



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

**PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN
INGENIERÍA**

**MÉTODO DEL ELEMENTO FINITO ESTOCÁSTICO
EN GEOTECNIA. ENFOQUE ESPECTRAL**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

**MAESTRA EN INGENIERÍA
(MECÁNICA DE SUELOS)**

P R E S E N T A:

ALMA ROSA PINEDA CONTRERAS

DIRECTOR DE TESIS: DR. GABRIEL AUVINET GUICHARD



MÉXICO D. F., CIUDAD UNIVERSITARIA
OCTUBRE DE 2007

Jurado Asignado:

Presidente: Dr. Rigoberto Rivera Constantino
Secretario: M. en I. Agustín Deméneghi Colina
Vocal: Dr. Gabriel Auvinet Guichard
1^{er} Suplente: M. en I. Roberto Magaña Del Toro
2^{do} Suplente: Dr. Juan Manuel Mayoral Villa

Lugar donde se realizo la tesis:

Instituto de Ingeniería de la UNAM, Ciudad Universitaria.

Director de tesis:

Dr. Gabriel Auvinet Guichard

Firma

A mi mamá

Agradecimientos

Mi agradecimiento al Dr. Gabriel Auvinet Guichard por la oportunidad; por confiar en sus estudiantes sin distinción alguna.

Método del Elemento Finito Estocástico en Geotecnia. Enfoque Espectral.

ÍNDICE

	Pág.
Resumen	iv
Nomenclatura	v
Capítulo 1 Introducción	
1.1 Antecedentes	1
1.2 Objetivos	2
1.3 Alcances	2
Capítulo 2 Incertidumbre en los análisis realizados por el MEF	
2.1 Fuentes de incertidumbre	3
2.1.1 Variabilidad espacial	3
2.1.2 Errores aleatorios y sistemáticos	3
2.2 Representación de la incertidumbre en geotecnia	3
2.2.1 Variables aleatorias	4
2.2.2 Campos aleatorios	4
2.2.2.1 Campos estimativos	4
2.2.2.2 Campos descriptivos	4
2.3 Método del Elemento Finito Estocástico	5
2.3.1 Método de perturbaciones	5
2.3.1.1 Planteamiento general (aproximación segundos momentos)	5
2.3.1.2 Método de las perturbaciones aplicado al MEF lineal	6
2.3.1.3 Método de aproximaciones puntuales	8
2.3.2 Métodos de simulación. Monte Carlo	11
2.3.3 Método espectral	11
Capítulo 3 Enfoque espectral	
3.1 Introducción	12
3.2 Discretización de campos aleatorios descriptivos	13
3.2.1 Métodos de discretización por puntos	13
3.2.2 Métodos de discretización de promedios	15
3.2.3 Métodos de expansión en serie	16
3.3 Representación de la incertidumbre	18
3.3.1 Representación de campos aleatorios mediante la expansión en serie de <i>Karhunen-Loève</i>	18
3.3.1.1 Formulación	18
3.3.1.2 Propiedades	20

3.3.1.3 Solución de la ecuación integral	20
3.3.2 Representación de la respuesta	23
3.3.2.1 Formulación de la <i>expansión caos polinomial</i>	23
3.3.2.2 Implementación de polinomios de Hermite	25
3.4 Formulación del MEFEE	27
3.4.1 Introducción	27
3.4.2 Ecuación de equilibrio del Método del Elemento Finito	27
3.4.3 Derivación de la ecuación de equilibrio estocástica	28
3.4.4 Cálculo de la incertidumbre sobre los desplazamientos	30
Capítulo 4 Aplicación	
4.1 Introducción	32
4.2 Ejemplos de aplicación	32
4.2.1 Sólido cúbico	32
4.2.1.1 Planteamiento	32
4.2.1.2 Representación del dominio de análisis	33
4.2.1.3 Resultados	34
4.2.2 Placa simplemente apoyada	38
4.2.2.1 Planteamiento	38
4.2.2.2 Representación del dominio de análisis	39
4.2.2.3 Resultados	40
4.2.3 Ensayo de deformación plana	45
4.2.3.1 Descripción del ensayo	45
4.2.3.2 Planteamiento	47
4.2.3.3 Representación del dominio de análisis	47
4.2.3.4 Resultados	48
Capítulo 5 Conclusiones	55
Bibliografía y referencias	57
Apéndice A Elementos teóricos	
A.1 Conceptos básicos de probabilidad	60
A.1.1 Espacio muestral	60
A.1.2 Variables aleatorias	61
A.1.3 Función aleatoria	63
A.1.4 Campos aleatorios	63
A.2 Espacios matemáticos	65
A.2.1 Espacio vectorial	65
A.2.2 Espacio de Hilbert	65
A.2.3 Espacio probabilista de Hilbert	66
A.3 Método del Elemento Finito	66

A.3.1	Introducción	66
A.3.2	Descripción general del MEF	67

Apéndice B Descripción del programa FERUM

B.1	Introducción	71
B.2	Estructura general de FERUMssfem	71
B.2.1.	Etapa de preprocesamiento	71
B.2.2.	Etapa de análisis	71
B.2.3.	Etapa de posprocesamiento	72
B.3	Descripción de las etapas	72
B.3.1	Etapa de preprocesamiento	72
B.3.1.1	Función MakeModel	72
B.3.1.2	Función DiscRandomField	72
B.3.1.3	Función MakePC	72
B.3.2	Etapa de análisis	73
B.3.2.1	Función assemble_bc	73
B.3.3.	Etapa de posprocesamiento	74
B.4	Diagrama de bloques para el análisis de problemas lineales utilizando FERUMssfem	74

Resumen

Este trabajo analiza la propagación de la incertidumbre existente en el módulo de elasticidad de un material, en el campo de desplazamientos calculado mediante un modelo del elemento finito. Se utiliza el Método del Elemento Finito Estocástico (MEFE), recurriendo a la técnica del análisis espectral. Asimismo, se evalúa la utilidad de este enfoque mediante ejemplos sencillos.

Las principales incertidumbres en los resultados de los análisis por el método del elemento finito en geotecnia se deben a la variación espacial de las propiedades de los materiales de un punto a otro en la masa de suelo, a errores aleatorios durante las pruebas de laboratorio, así como a errores sistemáticos que se presentan al usar correlaciones aproximadas entre propiedades físicas y mecánicas. Cuando se cuenta con un número suficiente de mediciones en distintos puntos de la masa del suelo, la incertidumbre puede ser representada por un campo aleatorio descriptivo. Se realiza entonces un análisis de incertidumbre *a posteriori*. El enfoque espectral del MEFE (MEFEE) para este tipo de análisis fue propuesto por Ghanem y Spanos y consiste en la discretización del campo aleatorio descriptivo mediante una expansión truncada en serie de *Karhunen-Loève* ; dicha expansión se representa por un conjunto de variables aleatorias Gaussianas y funciones base deterministas que quedan definidas por la solución de una ecuación integral expresada en términos de la función autocovarianza; la respuesta del sistema, es decir el campo de desplazamientos, se evalúa entonces a través de funcionales no lineales representados por un conjunto de polinomios ortogonales de orden p de variables aleatorias Gaussianas llamado *caos polinomial*.

Los resultados de los análisis indican que la mayor incertidumbre se presenta cuando la distancia de correlación es aproximadamente igual a la dimensión horizontal del cuerpo en estudio. Además, tales análisis muestran que la distancia de correlación juega un papel importante que representa la heterogeneidad local que puede presentar un material estadísticamente homogéneo.

Nomenclatura

B:	Matriz geométrica.
$CV\{V\}$:	Coefficiente de variación de una variable aleatoria V .
$CV\{E\}$	Coefficiente de variación del módulo de elasticidad.
$CV\{v\}$	Coefficiente de variación de la relación de Poisson.
$CV(X)$:	Coefficiente de variación de un campo aleatorio $V(X)$.
$Cov[V_1, V_2]$	Covarianza entre dos variables aleatorias V_1 y V_2 .
$C_v(X_1, X_2)$:	Función de autocovarianza del campo aleatorio $V(X)$.
D:	Matriz de elasticidad.
D_o :	Matriz de elasticidad calculada con una matriz con módulo de elasticidad unitario.
E :	Módulo de elasticidad.
$E\{V\} = \mu_v$:	Esperanza matemática o valor medio de la variable aleatoria V .
$E\{V(X)\}$:	Esperanza matemática del campo aleatorio $V(X)$.
$E\{E\}$:	Esperanza matemática del módulo de elasticidad.
$E\{v\}$:	Esperanza matemática de la relación de Poisson.
F:	Vector de las fuerzas exteriores y volumétricas aplicadas en los nodos.
$F_V(v)$:	Función de distribución acumulativa de una variable aleatoria discreta V .
$f_v(v)$:	Función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria continua V .
$f_k(X)$:	Funciones base requeridas para la solución numérica de la ecuación integral de Fredholm.
$H_n(x)$:	Polinomio de Hermite unidimensional de variables normales Gaussianas.
K:	Matriz de rigidez.
K^0 :	Matriz de rigidez evaluada para el valor esperado de las propiedades aleatorias.
k^e :	Matriz de rigidez del elemento.
K_i^I, K_{ij}^H :	Derivadas parciales de la matriz de rigidez, K .
K_{VV}	Matriz de covarianzas del vector de variables aleatorias, V .

$\mathbf{K}_{V(X)V}$:	Vector que contiene las covarianzas del campo, $V(X)$, con los elementos de \mathbf{V} .
N_i :	Funciones de forma o de interpolación.
P_+, P_- :	Probabilidades correspondientes a la variable aleatoria X .
\mathbf{U} :	Vector de desplazamientos.
\mathbf{U}^e :	Vector de desplazamientos del elemento e .
$\mathbf{U}(\theta)$:	Vector de desplazamientos nodales conformado por la expansión de las $u^i(\theta)$ variables aleatorias.
$u(\theta)$:	Desplazamientos nodales aleatorios.
\mathbf{V} :	Vector de variables aleatorias.
$Var[V] = \sigma_V^2$:	Varianza de una variable aleatoria V .
$V(X, \theta) = V(X)$:	Campo aleatorio. X es una variable aleatoria (función del resultado del experimento, θ) que representa la propiedad de interés.
$\hat{V}(X)$:	Aproximación del campo aleatorio, después de realizar la discretización.
$Var[V(X)] = \sigma_V^2(X)$:	Varianza de un campo aleatorio $V(X)$.
x_+ y x_- :	Valores de la variable aleatoria X , localizados antes y después de su valor medio μ_x .
$Y = g(X)$:	Variable aleatoria Y en función de otra variable X .
$\Gamma_p(\xi_{i_1}(\theta), \dots, \xi_{i_p}(\theta))$:	Caos polinomial.
$\Gamma_p(\xi_1, \dots, \xi_M)$:	Caos homogéneo de orden p y dimensión M .
δ_{ij} :	Delta Kronecker.
$\boldsymbol{\varepsilon}$:	Vector del tensor de deformaciones.
λ_i y $\varphi_i(X)$:	Valores característicos y funciones características definidos por la ecuación integral de Fredholm expresada en términos de la función de autocovarianza, $C_V(X_1, X_2)$.
ν :	Relación de Poisson.
$\boldsymbol{\sigma}$:	Vector del tensor de esfuerzos.
σ_V :	Desviación estándar de una variable aleatoria V .
$\sigma_V(X)$:	Desviación estándar de un campo aleatorio $V(X)$.

$\chi_i(\theta), \xi_i(\theta)$:	VARIABLES aleatorias ortogonales.
Ψ_α :	Polinomio multidimensional de Hermite asociado a la secuencia α_i .
$\Psi_i[\{\xi_k(\theta)\}_{k=1}^M]$:	i-ésimo caos polinomial de dimensión M .
Ω :	Subdominio que define la propiedad física o mecánica del medio.
Ω_e :	Subdominio del elemento.
$A_{kj}, D_{ik}, \Lambda_{ij}$ y B_{kj} :	Representan los términos de un sistema de ecuaciones lineales para la generalización algebraica del problema de valores característicos.
$\mathfrak{L}(\Omega)$:	Espacio de Hilbert.
$\epsilon_N, \epsilon_{M,p}$:	Residuo ocasionado por el truncamiento de la series.

1. Introducción

1.1 Antecedentes

El interés por estimar la incertidumbre que afecta los resultados de los análisis geotécnicos se remonta a la época de Casagrande, quien en su artículo: “*Role of the calculated risk in earthwork and foundation engineering*” (Casagrande, 1965), enfatiza la importancia de evaluar otras fuentes de riesgos, además de las calculadas, inherentes a las obras geotécnicas, relacionadas, por ejemplo, con el juicio y la experiencia humana para estimar ciertas cantidades que intervienen en la solución de un problema geotécnico. En la actualidad, se ha empezado a recurrir a las técnicas probabilistas y estadísticas para modelar la incertidumbre dentro un marco racional para diversos problemas en el campo de la geotecnia (Auvinet, 2002).

Los análisis con el Método del Elemento Finito (MEF) permiten modelar el comportamiento de un problema geotécnico, pero no toman en cuenta que los parámetros de los materiales con los que el modelo constitutivo es alimentado se encuentran en un amplio rango de incertidumbre, debido a la naturaleza compleja y heterogénea de los geomateriales con los que la misma geotecnia trata; además también ignoran, la existencia de factores aleatorios que en ocasiones son independientes de la naturaleza del propio material, pero que influyen en la determinación de estos parámetros, afectando los resultados de dichos análisis. Combinando el MEF con la teoría de la probabilidad, es posible desarrollar un *método de elementos finitos estocásticos*, que permita cuantificar la incertidumbre que induce la dispersión de los parámetros de los materiales en los resultados de los análisis. Las técnicas más usadas en geotecnia hasta el momento que permiten aplicar el Método del Elemento Finito Estocástico (MEFE) son: los métodos de perturbaciones y de simulación (Auvinet, 2002); sin embargo, los avances computacionales aunados a los métodos numéricos, permiten el desarrollo de nuevas técnicas matemáticas que hacen posible modelar e integrar cada vez mejor las incertidumbres en los análisis mecánicos con elementos finitos. Tal es el caso del *enfoque espectral*, cuyas bases matemáticas se fincan en los métodos del análisis funcional y más específicamente en un espacio de funciones de Hilbert. Su utilidad reside en representar la variabilidad espacial de las propiedades del material como una dimensión adicional que permite una formulación aleatoria del vector de desplazamientos.

En la literatura reciente se puede encontrar una abundante información sobre el MEFEE; en cuanto a sus aplicaciones a la geotecnia, esta es muy limitada. Las primeras aplicaciones a la geotecnia se deben a los trabajos realizados por Auvinet y Cambou (1974); posteriormente, se han aplicado a diferentes problemas geotécnicos, por ejemplo, terraplenes (Orlandi, 1996; Bouayed, 1997; Vázquez, 2005), presas de tierra y enrocamiento (Mellah, 1999; Louault, 1997; Pérez-Duarte, 2000) y análisis de flujo de agua a través de medios porosos (Auvinet y López Acosta, 2001). El uso del enfoque espectral en los análisis geotécnicos, en comparación con las demás técnicas del MEFEE, es limitado debido a que se encuentra aún en un estado de desarrollo. Sus bases y aplicaciones en la ingeniería han sido presentadas principalmente por Ghanem y Spanos (1991) quienes expusieron el método para problemas de elasticidad lineal y analizaron tres ejercicios de ingeniería mecánica como: una viga en cantilever con rigidez aleatoria y carga estática, una placa cuadrada con rigidez aleatoria sujeta a tensión en la parte superior y una placa con geometría curva. Entre otros usos se pueden citar los trabajos de Ghanem y Brzkala (1996) quienes trataron el problema de una masa de suelo con dos estratos con propiedades deterministas e interfase aleatoria. Ghanem y Member (1999) lo aplicaron a problemas de conducción de calor considerando dos campos aleatorios. En cuanto a investigaciones sobre la validez y exactitud del método se puede citar el trabajo realizado por Baroth *et al.*, (2003).

1.2 Objetivo

El objetivo de este trabajo es exponer la viabilidad de analizar la propagación de la incertidumbre existente en el módulo de deformación de un material en el campo de desplazamientos calculado mediante el Método del Elemento Finito Estocástico, utilizando la técnica del análisis espectral. Además, se busca evaluar la utilidad del método a través de distintos ejemplos.

1.3 Alcances

En este trabajo se señalan las fuentes de incertidumbre más importantes que se relacionan con parámetros como el módulo de deformación y se resumen brevemente los conceptos probabilistas que permiten la representación de la incertidumbre. Además, se presentan los conceptos matemáticos básicos del Método del Elemento Finito Estocástico Espectral (MEFEE) los cuales se reducen a dos expansiones: *Karhunen-Loève* y *caos polinomial*; estos conceptos permiten determinar el comportamiento aleatorio de la respuesta del sistema. Tomando en cuenta las limitaciones prácticas actuales de esta técnica, en este trabajo se limitan los análisis presentados al caso en el que el material se puede considerar en una primera aproximación como elástico lineal, es decir que se puede caracterizar con dos parámetros: módulo de deformación y relación de Poisson. Se ilustra la utilidad de este enfoque con el análisis de tres ejemplos sencillos de utilidad práctica para la ingeniería y la geotecnia.

2. Incertidumbre en los análisis realizados por el MEF

2.1 Fuentes de incertidumbre en geotecnia

Generalmente, los resultados de los análisis geomecánicos realizados con el Método del Elemento Finito (MEF) se ven afectados por numerosas fuentes de incertidumbre, que tienen que ver principalmente con la determinación de las propiedades de los materiales. Las principales fuentes de incertidumbre que afectan el módulo de deformación son la variabilidad espacial y los errores aleatorios y sistemáticos en su determinación que a continuación se describen:

2.1.1 Variabilidad espacial

La incertidumbre asociada a la variabilidad espacial de las propiedades del suelo depende principalmente de la historia geológica de formación del suelo. Está además condicionada por la cantidad de información obtenida en la exploración geotécnica que, si es limitada, implica el riesgo de un error estadístico que se refleja subestimando o sobreestimando la propiedad de interés.

2.1.2 Errores aleatorios y sistemáticos

Los primeros se cometen durante la realización de las pruebas de laboratorio o de campo; los segundos son debidos a un sesgo en la medición, producido por ejemplo, por el remoldeo de muestras o por el uso de correlaciones estadísticas aproximadas entre propiedades índices y mecánicas.

2.2 Representación de la incertidumbre en geotecnia

Aun cuando existen otros enfoques, como el de los conjuntos borrosos, la teoría más aceptada hasta el momento para representar la incertidumbre en ingeniería es la de la probabilidad. A través de ella, es posible modelar la incertidumbre de los parámetros de los materiales que

intervienen en los análisis con elementos finitos por medio de variables aleatorias o campos aleatorios (Apéndice A).

2.2.1 Variables aleatorias

Se recurre al concepto de variable aleatoria cuando se requiere modelar la incertidumbre asociada a información limitada respecto al parámetro mecánico de interés V para el medio estudiado. La estimación de las características generales de una población (esperanza $E\{V\}$ y varianza $Var[V]$) se realiza mediante estimaciones puntuales o intervalos de confianza. La representación de la variación espacial mediante variables aleatorias no toma en cuenta la posición específica de las muestras ni la dependencia existente entre ellas.

2.2.2 Campos aleatorios

Un concepto más adecuado para representar la variabilidad espacial y tomar en cuenta la correlación espacial en un dominio dado de las propiedades del medio analizado es el de *campo aleatorio* $V(X, \theta)$. La propiedad de interés en cada punto X del medio se considera entonces como una variable aleatoria (función del resultado del experimento, θ). Por medio de la función de autocovarianza se describe la correlación espacial entre las distintas variables puntuales, quedando el campo definido por esta función, su valor esperado y su varianza (Apéndice A). Cuando no exista confusión posible en el contexto, el campo se escribe simplemente $V(X)$. Auvinet (2002) ha clasificado los campos aleatorios como: estimativos o descriptivos.

2.2.2.1 Campos estimativos

Cuando no se cuenta con muestreo ni mediciones de campo, se realiza un análisis de incertidumbre *a priori*. La variación espacial de los parámetros de los materiales es entonces definida como una variable aleatoria para cada subdominio que reúne ciertas condiciones de homogeneidad. El grado de correlación entre diferentes variables estimativas es siempre difícil de evaluar; dicha correlación se establece a partir de la incertidumbre que se tiene en la estimación de sus valores esperados. Conviene considerar que existe correlación entre las propiedades de materiales diferentes cuando se tiene el mismo tipo de dudas respecto a su valor o cuando han sido determinadas experimentalmente por el mismo procedimiento (Auvinet, 2002).

2.2.2.2 Campos descriptivos

El campo de tipo descriptivo corresponde a una situación en la que se tiene un número suficiente de mediciones en distintos puntos de la masa del suelo, el análisis de incertidumbre se realiza *a posteriori*. Se considera que el valor de la propiedad en cada punto del dominio en estudio es una variable aleatoria y el conjunto de estas variables aleatorias constituye un campo aleatorio descriptivo. Para ser implementado en los análisis con elementos finitos estocásticos, se requiere que este campo sea discretizado en un número manejable de variables aleatorias (Inciso 3.2).

En la práctica, se define un campo condicional que tome en cuenta los datos disponibles usando por ejemplo las técnicas de la geoestadística. Este campo condicional no es estacionario porque la varianza es nula en los puntos de medición. Para asignar valores esperados condicionales de la propiedad de interés en los puntos donde no existe mediciones se recurre a técnicas de estimación

2. Incertidumbre en los análisis realizados por el MEF

condicional (Auvinet, 2002) como el *Kriging* (Matheron, 1965). Es importante hacer notar, que los campos aleatorios tridimensionales no pueden tomarse en cuenta en los análisis realizados con MEF en estado plano de deformación. Este tipo de análisis asume una homogeneidad estricta en la dirección perpendicular al plano de análisis lo que contradice la hipótesis de variación espacial.

2.3 Método del Elemento Finito Estocástico

Combinando el Método del Elemento Finito (MEF) con la teoría de la probabilidad, es posible desarrollar un *método de elementos finitos estocásticos*, que permita cuantificar la incertidumbre que induce la dispersión de los parámetros de los materiales en los resultados de los análisis. Las técnicas más ampliamente usadas en geotecnia hasta el momento que permiten aplicar el Método del Elemento Finito Estocástico (MEFE) son: los métodos de perturbaciones y de simulación (Auvinet, 2002)

2.3.1 Método de perturbaciones

El método de las perturbaciones consiste en obtener los i primeros momentos estadísticos (donde el número i depende de la técnica utilizada) de cada uno de los resultados de interés del análisis (desplazamiento, deformación, potencial hidráulico, velocidad de flujo, etc.) que resultan ser función de las variables aleatorias del sistema (propiedades mecánicas, cargas, permeabilidades, etc.), (Auvinet, 2002). La función se representa en forma aproximada mediante un desarrollo truncado en serie de Taylor. En la práctica, el método consiste generalmente en obtener solamente los momentos de primer y segundo orden, por lo que la respuesta del sistema queda representada por su valor esperado, varianza o desviación estándar, y por la covarianza entre las distintas variables que caracterizan la respuesta.

2.3.1.1 Planteamiento general (aproximación segundos momentos)

Si $\mathbf{V} = (V_1, V_2, \dots, V_n)^T$ es un vector de variables aleatorias estandarizadas que representa las desviaciones de los parámetros aleatorios del sistema respecto a su valor esperado, el vector campo de la variable resultado, \mathbf{U} (por ejemplo desplazamiento), definido en el dominio estudiado puede escribirse en la forma siguiente:

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}^0 + \sum_{i=1}^n \mathbf{U}_i^I V_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbf{U}_{ij}^{II} V_i V_j + \dots \quad (2.1)$$

donde \mathbf{U}_i^I y \mathbf{U}_{ij}^{II} son las derivadas parciales del vector \mathbf{U} , definidas de la siguiente forma:

$$\mathbf{U}_i^I = \left. \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial V_i} \right|_{V=0}; \quad \mathbf{U}_{ij}^{II} = \left. \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial V_i \partial V_j} \right|_{V=0} \quad (2.2)$$

La exactitud en el cálculo de los dos primeros momentos de la respuesta del sistema depende del grado de aproximación de la función:

2. Incertidumbre en los análisis realizados por el MEF

a) Si la aproximación es de primer orden, el vector \mathbf{U} queda expresado por los dos primeros términos de la serie de Taylor como:

$$\mathbf{U} \cong \mathbf{U}^0 + \sum_{i=1}^n \mathbf{U}_i^I V_i \quad (2.3)$$

El valor esperado de las variables aleatorias del vector \mathbf{V} , es decir cuando $\mathbf{V} = 0$ se calcula de la siguiente forma:

$$E^I \{\mathbf{U}\} = \mathbf{U}^0 \quad (2.4)$$

La matriz de covarianza se obtiene como:

$$Cov^I [\mathbf{U}, \mathbf{U}] = E\{(\mathbf{U} - E^I \{\mathbf{U}\})(\mathbf{U} - E^I \{\mathbf{U}\})^T\} \cong \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \mathbf{U}_i^I \mathbf{U}_j^I E\{V_i V_j\} \quad (2.5)$$

Este método recibe el nombre de Primer Orden – Segundos Momentos.

b) Si la aproximación es de segundo orden, se recurre al desarrollo en serie de Taylor hasta el tercer término, escribiéndose \mathbf{U} como:

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}^0 + \sum_{i=1}^n \mathbf{U}_i^I V_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbf{U}_{ij}^{II} V_i V_j + \dots \quad (2.6)$$

El vector de las esperanzas se estima como:

$$E^{II} \{\mathbf{U}\} \cong E^I \{\mathbf{U}\} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbf{U}_{ij}^{II} V_i V_j \quad (2.7)$$

y:

$$Cov^{II} [\mathbf{U}, \mathbf{U}] \cong Cov^I [\mathbf{U}, \mathbf{U}] + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \mathbf{U}_{ij}^{II} \mathbf{U}_{kl}^{II} (E\{V_i V_l\} E\{V_j V_k\} + E\{V_i V_k\} E\{V_j V_l\}) \quad (2.8)$$

2.3.1.2 Método de las perturbaciones aplicado al MEF lineal

En elasticidad lineal, la ecuación de equilibrio del método del elemento finito que permite estimar desplazamientos y deformaciones, se expresa mediante el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\mathbf{U} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{F} \quad (2.9)$$

donde:

\mathbf{U} es el vector de desplazamientos de los nodos del sistema, \mathbf{F} es un vector de fuerzas exteriores y volumétricas aplicadas en los nodos, y \mathbf{K} es la matriz de rigidez.

2. Incertidumbre en los análisis realizados por el MEF

Si las propiedades aleatorias de los materiales se encuentran contenidas en la matriz de rigidez, ésta puede escribirse como:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}^0 + \sum_{i=1}^n \mathbf{K}_i^I V_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbf{K}_{ij}^{II} V_i V_j + \dots \quad (2.10)$$

donde:

n : número de variables aleatorias.

\mathbf{K}^0 : matriz de rigidez evaluada para el valor esperado de las propiedades aleatorias.

\mathbf{K}_i^I y \mathbf{K}_{ij}^{II} : derivadas parciales de la matriz de rigidez, \mathbf{K} , definidas como:

$$\mathbf{K}_i^I = \left. \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial V_i} \right|_{V=0}; \quad \mathbf{K}_{ij}^{II} = \left. \frac{\partial^2 \mathbf{K}}{\partial V_i \partial V_j} \right|_{V=0} \quad (2.11)$$

Es posible obtener los primeros momentos de los desplazamientos mediante las ecuaciones 2.4, 2.5, 2.7 y 2.8; usando una notación similar para las derivadas parciales de los vectores \mathbf{U} y \mathbf{F} , se tiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^0 &= \mathbf{K}^{0^{-1}} \mathbf{F}^0 \\ \mathbf{U}_i^I &= \mathbf{K}^{0^{-1}} (\mathbf{F}_i^I - \mathbf{K}_i^I \mathbf{U}^0) \\ \mathbf{U}_{ij}^{II} &= \mathbf{K}^{0^{-1}} (\mathbf{F}_{ij}^{II} - \mathbf{K}_i^I \mathbf{U}_j^I - \mathbf{K}_j^I \mathbf{U}_i^I + \mathbf{K}_{ij}^{II} \mathbf{U}^0) \end{aligned} \quad (2.12)$$

que permite obtener \mathbf{U}^0 , \mathbf{U}_i^I y \mathbf{U}_{ij}^{II} .

Las expresiones para estimar la incertidumbre respecto a esfuerzos y deformaciones se obtienen por un procedimiento totalmente análogo al anterior; se toma en cuenta que estas cantidades se expresan en términos de los desplazamientos nodales a través de las siguientes ecuaciones:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}^e \mathbf{U}^e \quad (2.13)$$

$\boldsymbol{\varepsilon}$: vector del tensor de deformaciones en el elemento finito e .

\mathbf{B}^e : matriz geométrica del elemento e .

\mathbf{U}^e : vector de desplazamientos del elemento

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}^e \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.14)$$

donde:

$\boldsymbol{\sigma}$: vector del tensor de esfuerzos del elemento e

\mathbf{D}^e : matriz de elasticidad del elemento e

Dado que se conocen las derivadas de los desplazamientos respecto a las variables aleatorias del sistema, basta con derivar las ecuaciones anteriores para obtener las deformaciones y esfuerzos

respecto a estas mismas variables y poder construir su desarrollo en serie de Taylor (Bouayed, 1997).

2.3.1.3 Método de aproximaciones puntuales

Rosenblueth (1975) desarrolló un método simple para estimar los primeros momentos estadísticos de una función continua de variables aleatorias, conociendo solamente los tres primeros momentos de cada variable, evitando el cálculo de las derivadas parciales. El método se basa en una aproximación mediante valores puntuales; se recurre a una distribución de probabilidad discreta con los mismos momentos que la densidad continua considerada. El autor demostró que la técnica puede ser generalizada a un número cualquiera de variables aleatorias.

a) Estimación bipuntual. (Función de una sola variable)

Sean M y X unas variables aleatorias con $M = g(X)$. Cuando la distribución de M no interesa, sino únicamente una aproximación a sus primeros momentos, se puede ignorar la función de densidad de probabilidad de X y utilizar solamente sus correspondientes primeros momentos, obteniendo una solución independiente de la distribución que se le asigne.

Dada la función $f_X(x)$ de probabilidad de una variable aleatoria continua X , con dos valores de x ; x_- y x_+ , localizados en ambos lados del valor medio, μ_X , como se muestra en la Figura 2.1; se puede deducir expresiones aproximadas para los momentos de la distribución de M . Seleccionando las funciones de densidad de probabilidad:

$$\begin{aligned} P_+ \delta(\mu_X - x_+) \\ P_- \delta(\mu_X - x_-) \end{aligned} \tag{2.15}$$

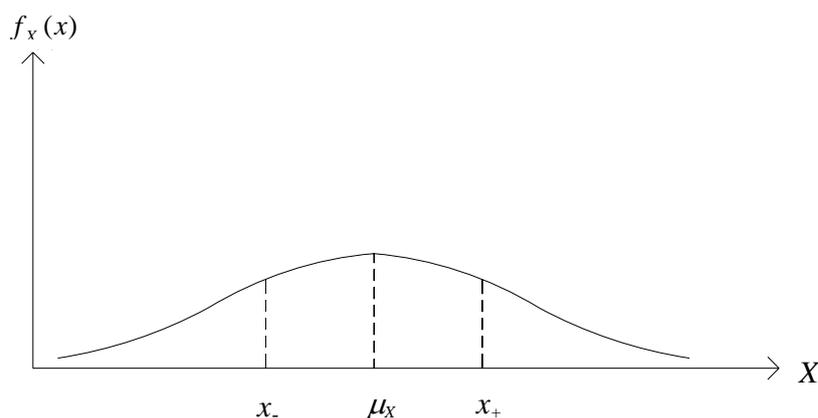


Figura 2.1 Discretización de la función de densidad de X en dos puntos

donde: P_+ y P_- son probabilidades, y δ es la delta Dirac. Cuando M admite una expansión en serie de Taylor en μ_X , se tiene que la esperanza de M es:

$$E\{M^n\} = P_+ m_+^n + P_- m_-^n \tag{2.16}$$

2. Incertidumbre en los análisis realizados por el MEF

donde: $m_{\pm} = g(x_{\pm})$ y n es un número real.

P_{\pm} y X_{\pm} deben satisfacer el siguiente grupo de ecuaciones simultáneas

$$P_{+} + P_{-} = 1 \quad (2.17)$$

$$P_{+}x_{+} + P_{-}x_{-} = \mu_X \quad (2.18)$$

$$P_{+}(x_{+} - \mu_X)^2 + P_{-}(x_{-} - \mu_X)^2 = \sigma_X^2 \quad (2.19)$$

$$P_{+}(x_{+} - \mu_X)^3 + P_{-}(x_{-} - \mu_X)^3 = v_X^3 \sigma_X^2 \quad (2.20)$$

cuya solución permite conocer los valores de P_{+} , P_{-} , x_{+} y x_{-}

$$P_{+} = \frac{1}{2} \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{1}{1 - \left(\frac{v_X}{2}\right)^2}} \right] \quad (2.21)$$

$$P_{-} = 1 - P_{+} \quad (2.22)$$

$$x = \mu_X \pm \sigma_X \sqrt{\frac{P_{\pm}}{P_{\pm}}} \quad (2.23)$$

donde v_X es el coeficiente de asimetría de Pearson.

Cuando v_X es desconocido se puede asumir que es nulo, en este caso la función de distribución de probabilidad es simétrica y las expresiones anteriores se simplifican.

$$P_{\pm} = \frac{1}{2} \quad (2.24)$$

$$X_{\pm} = \mu_X \pm \sigma_X \quad (2.25)$$

Los tres momentos de la variable aleatoria M se definen como:

$$\mu_M = \frac{m_{+} + m_{-}}{2} \quad (2.26)$$

$$\sigma_M = \left| \frac{m_{+} - m_{-}}{2} \right| \quad (2.27)$$

2. Incertidumbre en los análisis realizados por el MEF

$$V_M = \left| \frac{m_+ - m_-}{m_+ + m_-} \right| \quad (2.28)$$

Donde V es el coeficiente de variación. Si las dos primeras derivadas de $g(X)$ existen y son continuas en la vecindad de μ_X , la ec. 2.26 constituye una aproximación de segundo orden, mientras que las ecs. 2.27 y 2.28 son de primer orden.

El principio del método para una función de una sola variable aleatoria se representa en la Figura 2.2.

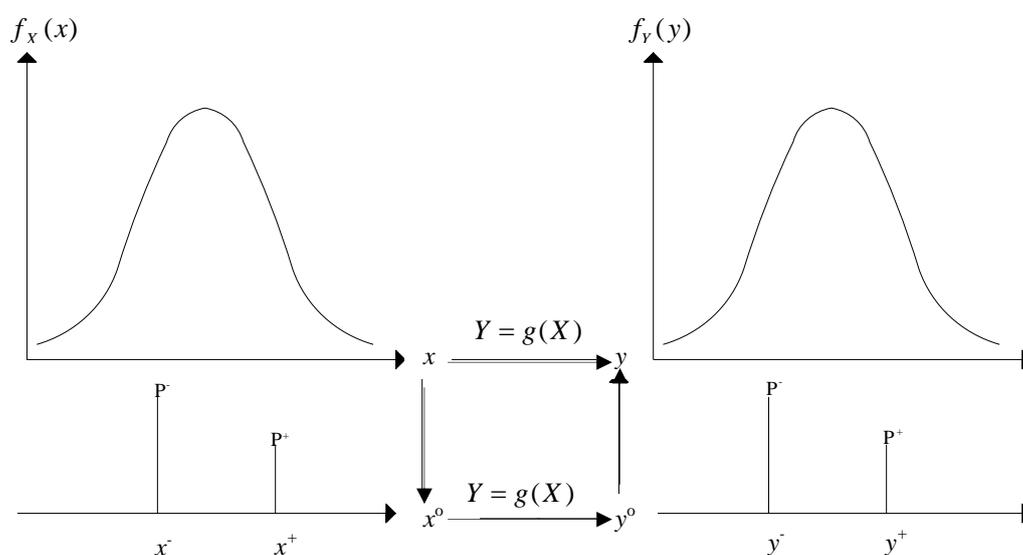


Figura 2.2 Principio del método de Rosenblueth

b) Funciones de varias variables

Para funciones de varias variables, $Y = Y(X_1, X_2, \dots, X_n)$ estadísticamente independientes, Rosenblueth generalizó las ecs. 2.26 a 2.28 obteniendo:

$$\frac{\mu_M}{m} = \frac{\mu_{M_1}}{m} \frac{\mu_{M_2}}{m} \dots \frac{\mu_{M_n}}{m} \quad (2.29)$$

$$1 + V_M^2 = (1 + V_{M_1}^2)(1 + V_{M_2}^2) \dots (1 + V_{M_n}^2) \quad (2.30)$$

donde $m = g(\mu_{X_1}, \mu_{X_2}, \dots, \mu_{X_n})$, y μ_{M_i} y V_{M_i} son respectivamente el valor esperado y el coeficiente de variación de M calculado como si X_i fuera la única variable aleatoria y las otras fueran iguales a sus valores esperados. Si M es el producto de funciones de X_1 únicamente, X_2 únicamente, etc., las ecs. 2.29 y 2.30 son exactas. Sólo se requiere $2n+1$ ó $2n$ estimaciones puntuales.

2.3.2 Métodos de simulación. Monte Carlo

Por medio de repetidas simulaciones se puede evaluar la sensibilidad de un sistema ante variaciones de sus parámetros constitutivos, sin necesidad de recurrir a los métodos de transformación, analíticos o numéricos. El método de Monte Carlo consiste en evaluar repetidamente el comportamiento del sistema de interés para un conjunto de valores de parámetros considerados como variables aleatorias con distribución de probabilidad conocida o supuesta. Esta operación se repite hasta que se defina la tendencia central, la dispersión e inclusive la densidad de probabilidad de los resultados.

Si el vector de variables aleatorias considerado tiene componentes independientes, la simulación se realiza para cada uno de los componentes independientes. Si el vector tiene componentes dependientes, es posible regresar al caso anterior utilizando el método de Cholesky generalizado para diagonalizar la matriz de covarianza de estos componentes.

Existen varias técnicas para determinar el número de simulaciones necesarias para lograr una aproximación estadística determinada; entre ellas se encuentran el método clásico de convergencia (intervalos de confianza de la esperanza y de la varianza de la cantidad estimada) y el uso de la desigualdad de Chebyshev.

2.3.3 Método espectral

El método espectral es una herramienta de discretización espectral basada en la expansión de funcionales sobre un espacio de dimensiones infinitas, en donde la aleatoriedad del sistema está representada en forma intrínseca en la formulación. En el siguiente capítulo se exponen con detalle las bases matemáticas de la formulación del MEFEE y en el capítulo 4 se presenta la aplicación de dicha técnica.

3. Enfoque espectral

3.1 Introducción

Matemáticamente, el Método del Elemento Finito Estocástico Espectral (MEFEE) tiene su fundamento en los métodos del análisis funcional y más específicamente en el concepto de espacio de funciones de Hilbert, que permite representar el campo aleatorio de entrada (en este caso el campo del módulo de deformación) por medio de funciones deterministas base, de modo que la variabilidad espacial de las propiedades del material pueda ser tratada analíticamente en ese espacio y la aleatoriedad de los desplazamientos se plantee desde la formulación del MEFEE.

El enfoque espectral fue propuesto por Ghanem y Spanos (1991). En geotecnia se puede utilizar para realizar análisis de incertidumbre a *posteriori*, en donde primero las propiedades de los materiales, en este caso el módulo de deformación, se modela como un campo aleatorio descriptivo Gaussiano, eventualmente después de una transformación del campo real. Posteriormente, las características (esperanza, desviación estándar) del campo aleatorio de la respuesta (desplazamientos, deformaciones, etc.) son determinadas a través de un análisis de segundos momentos.

En el caso de la elasticidad lineal, el método espectral consiste en utilizar la función de autocovarianza para representar el campo aleatorio del módulo de elasticidad, a través de una expansión en serie llamada de *Karhunen-Loève* (Papoulis, 1991), utilizando un número finito de variables aleatorias Gaussianas que posteriormente son utilizadas para representar la respuesta del sistema mediante una expansión en *caos polinomial*. Este procedimiento es un artificio matemático que permite finalmente, simplificar el planteamiento del método de elementos finitos estocásticos.

En este capítulo se presentan las herramientas matemáticas del método espectral que permiten realizar la formulación del MEFEE para problemas de elasticidad lineal.

3.2 Discretización de campos aleatorios descriptivos

Como en el caso de los elementos finitos deterministas, las funciones son representadas por un conjunto finito de parámetros. Lo mismo es necesario en la formulación del Método del Elemento Finito Estocástico (MEFE); se requiere que el campo aleatorio esté representado en términos de un conjunto finito de variables aleatorias que permita el tratamiento de éste numéricamente. Este procedimiento se conoce como discretización de un campo aleatorio.

La mayoría de los métodos de discretización existentes en la literatura consideran que el campo aleatorio $V(X)$ es Gaussiano. Un campo es Gaussiano si cada una de las variables del campo tiene una densidad de probabilidad Gaussiana y además las densidades de probabilidad conjuntas de cualquier orden de estas variables (Apéndice A) son también Gaussianas (Auvinet, 2002). Si el campo queda definido en términos de un grupo de n variables aleatorias, dicho campo se representa por medio de una densidad de probabilidad conjunta; se puede entonces, denotar \mathbf{V} como un vector de variables aleatorias $\{V(X_1), \dots, V(X_n)\}$, $\boldsymbol{\mu}$ es un vector de valores esperados y \mathbf{K}_{VV} representa la matriz de covarianza de las variables aleatorias. La mayoría de los métodos asumen que el campo aleatorio se discretiza a través de una malla de elementos que puede coincidir o no con la malla de elementos finitos (Li y Der Kiureghian, 1993; Matthies *et al.*, 1997). Los métodos de discretización de campos aleatorios descriptivos se dividen en tres grupos:

- a) Métodos de discretización por puntos.
- b) Métodos de discretización de promedios.
- c) Métodos de expansión en series.

La utilidad de cada uno de los métodos ha sido evaluada por Li y Der Kiureghian (1993) y Sudret y Der Kiureghian (2000).

Es conveniente aclarar que estos métodos de discretización asumen que el campo es estacionario en el sentido amplio; es decir que sus características (valor esperado y varianza) se suponen constantes en la escala de un elemento finito o grupos de elementos finitos, ignorando que la existencia de mediciones reduce la varianza en la vecindad de los puntos de muestreo. Es necesario entonces, considerar un campo condicional sobre dichas mediciones que permita estimar, a partir de la propiedad medida, el valor medio de la misma propiedad en cualquier otro subdominio, y así asignar directamente los resultados de las mediciones.

3.2.1 Métodos de discretización por puntos

En los métodos de discretización por puntos se utiliza una malla para la discretización espacial, en donde las variables aleatorias son valores seleccionados del campo, que se representa físicamente por algunos puntos en la malla. Estos métodos se clasifican en:

a) Método del punto medio

Este método fue propuesto por Der Kiureghian y Ke (1988), consiste en aproximar el campo aleatorio de cada elemento como una variable colocada en el centroide.

$$\hat{V}(X) = V(X_c), \quad X \in \Omega_e \quad (3.1)$$

La discretización del campo aleatorio $\hat{V}(X)$ está definida por un vector de variables aleatorias $\mathbf{V} = \{V(X_c^1), \dots, V(X_c^{Ne})\}$; donde Ne es el número de elementos de la malla.

b) Método de funciones de forma

Fue propuesto por Liu *et al.* (1986), el campo aleatorio se discretiza para cada elemento usando valores nodales y funciones de forma como:

$$\hat{V}(X) = \sum_{i=1}^q N_i(X) V(X_i), \quad X \in \Omega_e \quad (3.2)$$

Donde: q es el número de nodos de cada elemento, X_i las coordenadas de i -ésimo nodo y N_i son funciones de forma de cada elemento. La aproximación del campo aleatorio $\hat{V}(X)$, queda definida en términos de $\mathbf{V} = \{V(X_1), \dots, V(X_N)\}$, donde $\{X_i \ i=1, \dots, N\}$ es un conjunto de coordenadas nodales de la malla.

c) Método de puntos de integración

En este método el campo aleatorio es discretizado por medio de los puntos de integración gaussianos que aparecen en las ecuaciones de elemento finito. El número de variables aleatorias queda definido por el número total de puntos de integración usados. Sin embargo, el número total de variables aleatorias incrementa drásticamente con el tamaño del problema.

d) Método de estimación lineal óptima

El método de estimación lineal óptima fue propuesto por Li y Der Kiureghian (1993) y permite discretizar al campo aleatorio $\hat{V}(X)$, por medio de una función lineal de valores nodales $\mathbf{V} = \{V(X_1), \dots, V(X_q)\}$ en la forma:

$$\hat{V}(X) = a(X) + \sum_{i=1}^q b_i(X) V_i = a(X) + \mathbf{b}^T(X) \mathbf{V} \quad (3.3)$$

Donde: q es el número de puntos nodales en el dominio; $a(X)$ y $\mathbf{b}(X)$ son funciones determinadas minimizando el error de la varianza ($Var[V(X) - \hat{V}(X)]$) en cada punto X ; las condiciones a cumplir son:

$$\text{Minimizar } Var[V(X) - \hat{V}(X)] \quad (3.4)$$

$$\text{Con } E\{V(X) - \hat{V}(X)\} = 0; \quad X \in \Omega \quad (3.5)$$

La solución de las funciones $a(X)$ y $\mathbf{b}(X)$ fue dada por Li y Der Kiureghian (1993), a partir de ella se comprueba fácilmente que el método de estimación lineal óptima permite minimizar el error de la varianza como:

$$\text{Var}[V(X) - \bar{V}(X)] = \sigma^2(X) - \mathbf{K}_{V(X)\mathbf{V}}^T \mathbf{K}_{\mathbf{V}\mathbf{V}}^{-1} \mathbf{K}_{V(X)\mathbf{V}} \quad (3.6)$$

El campo aleatorio discretizado se expresa como:

$$\hat{V}(X) = E\{V(X)\} + \mathbf{K}_{V(X)\mathbf{V}}^T \mathbf{K}_{\mathbf{V}\mathbf{V}}^{-1} (\mathbf{V} - \boldsymbol{\mu}) \quad (3.7)$$

Donde $\mathbf{K}_{V(X)\mathbf{V}}$ es un vector $N \times 1$ que contiene las covarianzas del campo $V(X)$ con los elementos de \mathbf{V} ; y $\mathbf{K}_{\mathbf{V}\mathbf{V}}$ es la matriz de covarianzas definida no singular. El segundo término de la expresión (3.6) es idéntico a la varianza del campo aproximado $\hat{V}(X)$. Así el error de la varianza es la diferencia entre las varianzas de $V(X)$ y $\hat{V}(X)$. Puesto que el error de la varianza es siempre positivo, el campo estimado $\hat{V}(X)$ sobreestima siempre la varianza del campo original $V(X)$. El método anterior es óptimo en el sentido de que el error de la varianza se minimiza para cualquier punto. Este método es similar al método de *Kriging* (Vanmarcke, 1983), excepto que en este último, \mathbf{V} representa valores observados del campo.

3.2.2 Métodos de discretización de promedios.

La discretización en estos métodos ocurre sobre un dominio para el cual la integración se realiza. El dominio del campo aleatorio representa el área del i -ésimo elemento de la malla. Estos métodos se dividen en dos grupos:

a) Métodos de los promedios espaciales

Propuesto por Vanmarcke (1977) y Vanmarcke y Grigoriu (1983), este método utiliza una malla para realizar la discretización del campo aleatorio. La discretización se hace en cada elemento como una constante que a su vez se calcula como el promedio del campo aleatorio original sobre cada elemento, como:

$$\hat{V}(X) = \frac{\int_{\Omega_e} V(X) d\Omega_e}{|\Omega_e|} \equiv \bar{V}_e, \quad X \in \Omega_e \quad (3.8)$$

Los valores \bar{V}_e forman un vector de variables aleatorias $\mathbf{V}^T = \{\bar{V}_e \ e=1, \dots, N_e\}$. El vector de valores esperados $\boldsymbol{\mu}$ y la matriz de covarianza $\mathbf{K}_{\mathbf{V}\mathbf{V}}$ están dados en términos de integrales de funciones momentos del campo aleatorio (Vanmarcke, 1983).

b) Método de las integrales pesadas

Este método fue desarrollado por Deodatis y Shinozuka (1991). La idea principal en elasticidad lineal es considerar a la matriz de rigidez de cada elemento como cantidad aleatoria; dicha cantidad se proyecta sobre el espacio de polinomios que constituyen las funciones de forma.

Usando la notación del elemento finito, la matriz de rigidez asociada a cada elemento es:

$$\mathbf{k}^e = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega_e \quad (3.9)$$

Donde \mathbf{D} es la matriz de elasticidad y \mathbf{B} es una matriz geométrica que es obtenida por derivación de las funciones de forma con respecto a las coordenadas.

Considerando el módulo de elasticidad como un campo aleatorio ($V(X)$), la matriz de rigidez de cada elemento queda expresada como la suma de una parte determinista y otra estocástica, en donde la matriz \mathbf{B} se puede escribir como polinomios $P_{ij}(x, y, z)$, de la siguiente manera:

$$\mathbf{k}^e(\theta) = \mathbf{k}_0^e + \Delta \mathbf{k}^e(\theta), \quad \Delta \mathbf{k}_{ij}^e(\theta) = \int_{\Omega_e} P_{ij}(x, y, z) V(X) d\Omega_e \quad (3.10)$$

P_{ij} puede escribirse como:

$$P_{ij}(x, y, z) = \sum_{l=1}^W a_{ij}^l x^{\alpha_l} y^{\beta_l} z^{\gamma_l} \quad (3.11)$$

donde W es el número monomial en P_{ij} .

La matriz de rigidez es evaluada a través de integrales pesadas (*weighted integrals*) como:

$$\chi_l^e(\theta) = \int_{\Omega_e} x^{\alpha_l} y^{\beta_l} z^{\gamma_l} V(X) d\Omega_e, \quad \mathbf{k}^e = \mathbf{k}_0^e + \sum_{l=1}^W \Delta \mathbf{k}_l^e \chi_l^e \quad (3.12)$$

Cada integral pesada representa una variable aleatoria. El número de integrales depende del tipo de elemento usado, el cual determina las funciones de forma a usar.

3.2.3 Métodos de expansión en serie.

En los métodos de expansión en serie el campo aleatorio se representa por medio de una sumatoria que involucra variables aleatorias y funciones espaciales deterministas, la discretización del campo se obtiene con el truncamiento de la serie. Estos métodos se dividen en tres grupos:

a) Método de expansión en serie de *Karhunen-Loève*

Este método no requiere de una malla específica para la discretización del campo aleatorio, la discretización consiste en expandir la matriz de rigidez, para cada elemento de la malla de elementos finitos, a través de funciones base deterministas. La exactitud del método está en función del número de variables aleatorias empleadas en la expansión. La serie de expansión de *Karhunen-Loève* se utiliza para la formulación del MEFEE. La descripción y aplicabilidad del método se presentan con detalle en el inciso 3.3.1.

b) Método de series de expansión ortogonales

El método de expansión en series ortogonales fue propuesto por Zhang y Ellingwood (1994), y evita resolver la ecuación integral de Fredholm (Inciso 3.3.1.3), seleccionando un conjunto de funciones ortogonales que formen una base en el espacio de Hilbert. El procedimiento de discretización puede resumirse en los siguientes pasos:

- Se selecciona un conjunto de funciones ortogonales $\{h_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ (por ejemplo, polinomios de Legendre).
- Se calcula la matriz de covarianza $\mathbf{K}_{\mathbf{V}\mathbf{V}}$, del vector de variables aleatorias Gaussianas correlacionadas $\mathbf{V} = \{V(X_1), \dots, V(X_N)\}$.
- La aproximación del campo aleatorio se calcula como:

$$V(X) = E\{V(X)\} + \sum_{i=1}^M V_i(\theta) h_i(X) \quad (3.13)$$

Para que la expresión anterior quede expresada en términos de variables aleatorias Gaussianas se recurre a una transformación de variables aleatorias no correlacionadas, de tal forma que el campo queda representado como:

$$V(X) = E\{V(X)\} + \sum_{k=1}^M \xi_k(\theta) \sqrt{\lambda_k} \phi_k(X) \quad (3.14)$$

Este método es similar al método de expansión en serie de *Karhunen-Loève*, siempre y cuando las funciones características $\phi_k(X)$ de la función de autocovarianza sean aproximadas utilizando el mismo conjunto de funciones ortogonales $\{h_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ usadas en la solución numérica de la ecuación integral de Fredholm.

c) Expansión del método de estimación lineal óptima.

Este método, propuesto por Li y Der Kiureghian (1993), es una extensión del método de estimación lineal óptima usando una representación espectral del vector de las variables nodales \mathbf{V} ; por lo que la aproximación del campo aleatorio queda representada como:

$$\bar{V}(X) = E\{V(X)\} + \sum_{i=1}^N \frac{\xi_i(\theta)}{\sqrt{\lambda_i}} \Phi_i^T \mathbf{K}_{V(X)\mathbf{V}} \quad (3.15)$$

Donde: N es el número de términos de la serie, ξ_i son variables normales estándar independientes y (λ, Φ_i) son los valores y vectores característicos de la matriz de covarianza $\mathbf{K}_{\mathbf{V}\mathbf{V}}$ de $\mathbf{V} = \{V(X_1), \dots, V(X_N)\}$.

La eficiencia del método depende de dos factores: el tamaño de la malla del campo aleatorio que controla el tamaño de la matriz de valores característicos, y el número de términos N utilizados en el truncamiento de la serie.

3.3 Representación de la incertidumbre

3.3.1 Representación de campos aleatorios mediante la expansión en serie de *Karhunen-Loève*.

La expansión en serie de *Karhunen-Loève* es un camino diferente para representar un campo aleatorio descriptivo; en donde la variabilidad espacial del módulo de elasticidad se trata como una dimensión adicional en el espacio de Hilbert de dimensión infinita (Apéndice A). Dada la naturaleza abstracta de los espacios funcionales, en el que se estudia la variabilidad, no es posible una discretización física del dominio, por lo que se recurre a una discretización espectral (Ghanem y Spanos, 1991). El término espectral se refiere a que se utiliza una función especial. En resumen, la expansión en serie de *Karhunen-Loève* se basa en la expansión espectral de la función de autocovarianza cuyo fin es encontrar los valores y funciones característicos de dicha función.

3.3.1.1 Formulación

Un concepto importante en la teoría de campos aleatorios es la representación espectral; si el campo es estacionario en el sentido amplio tiene una alternativa de formulación con la expansión en serie llamada de *Karhunen-Loève* (Papoulis, 1991). Dicha serie permite expandir el campo aleatorio por medio un conjunto de variables aleatorias y funciones deterministas base, con la forma más general:

$$V(X) = \sum_{i=1}^{\infty} \chi_i(\theta) \varphi_i(X) \quad (3.16)$$

Donde: $\chi_i(\theta)$ es un conjunto de variables aleatorias ortogonales, θ es un elemento del espacio de eventos aleatorios y $\varphi_i(X)$ es un conjunto de funciones deterministas ortonormales, las cuales son relacionadas con la función de autocovarianza $C_V(X_1, X_2)$, del campo aleatorio. Una forma más conocida de la representación espectral es plasmada con las series de tipo Fourier como:

$$V(X) = \sum_{i=0}^{\infty} \sqrt{\lambda_i} \xi(\theta) \varphi_i(X) \quad (3.17)$$

donde: $\xi(\theta)$ son variables aleatorias independientes de X , λ_i y $\varphi_i(X)$ son los valores y funciones característicos, respectivamente, de la función de autocovarianza. Asimismo, la descomposición espectral (Ghanem y Spanos, 1991) de la función de autocovarianza se expresa de la siguiente manera:

$$C_V(X_1, X_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \varphi_n(X_1) \varphi_n(X_2) \quad (3.18)$$

La expresión anterior queda definida en términos de los valores y funciones característicos ya mencionados, los cuales pueden obtenerse al solucionar la ecuación integral:

$$\int_{\Omega} C_V(X_1, X_2) \varphi_i(X_2) d\Omega_{X_2} = \lambda_i \varphi_i(X_1) \quad (3.19)$$

donde Ω es el dominio espacial en el cual se define el campo aleatorio.

La ec.3.19 se conoce como ecuación integral de Fredholm homogénea de segundo género, donde el núcleo $C_V(X_1, X_2)$, está definido por la función de autocovarianza, que es real, simétrica y positiva. El conjunto de valores característicos (espectro) es real, positivo y contable. El conjunto de funciones características forma una base completa ortogonal en el espacio de Hilbert ($L^2(\Omega)$) (Apéndice A) que satisface la siguiente ecuación:

$$\int_{\Omega} \varphi_i(X) \varphi_j(X) dx = \delta_{ij} \quad (3.20)$$

donde δ_{ij} es la delta de Kronecker.

Si los valores y funciones característicos son conocidos, el campo aleatorio se representa a través de la expansión en serie de *Karhunen-Loève* truncada a un número finito de términos, M , como:

$$V(X) = E\{V(X)\} + \sum_{i=1}^M \xi_i(\theta) \sqrt{\lambda_i} \varphi_i(X) \quad (3.21)$$

donde: $E\{V(X)\}$ representa la esperanza matemática sobre todas las realizaciones del campo aleatorio (del módulo de elasticidad), $\xi_i(\theta)$ son las coordenadas de realización del campo aleatorio con respecto a un conjunto de funciones deterministas φ_i . ξ_i se considera un grupo finito de variables aleatorias.

Las variables aleatorias $\xi_i(\theta)$ de la expresión 3.21 tienen las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} E\{\xi_i(\theta)\} &= 0 \\ E\{\xi_i(\theta)\xi_j(\theta)\} &= \delta_{ij} \end{aligned} \quad (3.22)$$

La expansión en serie de *Karhunen-Loève* (expresión 3.21) proporciona una caracterización de segundos momentos en términos de variables aleatorias no correlacionadas y funciones ortogonales deterministas. El objetivo principal de la expansión en serie de *Karhunen-Loève* es encontrar los valores y funciones característicos que permiten crear una nueva configuración del campo aleatorio en el espacio de funciones de Hilbert. En este sentido, las funciones deterministas (funciones características) representan la escala de variabilidad de la propiedad (módulo de elasticidad) que dependerá de la posición espacial X , y los valores característicos definen el nuevo espacio en el cual el campo aleatorio se representa.

3.3.1.2 Propiedades

- Las variables aleatorias que aparecen en la expansión en serie de *Karhunen-Loève* (expresión 3.21) son ortogonales si y sólo si las funciones deterministas $\varphi_i(X)$ y las constantes λ_i son los valores y funciones característicos, respectivamente, de la función de autocovarianza.
- La base formada por las funciones características de la función de autocovarianza es óptima en el sentido que el error cuadrático medio por truncamiento es mínimo. (Es mínimo, por ser la suma de los valores característicos más pequeños de la función de autocovarianza.)
- Si el campo aleatorio se define Gaussiano, entonces el conjunto de variables aleatorias (ξ_i) que aparece en la expresión 3.21 forma un vector Gaussiano ortogonal.
- La expansión es óptima en el sentido que el error cuadrático medio resultante de la representación finita de la serie es minimizado.

3.3.1.3 Solución de la ecuación integral

La ecuación integral de Fredholm homogénea de segundo género (ec. 3.19), puede ser resuelta analítica y numéricamente.

a) Solución analítica

Esta solución involucra una relación espectral, y se considera que el campo es estacionario en el sentido amplio con una función de autocovarianza de tipo exponencial dada por:

$$C_V(X_1, X_2) = e^{-\frac{|X_1 - X_2|}{L}} \quad (3.23)$$

donde L es la llamada distancia de correlación entre dos puntos del campo aleatorio, que se define sobre un dominio unidimensional $[-a, a]$.

La ecuación integral de Fredholm (ec. 3.19) queda expresada, por tanto, como:

$$\int_{-a}^a e^{-\frac{|X_1 - X_2|}{L}} \varphi_i(X_2) dX_2 = \lambda_i \varphi_i(X_1) \quad (3.24)$$

La solución de la ecuación anterior es proporcionada por Ghanem y Spanos (1991), se considera una densidad espectral del campo aleatorio.

Para un dominio en una dimensión:

- Para i impar, $i \geq 1$:

$$\lambda_i = \frac{2L}{1 + \omega_i^2 L^2} \quad (3.25)$$

$$\varphi_i(X) = - \frac{\cos(\omega_i X)}{\sqrt{a + \frac{\text{sen}(2\omega_i a)}{2\omega_i}}} \quad (3.26)$$

donde ω_i es la solución de:

$$\frac{1}{L} - \omega_i \tan \omega_i a = 0 \quad \text{en un rango} \quad \left[(i-1)\frac{\pi}{a}, (i-\frac{1}{2})\frac{\pi}{a} \right] \quad (3.27)$$

- Para i par, $i \geq 2$:

$$\lambda_i^* = \frac{2L}{1 + \omega_i^2 L^2} \quad (3.28)$$

$$\varphi_i(x) = \frac{\text{sen}(\omega_i^* x)}{\sqrt{a - \frac{\text{sen}(2\omega_i^* a)}{2\omega_i^*}}} \quad (3.29)$$

donde ω_i es la solución de:

$$\frac{1}{L} \tan \omega_i a + \omega_i = 0 \quad \text{en un rango} \quad \left[(i-\frac{1}{2})\frac{\pi}{a}, i\frac{\pi}{a} \right] \quad (3.30)$$

Para un dominio en dos dimensiones

Para un dominio en dos dimensiones, la solución de la ecuación integral se obtiene por productos de la solución unidimensional (Sudret y Der, 2000), como:

$$\lambda_i = \lambda_{i_1}^{1D} \times \lambda_{i_2}^{1D} \quad (3.31)$$

$$\varphi(X) \equiv \varphi(x, y) = \varphi_{i_1}(x) \times \varphi_{i_2}(y) \quad (3.32)$$

donde el superíndice 1D se refiere a la solución encontrada en una dimensión.

b) Solución numérica

Cuando la solución analítica de la ecuación integral de Fredholm no es viable, existen métodos de expansión que permiten una solución numérica.

Los métodos de expansión consisten en aproximar cada función característica por una combinación lineal de funciones base determinadas. Esto resultará en un error en la ec. 3.19, que puede ser minimizado utilizando métodos tales como: Galerkin, colocación o Rayleigh-Ritz. Para el caso donde la función de autocovarianza es real simétrica y positiva los métodos anteriores son idénticos.

La solución numérica a través de un procedimiento tipo Galerkin fue propuesta por Ghanem y Spanos (1991) y se resume en los siguientes pasos:

1. Se selecciona un conjunto de N funciones base, como $f_1(X), f_2(X), \dots, f_N(X)$
2. Cada función característica es aproximada como una combinación lineal de estas funciones

$$\varphi_i(X) = \sum_{k=1}^N d_{ik} f_k(X) \quad (3.33)$$

donde: d_{ik} son coeficientes constantes para las i -ésimas funciones.

3. Tomando una función de autocovarianza de tipo exponencial (ec. 3.23) y sustituyendo (3.33) en la ec. 3.19; el error se calcula como la diferencia entre el lado izquierdo y el lado derecho de tal ecuación, teniendo:

$$\epsilon_N = \sum_{i=1}^N d_{ik} \left[\int_{\Omega} C_V(X_1, X_2) f_k(X_2) dX_2 - \lambda_i f_k(X_1) \right] \quad (3.34)$$

Haciendo el error ortogonal al espacio aproximado por $\{f_k(\cdot), i=1, \dots, N\}$:

$$\langle \epsilon_N, f_k(X) \rangle = 0 \quad (3.35)$$

Reescribiendo 3.34 se tiene:

$$\sum_{k=1}^N d_{ik} \left[\int_{\Omega} \int_{\Omega} C_V(X_1, X_2) f_k(X_2) dX_2 f_j(X_1) dX_1 \right] - \lambda_i \sum_{k=1}^N d_{ik} \left[\int_{\Omega} f_k(X_2) f_j(X_2) dX_2 \right] = 0 \quad (3.36)$$

La condición anterior puede expresarse como un sistema de ecuaciones lineales:

$$AD = \Lambda BD \quad (3.37)$$

donde las componentes de todas las matrices $N \times N$ son:

$$A_{kj} = \int_{\Omega} \int_{\Omega} C_V(X_1, X_2) f_k(X_2) f_j(X_1) dX_2 dX_1 \quad (3.38)$$

$$D_{ik} = d_{ik} \quad (3.39)$$

$$\Lambda_{ij} = \delta_{ij} \lambda_j \quad (3.40)$$

$$B_{kj} = \int_{\Omega} f_k(X_2) f_j(X_2) dX_2 \quad (3.41)$$

La ec (3.37) representa la generalización algebraica del problema de valores característicos, que puede ser resuelta obteniendo los valores característicos λ_i y los coeficientes d_{ik} . Las funciones base son seleccionadas como polinomios; el grado de estos dependerá del número de términos usados en la expansión de *Karhunen-Loève*. El método anterior es más exacto para valores característicos que para funciones características (Ghanen y Spanos, 1991).

Huang, Quek y Phoon (2001) compararon los dos tipos de soluciones, para una función de autocovarianza de tipo exponencial; la solución analítica proporcionó significativamente mejores resultados que la numérica.

3.3.2 Representación de la respuesta

La respuesta del sistema es una función de la variabilidad del módulo de elasticidad, se expresa en términos de funcionales no lineales, representados a través de un conjunto de polinomios ortogonales de variables aleatorias Gaussianas llamado *caos polinomial*. La respuesta se expande sobre el espacio de funciones de Hilbert, por medio de estos polinomios debido a que la función de autocovarianza no es conocida *a priori* como en el caso de la representación de la variabilidad del módulo de elasticidad. El fin del *caos polinomial* es representar cada desplazamiento nodal aleatorio sobre la misma dimensión en que la variabilidad espacial esta representada.

3.3.2.1 Formulación de la expansión caos polinomial

El concepto de Caos Homogéneo fue introducido por primera vez por Wiener, cuyos fundamentos fueron el resultado de investigaciones de funcionales no lineales del movimiento Browniano (Wiener, 1938). A grandes rasgos puede decirse que este concepto es una generalización de las series de Taylor a funcionales no lineales basada en el teorema de Cameron y Martin (1947).

En el espacio de funciones de Hilbert, $\Gamma_p(\xi_{i_1}(\theta), \dots, \xi_{i_m}(\theta))$ representa el conjunto de todos los polinomios ortogonales de variables aleatorias Gaussianas, el cual es llamado *caos polinomial*; al subespacio Γ_p ocupado por tales polinomios se conoce como *Caos Homogéneo*. En tal espacio cada desplazamiento nodal aleatorio puede ser expresado como:

$$u(\theta) = h[\xi(\theta), x] \quad (3.42)$$

donde: $u(\theta)$ representa la solución del sistema y $h[\cdot]$ es un funcional no lineal

Cualquier variable aleatoria de segundo orden puede ser expandida en términos de un *caos polinomial* como:

$$u(\theta) = u_0 \Gamma_0 + \sum_{i_1=1}^{\infty} u_{i_1} \Gamma_1(\xi_{i_1}(\theta)) + \sum_{i_1=1}^{\infty} \sum_{i_2=1}^{i_1} u_{i_1 i_2} \Gamma_2(\xi_{i_1}(\theta), \xi_{i_2}(\theta)) + \dots \quad (3.43)$$

donde: u_{i_p} son las coordenadas de la variable $u(\theta)$ asociadas al orden p (cero, primero, segundo, etc.) del *caos homogéneo*, $\Gamma_p(\xi_M, \dots, \xi_M)$ de dimensión M .

a) Construcción del *caos polinomial*

El *caos polinomial* de dimensión finita se construye a partir de un número M de variables aleatorias Gaussianas ortonormales provenientes de la expansión en serie de *Karhunen-Loève*. Su desarrollo propuesto por Ghanem y Spanos, 1991 se realiza a partir de polinomios multidimensionales de Hermite de variables aleatorias.

El número de caos polinomiales (polinomios caóticos) que contiene toda la estructura probabilista de cada desplazamiento nodal aleatorio u , se puede determinar por medio de una combinación binomial de la siguiente manera:

$$P = \sum_{k=0}^p \binom{M+k-1}{k} \quad (3.44)$$

En la literatura los valores más usados son $M = 4$ y $p = 2,3$, en la tabla siguiente se muestran algunos ejemplos de P .

Tabla 3.1 Número de P coeficientes en la base polinomial para valores de M y p

M	p : orden del caos polinomial				
	0	1	2	3	4
2	1	3	6	10	15
4	1	5	15	35	70
6	1	7	28	83	210

Así, cada desplazamiento nodal aleatorio se expresa en términos de estos P coeficientes que a su vez están en función de la dimensión del espacio ocupado por el *caos polinomial*. La representación de la respuesta a través de estos coeficientes se expresa:

$$u(\theta) = \sum_{i=0}^P a_i \Psi_i[\{\xi_k(\theta)\}_{k=1}^M] \quad (3.45)$$

donde: a_i y $\Psi_i[\{\xi_k(\theta)\}_{k=1}^M]$ corresponden a u_{i_p} y $\Gamma_p(\xi_{i_1}(\theta), \dots, \xi_{i_2}(\theta))$ respectivamente. $\Psi_i[\{\xi_k(\theta)\}_{k=1}^M]$ se puede expresar resumidamente como $\Psi_i(\theta)$ y es el i -ésimo *caos polinomial* de dimensión M , representado por polinomios multidimensionales de Hermite.

Por ejemplo, el caos homogéneo para $p = 2$ y $M = 2$ se expresa de la siguiente manera:

$\Gamma_0(\{\}) = 1$	Orden del <i>caos homogéneo</i> 0
$\Gamma_1(\xi_1) = \xi_1, \Gamma_1(\xi_2) = \xi_2$	1
$\Gamma_2(\xi_1, \xi_1) = \xi_1^2 - 1, \Gamma_2(\xi_1, \xi_2) = \xi_1 \xi_2, \Gamma_2(\xi_1, \xi_2) = \xi_2^2 - 1$	2

Es decir los caos polinomiales son:

$\Psi_0(\xi) = 1$	Orden del <i>caos homogéneo</i> 0
$\Psi_1(\xi) = \xi_1, \Psi_1(\xi) = \xi_2$	1
$\Psi_3(\xi) = \xi_1^2 - 1, \Psi_4(\xi) = \xi_1 \xi_2, \Psi_5(\xi) = \xi_2^2 - 1$	2

3.3.2.2 Implementación de polinomios de Hermite

a) Polinomios de Hermite

Un polinomio de Hermite unidimensional de variables normales Gaussianas se puede definir como:

$$H_n(x) = (-1)^n \frac{d^n [e^{-\frac{1}{2}x^2}]}{dx^n} e^{\frac{1}{2}x^2} \quad (3.46)$$

Los polinomios de Hermite de variables normales Gaussianas son ortogonales con respecto a su producto interno sobre el espacio de Hilbert:

$$E \{ H_m(\xi_i) H_n(\xi_j) \} = 0, \quad m \neq n \quad (3.47)$$

b) Polinomios multidimensionales de Hermite

El caos polinomial de orden p y dimensión M se construye a partir de polinomios multidimensionales de Hermite. Cada polinomio multidimensional de Hermite se define como una secuencia de M enteros no negativos $\{\alpha_1, \dots, \alpha_M\}$ (Ghanem, 1999) como:

$$\Psi_\alpha = \prod_{i=1}^M H_{\alpha_i}(\xi_i), \quad \alpha_i \geq 0 \quad (3.48)$$

donde H_{α_i} es un polinomio de Hermite asociado a la secuencia α cuyo grado es menor o igual que p .

c) Cálculo de esperanzas de polinomios multidimensionales de Hermite

El cálculo de esperanzas de polinomios multidimensionales de Hermite se requiere para la formulación del MEFEE y para conocer las características del campo aleatorio de desplazamientos. Ghanem y Spanos (1991) presentaron un algoritmo para el cálculo de esperanzas que resulta ser complicado, sin embargo Sudret y Der Kiureghian (2000) construyeron un algoritmo que se basa en la utilización de un ábaco que permite calcular de manera sencilla tales esperanzas.

– Producto de dos polinomios multidimensionales de Hermite

Por definición, los polinomios de Hermite de variables normales estándar son ortogonales uno de otro con respecto a su esperanza matemática:

$$E\{H_p(\xi)H_q(\xi)\} = \delta_{pq}p! \quad (3.49)$$

Por tanto los polinomios $\{\Psi_j, j = 0, \dots, P-1\}$ son ortogonales y satisfacen la siguiente condición:

$$E\{\Psi_\alpha \cdot \Psi_\beta\} = \delta_{\alpha\beta} \prod_{i=1}^M \alpha_i! \quad (3.50)$$

Donde: $\delta_{\alpha\beta}$ es la delta de Kronecker, cuyo valor es 1 si α y β son iguales y 0 en el caso contrario.

Cuando el campo aleatorio es Gaussiano, la esperanza del producto de dos polinomios multidimensionales de Hermite puede interpretarse entonces, como el cuadrado de la norma de la función base Ψ_j , es decir:

$$c_j = E\{\Psi_j^2\} \quad (3.51)$$

- Producto de dos polinomios multidimensionales de Hermite y una variable normal estándar

Por definición se tiene:

$$c_{ijk} \equiv E\{\xi_i \Psi_\alpha \Psi_\beta\} = E\{\xi_i H_{\alpha_i}(\xi_i) H_{\beta_i}(\xi_i)\} \cdot \prod_{l \neq i} E\{H_{\alpha_l}(\xi_l) H_{\beta_l}(\xi_l)\} \quad (3.52)$$

Si α y β son diferentes, la ecuación anterior se reduce (Sudret y Der Kiureghian, 2000) a:

$$c_{ijk} \equiv E\{\xi_i \Psi_\alpha \Psi_\beta\} = E\{\xi_i H_{\alpha_i}(\xi_i) H_{\beta_i}(\xi_i)\} \cdot \prod_{l \neq i} \alpha_l! \quad (3.53)$$

El problema se reduce a calcular $E\{\xi H_p(\xi) H_q(\xi)\}$, donde H_p y H_q son polinomios de Hermite de variables normales Gaussianas, el cálculo detallado para conocer tal esperanza fue

desarrollado por Sudret y Der Kiureghian, 2000. Finalmente, tal esperanza matemática se expresa como:

$$E\{\xi H_p(\xi) H_q(\xi)\} = p! \delta_{p-1,q} + q! \delta_{p,q-1} \quad (3.54)$$

La expresión anterior es sustituida en 3.53 para calcular el coeficiente c_{ijk} , requerido para la formulación del MEFEE (cuando la variabilidad espacial se modela como un campo aleatorio Gaussiano), que se define como:

$$c_{ijk} = E\{\xi_i \Psi_j \Psi_k\} \quad (3.55)$$

3.4 Formulación del MEFEE

3.4.1 Introducción

El propósito de los análisis de problemas continuos con elementos finitos estocásticos en geotecnia, es cuantificar la incertidumbre que induce la dispersión de los parámetros de los materiales sobre el campo de desplazamientos. Aunque el método espectral también cuantifica la incertidumbre sobre los desplazamientos, la diferencia con las demás técnicas es que la formulación es aleatoria desde el vector de desplazamientos.

La formulación del método espectral se realiza sobre un espacio de dimensión infinita en el que la variabilidad espacial se modela como una dimensión adicional a través de funciones deterministas base, utilizando la expansión en serie de *Karhunen-Loève*; las funciones base son correlacionadas con la expansión en *caos polinomial* con el fin de discretizar la dimensión del espacio, y que el campo de desplazamientos quede representado sobre la misma dimensión en que la variabilidad espacial se trata. Acoplando esta dimensión con la discretización espacial del elemento finito, se tendrá un sistema, cuyo tamaño se define en una nueva dimensión; y por tanto la ecuación de equilibrio estocástica del MEFEE queda representada en tal dimensión.

3.4.2 Ecuación de equilibrio del Método del Elemento Finito

En el análisis lineal con el método del elemento finito clásico se establece un sistema de ecuaciones lineales de dimensiones $N \times N$ con la siguiente ecuación de equilibrio:

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (3.56)$$

donde: \mathbf{F} es un vector de fuerzas nodales y volumétricas; \mathbf{U} es un vector de desplazamientos nodales y \mathbf{K} es la matriz de rigidez total, que se obtiene ensamblando las matrices de rigidez de los elementos (\mathbf{k}^e), expresada como:

$$\mathbf{k}^e = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega_e \quad (3.57)$$

3.4.3 Derivación de la ecuación de equilibrio estocástica

Para que la matriz de rigidez \mathbf{K} , refleje la variabilidad espacial de la propiedad del material; el módulo de elasticidad se modela como un campo aleatorio Gaussiano y por tanto, la matriz de elasticidad de \mathbf{D} para un punto X se representa como:

$$\mathbf{D}(X) \equiv V(X)\mathbf{D}_o \quad (3.58)$$

Donde: \mathbf{D}_o es una matriz de elasticidad calculada con un módulo de elasticidad unitario. Como se vio anteriormente, un campo aleatorio puede ser representado en el espacio de funciones de Hilbert por medio de una expansión en serie de *Karhunen-Loève* (expresión 3.21)

$$V(X) = E\{V(X)\} + \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i(\theta) \sqrt{\lambda_i} \varphi_i(X) \quad (3.59)$$

Si las expresiones (3.58) y (3.59) son sustituidas en la matriz de rigidez del elemento, ésta queda expresada por una parte determinista $\bar{\mathbf{k}}^e$ y una parte estocástica como:

$$\mathbf{k}^e(\theta) = \bar{\mathbf{k}}^e + \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{k}_i^e \xi_i(\theta) \quad (3.60)$$

Donde: $\bar{\mathbf{k}}^e$ es el valor esperado de la matriz de rigidez, expresado por:

$$\bar{\mathbf{k}}^e = \int_{\Omega_e} E\{V(X)\} \mathbf{B}^T \mathbf{D}_o \mathbf{B} \quad (3.61)$$

\mathbf{k}_i^e es la parte estocástica de la matriz de rigidez del elemento, con la forma:

$$\mathbf{k}_i^e = \sqrt{\lambda_i} \int_{\Omega_e} \varphi_i(X) \mathbf{B}^T \mathbf{D}_o \mathbf{B} d\Omega_e \quad (3.62)$$

Considerando la parte determinista y la parte estocástica de la matriz de rigidez, la ecuación de equilibrio (ec. 3.56) puede escribirse, entonces, como:

$$\left[\bar{\mathbf{K}} + \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{K}_i \xi_i(\theta) \right] \mathbf{U}(\theta) = \mathbf{F} \quad (3.63)$$

La ecuación anterior está expresada solamente en términos de una sola expansión, faltaría considerar la representación aleatoria del vector de desplazamientos; en donde el vector de desplazamientos nodales se escribe, de acuerdo a una expansión en *caos polinomial*, como:

$$\mathbf{U}(\theta) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{U}_j \Psi_j(\theta) \quad (3.64)$$

Finalmente, si la expresión de arriba se sustituye en 3.63 la ecuación de equilibrio del MEFEE queda representada en términos de las dos expansiones de la siguiente manera:

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{K}_i \xi_i(\theta) \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{U}_j \Psi_j(\theta) \right) - \mathbf{F} = 0 \quad (3.65)$$

Debido al truncamiento de la serie en M términos para la expansión de la matriz de rigidez y P para la expansión del vector de desplazamientos, se genera un residuo, de tal forma que se tiene:

$$\epsilon_{M,P} = \sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^P \mathbf{K}_i \mathbf{U}_j \xi_i(\theta) \Psi_j(\theta) - \mathbf{F} \quad (3.66)$$

Para tener la mejor aproximación posible de los desplazamientos, se requiere que el residuo $\epsilon_{M,P}$ sea ortogonal al espacio ocupado por los polinomios $\{\Psi_k\}_{k=0}^P$; debiendo cumplir con la siguiente condición:

$$E\{\epsilon_{M,P} \cdot \Psi_k\} = 0 \quad k = 0, \dots, P \quad (3.67)$$

Multiplicando la ec. 3.66 por Ψ_k y tomando esperanzas de ambos lados para cumplir con la condición de ortogonalidad, se tiene:

$$E\{\epsilon_{M,P} \Psi_k\} = \sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^P \mathbf{K}_i \mathbf{U}_j E\{\xi_i(\theta) \Psi_j(\theta) \Psi_k\} - E\{\mathbf{F} \Psi_k\} \quad (3.68)$$

La ecuación anterior representa la ecuación de equilibrio global del MEFEE en función de la base polinomial generada sobre el espacio de Hilbert. Así, tal ecuación queda formulada en términos de las esperanzas de productos de polinomios (Inciso 3.3.2.2 c); donde:

$$c_{ijk} = E\{\xi_i \Psi_j \Psi_k\} \quad (3.69)$$

$$\mathbf{F}_k = E\{\Psi_k \mathbf{F}\} \quad (3.70)$$

\mathbf{F}_k es cero para $k > 0$ en el caso de cargas deterministas.

Sustituyendo el coeficiente c_{ijk} y 3.70 en la ecuación global de equilibrio (ec. 3.68) se tiene:

$$\sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^P c_{ijk} \mathbf{K}_i \mathbf{U}_j = \mathbf{F}_k \quad (3.71)$$

Haciendo:

$$\mathbf{K}_{jk} = \sum_{i=0}^M c_{ijk} \mathbf{K}_i \quad (3.72)$$

De acuerdo con la expansión de la matriz de rigidez, la matriz \mathbf{K}_{jk} se escribe:

$$\mathbf{K}_{jk} = c_{0,jk} \bar{\mathbf{K}} + \sum_{i=1}^M c_{ijk} \mathbf{K}_i \quad j, k = 0, \dots, P \quad (3.73)$$

Donde el término $i = 0$ corresponde al valor esperado de la matriz de rigidez y la ec. 3.71 se puede expresar como:

$$\sum_{j=0}^P \mathbf{K}_{jk} \mathbf{U}_j = \mathbf{F}_k \quad k = 0, \dots, P \quad (3.74)$$

El tamaño de la matriz \mathbf{K}_{jk} está determinado por el número físico de grados de libertad en el modelo del elemento finito y el número de coeficientes usados en la expansión en *caos polinomial*.

Finalmente, se tiene que la ecuación de equilibrio global del MEFEE establece un sistema de ecuaciones lineales de dimensiones $NP \times NP$ con la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{00} & \cdots & \mathbf{K}_{0,P} \\ \mathbf{K}_{10} & \cdots & \mathbf{K}_{1,P} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{K}_{P,0} & \cdots & \mathbf{K}_{P,P} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{U}_0 \\ \mathbf{U}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{U}_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_0 \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.75)$$

Escribiendo el sistema anterior en forma compacta, se tiene:

$$\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (3.76)$$

3.4.4 Cálculo de la incertidumbre sobre los desplazamientos

Para conocer las características del campo aleatorio de la respuesta se recurre a un análisis de segundos momentos, teniendo que:

- La esperanza del vector de desplazamientos nodales es el primer término de la expansión:

$$E\{\mathbf{U}\} \cong \mathbf{U}_0 \quad (3.77)$$

- La matriz de covarianza del vector de desplazamientos nodales es:

$$Cov[\mathbf{U}, \mathbf{U}] = E\{(\mathbf{U} - E\{\mathbf{U}\})(\mathbf{U} - E\{\mathbf{U}\})^T\} = \sum_{i=1}^P E\{\Psi_i^2\} \mathbf{U}_i \mathbf{U}_i^T \quad (3.78)$$

donde $E\{\Psi_i^2\}$ corresponde al cuadrado de la norma de la función base Ψ_j .

Específicamente, el MEFEE recurre a dos artificios matemáticos que permite representar todo el sistema sobre un espacio aleatorio. Estos artificios matemáticos combinan la expansión de funcionales con la técnica de minimización del error por truncamiento. Por la naturaleza de los espacios funcionales en los que el enfoque espectral se formula, su representación es abstracta, lo que lleva a que su uso sea limitado.

4. Aplicación

4.1 Introducción

Para ilustrar y evaluar la utilidad del método espectral presentado en este trabajo se analizaron tres ejemplos de interés práctico para la ingeniería y geotecnia. El primero de ellos se refiere a un sólido cúbico sujeto a carga axial; después se analizó una placa simplemente apoyada con carga aplicada puntualmente y por último, una prueba de deformación plana. Mediante estos ejemplos sencillos se analizó cómo se propaga la incertidumbre sobre el módulo de elasticidad de un material al campo de desplazamientos calculados. En los análisis se consideró que la función de autocovarianza que representa el campo aleatorio del módulo de elasticidad es de tipo exponencial: $(C_v(X_1, X_2) = e^{-\frac{|X_1 - X_2|}{L}})$, donde la “distancia de correlación” λ (es decir la distancia a partir de la cual la correlación se vuelve despreciable), definida en forma convencional como $L=2/\lambda$, es un parámetro de análisis.

Para los ejemplos se utilizó una subrutina del programa FERUM versión 3 (Finite Element Reliability Using Matlab), llamada FERUMssfem (Sudret y Der Kiureghian, 2000) presentada en el Apéndice B, a la cual se le hicieron algunas modificaciones. El programa permite analizar problemas de elasticidad lineal en dos dimensiones.

4.2 Ejemplos de aplicación

4.2.1 Sólido cúbico

4.2.1.1 Planteamiento

Retomando un ejemplo estudiado anteriormente por Auvinet *et al.* (1996), se consideró un sólido cúbico de dimensiones unitarias, constituido de un solo material con módulo de deformación aleatorio, sometido a presión vertical de 100 kPa. Los apoyos en el extremo inferior restringen el

movimiento vertical; el central lo restringe también horizontalmente. En la Figura 4.1 se observan las condiciones de carga y de apoyo antes mencionadas. El análisis se realiza bajo la suposición de esfuerzos planos. Se evaluará la incertidumbre en los desplazamientos horizontales y verticales con el MEFEE.

Se asume que el campo aleatorio del módulo de deformación es estacionario en el sentido amplio con las siguientes características:

Módulo de deformación:

$$E\{E\}=1000 \text{ kPa}$$

$$CV\{E\}=0.1$$

Relación de Poisson:

$$E\{\nu\}=0.3$$

$$CV\{\nu\}=0$$

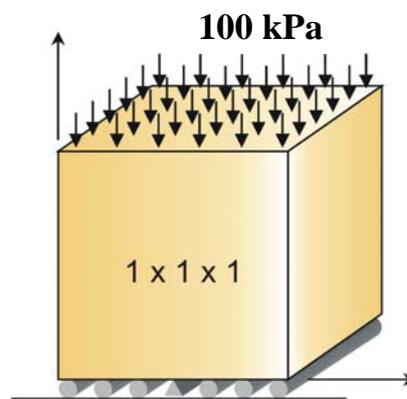


Figura 4.1 Sólido cúbico

4.2.1.2 Representación del dominio de análisis

El cubo es discretizado con una malla de 100 elementos finitos, la presión es representada como cargas puntuales aplicadas en los puntos nodales superiores de la malla. En la Figura 4.2 se muestra la malla, así como las condiciones de apoyo propuestas.

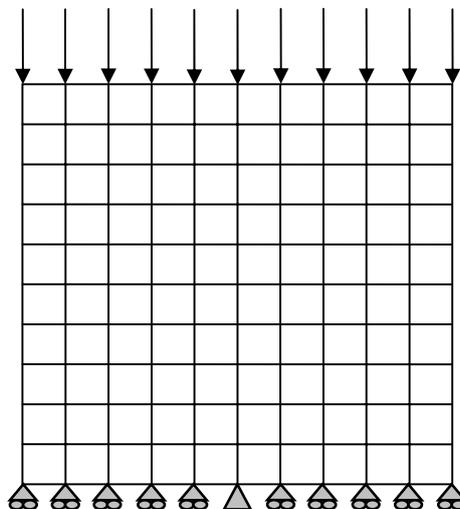


Figura 4.2 Malla de elementos finitos

4.2.1.3 Resultados

A través del coeficiente de variación de los desplazamientos horizontales y verticales es posible evaluar la variación de la incertidumbre de tales desplazamientos en todo el cuerpo de la probeta. Las curvas de isovalores de las gráficas que se presentan a continuación muestran el comportamiento de la incertidumbre en la probeta para distintas distancias de correlación.

i) Distancia de correlación = 0

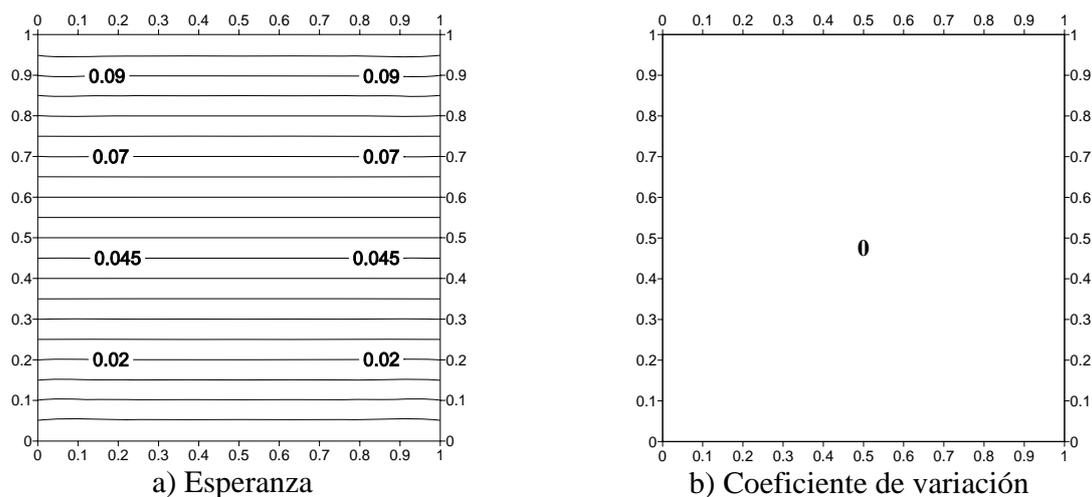


Figura 4.3 Esperanza y coeficiente de variación de los desplazamientos verticales

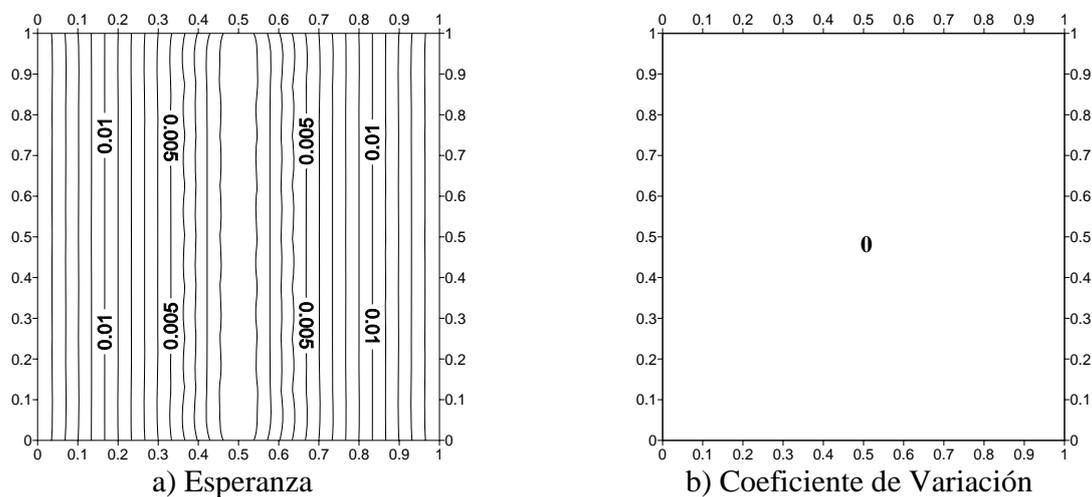


Figura 4.4 Esperanza y coeficiente de variación de los desplazamientos horizontales

Para una distancia de correlación igual a cero, la incertidumbre en los desplazamientos verticales y horizontales es nula en todo el cuerpo del sólido, como se observa en las Figuras 4.3b y 4.4b, debido a un efecto de *compensación estadística* que se origina por la interacción de materiales

vecinos independientes que anula la desviación estándar. El material se comporta como un material heterogéneo pero estadísticamente homogéneo.

ii) Distancia de correlación = 0.64 m

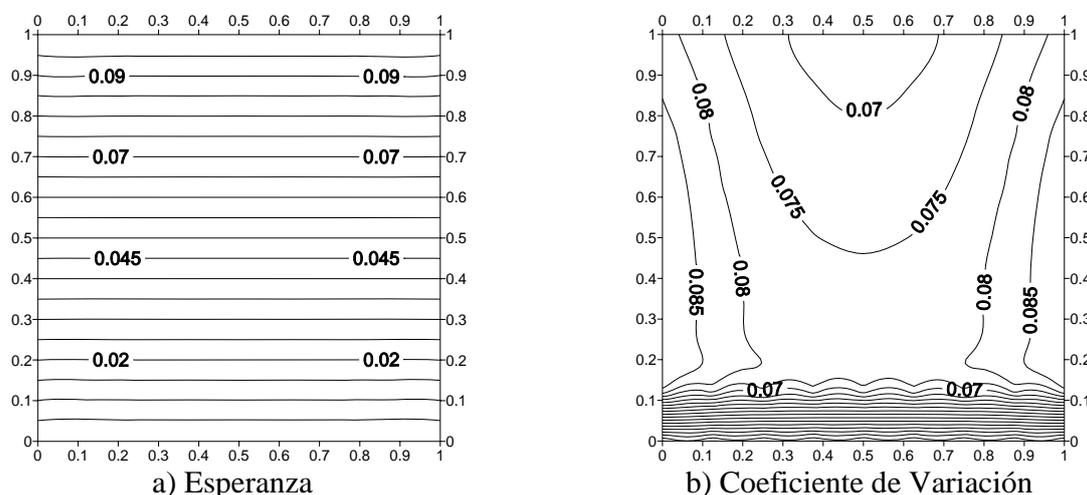


Figura 4.5 Esperanza y coeficiente de variación de los desplazamientos verticales

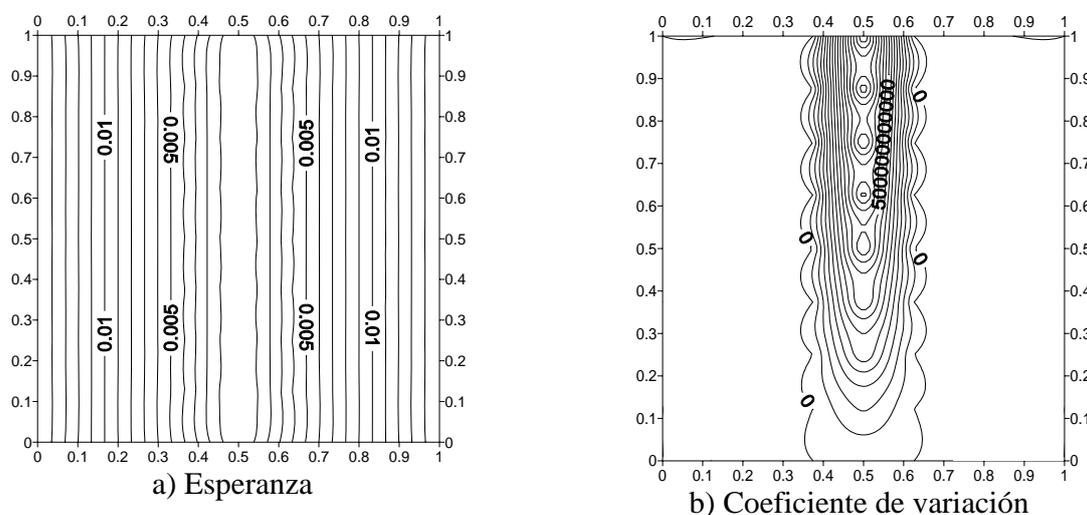


Figura 4.6 Esperanza y coeficiente de variación de los desplazamientos horizontales

En la Figura 4.5b se observa que si la distancia de correlación es aproximadamente del mismo orden que el ancho del sólido, la incertidumbre sobre los desplazamientos verticales es nula en la parte inferior del sólido, donde el movimiento fue restringido, mientras que en el resto del sólido se observa un efecto de promedio espacial o *compensación estadística*; es decir, para esta distancia de correlación el sólido se comporta heterogéneamente. Por ejemplo: la incertidumbre en el punto superior de la esquina del sólido es mayor que en el punto superior central debido a que el número de materiales con baja correlación que interactúan es mayor en el punto central que en el de la esquina. Por otra parte, en la Figura 4.6b se observa cómo el CV de los

desplazamientos horizontales tiende a infinito sobre el eje de simetría; en este caso el comportamiento del material es fuertemente heterogéneo lo que da lugar a que se presenten variaciones aleatorias alrededor de su valor esperado (que es nulo), originando una incertidumbre relativa infinita sobre tal eje.

iii) *Distancia de correlación = infinita*

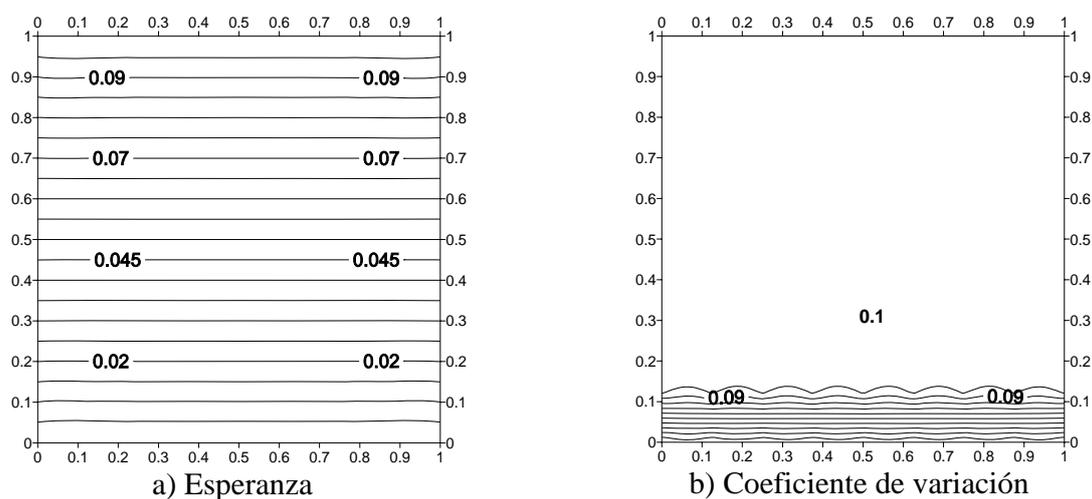


Figura 4.7 Esperanza y coeficiente de variación de los desplazamientos verticales

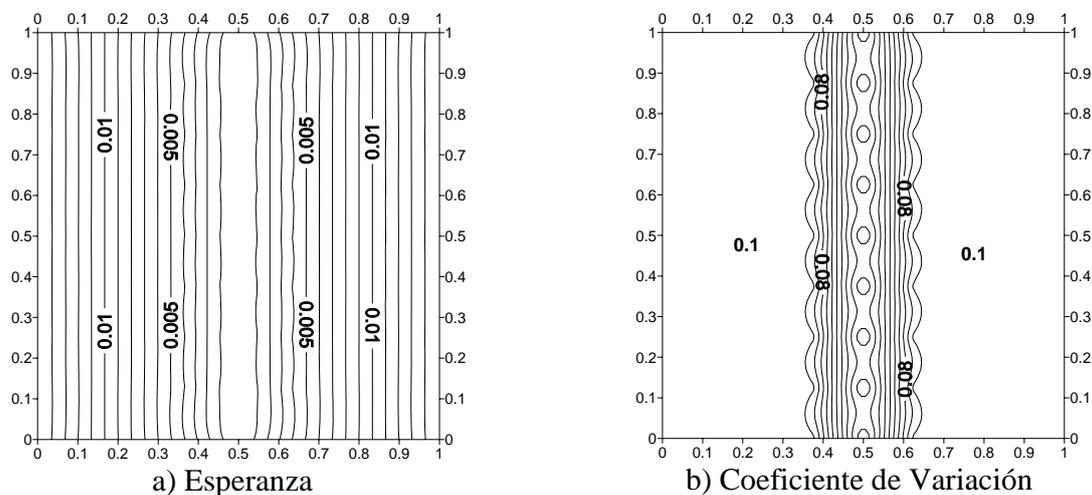


Figura 4.8 Esperanza y coeficiente de variación de los desplazamientos horizontales

Cuando la distancia de correlación tiende a infinito, se observa en la Figura 4.7b que la incertidumbre sobre los desplazamientos verticales nuevamente es nula en la parte inferior donde no se permitió movimiento, en el resto del cubo se observa que el valor de incertidumbre máximo alcanzado en los desplazamientos verticales es igual al valor impuesto en el módulo de deformación. En la Figura 4.8b se aprecia la variación de la incertidumbre en los desplazamientos horizontales en todo el cuerpo del sólido. Primero la incertidumbre sobre el eje de simetría es

nula, lo que significa que no existen variaciones aleatorias del material alrededor de su valor esperado (que es nulo); después, en el resto del sólido el valor de incertidumbre impuesto en el módulo de deformación es el máximo valor que toma el CV de los desplazamientos horizontales.

La Figura 4.9 representa la incertidumbre (desviación estándar) del desplazamiento vertical para el punto central superior (punto A) y para el punto de la esquina superior (punto B) con respecto a la distancia de correlación. Cuando la distancia de correlación es pequeña, la incertidumbre sobre el desplazamiento es nula para ambos puntos, este resultado obedece a un efecto de *compensación estadística*, en el que el material es muy heterogéneo pero estadísticamente homogéneo. Conforme la distancia de correlación aumenta la incertidumbre sobre estos desplazamientos también crece, hasta alcanzar el valor de incertidumbre impuesto en el módulo de deformación, donde el material se comporta como estrictamente homogéneo. Se presenta también un efecto de *compensación estadística* en un cierto intervalo de valores de la distancia de correlación, mayor para el punto A, debido a que el comportamiento del material es más heterogéneo para ese punto que para el del punto B.

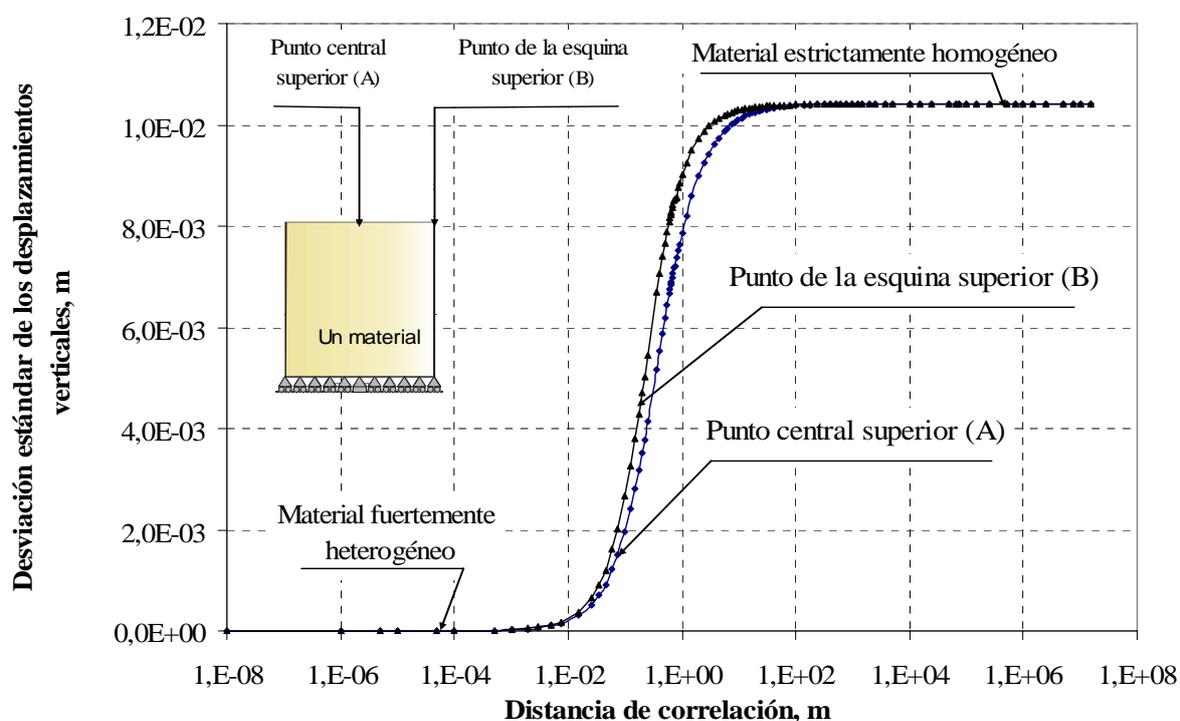


Figura 4.9 Influencia de la distancia de correlación sobre la incertidumbre en los desplazamientos verticales

La incertidumbre (desviación estándar) sobre el desplazamiento horizontal en función de la distancia de correlación para el punto central superior (punto A) se observa en la Figura 4.10. Igualmente, para distancias de correlación pequeñas se presenta el efecto de *compensación estadística* ya mencionado. Posteriormente, la desviación estándar sigue aumentando y cuando la distancia de correlación es del mismo orden que la dimensión del dominio horizontal en estudio se presenta el máximo valor de incertidumbre; después, para distancias de correlación mayores, el material comienza a estabilizarse estadísticamente y la incertidumbre de los desplazamientos

también, hasta alcanzar nuevamente valores nulos; el material tiene entonces un comportamiento estrictamente homogéneo que representa la simetría axial de los desplazamientos. El punto B se comporta estadísticamente en forma similar que el punto A; la máxima incertidumbre alcanzada por dicho punto es mayor que para el punto central superior, debido a que el comportamiento del material en el punto de la esquina es menos heterogéneo que en el central. El menor valor que toma la desviación estándar en el punto de la esquina superior no es nulo y está condicionado por la magnitud de incertidumbre impuesta en el módulo de deformación.

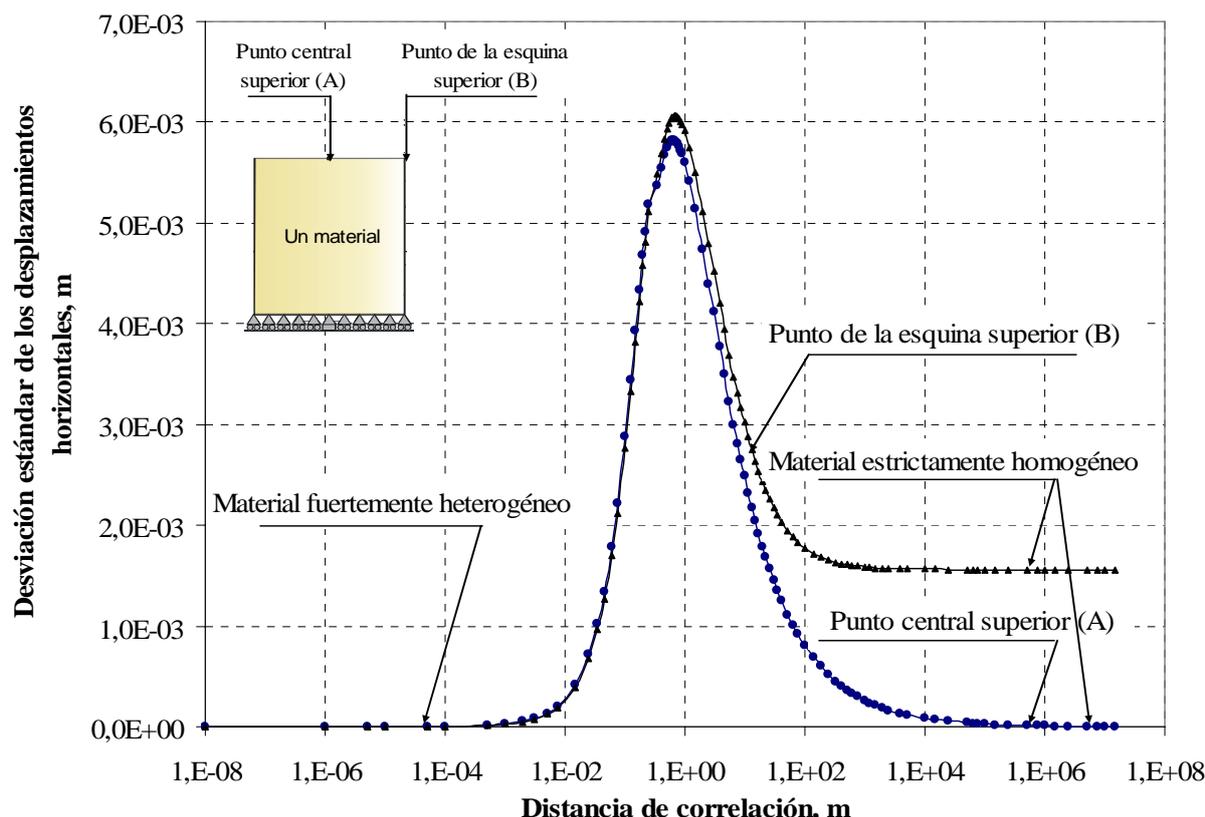


Figura 4.10 Influencia de la distancia de correlación sobre la incertidumbre en los desplazamientos horizontales

4.2.2 Placa simplemente apoyada

4.2.2.1 Planteamiento

Se analizó una placa metálica simplemente apoyada colocada de canto de 4mm de espesor, sujeta a una carga de 120 kN; la Figura 4.11 muestra las dimensiones del elemento y las condiciones de apoyo. La placa está constituida por un material aleatorio, cuyo módulo de elasticidad se modela como un campo aleatorio descriptivo; se asume un estado de esfuerzos planos. Se estudió el efecto de la variabilidad del módulo de elasticidad sobre el campo de desplazamientos, utilizando el MEFEE.

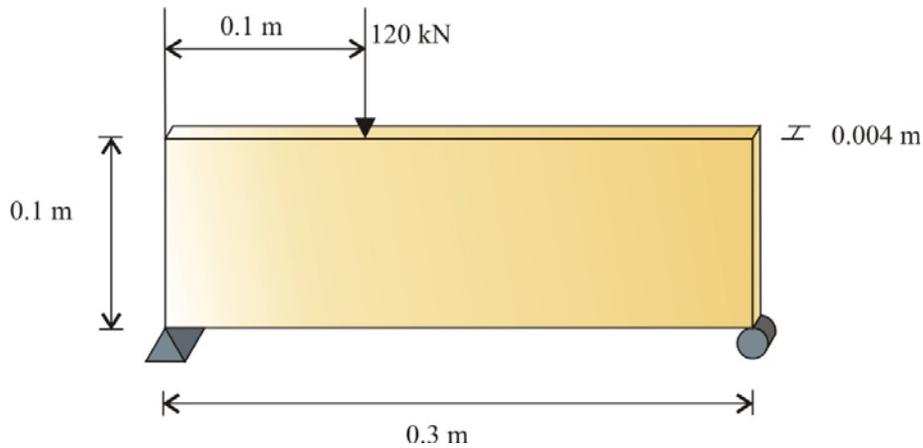


Figura 4.11 Placa simplemente apoyada

Se considera que el campo aleatorio del módulo de elasticidad es estacionario en el sentido amplio con las siguientes características:

Módulo de elasticidad:

$$E\{E\} = 21 \times 10^4 \text{ MPa}$$

$$CV\{E\} = 0.10$$

Relación de Poisson:

$$E\{v\} = 0.3$$

$$CV\{v\} = 0$$

4.2.2.2 Representación del dominio de análisis

En el caso de la placa, si la esperanza de los desplazamientos (horizontales y verticales) se analiza con una malla burda, su comportamiento es más rígido que el real; a medida que aumenta el número de elementos, su comportamiento tiende a ser más flexible y las deformaciones son más precisas. Tomando en cuenta lo anterior, para el análisis de la placa con el MEFEE se construyó una malla de 450 elementos, con las condiciones de carga y de apoyo que se muestran en la Figura 4.12.

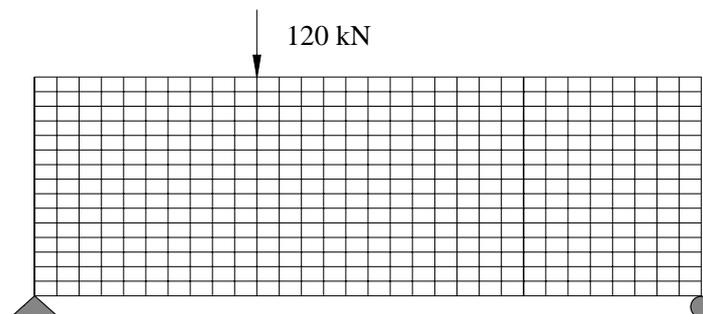


Figura 4.12 Malla de elementos finitos para placa simplemente apoyada

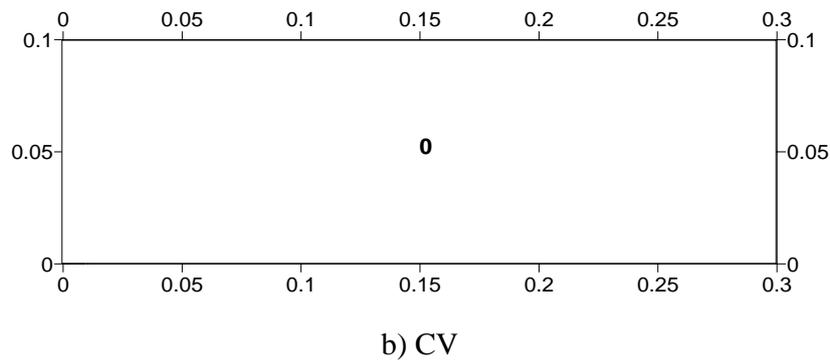


Figura 4.14 Esperanza y coeficiente de variación de los desplazamientos horizontales

En la Figura 4.13a se observa que los mayores desplazamientos verticales se presentan bajo el punto de aplicación de la carga y desaparecen en los apoyos, donde el movimiento se restringió; sin embargo, la incertidumbre, como se aprecia en la Figura 4.13b, de tales desplazamientos es nula en todo el cuerpo de la placa debido a la *compensación estadística* que, como ya se mencionó, anula la desviación estándar. En cuanto a los desplazamientos horizontales, la Figura 4.14a muestra que el mayor desplazamiento se presenta en la esquina inferior donde éste no se restringió; la incertidumbre de estos desplazamientos es también cero en toda la placa, Figura 4.14b, provocada por el mismo fenómeno de *compensación estadística*.

ii) *Distancia de correlación infinita*

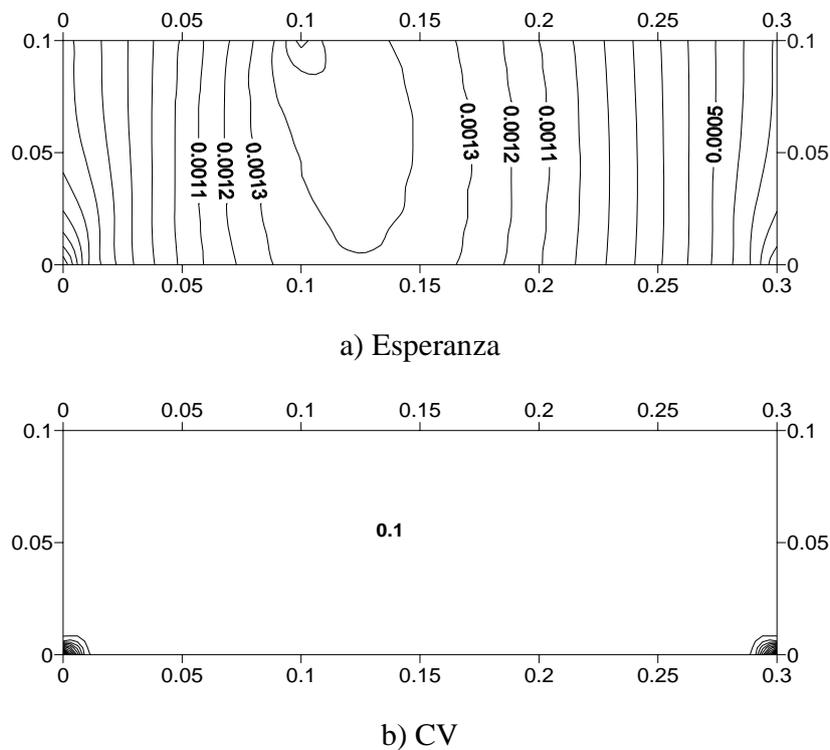


Figura 4.15 Esperanza y coeficiente de variación de los desplazamientos verticales

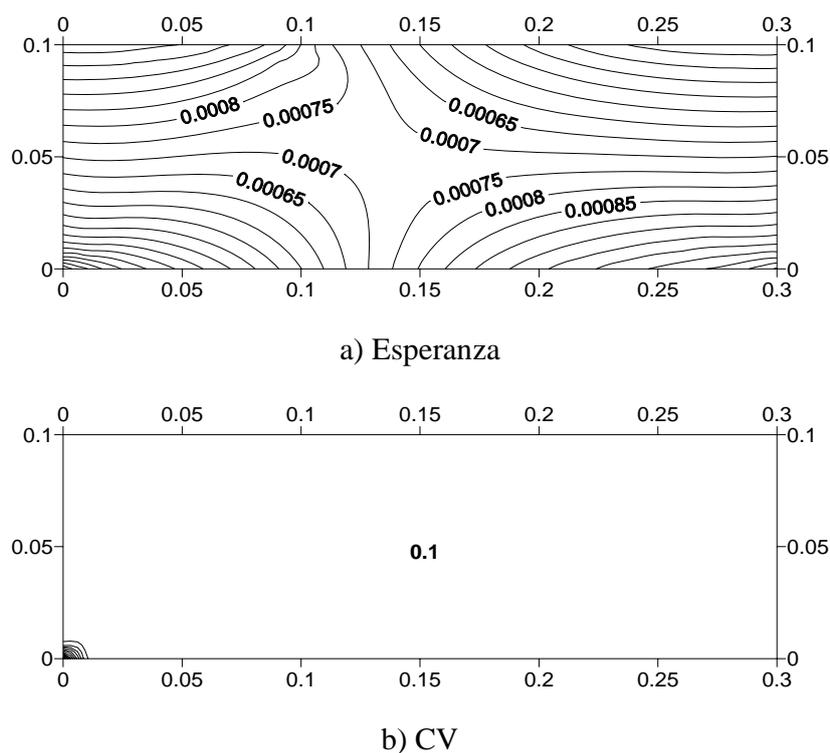


Figura 4.16 Esperanza y coeficiente de variación de los desplazamientos horizontales

Cuando la distancia de correlación tiende a infinito, el valor de la incertidumbre impuesto en el módulo de elasticidad es propagado sobre los desplazamientos horizontales y verticales en toda la placa, tal como se observa en las Figuras 4.15b y 4.16b.

La distribución de la incertidumbre (desviación estándar) de los desplazamientos verticales en el punto de aplicación de la carga (punto A) en función de la distancia de correlación se presenta en la Figura 4.17. Para distancias de correlación pequeñas la incertidumbre de tales desplazamientos es nula debido al efecto de *compensación estadística*. Posteriormente la incertidumbre aumenta conforme la distancia de correlación crece hasta alcanzar el valor de incertidumbre impuesto en el módulo de elasticidad y se mantiene constante, en donde el material es estrictamente homogéneo. La variabilidad de la incertidumbre para el punto de la esquina superior (punto B) es exactamente igual que en el punto A; para distancias de correlación pequeñas, el material se comporta como fuertemente heterogéneo y, para distancias de correlación infinitas, es estrictamente homogéneo, sólo que para este punto la incertidumbre es mucho menor que en el punto de aplicación de la carga. Los resultados indican, entonces, que la distribución espacial de la incertidumbre de los desplazamientos es una función de las condiciones de carga y de apoyo.

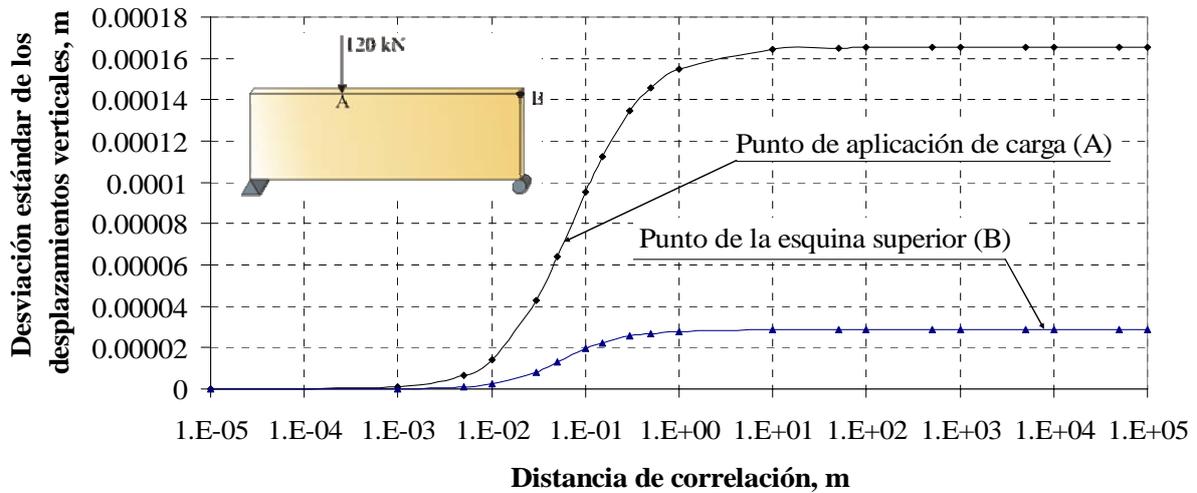


Figura 4.17 Influencia de la distancia de correlación sobre la incertidumbre en los desplazamientos verticales

En la Figura 4.18 se aprecia la distribución de la incertidumbre (desviación estándar) de los desplazamientos horizontales para el punto A y el punto B, en función de la distancia de correlación. Se observa que la variabilidad de estos desplazamientos es igual que la de los desplazamientos verticales con excepción que para el punto A, el valor máximo de la desviación estándar alcanzado es menor para el desplazamiento horizontal.

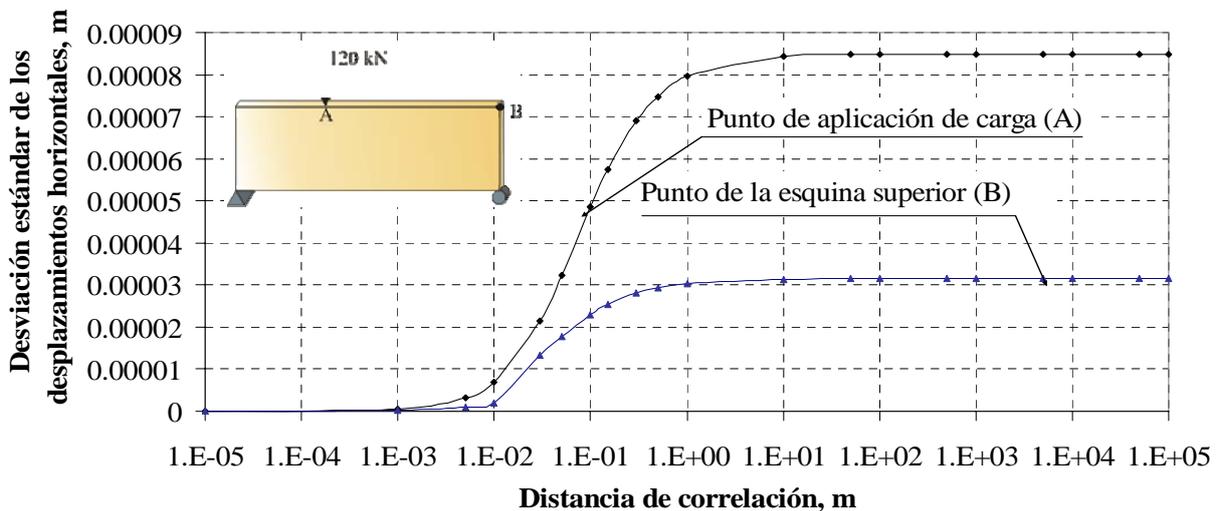


Figura 4.18 Influencia de la distancia de correlación sobre la incertidumbre en los desplazamientos horizontales

Un ejercicio de interés para este ejemplo, acerca de la influencia de la distancia de correlación sobre la heterogeneidad del material, se presenta en la Figura 4.19 que muestra cómo la incertidumbre (desviación estándar) sobre los desplazamientos verticales para una malla fina es

mayor que para un malla burda; sin embargo existe una cierta distancia de correlación ($DC = 100$) para la cual, el material tiene un comportamiento estrictamente homogéneo, independientemente del número de elementos de la malla, como se muestra en la Figura 4.20.

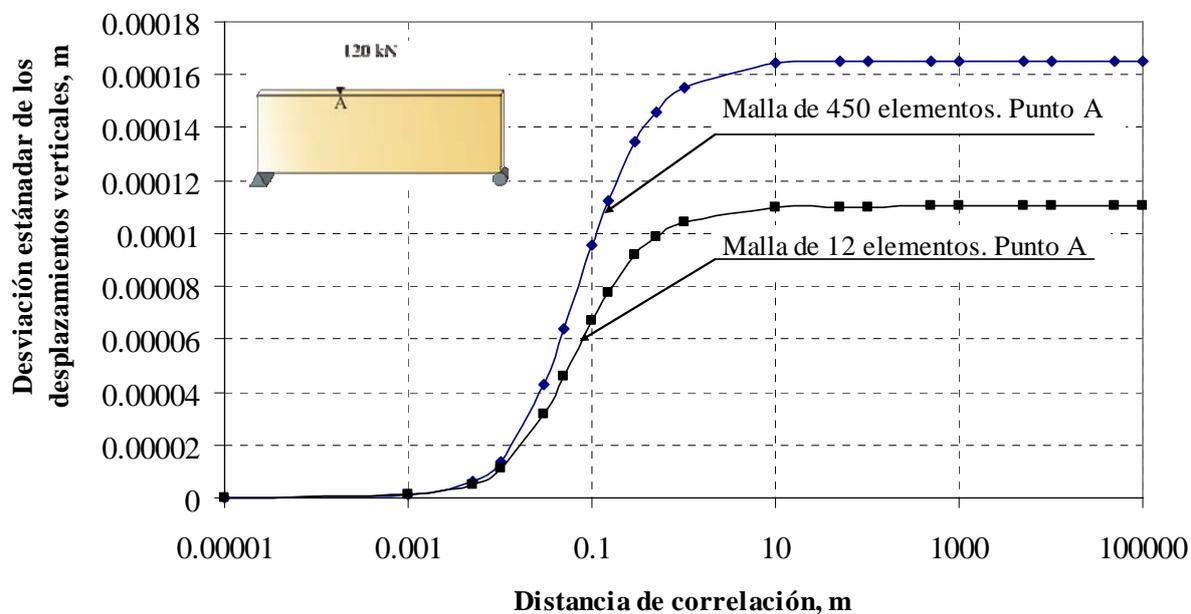


Figura 4.19 Influencia de la distancia de correlación sobre la incertidumbre de los desplazamientos verticales de acuerdo al número de elementos de la malla

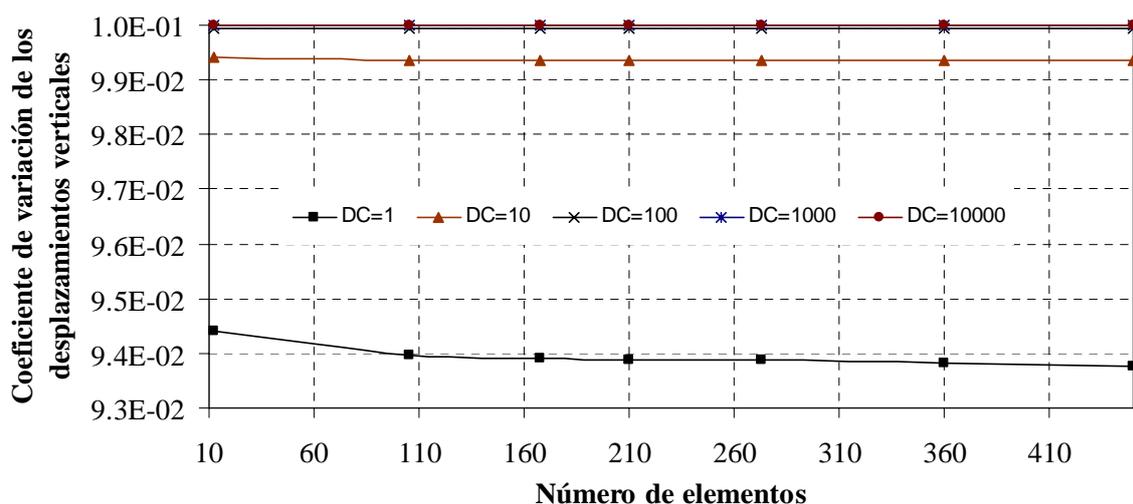


Figura 4.20 Influencia del número de elementos sobre el coeficiente de variación de los desplazamientos verticales, para distintas distancias de correlación

4.2.3 Ensaye de deformación plana

Las gravas y los enrocamientos son materiales de gran interés en el diseño de presas y terraplenes para carreteras, por ello la necesidad de conocer sus características de resistencia y compresibilidad. Un aparato que permite realizar pruebas de deformación plana fue montado por el Instituto de Ingeniería de la UNAM en colaboración con la Comisión Federal de Electricidad (CFE) en los años 1970 (Marsal, 1972). El dispositivo permite evaluar el comportamiento esfuerzo-deformación de materiales para enrocamientos con partículas de hasta 15 cm de diámetro.

4.2.3.1 Descripción del ensaye

Aparato. El aparato de deformación plana, como se muestra en la Figura 4.21, fue diseñado para ensayar especímenes prismáticos de 70 x 75 cm de sección transversal y 180 cm de altura. La probeta está confinada por paredes rígidas y móviles. Las primeras están ligadas entre sí por barras huecas, por medio de transformadores diferenciales se mide el esfuerzo principal intermedio (σ_2); las móviles formadas por placas de acero, cuelgan de ruedas y van guiadas por mecanismos que impiden su giro alrededor de un eje vertical. A través de un gato hidráulico con capacidad de 600 T se generan esfuerzos axiales (σ_1). La presión lateral (σ_3) se aplica a las paredes móviles con 6 pares de gatos hidráulicos (50 T de capacidad cada uno). Con los dispositivos de carga descritos se puede desarrollar esfuerzos máximos de 100 kg/cm² en dirección σ_1 y de 22 kg/cm² en dirección σ_3 .

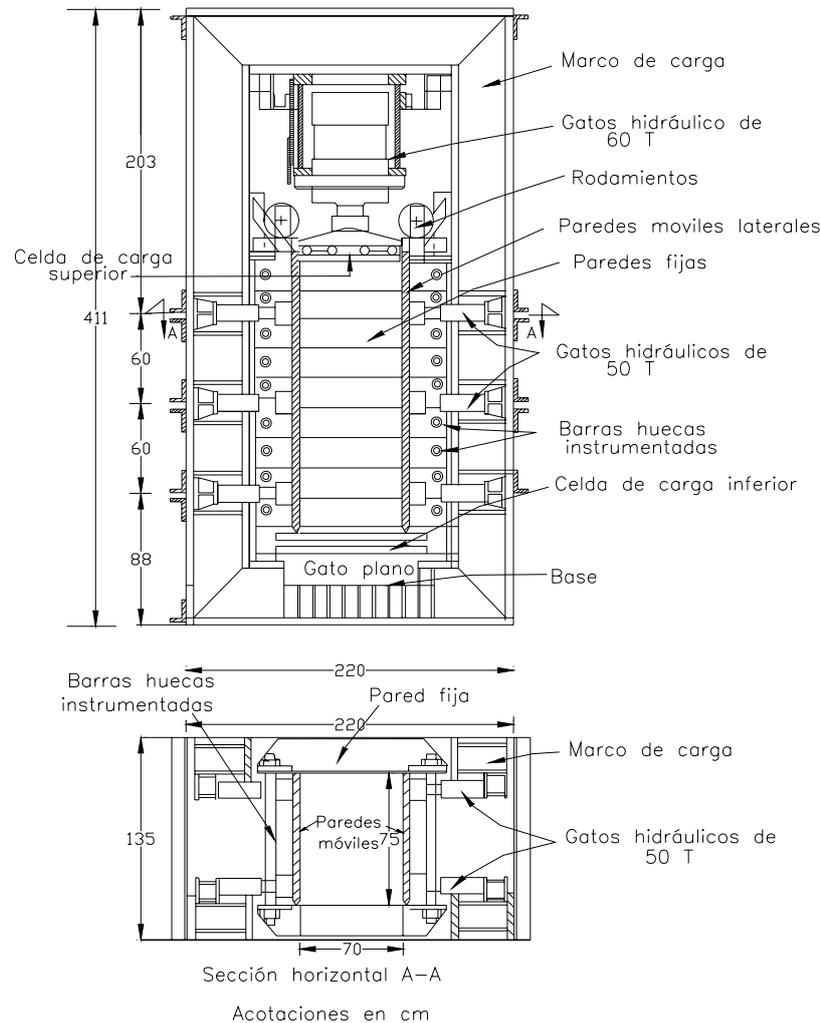


Figura 4.21 Aparato de deformación plana (Marsal, 1972)

Preparación del espécimen. En el caso de enrocamientos, la probeta se forma por capas de 20 cm, compactadas mediante una vibradora. La probeta no se satura. Con el objeto de reducir a un mínimo la fricción entre el material y las paredes confinantes, estas se tapizan con tres capas de placas de poliestireno engrasadas.

Ejecución de la prueba. Durante la construcción de la probeta, las paredes móviles se mantienen fijas. Se aplica las cargas axiales por incrementos permitiendo que se aumente la presión lateral (σ_3) hasta alcanzar el valor deseado; a partir de ese momento se permite el desplazamiento de las paredes móviles de modo que σ_3 permanezca constante. En cada incremento de carga, al lograr el equilibrio, se mide las presiones desarrolladas en la cabeza y en la base del espécimen, el esfuerzo intermedio y las deformaciones axial y lateral.

4.2.3.2 Planteamiento

Considerando que el material que constituye la probeta tiene un módulo de deformación aleatorio, se evaluó la incertidumbre sobre las deformaciones laterales y verticales en este tipo de ensaye de deformación plana con el MEFEE. El espécimen de enrocamiento es un prisma sólido sujeto a esfuerzos axiales y horizontales, de 9.2 MPa y 0.85 MPa respectivamente, los apoyos en el extremo inferior restringen el movimiento verticalmente, a excepción del central que también lo restringe horizontalmente, como se muestra en la Figura 4.22.

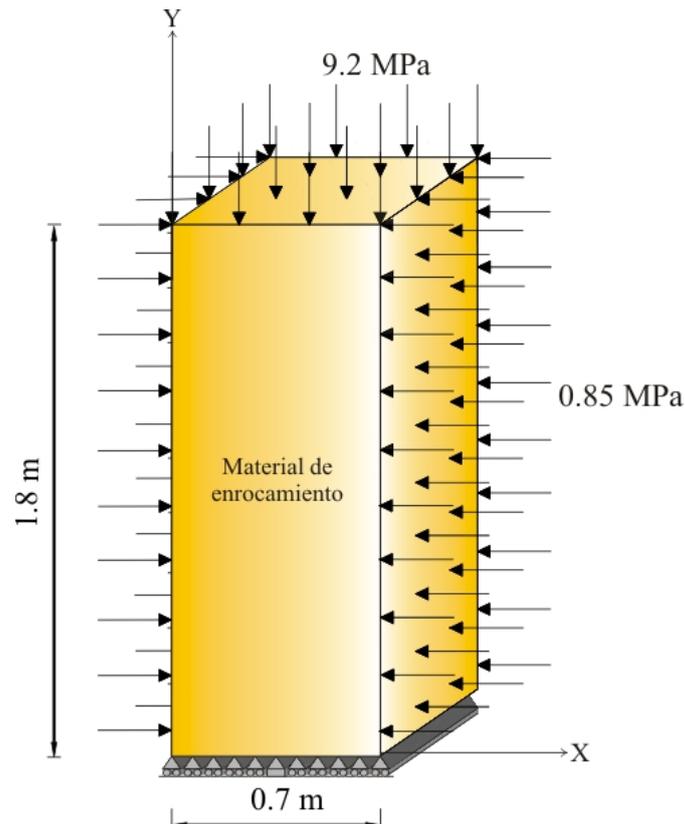


Figura 4.22 Representación de la probeta para el ensaye de deformación plana

4.2.3.3 Representación del dominio de análisis

Para simular el ensaye con el MEFEE la probeta es representada con una malla de 300 elementos sujeta a carga axial y lateral con las condiciones de frontera indicadas en la Figura 4.23. Los valores de σ_1 y σ_3 son tomados como datos de las pruebas de deformación plana (Marsal, 1972).

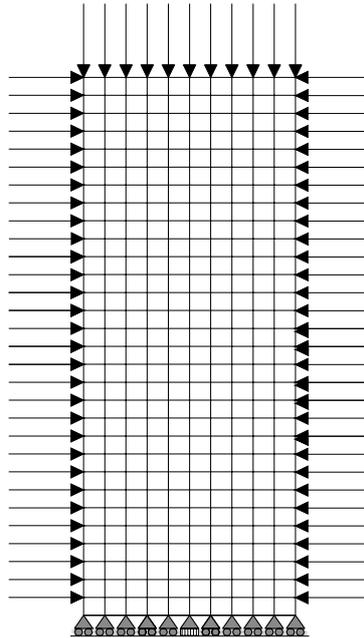


Figura 4.23 Malla de elementos finitos

Se acepta que el módulo de deformación varía en dos dimensiones de acuerdo con un campo aleatorio estacionario en sentido amplio. Se ignora la variación en la dirección perpendicular al plano de prueba (lo que equivale a suponer correlación perfecta en esta dirección y puede considerarse aceptable tomando en cuenta que el espécimen es delgado en esta dirección). Las características supuestas del campo aleatorio del módulo de deformación son:

Módulo de deformación:

$$\begin{aligned} E\{E\} &= 40 \text{ MPa} \\ CV\{E\} &= 0.10 \end{aligned}$$

Relación de Poisson:

$$\begin{aligned} E\{\nu\} &= 0.3 \\ CV\{\nu\} &= 0 \end{aligned}$$

4.2.3.4 Resultados

La variación de la incertidumbre (coeficiente de variación CV) sobre los desplazamientos verticales y horizontales en todo el cuerpo de la probeta se aprecia con claridad con las curvas de isovalores de las siguientes gráficas, establecidas para distintas distancias de correlación.

i) Distancia de correlación = 0

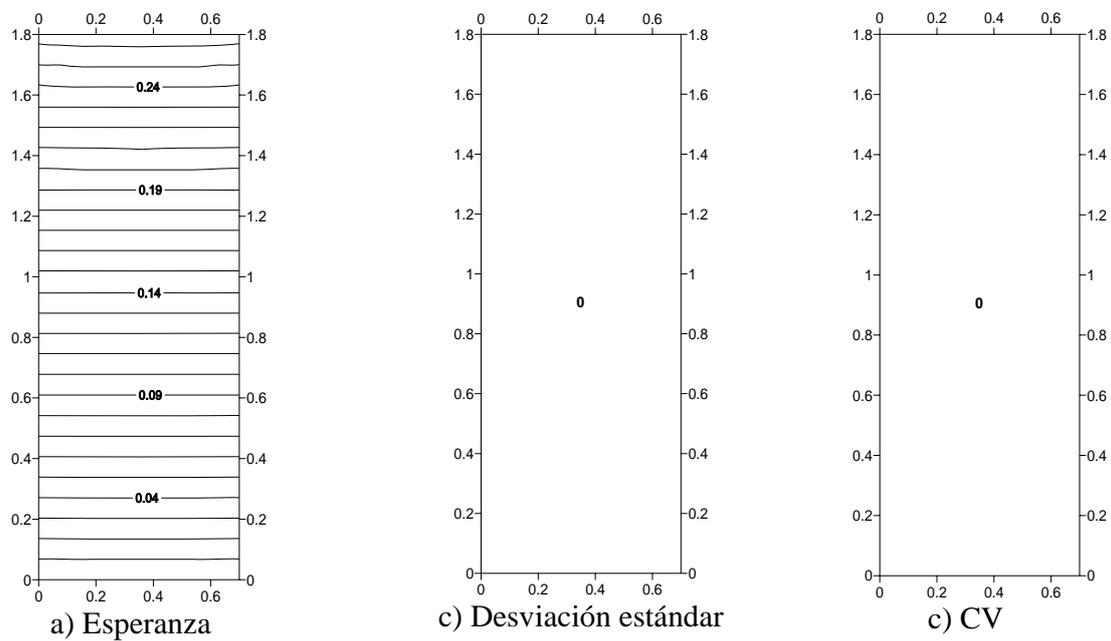


Figura 4. 24 Esperanza, desviación estándar y coeficiente de variación de los desplazamientos verticales

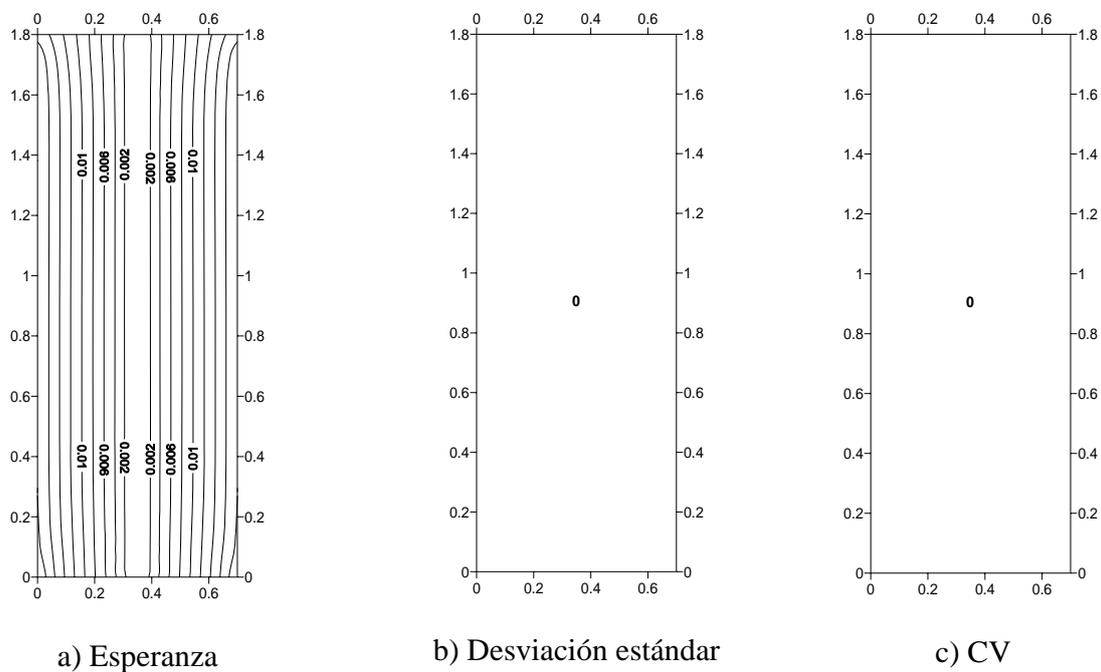


Figura 4.25 Esperanza, desviación estándar y coeficiente de variación de los desplazamientos horizontales

En este primer análisis, el campo aleatorio es del tipo “ruido blanco” (sin autocorrelación). Las Figuras 4.24c y 4.25c muestran que la incertidumbre en los desplazamientos verticales y horizontales es entonces nula, debido a un efecto de promedio espacial o *compensación estadística* que anula la desviación estándar y, por consecuencia, el CV es igual a cero en todo el cuerpo del sólido. Un material cuyo módulo presenta una variación aleatoria espacial que puede representarse con un campo de ruido blanco se comporta por tanto como un material homogéneo no aleatorio.

ii) Distancia de correlación = 0.65 m

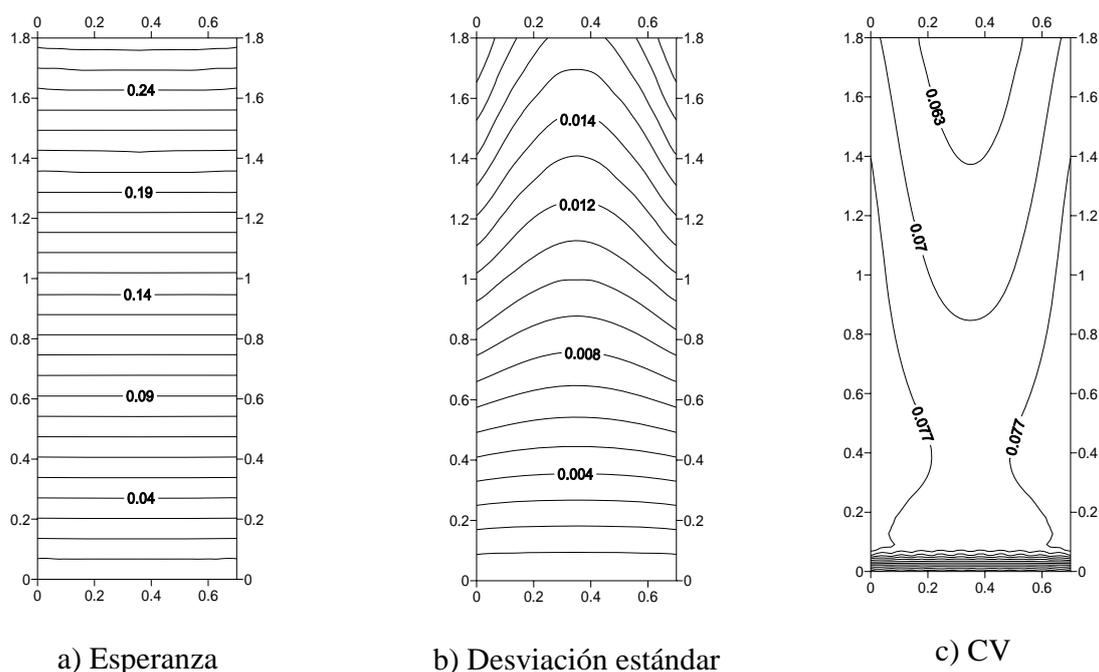


Figura 4. 26 Esperanza, desviación estándar y coeficiente de variación de los desplazamientos verticales

En la Figura 4.26c, se presentan los resultados del análisis para una distancia de correlación del mismo orden que el ancho de la probeta (0.65m). Se observa que, como era de esperarse, la incertidumbre sobre el desplazamiento vertical es nula en la frontera inferior donde este desplazamiento fue restringido. En el resto del espécimen se aprecia el complejo efecto de *compensación estadística* entre los desplazamientos de zonas poco correlacionadas. Se observa en particular que la incertidumbre es mínima en la parte central superior de la probeta. En cuanto a la incertidumbre sobre los desplazamientos horizontales, Figura 4.27c, se ve que, debido a que la esperanza del desplazamiento sobre el eje de simetría vertical es nula y que las posibles configuraciones aleatorias de la probeta no son simétricas, el CV tiende al infinito sobre el eje de simetría del espécimen.

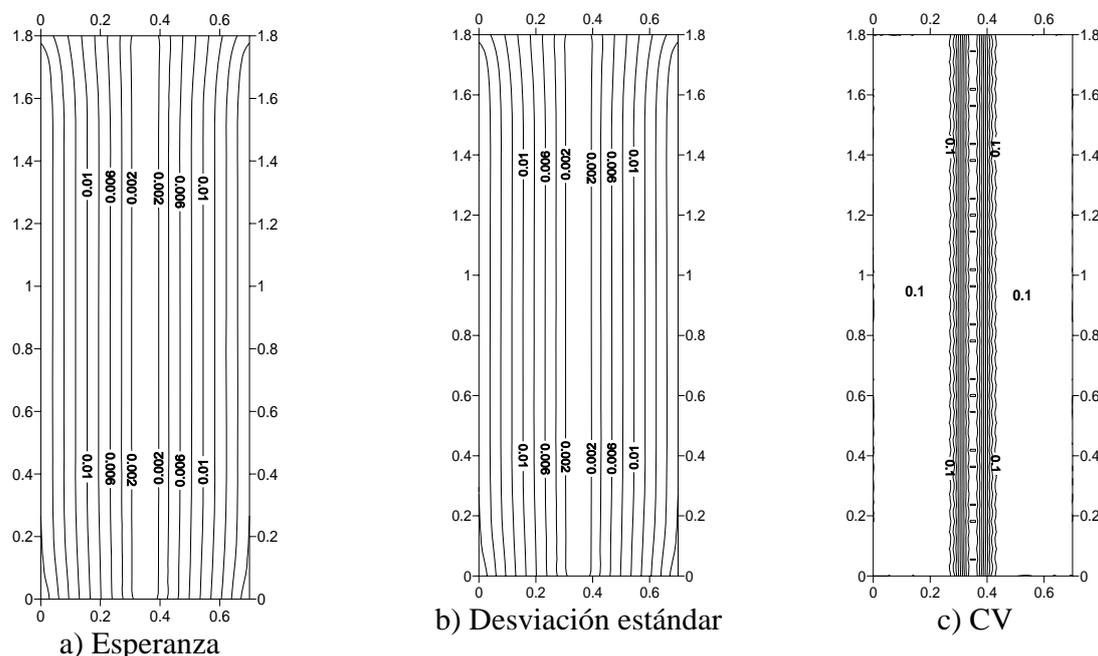


Figura 4. 29 Esperanza, desviación estándar y coeficiente de variación de los desplazamientos horizontales

Si la distancia de correlación es infinita, el material se comporta como un sólido homogéneo pero aleatorio. En la Figura 4.28c, se observa que, nuevamente, en los nodos donde el movimiento se restringió no existe incertidumbre. En el resto del espécimen la misma magnitud de la incertidumbre en el módulo de deformación se refleja directamente en los desplazamientos verticales. Por otro lado, tomando en cuenta que se conserva en este caso la simetría de los desplazamientos horizontales, la incertidumbre sobre el eje del espécimen, donde el desplazamiento es necesariamente nulo, es también nula, como se muestra en la Figura 4.29c. En el resto del espécimen, la misma magnitud de la incertidumbre en el módulo de deformación se refleja en los desplazamientos horizontales.

La variabilidad del desplazamiento vertical para el centro superior de la probeta (punto A) en función de la distancia de correlación se muestra en la Figura 4.30. Para distancias de correlación pequeñas, la incertidumbre sobre este desplazamiento (desviación estándar) es nula; tal resultado se debe al efecto de *compensación estadística* ya mencionado debido a que el material es entonces fuertemente heterogéneo (ruido blanco) pero estadísticamente homogéneo. Conforme la distancia de correlación aumenta, la incertidumbre crece hasta alcanzar la magnitud de la incertidumbre en el módulo de deformación, cuando el material se vuelve estrictamente homogéneo. Existe un intervalo de valores de la distancia de correlación en el cual la probeta se comporta heterogéneamente observándose un efecto de *compensación estadística* mayor en el punto superior central A que en el punto de la esquina superior B.

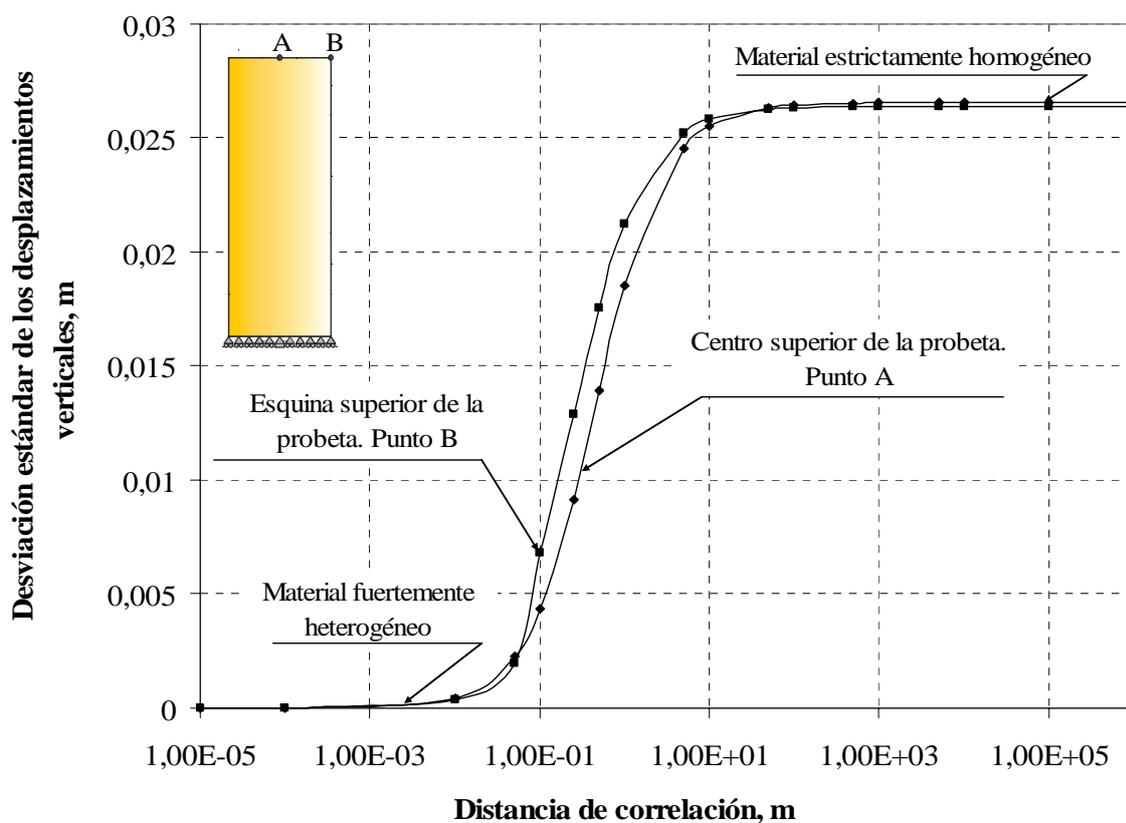


Figura 4.30 Influencia de la distancia de correlación sobre la incertidumbre en los desplazamientos verticales

La variabilidad del desplazamiento horizontal en el centro superior de la probeta (punto A) en función de la distancia de correlación se presenta en la Figura 4.31. Para distancias de correlación pequeñas, la incertidumbre (desviación estándar) de tal desplazamiento es nula, existiendo también un efecto de *compensación estadística*; después, la incertidumbre se incrementa y alcanza su máximo valor para una distancia de correlación del mismo orden que la dimensión horizontal del dominio en estudio; conforme la distancia de correlación se sigue incrementado, el material comienza a estabilizarse estadísticamente y la desviación estándar de los desplazamientos comienza a disminuir, hasta alcanzar nuevamente un valor nulo, lo cual representa la homogeneidad estricta del material con rigurosa simetría axial. El comportamiento estadístico del material para el punto superior de la esquina del espécimen es similar al punto superior central del espécimen, a excepción de que para este punto el menor valor alcanzado no es nulo y está condicionado por la incertidumbre impuesta en el módulo de deformación.

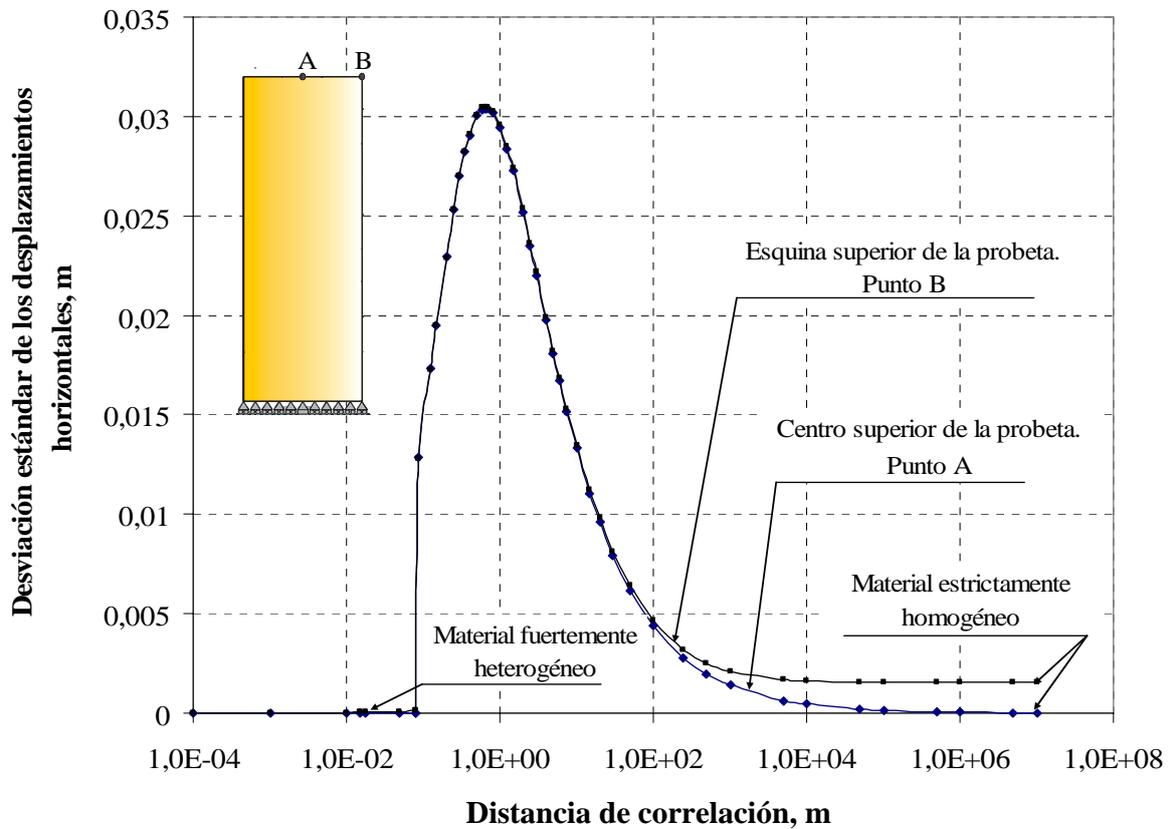


Figura 4.31 Influencia de la distancia de correlación sobre la incertidumbre en los desplazamientos horizontales

De acuerdo a los resultados de los análisis, la distancia de correlación constituye por tanto un parámetro importante que representa la heterogeneidad local que puede presentar un material estadísticamente homogéneo.

5. Conclusiones

En este trabajo se presentaron brevemente los conceptos probabilistas que permiten modelar la incertidumbre sobre los análisis con elemento finito y se expusieron las técnicas que permiten el uso del Método del Elemento Finito Estocástico (MEFE). Se resumieron los métodos de discretización de campos aleatorios descriptivos que permiten representar la variabilidad espacial de las propiedades del material y que son usados en conjunción con los análisis del MEFE, asimismo se presentaron las herramientas matemáticas del enfoque espectral que constituyen la base de la formulación del Método del Elemento Finito Estocástico Espectral (MEFEE) para problemas de elasticidad lineal. Finalmente, se evaluó la utilidad de la técnica espectral mediante el análisis de tres ejemplos, considerando la variación espacial del módulo de elasticidad.

Se vio que en el método espectral, un campo aleatorio se define como una función expandida en el espacio de Hilbert, y la representación de la respuesta es a través de funcionales expandidos también sobre el mismo espacio, por lo que la precisión de los resultados arrojados por el MEFEE dependerá del número de términos utilizados en estas dos expansiones. Se puede entonces decir que el MEFEE consiste específicamente en la expansión de funcionales combinada con la técnica de minimización del error por truncamiento.

En la técnica espectral la formulación aleatoria se plantea desde el vector de desplazamientos, es decir, al representar cada componente del vector de desplazamientos por los coeficientes de la expansión en serie *caos polinomial*, se está considerando la aleatoriedad de éstos (se dice que es una representación intrínseca), lo que representa una ventaja sobre las demás técnicas comúnmente usadas por el MEFE.

El MEFEE permite una representación continua del campo aleatorio; sin embargo, en la práctica de la ingeniería, el campo de las propiedades del material solamente se conoce a través de datos puntuales, por lo que se puede definir un campo aleatorio condicional sobre dichas mediciones que represente la variación espacial de las propiedades.

Tal como se planteó en este trabajo, el método solamente se aplica a problemas de elasticidad lineal y la representación de la incertidumbre es a través de un solo campo aleatorio (en este trabajo el módulo de elasticidad); sin embargo, la formulación del MEFEE se puede extender al caso de dos campos aleatorios (por ejemplo, los parámetros E y ν de un material), aun cuando esto ocasiona un mayor esfuerzo de cálculo.

De acuerdo a las herramientas matemáticas presentadas, la formulación del MEFEE se lleva a cabo en un espacio abstracto, en la que la representación matemática de los campos aleatorios se aleja del concepto físico, razón por la cual puede resultar poco atractivo para los ingenieros geotécnicos.

La cantidad de cálculo requerida en un determinado problema, utilizando la técnica espectral, es mucho mayor que la que se necesitaría en un problema determinista. Esta situación quizás sea una de las causas por la que el MEFEE se encuentre en un estado de desarrollo, no así un obstáculo para su utilización, pues el rápido crecimiento de la computación permite día con día minimizar el costo de cálculo.

En cuanto a la utilidad del enfoque espectral, los ejemplos presentados en esta tesis ilustran como incluir la variación espacial del módulo de elasticidad en un análisis con elementos finitos estocásticos; los resultados reflejan el comportamiento aleatorio del material, que aclara el fenómeno de la *compensación estadística*.

Los comentarios presentados en este trabajo marcan las ventajas y limitaciones del método y deberían ser útiles para el ingeniero deseoso de utilizar este tipo de técnicas.

Bibliografía y referencias

- Anders, M. & Hori, M. (1999). "Stochastic finite element method for elasto-plastic body", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 46, No. 11, pp. 1897-1916.
- Auvinet, G. (1987). "Procesos estocásticos", *Apuntes del curso de procesos estocásticos*, DEPFI, UNAM, México.
- Auvinet, G., Mellah R., Masrouri F. & Rodríguez, J.F. (2000), "La méthode des éléments finis stochastiques en Géotechnique", *Revue Française de Géotechnique* N° 93, Paris, France, pp. 67-79.
- Auvinet, G. (2000). "Probabilidad y estadística", *Apuntes del curso de confiabilidad*, DEPFI, UNAM, México.
- Auvinet, G., & López Acosta, N. (2001). "Uncertainty in analyses of rapid drawdown of reservoirs". *Proceedings*, International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Istanbul, Turkey, Vol. 2, pp. 1065-1068.
- Auvinet, G. (2002). "Incertidumbre en geotecnia", *Decimosexta conferencia Nabor Carrillo*, Publicación bilingüe SMMS, Querétaro, México, pp. 34-35.
- Baroth, J., Bodé L., Bressolette, P. & Fogli, M. (2003). "Numerical convergence of a spectral stochastic finite element method (SSFEM) in lognormal context", *Applications of Statistics and Probability in Civil Engineering*, Der Kiureghian *et al.* Edit., Millpress, Rotterdam, ISBN 90 5966 0048.
- Baroth, J. (2005). "Analyse par éléments finis stochastiques de la propagation d'incertitudes dans un modèle mécanique non linéaire", *Thèse de Doctorat*, France.
- Berberian, S. K. (1970). "Introducción al espacio de Hilbert", Editorial Teide.
- Bittnar, Z. (1996). "Numerical Methods in Structural Engineering. Chapter 11: Systems with random field", ASCE Press.
- Bouayed, A. (1997). "Modélisation stochastique par éléments finis en géomécanique", *Thèse de Doctorat*, ENSG, INPL, Nancy, France, pp. 157.
- Benjamin, R.J. & Cornell, A. C. (1970). "Probability, statistics and decision for civil engineers", McGraw Hill.
- Casagrande, B. (1965). "Role of the calculated risk in earthwork and foundation engineering", *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division. Proceedings of the American Society of Civil Engineers*, ASCE, Vol.19, No.SM4, pp 4390-4429.
- Cambou, B. (1974). "Método del elemento finito. Análisis de incertidumbre de primer orden", *Publicación N° 339 del Instituto de Ingeniería*, UNAM, México, pp. 88. (G. Auvinet dir.)
- Cameron, R.H. & Martin, W.T. (1947). "The orthogonal development of nonlinear functionals in series of Fourier-Hermite functionals", *Annuary of Mathematics*, Vol. 48, pp. 385-392.
- Courant & Hilbert (1953). "Methods of mathematical Physics", Interscience, New York.
- Deodatis, G. (1991). "The weighted integral method, I: stochastic stiffness matrix", *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 117, No. 8, pp. 1851-1864.
- Der Kiureghian, A. & Ke, J.-B., (1988). "The stochastic finite element method in structural reliability", *Probability in Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 3, No. 2, pp. 83-91.
- Debusschere, B.- J., Najm, H.-N., Pebayt, P.-P., Knio, O.-M., Ghanem, R.-G., Le Maitre, O.-P. (2005). "Numerical challenges in the use of polynomial chaos representations for stochastic processes", *Journal of Scientific Computing*, SIAM, Vol. 26, No. 2, pp. 698-719.

- Ghanem, R.-G. & Spanos, P.-D. (1991). "Stochastic finite elements. A spectral approach", Springer Verlag.
- Ghanem, R.-G. & Brzkala, V. (1996). "Stochastic finite elements analysis of randomly layered media", *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, Vol. 122, No. 4, pp. 361-369.
- Ghanem, R. & Kruger, R. (1996). "Numerical solution of spectral stochastic finite element systems", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 129, pp. 289-303.
- Ghanem, R.-G. (1999). "Ingredients for a general purpose stochastic finite elements implementation", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 168, pp. 19-34.
- Ghanem, R.-G. & Member (1999). "Stochastic finite elements with multiple random non-Gaussian properties", *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, Vol. 125, No. 1, pp. 26-40..
- Ghanem, R.-G. & Red-Horse, J. (2004). "Orthogonal representations of stochastic processes and their propagation in mechanics", *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, Vol. 2, pp 1784-1787.
- Ghanem, R.-G., Masri, S., Pellissetti, M. & Wolfe, R. (2005). "Identification and prediction of stochastic dynamical systems in a polynomial chaos basis", *Computational Methods in Stochastic Mechanics Reliability Analysis*, pp. 1641-1654.
- Green, C. D. (1969). "Integral equation methods", Butler and Tanner Ltd, Great Britain.
- Huang, S. P., Quek, S. T. & Phoon K. K. (2001). "Convergence study of the truncated Karhunen-Loeve expansion for simulation of stochastic processes", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 52, pp. 1029-1043.
- Kleiber, M. & Duong, H. T. (1992). "The stochastic finite element method: Basic perturbation technique and computer implementation", John Wiley and Sons.
- Levi, E. (1965). "Teorías y métodos de las matemáticas aplicadas", Facultad de Ingeniería, UNAM.
- Li, C.-C. & Der Kiureghian, A. (1993). "Optimal discretization of random fields", *Journal of Engineering Mechanics ASCE*, Vol. 119, No. 6, pp. 1136-1154.
- Liu, W.-K., Belytschko, T., & Mani, A. (1986). "Random field finite elements", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 23, No. 10, pp. 1831-1845.
- Louault, B. (1997). "Approche probabiliste de l'évaluation des zones de tension dans les barrages en terre et en enrochement", *Mémoire de fin d'études*, CUST; Clermont Ferrand, France. Estudio realizado en el Instituto de Ingeniería, UNAM (G. Auvinet dir.)
- Loève, M. (1977). "Probability theory", 4^a edition, Springer, New York.
- Marsal, R. J. (1972). "Resistencia y compresibilidad de enrocamientos y gravas", Publicación N^o. 306. Instituto de Ingeniería, UNAM, D. F., México, pp.50-59.
- Matheron, G. (1965). "Les variables régionalisées et leur estimation", *Masson et C^{ie}*, Paris, France.
- Matthies, G., Brenner C., Bucher G. & Soares G. (1997). "Uncertainties in probabilistic numerical analysis of structures and solids. Stochastic finite elements", *Structural Safety*, Vol. 19, N^o. 3, pp. 283-331.
- Matthies, G. & Bucher C. (1999). "Finite elements for stochastic media problems", *Computer methods in applied mechanics and engineering*, Vol. 168, pp. 3-17.
- Mellah, R. (1999). "Modélisation stochastique par éléments finis en élasto-plasticité appliquée à la géomécanique", *Thèse de Doctorat*, ENSG, INPL-Nancy, pp. 160. (G. Auvinet dir.)

- Orlandi, S. (1996). "Método del elemento finito estocástico en geotecnia: Análisis no lineal", *Tesis de maestría en Ingeniería (Mecánica de suelos)*, DEPI, UNAM, México. (G. Auvinet dir.)
- Papoulis, A. (1991). "Probability, Random Variables and Stochastic Processes", McGraw Hill.
- Pérez-Duarte, A. (2000). "Modélisation stochastique de la construction des barrages en terre en anisotropie", *Mémoire de stage de fin d'études*, Ecole Polytechnique, Paris. Estudio realizado en el Instituto de Ingeniería, UNAM (G. Auvinet dir.)
- Rosenblueth, E. (1975). "Point estimates for probability moments", *Proceedings, Nat. Acad. Sciences, USA*, Vol. 72, October, pp. 3812-3814.
- Sakamoto, Sh. y Ghanem, R.-G. (2002). "simulation of multi-dimensional non-gaussian non-stationary random fields", *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol. 17, No. 2, pp. 167-176.
- Soize, C. & Ghanem, R.-G. (2005). "Physical systems with random uncertainties: Chaos representations with arbitrary probability measure", *Journal of Scientific Computing. SIAM*, Vol. 26, No. 2, pp. 395-410.
- Sudret, B. & Der Kiureghian, A. (2000). "Stochastic Finite Element Methods and Reliability", *A State-of-the-Art Report, Report N° UCB/SEMM-2000/08*, Department of Civil & Environmental Engineering, University of California, Berkeley, USA
- Vanmarcke, E. (1977). "Probabilistic modeling of soil profile", *Journal of Geotechnical Engineerin Division*, Vol. 103, N°: 11, pp. 1227-1246.
- Vanmarcke, E. (1983). "Random fields: analysis and synthesis", *The MIT Press*, Cambridge, Massachussets.
- Vanmarcke, E. & Grigoriu, M. (1983). "Stochastic finite element analysis of simple beams", *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, Vol. 109, N° 5, pp. 1203-1214.
- Vanmarcke, E., Shinozuka, M., Nakagiri, S., Schueller, G. & Grigoriu, M. (1986). "Random fields and stochastic finite elements", *Structural Safety*, Vol. 3, pp. 143-166.
- Vázquez, F. (2005). "Incertidumbre en el modelado de la construcción de presas de tierra mediante elementos finitos", *Tesis de Maestría en Ingeniería (Geotecnia)*, DEPI, UNAM, México. (G. Auvinet dir.)
- Wiener, N. (1938). "The homogeneous chaos", *American Journal of Mathematics*, Vol. 60, pp. 897-936.
- Zeldin, B.-A. & Spanos, P.-D. (1998). "On random field discretization in stochastic finite elements", *Journal of Applied Mechanics, ASME*, Vol. 65, pp. 320-327.
- Zhang, J. & Ellingwood, B. (1994). "Orthogonal series expansion of random fields in reliability analysis", *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, Vol. 120, No. 12, pp. 2660-2677.
- Zienkiewicz, O. C. & Morgan (1983). "Finite elements and approximation", Wiley, N.Y.
- Zienkiewicz, O. C. & Taylor, R. L. (1995). "El método de los elementos finitos", Vol. 1, MacGraw Hill, 4ª edición.

A. Elementos teóricos

A.1 Conceptos básicos de probabilidad.

A.1.1 Espacio muestral

La teoría de la probabilidad considera el problema de un experimento (E) que, a priori, puede tener varios resultados (ε). El conjunto de todos los resultados posibles se llama espacio muestral (S). Un evento es cualquier subconjunto del espacio muestral.

El concepto de probabilidad se relaciona con la frecuencia relativa de ocurrencia de un evento. Por tanto las probabilidades deben ser fracciones entre 0 y 1. Supóngase que un experimento tiene asociado un espacio muestral S , entonces, la probabilidad es una función que asigna un valor numérico $P[A]$ a cada evento A de tal manera que son válidos los siguientes axiomas:

1. $P[A] \geq 0$
2. $P[S] = 1$
3. Si A_1, A_2, \dots , es una sucesión de eventos mutuamente excluyentes, es decir $A_i \cap A_j = \emptyset$ para toda $i \neq j$, entonces:

$$P[A \cup B] = P[A] + P[B] \quad (\text{A.1})$$

De acuerdo con el axioma (3) se llega a la conclusión de que si A y B son eventos mutuamente excluyentes:

$$P\left[\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right] = \sum_{i=1}^{\infty} P[A_i] \quad (\text{A.2})$$

A.1.2 Variables aleatorias

Una variable aleatoria V se define como una función que asocia el resultado de un experimento a los números reales, esto es, $V(\varepsilon)$, donde ε es un elemento del espacio muestral. Una variable aleatoria suele representarse con la letra mayúscula (por ejemplo V) y los valores numéricos reales que puede tomar por letras minúsculas (v).

Las variables aleatorias se pueden clasificar en dos tipos, cuando toman valores que pueden asociarse con los enteros, se llaman variables aleatorias discretas, en el caso contrario continuas.

a) Las variables aleatorias discretas toman sólo un número finito, o un número infinito contable, de valores posibles, de acuerdo con los axiomas presentados con anterioridad:

1. $P[V = v] = p_v(v) \geq 0$
2. $\sum_v p[V = v] = 1$, siendo la suma con respecto a todos los valores posibles de v .

A la función $P_v(v)$ se le llama función de probabilidad de v . A esta función se le llama también a veces *distribución de probabilidad de V* o *función de masa de probabilidad de V* para dar la idea que se apila una masa de probabilidad en puntos discretos.

La función de distribución o distribución acumulativa $F_v(v)$ de una variable V se define como:

$$F_v(v) = P[V \leq v] \tag{A.3}$$

Siendo: P la probabilidad de v .

Si V es discreta

$$F_v(v) = \sum_{u=-\infty}^v p_v(u) \tag{A.4}$$

definiendo $p_v(v)$ la distribución de probabilidad.

Las principales medidas numéricas descriptivas que permiten cuantificar las variables aleatorias son la esperanza, la varianza y la desviación estándar.

El *valor esperado* o *esperanza matemática* de una variable aleatoria discreta (V) con distribución de probabilidad $p_v(v)$, se define como:

$$E\{V\} = \sum_v v p_v(v) \tag{A.5}$$

donde la suma es con respecto a todos los valores de v para los cuales $p_v(v) > 0$.

Es común emplear la notación:

$$E\{V\} = \mu_V \quad (\text{A.6})$$

La *varianza* de una variable aleatoria es la esperanza del cuadrado de la desviación del valor de dicha variable con respecto a su esperanza:

$$\text{Var}[V] = E\{(V - \mu_V)^2\} = \sigma_V^2 \quad (\text{A.7})$$

El valor mínimo que puede tomar σ_V^2 es cero, y eso sólo sucede si toda la población toma un único valor. La varianza se hace más grande en la medida que se esparcen más los puntos con probabilidad positiva (Auvinet, 2002).

La desviación estándar de una variable aleatoria V es igual a la raíz cuadrada de la varianza:

$$\sigma_V = \sqrt{E\{(V - \mu_V)^2\}} \quad (\text{A.8})$$

El *coeficiente de variación* se define como:

$$CV = \frac{\sigma_V}{\mu_V} \quad (\text{A.9})$$

b) Las variables aleatorias continuas toman un número infinito de valores asociados con intervalos continuos de números reales y existe una función de *densidad de probabilidad*, $f_V(v)$, tal que:

1. $f_V(v) \geq 0$ para toda v
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f_V(v) dv = 1$
3. $P[a \leq V \leq b] = \int_a^b f_V(v) dv$

Nótese que para una variable aleatoria continua V :

$$P[V = a] = \int_a^b f_V(v) dv = 0 \quad (\text{A.10})$$

para cualquier valor específico a . No debe preocupar el hecho de que se deba asignar probabilidad cero a cualquier valor específico a ya que hay un número infinito de valores posibles que puede asumir V . La probabilidad cero asociada a un evento no lo elimina como posible, sino sólo dice que la probabilidad de ocurrencia de ese valor exacto es despreciable.

La función de distribución de una variable aleatoria continua V se define como:

$$F_V(v) = P[V \leq v] \quad (\text{A.11})$$

$$P[V \leq v] = \int_{-\infty}^v f_v(u) du \quad (\text{A.12})$$

La derivada de la función de distribución es: $F'_v(v) = f_v(v)$.

Al igual que en el caso discreto existen medidas numéricas para cuantificar las variables aleatorias.

El *valor esperado* de una variable aleatoria continua (V) que tiene una densidad de probabilidad $f_v(v)$, se define por:

$$E\{V\} = \int_{-\infty}^{+\infty} v f_v(v) dv \quad (\text{A.13})$$

Las definiciones de *varianza*, *desviación estándar* y *coeficiente de variación* dadas en el caso discreto son válidas también para el caso continuo.

A.1.3 Función aleatoria

En la práctica, hay magnitudes aleatorias que varían sus valores en el proceso del experimento E y cuyos resultados ε pertenecen a un espacio S. La magnitud aleatoria que cambia su valor en el proceso de una prueba representa una *función aleatoria*.

Se puede dar la siguiente definición general: Se llama *función aleatoria* a aquella cuyo valor, para cada valor del argumento (o de los argumentos) es una *variable aleatoria*.

Si la variable aleatoria es a su vez función de otra magnitud (por ejemplo, el tiempo) entonces se llama *proceso estocástico*.

Un proceso estocástico puede representar como:

$$X(t, \varepsilon) \quad (\text{A.14})$$

Si el parámetro t no depende del tiempo, sino es una dimensión espacial, tal proceso se conoce también *campo aleatorio*.

A.1.4 Campos aleatorios.

Las variaciones espaciales de una determinada variable aleatoria (físicas, mecánicas o geométricas) conviene modelarse como un campo aleatorio, es decir, las funciones que se emplean para describir dichas variaciones dependen generalmente de una o varias de las tres coordenadas en el espacio, así un campo aleatorio se define:

$$V(X, \varepsilon) = V(X) \quad X, \text{ del dominio en estudio } \mathbb{R}^p, (p = 1, 2 \text{ ó } 3) \quad (\text{A.15})$$

Los valores tomados de la variable en cuestión en un dominio o subdominio pueden considerarse como una realización particular de un campo aleatorio que representa el desconocimiento que se tiene de dicha variación. A partir de la información obtenida de la realización es posible definir los parámetros del campo.

$$\text{Valor esperado o Esperanza: } \mu_V(X) = E\{V(X)\} \quad (\text{A.16})$$

$$\text{Varianza: } \sigma_V^2(X) = \text{Var}[V(X)] \quad (\text{A.17})$$

$$\text{Desviación estándar } \sigma_V(X) = \sqrt{\text{Var}[V(X)]} \quad (\text{A.18})$$

$$\text{Coeficiente de variación } CV(X) = \frac{\sigma_V(X)}{E\{V(X)\}} \quad (\text{A.19})$$

El grado de dependencia lineal existente entre los valores de la propiedad de interés en dos puntos diferentes del medio puede definirse por medio de la *función de autocorrelación* que es un momento de segundo orden mixto que puede centrarse introduciendo el concepto de *función de autocovarianza*.

$$C_V(X_1, X_2) = \text{Cov}[V(X_1), V(X_2)] = E\{[V(X_1) - \mu_{V(X_1)}][V(X_2) - \mu_{V(X_2)}]\} \quad (\text{A.20})$$

La autocovarianza puede escribirse bajo la forma de un *coeficiente de autocorrelación* adimensional, cuyo valor queda siempre comprendido entre -1 y +1.

$$\rho_V = \frac{C_V(X_1, X_2)}{\sigma_{V(X_1)}\sigma_{V(X_2)}} \quad (\text{A.21})$$

Es importante de decir que las funciones (A.20) y (A.21) no son propiedades intrínsecas de los puntos X_1 y X_2 ya que dependen también de la población (Auvinet, 2002).

Un campo se considera es Gaussiano si cualquier vector $\{V(X_1), \dots, V(X_n)\}$ es Gaussiano. Es estadísticamente homogéneo si la esperanza y la varianza son constantes; si además de ser homogéneo la autocovarianza espacial depende de la distancia entre los puntos X_1 y X_2 , se dice que el campo es *estacionario en el sentido amplio* y se cumple:

$$C_V(X_1, X_2) = C_V(X_2 - X_1) = C_V(h) \quad (\text{A.22})$$

donde h es llamada longitud de correlación.

Para campos aleatorios unidimensionales el *espectro de potencia* es definido como la transformada de Fourier de la función de autocorrelación (Papoulis, 1991).

$$S_{VV}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_V(h) e^{-i\omega h} dh \quad (\text{A.23})$$

A.2 Espacios matemáticos

A.2.1 Espacio Vectorial

Un concepto indispensable de comprender en las matemáticas y sus aplicaciones es el *espacio vectorial*. De hecho el concepto de espacio vectorial es básico en el análisis funcional, el cual tiene aplicaciones a las ecuaciones diferenciales, el análisis numérico y otros campos de interés práctico para la ingeniería.

El problema del análisis funcional de dotar al conjunto de funciones con estructura que refleje las propiedades básicas de estos elementos es en general un camino posible. Una de estas estructuras es llamada *espacio vectorial* (V) definido como un conjunto constituido por un número infinito de vectores (matrices, funciones, operadores, etc.) para los cuales se han definido las operaciones de adición y multiplicación por un escalar, y que además, están definidos sobre un determinado campo K (Courant y Hilbert, 1953).

Un espacio vectorial puede ser definido a partir de su producto interno para cada par de vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} en V , sí:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0 \quad : \text{son ortogonales} \quad (\text{A.24})$$

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{(\mathbf{a}, \mathbf{a})} \quad (\geq 0) \quad : \text{es la norma de } \mathbf{a} \quad (\text{A.25})$$

La *dimensión* de un *espacio vectorial* está determinada por el número máximo de vectores linealmente independientes en el espacio.

Un espacio es llamado de dimensión infinita, ∞ , si para cada entero n , hay más que n vectores linealmente independientes en el espacio; el tamaño de dicha dimensión está determinada por los valores característicos. Un espacio de dimensión n está dado por el producto interno, (la dimensión n resultante en el espacio euclidiano es denotada por E_n). En tal espacio, los grupos de vectores son mutuamente ortogonales normalizados, llamados grupos ortonormales.

En el análisis funcional un espacio funcional puede verse como un espacio vectorial de dimensión infinita, cuyos vectores base son funciones, no vectores. Esto significa que cada función en el espacio funcional puede representarse como una *combinación lineal de funciones base*. Mientras que el espacio bidimensional está generado únicamente por dos vectores, el espacio funcional está generado por un número infinito de funciones base. Un espacio funcional es de dimensión infinita.

A.2.2 Espacio de Hilbert

Un espacio vectorial de dimensión infinita con producto interno es llamado un espacio de Hilbert.

Un espacio de Hilbert, \mathcal{H} , es una función $f(x)$ en el intervalo (a, b) que puede definirse como un conjunto de valores adquiridos por la infinidad de coordenadas constituidas por todos los valores que la misma función adquiere en el intervalo, por tanto a $f(x)$ se podrá llamar punto del espacio de infinitas dimensiones así definido (espacio de Hilbert).

Se llaman funciones de cuadrado sumable en (a, b) todas las funciones $f(x)$ definidas en dicho intervalo y tales que existe y es limitada la integral:

$$\int_b^a f^2(x)dx \quad (\text{A.26})$$

La importancia del hipótesis del cuadrado sumable está en que permite extender al espacio hilbertiano el concepto de distancia.

El espacio de funciones del cuadrado sumable se representa por $\mathcal{L}^2(a, b)$ y es útil para el desarrollo de polinomios de Hermite. Los espacios de Hilbert también son de ayuda para el estudio del concepto de expansión de Fourier.

A.2.3 Espacio probabilista de Hilbert.

El espacio vectorial de variables aleatorias es denotado por (Ω, F, P) , donde Ω el espacio de los resultados posibles θ de un experimento E ; F forma una clase aditiva completa (σ -álgebra) asociada a ciertos subconjuntos de Ω llamados eventos; P es la medida de probabilidad de F .

Por otra parte, la norma de una variable aleatoria puede ser definida como $\|X\| = \langle |x|^P \rangle^{\frac{1}{P}}$ para $0 < P < \infty$. En particular, en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}(\Omega, F, P)$ de variables aleatorias, con producto interno $\langle X, Y \rangle = \langle XY \rangle$, la esperanza matemática denotada por $\langle \cdot \rangle$, puede ser definida como:

$$\langle XY \rangle = E \{XY\} \quad (\text{A.27})$$

Finalmente un campo aleatorio $V(X, \theta)$ puede ser definido dentro del espacio probabilista de Hilbert $\mathcal{H}(\Omega, F, P)$ como un conjunto de variables aleatorias, tales que $X \in \Omega$, donde Ω es un conjunto de los reales, \mathcal{R}^d , que describe la geometría del sistema. Cualquier realización del campo es un elemento del espacio de Hilbert $\mathcal{L}^2(\Omega)$ de funciones del cuadrado sumable.

A.3 Método del elemento finito

A.3.1 Introducción

El Método del Elemento finito (MEF) permite resolver una gran variedad de problemas físicos en ingeniería; se define como una técnica numérica de discretización de problemas continuos que permite estimar esfuerzos y deformaciones, cuya resolución se basa en principios variacionales o a través de ecuaciones diferenciales. Con el MEF se tiene una expresión aproximada de la solución.

A.3.2 Descripción general del MEF

En todo problema cuya solución sea aproximada con elementos finitos se llega a un sistema de ecuaciones (Zienkiewicz,199) con la forma:

$$Ka + f = 0 \quad (A.28)$$

al que se han incorporado las condiciones de frontera y que, tras despejar el parámetro a , debe proporcionar una solución aproximada al problema planteado. K , es la matriz de rigidez, a es un parámetro que se relaciona con las funciones de forma.

La solución general a problemas lineales por el MEF encierra los siguientes pasos:

a) Discretización de la estructura

El primer paso es dividir la región o el dominio de las variables de las ecuaciones diferenciales, en subdivisiones o elementos.

b) Selección de una interpolación adecuada o modelo de desplazamiento.

La idea básica del elemento finito es aproximar la solución a cada subregión por medio de funciones de interpolación (funciones de desplazamientos) que representan el campo de desplazamientos. En general el modelo de interpolación toma la forma de un polinomio, que de acuerdo al orden de éste corresponde la exactitud de la solución.

c) Deducción de la matriz de rigidez del elemento y vectores de carga.

Todo cálculo con MEF busca una expresión aproximada de la solución de la forma:

$$U = \sum_{i=1}^n N_i a_i \quad (A.29)$$

en la N_i son funciones de interpolación expresadas en términos de las variables independientes y a_i son incógnitas.

Para obtener la matriz de rigidez se parte de las ecuaciones diferenciales que gobiernan el problema y se transforman en ecuaciones que gobiernan en forma aislada a los elementos finitos mediante formulaciones específicas como:

- *Formulación directa*

En este método, los razonamientos físicos son usados para establecer las propiedades del elemento en términos de variables apropiadas. La aplicabilidad de este método esta limitada a tipos simples de elementos.

- *Formulación variacional*

El aprovechamiento variacional ha sido ampliamente usado para la formulación de las ecuaciones del elemento finito, sin embargo, no en todos los problemas de ingeniería es posible establecer la forma variacional.

El principio variacional establece un integral I definida en términos de parámetros desconocidos y de sus derivadas. La solución del problema es dada cuando la integral I es minimizada. Así el conocimiento de los conceptos básicos del cálculo variacional es necesario para comprensión general MEF.

- *Formulación residuos pesados o ponderados.*

En este método, las matrices del elemento y los vectores son deducidos directamente de las ecuaciones diferenciales gobernantes del problema que va acompañado de condiciones de frontera (impuestas a las funciones incógnitas) (Zienkiewicz y Morgan, 1983). En esta formulación existen procedimientos generales para la derivación de dichas ecuaciones tal como el método de Galerkin o el método de los mínimos cuadrados. Esta formulación puede ser aplicada a la mayoría de los problemas prácticos de ingeniería.

Finalmente, a partir de cualquiera de las formulaciones, se establece que la matriz de rigidez es:

$$K = \int_V B^T DB dV \quad (\text{A.30})$$

d) Ensamblaje de las ecuaciones del elemento para conocer las ecuaciones de equilibrio total.

Antes que las ecuaciones de cada elemento puedan ser ensambladas es necesario realizar una transformación de un sistema de coordenadas locales a un sistema de coordenadas globales (Zienkiewicz y Taylor, 1995).

Puesto que la estructura es compuesta por varios elementos, la matriz de rigidez y el vector de cargas de cada elemento son ensamblados de manera que cumplan la ecuación de equilibrio dada por:

$$K \cdot U = F \quad (\text{A.31})$$

En su forma más general

$$Ka + f = r \quad (\text{A.32})$$

donde K es la matriz de rigidez global, a es el vector de desplazamientos nodales, f es el vector de fuerzas internas y r es un vector de fuerzas externas concentradas en los nodos, es decir:

$$K = \sum_{e=1}^m K_{ij}^e \quad (\text{A.33})$$

$$P = \sum_{e=1}^m f_i^e \quad (\text{A.34})$$

$$f^e = -\int_V N^T X dV - \int_V B^T D \varepsilon_o dV + \int_V B^T \sigma_o dV \quad (\text{A.35})$$

En la última ecuación los tres términos representan las fuerzas internas debidas respectivamente a fuerzas de cuerpo, a fuerzas debido a deformaciones iniciales y a fuerzas por esfuerzos iniciales.

e) Solución de los desplazamientos nodales.

Después de la aplicación de las condiciones de frontera se tiene un conjunto de ecuaciones lineales que puede ser resuelto directa o indirectamente.

f) Cálculo de esfuerzos y deformaciones del elemento en medios continuos y elásticos.

Una vez conocidos los desplazamientos nodales U , si se requiere, los esfuerzos y deformaciones del elemento pueden ser calculados usando las ecuaciones de equilibrio de sólidos o mecánica estructural.

$$\sigma = DBa \quad (\text{A.36})$$

Las deformaciones, y por tanto los esfuerzos, pueden expresarse en función de los desplazamientos nodales como:

$$\varepsilon = Ba \quad (\text{A.37})$$

donde

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (2.11)$$

Si se considera un estado plano de esfuerzos, se tiene:

$$\sigma = D\varepsilon = DBa \quad (\text{A.38})$$

De otra forma

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{A.39})$$

En la ecuación (A.38) a son los desplazamientos que se obtienen al resolver el sistema de ecuaciones.

B. Descripción del programa FERUM

B.1 Introducción

Para la realización de los ejemplos presentados en este trabajo se utilizó una de las subrutinas del programa FERUM (Finite Element Reliability Using Matlab) versión 3.0, llamada FERUMssfem. El programa FERUM fue desarrollado en 1999 y hasta la fecha sigue en constante desarrollo; consiste en un conjunto de subrutinas (funciones) escritas en Matlab que permite realizar análisis de confiabilidad con elemento finito. FERUM está conformado por 10 partes y sólo en una de ellas está implementado el Método del Elemento Finito Estocástico Espectral. A continuación se describe la estructura de dicho programa (FERUMssfem, FERUM spectral stochastic finite element method).

B.2 Estructura general de FERUMssfem

El programa FERUMssfem esta estructurado por tres etapas:

B.2.1. Etapa de preprocesamiento

Se genera y almacena información que describe el modelo mecánico, realiza la discretización del campo aleatorio y genera la base de la expansión en *caos polinomial*.

B.2.2. Etapa de análisis

Calcula la matriz de rigidez global, a partir de la expansión *Karhunen-Loève* de la matriz de rigidez de cada elemento, posteriormente se ensambla en un sistema global de ecuaciones lineales en el cual las condiciones de frontera son aplicadas. El sistema de ecuaciones es resuelto y se obtiene la esperanza de los desplazamientos nodales.

B.2.3. Etapa de posprocesamiento

Realiza el análisis de incertidumbre una vez obtenida la esperanza de los desplazamientos.

B.3 Descripción de las etapas

B.3.1 Etapa de preprocesamiento

Esta etapa está conformada por tres funciones principales; cada una de ellas pasa información a otras funciones (referencias de función) que al ser ejecutadas permiten realizar el análisis de la etapa. Las funciones principales son:

B.3.1.1 Función MakeModel

a) Guarda en una estructura llamada “**Model**” todos los datos que describen el problema en estudio como:

- Características de la malla (número de elementos, coordenadas nodales, etc.).
- Tipo de análisis (esfuerzo plano, deformación plana).
- Parámetros deterministas y probabilistas del material (E , ν).
- Condiciones de frontera.
- Condiciones de carga.

b) Calcula las coordenadas de los puntos gaussianos y los coeficientes de peso para la integración numérica mediante la función **IntegrationSchemes**.

B.3.1.2 Función DiscRandomField

a) Almacena los datos de las características del campo aleatorio en una estructura llamada “**RF**”. Los datos que guarda esta estructura son:

- Tipo de campo (gaussiano, lognormal).
- Características del campo aleatorio ($E\{E\}$, $CV\{E\}$, $C_V(X_1, X_2)$, L).
- Orden y tipo expansión de serie.

b) A continuación lleva a cabo la discretización del campo aleatorio utilizando la función **KLExpansion** en donde se obtienen los valores característicos y funciones características de la función de autocovarianza considerando la solución analítica propuesta por Ghanem y Spanos (1991).

B.3.1.3 Función MakePC

a) Esta función calcula la base de la expansión *caos polinomial* y almacena toda la información generada en una estructura llamada “**PC**”. Los cálculos que se realizan son:

- Calcula el número de vectores base, utilizados para la expansión en *caos polinomial*, asociado con el orden de las dos expansiones.

- Calcula los polinomios de Hermite
- Calcula el cuadrado de la norma $c_j = E\{\Psi_j^2\}$
- Calcula los coeficientes c_{ijk}

B.3.2 Etapa de análisis

Esta etapa está constituida por una función principal (**assemble_bc**) que, al igual que en la etapa anterior, hace uso de referencias de funciones que permiten finalmente obtener la esperanza de los desplazamientos.

B.3.2.1 Función **assemble_bc**

Este procedimiento establece la ecuación de equilibrio global en términos de un sistema de ecuaciones lineales de dimensiones $NP \times NP$ (Inciso 3.4), para ello realiza los siguientes cálculos:

a) Cálculo de las matrices de rigidez de los elementos.

La matriz de rigidez global se forma a partir del cálculo de las matrices de rigidez de los elementos, para ello la función **assemble_bc** recupera datos de las estructuras *model*, *RF*, *PC*, posteriormente llama a la función **stoch_quad4** para calcular tales matrices.

- Función **stoch_quad4**

Esta función calcula la parte determinista y la parte estocástica de la matriz de rigidez para cada elemento de la malla. La función obtiene:

- La matriz de elasticidad unitaria, \mathbf{D}_0
- Las funciones de forma, la matriz \mathbf{B} y la suma de pesos sobre los puntos gaussianos de integración.
- El valor esperado de la matriz de rigidez (Ke_mean) y la matriz estocástica (Ke), para cada uno de los elementos de la malla (se consideran elementos rectangulares de cuatro nodos).

b) Ensamblaje de matrices.

Ensambla las matrices de los elementos Ke_mean y Ke en matrices de rigidez globales, llamadas *MeanStifMatrix* y *StifMatrices* respectivamente.

c) Obtención de la matriz de rigidez global, *GlobalStifMatrix*.

A partir de *MeanStifMatrix* y *StifMatrices* la función calcula las matrices \mathbf{K}_{jk} usando c_{ijk} e impone las condiciones de frontera. Finalmente obtiene la matriz de rigidez global, *GlobalStifMatrix*.

d) Resolución del sistema lineal de ecuaciones

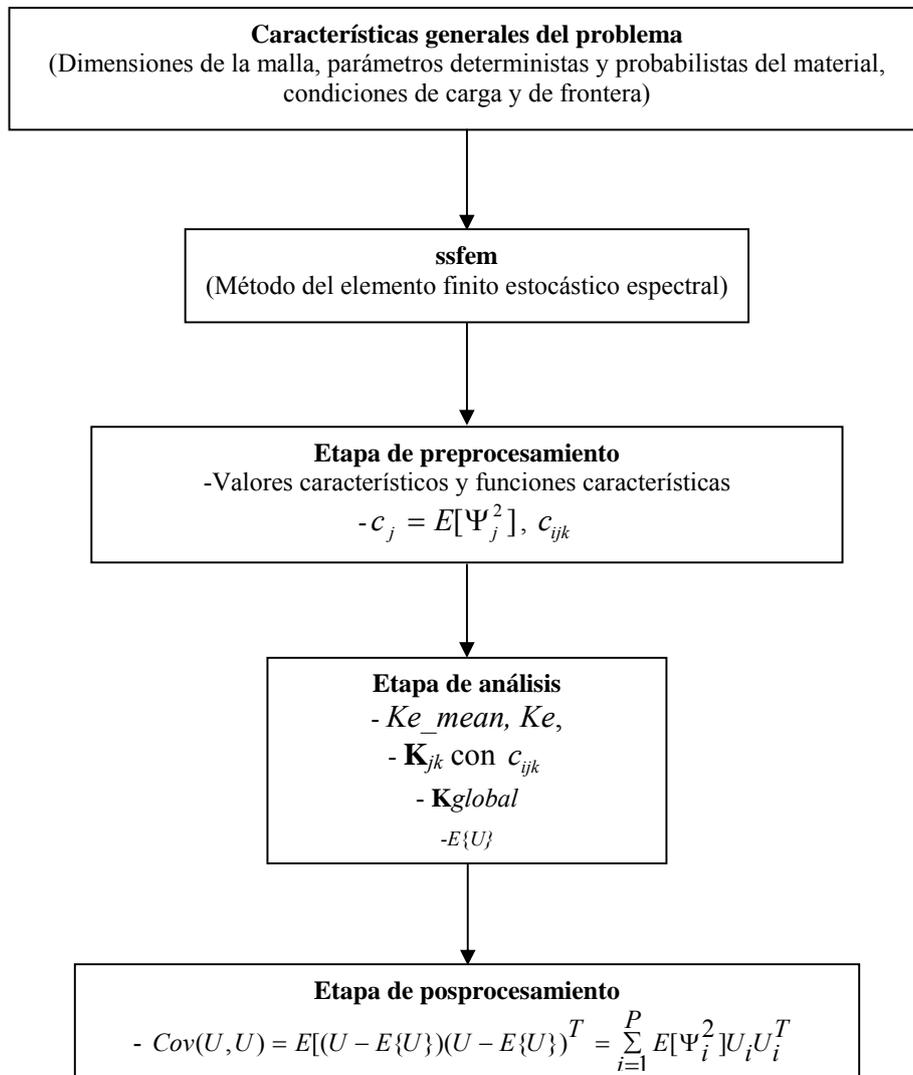
Se obtiene la esperanza de los desplazamientos horizontales y verticales al resolver el sistema lineal de ecuaciones.

B.3.3. Etapa de posprocesamiento

En esta etapa se calcula la desviación estándar de los desplazamientos utilizando el cuadrado de la norma, $c_j = E[\Psi_j^2]$ obtenida con la función **MakePC**.

B.4 Diagrama de bloques para el análisis de problemas lineales utilizando FERUMssfem.

El siguiente diagrama de bloques presenta en forma resumida las etapas de análisis ya descritas.



i = tamaño de la expansión de Karhunen-Loève
 $j, k = P$ (tamaño de la base polinomial)