



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

---

**FACULTAD DE INGENIERÍA**

**Estudio numérico de la mecánica de  
fluidos y la transferencia de calor en un  
chorro impactando sobre una superficie  
inclinada**

**TESIS**

Que para obtener el título de  
**Ingeniero Mecánico**

**P R E S E N T A**

FIDEL CASTRO BORJAS

**DIRECTOR DE TESIS**

M.I. EDGAR ALI RAMOS GÓMEZ



Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2020



## **AGRADECIMIENTOS**

A mis padres por haberme instruido y educado, por cada uno de sus consejos que por siempre atesoro en mi ser, por su apoyo incondicional en cada una de mis de mis decisiones y porque han estado en mis logros y en ms fracasos.

A mi tutor, el M.I. Edgar Ali Ramos por haberme dado la oportunidad de realizar este trabajo bajo su tutoría, por todo el tiempo que dedicó para la realización de esta tesis, por su guía y enorme paciencia.

A la Universidad Nacional Autónoma de México y su Facultad de Ingeniería que me abrieron sus puertas para que pueda ser parte de una comunidad de profesionales de alto nivel académico y así contribuir al desarrollo del país.



## RESUMEN

Debido al desarrollo y crecimiento en diversas ramas de la industria automotriz, la necesidad de cumplir con los requerimientos de seguridad y mejorar las condiciones climáticas en el interior de los autos se ha convertido en un tema muy importante para los ingenieros de diseño. Un sistema bien diseñado de climatización ayudará a eliminar fenómenos no deseados como el congelamiento y/o empañamiento de cristales, por tal motivo es necesario un estudio adecuado de la mecánica de fluidos y la transferencia de calor.

La presente tesis contempla una simulación numérica en tres dimensiones realizada con ayuda del software comercial ANSYS Fluent de un chorro de aire impactando con una superficie inclinada, se utilizaron los modelos de turbulencia  $k-\varepsilon$  estándar,  $k-\varepsilon$  RNG,  $k-\varepsilon$  realizable y  $k-\omega$  SST. Dos casos de estudio son comparados, un caso simple y uno conjugado, con diferencia en el modelado geométrico del dominio computacional. Se presenta el análisis de sensibilidad de malla y del parámetro  $Y^+$  para el modelo  $k-\omega$  SST. El desempeño de los modelos de turbulencia es evaluado, así como la comparación entre los dos casos son analizados con base en las variables de presión, velocidad y temperatura. Los efectos de la presión se analizaron sobre la superficie de impacto. Los efectos de la velocidad se analizaron en la región cercana a la zona de impacto. Los efectos de la temperatura se analizaron en la trayectoria del jet y el número de Nusselt se analizó sobre la superficie de impacto.



## Contenido

1.	Introducción .....	1
1.1	Impacto de chorros sobre superficies .....	1
1.1.1	Antecedentes en el estudio del impacto de chorros. ....	1
1.2	Características del impacto en chorros .....	5
1.3	Objetivo .....	7
1.3.1	Objetivos específicos .....	7
2.	Formulación matemática .....	9
2.1	El campo de aceleraciones de un fluido. ....	9
2.2	Conservación de la masa. ....	9
2.3	Cantidad de movimiento .....	10
2.3.1	Número de Reynolds.....	12
2.4	Ecuación de la energía en forma diferencial. ....	13
2.5	Capas límite de velocidad y térmica.....	14
2.6	Problema conjugado en la transferencia de calor .....	15
2.6.1	Efecto de la transferencia de calor por conducción. ....	15
2.6.2	Efecto de la transferencia de calor por convección.....	16
2.7	Problema cerrado.....	17
2.7.1	Promedio en el tiempo de Reynolds para la turbulencia.....	18
2.7.2	Ecuaciones de Reynolds promediadas .....	18
2.7.3	Ecuación del esfuerzo de Reynolds.....	19
2.8	Modelos de dos ecuaciones para la turbulencia .....	20
2.8.1	Aproximación de Boussinesq.....	20
2.8.2	Ecuación de la energía turbulenta. ....	21
2.8.3	Modelo $k - \varepsilon$ estándar. ....	22
2.8.4	Modelo $k - \varepsilon$ RNG.....	23
2.8.5	Modelo $k - \varepsilon$ Realizable .....	25
2.8.6	Modelo $k - \omega$ estándar. ....	26
2.8.7	Modelo transporte del esfuerzo cortante (SST) $k - \omega$ .....	27
3.	Planteamiento y solución .....	31
3.1	Método de volumen finito .....	31

3.1.1	Discretización y Solución .....	31
3.1.2	Solucionador basado en la presión.....	32
3.2	Descripción de casos de estudio.....	34
3.2.1	Caso 1.....	35
3.2.2	Caso 2.....	35
3.3	Arreglo para la validación de la simulación .....	36
3.3.1	Discretización del dominio .....	36
3.3.2	Validación de la malla.....	38
3.3.3	Condiciones de frontera .....	38
3.3.4	Convergencia.....	40
4.	Resultados .....	43
4.1	Análisis de sensibilidad de malla .....	43
4.1.1	Análisis del parámetro $Y +$ .....	44
4.2	Efectos de la presión.....	46
4.3	Efectos de la velocidad.....	49
4.4	Efectos de la temperatura .....	53
5.	Conclusiones .....	61
	Referencias.....	63







# 1. INTRODUCCIÓN

## 1.1 Impacto de chorros sobre superficies

El fenómeno de transferencia de calor debido al impacto de chorros se ha convertido en la principal fuente de enfriamiento y calentamiento de superficies debido a su gran habilidad de mejorar la transferencia de calor y masa en procesos industriales. En modelos de una fase, el uso de impacto de chorros como mecanismo para la transferencia de grandes cantidades de calor y masa es de los métodos más efectivos (Dewan, Dutta, & Srinivasan, 2003). El flujo másico requerido en el método de impacto de chorros comparado con el método de flujo de pared libre puede llegar a ser menor en hasta dos órdenes de magnitud para el enfriamiento de dispositivos con un coeficiente de transferencia de calor dado (Zuckerman & Lior, 2006). Algunas de sus principales aplicaciones se encuentra el enfriamiento de los alabes en turbinas, el descongelamiento en las alas en aeronaves, recocido en metales, enfriamiento de dispositivos electrónicos de alta energía, calentamiento de dispositivos ópticos para su desempañamiento, etc (Shukla & Dewan, 2018). También es ampliamente usado en sistemas de calefacción y aire acondicionado empleado en automóviles para el descongelamiento del parabrisas o para prevenir el empañamiento de cristales.

El impacto de chorros en superficies ha sido ampliamente estudiado desde los puntos de vista analítico, experimental y numérico.

### 1.1.1 Antecedentes en el estudio del impacto de chorros.

El enfoque más sencillo para tratar el impacto de chorros está basado en la suposición de flujo inviscido, los resultados obtenidos a través de este enfoque se pueden aproximar razonablemente a lo que ocurre en la realidad bajo la suposición de encontrarse en la región donde existe un número alto de Reynolds, es decir, donde los efectos viscosos sean despreciables. Existen soluciones analíticas en dos dimensiones para fluidos ideales. En regiones donde predomina el flujo laminar es posible hallar soluciones exactas a las ecuaciones de Navier – Stokes, considerando que el flujo en las paredes es dependiente del flujo principal, y por lo tanto, se puede determinar la distribución de presiones en la superficie (Schlichting, 1960).

Tempranos intentos para predecir analíticamente la transferencia de calor en una superficie plana que ha sido impactada por un chorro fueron limitados a las zonas vecinas de la zona de estancamiento. Kezios (Kezios, 1956) reportó una expresión para el número de Nusselt en el punto de estancamiento:

$$Nu_0 = 0.475 \sqrt{Re_{D/2}}$$

donde  $Re_{D/2}$  es el número de Reynolds basado en el radio de la boquilla.

Lejos del punto de estancamiento, el número de Nusselt local está dado por la expresión:

$$Nu = F \frac{r}{D/2} \sqrt{Re_r}$$

donde  $r$  es la coordenada radial,  $D$  el diámetro de la boquilla y  $F$  la distancia del punto de estancamiento.

Usando los resultados originales de Eckert, Walz (Walz, 1964) obtuvo una expresión para el Nusselt local en el flujo axisimétrico, siendo el valor promedio igual a dos veces el valor local.

$$Nu = 0.44 Pr^{0.36} Re_r^{0.5}$$

donde  $Pr$  y  $Re_r$  son los números de Prandtl y Reynolds, respectivamente.

Otro enfoque analítico fue dado por Brdlik y Svin (Brdlik & Savin, 1965). Ellos usaron la ecuación de la energía en forma integral adaptada para modelos con simetría radial, obtuvieron la expresión para el Nusselt local basado en el radio del plato  $d/2$ .

$$Nu = 1.09 Pr^{1/3} Re_{d/2}^{0.5}.$$

La comparación entre resultados para sistemas sujetos a diferentes temperaturas en la salida del flujo y en la superficie de impacto es difícil debido a las diferencias fundamentales en las condiciones de frontera. Sumado a eso, la razón de transferencia de calor es medida en diferentes formas para cada experimento. Entre los métodos de medición se encuentran, los calorímetros de metales, los calorímetros de vapor, termopares y medidores de flujo de calor. Las áreas en las que realizaron las mediciones varían en tamaño, y lo que algunos investigadores llaman valores locales en realidad son valores promedio.

Perry (Perry, 1954) consideró aire caliente a 873 K a la salida de boquillas de diferentes diámetros y a velocidades de hasta 91 metros por segundo. La distancia entre la boquilla y la superficie de impacto era de al menos 8 veces el diámetro de la boquilla. El flujo de calor fue determinado por un calorímetro, con un diámetro que fue utilizado para calcular el Nusselt y el Reynolds. Los resultados obtenidos en las pruebas fueron correlacionados por la expresión:

$$Nu = 0.181 Pr^{0.33} Re^{0.7}.$$

La transferencia de calor fue también investigada para otros ángulos de impactos. Perry encontró un par de aumentos de la transferencia de calor en la superficie cuando el eje de simetría era girado de  $15^\circ$  a  $90^\circ$  con respecto a la superficie.

Los resultados obtenidos a partir del trabajo experimental de Huang (Huang, 1963) en chorros turbulentos de aire caliente, con temperaturas en el rango de 300 a 350 °F, indican que el valor local del Nusselt cerca del punto de estancamiento y con Reynolds de hasta  $10^4$  es dado por:

$$Nu_0 = 0.023 Pr^{1/3} Re_D^{0.87}$$

y el valor promedio por:

$$Nu = 0.018 Pr^{1/3} Re^{0.87}.$$

También encontró que para relaciones entre la distancia de separación y el diámetro de la boquilla ( $H/D$ )  $< 6$  no había variaciones en la transferencia de calor debido a que la sensibilidad de área del detector de calor era de una pulgada cuadrada. Los resultados experimentales mostraron que la máxima transferencia de calor era alcanzada con un diámetro de 4.76 mm y una relación  $H/D$  menor a 3.

La mayoría de las aplicaciones industriales del impacto de chorros envuelven a la turbulencia en el dominio del fluido una vez que ha salido de la boquilla. Modelar el flujo turbulento presenta un gran reto en predecir de una manera rápida y correcta el comportamiento de chorros turbulentos. El modelado numérico del flujo y la transferencia de calor en chorros es ampliamente utilizado para la predicción, el análisis y el diseño de dispositivos. Los métodos de elemento, diferencias y volumen finitos en la dinámica de fluidos computacional (CFD) aplicado al fenómeno de impacto de chorros ha predicho de manera exitosa los coeficientes de transferencia de calor y los campos de velocidad. Las dificultades en predecir correctamente dichos coeficientes y velocidades son principalmente debido al modelado de la turbulencia y de la interacción del flujo turbulento con la pared de impacto (Dewan, Dutta, & Srinivasan, 2003).

El enfoque de la simulación numérica directa (DNS) es el método numérico y físico más completo empleado para predecir los campos de flujo y la razón de transferencia. Este método resuelve las ecuaciones completas de continuidad, Navier – Stokes y difusión de energía y/o masa usando unidades discretas de tiempo y espacio, sin embargo, requiere una discretización extremadamente pequeña para resolver totalmente las propiedades del flujo turbulento, esto debido a que las escalas de longitud turbulentas que caracterizan al impacto de chorros son mucho más pequeñas que las longitudes macroscópicas. Los estudios de CFD que involucran la simulación numérica directa usan supercomputadoras que, aun así, estos estudios están limitados a números de Reynolds del orden de 10000. En el intento para remediar esta situación, se utiliza la conocida Large Eddy Simulation (LES). El enfoque LES de variación en el tiempo sigue la trayectoria de las propiedades del flujo con las ecuaciones completas bajo una escala de longitud definida por el usuario, para después usar una sub – escala – de malla adicional para describir el comportamiento del flujo turbulento en escalas más pequeñas. El método LES ha mostrado resultados alentadores y ha esclarecido el entendimiento de la formación, propagación y efectos de la turbulencia en las características de los campos de velocidad y la transferencia de calor en chorros, sin embargo, requiere una alta resolución en discretización para precisión, una alta resolución en tiempo para estabilidad, y por consecuencia sigue la necesidad de un gran poder de cómputo y tiempo para obtener resultados satisfactorios (Shukla & Dewan, 2017).

Técnicas de solución estacionarias de promediado en el tiempo, típicamente conocidas como modelos Navier – Stokes promediados de Reynolds (RANS), usan ante la presencia de turbulencia en el flujo una versión ajustada de las ecuaciones de Navier – Stokes. Craft (Craft, Graham, & Launder, 1993) usó los modelos de bajo número de Reynolds de Launder y Sharma en su estudio comparativo de CFD para varios modelos de turbulencia, en el que para el problema de impacto en chorros se incorporan las ecuaciones de conservación para la energía cinética turbulenta y su razón de disipación ( $k - \epsilon$ ), así como una simple ecuación para configurar la correlación proporcional al gradiente de temperatura entre la velocidad y temperatura. Presentó la comparación entre la implementación del modelo k-e contra resultados experimentales. Para la prueba a un  $Re = 23000$  el modelo predijo niveles de hasta cuatro veces más grandes en la velocidad que los obtenidos en el trabajo experimental de Cooper (Cooper, Jackson, Launder, & Liao, 1993). Un problema que se notó fue que la ecuación que modela la relación entre la energía cinética turbulenta y la viscosidad turbulenta causa un aumento y predicciones erróneas en los niveles de energía cinética turbulenta en la región de estancamiento (el incremento en la viscosidad turbulenta causa incremento en la intensidad turbulenta). Similarmente, el modelo también sobre predijo la velocidad normal a la pared en  $x/H = 0.5$ , correspondiente al borde del chorro. Los errores en la velocidad paralela a la pared estuvieron en el rango de 15 – 20 %, con errores de hasta 50% en la región muy cercana a la pared  $y/H < 0.05$ . El modelo sobre predijo el Nusselt en el centro de la región de impacto de hasta 40% y falló en predecir el pico secundario del Nusselt en  $x/h = 2$ .

Heyerichs y Pollard (Heyerichs & Pollard, 1996), realizaron sus estudios sobre el impacto en chorros para diferentes versiones de los modelos k – e y k – w, donde incluían versiones de bajo número de Reynolds y funciones de pared. Observaron el bajo desempeño del enfoque de las funciones de pared comparado con las versiones de bajo número de Reynolds. Concluyeron en que el desempeño del modelo k – w es superior al del modelo k – e.

Behnia et al (Behnia, Parneix, & Durbin, 1998), estudiaron el impacto en chorros turbulentos isotérmicos y axi-simétricos en superficies planas para un Reynolds = 23000 y  $H/D = 0.5 - 14$ . Lograron la predicción del coeficiente de transferencia de calor local con el modelo de turbulencia  $v^2 f$  y observaron una excelente concordancia con los datos experimentales mientras que el modelo k – e sobre predecía características de flujo.

Wang y Majumdar (Wang & Mujumdar, 2005), hicieron comparaciones usando el modelo k – e en la versión de bajo número de Reynolds y añadiendo la corrección del Yap en la ecuación de disipación  $\epsilon$  para un chorro turbulento. Observaron que la corrección de Yap reducía las escalas de longitud turbulentas en la región cercana a la pared y así poder encontrar una sobre predicción de la energía cinética turbulenta en la zona de estancamiento.

Draksler y Koncar (Draksler & Končar, 2011), estudiaron las características del campo de flujo y la transferencia de calor local en el impacto de chorros axi – simétricos con el modelo de turbulencia SST basado en la viscosidad de Eddy. Concluyeron que las predicciones de la transferencia de calor promedio y local obtenidas a través del modelo RANS fueron satisfactoriamente precisas. También observaron que creando chaflanes en los bordes de la boquilla de entrada resultaba en una reducción en la transferencia de calor, así como una caída en la presión.

Dutta et al. (Dutta, Dewan, & Srinivasan, CFD study of slot jet impingement heat transfer with nanofluids, 2016) hicieron su estudio de la transferencia de calor sobre el impacto de un chorro con nano fluido ( $Al_2O_3$  – agua). Usaron los modelos de turbulencia  $k - \epsilon$  estándar,  $k - w$  SST y  $v^2 f$  para el estudio computacional. Observaron que el coeficiente de transferencia promedio en la superficie de impacto era de aproximadamente 27% y 22% para el chorro en comportamiento laminar y turbulento, respectivamente. Sin embargo, encontraron que la potencia de la bomba aumentaba 5 veces.

## 1.2 Características del impacto en chorros

A través de los estudios realizados en chorros se sabe que el flujo pasa a través de diferentes regiones, como se muestra en la Figura 1.1.

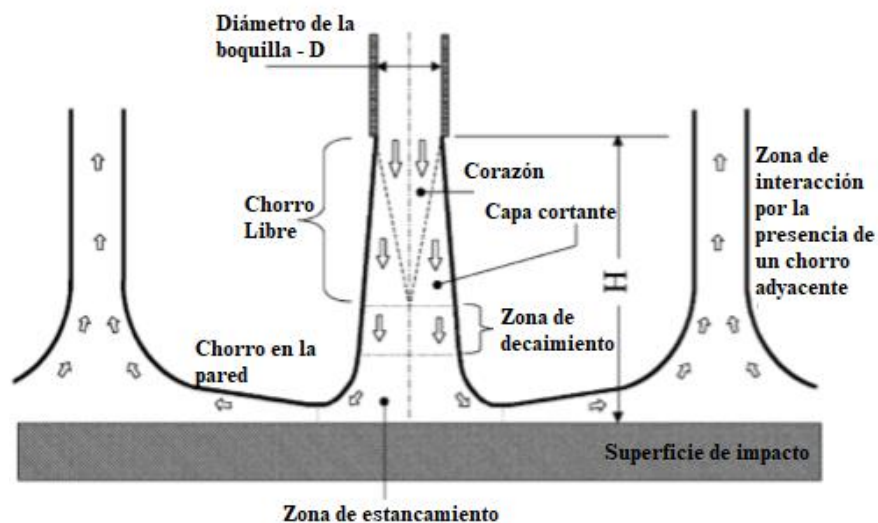


Figura 1.1 Regiones de flujo en un impacto de chorro (Zuckerman & Lior, 2006).

El chorro a la salida de la boquilla o abertura tiene un perfil inicial de velocidades y temperatura, así como características de turbulencia que dependen del flujo antes de la salida. Una vez que el flujo sale, pasa por una región que es suficientemente lejana a la superficie de impacto comportándose como un chorro libre. Aquí, los gradientes de velocidad crean cortantes en los bordes del chorro los cuales transfieren momentum lateralmente arrastrando más fluido en la dirección del flujo dando como resultado un incremento en el flujo de masa. En el proceso, el chorro pierde energía, el perfil de velocidades se extiende y decrece en magnitud hacia las zonas laterales. La

región definida como corazón corresponde a la zona interior del flujo donde la capa cortante no es afectada debido a la transferencia de momentum. La región donde existe el comportamiento de chorro libre se hace presente si la distancia entre la boquilla y la superficie de impacto es dos veces mayor al diámetro de la boquilla. La capa cortante se expande hacia el centro del chorro alcanzando la línea central del mismo, es en esta zona donde se obtienen los gradientes de velocidad laterales más altos, produciendo una región de decaimiento. En esta zona de decaimiento la componente axial de la velocidad en la parte central disminuye, la velocidad radial toma un perfil parecido a una curva Gaussiana como se muestra en la Figura 1.2.

Una vez que el flujo se aproxima a la superficie, pierde velocidad axial y gira. Esta región es conocida como la región de estancamiento o de desaceleración. El flujo acumula una enorme presión estática encima de la pared, transmitiendo el efecto hacia la parte superior. El cambio no uniforme en la dirección lleva a obtener grandes esfuerzos normales y cortantes en la región de desaceleración, lo que tiene una gran influencia en las propiedades de transporte locales. En el flujo resultante aparecen vórtices y aumento en la turbulencia.

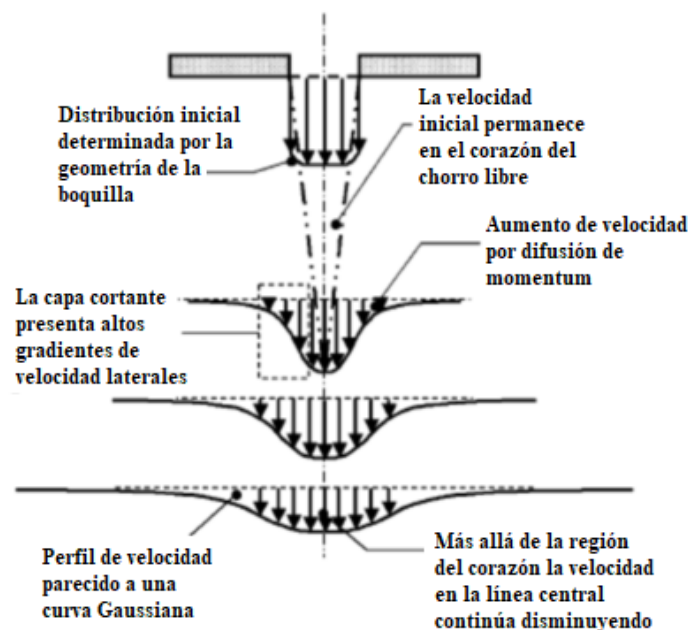


Figura 1.2 Campo de flujo en un chorro libre (Zuckerman & Lior, 2006).

Después de girar, el flujo entra en una zona donde se mueve lateralmente en dirección de la pared. En esta zona del chorro en la pared existe una capa cortante influenciada por el gradiente de velocidad con respecto al fluido en la zona de no deslizamiento y el gradiente de velocidad con respecto al fluido lejano a la pared. Debido a la conservación de momentum, el flujo en la pared se debe acelerar después de girar y conforme la capa limite se desarrolla.



Es de fundamental importancia distinguir entre los regímenes laminar y turbulento. De acuerdo con Vickers (Vickers, 1959) parece ser que el número de Reynolds crítico,  $Re$ , basado en el diámetro de la boquilla, es de 1000. Este argumento fue respaldado por los estudios de McNaughton y Sinclair (McNaughton & Sinclair, 1966), quienes reportaron sus observaciones con los siguientes patrones en el chorro:

1. Lo que ellos llamaron “chorro laminar disipativo”,  $Re < 300$ .
2. Chorro totalmente laminar,  $300 < Re < 1000$ .
3. Chorro semi – turbulento, el cual empieza laminar y eventualmente se vuelve turbulento,  $1000 < Re < 3000$ .
4. Chorro totalmente turbulento,  $Re > 3000$ .

Las anteriores observaciones las realizaron los autores en chorros con líquidos. Hrycak (Hrycak, Lee, Gauntner, & Livingood, 1970) realizó sus observaciones con chorros de aire y obtuvo resultados muy similares.

En un sistema conformado por múltiples chorros existen las mismas regiones que componen al flujo, sin embargo, hay algunas diferencias fundamentales. Estas son debidas principalmente por dos tipos de interacciones que no están presentes en sistemas de un solo chorro. La primera es por la posible interacción entre chorros antes del impacto con la superficie plana y se debe principalmente por la expansión de la capa cortante. La segunda es la interacción debida a la colisión sobre la superficie, también conocida como las zonas secundarias de estancamiento.

### **1.3 Objetivo**

Simular numéricamente el impacto de un chorro de aire sobre una superficie inclinada haciendo uso de la herramienta comercial ANSYS, obtener las distribuciones de presión, velocidad y temperatura para analizar el desempeño del flujo en la transferencia de calor.

#### *1.3.1 Objetivos específicos*

- Simular numéricamente el impacto de un chorro de aire sobre una superficie inclinada mediante las ecuaciones promediadas de Navier – Stokes (RANS).
- Obtener el campo de presiones, velocidades y temperaturas.
- Comparar dos casos de estudio que incluyen el problema conjugado en la transferencia de calor.
- Analizar cuatro diferentes modelos de turbulencia basados en las ecuaciones promediadas de Navier – Stokes.



## 2. FORMULACIÓN MATEMÁTICA

La mecánica de fluidos se define como la ciencia que estudia el comportamiento de los fluidos en reposo (estática de fluidos) o en movimiento (dinámica de fluidos), y la interacción de estos con sólidos o con otros fluidos en las fronteras. El flujo de un fluido es una rama de la mecánica, por lo tanto, debe satisfacer una serie de leyes básicas. Sin embargo, la teoría se torna compleja conforme se quiere estudiar sistemas a los que no se le apliquen idealizaciones que no son válidas en problemas prácticos. Dos grandes problemas a los que nos enfrentamos al estudiar la mecánica de fluidos es la geometría y la viscosidad del fluido. Las ecuaciones básicas para el movimiento de fluido son muy complejas de tratar si se toman geometrías arbitrarias. La viscosidad incrementa la dificultad de las ecuaciones, a pesar de que la aproximación de la capa límite nos ayuda a simplificar el problema de la viscosidad en el flujo. La viscosidad provoca una desestabilización llamada turbulencia. Es posible aplicar métodos numéricos para la solución y tratamiento de ecuaciones y geometrías complejas.

### 2.1 El campo de aceleraciones de un fluido.

Para algunos autores la variable de la velocidad en un fluido es la más importante en la mecánica de fluidos. Conocer el campo de velocidades es a menudo equivalente a resolver el problema. La aceleración  $\mathbf{a}$  también es fundamental en mecánica de fluidos, debido a que aparece al aplicar la segunda ley de Newton a un sistema de fluido infinitesimal (White, 2008).

Obtenemos el vector de la aceleración total, a veces llamada derivada sustancial o material.

$$a_i = \frac{du_i}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j(\nabla \cdot u_i).$$

Esta derivada temporal total sigue a una partícula con una identidad fija, lo cual es conveniente para expresar las leyes de la mecánica en la descripción euleriana. Esta descripción es en la cual se sigue el movimiento de las partículas individuales.

### 2.2 Conservación de la masa.

Consideramos un volumen de control infinitesimal, Figura 2.1, alineado con los ejes en coordenadas cartesianas.

Razón de cambio de masa dentro del VC:  $\int \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = \frac{\partial \rho}{\partial t}.$

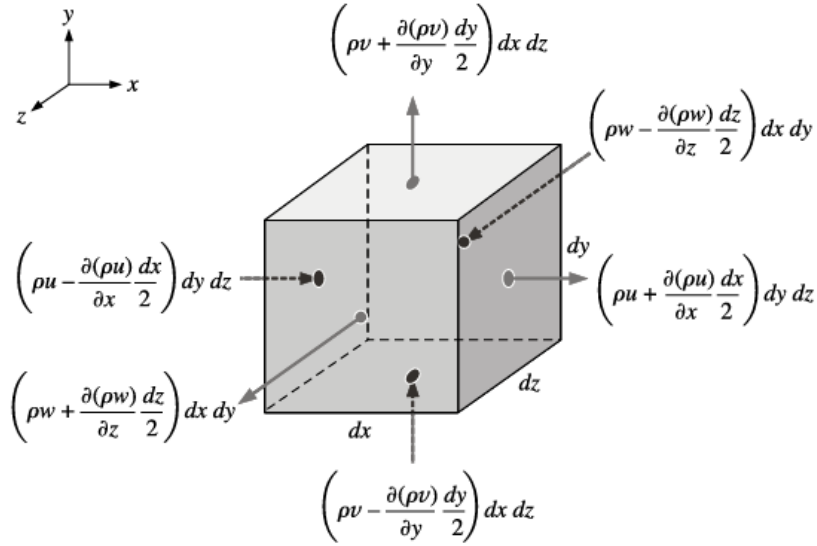


Figura 2.1: Flujo de entrada o de salida a través de cada cara del volumen de control diferencial (Cengel & Cimbala, 2018).

Teniendo en cuenta que,  $\int_{VC} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = \sum_{ent} \dot{m} - \sum_{sal} \dot{m}$ , después de combinar y simplificar los términos restantes, queda:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz = -\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx dy dz - \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dx dy dz - \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} dx dy dz$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0.$$

La ecuación de conservación de masa se expresa en forma tensorial y considerando el caso incompresible, como:

$$\nabla \cdot (u_i) = 0.$$

### 2.3 Cantidad de movimiento

Utilizamos el mismo volumen de control elemental que utilizamos para deducir la ecuación de conservación de masa.

$$\sum \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \int_{VC} u_i \rho du_i \right) + \sum_{ent} (m \dot{u}_i) - \sum_{sal} (m \dot{u}_i)$$

aplicando la definición de la aceleración total de la partícula:

$$\sum \mathbf{F} = \rho a_i dx dy dz = \rho \frac{du_i}{dt} dx dy dz.$$

Las fuerzas son de dos tipos: fuerzas volumétricas y fuerzas de superficie. Las fuerzas volumétricas se deben a campos externos (gravitatorios, magnéticos, eléctricos) que actúan sobre toda la masa del volumen elemental. Las fuerzas de superficie se deben a los esfuerzos en las caras de la superficie de control. Estos esfuerzos, son la suma de la presión hidrostática y de los esfuerzos viscosos que aparecen en el movimiento con gradientes de velocidad.

$$\sigma_{ij} = \begin{vmatrix} -p + \tau_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & -p + \tau_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & -p + \tau_{zz} \end{vmatrix}$$

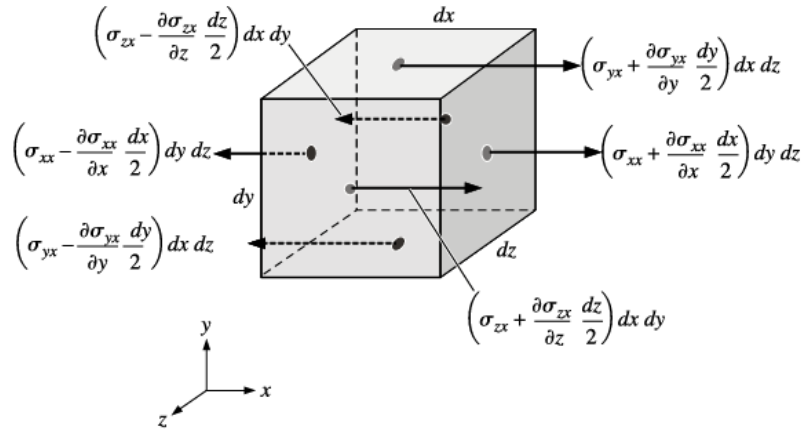


Figura 2.2. Fuerzas superficiales que actúan en la dirección  $x$  debidas a la componente de tensor de esfuerzo apropiada sobre la cara del volumen de control diferencial (Cengel & Cimbala, 2018).

de este modo la fuerza neta de superficie en cada dirección está dada por:

$$\frac{dF_x}{dV} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yx}) + \frac{\partial}{\partial z}(\tau_{zx})$$

$$\frac{dF_y}{dV} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yy}) + \frac{\partial}{\partial z}(\tau_{zy})$$

$$\frac{dF_z}{dV} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xz}) + \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yz}) + \frac{\partial}{\partial z}(\tau_{zz})$$

el tensor de esfuerzos viscosos se escribe como:

$$\boldsymbol{\tau}_{ij} = \begin{vmatrix} \tau_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \tau_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \tau_{zz} \end{vmatrix}$$

$$\left(\frac{dF}{dV}\right)_{viscosa} = \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_{ij}$$

reescribimos la ecuación de cantidad de movimiento como:

$$\rho g - \nabla p + \nabla \cdot \tau_{ij} = \rho \frac{du_i}{dt}$$

esta ecuación no está lista para su uso mientras no escribamos los esfuerzos viscosos en función de las componentes de la velocidad. Para un fluido newtoniano, los esfuerzos viscosos son, proporcionales a la velocidad de deformación y al coeficiente de viscosidad.

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} & \tau_{yy} &= 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} & \tau_{zz} &= 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \\ \tau_{xy} = \tau_{yx} &= \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \tau_{xz} = \tau_{zx} &= \mu \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ \tau_{yz} = \tau_{zy} &= \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

sustituyendo los términos del esfuerzo viscoso, tenemos las ecuaciones de Navier-Stokes para un flujo incompresible.

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \rho g_x \\ \rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + \rho g_y \\ \rho \left( \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + \rho g_z \end{aligned}$$

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i.$$

### 2.3.1 Número de Reynolds

La transición de flujo laminar a turbulento depende de la geometría, la rugosidad de la superficie, la velocidad del flujo, la temperatura de la superficie y el tipo de fluido, entre otros factores. Osborne Reynolds (1880) descubrió que el régimen de flujo depende principalmente de la razón de fuerzas inerciales a fuerzas viscosas en el fluido. Esta razón se llama número de Reynolds y se expresa cómo:

$$Re = \frac{\rho UL}{\mu}.$$

## 2.4 Ecuación de la energía en forma diferencial.

La conservación de la energía para una cantidad fija de masa se puede expresar en forma de razón como:

$$\dot{Q}_{ent\ neta} + \dot{W}_{ent\ neta} = \frac{d}{dt} \int_{sis} \rho e dV$$

De forma análoga a la ecuación de cantidad de movimiento:

$$\dot{Q} - \dot{W}_v = \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\rho e) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u \zeta) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v \zeta) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w \zeta) \right] dx dy dz$$

Donde,  $\zeta = e + p/\rho$  y la energía total,  $e = h + 1/2 (V^2) + gz$ . De forma análoga a la ecuación de continuidad:

$$\dot{Q} - \dot{W}_v = \left[ \rho \frac{de}{dt} + u_i \cdot \nabla p + p \nabla \cdot u_i \right] dx dy dz$$

Para calcular Q despreciamos la radiación y consideramos sólo la conducción de calor a través de las caras del elemento. Considerando que el flujo de calor por conducción sigue la ley de Fourier:  $q = -k \nabla T$

Sumando los términos de entrada y restando los términos de salida obtenemos el flujo neto de calor añadido al elemento:

$$\dot{Q} = - \left[ \frac{\partial}{\partial x} (q_x) + \frac{\partial}{\partial y} (q_y) + \frac{\partial}{\partial z} (q_z) \right] dx dy dz = -\nabla \cdot q dx dy dz$$

Introduciendo la ley de Fourier:

$$\dot{Q} = \nabla \cdot (k \nabla T) dx dy dz$$

La potencia debida a la viscosidad viene dada por:

$$\begin{aligned} \dot{W}_v = - \left[ \frac{\partial}{\partial x} (u \tau_{xx} + v \tau_{xy} + w \tau_{xz}) + \frac{\partial}{\partial y} (u \tau_{yx} + v \tau_{yy} + w \tau_{yz}) \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial z} (u \tau_{zx} + v \tau_{zy} + w \tau_{zz}) \right] dx dy dz = -\nabla \cdot (u_i \cdot \tau_{ij}) dx dy dz \end{aligned}$$

Sustituyendo  $\dot{Q}$  y  $\dot{W}_v$  obtenemos la ecuación diferencial de la energía:

$$\rho \frac{de}{dt} + u_i \cdot \nabla p + p \nabla \cdot u_i = \nabla \cdot (k \nabla T) + \nabla \cdot (u_i \cdot \tau_{ij})$$

## 2.5 Capas límite de velocidad y térmica

Cuando consideramos un flujo sobre una placa plana como la que se muestra en la Figura 2.3 y las partículas del fluido hacen contacto con la superficie, éstas adquieren una velocidad cero. Existe un efecto de retardo en el movimiento de las partículas en la capa contigua del fluido, el cual se transfiere sucesivamente a cada capa hasta que, a una distancia  $y = \delta_h$  de la superficie, el efecto se hace insignificante. Este retardo o desaceleración del movimiento del fluido se asocia con los esfuerzos cortantes  $\tau$  que actúan en planos que son paralelos a la velocidad del fluido (Incropera & DeWitt, 1999).

La cantidad  $\delta_h$  se denomina espesor de la *capa límite hidrodinámica* y normalmente se define como el valor de  $y$  para el que  $u = 0.99U_\infty$ . En consecuencia, el flujo del fluido se caracteriza por dos regiones distintas, una capa límite en la que los gradientes de velocidades y los esfuerzos cortantes son grandes y una región fuera de la capa límite en la que los gradientes de velocidad y los esfuerzos cortantes son insignificantes. Su relevancia dentro de la mecánica de fluidos proviene de su relación con el esfuerzo cortante superficial,  $\tau_s$  y, en consecuencia, con los efectos de fricción de la superficie. En cuanto a flujos externos, proporciona la base para determinar el coeficiente de fricción local.

$$C_f = \frac{\tau_s}{\rho U_\infty^2 / 2}$$

Un parámetro adimensional clave a partir del cual se determina la resistencia de movimiento en la superficie.

Así como se produce una capa límite hidrodinámica cuando hay un paso de fluido sobre una superficie, debe producirse una *capa límite térmica* si difieren las temperaturas del flujo libre de fluido y de la superficie. Al inicio de la placa, el perfil de temperatura es uniforme,  $T(y) = T_\infty$ . Sin embargo, las partículas del fluido que hacen contacto con la placa alcanzan el equilibrio térmico a la temperatura de la superficie de la placa. Así, estas partículas intercambian energía con las de la capa adyacente del fluido, y se producen en el fluido gradientes de temperatura. La región del fluido en la que existen estos gradientes de energía es la capa límite térmica, y su espesor  $\delta_T$  por lo común se define como el valor de  $y$  para el que la razón  $\left| \frac{T_s - T}{T_s - T_\infty} \right| = 0.99$ .

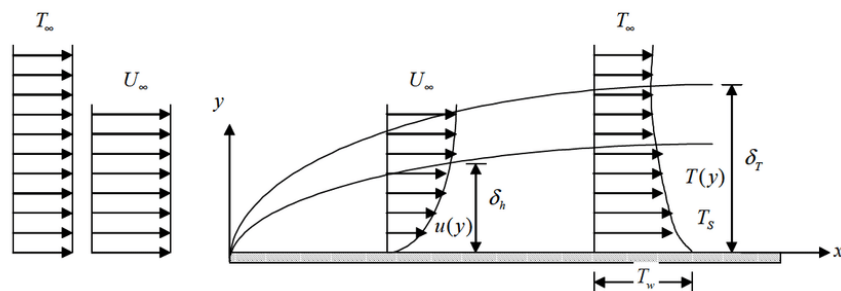


Figura 2.3 Capas límite térmica e hidrodinámica (Incropera & DeWitt, 1999).



## 2.6 Problema conjugado en la transferencia de calor

En la ingeniería al estudiarse el campo de los fenómenos térmicos donde los efectos de la transferencia de calor por conducción y convección son relevantes, el análisis del proceso de transferencia de calor conjugado es crítico en la predicción de la distribución de temperaturas y la razón de flujo de calor.

La transferencia de calor conjugada es usualmente pasada por alto en los análisis térmicos y en la interpretación de datos experimentales, debido a que la solución para únicamente la conducción o la convección es relativamente más sencilla y se pueden emplear métodos alternativos en la medición de datos experimentales.

Es importante el estudio térmico conjugado que existe en el impacto de chorros, debido principalmente a tres razones: Primero, es sabido que el coeficiente de transferencia de calor varía de manera considerable de la región de estancamiento y hacia la dirección del flujo, lo que quiere decir que la resistencia térmica a la convección en la interfaz del sólido – fluido es altamente no uniforme; Segundo, normalmente se considera a la superficie de impacto con un grande espesor para de esta forma pasar por alto los efectos de la conducción térmica, fuerza de empuje y los esfuerzos térmicos que el chorro pueda ocasionar en el sólido; Tercero, es importante tomar en cuenta la complejidad que añade el impacto del chorro en las condiciones de frontera no uniformes.

Los métodos de dinámica de fluidos computacional (CFD) han sido ampliamente utilizados para tratar con problemas asociados al acoplamiento térmico entre sólidos y fluidos.

### 2.6.1 Efecto de la transferencia de calor por conducción.

El mecanismo físico de conducción se puede explicar como la transferencia de energía entre moléculas más energéticas a las menos energéticas, esto en conjunto con la relación entre la energía y los movimientos internos de rotación, traslacional y vibración aleatorios de las moléculas. En presencia de un gradiente de temperatura, la transferencia de energía por conducción debe ocurrir entonces en la dirección de la temperatura decreciente. En un sólido, la conducción se atribuye a la actividad atómica en forma de vibraciones reticulares.

Para la conducción de calor, la ecuación o modelo se conoce como la ley de Fourier. Para la pared plana unidimensional que se muestra en la Figura 2.4, la cual tiene una distribución de temperatura  $T(x)$ , la ecuación o modelo se expresa como:

$$q''_x = -k \frac{dT}{dx}$$

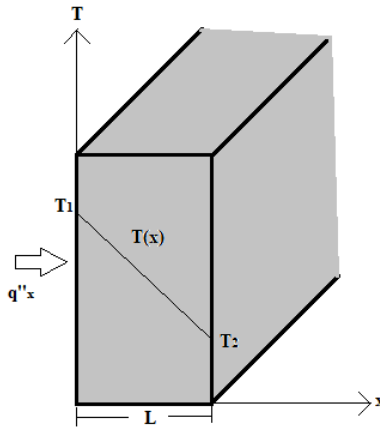


Figura 2.4 Transferencia de calor a través de una placa plana (Incropera & DeWitt, 1999).

El flujo de calor o transferencia de calor por unidad de área  $q''_x$  ( $W/m^2$ ) es la velocidad con que se transfiere el calor en la dirección  $x$  por área unitaria perpendicular a la dirección de transferencia, y es proporcional al gradiente de temperatura,  $dT/dx$  en esta dirección. La constante de proporcionalidad,  $k$ , es una propiedad de transporte conocida como conductividad térmica ( $W/m K$ ) y es una característica del material de la pared.

### 2.6.2 Efecto de la transferencia de calor por convección.

El modo de transferencia de calor por convección se compone de dos mecanismos. Además de la transferencia de energía debida al movimiento molecular aleatorio (difusión), la energía también se transfiere mediante el movimiento global, o macroscópico del fluido. Estamos especialmente interesados en la transferencia de calor por convección que ocurre entre un fluido en movimiento y una superficie limitante cuando estos tienen diferentes temperaturas.

La contribución debida al movimiento molecular aleatorio (difusión) domina cerca de la superficie donde la velocidad del fluido es baja. De hecho, en la interfaz entre la superficie y el fluido, la velocidad es cero y el calor se transfiere sólo por este mecanismo. La contribución debida al movimiento volumétrico del fluido se origina del hecho de que la capa límite crece a medida que el flujo avanza en dirección del flujo.

Sin importar la naturaleza particular del proceso de transferencia de calor por convección, la ecuación o modelo apropiado es de la forma:

$$q'' = h(T_s - T_\infty)$$

Donde  $q''$  ( $W/m^2$ ), el flujo de calor por convección es proporcional a la diferencia entre las temperaturas de la superficie y del fluido,  $T_s$  y  $T_\infty$ , respectivamente. Esta expresión se conoce como la ley de enfriamiento de Newton, y la constante de proporcionalidad  $h$  ( $W/m^2 K$ ) se denomina coeficiente de transferencia de calor por convección. Éste depende de las condiciones en la capa límite, en las que influyen la geometría de la superficie, la naturaleza del movimiento del fluido y una variedad de propiedades termodinámicas del fluido de transporte.

La relación entre las condiciones en la capa límite térmica y el coeficiente de transferencia de calor por convección se demuestra dado el flujo de calor local en cualquier distancia  $x$  sobre la superficie, mediante la aplicación de la ley de Fourier en  $y = 0$ . Es decir,

$$q''_x = -k_f \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0}$$

Esta expresión es adecuada pues, en la superficie no hay movimiento de fluido y la transferencia de energía ocurre sólo por conducción. Al combinar esta ecuación con la ley de enfriamiento de Newton, obtenemos:

$$h = \frac{-k_f \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0}}{T_s - T_\infty}$$

Por ello las condiciones en la capa límite térmica, que influyen fuertemente en el gradiente de temperatura de la pared  $\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0}$  determinan la transferencia de calor a través de la capa límite.

#### 2.6.2.1 Número de Nusselt

$$Nu = \frac{hL}{k_f} = \left. \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right|_{y^*=0}$$

Este parámetro proporciona una medida de la transferencia de calor por convección que ocurre en una superficie. Dados los parámetros adimensionales  $T^* = \frac{T - T_s}{T_\infty - T_s}$  y  $y^* = \frac{y}{L}$ , el número de Nusselt se entiende como el gradiente de temperatura adimensional en la superficie.

## 2.7 Problema cerrado.

Debido que la turbulencia consiste en las fluctuaciones aleatorias de las propiedades del flujo, se usa un enfoque estadístico. El procedimiento que se sigue es el propuesto por Reynolds (1895) en donde las variables son expresadas como la suma del promedio en las fluctuaciones. La no linealidad de las ecuaciones de Navier – Stokes lleva a la aparición de flujos de momentum que aparentemente actúan como esfuerzos a través del flujo. A priori, estos flujos de momentum son desconocidos. Cuando se derivan ecuaciones para estos esfuerzos el resultado son cantidades adicionales desconocidas. Por lo tanto, se deben establecer un número suficiente de ecuaciones para todas las variables desconocidas. En general, el promedio de Reynolds asume diversas formas donde se ve envuelta una sumatoria o una integral. Las 3 formas más conocidas dentro de la investigación de los modelos de turbulencia son el promedio en el tiempo, en el espacio y el ensamble. Para la turbulencia en régimen estacionario y homogéneo, podemos asumir que estas tres formas son iguales. Debido a que la mayoría de los problemas ingenieriles se ven envueltos en turbulencia no homogénea, el promedio en el tiempo es la forma más apropiada. (Wilcox, 1994).

### 2.7.1 Promedio en el tiempo de Reynolds para la turbulencia.

El promedio en el tiempo es apropiado para la turbulencia en régimen estacionario, flujo turbulento que, en promedio no varía con el tiempo. Para tal flujo, expresamos una variable de flujo instantánea como  $f(x, t)$ . Su promediada en el tiempo se define como:

$$F_T(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} f(x, t) dt.$$

Para la variable velocidad, expresamos la velocidad instantánea como la suma de la velocidad principal y la parte fluctuante.

$$u_i(x, t) = U_i(x) + u'_i(x, t)$$

el promediado en el tiempo de la velocidad es

$$U_i(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} u_i(x, t) dt.$$

### 2.7.2 Ecuaciones de Reynolds promediadas

Las ecuaciones de conservación de masa y momentum son:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (u_i) = 0$$

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} (u_i) + \rho u_j \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}$$

los vectores  $u_i$  y  $x_i$  son de velocidad y posición,  $t$  es el tiempo,  $p$  es la presión,  $\rho$  es la densidad y  $\tau_{ij}$  es el tensor de los esfuerzos viscosos definido como:

$$\tau_{ij} = 2\mu s_{ij}$$

donde  $\mu$  es la viscosidad y  $s_{ij}$  es el tensor de razón de deformación,

$$s_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

reescribimos el término convectivo en la forma:

$$u_j \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j u_i) - u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j u_i)$$

dejándonos la ecuación de Momentum de la forma:

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} (u_i) + \rho \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j u_i) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (2\mu s_{ij})$$

aplicando la definición de la promediada en el tiempo obtenemos las ecuaciones de Reynolds promediadas para la conservación del Momentum, masa y energía.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_i}(U_i) &= 0 \\ \rho \frac{\partial}{\partial t}(U_i) + \rho \frac{\partial}{\partial x_j}(U_j U_i + \overline{u'_j u'_i}) &= -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}(2\mu S_{ij}) \\ \rho \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}[U_i(\rho E + p)] &= \frac{\partial}{\partial x_j}(k_{eff} \frac{\partial T}{\partial x_j} + U_i(\tau_{ij})_{eff}).\end{aligned}$$

La ecuación de Reynolds promediada en el tiempo para la conservación de masa es idéntica a la ecuación de conservación de masa para la velocidad instantánea, dado que la velocidad fluctuante  $u'_i$  tiene una divergencia igual a cero.

La ecuación promediada en el tiempo para la conservación de momentum puede ser reescrita de una forma más reconocible como:

$$\rho \frac{\partial}{\partial t}(U_i) + \rho U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}(2\mu S_{ij} - \overline{\rho u'_j u'_i})$$

esta ecuación se conoce comúnmente como la Ecuación Reynolds – Promediada de Navier – Stokes. El término  $\overline{\rho u'_j u'_i}$  es conocido como el Tensor de esfuerzo de Reynolds

$$\tau_{ij} = \overline{\rho u'_j u'_i}.$$

En la ecuación promediada en el tiempo para la conservación de la energía, los términos  $E$ ,  $k_{eff}$  y  $(\tau_{ij})_{eff}$  son la energía total, la conductividad térmica efectiva y el tensor de esfuerzo desviador.

### 2.7.3 Ecuación del esfuerzo de Reynolds.

Con el objetivo de derivar ecuaciones adicionales multiplicamos la ecuación de Navier – Stokes por el término fluctuante y promediamos en el tiempo el producto, de tal forma, obtenemos:

el término transitorio:

$$\overline{u'_i(\rho u_j)_t + u'_j(\rho u_i)_t} = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial t}$$

el término convectivo:

$$\overline{\rho u'_i u_k u_{j,k} + \rho u'_j u_k u_{i,k}} = -U_k \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_k} - \tau_{ik} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} - \tau_{jk} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k}(\overline{\rho u'_i u'_j u'_k})$$

el término del gradiente de presión:

$$\overline{u'_i p_{,j} + u'_j p_{,i}} = \overline{u'_i \frac{\partial p'}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial p'}{\partial x_i}}$$

y finalmente, el término viscoso:

$$\overline{\mu(u'_{i,j,kk} + u'_{j,i,kk})} = \nu \frac{\partial^2 \tau_{ij}}{\partial x_k \partial x_k} - 2\mu \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k}}$$

haciendo un reacomodamiento de todos los términos obtenemos la ecuación del esfuerzo de Reynolds de la siguiente forma:

$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial t} + U_k \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_k} = -\tau_{ik} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} - \tau_{jk} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \epsilon_{ij} - \Pi_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \nu \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_k} + C_{ijk} \right]$$

donde:

$$\Pi_{ij} = \overline{p' \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right)}$$

$$\epsilon_{ij} = 2\mu \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k}}$$

$$C_{ijk} = \overline{\rho u'_i u'_j u'_k} + \overline{p' u'_i} \delta_{jk} + \overline{p' u'_j} \delta_{ik}.$$

## 2.8 Modelos de dos ecuaciones para la turbulencia

Los modelos de turbulencia basados en la ecuación de la energía cinética turbulenta se han convertido en la base de la investigación moderna sobre la turbulencia, gracias en gran manera al desarrollo en el poder computacional desde los años 1960's. Estos modelos recaen en la aproximación de Boussinesq, los modelos de dos ecuaciones proveen una ecuación para la longitud de escala turbulenta o su equivalente para de esta forma tener un enfoque más completo.

### 2.8.1 Aproximación de Boussinesq.

Los modelos que utilizan las simplificaciones de las ecuaciones promediadas de Reynolds necesitan algunas aproximaciones para determinar los esfuerzos de Reynolds. La ecuación conocida como la aproximación de Boussinesq (o hipótesis) describe una simple relación entre los esfuerzos turbulentos y la razón de deformación. Dado el tensor de razón de deformación  $S_{ij}$ , donde

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right).$$

La fórmula dada por la aproximación para el tensor de esfuerzos de Reynolds es:

$$\tau_{ij} = 2\mu_T S_{ij} - \frac{2}{3}\rho k \delta_{ij}$$

el término que se compone con la delta de Kronecker (isotrópico) es necesario para satisfacer la condición  $-\overline{\rho u'_i u'_i} = 2\rho k$  para la contracción de los subíndices, es decir para  $i = j$ .

La viscosidad turbulenta es al parecer una función del flujo  $\mu_T = \mu_T(\mathbf{x}, t)$ , opuesto a la viscosidad molecular que es una propiedad física intrínseca del fluido. Un gran desafío es la derivación de una formulación para  $\mu_T$ , los modelos de turbulencia que se mostrarán a continuación están basados en el modelo de la viscosidad turbulenta. La ventaja que ofrece utilizar esta aproximación es el relativo bajo costo computacional asociado con la solución de la viscosidad turbulenta, mientras que una desventaja es que esta hipótesis asume que  $\mu_T$  es una cantidad escalar isotrópica, lo cual no es estrictamente cierta.

### 2.8.2 Ecuación de la energía turbulenta.

En 1945 Prandtl postuló una magnitud de velocidad característica para la turbulencia. Escogió la energía cinética (por unidad de masa) de las fluctuaciones turbulentas,  $k$ , como la base para su magnitud de velocidad.

$$k = \frac{1}{2}\overline{u'_i u'_i} = \frac{1}{2}(\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2})$$

$k$  es comúnmente referida como la energía cinética turbulenta o energía cinética turbulenta específica (por unidad de masa). El tensor de esfuerzos de Reynolds se relaciona con  $k$  de la siguiente forma, (basado en la aproximación de Boussinesq):

$$\tau_{ii} = 2\rho k$$

haciendo uso de la ecuación del esfuerzo de Reynolds se obtiene la ecuación de transporte para la energía cinética turbulenta.

$$\rho \frac{\partial k}{\partial t} + \rho U_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \tau_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \rho \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu \frac{\partial k}{\partial x_j} - \frac{1}{2} \overline{\rho u'_i u'_i u'_j} - \overline{p' u'_j} \right]$$

donde  $\varepsilon$  es la disipación por unidad de masa definida por:

$$\varepsilon = \nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k}$$

Para la ecuación de la energía cinética cada término representa un proceso físico que ocurre conforme la turbulencia avanza a través del fluido.

Los primeros dos términos, el término temporal y el de convección, que son la derivada euleriana de  $k$ , representan la razón de cambio de  $k$  que sigue a una partícula de fluido. El primer término del lado derecho, conocido como producción, representa la razón a la que la energía cinética

es transferida del flujo principal a la turbulencia. La disipación es la razón a la cual la energía cinética es convertida en energía interna térmica. El término  $\mu \frac{\partial k}{\partial x_j}$ , es llamado difusión molecular, y representa la difusión de la energía turbulenta causada por el transporte molecular natural del fluido. Nos referimos al término que correlaciona la triple velocidad como el transporte turbulento, y se refiere a la razón a la que la energía turbulenta es transportada a través del fluido debido a las fluctuaciones turbulentas. El último término es llamado la difusión de presión, otro término de transporte de turbulencia que correlaciona las fluctuaciones de presión y velocidad.

Para la ecuación de la energía cinética turbulenta se tiene que los términos temporales, convectivos y difusión molecular son exactos, mientras que la producción, la disipación, el transporte turbulento y la difusión de presión envuelven correlaciones extras.

Aproximación del transporte turbulento y la difusión de presión,

$$\frac{1}{2} \overline{\rho u'_i u'_i u'_j} + \overline{p' u'_j} = - \frac{\mu_T}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j}$$

de esta forma la ecuación de la energía cinética turbulenta queda como:

$$\rho \frac{\partial k}{\partial t} + \rho U_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \tau_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \rho \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right]$$

donde  $\tau_{ij}$  está definido como:

$$\tau_{ij} = 2\mu_T S_{ij} - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij}.$$

### 2.8.3 Modelo $k - \varepsilon$ estándar.

En la formulación del modelo  $k - \varepsilon$ , la idea es derivar una ecuación exacta para  $\varepsilon$  y encontrar las aproximaciones correctas para cerrar el comportamiento de la ecuación gobernante. La ecuación exacta para  $\varepsilon$  es derivada a partir de la multiplicación con un operador de la forma de la ecuación de Navier – Stokes. A partir de la derivación de la ecuación exacta para  $\varepsilon$  se obtienen términos conocidos como la producción de disipación, la disipación de la disipación y la suma de la difusión molecular de la disipación con el transporte turbulento de la disipación (Launder & Spalding, 1972).

Para el caso de flujo incompresible la ecuación de la energía cinética turbulenta queda de la forma:

$$\rho \frac{\partial k}{\partial t} + \rho U_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \tau_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \rho \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right].$$



Análogamente Ansys Fluent calcula la energía cinética turbulenta con la siguiente ecuación (ANSYS, 2019):

$$\rho \frac{\partial}{\partial t}(k) + \rho \frac{\partial}{\partial X_i}(ku_i) = \frac{\partial}{\partial X_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial X_j} \right] + G_k + G_b - \rho \varepsilon$$

donde  $G_k$  es la producción de la energía cinética turbulenta y se define como:

$$G_k = \tau_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j}$$

donde  $G_b$  es el término que relaciona los efectos de flotabilidad cuando existen gradientes de temperatura y la gravedad está presente en el modelo.

$$G_b = \beta g_i \frac{\mu_t}{Pr_t} \frac{\partial T}{\partial x_i}$$

donde  $Pr_t$  es el número de Prandtl turbulento para la energía y  $g_i$  es la componente de la gravedad en la dirección de vector  $i^{ésimo}$ . El coeficiente de expansión térmica,  $\beta$ , está definido como:  $\beta = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p$ .

La ecuación de transporte para la disipación que formularon Launder y Spalding es de la forma:

$$\rho \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon) + \rho \frac{\partial}{\partial X_i}(\varepsilon u_i) = \frac{\partial}{\partial X_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial X_j} \right] + \underbrace{C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} G_k}_{(a)} - \underbrace{C_{2\varepsilon} \rho \frac{\varepsilon^2}{k}}_{(b)}$$

el término de producción (a) está asociado con el estiramiento de vórtices y el término (b) es comúnmente llamado de destrucción.

Viscosidad Turbulenta o de Eddy:

$$\mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$$

Constantes

$$C_{1\varepsilon} = 1.44, C_{2\varepsilon} = 1.92, C_\mu = 0.09, \sigma_k = 1.0, \sigma_\varepsilon = 1.3.$$

#### 2.8.4 Modelo $k - \varepsilon$ RNG.

EL modelo  $k - \varepsilon$  RNG fue derivado con el uso de la teoría llamada “grupo de renormalización” (Orszag, y otros, 1993). Es similar a la forma del modelo  $k - \varepsilon$  estándar, incluyendo los siguientes refinamientos:

- El modelo RNG tienen términos adicionales en la ecuación de disipación que mejoran la exactitud en los flujos de rápida deformación.
- Incluye los efectos de remolinos en la turbulencia.

- Provee de una fórmula analítica para los números turbulentos de Prandtl, mientras que el modelo estándar usa valores constantes definidos por el usuario.
- Mientras que el modelo estándar es para altos números de Reynolds, la teoría RNG provee de una fórmula diferencial analítica para la viscosidad efectiva que considera los efectos de números bajos de Reynolds.

Para el modelo  $k - \varepsilon$  RNG la ecuación de la energía cinética turbulenta es:

$$\rho \frac{\partial}{\partial t}(k) + \rho \frac{\partial}{\partial X_i}(ku_i) = \frac{\partial}{\partial X_j} \left[ \alpha_k \mu_{eff} \frac{\partial k}{\partial X_j} \right] + G_k + G_b - \rho \varepsilon.$$

Y la ecuación para la disipación es:

$$\rho \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon) + \rho \frac{\partial}{\partial X_i}(\varepsilon u_i) = \frac{\partial}{\partial X_j} \left[ \alpha_\varepsilon \mu_{eff} \frac{\partial \varepsilon}{\partial X_j} \right] + C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} (G_k + C_{3\varepsilon} G_b) - C_{2\varepsilon} \rho \frac{\varepsilon^2}{k} - R_\varepsilon$$

$G_k$  y  $G_b$ , representan la generación de energía cinética turbulenta debido a los gradientes principales de velocidad y la generación de energía cinética turbulenta debido a la flotación, respectivamente. Ambos términos se definen de la misma forma que para el modelo estándar.

Viscosidad efectiva:

$$\hat{\nu} = \frac{\mu_{eff}}{\mu}.$$

En la teoría RNG la viscosidad turbulenta deriva de la ecuación diferencial:

$$d \left( \frac{\rho^2 k}{\sqrt{\varepsilon \mu}} \right) = 1.72 \frac{\hat{\nu}}{\sqrt{\hat{\nu}^3 - 1 + C_v}} d\hat{\nu}$$

$$C_v \approx 100.$$

El término  $R_\varepsilon$  es el responsable de capturar los efectos de las grandes deformaciones en las zonas donde existe el bajo número de Reynolds, dando como resultado una disminución considerable de la viscosidad turbulenta en comparación con el modelo estándar,

$$R_\varepsilon = \frac{C_\mu \rho \eta^3 \left(1 - \frac{\eta}{\eta_0}\right) \varepsilon^2}{1 + \beta \eta^3} \frac{1}{k}$$

donde  $\eta = \frac{S k}{\varepsilon}$ ,  $\eta_0 = 4.38$ ,  $\beta = 0.012$ .

Números inversos efectivos de Prandtl:

$$\left| \frac{\alpha - 1.3929}{\alpha_0 - 1.3929} \right|^{0.6321} \left| \frac{\alpha + 2.3929}{\alpha_0 + 2.3929} \right|^{0.3679} = \frac{\mu_{mol}}{\mu_{eff}}$$

donde  $\alpha_0 = 1$ . En el límite de número alto de Reynolds ( $\frac{\mu_{mol}}{\mu_{eff}} \ll 1$ ),  $\alpha_k = \alpha_\varepsilon \approx 1.393$ .

Constantes

$$C_{1\varepsilon} = 1.42, C_{2\varepsilon} = 1.68.$$

### 2.8.5 Modelo $k - \varepsilon$ Realizable

Para este modelo la ecuación de la energía cinética turbulenta permanece idéntica a la del modelo estándar, mientras que la ecuación de la disipación viene dada de la siguiente forma:

$$\rho \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon) + \rho \frac{\partial}{\partial X_j}(\varepsilon u_j) = \frac{\partial}{\partial X_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial X_j} \right] + \rho C_{1\varepsilon} S \varepsilon - \rho C_{2\varepsilon} \frac{\varepsilon^2}{k + \sqrt{\nu \varepsilon}} - C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} C_{3\varepsilon} G_b$$

donde  $C_1 = \max \left[ 0.43, \frac{\eta}{\eta+5} \right]$ ,  $\eta = S \frac{k}{\varepsilon}$ ,  $S = \sqrt{2 S_{ij} S_{ij}}$ , (Shih, Liou, Shabbir, Yang, & Zhu, 1995).

Una notable característica de este modelo es que el término de producción para  $\varepsilon$  no considera la producción de  $k$  ( $G_k$ ) por lo que se considera que representa de una mejor manera el espectro de transferencia de energía. Otra característica que mencionar es que en el término de destrucción (el tercer término de la derecha) no tiene ninguna singularidad, incluso si  $k$  se vuelve cero.

Viscosidad Turbulenta o de Eddy:

$$\mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}.$$

La diferencia entre el modelo realizable y los modelos estándar y RNG es que  $C_\mu$  no es constante, y es calculada de la siguiente forma:

$$C_\mu = \frac{1}{A_0 + A_s \frac{k U^*}{\varepsilon}}$$

donde

$$U^* \equiv \sqrt{S_{ij} S_{ij}}.$$

Constantes

$$A_0 = 4.04, A_s = \sqrt{6} \cos \varphi$$

$$\varphi = \frac{1}{3} \cos^{-1}(\sqrt{6} W), W = \frac{S_{ij}S_{jk}S_{ki}}{\tilde{S}^3}, \tilde{S} = \sqrt{S_{ij}S_{ij}}, S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)$$

$$C_{1\varepsilon} = 1.44, C_2 = 1.9, \sigma_k = 1.0, \sigma_\varepsilon = 1.2.$$

### 2.8.6 Modelo $k - \omega$ estándar.

En 1942 Kolmogorov propuso el primer modelo de turbulencia de dos ecuaciones (Kolmogorov, 1942). Kolmogorov escogió la energía cinética turbulenta como uno de sus parámetros y modeló su comportamiento como lo hizo Prandtl, su segundo parámetro fue la disipación de energía cinética turbulenta por unidad de volumen y tiempo (disipación específica). En su formulación del modelo  $k - \omega$ ,  $\omega$  debe satisfacer una ecuación diferencial similar a la ecuación para  $k$ .

Para el caso de flujo incompresible y estacionario la ecuación de la energía cinética turbulenta queda de la forma:

$$\rho \frac{\partial}{\partial t}(k) + \rho \frac{\partial}{\partial X_i}(ku_i) = \frac{\partial}{\partial X_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial X_j} \right] + G_k - Y_k$$

donde la disipación de  $k$ ,  $Y_k$  se define cómo:

$$Y_k = \rho \beta \omega k$$

y  $G_k$  es la producción de la energía cinética turbulenta, dada por la relación:

$$G_k = \tau_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j}.$$

La ecuación de transporte para la disipación específica es de la forma:

$$\rho \frac{\partial}{\partial t}(\omega) + \rho \frac{\partial}{\partial X_i}(\omega u_i) = \frac{\partial}{\partial X_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\omega} \right) \frac{\partial \omega}{\partial X_j} \right] + G_\omega - Y_\omega$$

donde la producción de  $\omega$  está dada por:

$$G_\omega = \frac{\alpha \omega}{k} \tau_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j}$$

y la disipación de  $\omega$ ,  $Y_\omega$  se define como:

$$Y_\omega = \rho \beta \omega^2.$$

Viscosidad Turbulenta o de Eddy:

$$\mu_t = \alpha^* \rho \frac{k}{\omega}$$

el coeficiente  $\alpha^*$  amortigua la viscosidad turbulenta causando una corrección al número bajo de Reynolds. Está dado por:

$$\alpha^* = \alpha_\infty \left( \frac{\alpha_0 + \frac{Re_t}{R_k}}{1 + \frac{Re_t}{R_k}} \right)$$

donde:

$$Re_t = \frac{\rho k}{\mu \omega}$$

$$R_k = 6$$

$$\alpha_0 = 0.024$$

para un número alto de Reynolds  $\alpha^* = \alpha_\infty = 1$ .

ANSYS Fluent calcula las variables  $\alpha$  y  $\beta$  de la siguiente forma:

$$\alpha = \frac{\alpha_\infty}{\alpha^*} \left( \frac{\alpha_0 + \frac{Re_t}{R_\omega}}{1 + \frac{Re_t}{R_\omega}} \right)$$

donde  $R_\omega = 2.95$  y  $\alpha_\infty = 0.52$ .  $\alpha^*$  y  $Re_t$  fueron descritos anteriormente.

$$\beta = \beta_\infty \left( \frac{\frac{4}{15} + \left( \frac{Re_t}{R_\beta} \right)^4}{1 + \left( \frac{Re_t}{R_\beta} \right)^4} \right)$$

donde  $R_\beta = 8$  y  $\beta_\infty = 0.09$ .

### 2.8.7 Modelo transporte del esfuerzo cortante (SST) $k - \omega$ .

Menter propuso un modelo basado en la combinación del modelo  $k - \omega$  estándar cerca de la pared y un modelo  $k - \varepsilon$  lejano a la pared, este último transformado en dos ecuaciones basadas en  $k$  y  $\omega$  (Menter, 1994). El modelo  $k - \omega$  estándar y el modelo  $k - \varepsilon$  transformado son ambos multiplicados por la función cruzada para posteriormente ser sumados. La función que combina estos dos modelos está diseñada para ser uno en la zona cercana a la pared, donde activa el modelo  $k - \omega$  estándar, y cero en la zona lejana a la superficie, donde activa el modelo  $k - \varepsilon$  transformado.

Las ecuaciones de transporte para el modelo SST son:

$$\rho \frac{\partial}{\partial t}(k) + \rho \frac{\partial}{\partial X_i}(ku_i) = \frac{\partial}{\partial X_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial X_j} \right] + G_k - Y_k$$

$$\rho \frac{\partial}{\partial t}(\omega) + \rho \frac{\partial}{\partial X_j}(\omega u_j) = \frac{\partial}{\partial X_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\omega} \right) \frac{\partial \omega}{\partial X_j} \right] + G_\omega - Y_\omega + D_\omega$$

donde  $G_k$  es la producción de  $k$  y está definido de la misma forma que en modelo estándar.

$G_\omega$  es la producción de  $\omega$  y está definido como:

$$G_\omega = \frac{\alpha \alpha^*}{v_t} G_k$$

$\alpha$  está definido de la misma forma que en el modelo estándar, a diferencia del modelo estándar en el modelo SST  $\alpha_\infty$  no es constante y está definido como:

$$\alpha_\infty = F_1 \left( \frac{3319}{6000} \right) + (1 - F_1)(0.44)$$

$Y_k$  es la disipación de  $k$  y está definido como:

$$Y_k = \rho \beta k \omega$$

$Y_\omega$  es la disipación de  $\omega$  y está definido como:

$$Y_\omega = \rho \beta \omega^2.$$

Para que los modelos  $k - \omega$  y  $k - \varepsilon$  puedan ser correctamente combinados es necesario introducir un término en la ecuación de  $\omega$  conocido como el término de difusión cruzado, definido de la siguiente forma:

$$D_\omega = 2(1 + F_1) \rho \frac{1}{\omega \sigma_{\omega,2}} \frac{\partial k}{\partial X_j} \frac{\partial \omega}{\partial X_j}$$

los números de Prandtl para  $k$  y  $\omega$  están definidos por:

$$\sigma_k = \frac{1}{\frac{F_1}{\sigma_{k,1}} + (1 - F_1)/\sigma_{k,2}}$$

$$\sigma_\omega = \frac{1}{\frac{F_1}{\sigma_{\omega,1}} + (1 - F_1)/\sigma_{\omega,2}}$$

la función  $F_1$  está dada por:

$$F_1 = \tanh(\phi_1^4)$$
$$\phi_1 = \min \left[ \max \left( \frac{\sqrt{k}}{0.09\omega y}, \frac{500\mu}{\rho y^2 \omega} \right), \frac{4\rho k}{\sigma_{\omega,2} D_\omega^+ y^2} \right]$$
$$D_\omega^+ = \max \left[ 2\rho \frac{1}{\sigma_{\omega,2}} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}, 10^{-10} \right].$$

Viscosidad Turbulenta o de Eddy

$$\mu_t = \frac{\rho k}{\omega} \frac{1}{\max \left[ \frac{1}{\alpha^*}, \frac{SF_2}{a_1 \omega} \right]}$$

la función  $F_2$  está dada por:

$$F_2 = \tanh(\phi_2^2)$$
$$\phi_2 = \max \left[ 2 \frac{\sqrt{k}}{0.09\omega y}, \frac{500\mu}{\rho y^2 \omega} \right].$$

Constantes

$$\sigma_{k,1} = 1.176, \sigma_{\omega,1} = 2.0, \sigma_{k,2} = 1.0, \sigma_{\omega,2} = 1.168$$
$$\alpha_1 = 0.31.$$





### 3. PLANTEAMIENTO Y SOLUCIÓN

#### 3.1 Método de volumen finito

El método de volúmenes finitos usa las ecuaciones gobernantes en su forma integral, emplea una discretización espacial para después discretizar cada una de las ecuaciones en cada una de las celdas del dominio computacional. El dominio computacional es subdividido en un número finito de volúmenes de control contiguos. Las variables son calculadas en el centroide de cada uno de los volúmenes de control. Para expresar el valor de las variables en la superficie del volumen de control en términos del valor en el centro se usa la interpolación.

Debido a que el método de volumen finito trabaja con volúmenes de control y no con las intersecciones en los puntos de la malla, tiene la capacidad de adaptarse a casi cualquier malla. Una importante característica de este método es que se puede utilizar una malla del tipo “elemento finito”, donde esta malla puede estar conformada por la combinación de triángulos y cuadriláteros en el caso de dos dimensiones, y tetraedros y hexaedros en tres dimensiones.

La base del método de volumen finito es la integración de volumen de control. En un volumen de control, el área de la superficie frontera de un elemento está directamente ligada a la discretización de primer o segundo orden de la derivación de la variable. Así, las áreas superficiales en la dirección normal a las superficies del volumen son resueltas con respecto a las direcciones en el sistema coordenado correspondiente (Tu, Yeoh, & Liu, 2008).

##### 3.1.1 Discretización y Solución

ANSYS Fluent usa una técnica basada en volúmenes de control para convertir una ecuación escalar general de transporte en una ecuación algebraica que pueda ser resuelta numéricamente. Esta técnica consiste en integrar la ecuación de transporte en cada volumen de control, produciendo una ecuación discreta que exprese la ley de conservación en la base de un volumen de control (ANSYS, 2019).

Tomando como referencia la ecuación de transporte para la cantidad escalar  $\varphi$ .

$$\int_v \frac{\partial \rho \varphi}{\partial t} dV + \oint \rho \varphi \bar{v} \cdot d\bar{A} = \oint \Gamma_\varphi \nabla \varphi \cdot d\bar{A} + \int_v S_\varphi dV$$

Donde:

$\rho = \text{densidad}$

$\bar{v} = \text{vector de velocidad}$

$\bar{A} = \text{vector de área}$

$\Gamma_\varphi = \text{coeficiente de difusión para } \varphi$

$\nabla \varphi = \text{gradiente de } \varphi$

$S_\varphi = \text{fuente de } \varphi \text{ por unidad de volumen}$

La ecuación es aplicada en cada volumen de control o celda en el dominio computacional. La discretización de la ecuación escalar de transporte contiene la variable escalar desconocida  $\varphi$  en el centro de la celda, así como el valor desconocido en las celdas vecinas. Esta ecuación es, en general, no lineal con respecto a estas variables. Para dar solución a estas ecuaciones en cada una de las celdas de la malla se aplica una linealización, dando como resultado un conjunto de ecuaciones algebraicas con una matriz de coeficientes dispersa. ANSYS Fluent resuelve este sistema lineal usando un solucionador de ecuaciones lineales implícito (Gauss – Seidel) en conjunto con un método algebraico de multi – red (AMG).

### 3.1.1.1 Discretización espacial

ANSYS Fluent almacena los valores discretos del escalar  $\varphi$  en el centro de cada celda. Sin embargo, para los términos convectivos se requieren los valores en las caras y por lo tanto deben ser interpolados de los valores en el centro. Esto se logra usando los esquemas de contra – viento. Contra viento significa que el valor de  $\varphi$  en las caras es derivado de cantidades en las celdas que están en la dirección opuesta al flujo o en contra viento.

El esquema utilizado es el de segundo orden contra – viento, este esquema se utiliza cuando se requiere precisión de segundo orden, las cantidades en las caras de la celda son calculadas usando un enfoque de reconstrucción lineal multidimensional (Barth & Jespersen, 1989). En este enfoque, la precisión de alto orden es alcanzada en las caras de la celda a través de una expansión en series de Taylor de la solución en el centroide de la celda. Así, el valor de  $\varphi$  en la cara es calculado usando la siguiente expresión:

$$\varphi_f = \varphi + \nabla\varphi \cdot \bar{r}$$

Donde  $\varphi$  y  $\nabla\varphi$  son el valor en el centro de la celda y su gradiente en la celda adyacente en dirección opuesta al flujo, y  $\bar{r}$  es el vector de posición que va del centroide de la celda adyacente al centroide de la cara de la celda.

### 3.1.2 Solucionador basado en la presión.

El solucionador basado en la presión usa un algoritmo que pertenece a la familia de métodos conocidos como de proyección (Chorin, 1968). En el método de proyección, la restricción de conservación de masa (continuidad) del campo de velocidad se logra resolviendo una ecuación de presión (o corrección de presión). La ecuación de presión es derivada de las ecuaciones de continuidad y momentum de tal forma que el campo de velocidad, corregido por la presión, satisfaga a la continuidad. Dado que las ecuaciones gobernantes son no lineales y están acopladas unas con otras, el proceso de solución está dado por iteraciones en el que el conjunto de ecuaciones es repetidamente resuelto hasta que se alcanza una convergencia.

Dentro de ANSYS Fluent dos algoritmos de solución basados en la presión están disponibles. El algoritmo segregado y el algoritmo acoplado, que se muestran en la Figura 3.1.

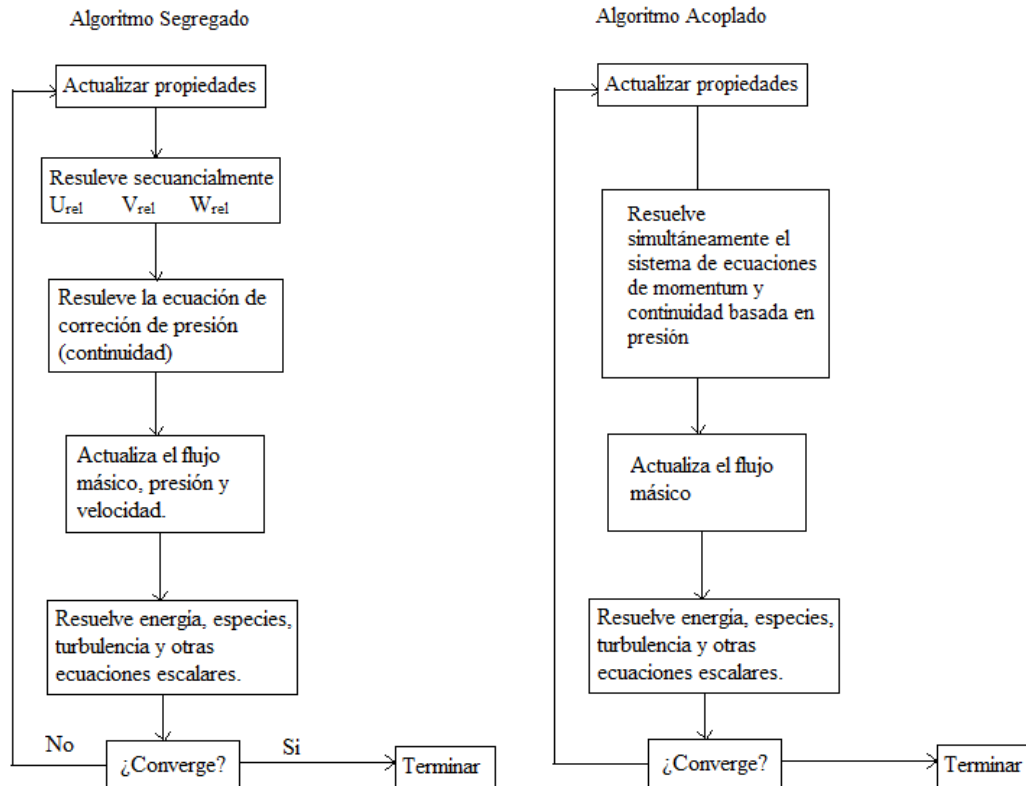


Figura 3.1 Algoritmos de solución basados en la presión (ANSYS, 2019).

### 3.1.2.1 Algoritmo Segregado

En el algoritmo segregado, las ecuaciones gobernantes individuales para cada una de las variables son resueltas una tras otra. Cada ecuación, mientras se está resolviendo, es desacoplada o segregada de las demás ecuaciones. El algoritmo segregado es eficiente en cuanto a memoria, dado que la discretización de cada ecuación es guardada en la memoria una a la vez. Sin embargo, la convergencia de la solución es relativamente lenta, debido a que las ecuaciones son resueltas de una manera desacoplada.

### 3.1.2.2 Algoritmo Acoplado

A diferencia del algoritmo segregado, este algoritmo de solución resuelve un sistema de ecuaciones acopladas abarcando la ecuación de momentum y la ecuación de continuidad basada en la presión. De esta forma, en el algoritmo acoplado, el paso 2 y 3 del algoritmo segregado son reemplazados por un único paso en donde el sistema acoplado de ecuaciones es resuelto.

Debido a que las ecuaciones de momentum y continuidad son resueltas de una manera estrechamente acoplada, la rapidez de convergencia de la solución se ve mejorada en comparación con el algoritmo segregado. Sin embargo, la cantidad de memoria necesitada incrementa de 1.5 a 2 veces dado que el sistema discreto de todas las ecuaciones de momentum y continuidad basada en presión deben ser almacenadas en la memoria cuando se resuelven los campos de velocidad y presión.

### 3.2 Descripción de casos de estudio

En la Figura 3.2 se muestra el modelo esquemático del dominio computacional y en Figura 3.3 el plano con las dimensiones usadas para la elaboración del modelo (Subrata & Pareesh, 2003). La geometría representa de una forma simplificada la región frontal de un automóvil, modelando así la zona del conductor y del pasajero tanto para el dominio del aire como del vidrio del parabrisas. De igual forma, el modelo es considerado simétrico con respecto a un plano paralelo a XY. La posición de la boquilla del chorro fue colocada en la superficie inferior y la inclinación de la superficie de impacto con respecto al plano XZ es de  $30^\circ$ . A continuación, se describen los casos de estudio que se simularon.

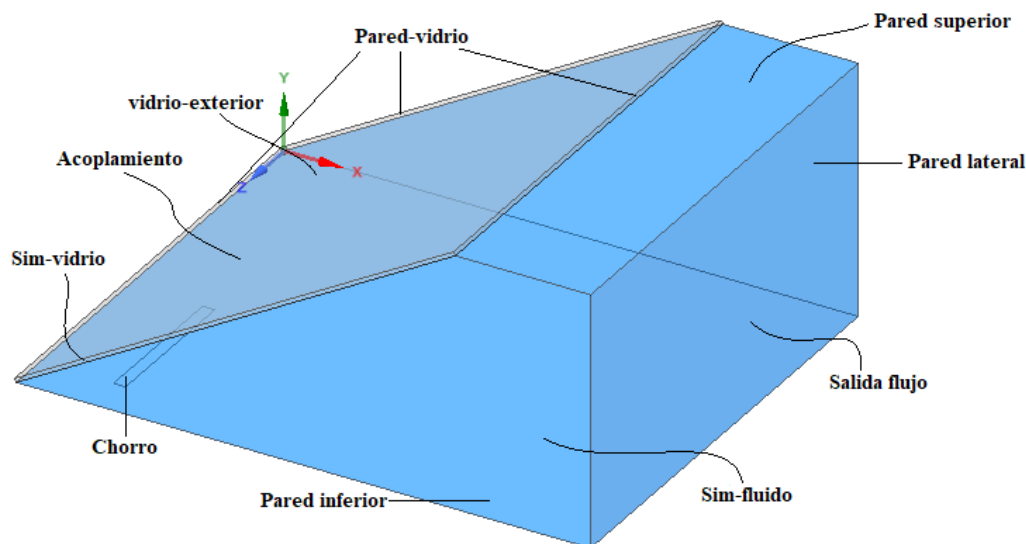


Figura 3.2 Modelo esquemático del dominio computacional

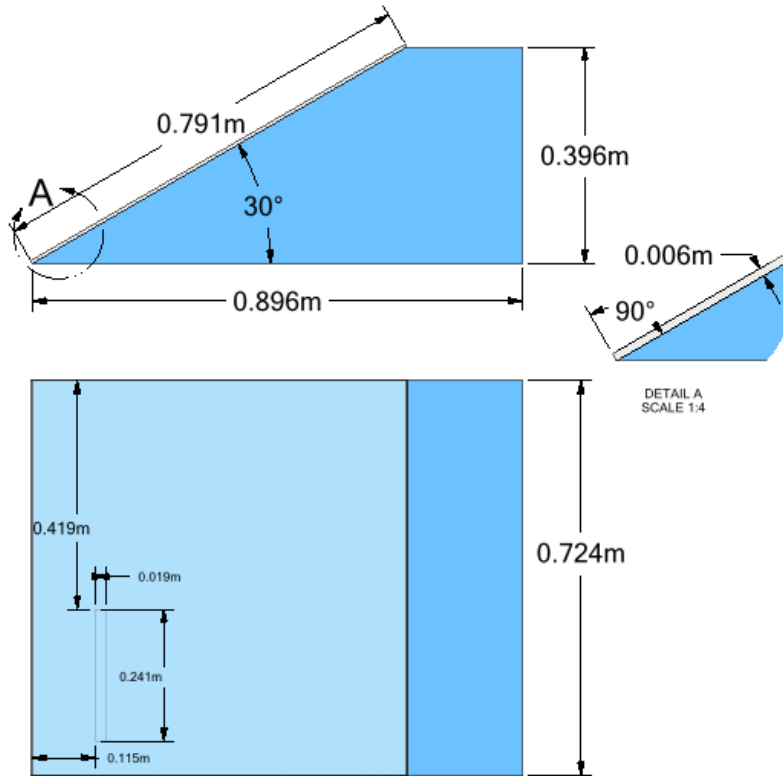


Figura 3.3 Plano dimensionado del dominio computacional

### 3.2.1 Caso 1.

Como primer caso se modeló geoméricamente un único dominio computacional que representa el volumen de control del aire dentro del automóvil.

En ANSYS Fluent una condición de frontera de tipo pared aplicada a una superficie por default tiene un espesor de cero. Sin embargo, para este caso se modeló virtualmente una capa de vidrio de 6 [mm] en la superficie de impacto, esto para obtener el efecto de resistencia térmica que ofrecería la delgada capa. Así, ANSYS Fluent resolverá una ecuación de conducción de calor en estado estacionario y en una dimensión. También nos referiremos al caso 1 como el caso simple.

La resistencia térmica de la pared es  $\Delta x/k$ , donde  $k$  es la conductividad del material y  $\Delta x$  es el espesor de la pared. De esta forma las condiciones de frontera térmicas se aplicaran virtualmente a la superficie que está separada del fluido por el espesor de la pared.

### 3.2.2 Caso 2.

Para un segundo caso de estudio se modelaron geoméricamente dos dominios computacionales, uno que representa el volumen de control del aire y el segundo que representa al parabrisas.

Esta representación geométrica que incluye a los dos dominios es más completa en comparación con el caso simple, en términos físicos se incluye el enfoque de transferencia de calor conjugado que permite tener una aproximación más real del fenómeno. De esta forma, ANSYS Fluent resolverá también para el dominio del sólido la ecuación de la energía y las condiciones de frontera se asignarán directamente en la superficie previamente modelada.

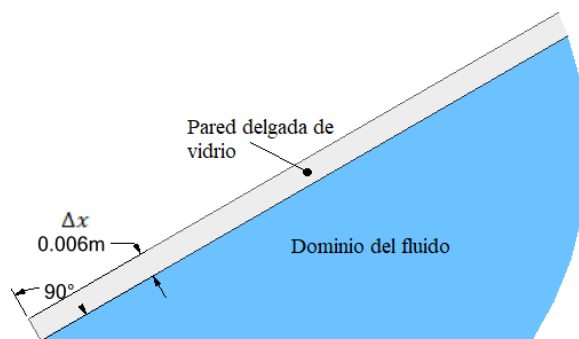


Figura 3.4 Esquema del dominio del fluido y del sólido

### 3.3 Arreglo para la validación de la simulación

#### 3.3.1 Discretización del dominio

Un paso de suma importancia en los análisis de CFD es la discretización espacial del dominio para poder aplicar la aproximación numérica de las ecuaciones gobernantes. Existen básicamente dos tipos de discretización geométrica para obtener un mallado.

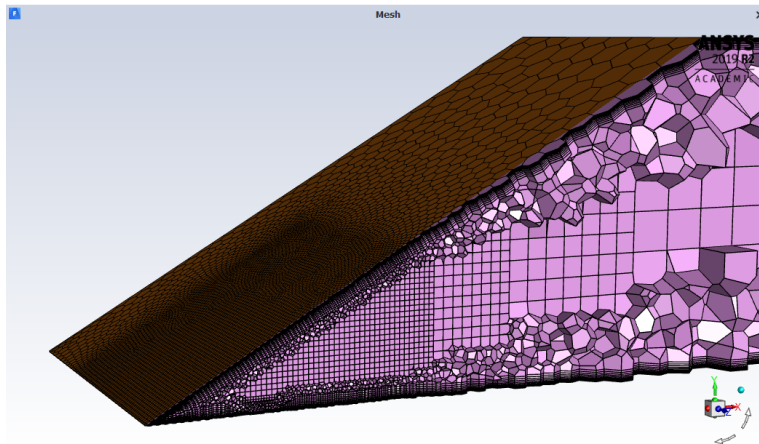
- *Mallados estructurados*: cada punto de la malla está inequívocamente identificado por los índices  $i, j, k$  en las coordenadas cartesianas. Las celdas de la malla son cuadriláteros en 2 – D y hexaedros en 3 – D.
- *Mallados no estructurados*: las celdas y los nodos de la malla no tienen un orden particular, es decir, las celdas o nodos cercanos no pueden identificarse directamente por sus índices.

El tiempo requerido por una computadora para generar un mallado no estructurado es mucho menor que el que requiere para uno estructurado. Aunque una desventaja es que requieren de más memoria que los mallados estructurados.

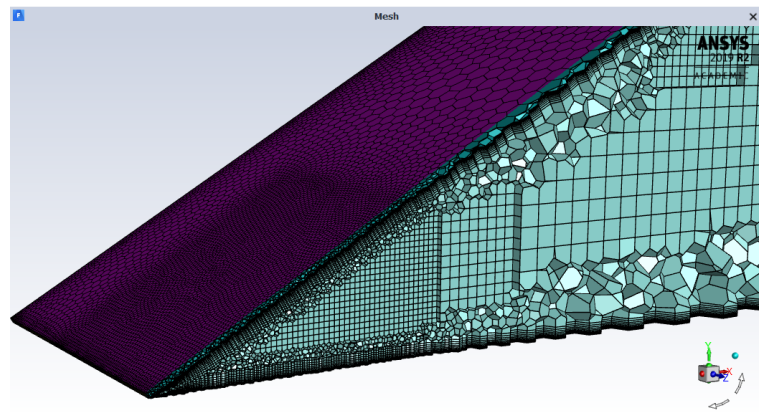
En sus recientes versiones ANSYS Fluent ha incorporado el “modo mallador” dentro de su aplicación, ofreciendo una herramienta más robusta para generar mallas no estructuradas y capaz de manejar mallas virtualmente ilimitadas en tamaño y complejidad.

Dentro del modo mallador, ANSYS Fluent ofrece al usuario flujos de trabajo guiados, los cuales están diseñados para generar de manera más sencilla una malla volumétrica. El flujo de trabajo para “Geometrías impermeables” es generalmente usado en modelos CAD que no requieren limpieza o modificaciones.

Las geometrías que se utilizaron tanto en el caso 1 y 2 fueron generadas con ayuda del modelador geométrico SpaceClaim, el modelo CAD es importado directamente a la aplicación de ANSYS Fluent donde con ayuda del modo mallador se generó una malla no estructurada como se muestra en la Figura 3.5 y la Figura 3.6. Un tema importante dentro de la generación del mallado es la generación de suficientes elementos en las zonas cercanas a una pared debido a la existencia de gradientes, de igual forma la calidad y el tipo de elemento juegan un papel muy importante. Debido a estos requerimientos, el mallado fue generado con capas de inflación en las zonas cercanas a la pared y los elementos utilizados fueron prismas, poliedros y hexaedros.



*Figura 3.5 Malla utilizada para el caso 1*



*Figura 3.6 Malla utilizada para el caso 2*

### 3.3.2 Validación de la malla

Como anteriormente se mencionaba, las regiones cercanas a la pared de impacto son de suma importancia en los estudios de chorros debido a que en la región de estancamiento se presentan los mayores gradientes para las variables de estudio. Un parámetro bastante relevante en fenómenos turbulentos es la longitud adimensional  $y^+$ , el cual está en función de la distancia que existe a la primera celda de la malla y por lo tanto resulta importante conocer su valor para establecer la correcta distancia. A pesar de que en un principio no es posible conocer la distancia a la primera celda, normalmente se propone un valor de  $y^+$  con base en los modelos de turbulencia que se vayan a usar y los aspectos físicos que se quieran capturar.

Para el modelo de turbulencia  $k - \omega SST$  el parámetro  $y^+$  debe aproximarse lo más posible a 1, para garantizar que los efectos en la subcapa viscosa sean adecuadamente capturados. La estimación de la distancia a la primera celda se realiza considerando el factor de fricción propuesto por Schlichting (Schlichting, 1960):

$$C_f = [2 \log_{10}(Re_x) - 0.65]^{-2.3} \quad Re_x \leq 10^9$$

Donde,  $Re_x = \frac{\rho U_\infty L}{\mu}$  es el no. de Reynolds basado en la boquilla del chorro.

$$y^+ = \frac{\rho U_\tau y}{\mu} \approx 1$$

Donde:

$$U_\tau = \sqrt{\frac{\tau_p}{\rho}}$$
$$\tau_p = \frac{C_f \rho U_\infty^2}{2}$$

$y$  – es la distancia a la primera celda

Despejando la ecuación para  $y$ , obtenemos un valor estimado para la distancia a la primera celda de  $y = 4 \times 10^{-2} \text{ mm}$ . De acuerdo con esta estimación se generaron 4 mallas para realizar el análisis de sensibilidad.

### 3.3.3 Condiciones de frontera

Si las ecuaciones de movimiento, el dominio computacional e inclusive la malla pueden ser los mismos para dos simulaciones diferentes, el tipo de flujo que se modela se determina mediante las condiciones de frontera impuestas. Las condiciones de frontera apropiadas se necesitan para obtener una solución correcta.

La condición de frontera más simple es la que se formula para una pared, la componente normal de la velocidad relativa con respecto a la superficie sólida se iguala a cero a lo largo de aquella cara en la cual se establece la condición, también debido a la condición de no deslizamiento se fija en cero la componente de la velocidad tangencial a una superficie sólida en reposo. Para



definir una condición de frontera en aquellas partes en las cuales entra o sale el fluido al dominio computacional, se puede recurrir a una velocidad de entrada en donde se especifica la velocidad del flujo entrante a lo largo de la cara de admisión y a un flujo libre a la salida donde no se especifican propiedades de flujo; al contrario, las propiedades de flujo como velocidad, cantidades de turbulencia y temperatura son forzadas a tener gradientes cero normales a la cara de flujo de salida. Las condiciones de frontera de simetría fuerza a los gradientes de la mayoría de las variables de campo de flujo en la dirección normal al plano de simetría se igualan a cero en el plano de simetría, aunque algunas variables se especifican como funciones pares y algunas como funciones impares en una condición de frontera de simetría (Cengel & Cimbala, 2018).

### 3.3.3.1 Condiciones de flujo.

Las condiciones de frontera que se aplicaron al modelo son las siguientes: velocidad constante en la boquilla del chorro basada en un  $Re = 12500$ , presión atmosférica a la salida del flujo, condiciones de no deslizamiento en las paredes y simetría. De esta manera, la distribución de fronteras en cada superficie queda de la siguiente manera

### 3.3.3.2 Condiciones térmicas.

Las condiciones de frontera que se aplicaron al modelo son las siguientes: temperatura constante en la boquilla del chorro, condición de convección en la pared externa del vidrio, acoplamiento térmico entre los dos dominios, condiciones adiabáticas en las paredes restantes y simetría.

Tabla 3.1 Condiciones de frontera para el caso 1

Frontera	Flujo	Térmico
Chorro	Perfil uniforme. $Re = 12500$	293K
Superficie inclinada	$U = 0$	273K, 35 W/m <sup>2</sup> K
Salida flujo	$\frac{\partial u}{\partial x} = 0; \frac{\partial v}{\partial x} = 0; \frac{\partial w}{\partial x} = 0$	$\frac{\partial T}{\partial x} = 0$
Sim-fluido	$w = 0; \sigma_\tau = 0$	$\left. \frac{\partial T}{\partial n} \right _{sym} = 0$
Pared inferior	$U = 0$	$\frac{\partial T}{\partial y} = 0$
Pared superior	$U = 0$	$\frac{\partial T}{\partial y} = 0$
Pared lateral	$U = 0$	$\frac{\partial T}{\partial z} = 0$

Tabla 3.2 Condiciones de frontera para el caso 2

Frontera	Flujo	Térmico
Chorro	Perfil uniforme. Re = 12500	293K
Vidrio-exterior	$U = 0$	273K, 35 W/m <sup>2</sup> K
Acoplamiento	$U = 0$	$k_s \left( \frac{\partial T_{sólido}}{\partial x} \right)_{interfaz}$ $= k_{eff} \left( \frac{\partial T_{fluido}}{\partial x} \right)_{interfaz}$
Salida flujo	$\frac{\partial u}{\partial x} = 0; \frac{\partial v}{\partial x} = 0; \frac{\partial w}{\partial x} = 0$	$\frac{\partial T}{\partial x} = 0$
Sim-vidrio	$U = 0; \sigma_\tau = 0$	$\frac{\partial T}{\partial n} \Big _{sym} = 0$
Sim-fluido	$w = 0; \sigma_\tau = 0$	$\frac{\partial T}{\partial n} \Big _{sym} = 0$
Pared inferior	$U = 0$	$\frac{\partial T}{\partial y} = 0$
Pared superior	$U = 0$	$\frac{\partial T}{\partial y} = 0$
Pared lateral	$U = 0$	$\frac{\partial T}{\partial z} = 0$
Pared-vidrio	$U = 0$	$\frac{\partial T}{\partial n} = 0$

### 3.3.4 Convergencia

La convergencia para un proceso numérico se obtiene cuando la solución de un sistema de ecuaciones algebraicas se aproxima a la solución verdadera de las ecuaciones diferenciales parciales que tienen las mismas condiciones iniciales y de frontera. ANSYS Fluent es un código de CFD que resuelve el sistema de ecuaciones algebraicas de una forma iterativa, como consecuencia para cada una de las ecuaciones discretizadas es necesario que alcancen un criterio de convergencia. La solución ha convergido cuando los residuales para cada una de las variables son más pequeñas que el criterio de convergencia. El criterio de convergencia utilizado por Subrata y Paresh (Subrata & Paresh, 2003) en sus simulaciones es de  $10^{-3}$  para las ecuaciones de continuidad, momentum y de turbulencia, y  $10^{-6}$  para la ecuación de la energía. Este criterio es el mismo que ANSYS Fluent trae por default y es el mismo que se tomó para las simulaciones que se realizaron en el presente trabajo.





## 4. RESULTADOS

### 4.1 Análisis de sensibilidad de malla

Actualmente el uso de herramientas de simulación ha sido democratizado y ha avanzado hasta el punto de analizar sistemas muy complejos, a pesar de esto, la interrogante de la precisión de los resultados permanece. El método de volumen finito aproxima la solución de ecuaciones matemáticas, en consecuencia, existen dependencias de discretización y errores de truncamiento y redondeo.

Para conocer dichas dependencias y errores existen diferentes métodos, uno de ellos es el análisis de malla que tiene como objetivo alcanzar la independencia de la solución con respecto a la malla. El tamaño mínimo óptimo de un elemento dentro de una malla al momento de iniciar un análisis es desconocido aunado a esto, la malla tiene que ser capaz de capturar las características del flujo. Debido a estos requerimientos lo más usual es escoger una primera malla burda y posteriormente realizar refinamientos, en este análisis se escogieron 4 mallas con diferentes grados de refinamiento.

Los modelos matemáticos también son de suma importancia debido a que se tiene que asegurar su capacidad de modelar el fenómeno físico que se estudia, con base en la investigación previa en el fenómeno de impacto de chorros, este análisis de sensibilidad se efectuó en el caso conjugado y con el modelo de turbulencia  $k - \omega SST$ .

En la Figura 4.1 se muestran las componentes  $u$ ,  $v$  y  $w$  de la velocidad. La máxima variación en los resultados para la componente  $u$  respecto al número de elementos para cada malla es de 10% para el valor máximo de la variable y prácticamente despreciable para valores de la posición mayores a 0.2 [m]. Para la componente  $v$  la variación entre mallas disminuye dejando pequeñas diferencias en las curvas. En el caso de la componente  $w$  las variaciones son más pronunciadas a lo largo de la posición, de hasta el doble para la malla de 3.244 millones de celdas, la magnitud de la velocidad en esta componente es menor en un orden de magnitud comparado con las componentes  $u$  y  $v$  por lo que sus fluctuaciones no afectan en gran medida a la magnitud de la velocidad.

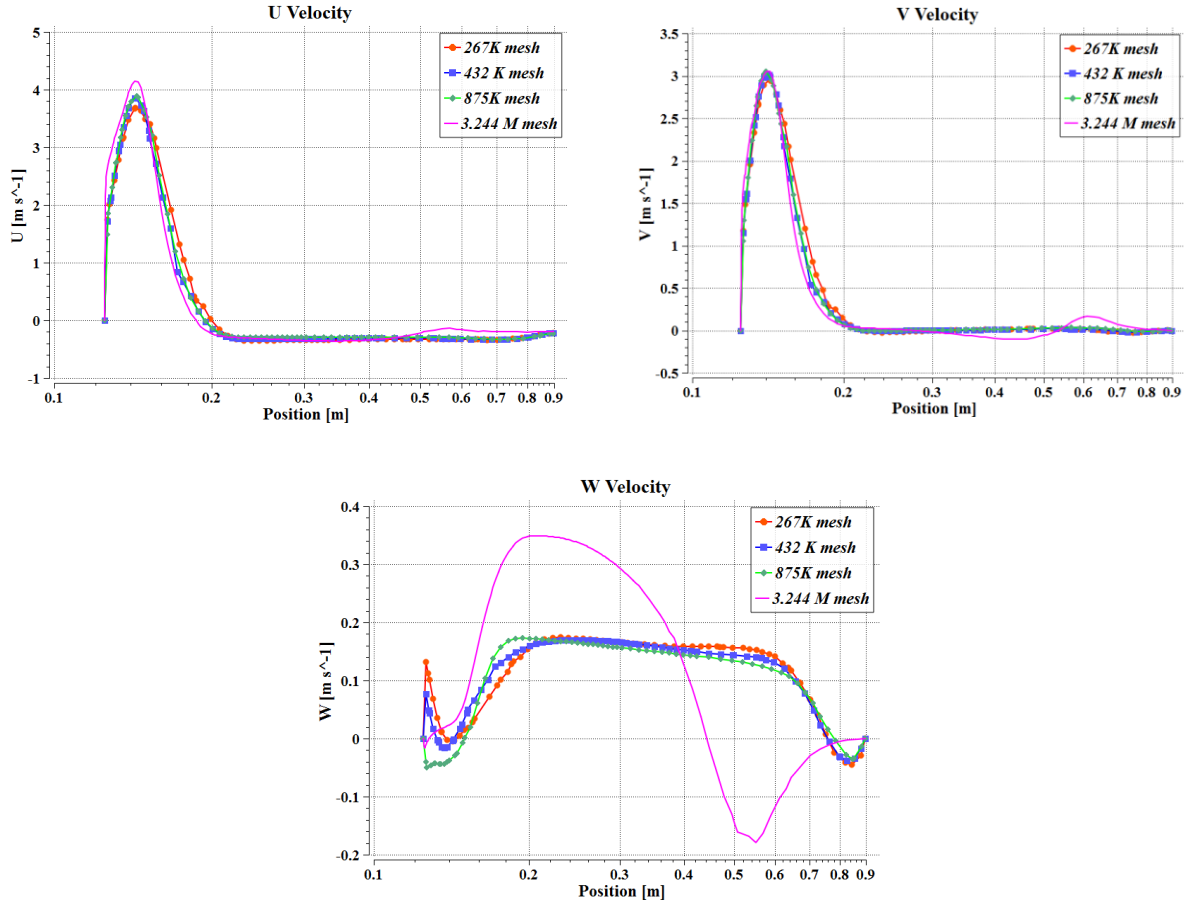


Figura 4.1 Perfiles de velocidad en las tres componentes a lo largo de la línea que es constante en Z y contiene al punto donde el chorro impacta a la superficie inclinada

#### 4.1.1 Análisis del parámetro $Y^+$

El parámetro adimensional  $Y^+$  está en función del esfuerzo cortante en la pared. Para observar el comportamiento del esfuerzo cortante se graficó  $Y^+$  a lo largo de la línea contenida en la superficie inclinada con una distancia en  $Z = 0.5395$  [m]. Es importante mencionar que debido a que  $Y^+$  también está en función de la distancia normal que existe hacia la primera celda, se obtuvieron resultados para  $Y^+$  variando esta distancia usando el modelo  $k-\omega$  SST.

##### Comparativa del parámetro $Y^+$

Caso 1. Malla usando 9 capas de inflación y 0.0008 [m] en la altura de la primera capa (432 mil elementos).

Caso 2. Malla aumentando las capas de inflación a 10 y 0.0005[m] en la altura de la primera capa (473 mil elementos).

Caso 3. Malla con 10 capas de inflación y 0.0001[m] en la altura de la primera capa (490 mil elementos).

Caso 4. Malla con 15 capas de inflación y 0.00004 [m] en la altura de la primera capa (3.244 Millones de elementos).

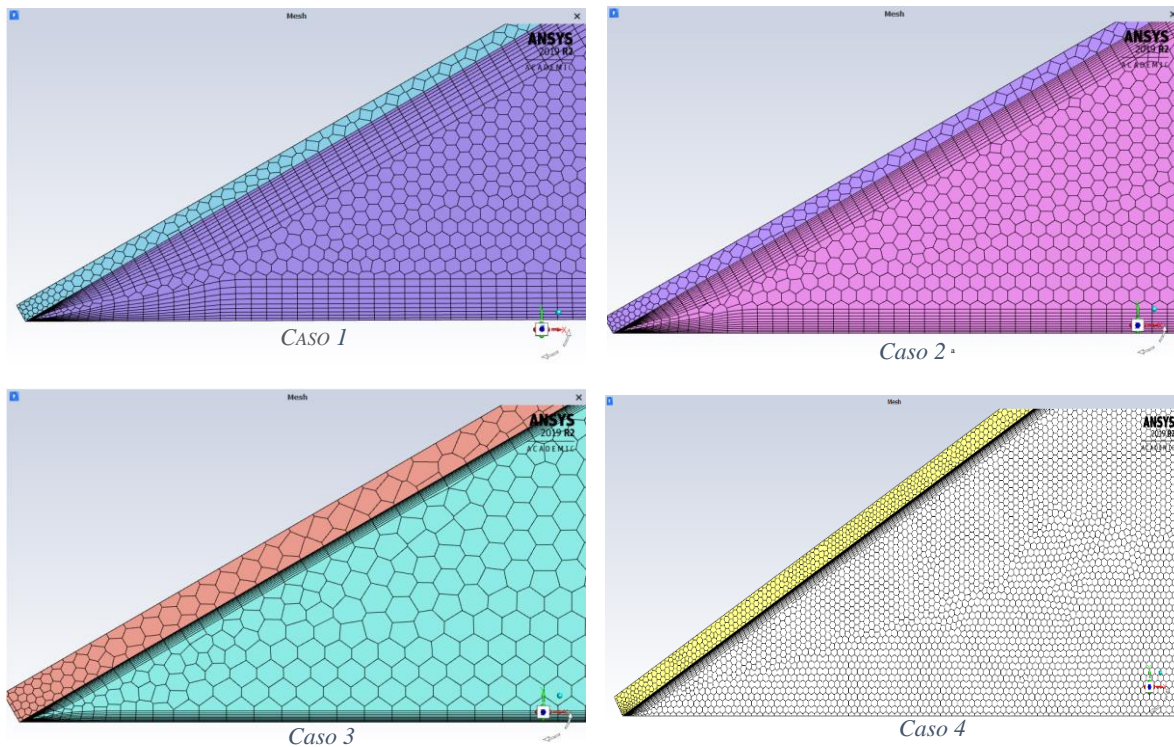


Figura 4.2 Mallas con diferente número de capas de inflación

En los resultados comparativos reportados en la Figura 4.3 se muestra la distribución de  $Y^+$  para cada uno de los cuatro casos antes mencionados, se observa que conforme disminuye la distancia a la primera celda el valor de  $Y^+$  también disminuye, es importante que su valor esté lo más cercano a 1 para asegurar que la región viscosa será capturada. La configuración de malla que se adapta a este criterio es el caso 4 donde verificamos que el valor de  $Y^+$  es aproximadamente 1 a lo largo de la posición.  $Y^+$  está en función del esfuerzo cortante por lo que esta gráfica nos permite conocer también su distribución. Observamos las fluctuaciones que presenta  $Y^+$  a lo largo de la posición, independientemente de la malla utilizada la región con el valor más bajo es en el punto de estancamiento debido a que existen mínimos flujos de corriente, mientras que el valor más alto se encuentra cerca de la zona de estancamiento debido a que ocurre una curvatura en las líneas de corriente e indica un máximo en la velocidad en la nueva dirección del flujo.

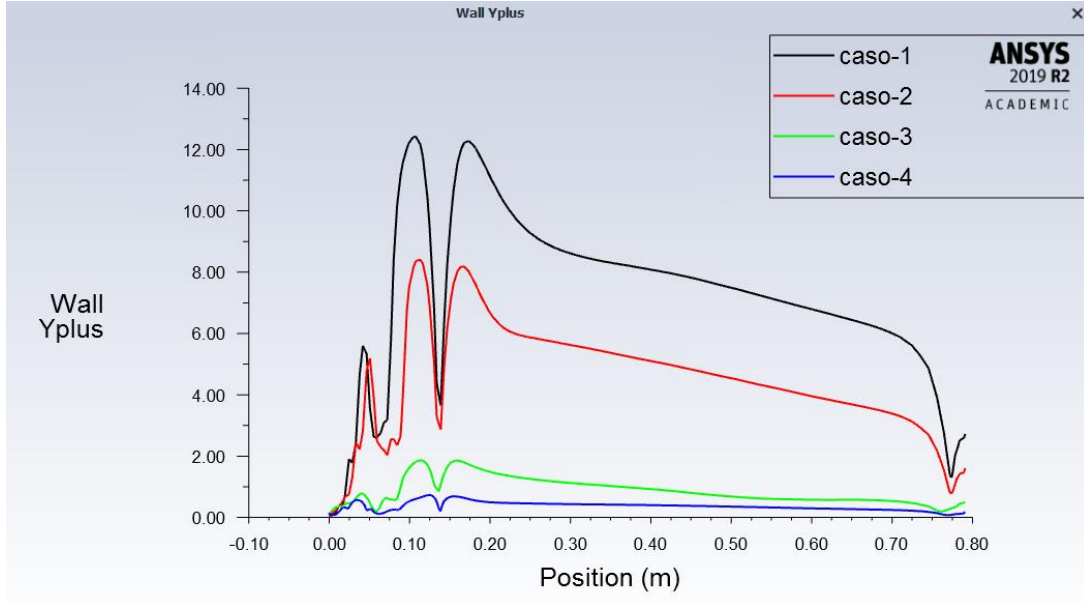


Figura 4.3 Distribución de  $Y^+$  para los casos 1, 2, 3 y 4

## 4.2 Efectos de la presión

Debido a la importancia de los gradientes de presión en el impacto de chorros, es crucial evaluar la capacidad de los modelos de turbulencia al momento de predecir dichos gradientes. De la misma forma, las diferencias que puedan existir entre los casos 1 y 2 pueden llegar a ser de vital importancia a la hora de elegir uno u otro. Los resultados de la distribución de presión afectarán al campo de velocidad y a la transferencia de calor.

Los contornos de presión graficados sobre la superficie de impacto tanto para el caso 1 como para el caso 2 se muestran en la Figura 4.4 y la Figura 4.5, respectivamente, se puede notar que la presión máxima se localiza en la región de estancamiento o de impacto del chorro, justo en las zonas cercanas a esta región se dan los máximos gradientes de presión. La presión decrece hacia la parte superior de la superficie y en la parte inferior se observa una disminución en una pequeña región para después volver a incrementar, esto debido principalmente a la existencia de zonas de recirculación en la parte inferior. Los contornos muestran cierta similitud al comparar los modelos de turbulencia para cada caso, con excepción del modelo  $k - \varepsilon$  Realizable, en el cual se pueden observar ciertas disminuciones de presión en pequeñas zonas alejadas a la región de estancamiento.

En la Figura 4.6 y la Figura 4.7 se muestran los gráficos comparativos de la distribución de presión a lo largo de la línea comprendida en la superficie de impacto y que pasa por el punto de estancamiento para diferentes modelos de turbulencia. La distribución de presión sigue el mismo comportamiento anteriormente mencionado desde el punto de estancamiento (posición = 1.4 [m]) y hacia los extremos. La variación de los resultados entre los modelos de turbulencia  $k - \varepsilon$  son despreciables, también los gradientes alrededor de la zona de estancamiento permanecen similares para los cuatro modelos de turbulencia, sin embargo, se puede observar que en el punto de



estancamiento y en las zonas de recirculación se tiene un valor más alto para el modelo  $k - \omega SST$ . Estas variaciones tendrán consecuencias directas en la velocidad que posteriormente se discutirán.

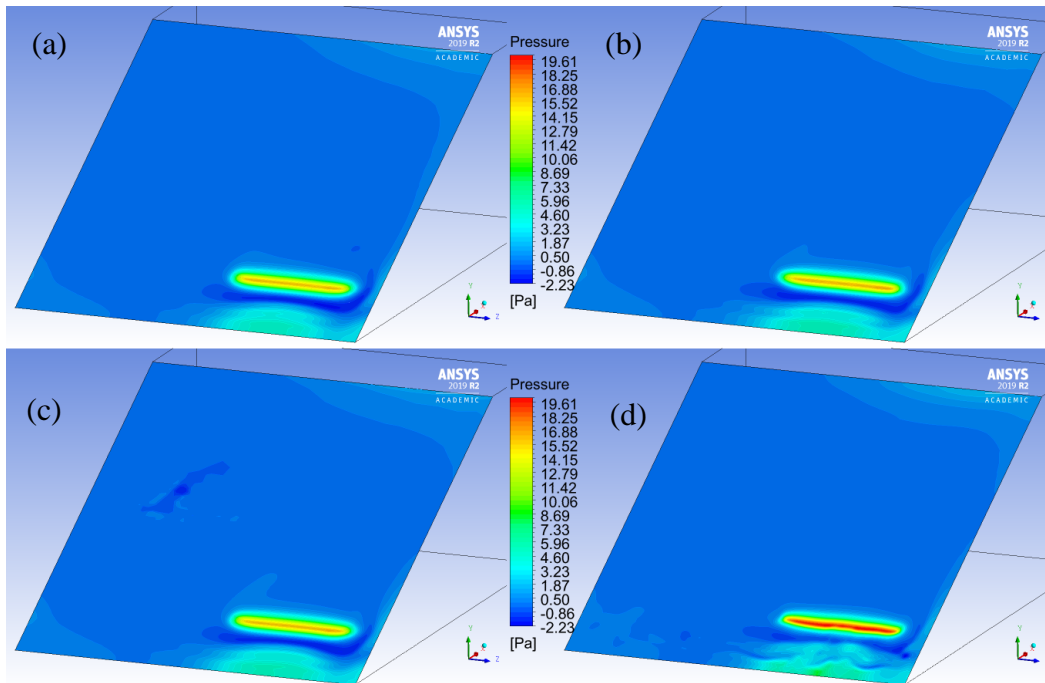


Figura 4.4 Contornos de presión para el caso simple con diferentes modelos de turbulencia; a)  $k - \epsilon$  Estándar, b)  $k - \epsilon$  RNG, c)  $k - \epsilon$  Realizable, d)  $k - \omega$  SST

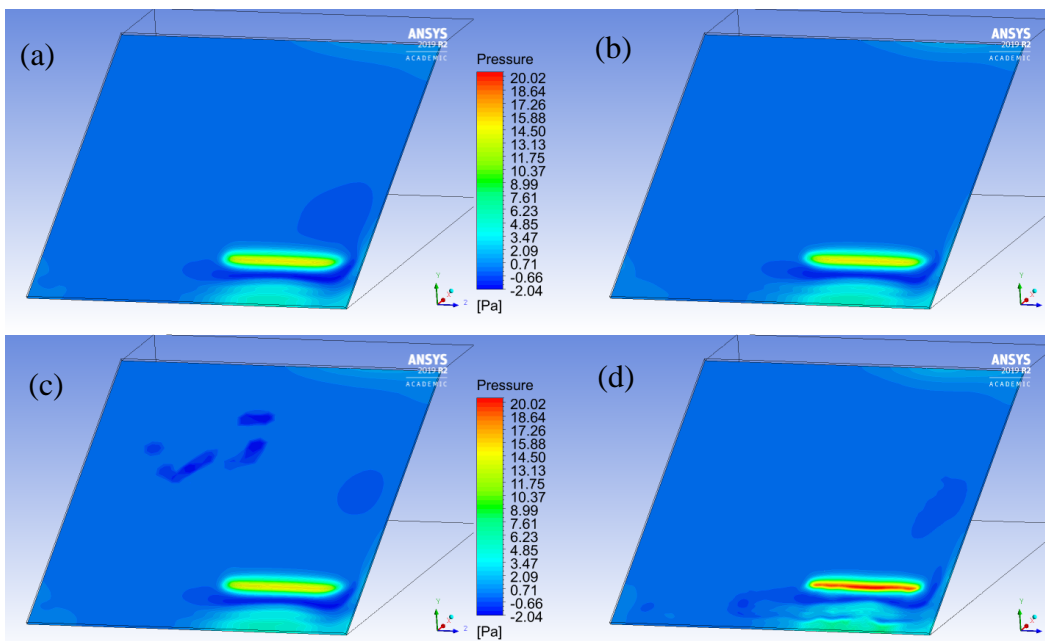


Figura 4.5 Contornos de presión para el caso conjugado con diferentes modelos de turbulencia; a)  $k - \epsilon$  Estándar, b)  $k - \epsilon$  RNG, c)  $k - \epsilon$  Realizable, d)  $k - \omega$  SST

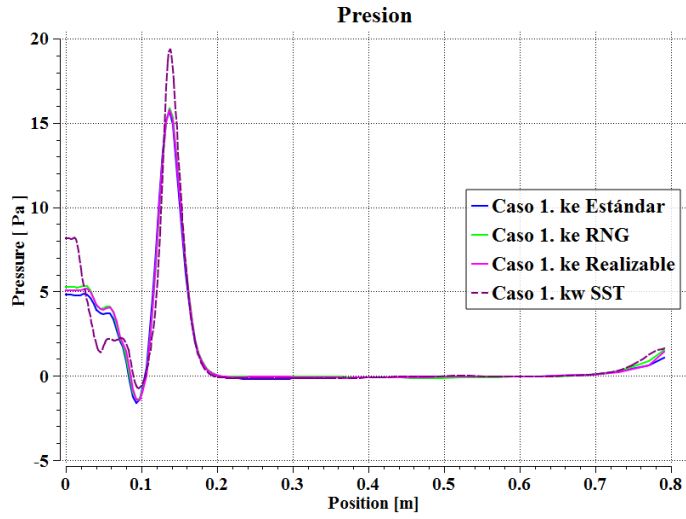


Figura 4.6 Gráfica de presión para el caso simple con diferentes modelos de turbulencia

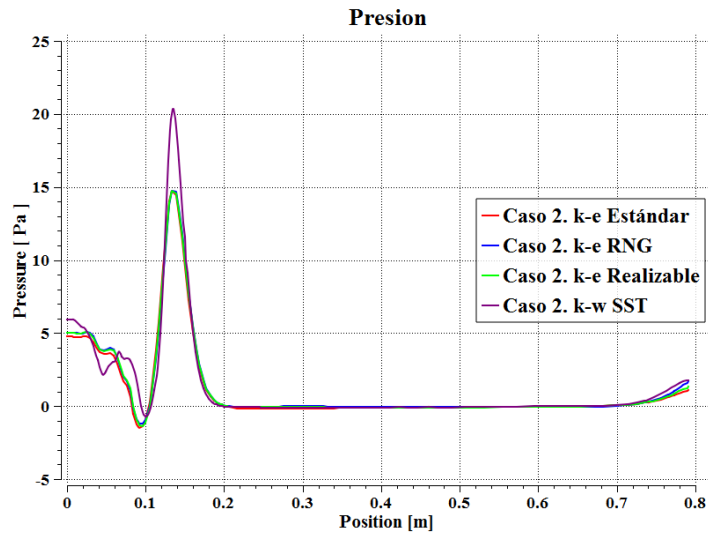


Figura 4.7 Gráfica de presión para el caso conjugado con diferentes modelos de turbulencia

### 4.3 Efectos de la velocidad

Los contornos de velocidad se muestran en la Figura 4.8 y la Figura 4.10 para el caso simple y el caso conjugado, respectivamente. La distancia con respecto a la superficie de impacto para graficarlos se eligió con respecto a los resultados mostrados en la Figura 4.12 y en la Figura 4.13 donde se observa que el máximo valor de la velocidad se obtiene a una distancia normal de 0.004 [m]. Los contornos de velocidad muestran visualmente el comportamiento en las regiones que comprenden al chorro, descritas en el primer capítulo, la región de estancamiento donde la presión alcanza su máximo valor es donde la velocidad decrece para que posteriormente el flujo gire y se acelere provocando un aumento la velocidad hacia la parte superior de la superficie. Una vez que alcanza su máximo valor, la velocidad disminuye conforme avanzamos a lo largo de la superficie, también se observa la zona de recirculación en la parte inferior donde se generan aumentos y disminuciones en la velocidad debido a los cambios de dirección del flujo. De manera similar podemos observar el comportamiento del flujo a lo largo del plano XY en la Figura 4.9 y en la Figura 4.11 donde los vectores de velocidad fueron graficados.

El modelo de turbulencia  $k - \omega SST$  muestra el valor más alto de la velocidad en la zona de aceleración del flujo, seguido de los modelos  $k - \varepsilon RNG$ , *Realizable* y *Estándar*. La distribución de la velocidad a lo largo de la superficie de impacto se nota más pronunciada para los modelos  $k - \omega SST$  y  $k - \varepsilon RNG$ , este efecto se le puede atribuir al hecho de que estos dos modelos predicen de forma más acertada las variables en la región viscosa o de bajo número de Reynolds. El modelo  $k - \varepsilon Realizable$  muestra una distribución menos uniforme para la velocidad en las zonas alejadas a la región de estancamiento con respecto a los otros tres modelos.

En la Figura 4.12 y en la Figura 4.13 se muestran las gráficas de velocidad en una línea perpendicular a la superficie de impacto, contenida en un plano paralelo al plano XY que pasa por el punto de estancamiento. Los resultados se muestran para la línea que está a una distancia  $D = 4$ , donde  $D = x/h$  y  $h$  es igual al ancho del jet. La magnitud de la velocidad incrementa de manera rápida conforme nos alejamos de la superficie de impacto, Zhe y Modi (Zhe & Modi, 2001) mencionan que la medición de una sola componente es suficiente en la zona de chorro libre y la región de flujo en la pared, sin embargo, la mayoría de los trabajos sobre impacto en chorros la superficie de impacto es horizontal y en este trabajo se considera una inclinación de  $30^\circ$ , por lo que para este caso se debe considerar la magnitud de la velocidad. Como se mencionaba anteriormente, la magnitud de la velocidad alcanza su máximo valor a una distancia normal de 0.004 [m] y posteriormente decrece conforme nos alejamos hasta alcanzar su mínimo valor. Dutta (Dutta, Dewan, & Srinivasan, 2013) y Achari (Achari & Das, 2015) reportaron la comparación de diferentes modelos de turbulencia con resultados experimentales, encontrando que para  $D = 4$  el modelo  $k - \omega SST$  predice de manera correcta el comportamiento de la velocidad, sin embargo, llega a sobre predecir su valor para  $D = 2$  que es la región donde el flujo gira.

El modelo que muestra la mayor variación en la magnitud de la velocidad con respecto al modelo  $k - \omega SST$  es el  $k - \varepsilon Estándar$  siendo de 10%, mientras que para los modelos  $k - \varepsilon RNG$  y *Realizable* esta variación disminuye a 5%.

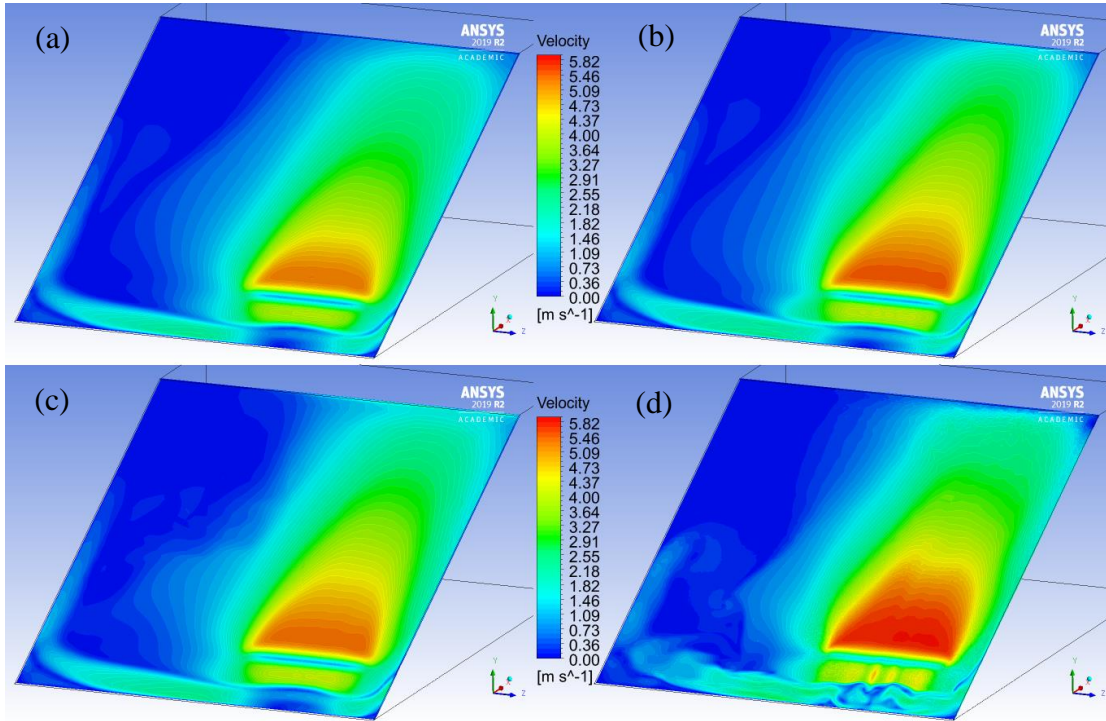


Figura 4.8 Contornos de velocidad para el caso simple con diferentes modelos de turbulencia; a)  $k-\epsilon$  Estándar, b)  $k-\epsilon$  RNG, c)  $k-\epsilon$  Realizable, d)  $k-\omega$  SST

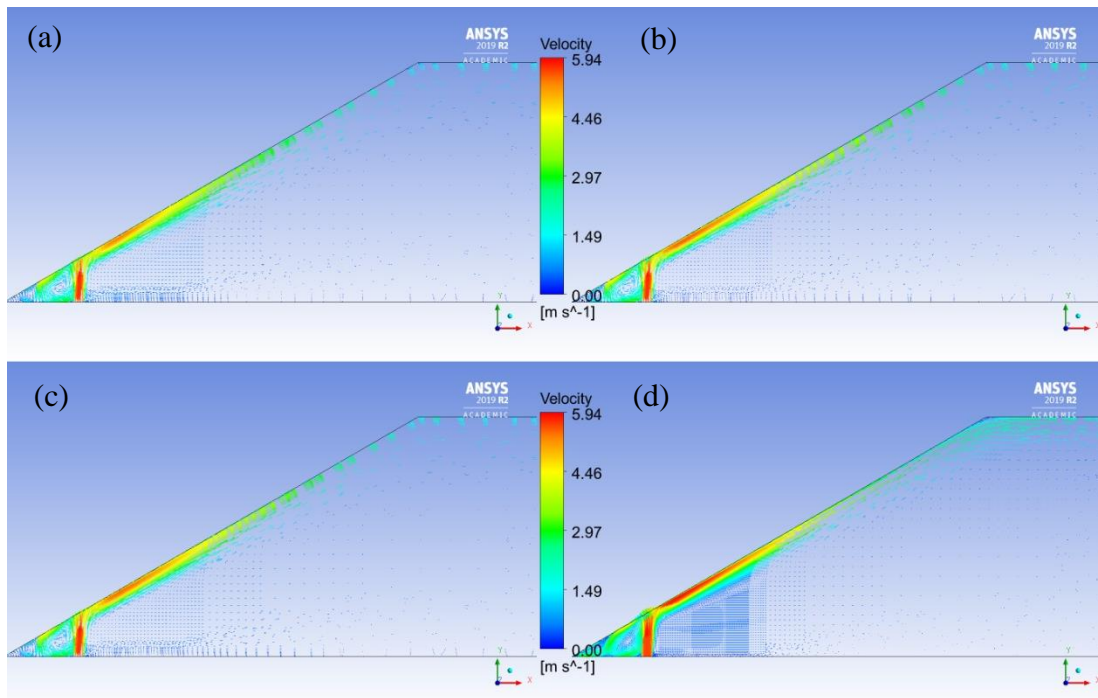


Figura 4.9 Vectores de velocidad para el caso simple con diferentes modelos de turbulencia; a)  $k-\epsilon$  Estándar, b)  $k-\epsilon$  RNG, c)  $k-\epsilon$  Realizable, d)  $k-\omega$  SST

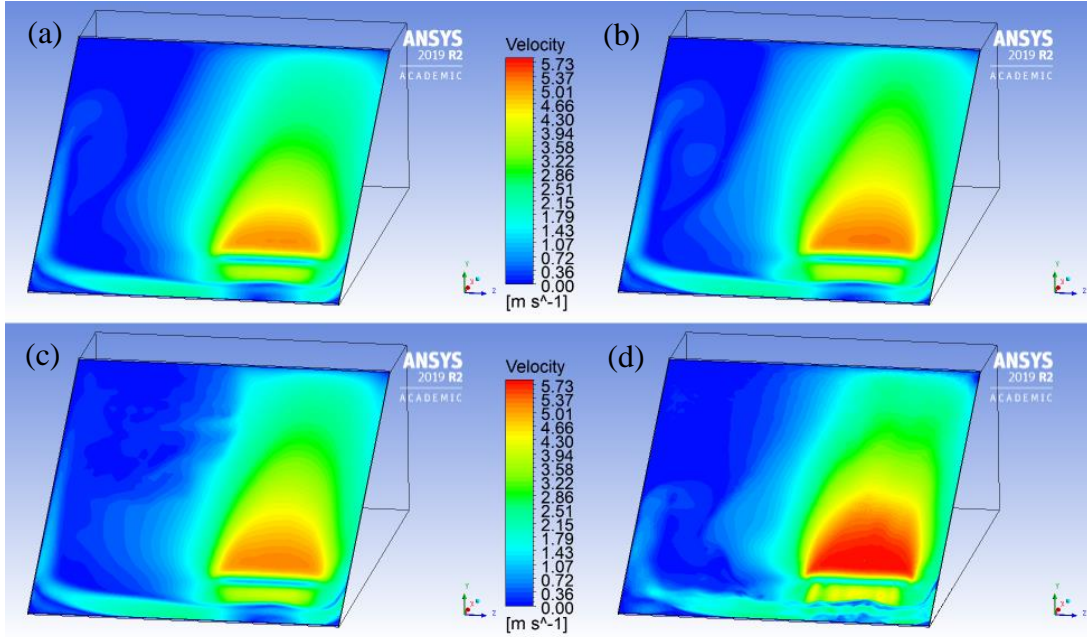


Figura 4.10 Contornos de velocidad para el caso conjugado con diferentes modelos de turbulencia; a)  $k-\epsilon$  Estándar, b)  $k-\epsilon$  RNG, c)  $k-\epsilon$  Realizable, d)  $k-\omega$  SST

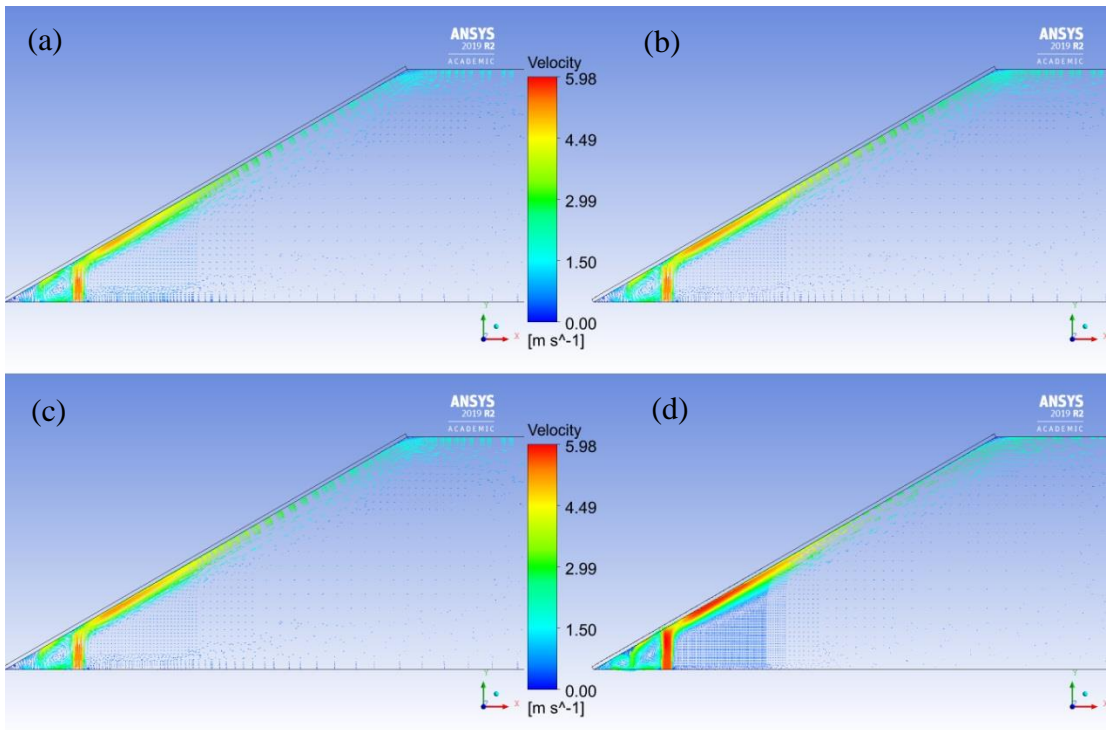


Figura 4.11 Vectores de velocidad para el caso conjugado con diferentes modelos de turbulencia; a)  $k-\epsilon$  Estándar, b)  $k-\epsilon$  RNG, c)  $k-\epsilon$  Realizable, d)  $k-\omega$  SST

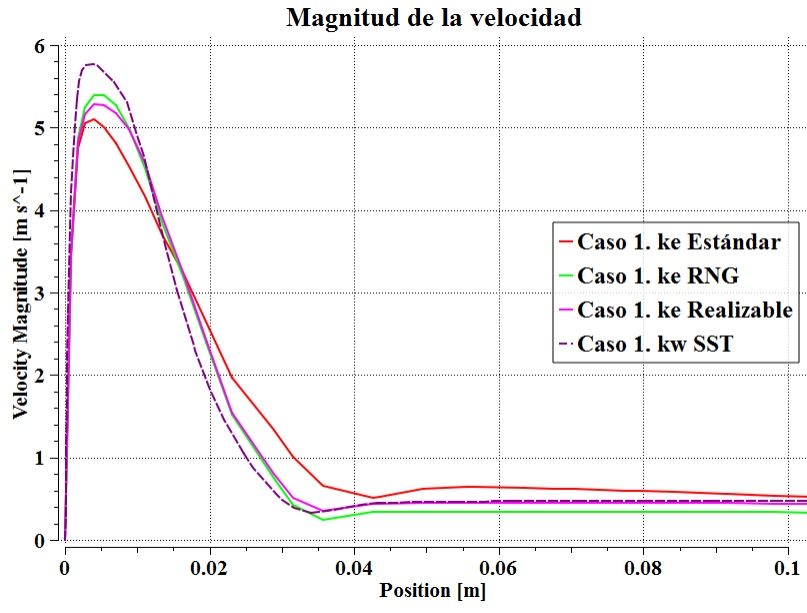


Figura 4.12 Gráfica para la magnitud de la velocidad en el caso simple y con diferentes modelos de turbulencia

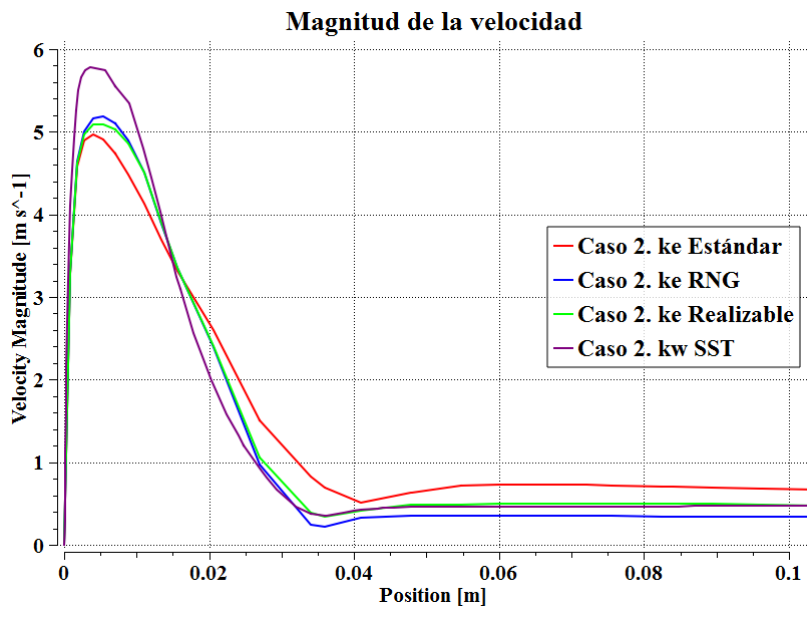


Figura 4.13 Gráfica para la magnitud de la velocidad en el caso conjugado y con diferentes modelos de turbulencia

#### 4.4 Efectos de la temperatura

La Figura 4.14 y la Figura 4.15 muestran los contornos de temperatura localizados en la superficie inclinada para los casos simple y conjugado respectivamente, en cada figura se encuentran los resultados para los cuatro modelos de turbulencia utilizados. La temperatura máxima se encuentra en la zona de impacto del chorro que es donde se produce el estancamiento, se observan gradientes en la temperatura homólogos a la aceleración del flujo, estos gradientes provocan una disminución con ciertos patrones que cambian respecto al modelo de turbulencia utilizado. Estos patrones son muy parecidos a los que se observaron en los contornos de velocidad, para los modelos  $k - \omega SST$  y  $k - \varepsilon RNG$  se notan contornos con una forma más alargada hacia la parte superior de la superficie y con respecto a los modelos  $k - \varepsilon Realizable$  y  $Estándar$ . Se observa que los contornos resultantes usando los modelos  $k - \varepsilon$  son más uniformes en comparación con los resultantes utilizando el modelo  $k - \omega SST$ , este efecto se nota de manera más pronunciada en las zonas de estancamiento y recirculación.

La Figura 4.16 muestra la gráfica de la temperatura a lo largo de la trayectoria del chorro desde la boquilla y hasta la pared de impacto variando el coeficiente de transferencia de calor. Esta gráfica se obtuvo de los resultados para el caso conjugado y con el modelo de turbulencia  $k - \omega SST$ . Se observa un comportamiento similar para cada uno de los valores usados en el coeficiente de transferencia de calor. Es importante señalar que esta variación en el coeficiente se introdujo en la condición de frontera para la superficie que modela la zona exterior del parabrisas. De la ley de enfriamiento de Newton podemos notar que este coeficiente actúa como una constante de proporcionalidad por lo que, si aumentamos su valor, el valor del flujo de calor aumentará y por consecuencia la temperatura de la superficie disminuirá. Esto se observa claramente en la gráfica, ya que, para el valor más grande del coeficiente se tiene el valor más pequeño en la temperatura en la superficie inclinada.

La comparación de la distribución de temperatura a lo largo de la trayectoria del chorro entre los casos 1 y 2 se muestran en las Figura 4.17Figura 4.18Figura 4.19Figura 4.20 para los modelos  $k - \varepsilon Estándar$ ,  $RNG$ ,  $Realizable$  y  $k - \omega SST$ , respectivamente. Se observa un comportamiento constante en la temperatura desde la salida de la boquilla y hasta una altura de  $Y = 0.069$  [m] los siguientes  $0.003$ [m] se tiene una disminución pronunciada, ya que es en esta zona donde el fluido pierde la mayor cantidad de calor por estar muy cercano a la superficie de impacto. Los siguientes  $0.006$ [m] son los que comprenden al vidrio sólido, por consiguiente, la disminución en la temperatura sigue un comportamiento lineal con pendiente constante. La gráfica de la distribución de temperatura para el caso 1 es idéntica a la del caso 2 desde el valor  $0$  [m] de  $Y$  hasta el valor de  $0.072$  [m], el caso 1 no considera el modelado de un sólido que represente al vidrio por consecuencia su gráfica termina hasta el valor de  $Y = 0.072$  [m]. El gráfico comparativo para el modelo  $k - \omega SST$  permite observar una distribución en los resultados más homogénea en comparación con los gráficos de los otros modelos de turbulencia, esto se debe principalmente al mallado que se utilizó en la zona de donde se graficaron los datos, la mayor presencia de celdas en la zona cercana a la pared refleja un comportamiento más suave en la curva de la temperatura.

Para comprender de manera más completa la transferencia de calor en la superficie inclinada debido al impacto del chorro, es necesario referirnos al número de Nusselt. Las gráficas del número de Nusselt obtenido en la línea que está comprendida en la superficie inclinada que va desde la parte inferior hasta la superior de la misma, para el caso 1 y 2 se muestran en la Figura 4.21 y la Figura 4.22, respectivamente.

Se puede observar que el valor máximo del número de Nusselt se encuentra en la zona de estancamiento como consecuencia en esta región se da la máxima transferencia de calor, también se observan discrepancias en el comportamiento obtenido para los diferentes modelos de turbulencia en especial si comparamos los modelos  $k - \varepsilon$  con el modelo  $k - \omega SST$ , la curva que resulta del modelo  $k - \omega SST$  concuerda con la encontrada en la literatura, la forma de la curva en la zona de estancamiento para los modelos  $k - \varepsilon$  nos advierte de una baja predicción en el Nusselt. En la región de recirculación se notan comportamientos oscilatorios congruentes con un cambio en la transferencia de calor debida a los remolinos presentes en esa región. El comportamiento que tiene la curva en la zona después del pico en el Nusselt (Position = 0.2 [m]) en donde se nota un importante decaimiento en el valor local, es parecido al comportamiento que Huakun, Tiezhi, Guiyong, Da, & Haipeng (Huakun, Tiezhi, Guiyong, Da, & Haipeng, 2019) encontraron para el coeficiente de fricción debido a la separación inestable y ligado a la delgada capa límite térmica, estos mismos autores mencionan que para el modelo  $k - \omega SST$  hallaron una sobre predicción del máximo valor del Nusselt en la zona de estancamiento. Después de esta disminución en el valor del Nusselt, para el modelo  $k - \omega SST$  se logra producir un segundo pico entre los valores de posición de 0.3 y 0.4 [m].

La distancia entre la boquilla y la superficie de impacto puede ser relacionada con el ancho o el largo de la boquilla, los investigadores Huang et al (Huakun, Tiezhi, Guiyong, Da, & Haipeng, 2019) mencionan que si esta distancia es lo suficientemente grande el segundo pico en el valor del Nusselt desaparece mientras que para valores menores está presente. Por tal motivo, se puede considerar la presencia del segundo pico para el modelo  $k - \omega SST$  como una aproximación correcta si tomamos como referencia la relación de esta distancia con el ancho.



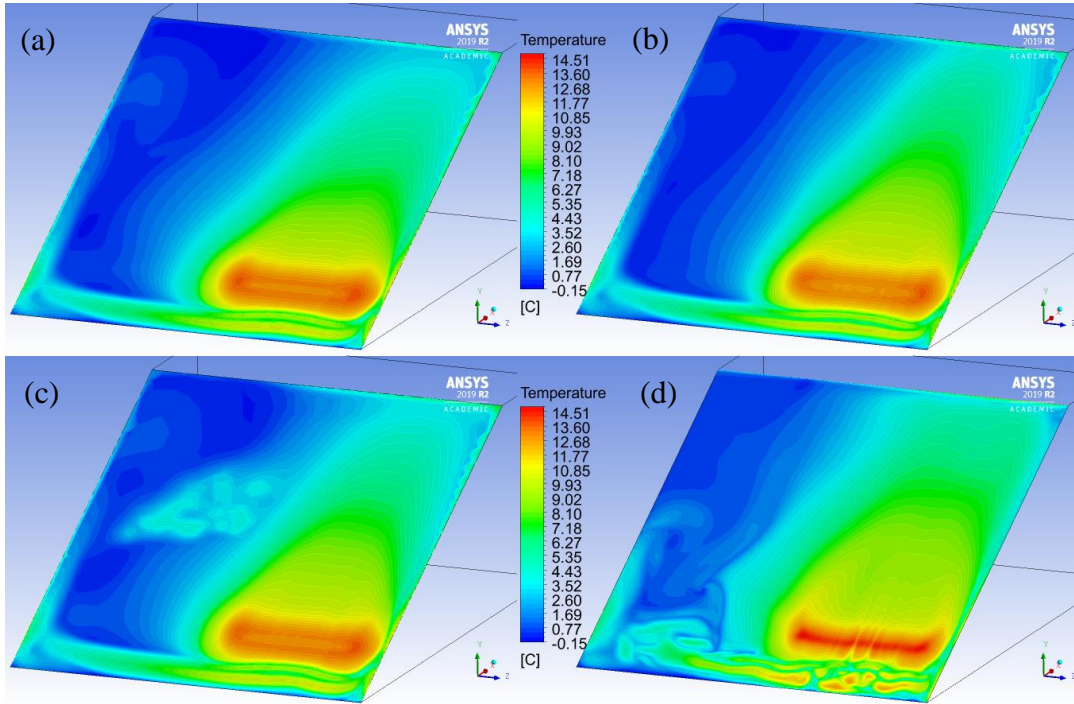


Figura 4.14 Contornos de temperatura para el caso simple con diferentes modelos de turbulencia; a)  $k-\epsilon$  Estándar, b)  $k-\epsilon$  RNG, c)  $k-\epsilon$  Realizable, d)  $k-\omega$  SST

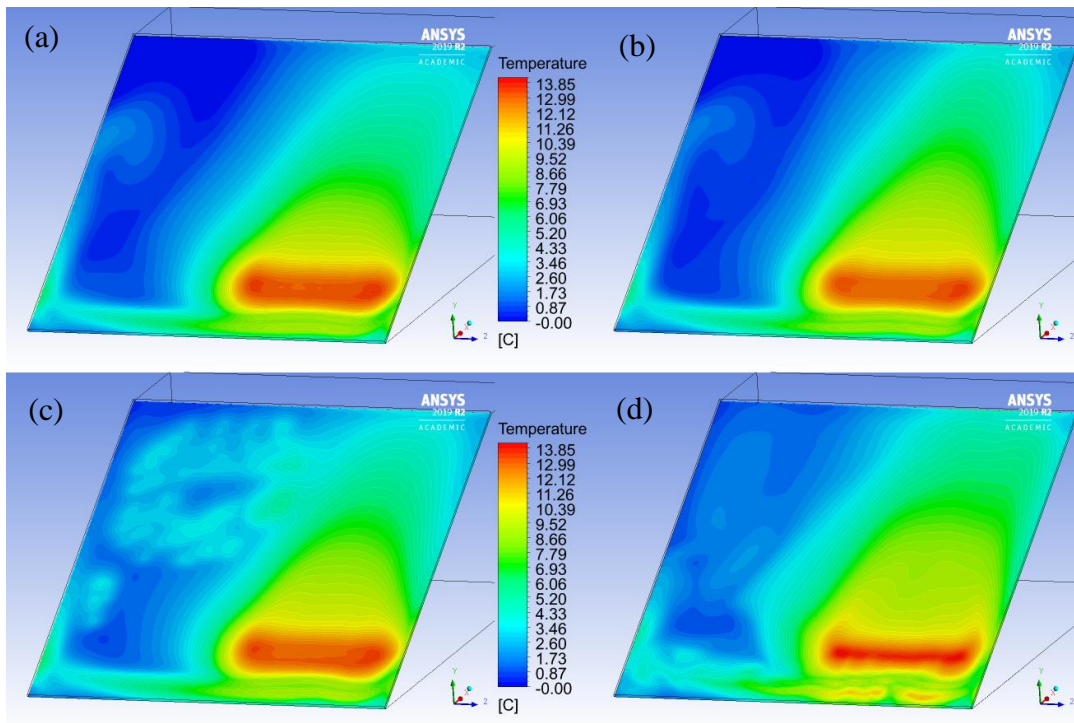


Figura 4.15 Contornos de temperatura para el caso conjugado con diferentes modelos de turbulencia; a)  $k-\epsilon$  Estándar, b)  $k-\epsilon$  RNG, c)  $k-\epsilon$  Realizable, d)  $k-\omega$  SST

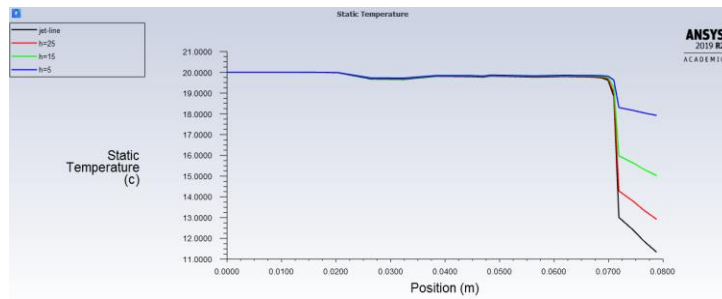


Figura 4.16 Distribución de temperatura variando h

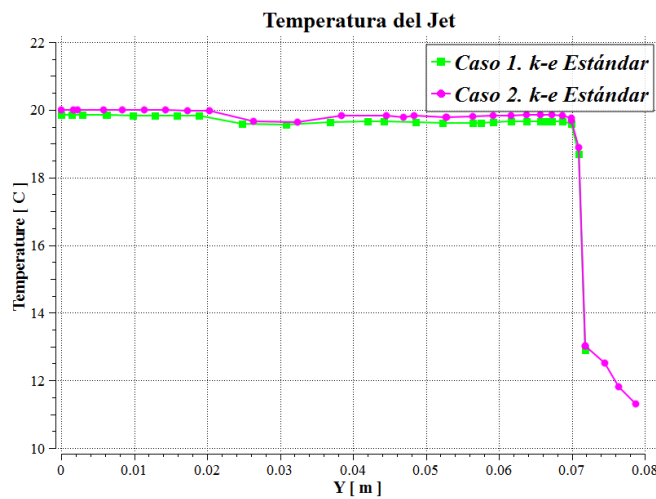


Figura 4.17 Gráfica de la distribución de temperatura para el modelo  $k-\epsilon$  Estándar comparando el caso 1 y 2

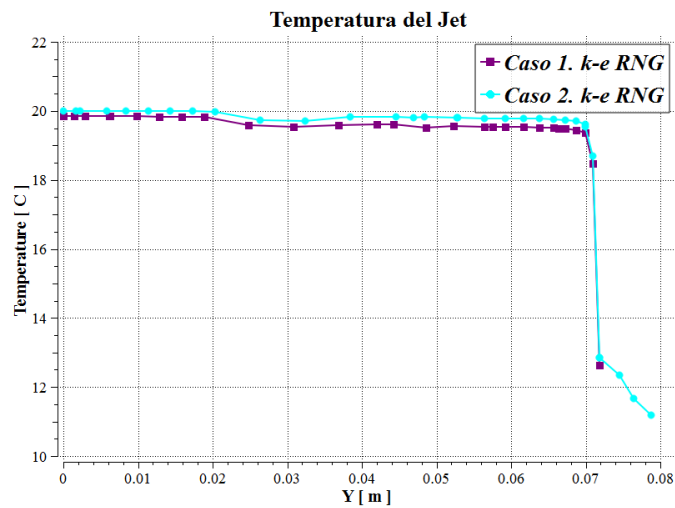


Figura 4.18 Gráfica de la distribución de temperatura para el modelo  $k-\epsilon$  RNG comparando el caso 1 y 2

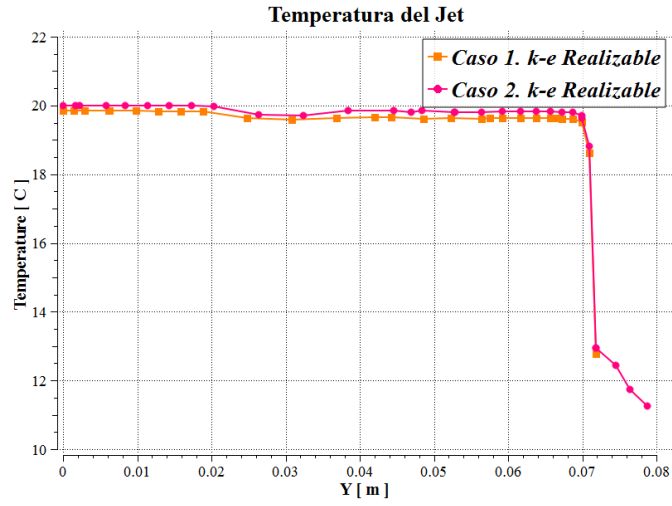


Figura 4.19 Gráfica de la distribución de temperatura para el modelo  $k-\epsilon$  Realizable comparando el caso 1 y 2

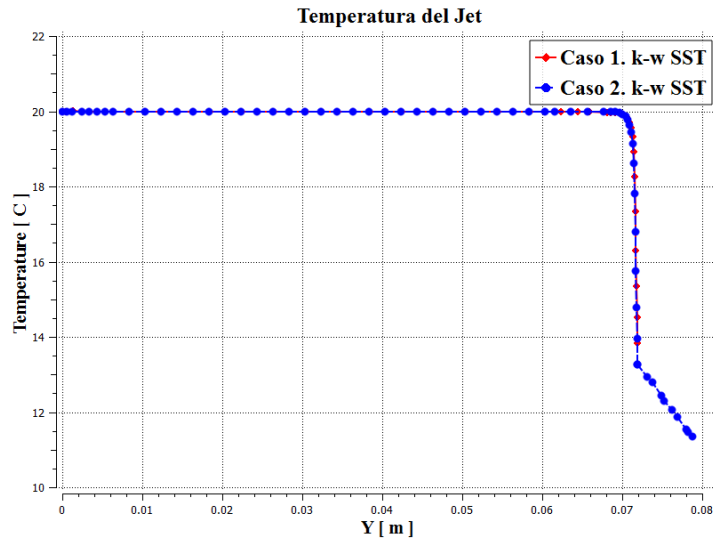


Figura 4.20 Gráfica de la distribución de temperatura para el modelo  $k-\omega$  SST comparando el caso 1 y 2

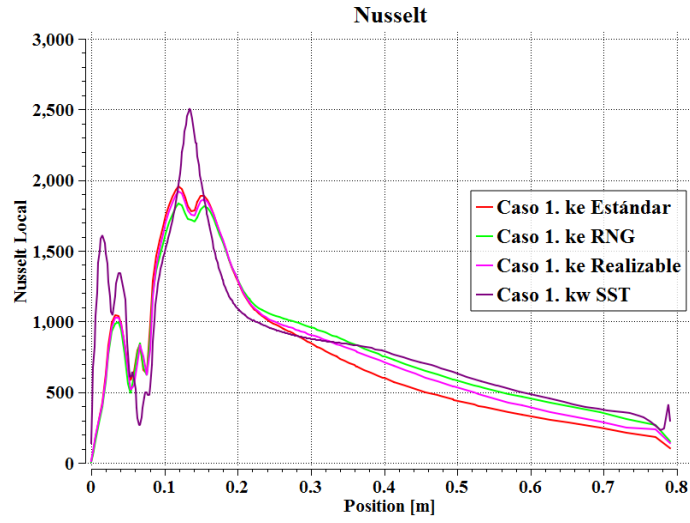


Figura 4.21 Gráfica del Nusselt para el caso simple y con diferentes modelos de turbulencia

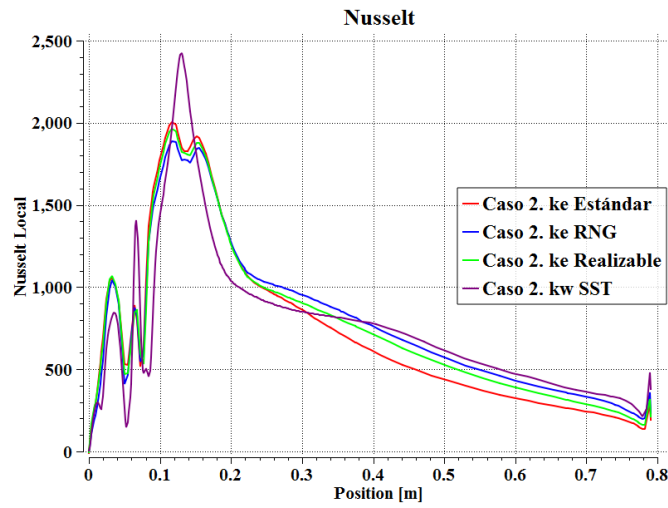


Figura 4.22 Gráfica del Nusselt para el caso conjugado y con diferentes modelos de turbulencia





## 5. CONCLUSIONES

En este trabajo se presenta un análisis del fenómeno conocido como el impacto de chorro sobre una superficie inclinada, tomando como base teórica la mecánica de fluidos y la transferencia de calor. Se estudiaron los efectos en los campos de las variables que condiciones de frontera de temperatura y flujo producen. Se presentó la comparativa entre dos casos de estudio. Con la utilización de la herramienta de la dinámica de fluidos computacional se logró obtener resultados que permitieron comparar diferentes modelos de turbulencia basados en la teoría de las ecuaciones promediadas de Navier – Stokes (RANS).

Como primer análisis se halló una independencia entre diferentes mallas en los resultados de las componentes de la velocidad, se observó pequeñas diferencias entre los resultados para las 4 diferentes mallas utilizadas. Con base en estos resultados se tomó una malla para las simulaciones basadas en los modelos  $k - \varepsilon$ . En la aplicación del modelo  $k - \omega SST$  se estudió el parámetro  $Y^+$  incluyendo diferentes mallas con distintas densidades de celdas en la región cercana a la pared de impacto, para la correcta predicción de las variables en la zona viscosa se tomó una malla viable que resultó en valores de  $Y^+$  cercanos a 1. Dicho esto, se usaron dos mallas, una para los modelos  $k - \varepsilon$  y otra para el modelo  $k - \omega SST$  por lo que los resultados también se vieron afectados por este hecho, lo que nos lleva a tener muy en cuenta en simulaciones basadas en CFD la elección correcta del modelo de turbulencia bajo el análisis primeramente de parámetros como el de  $Y^+$  y su efecto en el tipo de discretización del dominio. El comportamiento del esfuerzo cortante se incluyó debido a su relación con  $Y^+$  donde sus mayores gradientes se observan en la zona cercana a la región de estancamiento.

El campo de presión se obtuvo para conocer que su máximo valor se encuentra en la región de estancamiento dando como consecuencia que la velocidad del flujo sea la mínima y su posterior disminución hacia la dirección del flujo. La comparación entre los casos simple y conjugado resultó en una diferencia mínima para el campo de la presión. Los modelos de turbulencia  $k - \varepsilon$  no reflejaron cambio entre ellos mientras que para el modelo  $k - \omega SST$  se encontró un aumento en el valor máximo de la presión en la zona de estancamiento.

El campo de velocidad confirma las zonas que se describen en la literatura, tales como la zona de estancamiento y la del chorro en la pared. La relación que existe entre el campo de la velocidad y el de presión se ve reflejado en las regiones donde la velocidad decrece en magnitud dando como consecuencia el aumento en la magnitud de la presión, y viceversa. Los modelos de turbulencia mostraron dos comportamientos principales, los gradientes a lo largo de las cercanías a la superficie de impacto se prolongan para los modelos  $k - \omega SST$  y  $k - \varepsilon RNG$ , por otro lado, estos gradientes se ven más reducidos para los modelos  $k - \varepsilon Estándar$  y  $k - \varepsilon Realizable$ . La magnitud de la velocidad en las cercanías a la superficie inclinada se comparó para los modelos de turbulencia en donde se encontraron ciertas discrepancias y un aumento para el valor máximo en el modelo  $k - \omega SST$  debido principalmente a su capacidad de capturar la zona viscosa.

El campo de temperatura mostró sus valores máximos para la superficie de contacto en la región de estancamiento, en los contornos se encuentra una similitud con la velocidad donde se notó el mismo comportamiento para los gradientes que se mencionó anteriormente. En la trayectoria del

chorro la temperatura mostró un comportamiento congruente entre los modelos de turbulencia, la curva se suaviza si el número de celdas es suficiente para capturar con mejor precisión los altos gradientes en la zona cercana al impacto del chorro con la superficie. La temperatura en la superficie del vidrio es diferente entre el caso simple y el conjugado, debe plantearse de manera correcta para obtener los resultados apropiados y si en posterior se plantea un estudio como el del deshielo o el des empañamiento en el parabrisas, de ahí la importancia de contemplar el sistema conjugado para la transferencia de calor. El número de Nusselt revela que la zona donde ocurre la mayor transferencia de calor por la presencia del flujo de aire es en la región de estancamiento, las diferencias entre los casos 1 y 2 se notaron mayormente en la zona de recirculación. Los modelos de turbulencia  $k - \varepsilon$  no logran revelar el comportamiento del Nusselt en la región de estancamiento que se reportan en la literatura, la diferencia entre estos modelos y el modelo  $k - \omega SST$  está en la zona de recirculación y en el segundo pico.

Como trabajo a futuro se propone el estudio del fenómeno de descongelamiento en el parabrisas, donde se verá incluido un modelo de cambio de fase para el agua, así como un cambio de régimen estacionario a transitorio. Los resultados obtenidos en este trabajo servirían como condiciones iniciales al régimen transitorio. Así mismo, se estudiarían algunos otros parámetros de diseño en el sistema de climatización para encontrar el mejor desempeño.



## REFERENCIAS

- Achari, A. M., & Das, M. K. (2015). Application of various RANS based models towards predicting turbulent slot jet impingement. *International Journal of Thermal Sciences*, 332-351.
- ANSYS. (2019). *ANSYS Fluent Theory Guide*. Canonsburg: ANSYS Inc. .
- Barth, T., & Jespersen, D. (1989). *The design and application of upwind schemes on unstructured meshes*. Nevada: 27th Aerospace sciences meeting.
- Behnia, M., Parneix, S., & Durbin, P. A. (1998). Prediction of heat transfer in an axisymmetric turbulent jet impinging on a flat plate. *International journal of heat and mass transfer*, 1845-1855.
- Brdlik, P. M., & Savin, V. K. (1965). Heat transfer between an axisymmetric jet and a plate normal to the flow. *Journal of engineering physics*, 91-98.
- Cengel, Y. A., & Cimbala, J. M. (2018). *Mecánica de fluidos. Fundamentos y aplicaciones*. México: Mc Graw Hill.
- Chorin, A. J. (1968). Numerical solution of the Navier-Stokes equations. *Mathematics of computation*, 745-762.
- Cooper, D., Jackson, D. C., Launder, B. E., & Liao, G. X. (1993). Impinging jet studies for turbulence model assessment—I. Flow-field experiments. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2675-2684.
- Craft, T. J., Graham, L. J., & Launder, B. E. (1993). Impinging jet studies for turbulence model assessment—II. An examination of the performance of four turbulence models. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2685-2697.
- Dewan, A., Dutta, R., & Srinivasan, B. (2003). Recent Trends in Computation of Turbulent Jet Impingement Heat Transfer. *Heat Transfer Engineering*, 447-460.
- Draksler, M., & Končar, B. (2011). Analysis of heat transfer and flow characteristics in turbulent impinging jet. *Nuclear engineering and design*, 1248-1254.
- Dutta, R., Dewan, A., & Srinivasan, B. (2013). Comparison of various integration to wall (ITW) RANS models for predicting turbulent slot jet impingement heat transfer. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 750-764.
- Dutta, R., Dewan, A., & Srinivasan, B. (2016). CFD study of slot jet impingement heat transfer with nanofluids. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 206-220.
- Heyerichs, K., & Pollard, A. (1996). Heat transfer in separated and impinging turbulent flows. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2385-2400.

- Hrycak, P., Lee, D. T., Gauntner, J. W., & Livingood, J. N. (1970). *Experimental flow characteristics of a single turbulent jet impinging on a flat plate*. Washington D.C.: National Aeronautics and Space Administration.
- Huakun, H., Tiezhi, S., Guiyong, Z., Da, L., & Haipeng, W. (2019). Evaluation of a developed SST  $k-\omega$  turbulence model for the prediction of turbulent slot jet impingement heat transfer. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 700-712.
- Huang, G. C. (1963). Investigations of Heat-Transfer Coefficients for Air Flow Through Round Jets Impinging Normal to a Heat-Transfer Surface. *ASME. J. Heat Transfer*, 237-243.
- Incropera, F. P., & DeWitt, D. P. (1999). *Fundamentos de transferencia de calor*. Mexico: Prentice Hall.
- Kezios, S. (1956). *Heat transfer in the flow of a cylindrical air jet normal to an infinite plane*. Chicago Illinois: Illinois Institute of Technology.
- Kolmogorov, A. N. (1942). Equations of Turbulent Motion of an Incompressible Fluid. *Izvestia Academy of Sciences*, 56-58.
- Launder, B. E., & Spalding, D. B. (1972). *Lectures in Mathematical Models of Turbulence*. Londres Inglaterra: Academic Press.
- McNaughton, K. J., & Sinclair, C. G. (1966). Submerged jets in short cylindrical flow vessels. *Journal of Fluid Mechanics*, 367-375.
- Menter, F. R. (1994). Two-Equation Eddy-Viscosity Turbulence Models for Engineering Applications. *AIAA Journal*, 1598-1605.
- Orszag, S. A., Yakhot, V., Flannery, W. S., Boysan, F., Choudhury, D., Maruzewski, J., & Patel, B. (1993). *Renormalization Group Modeling and Turbulence Simulations*. Arizona: In International Conference on Near-Wall Turbulent Flows.
- Perry, K. P. (1954). Heat transfer by convection from a hot gas jet to a plane surface. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, 715-780.
- Schlichting, H. (1960). *Boundary layer theory* (Vol. 960). New York: McGraw-Hill.
- Shih, T.-H., Liou, W., Shabbir, A., Yang, Z., & Zhu, J. (1995). A New - Eddy-Viscosity Model for High Reynolds Number Turbulent Flows - Model Development and Validation. *Computers Fluids*, 227-238.
- Shukla, A. K., & Dewan, A. (2017). Flow and thermal characteristics of jet impingement: comprehensive review . *International Journal of Heat and Technology*, 153-166.
- Shukla, A., & Dewan, A. (2018). Heat transfer and flow characteristics of turbulent slot jet impingement on plane and ribbed surfaces. *Thermophysics and Aeromechanics*, 717-734.
- Subrata, R., & Paresh, P. (2003). Study of heat transfer for a pair of rectangular jets impinging on an inclined surface. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 411-425.

- Tu, J., Yeoh, G.-H., & Liu, C. (2008). *Computational Fluid Dynamics: A Practical Approach*. Burlington : Elsevier.
- Vickers, J. M. (1959). Heat Transfer Coefficients between Fluid Jets and Normal Surfaces. Behavior of Laminar Impacted Jets. *Industrial & Engineering Chemistry*, 967-972.
- Walz, D. R. (1964). *Spot Cooling and Heating of Surfaces with High Velocity Impinging Air Jets, Part 2: Circular Jets on Plane and Curved Surfaces, Slot Jets on Curved Surfaces*. California: Stanford University.
- Wang, S. J., & Mujumdar, A. S. (2005). A comparative study of five low Reynolds number  $k-\epsilon$  models for impingement heat transfer. *Applied Thermal Engineering*, 31-44.
- White, F. M. (2008). *Mecánica de fluidos*. Madrid España: McGraw Hill.
- Wilcox, D. C. (1994). *Turbulence modeling for CFD*. La Cañada, California: DCW Industries Inc.
- Zhe, J., & Modi, V. (2001). Near Wall Measurements for a Turbulent Impinging Slot Jet. *J. Fluids Eng.*, 112-120.
- Zuckerman, N., & Lior, N. (2006). Jet Impingement Heat Transfer: Physics, Correlations, and Numerical Modeling. (J. P.-C. George A. Greene, Ed.) *Advances in Heat Transfer*, 39, 565-631. Obtenido de [https://doi.org/10.1016/S0065-2717\(06\)39006-5](https://doi.org/10.1016/S0065-2717(06)39006-5).