

I N T R O I T O

La favorable acogida por parte del alumnado a los apuntes que hemos desarrollado en la Sección de Ingeniería Industrial, nos impulsa a seguir en esta línea.

Presentamos una segunda versión de los apuntes para la materia Estadística Aplicada, los que han sido corregidos atendiendo las observaciones de los lectores y la de los profesores de la materia. Incluimos además en esta versión, los temas Análisis de Regresión y Correlación. Estos apuntes fueron desarrollados por el ING. ADOLFO VELASCO REYES (Análisis de Variancia, Teoría de Regresión y Correlación) y el ING. JOEL O. AGUIRRE R. (Cartas de Control y Estadística no Paramétrica)

Esperamos poder mejorarlos y completarlos en un futuro próximo.

Con mucho gusto tendremos en cuenta cualquier sugerencia que se nos haga llegar.

ING. JUAN JOSE DI MATTEO C.

Cd. Universitaria, D.F., Octubre de 1980.

NOTAS Y APUNTES DE ESTADISTICA APLICADA

INDICE GENERAL

	Pág.
REGRESION Y CORRELACION	6
. Método Computacional	19
. Estimación de los Intervalos de Confianza de los Parámetros.	21
. Regresión No Lineal	29
. Regresión Múltiple	37
. Correlación	41
ANALISIS DE VARIANCIA	48
. Introducción	48
. Diseño de Experimentos	48
. Experimento	49
. Diseño	50
. Análisis	51
. Resumen	51
ANALISIS DE VARIANCIA PARA UNA VARIABLE	52
. Ejemplo	61
ANALISIS DE VARIANCIA PARA DOS VARIABLES	67
. Ejemplo	72
. Comparaciones Múltiples	74
. Ejemplo	76
. Método de los Cuadrados Latinos	77
. Ejemplo	82
. Bibliografía	86
ANALISIS DE VARIANCIA POR DOS VARIABLES PARA MAS DE UNA OBSERVACION POR CELDA ($N > 1$)	87
. Procedimiento Computacional	88
. Análisis del Modelo de Efectos Prefijados, para Dos Variables y "n" observaciones por celda.	89
. Ejemplo	92
. Análisis del Modelo de Efectos Aleatorios	95
. Análisis de Variancia para el Modelo de Efectos Mixtos	96
. Tablas	98
. Bibliografía	105

5-74-28-81

CONTROL ESTADISTICO DE CALIDAD	Pág. 106
. Introducción	107
CARTAS DE CONTROL	110
. Introducción	111
. Variación	112
. Orígenes	117
. Amplitud de los Límites de Control	118
. Axiomas de Control de Calidad	120
. Cartas de Control por Variables	123
. Cartas de Medias (Carta \bar{x})	124
. Carta de Rangos y Desviación Estándar	126
. Carta de Desviación Estándar (Carta σ)	127
. Carta de Rango (Carta R)	128
. Causas Asignables de Variación	132
. Fallas de Control	134
. Revisión de Especificaciones	135
. Método para la Utilización de las Cartas de Control \bar{x} y R.	139
. Cartas de Control por Atributo	142
. Carta np	155
. Carta de Control para Defectos (Carta C)	159
. Carta C Modificada	163
. Cartas Cusum (cumulativa sum)	166
. Detección de Cambios	168
. Determinación del tamaño de muestras e intervalo entre muestras	172
. Uso Optimo de Cartas de Control	174
. Bibliografía	180
INSPECCION POR MUESTREO	181
. Concepto de Inspección por Muestreo.	183
. Inspección para Atributos	185
. Planes de Muestreo Dodge-Romig	191
. Norma Militar 105 D (mil - STD - 105 D)	203
. Inspección para Variables	215
. Inspección Por Muestreo Continuo	220
. Bibliografía	223
ESTADISTICA NO PARAMETRICA	224
. Introducción	225
. Distribución Básica	226
. Tendencia Central y Dispersión	229
. Medidas	231
. Escala Nominal o Clasificatoria	231
. Escala Ordinal o de Rangos	233
. Escala Intervalar	234
. Escala de Relación	235

. Niveles de Medición y Estadísticas Apropriadas	Pág. 238
. Ventajas de las Pruebas Estadísticas no Paramétricas.	239
. Desventajas de las Pruebas Estadísticas No Paramétricas.	240
. Prueba para una Muestra (Bondad de Ajuste)	241
. Prueba χ^2	241
. Prueba de Hipótesis para dos muestras Relacionadas (en pares)	247
. Prueba del Signo	247
. Prueba Wilcoxon (Rango Signado)	252
. Prueba de Hipótesis para dos Muestras Independientes	257
. Análisis de Variancia	260
. Análisis de Variancia Doble de Friedman	262
. Tablas	267
. Análisis de Variancia (una vía)	
. Método Kruskal-Wallis	271
. Tablas	276

G-600858

ANALISIS DE VARIANCIAS
Y
REGRESION Y CORRELACION

NOTAS

ADOLFO VELASCO REYES

Octubre de 1980.

G-600858

REGRESION Y CORRELACION

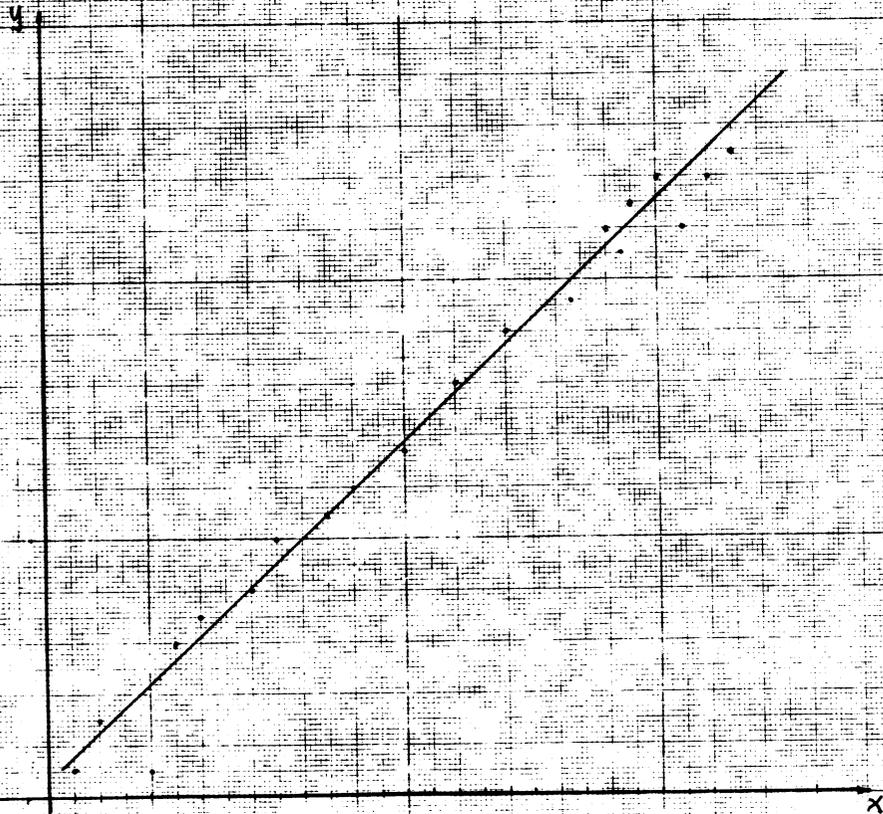
Uno de los problemas más comunes que se tiene en los campos de la actividad humana es determinar la relación existente entre dos conjuntos muestrales o entre pares de variables X y Y . Siendo éstas de naturaleza aleatoria o determinística. Es decir, un problema de correlación simple se presenta cuando se trata de analizar por ejemplo la relación que puede existir entre: apreciación musical y amplitud científica, radiorecepción y locutor, entre el número de accidentes viales y el grado de enrarecimiento del aire ó entre el índice de explosión demográfica y el consumo de productos de primera necesidad, etc.

Sean dos conjuntos de variables aleatorias X y Y cada uno de n elementos. Para determinar la forma en que están relacionados cada uno de los pares $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ estos se grafican como n puntos en un plano coordenado xy ; con el objeto de ver si existe una relación pronunciada ó si la relación puede ser tratada linealmente. Obsérvese la gráfica 1, - una distribución de este tipo puede ser tratada linealmente.

Uno de los principales objetivos de las investigaciones en ingeniería es hacer predicciones por medio de ecuaciones matemáticas. Generalmente, un pronóstico requiere que una fórmula relacione a las variables dependientes con una o más variables independientes. Aquí se verá el caso especial en el que una variable dependiente sea predecida en términos de una variable independiente.

En muchos problemas de ésta clase, la variable independiente es observada sin error o con error tal que es despreciable comparado con el cambio de variación en la variable dependiente.

En general, en estos apuntes de variable independiente será representada por x y la variable dependiente por y , es decir, y



GRAFICA 1

es el valor de una variable aleatoria cuya distribución depende de x . En muchas situaciones, se estará interesado principalmente en la relación existente entre x y la media correspondiente de las y_s ; ésta relación existente se considera como la curva de regresión de y sobre x . Por principio consideremos a x determinística y más adelante trataremos el caso cuando ambas variables son aleatorias.

Primeramente se analiza el caso donde la curva de regresión de y sobre x es lineal, esto es, donde para cualquier x dada, la media de la distribución de las $y(s)$ está dada por $\alpha + \beta x$. En general una y observada difiere de ésta media, esta diferencia se denotará por :

$$y = \alpha + \beta x + \epsilon$$

Nótese que ϵ es un valor dado por una variable aleatoria, y se puede seleccionar un α de tal forma que la media de la distribución de esta variable aleatoria sea igual a cero. El valor de ϵ para cualquier observación dada, dependerá del posible error de medición de los valores de las otras variables en que x puede influir sobre y .

A continuación se presenta un ejemplo, donde la curva de y sobre x puede considerarse lineal.

Supongase que un termopar es calibrado para medir la fuerza electromotriz en milivolts a varias temperaturas conocidas. En la tabla 1, x_i es la i -ésima temperatura dada en grados centígrados y y_i es la lectura correspondiente dada en milivolts. En la gráfica 2 están representados estos valores.

Ahora considerese el problema de usar los datos graficados para estimar los parámetros α y β de la supuesta línea de re--

gresión de y sobre x, ya que conociendo α y β , estará la ecuación de la recta bien definida.

Inicialmente el problema se plantea como sigue :

Se tienen n pares de observaciones (x_i, y_i) donde se supone que la regresión es lineal, y nos interesa obtener la recta que mejor se ajuste, (véase gráfica 3).

Sea $y'_i = a + bX_i$, donde a y b són constantes. Definiendo e_i como el error de predecir el valor de y_i correspondiente a x_i ; es decir : $y_i - y'_i = e_i$ (I)

La ecuación (I) dá una estimación del modelo de regresión lineal actual pero desconocida.

La ecuación del modelo lineal por obtener es de la forma :

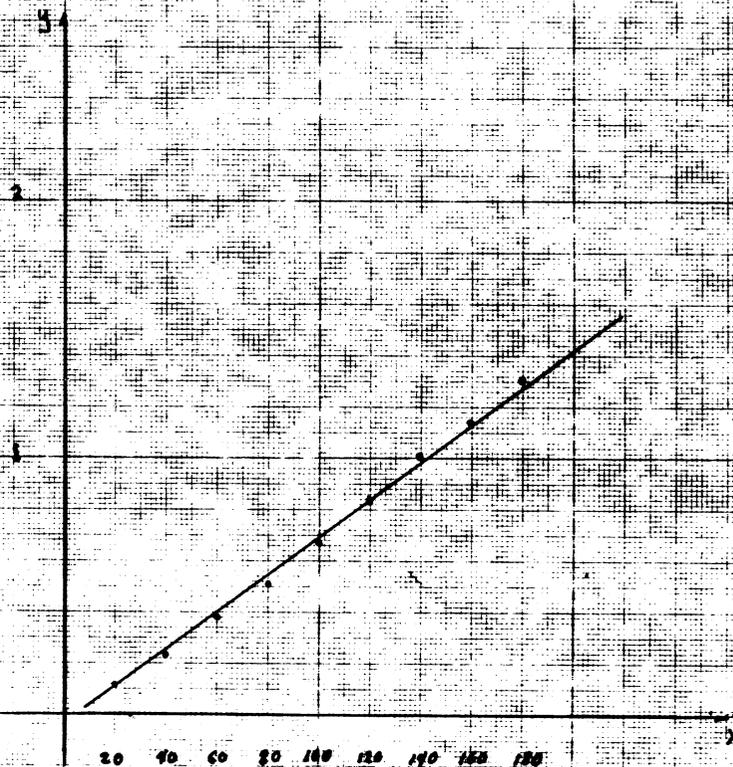
$$y = \alpha + \beta X$$

El error en predecir y_i es ϵ_i y es estimado por medio de la expresión $y_i - y'_i = e_i$. Para determinar los valores de α y β se utilizarán los estimadores a y b respectivamente, es decir, a será considerado como el estimador insesgado de α y b será el de β ; esto se demostrará más adelante.

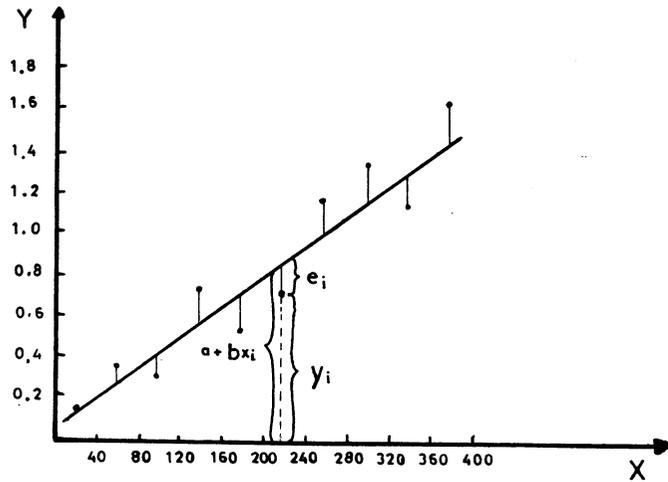
No es razonable tratar de minimizar cada e_i , lo que se debe buscar es que la suma $\sum_{i=1}^n e_i$ sea tan pequeña, que tienda a cero. Esto podrá lograrse por medio de la cancelación de errores positivos y negativos. Pero en lugar de ello se minimizará la suma de los cuadrados de e_i .

TABLA I

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X_i	0	20	40	60	80	100	120	140	160	180
Y_i	0.01	0.12	0.34	0.57	0.81	1.07	1.34	1.62	1.91	2.21



GRAFICA 2



Es decir, se seleccionará una a y b tal que :

$$\sum_{k=1}^n [y_i - (a + bx_i)]^2 \quad \text{sea mínimo} \dots (1)$$

Este criterio se conoce como ajuste por mínimos cuadrados.

Derivando a (1) con respecto a a y b e igualando a cero tenemos:

$$2 \sum_{k=1}^n [y_i - (a + bx_i)] (-1) = 0$$

$$2 \sum_{k=1}^n [y_i - (a + bx_i)] [-x_i] = 0$$

arreglando términos :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n y_i &= an + b \sum_{k=1}^n x_i \\ \sum_{k=1}^n x_i y_i &= a \sum_{k=1}^n x_i + b \sum_{k=1}^n x_i^2 \end{aligned} \dots (2)$$

Tenemos por lo tanto, dos ecuaciones con dos incógnitas a y b. Cuyos valores son fácilmente determinados por algún método tradicional ya conocido. Al sistema (2) se le conoce como sistema de ecuaciones normales.

Para ilustrar el método de mínimos cuadrados al ajuste de un modelo lineal de la forma $y = \alpha + \beta x$, utilicemos los datos correspondientes a velocidades del aire y coeficiente de evaporación de combustible quemados en un motor.

Velocidad del aire cm/seg	20	60	100	140	180	220	260	300	340	380
Coefficiente de Evaporación mm ² /seg	.18	.37	.35	.78	.56	.75	1.18	1.36	1.17	1.65

Las x representan la velocidad del aire en cm/seg y las y los coeficientes de evaporación en mm²/seg.

$$\begin{aligned} n &= 10 \\ \sum_{k=1}^n X_i &= 2000 & \sum_{k=1}^n X_i^2 &= 532000 \\ \sum_{k=1}^n Y_i &= 8.35 & \sum_{k=1}^n X_i Y_i &= 2175.40 \end{aligned}$$

Sustituyendo en las ecuaciones normales se tiene:

$$\begin{aligned} 8.35 &= 10a + 2000b \\ 2175.40 &= 2000a + 532000b \end{aligned}$$

resolviendo estas dos ecuaciones obtenemos :

$$\begin{aligned} a &= 0.069 \\ b &= 0.0038 \end{aligned}$$

y la ecuación de la línea recta que mejor se ajusta con el enfoque de mínimos cuadrados es :

$$y = 0.069 + 0.0038X$$

Esta ecuación puede usarse para predecir los coeficientes de evaporación cuando la velocidad del aire es 190 cm/seg.

$$y' = 0.069 + (0.0038)(190)$$

$$y' = 0.79 \text{ mm}^2/\text{seg.}$$

En páginas anteriores se estudió la relación lineal entre x y y , ajustandola a una línea recta, observando que la técnica de los mínimos cuadrados conduce a una buena aproximación.

Ahora se supone la regresión lineal y además que las n variables aleatorias tienen los valores y_i ($i = 1, 2, \dots, n$) distribuidas independientemente en forma normal con media $\alpha + \beta x_i$ y variancia común σ^2 .

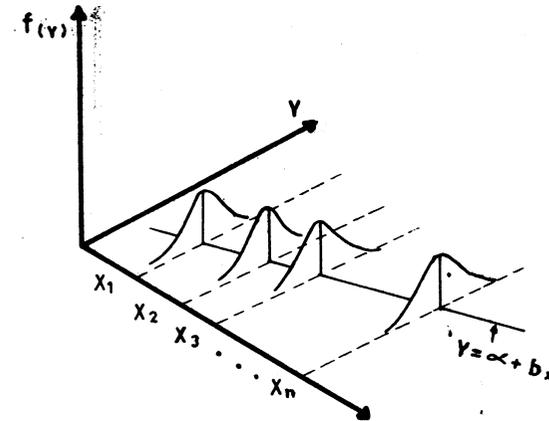
Además : $y_i = \alpha + \beta x_i + \epsilon_i$, donde las ϵ_i son valores de variables aleatorias normalmente distribuidas con media cero y variancia σ^2 .

Todas estas suposiciones se ilustran en la gráfica 4, donde se muestra la distribución de los valores de y_i para distintos valores de x_i .

Estas suposiciones son necesarias para discutir la bondad de los pronósticos basados en la técnica de los mínimos cuadrados. Las propiedades de a y b como estimadores de α y β , no son necesarias para obtener los estimadores originales tomando como base el método de los mínimos cuadrados.

Sea :

$$G(a,b) = \sum_{i=1}^n [y_i - (a + bx_i)]^2 = \sum \epsilon_i^2 \quad \text{--- (a')}$$



GRAFICA 4.

Partiendo de la ecuación (a') obtenemos las derivadas parciales con respecto a a y b , e igualando a cero se tiene :

$$\frac{\partial G(a,b)}{\partial a} = \sum_{i=1}^n 2 [y_i - (a + bx_i)] [-1] = 0$$

$$\frac{\partial G(a,b)}{\partial b} = \sum_{i=1}^n 2 [y_i - (a + bx_i)] [-x_i] = 0$$

arreglando términos, expresemos los valores de a y b en función del conjunto de datos reales :

$$\sum y_i = an + b \sum x_i \quad \dots \dots \dots (a)$$

$$\sum x_i y_i = a \sum x_i + b \sum x_i^2 \quad \dots \dots \dots (b)$$

Multiplicando (a) por $(\sum X_i)$ y (b) por n tenemos:

$$\sum_{i=1}^n X_i \sum_{i=1}^n y_i = na \sum_{i=1}^n X_i + b \left(\sum_{i=1}^n X_i \right)^2 \dots (c)$$

$$n \sum_{i=1}^n X_i y_i = na \sum_{i=1}^n X_i + nb \sum_{i=1}^n X_i^2 \dots (d)$$

Restando (c) de (d)

$$n \sum_{i=1}^n X_i y_i - \sum_{i=1}^n X_i \sum_{i=1}^n y_i = nb \sum_{i=1}^n X_i - b \left(\sum_{i=1}^n X_i \right)^2$$

Por lo tanto:

$$b = \frac{n \sum_{i=1}^n X_i y_i - \sum_{i=1}^n X_i \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n X_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n X_i \right)^2} \dots (e)$$

Otra forma de definir a b es restar (d) de (c) y se tiene:

$$\sum_{i=1}^n X_i \sum_{i=1}^n y_i - n \sum_{i=1}^n X_i y_i = b \left(\sum_{i=1}^n X_i \right)^2 - nb \sum_{i=1}^n X_i$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n X_i \sum_{i=1}^n y_i - n \sum_{i=1}^n X_i y_i}{\left(\sum_{i=1}^n X_i \right)^2 - n \sum_{i=1}^n X_i^2}$$

Y de la ecuación (a) se tiene:

$$na = \sum_{i=1}^n y_i - b \sum_{i=1}^n X_i$$

$$a = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i - b \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad \boxed{a = \bar{y} - b\bar{x}}$$

En seguida se demuestra que los parámetros de regresión lineal son estimadores insesgados.

Del sistema normal de ecuaciones; multiplicando y dividiendo por n a ambos miembros de (a) y (b) tenemos:

$$\frac{n}{n} \sum_{i=1}^n y_i = na + \frac{n}{n} b \sum_{i=1}^n X_i \dots (f)$$

$$\sum_{i=1}^n X_i y_i = a \sum_{i=1}^n X_i + b \sum_{i=1}^n X_i^2 \dots (g)$$

de la ecuación (f)

$$n\bar{y} = na + nb\bar{x} \dots (h)$$

Por otra parte de la ecuación (g) se tiene:

$$\sum_{i=1}^n X_i y_i = a \sum_{i=1}^n X_i + b \sum_{i=1}^n X_i^2 \dots (i)$$

y multiplicando (h) por \bar{x}

$$n\bar{x}\bar{y} = na\bar{x} + nb(\bar{x})^2 \dots (j)$$

Restando (j) de (i):

$$\sum_{i=1}^n X_i y_i - n\bar{x}\bar{y} = b \sum_{i=1}^n X_i^2 - nb(\bar{x})^2$$

$$\therefore b = \frac{\sum_{i=1}^n X_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n(\bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{x})^2} \dots (e')$$

De donde:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{x})^2 &= \sum_{i=1}^n X_i^2 - 2 \sum_{i=1}^n X_i \bar{x} + \sum_{i=1}^n \bar{x}^2 \\ &= \sum_{i=1}^n X_i^2 - 2 \frac{n}{n} X_i \bar{x} + \sum_{i=1}^n \bar{x}^2 \\ &= \sum_{i=1}^n X_i^2 - 2n\bar{x} + n\bar{x}^2 \\ &= \sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{x}^2 \end{aligned}$$

~~∫∫∫ z x y z^2 dx dy dz~~

Por lo tanto :

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) y_i}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} - \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \bar{y}}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

Pero $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = 0$, entonces el 2º término es igual a cero. Finalmente:

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) y_i}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} ; \text{ haciendo } \frac{x_i - \bar{x}}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = c_i$$

Dado que las x_i son conocidas y no son variables aleatorias, entonces las c_i son constantes conocidas y por lo tanto:

$$b = \sum_{i=1}^n c_i y_i$$

Similarmente, el valor de a puede escribirse como:

$$a = \bar{y} - b\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} - \left(\sum_{i=1}^n c_i y_i \right) \bar{x}$$

$$a = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{n} - c_i \bar{x} \right) y_i$$

haciendo $\frac{1}{n} - c_i \bar{x} = d_i$

Se puede expresar a a como una combinación lineal.

$$a = \sum_{i=1}^n d_i y_i$$

donde las d_i son constantes conocidas. Es posible probar ahora que b y a son estimadores insesgados de β y α respectivamente.

Dado que:

$$b = \sum_{i=1}^n c_i y_i ; \text{ luego,}$$

$$E(b) = \sum_{i=1}^n c_i E(y_i) = \sum_{i=1}^n c_i (\alpha + \beta x_i)$$

$$= \alpha \sum_{i=1}^n c_i + \beta \sum_{i=1}^n c_i x_i$$

$$= \alpha \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} + \beta \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) x_i}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

$$= 0 + \beta \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) x_i}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \beta \quad \text{L.q.q.d.}$$

Quedando demostrado que (b) es insesgada.

En forma similar para a:

$$a = \bar{y} - b\bar{x}$$

$$E(a) = E(\bar{y} - b\bar{x}) = E(\bar{y}) - E(b\bar{x})$$

$$= \alpha + \beta \bar{x} - b\bar{x} = \alpha$$

Demostrandose también que a es un estimador insesgado de α .

MÉTODOS COMPUTACIONAL

Con el propósito de estar en posibilidad de resolver el problema por medio de sistemas mecanizados, se presenta la forma como deben arreglarse los datos para un programa de computadora.

Sea $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ y $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$

Entonces: $Y = \beta_0 + \beta_1 X + e$

donde: e, X, y son vectores columna

y β_0, β_1 son constantes (incógnitas)

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \beta_0 + \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} \beta_1 + \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_0 + \beta_1 X_1 \\ \beta_0 + \beta_1 X_2 \\ \vdots \\ \beta_0 + \beta_1 X_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_1 \\ 1 & X_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & X_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}$$

$y \quad X \quad \beta \quad e$

Para el caso regresión lineal simple se tiene:

$y_i = b_0 + b_1 X_i$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} b_0 + \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} b_1$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & X_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix}$$

Partiendo del sistema de ecuaciones normales (2), éste se puede transformar en:

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^n X_i \\ \sum_{i=1}^n X_i & \sum_{i=1}^n X_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n X_i y_i \end{bmatrix}$$

Por otro lado sea:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & X_1 \\ 1 & X_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & X_n \end{bmatrix}; \quad X'X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & X_1 & \dots & X_n \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & X_n & \dots & X_n \end{bmatrix}$$

$$y \quad Xy = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{bmatrix}$$

Entonces:

$$X'X = \begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{bmatrix} \quad y \quad X'XB = \begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix}$$

Sustituyendo sus equivalencias matriciales en (k) se tiene:

$$X'XB = X'y \quad \dots \dots \dots (e)$$

Premultiplicando en ambos lados de la ecuación (e) por $[X'X]^{-1}$ se tiene:

$$[X'X]^{-1} [X'X] B = [X'X]^{-1} X'y$$

finalmente:

$$\underline{\underline{IB = [X'X]^{-1} X'y}}$$

ESTIMACION DE LOS INTERVALOS DE CONFIANZA DE LOS PARAMETROS.

Sea: $S_{xx} = n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2$,

$S_{xy} = n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i$

$S_{yy} = n \sum_{i=1}^n y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)^2$

Sustituyendo estas expresiones en (1) se tiene:

$$b = \frac{S_{xy}}{S_{xx}}$$

Dado que \bar{X} y \bar{Y} son las medias de las observaciones, entonces la variancia de las muestras X_i y Y_i son:

$$S_x^2 = \frac{S_{xx}}{n(n-1)} \quad ; \quad S_y^2 = \frac{S_{yy}}{n(n-1)}$$

El estimador de σ^2 es:

$$S_e^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n [y_i - (a + bx_i)]^2, \text{ donde } \dots \dots \dots \text{ es el}$$

error estandar del estimador.

Otra forma de expresar a S_e^2 es:

$$S_e^2 = \frac{S_{xx} S_{yy} - S_{xy}^2}{n(n-2) S_{xx}} \dots \dots (m) \quad ; \quad S_{yy}^2 = (S_{xy})^2$$

La pérdida de dos grados de libertad explica como dos coeficientes de regresión α y β fueron reemplazados por sus estimadores. - Puede demostrarse por las suposiciones dadas que $(n-2)/\sigma^2$ es el valor de una variable aleatoria que tiene distribución χ^2 con $(n-2)$ grados de libertad.

Con base en la suposición relacionada con la distribución de las y_i puede demostrarse el siguiente teorema relacionado con las distribuciones de los estimadores de α y β .

La distribución muestral del estadístico:

$$t_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{a - \alpha}{S_e} \sqrt{\frac{n S_{xx}}{S_{xx} + (n\bar{x})^2}} \quad \checkmark$$

$$t_{\frac{\beta}{2}} = \frac{b - \beta}{S_e} \sqrt{\frac{S_{xx}}{n}}$$

Son distribuciones t con $(n-2)$ grados de libertad. Usando la primera propiedad podemos construir un intervalo de confianza para α . Resolviendo para la doble desigualdad $-t_{\alpha/2} < t < t_{\alpha/2}$, los límites del intervalo de confianza resultantes son:

$$a \pm t_{\alpha/2} \cdot Se \sqrt{\frac{S_{yy} + (n\bar{y})^2}{n S_{xx}}}$$

En forma similar para β

$$b \pm t_{\alpha/2} \cdot Se \sqrt{\frac{n}{S_{xx}}}$$

Donde $t_{\alpha/2}$ son valores obtenidos de tablas en función del nivel de significancia deseado.

A continuación se ilustra la construcción de cada intervalo de confianza para los coeficientes α y β .

Tomando los datos del ejemplo que se vió al inicio de este capítulo se tiene:

Sea: X la velocidad del aire en cm/seg.
 Y el coeficiente de evaporación en mm²/seg.

Entonces:

X	Y	X ²	XY	Y ²
20	0.18	400	3.6	0.0324
60	0.37	3600	22.2	0.1369
100	0.35	10000	35.0	0.1225
140	0.78	19600	109.2	0.6084
180	0.56	32400	100.8	0.3136
220	0.75	48400	165.0	0.5625
260	1.18	67600	306.8	1.3924
300	1.36	90000	408.0	1.8496
340	1.17	115600	397.8	1.3689
380	1.65	144400	627.0	2.7225
TOTAL: 2000	8.35	532000	2175.4	9.1097

Sabiendo que $a = \bar{Y} - b\bar{X}$ y aplicando (e) se tiene:

$$\begin{aligned} \bar{Y} &= 0.835 \\ \bar{X} &= 200 \\ n &= 10 \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$S_{xx} = n \sum_{i=1}^{10} X_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{10} X_i \right)^2 = 10(532000) - (2000)^2 = 1320000$$

$$S_{xy} = n \sum_{i=1}^{10} X_i Y_i - \sum_{i=1}^{10} X_i \sum_{i=1}^{10} Y_i = 10(2175.4) - 8.35(2000) = 5054$$

$$S_{yy} = n \sum_{i=1}^{10} Y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{10} Y_i \right)^2 = 10(9.1097) - (8.35)^2 = 21.3745$$

Por lo tanto:

$$b = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} = \frac{5054}{1320000} = 0.00382$$

y

$$a = \bar{Y} - b\bar{X} = 0.835 - (0.00382)(200) = 0.069$$

Sustituyendo en la ecuación (m) se tiene:

$$S_e^2 = \frac{S_{xx} S_{yy} - S_{xy}^2}{n(n-2) S_{xx}} = \frac{1320000(21.3745) - (5054)^2}{10(8)1320000} = 0.0252$$

$$S_e = \sqrt{0.0252} = 0.1590$$

Para $\alpha = 0.05$ y con $(10-2) = 8$ grados de libertad $t_{\alpha/2}$ es igual a 2.306. Por lo tanto, los límites de confianza del 95% son:

para α :

$$0.069 \pm (2.306)(0.1590) \sqrt{\frac{1320000 + [10(200)]^2}{10(1320000)}}$$

$$0.069 \pm 0.2327$$

Por lo que :

$$\begin{aligned} 0.069 - 0.2327 < \alpha < 0.069 + 0.2327 \\ -0.1637 < \alpha < 0.3017 \end{aligned}$$

Para β

$$0.00382 \pm (2.306)(0.1590) \sqrt{\frac{10}{1320000}}$$

$$0.00382 \pm 0.001$$

Por lo que : $0.00282 < \beta < 0.00482$

Usando el teorema anterior se establece una hipótesis para α y β . En este caso nos interesa conocer la confiabilidad de β ya que representa la relación entre la variación de X y la de Y.

Si $\beta = 0$, la región sería horizontal y la media de Y no dependería de X. Probando la hipótesis nula $H_0, \beta = \beta_0$.

$$t = \frac{b - \beta_0}{S_e} \sqrt{\frac{S_{xx}}{n}}$$

La región crítica resultante se muestra en la siguiente tabla :

Hipótesis Alternativa	Rechazar H_0 Si
$\beta < \beta_0$	$t < -t_{\alpha}$
$\beta > \beta_0$	$t > t_{\alpha}$
$\beta \neq \beta_0$	$t < -t_{\alpha/2}$ ó $t > t_{\alpha/2}$

Si la hipótesis nula es $H_0; \beta = 0$ y $H_1; \beta \neq 0$

$$t = \frac{0.00382 - 0}{0.1590} \sqrt{\frac{1320000}{10}} = 8.7287$$

Por otro lado $t_{\alpha/2}; n - 2 = t_{0.025}; 8 = 2.306$
 donde : $\alpha = 5\%$, grados de libertad = $n - 2 = 8$.

Se observa que : $t > t_{0.025}$ por lo tanto se rechaza $H_0; \beta = 0$ y concluimos que si hay una relación entre las variaciones de X y Y; o sea, entre la velocidad del aire y el coeficiente de evaporación de la gasolina.

Otro problema es estimar $\alpha + \beta X$ conocido como la media de la distribución de las Y' para un valor dado de X.

Si X toma un valor de X_0 , lo que estimaremos será $\alpha + \beta X_0$ y para calcularlo utilizaremos $a + b X_0$.

Se puede demostrar que este estimador es insesgado, con variancia :

$$\sigma^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{n(X_0 - \bar{X})^2}{S_{xx}} \right]$$

Y el intervalo de confianza para $\alpha + \beta X_0$ con un nivel de confianza de $(1 - \alpha)$ está dado por :

$$(a + bX_0) \pm t_{\alpha/2} \cdot S_e \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{n(X_0 - \bar{X})^2}{S_{xx}}}$$

$t_{\alpha/2}$ se obtiene de tablas con $(n - 2)$ grados de libertad.

Es importante que el estimador de $\alpha + \beta X_0$ sea considerado como la predicción de Y', (un valor futuro de Y) cuando $X = X_0$.

Si α y β son conocidos, aplicaremos el hecho de que Y es una variable aleatoria normalmente distribuida con media igual a $\alpha + \beta X_0$ y variancia σ^2 (ó que $Y - \alpha - \beta X_0$ es un valor de una variable aleatoria normalmente distribuida, con media cero y variancia común σ^2).

Si α y β son desconocidos, se debe considerar al modelo $Y = \alpha + \beta X$ y los límites de predicción están dados por Y, cuando $X = X_0$ que es :

$$(\alpha + \beta X_0) \pm t_{\alpha/2} \cdot Se \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{n(X_0 - \bar{X})^2}{S_{xx}}}$$

donde $t_{\alpha/2}$ es un valor de tablas con $(n - 2)$ grados de libertad y un nivel de significancia α .

Veamos la construcción de los límites de confianza para $\alpha + \beta X_0$ y los límites de predicción para un valor futuro de Y.

Si $X_0 = 190$ escribimos los límites de confianza de $\alpha + \beta X_0 = \alpha + 190\beta$ con un 95% de confianza como :

$$0.69 + 0.00382(190) \pm 2.306(0.1590) \sqrt{\frac{1}{10} + \frac{10(190-200)^2}{1320000}}$$

$$1.4158 \pm 0.366654 \sqrt{0.100757}$$

$$1.4158 \pm 0.366654(0.3174)$$

Por lo tanto :

$$1.2994 < \alpha + 0.00382 X_0 < 1.532$$

$$1.2994 < Y' < 1.532$$

Igualmente los límites de predicción con un 95% de confianza para un valor de Y', cuando $X_0 = 190$ es :

$$1.4158 \pm 2.306(0.1590) \sqrt{1 + \frac{1}{10} + \frac{10(190-200)^2}{1320000}}$$

$$1.4158 \pm 0.366654 \sqrt{1.1007575}$$

$$1.4158 \pm 0.366654(1.04169)$$

Por lo tanto :

$$1.4158 \pm 0.38468$$

ó

$$1.0311 < \alpha + \beta X_0 < 1.8004$$

Lo que significa que para una $X = 190$, tenemos una Y entre 1.0311 y 1.8004 con una probabilidad de 0.95.

Nótese que tenemos una observación esperada con 0.95 de probabilidad entre 1.2994 y 1.532 y para las observaciones futuras se encuentra entre 1.0311 y 1.8004 con la misma probabilidad de 0.95

REGRESION NO LINEAL

Analizaremos ahora el problema cuando la curva de regresión es no lineal, es decir; cuando la regresión es polinomial, para cualquier X dada, la media de la distribución de Y', está dada por:

$$\beta_0 X^0 + \beta_1 X^1 + \dots + \beta_n X_n$$

Esta técnica se usa cuando la forma funcional de la curva de regresión es desconocida.

Como caso particular, veamos el ejemplo de regresión lineal en caso logarítmico. Si para cualquier conjunto de pares ordenados de datos (Xi, Yi), al graficarlos tienden a aproximarse a una recta en escala logarítmica, quiere decir que la curva de regresión de Y sobre X es un exponencial de la forma: $\alpha \cdot \beta^x$.

Sea $Y' = \alpha \cdot \beta^x$ la ecuación de predicción.

Aplicando logaritmos a ésta tenemos:

$$\log y' = \log \alpha + x \log \beta$$

Con lo cual, podemos obtener el valor de los estimadores de $\log \alpha$ y $\log \beta$ usando la técnica de los mínimos cuadrados a los n - pares de valores (Xi, log Yi).

Ilustramos la técnica de ajuste por el método de mínimos cuadrados a una curva de tipo exponencial considerando los siguientes datos: sobre un porcentaje de vida útil de llantas radiales hechas por un fabricante, serán utilizadas no obstante después de haber sido recorridas cierta cantidad conocida de millas.

Porcentaje de vida útil = Y	92.7	58.3	59.7	41.7	45.6	31.8	38.3	19.9
Millas Recorridas= X	5	10	15	20	25	30	35	40

Observando la gráfica 5 vemos que se ajusta a un modelo de la forma $Y = \alpha \beta^x$, el que puede transformarse en: $\log y = \log \alpha + x \log \beta$. Resolviendo se tiene:

X	Y	Y' = log Y	X Y'	X ²
5	92.7	1.9670	9.835	25
10	58.3	1.7656	17.65	100
15	59.5	1.7745	26.61	225
20	41.7	1.6201	32.4	400
25	45.6	1.6589	41.45	625
30	31.8	1.5024	45.06	900
35	38.3	1.5831	55.405	1225
40	19.9	1.2988	51.92	1600
180	---	13.1704	280.33	5100 Total

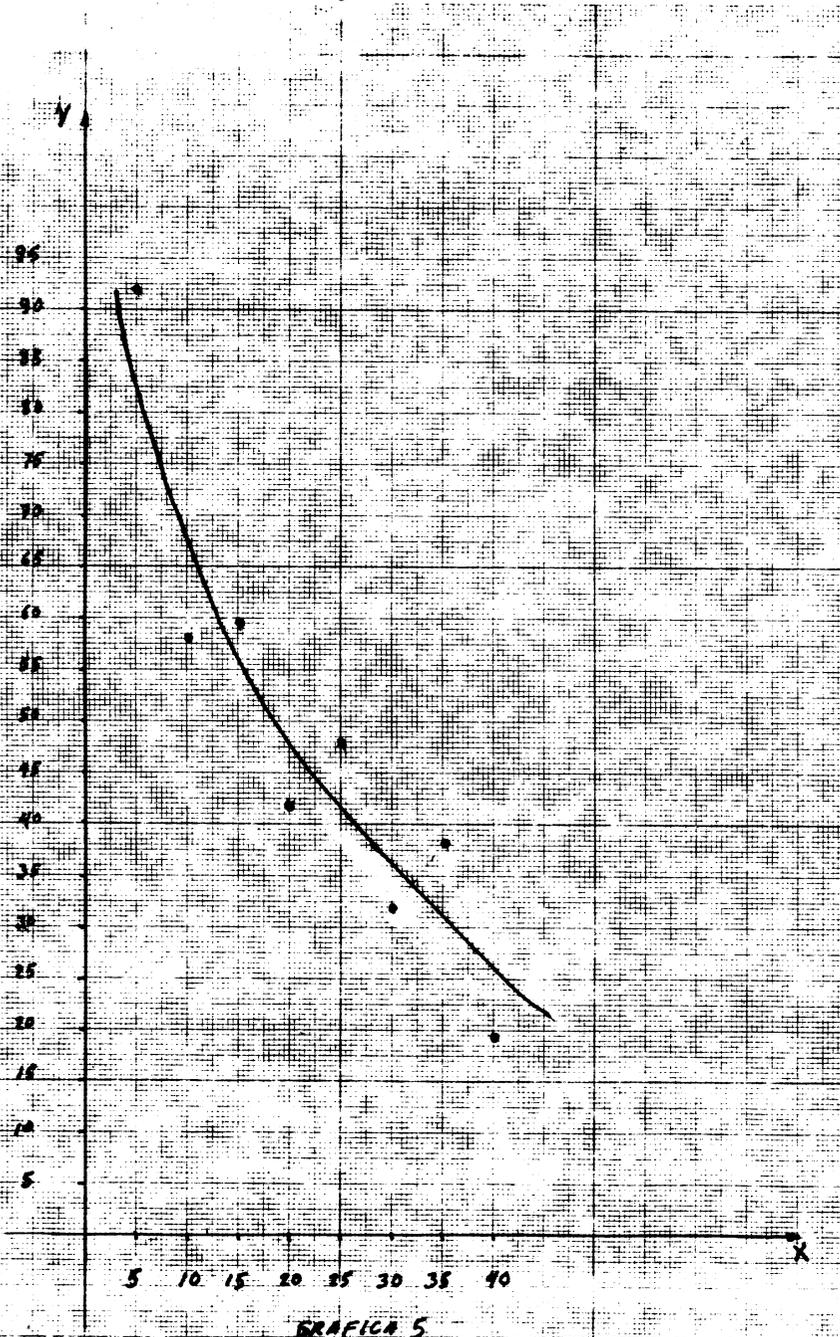
Sustituyendo en las ecuaciones normales (2) y resolviendo se pueden obtener los valores de $\log \alpha$ y $\log \beta$ y por consiguiente los valores de α y β ; ó empleando (e) se llega al mismo resultado.

Usando (e) se tiene:

$$n = 8$$

$$S_{xx} = n \sum_{i=1}^n X_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n X_i \right)^2 = 8(5100) - (180)^2 = 8400$$

27.97 ✓



$$S_{xy} = n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i = 8(280.3) - 2370.06 = -127.42$$

∴

$$b = \frac{-127.42}{8400} = -0.0151$$

$$a = \bar{Y} - b \bar{X} = 1.6458 + 0.3397 = 1.9860$$

Por lo tanto :

$$\alpha = \text{antilog}(1.9860) = 96.827$$

$$\beta = \text{antilog}(-0.0151) = 0.9658$$

Sustituyendo en la ecuación obtenemos :

$$Y = (96.827)(0.9658)^X$$

Si $X = 12$

$$\log Y = 1.986 - 0.0151(12)$$

$$\log Y = 1.8048$$

$$Y = \text{antilog}(1.8048) = 63.796$$

Otras dos relaciones que se presentan frecuentemente en ingeniería que pueden ajustarse por el método de los mínimos cuadrados, después de transformaciones convenientes son :

La transformación recíproca dada por :

$$y' = \frac{1}{\alpha + \beta x}$$

y la función potencia :

$$y' = \alpha X^{\beta}$$

La primera de éstas representa una relación lineal entre X y $\frac{1}{Y}$, donde $\frac{1}{Y} = \alpha + \beta X$. Se puede obtener los estimadores

de α y β aplicando el método de los mínimos cuadrados a los puntos $(x_i, \frac{1}{y_i})$.

La segunda de estas representaciones es una relación lineal entre $\log X$ y $\log Y$; es decir:

$$\log Y = \log \alpha + \log X$$

Después de aplicar el método de los mínimos cuadrados a los puntos $(\log X_i, \log Y_i)$ se pueden obtener los estimadores de $\log \alpha$ y $\log \beta$ y por lo tanto de α y β respectivamente.

Si no existe una clara indicación con respecto a la forma funcional de la regresión de Y sobre X, podemos frecuentemente suponer que las relaciones entre las variables al menos tiene una buena aproximación a la expansión de la serie de Taylor y que los primeros términos darán una buena aproximación, por lo que se ajustan los datos a un polinomio o ecuación de predicción de la forma:

$$y = \beta_0 + \beta_1 X + \beta_2 X^2 + \dots + \beta_p X^p$$

El grado del polinomio está determinado por métodos matemáticos y en la mayoría de las veces por la inspección de los datos. Si tenemos un conjunto de datos consistentes de n puntos (X_i, Y_i) , el problema será estimar los coeficientes $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p$ para un polinomio de grado de p.

Para ello sea:

$$\sum_{i=1}^n [Y_i - (\beta_0 + \beta_1 X_i + \beta_2 X_i^2 + \dots + \beta_p X_i^p)]^2 = e_i$$

Para minimizar e_i , se aplica el criterio de los mínimos cuadrados y obteniendo derivadas con respecto a $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p$ e igualando estas ecuaciones a cero se tiene p + 1 ecuaciones normales, es decir:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n y_i &= n b_0 + b_1 \sum_{i=1}^n x_i + \dots + b_p \sum_{i=1}^n x_i^p \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i &= b_0 \sum_{i=1}^n x_i + b_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 + \dots + b_p \sum_{i=1}^n x_i^{p+1} \\ &\vdots \\ \sum_{i=1}^n x_i^p y_i &= b_0 \sum_{i=1}^n x_i^p + b_1 \sum_{i=1}^n x_i^{p+1} + \dots + b_p \sum_{i=1}^n x_i^{2p} \end{aligned}$$

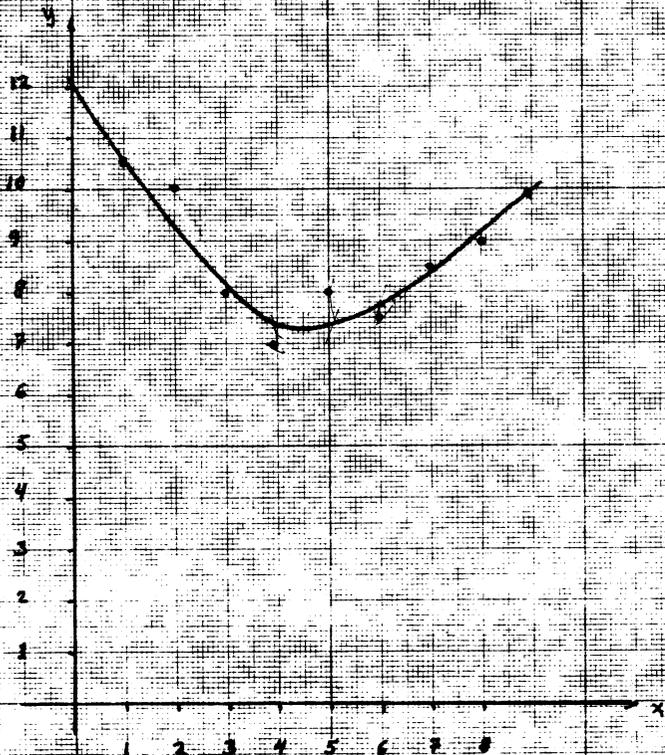
Nótese que éste es un sistema de p + 1 ecuaciones lineales con p + 1 incógnitas b_0, b_1, \dots, b_p . Este sistema de ecuaciones tiene solución única.

Ejemplo: Sea X la cantidad de aditivo agregado a determinado barniz e Y el tiempo de secado del barniz (en horas)

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Y	12.0	10.5	10	8.0	7.0	8.0	7.5	8.5	9.0

Graficando los puntos observamos que se aproxima a una curva de 2º grado, vease la gráfica 6. Por lo tanto, el sistema de ecuaciones normales para esta aproximación es:

$$\sum_{i=1}^n y_i = n b_0 + b_1 \sum_{i=1}^n x_i + b_2 \sum_{i=1}^n x_i^2$$



GRAFICA 6.

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i = b_0 \sum_{i=1}^n x_i + b_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 + b_2 \sum_{i=1}^n x_i^3$$

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 y_i = b_0 \sum_{i=1}^n x_i^2 + b_1 \sum_{i=1}^n x_i^3 + b_2 \sum_{i=1}^n x_i^4$$

Ya que el modelo es de la forma : $y' = \beta_0 + \beta_1 X + \beta_2 X^2$.
Obteniendo los valores de cada sumatoria :

$$\sum_{i=1}^n x_i = 36$$

$$\sum_{i=1}^n y_i = 80.5$$

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 = 204$$

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i = 299$$

$$\sum_{i=1}^n x_i^3 = 1246$$

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 y_i = 1697.0$$

$$\sum_{i=1}^n x_i^4 = 8772$$

$$n=9$$

Sustituyendo estos valores en el sistema de ecuaciones normales se tiene :

$$80.5 = 9b_0 + 36b_1 + 204b_2$$

$$299 = 36b_0 + 204b_1 + 1246b_2$$

$$1697 = 204b_0 + 1246b_1 + 8772b_2$$

resolviendo por cualquier método conocido determinamos :

$$b_0 = 12.2$$

$$b_1 = -1.85$$

$$b_2 = 0.183$$

de donde,

$$y' = 12.2 - 1.85X + 0.183X^2$$

Ahora bien, si $x=6.5$

$$y' = 12.2 - 1.85(6.5) + 0.183(6.5)^2$$

$$y' = 7.9$$

REGRESION MULTIPLE

Antes de seguir adelante, es necesario puntualizar que las curvas obtenidas no solo sirven para hacer predicciones, también son útiles para ^{optimización} optimización, lo cual consiste en obtener valores de la variable independiente que optimicen los valores de la variable dependiente. Para ello analizaremos la técnica de regresión múltiple.

Iniciemos el problema con $(X_{1i}, X_{2i}, \dots, X_{ki}, Y_i)$ elementos. Se supone a las X_{ij} conocidas y a las Y_i variables aleatorias. Esta técnica se usa para resolver problemas de variación de - temperaturas, producción, niveles de consumo, etc. Para cualquier conjunto de valores X_1, X_2, \dots, X_k la media de la distribución de las Y_i está dada por :

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \dots + \beta_k X_k$$

Es necesario observar que la media de la distribución de las Y_i es función de los valores de las variables X_1, X_2, \dots, X_k todas independientes. Aplicando el criterio de los mínimos cuadrados se tiene :

$$\sum_{i=1}^n [Y_i - (\beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \dots + \beta_k X_{ki})]^2$$

derivando parcialmente con respecto a $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ la expresión anterior e igualando a cero las funciones derivadas

resultantes se tiene :

$$\sum_{i=1}^n Y_i = n \beta_0 + \beta_1 \sum_{i=1}^n X_{1i} + \beta_2 \sum_{i=1}^n X_{2i} + \dots + \beta_k \sum_{i=1}^n X_{ki}$$

$$\sum_{i=1}^n X_{1i} Y_i = \beta_0 \sum_{i=1}^n X_{1i} + \beta_1 \sum_{i=1}^n X_{1i}^2 + \beta_2 \sum_{i=1}^n X_{1i} X_{2i} + \dots + \beta_k \sum_{i=1}^n X_{1i} X_{ki}$$

$$\sum_{i=1}^n X_{2i} Y_i = \beta_0 \sum_{i=1}^n X_{2i} + \beta_1 \sum_{i=1}^n X_{1i} X_{2i} + \beta_2 \sum_{i=1}^n X_{2i}^2 + \dots + \beta_k \sum_{i=1}^n X_{2i} X_{ki}$$

$$\begin{matrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix}$$

$$\sum_{i=1}^n X_{ki} Y_i = \beta_0 \sum_{i=1}^n X_{ki} + \beta_1 \sum_{i=1}^n X_{1i} X_{ki} + \beta_2 \sum_{i=1}^n X_{2i} X_{ki} + \dots + \beta_k \sum_{i=1}^n X_{ki}^2$$

Como se ha supuesto anteriormente, los estimadores $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k$ son b_0, b_1, \dots, b_k respectivamente. Obsérvese que el sistema de ecuaciones normales obtenidas anteriormente está formado por $K + 1$ ecuaciones con $K + 1$ incógnitas, lo cual es un sistema que tiene una solución única. El sistema de ecuaciones normales para un problema particular puede resolverse por cualquier método ya conocido por los cursos de algebra correspondientes.

Por comodidad, usaremos una notación abreviada; es decir :

$$\sum_{i=1}^n X_{1i} = \sum X_1 ; \sum_{i=1}^n X_{2i} = \sum X_2, \dots, \sum_{i=1}^n X_{ki} = \sum X_k$$

$$\sum_{i=1}^n X_{1i} X_{2i} = \sum X_1 X_2, \dots, \text{etc.}$$

Ejemplo :

Considerese los siguientes datos relacionados con el número de giros requeridos para romper una barra aleada en porcentajes de cada uno de los elementos presentes en la aleación del metal.

Y N° de Giros	38	40	85	59	40	60	68	53	31	35	42	= 551
X ₁ % de elemento A	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	
X ₂ % de elemento B	5	5	5	5	10	10	10	10	15	15	15	

Y N° de Giros	59	18	34	29	42
X ₁ % de elemento A	4	1	2	3	4
X ₂ % de elemento B	15	20	20	20	20

En el problema observamos que hay dos variables independientes y una dependiente (en este caso el número de giros), por lo que el modelo buscado es de la forma :

$$y' = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2$$

Dado que hay la necesidad de obtener tres parámetros que son - muestras incógnitas, ello nos dice que hay que partir de un sistema de tres ecuaciones que son :

$$\sum y_i = nb_0 + b_1 \sum x_i + b_2 \sum X_2$$

$$\sum x_i y_i = b_0 \sum x_i + b_1 \sum x_i^2 + b_2 \sum x_i X_2$$

$$\sum X_2 y = b_0 \sum X_2 + b_1 \sum x_i X_2 + b_2 \sum X_2^2$$

Por lo que :

$$\begin{aligned} \sum x_i &= 40 & ; & & \sum X_2 &= 200 & ; & & \sum x_i^2 &= 120 \\ \sum x_i^2 &= 3000 & ; & & \sum y &= 733 & ; & & \sum x_i y &= 1989 \\ \sum x_i X_2 &= 500 & ; & & \sum X_2 y &= 8285 \end{aligned}$$

Sustituyendo los valores anteriores en el sistema de ecuaciones se tiene :

$$733 = 16 b_0 + 40 b_1 + 200 b_2$$

$$1989 = 40 b_0 + 120 b_1 + 500 b_2$$

$$8285 = 200 b_0 + 500 b_1 + 300 b_2$$

resolviendo se tiene :

$$b_0 = 48.2 \quad ; \quad b_1 = 7.83 \quad ; \quad b_2 = - 1.76$$

$$\text{Por lo tanto : } Y' = 48.2 + 7.83 X_1 - 1.76 X_2$$

Con la última ecuación obtenida se podrá predecir el número de giros necesarios para romper una barra de estas características. Nótese que si una de las variables independientes queda fija y la otra se incrementa unitariamente, b₁ y b₂ son estimadores del cambio promedio en la "Y" resultante.

CORRELACION

Ya se ha estudiado en temas anteriores, problemas en los que la variable independiente es conocida sin error. Esto se aplicó a muchas situaciones experimentales. Existen también problemas donde las X_i ó las Y_i son valores generados por variables aleatorias, por ejemplo: la impureza del aire y la incidencia de accidentes. Problemas análogos a este son conocidos como problemas de análisis de correlación.

Sean n pares de datos (X_i, Y_i) para $i = 1, 2, \dots, n$ valores de variables aleatorias cuya función de densidad conjunta está dada por $f(X, Y)$. Hagamos las siguientes suposiciones:

Para cualquier X dada, se supondrá que $f(Y/X)$ es una distribución normal condicional con media $\alpha + \beta X$ y variancia σ^2 . Por lo tanto, la regresión de Y/X es lineal y la variancia de la densidad condicional no depende de X.

Se supondrá además que la densidad marginal $g_1(X)$ es normal con media μ_1 y variancia σ_1^2 . Sustituyendo la expresión apropiada para $f(Y/X)$ y $g_1(X)$; es decir en:

$$f(x, y) = g_1(x) \cdot f(y|x) \quad \dots (1)$$

se tiene:

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_1} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-\frac{[y-(\alpha+\beta x)]^2}{2\sigma^2}} \quad \dots (2)$$

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi \sigma_1 \sigma} e^{-\frac{[y-(\alpha+\beta x)]^2}{2\sigma^2} + \frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} \quad \dots (3)$$

para $-\infty < X < \infty$ y $-\infty < Y < \infty$

Nótese que esta distribución conjunta incluye a cinco parámetros que son:

$$\mu_1, \sigma_1, \alpha, \beta \text{ y } \sigma.$$

Por razones de simetría y otras consideraciones que serán explicadas a continuación es conveniente expresar la densidad normal bivariada en términos de los parámetros $\mu_1, \sigma_1, \mu_2, \sigma_2$ y ρ . En este caso, μ_2 y σ_2^2 son la media y la variancia de la distribución marginal $f_2(Y)$ y a ρ lo llamaremos el coeficiente de correlación, definiendolo de la siguiente manera:

$$\rho^2 = 1 - \frac{\sigma^2}{\sigma_2^2} \quad \dots (4)$$

Donde ρ tomará valores positivos si β es positivo y valores negativos si β es negativo. Es posible demostrar que:

$$\mu_2 = \alpha + \beta \mu_1 \quad \dots (5)$$

$$\sigma_2^2 = \sigma^2 + \beta \sigma_1^2 \quad \dots (6)$$

Sustituyendo las expresiones anteriores en $f(X, Y)$ obtenemos:

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 \sqrt{1-\rho^2}} e^{-\left[\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho \left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right) \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2 \right] / 2(1-\rho^2)}$$

Con respecto al coeficiente de correlación ρ nótese que $-1 \leq \rho \leq 1$, dado que :

$$\sigma_1^2 = \sigma^2 + \beta^2 \sigma^2 \quad ; \text{ por lo tanto } \sigma_1^2 \geq \sigma^2.$$

Es decir que, ρ puede ser igual a -1 ó $+1$ solo cuando $\sigma^2 = 0$ que representa al caso degenerado; es decir, que todas las probabilidades están concentradas a lo largo de la línea $y = \alpha + \beta x$ y por lo tanto, hay una relación lineal perfecta entre X y Y. Esto es :

$$-1 \leq \rho \leq 1 \quad \text{solo si } \sigma^2 = 0 \quad , \text{ ya que de (4)}$$

$$\rho = \pm \sqrt{1} \quad ; \text{ por otro lado : } \rho = 0$$

si y solo si $\sigma^2 = \sigma_1^2$; ésto es posible si de (6) $\beta = 0$ y luego sustituyendo el resultado en (4) se llega a $\rho = 0$.

Si $\rho = 0$, implica para la densidad normal bivariada que las dos variables aleatorias son independientes, y que la línea de regresión de Y sobre X es una horizontal; es decir, -- que para cualquier valor conocido de X la predicción de Y es independiente. Cuando $\rho = \pm 1$, se dice que hay una correlación lineal perfecta entre las dos variables; cuando $\rho = 0$ se dice que no hay correlación.

Para valores entre 0 y $+1$ ó 0 y -1 podemos interpretar a ρ por medio de la identidad:

$$\rho^2 = 1 - \frac{\sigma^2}{\sigma_1^2} = \frac{\sigma_1^2 - \sigma^2}{\sigma_1^2}$$

Es decir; σ^2 es una variación de las y_i cuando X es conocida y σ_1^2 es una variación de las y_i cuando X es desconocida, $\sigma_1^2 - \sigma^2$ es una medición de la variación de las y_i que es cuantificada por la relación lineal con X.

Dado una muestra aleatoria de dimensión n, es decir, n pares de valores (X_i, Y_i) , es costumbre hacer la estimación de ρ por medio del coeficiente de correlación muestral.

$$r = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx} \cdot S_{yy}}}$$

donde :

$$S_{xx} = n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2$$

$$S_{yy} = n \sum_{i=1}^n y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)^2$$

$$S_{xy} = n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)$$

Este estimador no es insesgado, excepto por el factor $\sqrt{\frac{n-1}{n-2}}$

Este estimador insesgado puede obtenerse sustituyendo en la ecuación (4) el valor de σ^2 por la variancia de las y_i y a σ^2 por su estimador S_e^2 . Nótese que el coeficiente de correlación muestral r es usado para medir la fuerza de una relación lineal que pueda existir entre muestras aún -- cuando los datos no vengan de una población normal bivariada.

Ejemplo : Analicemos la relación existente entre los módulos de ruptura y los módulos de elasticidad de 12 componentes de madera. Las mediciones correspondientes son :

X= Módulos de Ruptura	Y= Módulos de Elasticidad
8.76	889
7.08	808
11.35	1513
5.25	550
10.91	1008
13.56	1952
6.49	908
11.83	1654
15.08	1502
7.13	1216
9.08	1315
3.86	497

Por lo tanto :

$$n = 12$$

$$\sum X = 110.38 \quad ; \quad \sum XY = 141673.33$$

$$\sum X^2 = 1143.8090 \quad ; \quad \sum Y^2 = 18132296$$

$$\sum Y = 13812$$

$$S_{xx} = 12 (1143.8090) - (110.38)^2 = 1541.9636$$

$$S_{xy} = 12 (141673.33) - (110.38) (13812) = 175511.40$$

$$S_{yy} = 12 (18132296) - (13812)^2 = 26816208$$

Sustituyendo valores en (7) se tiene :

$$r = \frac{175511.40}{\sqrt{(1541.9636)(26816208)}}$$

Esto quiere decir que $100r^2 = 74\%$ de la variación en módulos de elasticidad es atribuido a diferencias en módulos de ruptura.

Aún cuando el valor de r esta basado en datos muestrales, es costumbre desarrollar una prueba de significancia para el valor de r (una prueba de hipótesis nula $\rho = 0$) para determinar si existe una relación lineal entre las dos variables. Para muestras aleatorias que vienen de una población normal - bivariada, esta prueba está basada sobre el estadístico :

$$\frac{1}{2} \ln \frac{1+r}{1-r} \quad ; \quad \text{en que se puede demostrar que la -- distribución muestral de éste estadístico es normal como media } \frac{1}{2} \ln \frac{1+\rho}{1-\rho} \quad \text{y variancia } \frac{1}{n-3}, \text{ por lo}$$

que se probará la hipótesis nula $\rho = 0$ con el estadístico :

$$Z = \frac{\sqrt{n-3}}{2} \ln \frac{1+r}{1-r}$$

Cuya distribución muestral es aproximadamente la normal estandarizada (gráfica # 7).

Retornando al ejemplo numérico para el que se tiene $r = 0.86$, probaremos la hipótesis nula $H_0; \rho = 0$.

Sustituyendo en (8) los valores correspondientes :

$$Z = \frac{\sqrt{12-3}}{2} \ln \frac{1+0.86}{1-0.86} = 3.58$$

Ahora bien, si $\alpha = 0.01$

$$Z_{\alpha/2} = 2.58 \quad ; \text{ por lo tanto : } Z_{\alpha/2} < Z$$

lo cual nos indica que debemos rechazar la hipótesis H_0 ; y concluimos que existe una relación lineal entre los módulos de la ruptura X y los módulos de elasticidad Y .

Esperando que estas notas sirvan de introducción al tema de análisis de regresión y al de correlación, me permito informar que esto es solo un pequeño inicio; ya que aún falta tocar los puntos de correlación múltiple y parcial con respectivas pruebas de significancia, cuando las observaciones provienen de poblaciones donde se suponen normalmente distribuidas y cuando estas distribuciones son diferentes a la normal.

ANÁLISIS DE VARIANCIAS

Introducción

En esta parte del programa presentaremos los principios generales del diseño de experimentos. Los cuales, muchos de ellos los aplicamos a problemas ingenieriles y en otros en los que sea necesario para probar un Conjunto de hipótesis.

Es muy importante planear experimentos adecuados que puedan darnos una seguridad de que los resultados del mismo nos proporcionen una respuesta clara a las preguntas que originaron nuestra investigación. Para ser más claros en esta introducción a continuación presentamos un resumen de los aspectos principales del diseño de experimentos :

DISEÑO DE EXPERIMENTOS

El objetivo de un experimento es intentar obtener inferencias para tomar decisiones con respecto a varias hipótesis que se han planteado al analizar el experimento en estudio. Por lo general se piensa intuitivamente en la estandarización de las características de los componentes del experimento diseñado. Existe además la posibilidad de que al tomar la decisión ésta no conduzca a los resultados deseados por la pequeña cantidad de datos. Por ejemplo, la decisión de llevar o no a un paraguas en la mañana dependerá de los datos que se reúnan, es decir : lectura del barómetro, observación del cielo, pronósticos de los periódicos, los pronósticos de la radio, etc. Después de ello, se analizarán todos los datos disponibles rápidamente, incluyendo en cada predicción digamos un 30 % de probabilidades de que llueva en este día. Simultáneamente se establece un compromiso entre el inconveniente de llevar paraguas y la posibilidad de hacer un gasto por la limpieza de la

ropa. En éstos y en muchos eventos diarios, las decisiones se hacen bajo la luz de la incertidumbre. Es aquí donde aparece el uso de la Estadística como herramienta para la toma de decisiones. Es necesario aclarar que la incertidumbre no implica el no conocer, sino que la ocurrencia exacta de un evento no es predecible. Por ejemplo : si lanzamos 10 monedas, sabemos que el número de soles estará entre 0 y 10, pero no sabemos con certeza cuántos caerán, sin embargo varios resultados podrán predecirse en términos de su probabilidad de ocurrencia.

Lo que queremos decir es que cada toma de decisiones basada en herramientas estadísticas siempre incluirá una colección de datos, en el que la forma de ordenarlos es también muy importante. El diseño de un experimento se ha definido como el orden en que un experimento es realizado.

El diseño de experimentos es usado para ayudar a reducir el error experimental en los datos obtenidos. La aleatorización es empleada como ayuda para eliminar los efectos de muchas variables extrañas que puedan presentarse en un experimento.

Otros factores son variados intencionalmente durante el experimento con el fin de hacer más válidos los resultados para diferentes situaciones que pueden ocurrir en la práctica. Por la utilización de ciertos diseños especiales, los efectos de muchos factores importantes podrán estudiarse en un experimento así como las interrelaciones entre esos factores. En todos y cada uno de los experimentos, se busca obtener la máxima cantidad de información al menor costo.

EL EXPERIMENTO

El experimento incluye un planteamiento del problema a ser res-

suelto. Es necesario incluir todos los puntos de tal manera - que el experimento sea fácilmente comprendido. Del cuidado que se tenga en el planteamiento dependerá la obtención directa de la solución.

Deben identificarse las variables dependientes que son estudiadas y hacerse preguntas tales como : ¿Son cuantificables? ¿con qué aproximación deben tomarse estas mediciones con los instrumentos disponibles? Si no son medibles ¿qué tipo de respuesta debe esperarse? o solo basta un sí o un no, pasa no pasa, además qué tipo de distribución de cada una de las corrientes es la resultante?

Es también necesario definir las variables independientes o -- factores que puedan afectar la dependencia o respuesta variable. ¿Son esos factores constantes, suponiendo ciertos niveles específicos, o promediados por un proceso de aleatorización? ¿Son independientes de los factores un conjunto de valores fijos, -- tales como la temperatura? ¿Son factores susceptibles de variación cuantitativa? (humedad, temperatura) o cualitativo (operadores) y como se podrán combinar todos estos factores?

Todas estas consideraciones deben incluirse en la definición -- del experimento.

EL DISEÑO.

La forma de como coleccionar los datos ¿cuántas observaciones deben considerarse? ¿qué variaciones deben considerarse y que tolerancia de riesgos deben tolerarse? es importante ya que ayudará a definir el tamaño de la muestra para un experimento dado. Sin esta información, la mejor alternativa es tomar una -- muestra grande.

También es de vital importancia el orden en el que el experimento es desarrollado, que podría ser aleatoriamente ordenado. Una decisión que deberá hacerse es la de controlar ciertas variables en niveles específicos, existe siempre un número de otras variables que no pueden ser controladas. La aleatorización tenderá a promediar el efecto de estas variables no controlables.

EL ANALISIS.

El paso final es el análisis que incluye el procedimiento para la colección de datos, y el cálculo de ciertas pruebas estadísticas que se usarán en la toma de decisiones con respecto a varios aspectos de un experimento.

En el análisis se incluyen las pruebas estadísticas tales como la t, χ^2 , F, y sus correspondientes reglas de decisión para pruebas de hipótesis. Las decisiones deben tomarse de tal manera - que sean significativas para el experimentador. Los resultados de la prueba se usarán como feedback⁺ para diseñar un mejor experimento.

Todo lo anteriormente dicho se concreta en el siguiente RESUMEN:

- 1.- Experimento.
 - a). Planteamiento del problema.
 - b). Selección de respuestas o variables dependientes.
 - c). Selección de factores que deben variarse.
 - d). Selección de niveles de estos factores.
 - 1). Cuantitativos o cualitativos.
 - 2). Fijos o aleatorios.
 - e). Niveles de factores que serán combinados.

+ RETROALIMENTACION

II. Diseño

- a). Número de observaciones tomadas.
- b). Orden de experimentación.
- c). Método de aleatorización usada.
- d). Modelo matemático que describa el experimento.

III. Análisis.

- a). Colección de datos y procesamiento.
- b). Cálculo de pruebas estadísticas.
- c). Interpretación de resultados para el experimentador.

Como una herramienta inmediata que nos servirá para probar algunas características de la información generada por el experimento tenemos el :

Análisis de Variancia para una Variable.

Formas de Clasificación.-

Supóngase que el experimento tiene disponibles los resultados de K muestras aleatorias independientes, cada una de dimensión n para K diferentes poblaciones; y se está interesado en probar la hipótesis de que la media de las K poblaciones son iguales.

y_{ij} = observación j de la muestra i.

es decir :

						Media.	
Muestra 1 :	y_{11}	y_{12}	\dots	y_{1j}	\dots	y_{1n}	\bar{y}_1
Muestra 2 :	y_{21}	y_{22}	\dots	y_{2j}	\dots	y_{2n}	\bar{y}_2
.
.
.

Muestra 1 : $y_{11}, y_{12}, \dots, y_{1j}, \dots, y_{1n} \quad \bar{y}_1$
 \vdots
Muestra K : $y_{k1}, y_{k2}, \dots, y_{kj}, \dots, y_{kn} \quad \bar{y}_k$
donde $\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^k \bar{y}_i}{k}$ llamada Gran Media
Para el caso del ejemplo :

$$y_{ij} \quad (i=1, 2, \dots, k) \quad (j=1, 2, \dots, n)$$

Con el arreglo anterior se prueba la hipótesis de que las muestras fueron obtenidas de K poblaciones con medias iguales. Para ello es necesario hacer las siguientes suposiciones :

Primera; Son poblaciones que tienen variancias iguales.

Si

μ_i = media de la i-ésima población

σ^2 = Variancia común de las K poblaciones.

Podemos expresar cada una de las observaciones como :

$$y_{ij} = \mu_i + \epsilon_{ij} \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, K \\ j = 1, 2, \dots, n \end{matrix}$$

Donde

ϵ_{ij} : valores de una variable aleatoria normalmente distribuida con media Cero y Variancia Común.

Nótese que este modelo puede considerarse como una Ecuación de regresión múltiple. Introduciendo la Variable X_{i1} que es igual a 0 ó 1 si los dos subíndices son diferentes o iguales podemos escribir:

$$y_{ij} = \mu_1 X_{i1} + \mu_2 X_{i2} + \dots + \mu_k X_{ik} + \epsilon_{ij}$$

Si $i=1$

$$y_{1j} = \mu_1 X_{11} + \underbrace{\mu_2 X_{12} + \dots + \mu_k X_{1k}}_{\text{cero}} + \epsilon_{1j}$$

$$\therefore y_{ij} = \mu_i X_{i1} + \epsilon_{ij} \quad ; \quad y_{ij} = \mu_i + \epsilon_{ij}$$

Los parámetros μ_i pueden interpretarse como coeficientes de regresión y pueden estimarse por medio del método de los mínimos cuadrados.

Para tener uniformidad con ecuaciones correspondientes a diseños más complicados, es conveniente sustituir a μ_i por $\mu + \alpha_i$

ésto es :

$$\mu_i = \mu + \alpha_i$$

donde :

μ = Media de las μ_i

α_i = efecto de variación de la fuente de error de los tratamientos.

Y entonces :
$$\sum_{i=1}^k \alpha_i = 0$$

Por lo tanto, usando estos nuevos parámetros, la ecuación del modelo para una variable es :

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \epsilon_{ij} \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, K \\ j = 1, 2, \dots, n \end{matrix}$$

y la hipótesis nula de que las K medias poblacionales son iguales puede sustituirse por la hipótesis nula de que :

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_k = 0$$

La hipótesis de que por lo menos dos de las medias de la población son diferentes es equivalente a la hipótesis alternativa de que $\alpha_i \neq 0$ para varias i .

Al probar la hipótesis nula de que las K medias poblacionales sean todas iguales, comparamos dos estimadores de σ^2 , una basada en las variaciones con respecto de las medias muestrales y una basada sobre las variaciones dentro de las muestras.

Por lo tanto, por suposición, cada muestra se obtiene de una población que tiene la variancia σ^2 . Esta variancia puede estimarse por cualquiera de alguna de las variancias muestrales

$$S_i^2 = \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_i)^2 / (n-1)$$

y entonces, por su media

$$\hat{\sigma}_w^2 = \sum_{i=1}^k S_i^2 / k = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^k (y_{ij} - \bar{y}_i)^2 / [k(n-1)]$$

nótese que :

S_i^2 tiene $(n-1)$ grados de libertad y que :

$\hat{\sigma}_w^2$ tiene $K(n-1)$ grados de libertad.

Por otra parte, la variancia de las K medias muestrales está dada por :

$$S_{\bar{y}}^2 = \sum_{i=1}^k (\bar{y}_i - \bar{y})^2 / (k-1)$$

Y si la hipótesis nula es verdadera, al estimar σ^2/n , de esta forma un estimador de σ^2 basado sobre las diferencias respecto a las medias muestrales es igual a :

$$\hat{\sigma}_b^2 = n \cdot \sum_{i=1}^k (\bar{y}_i - \bar{y})^2 / (k-1)$$

con $(K-1)$ grados de libertad.

Si la hipótesis nula es verdadera, puede demostrarse que $\hat{\sigma}_w^2$ y $\hat{\sigma}_b^2$ son estimadores independientes de σ^2 y por lo consiguiente :

$$F = \frac{\hat{\sigma}_b^2}{\hat{\sigma}_w^2}$$

es una variable aleatoria que tiene una distribución F con $(K-1)$ y $K(n-1)$ grados de libertad.

En algunos casos la variancia entre muestras $\hat{\sigma}_b^2$ puede ser mayor que la variancia dentro de las muestras.

La hipótesis nula siendo falsa será rechazada si $F > F_{\alpha}$, donde F_{α} es obtenido de tablas con $(K-1)$ y $K(n-1)$ grados de libertad.

Con esto queremos mostrar como podrá basarse la prueba de la igualdad de K medias sobre la comparación de dos variancias estimadas. Los dos estimadores en cuestión pueden obtenerse analizando la variancia total de todas las nK observaciones en dos partes. La variancia de la muestra de todas las nK observaciones está dada por :

$$S^2 = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y})^2 / (nk-1)$$

y con referencia al numerador, llamado la suma total de los cuadrados, probamos el siguiente

Teorema :

$$\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_i)^2 + n \sum_{i=1}^k (\bar{y}_i - \bar{y})^2 \quad (a)$$

La demostración de este teorema está basada sobre la identidad :

$$y_{ij} - \bar{y} = (y_{ij} - \bar{y}_i) + (\bar{y}_i - \bar{y})$$

elevando al cuadrado ambos miembros y sumando sobre i y j - tenemos :

$$\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_i)^2 + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y})^2 + 2 \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_i) (\bar{y}_i - \bar{y})$$

$$\underbrace{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y})^2}_{STC} = \underbrace{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_i)^2}_{STC} + \underbrace{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (\bar{y}_i - \bar{y})^2}_{n(T_i)} + 2 \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_i) (\bar{y}_i - \bar{y}) \quad (b)$$

Obsérvese que :

$$\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_i) (\bar{y}_i - \bar{y}) = 0 \quad (c)$$

Demostración :

$$Si \quad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n y_{ij}}{nk} = \frac{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n y_{ij}}{nk}$$

desarrollando (c) tenemos :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_i) (\bar{y}_i - \bar{y}) &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n \left\{ (y_{ij} - \bar{y}_i) \bar{y}_i - (y_{ij} - \bar{y}_i) \bar{y} \right\} = \\ &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (y_{ij} \bar{y}_i - \bar{y}_i \bar{y}_i) - \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (y_{ij} \bar{y} - \bar{y}_i \bar{y}) \\ &= nk \bar{y} \bar{y}_i - \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n \bar{y}_i \bar{y}_i - (nk \bar{y}^2 - \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n \bar{y}_i \bar{y}) \\ &= nk \bar{y} \bar{y}_i - nk \bar{y} \bar{y}_i - (nk \bar{y}^2 - nk \bar{y}^2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Como la sumatoria del 2º sumando de (b) no incluye al Subíndice j, por lo tanto :

$$\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (\bar{y}_i - \bar{y})^2 = n \cdot \sum_{i=1}^k (\bar{y}_i - \bar{y})^2$$

Transformando los términos anteriores con el objeto de facilitar sus cálculos se tiene :

$$STC = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y})^2$$

por definición.

desarrollando :

$$\begin{aligned}
STC &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n [y_{ij}^2 - 2y_{ij}\bar{y} + \bar{y}^2] \\
&= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n \left[y_{ij}^2 - \frac{nzy_{ij}\bar{y}k}{nk} + \bar{y}^2 \right] \\
&= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n y_{ij}^2 - \frac{2nk\bar{y} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n y_{ij}}{nk} + nk\bar{y}^2 \\
&= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n y_{ij}^2 - 2nk\bar{y}^2 + nk\bar{y}^2 \\
&= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n y_{ij}^2 - nk\bar{y}^2 \quad ; \text{ pero:}
\end{aligned}$$

$$nk\bar{y}^2 = nk \left(\frac{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n y_{ij}}{nk} \right)^2 = \frac{\left(\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n y_{ij} \right)^2}{nk}$$

sea $T = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n y_{ij}$ ————— (d)

$\therefore C = \frac{T^2}{nk}$ ————— (e)

donde : T es el gran total de las nk observaciones .

por lo tanto $C = \frac{T^2}{nk}$

finalmente :

$$STC = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n y_{ij}^2 - C$$

En forma análoga se obtienen las otras fórmulas (lo cual se deja como ejercicio al lector).

Continuando con la definición de cada uno de los términos de la ecuación (a) :

$$STC = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y})^2 = \text{Suma total de los cuadrados}$$

$$SEC = K(n-1)\hat{\sigma}_a^2 = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_i)^2 = \text{Error de los cuadrados o error aleatorio estimado.}$$

$$SC(T_i) = (k-1)\hat{\sigma}_B^2 = n \cdot \sum_{i=1}^k (\bar{y}_i - \bar{y})^2 = \text{Suma de los cuadrados entre muestras.}$$

De acuerdo con la definición de (F)⁺ se tiene :

$$F = \frac{SC(T_i)/(k-1)}{SEC/k(n-1)}$$

Expresando cada uno de los términos en forma compacta se tiene:

$$STC = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n y_{ij}^2 - C \quad \text{————— (g)}$$

$$SC(T_i) = \left[\sum_{i=1}^k T_i^2 / n_i \right] - C \quad \text{————— (h)}$$

C = factor de corrección.

donde :

T_i representa el total de las n observaciones en la i-ésima muestra.

+ Ver apéndice.

Y es el gran total de nk observaciones. Por lo tanto, despejando a SEC de (a) se tiene.

$$SEC = STC - SC(tr) \quad (1)$$

A continuación se presenta la siguiente tabla de análisis de variancia para una variable.

Fuentes de variación	Grados de Libertad	Suma de Cuadrados.	Promedio de cuadrados	F
Tratamientos	K - 1	SC(tr)	$MC(tr) = \frac{SC(tr)}{K-1}$	$\frac{MC(tr)}{MCE}$
Error	K (n - 1)	SEC	$MCE = \frac{SEC}{K(n-1)}$	
Total	nk - 1	STC		

EJEMPLO :

Supóngase una fábrica de acero que suministra placas a tres manufactureras de envases metálicos; la mayor especificación será que la placa cortada pesará por lo menos 0.2 libras.

La fábrica y cada manufacturera de envases tiene un laboratorio donde se hacen las mediciones de los pesos de las placas de muestras tomadas de cada embarque. Supóngase también que varios problemas han surgido por el peso de las placas Cortadas y deciden planear un experimento para determinar si los cuatro laboratorios están haciendo mediciones consistentes.

Un factor que complica el experimento es : dentro del proceso de medición ocurre la eliminación del zinc que se encuentra sobre la superficie de la base metálica debido a reacciones químicas, por lo que es imposible tener unas muestras idénticas de cada laboratorio y determinar qué tan exactas son las mediciones correspondientes.

Una posibilidad es enviar varias muestras (en forma de discos de áreas iguales) a cada uno de los laboratorios, aunque estos discos podrán no tener pesos iguales, se espera que cada diferencia sea pequeña y por ello sea un promedio entre cada una de las mediciones. Es decir; se supondrá que, no obstante las diferencias existentes, estas podrán ser con respecto a las medias de las cuatro muestras y podrán atribuirse a diferencias en medidas sistemáticas, técnicas de medición y/o cambios de variabilidad. Para determinar si los resultados producidos por los laboratorios son consistentes, lo haremos por medio de una comparación de la variabilidad de las cuatro medias de las muestras con una medición apropiada de cambios de variación.

Existe otro problema; que es el de decidir cuantos discos serán enviados a cada laboratorio y que discos deberán ser seleccionados.

La pregunta de como determinar las dimensiones de la muestra puede responderse de muchas maneras diferentes, una de ellas es:

$$\sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}^2 = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2} ; z_{\alpha} = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - \delta}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \quad (3)$$

$$\mu_1 - \mu_2 = \delta ; \sigma_{\bar{x}_1}^2 = \frac{\sigma_1^2}{n_1} ; \sigma_{\bar{x}_2}^2 = \frac{\sigma_2^2}{n_2}$$

σ_1^2, σ_2^2 = variancias de las poblaciones respectivas.

Donde Z_{α} = valor crítico con un nivel de significancia .

Es posible determinar los valores de $n_1 = n_2 = n$ utilizando la fórmula (j) donde se emplean los valores conocidos de σ_1 y σ_2 , la diferencia entre las medias de la población de algún par de laboratorios previamente especificada con un nivel de confianza de por lo menos 0.95

Suponiendo que este método, los gastos y la disponibilidad de la muestra, conducen a la decisión de enviar doce discos a cada laboratorio, el problema de seleccionar los 48 discos requeridos y colocar 12 en cada laboratorio no es tan directo como puede verse en principio. Partiendo de la suposición de que una placa de estaño chapeada, suficientemente larga y ancha es seleccionada y que los 48 cortes se hacen de la siguiente forma :

Muestra

1	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩	⑪	⑫
2	⑬	⑭	⑮	⑯	⑰	⑱	⑲	⑳	㉑	㉒	㉓	㉔
3	㉕	㉖	㉗	㉘	㉙	㉚	㉛	㉜	㉝	㉞	㉟	㊱
4	㊲	㊳	㊴	㊵	㊶	㊷	㊸	㊹	㊺	㊻	㊼	㊽

Los 12 primeros discos Cortados son enviados al primer laboratorio, los 12 de la segunda tira son enviados al segundo laboratorio y así sucesivamente. Si las cuatro medias de los pesos subsecuentemente obtenidos, difieren significativamente, ¿ podrá esto ayudarnos a concluir esas diferencias pueden atribuirse a la holgura de la consistencia en técnicas de medición ?

Supóngase por un instante, que la investigación adicional muestra que la cantidad de Zinc depositado electrolíticamente sobre una placa de acero tiene una forma distinta con variación repetida perpendicular a la dirección en la cual es rolada.

Por lo tanto si en cada uno de los cuatro laboratorios se midieron la cantidad de zinc consistente y sin error, esto podrá ser una de las causas de las diferencias en las determinaciones de los pesos de los discos cortados.

La asignación de una tira de discos a cada laboratorio es tal que, esas inconsistencias respecto a las técnicas de medición de los laboratorios son inseparables de cualquier diferencia que pueda existir en la cantidad actual de zinc depositado perpendicularmente a la dirección en la que la tira o placa es rolada.

Una manera de evitar estas confuciones es numerar los discos y colocarlos en los laboratorios en forma aleatoria como en el arreglo siguiente :

Laboratorio A:	3	38	17	32	24	30	48	19	11	31	22	41
Laboratorio B:	44	20	15	25	45	4	14	5	39	7	40	34
Laboratorio C:	12	21	42	8	27	16	47	46	18	43	35	26
Laboratorio D:	9	2	28	23	37	1	10	6	29	36	33	13

Si existe cualquier cantidad de zinc sobre la placa, ésta podrá no ser significativa por la aleatorización. A través de ello hemos encontrado y contrarrestado una variación sistemática. No puede asegurarse que no exista otra, ya que puede ser la diferencia sistemática en las áreas de los discos causado por el desgaste de la herramienta de corte o podrá ser debido a porosidades u otras imperfecciones de alguna parte de la placa.

Por tal motivo, con la aleatorización se evita la confusión de la variable en investigación con cada una de las otras variables.

Para evitar cambios de variación, es necesario hacer los experimentos por medio de bloques tal que la variabilidad sea de block a block.

Para el caso de nuestro ejemplo, se decidió asignar de cada tira una cantidad de 3 discos en forma aleatoria con el siguiente arreglo :

Lab. A :	8, 4, 10	23, 24, 19	26, 29, 35	37, 44, 48
Lab. B :	2, 6, 12	21, 15, 22	34, 33, 32	45, 43, 46
Lab. C :	1, 5, 11	16, 20, 13	31, 29, 30	41, 38, 47
Lab. D :	7, 3, 9	17, 18, 14	28, 31, 25	39, 40, 42

+++

A :	.25 .27 .22 .30 .27 .28 .32 .24 .31 .26 .21 .28
B :	.18 .28 .21 .23 .25 .20 .27 .19 .24 .22 .29 .16
C :	.19 .25 .27 .24 .18 .26 .28 .24 .25 .20 .21 .19
D :	.23 .30 .28 .24 .34 .20 .18 .24 .28 .22 .21 .28

Resolviendo el ejemplo 1 usando las fórmulas anteriormente vistas se tiene :

$\sum_{i=1}^n M_i$	A = 3.21	Suma total del Laboratorio (tratamiento)	A
$\sum_{i=1}^n M_i$	B = 2.72	" " " "	B
$\sum_{i=1}^n M_i$	C = 2.76	" " " "	C
$\sum_{i=1}^n M_i$	D = 3.00	" " " "	D

+++Estas cantidades corresponden a los pesos de los discos asignados en el primer arreglo respectivamente.

El gran total es :

T = 11.69 usando (d)

$$C = \frac{(11.69)^2}{48} = 2.8470 \text{ término de Corrección.}$$

sustituyendo en (g), (h) e (i) respectivamente.

$$STC = (0.25)^2 + (0.27)^2 + \dots + (0.21)^2 + (0.28)^2 - 2.8470 = 0.0809$$

$$SC(t_o) = \frac{(3.21)^2 + (2.72)^2 + (2.76)^2 + (3.0)^2}{12} - 2.8470 = 0.0130$$

SEC = 0.0809 - 0.0130 = 0.0679

Por lo tanto la tabla de ANOVA I queda como sigue :

Fuentes de variación.	Grados de Libertad.	Suma de Cuadrados	Cuadrado de medias.	F
Laboratorio	3	0.0130	0.0043	2.87
Error	44	0.0679	0.0015	
Total	47	0.0809		

Ahora bien; comparando el valor de F con respecto a $F_{\alpha} = 0.05$ de tablas (i) con 3 y 44 grados de libertad y un nivel de significancia $\alpha = 0.05$, se tiene que $F > F_{0.05}$:

$F > F_{0.05} = 2,82$ por lo tanto :

H_0 se rechaza con nivel de significancia de 0.05 se concluye que los laboratorios no están obteniendo resultados consistentes. Dado que se rechazó H_0 ; calculemos las diferencias

significativas de los laboratorios correspondientes :
 Sabemos que $M_i = \mu + \alpha_i$ por lo que despejando α_i se tiene :

$$\alpha_i = M_i - \mu$$
 donde las α_i son los números significativos.

Análisis de variancia para dos variables.

Para el caso de dos formas de clasificación tenemos las siguientes suposiciones:

1° se supone una experimentación en la que las fuentes de variación, aunque ya están determinadas, existen aún variaciones de block a block.

2° en esta parte se supone que el experimento consiste en -- tomar mediciones pertenecientes a a tratamientos distribuidos sobre b blocks.

Primero se considera el caso donde existen exactamente una observación para cada tratamiento en cada block.

Sea :

Y_{ij} = la observación perteneciente al i-ésimo tratamiento y el j-ésimo block.

\bar{Y}_i = la media de las b observaciones pertenecientes al i-ésimo tratamiento.

\bar{Y}_j = la media de las a observaciones en el i-ésimo block.

$\bar{Y}_{..}$ = la media de las ab observaciones.

A continuación se muestra el arreglo de observaciones :

(1) Ver tablas # 1 en el apéndice.

Tratamientos	B ₁	B ₂	...	B _j	...	B _d	Medias
1	y ₁₁	y ₁₂	y _{1b}	
2	y ₂₁	y ₂₂	y _{2b}	
3	y ₃₁	y ₃₂	y _{3b}	
.	
.	
i	y _{i1}	y _{i2}	y _{ib}	
.	
.	
a	y _{a1}	y _{a2}		y _{aj}		y _{ab}	
Medias	$\bar{y}_{.1}$	$\bar{y}_{.2}$...	$\bar{y}_{.j}$...	$\bar{y}_{.b}$	

El modelo que supondremos para esta forma de clasificación - con una observación por celdas es :

$$Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \epsilon_{ij} \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, a$$

$$j = 1, 2, \dots, b$$

donde $\mu = \bar{Y}_{..}$

α_i = efecto del i-ésimo tratamiento.

β_j = efecto del j-ésimo block.

ϵ_{ij} = Valores de las variables independientes normalmente distribuidas con media cero y variancia común

Análogamente al primer modelo, se restringen los parámetros suponiendo que las condiciones son :

$$\sum_{i=1}^a \alpha_i = 0 \quad y \quad \sum_{j=1}^b \beta_j = 0$$

Ahora nuestro objetivo es probar la significancia de la diferencia con respecto a \bar{Y}_i . Es decir, probar la hipótesis

nula. $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_a = 0$

Y también es deseable probar si el tipo de bloques ha sido efectivo, es decir; probar que $\beta_1 = \beta_2 \dots = \beta_b = 0$ que es una hipótesis nula, y que podrá rechazarse.

En cualquier caso, la hipótesis alternativa es que por lo menos uno de los efectos es diferente de cero.

Como en el primer modelo, el análisis estará basado uno sobre la variación respecto a los bloques, otro sobre la variación respecto a los tratamientos y uno más que mida el error experimental.

Nótese que solo el último es un estimador de σ^2 cuando, ya sea alguna de las hipótesis nulas (o ambas) no esté contenida.

Estableciendo los parámetros de las muestras se tiene :

$$\begin{aligned} \bar{y}_{i.} &= \frac{\sum_{j=1}^b y_{ij}}{b} \\ \bar{y}_{.j} &= \frac{\sum_{i=1}^a y_{ij}}{a} \\ \bar{y}_{..} &= \sum_{i=1}^a \bar{y}_{i.} / a = \sum_{j=1}^b \bar{y}_{.j} / b = \frac{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b y_{ij}}{ab} \end{aligned} \quad \text{--- (J)}$$

En forma análoga al primer modelo, demostraremos el siguiente teorema con el fin de obtener fórmulas simplificadas.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (y_{ij} - \bar{y}_{..})^2 &= \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (y_{ij} - \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{.j} + \bar{y}_{..})^2 + \\ &+ b \sum_{i=1}^a (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2 + a \sum_{j=1}^b (\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..})^2 \end{aligned}$$

en el que cada una de las componentes las identificaremos como :

$$\begin{aligned} STC &= \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (y_{ij} - \bar{y}_{..})^2 \\ SEC &= \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (y_{ij} - \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{.j} + \bar{y}_{..})^2 \\ SC(tr) &= b \sum_{i=1}^a (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2 \\ SC(B1) &= a \sum_{j=1}^b (\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..})^2 \end{aligned} \quad \text{--- (K)}$$

Usando las equivalencias se representa la ecuación del teorema como :

$$STC = SEC + SC(tr) + SC(B1) \dots \dots \dots (l)$$

donde :

STC = Suma total de los cuadrados.

SEC = Suma de los errores cuadráticos.

y SC(tr) = Suma de cuadrados de los tratamientos.

SC(B1) = Suma de los cuadrados de los bloques.

Para demostrar el teorema se usa la siguiente identidad :

$$y_{ij} - \bar{y}_{..} = (y_{ij} - \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{.j} + \bar{y}_{..}) + (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..}) + (\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..})$$

elevando al cuadrado ambos miembros de la identidad y aplicando el operador sumatoria entre i y j se tiene :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (y_{ij} - \bar{y}_{..})^2 &= \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b [(y_{ij} - \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{.j} + \bar{y}_{..}) + (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..}) + (\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..})]^2 \\ &= \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (y_{ij} - \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{.j} + \bar{y}_{..})^2 + \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2 + \\ &\quad \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..})^2 + \\ &\quad \left. \begin{aligned} &2 \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (y_{ij} - \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{.j} + \bar{y}_{..})(\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..}) + \\ &2 \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (y_{ij} - \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{.j} + \bar{y}_{..})(\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..}) + \\ &2 \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})(\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..}) \end{aligned} \right\} = 0 \end{aligned}$$

Para demostrar que los tres últimos términos de la ecuación es igual a cero, utilizaremos el conjunto de ecuaciones k, demostraremos que uno de los tres últimos términos es igual a cero y en forma análoga se demuestra que los otros dos también valen cero (se deja como ejercicio al lector).

Tomando a :

$$2 \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (y_{ij} - \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{.j} + \bar{y}_{..}) (\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..}) = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b [(y_{ij} - \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{.j} + \bar{y}_{..}) \bar{y}_{.j} - (y_{ij} - \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{.j} + \bar{y}_{..}) \bar{y}_{..}] = (ab\bar{y}_{..} - ab\bar{y}_{..} - ab\bar{y}_{..} + ab\bar{y}_{..}) \bar{y}_{.j} + (ab\bar{y}_{..} - ab\bar{y}_{..} - ab\bar{y}_{..} + ab\bar{y}_{..}) (\bar{y}_{..}) = 0$$

De la misma manera se demuestra que los otros dos términos - valen cero.

Siguiendo el mismo procedimiento aplicado en ANOVA 1 se tiene :

$$STC = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b y_{ij}^2 - c$$

$$SC(tr) = \frac{\sum_{i=1}^a T_{i.}^2}{b} - c \quad \text{donde ; } c = \frac{T_{..}^2}{ab}$$

$$SC(B1) = \frac{\sum_{j=1}^b T_{.j}^2}{a} - c$$

Donde :

T_{i.} Suma de las (b) observaciones para los i-ésimos tratamientos.

T_{.j} Suma de las (a) observaciones en el j-ésimo block.

T_{..} Total de observaciones.

c Término de corrección.

de la ecuación (1) despejando SEC, se tiene :

$$SEC = STC - SC(tr) - SC(B1)$$

Usando la suma de los cuadrados de los tratamientos, podemos rechazar la hipótesis nula de que las (α_i) son todas iguales a cero en el nivel de significancia (α) si :

$$F_{tr} = \frac{SC(tr)/(a-1)}{SEC/(a-1)(b-1)}$$

excede a F_α con (a-1) y (a-1)(b-1) grados de libertad. La hipótesis nula de que las β_j son todas iguales a cero serán rechazadas en el nivel de confianza α si:

$$F_{B1} = \frac{SC(B1)/(b-1)}{SEC/(a-1)(b-1)} > F_{\alpha}$$

A continuación se presenta la tabla de análisis de variancia para dos variables :

Fuentes de variancia	Grados de Libertad.	Suma de Cuadrados	Media de Cuadrados	F
Tratamiento	(a-1)	SC (tr)	MC(tr) = $\frac{SC(tr)}{(a-1)}$	F _{Tr} = $\frac{MC(tr)}{MEC}$
Blocks	(b-1)	SC (B1)	MC(B1) = $\frac{SC(B1)}{(b-1)}$	F _{B1} = $\frac{MC(B1)}{MEC}$
Error	(a-1)(b-1)	SEC	MEC = $\frac{SEC}{(a-1)(b-1)}$	
Total	(ab-1)	STC		

EJEMPLO :

Se trata de analizar varios diseños de experimentos para comparar la diferencia de diseño de diferentes cascos de lanchas. Son cuatro diseños y cada uno fué probado en tres diferentes días correspondientes a calma moderado y pertinaz. Cada día los cuatro botes fueron navegados sobre una ruta definida en forma aleatoria a velocidad tope (máxima) y los tiempos (en minutos) empleados por los botes en cubrir esa ruta son los siguientes :

Diseño	Día 1	Día 2	Día 3	Total	
A	45	46	51	142	
B	42	44	50	136	minutos
C	36	41	48	125	
D	49	47	54	150	
Total	172	178	203	553	

Aplicando las fórmulas se obtiene :

$$C = \frac{(553)^2}{12} = 25,484$$

$$STC = (45)^2 + (46)^2 + \dots + (54)^2 - 25,484 = 215$$

$$SC(t_r) = \frac{(142)^2 + (136)^2 + (125)^2 + (150)^2}{4} - 25,484 = 111$$

$$SC(B1) = \frac{(172)^2 + (178)^2 + (203)^2}{3} - 25,484 = 135$$

$$SEC = 265 - 111 - 135 = 19$$

Fuentes de Variación	Grados de Libertad	Suma de Cuadrados	Media de Cuadrados.	F
Diseños de cascos	3	111	37.0	11.6
Días	2	135	67.5	21.1
Error	6	19	3.2	
Total	11	265		

En tabla $F_{tr} = 9.78 < 11.6 = F_{0.01}$; con $\alpha = 0.01$

y $F_{B1} = 10.90 < 21.1 = F_{0.01}$

Por lo tanto se concluye que las diferencias de diseño si afectan en la velocidad de los botes.

COMPARACIONES MULTIPLES.

La prueba así tratada en los dos casos anteriores para mostrar si las diferencias de varias medias entre si es significativa, no indica si una media dada (o un grupo de medias) difieren significativamente de otra media (o grupo de medias) dadas.

En la práctica, lo más importante es la clase de información que un investigador realmente necesita ; por ejemplo, es importante ver qué modelo de experimentación difiere de los otros.

Si un analista está confrontando K medias, podrá probarse en principio, las diferencias significativas entre todas las posibles parejas. Esto es, ejecutar :

$$\binom{K}{2} = \frac{K(K-1)}{2} \text{ pruebas } t \text{ de dos muestras cada una.}$$

Con lo cual se requiere hacer un número relativamente grande aún cuando K sea pequeño, y además esas pruebas podrán no ser independientes y por lo tanto, puede resultar imposible asignar un nivel de significancia a este procedimiento.

Para evitar todo esto, se utiliza el criterio de Duncan o prueba de Rango Múltiple.

Las suposiciones sobre las cuales se apoya el criterio de Duncan es esencialmente :

Hacer un análisis de variancia para una variable (o cambio de variación) en el que las dimensiones de las muestras son iguales.

La prueba compara el rango de cualquier conjunto de (P) medias con un Rango R_p apropiadamente menos significativo, donde :

$$R_p = S\bar{x}; rp.$$

$$S\bar{x} = \text{estimador de } \sqrt{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$S\bar{x} = \sqrt{\frac{MSE}{N}} \text{ MEC}$$

$$MEC = SSE/K (n-1)$$

rp : Depende del nivel deseado de significancia y el número de grados de libertad correspondientes a MSE, éste podrá obtenerse en la tabla⁽²⁾ para $\alpha = 0.05$ y $\alpha = 0.01$ donde P varía desde P = 2, 3, ..., 10 y para varios grados de libertad de 1 a 120.

Ejemplo.- Utilizando los datos del problema visto en ANOVA I se tiene :

Laboratorio	B	C	D	A
Medias	0.277	0.230	0.250	0.268

$$S\bar{x} = \sqrt{\frac{0.0015}{12}} = 0.011$$

en la tabla para $\alpha = 0.05$ y 44 grados de libertad obtenemos los valores correspondientes de rp.

P	2	3	4	Finalmente	P	2	3	4
rp	2.85	3.00	3.05		R_p	0.031	0.033	0.034

Por otro lado, obteniendo los rangos correspondientes de las medias de los datos reales contenidos en la tabla (I) y comparando estos con los R_p correspondientes de la tabla (II) se tiene :

El rango de las Cuatro medias es $0.268 - 0.227 = 0.041$ que excede a $R_4 = 0.034$ el rango menos significativo ; esto quiere decir que si hay una diferencia significativa.

La prueba para diferencias significantes con respecto a 3 medias es :

$$R_3 = 0.268 - 0.230 = 0.038$$

$$R_3^2 = 0.250 - 0.227 = 0.023$$

El primero de estos valores excede a $R_3 = 0.033$. Esto es; las diferencias observadas en el primer conjunto son significativas, sin embargo las diferencias en el segundo conjunto no excede a 0.033, por lo que no es significativa.

*Las tablas de rp se encuentran en : Probability and Statistics for Engineers: Miller; Prentice Hall; 1977 2nd Ed. tablas X (a)

Finalmente, para pares adyacentes de medias, determinamos que no hay pares que tengan un rango menor que el rango menos significativo $R_2 = 0.031$. Nuestros resultados finales quedan expresados en la siguiente forma :

0.227 0.230 0.250 0.268

Concluimos que el laboratorio (A) es el que proporciona las más altas mediciones.

Método de los Cuadrados Latinos.

El diseño de block aleatorizado o dos formas de clasificación, es apropiado cuando una fuente de variación extraña es eliminada dentro de la comparación de un conjunto de medias muestrales. Una característica importante de esta clase de diseño es su balance, lograndose por la asignación del mismo número de observaciones en cada tratamiento y en cada block.

La misma clase de balance puede lograrse en clases más complicadas de diseño, donde su deseo es eliminar efectos de fuentes extrañas de variación. En esta parte introducimos dos diseños balanceados, el diseño de " Cuadrados Latinos " y el de " Cuadrados Greco-Latinos ", que son utilizados para eliminar los efectos de dos y tres fuentes extrañas de variación respectivamente.

Introduciendo el Método de los Cuadrados Latinos diremos que es un arreglo Cuadrado de $n \times n$, con la condición de que en ese arreglo nunca se repite en cada celda del arreglo, es decir, un arreglo como el descrito es conocido como Cuadrado Latino debido al uso de las letras latinas del alfabeto.

Un cuadrado latino de $n \times n$ es un arreglo cuadrado de n letras distintas, con cada letra apareciendo una y solo una vez en cada renglon y en cada columna.-

Ejemplo :

$n = 4$

A	B	C	D
B	C	D	A
C	D	A	B
D	A	B	C

$n = 5$

A	B	C	D	E
B	A	E	C	D
C	D	A	E	B
D	E	B	A	C
E	C	D	E	A

La Característica Principal es que en un modelo de experimentos Cuadrados Latinos que incluye n tratamientos, es necesario incluir n^2 observaciones, n para cada tratamiento.

Una experimentación por cuadrados latinos sin repetición provee solo $(n-1) (n-2)$ grados de libertad al estimar el error experimental. Una experimentación rara vez es efectuada sin repetición si n es pequeña, esto es, sin repetir el modelo de los cuadrados latinos varias veces. Si existe un total de r repeticiones, el análisis de los datos presupone el siguiente modelo :

$$y_{ij(k)l} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + \rho_l + \epsilon_{ij(k)l}$$

Donde :

$y_{IJ} (K) l$ = a la observación en el i -ésimo renglón y la j -ésima Columna de la l -ésima repetición y el K -ésimo tratamiento.

Para $I, J, K = 1, 2, \dots, n$ y $l = 1, 2, \dots, r$

Sujeto a las restricciones :

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = 0; \quad \sum_{j=1}^n \beta_j = 0; \quad \sum_{k=1}^n \gamma_k = 0; \quad \sum_{l=1}^r \rho_l = 0$$

donde :

- μ = la gran media
- α_i = efecto del i-ésimo renglón
- β_j = efecto del J-ésima columna
- γ_k = efecto del K-ésimo tratamiento
- ρ_l = efecto de la l-ésima repetición.

$E_{ij}(K)1$ = Variables Aleatorias normalmente distribuidas con media igual a cero y σ^2 común.

Nótese que por efectos de renglones y columnas, queremos decir los efectos de las dos variables extrañas.

La principal hipótesis nula que queremos probar es $\gamma_k = 0, K$, queriendo decir con esto, que no hay diferencia en la efectividad de los n tratamientos. Se puede probar también si el arreglo del modelo ha sido efectivo, es decir podemos probar la hipótesis nula $\alpha_i = 0, \forall i$ y $\beta_j = 0, \forall j$ y ver si las dos variables extrañas actualmente tienen efecto sobre el fenómeno bajo consideración.

Además podemos probar si $\rho_l = 0, \forall l$ contra la alternativa de que todas son iguales a cero. Esta prueba para efectos repetitivos podrá ser importante si las partes del experimento que representan los cuadrados latinos fueron ejecutadas sobre días diferentes y sobre diferentes técnicas, etc.

Definición de cada una de las Componentes de las fórmulas que serán utilizadas :

$T_{i..}$ = es el total de las (r.n) observaciones en todo el i-ésimo renglón.

$T_{.j}$ = es el total de las (r.n) observaciones en la J-ésima columna.

$T_{(K)}$ = es el total de todas las (r.n) observaciones pertenecientes al K-ésimo tratamiento .

$T_{..1}$ = es el total de las (n^2) observaciones pertenecientes a la 1-ésima repetición.

$T_{...}$ = gran total de todas las ($r.n^2$) observaciones.

$$C = \frac{T_{...}^2}{rn^2}$$

$$SC(tr) = \frac{1}{rn} \sum_{k=1}^n T_{(k)}^2 - C$$

$$SCR = \frac{1}{rn} \sum_{i=1}^n T_{i.}^2 - C$$

$$SCC = \frac{1}{rn} \sum_{j=1}^n T_{.j}^2 - C$$

$$SC(Rep) = \frac{1}{n^2} \sum_{l=1}^r T_l^2 - C$$

$$STC = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^r y_{ij(k)l}^2 - C$$

$$SEC = STC - SC(tr) - SCR - SCC - SC(rep)$$

Y se obtiene la siguiente tabla de análisis de variancia :

Fuentes de Variación.	Grados de Libertad.	Suma de Cuadrados.	Cuadrado Promedio.	F
Tratamientos	n - 1	SC (tr)	$MC(tr) = \frac{SC(tr)}{n-1}$	$\frac{MC(tr)}{MEC}$
Reglones	n - 1	SCR	$MCR = \frac{SCR}{n-1}$	$\frac{MCR}{MEC}$
Columnas	n - 1	SCC	$MCC = \frac{SCC}{n-1}$	$\frac{MCC}{MEC}$
Repetición	r - 1	SC (rep)	$MCR(rep) = \frac{SC(rep)}{r-1}$	$\frac{MC(rep)}{MEC}$
Error	(n-1)(rn+r-3)	SEC	$MEC = \frac{SEC}{(n-1)(rn+r-3)}$	
Total	rn ² - 1	STC		

Ejemplo :

Veamos un ejemplo donde se aplica el método de los Cuadrados Latinos.

Supondremos que se desea comprobar tres tratamientos A, B, y C bajo la presencia de otras dos fuentes de variación.

Por ejemplo, los tres tratamientos podrán ser métodos para soldar cobre con soldadura eléctrica y las dos fuentes de variación podrán ser :

- a) los diferentes operadores que hacen la soldadura y
- b) el uso de diferentes flujos de soldadura.

Si tres operadores y tres flujos son considerados, el experimento podrá arreglarse de la siguiente manera :

Repetición I
flujo

	1	2	3
1	A	B	C
2	C	A	B
3	B	C	A

operador

Repetición II
flujo

	1	2	3
1	C	B	A
2	A	C	B
3	B	A	C

Los resultados muestran el número de libras a tensión requeridas para separar las placas soldadas.

Repetición I

	1	2	3
1	14.0	16.5	11.0
2	9.5	17.0	15.0
3	11.0	12.0	13.5

Repetición II

	1	2	3
1	10.0	16.5	13.0
2	12.0	12.0	14.0
3	13.5	18.0	11.5

Resolviendo el problema se tiene :

El total para el primer tratamiento (Método A) :

$$14.0 + 17.0 + 13.5 + 13 + 12.0 + 18.0 = 87.5$$

Y para los otros tratamientos :

$$16.5 + 15.0 + 11.0 + 16.5 + 14.0 + 13.5 = 86.5$$

$$11.0 + 9.5 + 12.0 + 10.0 + 12.0 + 11.5 = 66.0$$

El total para los tres renglones es :

$$81.0 ; 79.5 \text{ y } 79.5$$

Para las tres columnas es :

$$70.0 ; 92.0 \text{ y } 78.0$$

los totales para las dos repeticiones son :

$$119.5 \text{ y } 120.5$$

la gran total es : 240

$$C = \frac{(240)^2}{18} = 3200.0$$

$$SC (tr) = \frac{1}{6} \left[(87.5)^2 + (86.5)^2 + (66.0)^2 \right] - 3200 = 49.1$$

$$SCR = \frac{1}{6} \left[(81.0)^2 + (79.5)^2 + (79.5)^2 \right] - 3200.0 = 0.2$$

$$SCC = \frac{1}{6} \left[(70.0)^2 + (92.0)^2 + (78.0)^2 \right] - 3200.0 = 41.3$$

$$SC (rep) = \frac{1}{9} \left[(119.5)^2 + (120.5)^2 \right] - 3200.00 = 0.01$$

$$STC = \left[(14.0)^2 + (16.5)^2 + \dots + (11.5)^2 \right] - 3200.0 = 104.5$$

$$SEC = 104.5 - 49.1 - 41.3 - 0.2 - 0.01 = 13.8$$

Construyendo la tabla con sus valores respectivos se tiene :

Fuentes de Variación.	Grados de Libertad.	Suma de Cuadrados	Promedio de Cuadrados	F
Métodos	2	49.1	24.6	17.6
Operadores	2	0.2	0.1	0.1
Flujos	2	41.3	20.6	14.7
Repeticiones	1	0.01	0.01	0.01
Error	10	13.8	1.4	
Total	17	104.5		

Comparando los valores de F correspondientes a Métodos y Flujos con el valor de $F_{0.01} = 7.56$ obtenidos con 2 y 10 grados de libertad, vemos que ambos son mayores, lo cual quiere decir que no son consistentes los resultados y que ambas fuentes de variación (Métodos y Flujos) están dando diferencias significativas.

Haciendo la misma comparación de F correspondiente a las repeticiones y operadores con el valor de $F_{0.01}$ obtenido con

2 y 10 grados de libertad y con 1 y 10 grados de libertad respectivamente se observará que no hay diferencia significativa, (es decir que los resultados de los Flujos y Métodos son independientes de las repeticiones).

Utilizando el Criterio de Duncan para los métodos, con $\alpha = 0.01$ se tiene :

Método :	<u>C</u>	<u>B</u>	<u>A</u>
Media :	11.0	14.4	14.6

Se puede observar que el operador (C) produce cordones de soldadura muy débiles.

B I B L I O G R A F I A

- 1.- Bowker and Lieberman. " Engineering Statistics ". 2nd. Edition. 1972. Prentice Hall.
- 2.- Johnson and Leone. " Statistics and Experimental Design in Engineering and the Physical Sciences ". Vol. II. 2nd. Edition. Wiley. 1976.
- 3.- Steel and Torrie. " Principles and Procedures of Statistics ". Mc-Graw-Hill. 1960.
- 4.- Douglas C. Montgomery. " Design and Analysis of Experiments ". John Wiley and Sons. 1976.

Análisis de Variancia por dos variables para más de una observación por celda ($n > 1$).

En el análisis de variancia para dos fuentes de variación la interacción se consideró despreciable. En ese modelo no existió por lo tanto la forma de probar el efecto de la interacción.

Cuando existen $n(n > 1)$ observaciones por combinación de nivel, una prueba de interacción existe. Veremos más adelante que la media esperada de cuadrados para fuentes de interacción es igual a σ^2 más varios términos de efectos de interacción. Nótese que σ^2 es la media esperada de cuadrados de las combinaciones internas. Veamos el modelo matemático de este experimento:

$$y_{ijv} = \mu_{..} + \phi_i + \chi_j + \eta_{ij} + \epsilon_{ijv} ; \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, r \\ j = 1, 2, \dots, c \\ v = 1, 2, \dots, n \end{matrix}$$

Donde :

ϕ_i es el efecto de sumar el i -ésimo renglón de tratamientos prefijados.

χ_j es el efecto de sumar el j -ésimo tratamiento (por columnas) prefijado.

η_{ij} es la interacción prefijada del i -ésimo renglón en la j -ésima columna.

En el modelo de efectos aleatorios :

ϕ_i es el efecto de sumar el i -ésimo tratamiento (renglón), es una variable aleatoria (v.a.) cuya distribución es la del renglón.

Cada ϕ_i es una variable aleatoria normalmente distribuida (v.a. n.d.) con media cero y variancia σ_ϕ^2 .

χ_j es el efecto de sumar el j -ésimo tratamiento por columna. Es una v.a., cuya distribución es la de la columna. Se supone una v.a.n.d. con media cero y variancia σ_χ^2 .

η_{ij} es la interacción del i -ésimo renglón con la j -ésima columna. Es una v.a.. Cada η_{ij} se supone n.d. con media cero y σ_η^2 .

Para el caso en que el modelo sea de efectos mixtos, es decir; en el caso de que una de las fuentes esté sujeta a variaciones aleatorias, la diferencia que existe entre los parámetros del modelo es :

η_{ij} es la interacción del i -ésimo renglón con la j -ésima columna de efectos prefijados. Se supone una v.a.n.d. con media cero y variancia σ_η^2 .

PROCEDIMIENTO COMPUTACIONAL

1° Calcular el total de los renglones.

$$R_1, R_2, \dots, R_r.$$

2° Calcular los totales de las columnas.

$$C_1, C_2, \dots, C_c.$$

3° Calcular los totales dentro de las combinaciones.

$$W_{11}, W_{12}, \dots, W_{rc}.$$

4° Calcular el gran total.

$$T = R_1 + R_2 + \dots + R_r$$

5° Calcular la suma de los cuadrados.

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^c \sum_{v=1}^n X_{ijv}^2 = X_{111}^2 + X_{112}^2 + \dots + X_{rcn}^2$$

6° Calcular.

$$\sum_{j=1}^c C_j^2 / rn = \frac{C_1^2 + C_2^2 + \dots + C_c^2}{rn}$$

7° Calcular.
$$\sum_{i=1}^r R_i^2 / cn = \frac{R_1^2 + R_2^2 + \dots + R_r^2}{cn}$$

8° Calcular.
$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^c W_{ij}^2 / n = \frac{W_{11}^2 + W_{12}^2 + \dots + W_{rc}^2}{n}$$

9° Calcular el factor.
$$c = \frac{T}{rcn}$$

10° Obtener : $SS_4 = (6) - (9)$

11° Obtener : $SS_3 = (7) - (9)$

12° Obtener : $SS_1 = (5) - (8)$

13° Obtener : $SS = (5) - (9)$

14° Obtener : $SS_2 = (13) - (12) - (11) - (10)$

Similarmente a los modelos anteriormente vistos, se muestra en la figura p.91 la tabla de análisis de variancia para dos variables con n observaciones por celda.

Análisis del Modelo de Efectos Prefijados, para Dos Variables y n Observaciones por Celda.

En el caso donde existe una observación por combinación no se consideró la prueba para efectos principales, en este caso se supuso una ausencia de interacciones. Cuando existen n (n > 1) observaciones por combinaciones de nivel, una prueba para interacciones existe y debe realizarse. Haciendo referencia a la tabla A p.95, el promedio de cuadrados esperado para la fuente de combinaciones internas es igual a σ^2 . El promedio de cuadrados esperado para la fuente de interacciones es igual a σ^2 más varios términos de efectos interactivos. Si no existe in-

teracción, es decir : $\eta_{ij} = 0$ para toda i y para toda j, la media de cuadrados esperada para las fuentes de efectos interactivos y combinaciones internas $E(SS_2^*)$ y $E(SS_1^*)$ respectivamente son iguales a σ^2 . Por lo tanto, usando la relación SS_2^*/SS_1^* nos conduce a una regla de decisión para probar el efecto de la interacción. Puede demostrarse que (usando el teorema de partición) SS_2^*/SS_1^* está distribuida como una variable aleatoria F con (r-1)(c-1) y rc(n-1) grados de libertad. Por lo tanto, la hipótesis de que $\eta_{ij} = 0$ para toda i y para toda j será rechazada si :

$$F = \frac{SS_2^*}{SS_1^*} > F_{\alpha} ; (r-1)(c-1), rc(n-1)$$

Ahora bien, si esta hipótesis es rechazada, la prueba de significancia de los efectos de los renglones y de los efectos de las columnas no tiene significado bajo la formulación presente del problema.

Por ejemplo, supongase que un experimento se incluyen hombres y máquinas y hay una interacción entre obreros y máquinas. Supongase que existen efectos de máquinas. Si el efecto de una máquina particular es positiva y la interacción está presente, no se garantiza que esta máquina produzca unidades consistentes. Similarmente, si no existe efectos de máquinas, pero la interacción se presenta por la forma que un hombre particular trabaja mejor sobre una máquina en particular, esto nos lleva a la conclusión de que las máquinas difieren en sus resultados cuando este hombre es el operador.

Consecuentemente si la interacción está presente, las pruebas para los efectos de las columnas y las pruebas para los efectos de los renglones son irrelevantes. En esta situación es posible probar si el conjunto de niveles de un tratamiento difiere para un nivel dado del otro tratamiento, es decir; probar si las máquinas difieren cuando un hombre particular es el operador antes de probar el resultado general de las máquinas difieran sin considerar quién es el operador. Esto es logrado por medio del desarrollo de un análisis de variancia sobre un ni-

vel fijo.

Si existe más de una observación por celda, y se supone antes de desarrollar el experimento que la interacción es cero, la suma de cuadrados de las interacciones y la suma de cuadrados de celdas internas están combinadas en un nuevo renglón, donde:

$$SS'_1 = SS_1 + SS_2$$

y todas las fórmulas resultantes deben sustituirse por SS'_1 y SS_1^* respectivamente. Es decir, sustituir a SS_1 por SS'_1 y a SS_1^* por SS_1^* respectivamente.

Si la hipótesis de que no existe interacción es aceptada (o es supuesta inexistente a priori) , las pruebas para los efectos de renglones y columnas pueden hacerse. Con preferencia a la tabla A la esperanza de la media de cuadrados para la fuente de combinaciones internas es igual a σ^2 . La esperanza de la media de cuadrados para la fuente de efectos de renglones es igual a σ^2 más varios términos de efectos de renglones. Si no existen efectos de renglones, es decir : $\phi = 0$, $i = 1, 2, \dots, r$, la esperanza de la media de cuadrados para las fuentes de los efectos de renglones y las fuentes de combinaciones internas $E(SS_3^*)$ y $E(SS_1^*)$ respectivamente son iguales a σ^2 . Por lo tanto, usando la relación SS_3^*/SS_1^* nos conduce a un procedimiento para probar el efecto de renglones. Esto puede demostrarse, sabiendo que SS_3^*/SS_1^* está distribuida como una variable aleatoria F con $(r-1)$ y $rc(n-1)$ grados de libertad. La hipótesis de que no hay efectos entre renglones, es decir :

$$\phi_1 = \phi_2 = \dots = \phi_r = 0 \text{ será rechazada si:}$$

$$F = SS_3^*/SS_1^* > F_{\alpha} ; (r-1), rc(n-1)$$

Usando un argumento análogo, la hipótesis de que no hay efectos entre columnas; es decir que:

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \dots = \gamma_c = 0 \text{ se rechazará si:}$$

$$F = SS_4^*/SS_1^* > F_{\alpha} ; (c-1), rc(n-1)$$

Si las interacciones no son significativas y el efecto de renglones y/o de columnas son significativas, el procedimiento para comparar efectos de renglones y/o columnas es exactamente el mismo que el usado en ANOVA 2 con una observación por celda.

Ejemplo:

El siguiente experimento fué desarrollado para determinar el efecto del tiempo de fraguado sobre la resistencia del cemento. Tres mazclas de cemento fueron preparadas y seis productos fueron hechos de cada mezcla. Tres productos de cada mezcla fueron probados después de dos días y después de siete, obteniéndose los siguientes resultados:

	Prueba de 2 días	Prueba de 7 días	$\bar{X}_i.$
Mezcla 1	574 564 550	1092 1086 1065	821.8
Mezcla 2	524 573 551	1028 1073 998	791.2
Mezcla 3	576 540 592	1066 1045 1055	812.3
$\bar{X}_{.j}$	560.4	1056.4	

Los productos probados fueron de cinco centímetros cúbicos que produjeron la carga arriba indicada en unidades de diez kilos.

Si el tiempo de fraguado es considerado como efecto fijo (haciendo la suposición de que solo las tres mezclas son de interés), los datos pueden analizarse de acuerdo a este modelo. La interacción no puede ignorarse, ya que puede ser posible que las tres mezclas difieran después de un largo período, o si diferir después de un corto periodo. Esto es equivalente a decir que el efecto de un período adicional es diferente para las tres mezclas; es decir que, la interacción está presente.

Solución :

Siguiendo el procedimiento computacional se tiene :

1° $R_1, R_2, R_3 = 4931, 4747, 4874$

2° $C_1, C_2 = 5044, 9508$

3° $W_{11}, W_{21}, W_{31}, W_{12}, W_{22}, W_{32} = 1688, 1648, 1708, 3243, 3099, 3166$

4° $T = 4931 + 4747 + 4874 = 14552.$

5°
$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 \sum_{r=1}^3 X_{ijr}^2 = (574)^2 + (564)^2 + \dots + (1055)^2 = 12882026$$

6°
$$\sum_{j=1}^2 \frac{C_j^2}{9} = \frac{(5044)^2 + (9508)^2}{9} = 12\ 871\ 556$$

7°
$$\sum_{i=1}^3 \frac{R_i^2}{6} = \frac{(4931)^2 + (4747)^2 + (4874)^2}{6} = 11\ 767\ 441$$

8°
$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 \frac{W_{ij}^2}{3} = \frac{(1688)^2 + (1648)^2 + \dots + (3166)^2}{3} = 12\ 875\ 639$$

9°
$$\frac{T^2}{18} = \frac{211760704}{18} = 11\ 764\ 484$$

10° $SS_4 = 12\ 871\ 556 - 11\ 764\ 484 = 1\ 107\ 072$

11° $SS_3 = 11\ 767\ 441 - 11\ 764\ 484 = 2\ 957$

12° $SS_1 = 12\ 882\ 026 - 12\ 875\ 639 = 6\ 387$

13° $SS = 12\ 882\ 026 - 11\ 764\ 484 = 1\ 117\ 542$

14° $SS_2 = 1\ 117\ 542 - 6\ 387 - 2\ 957 - 1\ 107\ 072 = 1\ 126$

Sustituyendo estos valores en la tabla de ANOVA 2 con n observaciones por celda, se tiene :

TABLA DE ANALISIS DE VARIANCI A PARA DOS VARIABLES CON N OBSERVACIONES POR COMBINACION.

Fuente	Suma de Cuadrados	Grados de Libertad	Media de Cuadrados	Prueba
Entre tiempos	1107072	1	1107072	F= 2979.98
Entre Mezclas	2959	2	1478.5	F= 2.78
Interacción	1126	2	563	F= 1.06
Dentro de las Combinaciones	6387	12	532	
Total	1117542	17	65737.8	

El valor de F en la tabla para la interacción y mezclas serán los valores al 5% crítico para 2 y 12 grados de libertad ; esto es : $F_{0.05;2,12} = 3.89$. Por lo tanto, se concluye que los datos no dan suficiente evidencia de la presencia de interacción o que no hay

ningún efecto de mezclas. Por otro lado, la prueba F es significativa para los tiempos, por lo que se concluye que existe un efecto por los cinco días adicionales de fraguado.

Análisis del Modelo de Efectos Aleatorios,
Dos formas de Clasificación y n Observaciones
por Combinación.

En este modelo, una prueba para la interacción $H_0 ; \sigma_{\eta}^2 = 0$ es la más indicada. Haciendo un análisis similar al del modelo anterior, la hipótesis de que $\sigma_{\eta}^2 = 0$ será rechazada si :

$$F = SS_2^* / SS_1^* > F_{\alpha} ; (r-1) (c-1), rc(n-1)$$

Si la interacción está presente en este modelo, uno puede hablar respecto a la magnitud de efectos principales, digamos σ_{β}^2 . Teniendo a σ_{η}^2 mayor que cero, esto no implica nada respecto a σ_{β}^2 . La prueba para efectos principales, digamos efectos de renglones, es diferente a la empleada en el modelo de efectos fijos. Haciendo referencia a la tabla A, la media esperada de cuadrados para las interacciones es igual a $\sigma^2 + n\sigma_{\eta}^2$. La media esperada de cuadrados para los efectos de renglones es igual a $\sigma^2 + n\sigma_{\beta}^2 + cn\sigma_{\eta}^2$.

Si no existen efectos de renglones, es decir; $\sigma_{\beta}^2 = 0$, la media esperada de cuadrados para efectos de renglones e interacciones $E (SS_3^*)$ y $E (SS_2^*)$ respectivamente son iguales a $\sigma^2 + n\sigma_{\eta}^2$. Por lo tanto, usando el cociente SS_3/SS_2 probaremos la hipótesis $H_0 ; \sigma_{\beta}^2 = 0$ para probar los efectos de renglones.

Esto difiere del modelo de efectos fijos que usa SS_3/SS_1 . Puede demostrarse (usando el teorema de partición) que SS_3/SS_2 está distribuido como una variable aleatoria F con $(r-1)$ y $(r-1)(c-1)$ grados de libertad. Por lo tanto, la hipótesis de que $\sigma_{\beta}^2 = 0$ será rechazada si:

$$F = SS_3^* / SS_2^* > F_{\alpha} ; (r-1) , (r-1) (c-1) .$$

Usando un argumento análogo, la hipótesis de que $\sigma_{\delta}^2 = 0$ se rechazará si :

$$F = SS_4^* / SS_2^* > F_{\alpha} ; (c-1), (r-1)(c-1)$$

Usando la columna de media cuadrada en la tabla A los estimadores de σ_{η}^2 , σ_{β}^2 y σ_{δ}^2 pueden obtenerse. Un estimador de está dado por :

$$(SS_2^* - SS_1^*) / n.$$

Un estimador de σ_{β}^2 está dado por :

$$(SS_3^* - SS_2^*) / cn$$

Un estimador de σ_{δ}^2 es dado por :

$$(SS_4^* - SS_2^*) / rn$$

Si los valores de alguno de estos valores fueran negativos, - el estimador debe considerarse cero.

Análisis de Variancia Para el Modelo de Efectos
Mixtos, dos Formas de Clasificación y n Observa
ciones por Celda.

En el modelo de efectos mixtos, los efectos de renglones se supondrán aleatorios y los efectos de las columnas se supondrán prefijados. En este modelo, también se cuenta con una prueba para la interacción. La interacción η_{ij} es una variable aleatoria donde uno de los efectos, en este caso el de los renglones, es considerado aleatorio. Haciendo referencia a la tabla Ap.95, la media cuadrada esperada para la fuente de combinaciones internas es igual a σ^2 . La media cuadrada esperada para la fuente de interacciones es igual a σ^2 más varios términos de efectos de interacción. Si $\sigma_{\eta}^2 = 0$, la media cuadrada esperada para efectos interactivos y combinaciones internas, $E(SS_2^*)$ y $E(SS_1^*)$ respectivamente son iguales a σ^2 . Por lo tanto, con la relación SS_2 / SS_1 la cual podemos pro-

bar que esta distribuida como una variable aleatoria F con $(r-1)(c-1)$ y $rc(n-1)$ grados de libertad, tomaremos la decisión de rechazar la hipótesis $H_0; \sigma_{\eta}^2 = 0$ si :

$$F = SS_2^* / SS_1^* > F_{\alpha} ; (r-1)(c-1), rc(n-1)$$

En la prueba para efectos principales, se requiere estudiar la tabla A de análisis de variancia. Para los efectos de renglones (efectos aleatorios), la media esperada cuadrada $E(SS_3^*)$ es igual a $\sigma^2 + n\sigma_{\beta}^2$. Entonces la prueba lógica es usar la relación SS_3^* / SS_1^* tiene una distribución F con $(r-1)$ y $rc(n-1)$ grados de libertad. La hipótesis de que $\sigma_{\beta}^2 = 0$ será rechazada si :

$$F = SS_3^* / SS_1^* > F_{\alpha} ; (r-1), rc(n-1)$$

Un estimador de σ_{β}^2 es obtenido de :

$$(SS_3^* - SS_1^*) / nc$$

Para efectos de columnas el procedimiento es diferente. La media esperada de cuadrados para las columnas, $E(SS_4^*)$ es igual a :

$$\sigma^2 + n\sigma_{\eta}^2 + \frac{m}{c-1} \sum_{j=1}^c \gamma_j$$

La media cuadrada esperada para el término de interacción $E(SS_2^*)$ es igual a $\sigma^2 + n\sigma_{\eta}^2$. La prueba se basa en la relación SS_4^* / SS_2^* , la cual se supone que tiene una distribución F con $(c-1)$ y $(r-1)(c-1)$ grados de libertad. La hipótesis H_0 ; en la que $\gamma_1 = \gamma_2 = \dots = \gamma_c = 0$ será rechazada si :

$$F = SS_4^* / SS_2^* > F_{\alpha} ; (c-1), (r-1)(c-1)$$

Con todo lo expuesto en este capítulo, solo queremos dar un panorama general de los métodos cuantitativos, con sus respectivas restricciones y suposiciones que hay que considerar en el proceso de evaluación de un experimento de tipo estadístico.

TABLA DE ANOVA 2. ($n > 1$) OBSERVACIONES POR COMBINACION

FUENTE	SUMA DE CUADRADOS	GRADOS DE LIBERTAD	MEDIA DE CUADRADOS	MEDIA ESPERADA DE CUADRADOS PARA EL MODELO DE EFECTOS PREFIJADOS	MEDIA ESPERADA DE CUADRADOS PARA EL MODELO DE EFECTOS ALEATORIOS	MEDIA ESPERADA DE CUADRADOS PARA EL MODELO DE EFECTOS MIXTOS
COLUMNAS	$SS_4 = rn \sum_{j=1}^c (\bar{X}_{.j} - \bar{X}_{...})^2$	$C - 1$	$SS_4^* = SS_4 / (c-1)$	$\sigma^2 + \frac{rn}{c-1} \sum_{j=1}^c \gamma_j^2$	$\sigma^2 + n\sigma_\eta^2 + m\sigma_\gamma^2$	$\sigma^2 + n\sigma_\eta^2 + \frac{rn}{c-1} \sum_{j=1}^c \gamma_j^2$
REGLONES	$SS_3 = cn \sum_{i=1}^r (\bar{X}_{i..} - \bar{X}_{...})^2$	$r - 1$	$SS_3^* = SS_3 / (r-1)$	$\sigma^2 + \frac{cn}{r-1} \sum_{i=1}^r \varphi_i^2$	$\sigma^2 + n\sigma_\eta^2 + cn\sigma_\varphi^2$	$\sigma^2 + nc\sigma_\varphi^2$
INTERACCIONES	$SS_2 = n \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^c (\bar{X}_{ij.} - \bar{X}_{i..} - \bar{X}_{.j} + \bar{X}_{...})^2$	$(r-1)(c-1)$	$SS_2^* = SS_2 / (r-1)(c-1)$	$\sigma^2 + \frac{n}{(r-1)(c-1)} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^c \eta_{ij}^2$	$\sigma^2 + n\sigma_\eta^2$	$\sigma^2 + n\sigma_\eta^2$
DENTRO DE LAS COMBINACIONES	$SS_1 = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^c \sum_{v=1}^n (X_{ijv} - \bar{X}_{ij.})^2$	$rc(n-1)$	$SS_1^* = SS_1 / rc(n-1)$	σ^2	σ^2	σ^2
TOTAL	$SS = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^c \sum_{v=1}^n (X_{ijv} - \bar{X}_{...})^2$	$rcn - 1$	$SS^* = SS / (rcn-1)$	-	-	-

$$\bar{X}_{.j} = \frac{\sum_{i=1}^r \sum_{v=1}^n X_{ijv}}{rn}$$

$$\bar{X}_{i..} = \frac{\sum_{j=1}^c \sum_{v=1}^n X_{ijv}}{cn}$$

$$\bar{X}_{ij.} = \frac{\sum_{v=1}^n X_{ijv}}{n}$$

$$\bar{X}_{...} = \frac{\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^c \sum_{v=1}^n X_{ijv}}{rcn}$$

Table 5
VALUES OF χ^2_{α}

ν	$\alpha = 0.995$	$\alpha = 0.99$	$\alpha = 0.975$	$\alpha = 0.95$	$\alpha = 0.90$	$\alpha = 0.85$	$\alpha = 0.80$	$\alpha = 0.75$	$\alpha = 0.70$	$\alpha = 0.65$	$\alpha = 0.60$	$\alpha = 0.55$	$\alpha = 0.50$	$\alpha = 0.45$	$\alpha = 0.40$	$\alpha = 0.35$	$\alpha = 0.30$	$\alpha = 0.25$	$\alpha = 0.20$	$\alpha = 0.15$	$\alpha = 0.10$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.025$	$\alpha = 0.01$	$\alpha = 0.005$	ν		
1	0.0000393	0.000157	0.000982	0.00393	3.841	5.024	6.635	7.879																			1	
2	0.0100	0.0201	0.0506	0.103	5.991	7.378	9.210	10.597																				2
3	0.0717	0.115	0.216	0.352	7.815	9.348	11.345	12.838																				3
4	0.207	0.297	0.484	0.711	9.488	11.143	13.277	14.860																				4
5	0.412	0.554	0.831	1.145	11.070	12.832	15.086	16.750																				5
6	0.676	0.872	1.237	1.635	12.592	14.449	16.812	18.548																				6
7	0.989	1.239	1.690	2.167	14.067	16.013	18.475	20.278																				7
8	1.344	1.646	2.180	2.733	15.507	17.535	20.090	21.955																				8
9	1.735	2.088	2.700	3.325	16.919	19.023	21.666	23.589																				9
10	2.156	2.558	3.247	3.940	18.307	20.483	23.209	25.188																				10
11	2.603	3.053	3.816	4.575	19.675	21.920	24.725	26.757																				11
12	3.074	3.571	4.404	5.226	21.026	23.337	26.217	28.300																				12
13	3.565	4.107	5.009	5.892	22.362	24.736	27.688	29.819																				13
14	4.075	4.660	5.629	6.571	23.685	26.119	29.141	31.319																				14
15	4.601	5.229	6.262	7.261	24.996	27.488	30.578	32.801																				15
16	5.145	5.812	6.908	7.962	26.296	28.845	32.000	34.267																				16
17	5.697	6.408	7.564	8.672	27.587	30.191	33.409	35.718																				17
18	6.265	7.015	8.231	9.390	28.869	31.526	34.805	37.156																				18
19	6.844	7.633	8.907	10.117	30.144	32.852	36.191	38.582																				19
20	7.434	8.260	9.591	10.851	31.410	34.170	37.566	39.997																				20
21	8.034	8.897	10.283	11.591	32.671	35.479	38.932	41.401																				21
22	8.643	9.542	10.982	12.338	33.924	36.781	40.289	42.796																				22
23	9.260	10.196	11.689	13.091	35.172	38.076	41.638	44.181																				23
24	9.886	10.856	12.401	13.844	36.415	39.364	42.980	45.558																				24
25	10.520	11.524	13.120	14.611	37.652	40.646	44.314	46.928																				25
26	11.160	12.198	13.844	15.379	38.885	41.923	45.642	48.290																				26
27	11.808	12.879	14.573	16.151	40.113	43.194	46.963	49.645																				27
28	12.461	13.565	15.306	16.928	41.337	44.461	48.278	50.993																				28
29	13.121	14.256	16.047	17.700	42.557	45.772	49.548	52.336																				29
30	13.787	14.953	16.791	18.493	43.773	46.979	50.892	53.672																				30

*This table is based on Table 8 of *Biometrika Tables for Statisticians*, Vol. 1, by permission of the *Biometrika* trustees.

488. Statistical Tables

Table 4
VALUES OF t_{α}

ν	$\alpha = 0.10$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.025$	$\alpha = 0.01$	$\alpha = 0.005$	ν
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	1
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	2
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	3
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	4
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	6
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	7
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	8
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	9
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	10
11	1.363	1.796	2.201	2.710	3.106	11
12	1.356	1.782	2.179	2.661	3.055	12
13	1.350	1.771	2.160	2.620	3.012	13
14	1.345	1.761	2.145	2.584	2.977	14
15	1.341	1.753	2.131	2.562	2.947	15
16	1.337	1.746	2.120	2.543	2.921	16
17	1.333	1.740	2.110	2.527	2.898	17
18	1.330	1.734	2.101	2.512	2.878	18
19	1.328	1.729	2.093	2.500	2.861	19
20	1.325	1.725	2.086	2.490	2.845	20
21	1.323	1.721	2.080	2.481	2.831	21
22	1.321	1.717	2.074	2.474	2.819	22
23	1.319	1.714	2.069	2.468	2.807	23
24	1.318	1.711	2.064	2.462	2.797	24
25	1.316	1.708	2.060	2.458	2.787	25
26	1.315	1.706	2.056	2.454	2.779	26
27	1.314	1.703	2.052	2.451	2.771	27
28	1.313	1.701	2.048	2.447	2.763	28
29	1.311	1.699	2.045	2.442	2.756	29
inf	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	inf

*This table is abridged from Table IV of R. A. Fisher, *Statistical Methods for Research Workers*, published by Oliver and Boyd, Ltd., Edinburgh, by permission of the author and publishers.

Table 6 (a)
VALUES OF F_{α}

v_2 = Degrees of freedom denominator	v_1 = Degrees of freedom for numerator																			
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞	
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	243	244	246	248	249	250	251	252	253	254	
2	18.50	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.74	8.70	8.66	8.64	8.62	8.59	8.57	8.55	8.53	
3	10.10	6.94	6.59	6.39	6.28	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72	5.69	5.66	5.63	
4	7.71	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.63	4.56	4.53	4.50	4.46	4.43	4.40	4.37	
5	6.61	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.00	3.94	3.87	3.84	3.81	3.77	3.74	3.70	3.67	
6	5.99	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.72	3.68	3.64	3.57	3.51	3.44	3.41	3.38	3.34	3.30	3.27	3.23	
7	5.59	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.28	3.22	3.15	3.12	3.08	3.04	3.01	2.97	2.93	
8	5.32	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.07	3.01	2.94	2.90	2.86	2.83	2.79	2.75	2.71	
9	5.12	4.10	3.70	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91	2.85	2.77	2.74	2.70	2.66	2.62	2.58	2.54	
10	4.96	4.00	3.60	3.38	3.23	3.12	3.04	2.97	2.92	2.88	2.81	2.75	2.67	2.64	2.60	2.56	2.52	2.49	2.45	
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.92	2.85	2.80	2.75	2.69	2.62	2.54	2.51	2.47	2.43	2.39	2.35	2.30	
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.60	2.53	2.46	2.42	2.38	2.34	2.30	2.27	2.22	
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.54	2.48	2.41	2.37	2.33	2.29	2.25	2.21	2.15	
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.48	2.42	2.35	2.31	2.27	2.23	2.20	2.16	2.11	
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.42	2.36	2.29	2.25	2.21	2.17	2.14	2.10	2.05	
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.80	2.70	2.62	2.55	2.50	2.45	2.38	2.32	2.25	2.21	2.17	2.13	2.10	2.06	2.01	
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.34	2.27	2.19	2.15	2.11	2.07	2.03	1.99	1.94	
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.31	2.24	2.16	2.11	2.07	2.03	1.99	1.95	1.90	
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.28	2.20	2.12	2.08	2.04	1.99	1.95	1.90	1.84	
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.25	2.18	2.10	2.05	2.01	1.96	1.92	1.87	1.81	
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.29	2.22	2.15	2.07	2.02	1.98	1.94	1.89	1.84	1.78	
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	2.20	2.13	2.05	2.00	1.96	1.91	1.86	1.81	1.75	
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.18	2.11	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.79	1.73	
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.16	2.09	2.01	1.96	1.92	1.87	1.82	1.77	1.71	
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.09	2.01	1.93	1.89	1.84	1.79	1.74	1.68	1.62	
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.00	1.92	1.84	1.79	1.74	1.69	1.64	1.58	1.52	
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.26	2.17	2.10	2.04	1.99	1.92	1.84	1.75	1.70	1.65	1.59	1.53	1.47	1.39	
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.18	2.09	2.02	1.96	1.91	1.83	1.75	1.66	1.61	1.55	1.50	1.43	1.35	1.25	
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.75	1.67	1.57	1.52	1.46	1.39	1.32	1.22	1.00	

*This table is reproduced from M. Merrington and C. M. Thompson, "Tables of percentage points of the inverted beta (F') distribution," *Biometrika*, Vol. 33 (1943), by permission of the Biometrika Trustees.

Table 6 (b)
VALUES OF F_{α}

v_2 = Degrees of freedom denominator	v_1 = Degrees of freedom for numerator																			
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞	
1	4.053	5.000	5.403	5.623	5.764	5.859	5.928	5.982	6.023	6.056	6.086	6.117	6.209	6.235	6.261	6.287	6.313	6.339	6.366	
2	98.50	99.00	99.20	99.20	99.20	99.20	99.40	99.40	99.40	99.40	99.40	99.40	99.40	99.50	99.50	99.50	99.50	99.50	99.50	
3	24.10	29.50	28.70	28.70	28.20	27.90	27.70	27.50	27.20	27.20	27.20	27.20	27.20	27.20	27.20	27.20	27.20	27.20	27.20	
4	21.20	18.00	16.70	16.00	15.50	15.20	15.00	14.80	14.50	14.50	14.50	14.50	14.50	14.50	14.50	14.50	14.50	14.50	14.50	
5	16.30	13.30	12.10	11.40	11.00	10.70	10.50	10.20	10.20	10.10	10.10	10.10	10.10	10.10	10.10	10.10	10.10	10.10	10.10	
6	13.70	10.90	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	7.98	7.98	7.87	7.72	7.58	7.40	7.31	7.23	7.14	7.06	6.97	6.88	
7	12.20	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.98	6.84	6.72	6.62	6.47	6.31	6.16	6.07	5.98	5.91	5.82	5.74	5.65	
8	11.30	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81	5.67	5.52	5.36	5.28	5.20	5.12	5.03	4.95	4.83	
9	10.60	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26	5.11	4.96	4.81	4.73	4.65	4.57	4.48	4.40	4.31	
10	10.00	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94	4.85	4.71	4.56	4.41	4.33	4.25	4.17	4.08	4.00	3.91	
11	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.62	4.54	4.40	4.25	4.10	4.02	3.94	3.86	3.78	3.69	3.60	
12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.48	4.36	4.28	4.16	4.01	3.86	3.78	3.70	3.62	3.54	3.45	3.36	
13	9.07	6.70	5.74	5.20	4.85	4.62	4.44	4.28	4.16	4.08	3.96	3.82	3.66	3.58	3.50	3.42	3.34	3.25	3.16	
14	8.86	6.50	5.54	5.00	4.65	4.42	4.24	4.08	3.96	3.88	3.76	3.62	3.46	3.38	3.30	3.22	3.14	3.05	2.96	
15	8.68	6.36	5.42	4.88	4.53	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80	3.67	3.53	3.37	3.29	3.21	3.13	3.05	2.96	2.87	
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78	3.69	3.55	3.41	3.26	3.18	3.10	3.02	2.93	2.84	2.75	
17	8.40	6.11	5.19	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68	3.59	3.46	3.31	3.16	3.08	3.00	2.92	2.83	2.74	2.65	
18	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60	3.51	3.37	3.23	3.08	3.00	2.92	2.84	2.75	2.66	2.57	
19	8.19	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52	3.43	3.29	3.15	3.00	2.92	2.84	2.76	2.67	2.58	2.49	
20	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46	3.37	3.23	3.09	2.94	2.86	2.78	2.69	2.60	2.51	2.41	
21	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.40	3.31	3.17	3.03	2.88	2.80	2.72	2.64	2.55	2.46	2.36	
22	7.95	5.72	4.82	4.32	3.99	3.76	3.59	3.45	3.33	3.26	3.12	2.98	2.83	2.75	2.67	2.58	2.50	2.40	2.31	
23	7.89	5.66	4.76	4.26	3.94	3.70	3.54	3.41	3.30	3.20	3.07	2.93	2.78	2.70	2.62	2.54	2.45	2.35	2.26	
24	7.83	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26	3.15	3.03	2.89	2.74	2.66	2.58	2.49	2.40	2.31	2.21	
25	7.77	5.57	4.68	4.18	3.86	3.63	3.46	3.32	3.22	3.11	2.99	2.85	2.70	2.62	2.53	2.45	2.36	2.27	2.17	
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	2.96	2.84	2.70	2.55	2.47	2.39	2.30	2.21	2.11	2.01	
40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89	2.80	2.68	2.52	2.37	2.29	2.20	2.11	2.02	1.92	1.80	
60	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63	2.54	2.42	2.27	2.19	2.10	2.01	1.94	1.84	1.70	
120	6.85	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.79	2.66	2.56	2.47	2.38	2.26	2.11	2.03	1.94	1.86	1.77	1.67	1.50	
∞	6.63	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41	2.32	2.24	2.14	2.04	1.95	1.87	1.79	1.71	1.62	1.40	

*This table is reproduced from M. Merrington and C. M. Thompson, "Tables of percentage points of the inverted beta (F') distribution," *Biometrika*, Vol. 31 (1941), by permission of the Biometrika Trustees.

503 Statistical Tables

Table 12 (b)
VALUES OF r_p FOR $\alpha = 0.01^*$

d.f. \ P	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	90.02								
2	14.04	14.04							
3	8.26	8.32	8.32						
4	6.51	6.68	6.74	6.76					
5	5.70	5.90	5.99	6.04	6.07				
6	5.24	5.44	5.55	5.62	5.66	5.68			
7	4.95	5.15	5.26	5.33	5.38	5.42	5.44		
8	4.74	4.94	5.06	5.13	5.19	5.23	5.26	5.28	
9	4.60	4.79	4.91	4.99	5.04	5.09	5.12	5.14	5.16
10	4.48	4.67	4.79	4.88	4.93	4.98	5.01	5.04	5.06
11	4.39	4.58	4.70	4.78	4.84	4.89	4.92	4.95	4.97
12	4.32	4.50	4.62	4.71	4.77	4.81	4.85	4.88	4.91
13	4.26	4.44	4.56	4.64	4.71	4.75	4.79	4.82	4.85
14	4.21	4.39	4.51	4.59	4.66	4.70	4.74	4.77	4.80
15	4.17	4.34	4.46	4.55	4.61	4.66	4.70	4.73	4.76
16	4.13	4.31	4.43	4.51	4.57	4.62	4.66	4.70	4.72
17	4.10	4.27	4.39	4.47	4.54	4.59	4.63	4.66	4.69
18	4.07	4.25	4.36	4.45	4.51	4.56	4.60	4.64	4.66
19	4.05	4.22	4.33	4.42	4.48	4.53	4.57	4.61	4.64
20	4.02	4.20	4.31	4.40	4.46	4.51	4.55	4.59	4.62
24	3.96	4.13	4.24	4.32	4.39	4.44	4.48	4.52	4.55
30	3.89	4.06	4.17	4.25	4.31	4.36	4.41	4.45	4.48
40	3.82	3.99	4.10	4.18	4.24	4.29	4.33	4.38	4.41
60	3.76	3.92	4.03	4.11	4.18	4.23	4.27	4.31	4.34
120	3.70	3.86	3.97	4.04	4.11	4.16	4.20	4.24	4.27
∞	3.64	3.80	3.90	3.98	4.04	4.09	4.13	4.17	4.21

*This table is reproduced from H. L. Harter, "Critical values for Duncan's new multiple range test." It contains some corrected values to replace those given by D. B. Duncan in "Multiple Range and Multiple F Tests," *Biometrics*, Vol. 11 (1955). The above table is reproduced with the permission of the author and the editor of *Biometrics*.

502 Statistical Tables

Table 12 (b)
VALUES OF r_p FOR $\alpha = 0.05^*$

d.f. \ P	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	17.97								
2	6.09	6.09							
3	4.50	4.52	4.52						
4	3.93	4.01	4.03	4.03					
5	3.64	3.75	3.80	3.81	3.81				
6	3.46	3.59	3.65	3.68	3.69	3.70			
7	3.34	3.48	3.55	3.59	3.61	3.62	3.63		
8	3.26	3.40	3.48	3.52	3.55	3.57	3.57	3.58	
9	3.20	3.34	3.42	3.47	3.50	3.52	3.54	3.54	3.55
10	3.15	3.29	3.38	3.43	3.47	3.49	3.51	3.52	3.52
11	3.11	3.26	3.34	3.40	3.44	3.46	3.48	3.49	3.50
12	3.08	3.23	3.31	3.37	3.41	3.44	3.46	3.47	3.48
13	3.06	3.20	3.29	3.35	3.39	3.42	3.46	3.46	3.47
14	3.03	3.18	3.27	3.33	3.37	3.40	3.43	3.44	3.46
15	3.01	3.16	3.25	3.31	3.36	3.39	3.41	3.43	3.45
16	3.00	3.14	3.23	3.30	3.34	3.38	3.40	3.42	3.44
17	2.98	3.13	3.22	3.28	3.33	3.37	3.39	3.41	3.43
18	2.97	3.12	3.21	3.27	3.32	3.36	3.38	3.40	3.42
19	2.96	3.11	3.20	3.26	3.31	3.35	3.38	3.40	3.41
20	2.95	3.10	3.19	3.25	3.30	3.34	3.37	3.39	3.41
24	2.92	3.07	3.16	3.23	3.28	3.31	3.35	3.37	3.39
30	2.89	3.03	3.13	3.20	3.25	3.29	3.32	3.35	3.37
40	2.86	3.01	3.10	3.17	3.22	3.27	3.30	3.33	3.35
60	2.83	2.98	3.07	3.14	3.20	3.24	3.28	3.31	3.33
120	2.80	2.95	3.04	3.12	3.17	3.22	3.25	3.29	3.31
∞	2.77	2.92	3.02	3.09	3.15	3.19	3.23	3.27	3.29

*This table is reproduced from H. L. Harter, "Critical values for Duncan's new multiple range test." It contains some corrected values to replace those given by D. B. Duncan in "Multiple Range and Multiple F Tests," *Biometrics*, Vol. 11 (1955). The above table is reproduced with the permission of the author and the editor of *Biometrics*.

B I B L I O G R A F I A

- 1.- Bowker and Lieberman. " Engineering Statistics ".
2nd. Edition. 1972. Prentice Hall.
- 2.- Johnson and Leone. " Statistics and Experimental Design
in Engineering and the Physical Sciences ". Vol. II.
2nd. Edition. Wiley. 1976.
- 3.- Steel and Torrie. " Principles and Procedures of
Statistics ". Mg-Graw-Hill. 1960.
- 4.- Douglas C. Montgomery. " Design and Analysis of
Experiments ". John Wiley and Sons. 1976.

CONTROL ESTADISTICO DE CALIDAD

INTRODUCCION

La calidad en un producto se refiere, por lo general, a diversas características, tales como: funcionamiento, apariencia y duración.

Es conveniente pensar que la calidad está formada por un conjunto de atributos que hacen deseable un producto a un cliente.

En los sistemas de control de calidad, el objetivo principal se puede mencionar como:

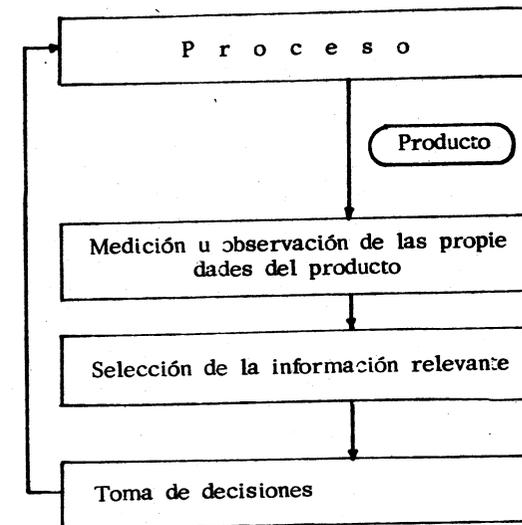
Conservar los atributos de un producto o de un servicio cerca de las especificaciones de diseño.

Para cumplir con este objetivo, se requiere lo siguiente:

- 1). Medición de las características del producto.
Que puede ser mediante variables numéricas o sólo atributos.
- 2). Selección de la información significativa.
- 3). Definición y establecimiento de canales de información entre las partes relevantes de la organización.

- 4). Toma de decisiones sobre la base de la información de calidad obtenida.

Estas funciones se pueden caracterizar como sigue:



El problema de la calidad se puede examinar desde diversos puntos de vista:

- a). La planeación de la calidad en el diseño del producto.
- b). El control de calidad en las operaciones de manufactura.

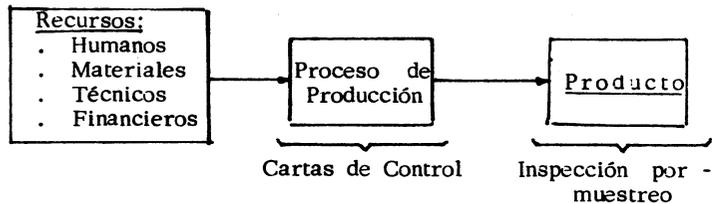
Otra forma de examinarlo es distinguir y analizar:

- a). El proceso de producción
- b). El producto resultado de ese proceso

En relación con el proceso de producción, el control estadístico de calidad investiga la estabilidad estadística del proceso con la ayuda de las cartas de control y, en lo que se refiere al producto, mediante la inspección -- por muestreo se prueba si el producto se ajusta a las especificaciones.

CARTAS DE CONTROL

Notas



JOEL O. AGUIRRE R.

Febrero de 1978

INTRODUCCION

Los problemas relacionados con el control de la calidad de un producto manufacturado se estudian estadísticamente en dos partes, -- con la primera que es el control en el proceso, se pueden detectar cambios en el funcionamiento del proceso de manufactura y tomar las decisiones apropiadas.

La segunda parte, llamada muestreo de aceptación, tiene por objeto vigilar la calidad de artículos manufacturados, abastecidos en lotes, por el fabricante a un consumidor. El problema, es decir, si un lote debe ser aceptado o rechazado sobre la base de una muestra seleccionada del lote en forma aleatoria.

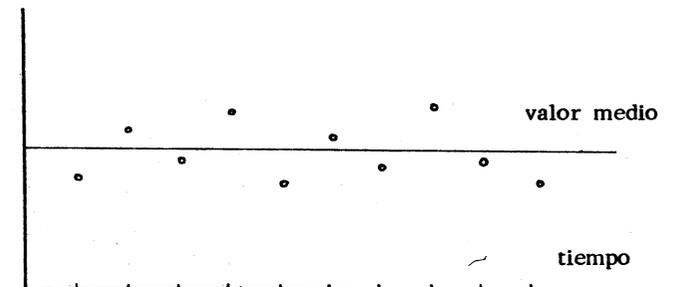
En lo que se refiere al control en el proceso, éste se encuentra -- asociado al problema de mantener un proceso de manufactura en un nivel especificado estable.

Estas técnicas han tenido una amplia aplicación en la industria y -- sus funciones principales son las siguientes:

- 1) Detectar cambios en el funcionamiento del proceso.
- 2) Encontrar la causa de esos cambios.
- 3) Hacer los ajustes apropiados al proceso.

La herramienta más comunmente utilizada para detectar cambios -- en un proceso, es la carta de control o carta Shewhart. Esta carta, es la representación gráfica de una variable que caracteriza la calidad de un proceso contra el tiempo.

Característica de calidad



Carta de Control

VARIACION

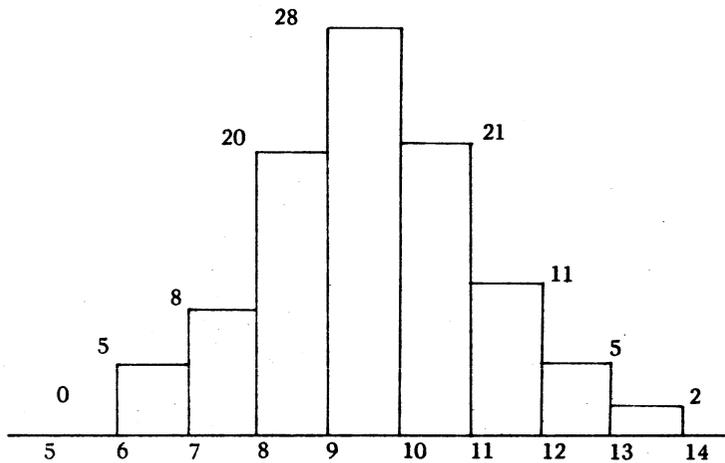
El primer paso para el entendimiento del Control Estadístico de Calidad, es reconocer la presencia de variación de pieza a pieza. --- Como ejemplo se puede citar: 2 pernos producidos en la misma --- hornada. A primera vista lucen semejantes, sin embargo, pueden diferir ligeramente en cada dimensión, lo cual puede quedar de manifiesto en pruebas experimentales.

La variación, pieza a pieza, de un artículo producido en una máquina, sigue un modelo que puede apreciarse después de medir los --

artículos producidos en una hornada.

Si se prueban 100 pernos, al medir el diámetro de cada pieza se considera que es la característica de calidad importante para tener bajo control.

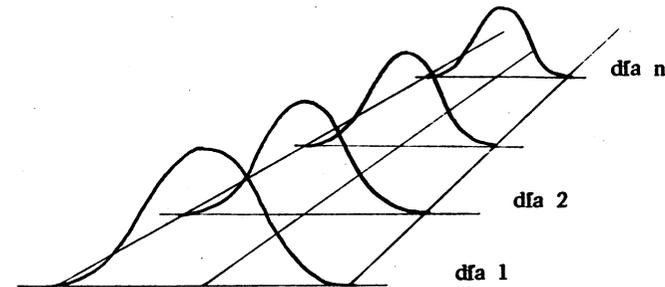
La variación en los pernos de esta característica de calidad, el diámetro, se puede apreciar en un histograma con un adecuado número de intervalos de clase.



Las variaciones que se presentan, son debidas a un buen número de pequeñas causas que afectan cada pieza separadamente y que llevan a un modelo definido para todas las piezas de una hornada.

Este modelo de variación siempre existe para cada proceso de manufactura, siendo importante considerar que se repetirá en ausencia de cambios fundamentales.

Modelo de variación repetitivo :



Una vez que el modelo permanezca sin cambios, puede tenerse seguridad de que ninguna otra nueva causa de variación afecta al proceso de producción.

Sin cambios en causas aleatorias, tal modelo se repetirá hora a hora, día a día, mes a mes, dentro de ciertos límites predecibles, de aquí que se pueda concluir que una buena producción se obtiene cuando el modelo se repite dentro de ciertos límites establecidos para cierta característica de calidad de un producto.

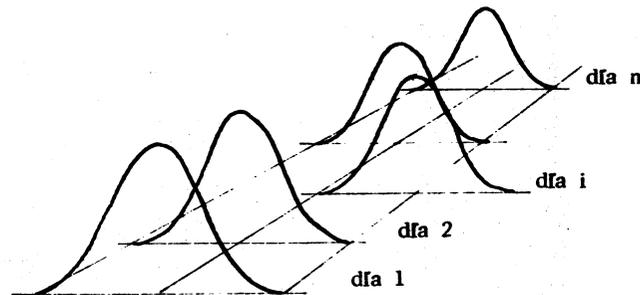
Quando la dimensión en estudio cae dentro de los límites establecidos, se tendrá la seguridad de que la producción tiene calidad

aceptable y no será necesario buscar la aceptación de cada una de las piezas de manera individual.

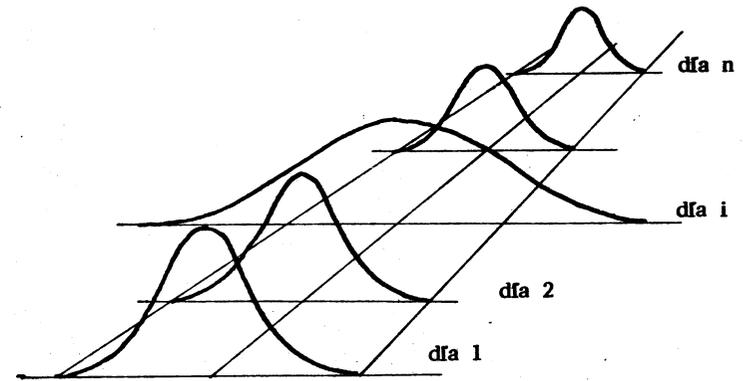
Se dice que el proceso está bajo control dentro de dichos límites.

Una separación del modelo establecido es señal de una situación anormal, ésto es, que ha ocurrido un cambio fundamental que está afectando la calidad de la producción, o sea una causa asignable de variación que debe ser encontrada y eliminada.

Algún cambio básico en las condiciones de trabajo, como el deterioro de herramientas o inestabilidad en las características de las materias primas, pueden ser la causa de cambios en el modelo de distribución. En estos casos, la calidad desmerece y puede existir desperdicio de artículos producidos por inútiles o necesidad de reprocesar el material. Con las cartas de control es posible detectar esos problemas casi instantáneamente y volver de nuevo el proceso a un estado de control.



cambios en valores medios

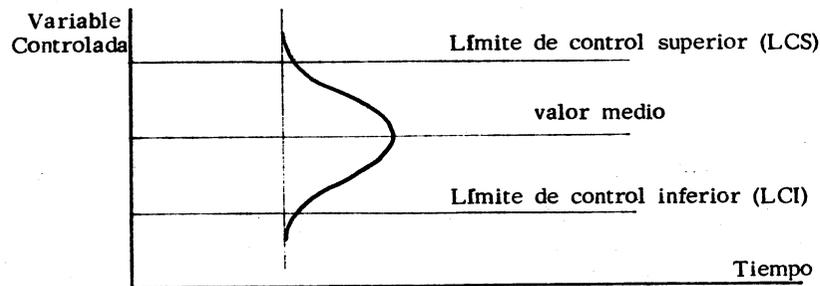


Incremento en la dispersión

ORIGENES

El descubrimiento y desarrollo de las cartas de control, fue realizado en 1924 por un joven físico de los Laboratorios Bell en los Estados Unidos, Walter A. Shewhart, quien llegó a la conclusión que era deseable y posible, definir límites a las variaciones naturales de cualquier proceso de producción, por lo que las fluctuaciones dentro de esos límites serían explicadas por causas aleatorias, con la salvedad de que cualquier variación fuera de dichos límites, indicaría un cambio en el proceso.

Una vez que se establece el modelo de distribución de causas aleatorias, es posible definir ciertas características estadísticas, tales como un valor medio y un intervalo de confianza que se repite en el tiempo, lo que permite constituir una banda de confianza que se define por los denominados Límite de Control Superior (LCS) y Límite de Control Inferior (LCI).



AMPLITUD DE LOS LIMITES DE CONTROL

El establecimiento de los límites de control, está definido en la práctica industrial por el balance entre los más conocidos tipos de errores.

El error tipo I, cuando se concluye que una muestra difiere de las otras y en realidad toda la discrepancia es debida a causas aleatorias, en otras palabras, una observación sale de los límites cuando el proceso está bajo control.

Este tipo de error lleva a buscar una causa no aleatoria, o sea, una causa asignable cuando ninguna está presente.

Se incurre en el error tipo II cuando no se nota la presencia de una causa asignable, esto es, que el proceso salga de control y todo indique en la carta, un estado bajo control.

Quando los límites de control se encuentran relativamente apartados en la distribución de la estadística en cuestión ($\pm 4\sigma$ de la media), la investigación de puntos fuera de la banda de control casi nunca caería en el error de buscar causas asignables cuando ninguna está presente, pero a expensas de no notar, con frecuencia, la presencia de causas asignables que deberían encontrarse.

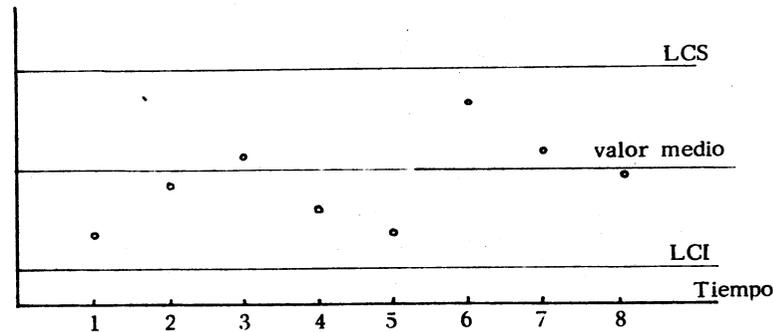
Por otro lado, si los límites de control fuesen muy estrechos ---

($\pm 2\sigma$ de la media), con frecuencia se notarfa la presencia de alguna causa asignable, ocasionando búsquedas de causas asignables cuando no existen.

Numerosos experimentos y aplicaciones en todo tipo de industrias han demostrado que establecer los límites de control a $\pm 3\sigma$ permiten lograr un buen balance entre los dos tipos de errores.

Una vez que se ha definido el modelo de causas aleatorias y por tanto se repiten en el tiempo sus principales características, valor medio y límites de control, es posible graficar observaciones de la variable en estudio a partir de muestras secuenciales y así conocer la evolución del proceso.

Variable Controlada



AXIOMAS DE CONTROL DE CALIDAD

Los conceptos anteriores y múltiples experiencias, han llevado a Rice a plantear que el éxito en el uso de las cartas de control, está condicionado al apego a ciertos principios fundamentales que ha llamado axiomas.

AXIOMA I

Las cartas de control son aplicables en cualquier lugar donde se elaboran artículos en cantidades; de acuerdo con esto, se menciona que estas técnicas pueden ser usadas en aquellos lugares donde se producen más de dos artículos similares, considerando además, que los principios estadísticos de las cartas de control son válidas universalmente, siendo raro encontrar alguna operación donde no sea aplicable este tipo de análisis.

AXIOMA II

La variabilidad existe en cada operación repetitiva. Este punto conviene remarcarlo aunque parezca ocioso, dados los conceptos previamente anotados.

Usualmente, las diferencias entre artículos similares son medibles, esta magnitud de las diferencias, con las cartas de control, permi-

tirá verificar la variación esperada en un proceso.

AXIOMA III

La calidad es un atributo del producto y no se puede introducir mediante la inspección.

Existe un principio elemental que indica que lo importante no es la cantidad de producto sino la cantidad de producto aceptable con las cartas de control, la administración de un proceso de producción — puede tener una clara y rápida capacidad de reacción ante variaciones anormales en diversos niveles, que de otra forma, en un proceso fuera de control se producirían artículos defectuosos que serían percibidos y rechazados hasta la inspección final.

AXIOMA IV

Un proceso bajo control usualmente no está instituido. Cuando se ha establecido un modelo de variación de causas aleatorias en un proceso, se dice que está bajo control. Cuando se aplica inicialmente una carta de control a un proceso, es raro que la operación se encuentre bajo control. Con la aplicación de métodos de inspección y mejoramiento de los registros, usualmente se localizan causas asignables antes ignoradas. Estas causas se encuentran presentes en la mayoría de operaciones de manufactura, pero la au-

sencia de cartas de control impide su identificación.

AXIOMA V

Un estado bajo control debe establecerse a un nivel satisfactorio antes de lograr una máxima eficiencia en la operación.

El uso de las cartas de control puede reducir la variabilidad hasta un punto que define un estado bajo control. Eventualmente y a pesar del control, puede no obtenerse un producto satisfactorio, lo cual se puede interpretar como la necesidad de investigar y actuar en otros aspectos ambientales, sociales o culturales que influyen en el proceso.

CARTAS DE CONTROL POR VARIABLES

La recolección de datos para la construcción de estas cartas supone trabajar con una muestra de tamaño n tomada a intervalos regulares.

El valor observado de cada espécimen en cada muestra se representa con X_{ij} donde $i = 1, 2, \dots, K$ es el número de muestras obtenidas del proceso y $j = 1, 2, \dots, n$ es el número de observaciones de cada muestra.

A las medias de cada muestra se les identifica como $\bar{X}_i = \sum_{j=1}^n X_{ij}/n$ al Rango de cada muestra se le conoce como $R_i = (X_{imax} - X_{imim})$, eventualmente de cada muestra se puede obtener su desviación estandar que se le identifica como $\sigma_i = \sqrt{\sum_{j=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_i)^2 / n}$

El conjunto de datos que se puede obtener se puede indicar en un cuadro como el siguiente

Número de muestra (i)	Número de observaciones (j)				\bar{X}_i	R_i	T_i
	1	2	j	n			
1	X_{11}	X_{12}	X_{1j}	X_{1n}	\bar{X}_1	R_1	T_1
2	X_{21}	X_{22}	X_{2j}	X_{2n}	\bar{X}_2	R_2	T_2
i	X_{i1}	X_{i2}	X_{ij}	X_{in}	\bar{X}_i	R_i	T_i
k	X_{k1}	X_{k2}	X_{kj}	X_{kn}	\bar{X}_k	R_k	T_k

CARTA DE MEDIAS (Carta \bar{X})

Para el cálculo de la línea central y los límites de la carta de control \bar{X} se procede como sigue:

La línea central es la media de la distribución de las medias de la muestra y se le representa por $\bar{\bar{X}}$

$$\bar{\bar{X}} = \frac{\sum_{i=1}^K \bar{X}_i}{K}$$

Los límites de control, usualmente establecidos a tres veces la desviación estandar de la distribución de la frecuencia esperada de las medias ($\sigma_{\bar{X}}$) quedan como sigue:

$$LCS_{\bar{X}} = \bar{\bar{X}} + 3\sigma_{\bar{X}} \quad (\text{Límite de Control Superior})$$

$$LCI_{\bar{X}} = \bar{\bar{X}} - 3\sigma_{\bar{X}} \quad (\text{Límite de Control Inferior})$$

pero $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma'}{\sqrt{n}}$, donde σ' es la desviación estandar de la población y n es el tamaño de la muestra.

Por otro lado, dado el tamaño de la muestra, la teoría estadística de la relación esperada entre el rango medio \bar{R} y la desviación estandar de la población, a esta relación se le denomina d_2 (factor de tippet) y se encuentra tabulado en función del tamaño de la muestra.

De aquí que $\sigma' = \frac{\bar{R}}{d_2}$

por tanto $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\bar{R}}{d_2 \sqrt{n}}$

y como $3\sigma_{\bar{X}} = \frac{3\bar{R}}{d_2 \sqrt{n}}$

Se tiene $LCS_{\bar{X}} = \bar{\bar{X}} + \frac{3\bar{R}}{d_2 \sqrt{n}}$ y

$LCL_{\bar{X}} = \bar{\bar{X}} - \frac{3\bar{R}}{d_2 \sqrt{n}}$

pero tambien se encuentra tabulado el factor $3 / d_2 \sqrt{n}$ en función de n y se le denomina A_2

por lo cual : $LCS_{\bar{X}} = \bar{\bar{X}} + A_2 \bar{R}$ y

$LCL_{\bar{X}} = \bar{\bar{X}} - A_2 \bar{R}$

Si los límites de control se calculan a partir de $\bar{\sigma}$ en lugar de \bar{R} ,

entonces: $\bar{\sigma} = \frac{\sum \sigma_i}{K}$ y utilizando el factor C_2 para estimar σ' se tiene:

$\sigma' = \frac{\bar{\sigma}}{C_2}$ de aquí que :

$3\sigma'_{\bar{X}} = \frac{3\bar{\sigma}}{\sqrt{n}} = \frac{3\bar{\sigma}}{C_2 \sqrt{n}}$

pero de tablas se tiene : $A_1 = \frac{3}{C_2 \sqrt{n}}$ por lo que :

$LCS_{\bar{X}} = \bar{\bar{X}} + A_1 \bar{\sigma}$

$LCL_{\bar{X}} = \bar{\bar{X}} - A_1 \bar{\sigma}$

Para aquellas situaciones en las cuales se desean calcular los límites de control a partir valores conocidos de σ' y \bar{X}' ; el factor $3/\sqrt{n}$ se encuentra calculado también y se le denomina A . Las fórmulas para los límites de control a $3\sigma'$ utilizando este factor son :

$LCS_{\bar{X}} = \bar{X}' + A\sigma'$

$LCL_{\bar{X}} = \bar{X}' - A\sigma'$

Los factores mencionados ($A, A_1, A_2, \text{etc.}$) se encuentran en la tabla anexa.

CARTA DE RANGOS Y DESVIACION ESTANDAR

Las fórmulas para las cartas de control que miden la dispersión de las muestras son:

Para la carta R : $\bar{R} \pm 3\sigma_R$

Para la carta σ : $\bar{\sigma} \pm 3\sigma_{\sigma}$

Cuando estas fórmulas se aplican al cálculo de los límites de control inferior, tales límites son menores a cero cuando n es --- igual a 6 ó menos para la carta R y cuando n es 5 ó -- menos para la carta σ y puesto que R y σ no pueden ser -- menores que cero, el límite inferior se indica como cero en tales casos.

CARTA DE DESVIACION ESTANDAR (Carta σ)

La línea central de la carta σ queda definida por el valor de $\bar{\sigma}$ y cuando los límites 3σ de la carta σ son calculados a par-- tir de la observada $\bar{\sigma}$ se tiene:

$$LCS_{\sigma} = \bar{\sigma} + 3\sigma = B_4 \bar{\sigma}$$

$$LCI_{\sigma} = \bar{\sigma} - 3\sigma = B_3 \bar{\sigma}$$

Si los límites están basados en valores conocidos de la desviación estandar σ entonces:

$$LCS_{\sigma} = C \frac{\sigma}{2} + 3\sigma = B_2 \sigma$$

$$LCI_{\sigma} = C \frac{\sigma}{2} - 3\sigma = B_1 \sigma$$

Los valores B_1 , B_2 , B_3 y B_4 se encuentran en la tabla.

CARTA DE RANGO (Carta R)

La línea central está definida por el valor medio del rango \bar{R} y cuando los límites 3σ se calculan de un \bar{R} observado se tiene:

$$LCS_R = \bar{R} + 3\sigma_R = D_4 \bar{R}$$

$$LCI_R = \bar{R} - 3\sigma_R = D_3 \bar{R}$$

Si los límites están basados en un valor conocido de la desviación estandar σ entonces:

$$LCS_R = d_2 \sigma + 3\sigma_R = D_2 \sigma$$

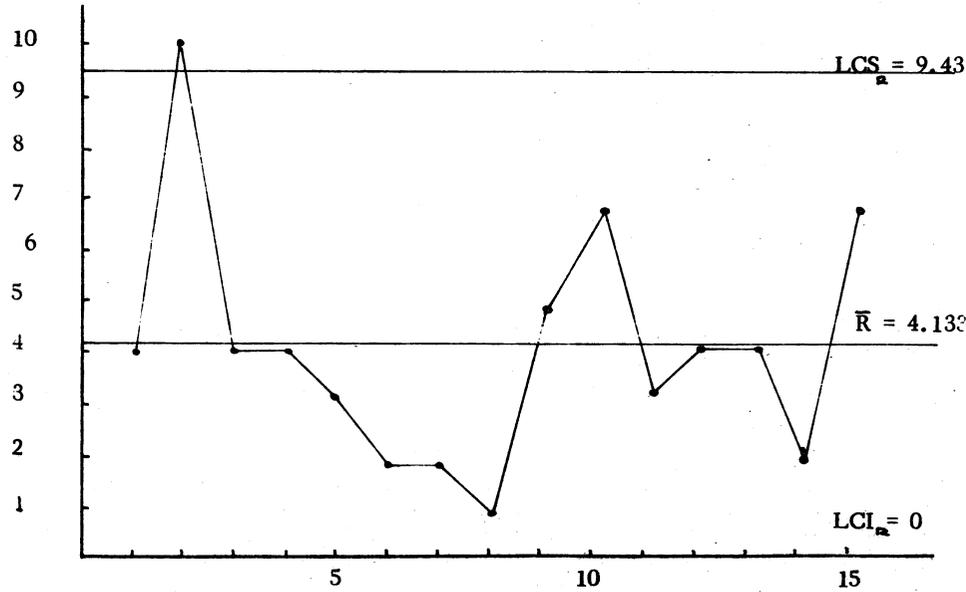
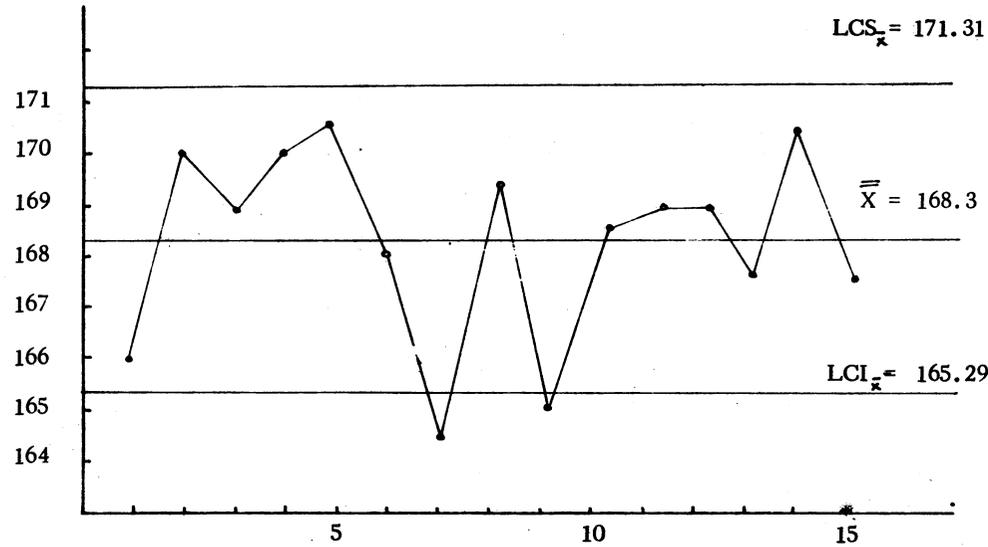
$$LCI_R = d_1 \sigma - 3\sigma_R = D_1 \sigma$$

Estos factores necesarios para calcular los límites de control se -- encuentran también en la tabla anexa/

Ejemplo :

Los siguientes datos fueron obtenidos de la temperatura de un ter-- mostato en una prueba sobre unidades de un nuevo diseño de un --- aparato controlado en su temperatura.

Esas observaciones se han ordenado dentro de subgrupos en el orden de su producción y se han calculado \bar{X} y R para cada subgrupo.

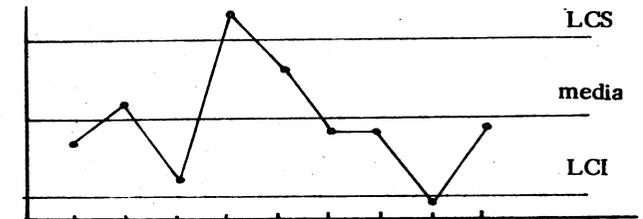


CAUSAS ASIGNABLES DE VARIACION

Cuando se tienen todos los puntos que representan determinada característica observada dentro de los límites de control, se dice -- que el proceso está sujeto sólo a causas aleatorias, ésto es que el proceso está bajo control. Las formas usuales de detectar cambios en el proceso o sea identificar causas asignables de variación, puede ser como se muestra a continuación.

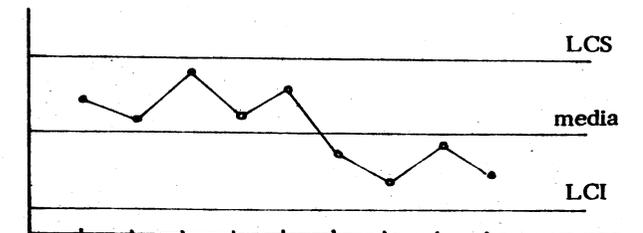
1) Variaciones Extremas

Cuando algún punto cae fuera de los límites de control



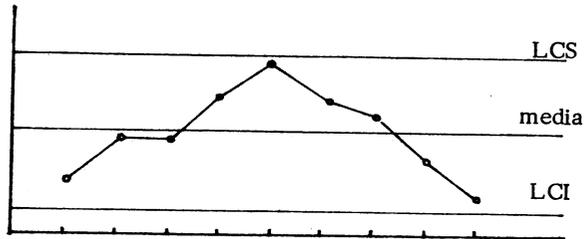
2) Carreras

Estas son una concentración de puntos a un lado de la línea central



3) Tendencias

Están representadas por una serie de puntos en forma ascendente o descendente.



FALLAS DE CONTROL

En el caso de carreras, un criterio para detectar fallas en el control establece que existe un cambio en un parámetro del universo:

- a) Cuando 7 puntos sucesivos se encuentran a un mismo lado de la línea central. (Esta es la llamada regla de siete, que cuando esto ocurre, se considera como un indicador de un cambio en la media del proceso.)
- b) Cuando en 11 puntos sucesivos en la carta de control cuando menos 10 están del mismo lado de la línea central.
- c) Cuando en 14 puntos sucesivos en la carta de control cuando menos 12 están del mismo lado de la línea central.
- d) Cuando en 17 puntos sucesivos en la carta de control cuando menos 14 están del mismo lado de la línea central.
- e) Cuando en 20 puntos sucesivos en la carta de control cuando menos 16 están del mismo lado de la línea central.

Adicionalmente se pueden considerar las Líneas de Precaución que se encuentran colocadas a $\bar{X} \pm 2\sigma$.

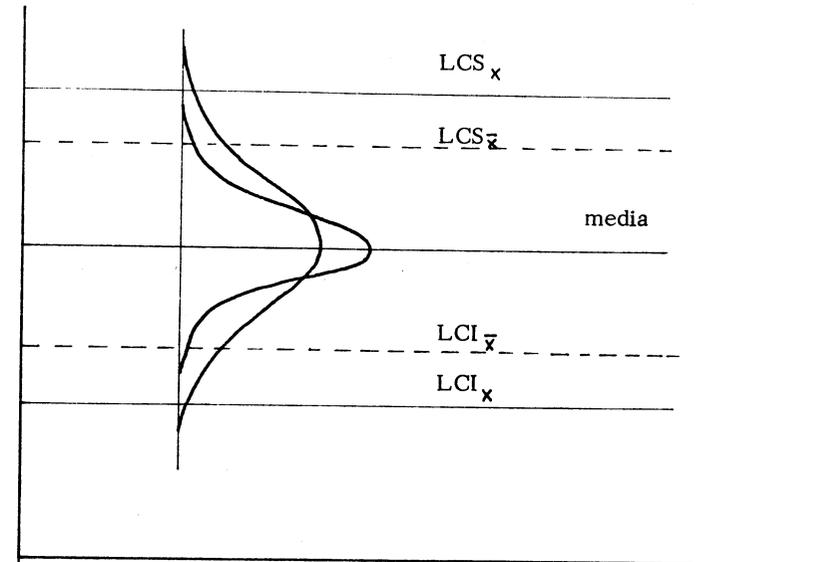
Cuando dos resultados consecutivos caen fuera de estas líneas es necesario hacer la corrección necesaria al proceso.

REVISIÓN DE ESPECIFICACIONES

Una vez que se han eliminado las causas asignables de variación y que perturban al proceso, esto es que, éste sólo se encuentra sujeto a causas aleatorias de variación; conviene proceder a revisar su capacidad para ajustarse a las especificaciones, esto es, revisar las tolerancias y los límites definidos.

Conviene enfatizar y recordar que son diferentes los límites para valores medios y los límites para valores individuales, que son éstos últimos, los que se comparan con las especificaciones del proceso. Dicho de otra forma, los límites de las cartas de control están construídas, en principio, en base a valores medios, de aquí que tienen que calcularse límites para valores individuales (pieza por pieza) y ser congruente con el concepto de especificación.

Por definición, los límites para valores individuales son más amplios que los límites para valores medios como se aprecia y justifica a continuación:



Los límites de las cartas de control para valores individuales que dan definidos por :

$$\bar{X} \pm 3 \sigma_X$$

que para el caso que el proceso esté

bajo control $\sigma_X = \sigma'$

pero $\sigma' = \frac{\bar{R}}{d_2}$

de donde, la especificación superior la comparamos con :

$$LCS_X = \bar{X} + 3 \frac{\bar{R}}{d_2}$$

y la especificación inferior con :

$$LCI_x = \bar{X} - 3 \frac{\bar{R}}{d_2}$$

Además, habrá que comparar el valor nominal especificado con el valor medio obtenido (\bar{X}) a fin de verificar la centralización -- del proceso, así como la tolerancia total especificada contra la -- dispersión del proceso ($LCS_x - LCI_x$).

Las especificaciones en el ejemplo anterior se han fijado como: -- 168 ± 4 , y conviene revisarlas una vez que se han eliminado las -- causas asignables de variación, para ésto, los límites para valores individuales son:

$$\bar{X} = 168.3 \text{ y de tablas, } d_2 = 2.059$$

$$\sigma' = \frac{\bar{R}}{d_2} = \frac{4.133}{2.059}$$

$$LCS_x = 168.3 + 3 \left(\frac{4.133}{2.059} \right)$$

$$LCS_x = 168.3 + 6.02$$

$$LCS_x = 174.32$$

$$LCI_x = 162.28$$

De aquí que se tenga el siguiente cuadro resumen :

	Especificación	Proceso	Observaciones
Superior	172	174.32	no cumple
Inferior	164	162.28	no cumple
Valor medio	168	168.30	descentrado
Tolerancia total	8	12.04	no cumple

De acuerdo con ésto, se puede verificar que el proceso no es capaz de ajustarse a las especificaciones diseñadas y por tanto se -- deberá proceder a alguna de las siguientes opciones :

- 1) Corregir el proceso desde el punto de vista de los -- factores que intervienen en el proceso (Revisión de la capacitación del personal, del equipo o de la materia prima).
- 2) Ampliar las especificaciones, en el caso que éste sea posible, desde el punto de vista del consumidor.
- 3) Cuando no sea posible realizar ninguna de las medidas anteriores, dejar el proceso tal cual y proceder a hacer una inspección al 100%.

METODO PARA LA UTILIZACION DE LAS CARTAS DE CONTROL

\bar{X} y R

Preparación de las Cartas

- 1) Definición del Objetivo de las cartas.
- 2) Selección de la variable.
- 3) Decisión sobre el tamaño y frecuencia de los subgrupos.
- 4) Definición de las formas de registro de datos.
- 5) Determinación del método de medida.

Inicio de las cartas

- 1) Toma de medidas.
- 2) Registro de medidas y otros datos relevantes.
- 3) Cálculo del promedio \bar{X} para cada subgrupo.
- 4) Cálculo del rango R de cada subgrupo.
- 5) Graficado de la carta \bar{X} .
- 6) Graficado de la carta R.

Determinación de los Límites de Control

- 1) Decisión sobre el número necesario de subgrupos antes de calcular los límites de control.
- 2) Cálculo de la media de los rangos \bar{R} .
- 3) Cálculo de los límites de control inferior y superior para R.
- 4) Cálculo de $\bar{\bar{X}}$, promedio de los valores de \bar{X} .
- 5) Cálculo de los límites de control superior e inferior para \bar{X} .
- 6) Gráfica de límites y línea central de las cartas.

Conclusiones Preliminares de las Cartas

- 1) Indicación de control o fallas.
- 2) Relación aparente entre lo que el proceso hace y lo que se supone debe hacer.
- 3) Acciones sugeridas por las cartas de control.

Continuación del Uso de las Cartas

- 1) Revisión de la línea central y límites de control para R.
- 2) Revisión de la línea central y límites de control para \bar{X} .

- 3) Uso de cartas para acción en el proceso.
- 4) Uso de las cartas para aceptación.
- 5) Uso de las cartas para acción en las especificaciones.

CARTAS DE CONTROL POR ATRIBUTOS

Las cartas por variables, independientemente de sus grandes ventajas, están limitadas sólo a una pequeña fracción de las características de calidad de un producto, además de que esas características deben ser medidas y expresadas en números.

Existen otras características de calidad que se pueden observar y resumir como atributos, al señalar un producto si es bueno o malo, aceptable o defectuoso.

Las cartas usuales son :

Carta p : Carta de control para fracción defectuosa.

Carta np : Carta de control para número de defectuosos .

Carta c : Carta de control para defectos.

CARTA p

Esta es una carta ampliamente utilizada que se aplica a características consideradas como atributos, el artículo es bueno o es defectuoso, de esta forma, si el artículo se acepta o se rechaza, se -- están considerando simultáneamente una o varias características de calidad.

Se define P (Fracción defectuosa), como la relación entre el número de artículos defectuosos encontrados en alguna inspección y el número total de artículos inspeccionados. Esto es :

$$P = \frac{\text{número de artículos defectuosos en muestra } i}{\text{número total de artículos inspeccionados en muestra } i}$$

Para el cálculo de los límites de control es necesario utilizar la fracción defectuosa y para presentación de resultados se utiliza generalmente el porcentaje de defectuosos (100 P).

Distribución de Probabilidad

Las características de operación de esta carta están fundamentadas en la existencia de una población que tiene un cierto porcentaje de artículos defectuosos. De dicha población se extrae una muestra aleatoria de un tamaño n. Como se supone que la fracción defectuosa de la población permanece constante, puede esperarse que las frecuencias relativas de varias fracciones defectuosas de muestras sigan la ley binomial.

Límites de Control

El modelo matemático de la carta de control con los límites a 3σ puede expresarse como sigue:

$$LCS_y = E(y) + 3\sigma_y$$

$$\text{Línea Central } y = E(y)$$

$$LCS_y = E(y) - 3\sigma_y$$

donde y es la variable aleatoria considerada en estudio para la carta de control y E (y) es el valor esperado de la variable estadística y σ_y es la desviación estandar de la variable y.

En este caso, E (y) = P'

$$\begin{aligned} \sigma_y &= \sigma' / n = \frac{\sqrt{np'q'}}{n} = \frac{\sqrt{np'(1-p')}}{n} \\ &= \frac{\sqrt{P'(1-p')}}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

Cuando P' no se conoce, se utiliza el valor observado \bar{P} y entonces los valores para la carta son :

$$\bar{P} = \frac{\text{número total de artículos defectuosos}}{\text{número total de artículos inspeccionados}}$$

$$LCS_P = \bar{P} + 3 \frac{\sqrt{\bar{P}(1-\bar{P})}}{\sqrt{n}}$$

$$LCI = \bar{P} - 3 \frac{\sqrt{\bar{P}(1-\bar{P})}}{\sqrt{n}}$$

De acuerdo a esto, los límites dependen del valor de n, y even

tualmente el tamaño de muestra es constante pero cuando se analiza la producción diaria o semanal será frecuente encontrar que el tamaño de los subgrupos es variable. En este caso se pueden calcular los límites como sigue :

- a) Calcular nuevos límites de control para cada subgrupo y - mostrar esos límites fluctuantes en la carta de control.
- b) Estimar un tamaño de muestra promedio (π) siempre y - cuando las diferencias entre los valores extremos de n - (mayor tamaño de subgrupo y menor tamaño de subgrupo) - respecto al valor promedio no excedan el 25% del tamaño - promedio.

Esto es, se usa π si

$$n_{\max} \leq 1.25 \pi \quad y$$

$$n_{\min} \geq 0.75 \pi$$

Ejemplo

Se ha inspeccionado al 100% cierta característica crítica de un --- artículo eléctrico y se desean encontrar los límites de control con producción variable y hacer una revisión para continuar el uso de la carta con sus valores revisados.

D A T O S

C A L C U L O S

número de Muestra	Fecha	número inspeccionado n	número de artículos defectuosos	fracción defectuosa P	$3 \sigma = \frac{3 \sqrt{\bar{P}(1-\bar{P})}}{\sqrt{n}}$	LCS $\bar{P} + 3 \sigma$	LCI $\bar{P} - 3 \sigma$
1	Nov. 6	3350	31	0.0092	0.0062	0.0207	0.0083
2	7	3354	113	0.0337	0.0062	0.0207	0.0083
3	8	1509	28	0.0185	0.0092	0.0237	0.0053
4	9	2190	20	0.0091	0.0077	0.0222	0.0068
5	11	2678	35	0.0131	0.0069	0.0214	0.0076
6	12	3252	68	0.0209	0.0063	0.0208	0.0082
7	13	4641	339	0.0730	0.0053	0.0198	0.0092
8	14	3782	12	0.0032	0.0058	0.0203	0.0087
9	15	2993	3	0.0010	0.0066	0.0211	0.0079
10	16	3383	17	0.0050	0.0062	0.0207	0.0083
11	18	3694	14	0.0038	0.0059	0.0204	0.0088
12	19	3052	8	0.0026	0.0065	0.0210	0.0080
13	20	3477	27	0.0078	0.0061	0.0206	0.0084
14	21	4051	44	0.0109	0.0056	0.0201	0.0089
15	22	3042	70	0.0230	0.0065	0.0210	0.0080
16	23	1623	12	0.0074	0.0089	0.0234	0.0056
17	25	915	9	0.0098	0.0119	0.0264	0.0026
18	26	1644	1	0.0006	0.0087	0.0232	0.0058
19	27	1572	22	0.0140	0.0090	0.0235	0.0055
20	28	1961	3	0.0015	0.0081	0.0226	0.0064
21	29	2440	3	0.0012	0.0073	0.0218	0.0072
22	30	2086	1	0.0005	0.0079	0.0224	0.0066

T o t a l: 60688

880

Se calcula \bar{P} con los datos disponibles del mes.

$$\bar{P} = \frac{\text{número total de defectuosos}}{\text{número total de inspeccionados}} = \frac{880}{60,688} = 0.0145$$

para la desviación estandar :

$$3 \sqrt{\bar{P} (1 - \bar{P})} = 3 \sqrt{(0.0145) (0.9855)} = 0.3586$$

para verificar el tamaño de muestra a utilizar en los límites de control :

$$n = \frac{60688}{22} = 2758$$

$$1.25 n = 3448$$

$$0.75 n = 2068$$

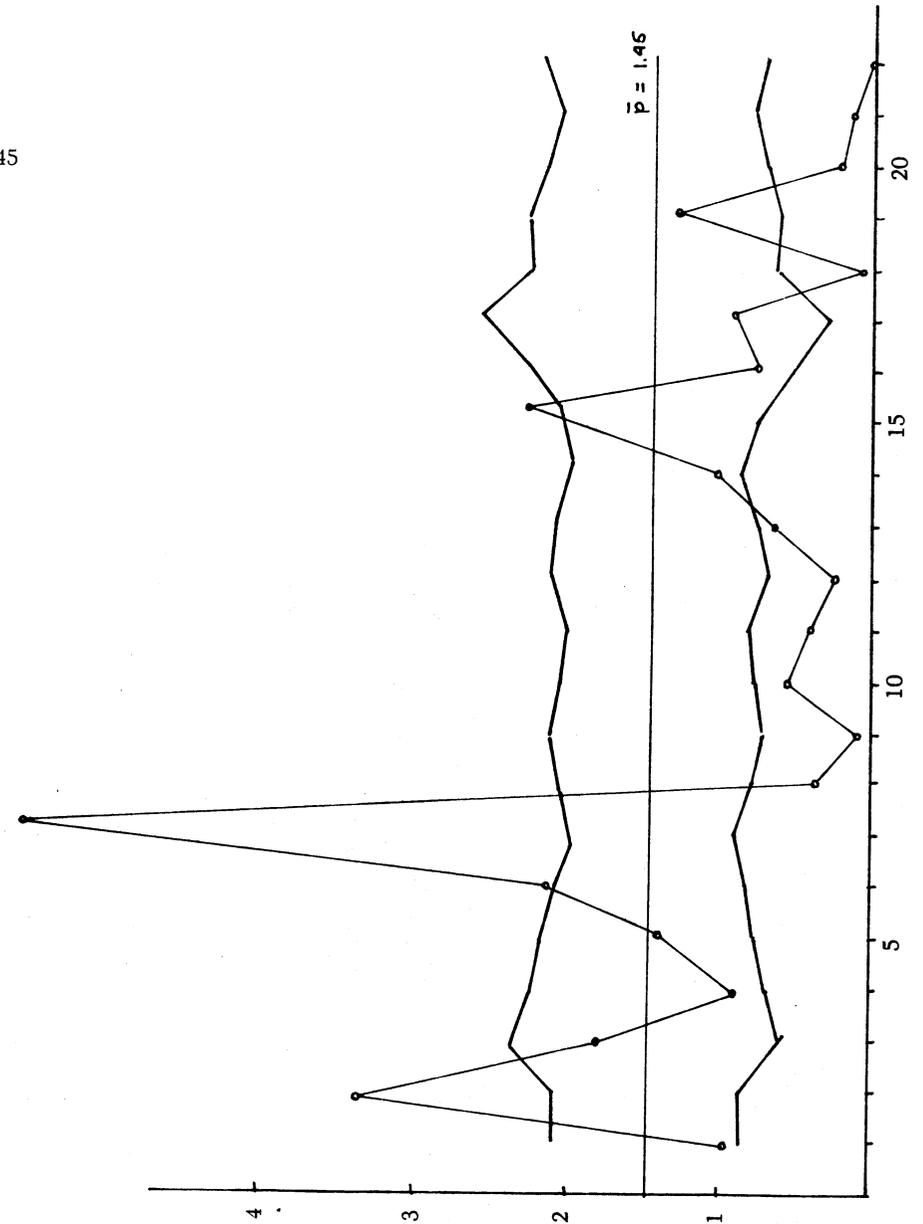
y de la hoja de datos :

$$n_{\max} = 4641 > 1.25 n$$

$$n_{\min} = 915 < 0.75 n$$

Por lo tanto se debe trabajar con un tamaño de muestra variable.

Para cada día, es necesario calcular su fracción defectuosa (P), - casi como los límites de control correspondientes, los cuales se grafican en porcentaje de defectuosos para una mejor comprensión.



Continuación de datos

número de Muestra	Fecha	número inspeccionado n	número de artículos defectuosos	fracción defectuosa	$3 \sigma = \frac{3\sqrt{P_o'(1-P_o')}}{\sqrt{n}}$	LCS $P_o' + 3\sigma$	LCI $P_o' - 3\sigma$
1	Julio 2	2228	4	0.0018	0.0051	0.0116	0.0014
2	3	2087	9	0.0043	0.0053	0.0118	0.0012
3	5	2088	3	0.0014	0.0053	0.0118	0.0012
4	6	1746	2	0.0014	0.0058	0.0123	0.0007
5	7	2076	1	0.0005	0.0053	0.0118	0.0012
6	9	2164	1	0.0005	0.0052	0.0117	0.0013
7	10	2855	5	0.0018	0.0045	0.0110	0.0020
8	11	2560	5	0.0020	0.0048	0.0113	0.0017
9	12	2545	14	0.0055	0.0048	0.0113	0.0017
10	13	1874	1	0.0005	0.0056	0.0121	0.0009
11	14	2329	24	0.0103	0.0050	0.0115	0.0015
12	16	2744	30	0.0109	0.0046	0.0111	0.0019
13	17	2619	77	0.0294	0.0047	0.0112	0.0018
14	18	2211	5	0.0023	0.0051	0.0116	0.0014
15	19	1746	19	0.0109	0.0058	0.0123	0.0007
16	20	2628	28	0.0107	0.0047	0.0112	0.0018
17	21	2366	5	0.0021	0.0050	0.0115	0.0015
18	23	2954	23	0.0078	0.0044	0.0109	0.0021
19	24	2586	32	0.0124	0.0047	0.0112	0.0018
20	25	2790	8	0.0029	0.0046	0.0111	0.0019
21	26	2968	30	0.0101	0.0044	0.0109	0.0021
22	27	3100	13	0.0042	0.0043	0.0108	0.0022
23	28	1359	4	0.0030	0.0065	0.0130	0.0000
24	30	3940	39	0.0099	0.0038	0.0103	0.0027
25	31	3178	11	0.0035	0.0043	0.0108	0.0022

T o t a l 61 701 393

Cuando todos los puntos caen dentro de la banda de control, el valor estandar P_o' se puede tomar como \bar{P} .

En este ejemplo, existen muchos puntos cayendo fuera de los límites, entonces, para hacer una estimación de la fracción defectuosa promedio del proceso para el futuro, conviene eliminar los días -- donde P cae por encima de los límites de control superior, de esta forma se eliminan los días 7, 12, 13 y 22 de junio, quedando un total de defectuosos igual a 290 y un número total de inspeccionados igual a 46,399.

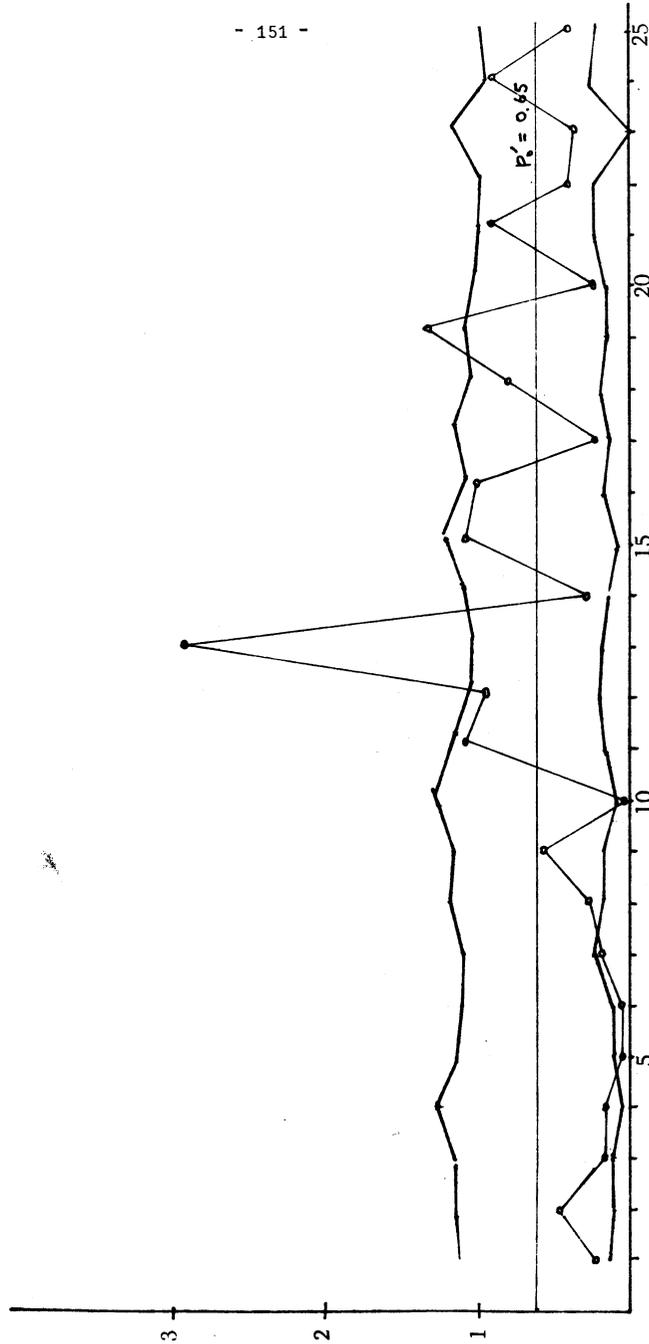
$$\text{Por tanto } \bar{P} = \frac{290}{46,399} = 0.0063$$

Con esto y otros aspectos técnicos del proceso se ha decidido suponer $P_o' = 0.0065$ mismo con el cual se ---- calculan los límites, para los siguientes días de julio.

La ventaja de utilizar P_o' es que los límites pueden ser calculados cada día y así tener base para remediar de inmediato una situación anormal, sin tener que esperar hasta que \bar{P} sea conocida.

$$\begin{aligned} \text{Para el mes de julio} \quad \bar{n} &= 2468 \\ n_{\text{max}} &= 3940 \\ n_{\text{min}} &= 1359 \end{aligned}$$

que superan el máximo y mínimos tolerados para utilizar el tamaño



de muestra.

Al finalizar julio es de nuevo revisada la media del proceso, la cual es :

$$\bar{P} = \frac{393}{61\ 701} = 0.0064$$

que coincide prácticamente con P'_0 .

Este procedimiento de revisión se continúa haciendo a fin de modificar la media del proceso cuando éste mejore, asimismo para considerar la posibilidad de calcular los límites con un tamaño de muestra constante.

Secuencia de pasos para la carta de control para fracción defectuosa.

Preparación de la carta

- 1) Determinación del propósito de la carta.
- 2) Selección de la estación de inspección y características de calidad para controlar.
- 3) Decisión sobre la selección del subgrupo. /
- 4) Selección entre una carta p y una np.
- 5) Decisión sobre los cálculos para los límites de control.
- 6) Definición de formas para registrar y graficar los datos.

Inicio de la carta

- 1) Registro de datos.
- 2) Cálculo de la fracción defectuosa de los subgrupos.
- 3) Cálculo de \bar{P} .
- 4) Cálculo de los límites de control.
- 5) Gráfica de puntos y límites de control.

Continuación de la carta.

- 1) Selección de una fracción defectuosa estandar P'_0 .
- 2) Cálculo de límites de control.
- 3) Gráfica de puntos y límites.
- 4) Interpretación de fallas de control.
- 5) Revisión periódica de P'_0 .

Informes y acciones basadas en las cartas de control

- 1) Acciones para mantener el proceso bajo control en un nivel satisfactorio.
- 2) Revisión de especificaciones en relación con la capacidad del proceso de producción.

- 3) Información a la administración en relación al nivel de -- calidad.

CARTA np

Cuando el tamaño de la muestra es constante se puede utilizar -- una carta de número de defectuosos llamada np. En la cual p representa la fracción defectuosa y n el tamaño de la muestra.

En esta carta, la desviación estándar del número de ocurrencias en n pruebas de un evento con una probabilidad constante de -- ocurrencia p' o sea la desviación estándar del número de defectuosos es $\sqrt{np'(1-p')}$, de aquí que los límites de -- control a 3σ de una carta np sean:

$$LCS_{np} = np' + 3 \sqrt{np'(1-p')}$$

$$LCI_{np} = np' - 3 \sqrt{np'(1-p')}$$

y puesto que es difícil que p' sea conocido, la fracción defectuosa promedio \bar{p} es utilizada como el mejor estimador de p'.

Conviene observar que una carta p obtenida de los mismos datos tiene la misma apariencia que una carta np excepto en los datos de la escala vertical.

Cuando el tamaño de la muestra es constante, se puede preferir la carta np a la p primero, porque se realizan menos cálculos por cada subgrupo y segundo, porque algunas personas la pueden entender más fácilmente.

En resumen, para obtener una carta np se necesita calcular:

$$\bar{np} = \frac{\text{Total de piezas defectuosas}}{\text{Total de muestras inspeccionadas}}$$

lo cual constituye la línea central

El límite de control superior :

$$LCS_{\bar{np}} = \bar{np} + 3 \sqrt{\bar{np}(1-\bar{p})}$$

El límite de control inferior :

$$LCI_{\bar{np}} = \bar{np} - 3 \sqrt{\bar{np}(1-\bar{p})}$$

la gráfica tiene como ejes, la secuencia de subgrupos en el horizontal y el número de piezas defectuosas en el vertical. Su conformación se realiza anotando el número de piezas defectuosas correspondiente a cada subgrupo respetando su ordenamiento.

Ejemplo

Los siguientes datos representan el número de transistores defectuosos producidos en una producción diaria de 2 800 unidades.

Día	Piezas Defectuosas
1	110
2	117
3	112
4	105
5	130
6	120
7	119
8	113
9	115
10	105

Una carta de control de calidad apropiada es la $\bar{n}\bar{p}$ puesto que la producción diaria es constante.

Cálculos :

$$\bar{n}\bar{p} = \frac{\text{Total de piezas defectuosas}}{\text{Total de muestras inspeccionadas}}$$

$$\bar{n}\bar{p} = \frac{1146}{10} = 114.6$$

Límites de Control :

$$\bar{n}\bar{p} + 3 \sqrt{\bar{n}\bar{p} (1 - \bar{p})}$$

$$\bar{p} = \frac{114.6}{2500} = 0.046$$

$$LCS_{\bar{n}\bar{p}} = 114.6 + 3 \sqrt{114.6 (0.954)}$$

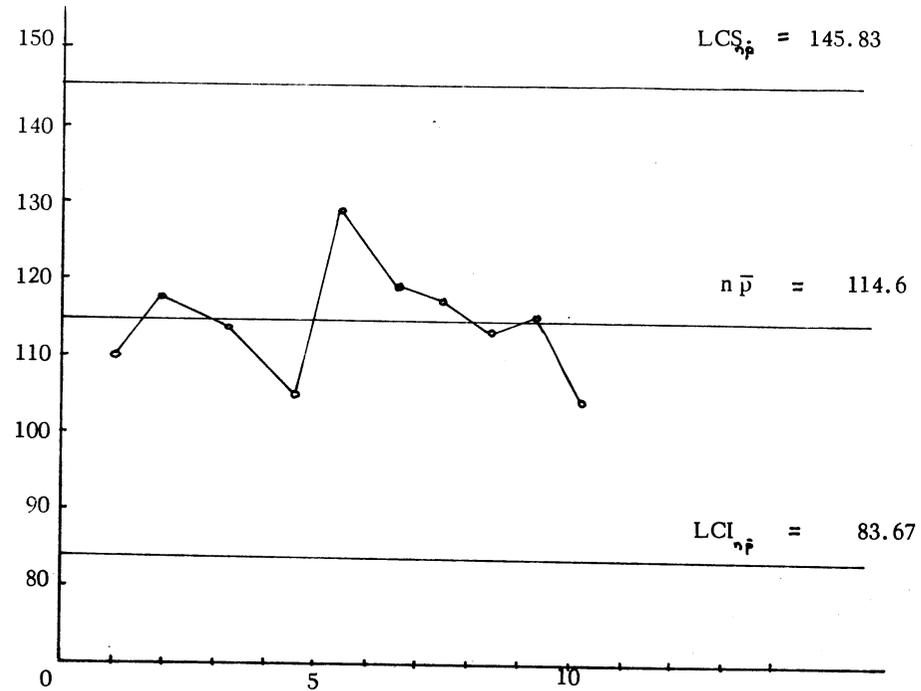
$$= 114.6 + 3 \sqrt{109.33}$$

$$114.6 + 3 (10.41)$$

$$LCS_{\bar{n}\bar{p}} = 145.83$$

$$LCI_{\bar{n}\bar{p}} = 83.67$$

*



Conclusión : El proceso está bajo control.

CARTA DE CONTROL PARA DEFECTOS (Carta C)

Se considera que un artículo es defectuoso cuando alguna de sus características no cumple con su especificación correspondiente. Esto es, cuando tiene uno o más defectos. La Carta C es una carta de defectos por unidad.

Una vez que se examina la unidad y se encuentra el número de defectos, se tienen los datos para construir esta carta.

Dado que en cada unidad existen muchas oportunidades para que ocurran defectos y la probabilidad de ocurrencia de un defecto en un artículo particular es pequeña, la teoría estadística para la Carta C está basada en la distribución de Poisson.

De acuerdo con esta distribución, c' es número medio de defectos por unidad y la desviación estándar de esta variable aleatoria es $\sqrt{c'}$.

Dado que c' , usualmente no se conoce, se estima de los datos pasados por medio de \bar{c} .

Línea central : $\bar{c} = \frac{\text{Número total de defectos}}{\text{Número total de unidades inspeccionadas}}$

Límites : $LCS_c = \bar{c} + 3 \sqrt{\bar{c}}$

$LCI_c = \bar{c} - 3 \sqrt{\bar{c}}$

Puesto que la distribución de Poisson no es simétrica, los límites superior e inferior a 3σ no corresponden a probabilidades iguales de un punto sobre la carta cayendo fuera de los límites de control, por lo que a veces se prefiere trabajar con límites definidos por cierto nivel de significancia.

Ejemplo

Como parte de un programa de mejoramiento de calidad, un productor textil ha decidido iniciar una carta c para evaluar el número de imperfecciones encontrado en cada lote de telas inspeccionado.

Los datos de 20 lotes se han registrado en la siguiente tabla. De estos datos calcular los límites de control a 3σ .

Revisar los límites para utilizarse en el siguiente período de operación.

Lote de Telas Número de Imperfecciones

1	14
2	5
3	10
4	19
5	0
6	6
7	2
8	9
9	8
10	7
11	3
12	12
13	1
14	22
15	1
16	7
17	1
18	5
19	12
20	4

Línea central :

$$\bar{c} = \frac{\text{Número total de imperfecciones}}{\text{Número total de lotes}}$$

$$\bar{c} = \frac{148}{20} = 7.4$$

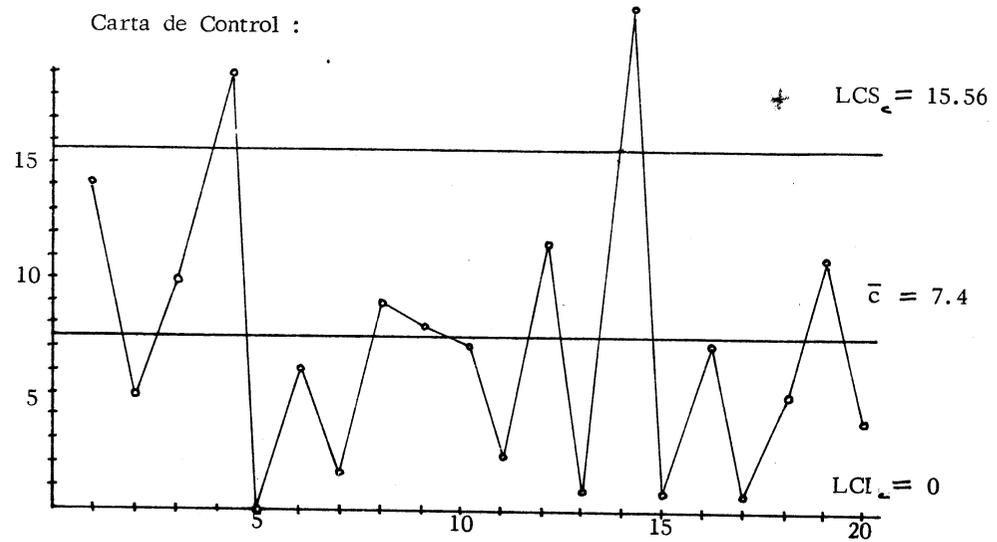
Límites de control :

$$LC_c = \bar{c} + 3\sqrt{\bar{c}} = 7.4 + 3\sqrt{7.4}$$

$$LCS_c = 15.56$$

$$LCI_c = 0$$

Carta de Control :



Se observa que las imperfecciones de los lotes 4 y 14 salen del límite superior. Una vez que se investigan las causas asignables de variación, éstos lotes se eliminan con el fin de definir la línea central y límites de los periodos subsecuentes.

Total de imperfecciones, eliminando los lotes 4 y 14 :

$$148 - 19 - 22 = 107$$

Nueva Línea central : $\bar{c} = \frac{107}{18} = 5.94$

Nuevos Límites : $LCS_c = 5.94 + 3\sqrt{5.94} = 13.25$

$$LCI_c = 5.94 - 3\sqrt{5.94} = 0$$

CARTA C MODIFICADA

Con frecuencia se presentan situaciones en las que existen variaciones en el área de oportunidad para un defecto, a diferencia de la inspección sobre el número de defectos en una unidad o un subgrupo de cierto tamaño considerado como unidad, en donde las unidades son iguales en tamaño, así como la probabilidad de encontrar un defecto.

Cuando por alguna razón hay un cambio en el área de oportunidad de ocurrencia de un defecto de un subgrupo a otro subgrupo la carta c convencional no es satisfactoria dado que si se grafica el total de defectos observados en cada subgrupo, la línea central y los límites de la carta cambiarían de un subgrupo a otro, lo cual causarfa confusión.

Para superar esta situación se procede como sigue:

Línea central

$$\bar{U} = \frac{c}{n} = \frac{\text{número total de defectos}}{\text{número total de unidades inspeccionadas}}$$

Los límites de control varían de acuerdo con el tamaño del subgrupo, quedando como sigue:

$$LCS = \bar{U} + \frac{3\sqrt{\bar{U}}}{\sqrt{n}}$$

$$LCI = \bar{U} - \frac{3\sqrt{\bar{U}}}{\sqrt{n}}$$

2

Ejemplo

Una empresa textil inspeccionó 6 lotes de cierto tipo de tela y se registró el número de defectos encontrado.

Se desea contruir una carta de control que muestre en forma apropiada los defectos encontrados por cada 100 mts.²

Datos :

<u>Lote</u>	<u>Metros Cuadrados inspeccionados</u>	<u>número de defectos</u>
1	200	5
2	250	7
3	100	3
4	90	2
5	120	4
6	80	1

Si se considera la unidad igual a 100 mts.²

Se tiene :

$$\text{número de defectos} = 22$$

$$\text{número de metros cuadrados inspeccionados} = 840$$

$$\text{por lo que el número de unidades inspeccionadas es } \frac{840}{100} = 8.4$$

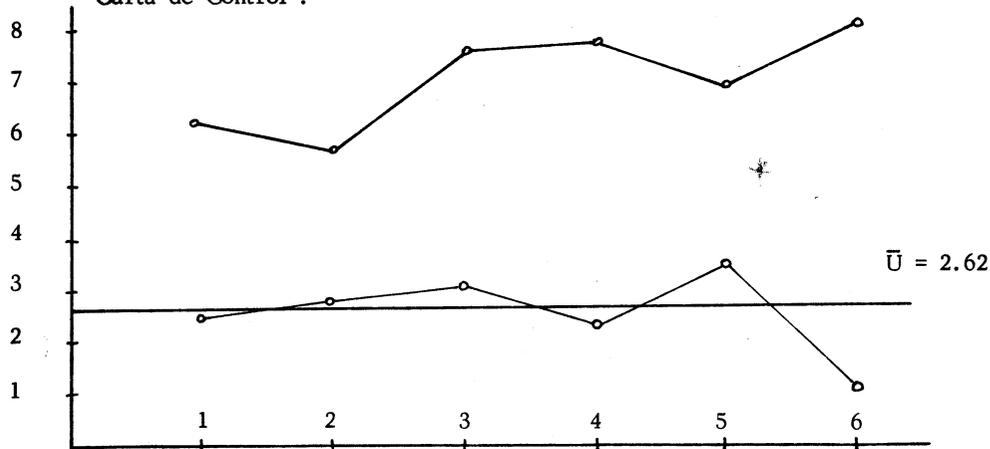
De aquí que :

$$\bar{U} = \frac{22}{8.4} = 2.62$$

Como se observa, el número de unidades inspeccionado varía de lote a lote por lo que se calculan límites para cada uno de los lotes

Lote	Unidades inspeccionadas (n)	Número de defectos por Unidad	$3\sqrt{\bar{U}/n}$	LCS	LCI
1	2.0	2.5	3.43	6.05	0
2	2.5	2.8	3.07	5.69	0
3	1.0	3.0	4.86	7.48	0
4	0.9	2.2	5.12	7.74	0
5	1.2	3.3	4.43	7.05	0
6	0.8	1.3	5.43	8.05	0

Carta de Control :



CARTAS CUSUM (Cumulative Sum)

Las cartas de control vistas anteriormente son una valiosa ayuda para detectar cambios en el comportamiento del proceso. Sin embargo, no son suficientemente sensibles en pequeños cambios en la media del proceso que seguido se confunde debido a la variación residual. Esto tiene su origen en que cada observación es comparada independiente con los límites de control, por lo que sería más sensible combinar resultados sucesivos de alguna manera (como en la regla de siete), de aquí que esos cambios en la media del proceso sean más fáciles de detectar con la ayuda de las cartas CASUM.

En este tipo de cartas la notación utilizada es :

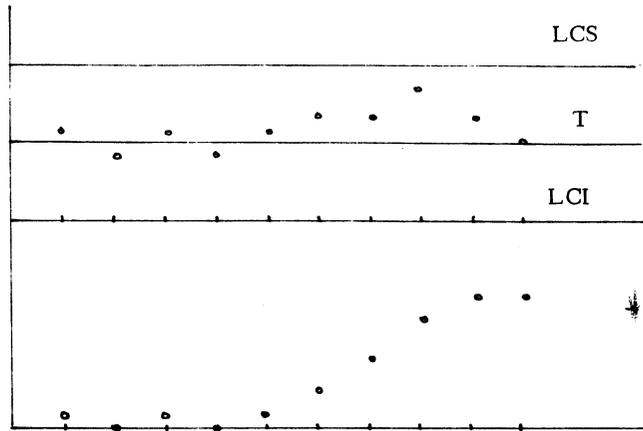
X_p : Variable del proceso o característica de calidad el tiempo p.

T : Valor meta (media).

En el tiempo T la suma acumulativa de las desviaciones respecto a T está dado por :

$$S_t = \sum_{p \leq t} (X_p - T)$$

La carta casum se obtiene al graficar contra el tiempo los valores de S_t



Carta X

Carta S_t

La obtención de los puntos de S_t es :

$$S_1 = X_1 - T$$

$$S_2 = (X_1 - T) + (X_2 - T)$$

$$= S_1 + (X_2 - T)$$

y en general :

$$S_t = S_{t-1} + (X_t - T)$$

se puede inferir que -

La media del proceso depende de la pendiente de la gráfica CUSUM en donde -

La pendiente de la línea que va de S_m a S_n mide la diferencia media desde T de X_{m+1} a X_n.

La media localizada del proceso \bar{X}_L es

$$\bar{X}_L = \frac{\sum_{i=m+1}^n X_i}{n-m}$$

$$= T + \frac{\sum_{i=m+1}^n (X_i - T)}{n-m}$$

$$= T + \frac{S_n - S_m}{n-m}$$

$$= T + \frac{\text{Cambio en cusum}}{\text{Número de Observaciones}}$$

$$\bar{X}_L = T + K \text{ (pendiente)}$$

donde K es una constante que depende de las escalas escogidas -- para la carta CUSUM.

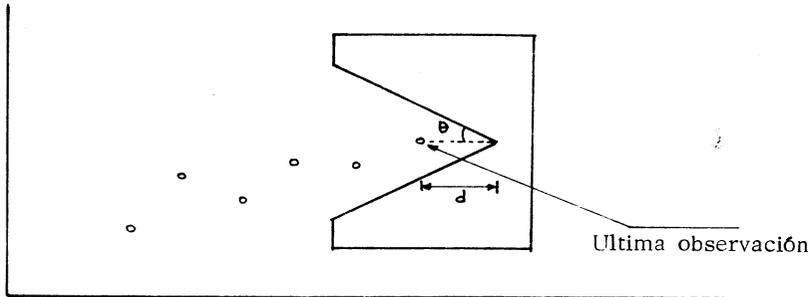
DETECCION DE CAMBIOS

Técnica de Mascarilla

Esta técnica implica utilizar una mascarilla en forma de V que se coloca a una distancia d adelante de la última observación; - esta mascarilla tiene un ángulo en la V igual a θ.

Cuando todas las observaciones caen dentro de la mascarilla se su-

pone que el proceso se encuentra bajo control. Si alguna cae fuera, entonces puede concluirse que existe un cambio en los parámetros del proceso.



La selección de d y θ determina el funcionamiento de la carta CUSUM, de aquí que esos valores dependan de la escala utilizada.

Algunas reglas basadas en experiencia industrial especifican que se defina un factor de escala W como la escala vertical por intervalo horizontal.

Se supone que se conoce o puede ser estimada de experiencia pasada la desviación estandar de la media de la muestra $\sigma_{\bar{X}}$.

Se sugiere que este factor de escala W , caiga en un rango de $1 \sigma_{\bar{X}}$ a $2 \sigma_{\bar{X}}$, de preferencia $2 \sigma_{\bar{X}}$. Se recomienda como escala horizontal un intervalo de 2.5 mm., de aquí que la escala vertical sería 2.5 mm. = $2 \sigma_{\bar{X}}$ redondeando para obtener intervalos razonables.

Por ejemplo si $\sigma_{\bar{X}} = 1.6$ y el intervalo horizontal es 2.5 mm., entonces, la escala vertical sería 2.5 mm. = 3.2 unidades, lo cual para efectos prácticos pudiera redondearse a 2.5 mm. = 3 unidades o sea un factor de escala $W = \left(\frac{3}{1.6}\right) \sigma_{\bar{X}} = 1.9 \sigma_{\bar{X}}$.

Es importante que un buen procedimiento sea tal que pase un largo tiempo antes que indique la necesidad de un ajuste cuando el proceso está bajo control y pase poco tiempo para indicar que el proceso está fuera de control. La medida de esta velocidad es la longitud media de carrera (ARL) que existe antes que la carta indique una falla de control. Para las cartas de control Shewhart, la longitud media de carrera es

$$ARL = 1/p$$

donde p es la probabilidad de que un punto caiga fuera de los límites de control.

En el caso de los límites a 3σ , $p = 0.0027$ y $ARL = 370$.

Considerando una longitud media, los planes recomendables para escoger los parámetros θ y d son:

$$\tan \theta = 0.5 \sigma_{\bar{X}} / W \quad \text{y}$$

$d = 10$ intervalos horizontales o una distancia medida en términos de la escala vertical igual a $10 W$.

De aquí que con un factor de escala $W = 2 \frac{\sigma}{\bar{X}}$

Se tiene :

$$\Theta = \arctan 0.25 = 14^\circ$$

y $d = 10$ intervalos horizontales o una distancia, medida en términos de la escala vertical, igual a $20 \frac{\sigma}{\bar{X}}$.

El valor de ARL para este procedimiento es aproximadamente 500 cuando el proceso está bajo control mientras que este valor para las cartas de control Shewhart es 370.

Una carta CUSUM cuyo ARL es 370 cuando el proceso está bajo control está dada por :

$$\tan \Theta = 0.5 \frac{\sigma}{\bar{X}} / W \text{ y}$$

$d = 9.4$ intervalos horizontales o una distancia en términos de la escala vertical igual a $9.4 W$.

DETERMINACION DEL TAMAÑO DE MUESTRAS E INTERVALO ENTRE MUESTRAS

Así como la separación entre los límites de control ha sido hasta fechas muy recientes una decisión de carácter empírico, lo mismo ha ocurrido con la selección del tamaño de muestra y con el espaciamiento entre la toma de las muestras.

En el caso de las cartas de control para variables, diversos autores a partir de Shewhart han recomendado como ideal la utilización de un tamaño de muestra igual de 4 ó 5; con subgrupos más grandes (10 ó 20) la carta de control se hace más sensible a pequeñas variaciones.

Cuando se utilizan cartas por atributos, la producción no es continua y la inspección forma parte integral del proceso de producción, a cada orden de producción se le puede considerar como un subgrupo. En cualquier caso, un tamaño de muestra racional será aquel que permita mostrar las variaciones importantes de un proceso por causas no aleatorias; además, los subgrupos racionales deben seleccionarse de forma tal que se minimice la oportunidad de variación dentro de cualquier subgrupo.

En cuanto a la frecuencia en la forma de las muestras, no existen reglas generales. Todo depende del caso particular, una vez toma-

dos en cuenta los objetivos de la carta así como los costos y beneficios esperados.

En relación con el número de muestras necesarias antes de calcular los límites de control, se recomienda que estén basados cuando menos en 25 subgrupos, puesto que, los primeros obtenidos, cuando se inician las cartas de control, con frecuencia no son representativos de una situación estable.

USO OPTIMO DE CARTAS DE CONTROL

El uso de las cartas de control ha tenido amplia difusión y aplicación en fechas recientes, su método de aplicación generalmente se encuentra apoyado en un conjunto de reglas prácticas que en la mayoría de los casos permiten obtener resultados satisfactorios. Sin embargo, es preciso utilizar métodos de trabajo diferentes -- cuando los costos tienen que tomarse en cuenta.

La universal adopción, por la industria, de los límites de control de 3 T, se ha considerado como un resultado de la experiencia, -- que permite lograr un balance económico satisfactorio entre los -- dos tipos de error. Al respecto, también es resultado de la experiencia la decisión sobre la selección de un tamaño de muestra -- específico y sobre la frecuencia en la toma de las muestras.

Diversos trabajos se han realizado en torno a este tema, que se -- identifican genéricamente con el título de DISEÑO ECONOMICO DE CARTAS DE CONTROL; se pueden mencionar técnicas de optimización para cartas \bar{X} , \bar{X} y R conjuntas, multivariadas, \bar{p} , $n\bar{p}$ y cusum.

Tomando como referencia el método de Ladany S.P. para cartas \bar{p} , define un intervalo como el tiempo entre reajustes de una máquina para mantener su producción en un estado bajo control.

El comportamiento de un proceso, que contemple la relación ante causas asignables, detección y corrección, conjuntamente con los niveles del proceso se indica en la gráfica anexa.

Los costos asociados con la utilización de esta carta de control tienen cuatro diferentes componentes:

- A : Costo de muestreo
- B : Costo de tener una tasa mayor de productos defectuosos cuando el proceso sale de control y no se detecta.
- C : Costo de una indicación falsa de que el proceso sale de control.
- D : Costo de reajustar los cambios detectados.

Una política óptima será aquella que minimice la suma de esos costos.

Las variables de decisión que intervienen en este problema son:

- a) tamaño de muestra (n)
- b) frecuencia de muestreo (f)
- c) Distancia de los límites de control de la media del proceso expresada en términos de desviaciones estándar (k)

Existen además, tres variables que caen dentro del dominio de los

juicios de valor y que son decididos por la administración o bien -- que dependen de las características de la producción:

- a) fracción defectuosa media (\bar{p})
- b) cambio repentino en la fracción defectuosa del proceso -- que debe ser detectado (d)
- c) probabilidad de detectar un cambio repentino en la fracción defectuosa del proceso que ocurra en el intervalo -- (P_g)

El modelo está basado en el concepto de un costo total en un intervalo fijo de tiempo:

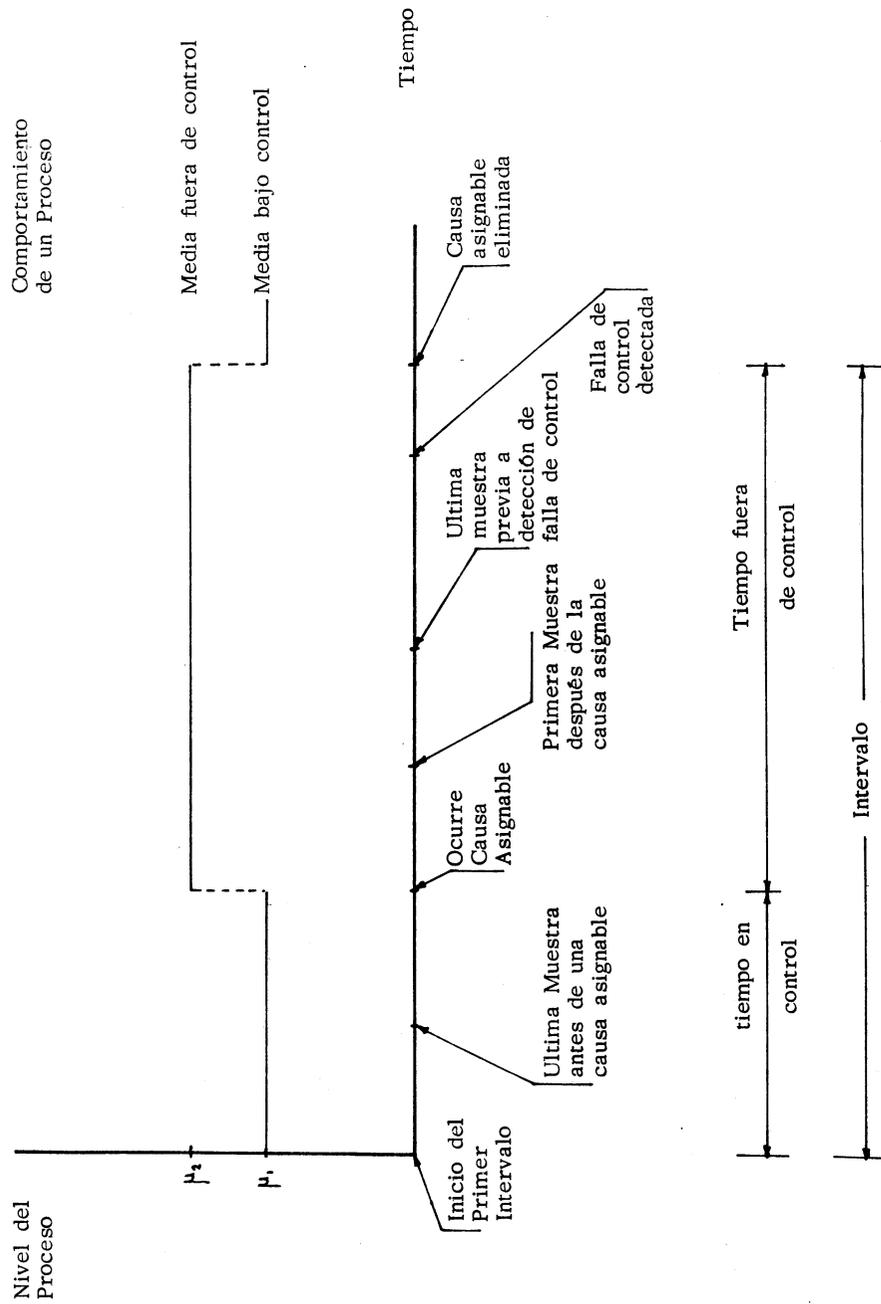
Costo total durante el intervalo (CT) = Costo de muestreo + Costo de no detectar un cambio especificado en el proceso cuando ocurre un cambio (B)

+ Costo de una indicación falsa cuando un cambio en el proceso no ocurre (C) + Costo de reajustar los cambios detectados (D)

o sea :

$$CT = A + B + C + D$$

Para un problema particular, dados los costos relevantes y los datos de juicios de valor de la administración, la ecuación que minimiza los costos totales asociados con el uso de las cartas de control definirá condiciones óptimas en términos del tamaño óptimo de muestra, la frecuencia óptima de muestreo y la distancia óptima de los límites de control respecto a la media del proceso.



Number of Observations in Sample, n	Chart for Averages				Chart for Standard Deviations				Chart for Ranges							
	Factors for Control Limits		Factors for Central Line		Factors for Control Limits		Factors for Central Line		Factors for Control Limits		Factors for Central Line		Factors for Control Limits		Factors for Central Line	
	A	A_1	A_2	A_3	c_1	$1/c_2$	B_1	B_2	E_3	B_3	d_1	$1/d_2$	D_1	D_2	D_3	D_4
2	2.121	3.760	1.880	0.5642	1.7725	0	1.843	0	3.267	1.128	0.8865	0.853	0	3.686	0	3.276
3	1.732	2.284	1.023	0.7236	1.3820	0	1.858	0	2.568	1.693	0.5907	0.888	0	4.358	0	2.575
4	1.501	1.830	0.729	0.7979	1.2533	0	1.808	0	2.266	2.059	0.4857	0.880	0	4.698	0	2.282
5	1.342	1.396	0.577	0.8707	1.1894	0	1.756	0	2.089	2.326	0.4299	0.864	0	4.918	0	2.115
6	1.225	1.310	0.483	0.8686	1.1512	0.026	1.711	0.030	1.970	2.534	0.3946	0.848	0	5.078	0	2.004
7	1.134	1.277	0.419	0.8882	1.1259	0.105	1.672	0.118	1.882	2.704	0.3698	0.833	0.205	5.203	0.076	1.924
8	1.061	1.175	0.373	0.9027	1.1078	0.167	1.638	0.185	1.815	2.847	0.3512	0.820	0.387	5.307	0.136	1.864
9	1.000	1.094	0.337	0.9159	1.0942	0.219	1.609	0.239	1.761	2.970	0.3367	0.808	0.546	5.394	0.184	1.816
10	0.949	1.028	0.308	0.9227	1.0837	0.262	1.584	0.284	1.716	3.078	0.3249	0.797	0.687	5.469	0.223	1.777
11	0.905	0.973	0.285	0.9300	1.0753	0.299	1.561	0.321	1.679	3.173	0.3152	0.787	0.812	5.534	0.256	1.744
12	0.866	0.925	0.266	0.9359	1.0684	0.331	1.541	0.354	1.616	3.258	0.3059	0.778	0.924	5.592	0.284	1.716
13	0.832	0.884	0.249	0.9410	1.0627	0.359	1.523	0.382	1.618	3.336	0.2998	0.770	1.026	5.646	0.308	1.692
14	0.802	0.848	0.235	0.9453	1.0579	0.384	1.507	0.406	1.594	3.407	0.2935	0.762	1.121	5.693	0.329	1.671
15	0.775	0.816	0.223	0.9490	1.0537	0.406	1.492	0.428	1.572	3.472	0.2880	0.755	1.207	5.737	0.348	1.652
16	0.750	0.788	0.212	0.9523	1.0501	0.427	1.478	0.448	1.552	3.532	0.2831	0.749	1.285	5.779	0.364	1.636
17	0.728	0.762	0.203	0.9551	1.0470	0.445	1.465	0.466	1.534	3.588	0.2787	0.743	1.359	5.817	0.379	1.621
18	0.707	0.738	0.194	0.9576	1.0442	0.461	1.454	0.482	1.518	3.640	0.2747	0.738	1.426	5.854	0.392	1.608
19	0.688	0.717	0.187	0.9599	1.0418	0.477	1.443	0.497	1.503	3.689	0.2711	0.733	1.490	5.888	0.404	1.596
20	0.671	0.697	0.180	0.9619	1.0396	0.491	1.433	0.510	1.490	3.735	0.2677	0.729	1.548	5.922	0.414	1.586
21	0.655	0.679	0.173	0.9638	1.0376	0.504	1.424	0.523	1.477	3.778	0.2647	0.724	1.606	5.950	0.425	1.575
22	0.640	0.662	0.167	0.9655	1.0358	0.516	1.415	0.534	1.466	3.819	0.2618	0.720	1.659	5.979	0.434	1.566
23	0.626	0.647	0.162	0.9670	1.0342	0.527	1.407	0.545	1.455	3.858	0.2592	0.716	1.710	6.006	0.443	1.557
24	0.612	0.632	0.157	0.9684	1.0327	0.538	1.399	0.555	1.445	3.895	0.2567	0.712	1.759	6.031	0.452	1.548
25	0.600	0.619	0.153	0.9696	1.0313	0.548	1.392	0.565	1.435	3.931	0.2544	0.709	1.804	6.058	0.459	1.541
Over 25	$\frac{3}{\sqrt{n}}$	$\frac{3}{\sqrt{n}}$	—	—	—	±	§	±	§	—	—	—	—	—	—	—

1 Reproduced by permission from *ASTM Manual on Quality Control of Materials*, American Society for Testing Materials, Philadelphia, Pa., 1951.

$$\pm 1 - \frac{3}{\sqrt{2n}} \quad \pm 1 + \frac{3}{\sqrt{2n}}$$

BIBLIOGRAFIA

BOWKER AND LIEBERMAN
Engineering Statistics
Prentice Hall 2a. Ed.

GOEL AND WU
Economically Optimum
Design of CUSUM Charts
Management Science, Vol. 19
No. 11, July 1973.

GRANT AND LEAVENWORTH
Statistical Quality Control
McGraw - Hill

LADANY S.
Optimal Use of Control Charts for
Controlling Current Production
Management Science, Vol. 19,
No. 7, March 1973.

RICE
Control Charts
Wiley

INSPECCION POR MUESTREO

N O T A S

JOEL O. AGUIRRE R.
Julio de 1980.

I N D I C E

- Conceptos de Inspección por Muestreo
 - Inspección para Atributos
 - Planes de Muestreo Dodge - Romig
 - Norma Militar 105 D (MIL-STD-105 D)
 - Inspección para Variables
(Muestreo Lote por Lote)
 - Inspección por Muestreo Contínuo
 - Bibliografía
-

CONCEPTOS DE INSPECCION POR MUESTREO

La inspección por muestreo, se puede clasificar como sigue:

- a). Inspección por muestreo lote por lote
- b). Inspección por muestreo continuo

En el primer caso, una vez que los artículos se agrupan en lotes, se obtiene una muestra de un lote y se acepta o se rechaza ese lote en base a su calidad.

En la inspección por muestreo continuo, los resultados de la inspección realizada se utilizan para determinar si se efectúa inspección total o inspección por muestreo en los siguientes artículos por inspeccionar.

Los planes de muestreo también se han clasificado de acuerdo con las características de calidad que se están considerando:

- a). Inspección para variables
- b). Inspección para atributos

Según se trate, de características de calidad expresadas numéricamente o que los artículos sean clasificados en defectuosos o no defectuosos.

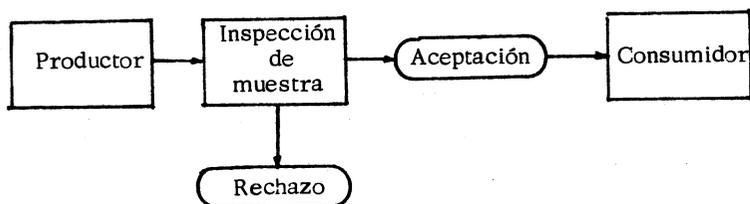
La alternativa a la inspección por muestreo, es la revisión de cada artículo, o sea, la inspección al 100 por ciento.

El costo de este método puede ser prohibitivo y en ocasiones no es posible de llevarse a efecto. Por otro lado, la perfección en calidad, rara vez es alcanzada.

INSPECCION PARA ATRIBUTOS

En un proceso de producción, inevitablemente se producen artículos defectuosos. Con frecuencia los artículos son abastecidos al consumidor en lotes, que pueden ser examinados por el fabricante antes del embarque o por el consumidor antes de su aceptación.

La inspección, generalmente, consiste en la obtención de una muestra de cada lote para después, decidir en base a la evidencia mostrada por la muestra, si se acepta o se rechaza el lote.



En un esquema de muestreo llamado simple, se toma una sola muestra y el lote se acepta cuando no hay más de un cierto número de artículos defectuosos.

Por ejemplo: Se puede tomar una muestra de tamaño 100 de cada lote y aceptar el lote cuando existe, cuando mucho, sólo

un artículo defectuoso. En caso contrario, se rechaza el lote. Cuando un lote es rechazado en un plan de muestreo, puede ser devuelto al fabricante; se puede comprar a bajo precio o puede ser destruido.

También los lotes rechazados pueden sujetarse a una inspección del 100 por ciento para reemplazar todos los artículos defectuosos por artículos buenos.

Un plan de muestreo de este tipo se le llama "rectificante".

Curva característica de operación:

En el caso de un método de muestreo por atributos, el funcionamiento de un plan de muestreo se puede describir por la curva característica de operación o curva OC.

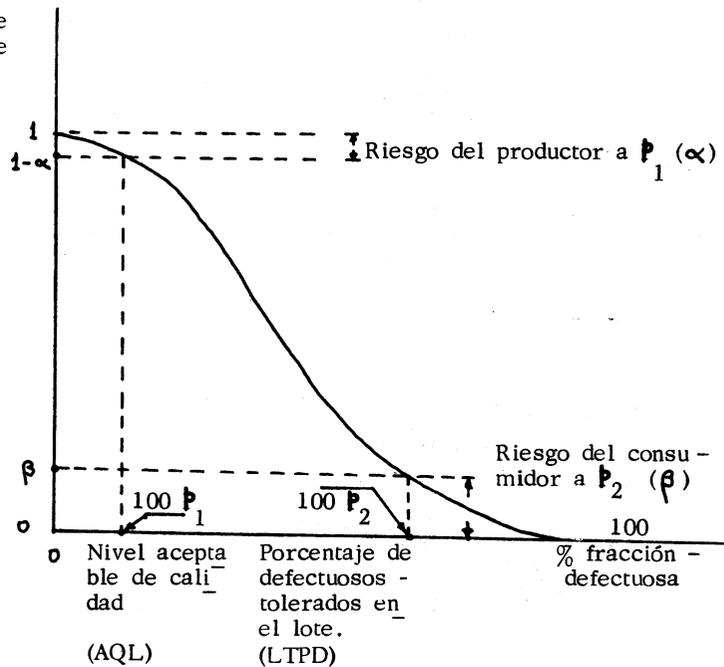
Si se llama p a la fracción defectuosa en un lote, cuando el valor de p es muy pequeño, es muy probable que el lote sea aceptado; en caso contrario, cuando p es grande, el lote tiene muchas probabilidades de ser rechazado.

La curva OC es una gráfica de la probabilidad de aceptar un lote contra el valor de la fracción defectuosa p .

De acuerdo a esto cuando $p = 0$, no existen defectuosos en el lote y habrá certeza de que será aceptado, o sea, $P(\text{aceptar el lote}) = 1$.

Por otro lado, cuando $p = 1$, o sea, que todos los artículos son defectuosos, habrá certeza de que el lote será rechazado. $P(\text{aceptar el lote}) = 0$.

Probabilidad de aceptar un lote



El diseño de un plan de muestreo implica que los lotes de buena calidad se acepten la mayoría de las ocasiones, así como que los lotes de mala calidad se detecten y se rechacen la mayoría de las veces.

El productor y el consumidor deberían decidir conjuntamente un plan que sea aceptable para ambos, para lo cual el consumidor deberá especificar el nivel de calidad que le gustaría obtener del productor.

De acuerdo a esto, se ha definido NIVEL ACEPTABLE DE CALIDAD (AQL por Acceptable Quality Level) como el máximo porcentaje de artículos defectuosos aceptables al consumidor (p_1).

La probabilidad que un buen lote sea rechazado, es el riesgo del productor y está cuantificado por α .

El consumidor también decide sobre un nivel de calidad que es inaceptable. La proporción de artículos defectuosos en un lote que se considera malo, se le denota como p_2 y su porcentaje $100 p_2$ es el PORCENTAJE DE DEFECTUOSOS TOLERADOS EN EL LOTE (LTPD por Lot Tolerance Percent Defective).

Estos lotes serían rechazados con inspección 100%.

La probabilidad de que un lote malo sea aceptado, se le llama riesgo del consumidor y se le indica como β .

Con frecuencia este valor se le toma como 10%.

De acuerdo con la curva OC, los valores de p por encima de p_2 , son inaceptables por lo que el productor deberá procurar que su programa de control de calidad mantenga a p por debajo de p_1 .

Cuando la fracción defectuosa se incrementa de p_1 a p_2 , existen más probabilidades de rechazar los lotes, lo cual va a afectar económicamente al productor.

En la práctica, es usual diseñar un plan de muestreo para valores dados de p_1 , α , p_2 y β . Por ejemplo: el consumidor puede especificar que el producto lo reciba con un 2% de defectuoso o menos, y un riesgo del 10%.

También puede especificar que, aquellos lotes que contengan más del 8% de artículos defectuosos, serán inaceptables, si además se fija un riesgo del productor del 5%; se tiene $p_1 = 0.02$, $\alpha = 0.05$, $p_2 = 0.08$ y $\beta = 0.10$, con lo cual se cuenta con

los puntos necesarios para encontrar un método de muestreo cuya curva OC contenga esos conceptos.

PLANES DE MUESTREO DODGE-ROMIG

Una de las más importantes contribuciones a los métodos de inspección por muestreo, fué realizada por Dodge y Romig al considerar que, puede reemplazar cualquier lote rechazado por un método de muestreo, sujetarse a una inspección al 100% y rectificarse, ésto es, los artículos defectuosos por artículos buenos.

En los métodos de Dodge y Romig se refleja el papel del productor y del consumidor en su relación con los costos de inspección incluyéndose el costo del muestreo y el costo de revisar lotes rechazados.

Utilizadas adecuadamente, las tablas Dodge-Romig proporcionan planes que minimizan la cantidad esperada de inspección.

El consumidor recibirá dos tipos de lotes, el primer tipo podrá contener algunos artículos defectuosos, aunque el lote se haya aceptado en la inspección por muestreo. El segundo tipo de lote no contendrá defectuosos puesto que se ha inspeccionado al 100% y se ha rectificado. De esos dos tipos de lotes se puede calcular la calidad final promedio (AOQ por Average Outgoing Quality), que es la proporción promedio de defectuosos

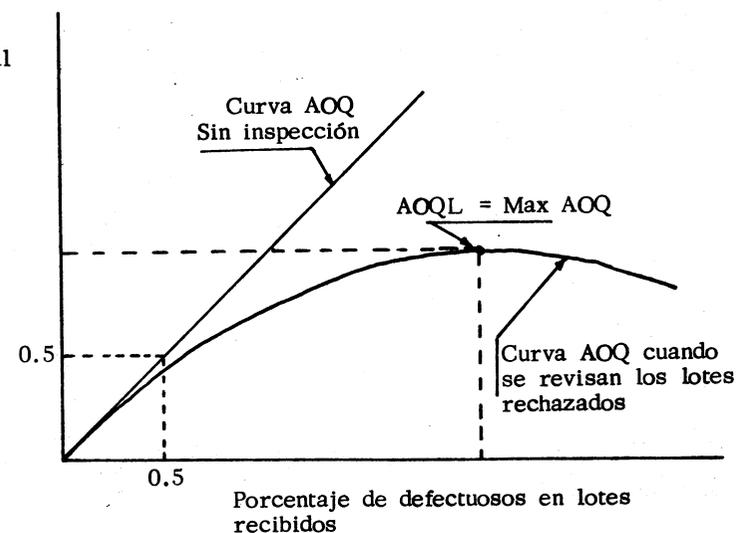
recibidos por el consumidor.

p es la fracción de defectuosos en un lote antes de la inspección por muestreo.

Cuando $p = 0$, obviamente $AOQ=0$; cuando $p = 1$, todos los lotes se sujetarán a una inspección al 100% y se rectificarán para tener un $AOQ=0$.

Entre esos dos valores, el AOQ tendrá un máximo que se llama Limite de la Calidad Final Promedio (AOQL por Average Outgoing Quality Limit).

Calidad final promedio AOQ



Porcentaje de defectuosos en lotes recibidos

La ventaja del esquema rectificante es que el consumidor sabe que el AOQ debe ser menor que el AOQL no importando la proporción de defectuosos que tiene el productor.

Las tablas de Dodge - Romig se presentan en dos formas, en ambas es necesario especificar la calidad promedio del material producido en el proceso (Promedio del Proceso).

Si este porcentaje de defectuosos promedio del proceso está cerca de un nivel de calidad inaceptable, entonces será necesario enfatizar el muestreo; por otro lado, si es relativamente bajo, entonces se requerirán muestras más pequeñas.

Este porcentaje de defectuosos se puede estimar de registros pasados:
$$\frac{\text{Número total de defectuosos} \times 100}{\text{Número total de artículos inspeccionados}}$$

Una de las formas de clasificación de las tablas Dodge - Romig es de acuerdo al porcentaje de defectuosos tolerados en el lote (LTPD). Como se mencionó, el LTPD se refiere a aquella calidad arriba de la cual existe poca probabilidad de que un lote sea aceptado.

Un consumidor que revise lotes de un proceso en el valor igual o mayor al LTPD, tiene poca probabilidad de aceptar tales lotes. Sin embargo, con este tipo de clasificación no se especi-

fica la protección que tiene un productor contra el rechazo de lotes con mejor calidad que la definida al nivel del LTPD.

La otra forma de clasificación de las tablas Dodge - Romig, es siguiendo:

El Límite de la calidad final promedio (AOQL), que es el límite superior de la calidad que se puede esperar en el largo plazo cuando todos los lotes rechazados se sujetan a una inspección al 100% y se reemplazan los artículos defectuosos por artículos buenos.

- Tablas LTPD con muestreo simple (Tabla No. 1)

Los planes de muestreo permiten encontrar el tamaño de la muestra (n) que se debe inspeccionar y el número de aceptación (c), que es el máximo número de defectuosos para permitir la aceptación de un lote.

Para conocer n y c, se pueden escoger 6 planes a partir de un tamaño de lote. El plan se selecciona a partir de especificar el riesgo del consumidor, el valor del LTPD y el promedio del proceso.

En la tabla se selecciona la columna encabezada por un rango de posibles promedios del proceso (porcentaje pro

medio de defectuosos).

En cada plan se asocia el AOQL correspondiente.

Cuando no existen datos para estimar el promedio del proceso, el plan se deberá seleccionar a partir de la columna derecha de la tabla, ésto dará a los lotes buenos una mejor oportunidad de aceptación.

- Tablas LTPD con muestreo doble (Tabla No. 2)

Estas tablas presentan las mismas características de las tablas anteriores.

En el muestreo doble, la primera muestra que se toma, siempre es menor que la correspondiente en el muestreo simple, pero cuando se necesita tomar una segunda muestra, el tamaño combinado excede el tamaño de muestra encontrado en el muestreo simple.

Por lo general, la cantidad de muestreo es menor en el plan de muestreo doble, dado que la segunda muestra no siempre se toma, dependiendo de la calidad observada.

- Tablas AOQL de muestreo simple (Tabla No. 3)

Los planes se han desarrollado de acuerdo con diferen -

tes valores de AOQL.

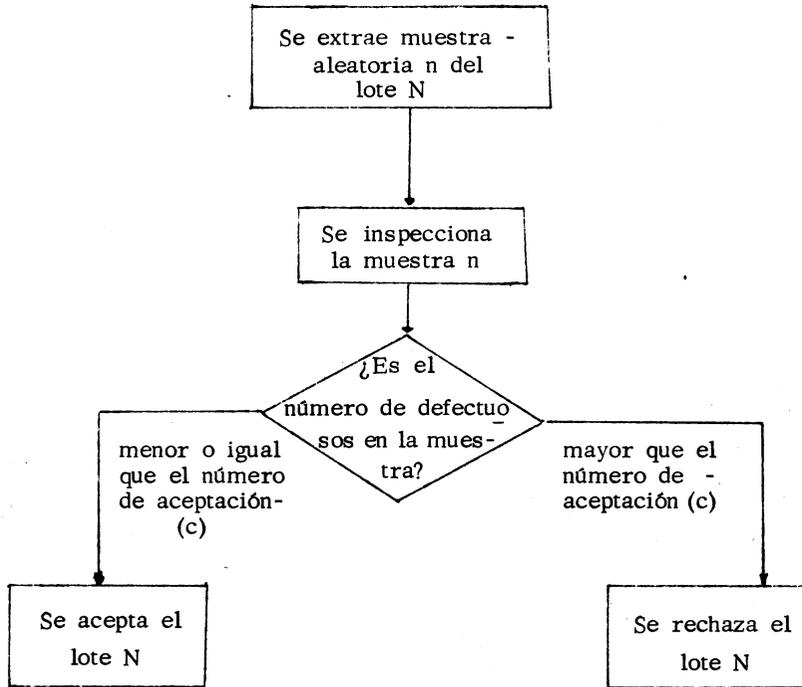
Todos los planes de muestreo presentan el mismo AOQL, suponiendo que se corrigen todos los lotes rechazados, además se acompaña la tabla de valores del LTPD para cada plan.

Para cada tamaño de lote existen seis planes. El plan se selecciona a partir de la columna encabezada por un rango de los posibles promedios del proceso.

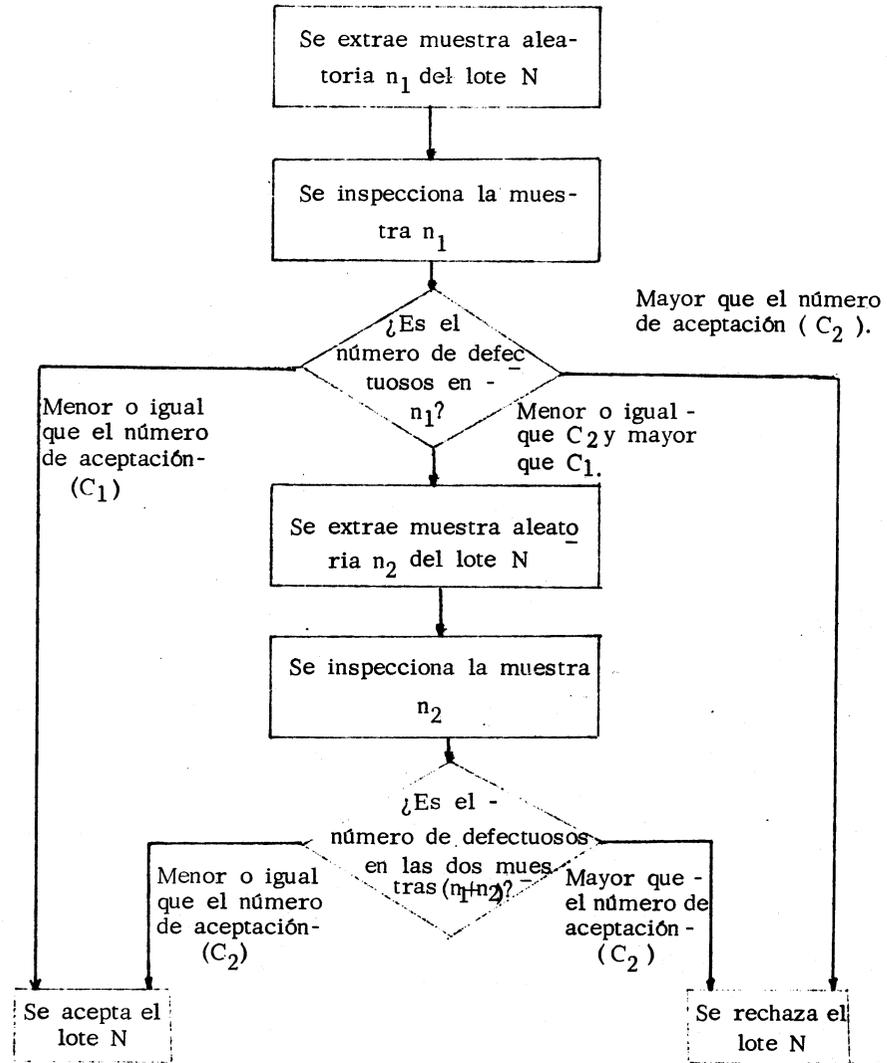
Tablas AOQL de muestreo doble (Tabla No. 4)

Estos planes se presentan de acuerdo con valores de AOQL iguales que en los planes de muestreo sencillo, y las tablas tienen las mismas características que las anteriores, excepto que se utiliza el muestreo doble.

MUESTREO SIMPLE



MUESTREO DOBLE



Example of Dodge-Romig Single Sampling Lot Tolerance Tables¹
(Lot tolerance percent defective = 4.0%; consumer's risk = 0.10)

Lot Size	Process Average 0 to 0.04%			Process Average 0.05 to 0.40%			Process Average 0.41 to 0.80%			Process Average 0.81 to 1.20%			Process Average 1.21 to 1.60%			Process Average 1.61 to 2.00%		
	n	c	AOQL %	n	c	AOQL %	n	c	AOQL %	n	c	AOQL %	n	c	AOQL %	n	c	AOQL %
1-35	All	0	0	All	0	0	All	0	0	All	0	0	All	0	0	All	0	0
36-50	34	0	0.35	34	0	0.35	34	0	0.35	34	0	0.35	34	0	0.35	34	0	0.35
51-100	44	0	0.47	44	0	0.47	44	0	0.47	44	0	0.47	44	0	0.47	44	0	0.47
101-200	50	0	0.55	50	0	0.55	50	0	0.55	50	0	0.55	50	0	0.55	50	0	0.55
201-300	55	0	0.57	55	0	0.57	85	1	0.71	85	1	0.71	85	1	0.71	85	1	0.71
301-400	55	0	0.58	55	0	0.58	90	1	0.72	120	2	0.80	120	2	0.80	145	3	0.86
401-500	55	0	0.60	55	0	0.60	90	1	0.77	120	2	0.87	150	3	0.91	150	3	0.91
501-600	55	0	0.61	95	1	0.76	125	2	0.87	125	2	0.87	155	3	0.93	185	4	0.95
601-800	55	0	0.62	95	1	0.78	125	2	0.93	160	3	0.97	190	4	1.0	220	5	1.0
801-1,000	55	0	0.63	95	1	0.80	130	2	0.92	165	3	0.98	220	5	1.1	255	6	1.1
1,001-2,000	55	0	0.65	95	1	0.84	165	3	1.1	195	4	1.2	255	6	1.3	315	8	1.4
2,001-3,000	95	1	0.86	130	2	1.0	165	3	1.1	230	5	1.3	320	8	1.4	405	11	1.6
3,001-4,000	95	1	0.86	130	2	1.0	195	4	1.2	260	6	1.4	350	9	1.5	465	13	1.6
4,001-5,000	95	1	0.87	130	2	1.0	195	4	1.2	290	7	1.4	380	10	1.6	520	15	1.7
5,001-7,000	95	1	0.87	130	2	1.0	200	4	1.2	290	7	1.5	410	11	1.7	575	17	1.9
7,001-10,000	95	1	0.88	130	2	1.1	230	5	1.4	325	8	1.5	440	12	1.7	645	19	1.9
10,001-20,000	95	1	0.88	165	3	1.2	265	6	1.4	355	9	1.6	500	14	1.8	730	22	2.0
20,001-50,000	95	1	0.88	165	3	1.2	295	7	1.5	380	10	1.7	590	17	2.0	870	26	2.1
50,001-100,000	95	1	0.88	200	4	1.3	325	8	1.6	410	11	1.8	620	18	2.0	925	29	2.2

¹ From H. F. Dodge and H. Romig, *Sampling Inspection Tables*, 2nd ed., John Wiley & Sons, Inc., New York, 1959. Reprinted by permission of John Wiley & Sons, Inc.

Tabla 1

- 200 -
Example of Dodge-Romig Double Sampling Lot Tolerance Tables¹
(Lot tolerance percent defective = 4.0%; consumer's risk = 0.10)

Tabla 2

Lot Size	Process Average 0 to 0.04%						Process Average 0.05 to 0.40%						Process Average 0.41 to 0.80%					
	Trial 1		Trial 2		AOQL in %		Trial 1		Trial 2		AOQL in %		Trial 1		Trial 2		AOQL in %	
	n ₁	c ₁	n ₂	n ₁ + n ₂	c ₂	in %	n ₁	c ₁	n ₂	n ₁ + n ₂	c ₂	in %	n ₁	c ₁	n ₂	n ₁ + n ₂	c ₂	in %
1-35	All	0	—	—	—	0	All	0	—	—	—	0	All	0	—	—	—	0
36-50	34	0	—	—	—	0.35	34	0	—	—	—	0.35	34	0	—	—	—	0.35
51-75	40	0	—	—	—	0.43	40	0	—	—	—	0.43	40	0	—	—	—	0.43
76-100	50	0	25	75	1	0.46	50	0	25	75	1	0.46	50	0	25	75	1	0.46
101-150	55	0	30	85	1	0.55	55	0	30	85	1	0.55	55	0	30	85	1	0.55
151-200	60	0	30	90	1	0.64	60	0	30	90	1	0.64	60	0	30	90	1	0.64
201-300	60	0	35	95	1	0.70	60	0	35	95	1	0.70	60	0	65	125	2	0.75
301-400	65	0	35	100	1	0.71	65	0	35	100	1	0.71	65	0	65	130	2	0.80
401-500	65	0	40	105	1	0.73	65	0	70	135	2	0.83	65	0	70	135	2	0.83
501-600	65	0	40	105	1	0.74	65	0	75	140	2	0.85	65	0	100	165	3	0.93
601-800	65	0	40	105	1	0.75	65	0	75	140	2	0.87	65	0	110	175	3	0.97
801-1,000	70	0	40	110	1	0.76	70	0	75	145	2	0.90	70	0	105	175	3	0.98
1,001-2,000	70	0	40	110	1	0.78	70	0	80	150	2	0.94	70	0	145	215	4	1.1
2,001-3,000	70	0	80	150	2	0.95	70	0	115	185	3	1.1	70	0	180	250	5	1.2
3,001-4,000	70	0	80	150	2	0.96	70	0	115	185	3	1.1	110	1	175	285	6	1.3
4,001-5,000	70	0	80	150	2	0.97	70	0	115	185	3	1.1	115	1	170	285	6	1.3
5,001-7,000	70	0	80	150	2	0.98	70	0	115	185	3	1.1	115	1	205	320	7	1.4
7,001-10,000	70	0	80	150	2	0.98	70	0	150	220	4	1.2	115	1	205	320	7	1.4
10,001-20,000	70	0	80	150	2	0.98	70	0	150	220	4	1.2	115	1	235	350	8	1.5
20,001-50,000	70	0	80	150	2	0.99	70	0	150	220	4	1.2	115	1	270	385	9	1.6
50,001-100,000	70	0	80	150	2	0.99	70	0	185	255	5	1.3	115	1	300	415	10	1.7

(continued). Example of Dodge-Romig Double Sampling Lot Tolerance Tables

Lot Size	Process Average 0.81 to 1.20%						Process Average 1.21 to 1.60%						Process Average 1.61 to 2.00%					
	Trial 1		Trial 2		AOQL in %		Trial 1		Trial 2		AOQL in %		Trial 1		Trial 2		AOQL in %	
	n ₁	c ₁	n ₂	n ₁ + n ₂	c ₂	in %	n ₁	c ₁	n ₂	n ₁ + n ₂	c ₂	in %	n ₁	c ₁	n ₂	n ₁ + n ₂	c ₂	in %
1-35	All	0	—	—	—	0	All	0	—	—	—	0	All	0	—	—	—	0
36-50	34	0	—	—	—	0.35	34	0	—	—	—	0.35	34	0	—	—	—	0.35
51-75	40	0	—	—	—	0.43	40	0	—	—	—	0.43	40	0	—	—	—	0.43
76-100	50	0	25	75	1	0.46	50	0	25	75	1	0.46	50	0	25	75	1	0.46
101-150	55	0	30	85	1	0.55	55	0	30	85	1	0.55	55	0	30	85	1	0.55
151-200	60	0	55	115	2	0.68	60	0	55	115	2	0.68	60	0	55	115	2	0.68
201-300	60	0	65	125	2	0.75	60	0	90	150	3	0.84	60	0	90	150	3	0.84
301-400	65	0	95	160	3	0.86	65	0	95	160	3	0.86	65	0	120	185	4	0.92
401-500	65	0	100	165	3	0.92	65	0	130	195	4	0.96	105	1	140	245	6	1.0
501-600	65	0	135	200	4	1.0	105	1	145	250	6	1.1	105	1	175	280	7	1.1
601-800	65	0	140	205	4	1.0	105	1	185	290	7	1.2	105	1	210	315	8	1.2
801-1,000	110	1	155	265	6	1.2	110	1	210	320	8	1.2	145	2	230	375	10	1.3
1,001-2,000	110	1	195	305	7	1.3	150	2	240	390	10	1.5	180	3	295	475	13	1.6
2,001-3,000	110	1	260	370	9	1.4	185	3	305	490	13	1.6	220	4	410	630	18	1.7
3,001-4,000	150	2	255	405	10	1.5	185	3	340	525	14	1.6	285	6	465	750	22	1.8
4,001-5,000	150	2	285	435	11	1.6	185	3	395	580	16	1.7	285	6	520	805	24	1.9
5,001-7,000	150	2	320	470	12	1.6	185	3	435	620	17	1.7	320	7	585	905	27	2.0
7,001-10,000	150	2	325	475	12	1.7	220	4	460	680	19	1.9	320	7	645	965	29	2.1
10,001-20,000	150	2	355	505	13	1.7	220	4	495	715	20	1.9	350	8	790	1,140	35	2.2
20,001-50,000	150	2	420	570	15	1.7	255	5	575	830	24	2.0	385	9	895	1,280	40	2.3
50,001-100,000	150	2	450	600	16	1.8	255	5	665	920	27	2.1	415	10	985	1,400	44	2.4

¹ From H. F. Dodge and H. Romig, *Sampling Inspection Tables*, 2nd ed., John Wiley & Sons, Inc., New York, 1959. Reprinted by permission of John Wiley & Sons, Inc.

Tabla 4

Example of Dodge-Romig Double Sampling AOQL Tables¹
(Average outgoing quality limit = 1.0%)

Lot Size	Process Average 0 to 0.02%						Process Average 0.03 to 0.20%						Process Average 0.21 to 0.40%											
	Trial 1			Trial 2			p _r %	Trial 1			Trial 2			p _r %	Trial 1			Trial 2			p _r %			
	n ₁	c ₁	n ₂	n ₁ + n ₂	c ₂	n ₁		c ₁	n ₂	n ₁ + n ₂	c ₂	n ₁	c ₁		n ₂	n ₁ + n ₂	c ₂	n ₁	c ₁	n ₂		n ₁ + n ₂	c ₂	
1-25	All	0	—	—	—	—	All	0	—	—	—	—	All	0	—	—	—	—	—	—	—	—		
26-50	22	0	—	—	—	7.7	22	0	—	—	—	7.7	22	0	—	—	—	—	—	—	—	7.7		
51-100	33	0	17	50	1	6.9	33	0	17	50	1	6.9	33	0	17	50	1	6.9	33	0	17	50	1	6.9
101-200	43	0	22	65	1	5.8	43	0	22	65	1	5.8	43	0	22	65	1	5.8	43	0	22	65	1	5.8
201-300	47	0	28	75	1	5.5	47	0	28	75	1	5.5	47	0	28	75	1	5.5	47	0	28	75	1	5.5
301-400	49	0	31	80	1	5.4	49	0	31	80	1	5.4	49	0	31	80	1	5.4	55	0	60	115	2	4.8
401-500	50	0	30	80	1	5.4	50	0	30	80	1	5.4	55	0	65	120	2	4.7	55	0	65	120	2	4.7
501-600	50	0	30	80	1	5.4	50	0	30	80	1	5.4	60	0	65	125	2	4.6	60	0	65	125	2	4.6
601-800	50	0	35	85	1	5.3	60	0	70	130	2	4.5	60	0	70	130	2	4.5	60	0	70	130	2	4.5
801-1,000	55	0	30	85	1	5.2	60	0	75	135	2	4.4	60	0	75	135	2	4.4	60	0	75	135	2	4.4
1,001-2,000	55	0	35	90	1	5.1	65	0	75	140	2	4.3	75	0	120	195	3	3.8	75	0	120	195	3	3.8
2,001-3,000	65	0	80	145	2	4.2	65	0	80	145	2	4.2	75	0	125	200	3	3.7	75	0	125	200	3	3.7
3,001-4,000	70	0	80	150	2	4.1	70	0	80	150	2	4.1	80	0	175	255	4	3.5	80	0	175	255	4	3.5
4,001-5,000	70	0	80	150	2	4.1	70	0	80	150	2	4.1	80	0	180	260	4	3.4	80	0	180	260	4	3.4
5,001-7,000	70	0	80	150	2	4.1	75	0	125	200	3	3.7	80	0	180	260	4	3.4	80	0	180	260	4	3.4
7,001-10,000	70	0	80	150	2	4.1	80	0	125	205	3	3.6	85	0	180	265	4	3.3	85	0	180	265	4	3.3
10,001-20,000	70	0	80	150	2	4.1	80	0	130	210	3	3.6	90	0	230	320	5	3.2	90	0	230	320	5	3.2
20,001-50,000	75	0	80	155	2	4.0	80	0	135	215	3	3.6	95	0	300	395	6	2.9	95	0	300	395	6	2.9
50,001-100,000	75	0	80	155	2	4.0	85	0	180	265	4	3.3	170	1	380	550	8	2.6	170	1	380	550	8	2.6

Example of Dodge-Romig Single Sampling AOQL Tables¹
(Average outgoing quality limit = 1.0%)

Lot Size	Process Average 0 to 0.02%			Process Average 0.03 to 0.20%			Process Average 0.21 to 0.40%			Process Average 0.41 to 0.60%			Process Average 0.61 to 0.80%			Process Average 0.81 to 1.00%		
	n	c	p _r %	n	c	p _r %	n	c	p _r %	n	c	p _r %	n	c	p _r %	n	c	p _r %
1-25	All	0	—	All	0	—	All	0	—	All	0	—	All	0	—	All	0	—
26-50	22	0	7.7	22	0	7.7	22	0	7.7	22	0	7.7	22	0	7.7	22	0	7.7
51-100	27	0	7.1	27	0	7.1	27	0	7.1	27	0	7.1	27	0	7.1	27	0	7.1
101-200	32	0	6.4	32	0	6.4	32	0	6.4	32	0	6.4	32	0	6.4	32	0	6.4
201-300	33	0	6.3	33	0	6.3	33	0	6.3	33	0	6.3	33	0	6.3	65	1	5.0
301-400	34	0	6.1	34	0	6.1	34	0	6.1	70	1	4.6	70	1	4.6	70	1	4.6
401-500	35	0	6.1	35	0	6.1	35	0	6.1	70	1	4.7	70	1	4.7	70	1	4.7
501-600	35	0	6.1	35	0	6.1	75	1	4.4	75	1	4.4	75	1	4.4	75	1	4.4
601-800	35	0	6.2	35	0	6.2	75	1	4.4	75	1	4.4	75	1	4.4	120	2	4.2
801-1,000	35	0	6.3	35	0	6.3	80	1	4.4	80	1	4.4	120	2	4.3	120	2	4.3
1,001-2,000	36	0	6.2	80	1	4.5	80	1	4.5	130	2	4.0	130	2	4.0	180	3	3.7
2,001-3,000	36	0	6.2	80	1	4.6	80	1	4.6	130	2	4.0	185	3	3.6	235	4	3.3
3,001-4,000	36	0	6.2	80	1	4.7	135	2	3.9	135	2	3.9	185	3	3.6	295	5	3.1
4,001-5,000	36	0	6.2	85	1	4.6	135	2	3.9	190	3	3.5	245	4	3.2	300	5	3.1
5,001-7,000	37	0	6.1	85	1	4.6	135	2	3.9	190	3	3.5	305	5	3.0	420	7	2.8
7,001-10,000	37	0	6.2	85	1	4.6	135	2	3.9	245	4	3.2	310	5	3.0	430	7	2.7
10,001-20,000	85	1	4.6	135	2	3.9	195	3	3.4	250	4	3.2	435	7	2.7	635	10	2.4
20,001-50,000	85	1	4.6	135	2	3.9	255	4	3.1	380	6	2.8	575	9	2.5	990	15	2.1
50,001-100,000	85	1	4.6	135	2	3.9	255	4	3.1	445	7	2.6	790	12	2.3	1,520	22	1.9

¹ From H. F. Dodge and H. Romig, *Sampling Inspection Tables*, 2nd ed., John Wiley & Sons, Inc., New York, 1959. Reprinted by permission of John Wiley & Sons, Inc.

Tabla 3

(continued). Example of Dodge-Romig Double Sampling AOQL Tables

Lot Size	Process Average 0.41 to 0.60%						Process Average 0.61 to 0.80%						Process Average 0.81 to 1.00%											
	Trial 1			Trial 2			p _r %	Trial 1			Trial 2			p _r %	Trial 1			Trial 2			p _r %			
	n ₁	c ₁	n ₂	n ₁ + n ₂	c ₂	n ₁		c ₁	n ₂	n ₁ + n ₂	c ₂	n ₁	c ₁		n ₂	n ₁ + n ₂	c ₂	n ₁	c ₁	n ₂		n ₁ + n ₂	c ₂	
1-25	All	0	—	—	—	—	All	0	—	—	—	—	All	0	—	—	—	—	All	0	—	—	—	—
26-50	22	0	—	—	—	7.7	22	0	—	—	—	7.7	22	0	—	—	—	—	22	0	—	—	—	7.7
51-100	33	0	17	50	1	6.9	33	0	17	50	1	6.9	33	0	17	50	1	6.9	33	0	17	50	1	6.9
101-200	43	0	22	65	1	5.8	43	0	22	65	1	5.8	47	0	43	90	2	5.4	47	0	43	90	2	5.4
201-300	55	0	50	105	2	4.9	55	0	50	105	2	4.9	55	0	50	105	2	4.9	55	0	50	105	2	4.9
301-400	55	0	60	115	2	4.8	55	0	60	115	2	4.8	60	0	80	140	3	4.5	60	0	80	140	3	4.5
401-500	55	0	65	120	2	4.7	60	0	95	155	3	4.3	60	0	95	155	3	4.3	60	0	95	155	3	4.3
501-600	60	0	65	125	2	4.6	65	0	100	165	3	4.2	65	0	100	165	3	4.2	65	0	100	165	3	4.2
601-800	65	0	105	170	3	4.1	65	0	105	170	3	4.1	70	0	140	210	4	3.9	70	0	140	210	4	3.9
801-1,000	65	0	110	175	3	4.0	70	0	150	220	4	3.8	125	1	180	305	6	3.5	125	1	180	305	6	3.5
1,001-2,000	80	0	165	245	4	3.7	135	1	200	335	6	3.3	140	1	245	385	7	3.2	140	1	245	385	7	3.2
2,001-3,000	80	0	170	250	4	3.6	150	1	265	415	7	3.0	215	2	355	570	10	2.8	215	2	355	570	10	2.8
3,001-4,000	85	0	220	305	5	3.3	160	1	330	490	8	2.8	225	2	455	680	12	2.7	225	2	455	680	12	2.7
4,001-5,000	145	1	225	370	6	3.1	225	2	375	600	10	2.7	240	2	595	835	14	2.5	240	2	595	835	14	2.5
5,001-7,000	155	1	285	440	7	2.9	235	2	440	675	11	2.6	310	3	665	975	16	2.4	310	3	665	975	16	2.4
7,001-10,000	165	1	355	520	8	2.7	250	2	585	835	13	2.4	385	4	785	1,170	19	2.3	385	4	785	1,170	19	2.3
10,001-20,000	175	1	415	590	9	2.6	325	3	655	980	15	2.3	520	6	980	1,500	24	2.2	520	6	980	1,500	24	2.2
20,001-50,000	250	2	490	740	11	2.4	340	3	910	1,250	19	2.2	610	7	1,410	2,020	32	2.1	610	7	1,410	2,020	32	2.1
50,001-100,000	275	2	700	975	14	2.2	420	4	1,050	1,470	22	2.1	770	9	1,850	2,620	41	2.0	770	9	1,850	2,620	41	2.0

¹ From H. F. Dodge and H. Romig, *Sampling Inspection Tables*, 2nd ed., John Wiley & Sons, Inc., New York, 1959. Reprinted by permission of John Wiley & Sons, Inc.

NORMA MILITAR 105 D (MIL-STD-105 D) *

Dentro de los grupos de planes de muestreo para atributos con inspección lote por lote, se encuentran los desarrollados siguiendo el nivel aceptable de Calidad (AQL), que es máximo porcentaje de defectuosos, que para propósitos de inspección por muestreo, puede ser considerado satisfactorio como promedio del proceso.

El valor del AQL que se utiliza en un proceso, se define en un contrato o por la autoridad responsable.

De acuerdo con las normas, diferentes valores de AQL pueden definirse para grupos de defectos o para defectos individuales junto con una lista de las características que se van a inspeccionar.

La probabilidad de aceptación, $1 - \alpha$ en el valor de AQL, usualmente se encuentra cerca del 95% y α es conocida como el riesgo del productor. De esta forma, un productor tiene una buena protección contra el rechazo de lotes de un proceso que se encuentra cerca del AQL.

* Se encuentra establecida como norma oficial mexicana para el "muestreo para la inspección por atributos" y se le identifica como NOM-R-18. Secretaría de Comercio.

Por otro lado, en esta clasificación no se especifica la protección que tiene un consumidor contra la aceptación de un lote peor que el definido por el valor de AQL.

El método más conocido dentro de este esquema de AQL, es la norma militar 105 D (MIL-STD-105 D).

Este procedimiento, originalmente se preparó por el Grupo de Investigación Estadística de la Universidad de Columbia, U.S.A., durante la segunda guerra mundial; después de múltiples revisiones, en Abril de 1963, apareció su más reciente versión, desarrollada conjuntamente por representantes de Estados Unidos, Canadá e Inglaterra con la cooperación de organizaciones para el Control de Calidad.

El MIL-STD-105 D es un sistema de muestreo, esto es, un conjunto de planes de muestreo con reglas para su operación. Sus objetivos se han planteado como:

- a). Proteger al consumidor de la aceptación de lotes malos.
- b). Proteger al productor de tener buenos lotes rechazados.
- c). Procurar que el productor obtenga artículos de buena calidad.

En este sistema se hace diferencia de las denominadas inspecciones normal, rigurosa y reducida.

Las normas señalan el uso de la inspección normal en el inicio de la aplicación del sistema.

La inspección normal se realiza cuando la calidad observada es mejor o igual al AQL, esta inspección se continúa hasta que se hace necesaria la inspección rigurosa o reducida.

La inspección rigurosa se ejecuta cuando la calidad obtenida es peor que el AQL y las normas señalan reglas para cambiar de la normal a la rigurosa.

Esta inspección rigurosa se instituye cuando 2 de 5 lotes consecutivos se han rechazado.

La inspección normal se reinstala cuando 5 lotes consecutivos se han aceptado.

En estas normas existe una regla que discontinúa la inspección: Si 10 lotes consecutivos permanecen en la inspección rigurosa. La inspección bajo el MIL-STD-105 D se detiene, hasta que se realiza alguna acción tendiente a mejorar la calidad obtenida. En este tipo de inspección, se incrementa el riesgo del productor, mientras que disminuye el riesgo del consumidor, o sea, que se disminuye la probabilidad de aceptar lotes malos.

La inspección reducida se efectúa cuando la calidad obtenida es substancialmente mejor que la definida por el valor de AQL.

Esta se instituye cuando se satisfacen las siguientes condiciones:

- 1). Los 10 lotes precedentes (ocasionalmente más para satisfacer (2)) han estado bajo inspección normal y ninguno se ha rechazado.
- 2). El número total de defectuosos (o de defectos) en las muestras de los 10 lotes precedentes es igual o menor a un número definido en la norma.

En esta norma requiere a veces de más de 10 lotes. Estos límites son aproximadamente 2σ unidades de la distribución de Poisson.

O sea:

$$N(AQL) - 2 \sqrt{N(AQL)}$$

donde N es el número de artículos observados en los 10 lotes precedentes.

Si se trata de muestreo doble o múltiple, se incluyen todas las muestras, no solo las primeras.

- 3). La producción se encuentra en estado constante.
- 4). La inspección reducida se considera deseable por una autoridad responsable.

La inspección normal se reinstala si ocurre lo siguiente:

- 1). Se rechaza un lote.
- 2). Un lote considerado aceptable, tiene un número de artículos defectuosos demasiado grande. (Este número se define para cada plan de muestreo reducido).
- 3). La producción se hace irregular.
- 4). Existen otras condiciones que llevan a instituir la inspección normal.

Con la inspección reducida el tamaño de la muestra disminuye aproximadamente un 40% de la inspección normal, con lo cual se incrementa el riesgo del consumidor y disminuye el riesgo del productor.

El uso de la inspección rigurosa y reducida es una característica esencial en el éxito de este método. Con cada plan de inspección normal existe un plan de inspección rigurosa y las re-

glas de cambio correspondientes.

PLANES DE MUESTREO

Los tamaños de muestra son determinados mediante una letra de la A a la S.

Esta letra depende del nivel de inspección y del tamaño del lote. Para uso general existen tres niveles de inspección (I, II y III).

Por lo general, se utiliza el nivel de inspección II.

Los niveles I y II dependen de la exigencia de una mayor o menor discriminación.

Existen otros cuatro niveles de inspección adicionales, s-1, s-2, s-3 y s-4 que se utilizan con tamaños de muestra relativamente pequeños y cuando se pueden o deben tolerar grandes riesgos.

PROCEDIMIENTO

La utilización del MIL-STD-105 D con frecuencia parte de un acuerdo realizado entre un productor y un consumidor sobre los siguientes aspectos:

El tamaño del lote.

- . La selección del AQL
- . El nivel de inspección (usualmente nivel II)
- . Forma de inspección (generalmente inspección normal)
- . Tipo de muestreo (generalmente el muestreo simple)

La norma contiene varias tablas, la (A) define la letra clave correspondiente al tamaño de muestra, de acuerdo con el tamaño del lote y nivel de inspección; esta letra permite identificar el tamaño de la muestra (n) y el número de aceptación en la tabla maestra correspondiente para:

- a). Planes de muestreo simple, normal, riguroso y reducido. (Tablas B, C y D respectivamente).
- b). Planes de muestreo doble, normal, riguroso y reducido.
- c). Planes de muestreo múltiple, normal, riguroso y reducido.

Para cada plan de muestreo simple bajo inspección normal y riguroso, se acompaña el AOQL, y para cada plan de muestreo simple bajo inspección normal, se proporciona el LTPD (llamado "Límite de Calidad" en la norma).

Ejemplo: Existe un contrato entre un productor y un consumidor para entregar lotes de tamaño 1500 para ser inspeccionados

con el MIL-STD-105D y se ha especificado un nivel aceptable de calidad (AQL) del 10%. Se acordó trabajar bajo inspección normal en el nivel de inspección II, utilizando un plan de muestreo simple.

En la tabla A

Con la información del tamaño del lote: 1500 y el nivel de inspección II, se encuentra la letra K, que es la clave para conocer el tamaño de la muestra.

En la tabla B

Con la letra K, el AQL del 10%, forma de inspección normal y tipo de muestreo simple, se encuentra el siguiente plan de muestreo:

$$n = 125 \quad \text{y} \quad c = 21$$

Esto es, de cada lote se selecciona una muestra al azar de tamaño 125 y cada lote se acepta siempre que el número de defectuosos sea menor o igual a 21.

TABLA "A" Letras clave correspondientes al tamaño de la muestra

Tamaño del lote o partido	Niveles de Inspección especiales					Niveles de Inspección generales		
	S-1					S-4		
	S-2	S-3	S-4	S-5	S-6	I	II	III
2	A	A	A	A	A	A	A	B
9	A	A	A	A	A	A	B	C
16	A	A	A	A	B	B	C	D
26	A	B	B	B	C	C	D	E
51	B	B	B	B	C	C	E	F
91	B	B	B	B	C	D	F	G
151	B	C	C	C	D	E	G	H
231	B	C	C	C	D	F	H	J
501	C	C	C	C	D	E	J	K
1201	C	D	D	D	E	H	K	L
3201	C	D	D	D	F	J	L	M
10001	C	D	D	D	F	K	M	N
35001	D	E	E	E	G	L	N	P
150001	D	E	E	E	G	M	P	Q
500001	D	E	E	E	H	N	Q	R

TABLA "B" Planes de muestreo sencillo para inspección normal

Letra clave del tamaño de la muestra	Tamaño de la muestra	Niveles de calidad aceptable																																						
		0.010		0.015		0.025		0.40		0.65		1.0		1.5		2.5		4.0		6.5		10		15		25		40		65		100		150		250		400		
		Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re			
A	2	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	
B	3	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→
C	5	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→
D	8	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→
E	13	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→
F	20	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→
G	32	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→
H	50	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→
J	80	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→
K	125	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→
L	200	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→
M	315	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→
N	500	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	
P	800	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	
Q	1250	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	
R	2000	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	→	

◊ = Utilícese los números del renglón inmediato inferior a la flecha. Si el tamaño de la muestra es igual o Mayor al del lote, efectúese inspección al 100%

◊ = Utilícese los números del renglón inmediato superior a la flecha.

Ac = Número de aceptación.

Re = Número de rechazo.

TABLA "C" Planes de muestreo sencillo para inspección rigurosa

Letra clave del tamaño de la muestra	Tamaño de la muestra	Niveles de calidad aceptable																					
		0.01	0.025	0.05	0.10	0.15	0.25	0.40	0.65	1.0	1.5	2.5	4.0	6.5	10	15	25	40	65	100	150	250	400
A	3	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re
B	3	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re
C	3	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re
D	8	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re
E	13	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re
F	20	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re
G	32	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re
H	50	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re
I	80	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re
J	125	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re
K	200	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re
L	315	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re
M	500	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re
N	800	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re
P	1250	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re
Q	2000	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re
R	3150	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re

◊ = Utilícese los números del renglón inmediato inferior a la flecha. Si el tamaño de la muestra es igual o Mayor al del lote, efectúese inspección al 100%

◊ = Utilícese los números del renglón inmediato superior a la flecha.

Ac = Número de aceptación.

Re = Número de rechazo.

TABLA "D" Planes de muestreo sencillo para inspección reducida

Letra clave del tamaño de la muestra	Tamaño de la muestra	Niveles de calidad aceptable																					
		0.10	0.025	0.05	0.10	0.15	0.25	0.40	0.65	1.0	1.5	2.5	4.0	6.5	10	15	25	40	65	100	150	250	400
A	3	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re
B	3	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re
C	3	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re
D	8	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re
E	13	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re
F	20	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re
G	32	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re
H	50	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re
I	80	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re
J	125	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re
K	200	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re
L	315	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re
M	500	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re
N	800	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re
P	1250	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re
Q	2000	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re
R	3150	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re	Ac	Re

◊ = Utilícese los números del renglón inmediato inferior a la flecha. Si el tamaño de la muestra es igual o Mayor al del lote, efectúese inspección al 100%

◊ = Utilícese los números del renglón inmediato superior a la flecha.

Ac = Número de aceptación.

Re = Número de rechazo.

INSPECCION PARA VARIABLES

Muestreo lote por lote:

Los procedimientos de inspección por variables, se basan en los resultados de una característica de Calidad, medida en una escala contínua, siendo función de ésta la decisión de aceptar o rechazar un lote.

La inspección por variables se aplica si la observación sobre las piezas incluye una medición en una escala contínua y se conoce la forma de su distribución.

Por otro lado, puesto que la inspección por variables hace un mayor uso de la información del lote, en relación con la inspección por atributos, los planes de muestreo para variables requieren de tamaños de muestra más pequeños que al tratar con atributos y con protección semejante.

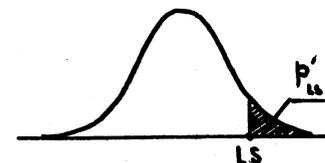
Los planes de muestreo para variables se refieren a una sola característica de Calidad y, generalmente, se supone que las mediciones de esta característica son independientes, variables aleatorias con distribución normal y con media \bar{X}' y desviación estándar σ' que puede ser conocida o desconocida.

La inspección por muestreo para variables, está dividida en tres categorías de planes:

- a). Con desviación estándar conocida.
- b). Con desviación estándar desconocida analizando con la desviación estándar de la muestra, y
- c). Con desviación estándar desconocida, analizando con el rango promedio.

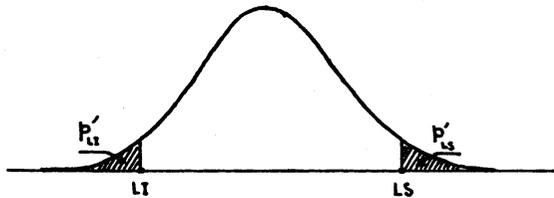
CRITERIOS DE INSPECCION

En la definición de los criterios de inspección, las especificaciones están asociadas a la característica bajo inspección. Si sólo existe un límite superior (LS), se considera que un artículo es defectuoso si su medición se excede al LS, el porcentaje de defectuosos (P'_{LS}) de todo el lote, está representando por el área sombreada de la figura.



Procedimiento semejante se sigue cuando sólo existe límite inferior especificado.

Cuando se especifica límites superior e inferior, los artículos se consideran defectuosos cuando su medición excede a LS o es inferior a LI, y el porcentaje de defectuosos de todo el lote es $P'_{LS} + P'_{LI}$ como se aprecia en la figura.



Cuando el modelo está adecuadamente planteado, y es válida la suposición de una distribución normal, la relación entre el número de unidades defectuosas en el lote y el tamaño del lote - debe ser aproximadamente igual al área fuera de los límites de especificación.

El procedimiento general es el siguiente:

Cuando el porcentaje de defectuosos es suficientemente pequeño, se acepta el lote, de otra forma, el lote se rechaza.

Para esto, se estima el porcentaje de defectuosos a partir de una muestra y en base a esta estimación, es aceptado o rechazado el lote.

En el plan de muestreo se determina:

- El tamaño de muestra (n)
- La estimación del porcentaje de defectuosos a partir de la muestra.
(P_{LS} , P_{LI} ó $P_{LS} + P_{LI}$ según el caso), y
- El máximo porcentaje de defectuosos permisible (M)

Esto significa que cuando se trabaja con la especificación superior

Si $P_{LS} \leq M$ se acepta el lote cuando sólo interesa la especificación inferior

Si $P_{LI} \leq M$ se acepta el lote cuando se trabaja con la especificación superior e inferior, se acepta el lote cuando:

$$P_{LS} + P_{LI} \leq M$$

Los procedimientos usuales para aplicar esta variante de inspección se encuentran tabulados en el denominado MIL-STD-414.

INSPECCION POR MUESTREO CONTINUO

Cuando el muestreo para inspección lote por lote es impráctico o artificioso, se hace conveniente la utilización del muestreo continuo, en el cual se alternan secuencias de inspección consecutiva al 100% y secuencias en las cuales no se hace inspección o bien se hace inspección por muestreo.

En estos planes cada artículo inspeccionado se clasifica como defectuoso o no defectuoso.

Existen diversos métodos, entre los cuales se pueden mencionar el de Dodge, el de Wald y Wolfowitz y el de Girshick.

En el método de Dodge, denominado CSP-1, se inspecciona al 100% las unidades que se han producido y se continúa dicha inspección hasta que i unidades en sucesión se encuentran libres de defectos.

Cuando esto sucede, se discontinúa la inspección al 100% y sólo se inspecciona una fracción f de las unidades, seleccionando una unidad al azar de cada segmento de $\frac{1}{f}$ artículos.

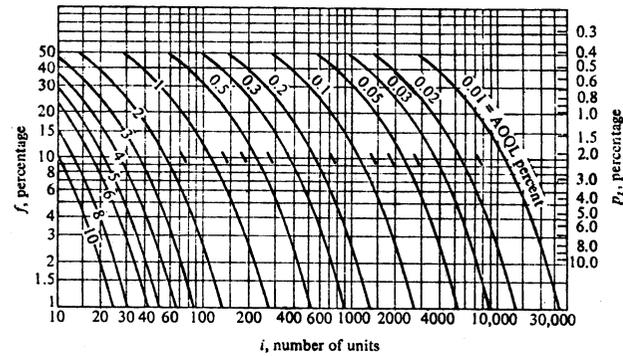
Si se encuentra un solo defectuoso, de inmediato se vuelve a realizar inspección al 100% de las unidades que salen de la producción.

ducción y se continúa hasta que, otra vez, i unidades en sucesión se encuentran sin defectos. (Tabla E).

En este plan, se asegura que el porcentaje de defectuosos, en el largo plazo, en el producto aceptado quedará dentro de un límite fijado, mismo que es el límite promedio de calidad final (AOQL).

Las propiedades estadísticas se realizan bajo la suposición de control, o sea, que la calidad de los artículos son variables -- aleatorias binomiales mutuamente independientes con parámetro constante P_t .

Actualmente existen dos modificaciones al Método CSP-1, identificados como CSP-2 y CSP-3, los cuales permiten el paso a la inspección al 100%, después de encontrar 2 piezas defectuosas y 4 piezas defectuosas respectivamente.



Curves for determining values of f and i for a given value of AOQL in Dodge's CSP-1 plan for continuous production. (Reprinted by permission from "A Sampling Inspection Plan for Continuous Production" by H. F. Dodge, *Annals of Mathematical Statistics*, September, 1943.)

Tabla E

B I B L I O G R A F I A

Bowker - Lieberman
Engineering Statistics, 2a. Ed.
Prentice - Hall
1972

Duncan
Quality Control and Industrial
Statistics, 3a. Ed.
Irwin
1965

Sánchez
La Inspección y el Control de Calidad
Limusa - Wiley

Wetherill, G. B.
Sampling Inspection and Quality
Control
Chapman and Hall
1977

ESTADISTICA NO PARAMETRICA

Conceptos

Joel O. Aguirre R.

INTRODUCCION

Un aspecto importante de la estadística moderna, es la inferencia estadística. La inferencia estadística está relacionada con dos tipos de problemas: estimación de los parámetros de la población y pruebas de hipótesis.

En lo que se refiere a inferencia estadística, se trata de obtener conclusiones acerca de un gran número de eventos sobre la base de observar una porción de ellos. La estadística proporciona herramientas que formalizan y estandarizan los procedimientos para obtener conclusiones.

Un problema común de la inferencia estadística, es determinar, en términos de probabilidad, si las diferencias observadas entre dos muestras significa que las poblaciones muestreadas son realmente diferentes.

En el desarrollo de los métodos modernos de estadística, las primeras técnicas de inferencia que aparecieron, fueron aquellas que hacían un buen número de suposiciones acerca de la naturaleza de la población, de la cual eran obtenidas las observaciones. Puesto que los valores de la población son "parámetros", esas técnicas estadísticas son llamadas paramétricas.

En los métodos paramétricos, la importancia de la distribución --

normal está plenamente justificada por el teorema del límite central, sin embargo, existen situaciones en las cuales no se sabe si la distribución básica es tal, que permita aplicar el teorema del límite central, o si la aproximación a la distribución normal es lo suficientemente buena para su aplicación.

En aquellas situaciones en las que los métodos convencionales, basados en la suposición de una densidad normal, no son aplicables, se necesitará contar con otras técnicas estadísticas que sean independientes de la forma de la densidad. A esas técnicas se les denomina: no paramétricas o métodos de distribución libre.

Algunas técnicas no paramétricas, son llamadas pruebas de rangos o pruebas de orden, lo cual sugiere otra diferencia respecto a las pruebas paramétricas. Por otro lado, mientras una prueba paramétrica se puede enfocar sobre la diferencia entre las medias de dos conjuntos de observaciones, una prueba no paramétrica equivalente, puede enfocarse sobre la diferencia entre dos medianas.

Distribución Básica

Un considerable número de métodos no paramétricos tiene una estructura que descansa en la propiedad de estadísticas de orden -- (x_i es la i ésima observación ordenada, x_1 es la más pequeña de -- las observaciones y x_n es la mayor).

La distribución del área bajo la función de densidad entre dos observaciones, cualesquiera ordenada, es independiente de la forma de la función de densidad.

Para demostrar ésto, sea z una variable aleatoria continua con densidad:

$$f(z) = -\infty < z < \infty$$

Sea z_1, z_2, \dots, z_n una muestra aleatoria de $f(z)$ y sea x_1, \dots, x_n la muestra ordenada. Entonces la densidad conjunta de las x_i es:

$$q(x_1, x_2, \dots, x_n) = n! f(x_1) f(x_2) \dots f(x_n) \quad -\infty < x_1 < x_2 \dots < x_n$$

Usando la notación de que u_i es el área de $f(z)$, la cual es menor que la i -ésima observación ordenada x_i que es:

$$u_i = \int_{-\infty}^{x_i} f(z) dz = F(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

donde $F(z)$ es la acumulativa de $f(z)$.

13
126
Teorema 1

La densidad conjunta de las variables aleatorias u_1, u_2, \dots, u_n es:

$$g(u_1, u_2, \dots, u_n) = n! \quad 0 < u_1 < u_2 \dots < u_n < 1$$

Teorema 2

La densidad de la variable aleatoria v , la cual es el área bajo $f(z)$ entre la mayor y menor observación en una muestra de tamaño n de $f(z)$ es la densidad beta:

$$p(v) = n(n-1) v^{n-2} (1-v), \quad 0 < v < 1$$

Teorema 3

Si la variable aleatoria w_{rs} está en el área bajo $f(z)$ entre x_r y x_s ($r < s$); entonces la densidad de w_{rs} es:

$$f(w_{rs}) = \frac{n!}{(s-r-1)! (n-s+r)!} (w_{rs})^{s-r-1} (1-w_{rs})^{n-s+r} \quad 0 < w_{rs} \leq 1$$

El valor esperado de u_i es:

$$E(u_i) = \int_0^1 \dots \int_0^{u_3} \int_0^{u_2} n! u_i du_1 du_2 \dots du_n = \frac{i}{n+1}$$

de aquí que el área esperada bajo $f(z)$ entre dos observaciones --

sucesivas sea $E(u_i) - E(u_{i-1}) = \frac{1}{n+1}$. Por ésto, en el promedio, las n observaciones ordenadas dividen el área bajo $f(z)$ en $n+1$ partes iguales con área de $1/n+1$, cada una.

Tendencia Central y Dispersión

En el caso paramétrico, como medidas de tendencia central y dispersión se utiliza la media de la población (μ) y la desviación estandar (σ).

Los métodos no paramétricos utilizan otras medidas. El centro de la población, con frecuencia es la mediana ν , que es el punto que divide en dos el área bajo la densidad.

Por ésto, ν está definido por:

$$1/2 = \int_{-\infty}^{\nu} f(z) dz = F(\nu)$$

donde $f(z)$ es la densidad y $F(z)$ es la distribución acumulativa.

La mediana, ocasionalmente se indica como $\xi_{.50}$.

Como medida de dispersión se usa la distancia entre dos puntos de porcentaje. Por ésto, una medida de dispersión utilizada frecuentemente es:

$$t_{0.50} = \xi_{.75} - \xi_{.25}$$

que es llamada rango 50% o rango intercuartil.

Estimación de Punto

La mediana de la población ν es estimada por la mediana de la muestra \tilde{x} , que es la observación media si el tamaño de la muestra es non o el promedio de las dos observaciones medias si el tamaño de la muestra es par. Por ésto:

$$\tilde{x} = x_{k+1} \quad \text{si} \quad n = 2k+1$$

$$\tilde{x} = 1/2 (x_k + x_{k+1}) \quad \text{si} \quad n = 2k$$

La mediana de la muestra \tilde{x} , no es, ordinariamente, un estimador insesgado de ν par cuando n es non por el hecho de que:

$$E [F(\tilde{x})] = F(\nu) \text{ no implica que } E(\tilde{x}) = \nu$$

Sin embargo, el sesgo usualmente no es serio y para muchas densidades útiles se aproxima a cero cuando el tamaño de la muestra se incrementa.

MEDIDAS

Cuando un ingeniero habla respecto a alguna medida, usualmente se comprende que se refiere a la signación de números a observaciones, de manera que esos números se puedan manipular para analizarse, siguiendo ciertas reglas. Con este análisis se obtendrá nueva información respecto a los objetos que se están midiendo.

Existen varios niveles de medidas que se estudian en distintas teorías de medidas.

Estos niveles de medición pueden ser:

- Nominal
- Ordinal
- Intervalar
- Relación

de acuerdo a éstos, se manejan estadísticas y pruebas estadísticas.

Escala Nominal o Clasificatoria

La medición en su nivel más elemental existe cuando un número o algún otro símbolo se usa para clasificar un objeto, una persona o una característica.

Cuando un número u otro símbolo es usado para identificar los gru-

pos a los cuales pertenecen varios objetos, esos números o símbolos constituyen una escala nominal o clasificatoria.

Como ejemplo, puede citarse el sistema psiquiátrico de grupos de diagnóstico. Cuando un médico identifica a una persona como esquizofrénico, paranoide, maniaco depresivo o siconeurótico, está utilizando un símbolo para representar la clase a la cual pertenece esta persona y por ésto, está utilizando una escala nominal.

Propiedades

En esta escala nominal, la operación se inicia a partir de ciertas clases, dadas dentro de un conjunto de subclases mutuamente exclusivo. La única relación es la de equivalencia, ésto es, que los miembros de cualquier subclase deberán ser equivalentes en la propiedad que se mide. Esta relación está simbolizada por el signo igual (=). La relación de equivalencia es reflexiva, simétrica y transitiva.

Operaciones

Algunas de las pruebas estadísticas admisibles son la χ^2 y la prueba binomial, dado que utilizan datos enumerativos, ésto es, frecuencias en categorías, y como medida de asociación, una de las más comunes es la utilización del coeficiente de contingencia C.

Escala Ordinal o de Rangos

Puede ocurrir que los objetos en una categoría de una escala, no sólo sean diferentes de los objetos en otras categorías de esa escala, sino que exista alguna clase de relación entre ellos. Las relaciones típicas entre clases son: más grande, más preferido, más difícil, etc. Tales relaciones pueden ser designadas por una desigualdad ($>$).

Cuando la relación mayor que ($>$) se mantiene para todos los pares de clases, de manera que surge un ordenador de rangos, entonces se tiene una escala ordinal.

Los ejemplos que se pueden citar, son el status socioeconómico y su prestigio por clase, el sistema de grados del ejército, etc.

Propiedades

Axiomáticamente, la diferencia fundamental entre una escala nominal y una escala ordinal radica en que ésta, incorpora no sólo la relación de equivalencia ($=$), sino también la relación mayor que ($>$). Esta última relación es irreflexiva, asimétrica y transitiva.

Operaciones

La estadística más apropiada para describir la tendencia central

de observaciones en una escala ordinal, es la mediana. Las hipótesis pueden probarse, utilizando un buen número de pruebas estadísticas no paramétricas que son llamadas estadísticas de orden. También pueden encontrarse coeficientes de correlación basados en rangos.

Escala Intervalar

Cuando una escala tiene todas las características de una escala ordinal y además se conocen las distancias entre dos puntos cualesquiera de la escala, se logra entonces una medición considerablemente más poderosa que la obtenida con la ordinalidad. En este caso, se ha logrado una escala intervalar. Esta escala se caracteriza por una unidad de medida común y constante que asigna un número real a todo par de objetos en un conjunto ordenado.

En esta clase de medidas, la relación de dos intervalos, cualquiera, es independiente de la unidad de medida y del punto cero. Además, el punto cero y la unidad de medida son arbitrarios.

Como ejemplo de la escala intervalar, es la medición de las temperaturas. Dos diferentes escalas, centígrados y fahrenheit, son utilizadas comúnmente; la unidad de medida y el punto cero son arbitrarios y diferentes, sin embargo, ambas escalas contienen la misma cantidad y clase de información.

En el caso de las ciencias de la conducta, frecuentemente se aspira a crear y utilizar escalas intervalares.

Propiedades

Además de que se especifican equivalencias, como en la escala nominal y relaciones mayor que, como en la escala ordinal, también es posible especificar la relación entre dos intervalos cualesquiera.

Operaciones

La escala intervalar es una escala verdaderamente cuantitativa. Todas las estadísticas paramétricas comunes (media, desviación estandar, coeficiente de correlación, etc.), son aplicables a datos en una escala intervalar como son las pruebas paramétricas estadísticas comunes (Prueba T, Prueba F, etc.).

Escala de Relación

Cuando una escala tiene todas las características de una escala intervalar y adicionalmente tiene el punto cero como su origen, entonces se tiene una escala de relación. En ésta, la relación entre dos puntos cualesquiera de la escala, es independiente de la unidad de medida.

Como ejemplo puede mencionarse a la escala de kilogramos y la de libras. La relación entre dos pesos es independiente de la unidad de medida; así, si determinamos los pesos de dos diferentes objetos, no sólo en libras sino también en kilogramos, se encontraría que la relación de los dos pesos en libras, es idéntico a la relación de los dos pesos en kilogramos.

Propiedades

Las escalas de relación, son encontradas comunmente en las ciencias físicas y se logran sólo cuando todas las cuatro relaciones son operacionalmente posibles para lograr: equivalencia, mayor que, relación conocida entre dos intervalos cualesquiera y relación conocida entre dos valores cualesquiera escalares.

Operaciones

Los números asociados con los valores de la escala de relación, son números verdaderos con un cero verdadero, sólo la unidad de medida es arbitraria.

Cualquier prueba estadística es utilizable cuando se ha logrado la medición de la relación. Con la escala de relación, además de las pruebas estadísticas mencionadas para el caso de las escalas intervalares, se pueden utilizar estadísticas tales como la media

geométrica y el coeficiente de variación.

NIVELES DE MEDICION Y ESTADISTICAS APROPIADAS

<u>Escala</u>	<u>Relaciones Definidas</u>	<u>Ejemplos de Estadísticas Apropriadadas</u>	<u>Pruebas Estadísticas Apropriadadas</u>
Nominal	1) Equivalencia	Modo Frecuencia Coeficiente de Contingencia	Pruebas Estadísticas no Paramétricas
Ordinal	1) Equivalencia 2) Mayor que	Mediana Percentil Spearman (r_s) Kendall (t) Kendall (w)	
Intervalar	1) Equivalencia 2) Mayor que 3) Relación conocida de cualesquiera dos intervalos	Media Desviación Estandar Correlación Producto Momento (Pearson) Correlación Producto Momento Múltiple	Pruebas Estadísticas Paramétricas y no Paramétricas
Relación	1) Equivalencia 2) Mayor que 3) Relación conocida de cualesquiera dos intervalos 4) Relación conocida de cualesquiera dos valores -- escalares	Media Geométrica Coeficiente de Variación	

VENTAJAS DE LAS PRUEBAS ESTADISTICAS NO PARAMETRICAS

- 1) Las probabilidades obtenidas de la mayoría de las pruebas estadísticas no paramétricas, son probabilidades exactas, independientemente de la forma de distribución de la población de la cual fue obtenida la muestra aleatoria.
- 2) Si los tamaños de muestra utilizados son tan pequeños como $n = 6$, deberá utilizarse una prueba estadística no paramétrica, a menos que sea conocida exactamente la naturaleza de la distribución de la población.
- 3) Existen pruebas estadísticas no paramétricas para tratar con muestras tomadas de observaciones de algunas poblaciones diferentes. Ninguna de las pruebas paramétricas puede manejar tales datos sin tener que hacer suposiciones irreales.
- 4) Las pruebas estadísticas no paramétricas pueden manejar datos en rangos o calificaciones, esto es, con datos que sólo pueden ser categorizados como más o menos (más o menos, mejor o peor), mientras que no pueden ser tratados por métodos paramétricos a menos que se hagan suposiciones irreales sobre tales distribuciones.
- 5) Los métodos no paramétricos, permiten tratar datos que son -

clasificatorios (medidas en una escala nominal). Ninguna técnica paramétrica es aplicable a dichos datos.

- 6) Las pruebas estadísticas no paramétricas, son generalmente -- mucho más fáciles de aprender y de aplicar, que las pruebas paramétricas.

DESVENTAJAS DE LAS PRUEBAS ESTADISTICAS NO PARAMETRICAS

- 1) Si todas las suposiciones del modelo paramétrico se cumplen y si las mediciones tienen las características propias paramétricas, entonces no tiene objeto utilizar un método no paramétrico.
- 2) Existe poca información y difusión sobre los métodos no paramétricos.

PRUEBA PARA UNA MUESTRA (BONDAD DE AJUSTE)

La prueba de una muestra es usualmente del tipo de bondad de ajuste. El caso típico es que se obtenga una muestra aleatoria y se pruebe la hipótesis de que dicha muestra fue extraída de una población con determinada distribución.

Una técnica paramétrica comunmente utilizada para este caso, es la prueba t , mediante la cual se prueba la diferencia entre la media observada (muestra) y la media esperada (Población). La prueba t supone que las observaciones en la muestra, provienen de una población que tiene distribución normal. La prueba t requiere también, que las observaciones sean medidas cuando menos en una escala intervalar.

Prueba χ^2

Esta prueba puede ser utilizada para determinar que tan bien, las distribuciones teóricas (normal, binomial, exponencial, etc.), se ajustan a distribuciones empíricas. Frecuentemente se utiliza para probar si existe diferencia significativa entre un número de datos observados que caen dentro de ciertas categorías y un determinado número esperado.

Método

Con el fin de comparar un grupo de frecuencias observadas con un grupo de frecuencias esperadas, habrán que definirse las frecuencias que deben esperarse.

La hipótesis nula (H_0) establece la proporción de observaciones que caen dentro de cada una de las categorías de la presunta población. Esto es, que de la hipótesis nula se deducen las frecuencias esperadas.

La técnica χ^2 , prueba si las frecuencias observadas están lo suficientemente cerca de las frecuencias esperadas que tengan que ocurrir bajo H_0 .

La hipótesis nula puede ser probada con :

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

Donde O_i : Número observado de casos en la categoría i

E_i : Número esperado de casos en la categoría i

De acuerdo a esto, entre más grande es χ^2 , más probable es que las frecuencias observadas no provengan de la población sobre la que se ha basado la hipótesis nula.

Para este tipo de análisis, los grados de libertad: $\nu = K - 1$, -
 donde K es el número de categorías que se están considerando en
 la clasificación.

Ejemplo 1 :

Se dice que la colocación de los caballos en la salida de una carrera
 en un hipódromo, significa ciertas ventajas; la posición 1 es la más
 cercada al lado interno de la pista, la posición 8 es la más alejada.

Ho : No hay diferencia en el número esperado de los ganadores em-
 pezando de cada una de las posiciones de salida y cualquier di-
 ferencia, es debida a variaciones al azar de una muestra alea-
 toria de distribución rectangular: $f_1 = f_2 = \dots = f_8$

H₁ : Las frecuencias $f_1, f_2 \dots f_8$ no son todas iguales.

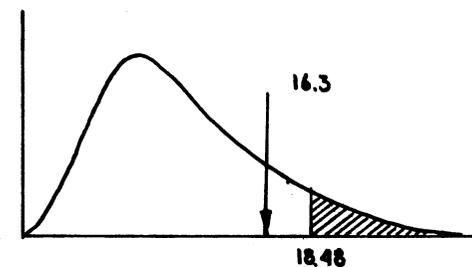
Con: $\alpha = 0.01$

N = 144 Total de ganadores de 18 días de corridas.

Frecuencias	Posiciones								Total
	1	2	3	4	5	6	7	8	
Esperados	18	18	18	18	18	18	18	18	144
Ganadores	29	19	18	25	17	10	15	11	144

$$\chi^2 = \frac{[(29-18)^2 + (19-18)^2 + (18-18)^2 + \dots + (11-18)^2]}{18}$$

$$= 16.3$$



Se rechazaría Ho

Si $\chi^2 > \chi^2_{\alpha, \nu}$

como $\chi^2 = 18.48$
 0.01, 7

Se acepta Ho, no hay
 diferencia en el núme-
 ro esperado de ganado-
 res debido a su posi-
 ción de salida

Ejemplo 2 :

De un conjunto de 80 observaciones se desea probar la hipótesis que
 la población de la cual son tomados los datos, es normal con $\mu=32$ y
 $\sigma=1.8$.

Los datos observados se han agrupado en la siguiente tabla de fre-
 cuencias:

<u>Intervalo</u>	<u>Frecuencia Observada</u>
26.75-28.25	2
28.25-29.75	1
29.75-31.25	16
31.25-32.75	27
32.75-34.25	19
34.25-35.75	11
35.75-37.25	4

Se deberá encontrar:

- La probabilidad de cada intervalo en una distribución normal.
- La frecuencia esperada de cada intervalo.

Así, para el tercer intervalo (29.75 - 31.25)

$$P (29.75 \leq X \leq 31.25) = \Phi \left(\frac{29.75 - 32}{1.8} \right) - \Phi \left(\frac{31.25 - 32}{1.8} \right) \\ \approx 0.2327$$

La frecuencia esperada:

$$n p_3 = 80 \times 0.2327 = 18.6$$

La tabla completa:

<u>Intervalo</u>	<u>Frecuencia Observada</u>	<u>Probabilidad</u>	<u>Frecuencia Esperada</u>
26.75-28.25	2	0.0166	1.33
28.25-29.75	1	0.087	6.96
29.75-31.25	16	0.233	18.60
31.25-32.75	27	0.323	25.90
32.75-34.25	19	0.233	18.60
34.25-35.75	11	0.087	6.96
35.75-37.25	4	0.0166	1.33

Se reagrupa en 5 intervalos, dado que existe la condición que la fracción esperada np_i debe ser mayor o igual a 5 para que sea aplicable la aproximación a la χ^2 .

Entonces $\chi^2 = 9.1$

con $K = 5$

pero $\chi^2_{0.1, \nu=4} = 7.78$

Como $\chi^2 > \chi^2_{\alpha, \nu}$, se rechaza H_0 , los datos observados no vienen de una población con distribución normal.

PRUEBA DE HIPOTESIS PARA DOS MUESTRAS RELACIONADAS
(EN PARES)

Estas pruebas estadísticas se utilizan cuando se desea establecer si dos tratamientos son iguales, o si un tratamiento es mejor que otro en dos muestras cuyas observaciones están relacionadas una a una.

A continuación se describen dos métodos de análisis: La Prueba -- del Signo y La Prueba de Wilcoxon.

Prueba del Signo

Esta prueba recibe su nombre, del hecho que utiliza los signos más y menos para realizar el análisis. Es particularmente útil en in-- vestigaciones en las cuales la medición cuantitativa es imposible o - impráctica, pero que es posible definir rangos respecto a cada uno de los pares

Método

La hipótesis nula que se prueba por esta técnica

$$H_0 : p (X_A > X_B) = p (X_A - X_B) = 1/2$$

X_A es el dato bajo una de las condiciones (o después de un trata-- miento), y X_B es el dato bajo la otra condición (o antes del trata-- miento), o sea que X_A y X_B son los dos datos de un par de --

observaciones.

En la aplicación de la prueba del Signo se obtiene la diferencia - entre cada X_{Ai} y X_{Bi} , anotándose si el signo de la diferencia es más o menos (+ ó =).

Bajo la hipótesis H_0 , se espera que el número de pares que ten-- gan $X_A > X_B$ sea igual al número de pares con $X_A < X_B$, o sea que si H_0 es verdad, se esperaría que la mitad de las di-- ferencias fuera negativa y la otra mitad positiva.

H_0 se rechazaría si ocurren muy pocas diferencias de un signo.

r es utilizada para identificar el número de veces que ocurre el - signo menos frecuente.

Los valores críticos de r al nivel del 5% y del 1% se encuentran en la tabla **I**.

Si el valor de r es menor o igual que el valor crítico anotado en la tabla, hay evidencia de que existe diferencia.

En otras palabras, la prueba del signo se utiliza para probar la -- hipótesis

$H_0 : \mu_A = \mu_B$, contra $H_1 : \mu_A \neq \mu_B$
que es equivalente a probar la hipótesis de que las distribuciones -

de probabilidad de cada par son iguales.

De aquí que si r (el número de veces que ocurre el signo menos frecuentemente) es menor o igual que el valor crítico de tablas, la hipótesis que $P(X_A - X_B > 0) = 1/2$ ó $\mu_A = \mu_B$ se rechaza y se concluye que existe un efecto en el tratamiento.

La tabla está basada en la distribución normal con parámetro igual a $1/2$.

La tabla **I** también se puede utilizar para pruebas de una cola, en este caso, r es el número de signos más o el número de signos menos, dependiendo de cual de los dos se espera que aparezca menos frecuentemente de acuerdo con la alternativa a la hipótesis. En otras palabras, si el número de signos menos se espera que sea menor que el número de signos más, entonces r representa el número de signos menos.

Si r es menor o igual que el valor crítico de tablas, la hipótesis H_0 , se rechaza a un nivel de significancia de la mitad del valor -- ($1/2\%$ ó $2.1/2\%$) dado en la tabla.

Ejemplo

Se hicieron 10 pares de observaciones espectroquímicas para níquel, midiéndose con dos diferentes instrumentos de medida y dando los

siguientes resultados:

<u>Muestra</u>	<u>Instrumento A</u>	<u>Instrumento B</u>
1	1.94	2.00
2	1.99	2.09
3	1.98	1.95
4	2.03	2.07
5	2.03	2.08
6	1.96	1.98
7	1.95	2.03
8	1.96	2.03
9	1.92	2.01
10	2.00	2.12

Determinar el 5% del nivel de significancia si el equipo diferente lleva a resultados diferentes; usar la prueba del signo.

Procedimiento

Hipótesis, $H_0 : \mu_A = \mu_B$

Se obtiene el signo de las diferencias $A_i - B_i$ para todos los pares de datos:

Muestra	Signo de Diferencia $A_i - B_i$
1	-
2	-
3	+
4	-
5	-
6	-
7	-
8	-
9	-
10	-

$r = 1$ (número de veces que aparece el signo menos frecuente).

De la tabla I :

$$r_{\text{crítico}} = 1 \quad \text{con } n = 10 \text{ y } X = 5\%$$

Conclusión

Cuando $r \leq r_{\text{crítico}}$ se rechaza H_0 . Luego en éste caso, se concluye que sí existe diferencia entre los instrumentos.



Prueba Wilcoxon (Rango Signado)

La prueba del Signo sólo utiliza información acerca de la dirección de las diferencias entre pares. Cuando se considera tanto la magnitud de las diferencias como la dirección, se obtiene una prueba más poderosa.

Esta prueba da mayor peso a un par que muestra una diferencia mayor entre dos condiciones, que a un par que muestra una pequeña diferencia.

Método

d_i es la diferencia de cualquier par que se define bajo los dos tratamientos en estudio. Para usar la prueba wilcoxon se da rango a todos los d_i sin tomar en cuenta el signo, esto es, se da el rango de 1 a la más pequeña d_i , el rango 2 a la siguiente más pequeña, etc.

En seguida, se fija a cada rango el signo de la diferencia, o sea que se indica el signo de cada rango de los d_i negativos y el respectivo de los d_i positivos.

Si los tratamientos A y B son equivalentes, o sea que H_0 es cierta, se esperará que algunos de los d_i mayores favorezcan el tratamiento A y algunos favorezcan el tratamiento B; o sea, que

algunos de los rangos mayores provengan de los d_i positivos mientras que otros vendrán de los d_i negativos.

Por esto, si se suman los rangos con signo positivo y por otro lado se suman los rangos con signo negativo, se espera que las dos sumas sean aproximadamente iguales bajo H_0 , pero si la suma de rangos positivos es muy diferente de la suma de rangos negativos, se inferirá que el tratamiento A difiere del tratamiento B y -- por esto, se rechazará H_0 .

Eventualmente los dos datos de algún par son iguales, de forma -- que $d = 0$, tales pares se eliminan del análisis. Esta misma -- práctica se sigue en la prueba del signo.

N es el número total de pares en la muestra, menos el número -- de pares cuyo $d = 0$.

Otra situación peculiar ocurre cuando dos o más valores de d -- son iguales, en este caso, se asigna igual rango. El rango asignado es el promedio de los rangos que se asignarían si los d_i -- difirieran ligeramente.

La hipótesis que se prueba en este problema es la misma que para la prueba del signo.

$$P (X_A - X_B > 0) = 1/2 \quad \delta$$

$$H_0 : \mu_{A_i} = \mu_{B_i} \quad \text{para toda } i$$

Si no existe diferencia entre los tratamientos, se espera que la suma de rangos positivos sea aproximadamente igual a la suma de -- rangos negativos, y puesto que:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

el valor absoluto de la suma de los rangos signados positivos o negativos, deberá estar cerca de $\frac{n(n+1)}{4}$.

En este procedimiento, T es el valor absoluto de la menor suma de rangos. Haciendo uso de los valores críticos de la tabla II se plantea la siguiente regla de decisión:

Si T es menor o igual que el valor crítico de la tabla, se rechaza H_0 .

De otra forma:

Si $T \leq$ valor crítico de tablas se rechaza

$$H_0 : \mu_A = \mu_B$$

La tabla señalada también puede ser usada para problemas de una cola, en este caso, T es la suma de rangos positivos ó el valor absoluto de la suma de los rangos negativos, dependiendo de cual de los dos se espera que sea el más pequeño, de acuerdo a la --

hipótesis alternativa H_1 .

La regla de decisión es como sigue:

Si $T \leq$ valor crítico de tablas se rechaza H_0 con un nivel de significación de la mitad del valor dado en la tabla.

Ejemplo

De acuerdo a los datos anteriores, se deben obtener las diferencias de cada par de observaciones, después, obtener el rango de los valores absolutos de las diferencias y finalmente, darles el signo correspondiente de la diferencia.

<u>Muestra</u>	<u>Diferencia (A - B)</u>	<u>Rango</u>	<u>Rango Signado</u>
1	- 0.06	5	- 5
2	- 0.10	9	- 9
3	+0.03	3	+ 3
4	- 0.04	2	- 2
5	- 0.05	4	- 4
6	- 0.02	1	- 1
7	- 0.08	7	- 7
8	- 0.07	6	- 6
9	- 0.09	8	- 8
10	- 0.12	10	-10

De acuerdo con lo anterior, $T = 3$

De la tabla, $T_{\text{crítico}} = 8$, con $n = 10$ y $\alpha = 5\%$

Como $T < T_{\text{crítico}}$

Se rechaza H_0 y se concluye que existe diferencia entre los instrumentos.

PRUEBA DE HIPOTESIS PARA DOS MUESTRAS INDEPENDIENTES

La prueba del signo y la prueba del rango signado son aplicables para muestras en pares.

Cuando las observaciones no son pareadas y se supone que las dos distribuciones de probabilidad sólo difieren en sus medias, el procedimiento para probar la hipótesis de igualdad de medias ----

($H_0: \mu_A = \mu_B$) es como sigue:

- 1) Se ordenan todas las observaciones de ambas muestras de acuerdo con su magnitud.
- 2) Se asigna rango siguiendo la ordenación obtenida ($r = 1$ a la observación más pequeña; $r = 2$, al siguiente valor, así hasta $r = n$).

Si no hay diferencia entre muestras, se esperaría que éstas se mezclen en forma regular y si las muestras fueran de igual tamaño se esperaría que la suma de rangos fuese igual para ambas.

Para concluir que existe una diferencia significativa se utiliza la tabla III con:

$$R_1 = \text{Suma de rangos de la muestra más pequeña.}$$

$$R_1' = n_1 (n_1 + n_2 + 1) - R_1$$

La hipótesis H_0 se rechazaría si alguno de los valores R_1 ó R_1' es menor o igual que el valor crítico de tablas R_1^{**} . Estos es, se rechaza H_0 si

$$R_1 \text{ ó } R_1' \leq R_1^{**}$$

Donde n_1 es el tamaño de la muestra 1 y n_2 es el tamaño de la muestra 2.

Si las muestras son de tamaño desigual, la muestra 1 es la más pequeña, o sea $n_1 \leq n_2$.

En el caso de los problemas de una cola, la tabla también puede utilizarse.

Si bajo la hipótesis alternativa H_1 , R_1 debe ser la mayor, se rechaza H_0 si R_1' es menor o igual al valor crítico de la tabla.

Si bajo la hipótesis alternativa H_1 , R_1 debe ser la menor, se rechaza H_0 si R_1 es menor o igual al valor crítico de tablas.

El nivel de significancia es igual a la mitad de los valores de la tabla (2 1/2 % y 1/2 %).

Ejemplo

Dos investigadores toman repetidas lecturas sobre la dureza del agua de la Ciudad. Determinar con $\alpha = 5\%$ si existe tendencia de los analistas a leer en forma diferente.

<u>Analista A</u>	<u>Analista B</u>
0.46	0.82
0.62	0.61
0.37	0.89
0.40	0.51
0.44	0.33
0.58	0.48
0.48	0.23
0.53	0.25
	0.67
	0.88

<u>Analista</u>	<u>Lectura</u>	<u>Rango</u>
B	0.23	1
B	0.25	2
B	0.33	3
A	0.37	4
A	0.40	5
A	0.44	6

Hipótesis

$$H_0 : \mu_A = \mu_B$$

$$H_1 : \mu_A \neq \mu_B$$

<u>Analista</u>	<u>Lectura</u>	<u>Rango</u>
A	0.46	7
B	0.48	8.5
A	0.48	8.5
B	0.51	10
A	0.53	11
A	0.58	12
B	0.61	13
A	0.62	14
B	0.67	15
B	0.82	16
B	0.88	17
B	0.89	18

$$R_1 = 67.5 \text{ (suma de rangos de la muestra más pequeña)}$$

$$R_1' = 8(8 + 10 + 1) - 67.5 = 84.5$$

De tablas, con $n_1 = 8$, $n_2 = 10$ y $\alpha = 5\%$

$$R_1^{**} = 53$$

Como R_1 y $R_1' > R_1^{**}$ se acepta H_0 , o sea que no existe tendencia de los analistas a leer en forma diferente.

ANALISIS DE VARIANCIA

Existen situaciones que requieren del diseño de un experimento que permita estudiar simultáneamente más de dos muestras o condiciones.

Cuando tres o más muestras o condiciones es comparado en un experimento, es necesario utilizar una prueba estadística que indique si existe una diferencia entre las K muestras o condiciones.

La técnica paramétrica para probar si algunas muestras vienen de poblaciones idénticas, es el análisis de variancia. Las suposiciones

asociadas con el modelo estadístico bajo la prueba F son:

- a) Las observaciones son obtenidas independientemente de poblaciones normalmente distribuidas.
- b) Las poblaciones tienen la misma variancia.
- c) Las medias en la población normalmente distribuida son -- combinaciones lineales de los efectos debidos a renglones y columnas, ésto es, que los efectos son aditivos.
- d) La prueba F, requiere que las variables consideradas -- tengan mediciones intervalares cuando menos.

En el diseño aquí considerado para comparación de K grupos, las muestras K de igual tamaño están asociadas de acuerdo a algún -- criterio que puede afectar los valores de las observaciones.

En algunos casos, la asociación se logra comparando los mismos -- individuos o casos bajo todas las K condiciones. De otra forma, cada uno de los N grupos puede ser medido bajo todas las K -- condiciones.

Para estos diseños, deben utilizarse las pruebas estadísticas para K muestras relacionadas.

En el caso paramétrico, éste diseño es conocido como análisis de --

variancia doble, algunas veces llamado diseño de bloques al azar.

Análisis de Variancia Doble de Friedman

Cuando los datos de K muestras están medidos cuando menos en la escala ordinal, el método de Friedman por rangos puede utilizarse para probar la hipótesis (H₀) que las K muestras se -- han obtenido de la misma población.

Método

Para la prueba de Friedman, los datos están incluidos en una matriz con N renglones y K columnas. Los renglones representan varios objetos o conjuntos de objetos y las columnas representan varias condiciones.

A los datos de la prueba se les asocian rangos, a las observaciones de cada renglón se les asigna rango separadamente; ésto es, como se analizan K condiciones, los rangos de cualquier renglón van de 1 a K.

La prueba de Friedman determina si los totales de rangos (R_j) difieren significativamente.

Para hacer esta prueba se calcula el valor de una estadística que se denomina χ_r^2 , cuando el número de renglones y o columnas

no es muy pequeño se puede demostrar que χ_r^2 está distribuida aproximadamente como χ^2 con $n = k - 1$ cuando:

$$\chi_r^2 = \frac{12}{N K (K + 1)} \sum_{j=1}^K (R_j)^2 - 3 N (K + 1)$$

donde N : número de renglones

K : número de columnas

R_j : suma de rangos en la columna j

Si el valor de χ_r^2 calculado de la fórmula es igual o mayor que el dado en tablas para un nivel de significancia y un valor de $\nu = K - 1$, se concluye que la suma de rangos para varias columnas difiere significativamente y por tanto, se rechaza H_0 .

La tabla IV da probabilidades exactas asociadas con valores para $K = 3$, $N = 2$ hasta 9 y para $K = 4$, $N = 2$ hasta 4.

Cuando N y K son mayores que los valores incluidos en esta tabla, χ_r^2 puede ser considerado distribuido como χ^2 y por esto, debe utilizarse una tabla con dicha distribución

$$\text{con } \nu = K - 1$$

Ejemplo

El administrador de una fábrica, decidió hacer un experimento para determinar si el material recibido en diferentes tiempos tiene la misma resistencia a la tensión.

Cuatro periodos de tiempo se escogieron aleatoriamente y cuatro trabajadores fueron seleccionados aleatoriamente para trabajar el material.

		Trabajador			
		1	2	3	4
Periodo de tiempo	1	36	38	36	30
	2	17	18	26	17
	3	30	39	41	34
	4	30	45	38	33

Probar la homogeneidad de los periodos de tiempo y de los trabajadores.

Procedimiento

Definición de los rangos de cada renglón, dando rango 1 al dato menor, 2 al siguiente, etc.

Si la hipótesis H_0 (todas las muestras, columnas, vienen de la misma población) se acepta, la distribución de rangos en cada co-

lunna estaría repartida aleatoriamente y se esperaría que los rangos 1, 2, 3 y 4 aparecieran en todas las columnas con igual frecuencia.

Se obtienen los totales de cada columna R_j , se calcula el valor de χ^2 , finalmente, se encuentra el valor de χ^2 de tablas, de acuerdo al nivel de significancia fijado a fin de concluir sobre la igualdad de tratamientos.

2.5	4	2.5	1
1.5	3	4	1.5
1	3	4	2
1	4	3	2

R_j 6 14 13.5 6.5

$$\chi^2 = \frac{12}{N K (K+1)} \sum_{j=1}^K (R_j)^2 - 3 N (K+1)$$

N : N° renglones = 4

K : N° columnas = 4

R_j : Suma de rangos de la j columna

$$\begin{aligned} \chi^2 &= \frac{12}{4 \times 4 (4+1)} \left[6^2 + 14^2 + 13.5^2 + 6.5^2 \right] - 3 \times 4 (4+1) \\ &= \frac{12}{80} \left[36 + 196 + 182.25 + 42.25 \right] - 60 \end{aligned}$$

$$\chi^2 = 8.475$$

En la tabla IV :

Con $K = 4$, $N = 4$ y $P \approx 5.0\%$ se tiene $\chi^2 = 7.5$

Por tanto, se rechaza la homogeneidad.

Table 2. Critical Values for A (the Number of Times that the Last Frequent Edge Occurs) for the Sign Test¹

n	A				n	A			
	0X	1X	2X	3X		0X	1X	2X	3X
5	0	0	0	0	5	4	3	2	1
6	0	0	0	0	6	5	4	3	2
7	0	0	0	0	7	6	5	4	3
8	0	0	0	0	8	7	6	5	4
9	0	0	0	0	9	8	7	6	5
10	0	0	0	0	10	9	8	7	6
11	0	0	0	0	11	10	9	8	7
12	0	0	0	0	12	11	10	9	8
13	0	0	0	0	13	12	11	10	9
14	0	0	0	0	14	13	12	11	10
15	0	0	0	0	15	14	13	12	11
16	0	0	0	0	16	15	14	13	12
17	0	0	0	0	17	16	15	14	13
18	0	0	0	0	18	17	16	15	14
19	0	0	0	0	19	18	17	16	15
20	0	0	0	0	20	19	18	17	16
21	0	0	0	0	21	20	19	18	17
22	0	0	0	0	22	21	20	19	18
23	0	0	0	0	23	22	21	20	19
24	0	0	0	0	24	23	22	21	20

¹ This table was prepared from entries appearing in Tables of the Binomial Probability Distribution, National Bureau of Standards Applied Mathematics Series, G, 1950, U. S. Government Printing Office.

Table 3. Significance Points for the Absolute Value of the Smaller Sum of Signed Ranks (T) Obtained from Paired Observations¹

n	T				n	T			
	10%	5%	2%	1%		10%	5%	2%	1%
4	0	0	0	0	4	0	0	0	0
5	0	0	0	0	5	0	0	0	0
6	0	0	0	0	6	0	0	0	0
7	0	0	0	0	7	0	0	0	0
8	0	0	0	0	8	0	0	0	0
9	0	0	0	0	9	0	0	0	0
10	0	0	0	0	10	0	0	0	0
11	0	0	0	0	11	0	0	0	0
12	0	0	0	0	12	0	0	0	0
13	0	0	0	0	13	0	0	0	0
14	0	0	0	0	14	0	0	0	0
15	0	0	0	0	15	0	0	0	0
16	0	0	0	0	16	0	0	0	0
17	0	0	0	0	17	0	0	0	0
18	0	0	0	0	18	0	0	0	0
19	0	0	0	0	19	0	0	0	0
20	0	0	0	0	20	0	0	0	0
21	0	0	0	0	21	0	0	0	0
22	0	0	0	0	22	0	0	0	0
23	0	0	0	0	23	0	0	0	0
24	0	0	0	0	24	0	0	0	0
25	0	0	0	0	25	0	0	0	0
26	0	0	0	0	26	0	0	0	0
27	0	0	0	0	27	0	0	0	0
28	0	0	0	0	28	0	0	0	0
29	0	0	0	0	29	0	0	0	0
30	0	0	0	0	30	0	0	0	0
31	0	0	0	0	31	0	0	0	0
32	0	0	0	0	32	0	0	0	0
33	0	0	0	0	33	0	0	0	0
34	0	0	0	0	34	0	0	0	0
35	0	0	0	0	35	0	0	0	0
36	0	0	0	0	36	0	0	0	0
37	0	0	0	0	37	0	0	0	0
38	0	0	0	0	38	0	0	0	0
39	0	0	0	0	39	0	0	0	0
40	0	0	0	0	40	0	0	0	0
41	0	0	0	0	41	0	0	0	0
42	0	0	0	0	42	0	0	0	0
43	0	0	0	0	43	0	0	0	0
44	0	0	0	0	44	0	0	0	0
45	0	0	0	0	45	0	0	0	0
46	0	0	0	0	46	0	0	0	0
47	0	0	0	0	47	0	0	0	0
48	0	0	0	0	48	0	0	0	0
49	0	0	0	0	49	0	0	0	0
50	0	0	0	0	50	0	0	0	0

¹ For $n > 50$, T is approximately normally distributed with mean $n(n+1)/4$ and variance $n(n+1)(n+2)/24$. A continuity correction of -1 can be added to the mean, if desired.

² Adapted and reproduced by permission from "Extended Tables of the Wilcoxon Matched-Pair Signed-Rank Statistic" by Robert L. McCossett, *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 61, Sept., 1965.

TABLAS

TABLE IV TABLE OF PROBABILITIES ASSOCIATED WITH VALUES AS LARGE AS OBSERVED VALUES OF χ^2 IN THE FRIEDMAN TWO-WAY ANALYSIS OF VARIANCE BY RANKS*
k = 3

N = 2		N = 3		N = 4		N = 5	
χ^2	p	χ^2	p	χ^2	p	χ^2	p
0	1.000	.000	1.000	.0	1.000	.0	1.000
1	.833	.667	.944	.5	.931	.4	.954
2	.500	2.000	.833	1.5	.633	1.2	.691
4	.167	2.667	.661	2.0	.411	1.6	.522
		4.667	.494	3.5	.273	2.8	.367
		6.000	.028	4.5	.125	3.6	.182
				6.0	.069	4.8	.124
				6.5	.042	5.2	.093
				8.0	.0046	6.4	.039
						7.6	.021
						8.4	.0085
						10.0	.00077

N = 6		N = 7		N = 8		N = 9	
χ^2	p	χ^2	p	χ^2	p	χ^2	p
.00	1.000	.000	1.000	.00	1.000	.000	1.000
.33	.856	.286	.984	.25	.967	.222	.971
1.00	.740	.857	.768	.75	.794	.667	.814
1.33	.570	1.143	.620	1.00	.654	.889	.865
2.33	.430	2.000	.486	1.75	.531	1.556	.719
3.00	.252	2.571	.305	2.25	.355	2.000	.536
4.00	.154	3.429	.237	3.00	.255	2.667	.328
4.33	.142	3.714	.192	3.25	.235	2.889	.278
5.33	.072	4.571	.112	4.00	.149	3.556	.187
6.33	.052	5.429	.085	4.75	.120	4.222	.154
7.00	.029	6.000	.052	5.25	.079	4.889	.107
8.33	.012	7.143	.027	6.25	.047	5.556	.069
9.00	.0081	7.714	.021	6.75	.038	6.000	.057
9.33	.0055	8.000	.016	7.00	.030	6.222	.048
10.33	.0017	8.857	.0084	7.75	.018	6.889	.031
12.00	.00013	10.286	.0036	9.00	.0099	8.000	.019
		10.571	.0027	9.25	.0080	8.222	.016
		11.143	.0012	9.75	.0048	8.667	.010
		12.286	.00052	10.75	.0024	9.556	.0060
		14.000	.000021	12.00	.0011	10.667	.0035
				12.25	.00056	10.889	.0029
				13.00	.00026	11.556	.0013
				14.25	.000061	12.667	.00066
				16.00	.0000096	13.556	.00035
						14.000	.00020
						14.222	.000097
						14.833	.000054
						16.222	.000011
						18.000	.0000006

k = 4

N = 2		N = 3		N = 4			
χ^2	p	χ^2	p	χ^2	p	χ^2	p
.0	1.000	.0	1.000	.0	1.000	5.7	.141
.6	.958	.6	.958	.3	.992	6.0	.105
1.2	.831	1.0	.910	.6	.928	6.3	.091
1.8	.792	1.8	.727	.9	.900	6.6	.077
2.4	.625	2.2	.603	1.2	.800	6.9	.068
3.0	.542	2.6	.524	1.5	.754	7.2	.054
3.6	.458	3.4	.446	1.8	.677	7.5	.052
4.2	.375	3.8	.342	2.1	.619	7.8	.036
4.8	.298	4.2	.300	2.4	.524	8.1	.023
5.4	.167	5.0	.207	2.7	.508	8.4	.019
6.0	.042	5.4	.175	3.0	.432	8.7	.014
		5.8	.148	3.3	.389	9.3	.012
		6.6	.075	3.6	.355	9.6	.0069
		7.0	.054	3.9	.324	9.9	.0062
		7.4	.033	4.5	.242	10.2	.0027
		8.2	.017	4.8	.200	10.8	.0016
		9.0	.0017	5.1	.190	11.1	.00091
				5.4	.156	12.0	.000072

* Adapted from: Friedman, M. 1937. The use of ranks to avoid the assumption of normality implicit in the analysis of variance. *J. Amer. Statist. Ass.*, 32, 688-690, with the kind permission of the author and the publisher.

Table III 5% Critical Points of Rank Sums (RT*)

R_{1+}	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
4			6	11	17									
5			7	12	18	26								
6			7	13	20	27	36							
7			8	14	21	29	38	49						
8			8	15	22	31	40	51	63					
9			9	16	24	34	44	55	66	78				
10			9	17	26	35	46	58	71	85	99	115		
11			10	18	27	37	48	60	73	88	103	119	137	
12			10	19	28	38	50	63	76	91	106	123	141	160
13			11	20	29	40	52	65	79	94	110	127	146	164
14			11	21	31	42	54	67	82	97	114	131	150	169
15			12	22	33	45	58	72	87	103	121	139		
16			12	23	34	46	60	74	90	107	124			
17			13	24	35	48	62	77	93	110				
18			13	25	37	50	64	79	95					
19			14	26	38	51	66	82						
20			14	27	39	53	68							
21			15	28	40	55	70							
22			15	29	42	57	72							
23			16	30	43	59	74							
24			16	31	44	61	76							
25			17	32	45	63	78							
26			17	33	46	65	80							
27			18	34	47	67	82							
28			18	35	48	69	84							

Table III (continued) 1% Critical Points of Rank Sums (RT*)

R_{1+}	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
5			10	15	23									
6			10	17	24	32								
7			11	17	25	34	43							
8			11	18	26	35	45	56						
9			11	19	27	37	47	58	71					
10			12	20	28	38	49	61	74	87				
11			12	21	30	40	51	63	76	90	106			
12			13	21	31	41	53	65	79	93	109	125		
13			13	22	32	43	54	67	81	96	112	129	147	
14			14	22	33	44	56	70	84	99	115	133	151	171
15			14	23	34	46	58	72	86	102	119	137	155	
16			15	24	34	46	58	72	86	102	119	137	155	
17			15	25	36	47	60	74	89	105	122	140		
18			16	26	37	49	62	76	92	108	125			
19			16	27	38	50	64	78	94	111				
20			17	28	39	52	66	81	97					
21			17	29	40	53	68	83						
22			18	29	42	55	70							
23			18	30	43	57								
24			19	30	44									
25			19	31	44									
26			20	31	44									
27			20	32										
28			21											

ANALISIS DE VARIANCIA (UNA VIA)
METODO KRUSKAL-WALLIS

Esta técnica prueba la hipótesis nula (Ho) considerando que las K muestras independientes tienen su origen en una misma población.

Para el cálculo de la prueba, cada una de las N observaciones es reemplazada por rangos, o sea que todos los valores de las K muestras combinadas son ordenadas en una sola serie.

El valor más pequeño se reemplaza por el rango 1, el siguiente al más pequeño por el rango 2 y el más grande por N, siendo N el número total de observaciones independientes en las K muestras.

En seguida, se obtiene la suma de rangos en cada muestra.

La prueba Kruskal-Wallis determina si las sumas de los rangos son tan diferentes que no es probable que provengan de muestras obtenidas de la misma población.

Puede ser demostrado que si las K muestras tienen como origen la misma población o poblaciones idénticas o sea que se cumple Ho, entonces H (Estadística Kruskal-Wallis) se distribuye como χ^2 con $\nu = K - 1$ grados de libertad, cuando los tamaños de las K muestras no son muy pequeños.

Esto es:

$$H = \frac{12}{N(N+1)} \sum_{j=1}^k \frac{R_j^2}{n_j} - 3(N+1)$$

Donde:

K: Número de muestras.

n_j : Número de casos en la muestra j

N: $\sum n_j$, número de casos en todas las combinadas.

R_j : Suma de rangos en la muestra j (columna j)

Cuando existen más de cinco casos en los diferentes grupos $n_j > 5$, la probabilidad asociada con la ocurrencia bajo valores tan grandes como los observados en H, se puede refiriéndose a una tabla de valores χ^2 .

Si los valores observados de H son iguales o mayores a los de la tabla χ^2 para un nivel de significancia dado y ν grados de libertad, se rechaza Ho a ese nivel de significancia.

Cuando $K = 3$ y el número de casos en cada muestra es igual a 5, la aproximación a la χ^2 de la distribución de H es bastante acertada. Para esos casos, las probabilidades exactas del tabulado de la fórmula de H y se presentan en la tabla χ^2 .

Ejemplo:

Se desea comparar la resistencia de un alambre de semejantes características producido en 4 diferentes fábricas.

De cada una de las fábricas A, B, C y D se obtuvieron los 10 datos siguientes:

A	B	C	D
55	70	70	90
50	80	60	115
80	85	65	80
60	105	75	70
70	65	90	95
75	100	40	100
40	90	95	105
45	95	70	90
80	100	65	100
70	70	75	60

Procedimiento:

Se ordenan los datos en una sola serie de 1 a 40:

A	Orden	B	Orden	C	Orden	D	Orden
55	5	70	15	70	15	90	28.5
50	4	80	23.5	60	7	115	40
80	23.5	85	26	65	10	80	23.5
60	7	105	38.5	75	20	70	15
70	15	65	10	90	28.5	95	32
75	20	100	35.5	40	1.5	100	35.5
40	1.5	90	28.5	95	32	105	38.5
45	3	95	32	70	15	90	28.5
80	23.5	100	35.5	65	10	100	35.5
70	15	70	15	75	20	60	7
R_j	117.5		259.5		159.		284.0
R_j^2	13806.25		67340.25		25281		80656

$$\sum R_j = 820$$

$$\sum R_j = n \frac{(n+1)}{2} = 820$$

$$H = \frac{12}{N(N+1)} \sum_{j=1}^k \frac{R_j^2}{n_j} - 3(N+1)$$

$$N = 40$$

$$n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 10$$

$$H = \frac{12}{40(41)} \left[\frac{13806.25 + 67340.25 + 25281 + 80656}{10} \right] - 3(41)$$

$$H = \frac{12}{1640} \left[\frac{187,083.5}{10} \right] - 123$$

$$H = 136.89 - 123 = 13.89$$

$$\chi^2_{\alpha, \nu} = 0.05, \nu = 3 = 7.82, \text{ como } H > \chi^2_{\alpha, \nu}$$

Se rechaza
 $H_0: \mu_a = \mu_b = \mu_c = \mu_d$

Por lo que se concluye que las resistencias de los alambres son diferentes.

APPENDIX

TABLE O. TABLE OF PROBABILITY ASSOCIATED WITH VALUES AS LARGE AS OBSERVED VALUES OF H IN THE KRUSKAL-WALLIS ONE-WAY ANALYSIS OF VARIANCE BY RANKS*

Sample sizes n_1, n_2, n_3	H	P	Sample sizes			H	P
			n_1	n_2	n_3		
2 1 1	2.7000	.500	4	3	2	6.4444	.008
2 2 1	3.0000	.300	5	4	4	6.8000	.011
2 3 2	4.5714	.067	6	5	5	8.4444	.046
3 1 1	3.2000	.300	7	6	6	8.4000	.081
3 2 1	4.2857	.135	8	7	7	9.5111	.025
3 3 2	5.8572	.029	9	8	8	9.4444	.105
4 1 1	4.7143	.046	10	9	9	10.7455	.010
4 2 1	4.8000	.067	11	10	10	11.7000	.013
4 3 2	4.4643	.106	12	11	11	12.7000	.046
5 1 1	5.1429	.045	13	12	12	13.7000	.025
5 2 1	4.8714	.100	14	13	13	14.7000	.046
5 3 2	4.0000	.139	15	14	14	15.7000	.025
6 1 1	6.2500	.011	16	15	15	16.7000	.046
6 2 2	5.3511	.052	17	16	16	17.7000	.025
6 3 2	5.1250	.061	18	17	17	18.7000	.046
7 1 1	4.5556	.100	19	18	18	19.7000	.025
7 2 2	4.2500	.121	20	19	19	20.7000	.046
8 1 1	7.2000	.004	21	20	20	21.7000	.025
8 2 2	6.4889	.011	22	21	21	22.7000	.046
8 3 2	5.6889	.029	23	22	22	23.7000	.025
9 1 1	4.8214	.057	24	23	23	24.7000	.046
9 2 2	4.8000	.076	25	24	24	25.7000	.025
9 3 2	4.0179	.114	26	25	25	26.7000	.046
10 1 1	6.0000	.014	27	26	26	27.7000	.025
10 2 2	5.2323	.033	28	27	27	28.7000	.046
10 3 2	5.1250	.052	29	28	28	29.7000	.025
11 1 1	4.4563	.100	30	29	29	30.7000	.046
11 2 2	4.1687	.106	31	30	30	31.7000	.025
12 1 1	5.8233	.021	32	31	31	32.7000	.046
12 2 2	5.2063	.050	33	32	32	33.7000	.025
12 3 2	4.0000	.087	34	33	33	34.7000	.046
13 1 1	4.0548	.093	35	34	34	35.7000	.025
13 2 2	4.1687	.106	36	35	35	36.7000	.046
14 1 1	5.8233	.021	37	36	36	37.7000	.046
14 2 2	5.2063	.050	38	37	37	38.7000	.025
14 3 2	4.0000	.087	39	38	38	39.7000	.046
15 1 1	4.0548	.093	40	39	39	40.7000	.025
15 2 2	4.1687	.106	41	40	40	41.7000	.046
16 1 1	5.8233	.021	42	41	41	42.7000	.046
16 2 2	5.2063	.050	43	42	42	43.7000	.025
16 3 2	4.0000	.087	44	43	43	44.7000	.046
17 1 1	4.0548	.093	45	44	44	45.7000	.025
17 2 2	4.1687	.106	46	45	45	46.7000	.046
18 1 1	5.8233	.021	47	46	46	47.7000	.046
18 2 2	5.2063	.050	48	47	47	48.7000	.025
18 3 2	4.0000	.087	49	48	48	49.7000	.046
19 1 1	4.0548	.093	50	49	49	50.7000	.025
19 2 2	4.1687	.106	51	50	50	51.7000	.046
20 1 1	5.8233	.021	52	51	51	52.7000	.046
20 2 2	5.2063	.050	53	52	52	53.7000	.025
20 3 2	4.0000	.087	54	53	53	54.7000	.046
21 1 1	4.0548	.093	55	54	54	55.7000	.025
21 2 2	4.1687	.106	56	55	55	56.7000	.046
22 1 1	5.8233	.021	57	56	56	57.7000	.046
22 2 2	5.2063	.050	58	57	57	58.7000	.025
22 3 2	4.0000	.087	59	58	58	59.7000	.046
23 1 1	4.0548	.093	60	59	59	60.7000	.025
23 2 2	4.1687	.106	61	60	60	61.7000	.046
24 1 1	5.8233	.021	62	61	61	62.7000	.046
24 2 2	5.2063	.050	63	62	62	63.7000	.025
24 3 2	4.0000	.087	64	63	63	64.7000	.046
25 1 1	4.0548	.093	65	64	64	65.7000	.025
25 2 2	4.1687	.106	66	65	65	66.7000	.046
26 1 1	5.8233	.021	67	66	66	67.7000	.046
26 2 2	5.2063	.050	68	67	67	68.7000	.025
26 3 2	4.0000	.087	69	68	68	69.7000	.046
27 1 1	4.0548	.093	70	69	69	70.7000	.025
27 2 2	4.1687	.106	71	70	70	71.7000	.046
28 1 1	5.8233	.021	72	71	71	72.7000	.046
28 2 2	5.2063	.050	73	72	72	73.7000	.025
28 3 2	4.0000	.087	74	73	73	74.7000	.046
29 1 1	4.0548	.093	75	74	74	75.7000	.025
29 2 2	4.1687	.106	76	75	75	76.7000	.046
30 1 1	5.8233	.021	77	76	76	77.7000	.046
30 2 2	5.2063	.050	78	77	77	78.7000	.025
30 3 2	4.0000	.087	79	78	78	79.7000	.046
31 1 1	4.0548	.093	80	79	79	80.7000	.025
31 2 2	4.1687	.106	81	80	80	81.7000	.046
32 1 1	5.8233	.021	82	81	81	82.7000	.046
32 2 2	5.2063	.050	83	82	82	83.7000	.025
32 3 2	4.0000	.087	84	83	83	84.7000	.046
33 1 1	4.0548	.093	85	84	84	85.7000	.025
33 2 2	4.1687	.106	86	85	85	86.7000	.046
34 1 1	5.8233	.021	87	86	86	87.7000	.046
34 2 2	5.2063	.050	88	87	87	88.7000	.025
34 3 2	4.0000	.087	89	88	88	89.7000	.046
35 1 1	4.0548	.093	90	89	89	90.7000	.025
35 2 2	4.1687	.106	91	90	90	91.7000	.046
36 1 1	5.8233	.021	92	91	91	92.7000	.046
36 2 2	5.2063	.050	93	92	92	93.7000	.025
36 3 2	4.0000	.087	94	93	93	94.7000	.046
37 1 1	4.0548	.093	95	94	94	95.7000	.025
37 2 2	4.1687	.106	96	95	95	96.7000	.046
38 1 1	5.8233	.021	97	96	96	97.7000	.046
38 2 2	5.2063	.050	98	97	97	98.7000	.025
38 3 2	4.0000	.087	99	98	98	99.7000	.046
39 1 1	4.0548	.093	100	99	99	100.7000	.025
39 2 2	4.1687	.106	101	100	100	101.7000	.046
40 1 1	5.8233	.021	102	101	101	102.7000	.046
40 2 2	5.2063	.050	103	102	102	103.7000	.025
40 3 2	4.0000	.087	104	103	103	104.7000	.046
41 1 1	4.0548	.093	105	104	104	105.7000	.025
41 2 2	4.1687	.106	106	105	105	106.7000	.046
42 1 1	5.8233	.021	107	106	106	107.7000	.046
42 2 2	5.2063	.050	108	107	107	108.7000	.025
42 3 2	4.0000	.087	109	108	108	109.7000	.046
43 1 1	4.0548	.093	110	109	109	110.7000	.025
43 2 2	4.1687	.106	111	110	110	111.7000	.046
44 1 1	5.8233	.021	112	111	111	112.7000	.046
44 2 2	5.2063	.050	113	112	112	113.7000	.025
44 3 2	4.0000	.087	114	113	113	114.7000	.046
45 1 1	4.0548	.093	115	114	114	115.7000	.025
45 2 2	4.1687	.106	116	115	115	116.7000	.046
46 1 1	5.8233	.021	117	116	116	117.7000	.046
46 2 2	5.2063	.050	118	117	117	118.7000	.025
46 3 2	4.0000	.087	119	118	118	119.7000	.046

* Adapted and abridged from Kruskal, W. H., and Wallis, W. A. 1952. Use of rank in one-criterion variance analysis. *J. Amer. Statist. Ass.*, 47, 614-617, with the kind permission of the authors and the publisher. (The corrections to this table given by the authors in *Biometrika*, *J. Amer. Statist. Ass.*, 48, 910, have been incorporated.)

TABLE O. TABLE OF PROBABILITY ASSOCIATED WITH VALUES AS LARGE AS OBSERVED VALUES OF H IN THE KRUSKAL-WALLIS ONE-WAY ANALYSIS OF VARIANCE BY RANKS* (Continued)

Sample sizes n_1, n_2, n_3	H	P	Sample sizes			H	P
			n_1	n_2	n_3		
5 3 2	6.5333	.008	5	4	4	5.6300	.050
6 3 2	6.1333	.013	6	5	5	6.5487	.089
7 3 2	5.1600	.054	7	6	6	7.8231	.108
8 3 2	5.0400	.056	8	7	7	8.7604	.000
9 3 2	4.3728	.090	9	8	8	9.7440	.011
10 3 2	4.2688	.122	10	9	9	10.6571	.049
11 3 2	6.4000	.012	11	10	10	11.6176	.050
12 3 2	4.9000	.048	12	11	11	12.6187	.100
13 3 2	4.8711	.052	13	12	12	13.6277	.108
14 3 2	4.0176	.066	14	13	13	14.6391	.009
15 3 2	3.8400	.122	15	14	14	15.6504	.011
16 3 2	6.9001	.009	16	15	15	16.6617	.066
17 3 2	6.8218	.010	17	16	16	17.6731	.046
18 3 2	5.2400	.049	18	17	17	18.6845	.061
19 3 2	5.1668	.052	19	18	18	19.6959	.066
20 3 2	4.6309	.091	20	19	19	20.7073	.105
21 3 2	4.4948	.101	21	20	20	21.7187	.100
22 3 2	7.0728	.009	22	21	21	22.7301	.009
23 3 2	6.9818	.011	23	22	22	23.7415	.010
24 3 2	5.4488	.049	24	23	23	24.7529	.010
25 3 2	5.3182	.051	25	24	24	25.7643	.010
26 3 2	4.8223	.087	26	25	25	26.7757	.010
27 3 2	4.6121	.109	27	26	26	27.7871	.010
28 3 2	6.9545	.008	28	27	27	28.7985	.010
29 3 2	6.8400	.011	29	28	28	29.8099	.010
30 3 2	4.9855	.044	30	29	29	30.8213	.010
31 3 2	4.8600	.046	31	30	30	31.8327	.010
32 3 2	3.8873	.086	32	31	31	32.8441	.010
33 3 2	3.8000	.102	33	32	32	33.8555	.010
34 3 2	7.2045	.009	34	33	33	34.8669	.010
35 3 2	7.1182	.010	35	34	34	35.8783	.010
36 3 2	5.2727	.049	36				

REFERENCIAS

BOWKER - LIEBERMAN
Engineering Statistics
Prentice - Hall , 2a. Ed.

MOOD - GRAY BILL
Introduction to the Theory of Statistics
Mc Graw - Hill

SIEGEL
Nonparametric Statistics for the Behavioral
Sciences
Mc Graw - Hill

SNEDECOR - COCHRAN.
Métodos Estadísticos
CECSA