



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
**PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA**  
**INGENIERÍA ELÉCTRICA - CONTROL**

**CONTROL ADAPTABLE DE ROBOTS**  
**MANIPULADORES CON OBSERVADOR DE**  
**VELOCIDAD**

TESIS  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
MAESTRA EN INGENIERÍA

PRESENTA:  
AMALINALLI ALETHIA ORTÍZ ESPINOZA

TUTOR PRINCIPAL  
DR. MARCO ANTONIO ARTEAGA PÉREZ, FI-UNAM

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX., NOVIEMBRE, 2019



JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dr. Maya Ortiz Paul Rolando  
Secretario: Dr. Espinosa Pérez Gerardo René  
1er Vocal: Dr. Arteaga Pérez Marco Antonio  
2o. Vocal: Dr. Romero Velázquez José Guadalupe  
3er. Vocal: Dr. Tang Xu Yu

La tesis se realizó en el Posgrado de Ingeniería, UNAM.

TUTOR DE TESIS:

Dr. MARCO ANTONIO ARTEAGA PÉREZ, FI-UNAM

---

---

.

---

A mis padres y  
a mi abue.



# Agradecimientos

---

*Primeramente quiero agradecer a mis padres, Horacio Edgar y Bertha, por su apoyo en cada momento transcurrido en esta etapa que estuvo llena de retos; a mi abuela paterna Maria del Carmen Ibarra Fraire† por toda su ayuda incondicional, su paciencia ilimitada y sus conocimientos sobre la vida que desde mi infancia me brindó pero que lamentablemente ya no podré compensarle en su totalidad ni como yo hubiese querido; y a mi hermano Horacio Mario por sus comentarios que me motivaron a seguir cuando lo requerí.*

*De igual forma quiero agradecer al Dr. Marco A. Arteaga Pérez por haberme brindado su confianza y la oportunidad de trabajar este tema con él.*

*A cada maestro del que tuve el prestigio de recibir sus enseñanzas a lo largo de mi recorrido por la Facultad de Ingeniería, desde la licenciatura hasta el posgrado, y de los que algunos sigo recibiendo consejos y aprendizajes más allá de lo que se imparte en el salón de clases.*

*Y a todos los que han intervenido en mi formación como persona, estudiante y futura profesionista, les agradezco su valiosa contribución en este breve transitar de mi vida.*

*Finalmente se agradece al proyecto PAPIIT IN114617, Diseño de observadores para la teleoperación bilateral de sistemas con retardo.*





# Declaración de autenticidad

---

Por la presente declaro que, salvo cuando se haga referencia específica al trabajo de otras personas, el contenido de esta tesis es original y no se ha presentado total o parcialmente para su consideración para cualquier otro título o grado en esta o cualquier otra Universidad. Esta tesis es resultado de mi propio trabajo y no incluye nada que sea el resultado de algún trabajo realizado en colaboración, salvo que se indique específicamente en el texto.

AMALINALLI ALETHIA ORTÍZ ESPINOZA. Ciudad Universitaria, Cd. Mx.,  
Noviembre, 2019



# Índice general

---

<b>Índice de figuras</b>	<b>IX</b>
<b>Índice de tablas</b>	<b>XI</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Robots manipuladores y observadores . . . . .	2
1.2. Planteamiento del problema . . . . .	3
1.3. Objetivos . . . . .	4
1.4. Estructura del trabajo . . . . .	4
<b>2. Marco teórico</b>	<b>5</b>
2.1. Estado del Arte . . . . .	5
2.1.1. Control Adaptable . . . . .	5
2.1.2. Observadores . . . . .	6
2.2. Modelado dinámico . . . . .	7
2.2.1. Dinámica . . . . .	7
2.3. Propiedades . . . . .	8
<b>3. Modelo del Robot</b>	<b>11</b>
3.1. Robot A465 <i>CSR Robotics</i> . . . . .	11
3.2. Modelo dinámico . . . . .	13
<b>4. Algoritmo propuesto</b>	<b>17</b>
4.1. Análisis y obtención de ley de control . . . . .	17
4.1.1. Acotamiento de los errores de seguimiento y de observación. . . . .	21
4.1.2. Análisis de estabilidad . . . . .	23
4.2. Análisis y obtención de ley de adaptación . . . . .	24
4.2.1. Acotamiento de los errores paramétricos . . . . .	25
4.2.2. Análisis de estabilidad . . . . .	26
4.2.3. Esquema adaptable propuesto . . . . .	28
4.3. Análisis del control adaptable propuesto en conjunto con el observador . . . . .	32

<b>5. Resultados de simulación</b>	<b>37</b>
5.1. Algoritmos utilizados . . . . .	37
5.1.1. Algoritmo adaptable de Slotine y Li, (1987) . . . . .	37
5.1.2. Algoritmo adpatable de Tang y Arteaga (1994) . . . . .	38
5.2. Prueba de regulación . . . . .	39
5.2.1. Algoritmo propuesto . . . . .	39
5.2.2. Algoritmo Slotine y Li . . . . .	39
5.2.3. Algoritmo Tang y Arteaga . . . . .	40
5.2.4. Resultados de simulación . . . . .	40
5.3. Prueba de seguimiento . . . . .	44
5.3.1. Algoritmo propuesto . . . . .	45
5.3.2. Algoritmo Slotine–Li . . . . .	45
5.3.3. Algoritmo Tang–Arteaga . . . . .	47
5.3.4. Resultados de simulación . . . . .	47
5.4. Análisis de resultados . . . . .	52
<b>6. Conclusiones</b>	<b>57</b>
6.1. Trabajo futuro . . . . .	58
6.2. Recomendaciones . . . . .	58
<b>A. Apéndice</b>	<b>59</b>
A.1. Teoremas auxiliares . . . . .	59
<b>Bibliografía</b>	<b>61</b>

# Índice de figuras

---

1.1. Robots industriales <i>KUKA</i> , <i>Comau</i> y <i>ABB</i> respectivamente. . . . .	1
3.1. Robot manipulador <i>A465 de CSR Robotics</i> con giros articulares. . . . .	12
3.2. Diagrama de un motor de DC [3]. . . . .	16
5.1. Regulación: Posición articular. Algoritmo propuesto (- -), Algoritmo de Tang y Arteaga [2] (- -), Algoritmo de Slotine y Li [1] (- -) y valor deseado ( $\cdots$ ). . . . .	41
5.2. Regulación: Velocidad articular. Algoritmo propuesto (- -), Algoritmo de Tang y Arteaga [2] (- -), Algoritmo de Slotine y Li [1] (- -) y valor deseado ( $\cdots$ ). . . . .	42
5.3. Regulación: Error de observación (a) y error de velocidad observada (b). . . . .	42
5.4. Regulación: Parámetros estimados. Algoritmo propuesto (- -), Algoritmo de Tang y Arteaga [2] (- -), Algoritmo de Slotine y Li [1] (- -) y valor real ( $\cdots$ ). . . . .	43
5.5. Regulación: Parámetros estimados. Algoritmo propuesto (- -), Algoritmo de Tang y Arteaga [2] (- -), Algoritmo de Slotine y Li [1] (- -) y valor real ( $\cdots$ ). . . . .	43
5.6. Regulación: Parámetros estimados. Algoritmo propuesto (- -), Algoritmo de Tang y Arteaga [2] (- -), Algoritmo de Slotine y Li [1] (- -) y valor real ( $\cdots$ ). . . . .	44
5.7. Regulación. Pares obtenidos con: Algoritmo propuesto (- -), Algoritmo de Tang y Arteaga [2] (- -), Algoritmo de Slotine y Li [1] (- -). . . . .	45
5.8. Seguimiento. Posición articular con Esquema propuesto (control-observador) ( $\rightarrow$ ), Algoritmo de Tang y Arteaga [2] (- -), Algoritmo de Slotine y Li [1] (- -) y valor deseado ( $\cdots$ ). . . . .	46
5.9. Seguimiento. Velocidad articular: Esquema propuesto (control-observador) ( $\rightarrow$ ), Algoritmo de Tang y Arteaga [2] (- -), Algoritmo de Slotine y Li [1] (- -) y valor deseado ( $\cdots$ ). . . . .	47
5.10. Seguimiento. Error de posición articular: Esquema propuesto (control-observador) ( $\rightarrow$ ), Algoritmo de Tang y Arteaga [2] (- -), Algoritmo de Slotine y Li [1] (- -) y valor deseado ( $\cdots$ ). . . . .	48

## ÍNDICE DE FIGURAS

---

5.11. Seguimiento. Error de velocidad articular: Esquema propuesto (control-observador) (—), Algoritmo de Tang y Arteaga [2] (- -), Algoritmo de Slotine y Li [1] (- -) y valor deseado (⋯⋯). . . . .	49
5.12. Seguimiento: Error de observación (a) y error de velocidad observada (b).	49
5.13. Seguimiento: Parámetros estimados. Algoritmo propuesto (- -), Algoritmo de Tang y Arteaga [2] (- -), Algoritmo de Slotine y Li [1] (- -) y valor real (- -). . . . .	50
5.14. Seguimiento: Parámetros estimados. Algoritmo propuesto (- -), Algoritmo de Tang y Arteaga [2] (- -), Algoritmo de Slotine y Li [1] (- -) y valor real (- -). . . . .	51
5.15. Seguimiento: Parámetros estimados. Algoritmo propuesto (- -), Algoritmo de Tang y Arteaga [2] (- -), Algoritmo de Slotine y Li [1] (- -) y valor real (- -). . . . .	51
5.16. Seguimiento. Pares obtenidos con: Algoritmo propuesto (- -), Algoritmo de Tang y Arteaga [2] (- -), Algoritmo de Slotine y Li [1] (- -). . . . .	52

## Índice de tablas

---

3.1. Rango de movimiento de cada articulación. . . . .	11
3.2. Dimensiones del robot. . . . .	12
3.3. Taza de par continuo del robot. . . . .	13
3.4. Velocidades articulares a un lugar ciclo ( <i>place cycle</i> ) de 1.2 [s]. . . . .	13
3.5. Parámetros físicos del robot <i>A465</i> [4]. . . . .	14
3.6. Variables auxiliares en el modelo del robot <i>A465</i> [4]. . . . .	15
5.1. Ganancias de $\Gamma$ para el algoritmo propuesto en el caso de regulación. . .	40
5.2. Ganancias de $\Gamma$ para el algoritmo propuesto en el caso de seguimiento. .	46
5.3. Regulación. Índice de desempeño de los errores en el espacio articular. .	53
5.4. Seguimiento. Índice de desempeño de los errores en el espacio articular. .	54
5.5. Regulación. Índice de desempeño de los errores de velocidad. . . . .	54
5.6. Seguimiento. Índice de desempeño de los errores de velocidad. . . . .	54
5.7. Índice de desempeño de los errores de observación . . . . .	55
5.8. Índice de desempeño de los errores de observación derivados . . . . .	55
5.9. Índice de desempeño de los errores de estimación ( <i>SC: señal constante,</i> <i>SV: señal variable</i> ) . . . . .	56





# Introducción

---

Los robots manipuladores han sido objeto de estudio durante mucho tiempo debido a que su uso en la industria se ha ampliado para cubrir diversas áreas en donde las tareas repetitivas necesitaban mayor precisión y un menor costo. Por este motivo se han dedicado diversos trabajos para modelar su dinámica, desde las linealizaciones, cuya desventaja es la localidad de su estabilidad, hasta los modelos basados en las ecuaciones de Euler-Lagrange, en donde la incertidumbre paramétrica a veces causa estragos, ya que la carga que deben manipular los brazos robóticos como el *Kuka*, el *Comau* o el *ABB*, por mencionar algunos ejemplos (véase Figura 1.1), es variable y en ocasiones desconocida. Para resolver este problema, se han desarrollado diversos algoritmos para controlar las trayectorias que deben seguir las articulaciones para lograr que el efector final cumpla con la tarea deseada, cabe mencionar que los trabajos desarrollados han sido muy diversos con respecto a los métodos de análisis e implementación, pero el objetivo en común es lograr precisión a bajo precio, es decir, alcanzar errores de seguimiento iguales a cero en un breve tiempo empleando un esfuerzo de control mínimo, con el propósito de no forzar los motores ni al mecanismo mismo.

En la mayoría de las ocasiones se desconocen los valores de los parámetros del robot manipulador, como sus masas, longitudes y centros de masa de cada eslabón, así como los términos de fricción entre las uniones de los eslabones, ya que con el paso del tiempo se modifican a causa del tipo y la frecuencia con que se utilice el robot.



**Figura 1.1:** Robots industriales *KUKA*, *Comau* y *ABB* respectivamente.

Los controladores basados en modos deslizantes brindan la ventaja de lidiar con

la incertidumbre paramétrica, ya que la consideran parte de las perturbaciones que el mismo control elimina por su propiedad de robustez. Sin embargo, la gran desventaja de este algoritmo de control es la presencia de un fenómeno llamado *chattering*, que a sistemas no tan robustos les genera un desgaste innecesario en su mecanismo (motores, uniones de los eslabones, entre otras partes). Cabe mencionar que para disminuir este efecto sobre el sistema, se le han hecho varias modificaciones para eliminar la discontinuidad de su ley de control que genera ese fenómeno no deseado, aunque esto dificulta el análisis de estabilidad si se llegan a emplear observadores.

### 1.1. Robots manipuladores y observadores

De acuerdo a lo que se menciona en diversos libros de fundamentos de robótica como [5], [6], [7], entre otros, el término de **robot** fue utilizado por vez primera en 1921 por el escritor checo Karel Capek (1890-1938). La palabra *robot* viene del término eslavo *robota* que hace alusión al trabajo realizado de manera forzada. Sin embargo, una definición más aceptada para describir lo que es un *robot* se presenta en [8], el cual menciona lo siguiente: *un robot es un manipulador multifuncional programable diseñado para mover materiales, partes, herramientas, o equipos especializados por medio de movimientos variables programados para la realización de varias tareas.*

Cabe mencionar que el primer uso importante que se le dio a los robots fue con el *telemanipulador* que se desarrolló en 1948 por R. C. Goerzt del *Argonne National Laboratory* para poder manipular materiales radioactivos de manera que el operador no sufriera algún daño. Dicho sistema estaba compuesto por un robot maestro que el operador manejaba a través de un mecanismo que le permitía sentir las fuerzas que el robot esclavo experimentaba de su entorno al manipular directamente las sustancias peligrosas. Más tarde, en 1954, Goerzt sustituyó el sistema mecánico por tecnología electrónica y un servocontrol, obteniendo así el primer telemanipulador con servocontrol bilateral. A partir de este año, se comenzó a concebir la idea del robot y de su utilidad, la cual era sustituir al operador humano en determinadas tareas industriales por un programa de computadora; esto trajo consigo el análisis y el desarrollo de herramientas para controlar al robot de manera eficaz.

Además de la industria, el uso de los robots se ha ampliado a otras áreas como la espacial, de exploración submarina y subterránea, militar, medicina, construcción, entre otras. Para ello se han realizado diversos estudios sobre su dinámica y funcionamiento con el fin de incrementar la eficiencia y productividad que su uso trae consigo.

Por otro lado, para que un robot pueda realizar las diversas tareas que les programa, es necesario conocer cierta información del mismo, dependiendo del control que se haya implementado. Por lo general, los algoritmos de control requieren del conocimiento de la posición articular del robot e incluso de su velocidad, para ello se emplean sensores internos que brindan esa información. Sin embargo, el costo de estos sensores es significativo y por lo mismo en algunos casos los robots solo poseen sensores con los cuales sólo se puede obtener la posición de cada articulación. Para poder conocer la velocidad

se han desarrollado algoritmos llamados *observadores*, los cuales obtienen un estimado de los valores reales desconocidos con los que se requiere trabajar.

Desde mediados del siglo pasado, diversos trabajos se han desarrollado para poder mejorar las propiedades de estabilidad y disminuir la dificultad con la que los observadores deben de ser sintonizados para sistemas lineales y posteriormente, no lineales.

En 1960, R. E. Kalman publicó su famoso trabajo que describe una solución recursiva al problema de filtrado en un sistema lineal en tiempo discreto; esto lo hace empleando un conjunto de ecuaciones matemáticas que brindan una solución computacional eficaz usando el método de mínimos cuadrados [9], [10], [11]. Cuatro años más tarde, D.G. Luenberger diseñó un observador lineal que reconstruye las señales deseadas y que incluso se simplifica conforme el número de salidas disponibles (o medidas) aumentan [12].

A partir de 1970 se comenzaron a obtener resultados más concretos sobre la teoría en sistemas no lineales (dichos sistemas abarcan a la mayoría de los sistemas físicos, incluyendo a los robots), por consiguiente, se desarrollaron diversos esquemas de control y de observación. Algunos de estos primeros trabajos fueron [13], [14], [15], [16], [17], [18], entre otros.

El observador desarrollado en 1990 por S. Nicosia y P. Tomei [19] fue de los primeros observadores empleados para robots. Este esquema requiere de conocer el modelo de la planta para poder estimar la velocidad de cada articulación del robot, asegurando que el error de observación convergiera asintóticamente a cero en movimiento libre, esto quiere decir, cuando el sistema se mueve sin algún control programado.

Sin embargo, no siempre es posible conocer el modelo del sistema, por lo que en trabajos posteriores se han creado observadores que solo dependen del sistema generado por los errores de seguimiento y de observación, tal es el caso de [20], [21] y [22].

## 1.2. Planteamiento del problema

Dado el modelo de un robot industrial con incertidumbre paramétrica y medición únicamente de posiciones articulares se desea lograr el seguimiento de trayectorias utilizando un control adaptable original para tratar con el desconocimiento del valor de los parámetros reales y que a su vez trabaje con las velocidades estimadas por un observador que no dependa del modelo dinámico del robot. Finalmente, se deberá de obtener y demostrar el tipo de estabilidad que ambos esquemas consiguen en conjunto para la región en donde el robot manipulador trabajará.

### 1.3. Objetivos

Los objetivos de esta tesis son los siguientes:

- Lograr seguimiento de trayectorias de un robot manipulador desconociendo sus velocidades articulares y el valor real de sus parámetros empleando un control adaptable y un observador de velocidad.
- Demostrar la estabilidad de la ley de control en conjunto con el observador y la ley de adaptación, logrando la convergencia a cero de los errores de seguimiento y de observación.
- Comprobar resultados con simulaciones.

### 1.4. Estructura del trabajo

Este trabajo está organizado de la siguiente manera: en el Capítulo 2 se presentan los preliminares matemáticos utilizados a lo largo del documento. En el Capítulo 3 se presentan los modelos cinemático y dinámico del robot industrial *A465* de *CSR Robotics*. El algoritmo desarrollado y la demostración de su estabilidad se muestran en el Capítulo 4. En el Capítulo 5 se presentan los resultados de las simulaciones y un análisis de lo obtenido con lo planteado a lo largo del trabajo. Finalmente en el Capítulo 6 se presentan las conclusiones, el trabajo a futuro y algunas recomendaciones para el lector interesado en utilizar el esquema que se propone en este trabajo.

# Marco teórico

---

## 2.1. Estado del Arte

Los robots manipuladores son un campo de gran interés y han sido ampliamente explorados con el propósito de alcanzar la ejecución de tareas en un modo preciso, empleando los errores de seguimiento y haciendo que éstos converjan exponencialmente a cero requiriendo un esfuerzo de control pequeño en los actuadores del robot. Basándose en los estudios llevados a cabo durante todos estos años, muchos problemas han sido resueltos, desde el modelado del sistema hasta los controladores cuyo fin ha sido alcanzar los objetivos que se propongan de una manera aceptable, por decir menos.

### 2.1.1. Control Adaptable

Slotine y Li (1987) [23] propusieron un control adaptable que asegura estabilidad asintótica global (*global asymptotic stability -GAS-*) con convergencia paramétrica bajo la condición de excitación persistente (*persistent excitation -PE-*). Dicho algoritmo consiste en una parte retroalimentada a un PD, ya que disponen de las velocidades articulares medidas, y una parte que compensa por completo la dinámica del manipulador en línea, a pesar de que el vector con los parámetros del manipulador es desconocido.

Peisen et al. (1992) [24] presentaron un esquema de control de aprendizaje adaptable (*adaptive learning control*) simple para robots manipuladores con múltiples articulaciones. Su objetivo de control fue alcanzar un seguimiento preciso de una trayectoria deseada a través de varias pruebas y teniendo disponibles las posiciones y velocidades articulares.

En el trabajo de Tang y Arteaga (1994) [2] se presenta un control adaptable que explota las propiedades de pasividad de los manipuladores mecánicos, además de que se emplea una variable que permite quitar la independencia del algoritmo con respecto a la aceleración que no puede ser medida. Con este control se logró estabilidad exponencial bajo la condición de excitación suficiente (*sufficient excitation -SE-*). Sin embargo, para su implementación se requiere de conocer las velocidades articulares.

Algunos artículos han trabajado con el seguimiento de trayectorias sin la medición de velocidad articular e incluso se ha tratado con el conocimiento parcial del modelo dinámico del robot en conjunto. Tal es el caso de Kaneko y Horowitz (1997) [25], donde por medio de pruebas repetidas logran alcanzar el objetivo de seguimiento. Ellos solamente desconocían los parámetros inerciales y emplearon un observador de velocidad para estimar las velocidades articulares del robot, el cual está formulado con base en la relación entrada/salida del manipulador.

Villani et al. (1999) [26] presentan un controlador adaptable con propiedades de estabilidad exponencial que se deriva a partir de un algoritmo de control de posición basado en pasividad, teniendo la capacidad de lograr el seguimiento de fuerza mediante el uso de un control PID con retroalimentación de fuerza variante en el tiempo. Para la tarea de seguimiento de fuerza utilizaron el control adaptable para compensar los coeficientes de fricción, pero contaron con las mediciones de velocidad articular.

Yoo y Ham (2000) [27] propusieron un control adaptable robusto basado en la teoría de estabilidad de Lyapunov. Ellos utilizaron un compensador difuso que necesitó de muchas reglas difusas debido a que dependen de las incertidumbres sobre todas las variables de estado. Ellos hicieron eso porque cuando el algoritmo de control está basado únicamente en el modelo dinámico del robot, es muy difícil alcanzar el comportamiento deseado del robot.

Quan et al. (2007) [28] usan un controlador adaptable iterativo asumiendo que los robots manipuladores en la industria repiten una tarea continuamente. Ellos basaron su esquema propuesto en un control PD y lograron la convergencia de los errores de seguimiento con un conjunto apropiado de coeficientes en la ley de control iterativa adaptable de alto orden para asegurarlo, trabajando con un modelo dinámico del robot desconocido pero contando con las mediciones de las velocidades articulares.

### 2.1.2. Observadores

En el artículo publicado por Nicosia y Tomei (1990) [19] se propone un observador no lineal que estima las velocidades articulares que depende de la dinámica del sistema, es decir, considera conocido el vector de parámetros. Además, este esquema asegura estabilidad asintótica en una región de atracción determinada.

En Arteaga (2003) [29] se presenta un esquema adaptable diseñado en conjunto con un observador lineal para poder estimar las velocidades articulares. Se asegura que el vector con los parámetros estimados está acotado. Asimismo, los errores de seguimiento y de observación están finalmente acotados.

Aranovskiy et. al. (2017) [30] presentan un observador de velocidad global y exponencialmente estable para una clase de sistemas mecánicos que son linealizables parcialmente vía un cambio de coordenadas. Este observador tipo Luenberger, brinda una solución simple y robusta sin necesidad de condiciones de excitación. sin embargo, este observador requiere de conocer los parámetros dinámicos del sistema en el que se llegue a implementar.

El estudio realizado por Deniz et. al. (2018) [22] muestra el diseño de un observador

de velocidad robusto y suave para una clase de sistemas mecatrónicos no lineales. Este observador no requiere de conocer *a priori* las cotas superiores de la dinámica desconocida del sistema e introducen ganancias variantes en el tiempo para compensar las incertidumbres, asegurando estabilidad práctica en los errores de observación pero adquiriendo, a su vez, una carga computacional bastante considerable.

## 2.2. Modelado dinámico

El modelo dinámico del sistema permite una descripción de la evolución de éste a lo largo del tiempo; para ello se plantean las ecuaciones de Euler-Lagrange para sistemas con restricciones holonómicas, que a su vez ayudan a determinar las ecuaciones necesarias para obtener la energía cinética y potencial del robot manipulador.

### 2.2.1. Dinámica

Los modelos dinámicos de los robots manipuladores están generalmente descritos por ecuaciones diferenciales no lineales; lo que provoca la necesidad de emplear sistemas de control más complejos que los que se emplean para sistemas lineales.

El modelo dinámico en forma matricial se representa de la siguiente manera [3]

$$\mathbf{H}_o(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_o(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}_o(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} \quad (2.1)$$

donde  $\mathbf{H}_o(\mathbf{q}) \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  es la matriz de inercia, la cual es simétrica ( $\mathbf{H}_o(\mathbf{q}) = \mathbf{H}_o(\mathbf{q})^T$ ) y positiva definida ( $\mathbf{H}_o(\mathbf{q}) > \mathbf{O}$ ), lo que asegura la existencia de su inversa  $\mathbf{H}_o(\mathbf{q})^{-1}$  que también es positiva definida.

$\mathbf{C}_o(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  es la matriz de fuerzas centrífugas y de Coriolis que puede no ser única. Sin embargo, el vector  $\mathbf{C}_o(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} \in \mathfrak{R}^n$  si es único y se puede obtener mediante:

$$\mathbf{C}_o(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{H}}_o(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} [\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{H}_o(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}], \quad (2.2)$$

donde los elementos de la matriz  $\mathbf{C}_o(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  solo dependen de los vectores  $\mathbf{q}$  y  $\dot{\mathbf{q}}$  y cumple con:

$$\mathbf{C}_o(\mathbf{q}, \mathbf{0}) = \mathbf{O} \quad (2.3)$$

para todos los vectores  $\mathbf{q} \in \mathfrak{R}^n$ .

El vector de fuerzas gravitacionales  $\mathbf{g}_o(\mathbf{q}) \in \mathfrak{R}^n$  depende solo de  $\mathbf{q}$ . Es continuo y está acotado para cada  $\mathbf{q}$  que se encuentre acotado. Debido a que este vector es el gradiente de la energía potencial, se puede correlacionar con el vector  $\dot{\mathbf{q}}$  como se muestra a continuación:

$$\int_0^T \mathbf{g}_o(\mathbf{q}(t))^T \dot{\mathbf{q}}(t) dt = \mathcal{U}(\mathbf{q}(T)) - \mathcal{U}(\mathbf{q}(0)) \quad \forall T \in \mathfrak{R}^+.$$

Ahora bien, como el robot es un sistema mecánico se debe de considerar a la fricción, esto provoca que el modelo de la ecuación (3.7) no pueda representar adecuadamente la dinámica del robot, por lo que se deberá trabajar con el siguiente modelo que considera a la fricción estática, que depende de la velocidad instantánea en cada articulación

$$\mathbf{H}_o(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_o(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}_o(\mathbf{q}) + \mathbf{f}_{co}(\dot{\mathbf{q}}) = \boldsymbol{\tau} \quad (2.4)$$

el vector  $\mathbf{f}_{co}(\mathbf{q}) \in \mathfrak{R}^n$  puede estar descrito por

$$\mathbf{f}_{co}(\dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{D}_o\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{F}_c\text{sign}(\dot{\mathbf{q}})$$

en donde  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{F}_c \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  son matrices diagonales positivas definidas. Los elementos de  $\mathbf{D}$  representan a los coeficientes de fricción viscosa, y los elementos de la matriz  $\mathbf{F}_c$  corresponden a los de fricción de Coulomb. El vector  $\text{sign}(\dot{\mathbf{q}}) \in \mathfrak{R}^n$  esta definido como

$$\text{sign}(\dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} \text{sign}(\dot{q}_1) \\ \text{sign}(\dot{q}_2) \\ \vdots \\ \text{sign}(\dot{q}_n) \end{bmatrix}$$

con la función  $\text{sign}(x)$  dada por

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Pero como la función signo no está definida para  $x = 0$ , cuando se efectúa el control de posición, usualmente solo se considera fricción viscosa porque no se describe correctamente el comportamiento de la fricción cuando la velocidad llega a ser muy baja, como es el caso en el que el robot está en reposo y comienza a moverse.

### 2.3. Propiedades

A continuación se presentan algunas propiedades que poseen los robots manipuladores asumiendo por simplicidad que están conformados por articulaciones de revolución.

**Propiedad 2.3.1** *Se cumple que  $\lambda_h\|\mathbf{x}\|^2 \leq \mathbf{x}^T\mathbf{H}(\mathbf{q})\mathbf{x} \leq \lambda_H\|\mathbf{x}\|^2 \forall \mathbf{q}, \mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n$  con  $0 < \lambda_h \leq \lambda_H < \infty$ , donde  $\lambda_h$  ( $\lambda_H$ ) es el valor propio mínimo (máximo) de la matriz  $\mathbf{H}(\mathbf{q})$ .*

△



---

**Propiedad 2.3.2** Empleando los Símbolos de Christoffel del primer tipo para calcular  $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ , la matriz  $\dot{\mathbf{H}}(\mathbf{q}) - 2\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  es antisimétrica [3] y se satisface lo siguiente

$$\dot{\mathbf{H}}(\mathbf{q}) = \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^T.$$

△

**Propiedad 2.3.3** Se cumple con que  $\|\mathbf{C}(\mathbf{q}, \mathbf{x})\| \leq k_c \|\mathbf{x}\|$  con  $0 < k_c < \infty$ , y  $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ .

△

**Propiedad 2.3.4** El vector  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \mathbf{x})\mathbf{y}$  satisface

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \mathbf{x})\mathbf{y} = \mathbf{C}(\mathbf{q}, \mathbf{y})\mathbf{x} \quad (2.5)$$

para todo vector  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ .

△

**Propiedad 2.3.5** Con una definición apropiada de los parámetros del robot, el modelo 2.4 puede escribirse como

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} = \mathbf{Y}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})\boldsymbol{\theta}, \quad (2.6)$$

donde  $\mathbf{Y}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{n \times p}$  es el **regresor** y  $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^p$  es un vector constante de parámetros.

△



# Modelo del Robot

---

## 3.1. Robot A465 CSR Robotics

En esta sección se presentan las especificaciones del robot **A465** de *CSR Robotics* que se puede ver en la Figura 3.1, iniciando con sus detalles técnicos y terminando con el modelo dinámico del mismo.

Este brazo robótico, que pesa 32 [kg], proporciona un rango completo de movimiento dentro de un sistema de coordenadas predefinidos. Las articulaciones del brazo permiten el movimiento a través de seis grados de libertad en los marcos cartesianos y de precisión de referencia. El grado de libertad (*DOF* por sus siglas en inglés *-degree of freedom-*) es el número de articulaciones que posee un robot, cada una le permite realizar un movimiento rotacional o traslacional al eslabón próximo correspondiente, logrando que el robot pueda maniobrar para realizar la tarea deseada.

El rango de movimiento del brazo depende de las dimensiones de cada sección del brazo (base, eslabones, pinza) y la extensión de movimiento de cada articulación. Estas medidas determinan la forma del área de trabajo del brazo. En la Tabla 3.1 se presenta

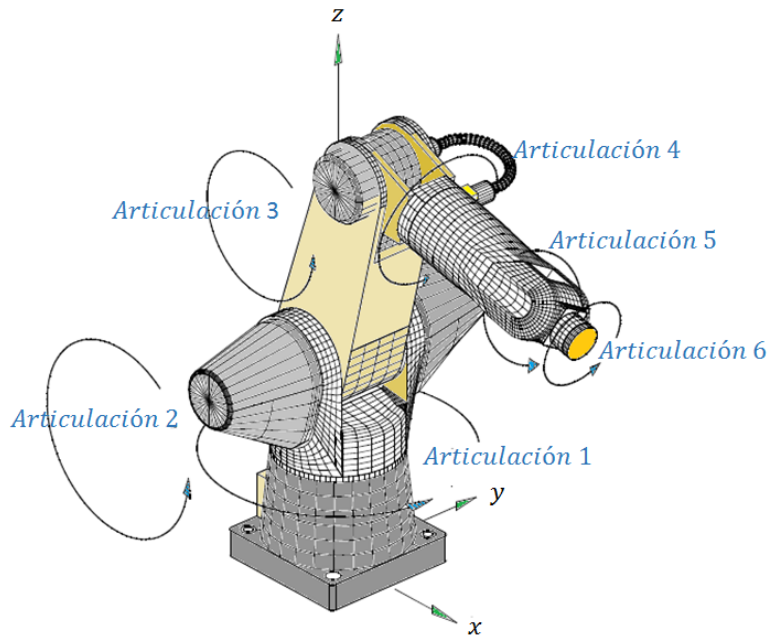
Articulación	Eje	Rango de movimiento [°]
Cintura ( <i>waist</i> )	1	de +175 a -175
Hombro ( <i>shoulder</i> )	2	de +90 a -90
Codo ( <i>elbow</i> )	3	de +110 a -110
Giro de muñeca ( <i>wrist rotate</i> )	4	de +180 a -180
Cabeceo de muñeca ( <i>wrist pitch</i> )	5	de +105 a -105
Rotación de herramienta ( <i>tool roll</i> )	6	de +180 a -180

**Tabla 3.1:** Rango de movimiento de cada articulación.

### 3. MODELO DEL ROBOT

---

el rango de movimiento que posee cada articulación. En la Tabla 3.2 se encuentran las dimensiones del robot.



**Figura 3.1:** Robot manipulador *A465* de *CSR Robotics* con giros articulares.

Sección	Dimensión [mm]
Superficie de montaje base al hombro	30
Hombro a codo	305
Codo a pivote de muñeca (articulación 5)	330
Pivote de muñeca a la superficie de la pinza	76

**Tabla 3.2:** Dimensiones del robot.

La tasa de par continuo de cada articulación se puede ver en la Tabla 3.3 y en la Tabla 3.4 se puede apreciar la velocidad articular máxima que puede alcanzar cada articulación, cabe mencionar que el engranaje de reducción para cada articulación es de 100 : 1.

Articulación	Par [ $N\ m$ ]
1	39.50
2	66.08
3	39.50
4	6.89
5	6.82
6	2.50

**Tabla 3.3:** Taza de par continuo del robot.

Articulación	[ $pulsos/ms$ ]	Velocidad máxima [ $rad/seg$ ] - [ $^{\circ}/s$ ]
1	50.0	3.14 - 180
2	50.0	3.14 - 180
3	50.0	3.14 - 180
4	24.0	2.99 - 171
5	24.0	3.02 - 173
6	24.0	2.99 - 171

**Tabla 3.4:** Velocidades articulares a un lugar ciclo (*place cycle*) de 1.2 [s].

## 3.2. Modelo dinámico

Es importante obtener el modelo dinámico del robot ya que con éste se podrán realizar simulaciones sobre el comportamiento que tendrá el sistema al aplicarle cualquier algoritmo de control.

Debido a que los actuadores son de corriente directa y se tiene conocimiento de su dinámica, ésta se tomará en cuenta. El modelo dinámico en movimiento libre tomado de Gudino-Lau y Arteaga (2005) [4], está dado como

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{f}_c(\dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{D}_k\mathbf{v} \quad (3.1)$$

donde  $\mathbf{f}_c \in \mathfrak{R}^n$  representa los términos de fricción de Coulomb, y donde  $\mathbf{D}_n$  y  $\mathbf{D}_k \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  definen la dinámica del motor.

Debido a que el objetivo de control es hacer seguimiento, solo se tomarán en cuenta los 3 primeros grados de libertad (GDL) para poder controlar la posición únicamente,

### 3. MODELO DEL ROBOT

---

ya que las tres últimas articulaciones son las que dan la orientación al efector final. La matriz de inercia resulta ser

$$\mathbf{H}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

donde los elementos que la conforman están dados por [8]

$$\begin{aligned} h_{11} &= \eta_1 \varrho_1 + \eta_2 \varrho_2 + \eta_3 \varrho_3 + \eta_4 \varrho_4 + \eta_5 \varrho_5 + \eta_6 \varrho_6 + \eta_7 \varrho_7 + \varrho_8 \\ h_{12} &= h_{13} = h_{21} = h_{31} = 0 \\ h_{22} &= \frac{1}{2} \varrho_1 + \varrho_2 + 2s_3 \varrho_3 + \varrho_4 + \varrho_9 \\ h_{23} &= \frac{1}{2} \varrho_1 + \varrho_2 + s_3 \varrho_3 + \varrho_4 + \varrho_5 \\ h_{32} &= \frac{1}{2} \varrho_1 + \varrho_2 + s_3 \varrho_3 + \varrho_4 + \varrho_5 \\ h_{33} &= \frac{1}{2} \varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_4 + \varrho_{10}, \end{aligned}$$

donde  $s_i = \sin(q_i)$  y los valores  $\varrho_j$ , con  $i = 1, \dots, 3$  y  $j = 1, \dots, 10$  respectivamente, se presentan en la Tabla 3.5.

Parámetro	Magnitud	Parámetro	Magnitud	Parámetro	Magnitud
$\varrho_1$	0.0055 [kg m <sup>2</sup> ]	$\varrho_7$	0.0007 [kg m <sup>2</sup> ]	$\varrho_{13}$	36.00 [N m s]
$\varrho_2$	0.0080 [kg m <sup>2</sup> ]	$\varrho_8$	2.0007 [kg m <sup>2</sup> ]	$\varrho_{14}$	0.200 [N m s]
$\varrho_3$	0.0024 [kg m <sup>2</sup> ]	$\varrho_9$	11.800 [kg m <sup>2</sup> ]	$\varrho_{15}$	2.500 [N m s]
$\varrho_4$	0.0118 [kg m <sup>2</sup> ]	$\varrho_{10}$	2.8000 [kg m <sup>2</sup> ]	$\varrho_{16}$	2.500 [N m]
$\varrho_5$	0.0041 [kg m <sup>2</sup> ]	$\varrho_{11}$	25.0 [N m s]	$\varrho_{17}$	22.00 [N m]
$\varrho_6$	0.0009 [kg m <sup>2</sup> ]	$\varrho_{12}$	35.0 [N m s]	$\varrho_{18}$	11.00 [N m]

**Tabla 3.5:** Parámetros físicos del robot *A465* [4].

Los elementos de la matriz  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  están dados por [8]

$$\begin{aligned}
 c_{11} &= \eta_8 \varrho_3 + \eta_9 \varrho_5 - \frac{1}{2} \dot{q}_2 \sin(2q_2) \varrho_6 + \frac{1}{2} \dot{q}_2 \sin(2q_2) \varrho_7 \\
 c_{12} &= \dot{q}_1 \cos(2q_2 + q_3) \varrho_3 + \frac{1}{2} \dot{q}_1 \sin(2q_2 + 2q_3) \varrho_5 - \frac{1}{2} \dot{q}_1 \sin(q_2) \varrho_6 + \frac{1}{2} \dot{q}_1 \sin(2q_2) \varrho_7 \\
 c_{13} &= \eta_{10} \varrho_3 + \frac{1}{2} \dot{q}_1 \sin(2q_2 + 2q_3) \varrho_5 \\
 c_{21} &= -\dot{q}_1 \cos(2q_2 + q_3) \varrho_3 - \frac{1}{2} \dot{q}_1 \sin(2q_2 + 2q_3) \varrho_5 + \frac{1}{2} \dot{q}_1 \sin(2q_2) \varrho_6 - \frac{1}{2} \dot{q}_1 \sin(2q_2) \varrho_7 \\
 c_{22} &= \dot{q}_3 c_3 \varrho_3 \\
 c_{23} &= (\dot{q}_2 c_3 + \dot{q}_3 c_3) \varrho_3 \\
 c_{31} &= -\left(\frac{1}{2} \dot{q}_1 c_3 + \frac{1}{2} \dot{q}_1 \cos(2q_2 + q_3)\right) \varrho_3 - \frac{1}{2} \dot{q}_1 \sin(2q_2 + 2q_3) \varrho_5 \\
 c_{32} &= -\dot{q}_2 c_3 \varrho_3 \\
 c_{33} &= 0.
 \end{aligned}$$

Las variables  $\eta_i$ , con  $i = 1, \dots, 10$ , se encuentran en la Tabla 3.6, y  $c_j = \cos(q_j)$  donde  $j = 1, \dots, 3$ .

Variable	Valor	Variable	Valor
$\eta_1$	$\frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos(2q_2 + 2q_3)$	$\eta_6$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2q_2)$
$\eta_2$	$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2q_2 + 2q_3)$	$\eta_7$	$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2q_2)$
$\eta_3$	$s_3 + \sin(2q_2 + q_3)$	$\eta_8$	$[\dot{q}_2 \cos(2q_2 + q_3) + \frac{1}{2} \dot{q}_3 (c_3 + \cos(2q_2 + q_3))] \frac{1}{seg}$
$\eta_4$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2q_2 + 2q_3)$	$\eta_9$	$[\frac{1}{2} (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) \sin(2q_2 + 2q_3)] \frac{1}{seg}$
$\eta_5$	$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2q_2 + 2q_3)$	$\eta_{10}$	$[\frac{1}{2} \dot{q}_1 c_3 + \frac{1}{2} \dot{q}_1 \cos(2q_2 + q_3)] \frac{1}{seg}$

**Tabla 3.6:** Variables auxiliares en el modelo del robot *A465* [4].

El vector  $\mathbf{g}(\mathbf{q})$  resulta ser:

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 0 \\ c_2 \varrho_{17} + \sin(q_2 + q_3) \varrho_{18} \\ \sin(q_2 + q_3) \varrho_{18} \end{bmatrix}, \quad (3.3)$$

con  $\varrho_{17}$  y  $\varrho_{18}$  también definidos en la Tabla 3.5.

Dado el modelo dinámico definido en (3.1), en este trabajo se toma en cuenta la fricción. Así, la matriz  $\mathbf{D}$  asociada a los términos de fricción viscosa y el vector  $\mathbf{f}_c$  asociado a la fricción de Coulomb son los siguientes

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \varrho_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varrho_{12} & 0 \\ 0 & 0 & \varrho_{13} \end{bmatrix} \quad \mathbf{f}_c = \begin{bmatrix} \varrho_{14} \text{sign}(\dot{q}_1) \\ \varrho_{15} \text{sign}(\dot{q}_2) \\ \varrho_{16} \text{sign}(\dot{q}_3) \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

### 3. MODELO DEL ROBOT

Los valores de  $\rho_i$ , con  $i = 11, \dots, 16$ , se encuentran en la Tabla 3.5.

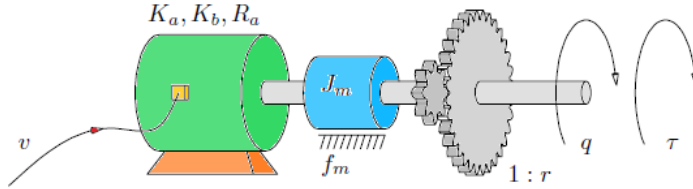
Por otro lado, los actuadores de un robot manipulador real relacionan dinámicamente el par o fuerza suministrado con la entrada de cada actuador. Debido a que los motores en el robot *A465* son de CD (véase la Figura 3.2), la entrada a cada actuador es voltaje. Ahora bien, la dinámica de los motores ubicados en cada articulación del robot se puede representar como

$$\mathbf{J}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}_n\boldsymbol{\tau} = \mathbf{D}_k\mathbf{v} \quad (3.5)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \text{diag}\{J_{mi}\} \\ \mathbf{B} &= \text{diag}\left\{f_{mi} + \left(\frac{k_a k_b}{R_a}\right)_i\right\} \\ \mathbf{D}_n &= \text{diag}\left\{\frac{1}{r_i^2}\right\} \\ \mathbf{D}_k &= \text{diag}\left\{\frac{k_{ai}}{R_{ai} r_i}\right\} \end{aligned} \quad (3.6)$$

en donde para cada motor ( $i = 1, \dots, n$ ),  $J_{mi} \in \mathfrak{R}$  corresponde a la inercia del rotor,  $f_{mi} \in \mathfrak{R}$  es la constante de fricción viscosa,  $\left(\frac{k_a}{R_a}\right)_i$  es la constante electromagnética y  $r_i$  es la relación de reducción de los engranes correspondientes al esquema de la Figura 3.2.



**Figura 3.2:** Diagrama de un motor de DC [3].

Para los motores de este robot,  $r_i = 100$ ,  $k_{ai} = 0.1424$  [Nm/A],  $R_{ai} = 0.84$  [ $\Omega$ ], con  $i = 1, 2, 3$ .

Entonces, el modelo completo del sistema a trabajar considerando la fricción de las articulaciones puede escribirse como

$$(\mathbf{D}_n \mathbf{H}_o(\mathbf{q}) + \mathbf{J})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}_n \mathbf{C}_o(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}_n \mathbf{g}_o(\mathbf{q}) + \mathbf{D}_n \mathbf{f}_{c_o}(\dot{\mathbf{q}}) + (\mathbf{B} + \mathbf{D}_o)\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{D}_k \mathbf{v} \quad (3.7)$$

Definiendo  $\mathbf{H}(\mathbf{q}) \triangleq \mathbf{H}_o(\mathbf{q}) + \mathbf{D}_n^{-1} \mathbf{J}$ ,  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \triangleq \mathbf{C}_o(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ ,  $\mathbf{g}(\mathbf{q}) \triangleq \mathbf{g}_o(\mathbf{q})$ ,  $\mathbf{f}_c(\dot{\mathbf{q}}) \triangleq \mathbf{D}_n \mathbf{f}_{c_o}(\dot{\mathbf{q}})$  y  $\mathbf{D} \triangleq \mathbf{B} + \mathbf{D}_o$ , se puede representar el modelo completo del robot como en (3.1), esto es

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{f}_c(\dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{D}_n^{-1} \mathbf{D}_k \mathbf{v}.$$



## Algoritmo propuesto

---

El objetivo de control es seguir una trayectoria deseada acotada  $\mathbf{q}_d \in \mathfrak{R}^n$  con al menos dos derivadas también acotadas, contando con la medición de las posiciones articulares pero sin poder medir las velocidades articulares. Aunado a esto, se hace presente el problema de incertidumbre paramétrica.

### 4.1. Análisis y obtención de ley de control

Para mostrar el análisis que permitirá la obtención de la ley de control, inicialmente se presentará el caso en que la velocidad articular de cada eslabón y los parámetros del sistema se conocen.

Primeramente, se define al error de seguimiento como

$$\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q} - \mathbf{q}_d. \quad (4.1)$$

Cuando las velocidades articulares  $\dot{\mathbf{q}}$  y el modelo dinámico del sistema (3.1) son conocidos, es bastante directo diseñar una variedad amplia de leyes de control con el fin de que los errores de seguimiento y de velocidad converjan a cero, *i.e.*  $\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \rightarrow \mathbf{0}$ . Una forma para lograr la convergencia de estos errores dadas las condiciones previamente mencionadas es la siguiente: se consideran las definiciones

$$\dot{\mathbf{q}}_r \triangleq \dot{\mathbf{q}}_d - \lambda \tilde{\mathbf{q}} \quad (4.2)$$

$$\mathbf{s} \triangleq \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_r = \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \lambda \tilde{\mathbf{q}}, \quad (4.3)$$

donde  $\lambda > \mathbf{0}$  y la ecuación (4.3) representa un filtro lineal estable de primer orden con entrada  $\mathbf{s} \in \mathfrak{R}^n$  y salida  $\tilde{\mathbf{q}} \in \mathfrak{R}^n$ . Debido a esto, si  $\mathbf{s}$  está acotada y tiende a cero, entonces también lo hará  $\tilde{\mathbf{q}}$  y su derivada, lo que permite concluir con el objetivo establecido.

Ahora bien, eligiendo la ley de control de Slotine y Li (1987) [1] como control nominal  $\boldsymbol{\tau}_n$ , se tiene que

$$\boldsymbol{\tau}_n = \mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{g}(\mathbf{q}) - \mathbf{K}_v \mathbf{s}. \quad (4.4)$$

#### 4. ALGORITMO PROPUESTO

---

Por otro lado, para analizar la estabilidad del sistema aplicándole  $\tau_n$  se debe de obtener la dinámica del sistema en lazo cerrado con el control, esto se logra sustituyendo (4.4) en (3.1), lo que resulta en

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) &= \boldsymbol{\tau}_n \\ &= \mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{g}(\mathbf{q}) - \mathbf{K}_v \mathbf{s}, \end{aligned}$$

agrupando términos

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})(\ddot{\mathbf{q}} - \ddot{\mathbf{q}}_r) + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})(\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_r) + \mathbf{D}(\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_r) + \mathbf{g}(\mathbf{q}) - \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \mathbf{K}_v \mathbf{s} = \mathbf{0}$$

y utilizando (4.3) se tiene

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{s}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{s} + \mathbf{D}\mathbf{s} + \mathbf{K}_{Dv}\mathbf{s} = \mathbf{0}, \quad (4.5)$$

con  $\mathbf{K}_{Dv} = \mathbf{K}_v + \mathbf{D}$ . La ecuación (4.5) describe el comportamiento dinámico de  $\mathbf{s}$  y se puede ver con claridad que  $\mathbf{s} = \mathbf{0}$  es el único punto de equilibrio. Para mostrar que el resultado es global y asintóticamente estable (GAS), se propone la siguiente función positiva definida

$$V_s(\mathbf{s}) = \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{H}(\mathbf{q}) \mathbf{s} \quad (4.6)$$

cuya derivada resulta ser

$$\dot{V}_s(\mathbf{s}) = \mathbf{s}^T \mathbf{H}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{s}} + \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \dot{\mathbf{H}}(\mathbf{q}) \mathbf{s},$$

sustituyendo (4.5)

$$\begin{aligned} \dot{V}_s(\mathbf{s}) &= \mathbf{s}^T (-\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathbf{K}_{Dc}) \dot{\mathbf{s}} + \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \dot{\mathbf{H}}(\mathbf{q}) \mathbf{s} \\ &= -\mathbf{s}^T \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{s} - \mathbf{s}^T \mathbf{K}_{Dc} \dot{\mathbf{s}} + \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \dot{\mathbf{H}}(\mathbf{q}) \mathbf{s} \end{aligned}$$

y empleando la Propiedad 2.3.2 se llega a

$$\dot{V}_s(\mathbf{s}) = -\mathbf{s}^T \mathbf{K}_{Dc} \dot{\mathbf{s}} \leq -\lambda_{\min}(\mathbf{K}_{Dv}) \|\mathbf{s}\|^2. \quad (4.7)$$

Debido a la Propiedad 2.3.1 se tiene que

$$\lambda_{\min}(\mathbf{H}(\mathbf{q})) \|\mathbf{s}\|^2 \leq V_s(\mathbf{s}) \leq \lambda_{\max}(\mathbf{H}(\mathbf{q})) \|\mathbf{s}\|^2 \quad (4.8)$$

y debido a que las propiedades del Teorema A.1.1, tomado de Khalil (2002) [32], se satisfacen globalmente, entonces se puede decir que  $\mathbf{s} = \mathbf{0}$  es GAS.

Ahora bien, cuando las velocidades articulares no están disponibles, se puede emplear un observador, como por ejemplo, el de Nicosia y Tomei (1990) [19] que está dado por las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{q}}} &= \dot{\mathbf{q}} + k_D \mathbf{z} \\ \ddot{\hat{\mathbf{q}}} &= \mathbf{H}(\mathbf{q})^{-1} \left( -\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\hat{\mathbf{q}}}) \dot{\hat{\mathbf{q}}} + \boldsymbol{\tau} + \mathbf{K}_P \mathbf{z} - \mathbf{D} \dot{\hat{\mathbf{q}}} - \mathbf{g}(\mathbf{q}) \right), \end{aligned} \quad (4.9)$$

donde  $\mathbf{z} = \mathbf{q} - \hat{\mathbf{q}}$ ,  $k_D > 0$  y  $\mathbf{K}_P = \mathbf{K}_P^T > \mathbf{O}$ . Con el fin de conocer si este observador es apto para emplearse, se asume la dinámica desconocida y se plantea que solo se pueden estimar los parámetros mediante un control adaptable, entonces el observador definido en (4.9) queda como

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\mathbf{x}}}_1 &= \dot{\hat{\mathbf{q}}} = \dot{\mathbf{q}} + k_D \mathbf{z} \\ \dot{\hat{\mathbf{x}}}_2 &= \ddot{\hat{\mathbf{q}}} = \hat{\mathbf{H}}(\mathbf{q})^{-1} \left( -\tilde{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\tau} + \mathbf{K}_P \mathbf{z} - \hat{\mathbf{D}}\dot{\mathbf{q}} - \hat{\mathbf{g}}(\mathbf{q}) \right).\end{aligned}\quad (4.10)$$

Para obtener la dinámica del error y analizar sus propiedades de estabilidad, se deriva nuevamente  $\dot{\hat{\mathbf{x}}}_1$

$$\ddot{\hat{\mathbf{q}}} = \ddot{\mathbf{q}} + k_D \dot{\mathbf{z}} \quad (4.11)$$

y sustituyendo  $\dot{\hat{\mathbf{x}}}_2$  se llega a

$$\hat{\mathbf{H}}(\mathbf{q})\ddot{\hat{\mathbf{q}}} + \hat{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\hat{\mathbf{q}}} + \hat{\mathbf{D}}\dot{\hat{\mathbf{q}}} + \hat{\mathbf{g}}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} + \mathbf{K}_P \mathbf{z} + k_D \hat{\mathbf{H}}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{z}} \quad (4.12)$$

Combinando (4.12) con (2.6) se obtiene

$$\begin{aligned}\mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) &= \hat{\mathbf{H}}(\mathbf{q})\ddot{\hat{\mathbf{q}}} + \hat{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\hat{\mathbf{q}}})\dot{\hat{\mathbf{q}}} + \hat{\mathbf{D}}\dot{\hat{\mathbf{q}}} + \hat{\mathbf{g}}(\mathbf{q}) \\ &\quad - \mathbf{K}_P \mathbf{z} - k_D \hat{\mathbf{H}}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{z}}\end{aligned}\quad (4.13)$$

Debido a que se tiene  $\mathbf{H}(\mathbf{q}) = \hat{\mathbf{H}}(\mathbf{q}) - \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{q})$ ,  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \hat{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \tilde{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ ,  $\mathbf{D} = \hat{\mathbf{D}} - \tilde{\mathbf{D}}$  y  $\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \hat{\mathbf{g}}(\mathbf{q}) - \tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{q})$ , se llega a

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{z}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{z}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{z}} + \mathbf{K}_P \mathbf{z} + \underbrace{k_D \hat{\mathbf{H}}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{z}}}_{\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{Y}_e \tilde{\boldsymbol{\theta}} - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{z}}, \quad (4.14)$$

donde

$$\mathbf{Y}_e \left( \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}, \ddot{\hat{\mathbf{q}}} \right) \tilde{\boldsymbol{\theta}} = \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{q})\ddot{\hat{\mathbf{q}}} + \tilde{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\hat{\mathbf{q}}})\dot{\hat{\mathbf{q}}} + \tilde{\mathbf{D}}\dot{\hat{\mathbf{q}}} + \tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{q}). \quad (4.15)$$

De todo el procedimiento que se efectuó para obtener la ecuación de error (4.14) se puede llegar a las siguientes conclusiones

- Debe existir  $\hat{\mathbf{H}}^{-1}$ , pero ésto no asegura que  $\tilde{\mathbf{q}} \rightarrow \mathbf{0}$  ni  $\mathbf{z} \rightarrow \mathbf{0}$ .
- Debe garantizarse el funcionamiento correcto del control durante el periodo transitorio del estado observado.
- El término  $\boldsymbol{\alpha}$  de la ecuación (4.14) no se puede incluir en  $\mathbf{Y}_e$  debido a que depende de  $\dot{\mathbf{q}}$  ( $\dot{\mathbf{z}} = \dot{\mathbf{q}} - \dot{\hat{\mathbf{q}}}$ ).

Por lo anterior, se propone utilizar un observador similar al presentado en Artega (2003) [29], el cual está definido como

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\xi}} &= \mathbf{z} = \mathbf{q} - \hat{\mathbf{q}} \\ \dot{\hat{\mathbf{q}}} &= \dot{\mathbf{q}}_r + k_d(\mathbf{z} + \boldsymbol{\Lambda}_z \boldsymbol{\xi}) + \boldsymbol{\Lambda}_z \mathbf{z}\end{aligned}\quad (4.16)$$

#### 4. ALGORITMO PROPUESTO

---

donde  $k_d \in \mathfrak{R}_+$  es constante,  $\Lambda_z \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  es una matriz diagonal positiva definida,  $\hat{\mathbf{q}} \in \mathfrak{R}^n$  es el valor estimado de  $\mathbf{q}$  que se obtiene integrando  $\dot{\hat{\mathbf{q}}}$  en (4.16). Debido a que la ley de control de Slotine y Li (1987) [1] descrita en (4.4) no es implementable porque no se cuenta con las mediciones de  $\dot{\mathbf{q}}$ , se deben de llevar a cabo algunas modificaciones, las cuales se presentan a continuación

$$\begin{aligned}\tau_o &= \tau_n + \mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}_r - \mathbf{K}_v \mathbf{s}_o - \mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{K}_v \mathbf{s} \\ &= \mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_r)\dot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{g}(\mathbf{q}) - \mathbf{K}_v \mathbf{s}_o,\end{aligned}\quad (4.17)$$

con las siguientes definiciones de las variables

$$\ddot{\mathbf{q}}_r = \ddot{\mathbf{q}}_d - \Lambda(\dot{\mathbf{q}}_o - \dot{\mathbf{q}}_d) \quad (4.18)$$

$$\dot{\mathbf{q}}_o = \dot{\hat{\mathbf{q}}} - \Lambda_z \mathbf{z} \quad (4.19)$$

$$\mathbf{s}_o = \dot{\mathbf{q}}_o - \dot{\mathbf{q}}_r. \quad (4.20)$$

Ahora bien, para poder analizar las propiedades de convergencia de los errores de seguimiento y de observación, se define una variable de deslizamiento para el observador así como se efectuó en la ley de control (4.5)

$$\mathbf{r} = \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_o, \quad (4.21)$$

empleando  $\mathbf{z} = \mathbf{q} - \hat{\mathbf{q}}$  se tiene

$$\mathbf{r} = \dot{\mathbf{z}} + \Lambda_z \mathbf{z}. \quad (4.22)$$

De la misma forma en que se logró que los errores de seguimiento y sus derivadas convergieran a cero analizando el comportamiento de  $\mathbf{s}$ , si  $\mathbf{r}$  está acotada y tiende a cero, entonces  $\mathbf{z}$  y  $\dot{\mathbf{z}}$  también lo harán.

Para calcular la dinámica en lazo cerrado en términos de  $\mathbf{s}$  y de  $\mathbf{r}$ , primero se emplea la Propiedad 2.3.4:

$$\begin{aligned}\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_r)\dot{\mathbf{q}}_r &= \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_r)\dot{\mathbf{q}}_r - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}_r \\ &= \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_r)\dot{\mathbf{q}}_r - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_r)\dot{\mathbf{q}} \\ &= \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_r)(\dot{\mathbf{q}}_r - \dot{\mathbf{q}})\end{aligned}$$

para así poder obtener

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}_r = \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_r)\mathbf{s}. \quad (4.23)$$

Por otro lado, tomando en cuenta (4.2) y (4.22), las ecuaciones (4.18) y (4.20) se pueden reescribir como

$$\dot{\hat{\mathbf{q}}} = \ddot{\mathbf{q}}_r + \Lambda \mathbf{r} \quad (4.24)$$

$$\mathbf{s}_o = \mathbf{s} - \mathbf{r}. \quad (4.25)$$

Esto implica que la ley de control 4.17 se puede ver en términos de  $\tau_n$  definido en (4.4) como:

$$\tau_o = \tau_n + \mathbf{H}(\mathbf{q})\Lambda \mathbf{r} - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_r)\dot{\mathbf{s}} + \mathbf{K}_v \mathbf{r}. \quad (4.26)$$

Por lo que la dinámica en lazo cerrado para  $\mathbf{s}$  se obtiene de sustituir (4.26) en (3.1), esto es

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) &= \boldsymbol{\tau}_n + \mathbf{H}(\mathbf{q})\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{r} - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_r)\mathbf{s} + \mathbf{K}_v\mathbf{r} \\ \mathbf{H}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{s}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{s} + \mathbf{D}\mathbf{s} + \mathbf{K}_v\mathbf{s} &= \mathbf{H}(\mathbf{q})\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{r} - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_r)\mathbf{s} + \mathbf{K}_v\mathbf{r} \end{aligned} \quad (4.27)$$

Para poder analizar la estabilidad del observador en conjunto con esta ley de control, es necesario obtener la dinámica en lazo cerrado del observador a través de la variable de deslizamiento  $\mathbf{r}$ . Para ello se debe derivar  $\dot{\mathbf{q}}$  de (4.16), obteniendo

$$\ddot{\mathbf{q}} = \ddot{\mathbf{q}}_r + k_d(\dot{\mathbf{z}} + \boldsymbol{\Lambda}_z\mathbf{z}) + \boldsymbol{\Lambda}_{rmz}\dot{\mathbf{z}}.$$

Sustituyendo (4.22) se tiene

$$\ddot{\tilde{\mathbf{q}}} = \ddot{\mathbf{q}}_r + k_d\mathbf{r} + \boldsymbol{\Lambda}_z\dot{\mathbf{z}}. \quad (4.28)$$

Ahora, se deriva (4.19)

$$\ddot{\mathbf{q}}_o = \ddot{\tilde{\mathbf{q}}} - \boldsymbol{\Lambda}_z\dot{\mathbf{z}},$$

y se sustituye en (4.28)

$$\ddot{\mathbf{q}} - \ddot{\mathbf{q}}_r = \ddot{\mathbf{q}} - \ddot{\mathbf{q}}_o + k_d\mathbf{r},$$

de aquí se tiene entonces que

$$\dot{\mathbf{s}} = \dot{\mathbf{r}} + k_d\mathbf{r}. \quad (4.29)$$

Sustituyendo (4.29) en (4.27) se obtiene

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{r}} + \mathbf{H}(\mathbf{q})k_d\mathbf{r} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{s} + \mathbf{D}\mathbf{s} + \mathbf{K}_v\mathbf{s} = \mathbf{H}(\mathbf{q})\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{r} - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_r)\mathbf{s} + \mathbf{K}_v\mathbf{r}.$$

A continuación, se agrupan los términos semejantes llegando a la siguiente expresión

$$\dot{\mathbf{r}} + \mathbf{K}_H\mathbf{r} = \mathbf{B}\mathbf{s}, \quad (4.30)$$

donde

$$\mathbf{K}_H = k_d\mathbf{I} - \boldsymbol{\Lambda} - \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{K}_v \quad (4.31)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{q})(\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{D} + \mathbf{K}_v + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_r)). \quad (4.32)$$

#### 4.1.1. Acotamiento de los errores de seguimiento y de observación.

Ahora bien, para analizar las propiedades de estabilidad de la dinámica del control-observador, se considera el ulterior vector de estados para (4.27) y (4.30)

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{s} \\ \mathbf{r} \end{bmatrix}, \quad (4.33)$$

donde claramente se nota que  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  es el único punto de equilibrio; a pesar de que no es posible que se cumpla la estabilidad global, tal como sucede para el esquema

#### 4. ALGORITMO PROPUESTO

---

desarrollado en Nicosia y Tomei, (1990) [19], el análisis se debe restringir a una región de interés definida como

$$\mathcal{D} \triangleq \{\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^{2n} \mid \|\mathbf{x}\| \leq x_{\max}\}, \quad (4.34)$$

para una  $x_{\max}$  arbitrariamente grande que cumpla con  $0 < x_{\max} < \infty$ . Ahora, se debe mostrar que existe una región de atracción  $A \subset \mathcal{D}$  que se pueda hacer arbitrariamente grande y donde el origen  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  sea exponencialmente estable de forma semi-global. Por otro lado, es importante mostrar también que para cualquier condición inicial de los errores de seguimiento y de observación, siempre se pueden encontrar ganancias tales que  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}$ . De este modo, tomando en cuenta que (4.3) representa  $n$  sistemas lineales independientes de la forma

$$\dot{\tilde{q}}_i = -\lambda \tilde{q}_i + s_i, \quad (4.35)$$

donde  $\dot{\tilde{q}}_i$ ,  $\tilde{q}_i$ , y  $s_i$  son los  $i$ -ésimos elementos de  $\dot{\tilde{\mathbf{q}}}$ ,  $\tilde{\mathbf{q}}$  y  $\mathbf{s}$  respectivamente, y  $\lambda_i > 0$  es el elemento  $i$  (valor propio) de la diagonal de  $\mathbf{\Lambda}$ ; la solución de (4.35) [32] es

$$\tilde{q}_i(t) = \tilde{q}_i(0)e^{-\lambda_i t} + \int_0^t e^{-\lambda_i(t-\kappa)} s_i(\kappa) d\kappa. \quad (4.36)$$

Como se está estudiando el caso en el que  $\mathbf{s} \in \mathcal{D}$ , cada elemento si satisface la condición establecida en (4.34), esto es  $|s_i(t)| \leq x_{\max}$ , que implica a su vez lo siguiente

$$\begin{aligned} |\tilde{q}_i(t)| &= |\tilde{q}_i(0)e^{\lambda_i t} + \int_0^t e^{\lambda_i(t-\kappa)} s_i(\kappa) d\kappa| \\ &\leq |\tilde{q}_i(0)| + x_{\max} e^{\lambda_i t} \int_0^t e^{-\lambda_i \kappa} d\kappa \\ &= |\tilde{q}_i(0)| + x_{\max} \frac{1}{\lambda_i} (1 - e^{-\lambda_i t}) \\ &\leq |\tilde{q}_i(0)| + \frac{1}{\lambda_i} x_{\max}. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Ahora bien, tomando en cuenta que  $\|\tilde{\mathbf{q}}\| = \sqrt{|\tilde{q}_1|^2 + \dots + |\tilde{q}_n|^2} \leq |\tilde{q}_1|^2 + \dots + |\tilde{q}_n|^2$ , se puede concluir entonces que

$$\|\tilde{\mathbf{q}}\| \leq |\tilde{q}_1(0)| + \dots + |\tilde{q}_n(0)| + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} x_{\max} \triangleq e_{\max}, \quad (4.38)$$

mientras que de (4.3) se obtiene directamente

$$\begin{aligned} \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| &\leq \lambda_{\max}(\mathbf{\Lambda}) e_{\max} + \|\mathbf{s}\| \\ &\leq \lambda_{\max}(\mathbf{\Lambda}) e_{\max} + x_{\max} \triangleq e_{\text{vm}}. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Debido a que se asume que  $\dot{\mathbf{q}}_d$  es acotada, i.e.  $\|\dot{\mathbf{q}}_d\| \leq v_{\text{dm}}$  para alguna  $v_{\text{dm}}$  constante positiva para todo tiempo, de (4.39) se puede concluir que  $\dot{\mathbf{q}}$  está acotada por

$$\|\dot{\mathbf{q}}\| \leq v_{\text{dm}} + e_{\text{vm}} \triangleq v_{\text{max}}. \quad (4.40)$$

Para  $\dot{\mathbf{q}}_r$  se puede decir lo mismo, de tal forma que

$$\|\dot{\mathbf{q}}_r\| \leq v_{rm}. \quad (4.41)$$

De manera similar, se puede hacer un análisis para  $\mathbf{r}$  con el objetivo de mostrar que para cualquier  $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$ , existen constantes positivas tales que  $\|\mathbf{z}\| \leq \zeta$ ,  $\|\dot{\mathbf{z}}\| \leq \zeta_v$ ,  $\|\dot{\mathbf{q}}\| \leq v_{hm}$  y  $\|\dot{\mathbf{q}}_o\| \leq v_{om}$  se mantienen para todo tiempo.

Es fácil notar que  $\mathbf{q}$  y  $\hat{\mathbf{q}}$  deben permanecer acotadas debido a que  $\tilde{\mathbf{q}}$ ,  $\mathbf{z}$  y  $\mathbf{q}_d$  están acotadas en  $\mathcal{D}$ . Por este motivo, se puede dejar de asumir que los robots bajo análisis cuentan solo con articulaciones de rotación se están estudiando. Sin embargo, se seguirá con esta suposición por motivos de simplicidad.

#### 4.1.2. Análisis de estabilidad

A continuación, para poder aplicar el Teorema A.1.1 nuevamente y esto, a su vez, permita demostrar la estabilidad de las variables de deslizamiento  $\mathbf{s}$  y  $\mathbf{r}$  definidas con anterioridad pero la manera local, se debe considerar la siguiente función positiva definida

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{H}(\mathbf{q}) \mathbf{s} + \frac{1}{2} \mathbf{r}^T \mathbf{r}. \quad (4.42)$$

Se debe notar que la condición que se establece en (A.1), se mantiene si se emplea la Propiedad 2.3.1, esto es

$$k_1 \|\mathbf{x}\|^a \leq V(t, \mathbf{x}) \leq k_2 \|\mathbf{x}\|^a \quad (4.43)$$

con  $a = 2$  y

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{1}{2} \min\{\lambda_h, 1\} \\ k_2 &= \frac{1}{2} \max\{\lambda_H, 1\}, \end{aligned} \quad (4.44)$$

donde  $\lambda_h = \lambda_{\min}(\mathbf{H}(\mathbf{q}))$  y  $\lambda_H = \lambda_{\max}(\mathbf{H}(\mathbf{q}))$ .

Para mostrar que la condición (A.2) se cumple en  $\mathcal{D}$ , se debe derivar (4.42) a lo largo de (4.27) y (4.30), esto es

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}) &= \mathbf{s}^T \mathbf{H}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{s}} + \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \dot{\mathbf{H}}(\mathbf{q}) \mathbf{s} + \mathbf{r}^T \dot{\mathbf{r}} \\ &= \mathbf{s}^T \left( -\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{s} - \underbrace{(\mathbf{K}_v + \mathbf{D})}_{\mathbf{K}_{vD}} \mathbf{s} + \mathbf{H}(\mathbf{q}) \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{r} - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_r) \mathbf{s} + \mathbf{K}_v \mathbf{r} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \dot{\mathbf{H}}(\mathbf{q}) \mathbf{s} + \mathbf{r}^T (-\mathbf{K}_H \mathbf{r} + \mathbf{B} \mathbf{s}) \\ &= -\mathbf{s}^T \mathbf{K}_{vD} \mathbf{s} + \mathbf{s}^T \mathbf{H}(\mathbf{q}) \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{r} - \mathbf{s}^T \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_r) \mathbf{s} + \mathbf{s}^T \mathbf{K}_v \mathbf{r} \\ &\quad + \mathbf{r}^T \mathbf{B} \mathbf{s} - \mathbf{r}^T \mathbf{K}_H \mathbf{r}. \end{aligned} \quad (4.45)$$

---

#### 4. ALGORITMO PROPUESTO

---

Ahora, tomando en cuenta las ecuaciones (4.31), (4.32), (4.40) y (4.41), así como las Propiedades 2.3.1 y 2.3.3, se puede decir que si en  $\mathcal{D}$  se cumple lo siguiente

$$\beta_1 = k_c v_{\text{rm}} \quad (4.46)$$

$$\beta_2 = \lambda_{\text{H}} \lambda_{\text{max}}(\Lambda) + \lambda_{\text{max}}(\mathbf{K}_{\text{v}}) + \frac{1}{\lambda_{\text{h}}} (k_c (v_{\text{max}} + v_{\text{rm}}) + \lambda_{\text{max}}(\mathbf{K}_{\text{vD}})) \quad (4.47)$$

$$\beta_3 = \lambda_{\text{max}}(\Lambda) + \frac{1}{\lambda_{\text{h}}} \lambda_{\text{max}}(\mathbf{K}_{\text{v}}), \quad (4.48)$$

entonces (4.45) satisface que

$$\dot{V}(\mathbf{x}) \leq -(\lambda_{\text{min}}(\mathbf{K}_{\text{v}}) - \beta_1) \|\mathbf{s}\|^2 + \beta_2 \|\mathbf{s}\| \|\mathbf{r}\| - (k_{\text{d}} - \beta_3) \|\mathbf{r}\|^2. \quad (4.49)$$

Si se eligen a las ganancias  $k_3 > 0$ ,  $\lambda_{\text{min}}(\mathbf{K}_{\text{v}})$  y  $k_{\text{d}}$  de tal forma que

$$\lambda_{\text{min}}(\mathbf{K}_{\text{v}}) \geq k_3 + 1 + \beta_1 \quad (4.50)$$

$$k_{\text{d}} \geq k_3 + \frac{1}{4} \beta_2^2, \quad (4.51)$$

entonces, de (4.45), se tiene

$$\dot{V} \leq -k_3 \|\mathbf{s}\|^2 - \|\mathbf{r}\|^2 = -k_3 \|\mathbf{x}\|^2, \quad (4.52)$$

por lo que (A.2) se cumple y por consiguiente, de acuerdo al Teorema A.1.1, el origen  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  de (4.27) y (4.30) es *exponencialmente estable*. Asimismo, la región de atracción puede ser calculada trivialmente como

$$\mathcal{A} = \{\mathbf{x}(0) \in \mathfrak{R}^n \mid \|\mathbf{x}(0)\| < \sqrt{\frac{k_1}{k_2}} x_{\text{max}}\}, \quad (4.53)$$

con  $k_1$  y  $k_2$  definidos en (4.44). Esta región se puede hacer arbitrariamente grande eligiendo  $x_{\text{max}}$  arbitrariamente grande también y por lo tanto,  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  puede considerarse exponencialmente estable de manera semi-global.

Como se mencionó con anterioridad, la estabilidad exponencial de  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  implica que  $\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}, \mathbf{z}$  y  $\dot{\mathbf{z}} \rightarrow \mathbf{0}$ . Por otro lado, de (4.39) se puede ver que una condición inicial grande de  $\|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}(0)\|$  necesita de igual forma una  $x_{\text{max}}$  grande para que el análisis sea congruente; lo mismo aplica para  $\|\dot{\mathbf{z}}(0)\|$ . Esto último hace relevante el hecho de que se debe de hacer arbitrariamente grande a  $x_{\text{max}}$ , eligiendo las ganancias de acuerdo a (4.50) y a (4.51).

Ahora bien, debido a que se desconocen los parámetros dinámicos del sistema, se debe plantear una ley de adaptación para que la ley de control establecida en (4.17) y analizada en esta sección pueda ser implementable.

## 4.2. Análisis y obtención de ley de adaptación

En esta sección se planteará la manera en que se obtuvo la ley de adaptación y el análisis de su estabilidad.



Si se asume que las velocidades articulares no están disponibles y el vector de parámetros definido en el modelo (3.1) no se conoce con precisión (o se desconoce por completo), entonces se debe recurrir al empleo de un vector de parámetros estimados  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  en lugar del que contiene los valores reales  $\boldsymbol{\theta}$ , de tal forma que la ley de control (4.17) pueda ser definida como

$$\boldsymbol{\tau}_e = \hat{\mathbf{H}}(\mathbf{q})\ddot{\hat{\mathbf{q}}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\hat{\mathbf{q}}})\dot{\hat{\mathbf{q}}} + \hat{\mathbf{D}}\dot{\hat{\mathbf{q}}} + \hat{\mathbf{g}}(\mathbf{q}) - \mathbf{K}_v \mathbf{s}_o. \quad (4.54)$$

Empleando  $\tilde{(\cdot)} = (\hat{\cdot}) - (\cdot)$ , la forma equivalente es

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}_e = & \mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\tilde{\mathbf{q}}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \mathbf{D}\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) - \mathbf{K}_v \mathbf{s}_o \\ & + \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{q})\ddot{\tilde{\mathbf{q}}} + \tilde{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \tilde{\mathbf{D}}\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{q}). \end{aligned} \quad (4.55)$$

Definiendo

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_a \tilde{\boldsymbol{\theta}} & \triangleq \mathbf{Y}(\mathbf{q}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}, \ddot{\tilde{\mathbf{q}}})\tilde{\boldsymbol{\theta}} \\ & = \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{q})\ddot{\tilde{\mathbf{q}}} + \tilde{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \tilde{\mathbf{D}}\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{q}), \end{aligned} \quad (4.56)$$

como se hizo en (4.26), la ley de control (4.55) puede reescribirse como

$$\boldsymbol{\tau}_e = \boldsymbol{\tau}_n + \mathbf{H}(\mathbf{q})\boldsymbol{\Lambda} \mathbf{r} - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{s} + \mathbf{K}_v \mathbf{r} + \mathbf{Y}_a \tilde{\boldsymbol{\theta}}, \quad (4.57)$$

donde  $\tilde{\boldsymbol{\theta}} \in \mathbb{R}^p$  es el vector que contiene los errores paramétricos, *i.e.*  $\tilde{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}$ . Ahora bien, considerando (4.27), la dinámica para  $\mathbf{s}$  en lazo cerrado está definida como

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{s}} + \mathbf{K}_{vD} \mathbf{s} = \mathbf{H}(\mathbf{q})\boldsymbol{\Lambda} \mathbf{r} - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{s} + \mathbf{K}_v \mathbf{r} + \mathbf{Y}_a \tilde{\boldsymbol{\theta}}. \quad (4.58)$$

La dinámica en lazo cerrado del observador respecto a  $\mathbf{r}$  se obtiene de forma similar a como se obtuvo (4.30), llegando así a la siguiente expresión

$$\dot{\mathbf{r}} + \mathbf{K}_H \mathbf{r} = \mathbf{B} \mathbf{s} + \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{Y}_a \tilde{\boldsymbol{\theta}}, \quad (4.59)$$

con  $\mathbf{K}_H$  y  $\mathbf{B}$  definidos en (4.31) y (4.32).

#### 4.2.1. Acotamiento de los errores paramétricos

Para estudiar las propiedades del controlador-observador, primeramente se hace la suposición de que  $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$  está acotado, esto ocurre ya sea por el diseño de la ley de control adaptable o sea debido a que  $\boldsymbol{\theta}$  es un valor constante nominal (que puede incluir  $\hat{\boldsymbol{\theta}} \equiv \mathbf{0}$ ). Entonces, el siguiente lema se puede establecer

**Lema 4.2.1** Considérese la ley de control (4.54) y el observador (4.16) en lazo cerrado con la dinámica del robot establecida en (3.1). Entonces, siempre que

$$\|\tilde{\boldsymbol{\theta}}\| \leq \theta_{\max} < \infty, \quad \forall t,$$

una combinación de ganancias siempre podrá ser hallada de tal forma que el estado  $\mathbf{x}$  definido en (4.33) se vuelve finalmente acotado en un tiempo finito  $T \geq 0$  por un límite arbitrariamente pequeño  $b_f > 0$ . Mas aún, los errores de seguimiento y de observación  $\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}, \mathbf{z}$  y  $\dot{\mathbf{z}}$  podrán ser arbitrariamente pequeños conforme  $t \rightarrow \infty$ .

△

La demostración del Lema 4.2.1 se muestra en el siguiente análisis de estabilidad.

#### 4.2.2. Análisis de estabilidad

Considérese nuevamente (4.33) y (4.34), esto es

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{s} \\ \mathbf{r} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{D} = \{\mathbf{x} \in \mathcal{R}^{2n} \mid \|\mathbf{x}\| \leq x_{\max}\}, \quad (4.60)$$

donde además, se debe proponer una función positiva definida  $V(\mathbf{x})$  que satisfaga la condición (A.3) del Teorema A.1.2 que se presenta en el Apéndice A.1.

Para la demostración del Lema 4.2.1 se consideran

$$\begin{aligned} \alpha_1(\|\mathbf{x}\|) &= k_1 \|\mathbf{x}\|^2 \\ \alpha_2(\|\mathbf{x}\|) &= k_2 \|\mathbf{x}\|^2. \end{aligned} \quad (4.61)$$

Para mostrar que la condición que se establece en (A.4) también se mantiene para alguna  $\mu > 0$ , se debe de tomar la derivada de  $V(\mathbf{x})$  definida en (4.42),

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{H}(\mathbf{q}) \mathbf{s} + \frac{1}{2} \mathbf{r}^T \mathbf{r},$$

a lo largo de (4.58) y (4.59), esto es

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \dot{\mathbf{H}}(\mathbf{q}) \mathbf{s} + \mathbf{s}^T \mathbf{H}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{s}} + \mathbf{r}^T \dot{\mathbf{r}} \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \dot{\mathbf{H}}(\mathbf{q}) \mathbf{s} + \mathbf{s}^T \left( -\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{s} - \mathbf{K}_{vD} \mathbf{s} + \mathbf{H}(\mathbf{q}) \Lambda \mathbf{r} - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_r) \mathbf{s} + \mathbf{k}_v \mathbf{r} + \mathbf{Y}_a \tilde{\boldsymbol{\theta}} \right) \\ &\quad + \mathbf{r}^T \left( -\mathbf{K}_H \mathbf{r} + \mathbf{B} \mathbf{s} + \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{Y}_a \tilde{\boldsymbol{\theta}} \right) \\ &= -\mathbf{s}^T \mathbf{K}_{vD} \mathbf{s} + \mathbf{s}^T \mathbf{H}(\mathbf{q}) \Lambda \mathbf{r} - \mathbf{s}^T \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_r) \mathbf{s} + \mathbf{s}^T \mathbf{k}_v \mathbf{r} + \mathbf{s}^T \mathbf{Y}_a \tilde{\boldsymbol{\theta}} \\ &\quad + \mathbf{r}^T \mathbf{K}_H \mathbf{r} + \mathbf{r}^T \mathbf{B} \mathbf{s} + \mathbf{r}^T \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{Y}_a \tilde{\boldsymbol{\theta}} \end{aligned}$$

de (4.52) se satisface lo siguiente

$$\dot{V}(\mathbf{x}) \leq k_3 \|\mathbf{x}\|^2 + (\mathbf{s}^T + \mathbf{r}^T \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{q})) \mathbf{Y}_a^T \tilde{\boldsymbol{\theta}}. \quad (4.62)$$

Ahora, para (4.62) es necesario que exista un límite superior para  $\mathbf{Y}_a = \mathbf{Y}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_r, \ddot{\mathbf{q}}_r)$  contenido en  $\mathcal{D}$ , *i.e.* debe existir  $y_{am} > 0$  de tal manera que  $\|\mathbf{Y}_a\| \leq y_{am} < \infty$  para toda  $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$ . Así, (4.62) podrá cumplir entonces con

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}) &\leq -k_3\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{x}\| \left( 1 + \frac{1}{\lambda_h} y_{am} \theta_{\max} \right) \\ &\leq -\frac{1}{2}k_3\|\mathbf{x}\|^2 - \|\mathbf{x}\| \left\{ \frac{1}{2}k_3\|\mathbf{x}\| - \left( 1 + \frac{1}{\lambda_h} \right) y_{am} \theta_{\max} \right\}, \end{aligned} \quad (4.63)$$

donde  $\lambda_h = \lambda_{\min}(\mathbf{H}(\mathbf{q}))$ . Por lo que, cuando sucede que

$$\|\mathbf{x}\| \geq \frac{2}{k_3} \left( 1 + \frac{1}{\lambda_h} \right) y_{am} \theta_{\max} \triangleq \mu, \quad (4.64)$$

entonces, se satisface lo siguiente

$$\dot{V}(\mathbf{x}) \leq -k_3\|\mathbf{x}\|^2 \triangleq -W_3(\mathbf{x}). \quad (4.65)$$

Para poder cumplir con la condición (A.5) se debe tener que

$$\mu < \sqrt{\frac{k_1}{k_2}} v, \quad (4.66)$$

para alguna  $v < x_{\max}$  (véase ecuación (4.53)). Esto se satisface siempre y cuando

$$\frac{2}{v} \sqrt{\frac{k_2}{k_1}} \left( 1 + \frac{1}{\lambda_h} \right) y_{am} \theta_{\max} < k_3. \quad (4.67)$$

Se debe destacar que las condiciones establecidas en (4.50) y (4.51) no se contraponen con (4.67), ya que se había establecido solamente que  $k_3 > 0$ . Además, la condición (A.6) se cumple en la región  $\mathcal{A}$  definida en (4.53).

De acuerdo con el Teorema A.1.2, existe un tiempo finito  $0 \leq T$  de tal manera que, desde  $T \leq t$  el estado  $\mathbf{x}$  será finalmente acotado por

$$\|\mathbf{x}\| < \sqrt{\frac{k_2}{k_1}} \mu \triangleq b_f. \quad (4.68)$$

Por último, considerando (4.37) para obtener el comportamiento desde  $t \leq T$ , se debe de tener entonces que

$$|\tilde{q}_i(t)| \leq |\tilde{q}_i(T)| e^{-\lambda_i(t-T)} + \frac{1}{\lambda_i} b_f, \quad (4.69)$$

esto implica que  $\|\tilde{\mathbf{q}}(t)\|$  estará finalmente acotado por

$$\|\tilde{\mathbf{q}}(t)\| \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} b_f \quad (4.70)$$

conforme  $t \rightarrow \infty$ . Para  $\mathbf{z}$  y  $\dot{\mathbf{z}}$  se puede realizar un análisis similar y se llegará a que están finalmente acotados como se estableció en el Lema 4.2.1. Esta prueba permite concluir que al elegir arbitrariamente grande a  $k_3$ , se logrará hacer a  $\mu$  (así como  $b_f$ ) arbitrariamente pequeña.

△

### 4.2.3. Esquema adaptable propuesto

De forma inicial, se asume que para cada elemento  $\theta_i$  del vector de parámetros  $\boldsymbol{\theta}$ , con  $i = 1, \dots, p$ , se conocen las cotas superiores e inferiores que no son únicas,  $\theta_{Mi}$  y  $\theta_{mi}$  respectivamente, pero que satisfacen  $\theta_{mi} \leq \theta_i \leq \theta_{Mi}$ .

La suposición anterior es razonable debido a que al menos se puede conocer el signo del parámetro  $\theta_i$ , el cual puede considerársele positivo. Para este caso, el límite inferior debe de ser entonces 0 y el límite superior puede ser considerado arbitrariamente grande. Sin embargo,  $\theta_{mi}$  puede llegar a ser un valor negativo si como caso particular se define  $\theta_{mi} = -\theta_{Mi}$  para un valor arbitrariamente grande de  $\theta_{Mi} > 0$ . Se propone un control adaptable similar a los descritos en [2] y en [29].

Ahora bien, la ley de adaptación propuesta es la que se presenta a continuación

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}(t) = -\boldsymbol{\Gamma} (\beta \mathbf{w}(t) + \mathbf{Y}_a^T \mathbf{s}_o + \mathbf{f}_b), \quad (4.71)$$

donde  $\theta_{mi} \leq \hat{\theta}_i \leq \theta_{Mi}$ ,  $\boldsymbol{\Gamma} \in \mathbb{R}^{p \times p}$  una matriz de ganancia positiva definida con elementos  $\gamma_i > 0$ ;  $\beta > 0$  y  $\mathbf{w}(t) \in \mathbb{R}^p$  que se definirá más adelante. Para cada  $i$ -ésimo elemento de  $\mathbf{f}_b \in \mathbb{R}^p$ , con  $i = 1, \dots, p$ , se tiene lo siguiente

$$f_{bi} = \text{sign}(\tilde{\theta}_i) \rho_i \delta_i |\beta w_i + \mathbf{y}_{ai}^T \mathbf{s}_o|, \quad (4.72)$$

con  $\rho_i > 1$ ,  $w_i$  como el  $i$ -ésimo elemento de  $\mathbf{w}$ ,  $\mathbf{y}_{ai}^T$  como el  $i$ -ésimo renglón de  $\mathbf{Y}_a^T$  y  $\tilde{\theta}_i$  como el elemento del vector de error paramétrico,  $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$ . Es importante destacar que  $f_{bi}$  requiere de conocer el signo de  $\tilde{\theta}_i$ , que generalmente es desconocido a menos que  $\hat{\theta}_i \leq \theta_{mi}$  ó  $\hat{\theta}_i \geq \theta_{Mi}$ . Por ello, para que (4.72) pueda ser implementable, cada valor  $\delta_i$  está definida como

$$\delta_i = \begin{cases} \frac{\theta_{2i} - \hat{\theta}_i}{\theta_{2i} - \theta_{1i}}, & \text{if } \theta_{1i} \leq \hat{\theta}_i < \theta_{2i} \\ 0, & \text{if } \theta_{2i} \leq \hat{\theta}_i \leq \theta_{3i} \\ \frac{\hat{\theta}_i - \theta_{3i}}{\theta_{4i} - \theta_{3i}}, & \text{if } \theta_{3i} < \hat{\theta}_i < \theta_{4i} \end{cases} \quad (4.73)$$

con  $\theta_{1i} < \theta_{2i} \leq \theta_{mi} < \theta_{Mi} \leq \theta_{3i} < \theta_{4i}$ . Así,  $f_{bi} \equiv 0$  si el signo de  $\tilde{\theta}_i$  no está disponible. Con lo dicho, se puede establecer el siguiente lema.

**Lema 4.2.2** Considérese la ley de adaptación (4.71)–(4.72). Si  $\theta_{1i} \leq \hat{\theta}_i(0) \leq \theta_{4i}$ , entonces  $\theta_{1i} \leq \hat{\theta}_i(t) \leq \theta_{4i}$  se cumple para todo tiempo.

△

Para demostrar que esto es cierto, primero se debe hacer notar que

$$\dot{\tilde{\theta}}_i = \dot{\hat{\theta}}_i = -\gamma_i (\beta w_i + \mathbf{y}_{ai}^T \mathbf{s}_o + f_{bi}). \quad (4.74)$$

Luego, se define la siguiente función positiva definida

$$V_\theta = \frac{1}{2\gamma_i} \tilde{\theta}_i^2, \quad (4.75)$$

cuya derivada a lo largo de (4.74) es

$$\begin{aligned}\dot{V}_\theta &= \frac{1}{\gamma_i} \tilde{\theta}_i \dot{\tilde{\theta}}_i \\ &= -\tilde{\theta}_i (\beta w_i + \mathbf{y}_{ai}^T \mathbf{s}_o + f_{bi}) \\ &\leq -(\rho_i \delta_i - 1) |\tilde{\theta}_i| \cdot |\beta w_i + \mathbf{y}_{ai}^T \mathbf{s}_o|.\end{aligned}\quad (4.76)$$

Si  $\theta_{2i} \leq \hat{\theta}_i \leq \theta_{3i}$  entonces  $\delta_i = 0$  y  $\hat{\theta}_i$  evidentemente está acotada. Ahora bien, si  $\hat{\theta}_i < \theta_{2i}$  ó  $\hat{\theta}_i > \theta_{3i}$ , entonces  $\delta_i > 0$ . Debido a la restricción sobre la condición inicial, el peor caso posible puede ser  $\hat{\theta}_i = \theta_{1i}$  ó  $\hat{\theta}_i = \theta_{4i}$ , de tal manera que (4.76) se vuelve

$$\dot{V}_\theta \leq -(\rho_i - 1) |\tilde{\theta}_i| \cdot |\beta w_i + \mathbf{y}_{ai}^T \mathbf{s}_o|. \quad (4.77)$$

Como  $\rho_i > 1$ , entonces  $\dot{V}_\theta < 0$ , lo que implica que  $|\tilde{\theta}_i|$  vaya disminuyendo su valor y, por tanto, debe de cumplirse que  $\theta_{1i} \leq \tilde{\theta}_i(t) \leq \theta_{4i}$ . Esto permite concluir la prueba.

△

Por otro lado, con el fin de diseñar  $\mathbf{w}(t)$  de (4.71), se deben establecer algunas definiciones. Primero, se empleará el filtro que se propuso en Tang, 1994 [2]

$$\boldsymbol{\tau}_f = W(s)\boldsymbol{\tau} = \mathbf{Y}_f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\boldsymbol{\theta}, \quad (4.78)$$

con

$$W(s) = \frac{\lambda_f}{s + \lambda_f}, \quad (4.79)$$

y  $\lambda_f > 0$ . El regresor filtrado  $\mathbf{Y}_f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathfrak{R}^{n \times p}$  está dado por

$$\mathbf{Y}_f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = W(s)\mathbf{Y}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) \quad (4.80)$$

y su propósito es eliminar el término de aceleración  $\ddot{\mathbf{q}}$ . Ahora, debido a que no se dispone de  $\dot{\mathbf{q}}$ , se debe definir un regresor filtrado estimado como

$$\hat{\mathbf{Y}}_f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_o) \triangleq \mathbf{Y}_f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_o), \quad (4.81)$$

con  $\hat{\mathbf{Y}}_f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_o) \in \mathfrak{R}^{n \times p}$ . El error de predicción se define como

$$\boldsymbol{\epsilon} \triangleq \hat{\mathbf{Y}}_f \hat{\boldsymbol{\theta}} - \mathbf{Y}_f \boldsymbol{\theta} = \hat{\mathbf{Y}}_f \hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\tau}_f, \quad (4.82)$$

donde  $\boldsymbol{\epsilon} \in \mathfrak{R}^n$ . De manera parecida a como se hizo en Arteaga (2003) [29] y Tang–Arteaga (1994) [2], se define

$$\dot{\mathbf{w}} = -\lambda \mathbf{w} + \gamma \hat{\mathbf{Y}}_f^T \boldsymbol{\epsilon} + \mathbf{Z} \dot{\boldsymbol{\theta}}, \quad \mathbf{w}(0) = \mathbf{0}, \quad (4.83)$$

$$\dot{\mathbf{Z}} = -\lambda \mathbf{Z} + \gamma \hat{\mathbf{Y}}_f^T \mathbf{Y}_f, \quad \mathbf{Z}(0) = \mathbf{O}, \quad (4.84)$$

con  $\mathbf{Z} \in \mathfrak{R}^{p \times p}$ .

#### 4. ALGORITMO PROPUESTO

---

El uso de estos términos es bastante útil y eso se mostrará a continuación. Es pertinente iniciar con que la solución de (4.84) para las condiciones iniciales dadas de acuerdo a lo que se presenta en Khalil, (2002) [32] es

$$\mathbf{Z}(t) = \gamma \int_0^t e^{-\lambda(t-\kappa)} \hat{\mathbf{Y}}_f^T(\kappa) \hat{\mathbf{Y}}_f(\kappa) d\kappa = \mathbf{Z}^T. \quad (4.85)$$

Ahora bien, para poder resolver (4.83) se hará lo que en seguida se presenta. Primero debe definirse

$$\tilde{\mathbf{Y}}_f(t) = \hat{\mathbf{Y}}_f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_0) - \mathbf{Y}_f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (4.86)$$

donde  $\tilde{\mathbf{Y}}_f(t) \in \mathfrak{R}^{n \times p}$ , de tal forma que (4.83) pueda ser reescrita empleando  $\dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}} = \dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}}$  y (4.82), resultando en

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{w}} &= -\lambda \mathbf{w} + \gamma \hat{\mathbf{Y}}_f^T \hat{\mathbf{Y}}_f \hat{\boldsymbol{\theta}} - \gamma \hat{\mathbf{Y}}_f^T \mathbf{Y}_f \boldsymbol{\theta} + \mathbf{Z} \dot{\boldsymbol{\theta}} \\ &= -\lambda \mathbf{w} + \gamma \hat{\mathbf{Y}}_f^T (\hat{\mathbf{Y}}_f \hat{\boldsymbol{\theta}} - \mathbf{Y}_f \boldsymbol{\theta}) + \mathbf{Z} \dot{\boldsymbol{\theta}} \\ &= -\lambda \mathbf{w} + \gamma \hat{\mathbf{Y}}_f^T (\hat{\mathbf{Y}}_f \hat{\boldsymbol{\theta}} - (\hat{\mathbf{Y}}_f - \tilde{\mathbf{Y}}_f) \boldsymbol{\theta}) + \mathbf{Z} \dot{\boldsymbol{\theta}} \\ &= -\lambda \mathbf{w} + \gamma \hat{\mathbf{Y}}_f^T (\hat{\mathbf{Y}}_f \hat{\boldsymbol{\theta}} - \hat{\mathbf{Y}}_f \boldsymbol{\theta} + \tilde{\mathbf{Y}}_f \boldsymbol{\theta}) + \mathbf{Z} \dot{\boldsymbol{\theta}} \\ &= -\lambda \mathbf{w} + \gamma \hat{\mathbf{Y}}_f^T \hat{\mathbf{Y}}_f \tilde{\boldsymbol{\theta}} + \gamma \hat{\mathbf{Y}}_f^T \tilde{\mathbf{Y}}_f \boldsymbol{\theta} + \mathbf{Z} \dot{\boldsymbol{\theta}}. \end{aligned} \quad (4.87)$$

Si se reescribe (4.87) como

$$\dot{\mathbf{w}} = -\lambda \mathbf{w} + \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \quad (4.88)$$

donde

$$\mathbf{u}_1 = \gamma \hat{\mathbf{Y}}_f^T \hat{\mathbf{Y}}_f \tilde{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{Z} \dot{\boldsymbol{\theta}} \quad (4.89)$$

$$\mathbf{u}_2 = \gamma \hat{\mathbf{Y}}_f^T \tilde{\mathbf{Y}}_f \boldsymbol{\theta}, \quad (4.90)$$

entonces la dinámica de  $\dot{\mathbf{w}}$  en (4.88) se puede ver como la de un filtro lineal con la suma de dos señales como entrada, y por tanto, necesariamente la salida debe ser la suma de las respectivas respuestas a cada entrada calculadas de forma independiente, *i.e.*

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2. \quad (4.91)$$

Para el análisis de su estabilidad, el comportamiento de la salida  $\mathbf{w}_2$  se obtendrá a partir de

$$\dot{\mathbf{w}}_2 = -\lambda \mathbf{w}_2 + \gamma \hat{\mathbf{Y}}_f^T \tilde{\mathbf{Y}}_f \boldsymbol{\theta}. \quad (4.92)$$

Pero para la salida  $\mathbf{w}_1$ , la respuesta se puede calcular resolviendo

$$\dot{\mathbf{w}}_1 = -\lambda \mathbf{w}_1 + \mathbf{u}_1, \quad (4.93)$$

aunque para ello, la siguiente relación se necesitará

$$e^{\lambda t} \dot{\mathbf{w}}_1 + \lambda e^{\lambda t} \mathbf{w}_1 = \gamma e^{\lambda t} \mathbf{Z}_f \tilde{\boldsymbol{\theta}} + e^{\lambda t} \mathbf{Z} \dot{\boldsymbol{\theta}}, \quad (4.94)$$

donde  $\mathbf{Z}_f \triangleq \hat{\mathbf{Y}}_f^T \hat{\mathbf{Y}}_f \in \mathfrak{R}^{p \times p}$ . De esta forma, utilizando (4.85) se llega a

$$e^{\lambda t} \dot{\mathbf{w}}_1 + \lambda e^{\lambda t} \mathbf{w}_1 = \gamma e^{\lambda t} \mathbf{Z}_f \tilde{\boldsymbol{\theta}} + \gamma \int_0^t e^{\lambda \kappa} \mathbf{Z}_f d\kappa \dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}}, \quad (4.95)$$

con

$$e^{\lambda t} \mathbf{Z} = \gamma \int_0^t e^{\lambda \kappa} \mathbf{Z}_f.$$

De (4.95) se obtiene lo siguiente

$$\frac{d}{dt} \{e^{\lambda t} \mathbf{w}_1\} = \frac{d}{dt} \{e^{\lambda t} \mathbf{Z} \tilde{\boldsymbol{\theta}}\}, \quad (4.96)$$

y considerando de (4.83) que las condiciones iniciales son iguales a cero, entonces

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{Z} \tilde{\boldsymbol{\theta}}, \quad (4.97)$$

por consiguiente (4.91) resulta ser

$$\mathbf{w} = \mathbf{Z} \tilde{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{w}_2. \quad (4.98)$$

Debido a (4.87), este resultado es válido sin importar que  $\dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}} = \dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}$ , es decir, que es independiente de la ley de adaptación con la que se obtiene  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ .

**Observación 4.2.1** La norma de  $\tilde{\mathbf{Y}}_f = \hat{\mathbf{Y}}_f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}_o) - \mathbf{Y}_f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  está acotada por

$$\|\tilde{\mathbf{Y}}_f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}_o)\| \leq y_{\text{fm}} \|\mathbf{r}\| \quad (4.99)$$

en la región  $\mathcal{D}$ , con  $0 < y_{\text{fm}} < \infty$ . Una forma para calcular  $y_{\text{fm}}$  puede ser la siguiente; pero antes, es importante destacar que  $\mathbf{Y}_f$  y  $\hat{\mathbf{Y}}_f$  dependen de  $\mathbf{q}$ . Además, en el peor de los casos cada elemento  $y_f(k, l)$  de  $\tilde{\mathbf{Y}}_f$ , donde  $k = 1, \dots, n$  y  $l = 1, \dots, p$ , puede tomar la siguiente forma

$$y_f(k, l) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_{ij}^{kl}(\mathbf{q}) (\dot{q}_{oi} \dot{q}_{oj} - \dot{q}_i \dot{q}_j), \quad (4.100)$$

con todas o algunas funciones  $f_{ij}^{kl}(\mathbf{q})$  iguales a cero, constantes, trigonométricas o una combinación de las anteriores, i.e. están acotadas. Asimismo, se debe de notar que los términos sin velocidad son cancelados pero por simplicidad, el posible aspecto de las restas lineales de la forma  $\dot{q}_i - \dot{q}_{oi} = r_i$  es omitido, con  $r_i$  como el  $i$ -ésimo término

de  $\mathbf{r}$  (con  $i = 1, \dots, n$ ). Esta última relación es empleada para modificar (4.100), de manera que se puede obtener lo siguiente

$$\begin{aligned}
 \dot{q}_{oi}\dot{q}_{oj} - \dot{q}_i\dot{q}_j &= \dot{q}_{oi}\dot{q}_{oj} - (\dot{q}_{oi} + \dot{q}_i - \dot{q}_{oi})\dot{q}_j \\
 &= \dot{q}_{oi}\dot{q}_{oj} - (\dot{q}_{oi} + r_i)\dot{q}_j \\
 &= \dot{q}_{oi}(\dot{q}_{oj} - \dot{q}_j) - r_i\dot{q}_j \\
 &= -(\dot{q}_{oi}r_j + \dot{q}_jr_i).
 \end{aligned} \tag{4.101}$$

De (4.101) se puede concluir que siempre va a ser posible encontrar algunas matrices  $\mathbf{Y}_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}_o) \in \mathfrak{R}^{n \times p}$  de tal forma que se logre cumplir con que

$$\tilde{\mathbf{Y}}_f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}_o) = \sum_{i=1}^n \mathbf{Y}_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}_o)r_i. \tag{4.102}$$

Así, se puede llegar a la siguiente desigualdad

$$\|\tilde{\mathbf{Y}}_f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}_o)\| \leq \sum_{i=1}^n \|\mathbf{Y}_i\| \|r_i\| \leq \|\mathbf{r}\| \sum_{i=1}^n \|\mathbf{Y}_i\|. \tag{4.103}$$

Entonces (4.99) se consigue cumplir tomando en cuenta el valor máximo de la norma de cada  $\mathbf{Y}_i$  en  $\mathcal{D}$ . Finalmente se realiza la suma para poder obtener  $y_{\text{fm}}$ .

△

### 4.3. Análisis del control adaptable propuesto en conjunto con el observador

A través de la demostración del Teorema que se presenta a continuación, se mostrarán las propiedades de estabilidad que se lograron obtener del esquema adaptable propuesto en conjunto con el observador elegido.

**Teorema 4.3.1** *Considérese una trayectoria deseada  $\mathbf{q}_d$  continua y acotada, con velocidad y aceleración también acotadas. Entonces, una combinación de control con observador y además con ganancias-parámetros adaptables, siempre se podrán encontrar de tal manera que*



1. El estado  $\mathbf{x}$  definido en (4.33), el vector de parámetros estimados  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ , así como cualquier variable de la dinámica en lazo cerrado de (4.58) y (4.59) permanecerán acotados  $\forall t \geq 0$ . Además, los errores de seguimiento y de observación podrán hacerse arbitrariamente pequeños conforme  $t \rightarrow \infty$
2. Si existe  $t_1 \geq 0$  y  $\alpha_1 > 0$ , tal que

$$\mathbf{Z}(t) = \gamma \int_0^t e^{-\lambda(t-\kappa)} \hat{\mathbf{Y}}_f(\kappa) \hat{\mathbf{Y}}_f(\kappa) d\kappa \geq \alpha_1 \mathbf{I}, \quad \forall t \geq t_1, \quad (4.104)$$

entonces,  $\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}, \mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}$  y  $\tilde{\boldsymbol{\theta}} \rightarrow \mathbf{0}$  en tiempo finito.

### Demostración

1. La demostración para este punto se obtiene de emplear directamente el Lema 4.2.2 y posteriormente el Lema 4.2.1, para ello se debe tomar en cuenta las condiciones establecidas en (4.50), (4.51) y (4.67) junto con una región  $\mathcal{D}$  apropiada como la establecida en (4.34).
2. Primeramente, se asume sin pérdida de generalidad que  $t \geq t_1$  y por consiguiente (4.104) se cumple, *i.e.* el tiempo inicial para el siguiente análisis será  $t = t_1$ , mientras que por 1. se garantiza que todas las variables se encontrarán acotadas siempre que  $0 \leq t < t_1$ .

Ahora bien, se procede a definir un vector de errores en lazo cerrado expandido

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{w}_2 \\ \tilde{\boldsymbol{\theta}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{s} \\ \mathbf{r} \\ \mathbf{w}_2 \\ \tilde{\boldsymbol{\theta}} \end{bmatrix}, \quad (4.105)$$

junto con una región de interés apropiada

$$\mathcal{D}_y \triangleq \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{2n+2p} \mid \|\mathbf{y}\| \leq y_{\max}\}, \quad (4.106)$$

con una variable  $y_{\max} > 0$  que puede ser definida arbitrariamente grande.

La dinámica de  $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$  se puede describir empleando (4.71) y (4.98) como

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}} = -\Gamma \left( \beta \mathbf{Z} \tilde{\boldsymbol{\theta}} + \beta \mathbf{w}_2 + \mathbf{Y}_a^T \mathbf{s}_o + \mathbf{f}_b \right). \quad (4.107)$$

A continuación, para demostrar la estabilidad del esquema desarrollado en este trabajo se considera la siguiente función positiva definida

$$V_y(\mathbf{y}) = \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{H}(\mathbf{q}) \mathbf{s} + \frac{1}{2} \mathbf{r}^T \mathbf{r} + \frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T \Gamma^{-1} \tilde{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{2} \mathbf{w}_2^T \mathbf{w}_2, \quad (4.108)$$

que satisface la condición (A.1) del Teorema A.1.1 con  $a = 2$ ,

$$\begin{aligned} k'_1 &= \frac{1}{2} \min \left\{ \lambda_h, 1, \frac{1}{\lambda_{\max}(\Gamma)} \right\}, \\ k'_2 &= \frac{1}{2} \max \left\{ \lambda_H, 1, \frac{1}{\lambda_{\min}(\Gamma)} \right\}, \end{aligned} \quad (4.109)$$

y cuya derivada a lo largo de (4.58), (4.59), (4.92) y (4.107) es

$$\dot{V}_y(\mathbf{y}) = \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \dot{\mathbf{H}}(\mathbf{q}) \mathbf{s} + \mathbf{s}^T \mathbf{H}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{s}} + \mathbf{r}^T \dot{\mathbf{r}} + \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}} + \mathbf{w}_2^T \dot{\mathbf{w}}_2 \quad (4.110)$$

de (4.62) se tiene

$$\begin{aligned} \dot{V}_y(\mathbf{y}) &\leq -k_3 \|\mathbf{x}\|^2 + (\mathbf{s}^T + \mathbf{r}^T \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{q})) \mathbf{Y}_a^T \tilde{\boldsymbol{\theta}} - \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T (\beta \mathbf{Z} \tilde{\boldsymbol{\theta}} + \beta \mathbf{w}_2 + \mathbf{Y}_a^T \mathbf{s}_o + \mathbf{f}_b) \\ &\quad + \mathbf{w}_2^T (-\lambda \mathbf{w}_2 \gamma \hat{\mathbf{Y}}_f^T \tilde{\mathbf{Y}}_f + \boldsymbol{\theta}) \end{aligned} \quad (4.111)$$

empleando (4.25) se tiene que

$$\begin{aligned} \dot{V}_y(\mathbf{y}) &\leq -k_3 \|\mathbf{x}\|^2 + (\mathbf{s}^T + \mathbf{r}^T \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{q})) \mathbf{Y}_a^T \tilde{\boldsymbol{\theta}} - \beta \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T \mathbf{Z} \tilde{\boldsymbol{\theta}} - \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T \beta \mathbf{w}_2 - \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T \mathbf{Y}_a^T (\mathbf{s} - \mathbf{r}) \\ &\quad - \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T \mathbf{f}_b - \mathbf{w}_2^T \lambda \mathbf{w}_2 + \gamma \mathbf{w}_2^T \hat{\mathbf{Y}}_f^T \tilde{\mathbf{Y}}_f \boldsymbol{\theta} \\ &\leq -k_3 \|\mathbf{x}\|^2 + \mathbf{r}^T (\mathbf{I} + \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{q})) \mathbf{Y}_a^T \tilde{\boldsymbol{\theta}} - \beta \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T \mathbf{Z} \tilde{\boldsymbol{\theta}} - \beta \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T \mathbf{w}_2 - \lambda \|\mathbf{w}_2\|^2 \\ &\quad + \gamma \mathbf{w}_2^T \hat{\mathbf{Y}}_f^T \tilde{\mathbf{Y}}_f \boldsymbol{\theta}, \end{aligned} \quad (4.112)$$

en donde el hecho de que  $-\tilde{\boldsymbol{\theta}}^T \mathbf{f}_b \leq 0$  se empleó.

Además,  $\|\mathbf{Y}_a\| \leq y_{am}$  se cumple en  $\mathcal{D}_y$  como anteriormente se estableció. Aunado a lo anterior, también debe existir una constante  $y_{hm} > 0$  tal que  $\|\hat{\mathbf{Y}}_f\| \leq y_{hm}$  se cumple en  $\mathcal{D}_y$ . Por otra parte, se tiene que  $\|\boldsymbol{\theta}\| \equiv \theta < \infty$ , y entonces, tomando en cuenta la Propiedad 2.3.1, (4.99) y (4.104), la desigualdad (4.112) resulta ser

$$\begin{aligned} \dot{V}_y(\mathbf{y}) &\leq -k_3 \|\mathbf{x}\|^2 + \left(1 + \frac{1}{\lambda_h}\right) y_{am} \|\mathbf{r}\| \|\tilde{\boldsymbol{\theta}}\| - \beta \alpha_1 \|\tilde{\boldsymbol{\theta}}\|^2 - \beta \|\tilde{\boldsymbol{\theta}}\| \|\mathbf{w}_2\| - \lambda \|\mathbf{w}_2\|^2 \\ &\quad + \gamma \|\mathbf{w}_2\| \|\mathbf{r}\| y_{hm} y_{fm} \theta. \end{aligned} \quad (4.113)$$

De forma equivalente a como se hizo en (4.50) y (4.51), unas condiciones más restrictivas para este caso son las siguientes

$$\lambda_{\min}(\mathbf{K}_v) \geq k_3 + 1 + \beta_1 + k'_3 \quad (4.114)$$

$$\begin{aligned} k_d &\geq k_3 + \beta_3 + \frac{1}{4} \beta_2^2 + k'_3 + \frac{1}{4} \left( \left(1 + \frac{1}{\lambda_h}\right) y_{am} \right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{4} (\gamma y_{hm} y_{fm} \theta) \end{aligned} \quad (4.115)$$

donde  $k_3$  sigue satisfaciendo (4.67) y  $k'_3$  es una constante positiva. Asimismo, se hace la suposición de que lo siguiente se cumple

$$\beta \geq \frac{2 + k'_3}{\alpha_1} \quad (4.116)$$

$$\lambda \geq \frac{1}{4}\beta^2 + 1 + k'_3, \quad (4.117)$$

y entonces, (4.113) satisface con

$$\begin{aligned} \dot{V}_y(\mathbf{y}) \leq & -k_3\|\mathbf{x}\|^2 - k'_3\|\mathbf{x}\|^2 - \frac{1}{4} \left( \left(1 + \frac{1}{\lambda_h}\right) y_{\text{am}} \right)^2 \|\mathbf{r}\|^2 \\ & + \left(1 + \frac{1}{\lambda_h}\right) y_{\text{am}}\|\mathbf{r}\|\|\tilde{\boldsymbol{\theta}}\| - \|\tilde{\boldsymbol{\theta}}\|^2 - \frac{1}{4} (\gamma y_{\text{hm}} y_{\text{fm}} \theta)^2 \|\mathbf{r}\|^2 \\ & + \gamma y_{\text{hm}} y_{\text{fm}} \theta \|\mathbf{w}_2\| \|\mathbf{r}\| - \|\mathbf{w}_2\|^2 - \|\boldsymbol{\theta}\|^2 + \beta \|\tilde{\boldsymbol{\theta}}\| \|\mathbf{w}_2\| \\ & - \frac{1}{4} \beta^2 \|\mathbf{w}_2\|^2 - k'_3 \|\tilde{\boldsymbol{\theta}}\|^2 - k'_3 \|\mathbf{w}_2\|^2. \end{aligned} \quad (4.118)$$

Finalmente, satisfaciendo (4.114)–(4.117), se tiene que

$$\dot{V}_y(\mathbf{y}) \leq -k'_3 \|\mathbf{y}\|^2, \quad (4.119)$$

esto implica que la condición (A.2) del Teorema A.1.1 se cumple en  $\mathcal{D}_y$ , lo que a su vez significa que el origen  $\mathbf{y} = \mathbf{0}$  de la dinámica en lazo cerrado de (4.58), con (4.59), junto con (4.92) y (4.107) es exponencialmente estable; y esto a su vez implica que  $\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}, \mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}$  y  $\tilde{\boldsymbol{\theta}} \rightarrow \mathbf{0}$  en tiempo finito.

△



## Resultados de simulación

---

En este capítulo se presentan las simulaciones realizadas para demostrar que el algoritmo propuesto funciona como se espera. Se hace una comparación con dos algoritmos adaptables que tienen disponibles las velocidades articulares. Al finalizar, se hace un análisis de los resultados considerando las propiedades que se obtuvieron en el capítulo anterior.

### 5.1. Algoritmos utilizados

Con el objetivo de mostrar que el algoritmo desarrollado en este trabajo logra compensar la ausencia de mediciones de velocidad articular para los algoritmos adaptables, se hizo la comparación de su desempeño con dos algoritmos que cuentan con la medición de cada  $\dot{q}_i$ , con  $i = 1, 2, 3$ .

#### 5.1.1. Algoritmo adaptable de Slotine y Li, (1987)

El algoritmo desarrollado en el trabajo mencionado tiene la ventaja de lograr que los errores de seguimiento converjan a cero asintóticamente, la desventaja que se presenta es que para la implementación del algoritmo, se requiere de tener disponibles las velocidades articulares. Por esto último, las pruebas realizadas y mostradas a continuación se hacen bajo la suposición de que se puede medir  $\dot{\mathbf{q}}$ , esto presenta una ventaja sobre el algoritmo propuesto pero se espera que su desempeño sea similar o que incluso el propuesto funcione mejor que el planteado por Slotine y Li [1].

Las ecuaciones que describen a este algoritmo son las siguientes

$$\boldsymbol{\tau} = -\mathbf{K}_s \mathbf{s} + \mathbf{Y}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}_r, \ddot{\mathbf{q}}_r) \hat{\boldsymbol{\theta}} \quad (5.1)$$

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}} = \boldsymbol{\Gamma}_s \mathbf{Y}^T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}_r, \ddot{\mathbf{q}}_r) \mathbf{s}, \quad (5.2)$$

## 5. RESULTADOS DE SIMULACIÓN

---

con

$$\dot{\mathbf{q}}_r = \dot{\mathbf{q}}_d - \mathbf{\Lambda}_e \tilde{\mathbf{q}} \quad (5.3)$$

$$\mathbf{s} = \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_r, \quad (5.4)$$

y donde las matrices cumplen con lo siguiente:  $\mathbf{\Lambda}_e = \mathbf{\Lambda}_e^T > \mathbf{O}$ ,  $\mathbf{K}_s > \mathbf{O}$ ,  $\mathbf{\Gamma}_s > \mathbf{O}$ .

### 5.1.2. Algoritmo adaptable de Tang y Arteaga (1994)

En el trabajo de Tang y Arteaga (1994) [2], se presentan varias leyes de adaptación de acuerdo a ciertos casos expuestos, pero el que se decidió implementar para la prueba de comparación fue el siguiente

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{K}_s \mathbf{s} - \mathbf{Y}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}) \hat{\boldsymbol{\theta}} \quad (5.5)$$

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}} = -\delta \mathbf{g} - \mathbf{\Gamma}_1 \mathbf{Y}^T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}) \mathbf{s}, \quad (5.6)$$

con

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{q}}_d - \mathbf{\Lambda}_q \tilde{\mathbf{q}} \quad (5.7)$$

$$\dot{\mathbf{g}} = -\lambda_g \mathbf{g} - \delta \mathbf{Z} \mathbf{g} + \gamma_2 \mathbf{Y}_f^T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \boldsymbol{\epsilon} - \mathbf{\Gamma}_1 \mathbf{Z} \mathbf{Y}^T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}) \mathbf{s} \quad \mathbf{g}(0) = \mathbf{0} \quad (5.8)$$

$$\dot{\mathbf{Z}} = -\lambda_g \mathbf{Z} + \gamma_2 \mathbf{Y}_f^T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{Y}_f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad \mathbf{Z}(0) = \mathbf{O} \quad (5.9)$$

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{Y}_f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\tau}_f, \quad (5.10)$$

y donde la variable de deslizamiento  $\mathbf{s}$  es la misma que está definida en (5.4). Además, las variables  $\boldsymbol{\tau}_f$  y  $\mathbf{Y}_f$  son señales filtradas del par y el regresor, respectivamente, y se definen a continuación

$$\boldsymbol{\tau}_f = \frac{\lambda_f}{s + \lambda_f} \boldsymbol{\tau} \quad (5.11)$$

$$\mathbf{Y}_f = \frac{\lambda_f}{s + \lambda_f} \mathbf{Y}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}). \quad (5.12)$$

Este algoritmo asegura que los errores de seguimiento converjan a cero de forma exponencial aún con una señal que puede no poseer la propiedad de excitación persistente (*EP*); en este trabajo también se garantiza que los errores de seguimiento y de estimación paramétrica logran tener un comportamiento suave y continuo.

Al igual que el algoritmo de Slotine y Li (1987) [1], este control requiere de conocer las velocidades articulares para poder asegurar las propiedades mencionadas anteriormente; de la misma manera se hace la suposición de que en las pruebas se cuenta con las mediciones de  $\dot{\mathbf{q}}$  y se averiguará si el algoritmo propuesto tiene un desempeño parecido o mejor que este esquema de control.

## 5.2. Prueba de regulación

Para esta prueba, cada posición articular se llevó a la  $\mathbf{q}_d$  constante

$$\mathbf{q}_d = \begin{bmatrix} 20 \\ 70 \\ -80 \end{bmatrix} [^\circ], \quad (5.13)$$

desde la posición inicial  $\mathbf{q}(0) = [0 \ 90 \ -90]^T [^\circ]$ . Las ganancias de cada controlador fueron elegidas de forma independiente, debido a que se buscaba obtener el mejor desempeño en cada esquema, ya que al sintonizarlos con las mismas ganancias los errores de seguimiento de los algoritmos restantes no lograron converger a cero como se deseaba e incluso llegaron a divergir.

### 5.2.1. Algoritmo propuesto

En este esquema se requirió de definir los valores de  $\theta_{ij}$ , con  $i = 1, \dots, 4$  y  $j = 1, \dots, p$ , para obtener (4.73). Dichos valores fueron los siguientes

$$\begin{aligned} \theta_{1i} &= -0.0001 \\ \theta_{2i} &= 0.0 \\ \theta_{3i} &= 10.0 \theta_{ni} \\ \theta_{4i} &= 10.1 \theta_{ni}. \end{aligned}$$

El motivo por el cual se eligieron estos valores, fue siguiendo la idea de que  $\theta_{mi} = 0$  y  $\theta_{Mi} = 10 \theta_{ni}$ , con  $\theta_{ni}$  definido como el valor nominal, dichos valores aparecen en la Tabla 3.5 ( $\theta_{ni} = \varrho_i$ , para este sistema  $i = 1, \dots, 18$ ).

Para el control propuesto definido en (4.54) junto con el observador (4.16), las ganancias elegidas para la prueba de seguimiento de la señal contante definida en (5.13) fueron elegidas como

$$\mathbf{K}_v = \begin{bmatrix} 40 & 0 & 0 \\ 0 & 110 & 0 \\ 0 & 0 & 75 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Lambda}_z = \begin{bmatrix} 170 & 0 & 0 \\ 0 & 170 & 0 \\ 0 & 0 & 171 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} 60 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 90 \end{bmatrix}, \quad (5.14)$$

con  $\gamma = 0.1$ ,  $\rho = 2.5$ ,  $\beta = 5.5$ ,  $\lambda = 125$ ,  $\lambda_f = 70$ ,  $k_d = 350$  y  $\mathbf{\Gamma}$  es la matriz diagonal cuyos valores están constituidos por los elementos que se presentan en la Tabla 5.1.

### 5.2.2. Algoritmo Slotine y Li

Para el algoritmo de [1], las ganancias elegidas fueron las siguientes

$$\mathbf{K}_s = \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 120 & 0 \\ 0 & 0 & 110 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Lambda}_e = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{bmatrix}, \quad (5.15)$$

## 5. RESULTADOS DE SIMULACIÓN

---

$\gamma_{1,1} = 2 \times 10^{-5}$	$\gamma_{2,2} = 1 \times 10^{-5}$	$\gamma_{3,3} = 5 \times 10^{-7}$
$\gamma_{4,4} = 21 \times 10^{-6}$	$\gamma_{5,5} = 1 \times 10^{-6}$	$\gamma_{6,6} = 1 \times 10^{-5}$
$\gamma_{7,7} = 25 \times 10^{-6}$	$\gamma_{8,8} = 0.15$	$\gamma_{9,9} = 0.0007$
$\gamma_{10,10} = 0.0009$	$\gamma_{11,11} = 2.0$	$\gamma_{12,12} = 0.031$
$\gamma_{13,13} = 0.32$	$\gamma_{14,14} = 0.05$	$\gamma_{15,15} = 0.019$
$\gamma_{16,16} = 0.2$	$\gamma_{17,17} = 4.05$	$\gamma_{18,18} = 0.5$

**Tabla 5.1:** Ganancias de  $\Gamma$  para el algoritmo propuesto en el caso de regulación.

$\Gamma_s = \text{diag}\{1 \times 10^{-5}, 1 \times 10^{-5}, 5 \times 10^{-7}, 21 \times 10^{-6}, 1 \times 10^{-6}, 1 \times 10^{-5}, 15 \times 10^{-6}, 0.45, 0.0007, 0.0009, 2, 0.031, 0.32, 0.101, 0.019, 0.2, 25, 25\}$ .

### 5.2.3. Algoritmo Tang y Arteaga

Finalmente, para el esquema adaptable trabajado de [2] las ganancias empleadas fueron

$$\mathbf{K}_s = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Lambda}_q = \begin{bmatrix} 55 & 0 & 0 \\ 0 & 85 & 0 \\ 0 & 0 & 70 \end{bmatrix}, \quad (5.16)$$

con  $\delta = 0.001$ ,  $\gamma_2 = 0.005$ ,  $\lambda_g = 20$ ,  $\lambda_f = 15$  y  $\mathbf{\Gamma}_1 = \text{diag}\{0.001, 0.001, 0.01, 0.007, 0.01, 0.001, 0.0002, 0.8, 1.8, 3.1, 0.1, 0.01, 10.08, 0.101, 1.02, 1.05, 30.5, 10.1\}$ .

### 5.2.4. Resultados de simulación

En este apartado se presentan las gráficas obtenidas al haber realizado simulaciones para la tarea de seguimiento de la señal constante definida en (5.13), considerando un tiempo de muestreo  $T = 0.001$  [s].

La posición deseada fue elegida de tal forma que las fuerzas gravitacionales no ayudaran al esfuerzo de control con el movimiento de las dos últimas articulaciones. Además, esta  $\mathbf{q}_d$  se seleccionó para que no se presentara alguna singularidad que alterara el resultado a obtener.

En la Figura 5.1 se pueden observar las trayectorias articulares que cada control adaptable logró obtener aplicándolo sobre el sistema. El algoritmo de Slotine y Li [1] presentó un menor sobrepaso y aparentó lograr la convergencia de los errores de seguimiento y de velocidad antes que los otros dos algoritmos. Sin embargo, el esquema propuesto consiguió que los errores convergieran a cero antes que los otros dos, ya que los errores en estado permanente de Tang y Arteaga [2] y Slotine–Li convergieron a cero después de que lo hiciera el algoritmo presentado en este trabajo.

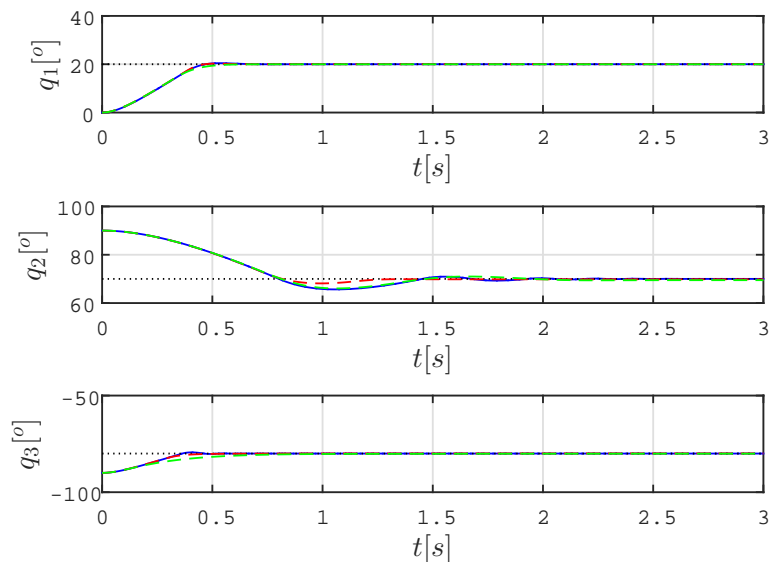


La Figura 5.2 muestra que las velocidades articulares de la segunda y tercera articulación del esquema propuesto oscilan antes de converger a cero debido a que sobre los dos últimos eslabones actúa la fuerza de gravedad, por lo que para poder compensar este efecto la ganancia  $\Lambda$  tuvo que ser mayor para estas articulaciones, induciendo un poco este comportamiento oscilante. Aún con esta situación, su comportamiento fue similar al del esquema de Tang–Arteaga a pesar de que los esquemas con los que se está haciendo la comparación del control-observador desarrollado poseen la medición de las velocidades articulares.

Los errores de observación que se pueden apreciar en la Figura 5.3 (a) convergieron antes de que lo hicieran los de seguimiento. La primera articulación, el error de observación convergió en  $t = 0.5$  [s], el error  $z_2$  convergió en  $t = 1.0$  [s] y  $z_3$  lo hizo en  $t = 0.4$  [s], todos estos errores convergieron entre 0.2 y 1 segundos antes que  $e_i$ , con  $i = 1, 2, 3$ .

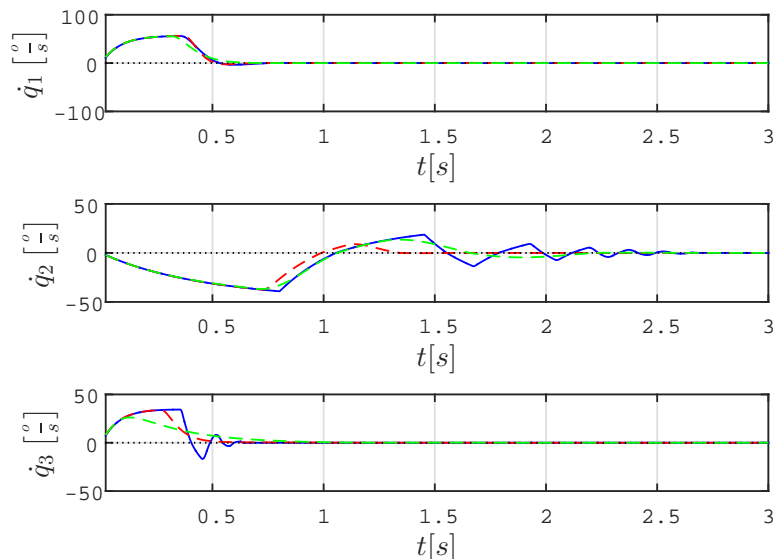
La velocidad observada  $\dot{z}$  mostrada en la misma Figura 5.3 (b), presenta el mismo comportamiento que el de la velocidad real que se generó con el algoritmo propuesto, como se puede ver en la Figura 5.2, esto quiere decir que después de que los errores  $z$  convergieron a cero, el observador pudo estimar la velocidad real de manera satisfactoria.

Las Figuras 5.4 a 5.6 muestran el comportamiento de los errores de estimación que logró la parte adaptable del control desarrollado en este trabajo comparándolo con los otros dos algoritmos. La estimación paramétrica del control presentado por Tang

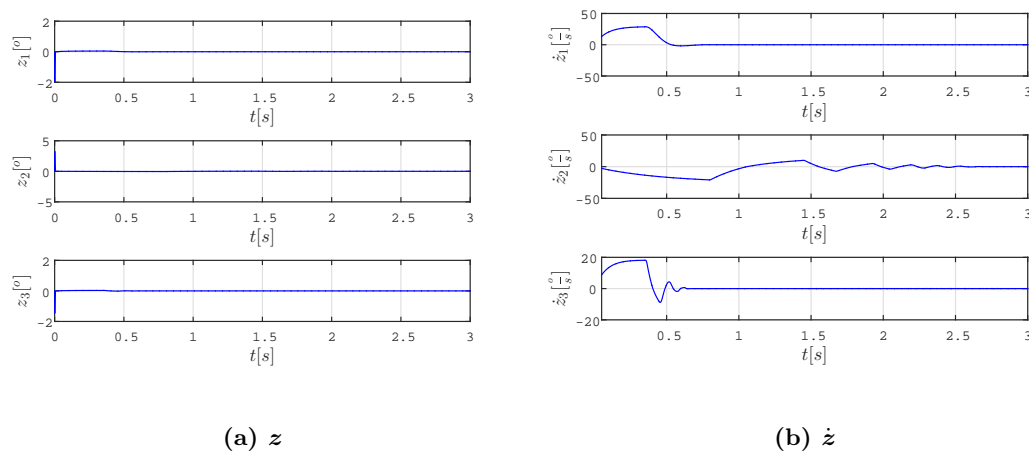


**Figura 5.1:** Regulación: Posición articular. Algoritmo propuesto (- -), Algoritmo de Tang y Arteaga [2] (- · -), Algoritmo de Slotine y Li [1] (· · ·) y valor deseado (· · ·).

## 5. RESULTADOS DE SIMULACIÓN



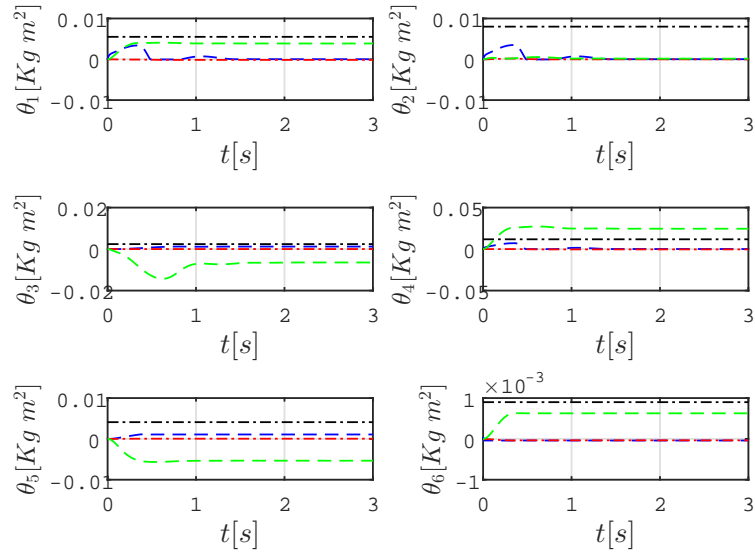
**Figura 5.2:** Regulación: Velocidad articular. Algoritmo propuesto (---), Algoritmo de Tang y Arteaga [2] (- · -), Algoritmo de Slotine y Li [1] (—) y valor deseado (···).



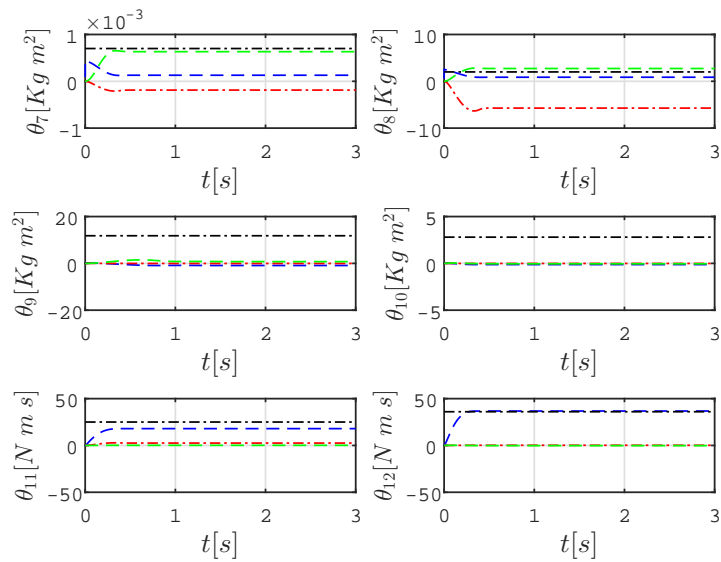
**Figura 5.3:** Regulación: Error de observación (a) y error de velocidad observada (b).

y Arteaga fue mejor estimando los parámetros relacionados con la matriz de inercia. Sin embargo, el esquema propuesto logró mejores resultados al estimar los parámetros relacionados con las fuerzas de gravedad y de fricción.

La inexactitud de esta estimación era de esperarse debido a que la señal empleada



**Figura 5.4:** Regulación: Parámetros estimados. Algoritmo propuesto (- -), Algoritmo de Tang y Arteaga [2] (- · -), Algoritmo de Slotine y Li [1] (· · ·) y valor real (- · - ·).



**Figura 5.5:** Regulación: Parámetros estimados. Algoritmo propuesto (- -), Algoritmo de Tang y Arteaga [2] (- · -), Algoritmo de Slotine y Li [1] (· · ·) y valor real (- · - ·).

no cumplió con la condición de ser de excitación suficiente; dicha condición es necesaria para lograr la convergencia del vector  $\hat{\theta}$  a cero para los algoritmos de Tang–Arteaga y el propuesto. Asimismo, como el esquema de Slotine y Li requiere de una condición más exigente de la señal a seguir (excitación persistente), no fue extraño que la estimación de los parámetros no fuera igual al vector de los parámetros verdaderos.

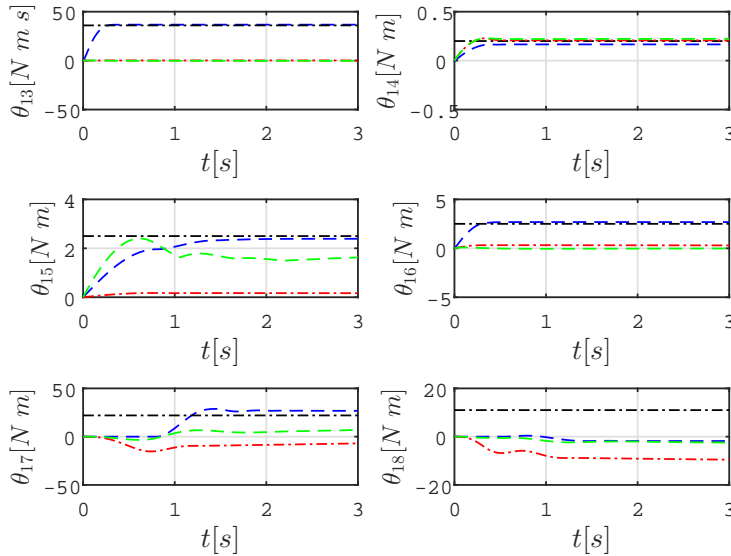
En la Figura 5.7 se pueden ver los pares que cada esquema de control requirió para poder lograr su objetivo. Es claro que en un inicio se saturaron las señales de control a un valor preestablecido de seguridad, pero para la segunda y tercera articulaciones, una vez que los errores  $\tilde{\mathbf{q}}$  y  $\mathbf{z}$  convergieron a cero, los pares de control se mantuvo en 5.0 [N] y  $\pm 3.0$  [N] para las dos últimas articulaciones respectivamente.

### 5.3. Prueba de seguimiento

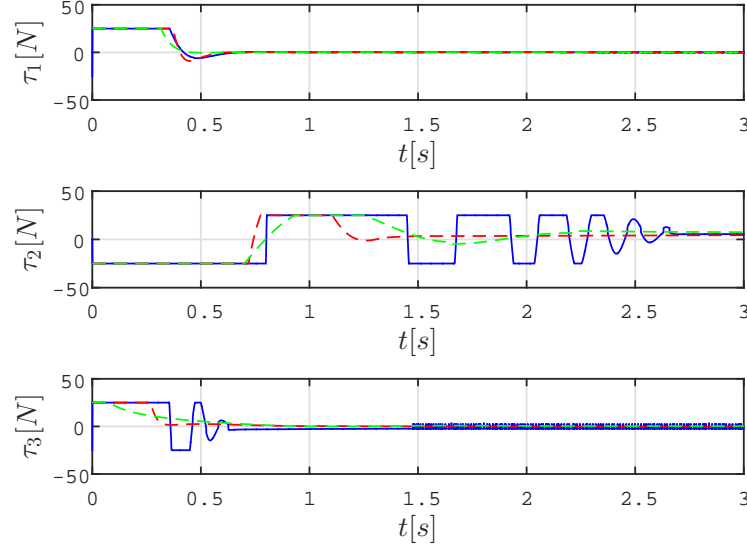
Para la prueba que se presenta a continuación, la trayectoria deseada que se planteó seguir estuvo definida como

$$\mathbf{q}_d = \begin{bmatrix} 5 \sin(t) + 5 \sin(2t) + 2.5 \sin(3t) \\ 15 \sin(t) + 2.5 \sin(3t) + 3 \sin(2t) + 90 \\ 10 \sin(t) + 2 \sin(2t) + 3 \sin(3t) - 90 \end{bmatrix} \text{ [}^\circ\text{]}. \quad (5.17)$$

Esta señal fue elegida para intentar generar la condición de excitación persistente pero sin saturar los voltajes aplicados a cada articulación del robot.



**Figura 5.6:** Regulación: Parámetros estimados. Algoritmo propuesto (- -), Algoritmo de Tang y Arteaga [2] (- -), Algoritmo de Slotine y Li [1] (- -) y valor real (---).



**Figura 5.7:** Regulación. Pares obtenidos con: Algoritmo propuesto (- -), Algoritmo de Tang y Arteaga [2] (- · -), Algoritmo de Slotine y Li [1] (—).

### 5.3.1. Algoritmo propuesto

El esquema propuesto fue sintonizado con las siguientes ganancias:  $\gamma = 0.1$ ,  $\rho = 2.5$ ,  $\beta = 5.5$ ,  $\lambda = 125$ ,  $\lambda_f = 70$ ,  $k_d = 500$ , la matriz diagonal  $\mathbf{\Gamma}$  está conformada por los valores que se presentan en la Tabla 5.2. Finalmente las matrices  $\mathbf{K}_v$ ,  $\mathbf{\Lambda}_z$  y  $\mathbf{\Lambda}$  fueron elegidas como

$$\mathbf{K}_v = \begin{bmatrix} 40 & 0 & 0 \\ 0 & 80 & 0 \\ 0 & 0 & 75 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Lambda}_z = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 110 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} 60 & 0 & 0 \\ 0 & 80 & 0 \\ 0 & 0 & 70 \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

### 5.3.2. Algoritmo Slotine–Li

Para el algoritmo de Slotine y Li [1] las ganancias fueron nuevamente sintonizadas para obtener un mejor comportamiento que el presentado con las mismas ganancias definidas en 5.15, de esta manera, finalmente se emplearon

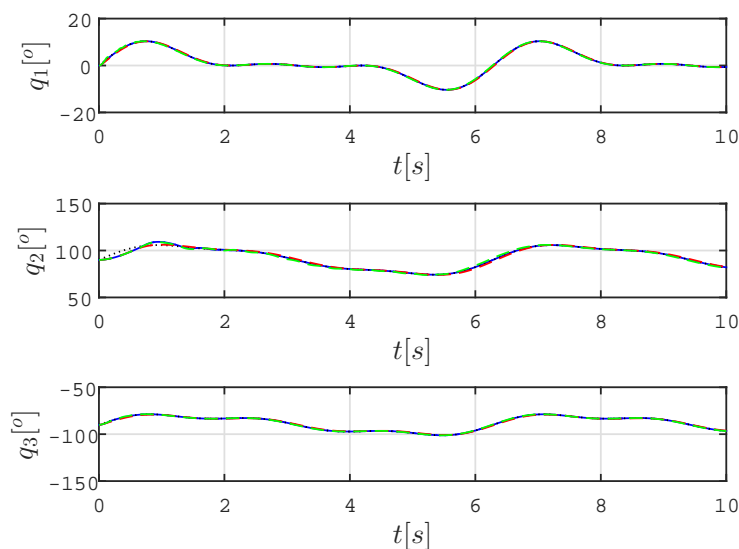
$$\mathbf{K}_s = \begin{bmatrix} 95 & 0 \\ 0 & 115 & 0 \\ 0 & 0 & 110 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Lambda}_e = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 6.5 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}, \quad (5.19)$$

## 5. RESULTADOS DE SIMULACIÓN

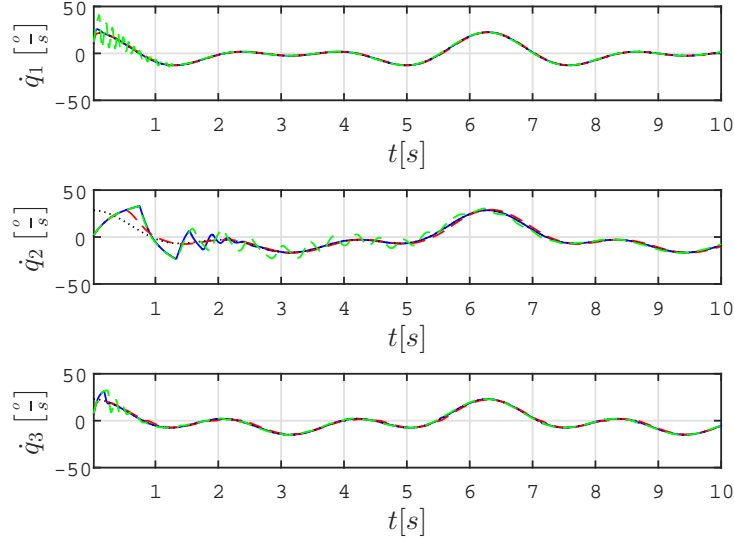
$\gamma_{1,1} = 21 \times 10^{-6}$	$\gamma_{2,2} = 17 \times 10^{-6}$	$\gamma_{3,3} = 85 \times 10^{-7}$
$\gamma_{4,4} = 0.0011$	$\gamma_{5,5} = 0.001$	$\gamma_{6,6} = 0.0012$
$\gamma_{7,7} = 0.0017$	$\gamma_{8,8} = 2.5$	$\gamma_{9,9} = 0.7$
$\gamma_{10,10} = 0.9$	$\gamma_{11,11} = 47.0$	$\gamma_{12,12} = 4.9$
$\gamma_{13,13} = 25.0$	$\gamma_{14,14} = 0.21$	$\gamma_{15,15} = 0.089$
$\gamma_{16,16} = 1.45$	$\gamma_{17,17} = 50.0$	$\gamma_{18,18} = 5.5$

**Tabla 5.2:** Ganancias de  $\Gamma$  para el algoritmo propuesto en el caso de seguimiento.

$\Gamma_s = \text{diag}\{21 \times 10^{-6}, 17 \times 10^{-6}, 85 \times 10^{-7}, 0.0011, 0.001, 0.0012, 0.0017, 4.3, 0.7, 3, 47, 5.5, 42, 0.21, 0.69, 0.845, 40, 22.5\}$ .



**Figura 5.8:** Seguimiento. Posición articular con Esquema propuesto (control-observador) (—), Algoritmo de Tang y Arteaga [2] (- -), Algoritmo de Slotine y Li [1] (· · ·) y valor deseado (· · ·).



**Figura 5.9:** Seguimiento. Velocidad articular: Esquema propuesto (control–observador) (—), Algoritmo de Tang y Arteaga [2] (- -), Algoritmo de Slotine y Li [1] (- · -) y valor deseado (···).

### 5.3.3. Algoritmo Tang–Arteaga

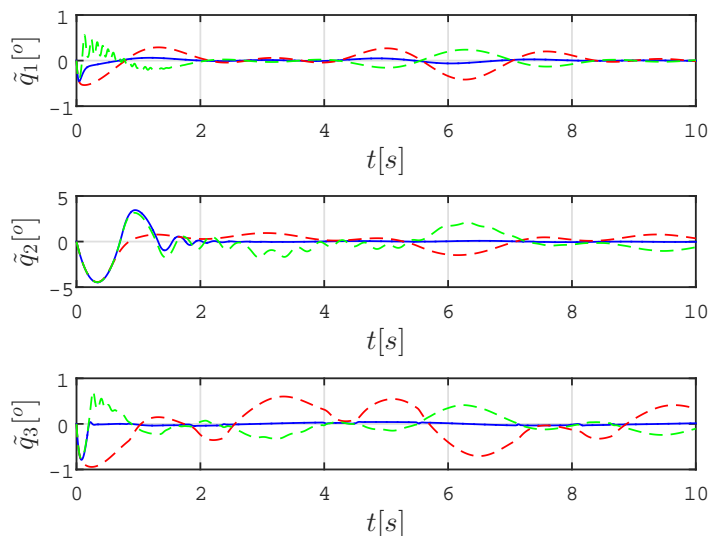
Para el esquema trabajado de [2], las matrices y ganancias empleadas fueron las siguientes

$$\mathbf{K}_s = \begin{bmatrix} 60 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 40 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Lambda}_q = \begin{bmatrix} 190 & 0 & 0 \\ 0 & 230 & 0 \\ 0 & 0 & 220 \end{bmatrix}, \quad (5.20)$$

$\delta = 0.1$ ,  $\gamma_2 = 0.05$ ,  $\lambda_g = 20$ ,  $\lambda_f = 15$  y  $\mathbf{\Gamma}_1 = \text{diag}\{0.017, 0.017, 0.01, 0.017, 0.07, 0.002, 0.01, 0.08, 0.3, 0.17, 2.8, 0.12, 30.83, 0.0001, 0.09, 0.35, 12.75, 1.02\}$ .

### 5.3.4. Resultados de simulación

En este apartado se presentan los resultados obtenidos de cada algoritmo con el objetivo de apreciar su desempeño una vez sintonizados lo mejor posible de forma heurística con base en las pruebas realizadas de los trabajos consultados. Para sintonizar el algoritmo propuesto se empleó el método estocástico debido a que se asumió desconocido el modelo del sistema con el fin de evaluar su desempeño para una situación en la que se desconozcan por completo los parámetros del sistema con el que se trabajará.



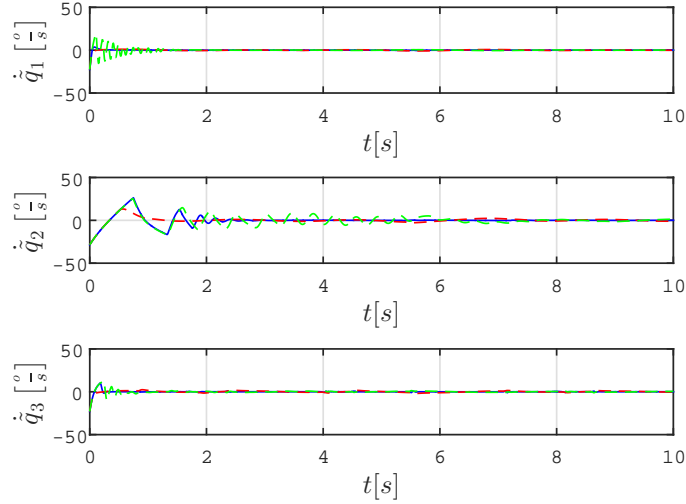
**Figura 5.10:** Seguimiento. Error de posición articular: Esquema propuesto (control-observador) (—), Algoritmo de Tang y Arteaga [2] (---), Algoritmo de Slotine y Li [1] (- · -) y valor deseado (···).

La trayectoria deseada fue elegida considerando el espacio de trabajo del que dispone el robot, además de tratar de lograr que el robot cumpliera con la condición (4.104) pero que al mismo operara de forma segura en su área de trabajo y respetando los límites de seguridad establecidos sobre la fuerza que puede ejercer cada articulación.

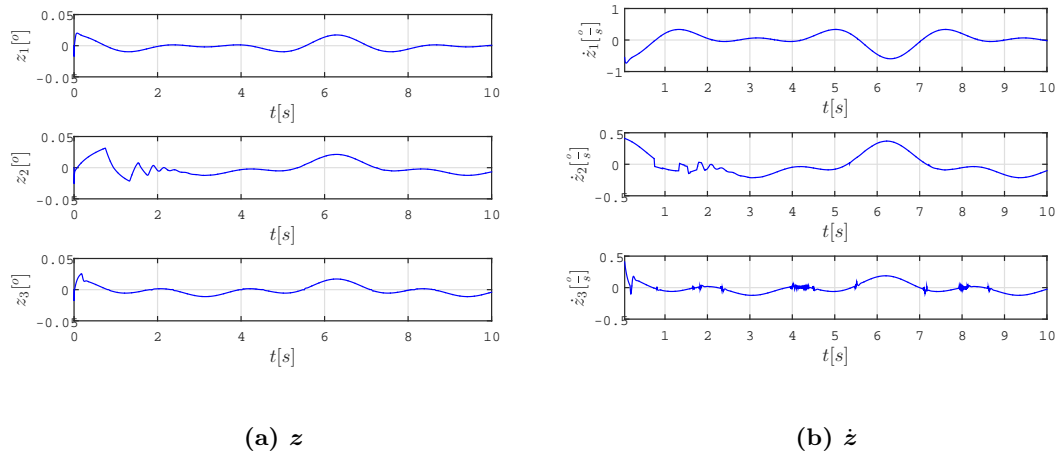
La Figura 5.8 presenta las trayectorias que cada articulación siguió de acuerdo con la señal dada en la ecuación (5.17). Dado que las señales obtenidas por cada control están superpuestas no se ve con claridad qué esquema logra tener un error de seguimiento menor, por lo que en la Figura 5.10 se puede apreciar que el esquema propuesto presenta un mejor comportamiento en comparación con los otros dos esquemas a pesar de que cada algoritmo de control se sintonizó lo mejor que se pudo.

En la Figura 5.9 se pueden observar que los perfiles de velocidad obtenidos por el esquema propuesto en este trabajo y por el de Tang y Arteaga son parecidos y se apegan mucho a la señal deseada. Esto no ocurre para el caso del control de Slotine y Li, este algoritmo presenta una oscilación al inicio de la tarea debido a que la estimación paramétrica de su parte adaptable no logra filtrar la señal y no atenúa los cambios abruptos que se presentan durante el proceso de estimación.





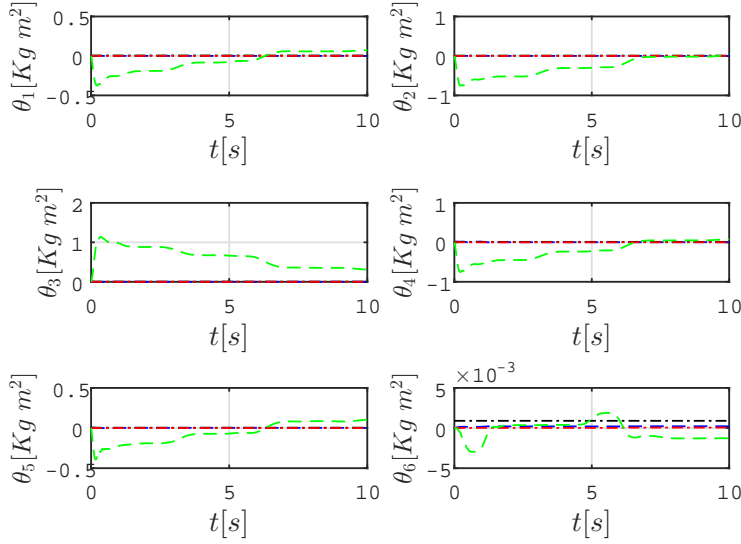
**Figura 5.11:** Seguimiento. Error de velocidad articular: Esquema propuesto (control-observador) (—), Algoritmo de Tang y Arteaga [2] (- -), Algoritmo de Slotine y Li [1] (- · -) y valor deseado (···).



**Figura 5.12:** Seguimiento: Error de observación (a) y error de velocidad observada (b).

La Figura 5.10 presenta los errores de seguimiento que cada algoritmo obtuvo, se puede apreciar que a pesar de que el algoritmo propuesto tuvo un sobrepaso mayor en el error  $\tilde{q}_2$ , para todas las articulaciones fue el que mantuvo a  $\tilde{\mathbf{q}}$  finalmente acotado en la vecindad más pequeña en comparación con los otros dos. El esquema que presentó el peor valor máximo de los errores de seguimiento fue el de Slotine y Li, alcanzando

## 5. RESULTADOS DE SIMULACIÓN



**Figura 5.13:** Seguimiento: Parámetros estimados. Algoritmo propuesto (- -), Algoritmo de Tang y Arteaga [2] (- -), Algoritmo de Slotine y Li [1] (- -) y valor real (---).

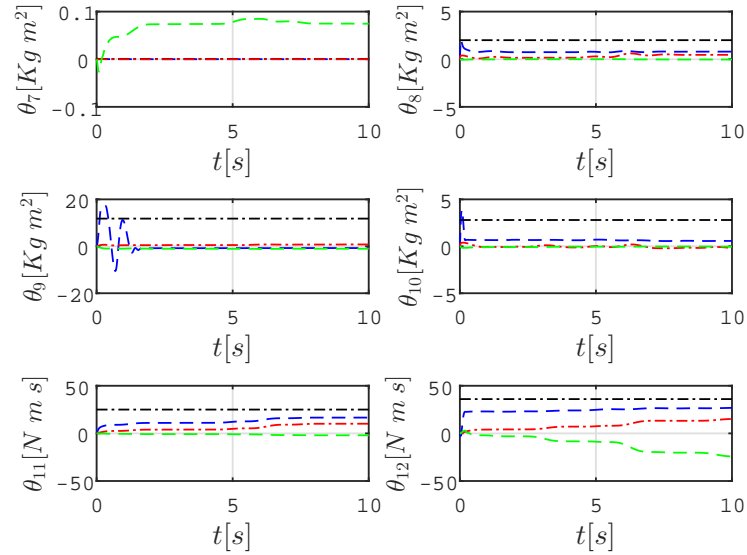
los  $0.7$   $^{\circ}$  y  $0.82$   $^{\circ}$  para la primera y tercera articulación respectivamente.

En la Figura 5.11 se puede ver que el algoritmo de Tang y Arteaga presentó mayor oscilación en los errores de velocidad a lo largo de todo el periodo en que se realizaron las simulaciones, esto puede ser debido a que la estimación de los parámetros no fue la mejor que se realizó en comparación al esquema propuesto y al de Slotine y Li.

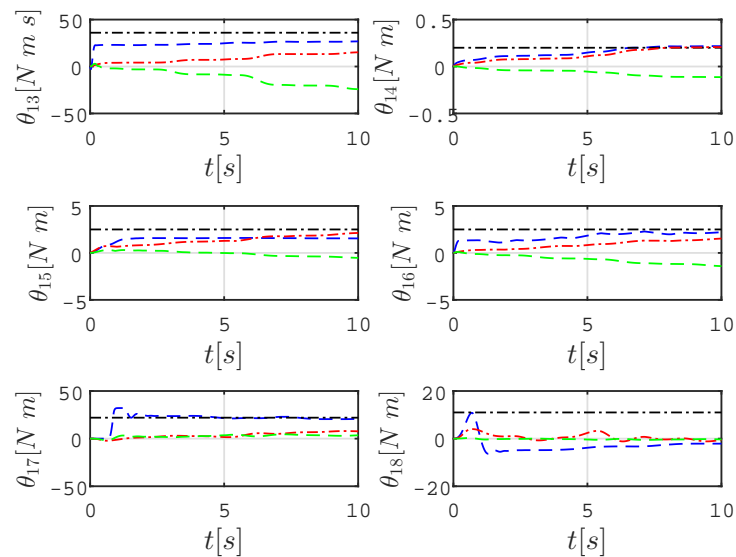
Los errores de observación  $\mathbf{z}$  y su derivada  $\dot{\mathbf{z}}$  se pueden ver en la Figura 5.12, este resultado era de esperarse por lo que se estableció en el Teorema 4.3.1, para el caso en que la señal no cumpliera con la condición de excitación suficiente ( $ES$ ), no habría convergencia de los parámetros estimados a los valores reales (como se puede observar en las Figuras 5.13 a 5.15) y por tanto, sólo se podría asegurar estabilidad práctica de los errores de seguimiento y los de observación.

A pesar de que la señal elegida  $\mathbf{q}_d$  no pudo tener la propiedad de  $ES$ , que es necesaria para lograr la convergencia de todos los errores ( $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$ ,  $\tilde{\mathbf{q}}$  y  $\mathbf{z}$ ), los errores de observación se mantuvieron por debajo de  $0.02$   $^{\circ}$  para la primera y última articulación y de  $0.03$   $^{\circ}$  para la segunda articulación. Para la estimación de la velocidad ( $\dot{\mathbf{z}}$ ) los errores estuvieron acotados aunque no se logró la convergencia a cero como se hubiese deseado.

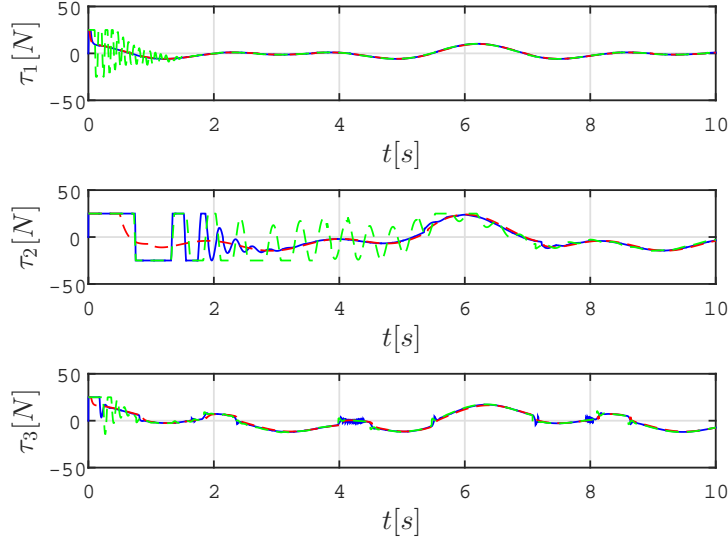
Las Figuras 5.13 a 5.15 presentan la forma en que los parámetros se estimaron de acuerdo a las leyes de adaptación que cada algoritmo posee. Los parámetros de inercia estimados  $\theta_1$  a  $\theta_{10}$  fueron los que con más inexactitud estimó el algoritmo de Tang y Arteaga. Pero por otro lado, el algoritmo propuesto tuvo el mejor desempeño para la mayoría de las estimaciones debido a las variables extras que manejó la ley de adap-



**Figura 5.14:** Seguimiento: Parámetros estimados. Algoritmo propuesto (- -), Algoritmo de Tang y Arteaga [2] (- . -), Algoritmo de Slotine y Li [1] (· · ·) y valor real (· · ·).



**Figura 5.15:** Seguimiento: Parámetros estimados. Algoritmo propuesto (- -), Algoritmo de Tang y Arteaga [2] (- . -), Algoritmo de Slotine y Li [1] (· · ·) y valor real (· · ·).



**Figura 5.16:** Seguimiento. Pares obtenidos con: Algoritmo propuesto (- -), Algoritmo de Tang y Arteaga [2] (- · -), Algoritmo de Slotine y Li [1] (· · ·).

tación propuesta, incluyendo la proyección para evitar que los parámetros estimados salieran de una vecindad preestablecida. El algoritmo de Slotine y Li estimó los parámetros de forma aceptable mas no precisa, ya que cada  $\hat{\theta}_i$  (con  $i = 1, \dots, 18$ ) convergió a algún valor cercano al real en un tiempo razonable (a los 5.0 [s] en promedio).

Finalmente, en la Figura 5.16 se pueden apreciar los valores de los pares que requirieron cada algoritmo para lograr el comportamiento descrito con anterioridad. Comparando el par  $\tau$  resultante del obtenido en la prueba de *Regulación* (ver Figura 5.7), el periodo de tiempo que tardó el control en dejar de saturarse fue menor para el algoritmo propuesto. Mientras tanto, el esquema de Tang y Arteaga presentó una mayor oscilación de su señal de control con respecto a los otros dos controladores trabajados, y esto se ve reflejado en que los errores de seguimiento para este esquema fueron mayores (ver Figura 5.10). A pesar de todo esto, los perfiles de cada señal para los algoritmos trabajados fueron semejantes entre sí debido a que su tarea fue seguir la misma señal deseada.

#### 5.4. Análisis de resultados

En esta sección se analizarán con más detenimiento y objetividad los resultados obtenidos de las dos pruebas anteriores. Para hacer el análisis más objetivo, se acudió a obtener los *Índices de desempeño* de los errores que fueron de interés ( $\tilde{q}$ ,  $\dot{\tilde{q}}$ ,  $z$ ,  $\dot{z}$  y  $\tilde{\theta}$ )

por medio de la siguiente ecuación

$$\mathcal{J}(\cdot) = \sqrt{\frac{1}{k} \sum_0^{k-1} \|\cdot\|^2}, \quad (5.21)$$

con  $k = 3000$ , donde  $k$  es el número de muestras que se tomaron en cuenta.

Las Tablas 5.3 y 5.4 presentan los índices de desempeño de los errores de posición articular para el caso de *regulación* y para el de *seguimiento*, respectivamente. Se puede apreciar que para la tarea de *seguimiento*, los índices de desempeño para los errores de seguimiento ( $\mathcal{J}(\tilde{\mathbf{q}})$ ) fueron mejores con el control propuesto que los otros dos. Aunque para el caso de regulación no se presentó mucha diferencia entre los índices de desempeño de los tres algoritmos para cada articulación, nos permite afirmar que el control propuesto tuvo un buen desempeño a pesar de tener que emplear un observador debido a la falta de mediciones de velocidad articular.

La segunda articulación fue la que tuvo un peor índice de desempeño para ambas tareas y para los tres esquemas debido a que esta fue la articulación con mayor afectación por la variación de los parámetros estimados.

Las Tablas 5.5 y 5.6 contienen los índices de desempeño de los errores de velocidad de acuerdo a los resultados mostrados en la Figura 5.11 y de forma implícita en la Figura 5.2. Nuevamente, se puede ver que los índices de desempeño son mejores en el caso de seguimiento en comparación con los de regulación, y destacó el algoritmo propuesto para el caso de la primera y última articulación.

Otro criterio para poder inspeccionar cuál algoritmo tiene el mejor resultado es basándose en la estimación paramétrica. En la Tabla 5.9 se pueden ver los índices de desempeño que en las dos pruebas obtuvieron los tres esquemas de control. Las figuras que anteriormente se describieron confirman con estos datos que el algoritmo con la peor estimación paramétrica fue el de Slotine y Li, esto es debido a que las señales empleadas ( $\mathbf{q}_d$  para cada prueba) no tuvieron la propiedad de Excitación Persistente *EP*, ya que al tratar de estimar 18 parámetros se requería una señal rica en frecuencia, tal como se establece en Ioannou y Sun, (1996) [33]. Por otro lado, el algoritmo propuesto mostró un mejor desempeño debido a que la ley de adaptación desarrollada tomó en cuenta los valores límites que cada parámetro pudo haber alcanzado durante las tareas realizadas, estas variables no las tuvo el control trabajado de Tang y Arteaga, por lo que su desempeño fue bueno para las pruebas realizadas.

Algoritmo	$\mathcal{J}(\tilde{q}_1)$ [°]	$\mathcal{J}(\tilde{q}_2)$ [°]	$\mathcal{J}(\tilde{q}_3)$ [°]
Algoritmo propuesto	0.0868	0.1280	0.0400
Algoritmo de Slotine–Li (5.1)–(5.2)	0.0863	0.1256	0.0399
Algoritmo Tang–Arteaga (5.5)–(5.12)	0.0865	0.1276	0.0432

**Tabla 5.3:** Regulación. Índice de desempeño de los errores en el espacio articular.

## 5. RESULTADOS DE SIMULACIÓN

---

<b>Algoritmo</b>	$\mathcal{J}(\tilde{q}_1)$ [°]	$\mathcal{J}(\tilde{q}_2)$ [°]	$\mathcal{J}(\tilde{q}_3)$ [°]
Algoritmo propuesto	0.0004	0.0351	0.00004
Algoritmo de Slotine–Li (5.1)–(5.2)	0.0016	0.0180	0.0086
Algoritmo Tang–Arteaga (5.5)–(5.12)	0.0011	0.0334	0.0033

**Tabla 5.4:** Seguimiento. Índice de desempeño de los errores en el espacio articular.

<b>Algoritmo</b>	$\mathcal{J}(\dot{\tilde{q}}_1)$ [°/s]	$\mathcal{J}(\dot{\tilde{q}}_2)$ [°/s]	$\mathcal{J}(\dot{\tilde{q}}_3)$ [°/s]
Algoritmo propuesto	0.3114	0.2846	0.1825
Algoritmo de Slotine–Li (5.1)–(5.2)	0.3123	0.2500	0.1625
Algoritmo Tang–Arteaga (5.5)–(5.12)	0.2980	0.2710	0.1297

**Tabla 5.5:** Regulación. Índice de desempeño de los errores de velocidad.

Finalmente, las Tablas 5.7 y 5.8 contienen los índices de desempeño de los errores de observación y su derivada,  $z$  y  $\dot{z}$  respectivamente, para ambas pruebas. Una vez más, se puede ver que cuando se presentó una mayor excitación para la señal deseada a seguir, los errores disminuyeron significativamente. A pesar de que estos errores tienden a cero muy lentamente, la estimación paramétrica del esquema propuesto no se ve tan afectada, y como se había mencionado con anterioridad, este resultado no contradice lo que el Teorema 4.3.1 establece, de que los errores permanezcan finalmente acotados.

Del Teorema 4.3.1 se puede llegar a la conclusión de que un solo conjunto de ganancias que cumplan con las condiciones presentadas en las ecuaciones (4.114)–(4.117) lograrán garantizar lo que establecen ambos incisos del teorema, por lo que no es necesario que (4.50)–(4.51) se cumplan. Por otro lado, si las condiciones que se establecen en 1 son garantizadas a través de la elección adecuada de las ganancias y además se cumple con la condición (4.104), entonces lo que se establece en 2 también se cumplirá.

Sin embargo, las ganancias dependen de valores desconocidos como  $\theta$ ,  $\alpha_1$  o  $k_c$ , por lo que ni (4.50)–(4.51) ni (4.114)–(4.117) no pueden ser utilizadas directamente. Así

<b>Algoritmo</b>	$\mathcal{J}(\dot{\tilde{q}}_1)$ [°/s]	$\mathcal{J}(\dot{\tilde{q}}_2)$ [°/s]	$\mathcal{J}(\dot{\tilde{q}}_3)$ [°/s]
Algoritmo propuesto	0.0037	0.3350	0.0023
Algoritmo de Slotine–Li (5.1)–(5.2)	0.0174	0.1501	0.0244
Algoritmo Tang–Arteaga (5.5)–(5.12)	0.0504	0.3228	0.0222

**Tabla 5.6:** Seguimiento. Índice de desempeño de los errores de velocidad.

Señal	$\mathcal{J}(\Delta z_1)$ [°]	$\mathcal{J}(\Delta z_2)$ [°]	$\mathcal{J}(\Delta z_3)$ [°]
Constante	0.0002	0.0003	0.0001
Variable	0.0001	0.0002	0.0001

**Tabla 5.7:** Índice de desempeño de los errores de observación

Señal	$\mathcal{J}(\Delta \dot{z}_1)$ [ $\frac{o}{s}$ ]	$\mathcal{J}(\Delta \dot{z}_2)$ [ $\frac{o}{s}$ ]	$\mathcal{J}(\Delta \dot{z}_3)$ [ $\frac{o}{s}$ ]
Constante	7.058	8.8783	3.986
Variable	0.33574	0.33104	0.24854

**Tabla 5.8:** Índice de desempeño de los errores de observación derivados

que se deben elegir  $\lambda_{\min}(\mathbf{K}_v)$ ,  $\beta$ ,  $\lambda$  y especialmente  $k_d$ , lo suficientemente grandes para poder garantizar estabilidad práctica y eventualmente la convergencia de los errores a cero.

Debido a que las leyes de control y adaptación de Tang y Arteaga [2] junto con las del esquema propuesto son similares, comparten algunas propiedades relacionadas con la condición de la ecuación (4.104). Es importante mencionar que los errores de estimación paramétrica logran la convergencia a cero si se cumple con la condición de excitación persistente, esto es

$$\int_t^{t+t_2} \hat{\mathbf{Y}}_f^T(\vartheta) \hat{\mathbf{Y}}_f(\vartheta) d\vartheta \geq \alpha_2 \mathbf{I} \quad (5.22)$$

$\forall t \geq 0$  y para algún  $t_2$ ,  $\alpha_2 > 0$ . Si (5.22) se cumple, entonces (4.104) lo hará también y se logrará el cumplimiento de 2.

Otra cuestión que cabe destacar es que los algoritmos de Slotine–Li y de Tang–Arteaga deben de tener disponibles las mediciones de las velocidades articulares para que puedan ser implementables, a diferencia del algoritmo propuesto, que logra compensar esta ausencia de mediciones con un observador cuya simplicidad ayuda a no aumentar la carga computacional de forma significativa.

Asimismo, el algoritmo propuesto asegura el acotamiento final de los errores  $\tilde{\mathbf{q}}$ ,  $\mathbf{z}$  y  $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$  y por consiguiente, de sus derivadas, aunque no se cumpla con la condición (4.104), dicho límite final se puede hacer arbitrariamente pequeño con la elección adecuada de las ganancias previamente mencionadas y el error de estimación de los parámetros no necesariamente debe converger a cero para conseguir la estabilidad práctica.

## 5. RESULTADOS DE SIMULACIÓN

---

**Tabla 5.9:** Índice de desempeño de los errores de estimación (*SC: señal constante, SV: señal variable*)

Algoritmo	Esquema propuesto		Algoritmo		Algoritmo	
	Observador (4.16)		Tang y Arteaga		Slotine y Li	
	Control (4.54)		(5.5)–(5.12)		(5.1)–(5.2)	
$\mathcal{J}(\cdot)$	SC	SV	SC	SV	SC	SV
$\mathcal{J}(\tilde{\theta}_1) [Kg\ m^2]$	0.0051	0.0052	0.0019	0.1443	0.0056	0.0054
$\mathcal{J}(\tilde{\theta}_2) [Kg\ m^2]$	0.0075	0.0076	0.0078	0.4257	0.0080	0.0079
$\mathcal{J}(\tilde{\theta}_3) [Kg\ m^2]$	0.0014	0.0020	0.0101	0.7802	0.0024	0.0024
$\mathcal{J}(\tilde{\theta}_4) [Kg\ m^2]$	0.0109	0.0088	0.0128	0.3575	0.0121	0.0106
$\mathcal{J}(\tilde{\theta}_5) [Kg\ m^2]$	0.0030	0.0013	0.0092	0.1445	0.0041	0.0039
$\mathcal{J}(\tilde{\theta}_6) [Kg\ m^2]$	0.0009	0.0007	0.0003	0.0005	0.0009	0.0008
$\mathcal{J}(\tilde{\theta}_7) [Kg\ m^2]$	0.0005	0.0006	0.0002	0.0731	0.0009	0.0006
$\mathcal{J}(\tilde{\theta}_8) [Kg\ m^2]$	1.0879	1.2596	0.7718	2.0006	7.5696	1.8428
$\mathcal{J}(\tilde{\theta}_9) [Kg\ m^2]$	12.5712	12.6053	10.9812	12.8613	11.8271	11.2420
$\mathcal{J}(\tilde{\theta}_{10}) [Kg\ m^2]$	2.1196	2.2459	2.8380	2.8672	2.8077	2.6942
$\mathcal{J}(\tilde{\theta}_{11}) [N\ m\ s]$	8.1445	13.952	24.8686	25.7541	22.5576	21.0258
$\mathcal{J}(\tilde{\theta}_{12}) [N\ m\ s]$	15.8313	15.9388	34.9963	34.9410	34.9200	32.8942
$\mathcal{J}(\tilde{\theta}_{13}) [N\ m\ s]$	5.2953	12.6899	36.1589	41.9673	35.8166	30.5193
$\mathcal{J}(\tilde{\theta}_{14}) [N\ m]$	0.0499	0.0814	0.0345	0.2424	0.0286	0.1181
$\mathcal{J}(\tilde{\theta}_{15}) [N\ m]$	0.7409	0.9253	0.9170	2.3592	2.3458	1.4153
$\mathcal{J}(\tilde{\theta}_{16}) [N\ m]$	0.4304	1.1275	2.5212	2.9303	2.1994	1.9470
$\mathcal{J}(\tilde{\theta}_{17}) [N\ m]$	13.1039	1.6774	18.9634	20.4180	30.6055	18.9859
$\mathcal{J}(\tilde{\theta}_{18}) [N\ m]$	12.1220	15.8269	12.6917	10.9964	18.8105	11.6958



## Conclusiones

---

En el presente trabajo se desarrolló una ley de control con su respectiva ley de adaptación para robots manipuladores teniendo presente la incertidumbre paramétrica de su modelo dinámico y sin tener disponibles las mediciones de velocidad articular de los mismos. Para dar solución a este último inconveniente, se acudió al uso del observador planteado en Arteaga (2003) [29] adaptando algunas variables requeridas de la ley de adaptación con el objetivo de lograr una fácil y efectiva implementación para realizar tareas de seguimiento, regulación, entre otras.

Con el algoritmo desarrollado se aseguran acotamiento final de los errores de observación, de seguimiento y de estimación de los parámetros bajo condiciones laxas respecto a la trayectoria que se desee seguir. El teorema planteado en este trabajo indica que si la trayectoria deseada llega a cumplir con la condición de excitación suficiente, se logrará la convergencia a cero de los errores de estimación paramétrica y a su vez, también convergerán a cero los errores de observación y de seguimiento de forma asintótica, *i.e.*  $\tilde{\mathbf{q}}, \mathbf{z} \rightarrow \mathbf{0}$  conforme  $t \rightarrow \infty$ .

Lo establecido en el Teorema 4.3.1 es demostrado con un análisis original probando la estabilidad del control-observador desarrollado. A pesar de que uno de los esquemas comparte similitudes con el algoritmo propuesto, el control elaborado posee variables que logran evitar la divergencia del vector de errores de estimación paramétrica, lo que modifica el análisis de estabilidad y mejora el desempeño del trabajo realizado significativamente a pesar de que no se cuenta con la medición de las velocidades articulares.

El destacado desempeño del algoritmo realizado se demostró comparando los resultados de dos simulaciones con trayectorias deseadas distintas (regulación y seguimiento) con dos controladores adaptables que asumen tener disponibles las velocidades articulares, debido a que se hicieron simulaciones, esta disponibilidad no generó inconvenientes. Además de presentar gráficas para observar el comportamiento de cada esquema, se presentó un análisis numérico (con el índice de desempeño de los errores de mayor interés) que dio lugar a la conclusión de que el algoritmo propuesto tuvo un buen desempeño utilizando los datos que proporcionó el observador utilizado y sin la necesidad de las mediciones directas, como los otros dos esquemas lo hicieron.

A pesar de que algunas ganancias del esquema propuesto no se pueden obtener

debido a que se desconocen los parámetros del robot manipulador con el que se llegue a trabajar, se explica que sintonizando tres ganancias en particular lo suficientemente grandes, se asegura el acotamiento final de los errores mencionados con anterioridad.

### 6.1. Trabajo futuro

Como trabajo a futuro se planea realizar pruebas experimentales con el robot industrial A465 de *CSR Robotics* utilizando las mismas trayectorias usadas en las simulaciones presentadas en este trabajo y posteriormente comparar los resultados obtenidos analizando el comportamiento del sistema real con el simulado.

Además, se desea comprobar el buen desempeño obtenido del esquema desarrollado en este trabajo con un robot industrial que posea una configuración cinemática distinta.

Finalmente, se espera poder hallar un método para elegir las ganancias de sintonización de forma más directa y no de manera estocástica, con el fin de lograr que el esquema propuesto sea más eficiente.

### 6.2. Recomendaciones

Para simplificar al investigador que desee implementar este algoritmo de control debe de tomar en consideración lo siguiente:

- Si se conocen los parámetros nominales del sistema, se recomienda hacer los cálculos necesarios para poder obtener el valor de las ganancias de  $\mathbf{K}_v$  y  $k_d$  tales que cumplan con las condiciones dadas en (4.114)-(4.117).
- En caso de que persista la incertidumbre paramétrica, se recomienda que los valores de  $\mathbf{K}_v$  y  $k_d$  sean lo suficientemente grandes para tratar de cumplir con las condiciones planteadas en el trabajo y lograr el acotamiento final de los errores  $\tilde{\mathbf{q}}$ ,  $\mathbf{z}$  y  $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$ .
- Si se desea lograr la convergencia de los parámetros estimados al valor de los parámetros reales, se sugiere que la trayectoria que se desee seguir cumpla con la condición de excitación suficiente, esto es, que sea rica en frecuencia y/o que cumpla con la ecuación (4.104).

Se espera que estos comentarios ayuden a obtener los resultados deseados utilizando el algoritmo propuesto y desarrollado en este trabajo.

### A.1. Teoremas auxiliares

**Teorema A.1.1** [32] *Sea  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  un punto de equilibrio para  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$  y  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$  es un dominio que contiene a  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ . Sea  $V : [0, \infty) \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  una función continuamente diferenciable tal que*

$$k_1 \|\mathbf{x}\|^a \leq V(t, \mathbf{x}) \leq k_2 \|\mathbf{x}\|^a \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \leq -k_3 \|\mathbf{x}\|^a \quad (\text{A.2})$$

$\forall t \geq 0$  y  $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}$ , donde  $k_1, k_2, k_3$  y  $a$  son constantes positivas. Entonces  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  es exponencialmente estable. Si estas asunciones se mantienen globalmente, entonces  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  es GAS. △

**Teorema A.1.2** [32] *Sea  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$  un dominio que contiene al origen y  $V : [0, \infty) \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  se una función contiamente diferenciable de tal forma que*

$$\alpha_1(\|\mathbf{x}\|) \leq V(t, \mathbf{x}) \leq \alpha_2(\|\mathbf{x}\|), \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \leq -W_3, \quad \forall \|\mathbf{x}\| \geq \mu > 0, \quad (\text{A.4})$$

$\forall t \geq 0$  y  $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}$ , donde  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  son funciones de clase  $\mathcal{K}$ ,  $W_3$  es una función continua positiva definida y con  $\mathbf{f} : [0, \infty) \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$  continua a pedazos en  $t$  y localmente Lipschitz en  $\mathbf{x}$ . Tómesese  $r > 0$  tal que  $B_r = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\| \leq r\} \subset \mathcal{D}$  y supóngase que

$$\mu < \alpha_2^{-1}(\alpha_1(r)). \quad (\text{A.5})$$

## A. APÉNDICE

---

Entonces, existe una función  $\beta$  de clase  $\mathcal{KL}$  y para cada estado inicial  $\mathbf{x}(t_o)$ , se satisface

$$\|\mathbf{x}(t_o)\| \leq \alpha_2^{-1}(\alpha_1(r)), \quad (\text{A.6})$$

hay una  $T \geq 0$  (dependiente de  $\mathbf{x}(t_o)$  y  $\mu$ ) tal que la solución de  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$  satisface

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq \beta(\|\mathbf{x}(t_o)\|, t - t_o), \quad \forall t_o \leq t \leq t_o + T \quad (\text{A.7})$$

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq \alpha_1^{-1}(\alpha_2(\mu)), \quad \forall t \geq t_o + T \quad (\text{A.8})$$

Más aún, si  $\mathcal{D} = \mathbb{R}^n$  y  $\alpha_1$  pertenece a la clase  $\mathcal{K}_\infty$  entonces (A.7)-(A.8) se mantienen para cualquier estado inicial  $\mathbf{x}(t_o)$ , sin restricción de qué tan grande es  $\mu$ .

△

## Bibliografía

---

- [1] J. J. E. Slotine and W. Li, “On the adaptive control of robot manipulators,” *International Journal of Robotics Research*, vol. 6, no. 3, pp. 49–59, 1987. IX, IX, IX, IX, IX, IX, IX, IX, X, X, X, X, X, 17, 20, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52
- [2] Y. Tang and M. A. Arteaga-Pérez, “Adaptive control of robot manipulators based on passivity,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 39, no. 9, pp. 1871–1875, 1994. IX, IX, IX, IX, IX, IX, IX, IX, IX, X, X, X, X, X, 5, 28, 29, 38, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 55
- [3] R. Kelly and V. Santibáñez, *Control of Robot Manipulators in Joint Space*. Madrid, España: Pearson Prentice-Hall, 2005. IX, 7, 9, 16
- [4] J. Gudino-Lau and M. A. Arteaga, “Dynamic model and simulation of cooperative robots: a case study,” *Robotica*, vol. 23, no. 5, pp. 615–624, 2005. XI, XI, 13, 14, 15
- [5] A. O. Baturone, *Robótica: manipuladores y robots móviles*. Marcombo, 2005. 2
- [6] A. Barrientos, L. F. Peñín, C. Balaguer, and R. Aracil, *Fundamentos de robótica*, vol. 256. McGraw-Hill, 1997. 2
- [7] J. J. Craig, *Robótica*. Pearson, Prentice-Hall, 2006. 2
- [8] M. W. Spong and M. Vidyasagar, *Robot Dynamics and Control*. New York, USA: John Wiley & Sons, 1989. 2, 14, 15
- [9] R. E. Kalman, “A new approach to linear filtering and prediction problems,” *Journal of basic Engineering*, vol. 82, no. 1, pp. 35–45, 1960. 3
- [10] G. Welch, G. Bishop, *et al.*, “An introduction to the kalman filter,” 1995. 3
- [11] K. Levenberg, “A method for the solution of certain non-linear problems in least squares,” *Quarterly of applied mathematics*, vol. 2, no. 2, pp. 164–168, 1944. 3
- [12] D. G. Luenberger, “Observing the state of a linear system,” *IEEE transactions on military electronics*, vol. 8, no. 2, pp. 74–80, 1964. 3

- [13] W. L. Chow, “Über systeme von linearen differentialgleichungen erster ordnung,” *Math. Ann.*, vol. 117, pp. 98–105, 1939. 3
- [14] R. Hermann, “On the accessibility problem in control theory,” in *International Symposium on Nonlinear Differential Equations and Nonlinear Mechanics*, pp. 325–332, Elsevier, 1963. 3
- [15] G. Haynes and H. Hermes, “Nonlinear controllability via lie theory,” *SIAM Journal on Control*, vol. 8, no. 4, pp. 450–460, 1970. 3
- [16] R. Hermann and A. Krener, “Nonlinear controllability and observability,” *IEEE Transactions on automatic control*, vol. 22, no. 5, pp. 728–740, 1977. 3
- [17] H. J. Sussmann and V. Jurdjevic, “Controllability of nonlinear systems.,” 1972. 3
- [18] A. J. Krener, “A generalization of chow’s theorem and the bang-bang theorem to nonlinear control problems,” *SIAM Journal on Control*, vol. 12, no. 1, pp. 43–52, 1974. 3
- [19] S. Nicosia and P. Tomei, “Robot control by using only joint position measurements,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 35, no. 9, pp. 1058–1061, 1990. 3, 6, 18, 22
- [20] H. Nijmeijer and I. M. Mareels, “An observer looks at synchronization,” *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental theory and applications*, vol. 44, no. 10, pp. 882–890, 1997. 3
- [21] M. A. Arteaga-Pérez, L. López-Recillas, M. López, and E. Nuño, “Observer design for bilateral teleoperation systems with variable time delays,” *IFAC-PapersOnLine*, vol. 50, no. 1, pp. 14368–14373, 2017. 3
- [22] M. Deniz, A. Bayrak, E. Tatlicioglu, and E. Zergeroglu, “A model-free continuous velocity observer formulation with self-tuning for mechatronic systems,” *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, vol. 140, no. 5, p. 054501, 2018. 3, 6
- [23] J.-J. E. Slotine and W. Li, “On the adaptive control of robot manipulators,” *The international journal of robotics research*, vol. 6, no. 3, pp. 49–59, 1987. 5
- [24] F. Peisen, W. Changjun, and W. C. Hong, “An adaptive learning control scheme for manipulators,” in *[1992] Proceedings of the IEEE International Symposium on Industrial Electronics*, pp. 375–379, IEEE, 1992. 5
- [25] K. Kaneko and R. Horowitz, “Repetitive and adaptive control of robot manipulators with velocity estimation,” *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 13, no. 2, pp. 204–217, 1997. 6

- [26] L. Villani, C. C. De Wit, and B. Brogliato, “An exponentially stable adaptive control for force and position tracking of robot manipulators,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 44, no. 4, pp. 798–802, 1999. 6
- [27] B. K. Yoo and W. C. Ham, “Adaptive control of robot manipulator using fuzzy compensator,” *IEEE Transactions on fuzzy systems*, vol. 8, no. 2, pp. 186–199, 2000. 6
- [28] Q. Quan, W. Xinhua, and C. Kaiyuan, “Higher-order adaptive iterative control for uncertain robot manipulators,” in *2007 Chinese Control Conference*, pp. 825–829, IEEE, 2007. 6
- [29] M. A. Arteaga-Pérez, “Robot control and parameter estimation with only joint position measurements,” *Automatica*, vol. 39, pp. 67–73, 2003. 6, 19, 28, 29, 57
- [30] S. Aranovskiy, R. Ortega, J. Romero, and D. Sokolov, “A globally exponentially stable speed observer for a class of mechanical systems: experimental and simulation comparison with high-gain and sliding mode designs,” *International Journal of Control*, pp. 1–14, 2017. 6
- [31] B. Siciliano, L. Sciavicco, L. Villani, and G. Oriolo, *Robotics: Modelling, Planning and Control*. Springer-Verlang, 2009.
- [32] H. K. Khalil, *Nonlinear Systems, 3rd ed.* Upper Saddle River, New Jersey. U .S. A.: Prentice–Hall, 2002. 18, 22, 30, 59
- [33] P. A. Ioannou and J. Sun, *Robust Adaptive Control*. U .S. A.: Prentice–Hall, 1996. 53