define que  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}(n)$  [21], lo cual significa que el primer punto y el último punto son el mismo, por lo tanto se trata de un contorno cerrado. La energía externa se expresa como:

$$F_{externa} = \frac{\partial E_{externa}}{\partial \mathbf{x}_i} = \frac{\partial E_{externa}}{\partial x_i} + \frac{\partial E_{externa}}{\partial y_i} \quad (2.27)$$

$$f_x(i) = \frac{\partial E_{externa}}{\partial x_i} \quad \text{y} \quad f_y(i) = \frac{\partial E_{externa}}{\partial y_i} \quad (2.28)$$

donde las derivadas en caso de no poder calcularse analíticamente, se aproximarán mediante diferencias finitas [21].

Por lo tanto haciendo uso de las ecuaciones (2.26) y (2.28), la ecuación (2.21) discretizada queda [21]:

$$\frac{1}{h^2} (\alpha_i (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i-1}) - \alpha_{i+1} (\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i)) +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{h^4} (\beta_{i-1}[\mathbf{x}_{i-2} - 2\mathbf{x}_{i-1} + \mathbf{x}_i] - 2\beta_i[\mathbf{x}_{i-1} - 2\mathbf{x}_i + \mathbf{x}_{i+1}] + \beta_{i+1}[\mathbf{x}_i - 2\mathbf{x}_{i+1} + \mathbf{x}_{i+2}]) + \\
 & + (f_x(i), f_y(i)) = 0 \quad (2.29)
 \end{aligned}$$

Reescribiendo la ecuación (2.29) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{x}_{i-2} \left( \frac{\beta_{i-1}}{h^4} \right) + \mathbf{x}_{i-1} \left( -\frac{\alpha_i}{h^2} - \frac{2\beta_i}{h^4} - \frac{2\beta_{i-1}}{h^4} \right) + \mathbf{x}_i \left( \frac{\alpha_i}{h^2} + \frac{\alpha_{i+1}}{h^2} + \frac{\beta_{i+1}}{h^4} 4 \frac{\beta_i}{h^4} + \frac{\beta_{i-1}}{h^4} \right) + \\
 & + \mathbf{x}_{i+1} \left( -\frac{\alpha_{i+1}}{h^2} - \frac{2\beta_{i+1}}{h^4} - \frac{2\beta_i}{h^4} \right) + \mathbf{x}_{i+2} \left( \frac{\beta_{i+1}}{h^4} \right) + (f_x(i), f_y(i)) = 0 \quad (2.30)
 \end{aligned}$$

La ecuación (2.29) se puede escribir también en forma matricial:

$$\mathbf{Ax} + \mathbf{F}_{externa} = \mathbf{0} \quad (2.31)$$

Donde  $\mathbf{A}$  es una matriz penta-diagonal [26], [28]:

$$\begin{bmatrix}
 c & b & a & & & e & d \\
 d & c & b & a & & & e \\
 e & d & c & b & a & & \\
 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\
 & & e & d & c & b & a \\
 e & & & e & d & c & b \\
 d & e & & & e & d & c
 \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

$$a_i = \frac{\beta_{i+1}}{h^4}$$

$$b_i = -\frac{\alpha_{i+1}}{h^2} - \frac{2\beta_{i+1}}{h^4} - \frac{2\beta_i}{h^4}$$

$$c_i = \frac{\alpha_i}{h^2} + \frac{\alpha_{i+1}}{h^2} + \frac{\beta_{i+1}}{h^4} 4 \frac{\beta_i}{h^4} + \frac{\beta_{i-1}}{h^4}$$

$$d_i = -\frac{\alpha_i}{h^2} - \frac{2\beta_i}{h^4} - \frac{2\beta_{i-1}}{h^4}$$

$$e_i = \frac{\beta_{i-1}}{h^4} \quad (2.33)$$

Por lo tanto al observar la ecuación (2.30) y las ecuaciones (2.33) apreciamos que **A** contiene los coeficientes numéricos de la energía interna.

Considerando ahora que  $\alpha$  y  $\beta$  son constantes, entonces  $\alpha$  y  $\beta$  en  $i$ , en  $i + 1$  y en  $i - 1$  son iguales por lo tanto la matriz **A** y las ecuaciones (2.33) se simplifican de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} c & b & a & & & & a & b \\ b & c & b & a & & & & a \\ a & b & c & b & a & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ a & & a & b & c & b & a \\ b & a & & a & b & c & b & c \end{bmatrix}$$

$$a = \frac{\beta}{h^4}$$

$$b = -\frac{\alpha}{h^2} - 4\frac{\beta}{h^4}$$

$$c = 2\frac{\alpha}{h^2} + 6\frac{\beta}{h^4} \quad (2.34)$$

Conociendo la matriz **A**, se puede escribir de forma extendida la ecuación (2.31), teniendo:

$$\begin{bmatrix} c & b & a & & & & a & b \\ b & c & b & a & & & & a \\ a & b & c & b & a & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ a & & a & b & c & b & a \\ b & a & & a & b & c & b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-2} \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ \vdots \\ F_{n-2} \\ F_{n-1} \\ F_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

donde:

$n$ : número de puntos de control.

Ahora es necesario introducir la variable tiempo, como se hizo en la ecuación (2.23), aproximando la derivada del *Snake* con respecto al tiempo como sigue:

$$\frac{\partial \mathbf{x}(s, t)}{\partial t} = \frac{\mathbf{x}_i^t - \mathbf{x}_i^{t-1}}{\tau} \quad (2.36)$$

donde:

$$\tau = (t_{i+1} - t_i): \text{ tamaño del incremento de tiempo.}$$

Es importante mencionar que la introducción de la variable tiempo, no se hace igual para la energía interna y en la energía externa. Para la energía interna se utiliza el método implícito de Euler, mientras que para la externa se utiliza el método explícito, esto implica que las fuerzas son evaluadas en instantes de tiempo diferentes, es decir, las fuerzas externas se evalúan en el tiempo  $t - 1$  y las fuerzas internas en el  $t$ , por lo que el *Snake* primero se ve atraído por las fuerzas externas hacia las características de interés y en la siguiente iteración, la fuerza interna influye en sus características intrínsecas dictadas por el ajuste de los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$ , de otra manera si el *Snake* fuese inicializado dentro del contorno buscado, este se contraería hasta colapsarse.

Utilizando (2.36) reescribimos la ecuación (2.31):

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_t + \mathbf{F}_{externa_{t-1}} = -\frac{\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_{t-1}}{\tau} \quad (2.37)$$

Finalmente se despeja el contorno de la ecuación (2.37)

$$\mathbf{x}_t = (\mathbf{A} + \gamma \mathbf{I})^{-1} (\gamma \mathbf{x}_{t-1} - \mathbf{F}_{externa_{t-1}}) \quad (2.38)$$

donde:

$\gamma$ : el tamaño del paso.

$\mathbf{I}$ : es una matriz identidad.

$\mathbf{A} + \gamma \mathbf{I}$ : matriz penta-diagonal.

El inverso de la matriz  $\mathbf{A} + \gamma\mathbf{I}$  se calcula por la descomposición LU. Para su implementación se hace uso de métodos de pasos múltiples, los cuales usan la información de los puntos anteriores, lo cual permite tener información respecto a la trayectoria de la solución.

Como todo método de análisis se tienen ventajas y desventajas en su desempeño, de manera resumida podemos enlistar:

## 2.4 Ventajas del método

Dentro de las ventajas que presenta el modelo de contornos activos están:

- Comportamiento autónomo durante la minimización de energía.
- Constante minimización, por lo tanto si la forma del objeto cambia la forma del *Snake* también.
- Reconstruye partes del contorno del objeto de interés que pueden haberse perdido por el ruido al momento de la captura [20].

## 2.5 Desventajas del método

Hay dos desventajas primordiales que presenta el modelo [21], las cuales limitan su aplicación puesto que no permiten obtener resultados satisfactorios. Estas son:

- Rango de captura: el campo de las fuerzas externas se desvanece rápidamente al alejarse de la frontera de interés, produciendo un pobre rango de captura, por lo que solo los *Snakes* que son inicializados cerca del contorno de interés, convergerán. Anteriormente se comentó que al aplicar una funcional borrosa se aumentaba el rango de captura, sin embargo, esto disminuye su eficiencia.
- Concavidades: entrar en las concavidades simboliza un conflicto para los *Snakes*.

- Necesita asistencia manual por parte del usuario en la inicialización del contorno, lo cual representa un gran consumo de tiempo y procesamiento cuando se trabaja con grandes cantidades de imágenes [20].

La inicialización del contorno, además presenta otros inconvenientes como procurar inicializar el contorno fuera del objeto de interés puesto que muchas veces dentro existen otras estructuras o ruido que desvían al *Snake* de su objetivo, por lo que la inicialización se vuelve determinante.