



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

**Evaluación de técnicas de
procesamiento digital para el
análisis de señales EEG**

TESIS

Que para obtener el título de

Ingeniero Eléctrico Electrónico

P R E S E N T A

Luis Edwin Hernández Molina

DIRECTOR DE TESIS

Dr. Rogelio Alcántara Silva



Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2020

Agradecimientos

Gracias a familiares y amigos que siempre me han apoyado.

Agradecemos a la DGAPA su apoyo para la realización de nuestro trabajo de tesis a través del proyecto PAPIIT IT-101119

Resumen

En el procesamiento de señales tradicional se da por hecho que los datos a analizar son de naturaleza determinística y que en la mayoría de los casos, es posible utilizar un modelo determinista para su representación. Sin embargo, cuando se requiere hacer un análisis más preciso se opta por caracterizarlos a través de procesos estocásticos, que a su vez se clasifican en estacionarios y no estacionarios. El concepto de no estacionariedad supone que los parámetros estadísticos varían con el tiempo. Un ejemplo claro de señales no estacionarias es el Electroencefalograma (EEG), cuyas características estadísticas y frecuenciales varían en el tiempo. La herramienta por excelencia para representar una señal temporal en el dominio de la frecuencia es la Transformada de Fourier Discreta, sin embargo no nos muestra información de cuando una frecuencia aparece en el tiempo. En una señal no estacionaria como el EEG su contenido frecuencial varía con el tiempo, por lo que, para su análisis se requiere de técnicas que determinen de manera conjunta su representación tiempo-frecuencia, como, la Transformada de Fourier de tiempo reducido, la Transformada Wavelet y la Transformada de Hilbert-Huang. Con la finalidad de tener un mejor entendimiento de estas técnicas, en este trabajo realizamos el estudio, implementación y evaluación de su funcionamiento mediante simulaciones con señales sintéticas y señales reales de EEG. La puesta en marcha, la dificultad de calibrar las técnicas estudiadas para su buen funcionamiento y los resultados de las simulaciones realizadas, nos permite concluir que es difícil seleccionar la mejor representación tiempo-frecuencia, ya que, su efectividad dependerá de la señal analizada y de la tarea específica que se vaya a realizar.

Índice general

Agradecimientos	3
Resumen	5
1. Introducción	1
1.1. Contexto histórico	1
1.2. Objetivo	2
1.3. Justificación	2
1.4. Planteamiento del problema	3
1.5. Resumen sobre las técnicas empleadas	3
1.6. Metodología	4
1.6.1. Planteamiento del problema	5
1.6.2. Análisis del problema y alternativas de solución	5
1.6.3. Diseño de la solución y construcción del prototipo	5
1.6.4. Prueba y refinamiento del prototipo	5
1.7. Estructura del documento	5
2. La señal EEG	7
2.1. Actividad eléctrica del cerebro	7
2.2. El electroencefalograma (EEG)	8
2.2.1. Sistema Internacional 10-20	8
2.2.2. Clasificación de las señales EEG	10
2.2.3. Potenciales evocados	11
2.3. Problemática de señales EEG	12
2.4. Aplicaciones	12
2.4.1. Clasificación del sueño	12
2.4.2. Imaginación motora	14
2.4.3. Detección de focos epilépticos	14
2.5. Conclusiones	15
3. Fundamentos de señales y sistemas	17
3.1. Señal continua y señal discreta	17
3.2. Señales determinísticas	19
3.2.1. Señales periódicas y no periódicas	20
3.3. Señales estocásticas	22
3.3.1. Señales estacionarias y no estacionarias	23

3.4.	Generalidades sobre sistemas discretos	24
3.4.1.	Propiedades de los sistemas	24
3.4.2.	Representación de sistemas LIT en el tiempo y la frecuencia	26
3.5.	Representación de señales en el dominio frecuencial	31
3.5.1.	Series de Fourier	32
3.5.2.	Serie compleja	33
3.5.3.	Transformada de Fourier continua	34
3.5.4.	Transformada de Fourier de tiempo discreto	36
3.5.5.	Transformada Discreta de Fourier	37
3.5.6.	Transformada rápida de Fourier	38
3.6.	Segmentación y ventaneo de una señal en el tiempo	43
3.7.	Conclusiones	49
4.	Técnicas de procesamiento de señales no estacionarias	51
4.1.	Transformada de Fourier de Tiempo Reducido (TFTR)	51
4.1.1.	TFTR en tiempo continuo	51
4.1.2.	TFTR en tiempo discreto	52
4.1.3.	Espectrograma	53
4.1.4.	Problemas de resolución	53
4.2.	Transformada Wavelet (TW)	54
4.2.1.	Transformada Wavelet Continua	54
4.2.2.	Transformada Wavelet Discreta y análisis multiresolución	57
4.2.3.	Ejemplos de Wavelets (Haar)	66
4.2.4.	Limitaciones	69
4.3.	Transformada de Hilbert-Huang (THH)	70
4.3.1.	Descomposición empírica en modos	70
4.3.2.	Efecto de borde	72
4.3.3.	Efecto de mezcla de modos	73
4.3.4.	Transformada de Hilbert	74
4.4.	Implementación y prueba de los algoritmos	78
4.4.1.	Transformada de Fourier de tiempo reducido	78
4.4.2.	Transformada Wavelet Discreta	78
4.4.3.	Transformada de Hilbert-Huang	79
4.5.	Conclusiones	79
5.	Evaluación y validación de los algoritmos	83
5.1.	No estacionariedad	83
5.1.1.	Transformada de Fourier de Tiempo Reducido	85
5.1.2.	Transformada Wavelet Discreta	88
5.1.3.	Transformada de Hilbert-Huang	89
5.2.	Alto contenido de ruido	89
5.2.1.	Transformada de Fourier de tiempo reducido	92
5.2.2.	Transformada Wavelet Discreta	93
5.2.3.	Transformada de Hilbert-Huang	95

5.3.	Componentes frecuenciales cercanas	95
5.3.1.	Transformada de Fourier de Tiempo Reducido	97
5.3.2.	Transformada Wavelet Discreta	98
5.3.3.	Transformada de Hilbert-Huang	99
5.4.	No linealidad	100
5.4.1.	Transformada de Fourier de Tiempo Reducido	101
5.4.2.	Transformada Wavelet Discreta	102
5.4.3.	Transformada de Hilbert-Huang	103
5.5.	Señal EEG	104
5.5.1.	Transformada de Fourier de tiempo reducido	105
5.5.2.	Transformada Wavelet	107
5.5.3.	Transformada de Hilbert-Huang	109
5.6.	Conclusiones	111
6.	Conclusiones	113
A.	Fundamentos de álgebra lineal	115
A.1.	Espacio vectorial y Espacio de Hilbert	115
A.2.	Producto interno y norma	116
B.	Funciones Analíticas	119
C.	Implementación de algoritmos	121
C.1.	Transformada de Fourier de Tiempo Reducido	121
C.2.	Tranformada Wavelet (Haar)	123
C.3.	Tranformada de Hilbert-Huang	124
D.	Código fuente	129
D.1.	Transformada de Fourier de Tiempo Reducido	129
D.2.	Transformada Wavelet (Haar)	130
D.3.	Transformada de Hilbert-Huang	131
D.3.1.	Descomposición empírica en modos	131
D.3.2.	Espectro de Hilbert-Huang	133
	Bibliografía	135

1. Introducción

1.1. Contexto histórico

Aunque la expansión de una función en bases trigonométricas apareció de forma general en los años 1700's principalmente para el estudio de fenómenos físicos como la vibración, no fue sino hasta 1808 cuando Joseph Fourier escribió su tratado sobre la teoría del calor, en el cual, Fourier estudió de forma detallada las series trigonométricas y su aplicación para resolver varios problemas sobre conducción de calor.[21]

Fourier demostró que era posible descomponer una función periódica en una suma infinita de funciones exponenciales complejas periódicas. Años más tarde sus ideas son generalizadas para funciones no periódicas y para tiempo discreto.

En 1909 aparece la primera mención de una wavelet en la tesis de Alfred Haar, esta wavelet cuenta con la ventaja de poseer soporte compacto, lo que la hace fácilmente localizable en el tiempo. Sin embargo, sus aplicaciones son limitadas debido a que es discontinua y no diferenciable en el tiempo.[22]

Por siglos la transformada de Fourier fue utilizada ampliamente, pero, aún con sus numerosas ventajas, la cuestión de su nula resolución en el tiempo siempre había sido un problema. Para resolver esto, a finales de los años 40's Dennis Gabor desarrolló la llamada transformada de Fourier de tiempo reducido[23], que básicamente consiste en analizar la señal utilizando ventanas que la dividen en segmentos y se aplica la transformada de Fourier a cada una de ellos, lo cual brinda información en el tiempo. La limitante de esta transformada está relacionada con el principio de incertidumbre de Heisenberg, el cual nos impide conocer el tiempo exacto en el que se presenta cierta frecuencia, por lo que existe un compromiso entre tiempo y frecuencia.[23]

En 1980, un ingeniero francés llamado Jean Morlet tuvo la idea de realizar el análisis de una señal a través de una función que tuviera buena localización tanto en tiempo como en frecuencia[23]. Esta función a la que denominó 'wavelet' podía ser trasladada y escalada con lo cual daba lugar a un conjunto de funciones derivadas de la función original. Esta familia de funciones permitían hacer un análisis tiempo-escala el cual entregaba mejor resolución respecto del análisis con la Transformada de Fourier de tiempo reducido.

Stephane Mallat hizo una contribución clave a la teoría de wavelets en 1985 cuando propuso un algoritmo computacional eficiente para el cálculo de los coeficientes

wavelet, esto a través del descubrimiento de la relación entre el cálculo de los coeficientes y los filtros espejo de cuadratura. Con este descubrimiento Mallat dio lugar al uso extendido de la técnica de wavelets, además de abrir las puertas al análisis multiresolución.[22]

Años después Ingrid Daubechies, basándose en el trabajo de Mallat y el concepto de multiresolución, creó su propia familia de wavelets, un conjunto de wavelets ortonormales, cuyos valores no están descritos de manera analítica sino que se encuentran tabulados. La principal ventaja de las wavelets de Daubechies es que su implementación por medio de filtros digitales resulta sencilla y además eficiente.[23]

Por otro lado, Norden Huang publica un artículo donde propone una transformada llamada *Transformada de Hilbert-Huang*, la cual es eficiente para el análisis de señales no estacionarias y a diferencia de los métodos Tiempo-Frecuencia y tiempo-escala esta es capaz de analizar señales no lineales, lo que supone todo un cambio en áreas donde tradicionalmente se utilizaban los métodos antes mencionados. Esta transformada esta compuesta de dos partes; la primera es el algoritmo *Descomposición Empírica en Modos*, que descompone la señal en funciones de modo intrínseco, y posteriormente se aplica la transformada de Hilbert a cada una de las componentes obtenidas.[42]

1.2. Objetivo

El objetivo principal de este trabajo es entender mejor el como funcionan las técnicas, esto a través de su estudio, implementación y evaluación aplicadas a señales sintéticas y señales reales de EEG. De los resultados obtenidos se pretende concluir de manera cualitativa, que representación Tiempo-Frecuencia se adecua mejor al análisis de este tipo de señales.

1.3. Justificación

Como veremos a detalle, la Transformada de Fourier permite obtener de una señal temporal las frecuencias que la componen. Sin embargo, no nos informa de cuando es que se presenta una frecuencia específica. Es por ello que, para el análisis de una señal no estacionaria como el EEG donde su contenido frecuencial varía con el tiempo, se requieren de técnicas que proporcionen información tanto temporal como frecuencial. Para este fin se estudian la Transformada de Fourier de Tiempo Reducido, la Transformada Wavelet y la Transformada de Hilbert-Huang.

1.4. Planteamiento del problema

Actualmente existe un gran interés en el análisis de señales biomédicas, principalmente en el área médica, ya que, un correcto análisis de estas señales pueden facilitar de manera considerable el diagnóstico de cualquier anomalía e incluso auxiliar en la prevención.

Sin embargo, este tipo de señales en particular no son fáciles de analizar, debido a distintos factores entre los que destacan:

- Alto contenido de ruido
- Amplitudes bajas
- Comportamiento aleatorio y no lineal

Y la lista continúa, la señal del electroencefalograma, que es en la que nos enfocaremos durante los capítulos subsecuentes, resulta aún más complicada debido principalmente a que su amplitud es menor incluso a la del ruido.

Al pasar de los años se han desarrollado diferentes técnicas que de una manera u otra tratan de superar estas dificultades y obtener dentro de lo posible, un análisis más certero.[43]

1.5. Resumen sobre las técnicas empleadas

En este documento se evaluarán tres métodos de análisis que se utilizan frecuentemente para el procesamiento de señales fisiológicas. El primero, llamado Transformada de Fourier de Tiempo Reducido (TFTR), con el cual es posible obtener una representación de la señal en el plano Tiempo-Frecuencia a través de una fragmentación de la señal por medio de funciones ventana y su posterior análisis frecuencial a cada fragmento por separado. Esta técnica tiene como principal problema la resolución ya que debido al principio de incertidumbre de Heisenberg no es posible conocer la ubicación temporal exacta de un componente frecuencial. Por lo que se recurre frecuentemente a variar el ancho de la ventana para obtener mejores resultados ya sea en la frecuencia o en el tiempo según sea el caso.[21]

La importancia de la TFTR radica principalmente en que dio pie a la creación de la Transformada Wavelet (TW) que a diferencia de la primera cuenta con una resolución variable dependiendo de si se tratan altas o bajas frecuencias, además de poder variar el núcleo de la transformada, llamada en este caso wavelet madre. El análisis Wavelet consiste básicamente en dada una wavelet madre, se generan otras wavelets con diferente escala y desplazamientos en el tiempo y a su vez estas se proyectan en la señal analizada para obtener los coeficientes de detalle y aproximación que la describen.[23]

A pesar de las bondades de la TW, aun se encuentra presente la limitante del principio de incertidumbre, además de que los resultados dependen de la correcta elección de la wavelet madre, proceso que muchas veces se realiza de manera empírica.[34]

Por último se tiene la Transformada de Hilbert-Huang (THH), la cual realiza una descomposición de la señal en modos oscilantes a través del algoritmo Descomposición Empírica en Modos (DEM) y posteriormente se analizan sus características frecuenciales por medio de la Transformada de Hilbert (TH).

Las ventajas de la THH sobre las anteriores técnicas son varias, la principal es que la THH al realizar la descomposición en el dominio del tiempo no se rige por el principio de incertidumbre. Otra ventaja es que es una técnica adaptable y se maneja de acuerdo a la naturaleza de la señal. Por último, es funcional con señales no lineales, lo cual resulta fundamental en el análisis de señales biomédicas.[38]

	Fourier	Wavelet	Hilbert
Base	A priori	A priori	Adaptativa
Frecuencia	Global	Regional	Local
Representación	Energía-frecuencia	Energía-tiempo -frecuencia	Energía-tiempo -frecuencia
No lineal	No	No	Si
No estacionaria	No	Si	Si
Base teórica	Completa	Completa	Empírica

Cuadro 1.1.: Cuadro comparativo entre características de los métodos de Fourier, Wavelet y Hilbert-Huang.[44]

En el cuadro 1.1 se muestra un resumen de las características de cada una de estas técnicas

1.6. Metodología

En esta sección se utiliza la metodología de Diseño e implementación de sistemas DSP (DISDSP por sus siglas), descrita a detalle en [59]. Esta consta de cuatro fases:

- Planteamiento del problema
- Análisis del problema
- Diseño de la solución y construcción del prototipo
- Prueba y refinamiento del prototipo

A continuación se describe de manera concreta cada una de las fases acorde al proyecto.

1.6.1. Planteamiento del problema

El problema radica en la dificultad de analizar señales EEG con técnicas clásicas como la Transformada de Fourier, por lo que se hace uso de técnicas como son la Transformada de Fourier de tiempo reducido, la Transformada Wavelet y la Transformada de Hilbert-Huang.

1.6.2. Análisis del problema y alternativas de solución

Se revisan conceptos base sobre señales EEG que son el tipo de señales a analizar desde su origen, detección, clasificación y aplicaciones. También se revisan temas necesarios para el entendimiento del documento relacionados a señales y su representación tanto temporal como frecuencial, etc.

Posteriormente se profundiza en la teoría sobre las técnicas estudiadas (Transformada de Fourier de Tiempo Reducido, Transformada Wavelet y la Transformada de Hilbert-Huang) con el fin obtener una visión detallada de su funcionamiento.

1.6.3. Diseño de la solución y construcción del prototipo

Con base en la teoría y documentación revisada, se implementó cada una de las técnicas, tomando como valores objetivo, los proporcionados por el software *MATLAB*.

1.6.4. Prueba y refinamiento del prototipo

Las pruebas se realizaron con señales sintéticas que representan la no estacionariedad de una señal y de acuerdo a los resultados obtenidos, se determinó su desempeño en comparación con los algoritmos de *MATLAB*.

1.7. Estructura del documento

En el siguiente capítulo se revisarán los conceptos básicos para dar un panorama al lector sobre señales EEG (por sus siglas en inglés *ElectroEncephaloGraph*) que son el tipo de señales que se utilizarán durante el desarrollo de este documento, desde su origen, detección, clasificación y aplicaciones

En el capítulo tres se hace un amplio recorrido sobre teoría de sistemas y señales, que van desde el concepto de señal, pasando por su representación y tratamiento en diferentes dominios como son temporal y frecuencial, hasta conceptos más elaborados como estacionariedad de una señal y su importancia en el análisis de señales.

En el cuarto capítulo, ya teniendo una base sobre señales, se profundiza en técnicas de procesamiento diseñadas para manejar la no estacionariedad, estas son la Transformada de Fourier de Tiempo Reducido, Transformada Wavelet y la Transformada de Hilbert-Huang. Los temas a revisar van desde su definición, representación gráfica y limitaciones. También se incluye la implementación de cada una de estas técnicas.

En el capítulo cinco se realiza una evaluación de los algoritmos implementados sobre diferentes señales que representan algunas de las características claves de las señales EEG, para luego validar los resultados de cada una de estas en una señal EEG real.

2. La señal EEG

Ya en el siglo XIX había sido descrita la actividad eléctrica en el cerebro de animales de forma cualitativa, pero fue el psiquiatra alemán Hans Berger quien analizó dicha actividad de forma sistemática y cuyo registro denominó como electroencefalograma (EEG).[58]

El electroencefalograma es un registro de la actividad eléctrica existente sobre la corteza cerebral debido a la variación de voltaje producido por corrientes iónicas entre las neuronas. Los registros se obtienen colocando electrodos sobre la superficie del cráneo. Los electrodos que se utilizan son llamados "electrodos de potencial de campo", dado que su función es detectar la generación de campos eléctricos por parte de grupos de neuronas.[1] Algunas de las ventajas de esta técnica es que es no invasiva, es accesible y de relativo bajo costo si se compara con otras técnicas como el MEG (Magnetoencefalografía) y el PET (Tomografía por emisión de positrones) por lo que se utiliza frecuentemente en la investigación y en la practica clínica.[2]

2.1. Actividad eléctrica del cerebro

El campo eléctrico detectado por los electrodos es generado a partir del potencial de membrana de células excitables, que como resultado de la actividad electroquímica se produce un potencial de acción (Ver figura 2.1). En el caso de los electrodos de potencial de campo, las mediciones que se obtienen son del campo eléctrico derivado de la acción de muchas células, que se localizan dentro del área que cubre el electrodo. Los potenciales registrados en el EEG son relativamente importantes y de alrededor de 100 μV . [1]

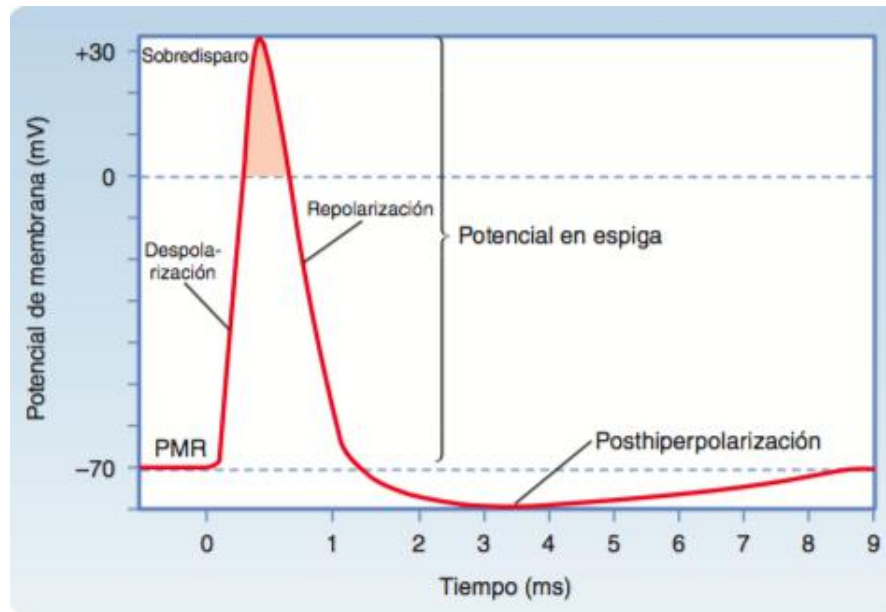


Figura 2.1.: Comportamiento del potencial de membrana.[1]

En este caso, el campo eléctrico se propaga a través de las diferentes capas existentes entre la corteza cerebral y el cuero cabelludo. [15]

2.2. El electroencefalograma (EEG)

El EEG es una herramienta fundamental para el diagnóstico de trastornos médicos relacionados con el ciclo sueño-vigilia como son el insomnio, la enuresis nocturna, el sonambulismo, la apnea del sueño y la narcolepsia. Además de diferentes tipos de epilepsia.

Un EEG se considera normal si los valores medidos están dentro de un cierto rango. Sin embargo, estos valores no son absolutos y pueden variar en función de algunos factores como son la edad del sujeto, la posición de los electrodos y la presencia de fármacos y enfermedades.[1]

2.2.1. Sistema Internacional 10-20

La corteza cerebral humana ocupa una superficie de aproximadamente 2500 cm^2 y se divide en hemisferios izquierdo y derecho; a su vez, estos pueden subdividirse en lóbulos (Ver figura 2.2), cuyos nombres son lóbulos frontal, parietal, temporal y occipital.[1]

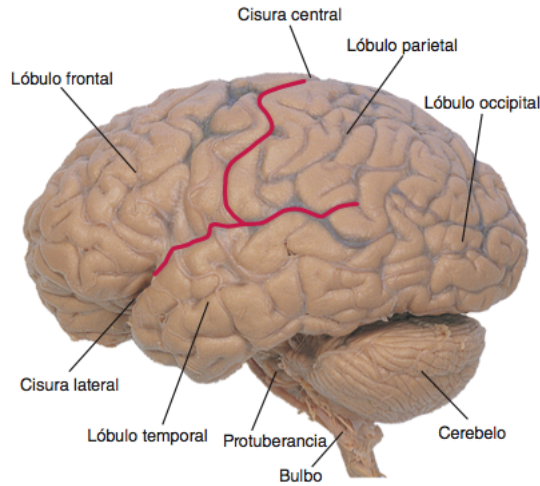


Figura 2.2.: Descripción de la localización de lóbulos en el cerebro.[1]

Como se mencionó anteriormente, el proceso para obtener un electroencefalograma consiste en distribuir electrodos de potencial de campo sobre la superficie del cráneo con lo cual se obtienen señales cuyas características son amplitudes que rondan los microvolts (μV) y frecuencias de entre 0.5 y 100 Hz.[45]

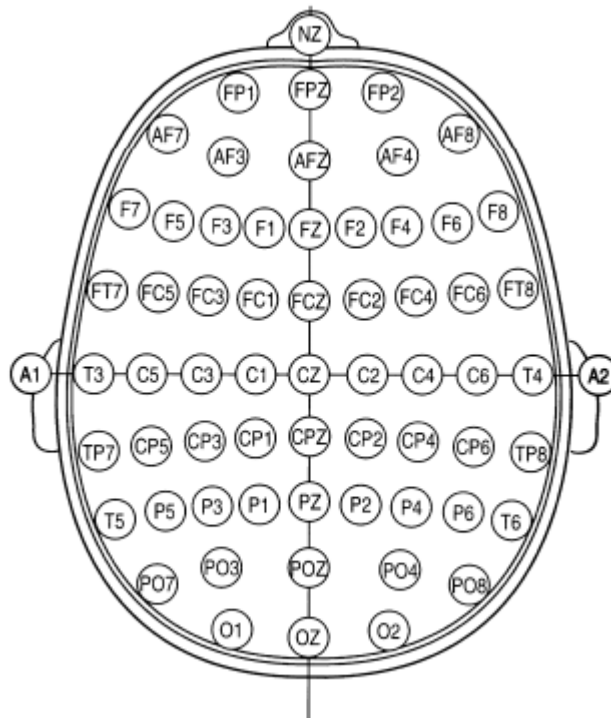


Figura 2.3.: Sistema Internacional 10-20.[46]

Los nombres y la posición de los electrodos están determinados por el sistema internacional 10-20 (Ver figura 2.3). Dicho sistema fue desarrollado con el objetivo de estandarizar la reproducibilidad de tal forma que los estudios sobre un sujeto pudieran ser comparados a lo largo del tiempo y con otros sujetos. Cada electrodo tiene una letra para identificar el lóbulo cerebral: Frontal (F), Temporal (T), Parietal (P) y Occipital (O), y un número para identificar el hemisferio. Los nodos de referencia usan la letra A. Los electrodos situados en el hemisferio izquierdo tienen números impares y los situados en el derecho, pares.[3]

2.2.2. Clasificación de las señales EEG

Las ondulaciones resultantes en los registros de potenciales eléctricos del cerebro son llamadas ondas EEG y sus características dependen del grado de actividad en la corteza cerebral. Las frecuencias de estas ondas, como se mencionó anteriormente, varían en el rango de 0.5 a 100 Hz. Para su clasificación, este rango es dividido en 4 bandas cuyas principales propiedades se describen en el cuadro 2.1.[1]

Clasificación	Frecuencias	Comentarios
Onda Delta	0.5-4 Hz	Este ocurre en etapas de sueño profundo
Onda Theta	4-8 Hz	Se presenta en estado de alerta del sujeto
Onda Alpha	8-13 Hz	Se presenta en estado de vigilia, relajado y con ojos cerrados
Onda Beta	13-22 Hz	Se presenta en estado de vigilia, relajado y con ojos abiertos

Cuadro 2.1.: Características presentes en el EEG.[45]

A continuación se muestra un gráfico con las formas de onda que se pueden encontrar en un EEG.

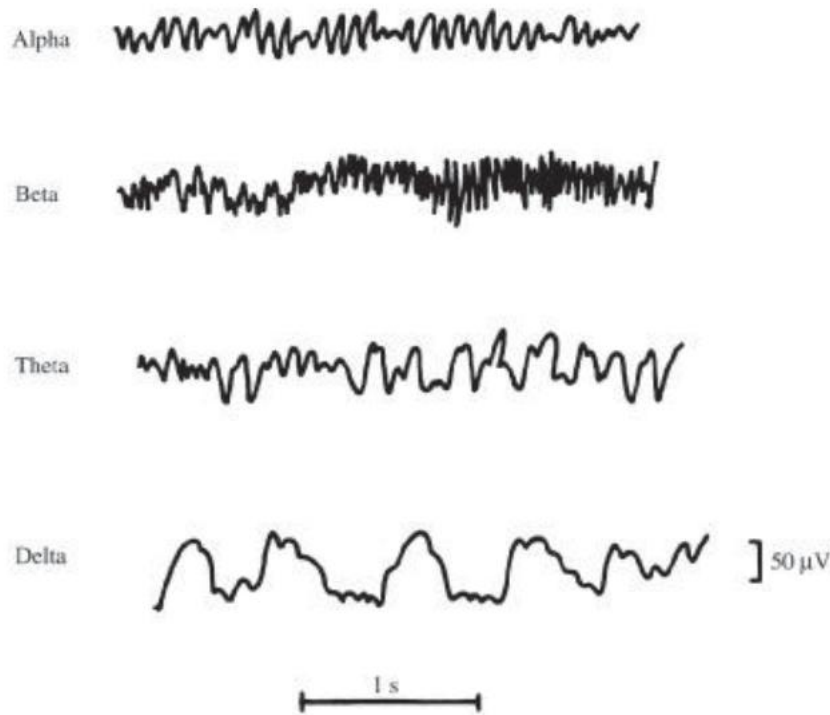


Figura 2.4.: Tipos de ondas EEG.[15]

Como se puede observar en la figura 2.4, los diferentes tipos de onda son totalmente asíncronas y de naturaleza aleatoria por lo que se requiere utilizar técnicas específicas para su correcto tratamiento.

2.2.3. Potenciales evocados

Los *potenciales evocados* (PE) son variaciones presentes en la señal EEG como consecuencia de un estímulo externo y son utilizados de manera frecuente en investigación y clínica, para evaluar el correcto funcionamiento de las vías sensoriales.

De acuerdo al tipo de estímulo que los provoca, algunos PE se clasifican en:

- EP visuales: Se presentan en la corteza visual tras una estimulación luminosa.
- EP auditivos: Se generan en la cóclea mediante un estímulo auditivo y se propagan hasta llegar al córtex cerebral.
- EP somatosensoriales: Se registran estimulando nervios periféricos como el tibial, normalmente mediante estímulos eléctricos.[3]

2.3. Problemática de señales EEG

Ya que la medición se realiza de forma indirecta, es decir, la señal atraviesa varias capas antes de ser detectada por el electrodo (figura 2.5), se genera uno de los principales problemas del EEG, el ruido. Además de esto, se tienen otro tipo de señales conocidas como artefactos, cuyo origen es el mismo sujeto, siendo los más comunes el ritmo cardíaco y los producidos por músculos faciales. La presencia de los artefactos representa un problema importante ya que afecta las mediciones obtenidas de la señal de interés.[3]

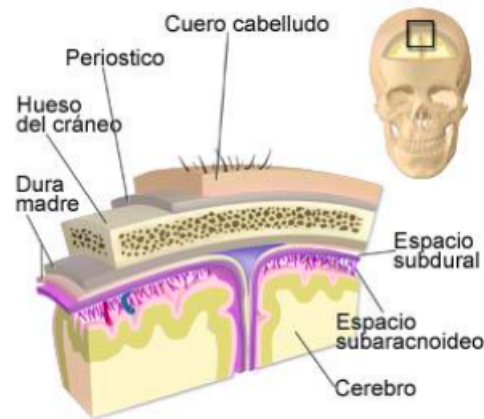


Figura 2.5.: Capas que atraviesa la bioseñal desde el cerebro hasta el electrodo.[29]

Sumado a lo anterior se tiene que, las capas por las que atraviesa la señal tienen un efecto de filtrado paso bajas por lo que se requiere tomar en cuenta esta pérdida de información en la señal analizada.

2.4. Aplicaciones

Desde la invención del EEG a principios del siglo XX de la mano de Hans Berger, se han encontrado un importante número de aplicaciones, sobre todo en el área médica para diagnóstico y rehabilitación.

A continuación se describe de manera breve algunos ejemplos de aplicaciones.

2.4.1. Clasificación del sueño

Una de las aplicaciones más importantes del análisis de señales EEG es la del estudio de diferentes etapas del sueño. Dichas etapas se definen de acuerdo a la duración y la variación de las diferentes bandas frecuenciales que componen el EEG. La primera

etapa se conoce como *Sueño NREM* o sueño de ondas lentas y se caracteriza por una disminución en la frecuencia cardíaca y la presión arterial. Además de que los músculos del cuerpo se relajan, esta se divide en cuatro fases que se describen a continuación.

Fase 1: Se presentan ondas alfa y ondas teta.

Fase 2: Se muestra actividad de ondas lentas y husos del sueño (ráfagas de baja amplitud y contenido frecuencial entre 12 y 14 Hz), y por complejos K (potenciales grandes y lentos).

Fase 3: Se registra actividad de ondas delta y husos del sueño de manera infrecuente.

Fase 4: Se caracteriza por la aparición de ondas delta.

La segunda etapa es conocida como *sueño REM*, en esta se observa cambios intermitentes en la frecuencia cardíaca, la presión arterial y la respiración.

En la figura 2.6 se pueden observar algunos ejemplos de registros sobre estas fases.

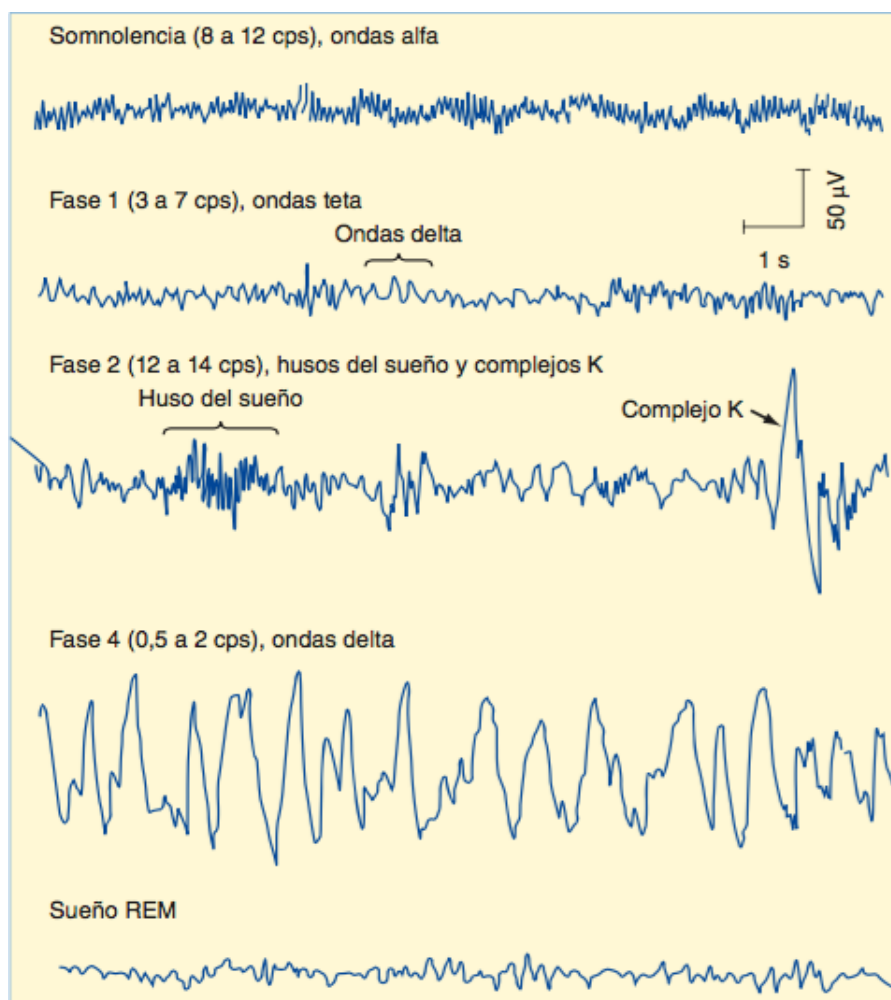


Figura 2.6.: EEG de las diferentes etapas del sueño en ciclos por segundo (cps).[1]

La importancia de su estudio es debido a que existen un número considerable de enfermedades y trastornos que afectan esta actividad esencial lo que desvoca en desórdenes y un desempeño pobre en las actividades diarias de la persona afectada. Entre los trastornos del ciclo sueño-vigilia se encuentran el insomnio, la enuresis nocturna, el sonambulismo, la apnea del sueño y la narcolepsia.[1]

2.4.2. Imaginación motora

Se define como imaginación motora (IM) a la variación en el número de oscilaciones de la actividad cerebral debido a la sola intención de realizar un movimiento. Cuando dicha variación se caracteriza por un incremento en la actividad oscilatoria, se conoce como Sincronización Relacionada a un Evento (SER). Por el contrario, si existe un decremento es llamado Desincronización Relacionada a un Evento (DRE).

Debido a que el comportamiento de las variaciones DRE y SER es similar a la actividad cerebral presente durante un movimiento real, esta se utiliza frecuentemente como mecanismo de control para la implementación de sistemas ICC (Interfaz Cerebro-Computadora).[30]

2.4.3. Detección de focos epilépticos

El EEG juega un papel fundamental en el diagnóstico de los diferentes tipos de crisis epilépticas ya que, estas tienden a generar cambios muy particulares en la señal, dícese componentes de alta frecuencia. En la figura 2.7 se muestran algunos ejemplos de las formas del EEG durante una crisis.

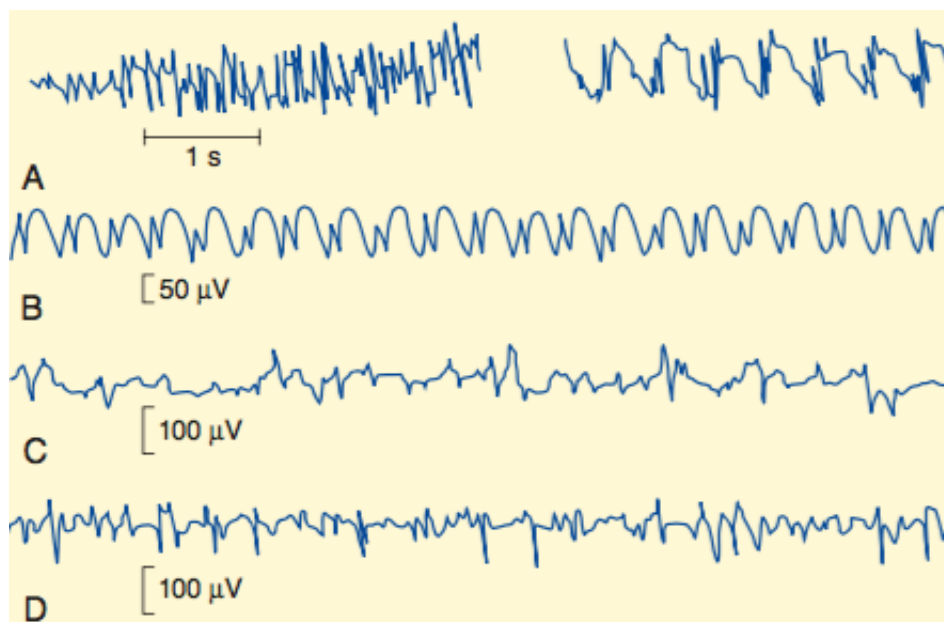


Figura 2.7.: Señal EEG presente en diferentes casos de epilepsia.[1]

Las crisis epilépticas se clasifican en parciales y generalizadas. Un ejemplo de parcial es la que inicia con contracciones localizadas en los músculos contralaterales y se propaga a otros músculos.

Las de tipo generalizado se caracterizan principalmente por la pérdida del conocimiento del paciente, lo que resulta peligroso una de las causas es recibir un golpe al caer.[1]

2.5. Conclusiones

Como se observó durante el desarrollo de este capítulo, existen numerosas variables a considerar al momento de trabajar con señales EEG, ya que desde su obtención se encuentra presente la pérdida de información y gran cantidad de ruido, por lo que, al realizar su análisis se deben tener en cuenta estos aspectos y otros más que se tratarán en los capítulos siguientes.

3. Fundamentos de señales y sistemas

Es importante tener presentes los conceptos de señales y sistemas independientemente del área en que nos desarrollemos, ya que, de estos se desprenden notables herramientas cuya aplicación no se limita a un único campo de estudio. Esto se puede ver fácilmente en disciplinas como la sismología, telecomunicaciones, acústica, ingeniería biomédica, entre muchas otras, pues aunque la naturaleza de las señales y los sistemas que se emplean son diferentes, estos tienen características en común.

Los sistemas son conjuntos de elementos interconectados que dada una señal de entrada, existe una señal de salida resultado del comportamiento del mismo. Como veremos en esta sección existen ciertas características de los sistemas que simplifican en gran medida su análisis.[7]

Por otra parte, una señal es una magnitud física que contiene información sobre la naturaleza o comportamiento de un fenómeno. Dependiendo de la dimensión de la señal, esta puede variar respecto de una o más variables independientes.[6]

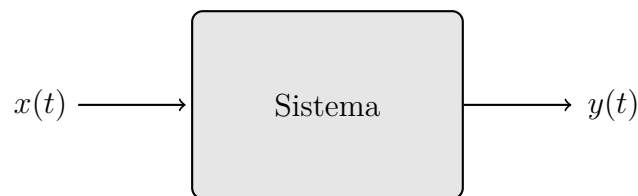


Figura 3.1.: Diagrama de un sistema con señal de entrada y salida.

Las señales se catalogan según sus características, por lo que existe más de un tipo de clasificación. Por lo tanto, conocer las características de la señal es fundamental ya que es en base a estas que se eligen las técnicas más adecuadas para su tratamiento.[6]

3.1. Señal continua y señal discreta

El mundo real está compuesto en su mayoría por señales de naturaleza continua, siendo la temperatura de una habitación, el voltaje de una batería y la velocidad de un automóvil, ejemplos de este tipo de señales, por lo que su comprensión es

importante, ya que es por medio de estas que se puede analizar y cuantificar nuestro entorno. [6]

A continuación se muestra un ejemplo de señal continua.

$$x(t) = A \cos(\omega t \pm \theta) \quad ; \quad 0 < t < 1 \quad (3.1)$$

donde:

A = amplitud de la señal.

ω = frecuencia angular.

t = tiempo continuo.

θ = defase de la señal.

Una señal continua se caracteriza por estar definida en cualquier instante de tiempo t donde $t \in \mathbb{R}$.

Por otro lado, se tiene que una señal discreta es aquella cuyos valores están definidos en ciertos instantes de tiempo n , donde $n \in \mathbb{Z}$. [7] Un ejemplo de señal discreta o secuencia (como también se le conoce) se muestra a continuación.

.

$$x[n] = A \cos(\Omega n \pm \phi) \quad ; \quad 0 : n : 100 \quad (3.2)$$

donde:

A = amplitud de la señal.

Ω = frecuencia angular.

n = tiempo discreto.

ϕ = defase de la señal.

Usualmente, la distancia entre valores es la misma, de tal forma que la relación entre dos muestras sucesivas se pueda expresar como un múltiplo entero.

$$x[n] = x[nT_s] \quad (3.3)$$

A T_s se le conoce como periodo de muestreo y se define como el intervalo de tiempo que existe entre la toma de una muestra y otra. [9]

En la figura 3.2 se representa una misma señal en el dominio continuo y discreto.

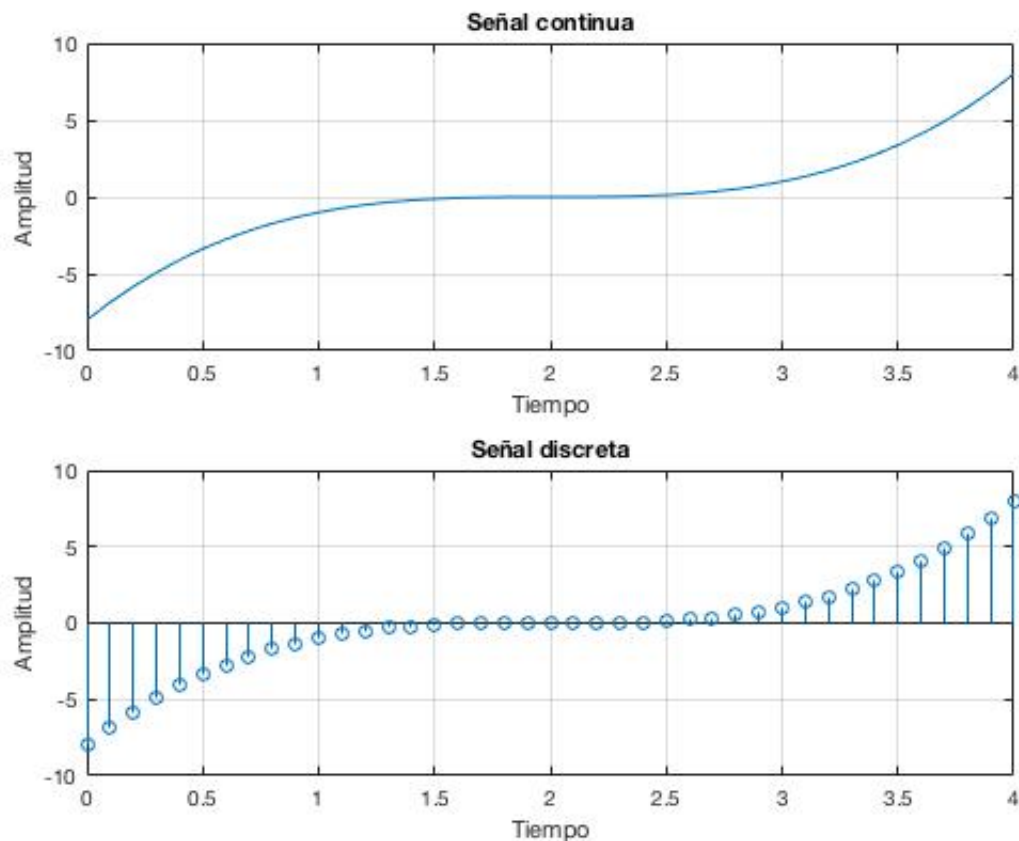


Figura 3.2.: Representación de una señal continua y discreta.

La importancia de utilizar señales discretas radica en el hecho de que pueden ser procesadas por sistemas digitales, que a su vez, se traduce en mayor velocidad de procesamiento y menor costo computacional. Por lo que aplicando una técnica de conversión llamada muestreo, se puede obtener una señal digital a partir de una analógica y con esto es posible utilizar computadoras para resolver cálculos complejos y obtener una excelente aproximación del comportamiento de dicha señal.[9]

3.2. Señales determinísticas

En el mundo real las señales determinísticas no existen ya que, siempre hay ruido aditivo o incluso cambios repentinos que difícilmente se pueden predecir. Sin embargo, de manera frecuente es conveniente aproximar las señales con modelos determinísticos.

Una señal determinista es aquella que puede ser descrita mediante un modelo matemático, tabla de datos, o una regla bien definida, con lo cual se asegura que existe

un conocimiento preciso de los valores de la señal en cualquier instante de tiempo. [6]

3.2.1. Señales periódicas y no periódicas

Una señal periódica (Ver figura 3.3) se caracteriza por tener una repetición de valores cada cierto intervalo de tiempo T , el cual es llamado periodo.

La propiedad de periodicidad esta definida como:

$$x(t) = x(t + mT) \quad ; \quad -\infty < t < \infty \quad (3.4)$$

donde:

m = numero constante donde $m \in \mathbb{Z}$

T = periodo de la señal.

El valor mínimo de T para el que se cumple la periodicidad se le conoce como periodo fundamental y usualmente se representa como T_0 .

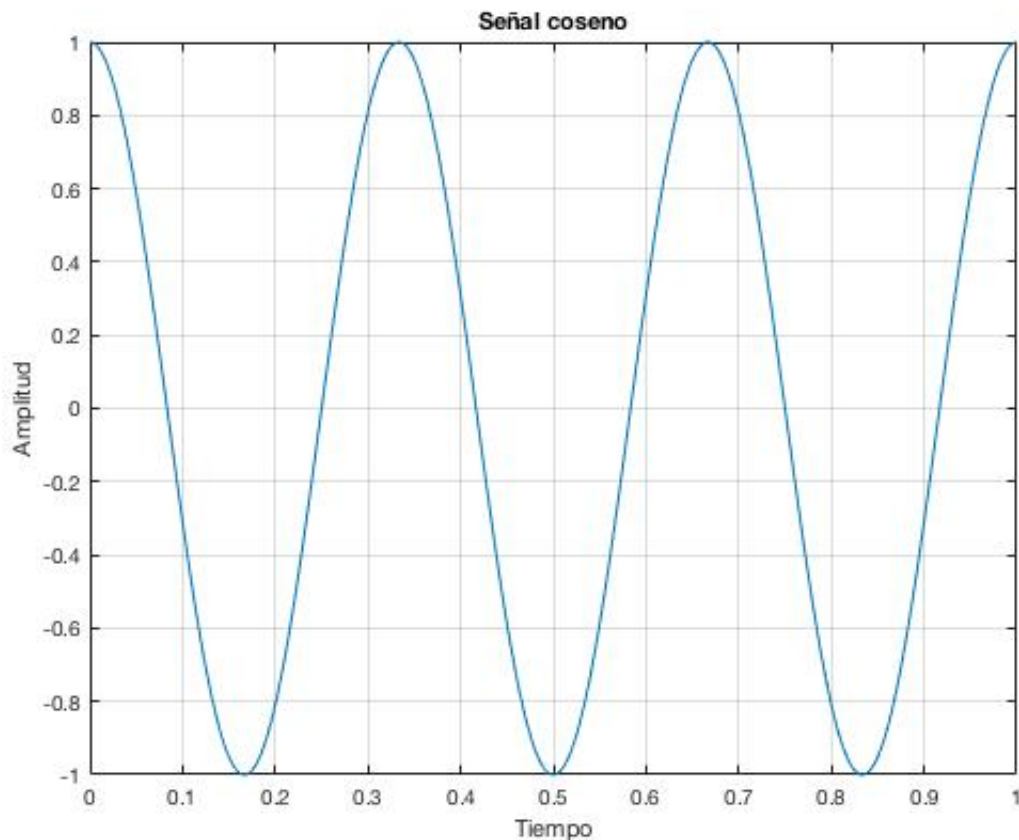


Figura 3.3.: La señal periódica más simple es la señal senoidal cuyo periodo es 2π .

Las señales no periódicas como es de suponerse no cumplen con la ecuación 3.4, aunque a menudo resulta conveniente considerarlas señales “casi periódicas” tomando como periodo la duración total de la señal y suponiendo que se repite hasta el infinito. (Ver figura 3.4)[7]

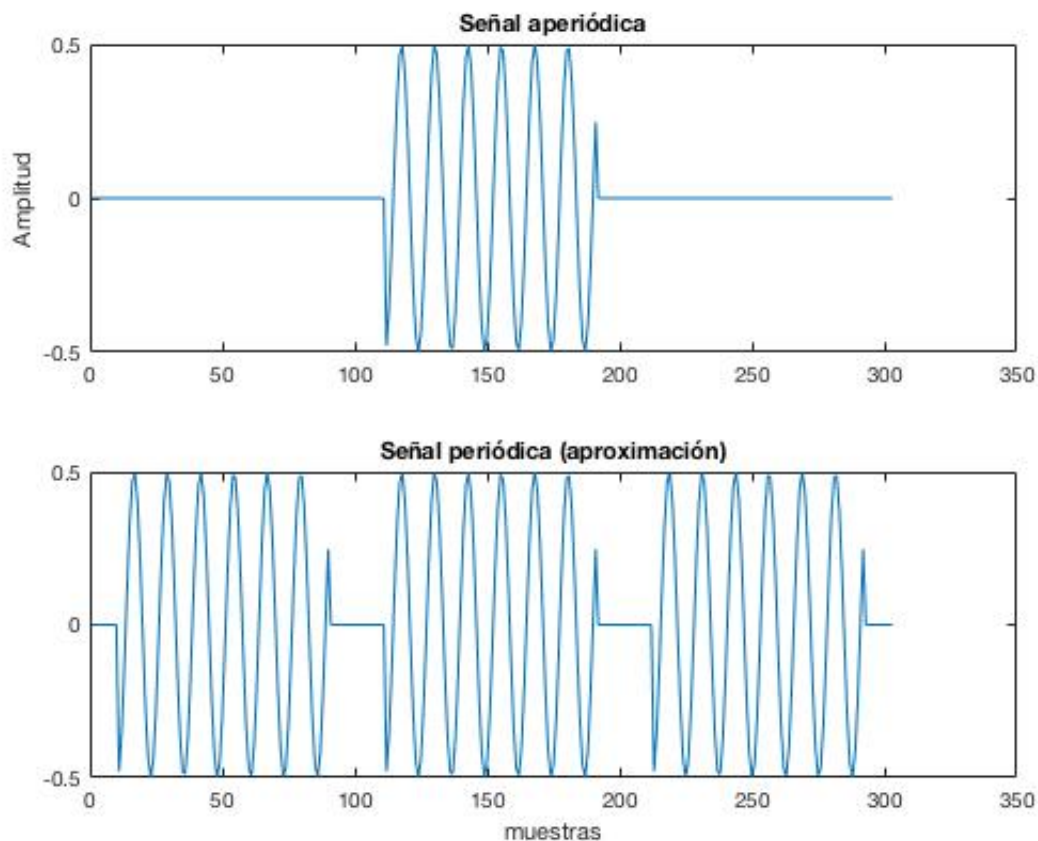


Figura 3.4.: Representación de una señal no periódica (aperiódica) y su aproximación a señal periódica.

La propiedad de periodicidad se define de manera análoga para la secuencia $x[n]$, con la notable excepción de la exponencial compleja $e^{j\Omega_0 n}$ que es periódica si y solo si se cumple la siguiente igualdad.

$$\Omega_0 N = 2\pi m \quad (3.5)$$

Donde el periodo N multiplicado por la frecuencia fundamental Ω_0 es múltiplo de 2π , en otras palabras, la frecuencia $\frac{m}{N}$, debe ser un número racional.

El hecho de que una señal es periódica nos brinda ciertas ventajas, una de ellas es su descomposición en señales de menor complejidad como senos y cosenos de diferente

frecuencia y amplitud. Este proceso se conoce como descomposición en series de Fourier. En el caso de señales no periódicas, también es posible su descomposición a través de la transformada de Fourier, considerando que el periodo tiende a infinito.[7]

3.3. Señales estocásticas

En la naturaleza abundan señales que aunque es posible utilizar un modelo determinista para su representación, resulta bastante complicado por lo que a menudo se prefieren procesos estocásticos o aleatorios. Por ejemplo, fenómenos meteorológicos y ruido térmico en dispositivos electrónicos resulta más sencillo caracterizarlos estadísticamente en términos de promedios que obtener una descripción basada en un modelo determinista (Ver figura 3.5).[8]

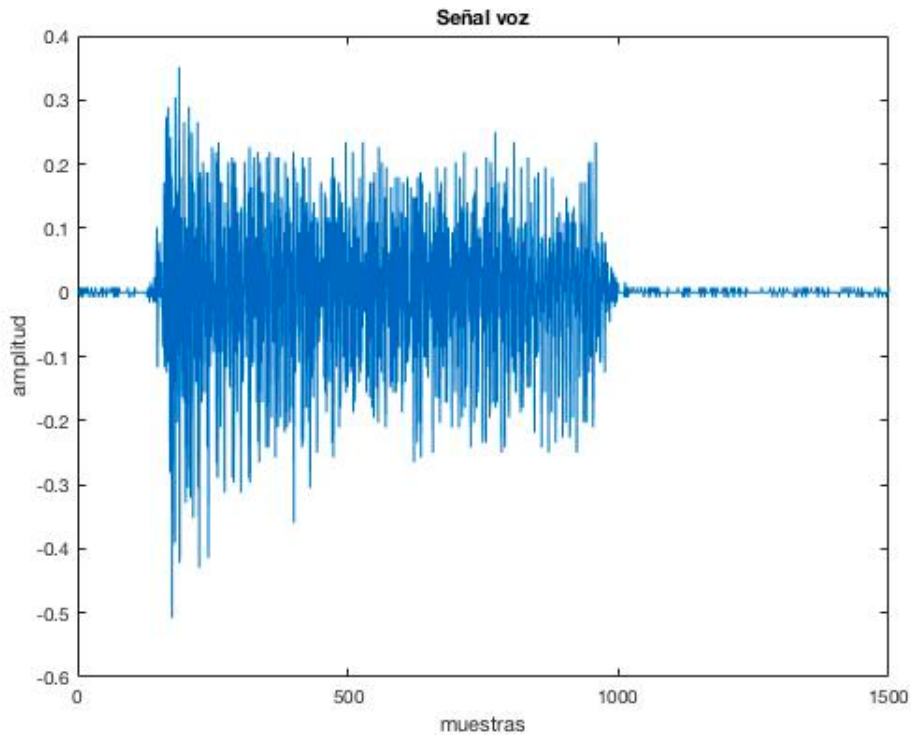


Figura 3.5.: Representación de una señal que corresponde al sonido de la letra “A”.

Un proceso estocástico es un conjunto de funciones temporales que describen las diferentes maneras en que un fenómeno aleatorio puede comportarse. En general estas funciones temporales están compuestas por variables aleatorias, que a su vez, están caracterizadas de forma estadística.[36]

3.3.1. Señales estacionarias y no estacionarias

Las señales estacionarias (figura 3.6) son una clase de señales estocásticas cuya particularidad es que sus propiedades estadísticas no dependen del tiempo. El concepto de estacionariedad supone que los parámetros estadísticos dependen sólo del intervalo de observación y no del instante en el que se observen.[6]

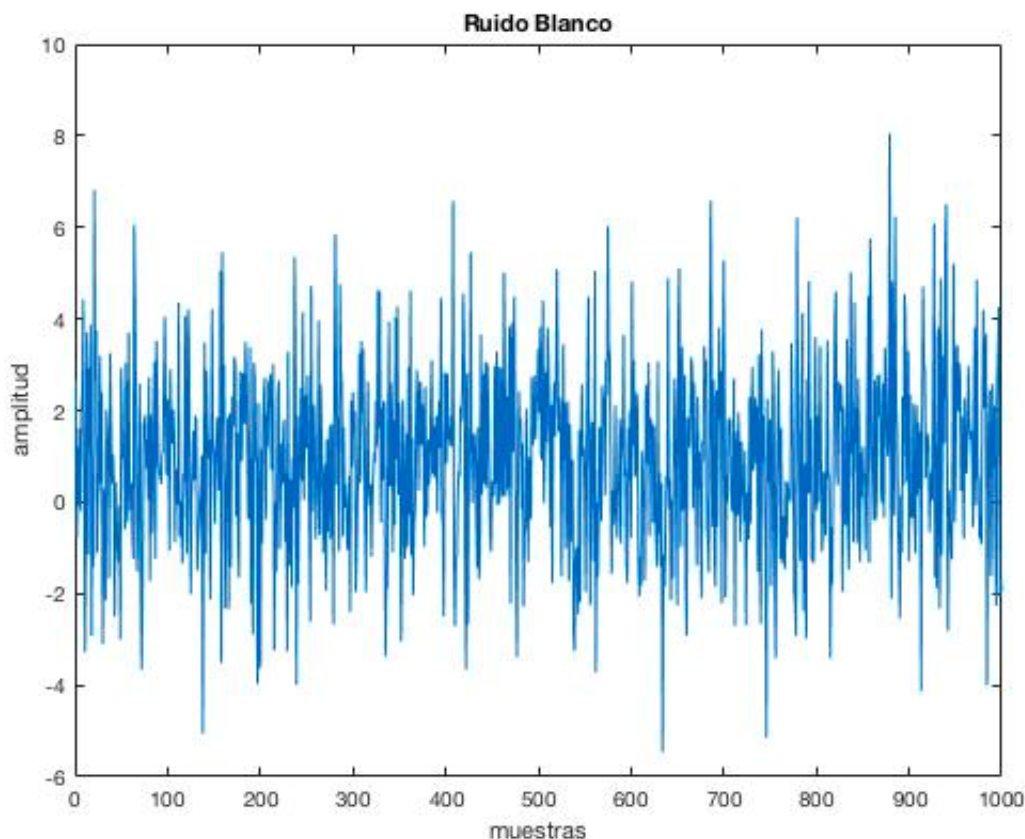


Figura 3.6.: El ruido blanco es una señal estacionaria.

En el procesamiento digital es común utilizar procesos estacionarios en sentido amplio para definir estas señales, lo que significa que es suficiente con que los parámetros de media y varianza permanezcan constantes en el tiempo.[6] Esto resulta práctico pues el que se obtenga la totalidad de los parámetros estadísticos constantes es complejo, sin mencionar el alto costo computacional que esto conlleva.

Por otro lado, en procesos no estacionarios (figura 3.7) las propiedades estadísticas varían con el tiempo, por lo cual se aplican técnicas para poder representarlas como cuasi estacionarias o estacionarias por partes.[9]

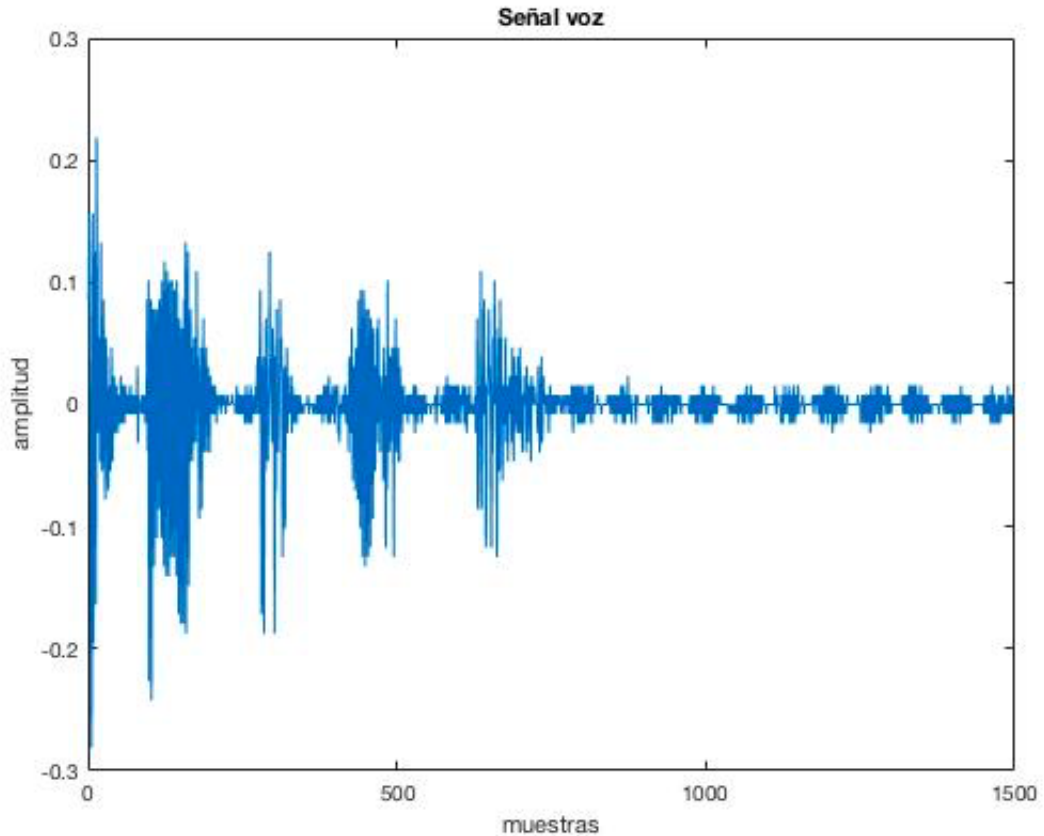


Figura 3.7.: Ejemplo de una señal no estacionaria (Dialogo “Hola, ¿cómo estás?”).

El que la señal sea estacionaria es condición necesaria para el uso de gran cantidad de herramientas en el procesamiento digital de señales.

3.4. Generalidades sobre sistemas discretos

3.4.1. Propiedades de los sistemas

Linealidad

Se denomina sistema lineal a aquel que cumple con los principios de homogeneidad y superposición descritos a continuación. La propiedad de linealidad en un sistema tiene muchas ventajas, entre las que destacan el poder descomponer un sistema de mayor complejidad en sistemas sencillos obteniendo el mismo comportamiento. Además de que se tiene un número importante de herramientas y métodos para trabajar con sistemas lineales, mientras que para sistemas no lineales existen herramientas limitadas que resultan no ser del todo triviales y en ocasiones no se llega a

una solución satisfactoria. Afortunadamente una cantidad considerable de sistemas presentes en la naturaleza se pueden aproximar a través de modelos lineales.[7]

- Homogeneidad

Sean $x[n]$ e $y[n]$ señales de entrada y salida respectivamente y una constante α , se cumple la propiedad de homogeneidad si y sólo si:

$$\alpha x[n] \xrightarrow{T} y[n] \tag{3.6}$$

en donde:

$$y[n] = \alpha T\{x[n]\} \tag{3.7}$$

- Superposición

Sea una señal de entrada compuesta por $x_1[n]$ y $x_2[n]$, y una señal de salida $y[n]$ se cumple con el principio de superposición si y sólo si[6]:

$$x_1[n] + x_2[n] \xrightarrow{T} y[n] \tag{3.8}$$

en donde:

$$y[n] = T\{x_1[n]\} + T\{x_2[n]\} \tag{3.9}$$

Invariancia en el tiempo

Esta propiedad se refiere básicamente a que cualquier variación en el tiempo aplicado en la señal de entrada tendrá como consecuencia una variación de igual magnitud en la salida, lo que implica que la relación entrada-salida no varía con el tiempo, esto se muestra a continuación.

Sean las señales $x[n]$ e $y[n]$ y un valor constante k , el sistema es invariante en el tiempo si y solo si:

$$x[n] \xrightarrow{T} y[n] \tag{3.10}$$

$$x[n - k] \xrightarrow{T} y[n - k] \tag{3.11}$$

Derivado de estas dos propiedades se define una clase de sistemas llamados sistemas lineales e invariantes en el tiempo (LTI por su siglas en inglés) para los cuales existe un número importante de técnicas para su manejo tanto analítico como práctico.

Un ejemplo de ello es que, dado un sistema LTI este es fácilmente caracterizable mediante su respuesta cuando la señal de entrada es un impulso unitario.[7]

Causalidad

Se dice que un sistema es causal si se presenta una salida $y[n]$ a partir de la existencia de una entrada $x[n]$ en un instante de tiempo determinado, es decir, $y[n] = 0$ para $x[n] = 0$. Frecuentemente también se le conoce como sistema no anticipativo, ya que no anticipa valores futuros.[7]

Aunque el principio de causalidad parece inherente a la naturaleza, existen aplicaciones dentro del área de procesamiento digital en las cuales resulta irrelevante si un sistema es o no causal. Por ejemplo, el procesamiento de datos almacenados o fuera de línea y el procesamiento de imágenes, entre muchos otros.[7]

3.4.2. Representación de sistemas LIT en el tiempo y la frecuencia

Con las características mencionadas anteriormente, es posible definir un tipo de sistemas denominado *sistemas lineales e invariantes en el tiempo* (LIT). Como su nombre lo sugiere estos sistemas poseen las características de linealidad e invarianza, y resulta posible caracterizarlos en función de su respuesta al impulso, también llamada *secuencia de ponderación*, la cual es una herramienta útil para representar una señal en una serie de impulsos unitarios con diferentes magnitudes.[6]

Respuesta al impulso

La secuencia impulso unitario tiene su equivalente discreto, el impulso discreto y se define de la siguiente forma:

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases} \quad (3.12)$$

Del mismo modo. se puede generalizar para un desplazamiento de k unidades

$$\delta[n - k] = \begin{cases} 1 & n = k \\ 0 & n \neq k \end{cases} \quad (3.13)$$

De acuerdo con la ecuación 3.13, si realizamos el producto del impulso discreto con una función $x[n]$, este solo tendrá valor cuando $n = k$ por lo que se puede concluir lo siguiente:

$$x[n]\delta[n - k] = \begin{cases} x[k] & n = k \\ 0 & n \neq k \end{cases} \quad (3.14)$$

De la ecuación 3.14 se deriva la igualdad

$$x[n]\delta[n - k] = x[k]\delta[n - k] \quad (3.15)$$

Finalmente, si aplicamos la ecuación anterior a los n elementos de la secuencia desplazándola k veces, se obtiene la representación de $x[n]$ en una serie de impulsos discretos.

$$x[n] = \sum_{k=0}^{\infty} x[k]\delta[n - k] \quad (3.16)$$

Utilizando lo anteriormente definido, tenemos que

$$y[n] = T\{x[n]\} \quad (3.17)$$

Sustituyendo la expresión 3.16 en la ecuación 3.17

$$y[n] = T\left\{\sum_{k=0}^{\infty} x[k]\delta[n - k]\right\} \quad (3.18)$$

Ya que solo $\delta[n - k]$ depende de n , la ecuación 3.18 se puede reescribir como:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} x[k]T\{\delta[n - k]\} \quad (3.19)$$

Realizando un cambio de variable:

$$h[n - k] = T\{\delta[n - k]\} \quad (3.20)$$

Donde $h(n, k)$ es la respuesta al sistema teniendo como entrada una señal impulso discreto. Sustituyendo en la expresión 3.19

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} x[k]h[n-k] \quad (3.21)$$

La cual es conocida como *sumatoria de convolución* y resulta una herramienta útil para obtener la respuesta de un sistema a cualquier señal en la entrada.

Transformada Z y función de transferencia

Es a partir de la *sumatoria de convolución* que podemos caracterizar el comportamiento del sistema y dada una señal de entrada $x[n]$ arbitraria, obtener la respuesta $y[n]$.

Como ejemplo, podemos utilizar $x[n] = Z^n$ donde $Z \in \mathbf{C}$, y dada la respuesta al impulso $h[n]$ del sistema LIT, obtener $y[n]$.

Sustituyendo en la ecuación 3.21 y aplicando la propiedad de conmutatividad se tiene:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} Z^{(n-k)}h[k] \quad (3.22)$$

Aplicando leyes de los exponentes:

$$y[n] = Z^n \sum_{k=0}^{\infty} Z^{-k}h[k] \quad (3.23)$$

Ya que la sumatoria solo considera a la variable k , podemos mover fuera a Z^n y realizando un cambio de variable se obtiene:

$$y[n] = Z^n H(z) \quad (3.24)$$

Donde:

$$H[z] = \sum_{k=0}^{\infty} Z^{-k}h[k] \quad (3.25)$$

De la ecuación 3.24 podemos concluir que la respuesta de un sistema LIT a una exponencial compleja Z^n en la entrada, es la misma exponencial compleja con una amplitud $H(z)$. Por lo cual la exponencial compleja resulta útil para representar mediante una combinación lineal de la misma, gran cantidad de señales.[7]

Se define $H[z]$ como la transformada Z de la secuencia de ponderación $h[n]$ y es llamada función de transferencia del sistema LIT. De manera general la transformada Z es una representación del dominio temporal discreto al de la frecuencia compleja Z .

Como tal, la representación de un sistema LIT en el dominio frecuencial tiene como principal ventaja la siguiente expresión:

$$Y[z] = H[z]X[z] \quad (3.26)$$

Y en el tiempo:

$$y[n] = h[n] * x[n] \quad (3.27)$$

Donde el operador $*$ es equivalente a la operación de convolución, las expresiones 3.26 y 3.27 son homólogas, pero resulta mucho menos costoso computacionalmente realizar operaciones de multiplicación que operaciones de convolución, por lo que la transformada Z es común en el procesamiento digital de señales.

Ecuaciones en diferencias

Una forma alternativa de analizar un sistema LIT es mediante su caracterización en ecuaciones en diferencias, la relación entrada-salida de orden N puede ser definida de manera general con el siguiente modelo:

$$y[n] = - \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \quad (3.28)$$

Donde a_k y b_k son parámetros constantes que ponderan la contribución de $y[n-k]$ y $x[n-k]$ para los diferentes valores de k .

Para solucionar la ecuación en diferencias, se supone que $y[n]$ esta compuesta por la suma de $y_h[n]$ que representa la respuesta natural del sistema cuando la entrada $x[n] = 0$ y $y_p[n]$ que se presenta con la entrada $x[n] \neq 0$. [6]

También es posible aplicar el concepto de función de transferencia a la ecuación 3.28 con lo que obtenemos:

$$H[z] = \frac{\sum_{k=0}^M b_k Z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k Z^{-k}} \quad (3.29)$$

Donde la cantidad de raíces en el numerador determinan el número de términos que aproximan el valor de $H[z]$ a cero (ceros) y las raíces en el denominador los términos que hacen $H[z] \rightarrow \infty$ (polos). Este tipo de análisis resulta muy útil para determinar la estabilidad del sistema. Para profundizar en temas de estabilidad de sistemas se puede consultar [9].

Filtros digitales

Una de las aplicaciones más importantes de las ecuaciones en diferencias es el diseño de filtros digitales, los cuales se utilizan para modificar el contenido frecuencial dada una señal digital. Los filtros se implementan mediante dos tipos de sistemas digitales que se clasifican dependiendo de su respuesta al impulso los cuales son FIR (Filtros de respuesta al impulso finita) e IIR (Filtros de respuesta al impulso infinita).

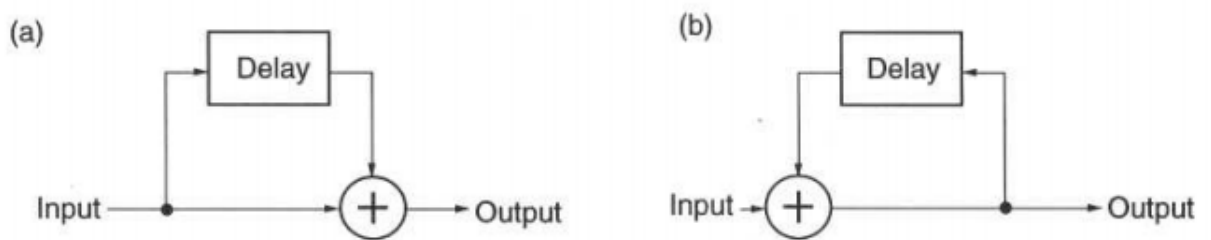


Figura 3.8.: Representación en bloques de los filtros a) FIR e b) IIR.[37]

El primero que revisaremos será el filtro FIR cuya principal característica es que su valor es cero fuera de un rango determinado de valores, es decir:

$$h[n] = \begin{cases} h[n] & 0 \leq n \leq M - 1 \\ 0 & 0 > n > M - 1 \end{cases} \quad (3.30)$$

Aplicando la definición de convolución tenemos que la salida es producto de la suma de la entrada actual y entradas pasadas ponderadas por el valor de $h[k]$. (Esto resulta evidente en la figura 3.8)

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M-1} h[k]x[n - k] \quad (3.31)$$

Para diferenciar la respuesta al impulso asociada a la entrada $x[n]$ se realiza el cambio de variable $b_k = h[k]$

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M-1} b_k x[n - k] \quad (3.32)$$

Respecto de la ecuación 3.32 podemos concluir que el filtro se comportará como una ventana de M muestras, de esto se desprende que los sistemas FIR tienen memoria finita del mismo número de muestras.[6]

Obteniendo la función de transferencia:

$$H[z] = \sum_{k=0}^{M-1} b_k Z^{-k} \quad (3.33)$$

Se dice que en la ecuación 3.33 todos los polos se encuentran en el origen por lo que, $H[z]$ siempre será un valor finito, y por ende se define como un sistema estable.[7]

En el caso de los sistemas IIR, tomando la figura 3.8 nuevamente como ejemplo, se puede observar que este tipo de sistemas presenta una retroalimentación, es decir, su salida depende de la entrada presente y las salidas anteriores. La representación temporal y frecuencial esta dada por las ecuaciones 3.28 y 3.29 respectivamente.

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]x[n-k] \quad (3.34)$$

De manera general podemos decir que la ventaja del sistema FIR es que es posible implementarlo por medio de una convolución, en el caso de los sistemas IIR esto no es posible, ya que como se observa en la ecuación 3.34 el intervalo tiende a infinito. Por ello es que nos valemos de herramientas como las ecuaciones en diferencias, que a su vez introducen un grado mayor de complejidad en su diseño. Además de que al incluir una realimentación los sistemas IIR presentan oscilaciones y pueden tender a la inestabilidad.

Por otra parte, con los sistemas IIR es posible obtener resultados similares e incluso mejores a los de sistemas FIR pero con considerable menor costo computacional, por lo que son utilizados regularmente.[37]

3.5. Representación de señales en el dominio frecuencial

Hasta ahora hemos visto las diferentes representaciones de una señal en el dominio temporal, que de manera general se trata del valor promedio de la señal en rango de tiempo. Sin embargo, esta no es la única forma de representar a la señal, también es posible obtener su equivalente en el dominio de la frecuencia mediante la Serie y la Transformada de Fourier (TF). A través de estas técnicas una señal puede ser descrita como un conjunto de ondas sinusoidales cuya amplitud y fase varía en el tiempo.[7]

3.5.1. Series de Fourier

Las llamadas series de Fourier fueron desarrolladas por el matemático francés Joseph B. Fourier en el siglo XIX y dice que cualquier función que cumpla ciertas condiciones puede ser representada por una serie infinita de senos y cosenos de distintas frecuencias[7]. Estas condiciones se exponen a continuación.

Dada una función $f(t)$ definida en un intervalo $[a, b]$

- Sea $f(t)$ continua en $[a, b]$ excepto en un número finito de puntos.
- Sea $f(t)$ con una cantidad finita de máximos y mínimos en $[a, b]$
- Sea $f(t)$ absolutamente convergente en $[a, b]$ lo que se comprueba de la siguiente manera:

$$\int_a^b |f(t)| dt < \infty \quad (3.35)$$

Si $f(t)$ cumple con las condiciones anteriores, se puede llegar a la siguiente expresión:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) \quad (3.36)$$

Donde la expresión 3.36 se conoce como serie trigonométrica de Fourier y a_0 , a_n y b_n como coeficientes de Fourier y están dados por:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt \quad (3.37)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt \quad (3.38)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt \quad (3.39)$$

El valor de los coeficientes de Fourier dependerá de la contribución energética de cada frecuencia a la señal original. En la figura 3.9 se observa un ejemplo de la aproximación por serie trigonométrica de Fourier de la señal diente de sierra.

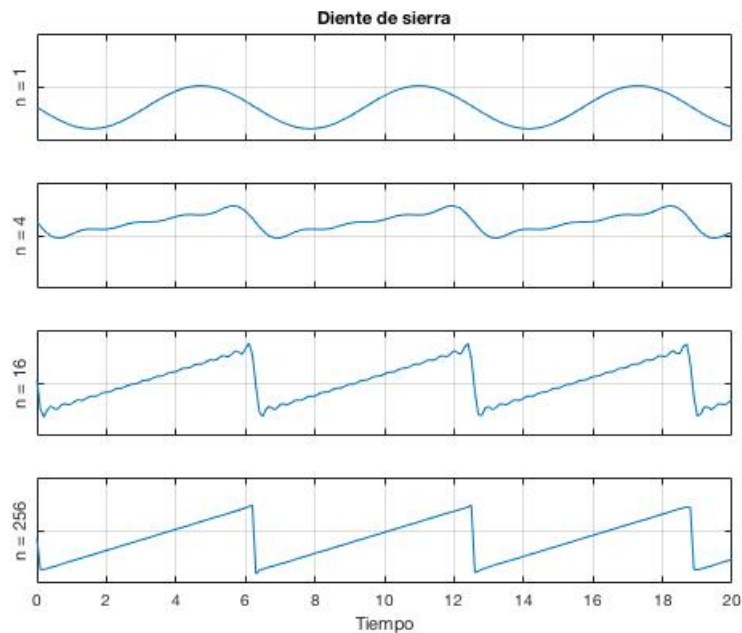


Figura 3.9.: Representación de la señal diente de sierra a través de la serie trigonométrica de Fourier .

A pesar de ser una herramienta bastante útil, limitaciones como que la señal requiere ser periódica propiciaron el desarrollo de herramientas menos restrictivas como la Transformada de Fourier que bajo ciertos criterios es aplicable a señales aperiódicas.[7]

3.5.2. Serie compleja

La serie compleja de Fourier es una extensión de la transformada trigonométrica hacia el campo \mathbb{C} , esto es posible gracias a la fórmula de Euler la cual relaciona las funciones senoidales con la exponencial compleja.[14]

$$\cos(\alpha) = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2} \tag{3.40}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i} \tag{3.41}$$

Sustituyendo las ecuaciones 3.40 y 3.41 en la expresión 3.36 se tiene:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2} \left[e^{i\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)} + e^{-i\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)} \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{2i} \left[e^{i\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)} - e^{-i\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)} \right] \tag{3.42}$$

Factorizando las exponenciales

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} e^{i\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)} \left[\frac{a_n}{2} - \frac{ib_n}{2} \right] + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-i\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)} \left[\frac{a_n}{2} + \frac{ib_n}{2} \right] \quad (3.43)$$

Aplicando cambios de variable $c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$ y $a_0 = c_0$

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{i\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-i\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)} \quad (3.44)$$

Reagrupando las sumatorias se llega a la denominada serie compleja de Fourier.[14]

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)} \quad (3.45)$$

Donde los coeficientes c_n están determinados por la ecuación 3.46.

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-i\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)} dt \quad (3.46)$$

La mayoría de las veces resulta conveniente el trabajar con expresiones complejas ya que esto disminuye de manera considerable el grado de dificultad de las operaciones. Incluso en el caso de la serie compleja de Fourier se puede definir el espectro frecuencial a partir del módulo del coeficiente c_n . Sin embargo, la importancia de la serie compleja radica principalmente en que es el punto de partida para el desarrollo de la Transformada de Fourier Discreta.[14]

3.5.3. Transformada de Fourier continua

Como se mencionó antes, la serie trigonométrica de Fourier esta limitada a funciones periódicas, lo que representa un problema ya que un gran número de funciones no son periódicas. Para superar esta dificultad y extrapolando a teoría de señales, Fourier hizo la consideración de que las señales aperiódicas tienen un periodo $T \rightarrow \infty$, como consecuencia la frecuencia fundamental $f_0 \rightarrow 0$, con lo cual la distancia entre componentes frecuenciales disminuye y se forma un continuo (Observar figura 3.10), por lo que se cambia la sumatoria por una integral.[7]. Para un panorama más amplio de lo antes descrito se recomienda revisar.[14][6]

La Transformada de Fourier Continua(TFC) se define como:

$$X(\omega) = F \{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t} dt \quad (3.47)$$

En este caso el cumplimiento de las condiciones de Dirichlet enunciadas aquí son suficientes (más no necesarias) para garantizar la existencia de la transformada de Fourier de una señal:[6]

1. La señal $x(t)$ tiene un número finito de discontinuidades finitas.
2. La señal $x(t)$ tiene un número finito de máximos y mínimos
3. La señal $x(t)$ es absolutamente integrable, es decir:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty \quad (3.48)$$

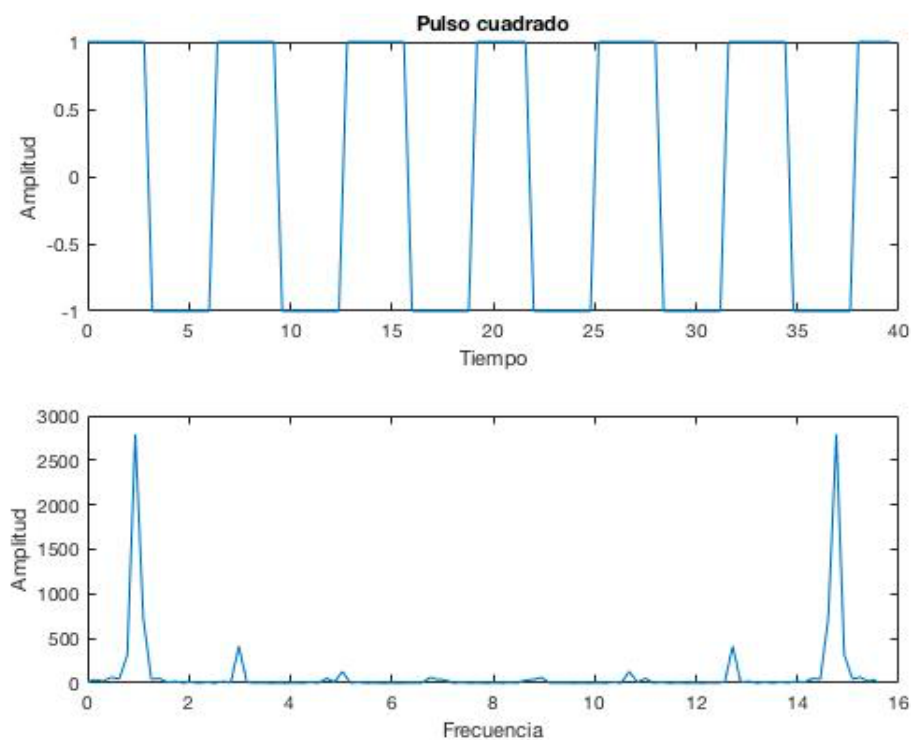


Figura 3.10.: Representación de la Transformada de Fourier continua.

A partir del desarrollo de la Transformada de Fourier se dejan de lado las limitaciones abriendo la posibilidad de obtener la representación de una señal en el dominio de la frecuencia sin importar si es periódica o no. Además, con la ayuda de funciones singulares y operaciones como la convolución es posible describir el comportamiento a los sistemas continuos.[7]

3.5.4. Transformada de Fourier de tiempo discreto

La Transformada de Fourier de Tiempo Discreto (TFTD) es el equivalente de la TFC para secuencias discretas no periódicas e igualmente nos permite obtener la representación en el dominio frecuencial. Esto es posible ya que muchas secuencias pueden ser representadas a través de la integral de Fourier como se muestra a continuación:[7]

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{i\omega}) e^{i\omega n} d\omega \quad (3.49)$$

Donde:

$$X(e^{i\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-i\omega n} \quad (3.50)$$

La ecuación 3.50 constituye la TFTD cuyas características son que toma valores complejos y su rango abarca de $(-\pi, \pi)$, por ende tiene periodo 2π , esto como consecuencia de las propiedades de la exponencial compleja en el dominio discreto.[6]

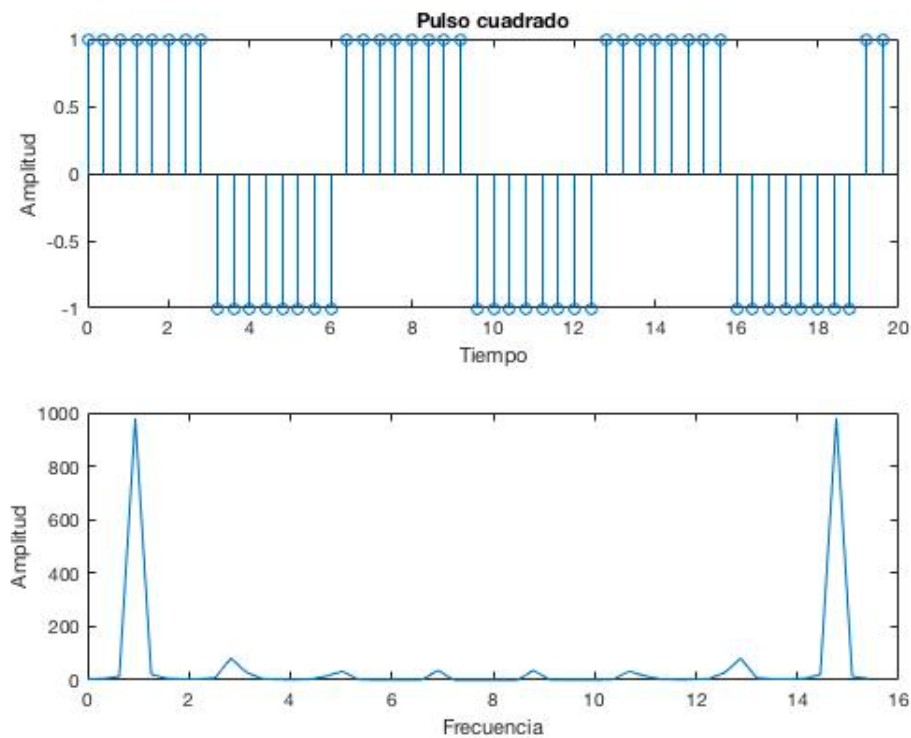


Figura 3.11.: Representación TFTD.

La ecuación 3.49 se define como una integral ya que representa $x[n]$ como una serie de exponenciales complejas infinitesimalmente cercanas en frecuencia, lo cual nos da como resultado un continuo en el espacio frecuencial. Esto no es conveniente ya que imposibilita el uso de la TFTD en sistemas digitales. (Ver figura 3.11)[7]

3.5.5. Transformada Discreta de Fourier

La transformada discreta de Fourier (TDF) es un tipo de transformada que obtiene una representación en el dominio discreto de la frecuencia a partir de una secuencia igualmente discreta pero temporal. Como se mencionó antes, no es posible utilizar la TFTD para procesamiento digital debido a la naturaleza continua de su espectro frecuencial, por lo que se suele realizar un proceso de muestreo.

Suponiendo una función de longitud N y periodo 2π , producto de la TFTD, se toma el intervalo de $0 \leq \omega \leq 2\pi$ para su análisis. Por simplicidad se considera que las muestras son equidistantes, lo que se logra definiendo el espacio entre ellas como $\frac{2\pi}{N}$. [9]

Por último evaluamos $\omega = \frac{2\pi k}{N}$ en la TFTD con lo que obtenemos:

$$X\left(\frac{2\pi k}{N}\right) = \sum_{-\infty}^{\infty} x[n]e^{-i\frac{2\pi kn}{N}} \quad (3.51)$$

Dado que la expresión 3.51 es una representación frecuencial muestreada de la secuencia $x[n]$ y como tal no la representa de forma fiel, para secuencias de larga duración se presenta el efecto de aliasing, por lo que es condición que la secuencia a transformar sea de duración finita, de no ser así es posible utilizar técnicas de ventaneo para cumplir esta condición [6]. Tomando en cuenta esto se llega a la siguiente expresión:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-i\frac{2\pi kn}{N}} \quad (3.52)$$

Donde la ecuación 3.52 es la definición de la TDF (Ver figura 3.12). Al contrario que la TFTD, esta transformada únicamente evalúa suficientes componentes frecuenciales para reconstruir el segmento que se analiza.

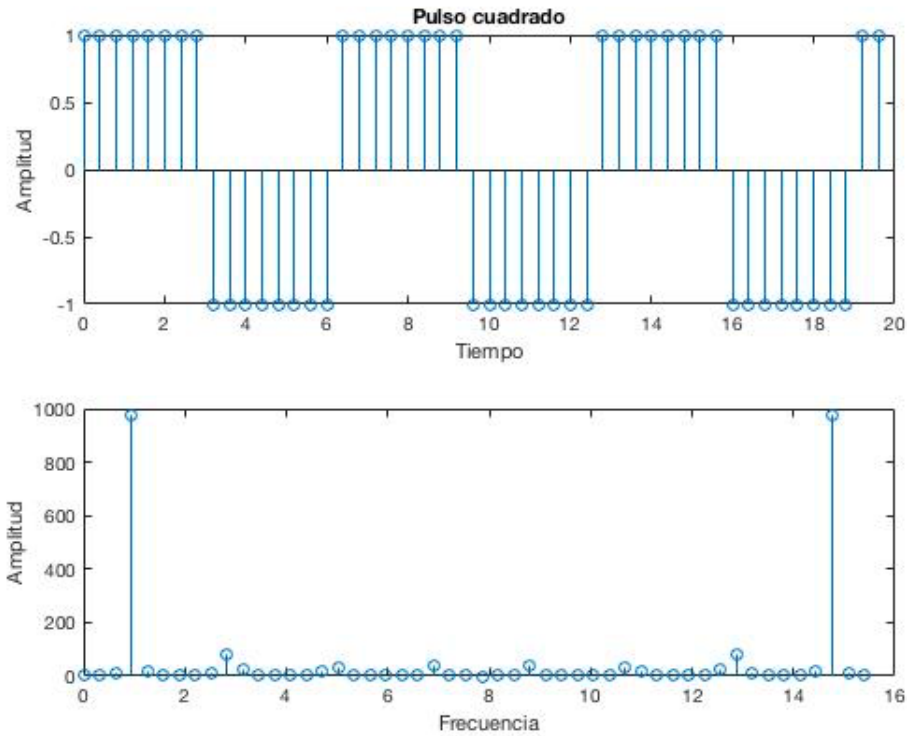


Figura 3.12.: Representación de un pulso cuadrado mediante la TDF

La TDF es ampliamente usada en procesamiento digital de señales y sistemas de telecomunicaciones sobre todo por la existencia de algoritmos computacionales eficientes para su cálculo comúnmente denominados Transformada Rápida de Fourier.

3.5.6. Transformada rápida de Fourier

Existe una variedad de algoritmos computacionales cuyo fin es obtener los valores de la TDF de manera eficiente, a este conjunto se le conoce como Transformada rápida de Fourier (FFT por sus siglas en inglés). Aunque existen algoritmos FFT optimizados para distintas aplicaciones, el más utilizado es el *radix-2* desarrollado por Cooley & Tukey (1965)[16]. Grosso modo enuncia que la transformada de una secuencia de longitud $N = 2m$ $m \in \mathbb{Z}^+$, se puede representar como la suma de dos transformadas de longitud $N/2$, donde estas últimas están conformadas por los elementos de índices pares e impares del vector de muestras original.[9]

Evaluación directa de la TDF

La TDF de secuencia finita y longitud N se define como[6]:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-i\frac{2\pi kn}{N}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (3.53)$$

Partiendo del supuesto de que todos los elementos de $x[n]$ son complejos y descomponiendo la exponencial compleja en senos y cosenos se tiene lo siguiente:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} (Re\{x[n]\} + Im\{x[n]\}) \left(\cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) - i \sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) \right), \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (3.54)$$

Realizando el producto complejo tenemos:

$$\begin{aligned} X[k] = & \sum_{n=0}^{N-1} Re\{x[n]\} \cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) - i Re\{x[n]\} \sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) + \dots \\ & \dots Im\{x[n]\} \cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) - i Im\{x[n]\} \sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right), \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (3.55)$$

Cada producto de complejos dentro de la sumatoria requiere cuatro multiplicaciones reales y cuatro sumas reales por cada valor de n , lo que conlleva a un total de $4N$ multiplicaciones y $4N-1$ sumas, además dado que esta operación se debe realizar para los N valores de k , tenemos como resultado aproximadamente $4N^2$ multiplicaciones y $N(4N-2)$ sumas.[9] Dicho lo anterior es evidente que la TDF evaluada de forma directa resulta ineficiente ya que dado el número de operaciones a realizar el coste computacional se eleva exponencialmente conforme N se hace más grande.[9]

Cómputo eficiente de la TDF Los algoritmos que calculan la TDF de manera rápida aprovechan ciertas propiedades del término $e^{-i\frac{2\pi kn}{N}}$ también representado como W_N^{kn} y comúnmente llamado *factor de fase*[6], propiedades como la periodicidad y la simetría son clave para poder reducir el tiempo de procesamiento.

$$\text{Propiedad de simetría: } W_N^{k+\frac{N}{2}} = -W_N^k \quad (3.56)$$

$$\text{Propiedad de periodicidad: } W_N^{k+N} = W_N^k \quad (3.57)$$

El procedimiento se muestra a continuación de forma general:[6]

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{kn}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (3.58)$$

Dada la ecuación 3.58 es posible descomponerla en 2 secuencias donde se agrupan por índice par (Ver expresión 3.59) e impar (Ver expresión 3.60).

$$X[k]_{par} = \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n)W_N^{2kn}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N/2-1 \quad (3.59)$$

$$X[k]_{impar} = W_N^k \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n+1)W_N^{k(2n+1)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N/2-1 \quad (3.60)$$

Por lo que, la ecuación 3.58 puede reescribirse como:

$$X[k] = X[k]_{par} + W_N^k X[k]_{impar}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (3.61)$$

Dado que las expresiones 3.59 y 3.60 son periódicas con periodo $N/2$ y sustituyendo en la ecuación 3.56 se obtiene:

$$X[k + N/2] = X[k]_{par} - W_N^k X[k]_{impar}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N/2-1 \quad (3.62)$$

En esta última expresión se reduce la complejidad del cálculo de la transformada de $4N^2$ a $\frac{N^2}{2} + N$ el cual se traduce en un menor costo computacional (del orden de la mitad).

Si repetimos este procedimiento varias veces se obtienen transformadas de dos puntos (Ver ecuación 3.63) cuya complejidad es de aproximadamente $\left(\frac{N}{2}\right) \log_2(N)$. [6]

$$X[k] = \sum_{n=0}^1 x(n)W_2^{kn} = x[0] + (-1)^k x[1] \quad (3.63)$$

Para los casos en que $k = 0$ y $k = 1$ se obtienen las expresiones 3.64 y 3.65 respectivamente.

$$X[0] = x[0] + x[1] \quad (3.64)$$

$$X[1] = x[0] - x[1] \tag{3.65}$$

Por simplicidad estas operaciones se representan con un diagrama de flujo llamado diagrama de mariposa (Ver la figura 3.13) el cual resulta práctico por que explota las características del factor de fase y es posible representar de manera clara el proceso de descomposición de una transformada.

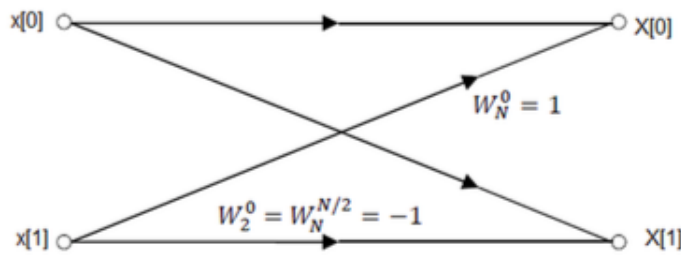


Figura 3.13.: Diagrama de mariposa para transformada de 2 puntos.[9]

En el cuadro 3.1 se observa una tabla comparativa sobre la complejidad del cálculo entre TDF y FFT extraída de [6].

Número de puntos N	Cálculo con DFT N^2	Cálculo con FFT $\frac{N}{2} \log_2 N$	Factor de mejora
4	16	4	4.0
8	64	12	5.3
16	256	32	8.0
32	1,024	80	12.8
64	4,096	192	21.3
128	16,384	448	36.6
256	65,536	1,024	64.0
512	262,144	2,304	113.8
1024	1,048,576	5,120	204.8

Cuadro 3.1.: Complejidad de DFT y FFT.

Como se observa en la figura 3.14, los datos de entrada tienen un orden diferente, esto es consecuencia de que los datos se reagrupan en pares e impares en las distintas etapas de descomposición de la transformada original.

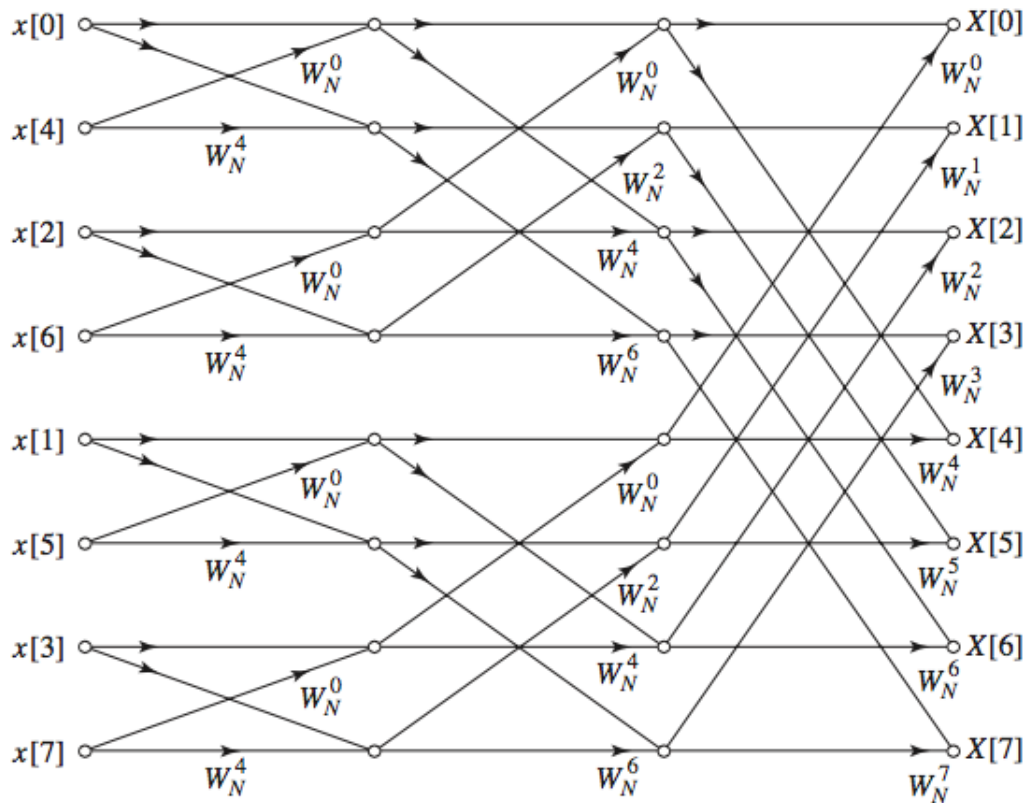


Figura 3.14.: Diagrama de mariposa para transformada de 8 puntos.[7]

Para ello existe un algoritmo llamado Bit-reversal el cual consiste en convertir los índices del vector de muestra a su equivalente binario e invertir el orden de los dígitos que conforman cada índice. Esto se presenta de forma tabular en el cuadro 3.2.

Índice original	Equivalente binario	Inversión de orden	Índice nuevo
0	000	000	0
1	001	100	4
2	010	010	2
3	011	110	6
4	100	001	1
5	101	101	5
6	110	011	3
7	111	111	7

Cuadro 3.2.: Aplicación de algoritmo Bit-reversal para N=8.[9]

3.6. Segmentación y ventaneo de una señal en el tiempo

Es frecuente que las características estadísticas de una señal presenten variaciones en el tiempo catalogándose como no estacionarias, por lo que se hace uso de la segmentación para disminuir estas variaciones y representarla como una señal estacionaria por partes.[10]

Otro uso común que se le da a la segmentación es la de obtener la mayor cantidad de información, tomando solo los intervalos necesarios de la señal (Ver figura 3.15) y con ello reducir el tiempo de cómputo.[11]

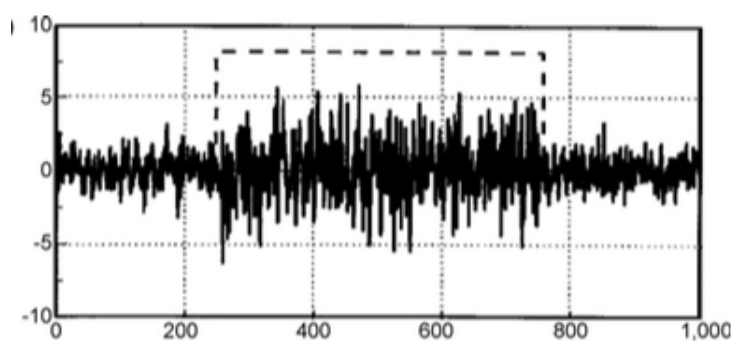


Figura 3.15.: Ejemplo de aplicación de la segmentación.[38]

Existen dos variantes de esta técnica, la primera conocida como *segmentación adyacente*, realiza la división de la señal en segmentos de igual tamaño y se cumple que dentro de estos no existe repetición de información. Por otra lado, la *segmentación superpuesta* se caracteriza por contener información redundante en los segmentos, esto con el fin de aminorar cualquier pérdida causada durante el proceso.[12][47]

En la figura 3.16 se pueden observar ejemplos sobre los tipos de segmentación descritos anteriormente.

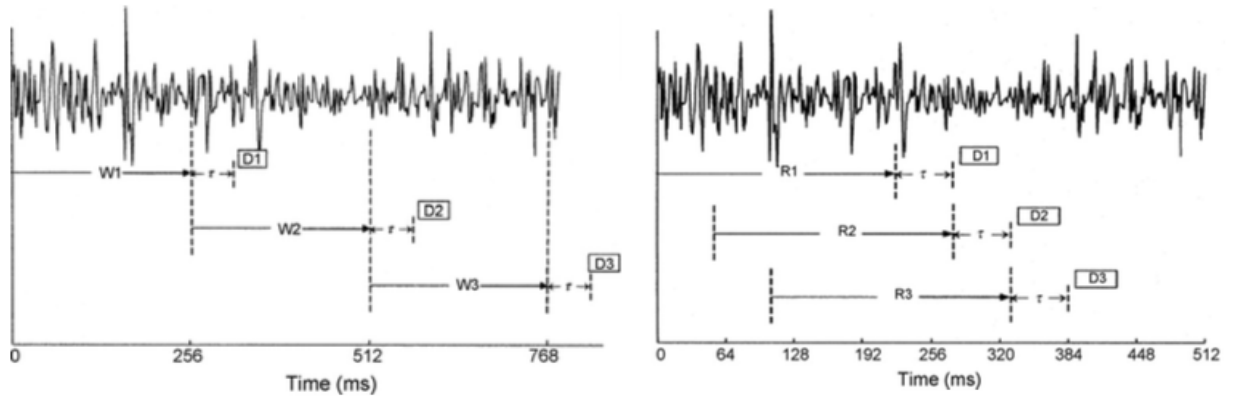


Figura 3.16.: Representación de: segmentación adyacente (izquierda) y segmentación superpuesta (derecha).[38]

Uno de los inconvenientes que surge al segmentar una señal es que se presenta un efecto de discontinuidad en los extremos del segmento, esto debido al cambio brusco de magnitud ya que, fuera del segmento la magnitud de la señal se considera cero. Dichas discontinuidades son mostradas en el dominio frecuencial como componentes de alta frecuencia que no existen en la señal original, por lo que el espectro obtenido no pertenece a nuestra señal, sino que se trata de una versión distorsionada.[47][48]

Para minimizar el efecto de discontinuidad en el espectro se suele aplicar una ventana (Ver figura 3.17). Este procedimiento consiste en multiplicar el segmento por una ventana de igual longitud y con una amplitud en los bordes que decae de forma paulatina hasta llegar a cero. Con esto es posible reducir la magnitud de las discontinuidades al no existir cambios abruptos. [47][48]

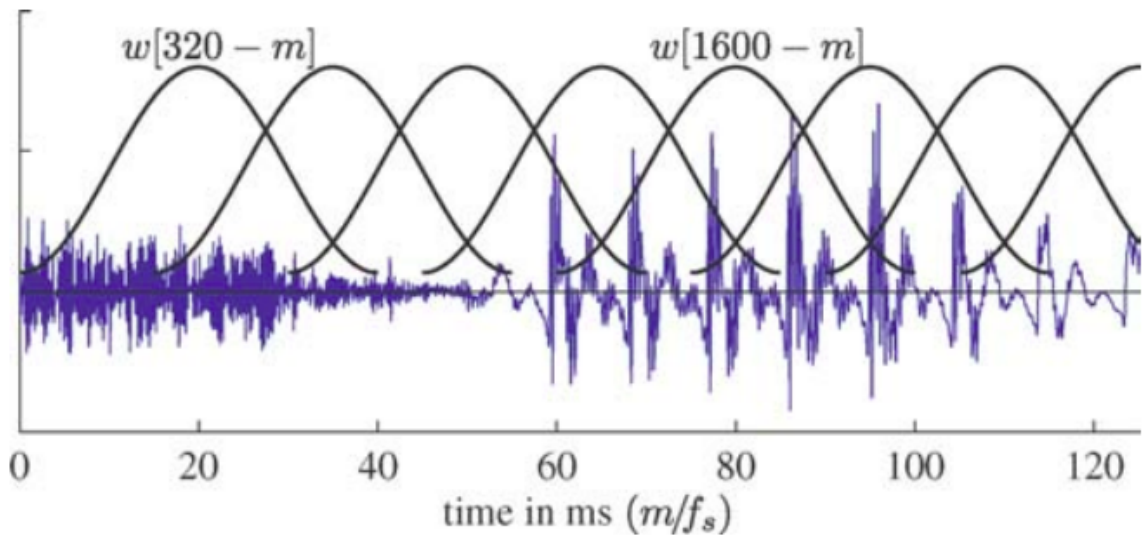


Figura 3.17.: Técnica de ventaneo.[24]

Tipos de Ventanas

Existen diferentes tipos de ventana cuya elección debe ajustarse a la naturaleza de la señal. El efecto de cada ventana sobre una señal estará dominado por sus características frecuenciales. A continuación se muestran algunos ejemplos de las ventanas más utilizadas con su respectivo espectro en frecuencia.[48]

Ventana Rectangular (figura 3.18)

Nivel más alto de lóbulo lateral: -13 [dB]

Caída del lóbulo lateral: -6 [dB/OCT]

Ganancia: 1

$$w[n] = \begin{cases} 1 & n = -\frac{N}{2}, \dots, -1, 0, 1, \dots, \frac{N}{2} \\ 0 & \text{cualquier otro caso} \end{cases} \quad (3.66)$$

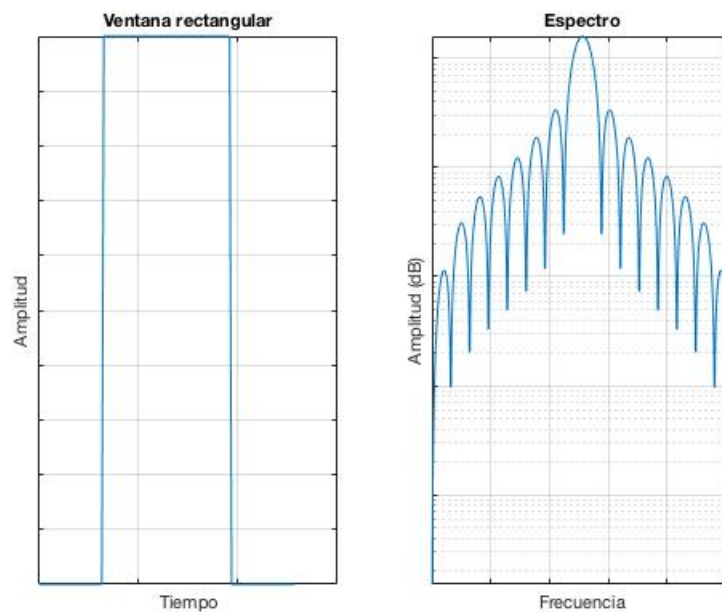


Figura 3.18.: Ventana Rectangular

Ventana de Blackman (figura 3.19)

Nivel más alto de lóbulo lateral: -58 [dB]

Caída del lóbulo lateral: -18 [dB/OCT]

Ganancia: 0.42

$$w[n] = \begin{cases} 0.42 - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) + 0.08 \cos\left(\frac{4\pi n}{N}\right) & n = -\frac{N}{2}, \dots, -1, 0, 1, \dots, \frac{N}{2} \\ 0 & \text{cualquier otro caso} \end{cases} \quad (3.67)$$

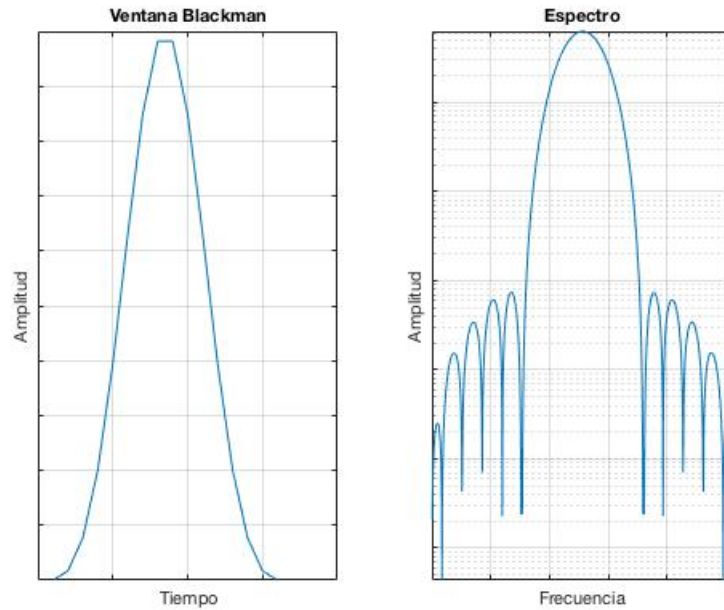


Figura 3.19.: Ventana de Blackman

Ventana de Bartlett (figura 3.20)

Nivel más alto de lóbulo lateral: -27 [dB]

Caída del lóbulo lateral: -12 [dB/OCT]

Ganancia: 0.5

$$w[n] = \begin{cases} 1 - \frac{|n|}{0.5*N} & n = -\frac{N}{2}, \dots, -1, 0, 1, \dots, \frac{N}{2} \\ 0 & \text{cualquier otro caso} \end{cases} \quad (3.68)$$

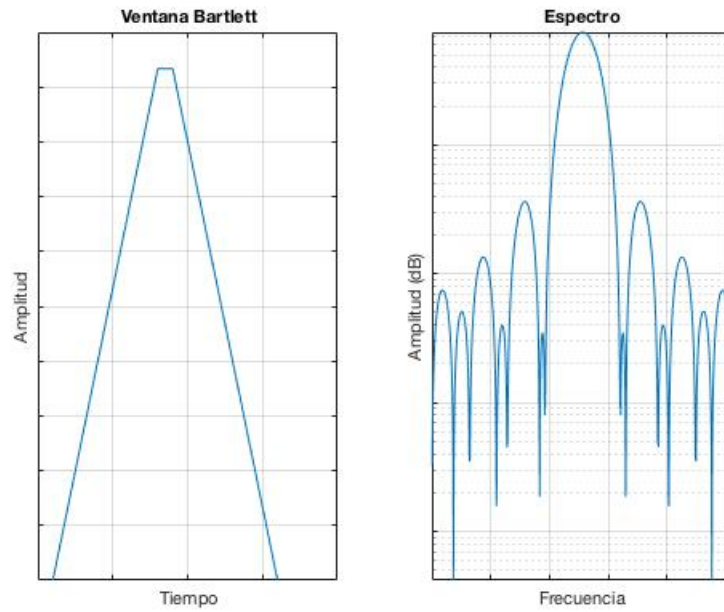


Figura 3.20.: Ventana de Bartlett

Ventana de Hanning (figura 3.21)

Nivel más alto de lóbulo lateral: -32 [dB]

Caída del lóbulo lateral: -18 [dB/OCT]

Ganancia: 0.5

$$w[n] = \begin{cases} \cos^2 \left[\frac{n}{N} \pi \right] & n = -\frac{N}{2}, \dots, -1, 0, 1, \dots, \frac{N}{2} \\ 0 & \text{cualquier otro caso} \end{cases} \quad (3.69)$$

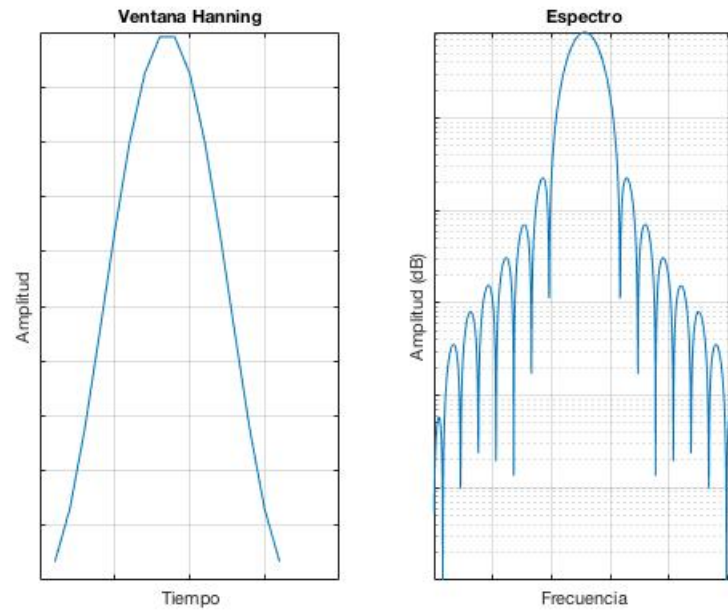


Figura 3.21.: Ventana de Hanning

Ventana de Hamming (figura 3.22)

Nivel más alto de lóbulo lateral: -43 [dB]

Caída del lóbulo lateral: -6 [dB/OCT]

Ganancia: 0.54

$$w[n] = \begin{cases} 0.54 + 0.46\cos\left[\frac{2\pi}{N}n\right] & n = -\frac{N}{2}, \dots, -1, 0, 1, \dots, \frac{N}{2} \\ 0 & \text{cualquier otro caso} \end{cases} \quad (3.70)$$

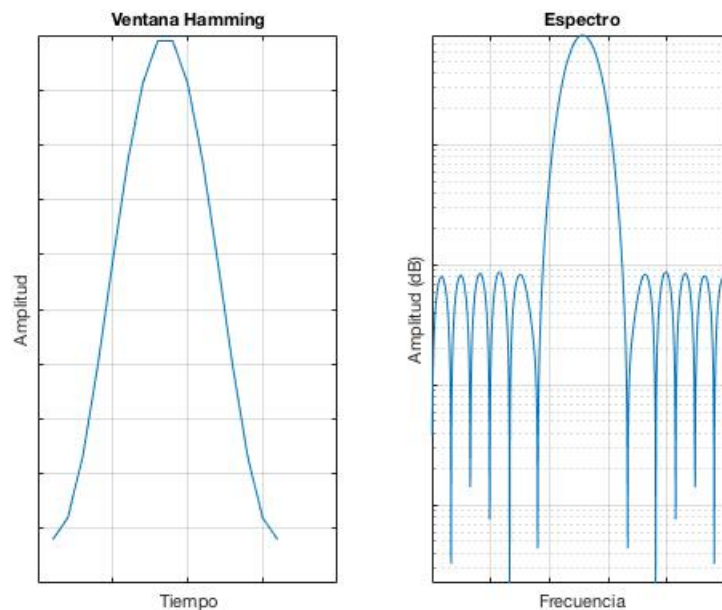


Figura 3.22.: Ventana de Hamming

Como se puede observar en las figuras anteriores, el espectro de una ventana esta conformado por un lóbulo principal y lóbulos laterales. El lóbulo principal se encuentra en la componente frecuencial con mayor energía mientras los lóbulos laterales se centran en las componentes con menor energía y cuya magnitud decae hasta aproximarse a cero.

El *Nivel más alto* y la *Caída del lóbulo lateral* resultan ser valores a considerar a la hora de elegir una ventana, ya que los bajos niveles en lóbulos laterales y un amplio rango en la caída del lóbulo lateral reducen de manera importante la fuga espectral.[48]

Dicho esto, se realizó una comparación de las ventanas mostradas y llegamos a la conclusión de que la Ventana de Hamming cumple con las condiciones descritas como ideales. Sin embargo, siempre es importante tener en cuenta las características de la señal que vamos a analizar.

3.7. Conclusiones

Como se pudo observar durante el desarrollo de este capítulo, los conceptos expuestos pueden no ser fáciles de digerir. Sin embargo, resultan fundamentales para el entendimiento de temas subsecuentes como son la Transformada de Fourier de Tiempo Reducido y la Transformada Wavelet. Por ello es que se tuvo especial énfasis en la revisión detallada de cada subtema.

4. Técnicas de procesamiento de señales no estacionarias

En los capítulos anteriores se ha recalado la importancia de la representación frecuencial de una señal mediante la Transformada de Fourier, hasta el momento solo se ha tratado con señales estacionarias. En la naturaleza difícilmente se encuentran señales de este tipo por lo que se desarrollaron técnicas capaces de analizar características no estacionarias.

En este capítulo se revisará de manera detallada tres de las técnicas más utilizadas; la Transformada de Fourier de Tiempo Reducido, Transformada Wavelet y la Transformada de Hilbert-Huang.

Cabe resaltar que las simulaciones mostradas con TFTR y TW se generaron mediante librerías incluidas en *Matlab*. En el caso de la THH se implementó la simulación desde su base.

4.1. Transformada de Fourier de Tiempo Reducido (TFTR)

En general se dice que la Transformada de Fourier tiene una resolución frecuencial perfecta, ya que se obtienen todas las frecuencias contenidas en dicha señal. Sin embargo, también es cierto que la resolución temporal de dicha transformada es nula pues no se sabe en que momento se presenta cada frecuencia, por lo que en 1946 Dennis Gabor dió una solución a este problema aplicando técnicas de ventaneo a la señal y a su vez, la TF a cada una de éstas, con lo que se llega a la Transformada de Fourier de Tiempo Reducido (TFTR).[24][49]

4.1.1. TFTR en tiempo continuo

La Transformada de Fourier de Tiempo Reducido se define como:[24]

$$X(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)w(\tau - t)e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (4.1)$$

Que es en esencia la Transformada de Fourier de la porción de la señal $x(\tau)$ donde la ventana $w(\tau - t)$ es diferente de cero, y ésta a su vez va recorriendo la señal de principio a fin.

Como se puede observar en la ecuación 4.1 la TF depende de dos variables las cuales son frecuencia y tiempo. Esta variante de la Transformada de Fourier presenta otra ventaja, además de saber el momento en el que aparece una frecuencia específica de la señal, también es posible aproximar una señal no estacionaria a estacionaria, lo que es requisito para un número considerable de algoritmos en procesamiento digital de señales.

4.1.2. TFTR en tiempo discreto

La versión discreta de la TFTR se presenta a continuación:[49][24]

$$X[n, \Omega] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n+m]w[m]e^{-j\Omega m} \quad (4.2)$$

Esta, al igual que su contraparte continua, segmenta la señal y aplica la transformada, aunque en este caso se trata naturalmente de la TFD.

Una de las cuestiones que se toma en cuenta al utilizar el ventaneo en ambos casos es que existe pérdida de información en los extremos de la ventana, además de agregarse componentes frecuenciales ajenas a la señal debido al corte abrupto de la señal. [47]

Por ello existen algunas recomendaciones. Para el primer caso se utiliza un traslape entre ventanas donde cada tramo de señal tendrá parte del contenido de la ventana anterior y la siguiente, con lo que se asegura una pérdida mínima (Ver figura 4.1). Como se menciona antes, dependiendo de la ventana se tienen diferentes resultados en la frecuencia por lo que para solucionar el problema de las componentes producto de segmentar la señal, es común el uso de ventanas como Hanning y Hamming cuyos lóbulos laterales son pequeños.[47]

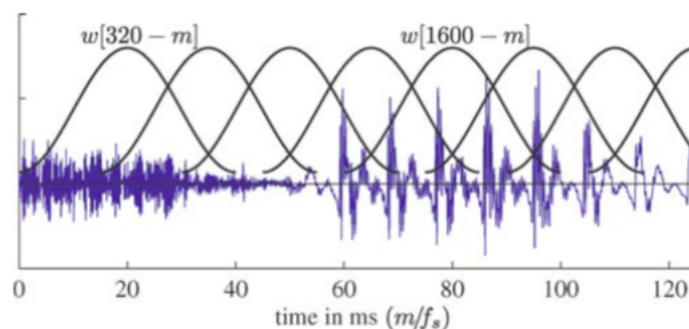


Figura 4.1.: Ventaneo con traslape aplicado a una señal de voz. [24]

4.1.3. Espectrograma

El espectrograma de una señal es una representación visual de la TFTR que nos auxilia para saber como se distribuye la energía sobre la misma y se obtiene mediante la siguiente expresión[24][50]:

$$\text{Espectrograma}\{x[n]\} = 20 \log_{10}|X(n, \lambda)| \quad (4.3)$$

Como se dijo anteriormente, una señal puede ser dividida en varios segmentos para aplicar el ventaneo y después pasar al dominio de Fourier tantas veces como se necesite para cubrir la señal completa, reacomodando el resultado de tal forma que se genere una matriz la cual al ser desplegada como una imagen nos dará la variación de frecuencia y amplitud en el intervalo de tiempo analizado (Ver figura 4.2).

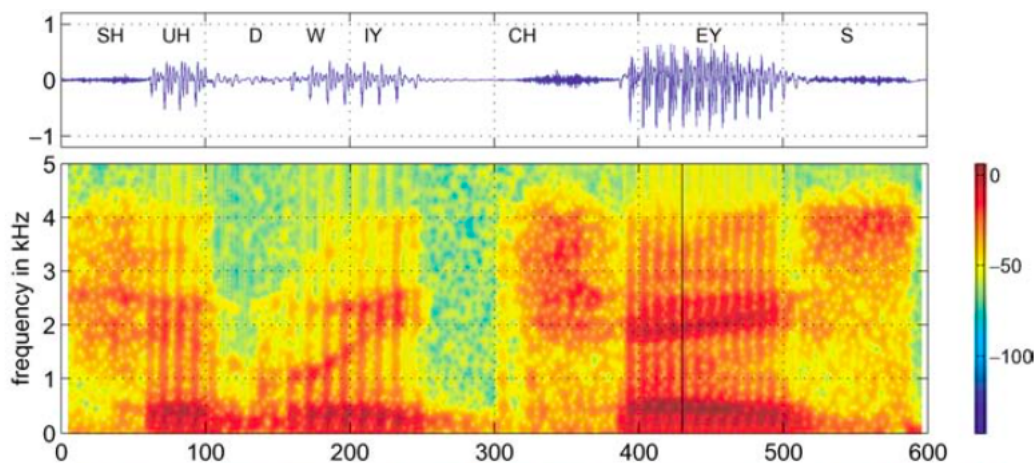


Figura 4.2.: Espectrograma de una señal de voz.[24]

El espectrograma es una herramienta muy útil en el análisis espectral sobre todo por su facilidad de implementación respecto de otras técnicas como la transformada Wavelet, que si bien resuelve el asunto de la resolución, su aplicación es más compleja, como se verá en la sección 4.2.

4.1.4. Problemas de resolución

Existen desventajas importantes relacionadas con la resolución. El problema se basa en el principio de incertidumbre de Heisenberg que nos dice que no es posible conocer el momento exacto en el que se presenta una frecuencia específica de la señal.[50] Aunado a esto, al elegir una ventana, esta no se podría cambiar durante el análisis por lo que se dice que la TFTR es de resolución fija, lo que representa

un inconveniente, pues como se dijo antes, las características de la ventana influyen en los resultados que se obtienen; lo que es más claro aquí, ya que al utilizar una ventana amplia se tiene mejor resolución en frecuencia pero una pobre resolución en el tiempo y viceversa una ventana angosta da una buena resolución en el tiempo y mala resolución en frecuencia. Estas son llamadas transformadas de banda angosta y de banda amplia, respectivamente.[24]

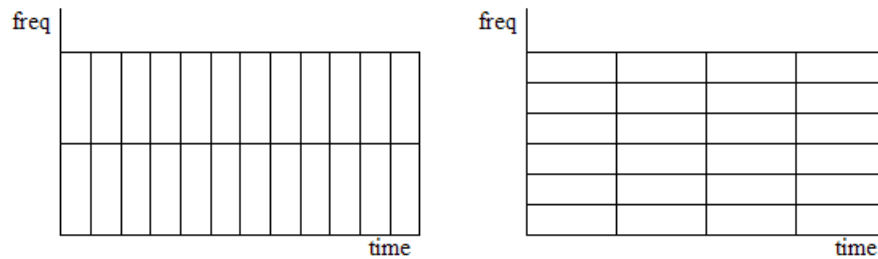


Figura 4.3.: La figura de la izquierda tiene buena resolución en el tiempo y la de derecha buena resolución en frecuencia.[24]

4.2. Transformada Wavelet (TW)

La transformada Wavelet se desarrolló como una alternativa para resolver el problema de resolución de la TFTR, ya que a diferencia de esta última, la transformada Wavelet realiza el análisis con una ventana de longitud variable, es decir, para una ventana de larga duración se tiene mejor resolución en frecuencia, mientras que para ventanas de corta duración la resolución es mejor en el tiempo.[21]

Otra de las grandes ventajas del análisis con wavelet es la posibilidad que nos brinda de cambiar el núcleo de la transformada, eligiendo así la que mejor se acople a la señal analizada.[49]

4.2.1. Transformada Wavelet Continua

En general existen dos funciones cuyo papel es fundamental en el análisis wavelet pues es a partir de ellas que se puede descomponer y reconstruir una señal. Ya que de dichas funciones se genera la familia de funciones base para la descomposición de una señal a veces también son llamadas "función padre" (función de escala ϕ) y "función madre" (función wavelet ψ). [14][21]

4.2.1.1. Función wavelet

Una wavelet $\psi(t)$ u ondícula por su traducción al español es una función en forma de onda cuyos valores son diferentes de cero en un intervalo de tiempo corto. Una

función wavelet puede ser cualquier función que cumpla con lo siguiente[49]:

- Pertenecer al espacio L^2 , funciones de cuadrado integrable de variable real, lo cual se verifica cumpliendo la expresión:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(t)|^2 dt < \infty \quad (4.4)$$

Esta condición como se mencionó antes nos asegura que la función tiene energía finita.

- Norma unitaria:

$$\|\psi(t)\| = \sqrt{\int_a^b \psi(t) \psi^*(t) dt} = 1 \quad (4.5)$$

- Condición de admisibilidad:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\Psi(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty \quad (4.6)$$

Donde $\Psi(\omega)$ es la transformada de Fourier de $\psi(t)$ y lo que esta expresión nos dice básicamente es que la función wavelet es de naturaleza oscilatoria, en otras palabras $\psi(t)$ debe ser una onda.[17, 49]

Ya habiendo definido una función wavelet $\psi(t)$ esta recibe el nombre de "wavelet madre" ya que se trata de una función prototipo a partir de la cual se generarán versiones escaladas y desplazadas en el tiempo con el fin de obtener los coeficientes que representan el grado de similitud entre la señal analizada y la función wavelet.

Se tiene entonces que la transformada wavelet continua dada una función $f(t)$ se expresa como:

$$W(\tau, s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi_{\tau, s}^*(t) dt \quad (4.7)$$

donde:

$$\psi_{\tau, s}(t) = \frac{1}{\sqrt{|s|}} \psi\left(\frac{t - \tau}{s}\right) \quad (4.8)$$

Como se observa en la expresión 4.8, se tiene una dependencia de dos variables que son τ y s definidas como factores de traslación y escala, respectivamente. Esencialmente se mapea la función unidimensional definida en el dominio del tiempo hacia un espacio bidimensional de tiempo-escala.

El parámetro de traslación en la transformada wavelet (Ver figura 4.4) está relacionado con la localización temporal y su principal función es, dada una wavelet escalada, desplazarla a través de la señal completa.

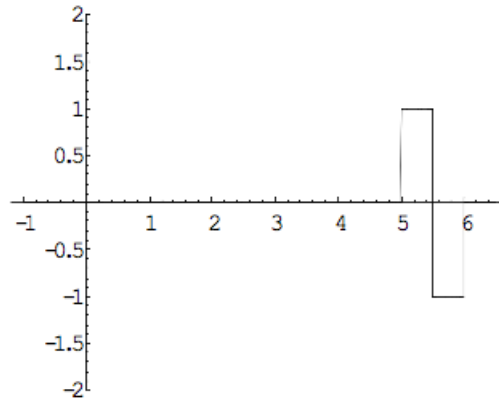


Figura 4.4.: Wavelet desplazada.[19]

Con relación al parámetro escala (Ver figura 4.5), se tiene que para $s > 1$ (altas escalas) la wavelet se dilata y para $s < 1$ (bajas escalas) se contrae, por lo que es en función de s que se tiene una visión general o detallada de la señal.[57]

Por otro lado existe una relación entre escala y frecuencia descrita a continuación:

$$Escala = \frac{1}{frecuencia} \quad (4.9)$$

Con lo anterior es posible dar una interpretación en términos de frecuencia, pues para altas escalas que corresponde a frecuencias bajas generalmente son componentes de larga duración y por tal motivo difíciles de localizar en el tiempo, por otra parte al tomar un número mayor de muestras de la señal se tiene una mejor resolución en la frecuencia. Caso contrario las bajas escalas corresponden a frecuencias altas que suelen aparecer por cortos periodos de tiempo con lo que se encuentran bien localizadas en el tiempo. Sin embargo, al tomar un número menor de muestras la resolución en la frecuencia es pobre. [20]

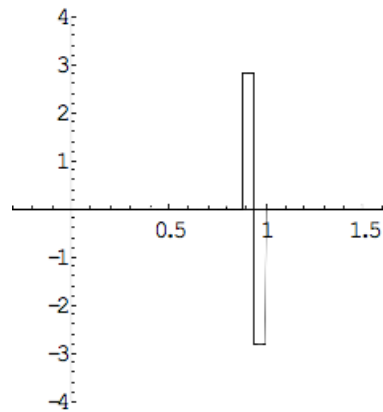


Figura 4.5.: Wavelet desplazada y escalada.[19]

Cabe destacar que las wavelets generadas a partir de la variación de los parámetros de traslación y escala conservan la forma original de la wavelet madre.

4.2.2. Transformada Wavelet Discreta y análisis multiresolución

Debido a la naturaleza discreta de las computadoras, resulta imposible procesar la transformada wavelet continua como tal, por lo que es necesario obtener una versión discretizada. Sin embargo, este procedimiento no es algo trivial ya que si se tiene una alta tasa de muestreo se tiene una mejor aproximación a la versión continua pero esto también implica mayor redundancia en la información.[17]

Como ejemplo se tiene la función de escala Haar generalizada para k desplazamientos[21]:

$$\phi(t - k) = \begin{cases} 1 & k \leq t < k + 1 \\ 0 & \text{cualquier otro caso.} \end{cases} \quad (4.10)$$

Dado que $\phi(t - k)$ cumple con la condición de ortonormalidad es posible representar una función $f(t)$ como una combinación lineal de $\phi(t - k)$ de la siguiente manera:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \phi(t - k) \quad (4.11)$$

Donde la expresión 4.11 define el espacio V_0 que contiene a todas las funciones constantes y continuas a tramos cuyas discontinuidades se localizan en los números enteros (Ver figura 4.6) de la siguiente forma:

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\} \quad (4.12)$$

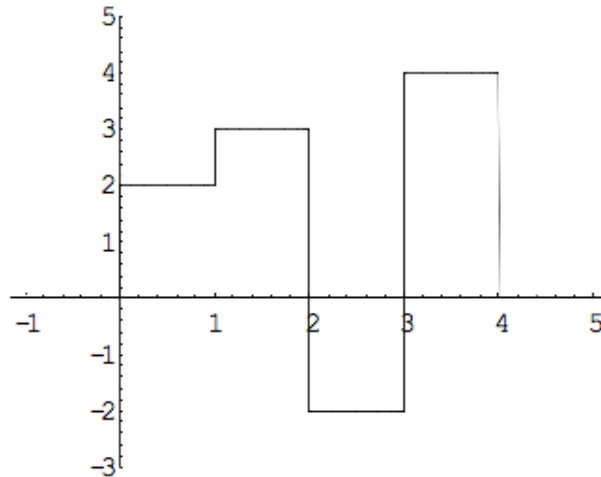


Figura 4.6.: Representación de un elemento de V_0 . [19]

Para el análisis en alta frecuencia es necesario que la función de escala sea más delgada por lo que se realiza un cambio de escala a 2:

$$\phi(2t - k) = \phi\left(2\left(t - \frac{k}{2}\right)\right) \quad (4.13)$$

Derivado de lo anterior obtenemos[21]:

$$\phi(2t - k) = \begin{cases} 2 & \frac{k}{2} \leq t < \frac{k+1}{2} \\ 0 & \text{cualquier otro caso.} \end{cases} \quad (4.14)$$

Con lo que definimos un espacio V_1 que contiene todas las funciones de la forma:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \phi(2t - k) \quad (4.15)$$

En este caso las discontinuidades se encuentran a la mitad de cada número entero como se muestra a en la ecuación 4.16. Representada de manera gráfica por la figura 4.7

$$\{0, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, \dots\} \quad (4.16)$$

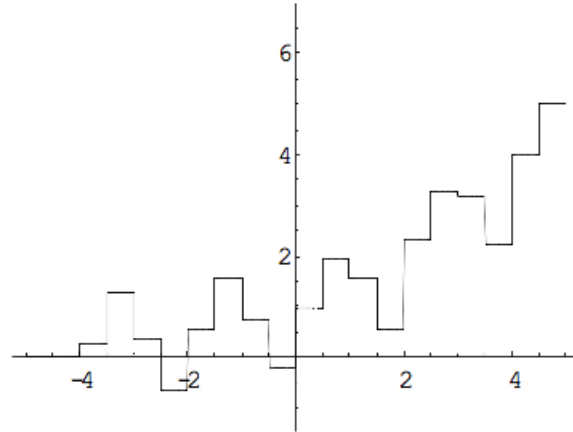


Figura 4.7.: Representación de un elemento de V_1 . [19]

Siguiendo con el ejemplo se aumenta la escala pero en vez de 3 será hasta 4 (más adelante será evidente la razón).

$$\phi(4t - k) = \phi\left(4\left(t - \frac{k}{4}\right)\right) \quad (4.17)$$

Se tiene que:

$$\phi(4t - k) = \begin{cases} 4 & \frac{k}{4} \leq t < \frac{k+1}{4} \\ 0 & \text{c.o.c.} \end{cases} \quad (4.18)$$

De igual forma se define un espacio V_2 que contiene todas las funciones de la forma:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \phi(4t - k) \quad (4.19)$$

Aquí las discontinuidades se encuentran cada cuarto del número entero (Ver figura 4.8):

$$\{0, 0.25, 0.5, 0.75, 1, 1.25, 1.5\dots\} \quad (4.20)$$

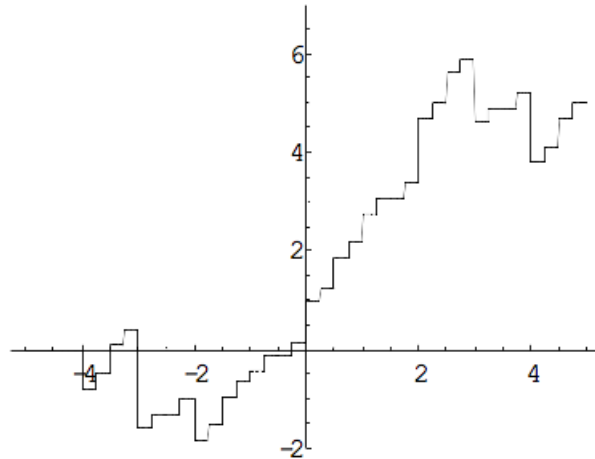


Figura 4.8.: Representación de un elemento de V_2 . [19]

Retomando las ecuaciones 4.12, 4.16 y 4.20 es claro que los elementos que conforman V_0 se encuentran contenidos en V_1 y a su vez V_0 y V_1 están dentro de V_2 por lo que se puede llegar a la siguiente conclusión:

$$V_0 \subset V_1 \subset V_2 \tag{4.21}$$

Y he aquí la razón por la que no se toma en cuenta el cambio de escala en 3 ya que si fuera el caso V_2 estaría definido por $\phi(3t - k)$ y aunque los elementos de V_0 estarían dentro de V_1 , los de V_1 no pertenecerían a V_2 (pues $\frac{1}{2}$ no es múltiplo de $\frac{1}{3}$). Aclarado esto, es posible generalizar si se sabe que los elementos que cumplen con la expresión 4.21 son múltiplos de 2. [21]

$$\left\{0, \frac{1}{2^j}, \frac{2}{2^j}, \frac{3}{2^j}, \frac{4}{2^j}, \dots\right\} \tag{4.22}$$

Derivado de esto se define V_j como el espacio de funciones constantes y continuas a tramos cuyas discontinuidades están contenidas en (4.22):

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \phi(2^j t - k) \tag{4.23}$$

Además de que:

$$V_0 \subset V_j \subset V_{j+1} \tag{4.24}$$

Mostrado en la figura 4.9

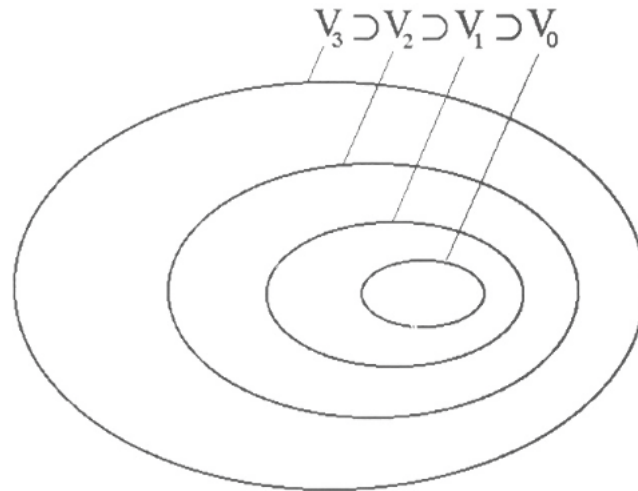


Figura 4.9.: Representación gráfica de la expresión 4.24.[18]

Por lo que se obtiene la función de escala diádica:

$$\phi(2^j t - k) = \begin{cases} 1 & \frac{k}{2^j} \leq t < \frac{k+1}{2^j} \\ 0 & \text{cualquier otro caso.} \end{cases} \quad (4.25)$$

Sin embargo, se comprueba que la norma de la función en la ecuación 4.25 es diferente de 1 por lo que se debe realizar un nuevo análisis de tal forma que, se pueda obtener una constante que nos proporcione la norma unitaria de la función.

Con lo cual la función de escalamiento y wavelet se encuentran definidas de manera completa por las expresiones 4.26 y 4.27 respectivamente.[51]

$$\phi_{j,k}(t) = 2^{\frac{j}{2}} \phi(2^j t - k) = \begin{cases} 2^{\frac{j}{2}} & \frac{k}{2^j} \leq t < \frac{k+1}{2^j} \\ 0 & \text{cualquier otro caso.} \end{cases} \quad (4.26)$$

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j t - k) = \begin{cases} 2^{\frac{j}{2}} & \frac{k}{2^j} \leq t < \frac{k+0.5}{2^j} \\ -2^{\frac{j}{2}} & \frac{k+0.5}{2^j} \leq t < \frac{k+1}{2^j} \\ 0 & \text{cualquier otro caso} \end{cases} \quad (4.27)$$

4.2.2.1. De escala a wavelet

Algo que resulta interesante es la relación existente entre la función de escala y la función wavelet, ya que, como veremos más adelante, al realizar la descomposición de una señal solo con la función de escala existe pérdida de información, es aquí donde entra la función wavelet para resolver dicho problema.[21]

Para empezar se tiene la siguiente definición:

Dado un espacio de Hilbert H y un subespacio V , para $f \in H$ se cumple que:

$$f = v + v^\perp \quad (4.28)$$

donde $v \in V$ y $v^\perp \in V^\perp$

Utilizando la definición anterior podemos descomponer un subespacio V_j como una suma de V_{j-1} y su complemento ortogonal V_{j-1}^\perp .

$$V_j = V_{j-1} + V_{j-1}^\perp \quad (4.29)$$

De la ecuación 4.29 se conocen los términos de V_j y V_{j-1} que como sabemos son subespacios generados a partir de $\phi_{j,k}$, por lo que solo resta identificar el complemento ortogonal.

Para este ejemplo se tienen los subespacios V_0 y V_1 donde $V_0 \subset V_1$. Si aplicamos la ecuación 4.29 se tiene:

$$V_1 = V_0 + V_0^\perp \quad (4.30)$$

Como se demostró anteriormente las funciones $\phi_{j,k}$ y $\psi_{j,k}$ son ortogonales entre sí ya que $\langle \psi, \phi \rangle = 0$ por lo que es claro que V_0^\perp es generado a partir de la función wavelet.

En este contexto, definiremos un nuevo subespacio W_0 compuesto por todas las funciones de la forma:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k \psi(t - k) \quad (4.31)$$

que como se dijo es ortogonal al subespacio V_0 , lo cual se representa de la siguiente manera:

$$V_1 = V_0 \oplus W_0 \quad (4.32)$$

Es decir, el subespacio V_1 esta conformado por la suma de todos los elementos del subespacio V_0 y W_0 . [21]

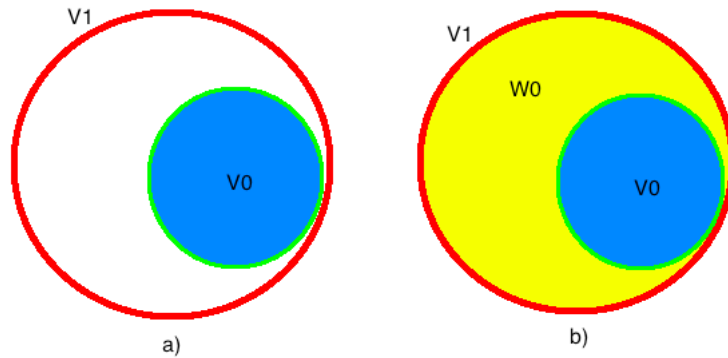


Figura 4.10.: a)Descomposición sin wavelet b)Descomposición con wavelet.

Analizando la figura 4.10 se tienen dos casos: en el caso a) si pasamos del subespacio V_1 al V_0 es evidente que existe pérdida de información que corresponde al espacio en color blanco, esto debido a que no es parte de V_0 . En el caso de b) es posible descomponer $f(t)$ en elementos de V_1 sin pérdida de información ya que se tienen identificados los subespacios que lo conforman (Ver figura 4.11).

Se puede generalizar la expresión 4.32 de tal forma que:

$$V_j = V_0 \oplus W_0 \oplus W_1 \oplus W_2 \dots \oplus W_{j-1} \tag{4.33}$$

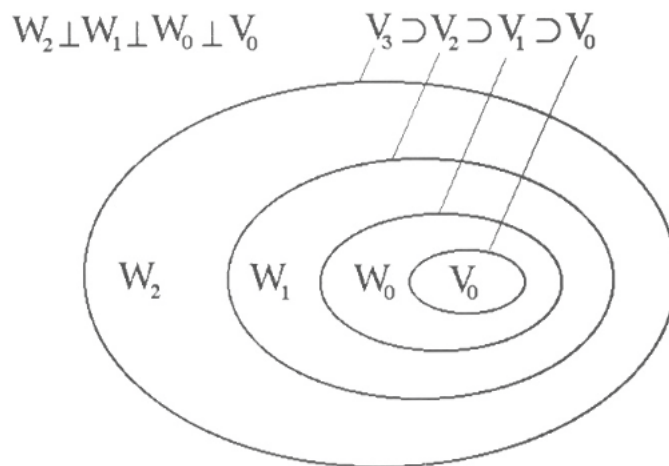


Figura 4.11.: Representación gráfica de la ecuación 4.33.[18]

En términos de funciones para un nivel $j_0 = 0$ se tiene:

$$f_{j_0}(t) = f_0 + \sum_{j=j_0}^{N-1} \omega_j \quad (4.34)$$

Ampliando la expresión 4.34 a k niveles de descomposición:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{2^{j_0}-1} c_{j_0,k} \phi_{j_0,k}(t) + \sum_{j=j_0}^{N-1} \sum_{k=0}^{\log_2(N)-1} d_{j,k} \psi_{j,k}(t) \quad j, k \in \mathcal{Z}^+ \quad (4.35)$$

Donde la ecuación 4.35 recibe el nombre de transformada wavelet inversa.

Como se puede observar la Transformada Wavelet tanto continua como discreta tienen base matemática bien definida por lo que se considera una técnica con base teórica completa.

4.2.2.2. Algoritmo piramidal y escalograma

En 1986, Stéphane Mallat relacionó la teoría de wavelets con métodos existentes en procesamiento digital como la codificación de subbandas y filtros espejo de cuadratura. Gracias al trabajo de Mallat, el proceso de descomposición a través de wavelets se redujo a sencillas operaciones de cálculo de promedios y diferencias de forma recursiva.[26]

Esta relación resulta evidente si retomamos las funciones $\phi_{j,k}$ y $\psi_{j,k}$ y se obtiene la transformada de Fourier de cada una, se observa que su respuesta en frecuencia es similar a un filtro paso bajas y paso altas respectivamente.[18] De esta manera, podemos vincular los coeficientes wavelet $c_{j,k}$ y $d_{j,k}$ con los coeficientes que conforman un filtro acomodándolos en una matriz de transformación de tal forma que sigan dos patrones diferentes, uno que trabaja como filtro pasa-bajos y otro como filtro pasa-altos. A estos tipos de filtros en particular se les conoce como filtros espejo en cuadratura.[25]

Cabe recalcar de las señales que en muchas de ellas la información de interés reside en las componentes de baja frecuencia y por lo general las componentes de alta frecuencia están asociadas a los detalles finos de la misma por lo que se hace la distinción entre coeficientes de aproximación ($c_{j,k}$) y coeficientes de detalle ($d_{j,k}$)[27]

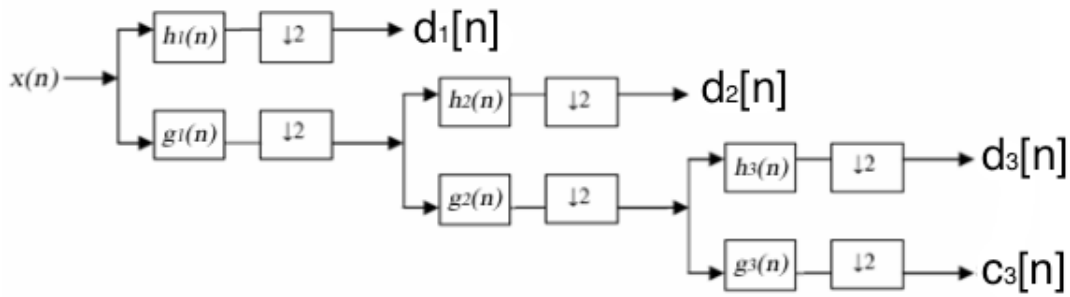


Figura 4.12.: Descomposición de árbol de Mallat[25]

El método antes descrito se muestra en 4.12 en el que se descompone una señal $x(n)$ en sus coeficientes de aproximación y detalle con ayuda de los filtros pasa-altos ($h_j(n)$) y paso-bajas ($g_j(n)$) . El símbolo $\downarrow 2$ es el proceso de submuestreo y $j=1, 2, 3 \dots k$ es el nivel de descomposición.[25]

$$\begin{array}{l}
 (c_{j,k}) \quad [\phi \quad \phi \quad \phi \quad \phi \quad \phi \quad \phi \quad \phi \quad \phi] \\
 \\
 (c_{j-1,k}) \quad [\phi \quad \phi \quad \phi \quad \phi] \quad [\psi \quad \psi \quad \psi \quad \psi] \quad (d_{j-1,k}) \\
 \\
 (c_{j-2,k}) \quad [\phi \quad \phi] \quad [\psi \quad \psi] \quad (d_{j-2,k}) \dots\dots\dots \\
 \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \\
 (c_{0,k}) \quad [\phi] \quad [\psi] \quad (d_{0,k}) \dots\dots\dots \\
 \\
 [c_{0,k} \quad d_{0,k} \quad \dots \quad d_{j-2,k} \quad d_{j-1,k}]
 \end{array}$$

Figura 4.13.: Descomposición de árbol de Mallat en relación con la notación wavelet

En la figura 4.13 se muestra el equivalente del árbol de Mallat relacionado con las

funciones de escalamiento y wavelet. Esto resulta útil ya que a partir de esta es posible obtener una representación gráfica conocida como plano Tiempo-Frecuencia o escalograma y es similar al espectrograma en la TFTR. Esta idea consiste en variar la escala en factores de 2^j (escala diádica) lo que generará una representación donde para una escala dada se tiene el cambio en el tiempo de la señal proyectada sobre la wavelet. (Ver figura 4.14)[28]

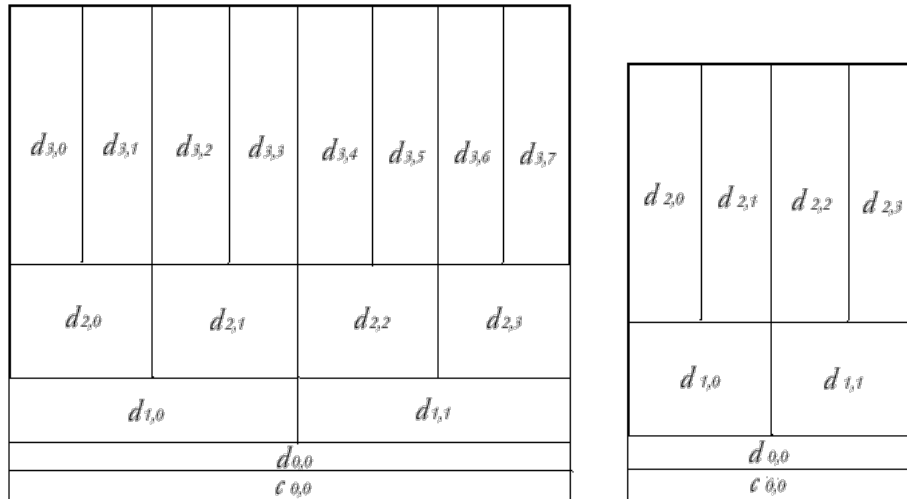


Figura 4.14.: Plano tiempo-escala para señal de 16 muestras (izquierda) y 8 muestras (derecha)

Algo que es importante mencionar es que el nivel de descomposición máximo de una señal esta dada por $\log_2(N)$, donde N es el número de muestras que conforman la señal.

4.2.3. Ejemplos de Wavelets (Haar)

La wavelet de Haar (Ver figura 4.15) es considerada la primera wavelet y también la más simple por lo cual resulta muy útil como base para entender la manera en que funciona el análisis wavelet y a partir de ello utilizar wavelets más sofisticadas.

La wavelet de Haar se define como[21]:

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 0.5 \\ -1 & 0.5 \leq t < 1 \\ 0 & \text{cualquier otro caso.} \end{cases} \tag{4.36}$$

La función de escala esta dada por:

$$\phi(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{cualquier otro caso} \end{cases} \quad (4.37)$$

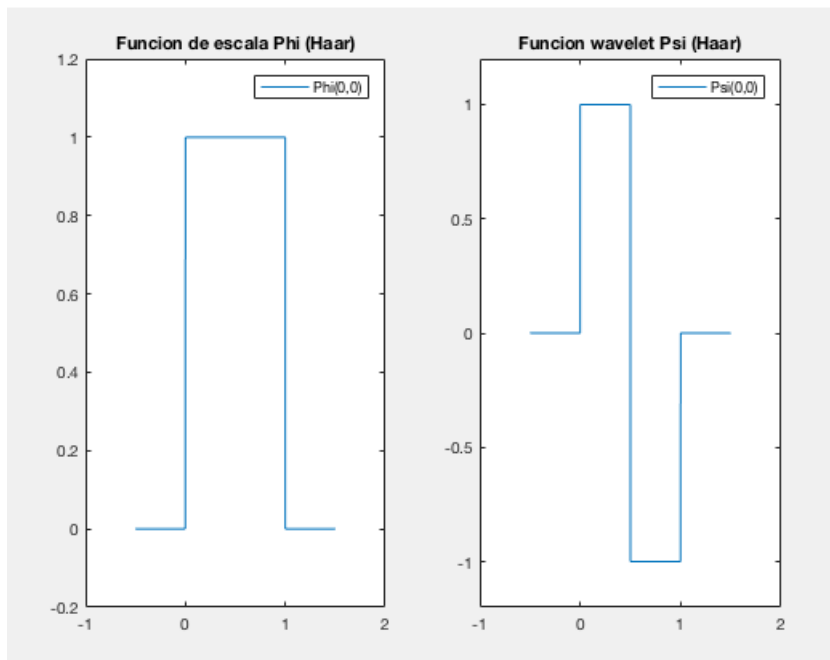


Figura 4.15.: Sistema Haar.

A modo de ejercicio se comprobará que las funciones 4.36 y 4.37 cumplen con las propiedades de ortogonalidad y ortonormalidad que como antes se dijo son fundamentales para la expansión de una señal en funciones base.

Sea $\psi(t)$ y $\phi(t)$ comprobar su ortogonalidad y ortonormalidad en el intervalo de $[0, 1]$

Aplicando la definición de ortogonalidad se obtiene:

$$\langle \psi, \phi \rangle = \int_0^1 \psi(t) \phi(t) dt \quad (4.38)$$

Resolviendo la integral:

$$\langle \psi, \phi \rangle = \int_0^{0.5} \psi(t) \phi(t) dt + \int_{0.5}^1 \psi(t) \phi(t) dt \quad (4.39)$$

$$\langle \psi, \phi \rangle = \int_0^{0.5} (1)(1) dt + \int_{0.5}^1 (-1)(1) dt = 0.5 - 1 + 0.5 = 0 \quad (4.40)$$

Por otro lado para la ortonormalidad;

Sustituyendo $\psi(t)$ en la definición de ortonormalidad nos da lo siguiente:

$$\langle \psi, \psi \rangle = \int_0^1 \psi(t) \psi(t) dt \quad (4.41)$$

Resolviendo la integral:

$$\langle \psi, \psi \rangle = \int_0^{0.5} \psi(t) \psi(t) dt + \int_{0.5}^1 \psi(t) \psi(t) dt \quad (4.42)$$

$$\langle \psi, \psi \rangle = \int_0^{0.5} (1)(1) dt + \int_{0.5}^1 (-1)(-1) dt = 0.5 + 1 - 0.5 = 1 \quad (4.43)$$

$$\|\psi\| = \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle} = 1 \quad (4.44)$$

Comprobando ortonormalidad para $\phi(t)$ tenemos:

$$\langle \phi, \phi \rangle = \int_0^1 \phi(t) \phi(t) dt \quad (4.45)$$

Resolviendo la integral:

$$\langle \phi, \phi \rangle = \int_0^1 (1)(1) dt = 1 \quad (4.46)$$

$$\|\phi\| = \sqrt{\langle \phi, \phi \rangle} = 1 \quad (4.47)$$

Con lo que queda demostrado que $\phi(t)$ y $\psi(t)$ son ortogonales entre si [51], y además tienen norma unitaria por lo que es posible aproximar de manera uniforme funciones continuas por medio de funciones escalonadas como se puede observar en las figuras

4.16, 4.17 y 4.18 donde se tiene un ejemplo obtenido con ayuda de *Matlab* en el cual, un ECG es analizado y se muestra su respectiva descomposición por medio de la transformada Haar para diferentes niveles de descomposición.

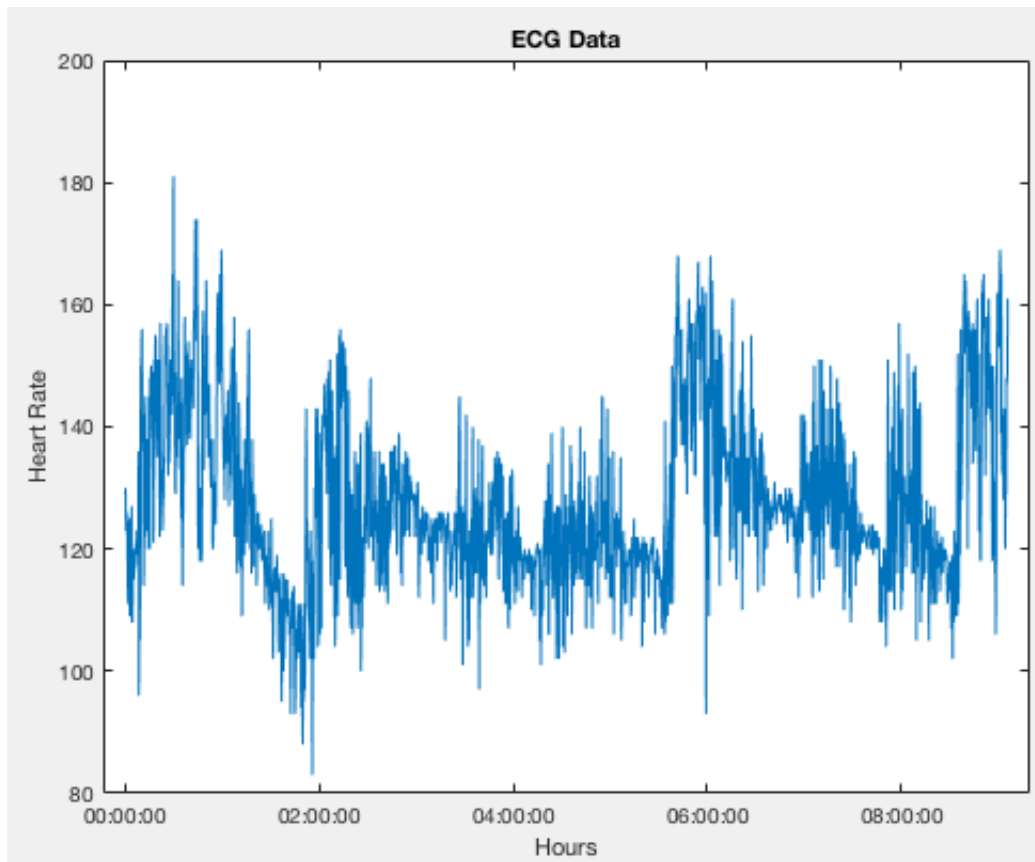


Figura 4.16.: Señal ECG.

Como se mencionó anteriormente la principal desventaja de la wavelet de Haar es que no es continua y por ende no es derivable. Sin embargo, se obtienen muy buenos resultados en aplicaciones como compresión de señales de audio y eliminación de ruido.

4.2.4. Limitaciones

Al igual que la TFTR, la transformada wavelet tiene como limitante el principio de incertidumbre de Heisenberg, aún con una herramienta como el análisis multiresolución en el que para altas frecuencias se tiene una buena resolución temporal y para bajas frecuencias una buena resolución frecuencial.

Además de lo anterior, la fiabilidad de los resultados están en función de una correcta elección de la wavelet madre, lo cual muchas veces se realiza de manera empírica. [20]

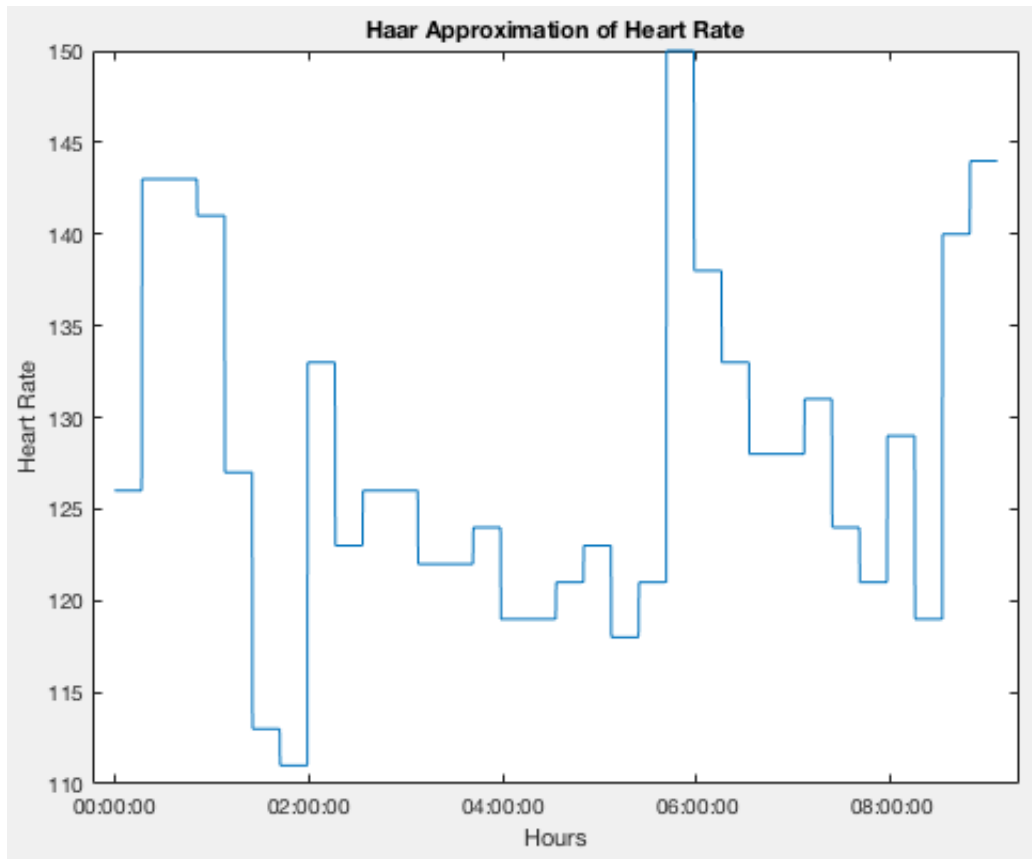


Figura 4.17.: Transformada Haar de señal ECG $j_0=6$.

4.3. Transformada de Hilbert-Huang (THH)

La Transformada de Hilbert-Huang (THH) es una herramienta que consta de dos partes: la primera enfocada en la descomposición de la señal analizada en funciones monótonicas llamadas funciones de modo intrínseco (FMI) a través del algoritmo DEM (Descomposición empírica en modos), y la segunda que trata de la aplicación de la Transformada de Hilbert, obteniendo como resultado una representación gráfica de energía Tiempo-Frecuencia llamada espectro de Hilbert-Huang. A diferencia de otras transformadas como Wavelet y Fourier, la THH se basa en la naturaleza de la misma señal por lo que no se requiere cambiar de dominio para su análisis. Además de que se puede aplicar a señales no lineales y no estacionarias, por lo que es útil para la investigación de señales biomédicas.[42]

4.3.1. Descomposición empírica en modos

El algoritmo DEM fue desarrollado por Norden Huang y como se mencionó anteriormente su propósito es obtener las FMI's que componen la señal. Estas se caracterizan

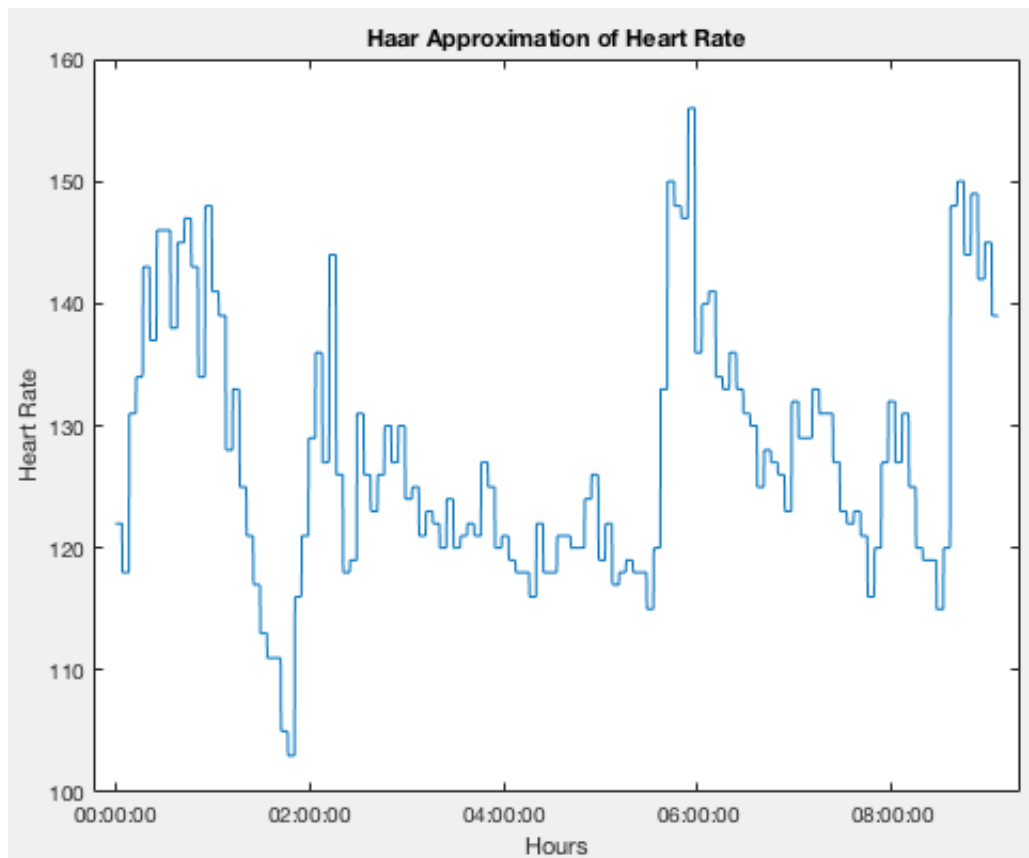


Figura 4.18.: Transformada Haar de señal ECG $j_0=4$.

por tener un número de valores extremos y número de cruces por cero iguales o diferentes al menos en uno tomando en cuenta la totalidad de la señal, y el valor medio de la envolvente es cero. (Ver figura 4.19) [31][34]

El proceso para descomponer la señal se resume de la siguiente forma:[32]

1. Se localizan los máximos locales de una señal $x(t)$ y se unen por medio de una interpolación obteniendo una envolvente en la parte superior, a la que llamaremos $e_1(t)$, se repite el procedimiento con los mínimos locales para obtener una envolvente inferior $e_2(t)$.
2. Se calcula el valor medio con las envolventes superior e inferior.

$$m_k(t) = \frac{e_{1,k}(t) + e_{2,k}(t)}{2} \quad (4.48)$$

3. Se obtiene la primera componente dada por la ecuación (4.49) donde $h_{k-1}(t) = x(t)$ inicialmente.

$$h_k(t) = h_{k-1}(t) - m_k(t) \quad (4.49)$$

4. Verificamos si se trata de una FMI con la siguiente expresión:

$$SD_k = \frac{\sum_{i=0}^N |h_{k-1}(t) - h_k(t)|^2}{\sum_{i=0}^N h_{k-1}^2(t)} \leq 0.3 \quad (4.50)$$

5. Restamos el resultado generado a la señal original y repetimos el proceso hasta que el residuo sea una función monótona o cuenta con un solo valor extremo.
6. Al finalizar, la señal original se podrá representar como la sumatoria de FMI's $h_k(t)$ y un residuo r_N como se puede observar en la figura 4.20.

$$x(t) = \sum_{k=0}^N h_k(t) + r_N \quad (4.51)$$

Cabe resaltar que a diferencia de las funciones armónicas que tienen frecuencia y amplitud constante, las FMI pueden tener amplitud y frecuencias variables en función del tiempo.[32]

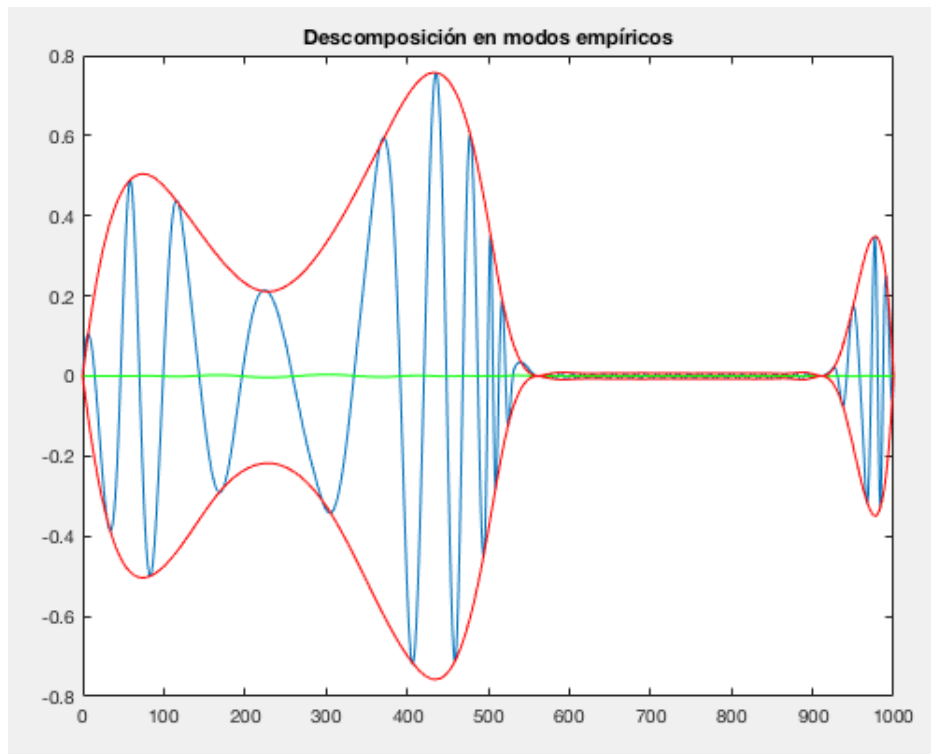


Figura 4.19.: Señal con envolventes y valor promedio.

4.3.2. Efecto de borde

El efecto de borde, como se muestra en la figura 4.21, es un error que se presenta durante la ejecución del algoritmo DEM y que se propaga a través de las FMI's,

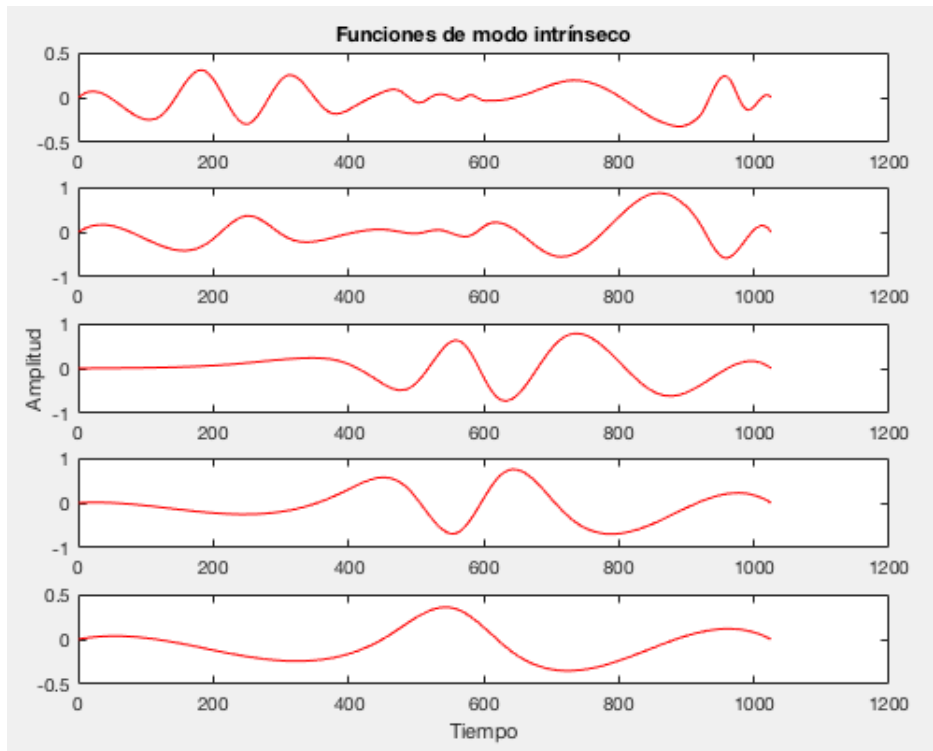


Figura 4.20.: Funciones de modo intrínseco.

afectando el resultado. Este error se debe a que el valor inicial y final de la serie temporal no forman parte de los valores extremos, por lo que no están incluidos en el proceso de interpolación, lo cual conlleva a que el método de interpolación no converja.[32]

Aunque existen varias formas de manejar el efecto de borde, por simplicidad se utilizó la inserción de valores, que a grandes rasgos consiste en incluir en el proceso de interpolación el valor inicial y final de la serie de datos sean o no valores extremos.[32]

En la figura 4.22 se puede observar como los valores extremos ya forman parte de la envolvente, cuando se aplica el método antes descrito.

4.3.3. Efecto de mezcla de modos

Por definición, cada una de las FMI que componen una señal debe de oscilar a una sola frecuencia ya que como se vio anteriormente es condición necesaria para aplicar la TH.

Sin embargo, en la práctica esto no siempre se cumple, pues debido a la naturaleza iterativa del algoritmo muchas veces se presentan FMI's con más de un modo. A dicho efecto se le conoce como "mezcla de modos" y es considerado el principal problema del DEM.[32]

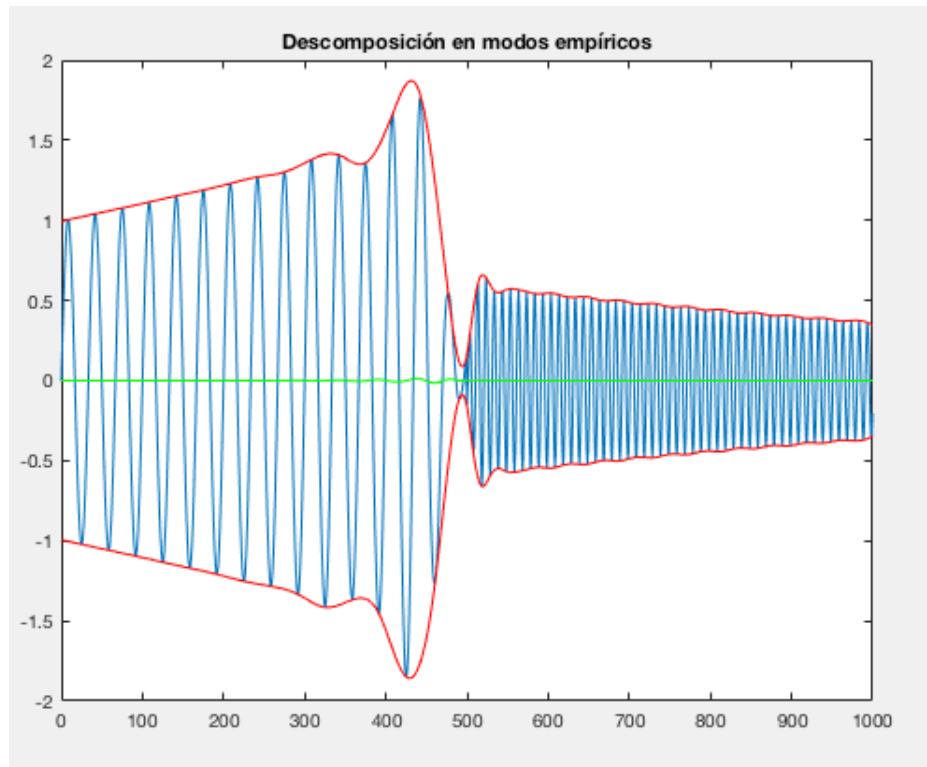


Figura 4.21.: Ejemplo con efecto de borde.

En la figura 4.23 puede observarse claramente que la primera FMI esta compuesta por dos frecuencias diferentes.

Para tratar este problema Wu y Huang propusieron una metodología a la que llamaron Ensemble Empirical Mode Decomposition (EEMD), la cual grosso modo consiste en agregar ruido gaussiano a la señal original y aplicar el algoritmo varias veces para al final calcular un promedio de las FMI's obtenidas.[32]

4.3.4. Transformada de Hilbert

La Transformada de Hilbert de una función $f(t)$ es un caso especial de convolución entre las funciones $f(t)$ y $-\frac{1}{\pi t}$ definiéndose como:

$$H\{f(t)\} = f(t) * -\frac{1}{\pi t} = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\tau)}{t - \tau} d\tau \quad (4.52)$$

Esta operación en la frecuencia equivale a multiplicar la transformada de Fourier de

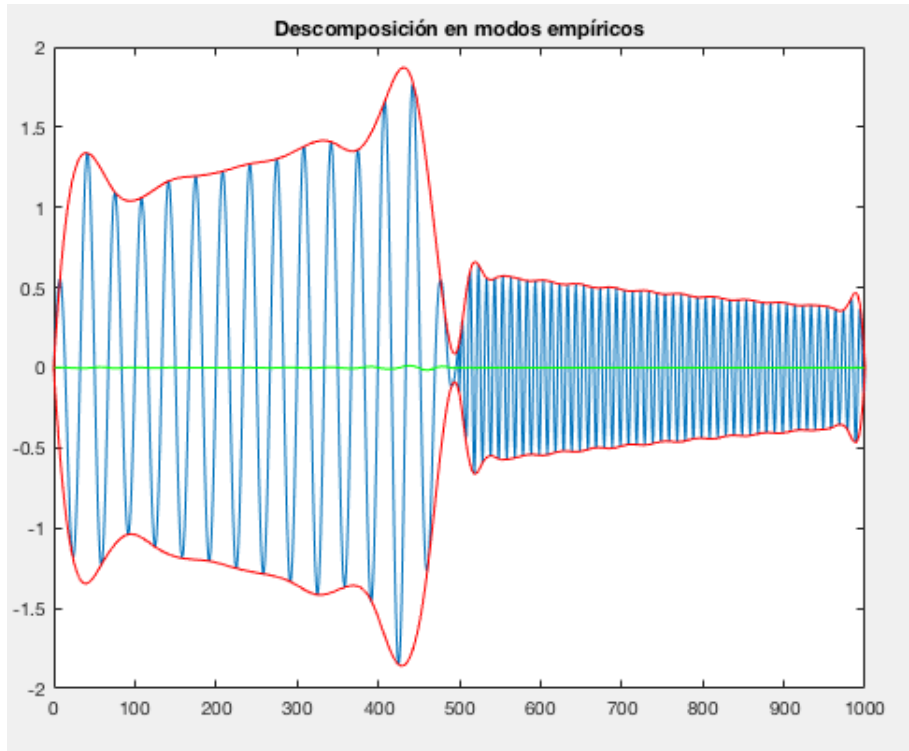


Figura 4.22.: Ejemplo con efecto de borde corregido.

$f(t)$ con la función $isgn(\omega)$. La función $isgn(\omega)$ se muestra a continuación:

$$isgn(\omega) = \begin{cases} -i & \omega < 0 \\ i & \omega > 0 \end{cases} \quad (4.53)$$

Grosso modo la Transformada de Hilbert produce un adelanto de fase de $\frac{\pi}{2}$, por lo cual se dice que la función $f(t)$ y su Transformada de Hilbert están en cuadratura. [33]

De esta manera $f(t)$ y su Transformada de Hilbert forman un par conjugado complejo, por lo tanto es posible definir una señal analítica $z(t)$, tal que:

$$z(t) = f(t) + iH\{f(t)\} \quad (4.54)$$

Lo que supone una gran ventaja ya que podemos aprovechar las propiedades de los números complejos, como por ejemplo su módulo y fase.

$$a(t) = \sqrt{f(t)^2 + H\{f(t)\}^2} \quad (4.55)$$

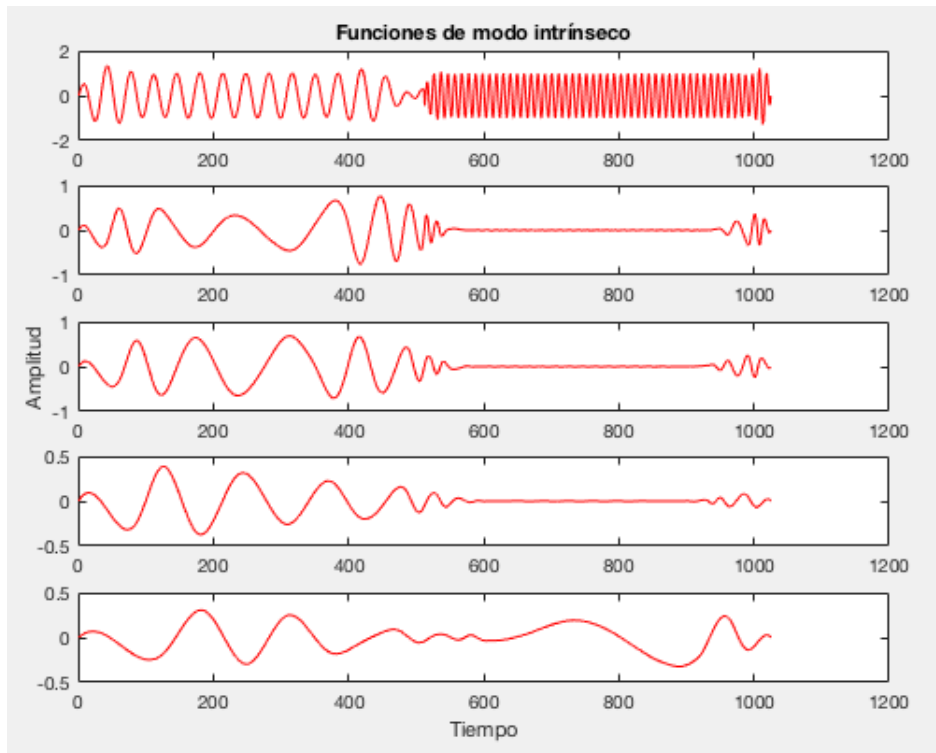


Figura 4.23.: Efecto de mezcla de modos.

$$\theta(t) = \arctan\left(\frac{H\{f(t)\}}{f(t)}\right) \quad (4.56)$$

$$z(t) = a(t)e^{i\theta(t)} \quad (4.57)$$

Como se puede observar el valor de la amplitud y la fase están en función del tiempo, es decir, se tendrá un valor dependiendo del instante t en que sea medido. Por lo que, estos se conocen como amplitud y fase instantáneas.[32]

Frecuencia instantánea

Como se mencionó anteriormente, a través de la Transformada de Hilbert es posible definir los valores instantáneos de fase y amplitud, lo cual supone una ventaja ya que en este contexto se puede estudiar como cambian en el tiempo.

Aprovechando esta dependencia temporal, en 1946 *Van der Pol*[52] publicó un artículo donde definía la frecuencia instantánea como la variación de la fase respecto

del tiempo (Ver figura 4.24).[34]

$$\omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} \quad (4.58)$$

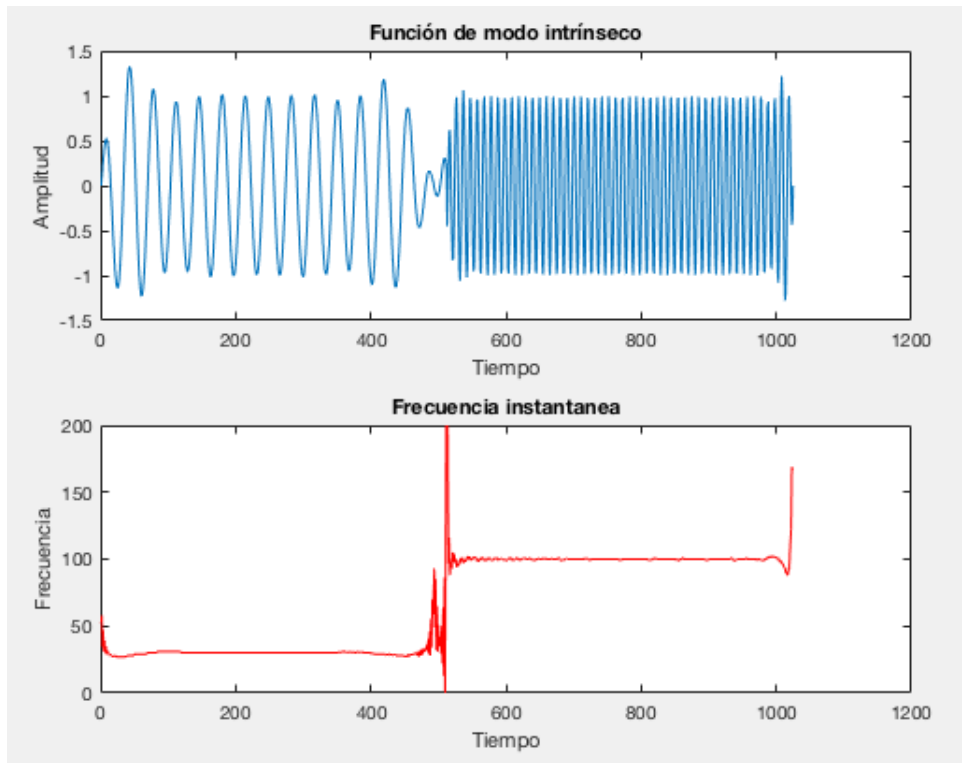


Figura 4.24.: Frecuencia instantánea de un FMI.

La principal desventaja de la Transformada de Hilbert es que tanto amplitud como frecuencia instantáneas no necesariamente tienen un significado físico, ya que para que esto ocurra la señal $x(t)$ debe ser puramente oscilatoria.[35] Por lo cual en este caso la implementación del algoritmo DEM resulta fundamental ya que las FMI's cumplen con esta condición.

Espectro de Hilbert-Huang

El Espectro de Hilbert-Huang (Ver figura 4.25) es una representación de la distribución de energía en el plano Tiempo-Frecuencia. Generalmente las frecuencias con mayor amplitud son suficientes para obtener una buena caracterización de la señal. [31]

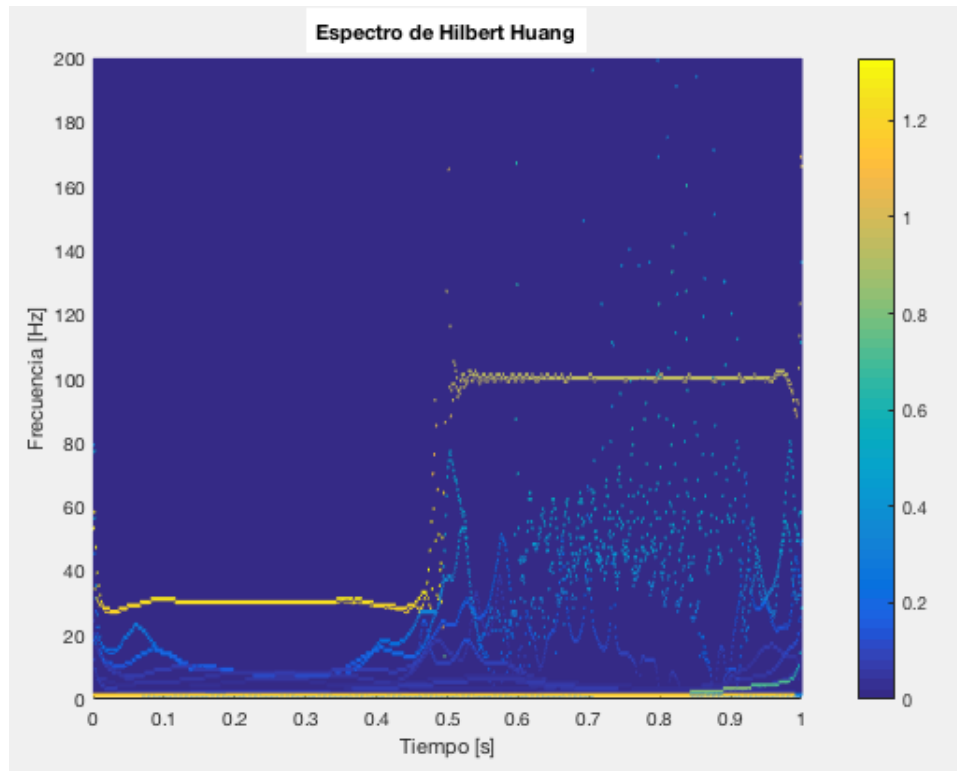


Figura 4.25.: Espectro de Hilbert-Huang.

4.4. Implementación y prueba de los algoritmos

Como parte de la implementación de los algoritmos se tomó como base la señal sintética *mtlb* incluida en el software de *Matlab*, en la figura 4.26 se muestra de manera gráfica. Esta señal contiene las frecuencias correspondientes a la palabra "matlab".

4.4.1. Transformada de Fourier de tiempo reducido

Realizando el análisis con una ventana Blackman de 200 muestras de longitud y 190 muestras de traslape, se obtiene el espectrograma mostrado en la figura 4.27. Si comparamos las figuras 4.26 y 4.27, podemos observar que existe mayor concentración de energía en los intervalos de 50-200 ms y 300-450 ms, en diferentes rangos frecuenciales.

4.4.2. Transformada Wavelet Discreta

En el caso del análisis con TWD se utilizó una wavelet *bump* y el resultado se muestra en la figura 4.28. Se puede observar cierta similitud en el patrón que sigue

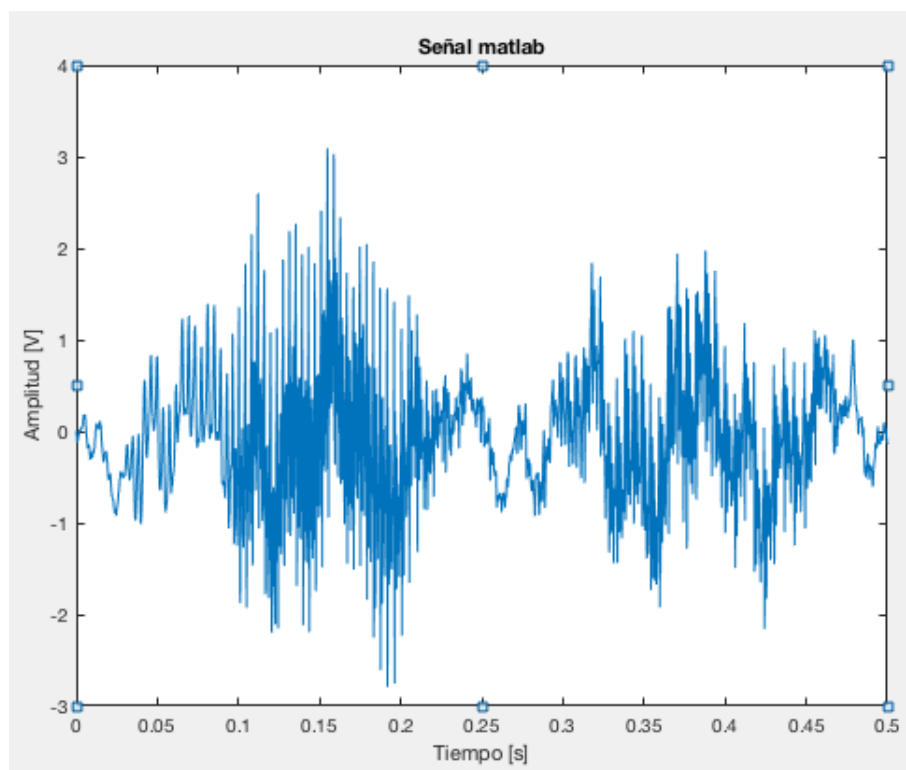


Figura 4.26.: Gráfica que muestra la señal sintética *mtlb*.

la figura 4.27, aunque difiere en la distribución de energía, ya que, se muestra mayor concentración de energía en el intervalo de 1.5 a 2.5 KHz y en la componente de 500 Hz.

4.4.3. Transformada de Hilbert-Huang

Aplicando la THH visualizamos que la distribución de energía se mantiene en el mismo intervalo de tiempo que en los casos del espectrograma y escalograma. Sin embargo, en 4.29 las componentes frecuenciales con mayor energía se encuentran localizadas entre los 1000 y 1500 Hz.

4.5. Conclusiones

En el procesamiento de señales no estacionarias, el análisis Tiempo-Frecuencia tiene un alcance amplio debido principalmente a que un número considerable de señales incluyendo señales médicas tienen esta característica.

De las pruebas antes realizadas podemos concluir que aunque la distribución de energía varía de forma importante, la localización de las frecuencias en el eje del tiempo se mantiene constante.

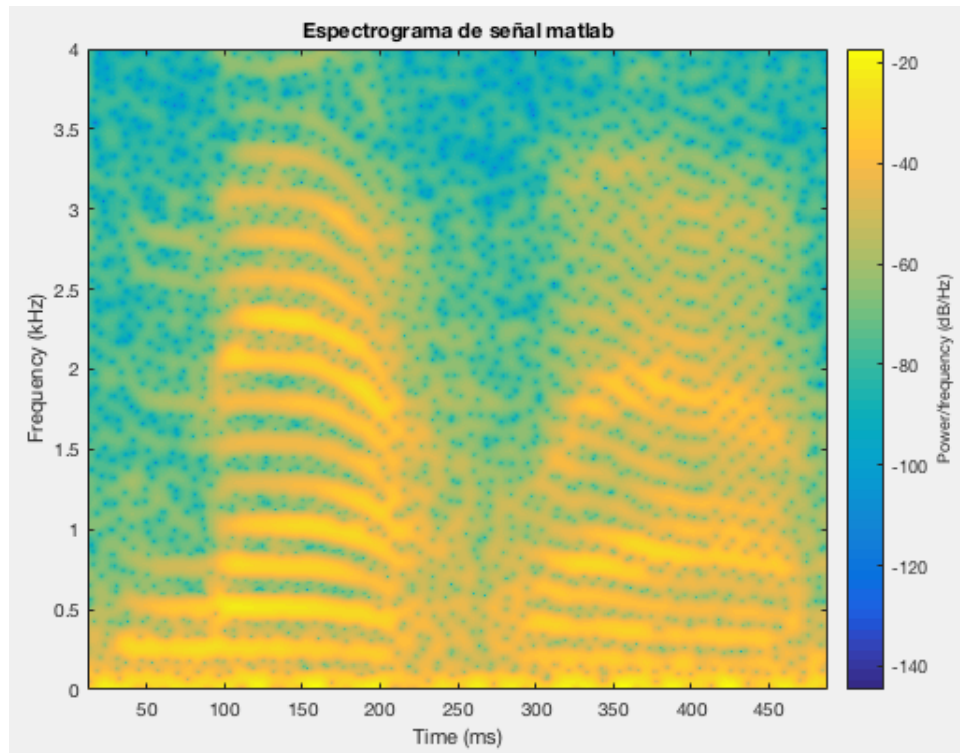


Figura 4.27.: Espectrograma resultante de aplicar la TFTR a la señal *matlab*.

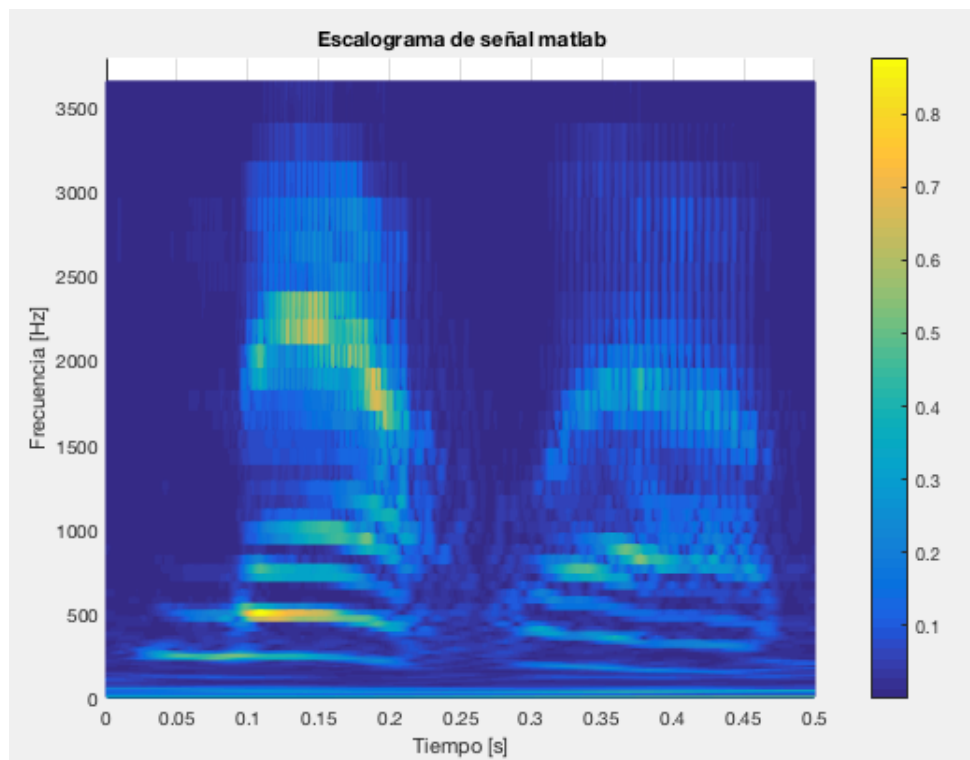


Figura 4.28.: Escalograma que representa la señal *matlab*.

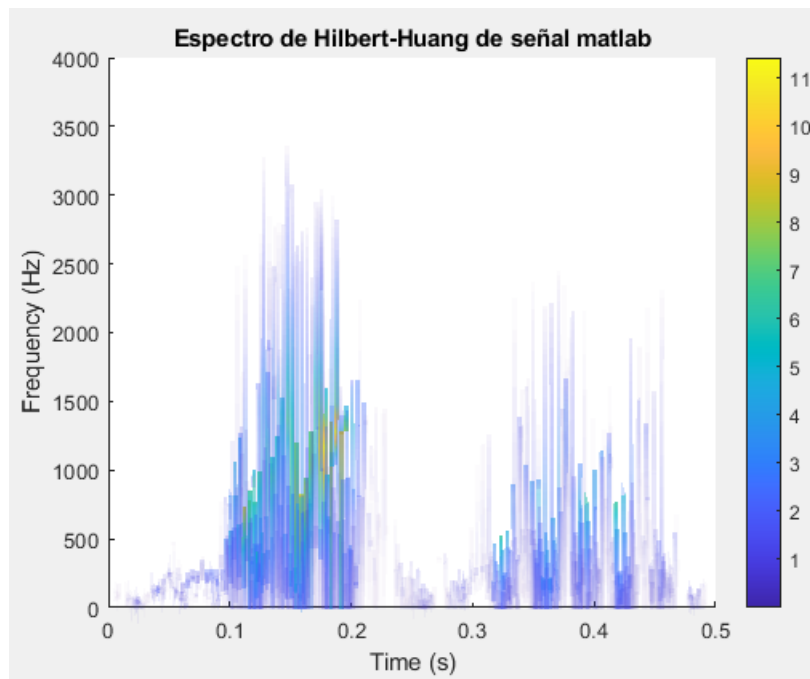


Figura 4.29.: Espectro de Hilbert-Huang que representa la señal *mtlb*.

5. Evaluación y validación de los algoritmos

Para realizar la evaluación de la TFTR, TWD y THH, se utilizaron las librerías incluidas en el software *Matlab* y se propuso observar los resultados a través de cuatro pruebas en las que se analiza su comportamiento al aplicarse sobre señales que simulan las características principales de la señal EEG, las cuales son:

- No estacionariedad
- Alto contenido de ruido
- Componentes frecuenciales cercanas
- No linealidad

Es con estas características que se evalúa el desempeño de cada técnica, considerando que se conocen las componentes frecuenciales de la señal propuesta. Al final se realizan pruebas con datos de una señal EEG real obtenida de un banco de datos.

5.1. No estacionariedad

En esta sección se definió una señal con contenido frecuencial de 3, 6, 11 y 18 Hz distribuidas en diferentes intervalos de tiempo.

A continuación se muestra el código de Matlab y la señal resultante en la figura 5.1.

Algoritmo 5.1 Lista de de código que genera la señal no estacionaria a analizar (Ver figura 5.1).

```
fs = 200;
w=2*pi;
t=1/fs : 1/ fs : 10;
t1=t (1: fs *3); t2=t ( fs *3: fs *6);
t3=t ( fs *6: fs *8); t4=t ( fs *8: fs *10);
x1=sin (w*3*t1); x2=sin (w*6*t2);
x3=sin (w*11*t3); x4=sin (w*18*t4);
xt=[x1 x2 x3 x4];
figure (1)
plot (t ,xt (1:2000))
ylabel ( 'Amplitud ' );
title ( 'Señal no estacionaria con contenido de 3, 6, 11 y 18 Hz ' );
```

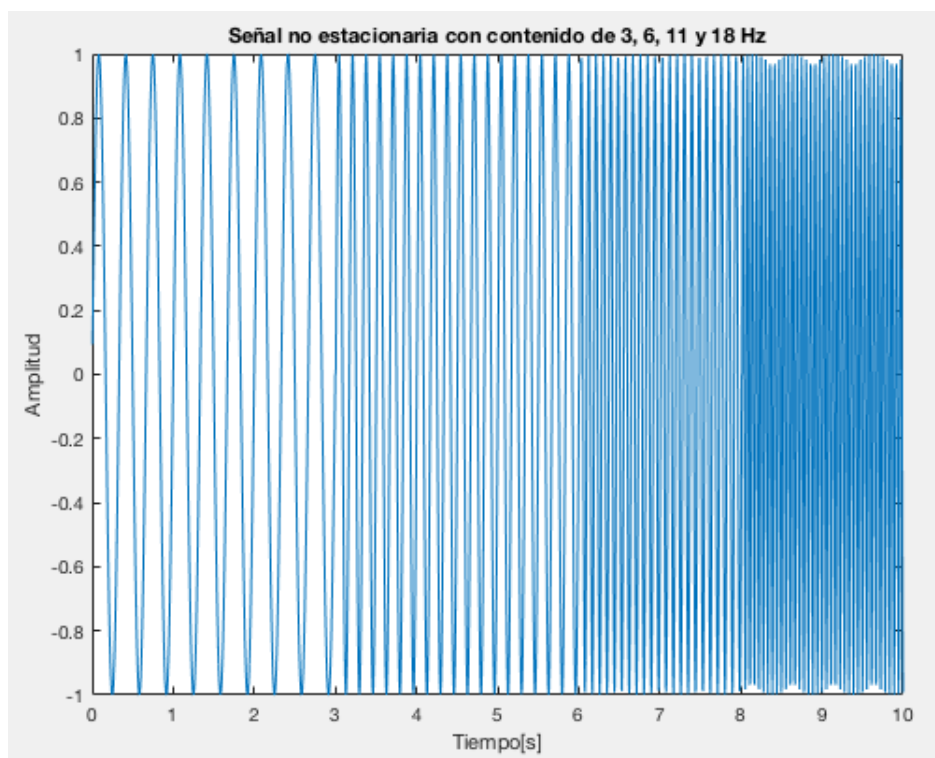


Figura 5.1.: Señal no estacionaria.

5.1.1. Transformada de Fourier de Tiempo Reducido

Para las pruebas con la TFTR se definió una ventana Blackman de 200 muestras, teniendo dos casos a analizar, el primero sin traslape y el segundo con un traslape de 190 muestras.

Como se observa en la figura 5.2, se tiene la información tanto frecuencial como temporal. Sin embargo, si nos enfocamos en el rango de los primeros 25 Hz, como se muestra en la figura 5.3, notamos dos cosas, la primera se refiere las discontinuidades existentes en los límites de las ventanas, esto se visualiza mejor en el segundo 8 de la figura 5.3. La segunda es que la resolución frecuencial es inexacta, pues la potencia de las componentes frecuenciales no se centra en un solo valor, si no, en un rango de valores.

Algoritmo 5.2 Código que genera el espectrograma de la señal sin traslape observada en la figura 5.2.

```
spectrogram(xt, blackman(200), 0, 200, fs, 'yaxis')
title('Espectrograma de señal no estacionaria');
xlabel('Tiempo [s]');
ylabel('Frecuencia [Hz]');
```

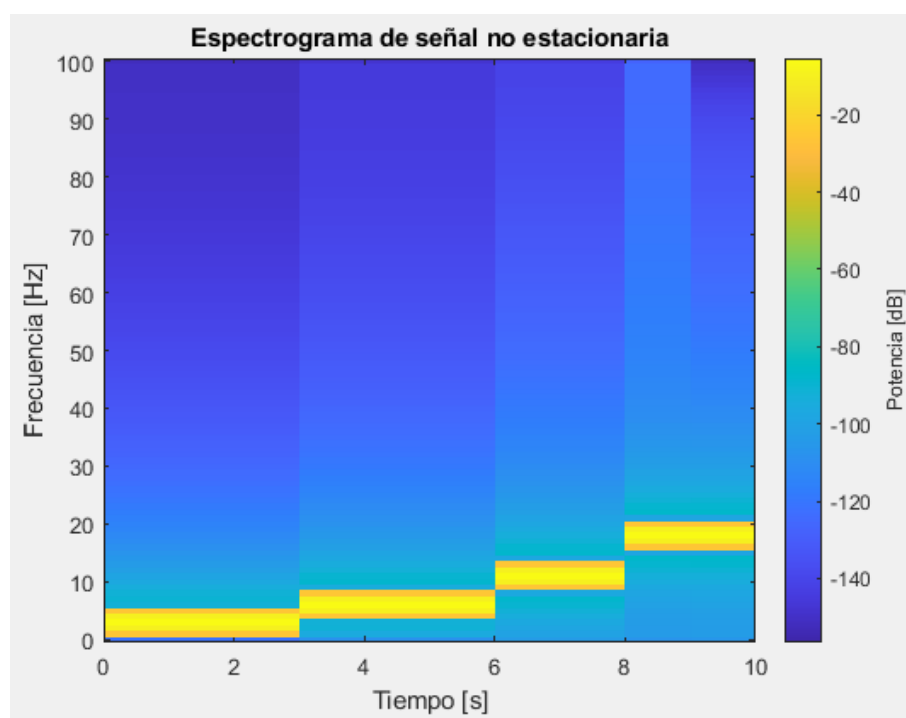


Figura 5.2.: Espectrograma con una ventana de 200 muestras sin traslape.

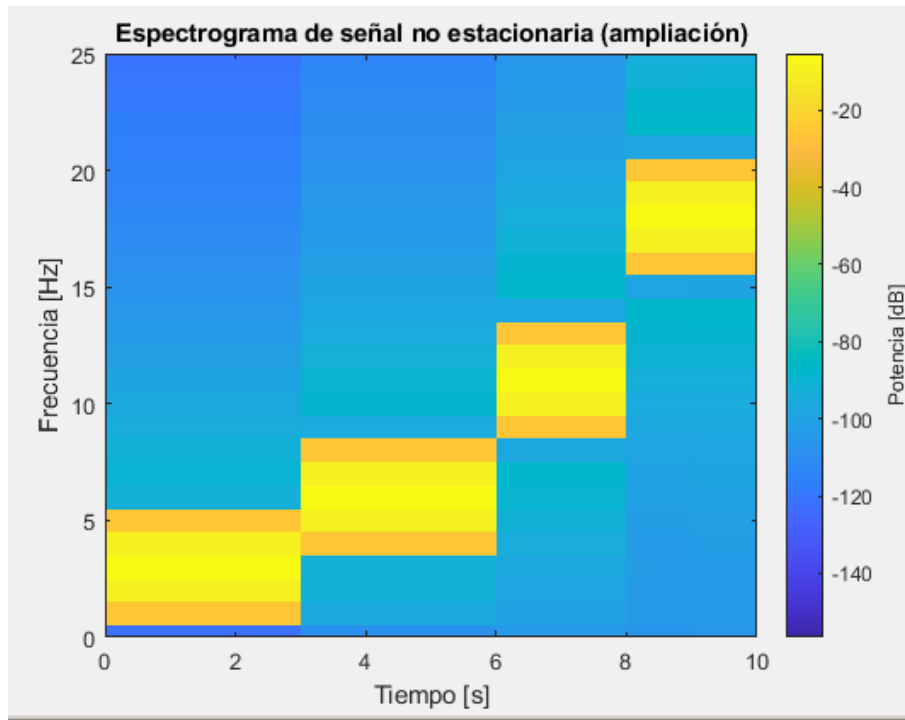


Figura 5.3.: Espectrograma detallando los primeros 25 Hz.

Para solventar el primer tema, se utiliza un traslape de 190 muestras (mostrado en la figura 5.4) con el cual, se elimina la discontinuidad debido al uso de ventanas. Para resolver el segundo tema, se utiliza el parámetro *reassigned* incluido en la función `spectrogram` de *Matlab* que se basa en la técnica de reasignación de frecuencias detallada en [56]. Con ayuda de este parámetro se puede apreciar la información frecuencial relevante, tal como se muestra en la figura 5.5.

Algoritmo 5.3 Espectrograma de la señal con traslape y parámetro *reassigned* (Ver figura 5.5).

```
spectrogram(xt,blackman(200),190,200,fs,'reassigned','yaxis')
title('Espectrograma de señal no estacionaria');
xlabel('Tiempo [s]');
ylabel('Frecuencia [Hz]');
```

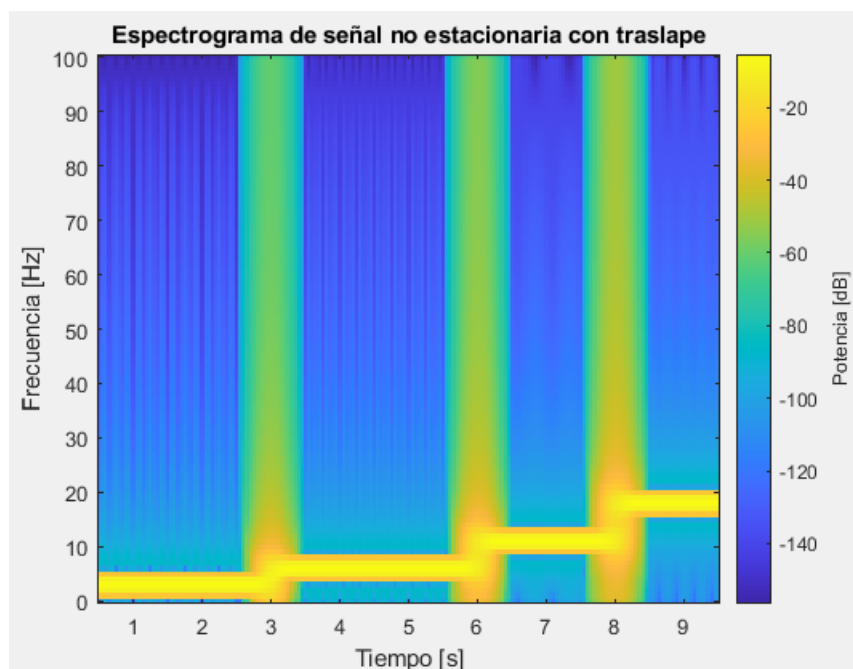


Figura 5.4.: Espectrograma con una ventana de 200 muestras y traslape de 190 muestras.

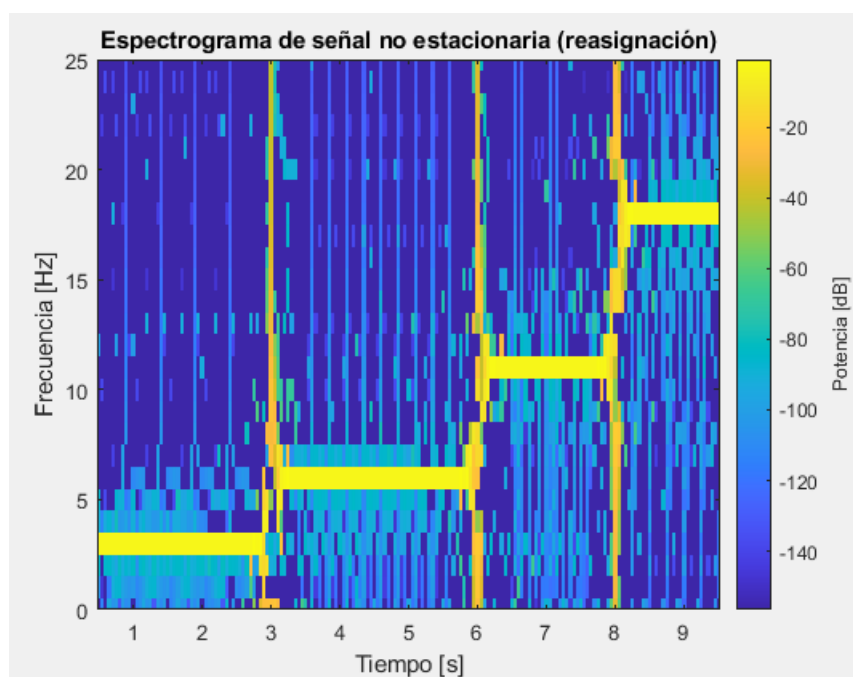


Figura 5.5.: Espectrograma con una ventana de 200 muestras y traslape de 190 muestras incluyendo parámetro de reasignación.

Como vimos, la función `spectrogram()` incluida en el software *Matlab*, contiene dife-

rentes formas de tratar los inconvenientes al utilizar la TFTR. Durante el resto del capítulo, en las pruebas con la TFTR se utilizarán el traslape y la reasignación de frecuencias, para obtener el mejor resultado posible.

5.1.2. Transformada Wavelet Discreta

Para el análisis con TWD se utilizó una wavelet *morse* como base y una frecuencia de muestreo de 200 Hz definida por la señal original.

Algoritmo 5.4 Listado de código que calcula el escalograma y genera la figura 5.6.

```
[cfs , frq]=cwt(xt , 'morse' , fs );
mesh(t , frq , abs(cfs (: , 1:2000)).^2)
title('Escalograma de señal no estacionaria ')
ylabel('Frecuencia [Hz] ');
xlabel('Tiempo [s] ');
c=colorbar;
c.Label.String = 'Amplitud';
ylim([0 25])
```

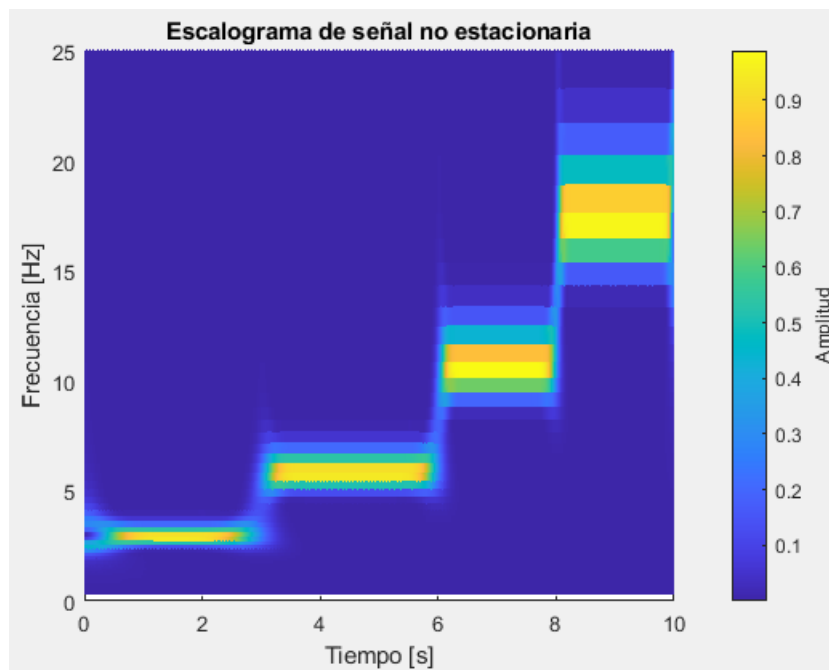


Figura 5.6.: Escalograma de la señal no estacionaria.

Como se puede observar en la figura 5.6, se tiene alta resolución en bajas frecuencias y conforme el valor de la frecuencia aumenta se va perdiendo resolución.

5.1.3. Transformada de Hilbert-Huang

En el caso de la THH al ser un método empírico no es posible variar sus parámetros.

Algoritmo 5.5 Listado de código que calcula la THH y genera la figura 5.7.

```
hht(xt, fs)
title('Espectro de Hilbert-Huang')
c=colorbar;
c.Label.String = 'Amplitud';
```

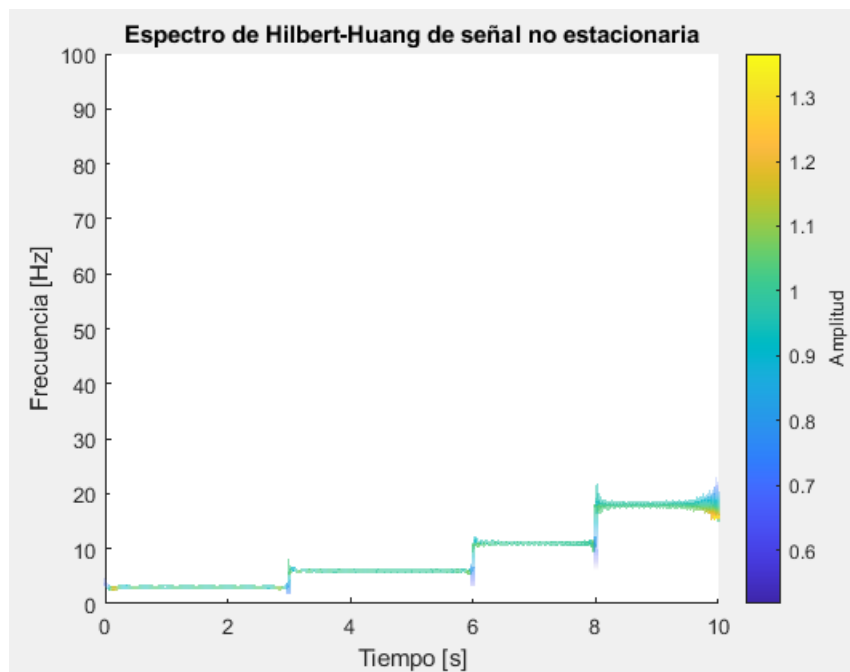


Figura 5.7.: Espectro de Hilbert-Huang de señal no estacionaria.

Respecto de la figura 5.7, observamos que las frecuencias se encuentran bien localizadas tanto en tiempo como en frecuencia, aunque también existen algunos componentes de alta frecuencia causados por la rápida transición entre los valores de frecuencia.

5.2. Alto contenido de ruido

En esta prueba se analizó una señal no estacionaria con ruido gaussiano agregado, mostrada en la figura 5.8, el cual tiene una desviación estándar de 0.5. De forma

independiente analizaremos el ruido (Ver figura 5.9) para observar la respuesta de la TFTD, la TWD y la THH.

Algoritmo 5.6 Señal no estacionaria con ruido de la figura. 5.8

```

fs = 200; w=2*pi; t=1/fs : 1/ fs : 10;
t1=t ( 1: fs *3); t2=t ( fs *3: fs *6);
t3=t ( fs *6: fs *8); t4=t ( fs *8: fs *10);
x1=sin (w*3*t1)+0.5.*randn (1 , length ( t1 ));
x2=sin (w*6*t2)+0.5.*randn (1 , length ( t2 ));
x3=sin (w*11*t3)+0.5.*randn (1 , length ( t3 ));
x4=sin (w*18*t4)+0.5.*randn (1 , length ( t4 ));
xt=[x1 x2 x3 x4];
figure (1)
plot (t ,xt (1:2000))
ylabel ( ' Amplitud ');
xlabel ( ' Tiempo [s] ');
title ( ' Señal no estacionaria con contenido
de 3, 6, 11 y 18 Hz con ruido ');

```

Algoritmo 5.7 Señal de ruido con desviación de 0.5 representado en la figura. 5.9

```

fs = 200; w=2*pi; t=1/fs : 1/ fs : 10;
t1=t ( 1: fs *3); t2=t ( fs *3: fs *6);
t3=t ( fs *6: fs *8); t4=t ( fs *8: fs *10);
x1=0.5.*randn (1 , length ( t1 ));
x2=0.5.*randn (1 , length ( t2 ));
x3=0.5.*randn (1 , length ( t3 ));
x4=0.5.*randn (1 , length ( t4 ));
xt=[x1 x2 x3 x4];
figure (1)
plot (t ,xt (1:2000))
ylabel ( ' Amplitud ');
xlabel ( ' Tiempo [s] ');
title ( ' Ruido Gaussiano ');

```

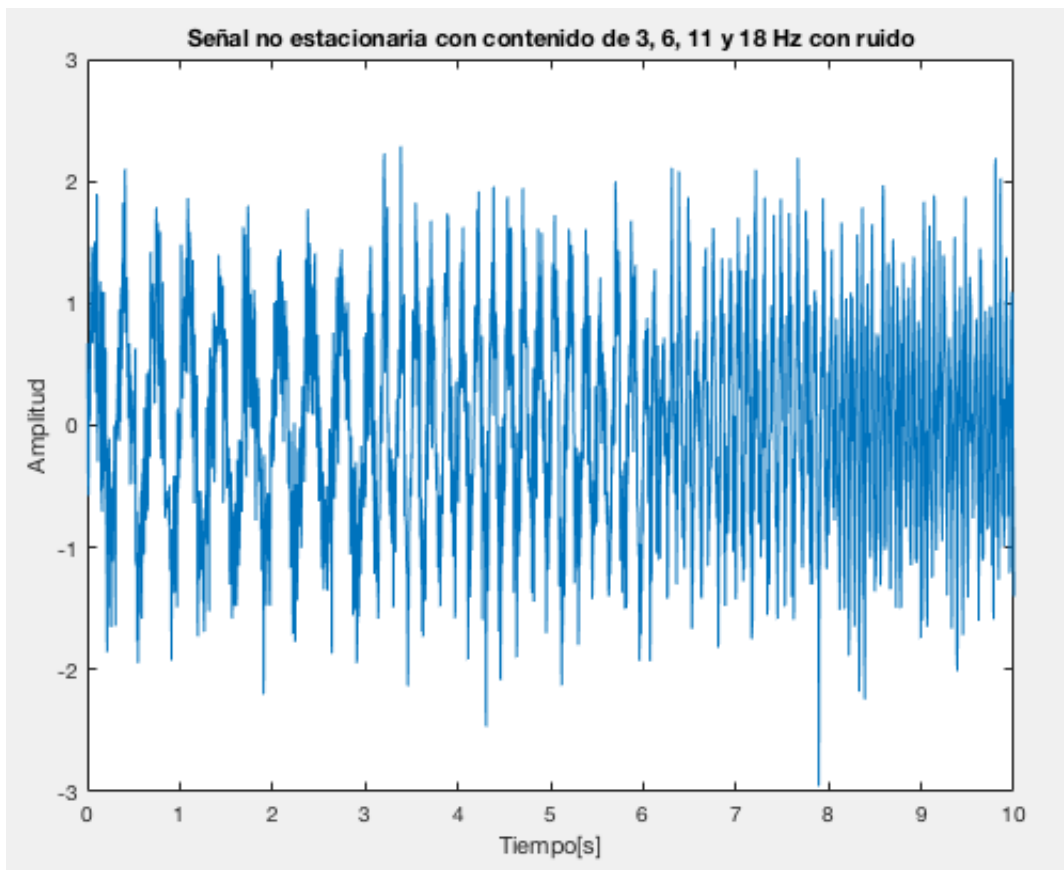


Figura 5.8.: Señal con ruido gaussiano y desviación estándar de 0.5.

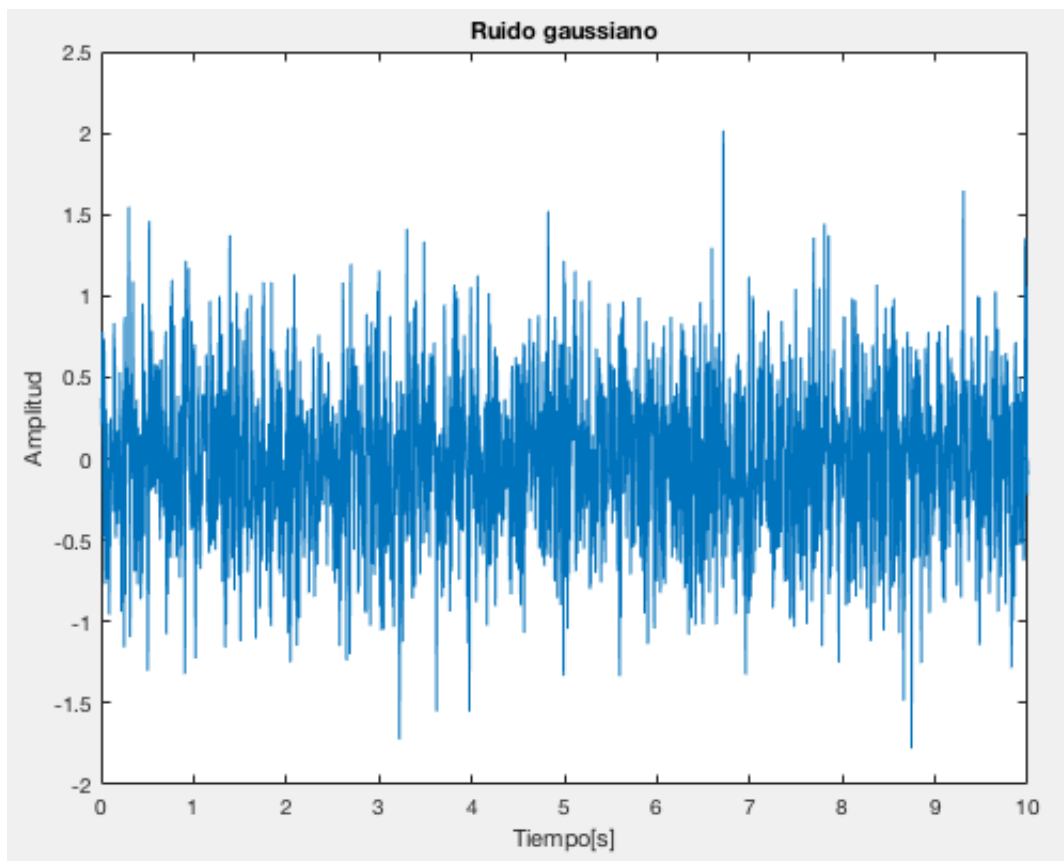


Figura 5.9.: Ruido gaussiano con desviación estándar de 0.5.

5.2.1. Transformada de Fourier de tiempo reducido

Se analizó esta señal en dos partes, primero se aplicó la TFTR a la señal con ruido, con lo que se obtuvo lo mostrado en la figura 5.10, se puede observar que además de las frecuencias contenidas en la señal, se tienen componentes frecuenciales de diferentes magnitudes distribuidas por todo el plano Tiempo-Frecuencia.

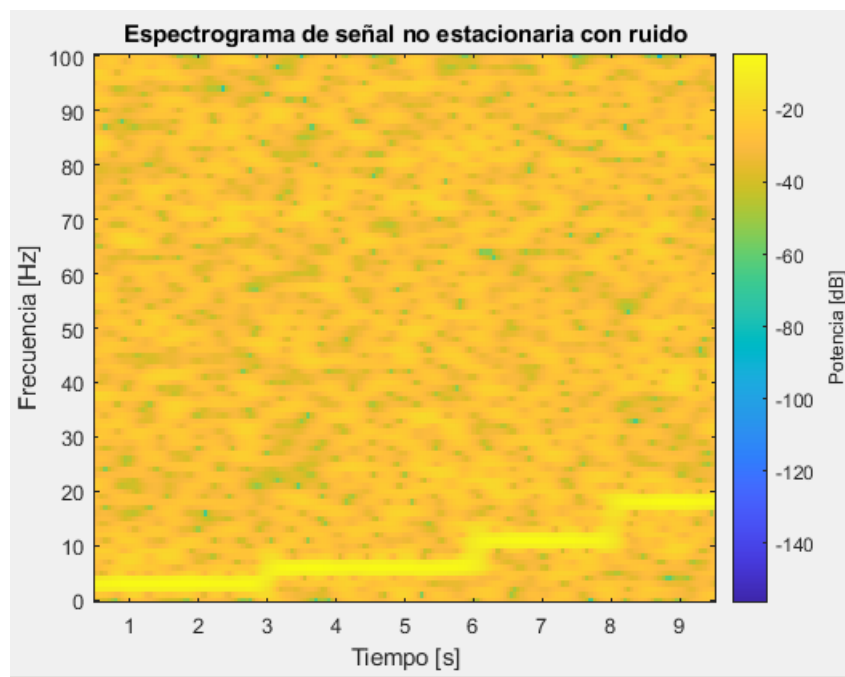


Figura 5.10.: Espectrograma de la señal con traslape y ruido incluido.

De igual forma se obtuvo el espectrograma del ruido (Ver figura 5.11)

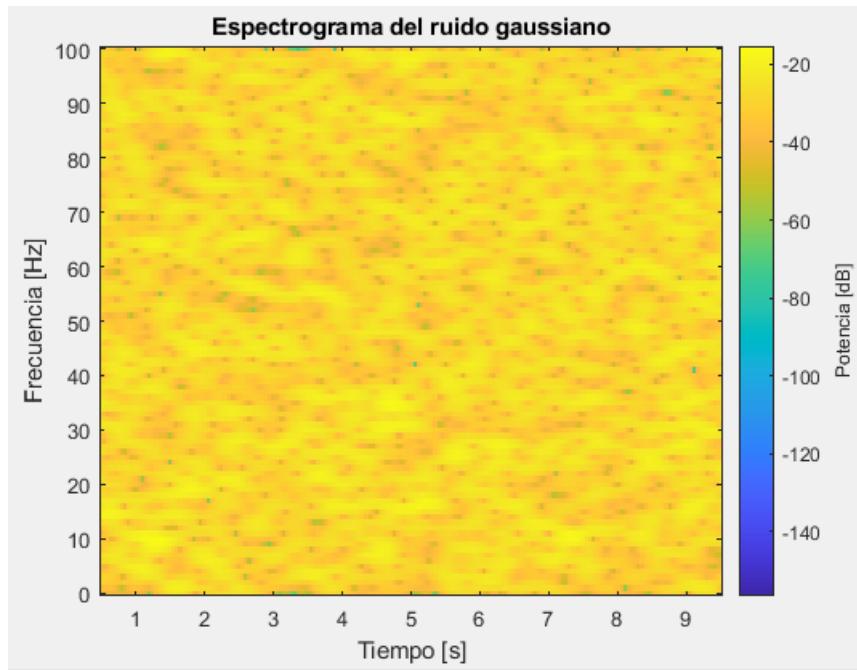


Figura 5.11.: Espectrograma de ruido gaussiano con desviación estándar de 0.5.

Comparando los espectrogramas de las figuras 5.10 y 5.11, se puede observar que la magnitud de las componentes frecuenciales de la señal no estacionaria es mayor que la del ruido, además de que, aún con ruido se pueden distinguir las frecuencias de 3, 6, 11 y 18 Hz en la figura 5.10.

5.2.2. Transformada Wavelet Discreta

Mediante la TWD se aplicó un análisis donde se observa su comportamiento en señales con ruido gaussiano. En este caso se utilizó una wavelet *morse* y una frecuencia de muestreo de 200 Hz.

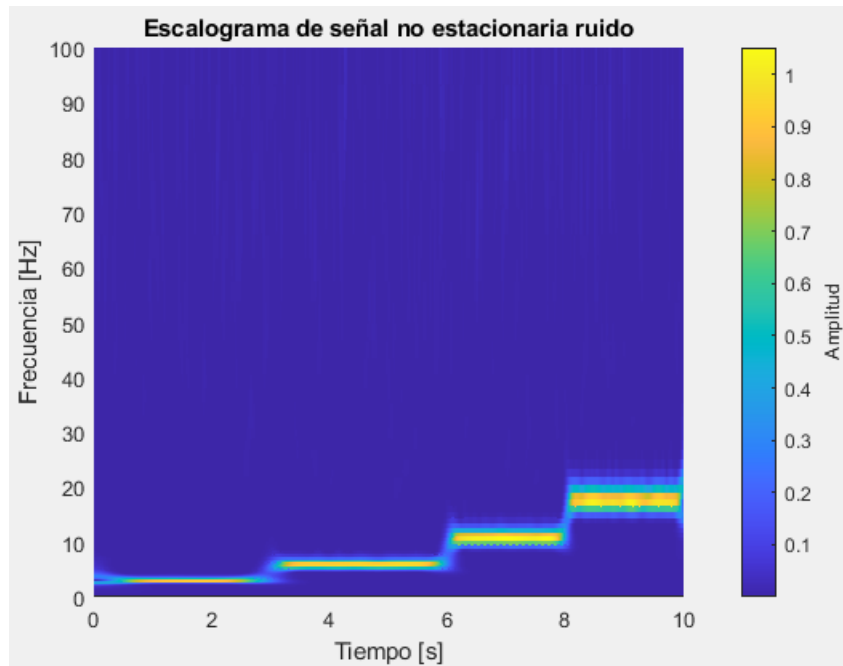


Figura 5.12.: Escalograma de la señal con ruido.

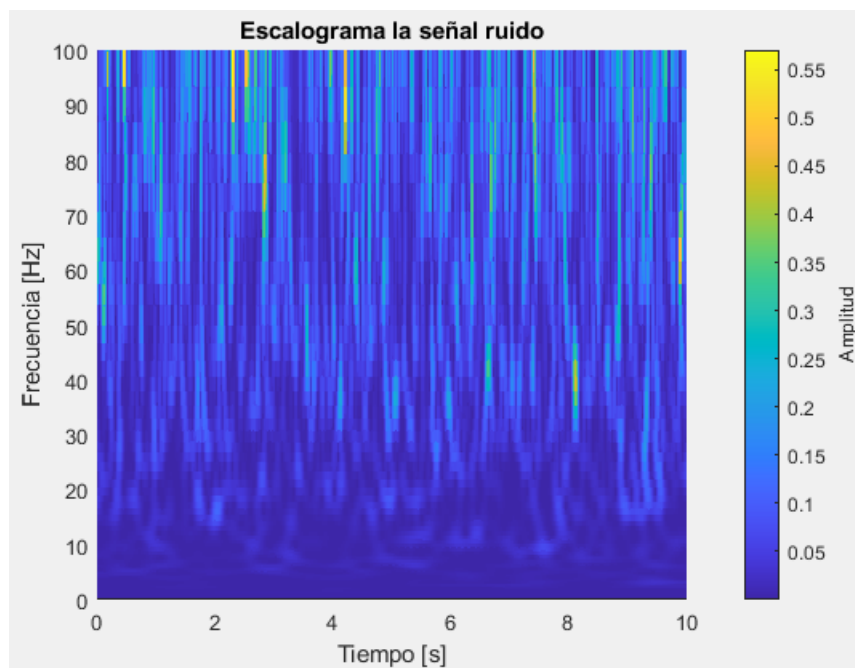


Figura 5.13.: Escalograma de ruido gaussiano con desviación estándar de 0.5.

Acorde al escalograma de la figura 5.12, se observan las frecuencias de 3, 6, 11 y 18 Hz que definen la señal no estacionaria como si no se tuviera ruido presente. Al aplicar la técnica al ruido gaussiano cuyo escalograma resultante se muestra en

la figura 5.13, la magnitud de sus componentes es baja, por lo que predomina la magnitud y frecuencias presentes en la señal no estacionaria.

5.2.3. Transformada de Hilbert-Huang

Para el caso de la THH se analizó de forma independiente la señal con ruido y el ruido gaussiano generado (mostrado en la figura 5.15). En la figura 5.14 se observan una notable distorsión, al grado de no diferenciarse las componentes de la señal original, esto debido al ruido agregado. Con esto, se puede concluir que la THH tiene sensibilidad al ruido.

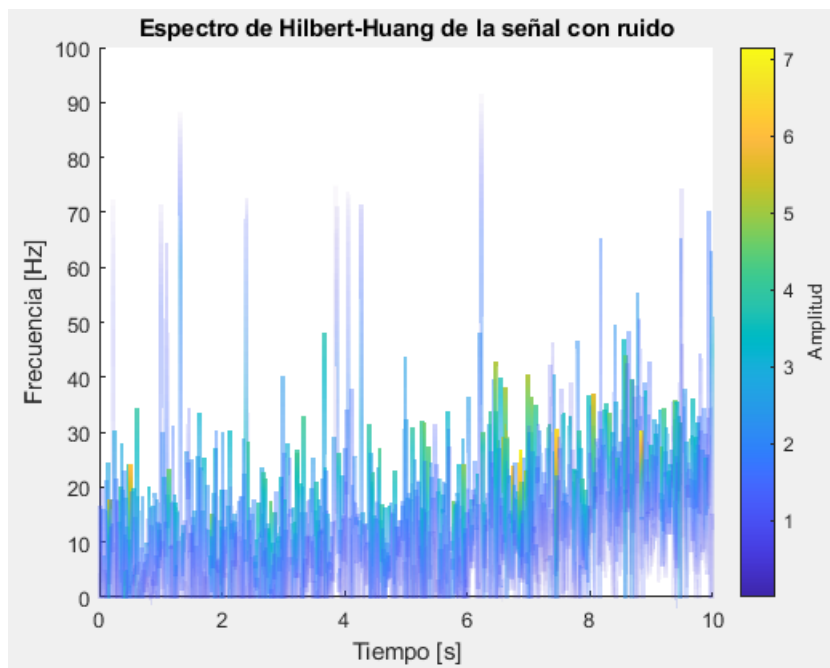


Figura 5.14.: Espectro de Hilbert-Huang de señal no estacionaria con ruido.

5.3. Componentes frecuenciales cercanas

Para evaluar la capacidad de la TFTR, TWD y THH de analizar componentes frecuenciales existentes en un mismo intervalo de tiempo, se definió una señal cuyas frecuencias cumplan con esta condición. El resultado de esta combinación de frecuencias se puede apreciar en la figura 5.16.

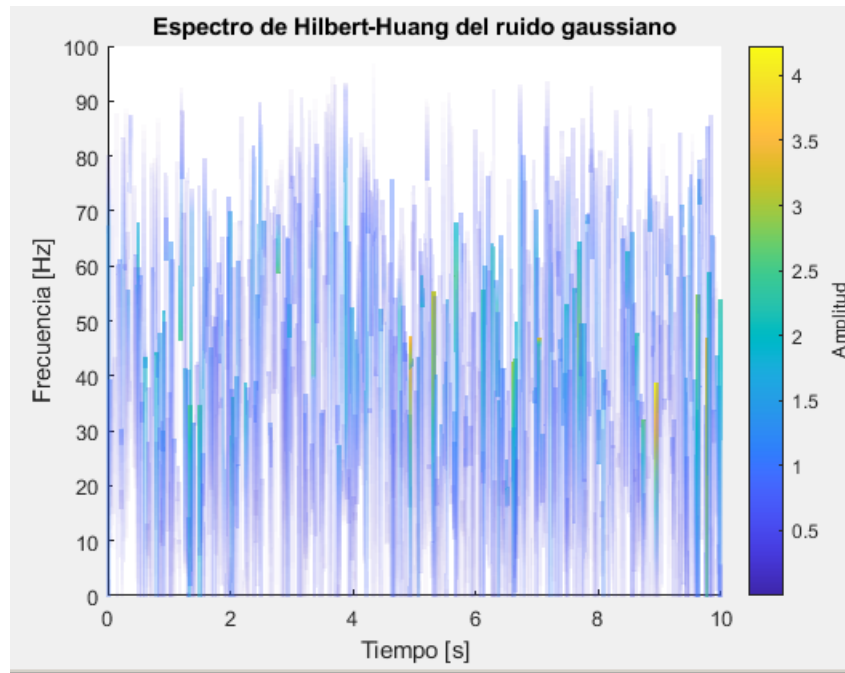


Figura 5.15.: Espectro de Hilbert-Huang de ruido gaussiano.

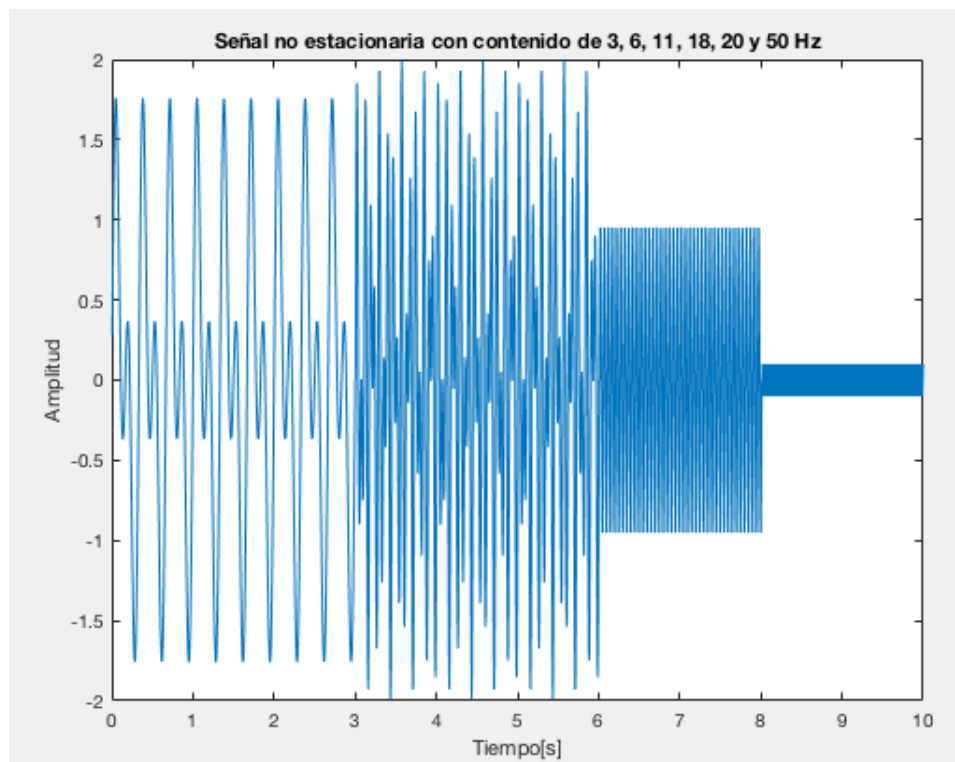


Figura 5.16.: Señal no estacionaria con contenido de 3, 6, 11, 18, 20 y 50 Hz.

Algoritmo 5.8 Código que genera una señal no estacionaria con contenido mezclado de 3, 6, 11, 18, 20 y 50 Hz.

```
fs = 200; w=2*pi; t=1/fs:1/fs:10;
t1=t(1:fs*3); t2=t(fs*3:fs*6);
t3=t(fs*6:fs*8); t4=t(fs*8:fs*10);
x1=sin(w*3*t1)+sin(w*6*t1);
x2=sin(w*11*t2)+sin(w*18*t2);
x3=sin(w*20*t3);
x4=0.1*sin(w*50*t4);
xt=[x1 x2 x3 x4];
figure(1)
plot(t,xt(1:2000))
ylabel('Amplitud');
xlabel('Tiempo[s]');
title('Señal no estacionaria con contenido de 3, 6, 11, 18, 20
y 50 Hz');
```

5.3.1. Transformada de Fourier de Tiempo Reducido

Para el análisis de la señal, se utilizó la ventana Blackman y 190 muestras de tras-lape, en la figura 5.17 se presenta el espectrograma obtenido y observamos que las frecuencias concuerdan con las definidas en la señal de la figura 5.16.

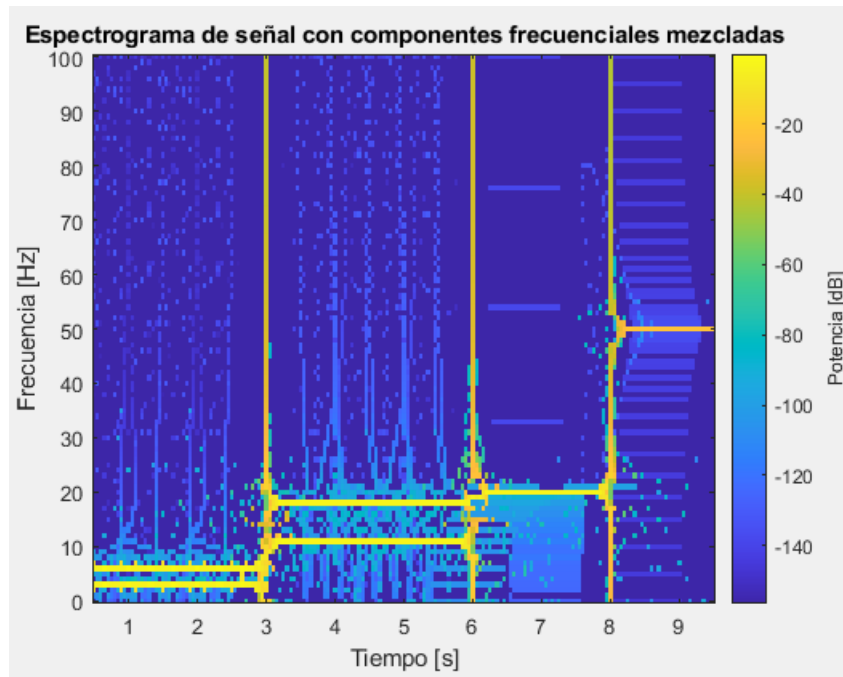


Figura 5.17.: Contenido espectral de señal no estacionaria y con componentes frecuenciales mezcladas.

5.3.2. Transformada Wavelet Discreta

En este caso, se aplicó la TWD con una wavelet *morse* y una frecuencia de muestreo de 200 Hz. En la figura 5.18 se observa la separación de frecuencias en el intervalo de 0 a 6 segundos. En el intervalo de 8 a 10 segundos notamos la ausencia de la componente de 50 Hz, esto, ya que, el valor de su amplitud es diez veces menor al resto.

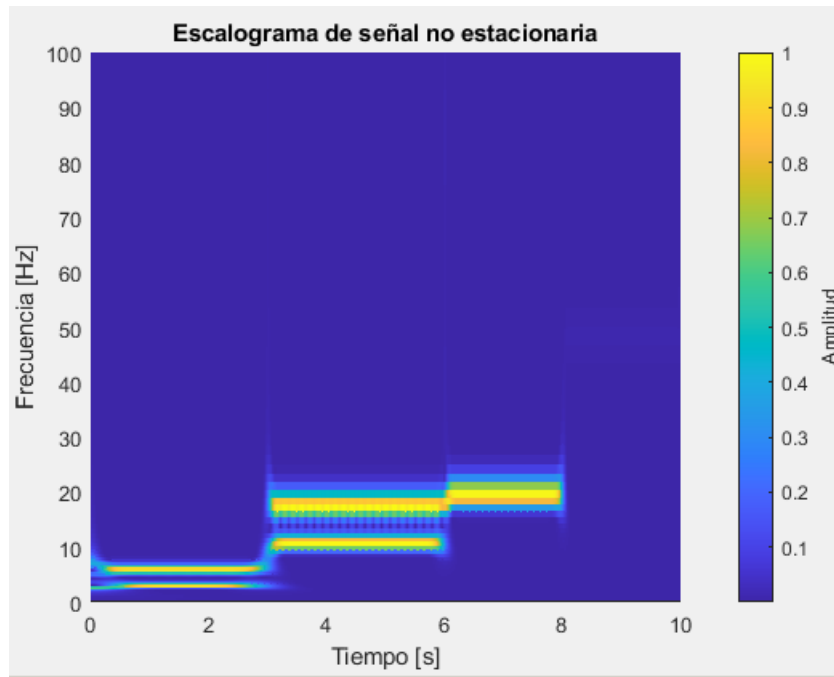


Figura 5.18.: Escalograma de señal con frecuencias combinadas.

5.3.3. Transformada de Hilbert-Huang

Del análisis con la THH, se obtuvo la figura 5.19, podemos observar que no se distinguen las componentes frecuenciales contenidos un mismo intervalo de tiempo. De igual forma, en el intervalo 8-10 segundos no se muestra información, esto debido a que en la definición de la señal de prueba esta última componente tiene una magnitud 10 veces menor.

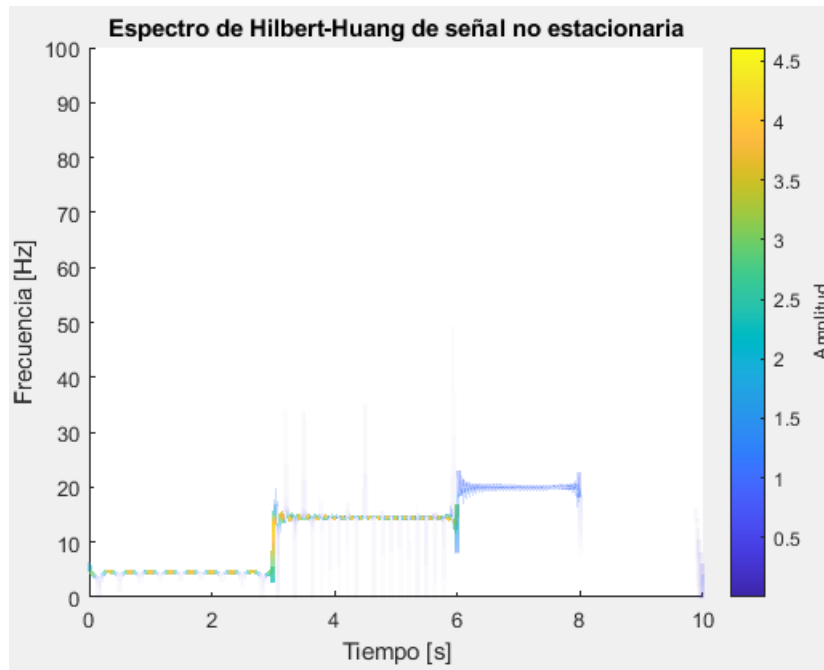


Figura 5.19.: Espectro de Hilbert-Huang de señal no estacionaria con frecuencias combinadas.

5.4. No linealidad

Una de las características que más complican el análisis de señal EEG es su no linealidad ya que, como veremos, las técnicas reaccionan de manera distinta a esta propiedad. En este caso se replicó la propiedad de no linealidad mediante el código mostrado en 5.9, compuesto por señales chirp cuadráticos y logarítmicos (Ver figura 5.20).

Algoritmo 5.9 Código que genera señal no estacionaria y no lineal.

```

fs = 200; w=2*pi; t=1/fs:1/fs:10;
t1=t(1:fs*3); t2=t(fs*3:fs*6);
t3=t(fs*6:fs*8); t4=t(fs*8:fs*10);
x1=chirp(t1,1,3,10,'q'); x2=0.1*sin(w*50*t2);
x3=chirp(t3,10,2,20,'q'); x4=chirp(t4,20,5,30,'logarithmic');
xt=[x1 x2 x3 x4];
figure(1)
plot(t,xt(1:2000))
ylabel('Amplitud');
xlabel('Tiempo[s]');
title('Señal no estacionaria y no lineal');

```

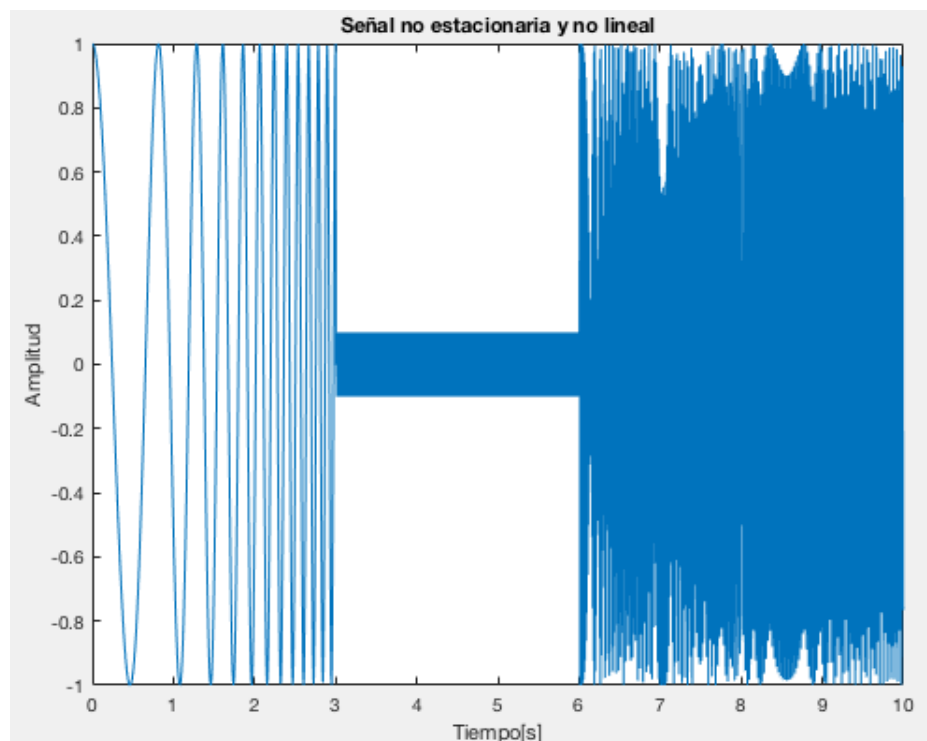


Figura 5.20.: Señal de prueba no estacionaria y no lineal.

5.4.1. Transformada de Fourier de Tiempo Reducido

Los parámetros utilizados para generar el espectrograma de la figura 5.21, son una ventana Blackman de 200 muestras y un traslape de 190 muestras.

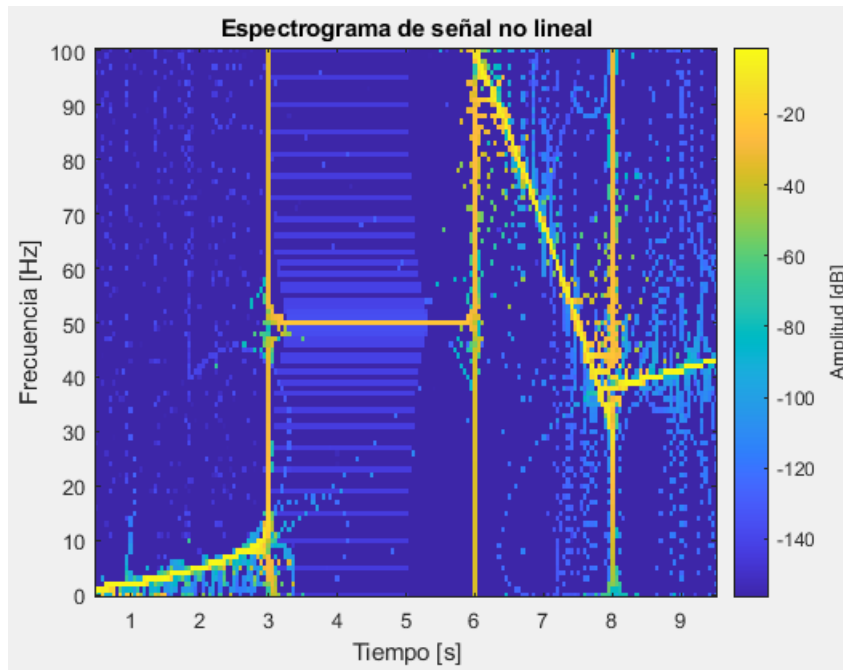


Figura 5.21.: Espectrograma de señal no estacionaria y no lineal.

En el intervalo de 0-3 segundos, se puede observar parte de una exponencial, esto resulta lógico ya que corresponde a un chirp cuadrático en la definición de la señal, adicional, en el intervalo 3-6 segundos (donde existe una senoidal) se tiene un valor constante de 50 Hz.

5.4.2. Transformada Wavelet Discreta

Para el análisis de la señal con TWD se utilizó la wavelet *morse* y una frecuencia de muestreo de 200 Hz, como se observa en la figura 5.22 que representa el escalograma de la señal, se sigue el mismo patrón del espectrograma, sin embargo, en este caso la componente de 50 Hz, no es visible ya que su amplitud es menor que el resto de componentes.

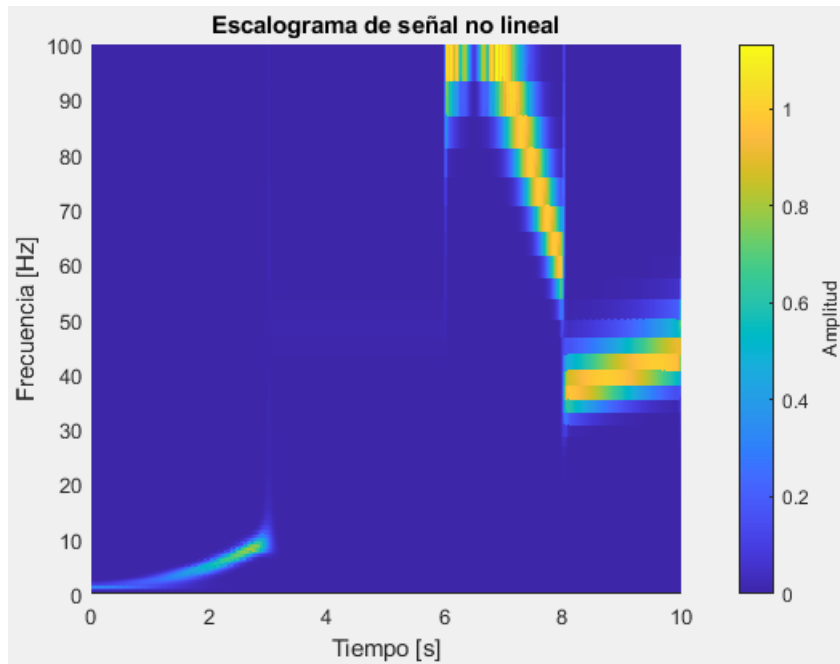


Figura 5.22.: Escalograma de señal no estacionaria y no lineal.

5.4.3. Transformada de Hilbert-Huang

En la figura 5.23 , visualizamos un espectro más limpio a diferencia de los casos anteriores. Respecto de los componentes frecuenciales, en los diferentes intervalos de tiempo y en el intervalo 3-6 segundos, nuevamente se muestra vacía por la definición de la señal de prueba. Adicionalmente, se pueden observar las componentes de alta frecuencia que se originan por el cambio de frecuencias en los límites de los intervalos.

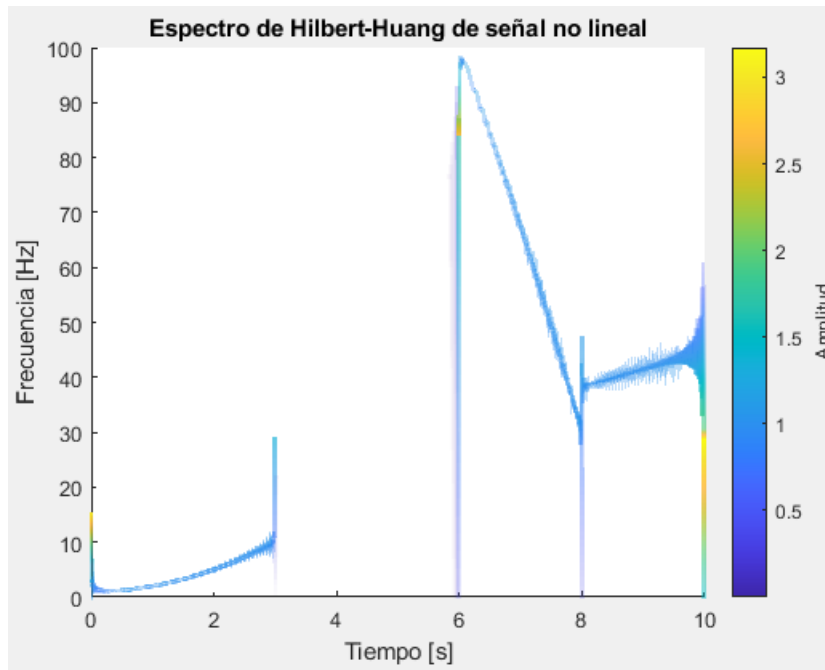


Figura 5.23.: Espectro de Hilbert-Huang de señal no lineal.

5.5. Señal EEG

Como se explicó brevemente en el capítulo 2, el sueño NREM se divide en cuatro fases que se clasifican dependiendo los rangos de frecuencia presentes. En este caso se tienen dos señales que representan estos rangos, la señal EEG 1 mostrada en la figura 5.24 esta compuesta por *Husos de Sueño* y *Complejos K* cuyos rangos de frecuencia se encuentran entre los 11 y los 16 Hz.[53]

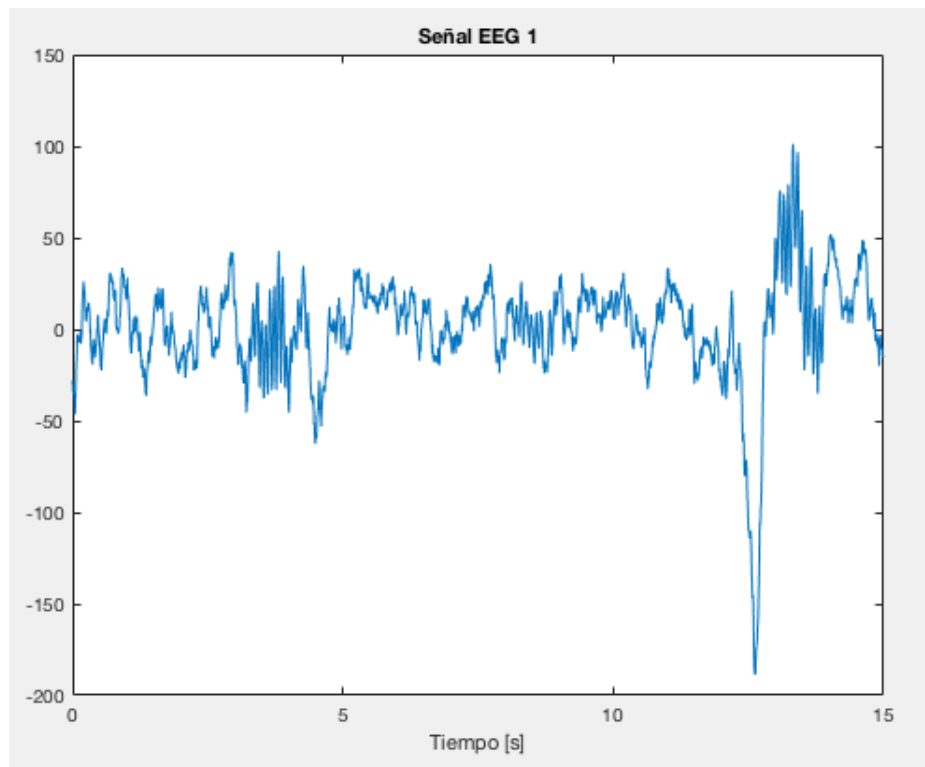


Figura 5.24.: La señal EEG 1 son 15 segundos extraídos de un registro real de sueño de un individuo joven. La frecuencia de muestreo es de 200 Hz y se obtuvo del canal Cz.

Los *Husos de Sueño* son importantes para la investigación ya que están relacionadas con la regulación del sueño, memoria y aprendizaje.[53]

En el segundo caso se tiene la señal EEG 2 que se muestra en la figura 5.25, casi el 80% de la energía de esta señal se encuentra contenida en el rango de frecuencias perteneciente a la *onda delta* que va de los 0.5 a los 4 Hz.[54]

El sueño de la fase 3 y 4 está relacionado con las *ondas delta*.[1]

5.5.1. Transformada de Fourier de tiempo reducido

En la figura 5.26 se muestra el espectrograma de la señal EEG 1 en donde podemos observar que existe mayor cantidad de energía en el lapso de 2-4 y 12-14 segundos que corresponden a la localización temporal del *Huso de Sueño* y al *complejo K* respectivamente. En el eje de la frecuencia se observa que se tienen componentes frecuenciales menores a 20 Hz lo cual corresponde a las características de la señal.

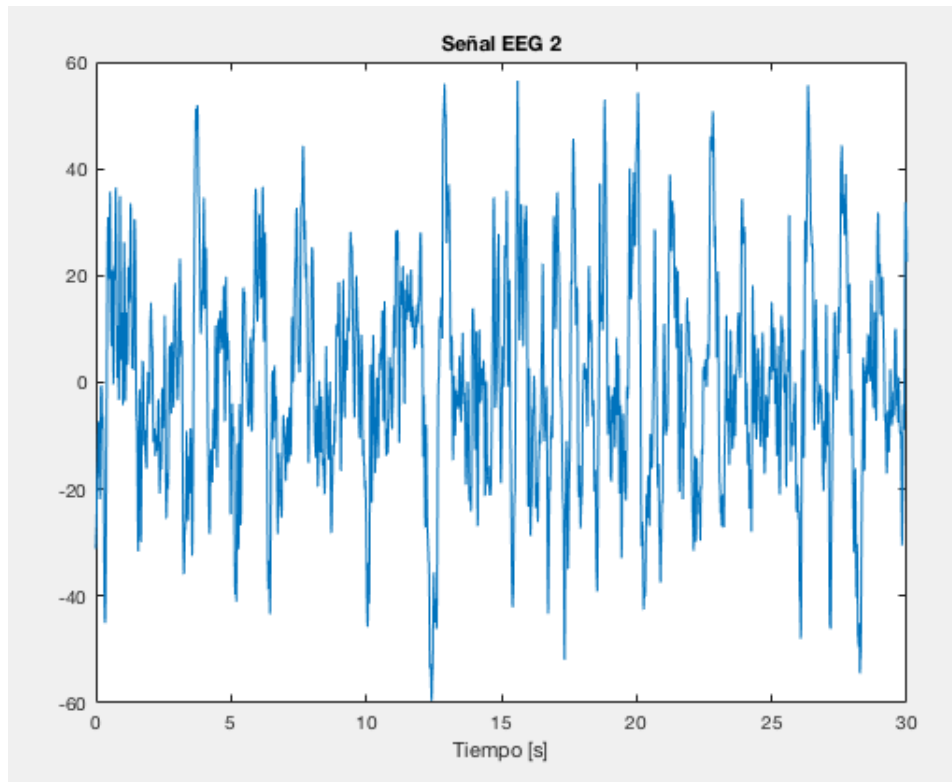


Figura 5.25.: La señal EEG 2 son 30 segundos extraídos de un registro real de sueño de un individuo joven. La frecuencia de muestreo es de 100 Hz y se obtuvo del canal F3.

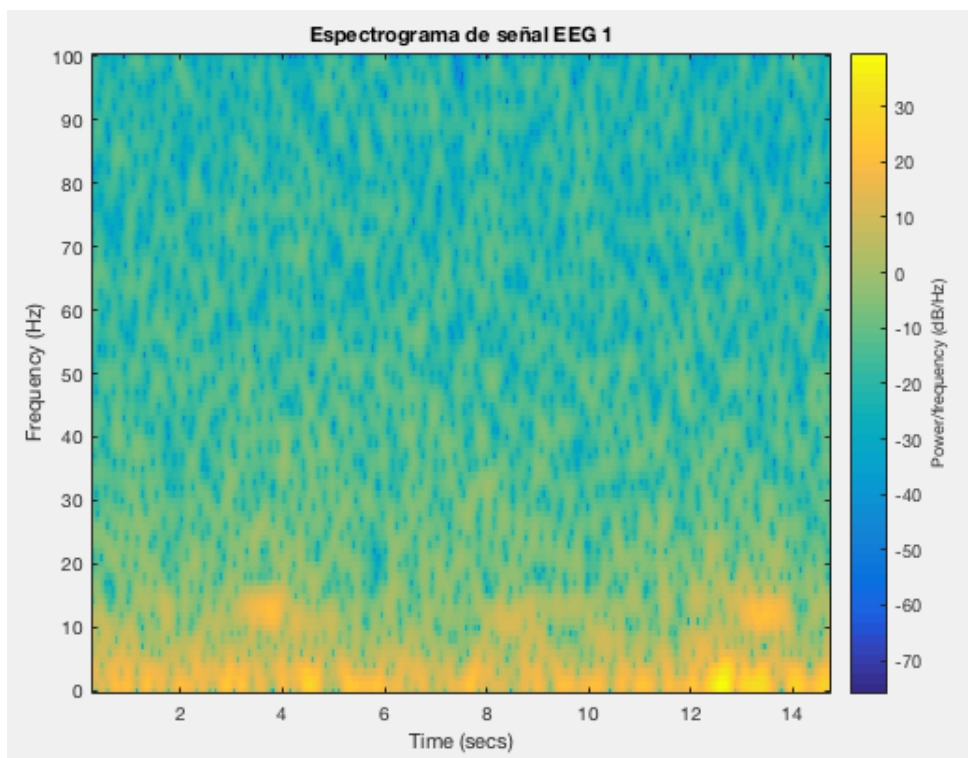


Figura 5.26.: Espectrograma de la señal EEG 1 con ventana Blackman de 100 muestras y traslape del 99%.

Respecto al espectrograma de la figura 5.27 que corresponde a la señal EEG 2 se observa más energía en la banda frecuencial de 0-5 Hz . Lo cual, concuerda con el rango de frecuencias descrito anteriormente para la *onda delta*. Como se menciona en la descripción de las figuras, para esta prueba se utilizó una ventana de Blackman con un traslape del 99 %.

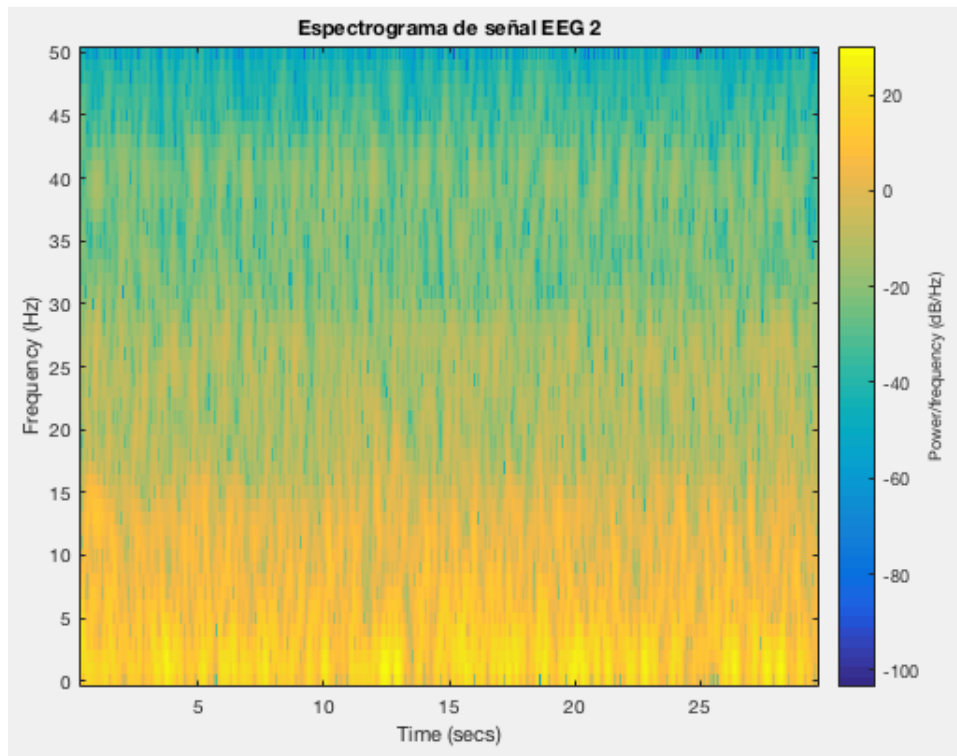


Figura 5.27.: Espectrograma de la señal EEG 2 con ventana Blackman de 50 muestras y traslape del 99 %.

5.5.2. Transformada Wavelet

En la figura 5.28 podemos observar el escalograma de la señal EEG 1 en donde, de manera similar al espectrograma la energía se concentra en el rango de 2-4 y 12-14 segundos. En frecuencia se tienen componentes incluso menores a 16 Hz lo cual concuerda con las características de la señal.

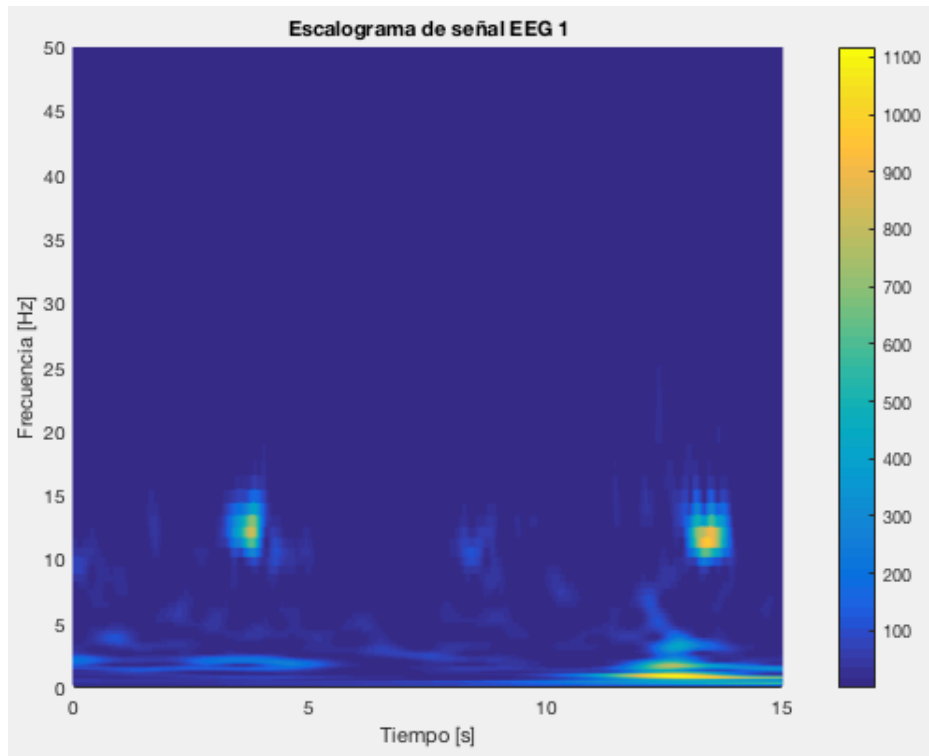


Figura 5.28.: Escalograma de la señal EEG 1 con wavelet Morse.

Sobre el escalograma de la figura 5.29 que corresponde a la señal EEG 2 se observa más energía en la banda frecuencial de 0-5 Hz al igual que en el espectrograma. Sin embargo, notamos que la energía se concentra en mayor medida después de los 15 segundos.

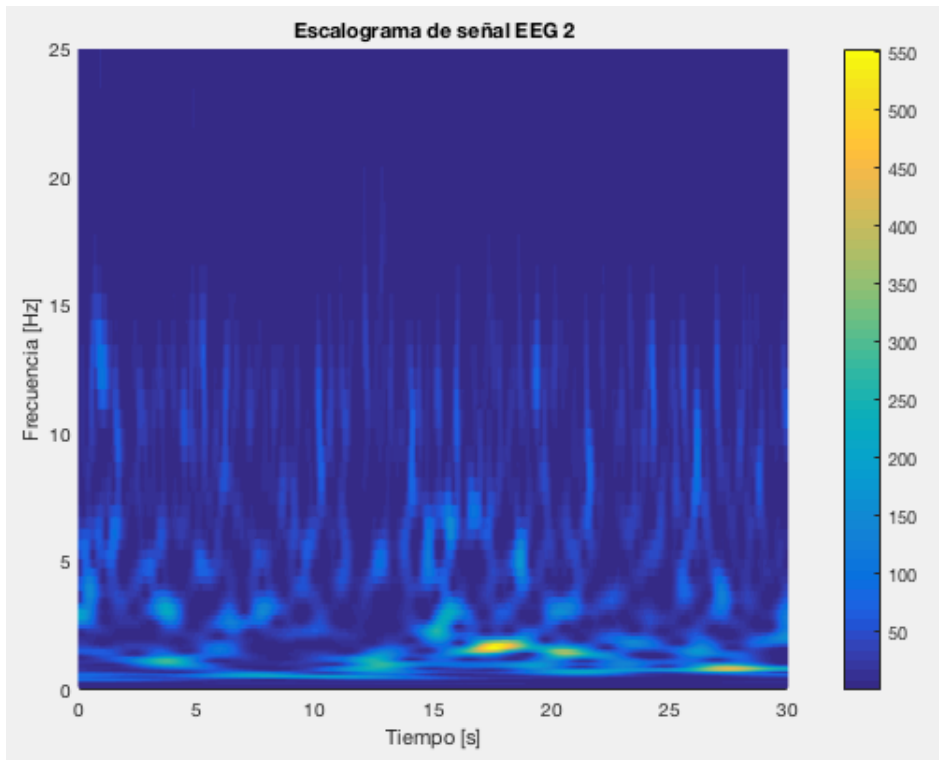


Figura 5.29.: Escalograma de la señal EEG 2 con wavelet Morse.

Para realizar las pruebas se utilizó la Wavelet Morse compuesta por valores complejos. Son usadas con frecuencia para analizar señales cuyos intervalos tiempo y frecuencia varían constantemente.[55]

5.5.3. Transformada de Hilbert-Huang

En 5.30 podemos observar que la energía se concentra en el lapso de 2-5 y 12-14 segundos, esto concuerda con las características del *Huso de Sueño* y al *complejo K* respectivamente. De igual forma, las componentes frecuenciales no superan los 20 Hz.

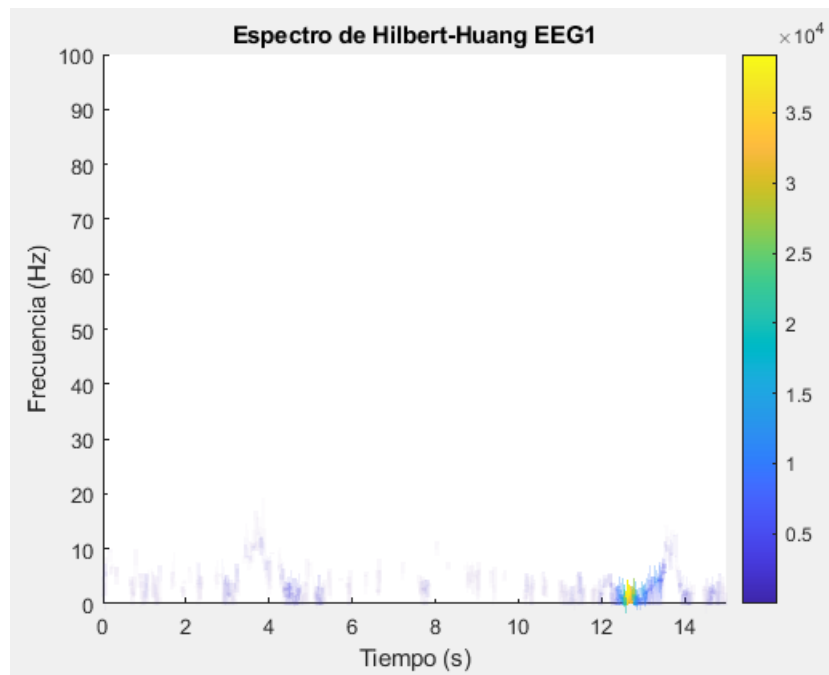


Figura 5.30.: Espectro de Hilbert-Huang de la señal EEG 1.

Sobre la figura 5.31 resultado del análisis de la señal EEG 2 se observa más energía en la banda frecuencial de 0-5 Hz al igual que en los casos anteriores. Lo cual corresponde a las características de la *onda delta*.

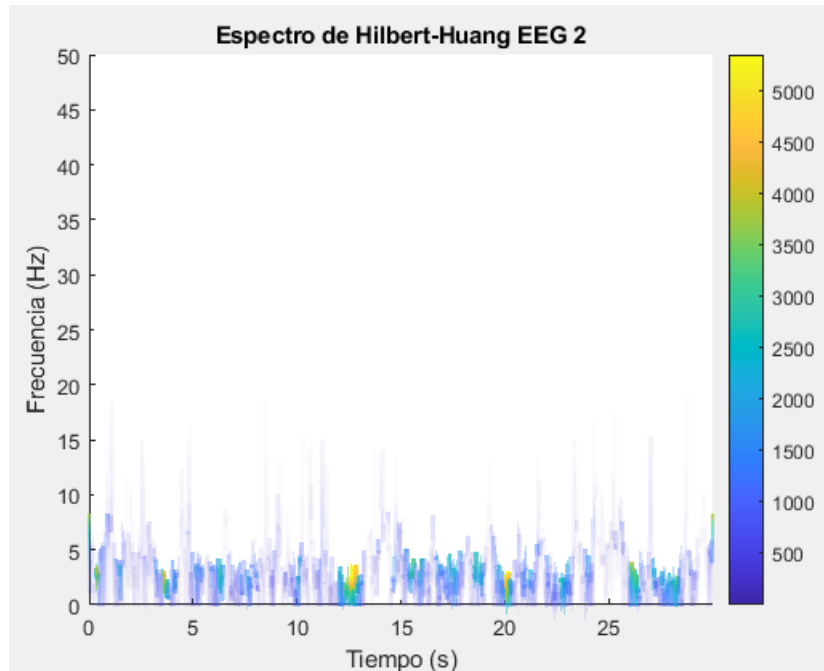


Figura 5.31.: Espectro de Hilbert-Huang de la señal EEG 2.

5.6. Conclusiones

Sobre este capítulo podemos concluir que, a pesar de que estas técnicas trabajan bajo diferentes principios y algunos tienen mayor grado de libertad sobre la variación de sus parámetros, está claro que la elección debe siempre tomar en cuenta las características de la propia señal.

6. Conclusiones

El procesamiento digital de señales tiene como objetivo el análisis y extracción de información relevante de una señal que describe el comportamiento de un fenómeno. Los algoritmos que realizan este análisis aumentan su complejidad dependiendo de las características de la señal y de la información que se requiera. En el caso de las señales no estacionarias, como la señal EEG, tanto sus características estadísticas como su contenido frecuencial varían con el tiempo, por lo que, para su procesamiento, se necesita de técnicas que de manera conjunta proporcionen una representación Tiempo-Frecuencia.

En este trabajo presentamos el análisis, la implementación y la comparación de tres de las técnicas Tiempo-Frecuencia para el procesamiento de señales no estacionarias: la Transformada de Fourier de tiempo reducido, la Transformada Wavelet Discreta y la Transformada de Hilbert-Huang.

Se utilizaron criterios en base a la sencillez, para el entendimiento de la teoría de cada uno de los algoritmos, la facilidad para su implementación y la evaluación de su funcionamiento mediante simulaciones computacionales con datos sintéticos y señales reales. También a considerar, es la dificultad del proceso de calibración y la visualización de las técnicas estudiadas al momento de implementar, ya que, si bien los datos corresponden al resultado de las transformadas de manera numérica, al momento de mostrar los datos en un plano tridimensional, se presentan problemas con la normalización de energía y escala de los ejes tiempo y frecuencia.

Finalmente, podemos concluir que el desempeño de cada técnica se encuentra fuertemente relacionada con las características de la señal analizada y del problema específico a resolver. Dicho lo anterior, al comparar los resultados obtenidos y tomando en cuenta las características de cada técnica, podemos resaltar a la Transformada de Hilbert-Huang, ya que, se puede aplicar a señales no lineales además de que se adapta a la naturaleza de la señal y por último al realizar la descomposición en el dominio temporal, no se tiene problema con el principio de incertidumbre.

La aportación del presente documento, se centra principalmente en el estudio y comparación de las tres técnicas para el caso específico de las señales EEG y en base a esto, definir que técnica de procesamiento y en que casos específicos tiene mejor desempeño.

A. Fundamentos de álgebra lineal

En este apartado se dará un breve repaso acerca de los conceptos sobre álgebra lineal que se deben tener presentes para una mejor comprensión del tema.

A.1. Espacio vectorial y Espacio de Hilbert

De manera general un espacio vectorial es una estructura algebraica compuesta por elementos llamados vectores y tiene definida dos operaciones (suma y multiplicación) y además dichas operaciones cumplen con los siguientes axiomas:

Si $u \in E$, $v \in E$ entonces $u + v \in E$

Si $u \in E$, $c \in R$ entonces $cu \in E$

Para todo u, v, ω y todo $a, b \in R$

$$u + v = v + u$$

$$(u + v) + \omega = u + (v + \omega)$$

$$\text{Existe } 0_e \in E \mid u + 0_e = u \tag{A.1}$$

$$\forall u \in E, \text{ existe } -u \in E \mid u + (-u) = 0_e$$

$$(a + b)u = au + bu$$

$$a(u + v) = au + av$$

$$(ab)u = a(bu)$$

$$1u = u$$

Es a partir de la definición de espacio vectorial real que se puede extender a conceptos como combinación lineal y bases.[41]

El espacio H de Hilbert se define como un espacio vectorial en el cual los elementos que lo componen se localizan en el plano complejo. El espacio H de Hilbert cuenta con un producto interno dado por la expresión A.2 y el cual se utilizará más adelante.

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x) g(x) dx \quad \forall f, g \in H \quad (\text{A.2})$$

Una de las ventajas de trabajar en el espacio de Hilbert es que definiendo H como un conjunto de elementos del espacio H se puede demostrar que los vectores dentro de este conjunto cumplen con las propiedades de superposición y homogeneidad.[21]

En el espacio H de Hilbert se encuentra definido el espacio métrico L^2 el cual es un espacio vectorial de dimensión infinita y entre otras cosas permite utilizar funciones continuas y discontinuas para la descripción de señales.

La definición del espacio $L^2[a, b]$ de Hilbert para un intervalo $a \leq t \leq b$ esta dada como el conjunto de funciones de cuadrado integrable que converge cuya expresión se muestra a continuación:

$$L^2([a, b]) = \{f : [a, b] \rightarrow C : \int_a^b |f(t)|^2 dt < \infty\} \quad (\text{A.3})$$

Donde la expresión A.3 también es conocida como integral de Lebesgue y físicamente significa que la energía total de la señal descrita por $f(t)$ es finita, característica que comparten buena parte de las señales existentes en el mundo real.

A.2. Producto interno y norma

En este contexto se define el producto interno en el espacio $L^2[a, b]$ como se muestra a continuación[39]:

$$\langle f, g \rangle_{L^2} = \int_a^b f(t) g^*(t) dt \quad \forall f, g \in L^2[a, b] \quad (\text{A.4})$$

De (A.4) se pueden comprobar dos importantes propiedades que son:

- Ortogonalidad: Se dice que dos vectores f y g son ortogonales en L^2 si su producto interno es igual a cero.

$$\langle f, g \rangle_{L^2} = \int_a^b f(t) g^*(t) dt = 0 \quad (\text{A.5})$$

De igual forma un conjunto es ortogonal si cualquier par de elementos que lo componen es ortogonal entre si.

- Ortonormalidad: Si cumple con la condición de ortogonalidad y adicionalmente la norma de los elementos que componen el conjunto es uno, se dice que el conjunto es ortonormal[21].

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle_{L^2}} = \sqrt{\int_a^b f(t) f^*(t) dt} = 1 \quad (\text{A.6})$$

Como veremos mas adelante esta condición de ortonormalidad asegura la independencia entre si de las diferentes componentes que conforman la función por lo que no existe información redundante.[18]

Para reafirmar los conceptos antes mencionados se tiene el siguiente ejemplo:

Sea $f(t) = \cos(t)$ y $g(t) = \sen(t)$ comprobar su ortogonalidad en el intervalo de $[-\pi, \pi]$

Utilizando la expresión A.5 y sustituyendo tenemos:

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(t) \sen(t) dt \quad (\text{A.7})$$

Resolviendo la integral:

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(t) \sen(t) dt \quad (\text{A.8})$$

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sen(2t) dt = \left[-\frac{1}{4} \cos(2t) \right]_{-\pi}^{\pi} = 0 \quad (\text{A.9})$$

Con lo cual queda comprobado que las funciones son ortogonales, para el caso de la ortonormalidad el procedimiento es similar.

Es posible definir una base ortonormal de H si cualquier vector perteneciente a esta puede ser representado como la combinación lineal de los elementos que la conforman.

Dada una función $f(x)$ definida en un intervalo $[-c, c]$ esta puede ser proyectada en una base ortonormal de funciones $\{\phi_k(x)\}$, de la siguiente forma:

$$f(x) = c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2 + \dots + c_k\phi_k(x) \quad k \in \mathbb{Z}^+, \quad -c < x < c \quad (\text{A.10})$$

Reescribiendo A.10 se tiene:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k\phi_k(x) \quad (\text{A.11})$$

Donde A.11 básicamente nos dice que es posible descomponer una función $f(x)$ en una suma de funciones base $\phi_k(x)$ ponderadas por c_k .

B. Funciones Analíticas

Una función analítica compleja es una función a valores complejos la cual puede ser representada por una serie de potencias que convergen. Para determinar si una función es analítica, esta debe cumplir con las ecuaciones de Cauchy-Riemann dadas por:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (\text{B.1})$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (\text{B.2})$$

Donde u y v representan la parte real e imaginaria respectivamente de una función f .

$$f(u, v) = u(x, y) + iv(x, y) \quad (\text{B.3})$$

Se considera condición necesaria y suficiente para una función analítica que las cuatro derivadas parciales para $u(x, y)$ y $v(x, y)$, existan, sean continuas en una región S y que se cumplan las condiciones de Cauchy-Riemann.[40]

En el contexto de tratamiento de señales, una señal analítica es una función temporal compleja cuya transformada de Fourier es cero para frecuencias negativas. Debido a la naturaleza discreta de una señal digital, no es posible considerarla analítica en un sentido formal. Sin embargo, se puede encontrar la relación que existe entre la parte real e imaginaria de la secuencia siempre y cuando su espectro sea cero en la circunferencia unidad para $-\pi < \omega < 0$, lo cual significa que la secuencia cumple con la condición de causalidad.[9]

C. Implementación de algoritmos

Se implementaron los algoritmos expuestos en este documento y se realizaron pruebas sobre la señal no estacionaria de la figura C.1.

Algoritmo C.1 Código que genera una señal no estacionaria con contenido de 3, 6, 11 y 18 Hz (Ver figura C.1).

```
fs = 200; w=2*pi; t=1/fs:1/fs:10;
t1=t(1:fs*3); t2=t(fs*3:fs*6);
t3=t(fs*6:fs*8); t4=t(fs*8:fs*10);
x1=sin(w*3*t1); x2=sin(w*6*t2);
x3=sin(w*11*t3); x4=sin(w*18*t4);
xt=[x1 x2 x3 x4];
figure(1)
plot(t,xt(1:2000))
ylabel('Amplitud');
title('Señal no estacionaria con contenido de 3, 6, 11 y 18 Hz');
```

C.1. Transformada de Fourier de Tiempo Reducido

La función *spectrogram()* de *Matlab* genera el espectrograma de la señal. A continuación se muestran los parámetros utilizados[60]:

spectrogram(x, window, noverlap, nfft, fs)

x = señal a analizar

window = ventana a utilizar

noverlap = longitud del traslape

nfft = número de puntos de TRF

fs = frecuencia de muestreo

En el caso de la TFTR se implementó de tal manera que se pueda variar la longitud de la ventana y con un traslape fijo del 50%. En la sección D.1 se muestra el código de la función que genera las figuras C.2 y C.3.

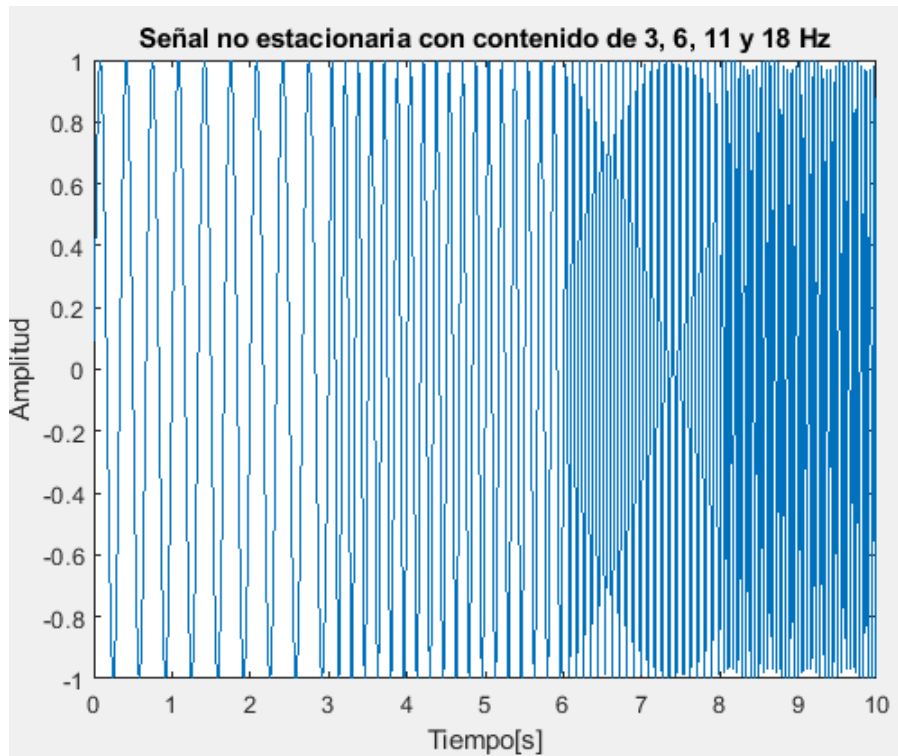


Figura C.1.: Señal no estacionaria de contenido frecuencial variable.

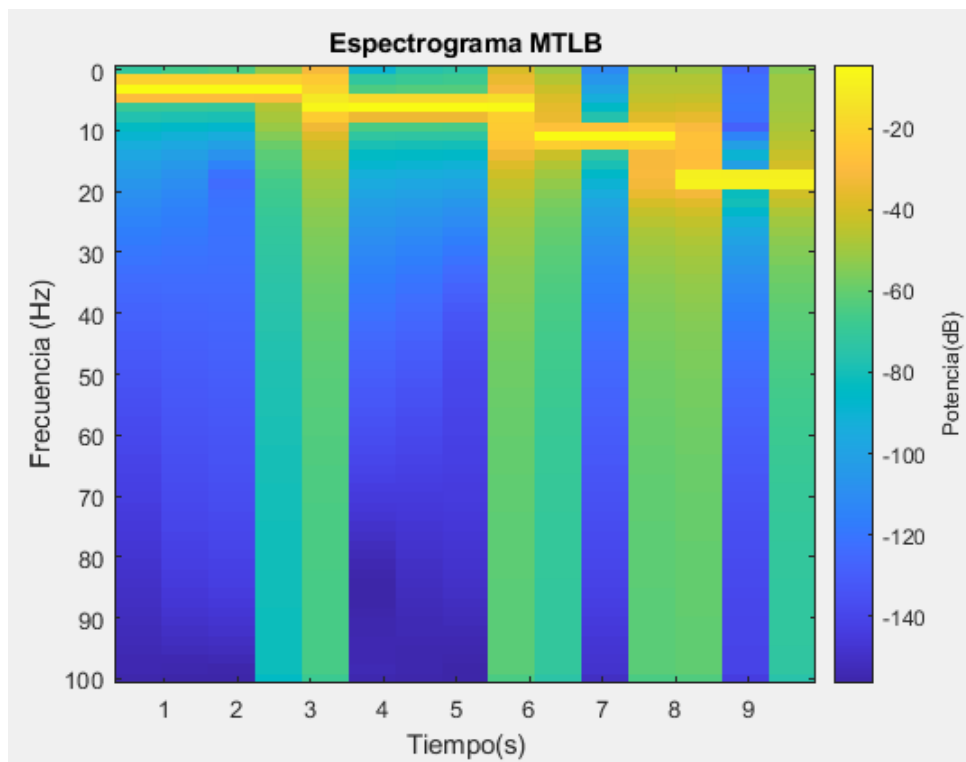


Figura C.2.: Espectrograma con ventana de 256 muestras y traslape de 128 muestras

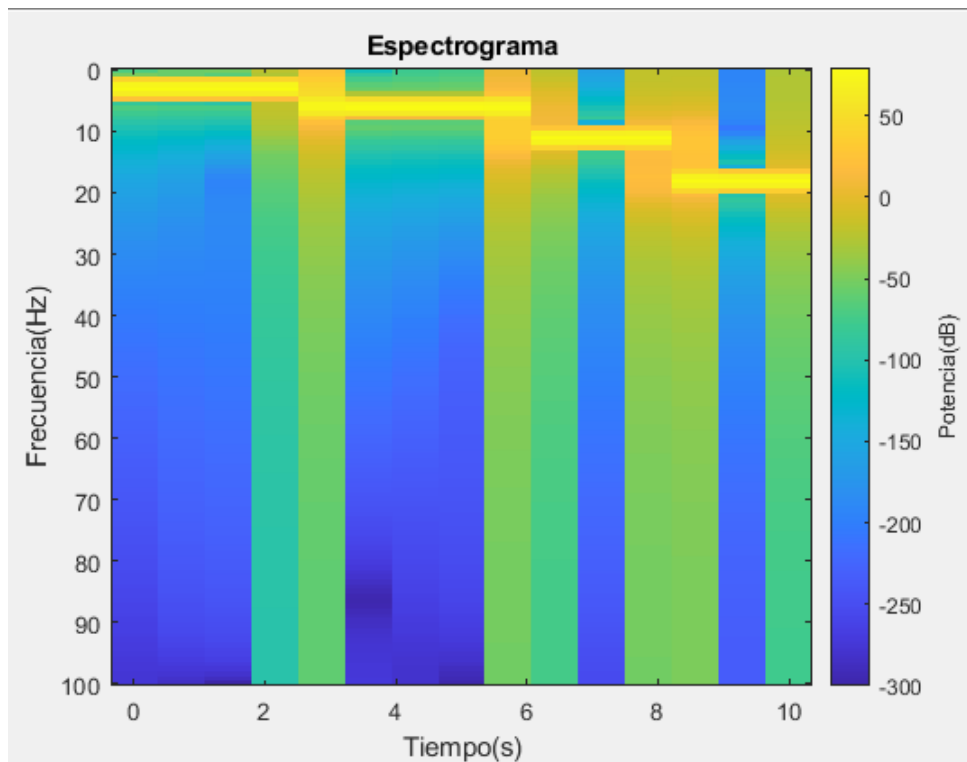


Figura C.3.: Espectrograma implementado con ventana de 256 muestras y traslape de 128 muestras

Comparando los resultados obtenidos de la figura C.2 y C.3, se observa una distribución de energía similar tanto en bandas de frecuencia como en lapsos de tiempo. Podemos observar que la magnitud de la energía varía.

C.2. Tranformada Wavelet (Haar)

La función *wavedec()* de *Matlab* genera los coeficientes de detalle y aproximación de la señal analizada. A continuación se muestran los parámetros utilizados[60]:

$$[c, l] = \text{wavedec}(x, n, \text{wname})$$

x = señal a analizar

n = nivel de descomposición

wname = wavelet a utilizar para el análisis

c = vector con coeficientes de descomposición

l = vector que contiene el número de coeficientes por nivel de descomposición.

En la figura C.4 observamos los coeficientes de aproximación y detalle obtenidos de la aplicación de las funciones *wavedec()* y *WHaar()* (cuyo código se incluye en la sección D.2) a la señal de la figura C.1. Podemos ver similitud en la magnitud de los coeficientes generados, así como en los intervalos de tiempo en los que se presentan.

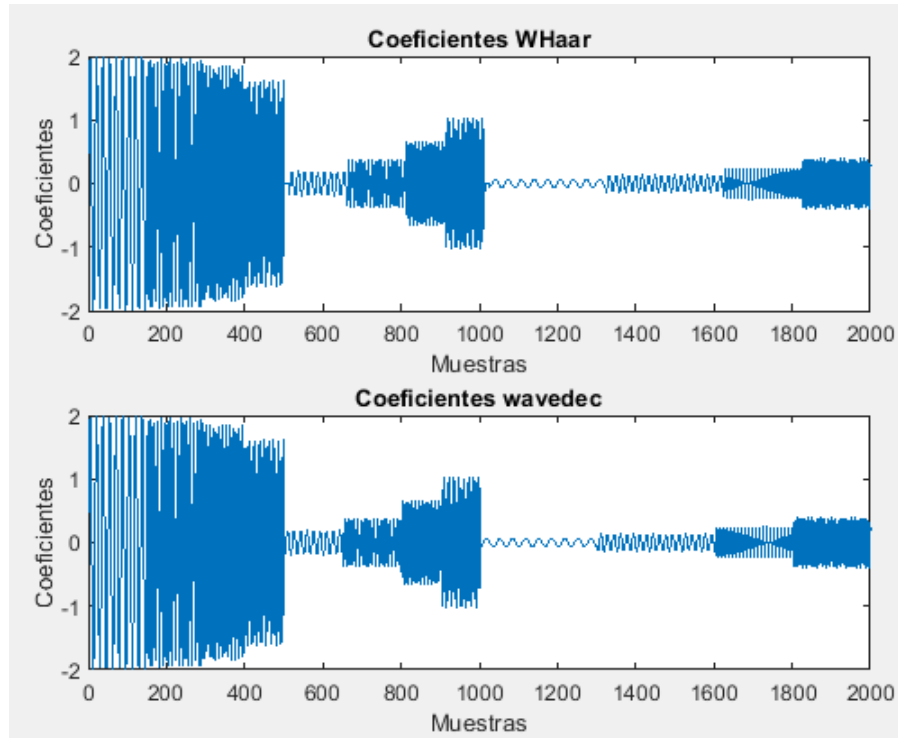


Figura C.4.: Coeficientes de descomposición

C.3. Transformada de Hilbert-Huang

La función *emd()* descompone una señal x en componentes simples llamadas funciones de modo intrínseco (FMI) mostradas en la figura C.5, las cuales utilizamos posteriormente para aplicar la transformada de Hilbert y representar la señal mediante el espectro de Hilbert-Huang. A continuación se detallan los parámetros a utilizar en la función de *Matlab*[60]:

$$[fmi, residuo] = emd(x)$$

x = señal a analizar

fmi = funciones de modo intrínseco

$residuo$ = residuo del proceso de descomposición

El código mostrado en la sección D.3.1, calcula las FMI's de una señal x y devuelve los valores almacenados en una matriz, en la figura C.6 se observa el resultado de la ejecución del código con la señal de la figura C.1 como entrada.

La función $hht()$ recibe como argumento el conjunto de FMI's generadas y la frecuencia de muestreo. Es con esta función que se obtiene la representación de la figura C.7 para nuestra señal de prueba. A continuación se muestra la descripción de los parámetros utilizados[?]:

$hht(fmi, fs)$

fmi = funciones de modo intrínseco

fs = frecuencia de muestreo

El código mostrado en la sección D.3.2, calcula la magnitud y frecuencia instantanea de la señal y las almacena en una matriz de tal forma que, es posible visualizar la variación en el tiempo.

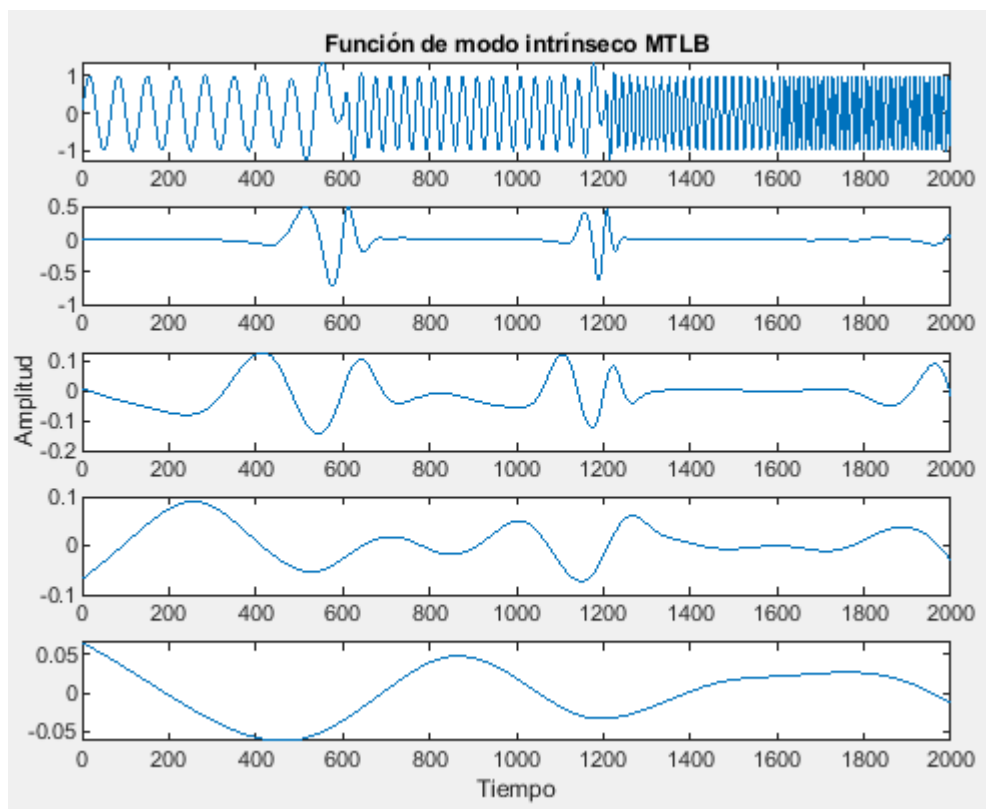


Figura C.5.: Primeras cinco funciones de modo intrínseco generadas por *Matlab*

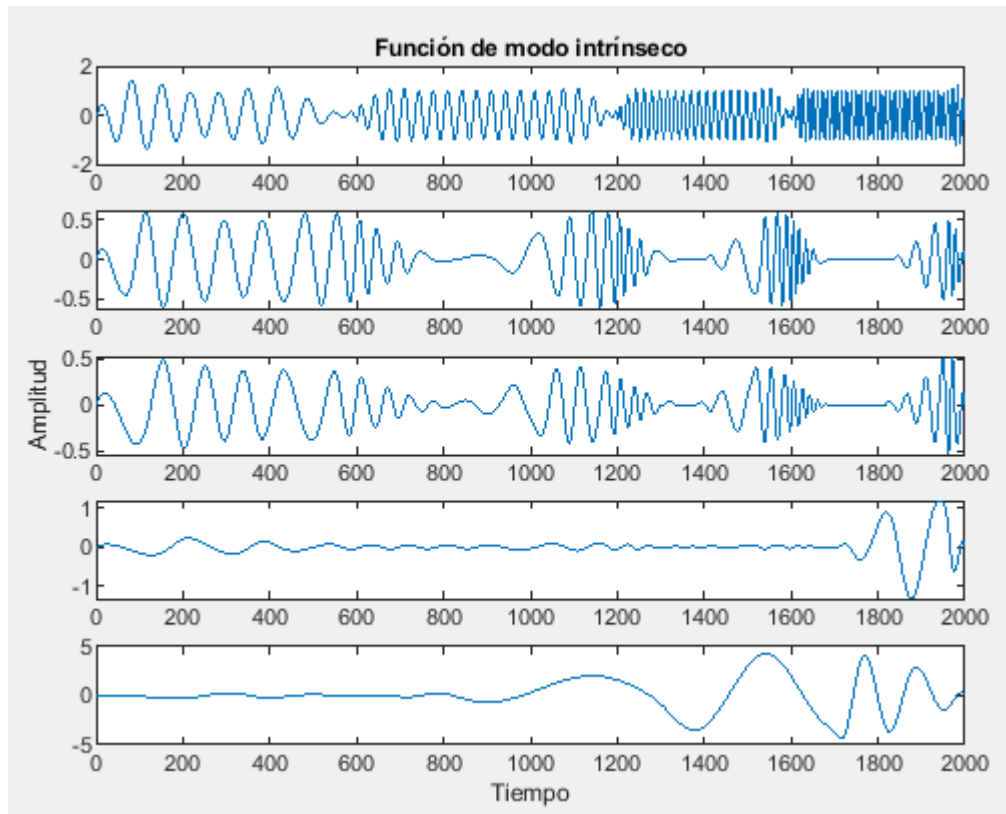


Figura C.6.: Primeras cinco funciones de modo intrínseco generadas con el algoritmo implementado.

Tanto en la figura C.5 y C.6, se observa el efecto de mezcla de modos, ya que, en ambos casos se representa el algoritmo DEM.

En las gráficas de las figuras C.7 y C.8 podemos observar que se sigue un patrón correspondiente a los valores de frecuencia instantánea e intervalos de tiempo, sin embargo, la magnitud de la figura C.8 tiende a variar respecto de la figura C.7.

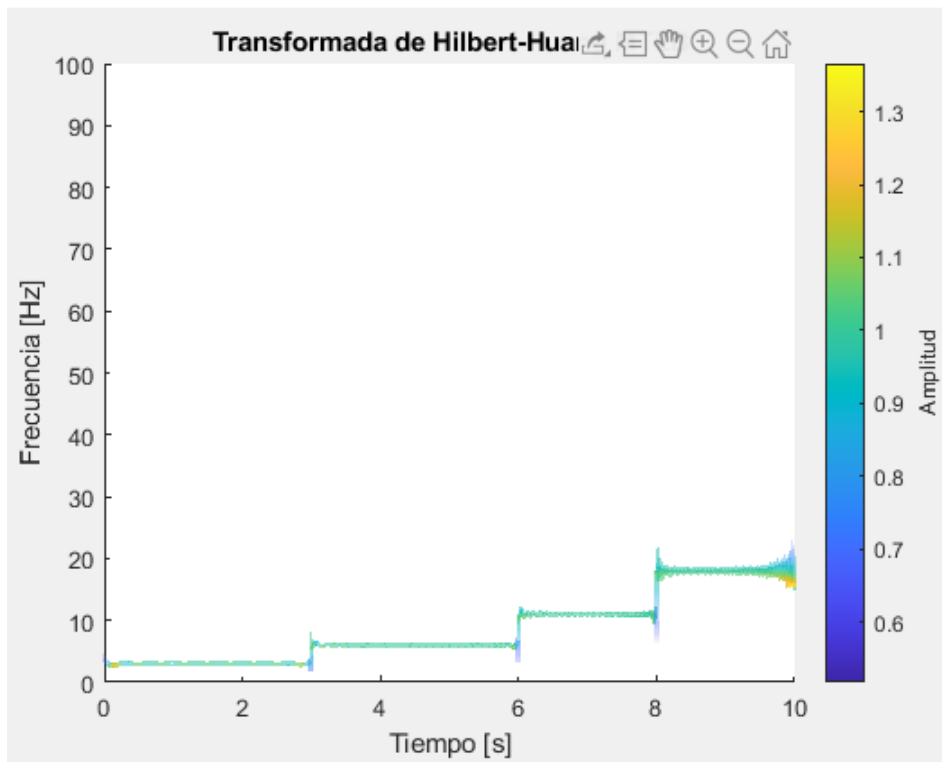


Figura C.7.: Espectro de Hilbert Huang generado por la función `hht()`

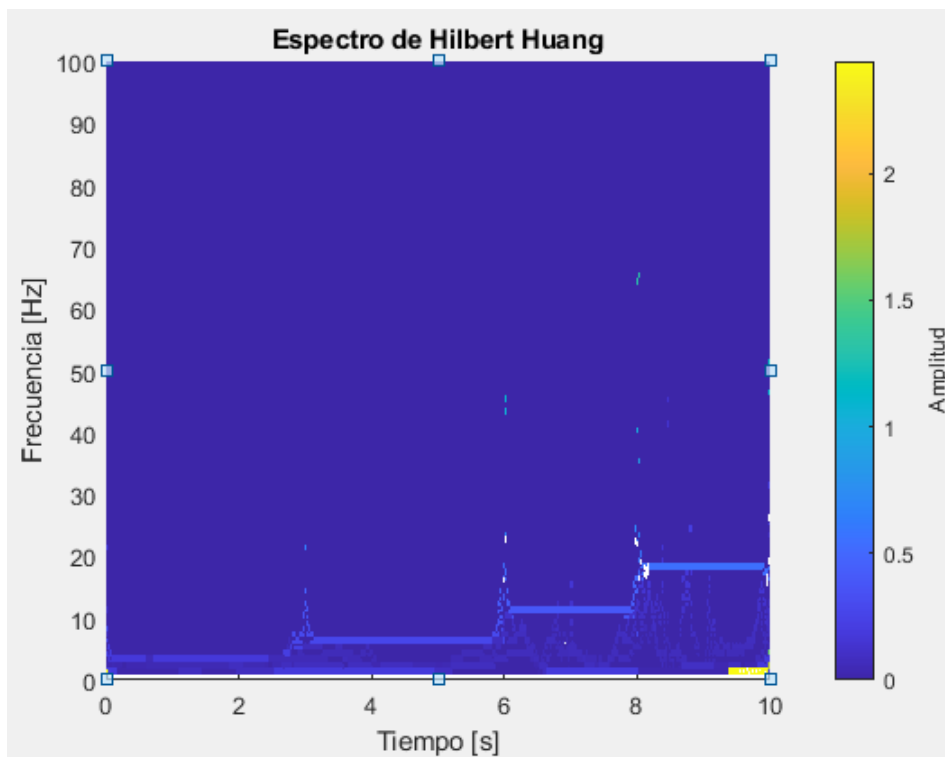


Figura C.8.: Espectro de Hilbert Huang generado por la función `HTT_M()`

D. Código fuente

D.1. Transformada de Fourier de Tiempo Reducido

Código TFTR implementado en *Matlab*

```
function []=stftmine_overlap(x,t,fs,Nwn)
    %x: señal a analizar
    %t: tiempo
    %fs: frecuencia de muestreo
    %Nwn: Longitud de ventana

    ol = Nwn/2; %50% de traslape
    [x,N]=zeropadding(x); % Completar tamaño de vector 2^n
    ms = N/Nwn;
    TFM = zeros(2*ms-1,Nwn);
    wn = (blackman(Nwn))';

    % Se obtienen los índices de inicio y fin del ventaneo y
    % se aplica la TRF
    for n=1:2*ms-1
        ini=(n-1)*ol+1;
        fin=ini+Nwn-1;
        TFM(n,:)=fft(x(ini:fin).*wn);
    end

    % Se obtiene la magnitud de la mitad de
    % las muestras de la TRF

    HIFM =20*log(abs(TFM(:,1:Nwn/2)));

    % Se calcula el vector frecuencia para su representación
    f =((0:(N/2)-1)*fs)/N;

    % Se representa la matriz HIFM en función de los
    % vectores tiempo y frecuencia
    figure(12)
    imagesc(t,f,HIFM')
```

```

ylabel('Frecuencia (Hz)');
xlabel('Tiempo(s)');
c=colorbar;
title('Espectrograma');
c.Label.String = 'Potencia(dB)';

% Se obtiene el espectrograma con las mismas
% características mediante la función
% spectrogram de Matlab
figure(13)
spectrogram(x,blackman(Nwn),ol,ol,fs,'yaxis');
ax = gca; ax.YDir = 'reverse';
title('Espectrograma MTLB');
end

```

D.2. Transformada Wavelet (Haar)

Código WV Haar implementado en *Matlab*

```

function [R]=WHaar(x,J0)
% x: señal a analizar
% J0: nivel de descomposición

N=length(x); % Longitud de la señal
m=round(log2(N));

% Asegura que longitud de N sea múltiplo de 2
if (N<=2^m)
while N<2^m
                x(end+1)=0;
        N=length(x);
end
else
while N<2^(m+1)
                x(end+1)=0;
                N=length(x);
        end
end

T=1/N; % Periodo de la señal
t=zeros(N);

for p=2:N

```

```
t(p)=t(p-1)+T;
end

L=log2(N);
j0=L-J0;
M=zeros(N,N);

% Obtiene los valores de phi
for s=1:2^j0
for i=1:N
    M(i,s)=phi(t(i),j0,s-1);
end
end

j=2^j0+1;

% Obtiene los valores de psi
for m=j0:L-1
    for n=0:(2^m)-1
        for k=1:N
            M(k,j)=Haar_psi(t(k),m,n);
        end
        j=j+1;
    end
end

% Obtiene inversa de la matriz de transformación
MI=pinv(M);

% Ecuación matricial que calcula los coeficientes
% de descomposición
R=(2^(L/2)).*MI*x';
end
```

D.3. Transformada de Hilbert-Huang

D.3.1. Descomposición empírica en modos

Código de DEM implementado en *Matlab*

```
function [Mimf] = emdc1(x)
```

```

% x: Señal a analizar
% Mimf: Matriz con FMI's

% Definición de variables
lenx=length(x);
tempx = x;
Mimf = [];

while (1)
    m = tempx;
Ds = 1; % Definición de desviación estándar

    while Ds > 0.3

        % Cálculo de máximos y mínimos
        [valM, locM, valm, locm]=maxminf(m);

        % Cantidad de valores máximos y mínimos
        lenvalM = length(valM);
        lenvalm = length(valm);

        if (lenvalM+lenvalm < 6)
            break
        end

        % Interpolación de máximos y mínimos
        zM = interp1(locM, valM, [1:lenx], 'spline', 0);
        zm = interp1(locm, valm, [1:lenx], 'spline', 0);

        % Promedio de la envolvente
        env = (zM+zm)/2;

        mant = m; % Valor anterior de x
        m = m - env;
        indet = 0.0000001; % Evita la indeterminación

        % Calcula desviación estándar
        Ds = sum ( ((mant - m).^2) ./ (mant.^2 + indet) );
    end

    Mimf = [Mimf; m];

    if (lenvalM+lenvalm < 6)
        break
    end
end

```

```
        end
        tempx = tempx - m;
    end
end
```

D.3.2. Espectro de Hilbert-Huang

Código del EHH implementado en *Matlab*

```
function [] = HHT_M(x, fs, t)
    %x: Señal a analizar

    M = emdcl(x);           %M: Matriz con FMI's
    H = hilbert(M');        %H: Transformada de Hilbert de M'
    Hmag = abs(H)';        %Hmag: Magnitud instantanea de M
    Hang = angle(H);        %Hang: Fase instantanea de M

    %Frecuencia instantanea
    frins = (fs / (2 * pi)) * diff(unwrap(Hang))';

    figure(12)
    subplot(3,1,1)
    plot(M(1,:)','r');

    subplot(3,1,2)
    plot(Hmag(1,:)','r');

    subplot(3,1,3)
    plot(frins(1,:)','r');

    [r,c]=size(frins);
    frins=round(frins);
    EHH = zeros(c,c);

    % Asignación de magnitud instantanea
    % en las coordenadas (frecuencia, tiempo)
    for k=1:r
        for i=1:c
            for j=1:c
                if (i==frins(k,j))
                    EHH(i,j)=Hmag(k,i);
                end
            end
        end
    end
```

```
        end
      end
    end

    figure(15)
    mesh(t(2:end), 1:fs/2, EHH(1:fs/2, 1:(length(t)-1)))
    title('Espectro de Hilbert Huang')
    ylabel('Frecuencia [Hz]');
    xlabel('Tiempo [s]');

    figure(13)
    subplot(2,1,1)
    plot(M(1,:));
    title('Función de modo intrínseco')
    ylabel('Amplitud');
    xlabel('Tiempo');
    subplot(2,1,2)
    plot(frins(1,:), 'r');
    title('Frecuencia instantanea')
    ylabel('Frecuencia');
    xlabel('Tiempo');
end
```


Bibliografía

- [1] Koeppen M.. (2009). *Berne & Levy FISILOGÍA*. España: ELSEVIER.
- [2] Rios, P. & Alvarez, D.. (2013, octubre 25). *Aporte de los distintos métodos electroencefalográficos (eeg) al diagnóstico de las epilepsias*. Revista Médica Clínica Las Condes, 24, 953-957.
- [3] Noguera, A.. (2017). *Sistema de Software de Adquisición y Procesado de EEG mediante MATLAB*. Cartagena: Universidad politécnica de Cartagena.
- [4] Rios-Lago, Marcos & Paúl, Nuria & Maestú, Fernando & Céspedes JM, Muñoz & Alvarez-Linera, Juan & Alonso T., Ortiz. (2004). *Functional Neuroimaging Applied to the Study of Neuropsychological Rehabilitation*. Revista de neurología. 38. 366-373.
- [5] Cabañero, L.. (2017). *Análisis de señales de electroencefalografía (EEG) para evaluar actividad cognitiva durante el uso de videojuegos*. España: Universidad de Castilla-La Mancha.
- [6] Proakis, G. & Dimitris, M.. (2007). *Tratamiento digital de señales*. Madrid: Pearson.
- [7] Oppenheim, A, Willsky, A. & Nawab, S.. (1997). *Señales y Sistemas*. Massachusetts: Prentice Hall.
- [8] Guerrero Martinez, J. (2010). *Estimación espectral*. 1st ed.[ebook] Valencia: Universidad de Valencia. Disponible en: http://ocw.uv.es/ingenieria-y-arquitectura/1-5/ib_material/IB_T5_OCW.pdf.
- [9] Oppenheim, A. & Schafer W.. (2011). *Tratamiento de señales en tiempo discreto*. España: Pearson Educación.
- [10] Guerrero Martinez, J. (2010). *Procesado digital de bioseñales*. 1st ed.[ebook] Valencia: Universidad de Valencia. Disponible en: http://ocw.uv.es/ingenieria-y-arquitectura/1-5/ib_material/IB_T4_OCW.pdf.
- [11] Romero, J. (2015). *Análisis de señales electrocardiográficas usando técnicas de procesamiento digital* (Tesis de pregrado). Universitat Oberta de Catalunya, España.
- [12] Marí, Y. (2012). *Adquisición de características de señales mioeléctricas para uso de protésica* (Tesis de pregrado). Universidad de las Américas, Puebla, México.
- [13] Edward W. Kamen, Bonnie S. Heck. (2008). *Fundamentos de señales y sistemas usando la Web y Matlab*. México: Pearson Educación

-
- [14] O’Neil P. (2004), *Matemáticas avanzadas para ingeniería*, México: CECSA.
- [15] Webster, J.. (2010). *Medical Instrumentation Application and Design*. USA: Wiley.
- [16] Cooley, J. & Tukey, J.. (Abril, 1965). *An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series*. Mathematics of Computation, 19, pp. 297-301.
- [17] Fernández, A.. (2007). *Estudio de técnicas basadas en la transformada wavelet y optimización de sus parámetros para la clasificación por texturas de imágenes digitales*. Valencia: Universidad politécnica de Valencia.
- [18] Lester, M.. (2006). *Desarrollo en Wavelets*. Junio 21, 2017, de Agencia Nacional de Promocion Cientifica y Tecnologica Sitio web: http://www.exa.unicen.edu.ar/escuelapav/cursos/wavelets/intro_wavelet_06.pdf
- [19] Mark, K.. (2010). *Basics of wavelets*. julio 25, 2017, de Mathematics & Statistics Sitio web: <http://math.bu.edu/people/mkon/Wavelets.pdf>
- [20] Castro, R.. (2002). *Análisis de la teoría de ondículas orientada a las aplicaciones en ingeniería eléctrica: Fundamentos*. Madrid: E.T.S.I. Industriales.
- [21] Boggess, A., & Narcowich, F. J. (2015). *A first course in wavelets with Fourier analysis*. John Wiley & Sons.
- [22] Graps, A. (1995). *An introduction to wavelets*. *IEEE computational science and engineering*, 2(2), 50-61. ISO 690
- [23] Gao, R. X., & Yan, R. (2010). *Wavelets: Theory and applications for manufacturing*. Springer Science & Business Media.
- [24] Rabiner, L. and Schafer, R. (2007). *Introduction to Digital Speech Processing. Foundations and Trends® in Signal Processing*.
- [25] González. R.. (2010). Revisión de la teoría de wavelets. En *Algoritmo basado en Wavelets aplicado a la detección de incendios forestales*(pp. 20-32). Puebla: Universidad de las Américas.
- [26] Mackenzie, D.. (2001). *Wavelets: ver el bosque y los árboles*. septiembre 14, 2017, de National Academy of Science Sitio web: http://www7.nationalacademies.org/spanishbeyonddiscovery/mat_008276.html
- [27] Vázquez, L. & Rupérez, E.. (2012). *Wavelets*. Madrid: Universidad Complutense de Madrid.
- [28] Di Persia, L.. (2005). *Transformada Wavelet Diádica*. septiembre 30, 2017, de Universidad Nacional del Litoral Sitio web: <http://pdsfich.wdfiles.com/local--files/clases-de-teoria/diádica.pdf>
- [29] WOLPAW, Jonathan. *Brain-computer interfaces for communication and control*. En: Clin. Neurophysiol. Vol. 113, No.6 (2002); p. 602-614.
- [30] Muñoz, J. (2014). *Clasificación de patrones de imaginación motora en una interfaz cerebro computador de bajo costo usando software libre*. Pereira: Universidad Tecnológica de Pereira.

- [31] Cifuentes, Irving. (2012). *Extracción de Características y Clasificación de Señales Electromiográficas Utilizando la Transformada Hilbert-Huang y Redes Neuronales*. Puebla: INAOE.
- [32] Jacobo, M.. (2011). *Evaluación de la condición de salud del transformador mediante análisis de vibraciones usando la Transformada Hilbert-Huang*. Nuevo León: UANL.
- [33] Rebollo, R. *Transformada de Hilbert*. Agosto 20, 2018, de UNLP Sitio web: <http://carina.fcaglp.unlp.edu.ar/senales/teorias/Clase10.pdf>
- [34] Ortiz, M.. (2016). *Adaptación y Aplicación de la Transformada de Hilbert-Huang a Sistemas Eléctricos: Aplicaciones en el Estudio de la Gestión de la Demanda y Caracterización de Transitorios*. Cartagena: Universidad Politécnica de Cartagena.
- [35] Carmona, A. & Poveda, G.. (2012, Junio 25). *Aplicación de la Transformada de Hilbert-Huang en la Detección de Modos de Variabilidad Hidroclimática en Colombia*. DYNA, 79, pp. 72-80.
- [36] Walpole, R. & Myers, H.. (2012). *Probabilidad y estadística para ingeniería y ciencias* . México: PEARSON.
- [37] Gomez, E.. (2009). Introducción al filtrado digital. diciembre 10, 2018, de Escola Superior de Musica de Catalunya Sitio web:https://www.researchgate.net/profile/Emilia_Gomez/publication/267789977.
- [38] Mohammadrezca, A. & Housheng Hu. (2007). *Myoelectric control system. Biomedical Signal Processing and control*, 2, p.278.
- [39] Zamorano Castaño, M. (2010). *Análisis de señales mediante STFT y Wavelet. Aplicación a defectología en rodamientos*. Licenciatura. Universidad Carlos III de Madrid.
- [40] Zill, D.. (2012). *Matemáticas Avanzadas Para Ingeniería* . México: Mc Graw Hill.
- [41] Arce, C. (2003). *Algebra Lineal*. Universidad de Costa Rica Sitio web: http://oldemarrodriguez.com/yahoo_site_admin/assets/docs/libro_algebra_lineal_Version_Oficial.220123048.pdf
- [42] Huang, N & Shen, S.. (2014). *Introduction to the Hilbert-Huang transform and its related mathematical problems..* En *Hilbert-Huang Transform and Its Applications*(pp. 1-11). Singapore: Abbrev. of Publisher.
- [43] Willis, J.. (2000). *Biomedical Digital Signal Processing*. New Jersey: Prentice Hall.
- [44] Molla, Md. Khademul & Das, Somlal & Hamid, Ekramul & Hirose, Keikichi. (2013). Empirical Mode Decomposition for Advanced Speech Signal Processing. *Journal of Signal Processing*, pp. 215-229.

- [45] Bronzino, J.. (2006). *Medical Devices and Systems*. E.U.A.: Taylor & Francis.
- [46] Nuwer, M. R., Comi, G., Emerson, R., Fuglsang-Frederiksen, A., Guérit, J. M., Hinrichs, H., ... & Rappelsburger, P. (1998). IFCN standards for digital recording of clinical EEG. *Electroencephalography and clinical Neurophysiology*, 106(3), 259-261. NUWER.
- [47] Harris, F.. (1978, Enero 1). *On the Use of Windows for Harmonic Analysis with the Discrete Fourier Transform*. Proceedings of the IEEE, 66, pp. 51-83.
- [48] Understanding ffts and windowing. (2019). *Comprender FFTs y Funciones Ventana*. Marzo 18, 2019, de National Instruments Sitio web: <http://www.ni.com/es-mx/innovations/white-papers/06/understanding-ffts-and-windowing.html>
- [49] Debnath, L. & Bhatta, D.. (2015). *Integral Transforms and Their Applications*. EUA: CRC PRESS.
- [50] Gabor, D.. (Enero, 1947). *Theory of Communication*. Journal of the Institution of Electrical Engineers, 95, pp. 429-441.
- [51] Rillo, N.. (2005). *Introducción a la teoría de wavelets*. Junio 18, 2018, de Universitat de Barcelona Sitio web: <http://www.maia.ub.edu/~soria/TAD-Wavelets.pdf>
- [52] van der Pol, Balth. (1946). *The Fundamental Principles of Frequency Modulation. Electrical Engineers - Part III: Radio and Communication Engineering*, Journal of the Institution, pp. 93. 153 - 158.
- [53] Vallat, R.. (2018). *A simple and efficient sleep spindles detector*. Abril 13, 2019, de U.C Berkeley Sitio web: <https://raphaelvallat.com/spindles.html>
- [54] Vallat, R.. (2018). *Compute the average bandpower of an EEG signal*. Abril 13, 2019, de U.C Berkeley Sitio web: <https://raphaelvallat.com/bandpower.html>
- [55] Lilly, Jonathan & Charlotta Olhede, Sofia. (2012). *Generalized Morse Wavelets as a Superfamily of Analytic Wavelets*. abril 30, 2019, de IEEE TransactionsonSignalProcessi Sitio web: <https://www.researchgate.net/publication/221703305>.
- [56] Papandreou-Suppappola, A. (2000). *Applications in Time-Frequency Signal Processing Electrical Engineering and Applied Signal Processing Series*, CRC Press.
- [57] Lester, M.. (2006). *Introducción a la Transformada Wavelet*. Julio 01, 2018, de Agencia Nacional de Promocion Cientifica y Tecnologica Sitio web: <http://www.exa.unicen.edu.ar/escuelapav/cursos/wavelets/apunte.pdf>
- [58] Ramos-Argüelles, F., Morales, G., Egozcue, S., Pabón, R.M., & Alonso, M.T.. (2009). *Técnicas básicas de electroencefalografía: principios y aplicaciones clínicas. Anales del Sistema Sanitario de Navarra*, 32(Supl. 3), 69-82. Recuperado en 01 de octubre de 2019,

- de http://scielo.isciii.es/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1137-66272009000600006&lng=es&tlng=es
- [59] Muñoz, V & Palacios J. (2002). *Implantación en Aritmética de Algoritmos DSP: Reconocedor de Palabras Aisladas*, Facultad de Ingeniería, UNAM, México.
- [60] MATLAB and Signal Processing Toolbox Release 2019b, The MathWorks, Inc., Natick, Massachusetts, Estados Unidos

