

# AVANCES EN EL DISEÑO MECÁNICO DE UN MULTIPLICADOR DE VELOCIDAD BASADO EN UN TREN EPICICLOIDAL DE DOS ETAPAS\*

Ricardo Yáñez-Valdez<sup>†</sup> Tlaloc Fernando Cardona Ruiz Milton Osmar Sosa Corona  
Miguel Ángel García Granados Abel Galarza Martínez

Facultad de Ingeniería, DIMEI-UNAM.

## ABSTRACT

Se presenta el proceso de diseño mecánico de un multiplicador de velocidad usando un tren de engranajes planetarios. En el mismo proceso de diseño se consideraron especificaciones relacionadas con el tamaño demandado (25 x 25 cm de área) y la velocidad requerida en la salida del multiplicador (mín 3600 rpm). Se diseñó el multiplicador con una relación de transmisión objetivo de 1:72. Se construyó un prototipo basado en un tren de engranajes planetarios de dos etapas, logrando alcanzar más de 7 500 rpm. La relación de transmisión real es de 1:60 con una velocidad angular de entrada de 120 rpm. Se muestra el desarrollo del proceso de diseño para la construcción del prototipo, empezando por el análisis cinemático del mecanismo, seguido del proceso de selección de los engranes y por último el análisis de esfuerzos de los engranes y ejes.

*Palabras clave: Análisis de esfuerzos, Diseño mecánico, Relación de transmisión, Tren de engranes planetario.*

## I. INTRODUCCIÓN

Se usa un tren de engranajes planetario cuando existe restricción de peso y espacio, pero es necesaria una reducción o multiplicación grande de velocidad y par de torsión. Este requerimiento aplica a una variedad de máquinas como tractores, vehículos, turbinas, transmisiones automáticas, etc. Los trenes de engranajes planetarios son capaces de producir mayor par de torsión debido a que la carga es distribuida por varios engranes planetas. Esta configuración crea mayor área de contacto y por esta razón la carga es distribuida. Esto contribuye a obtener mayores relaciones de transmisión con mayor resistencia al desgaste en los engranes. El objetivo en el desarrollo de este proyecto es alcanzar una velocidad de sal-

ida de 3600 rpm como mínimo, usando un tren de engranajes planetarios. La base del proyecto radica en las especificaciones diseño. La primera restringe el tamaño del dispositivo a un área de 25 x 25 cm. La segunda especificación restringe la forma en la que se va a transmitir la velocidad de entrada; de forma manual.

## II. CINEMÁTICA DE UN TREN PLANETARIO

El movimiento de un engrane planetario puede ser seguido por la superposición de tres movimientos simples.

- Rotación del brazo alrededor del engrane sol.
- Rotación del engrane planeta alrededor de su propio eje.
- Rotación del engrane sol.

$$\theta_{planeta} = \theta_{mov1} + \theta_{mov2} + \theta_{mov3} \quad (1)$$

Estos movimientos no son independientes uno del otro, debido a que el engrane planetario gira alrededor del engrane sol. Así la relación del diámetro entre ambos engranes determina cuantas veces gira el engrane planeta alrededor de su propio eje mientras se mueve alrededor del engrane sol.

Así que, para encontrar la relación de velocidades entre el engrane sol, el engrane planetario y el brazo, vamos a analizar cada movimiento simple por separado, después, vamos a superponerlos para encontrar una ecuación general que describa el movimiento del engranaje. Si el engrane sol esta fijo y el brazo gira alrededor del engrane sol, sin que el engrane planetario este girando, el ángulo de barrido del brazo es

$$\theta_{p1} = \theta_c \quad (2)$$

donde  $\theta_{p1}$  es el ángulo que recorre el engrane planetario debido a su propio giro, y  $\theta_c$  es el ángulo recorrido por el brazo. La relación anterior nos define que el desplazamiento angular que tiene el brazo es igual al desplazamiento angular del engrane planetario. Si se considera solo la rotación del

\*Este es un resumen de la experiencia adquirida por estudiantes de la Facultad de Ingeniería de la UNAM en el diseño mecánico de un multiplicador de velocidades usando un tren planetario. Proyecto desarrollado como parte del curso de la materia de "Diseño de elementos de máquinas". Curso impartido en el semestre 2020-1.

<sup>†</sup>Profesor del posgrado en Ingeniería Mecánica de la FI-UNAM (ryv77@unam.mx).

engrane planetario alrededor de su propio eje, la longitud de arco que el brazo  $b$  ha recorrido alrededor del engrane sol es exactamente la misma que el engrane planetario ha recorrido sobre su propia circunferencia  $b_c$ . Así el engrane planetario rotará un ángulo adicional  $\theta_{p2}$ , entonces

$$b_{p2} = b_c \quad (3)$$

Sabemos además que una longitud de arco se puede calcular por el producto del radio del círculo que recorre con el desplazamiento angular, por lo que

$$\begin{aligned} \frac{dp}{2} \theta_{p2} &= \frac{ds}{2} \theta_c \\ \theta_{p2} &= \frac{ds}{dp} \theta_c \end{aligned} \quad (4)$$

donde  $b_{p2}$  es la longitud de arco recorrida por el engrane planetario sobre su propia circunferencia,  $b_c$  es la longitud de arco recorrida por el brazo alrededor del engrane sol,  $d_p$  es el diámetro del engrane planetario,  $d_s$  es el diámetro del engrane sol y  $\theta_{p2}$  es el ángulo que recorre el engrane planetario debido a su propio giro. Ahora el brazo esta fijo en el engrane sol y éste está girando en el sentido de las manecillas del reloj a un ángulo  $\theta_s$ , por lo que el engrane planetario girará en sentido contrario, un ángulo  $\theta_{p3}$ . Esto quiere decir que debido a ese giro del engrane sol, el brazo va a recorrer una longitud de arco  $b_s$  sobre el engrane sol debido a su giro. De igual manera el giro provocado en sentido inverso por el engrane sol en el planetario tiene una longitud de arco exactamente igual a la recorrida por el brazo.

$$b_{p3} = -b_s \quad (5)$$

sabemos que una longitud de arco se puede calcular por el producto del radio del círculo que recorre con el desplazamiento angular, por lo que

$$\begin{aligned} \frac{dp}{2} \theta_{p3} &= -\frac{ds}{2} \theta_s \\ \theta_{p3} &= -\frac{ds}{dp} \theta_s \end{aligned} \quad (6)$$

donde  $b_{p3}$  es la longitud de arco recorrida por el engrane planetario debido al giro del engrane sol,  $b_s$  es la longitud de arco recorrida por el brazo alrededor del engrane sol,  $\theta_{p3}$  es el ángulo que recorre el engrane planetario a giro del engrane sol y  $\theta_s$  es el ángulo recorrido por el engrane sol. La ecuación de posición angular que describe el desplazamiento angular del engrane planetario en función de la suma de los movimientos simples es la suma de las ecuaciones 2, 4 y 6. Entonces

$$\theta_p = \theta_c + \frac{ds}{dc} \theta_c - \frac{ds}{dp} \theta_s \quad (7)$$

Ahora solo falta escribir esta ecuación en función de las velocidades angulares  $\omega$  en un tiempo determinado  $t$  ( $\varphi = \omega t$ ).

También sabemos que  $\omega = 2\pi n$ , por lo tanto  $\varphi = 2\pi n t$ . Ahora, sustituyendo estas relaciones en la ecuación de posición angular compuesta obtenemos

$$n_p d_p = n_c (d_p + d_s) - n_s d_s \quad (8)$$

Ya que el diámetro de paso  $d_p$  de un engrane recto es directamente proporcional con el número de dientes podemos expresar la ecuación de la siguiente forma

$$n_p N_p = n_c (N_p + N_s) - n_s N_s \quad (9)$$

donde  $n_p$  son las revoluciones del engrane planetario,  $N_p$  es el número de dientes del engrane planetario,  $n_c$  son las revoluciones del brazo,  $N_c$  es el número de dientes del engrane sol y  $n_s$  son las revoluciones del engrane sol.

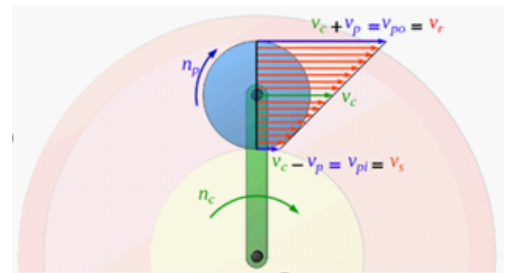
La ecuación 9 es llamada la ecuación fundamental de los engranajes planetarios y es usada para determinar la razón de transmisión de acuerdo con el modo de operación. Esta ecuación a pesar de que no toma en cuenta para su formulación a la corona, no cambia las relaciones de movimiento entre el engrane sol, el brazo y el engrane planeta. Posteriormente hace falta relacionar la ecuación 9 con el diámetro del engrane corona y las revoluciones a las que gira este engrane. Debido a que la velocidad con la que se mueve el engrane planetario en su punto exterior es igual a la velocidad de la corona (no existe deslizamiento) es posible establecer la siguiente relación

$$v_r = v_{po} \quad (10)$$

Lo mismo aplica para determinar la velocidad en el punto de contacto inferior que es donde hacen contacto el engrane sol con el engrane planeta

$$v_s = v_{pi} \quad (11)$$

Ahora hay que tomar en cuenta la influencia del portaplanetas en la velocidad del punto de contacto entre el corona-planeta y el sol-planeta.



Relación de velocidades entre los engranes.

$$v_r = v_c + v_p \quad (12)$$

$$v_s = v_c - v_p \quad (13)$$

Relacionando las ecuaciones 12 y 13 se tiene

$$v_r - v_s = v_c + v_p - v_c + v_p \quad (14)$$

Desarrollando la ecuación 14

$$v_p = \frac{v_r}{2} - \frac{v_s}{2} \quad (15)$$

Sabemos que  $v = \omega \frac{d}{2}$ , por lo tanto

$$n_p d_p = n_r \frac{d_r}{2} - n_s \frac{d_s}{2} \quad (16)$$

Esta ecuación relaciona las velocidades del engrane planetario con el engrane corona y el engrane sol. Sustituyendo la ecuación 16 en la ecuación fundamental de los engranajes planetarios, ecuación 9, obtenemos lo siguiente

$$n_r \frac{d_r}{2} - n_s \frac{d_s}{2} = n_c (d_p + d_s) - n_s d_s \quad (17)$$

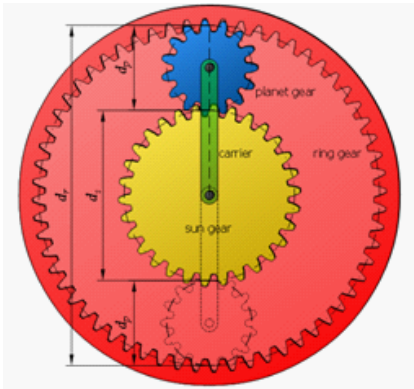
$$n_r d_r = 2n_c (d_p + d_s) - n_s d_s \quad (18)$$

donde:

$n_r$  son las revoluciones de la corona y  $d_r$  es el diámetro de la corona. Debido a la geometría de un tren de engranes planetarios podemos cambiar la ecuación 17 en términos del engrane sol y el engrane corona.

$$d_r = d_s + 2d_p \quad (19)$$

$$d_p = \frac{d_r - d_s}{2} \quad (20)$$



Relaciones geométricas entre los engranes.

$$n_r d_r = n_c (d_r + d_s) - n_s d_s \quad (21)$$

Ya que el diámetro de paso  $d$  de un engrane es directamente proporcional al número de dientes podemos expresar la ecuación de la siguiente forma

$$n_r N_r = n_c (N_r + N_s) - n_s N_s \quad (22)$$

donde  $N_r$  es el número de dientes de la corona.

Con un tren de engranaje planetario se pueden obtener 3 diferentes modos de operación, dependiendo del componente que esté fijo y dónde se encuentre la entrada y la salida. En este caso lo que se deja fija es la corona y la entrada es en el engrane sol, por lo que la salida es en el brazo.

La relación de transmisión es

$$i_r = \frac{n_s}{n_c} \quad (23)$$

Nuestro objetivo de diseño es en la primera etapa, ésta es

$$i_r = \frac{n_s}{n_c} = \frac{8}{1} \quad (24)$$

Es decir, por cada revolución del brazo, el sol debe girar 8 veces. De la ecuación 22 eliminando los términos de acuerdo con el modo de operación elegido.

$$0 = n_c (d_r + d_s) - n_s d_s \quad (25)$$

Obtenemos la ecuación que nos relaciona la relación de transmisión con el diámetro de paso de los engranes corona y sol.

$$i_r = \frac{n_s}{n_c} = \frac{(d_r + d_s)}{d_s} \quad (26)$$

Sustituyendo la relación de transmisión en la ecuación 19, obtenemos

$$3d_s = d_p \quad (27)$$

Por último, nos falta relacionar lo siguiente

$$\frac{3}{7} d_r = d_p \quad (28)$$

Las mismas tres relaciones aplican para los números de dientes

$$7N_s = N_r \quad (29)$$

$$3N_s = N_p \quad (30)$$

$$\frac{3}{7} N_r = N_p \quad (31)$$

Ahora falta seleccionar el engrane de acuerdo con estas relaciones de diámetros y números de dientes entre engranes. Combinar los diferentes pares de engranes con diferentes números de dientes cambia la velocidad y el par en el engranaje. Para el correcto funcionamiento de cada par de engranes estándar, estos deben tener el mismo ángulo de presión y el mismo módulo.

$$m = \frac{D_p}{N} \quad (32)$$

donde  $m$  es el módulo,  $D_p$  es el diámetro primitivo y  $N$  representa el número de dientes.

Para seleccionar cada engrane fue necesario utilizar las relaciones de diámetros y números de dientes obtenidos anteriormente para cumplir con la relación de transmisión y con el tamaño.

$$d_s + 2d_p < 250 \text{ mm}$$

Por lo que seleccionamos engranes métricos con un módulo de 2, debido a que, de acuerdo con un catálogo, estos cumplen con las relaciones definidas de diámetros y números de dientes.

$$2 = m = \frac{224 \text{ mm}}{112 \text{ dientes}} = \frac{32 \text{ mm}}{16 \text{ dientes}} = \frac{96 \text{ mm}}{48 \text{ dientes}}$$

$$N_r = 112 \text{ dientes}$$

$$N_s = 16 \text{ dientes}$$

$$N_p = 48 \text{ dientes}$$

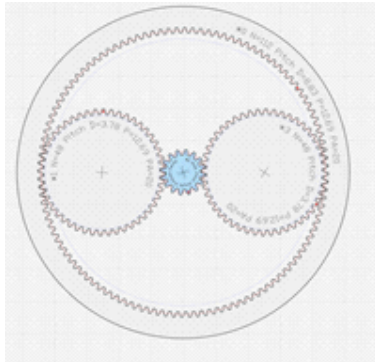
$$d_r = 224 \text{ dientes}$$

$$d_s = 32 \text{ dientes}$$

$$d_p = 96 \text{ dientes}$$

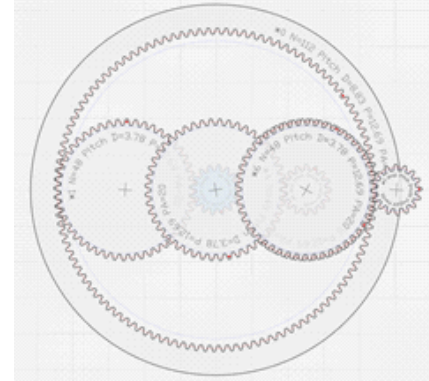
Para las demás medidas de los engranes se debe considerar que ya están definidas y son medidas estándar. Todas están en función del paso diametral  $p_d$ .

$$\begin{array}{l} \text{Adendum} = \frac{1}{p_d} \quad \text{Dedendum} = \frac{1.25}{p_d} \quad h_k = \frac{2}{p_d} \quad h_t = \frac{2.2}{p_d + 0.002} \\ e_c = \frac{1.571}{p_d} \quad r_f = \frac{0.3}{p_d} \quad h = \frac{0.2}{p_d + 0.002} \quad w_b = \frac{0.25}{p_d} \end{array}$$

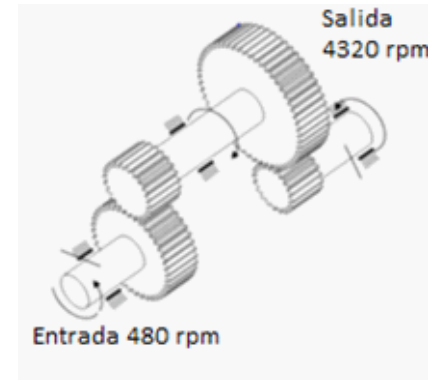


*Etapa planetario.*

Ahora bien, es necesario agregar una etapa más para alcanzar la relación de transmisión que definimos al principio de 1:72. Debido a que solo con la etapa del planetario alcanzamos una relación de transmisión de 1:8. Con nuestras consideraciones, solo es posible dar 60 rpm de entrada en el engranaje planetario manualmente, por lo que, con el diseño que hicimos del mismo solo alcanzamos 480 rpm en el eje de salida de esta primera etapa. Para alcanzar el objetivo de 3600 rpm hicimos uso de un tren de engranes compuesto, que va conectado al eje de salida del engranaje planetario.



*Etapa de planetario más tren de engranajes compuesto.*



*Tren de engranajes compuesto utilizado a la salida del planetario.*

Sabemos que la relación de transmisión de un tren de engranes compuestos es la siguiente

$$Rv = \left[ \frac{N_1}{N_2} \right] \left[ \frac{N_3}{N_4} \right] \quad (33)$$

$$Rv = \frac{\text{Producto del número de dientes de los elementos conductores}}{\text{Producto del número de dientes de los elementos conducidos}}$$

Por lo que conectamos al eje de salida del engranaje planetario un engrane del mismo tamaño que elegimos para el

engrane planeta, este engrane es el piñón (engrane impulsor) de la segunda etapa.

$$\begin{aligned} d_1 &= 96 \text{ mm} \\ N_1 &= 48 \text{ dientes} \end{aligned}$$

En otro eje va conectado un engrane con las mismas especificaciones del engrane sol.

$$\begin{aligned} d_2 &= 32 \text{ mm} \\ N_2 &= 16 \text{ dientes} \end{aligned}$$

En este mismo eje va conectado otro engrane con las mismas especificaciones del engrane planeta.

$$\begin{aligned} d_3 &= 96 \text{ mm} \\ N_3 &= 48 \text{ dientes} \end{aligned}$$

Que a su vez impulsa a un engrane con las mismas especificaciones del engrane sol, que está en el eje de salida donde medimos la velocidad final después de las dos etapas de transformación.

$$\begin{aligned} d_4 &= 32 \text{ mm} \\ N_4 &= 16 \text{ dientes} \end{aligned}$$

Por lo que la relación de transmisión del tren de engranajes compuestos conectado a la salida del planetario queda

$$Rv = \left[ \frac{48}{16} \right] \left[ \frac{48}{16} \right] = 9 \quad (34)$$

Es decir, multiplicamos la velocidad de salida de la primera etapa que es el engranaje planetario por 9. Por lo que la velocidad estimada de salida considerando la entrada de 60 rpm es de 4320 rpm, después de las dos etapas.

### III. ANÁLISIS DE ESFUERZOS

Se analizarán los esfuerzos en los dientes de los engranes para definir el material que debe ser utilizado. Así como las medidas de estos. Vamos a diseñar el engrane de acuerdo con una vida infinita. Para esto utilizamos la ecuación de Lewis modificada (método AGMA) [1].

$$\sigma_t = \frac{W_t P_d}{F J} \frac{k_a k_s k_m k_b}{k_v} \quad (35)$$

Es necesario calcular el esfuerzo tangencial para cada engrane en el mecanismo. En total tenemos 7 engranes y el engrane corona. Primero vamos a calcular los engranes del planetario.

$$\begin{aligned} N_s &= 16 \text{ dientes} \\ N_p &= 48 \text{ dientes} \\ d_s &= 32 \text{ mm} = 1.25 \text{ in} \\ d_p &= 96 \text{ mm} = 3.75 \text{ in} \end{aligned}$$

La potencia que el sistema deberá ser capaz de transmitir es de 4 hp. La velocidad de línea en ft/min es la siguiente, y es la misma en el par de engranes en contacto (no deslizamiento).

$$V_t = \frac{\pi d_s n_s}{12} = \frac{\pi d_p n_p}{12} = 157.07 \text{ ft/min} \quad (36)$$

La fuerza tangencial en lbf en el par de engranes es

$$W_t = \frac{33000P}{V_t} = 840.38 \text{ lbf} \quad (37)$$

Ahora seleccionamos un factor geométrico J (de tablas), para el engrane sol y planeta.

$$\begin{aligned} J_p &= 0.36 \\ J_s &= 0.21 \end{aligned}$$

#### FACTOR DE APLICACIÓN, $k_a$

Para determinar el factor de aplicación  $k_a$  se hacen las siguientes consideraciones de diseño:

$$\begin{aligned} \text{Fuente de poder:} & \text{ Uniforme} \\ \text{Máquina que es impulsada:} & \text{ Uniforme} \\ k_{ap} &= 1.0 \\ k_{as} &= 1.0 \end{aligned}$$

#### FACTOR DE TAMAÑO, $k_s$

Como el módulo es menor a 5.

$$\begin{aligned} k_{sp} &= 1.0 \\ k_{ss} &= 1.0 \end{aligned}$$

#### FACTOR DE DISTRIBUCIÓN DE CARGA, $k_m$

El espesor o ancho de la cara se necesita para el factor de distribución de la carga.

$$\begin{aligned} F_G = \frac{12}{p_d} &= \frac{12}{12.8 \frac{\text{dientes}}{\text{in}}} = 0.9375 \text{ in} = 23.81 \text{ mm} \\ k_{mp} &= 1.6 \\ k_{ms} &= 1.6 \end{aligned}$$

#### FACTOR DE ESPESOR DE CORONA, $k_b$

En ambos casos el valor será 1 por ser discos sólidos.

$$\begin{aligned} k_{bp} &= 1.0 \\ k_{bs} &= 1.0 \end{aligned}$$

#### FACTOR DE DINÁMICA, $k_v$

$$\begin{aligned} k_v &= \left( \frac{A + \sqrt{V_t}}{A} \right)^B \\ A &= 50 + 56(1 - B) \\ B &= 0.25(12 - Q_v)^{2/3} \end{aligned} \quad (38)$$

Debido a la alta velocidad de línea, el número de nivel de precisión de la transmisión es, por tablas

$$\begin{aligned}
Q_v &= 6 \\
k_{vp} &= 1.159 \\
k_{vs} &= 1.159
\end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación de Lewis modificada, ecuación 35, se obtiene el esfuerzo por flexión en el engrane sol y planeta.

$$\begin{aligned}
\sigma_{tp} &= 43.99 \text{ ksi} \\
\sigma_{ts} &= 75.42 \text{ ksi}
\end{aligned}$$

Se repite el procedimiento para el cálculo de los esfuerzos en el tren de engranajes compuesto que sale del sistema planetario. Para la segunda etapa después del planetario se tiene

$$\begin{aligned}
Vt &= \frac{\pi(3.77 \text{ in})(480 \text{ rpm})}{12} = 473.75 \text{ ft/min} \\
W_t &= \frac{33000(4 \text{ hp})}{473.75 \text{ ft/min}} = 278.62 \text{ lbf} \\
Q_v &= 6 \\
k_v &= 1.34 \\
Vt_{p2} &= 12.62 \text{ kpsi} \\
Vt_{s2} &= 21.62 \text{ kpsi}
\end{aligned}$$

Para la tercera etapa se tiene

$$\begin{aligned}
Vt &= \frac{\pi(3.77 \text{ in})(1440 \text{ rpm})}{12} = 1421.25 \text{ ft/min} \\
W_t &= \frac{33000(4 \text{ hp})}{473.75 \text{ ft/min}} = 92.87 \text{ lbf} \\
Q_v &= 6 \\
B &= 0.63 \\
A &= 238.72 \\
k_v &= 1.09 \\
Vt_{p2} &= 5.17 \text{ kpsi} \\
Vt_{s2} &= 8.86 \text{ kpsi}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el análisis de esfuerzos para cada etapa, de cada engrane, queda resumido en la siguiente tabla.

| Etapla planetaria                  | Segunda etapa                       | Tercera etapa                      |
|------------------------------------|-------------------------------------|------------------------------------|
| $\sigma_{tp} = 43.99 \text{ kpsi}$ | $\sigma_{tp2} = 12.62 \text{ kpsi}$ | $\sigma_{tp3} = 5.17 \text{ kpsi}$ |
| $\sigma_{ts} = 75.42 \text{ kpsi}$ | $\sigma_{ts2} = 12.62 \text{ kpsi}$ | $\sigma_{ts3} = 8.86 \text{ kpsi}$ |

## SELECCIÓN DE MATERIAL PARA LOS ENGRANES

Dado que no estará propenso el sistema de engranes a cargas muy altas y basta considerar una vida útil de 107 cilos de carga, con una confiabilidad del 99%, se considerará un material con bajo contenido de carbono.

AISI 1040 HR, condición: Cementado y templado.

HRC: 64

Le corresponde una resistencia última a la tensión de  $S_{ut} = 76 \text{ kpsi}$

$$75.42 \text{ kpsi} < 76 \text{ kpsi}.$$

Por lo tanto, el material resulta adecuado para todos los engranes.

## DISEÑO DE LOS EJES

### PRIMER EJE

Lo que sigue es definir los diámetros de los ejes donde van a ir montados los engranes. Proponemos un AISI 1040 CD para los tres ejes.

$$\begin{aligned}
S_{ut} &= 85 \text{ ksi} \\
S_y &= 71 \text{ ksi}
\end{aligned}$$

El límite de resistencia a la fatiga para aceros es

$$\begin{aligned}
S_{e'} &= 0.5 S_{ut} \\
S_{e'} &= 0.5(85 \text{ ksi}) = 42.5 \text{ ksi}
\end{aligned}$$

Consideramos los factores que modifican el límite de resistencia a la fatiga.

$$S_e = K_{\text{carga}} K_{\text{tamaño}} K_{\text{superficie}} K_{\text{temperatura}} K_{\text{confiabilidad}} S_{e'} \quad (39)$$

Para los efectos de carga, consideramos que predominan las cargas por flexión.

$$K_{\text{carga}} = 1.000$$

Para los efectos de tamaño consideramos un diámetro tentativo de los ejes de 0.5 in.

$$K_{\text{tamaño}} = 0.688$$

Para los efectos de superficie consideramos que el eje fue estirado en frio.

$$K_{\text{superficie}} = 0.831$$

Para los efectos de temperatura se considera la aplicación a temperatura ambiente.

$$K_{\text{temperatura}} = 1.000$$

En cuanto a la confiabilidad vamos a considerar una de 99.99

$$K_{\text{confiabilidad}} = 0.702$$

Multiplicando todos estos factores por el límite de resistencia a la fatiga obtenemos

$$S_e = 22.48 \text{ ksi}$$

Ahora vamos a considerar un factor de diseño. Debido a que consideramos condiciones industriales típicas tenemos

$$F_s = 3$$

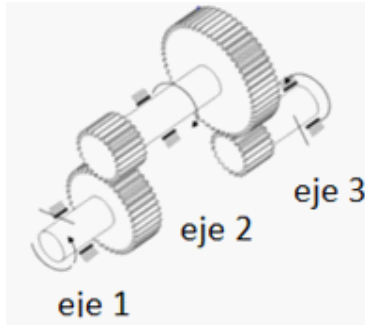
En seguida, vamos a calcular el par de torsión en cada eje, considerando que todos los ejes transmiten los 4 hp.

$$T = \frac{63000(P)}{n} \quad (40)$$

Además de la fuerza que ejerce cada engrane sobre el eje.

$$Wt_A = \frac{2T}{d_A} \quad (41)$$

$$Wr_A = Wt_A \tan(\phi) \quad (42)$$



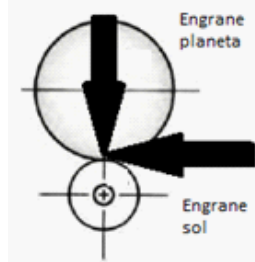
Etapa posterior a engranaje planetario.

El par del eje de la manivela al portaplanetas es

$$T = \frac{63000(4 \text{ hp})}{60 \text{ rpm}} = 4200 \text{ lbf in}$$

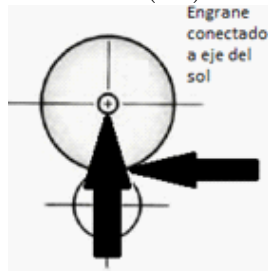
El eje 1 (eje del planetario), tiene 2 engranes. Vamos a calcular las fuerzas ejercidas por los engranes.

$$T = \frac{63000(4 \text{ hp})}{480 \text{ rpm}} = 525 \text{ lbf in}$$



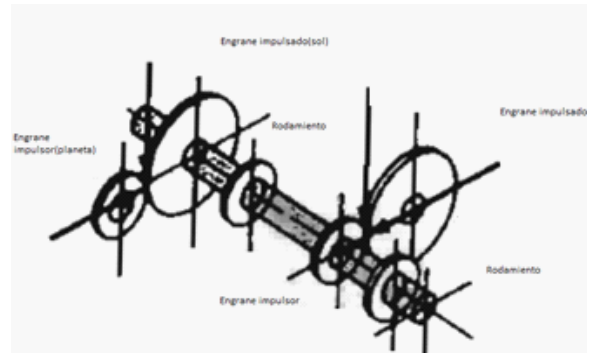
$$Wt_s = \frac{2(525 \text{ lbf in})}{1.25 \text{ in}} = 840 \text{ lbf}$$

$$Wr_s = 840 \text{ lbf} \tan(20^\circ) = 305.73 \text{ lbf}$$



$$Wt_{ps} = \frac{2(525 \text{ lbf in})}{3.77 \text{ in}} = 278.51 \text{ lbf}$$

$$Wr_{ps} = 278.51 \text{ lbf} \tan(20^\circ) = 101.37 \text{ lbf}$$



Esquema de elementos en eje 1.

Ahora vamos a dibujar los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante del eje 1 en dos planos.

$$Wt_s = 840 \text{ lbf} = 3736 \text{ N}$$

$$Wr_s = 305.73 \text{ lbf} = 1359 \text{ N}$$

$$Wt_{ps} = 278.51 \text{ lbf} = 1238 \text{ N}$$

$$Wr_{ps} = 101.37 \text{ lbf} = 450 \text{ N}$$



Fuerzas en el plano Y-Z en el eje 1.

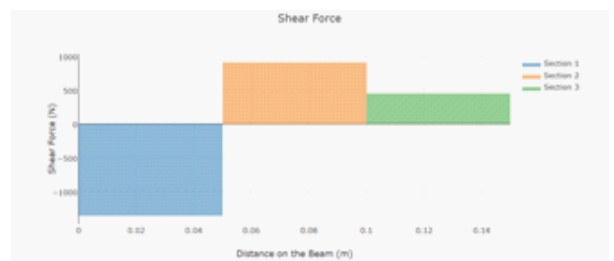
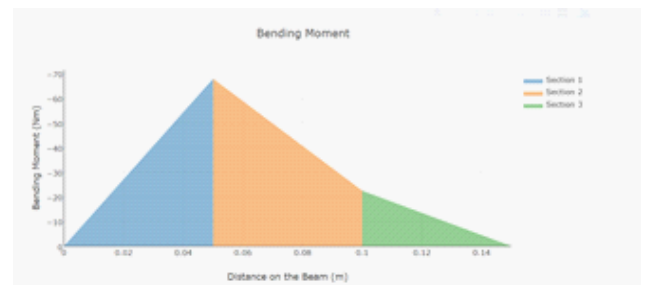


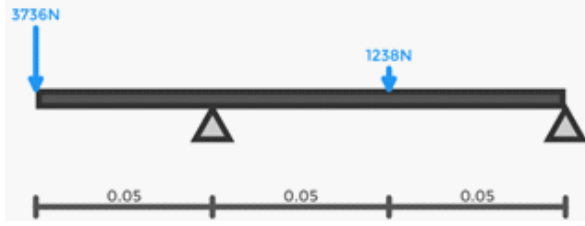
Diagrama de fuerzas cortantes.



$$Fr_{y1} = 2263.5 \text{ N} = 509.86 \text{ lbf}$$

$$Fr_{y2} = -454.5 \text{ N} = -103.187 \text{ lbf}$$

$$\begin{aligned}
M_{y_{engrane1}} &= 0 \text{ lbf in} \\
M_{y_{chumacera1}} &= -67.95 \text{ Nm} = -601.4 \text{ lbf in} \\
M_{y_{engrane2}} &= -22.5 \text{ Nm} = -509.86 \text{ lbf in} \\
M_{y_{chumacera2}} &= 0 \text{ lbf in}
\end{aligned}$$



Fuerzas en el plano X-Z en el eje 1.

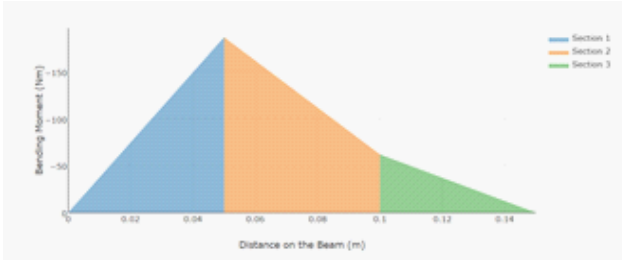
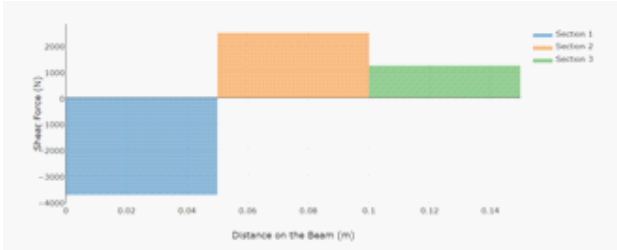


Diagrama de momentos flexionantes.

$$\begin{aligned}
Fr_{x1} &= 6223 \text{ N} = 1401.45 \text{ lbf} \\
Fr_{x2} &= -1249 \text{ N} = -5604.7 \text{ lbf} \\
M_{x_{engrane1}} &= 0 \text{ lbf in} \\
M_{x_{chumacera1}} &= -186.8 \text{ Nm} = -1653.31 \text{ lbf in} \\
M_{x_{engrane2}} &= -61.9 \text{ Nm} = -547.86 \text{ lbf in} \\
M_{x_{chumacera2}} &= 0 \text{ lbf in}
\end{aligned}$$

Ahora que tenemos los componentes vamos a calcular el momento alternante total.

$$Ma = \frac{\sqrt{Mx^2 + My^2}}{1000} \quad (43)$$

Usando la ecuación 43, vamos a calcular el momento alternante total en donde están las chumaceras

$$\begin{aligned}
Ma_{chumacera1} &= \sqrt{-601.4 \text{ lbf in}^2 + (547.86 \text{ lbf in}^2)} \\
Ma_{chumacera1} &= 1759 \text{ lbf in} \\
Ma_{engrane2} &= \sqrt{-509.86 \text{ lbf in}^2 + (-547.86 \text{ lbf in}^2)} \\
Ma_{engrane2} &= 748.4 \text{ lbf in}
\end{aligned}$$

En seguida vamos a calcular el diámetro mínimo requerido para las 4 secciones del eje, la parte donde van los 2 engranes y la parte donde van las dos chumaceras. En cuanto a lo referente de como vamos a montar todos estos elementos en el eje, es necesario considerar los factores de concentración de esfuerzos que genera cada cuña, chafan o ranura de anillo para sujeción.

El método de diseño de ejes ASME, pide que se calcule un diámetro mínimo para cada cuña, chafía o ranura que exista a ambos lados de la zona donde va montado algún elemento de máquina o chumacera sobre el eje. Sin embargo, para fines prácticos, solo vamos a considerar aquel factor que sea mayor, debido a que éste nos dará el diámetro mínimo requerido para soportar las cargas.

### CONCENTRACIONES DE ESFUERZOS

Las siguientes ecuaciones nos dan el valor del factor de concentraciones de esfuerzos dinámico a partir del factor de concentración de esfuerzos estático.

$$q = \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{r}}} \quad (44)$$

$$k_f = 1 + q(k_t - 1) \quad (45)$$

El factor de concentración de esfuerzos estático tiene distintos valores resumidos en la siguiente tabla.

| Factores de concentración de esfuerzos |              |
|--|--------------|
| Discontinuidad geométrica              | Factor $k_t$ |
| Cuñero de perfil                       | 2.0          |
| Cuñero de corredera deslizable         | 1.6          |
| Chafán con bordes cortantes            | 2.5          |
| Chafán con bordes redondeados          | 1.5          |
| Ranura para anillo de sujeción         | 3            |

El valor más alto es el ranura correspondiente a la ranura para anillo de sujeción, por lo que los cálculos se van a hacer con ese factor de concentración de esfuerzos.

$$k_t = 3$$

Usamos las ecuaciones 44 y 45, la constante de Neuber (en función de la resistencia del material a la tracción), y un radio de chafán en la ranura para determinar el factor de concentración dinámico.

$$\begin{aligned}
r &= 0.03 \\
a &= 0.075 \\
q &= 0.697 \\
k_f &= 2.3956
\end{aligned}$$

Ahora si vamos a utilizar la ecuación que propone el método ASME para cada sección de interés en el eje.



$$d = \left\{ \frac{32N_f}{\pi} \left[ k_f \left( \frac{M_a}{S_e} \right)^2 + \frac{3}{4} \left( \frac{T_m}{S_y} \right)^2 \right]^{1/2} \right\}^{1/3} \quad (46)$$

Con toda la información obtenida, sustituimos en la ecuación 46 para las 4 partes de interés en el eje 1.

DIÁMETRO DE LA SECCIÓN DEL EJE DONDE SE ALOJA EL ENGRANE 1

$$M_{a_{engrane1}} = 0 \text{ lbf in}$$

$$T = 525 \text{ lbf in}$$

Utilizando la ecuación 46 obtenemos

$$d = 0.580 \text{ in}$$

DIÁMETRO DE LA SECCIÓN DEL EJE DONDE SE ALOJA LA CHUMACERA DEL ENGRANE 1

$$M_{a_{chumacera1}} = 1759 \text{ lbf in}$$

$$T = 525 \text{ lbf in}$$

Utilizando la ecuación 46 obtenemos

$$d = 1.82 \text{ in}$$

DIÁMETRO DE LA SECCIÓN DEL EJE DONDE SE ALOJA EL ENGRANE 2

$$M_{a_{engrane2}} = 748.4 \text{ lbf in}$$

$$T = 525 \text{ lbf in}$$

Utilizando la ecuación 46 obtenemos

$$d = 1.37 \text{ in}$$

DIÁMETRO DE LA SECCIÓN DEL EJE DONDE SE ALOJA LA CHUMACERA DEL ENGRANE 2

$$M_{a_{chumacera2}} = 0 \text{ lbf in}$$

$$T = 525 \text{ lbf in}$$

Utilizando la ecuación 46 obtenemos

$$d = 0.580 \text{ in}$$

El resumen de resultados se muestra en la siguiente tabla.

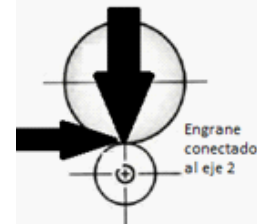
| Eje 1                  |                       |                       |                        |
|------------------------|-----------------------|-----------------------|------------------------|
| Engrane 1              | Chumacera 1           | Engrane 2             | Chumacera 2            |
| $d = 0.580 \text{ in}$ | $d = 1.82 \text{ in}$ | $d = 1.37 \text{ in}$ | $d = 0.580 \text{ in}$ |

SEGUNDO EJE

Con un par de entrada de

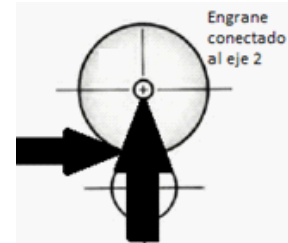
$$T = \frac{63000(15 \text{ hp})}{1440 \text{ rpm}} = 175 \text{ lbf in}$$

Vamos a calcular las fuerzas ejercidas por los engranes.



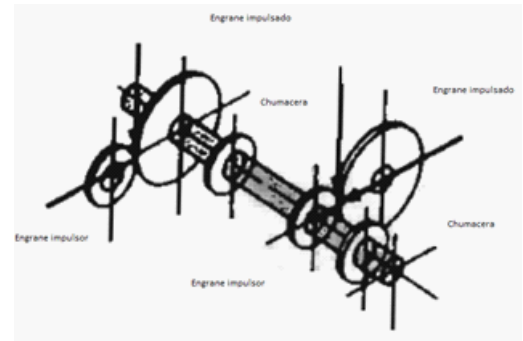
$$Wt_{s2} = \frac{2(175 \text{ lbf in})}{1.25 \text{ in}} = 280 \text{ lbf}$$

$$Wr_{s2} = 280 \text{ lbf } \tan(20^\circ) = 101.9 \text{ lbf}$$



$$Wt_{p3} = \frac{2(175 \text{ lbf in})}{3.77 \text{ in}} = 92.8 \text{ lbf}$$

$$Wr_{p3} = 92.8 \text{ lbf } \tan(20^\circ) = 33.79 \text{ lbf}$$



Esquema de elementos en eje 2.

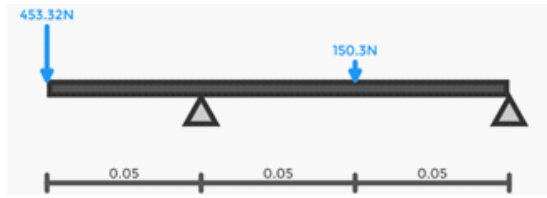
Ahora vamos a realizar los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante del eje 2 en dos planos.

$$Wt_{s2} = 280 \text{ lbf} = 1245.5 \text{ N}$$

$$Wr_{s2} = 101.911 \text{ lbf} = 453.32 \text{ N}$$

$$Wt_{p3} = 92.838 \text{ lbf} = 412 \text{ N}$$

$$Wr_{p3} = 33.79 \text{ lbf} = 150.30 \text{ N}$$



Fuerzas en el plano Y-Z en el eje 2.

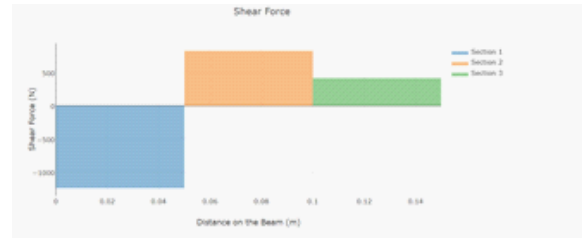


Diagrama de fuerzas cortantes.

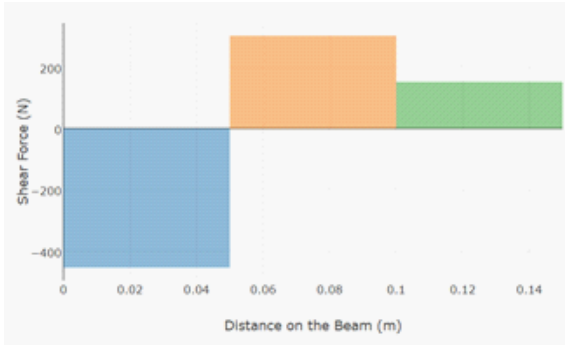


Diagrama de fuerzas cortantes.

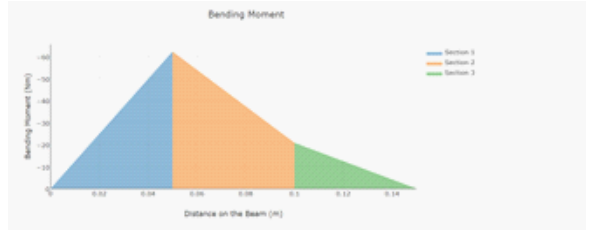


Diagrama de momentos flexionantes.

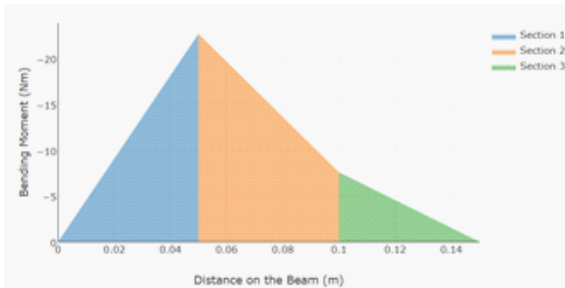


Diagrama de momentos flexionantes.

$$Fr_{y1} = 755.13 \text{ N} = 169.75 \text{ lbf}$$

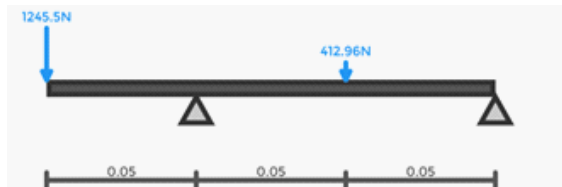
$$Fr_{y2} = -151.51 \text{ N} = -34.06 \text{ lbf}$$

$$My_{engrane1} = 0 \text{ lbf in}$$

$$My_{chumacera1} = -22.66 \text{ Nm} = -200.55 \text{ lbf in}$$

$$My_{engrane2} = -7.57 \text{ Nm} = -67 \text{ lbf in}$$

$$My_{chumacera2} = 0 \text{ lbf in}$$



Fuerzas en el plano X-Z en el eje 2.

$$Fr_{x1} = 2074.73 \text{ N} = 466.4 \text{ lbf}$$

$$Fr_{x2} = -416.27 \text{ N} = -93.59 \text{ lbf}$$

$$Mx_{engrane1} = 0 \text{ lbf in}$$

$$Mx_{chumacera1} = -62.75 \text{ Nm} = -555.38 \text{ lbf in}$$

$$Mx_{engrane2} = -20.81 \text{ Nm} = -184.18 \text{ lbf in}$$

$$Mx_{chumacera2} = 0 \text{ lbf in}$$

Ahora que tenemos los componentes vamos a calcular el momento alternante total con la ecuación 43

$$Ma_{chumacera1} = \sqrt{-200.55 \text{ lbf in}^2 + (-555.38 \text{ lbf in}^2)}$$

$$Ma_{chumacera1} = 590.48 \text{ lbf in}$$

$$Ma_{engrane2} = \sqrt{-67 \text{ lbf in}^2 + (-184.18 \text{ lbf in}^2)}$$

$$Ma_{engrane2} = 195.98 \text{ lbf in}$$

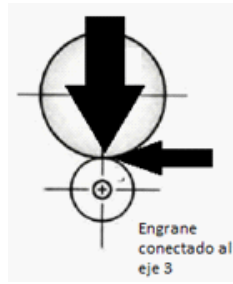
En seguida vamos a calcular el diámetro mínimo requerido para las 4 secciones del eje, la parte donde van los 2 engranes y la parte donde van las dos chumaceras. Básicamente se sigue el mismo procedimiento que antes. El resumen de resultados para el eje 2 se muestra en la siguiente tabla.

| Eje 2                  |                        |                        |                        |
|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|
| Engrane 1              | Chumacera 1            | Engrane 2              | Chumacera 2            |
| $d = 0.402 \text{ in}$ | $d = 1.239 \text{ in}$ | $d = 0.849 \text{ in}$ | $d = 0.402 \text{ in}$ |

### TERCER EJE

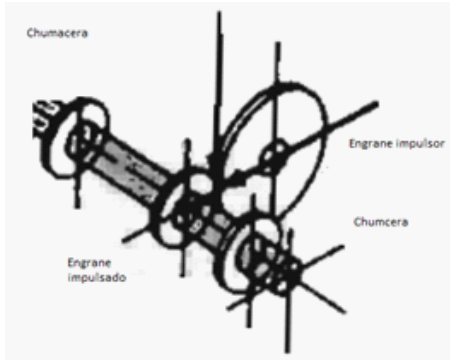
Las fuerzas ejercidas por el contacto entre engranes, del tren de engranes compuesto son

$$T = \frac{63000(15 \text{ hp})}{4320 \text{ rpm}} = 58.33 \text{ lbf in}$$



$$Wt_{s3} = \frac{2(58.33 \text{ lbf in})}{1.25 \text{ in}} = 93.328 \text{ lbf}$$

$$Wr_{s3} = 92.83 \text{ lbf } \tan(20^\circ) = 33.96 \text{ lbf}$$



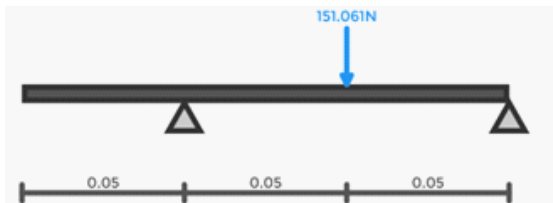
Esquema de elementos en eje 3.

Ahora vamos a realizar los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante del eje 3 en dos planos.

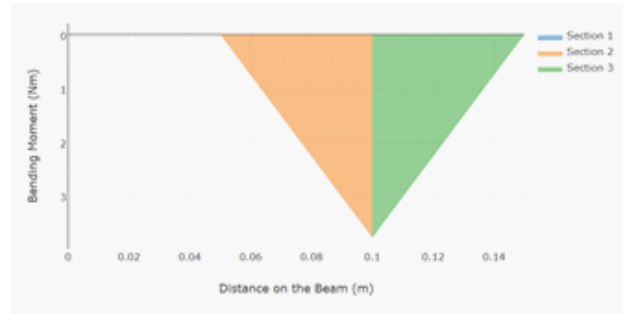
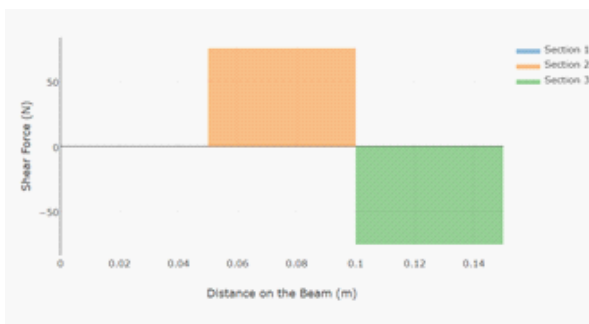
$$Wt_{s3} = 93.328 \text{ lbf} = 415.14 \text{ N}$$

$$Wr_{s3} = 33.96 \text{ lbf} = 151.061 \text{ N}$$

Plano Y-Z



Fuerzas en el plano Y-Z en el eje 3.



$$Fr_{y1} = 75.53 \text{ N} = 16.97 \text{ lbf}$$

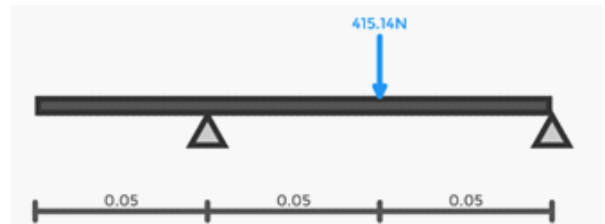
$$Fr_{y2} = 75.53 \text{ N} = 16.97 \text{ lbf}$$

$$My_{chumacera1} = 0 \text{ lbf in}$$

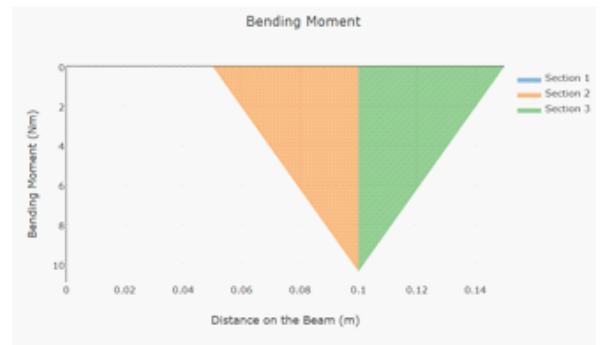
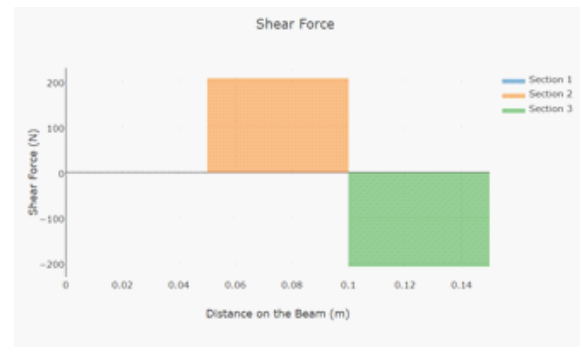
$$My_{engrane1} = 3.77 \text{ Nm} = 33.36 \text{ lbf in}$$

$$My_{chumacera2} = 0 \text{ lbf in}$$

Plano X-Z



Fuerzas en el plano X-Z en el eje 3.



$$Fr_{x1} = 207.57 \text{ N} = 46.66 \text{ lbf}$$

$$Fr_{x2} = 207.57 \text{ N} = 46.66 \text{ lbf}$$

$$Mx_{chumacera1} = 0 \text{ lbf in}$$

$$Mx_{engrane1} = 10.37 \text{ Nm} = 91.78 \text{ lbf in}$$

$$Mx_{chumacera2} = 0 \text{ lbf in}$$

Ahora que tenemos los componentes vamos a calcular el momento alternante total con la ecuación 43

$$Ma_{engrane2} = \sqrt{33.36 \text{ lbf in}^2 + 91.78 \text{ lbf in}^2}$$

$$Ma_{engrane2} = 97.654 \text{ lbf in}$$

En seguida vamos a calcular el diámetro mínimo requerido para las 3 secciones del eje, la parte donde va el engrane y la parte donde van las dos chumaceras. El procedimiento es similar al seguido arriba. El resumen de resultados se muestra en la siguiente tabla.

| Eje 3                  |                        |                        |
|------------------------|------------------------|------------------------|
| Engrane 1              | Chumacera 1            | Engrane 2              |
| $d = 0.697 \text{ in}$ | $d = 0.279 \text{ in}$ | $d = 0.279 \text{ in}$ |

## IV. RESULTADOS: PROTOTIPO

Se diseñó y construyó un prototipo de madera con los tamaños calculados en la etapa de diseño.



Con la construcción del prototipo se pudo validar que la relación de transmisión especificada se cumpliera. Al hacer girar la manivela a una tasa de 60 rpm (una vuelta por segundo) se consiguen las 3600 rpm especificadas. Ahora bien, en la práctica, el dispositivo puede hacerse girar a una razón de 120 rpm en la entrada. De esta manera se alcanzó una velocidad de salida de más de 7500 rpm. Se verificó la velocidad de salida mediante el uso de un tacómetro digital.

### EVIDENCIA

El funcionamiento del prototipo construido se puede comprobar de forma audiovisual en la siguiente liga: <https://www.youtube.com/user/txux77/videos>. El video se titula: "Avances en el diseño de un multiplicador de velocidad 2020 FI-UNAM"

## CONCLUSIONES

TLÁLOC FERNANDO CARDONA RUIZ

En este proyecto aplicamos varios temas que se desarrollaron a lo largo del curso. La etapa de desarrollo de la teoría para aplicarla es la que personalmente más me gusta y es a la que dedico más tiempo. No fue posible aplicar muchos de los resultados del proceso de diseño, debido a que la construcción del dispositivo se hizo con los materiales disponibles y cuidando el costo total del mismo. A pesar de todo, pudimos acoplar bien los componentes y obtener la mayor velocidad de salida. Se pudo comprobar que la teoría utilizada y la selección de engranes fue la correcta. Donde tenemos deficiencias es en la selección de ejes y el montaje de estos. Sin embargo, fue un proyecto enriquecedor y que logro su objetivo; aprender las bases del diseño mecánico.

MIGUEL ÁNGEL GARCÍA GRANADOS

En este proyecto se pudo aplicar la teoría de diseño de engranajes para alcanzar una velocidad objetivo a partir de una reducida velocidad de entrada y limitada al movimiento manual. Se usó como base un engranaje planetario, posteriormente se agregó un tren de engranajes de dos etapas para incrementar la relación de velocidad. En el dispositivo construido se observó un notable incremento de la relación de velocidades con la mejora propuesta. Además de su simplicidad, fue relativamente sencillo construir el prototipo. Se comprobó a su vez, la validez de las ecuaciones empleadas, al notar una operación suave y estable en los engranajes, al no haber interferencias físicas entre los dientes de los engranajes o desfases en el movimiento dentro del engranaje planetario.

MILTON OSMAR SOSA CORONA

Con las especificaciones solicitadas en este proyecto logramos diseñar un prototipo compacto y funcional de un multiplicador de velocidad. Comprobando la validez de los conceptos vistos en clase, la utilización de un sistema planetario resultó de mucha utilidad, ya que era la mejor forma de cumplir con el tamaño y la velocidad final requerida. A pesar de que la mayoría de los procedimientos no aplican para el material utilizado en la construcción de éste, nos sirvió para visualizar todos los aspectos que debemos tomar en consideración para el diseño de un dispositivo de este tipo.

GALARZA MARTÍNEZ ABEL

En este dispositivo se concretan y validan las ecuaciones y procedimientos de diseño de engranajes vistos en clase. Durante la fabricación del dispositivo se buscaron formas de darle robustez al conjunto, y de usar los materiales adecuados para lograr un movimiento fluido y seguro. Durante la operación se pudo comprobar cómo las modificaciones al diseño original fueron de gran ayuda para aumentar considerablemente las revoluciones por minuto en el eje de salida. Se emplearon rodamientos para asegurar que hubiera el mínimo

roce entre partes giratorias y así lograr un valor de velocidad más fiel al que establecieron nuestros cálculos.

## REFERENCIAS

- R. Yáñez-Valdez, Manual de diseño de elementos de máquinas, notas de clase, Sem: 2020-1.
- R. Budynas and J. K. Nisbett, Diseño en ingeniería mecánica de Shigley, 10a ed., McGraw Hill, México. 2019.
- R. L. Mott, Diseño de elementos de máquinas, 4a ed. Prentice Hall, México, 2006.
- R. Willis, Principles of mechanism, Cambridge Library Collection-Technology, 2010.