



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA

INSTITUTO DE INGENIERÍA

**LOCALIZACIÓN Y CUANTIFICACIÓN DE DAÑO
ESTRUCTURAL APLICADO A ELEMENTOS FINITOS**

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

MAESTRO EN INGENIERÍA

INGENIERÍA CIVIL – ESTRUCTURAS

P R E S E N T A :

HÉCTOR GUERRERO BOBADILLA

TUTOR:

DR. JOSÉ ALBERTO ESCOBAR SÁNCHEZ



Cd. Universitaria, Agosto de 2007

Agradecimientos

Dedico este trabajo a mi esposa Nancy y a mi hija Karla por su apoyo incondicional durante mis estudios de maestría y por enseñarme el sentido de la vida.

También quisiera agradecer el apoyo de mis papás (Héctor y Alma Rosa) por su apoyo y sus buenos consejos.

A mis hermanos (Óscar, Saúl, Moisés y Yazmín) por sus palabras de aliento y por su confianza en mí.

Gracias a mi tutor, el doctor José Alberto Escobar, por su amistad y por el apoyo que me ha brindado desde que lo conozco.

Agradezco mucho a mi Facultad de Ingeniería y a mi Universidad Nacional Autónoma de México, así como a mis profesores, compañeros y amigos que conocí en mis estudios de Licenciatura y Maestría.

Muchas gracias al Instituto de Ingeniería por permitirme ser becario y por haberme dado la oportunidad de desarrollar mi tesis y los artículos en los que participé.

Gracias a Dios por su gran ayuda y por su presencia constante en mi vida.

Agradezco de una manera especial al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por la beca que me otorgó durante mis estudios de Maestría y que han sido parte importante en el desarrollo de esta tesis.

ÍNDICE

CONTENIDO	PÁGINA
Resumen	1
I. Introducción	2
1. Antecedentes	3
2. Objetivos	3
3. Alcances	4
II. El Método de los Elementos Finitos	5
1. Planteamiento general	5
2. Formulación de elementos finitos para elementos barra	8
3. Formulación de elementos finitos para elementos cuadriláteros isoparamétricos	15
III. Daño estructural	24
1. Localización y detección de daño estructural comparando matrices de rigideces en elementos de la estructura	24
2. El Método de la Matriz de Transformación	26
3. Propuestas para mejorar el Método de la Matriz de Transformación	29
IV. Programa de cómputo	33
V. Ejemplos de aplicación	34
1. Marco en 2D con 10 pisos y un claro	34
2. Marco en 2D con 10 pisos y 4 claros	36
3. Marco en 2D con asimetría en elevación	37
4. Estructura en 3D simétrica en planta y en elevación	40
5. Estructura en 3D de 2 pisos con elementos barra y elementos cuadriláteros	41
6. Estructura en 3D de 5 pisos con elementos barra y elementos cuadriláteros	43
VI. Conclusiones y recomendaciones	45
VII. Referencias	47

Resumen

Se presenta el Método de la Matriz de Transformación para detectar daño, definido como degradación de rigidez, en estructuras modeladas como elementos finitos.

El método parte de suponer que un cambio en las propiedades dinámicas de las estructuras se verá reflejado directamente en las rigideces de los elementos que la componen. Con el apoyo de un modelo analítico base se podrá detectar un factor de degradación de la rigidez en los elementos estructurales mediante un proceso iterativo. El método se aplica utilizando matrices de rigidez condensadas en los grados de libertad primarios de las estructuras. Para ello se hace uso de la transformación estática (Guyan, 1965).

Se realizan un conjunto de propuestas a fin de mejorar la precisión y eficiencia del método. Finalmente, y con el apoyo de un programa de computadora, se aplica el método a estructuras en 2 y 3 dimensiones para detectar daño simulado.

Abstract

The Transformation Matrix Method to detect damage, defined as loss of stiffness, in structures modeled as finite elements is presented.

The method assumes that a change in the dynamic properties of a structure affects directly the stiffness of its elements. Thus, by using a base analytical model with an iterative process, it is possible to detect the stiffness degradation factor of the elements. This method is applied to stiffness matrices condensed in the primary degrees of freedom of structures. For this, it is used the Guyan static transformation (Guyan, 1965).

In order to improve the precision and efficiency of the method a set of proposals are made. Finally, and with the help of software developed in this work, the method is applied to 2D and 3D structures in order to detect simulated damage.

I. Introducción

Evaluar la cantidad de daño que poseen las estructuras y lograr determinar la vida útil de las mismas es un problema que requiere especial atención. Mediante una evaluación adecuada se podrá determinar la seguridad de las construcciones y, como consecuencia, garantizar la seguridad e integridad de sus ocupantes.

Para determinar el daño que las estructuras acumulan durante su vida útil, de una manera confiable, es necesario contar con métodos cuantitativos que permitan, no sólo localizar daño en los elementos que las componen, sino también proporcionar información de qué tan severo es. Con base en esto, es posible tomar decisiones para mejorar su seguridad.

En otras palabras, un buen método de detección de daño deberá (Rytter, 1997):

1. Determinar si existe daño
2. Si existe daño, localizarlo
3. Cuantificar la severidad del daño
4. Determinar la vida útil restante de la estructura

En general, el daño en las construcciones se evalúa de una manera cualitativa, haciendo uso de observaciones en los elementos que las constituyen, midiendo el ancho de las grietas, etc. Lamentablemente, este procedimiento no proporciona información cuantitativa sobre el daño de los elementos y mucho menos sobre la vida útil del mismo.

En la actualidad, y gracias al gran desarrollo de la tecnología, es posible realizar mediciones de las propiedades de las estructuras con el uso de diferentes dispositivos y mediante diversas técnicas.

Una de las técnicas que permiten medir las propiedades de las estructuras es la instrumentación de edificios. Mediante ella es posible determinar propiedades dinámicas como modos y frecuencias de vibrar.

Y si además, se logra tener un registro periódico o seguimiento de las propiedades dinámicas de una estructura, se podrán evaluar cambios en ellas. Dichos cambios se pueden relacionar con los fenómenos físicos que las afectan y, adicionalmente, se puede evaluar si los cambios producen daño y la intensidad del mismo.

Por lo tanto, para poder estimar el daño en una estructura, es necesario contar con información de sus propiedades dinámicas y de un modelo de referencia base a fin de comparar cambios existentes en las propiedades. De esta manera, se establecen relaciones de comparación que permiten localizar y cuantificar el daño en sus elementos.

Entre los factores que afectan la detección de daño de una manera directa se encuentran:

- Incertidumbres en la medición de las propiedades de edificios (Murià Vila, *et al.*, 1997).
- Reducida instrumentación de los grados de libertad de las estructuras.
- Poca información modal que se puede obtener (Zimmerman, *et al.*, 2001).
- Otros efectos como interacción suelo-estructura, etc.

Entonces, un método de detección de daño deberá incluir los factores mencionados para poder proporcionar resultados confiables.

En el presente trabajo se evalúa el Método de la Matriz de Transformación (MMT) (Escobar *et al.*, 2001, 2004, 2005) en la detección de daño para estructuras modeladas como elementos finitos, tales como marcos en 2D y 3D, elementos cuadriláteros y la combinación de ellos.

Adicionalmente, se hacen propuestas con la finalidad de mejorar la precisión y eficiencia del método y se desarrolla un programa de cómputo para realizar los cálculos.

1. Antecedentes

Se han desarrollado diferentes métodos que evalúan el daño de una estructura. Muchos de estos métodos se basan en la medición de las propiedades dinámicas (Sohn, *et al.*, 1997; Doebling, *et al.*, 1998; Escobar *et al.*, 2001, 2004, 2005).

Escobar *et al.* (2001) propusieron el Método de la Matriz de Transformación, que utiliza los modos y frecuencias de vibrar de las estructuras y un modelo analítico base.

Mediante un proceso iterativo, el MMT estima de una manera cuantitativa el daño en los elementos que componen a la estructura.

En el MMT se utilizan los modos y frecuencias de vibrar de la estructura para reconstruir su matriz de rigidez lateral. Dicha reconstrucción se lleva a cabo con el uso del algoritmo desarrollado por Baruch y Bar Itzhack (1978).

Acevedo (2005) evaluó la reconstrucción de la matriz de rigidez lateral de marcos en 2D a partir de sus parámetros modales experimentales. Llegó a la conclusión de que el algoritmo más preciso es el propuesto por Baruch y Bar Itzhack (1978). En el mismo estudio, concluyó que la reconstrucción de la matriz de rigidez lateral se ve afectada muy sensiblemente por el número de modos que se utilizan.

En 2001, Fierro propuso hacer uso de la técnica de descomposición de valores singulares para mejorar la precisión del MMT, logrando mejores resultados que los obtenidos anteriormente (Fierro, 2001). Además, evaluó el efecto del ruido en la detección de daño para un marco plano de 10 pisos. Llegó a determinar que este factor afecta poco a la detección de daño, sobre todo cuando el nivel de ruido es menor que el 5%. Adicionalmente, evaluó los efectos de interacción-suelo estructura para el mismo marco.

Galiote (2006) evaluó el caso de información modal incompleta en una estructura en 2D de concreto reforzado constituida de diez pisos y un claro. Los resultados muestran que, al utilizar diferente número de modos de vibrar, se detecta el daño en la estructura de una manera adecuada para esa estructura en particular. Sin embargo, se detectó daño en elementos que no presentaban daño y se subestimó en otros. La detección del daño se vio afectada por el número de modos que se utilizaron.

2. Objetivos

- Localizar y cuantificar daño, definido como pérdida de rigidez en estructuras modeladas con elementos finitos.

- Ampliar el uso de Método de la Matriz de Transformación aplicando técnicas del método del elemento finito.
- Mejorar la eficiencia del Método de la Matriz de Transformación que es iterativo.
- Desarrollar un programa de cómputo para modelar daño estructural.
- Evaluar el caso de información modal incompleta en la detección del daño en estructuras.

3. Alcances

Con base en los objetivos planteados, se desarrolla la formulación de elementos finitos para los siguientes elementos:

1. Elementos barra en 2D con 3 grados de libertad por nodo (un desplazamiento horizontal, un desplazamiento vertical y un giro alrededor del eje perpendicular al plano que contiene el elemento).
2. Elementos barra en 3D con 6 grados de libertad por nodo (tres desplazamientos en dirección de los ejes locales del nodo y tres giros alrededor de los mismos).
3. Elementos cuadriláteros de 4 a 8 nodos con 2 grados de libertad por nodo (un desplazamiento horizontal y un desplazamiento vertical)

Se proponen y se evalúan propuestas de mejoramiento del MMT. Y finalmente, se desarrolla un programa de computadora que permite detectar daño en estructuras.

Se evalúa la aplicabilidad del MMT en los distintos tipos de elementos formulados mediante la simulación de daño en marcos en 2D simétricos y asimétricos, en un modelo con barras en 3D y en dos modelos a base de barras en 3D y elementos cuadriláteros.

Para las estructuras asimétricas y en 3D se simuló daño y se evaluó para los casos de información modal completa e incompleta.

II. El Método de los Elementos Finitos

El Método de los Elementos Finitos (MEF) es una teoría numérica general para la solución de ecuaciones diferenciales muy utilizado en diversos problemas de ingeniería. Sus aplicaciones van desde el análisis por desplazamientos y fuerzas de diversos tipos de estructuras, hasta estudios de transferencia de calor, análisis de campos magnéticos y problemas de flujos y fluidos.

El MEF se basa en dividir un continuo, estructura o dominio sobre el que están definidas ciertas ecuaciones integrales que caracterizan su comportamiento físico en una serie de subdominios no intersecantes entre sí denominados elementos finitos. El conjunto de elementos finitos forma una partición del dominio también denominada discretización. En el borde de cada elemento se distinguen una serie de puntos representativos llamados nodos. Dos nodos son adyacentes si pertenecen al mismo elemento finito, además un nodo sobre la frontera de un elemento finito puede pertenecer a varios elementos, el conjunto de nodos considerando sus relaciones se llama malla.

De acuerdo con las relaciones de conectividad se relaciona el valor de un conjunto de variables incógnitas definidas en cada nodo y denominadas grados de libertad. El conjunto de relaciones entre el valor de una variable determinada y los nodos se puede escribir en forma de sistema de ecuaciones lineales. La matriz de coeficientes de dicho sistema de ecuaciones se llama matriz de rigidez del sistema. El número de ecuaciones de dicho sistema es proporcional al número de nodos.

Una importante propiedad del método es la convergencia, si se consideran particiones de elementos finitos sucesivamente más finas, la solución numérica calculada converge rápidamente hacia la solución exacta del sistema de ecuaciones.

El uso del MEF en problemas de ingeniería es frecuente, dada la imposibilidad práctica de encontrar la solución analítica de algunos problemas, convirtiéndose en la única alternativa práctica de cálculo (Wikipedia, 2007).

1. Planteamiento general

En aplicaciones como en la mecánica de sólidos, el problema consiste en determinar los desplazamientos u de un cuerpo que satisfaga las condiciones de equilibrio. Considerando además, los planteamientos de la teoría de la elasticidad, en donde: fuerzas se relacionan con esfuerzos; esfuerzos se relacionan con deformaciones y deformaciones se relacionan con desplazamientos.

Para el caso de la ingeniería estructural, es relativamente sencillo obtener la solución exacta de una estructura cuando se tienen geometrías simples. Sin embargo, para el caso de problemas con geometrías complejas, resulta difícil encontrar una solución. Por tal motivo, conviene hacer uso de métodos aproximados, como es el caso del MEF, que utiliza distintos enfoques imponiendo condiciones menos estrictas en la solución de problemas complejos.

Algunos de estos enfoques son: el método de Rayleigh-Ritz y el método de Galerkin (Chandrupatla y Belegundu, 2002).

Antes de definir dicho enfoque, es necesario introducir el principio de la energía potencial mínima. Que dice lo siguiente:

Cuando se consideran sistemas conservativos, es decir, cuando el potencial de trabajo es independiente de la trayectoria, se dice que: de todos los campos de desplazamiento cinemáticamente admisibles, aquellos que corresponden a condiciones de equilibrio llevan a su límite a la energía potencial total. Si la condición extrema es un mínimo, el estado de equilibrio es estable.

Al definir la energía potencial (Π), como la suma de la energía de deformación unitaria (U) y el potencial de trabajo (W):

$$\Pi = U + W \quad (1)$$

Para materiales elásticos:

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\epsilon} d\Omega \quad (2)$$

$$W = - \int_{\Omega} \mathbf{u}^T \mathbf{f} d\Omega - \int_{\Gamma} \mathbf{u}^T \mathbf{T} d\Gamma - \sum_i \mathbf{u}_i^T \mathbf{P}_i \quad (3)$$

donde:

- $\boldsymbol{\sigma}$ es el vector de esfuerzos asociados a un elemento diferencial del dominio (Ω)
- $\boldsymbol{\epsilon}$ son las deformaciones unitarias asociadas a los esfuerzos $\boldsymbol{\sigma}$
- \mathbf{u} son los desplazamientos asociados a las diferentes acciones o fuerzas sobre el dominio
- \mathbf{f} son las fuerzas de cuerpo actuando en el dominio
- \mathbf{T} son las tracciones que actúan en la frontera (Γ) del dominio
- \mathbf{P} son fuerzas puntuales actuando en la frontera del dominio

En la figura II.1 se muestra un ejemplo de un cuerpo tridimensional y un elemento diferencial sujeto a distintas acciones y condiciones de frontera. Para este ejemplo, el dominio está definido por el volumen (V) que ocupa el cuerpo y la frontera (S) por la superficie del mismo.

Por lo tanto, para un cuerpo tridimensional, la energía potencial está dada por:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\epsilon} dV - \int_V \mathbf{u}^T \mathbf{f} dV - \int_S \mathbf{u}^T \mathbf{T} dS - \sum_i \mathbf{u}_i^T \mathbf{P}_i \quad (4)$$

El Método de Rayleigh-Ritz establece que en medios continuos puede emplearse el principio de la energía potencial mínima para encontrar una solución aproximada (Chandrupatla y Belegundu, 2002). Esto implica la construcción de un campo de desplazamientos $\mathbf{u} = (u, v, w)$ supuesto, esto es:

$$\begin{aligned} u &= \sum a_i \phi_i(x, y, z) & i &= 1, \dots, l \\ v &= \sum a_j \phi_j(x, y, z) & j &= l + 1, \dots, m \\ w &= \sum a_k \phi_k(x, y, z) & k &= m + 1, \dots, n \end{aligned} \quad (5)$$

$n > m > l$

donde:

las funciones ϕ son usualmente polinomios

u , v y w son desplazamientos cinemáticamente admisibles. Es decir, que satisfacen condiciones de frontera específicas.

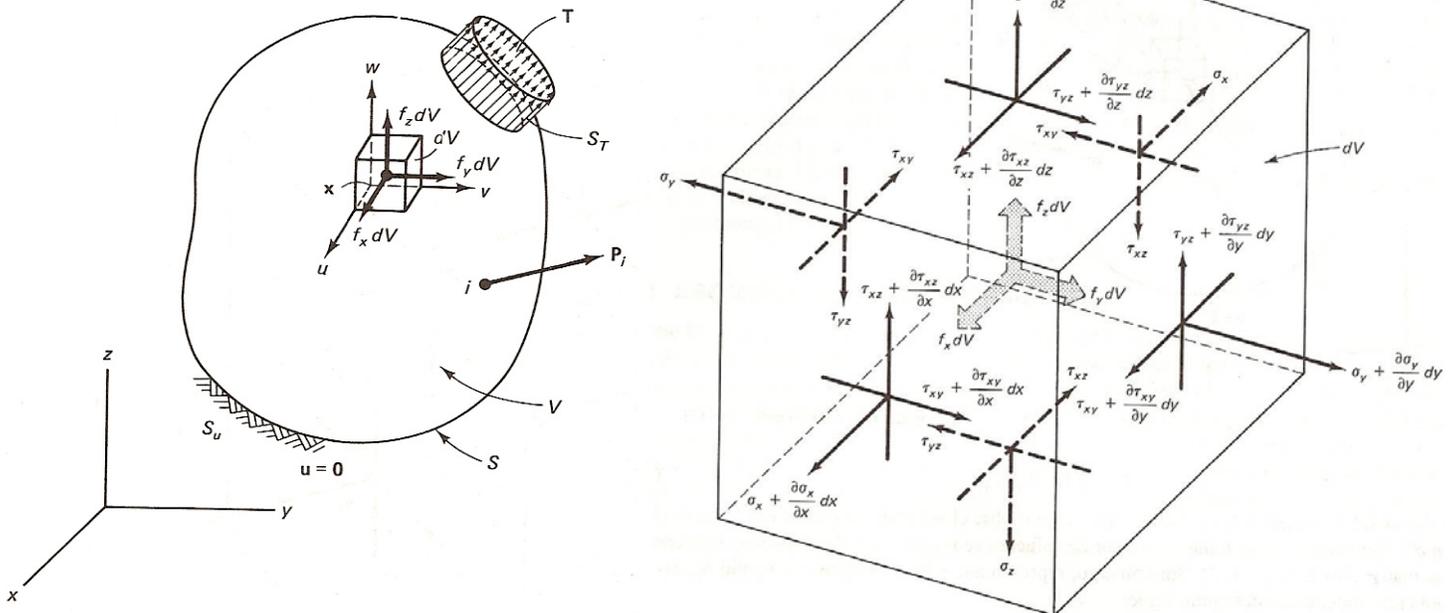
Al introducir relaciones de esfuerzo-deformación unitaria y deformación unitaria-desplazamiento en la ecuación 1, se llega a:

$$\Pi = \Pi(a_1, a_2, \dots, a_r) \quad (6)$$

donde r es el número de incógnitas independientes.

Si se lleva a sus extremos la ecuación 6 con respecto a a_i , se obtiene el conjunto de r ecuaciones:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_i} = 0; \quad i = 1, \dots, r \quad (7)$$



a) Cuerpo tridimensional. b) Equilibrio del diferencial de volumen.
 Figura 11.1. Ejemplo de dominio sujeto a acciones externas y de cuerpo con condiciones de frontera.

El enfoque del Método de Galerkin, clasificado como un método de análisis aproximado de residuos pesados, parte de la ecuación diferencial del problema. Es decir, usa el conjunto de ecuaciones gobernantes en el desarrollo de una forma integral.

Por ejemplo, se puede buscar la solución para una ecuación diferencial como la mostrada en la ecuación 8 sujeta a ciertas condiciones de frontera.

$$A(\mathbf{u}(\mathbf{x})) - f(\mathbf{x}) = 0 \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (8)$$

donde:

- A es un operador diferencial
- \mathbf{u} es la incógnita que se busca y depende de dominio
- $f(x)$ es un término independiente de \mathbf{u} .

Como se supone que el método busca una solución aproximada de la variable dependiente (ecuación 9), existirá un error o residuo relacionado con la solución (ecuación 10):

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) \approx \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) \quad (9)$$

$$A(\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x})) - f(\mathbf{x}) = \mathbf{R} \quad (10)$$

donde:

\mathbf{x} define al dominio

$\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$ es la variable aproximada de \mathbf{u}

\mathbf{R} es el error o residuo asociado a la solución aproximada de la ecuación diferencial y que se desea hacer nulo, en promedio, sobre el dominio. Para ello, se hace uso de funciones de peso como:

$$\int_{\Omega} W_i [A(\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x})) - f(\mathbf{x})] d\mathbf{x} = \int_{\Omega} W_i \mathbf{R} d\mathbf{x} = 0 \quad i = 1, \dots, r \quad (11)$$

donde:

W_i es la función de peso, continua y diferenciable.

La selección de la función de peso conduce a varios métodos aproximados. En el método de Galerkin (Zienkiewicz y Taylor, 1994), las funciones de peso se escogen a partir de las funciones base usadas para aproximar la variable dependiente.

2. Formulación de elementos finitos para elementos barra

Elementos barra sin deformación axial

Se considera un elemento como el mostrado en la figura II.2, donde se puede apreciar que el elemento está definido por 2 nodos ubicados en sus extremos. Cada nodo posee dos grados de libertad (desplazamiento vertical y giro).

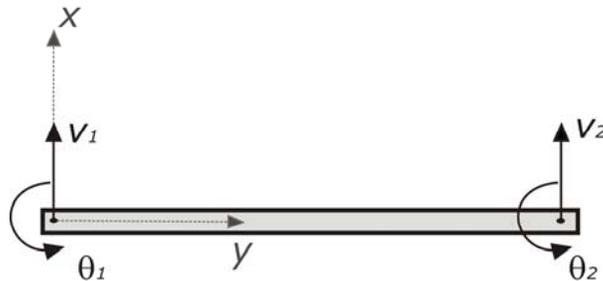


Figura II.2. Elemento barra con dos grados de libertad por nodo.

En la figura II.3 se muestra el comportamiento del elemento barra, donde las condiciones de frontera están definidas por:

Nodo inicial ($x=0$):

Desplazamiento vertical: $v(0)=1=N_1$

Giro: $\theta(0)=1=N_2$

Nodo final ($x=L$):

Desplazamiento vertical: $v(L)=1=N_3$

Giro: $\theta(L)=1=N_4$

donde:

L es la longitud del elemento

$v(x)$ es la deformación vertical para $0 \leq x \leq L$

$\theta(x)$ es el giro en el nodo $\left(\theta = \frac{dv}{dx}\right)$

N_i son las funciones de forma, $0 \leq N_i \leq 1$

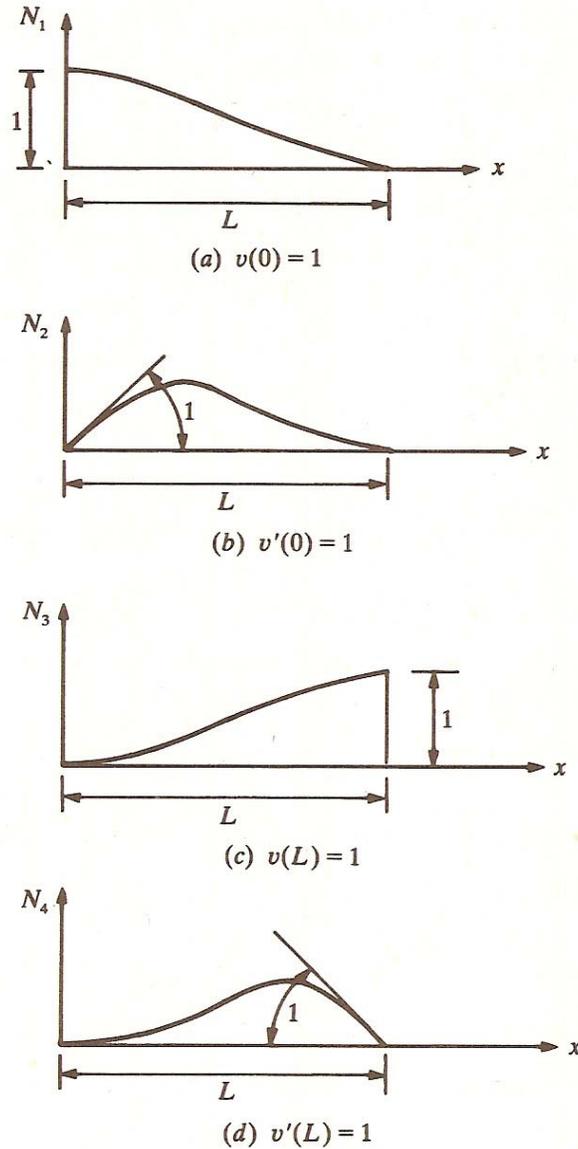


Figura II.3. Comportamiento del elemento barra.

La deformación en cualquier sección del elemento puede calcularse como:

$$v(x) = \mathbf{N} \mathbf{v} \tag{12}$$

donde:

N son las funciones de forma que dependen de x
v son las deformaciones en los grados de libertad del elemento

por lo tanto:

$$v(x) = N_1 v_1 + N_2 \theta_1 + N_3 v_2 + N_4 \theta_2 \quad (13)$$

donde:

v_i es la deformación vertical para el nodo i
 θ_i es el giro para el nodo i

Por otro lado, para representar el campo de desplazamientos se usa un polinomio de tercer grado con cuatro coeficientes, entonces:

$$v(x) = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3 \quad (14)$$

Sustituyendo las condiciones de frontera en la ecuación 14:

Nodo inicial ($x=0$):

Desplazamiento vertical: $v(0) = c_1 = v_1$

Giro: $\theta(0) = c_2 = \theta_2$

Nodo final ($x=L$):

Desplazamiento vertical: $v(L) = c_1 + c_2 L + c_3 L^2 + c_4 L^3 = v_2$

Giro: $\theta(L) = c_2 + c_3 L + c_4 L^2 = \theta_2$

Se tienen 4 ecuaciones con 4 incógnitas, por lo tanto se resuelve el sistema para las constantes c_i , se sustituyen en la ecuación 14 y se reagrupan v_1 , θ_1 , v_2 , θ_2 . Se puede demostrar que se llega a la ecuación 13, donde las funciones de forma están dadas por:

$$N_1 = 1 - 3 \frac{x^2}{L^2} + 2 \frac{x^3}{L^3} \quad (15)$$

$$N_2 = x - 2 \frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \quad (16)$$

$$N_3 = 3 \frac{x^2}{L^2} - 2 \frac{x^3}{L^3} \quad (17)$$

$$N_4 = -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \quad (18)$$

Cada una de las funciones de forma cumple con la condición de ser 1 en su nodo correspondiente, mientras que las demás son igual a cero, es decir:

Para el nodo inicial ($x=0$):

$$N_1 = 1, N_2 = 0, N_3 = 0, N_4 = 0 \text{ y } \frac{dN_1}{dx} = 0, \frac{dN_2}{dx} = 1, \frac{dN_3}{dx} = 0, \frac{dN_4}{dx} = 0$$

Para el nodo final ($x=L$):

$$N_1 = 0, N_2 = 0, N_3 = 1, N_4 = 0 \text{ y } \frac{dN_1}{dx} = 0, \frac{dN_2}{dx} = 0, \frac{dN_3}{dx} = 0, \frac{dN_4}{dx} = 1$$

Haciendo uso del concepto de energía potencial total, para una barra con sección transversal constante y sujeta a una carga distribuida, como la que se muestra en la figura II.4, se tiene que (Buchanan, 1995):

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^L \int_A \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\epsilon} dx dA - \int_0^L w v dx \quad (19)$$

Donde el primer término representa la energía de deformación (U), y se utiliza para determinar la matriz de rigidez del elemento. El segundo término representa la energía potencial (W) de las cargas externas actuando sobre el elemento.

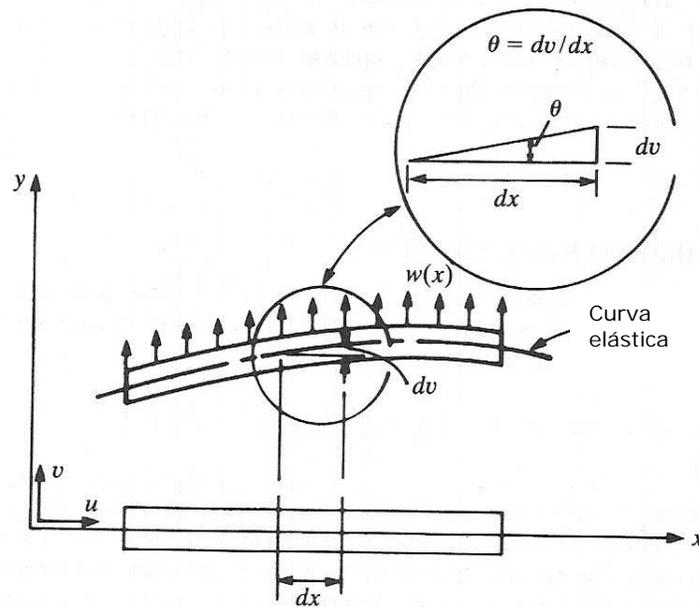


Figura II.4. Viga sujeta a carga distribuida.

Si se considera que el esfuerzo que causa la flexión en un elemento barra está dado por:

$$\sigma(x) = \frac{M(x)}{I} y \quad (20)$$

donde:

I el segundo momento de inercia de su sección transversal, $I = \int_A y^2 dA$.

$M(x)$ es el momento flexionante, que a su vez está relacionado con la flexión mediante la expresión:

$$M(x) = EI \frac{d\theta(x)}{dx} = EI \frac{d^2v(x)}{dx^2} \quad (21)$$

donde:

E el módulo de elasticidad del material constitutivo de la barra.

Además, de acuerdo con la ley de Hooke (Buchanan, 1995):

$$\sigma(x) = E\varepsilon(x) \quad (22)$$

Al sustituir la ecuaciones 20 a 22 en el primer término de la 19, se llega a:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L EI(v'')^2 dx \quad (23)$$

donde:

$$v'' = \frac{d^2v(x)}{dx^2}$$

Para aproximar v'' se emplean las funciones de forma derivadas dos veces con respecto a x :

$$\mathbf{v}'' = \mathbf{N}'' \mathbf{v} \quad (24)$$

Por lo tanto, considerando $EI = \text{constante}$, la energía potencial total está dada por:

$$\Pi = \frac{1}{2} EI \int_0^L \mathbf{v}^T \mathbf{N}''^T \mathbf{N}'' \mathbf{v} dx - \int_0^L \mathbf{v}^T \mathbf{N}^T w dx \quad (25)$$

Minimizando la energía con respecto a \mathbf{v} :

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{v}} = \frac{1}{2} EI \int_0^L \mathbf{N}''^T \mathbf{N}'' \mathbf{v} dx - \int_0^L \mathbf{N}^T w dx = 0 \quad (26)$$

Sustituyendo las funciones de forma en la expresión anterior:

$$\frac{1}{2} EI \int_0^L \begin{bmatrix} -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} \\ -\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \\ \frac{2}{L} - \frac{6x}{L^2} \\ -\frac{2}{L} + \frac{6x}{L^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{12x}{L^3} - \frac{6}{L^2} & -\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2} & \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} & -\frac{2}{L} + \frac{6x}{L^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} dx - \int_0^L \begin{bmatrix} 1 - 3\frac{x^2}{L^2} + 2\frac{x^3}{L^3} \\ x - 2\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \\ 3\frac{x^2}{L^2} - 2\frac{x^3}{L^3} \\ -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \end{bmatrix} w dx = 0 \quad (27)$$

Integrando con respecto a x :

$$\frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} wL/2 \\ wL^2/2 \\ wL/2 \\ -wL^2/2 \end{bmatrix} \quad (28)$$

En forma matricial:

$$\mathbf{K}_e \mathbf{v} = \mathbf{f} \quad (29)$$

donde:

\mathbf{K}_e es la matriz de rigidez del elemento barra.

Elementos barra incluyendo deformación axial

Se considera un elemento barra sujeto a carga axial pura (figura II.5).

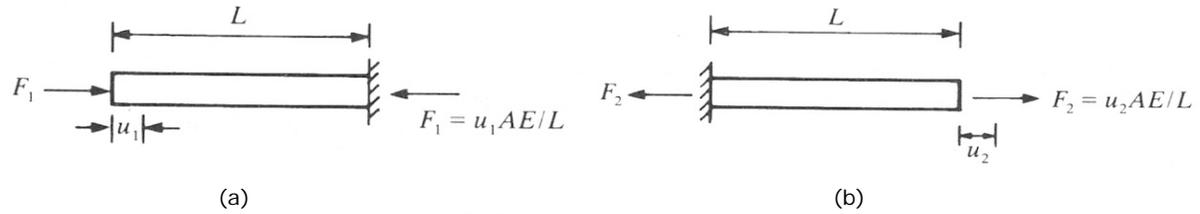


Figura II.5. Barra sujeta a carga axial pura.

Las fuerzas que producen los desplazamientos en los nodos inicial y final, están dadas por:

$$f_1 = u_1 \frac{EA}{L}, \quad f_2 = u_2 \frac{EA}{L} \quad (30)$$

donde:

f_i es la fuerza en el nodo i

u_i es el desplazamiento del nodo i

Al hacer que el sistema esté en equilibrio y planteándolo en forma matricial:

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \quad (31)$$

De donde se obtiene que la matriz de rigidez del elemento, sujeto a carga axial, es:

$$\mathbf{K}_e = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (32)$$

Si se considera un elemento con tres grados de libertad por nodo (figura II.6), y se combinan las matrices de rigidez obtenidas en las ecuaciones 28 y 32, se obtiene.

$$\begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & -a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 12a_2 & 6a_2L & 0 & -12a_2 & 6a_2L \\ 0 & 6a_2L & 4a_2L^2 & 0 & -6a_2L & 2a_2L^2 \\ -a_1 & 0 & 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & -12a_2 & -6a_2L & 0 & 12a_2 & -6a_2L \\ 0 & 6a_2L & 2a_2L^2 & 0 & -6a_2L & 4a_2L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ V_1 \\ M_1 \\ F_2 \\ V_2 \\ M_2 \end{bmatrix} \quad (33)$$

donde $a_1=EA/L$ y $a_2=EI/L^3$.

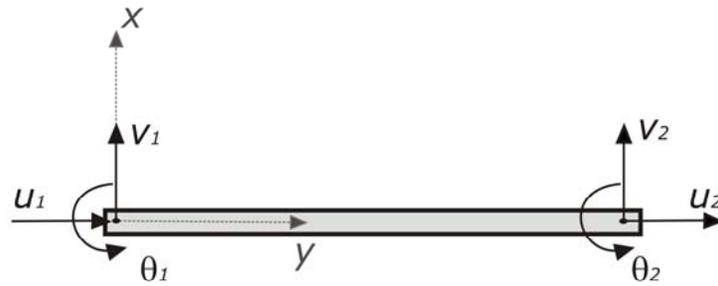


Figura II.6. Barra con tres grados de libertad por nodo.

Por otro lado, la matriz de rigidez en el sistema global (X, Y), de un elemento barra con un ángulo de inclinación (figura II.7) se obtiene mediante una transformación lineal. Dicha transformación permite pasar del sistema local al global (ecuación 35) mediante el uso de una matriz (T) que es función del ángulo de inclinación de la barra:

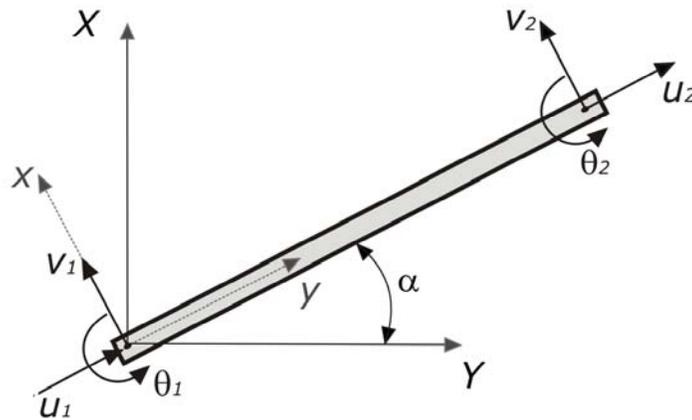


Figura II.7. Barra con un ángulo de inclinación.

Matriz de transformación del sistema local al global:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \text{sen} \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\text{sen} \theta & \cos \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & \text{sen} \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\text{sen} \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (34)$$

Matriz de rigidez del elemento barra en el sistema global (X, Y):

$$\mathbf{K}_{XY} = \mathbf{T}^T \mathbf{K}_{xy} \mathbf{T} \quad (35)$$

Por lo tanto, la matriz de rigidez del elemento barra con tres grados de libertad por nodo en el sistema global está dada por:

$$\mathbf{K}_{XY} = \frac{E}{L} \begin{bmatrix}
 Ac^2 + \frac{12I}{L^2} s^2 & \left(A - \frac{12I}{L^2}\right) cs & -\frac{6I}{L} s & -\left(Ac^2 + \frac{12I}{L^2} s^2\right) & -\left(A - \frac{12I}{L^2}\right) cs & -\frac{6I}{L} s \\
 & As^2 + \frac{12I}{L^2} c^2 & \frac{6I}{L} c & -\left(A - \frac{12I}{L^2}\right) cs & -\left(As^2 + \frac{12I}{L^2} c^2\right) & \frac{6I}{L} c \\
 & & 4I & \frac{6I}{L} s & -\frac{6I}{L} c & 2I \\
 & simétrica & & Ac^2 + \frac{12I}{L^2} s^2 & \left(A - \frac{12I}{L^2}\right) cs & \frac{6I}{L} s \\
 & & & & As^2 + \frac{12I}{L^2} c^2 & -\frac{6I}{L} c \\
 & & & & & 4I
 \end{bmatrix} \quad (34)$$

donde:

$$c = \cos \alpha$$

$$s = \sin \alpha$$

Elementos barra en tres dimensiones

Sea un elemento barra como el mostrado en la figura II.8. Este elemento cuenta con 6 grados de libertad por nodo: tres desplazamientos lineales y tres angulares.

La formulación de este elemento es similar al elemento en 2D. Sin embargo, debido a la gran cantidad de espacio que se necesita para realizar la formulación, se sugiere consultar el desarrollo de matriz de rigidez de elementos tridimensionales en la literatura, ya que es la propiedad que se emplea en el método de detección de daño (Moaveni, 2003).

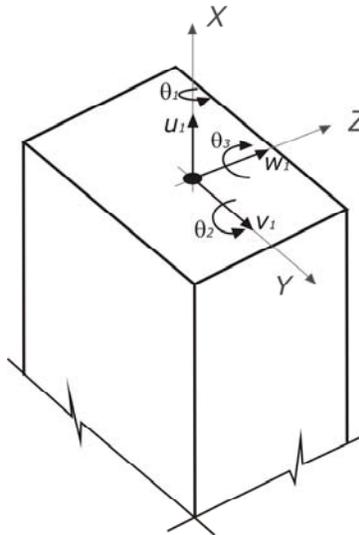


Figura II.8. Barra tridimensional con 6 grados de libertad por nodo.

3. Formulación de elementos finitos para elementos cuadriláteros isoparamétricos

Cuando se desea modelar elementos planos con geometría compleja (figura II.9), es necesario hacer una discretización del dominio para poder conocer su comportamiento.

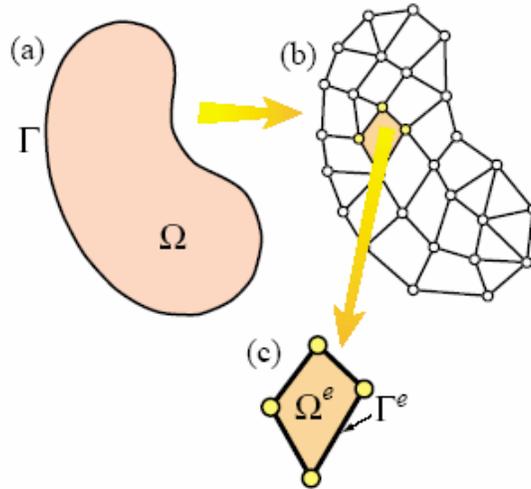


Figura II.9. Discretización de un cuerpo plano en elementos cuadriláteros.

Como se aprecia en la figura II.9c, un dominio puede discretizarse en subdominios rectangulares o cuadriláteros.

Con la finalidad de utilizar elementos más generales, se realizó la formulación para elementos cuadriláteros de 8 nodos. Los que se numeran como se muestra en la figura II.10. Así, cuando se desea modelar elementos con 4, 5, 6 o 7 nodos, sólo se consideran nulos los nodos que no se requieren.

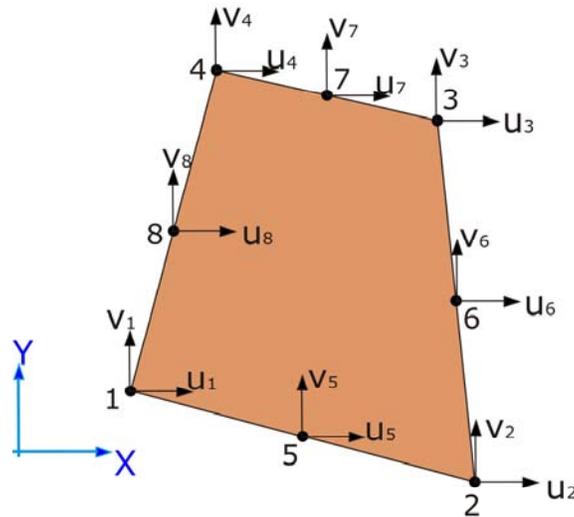


Figura II.10. Elemento cuadrilátero de 8 nodos.

Es importante mencionar que en este trabajo sólo se desarrolló la formulación para elementos planos con sección delgada, es decir, con fuerza normal al plano despreciable.

A continuación se presenta la formulación para elementos cuadriláteros de 8 nodos sujetos a esfuerzo plano y a deformación plana, con sus respectivas hipótesis de comportamiento.

Esfuerzo plano

Se dice que una placa delgada se encuentra en estado plano de esfuerzos cuando está cargada en su plano medio (figura II.11).

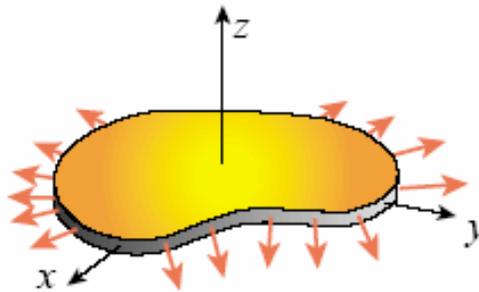


Figura II.11. Placa cargada en su plano medio.

Para realizar la formulación de este elemento, se plantean las siguientes hipótesis (Felippa, 2004):

1. Las cargas aplicadas en la placa actúan en dirección del plano medio y son simétricas con respecto a él.
2. Todas las condiciones de soporte son simétricas con respecto al plano medio.
3. Los desplazamientos esfuerzos y deformaciones en el plano, pueden ser consideradas como uniformes a través del espesor.
4. Las componentes de esfuerzo normal y cortante en la dirección del eje z, son cero o despreciables.
5. El material de la placa es el mismo a través de todo el espesor.

Para materiales elásticos y con el uso de la ley de Hooke (Hetnarski y Ignaczak, 2004):

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (36)$$

Para esfuerzos planos $\sigma_{i3} = 0$; $i = 1, 2, 3$; por lo tanto:

$$\begin{aligned} \sigma_{33} &= (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{33} + \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) = 0 \\ \varepsilon_{33} &= -\frac{\lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})}{(\lambda + 2\mu)} \\ \sigma_{11} &= (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{11} + \lambda(\varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \\ \sigma_{12} &= \sigma_{21} = 2\mu\varepsilon_{12} \end{aligned} \quad (37)$$

donde:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ \mu &= \frac{E}{2(1+\nu)} \end{aligned} \quad (38)$$

ν = relación de Poisson

E = módulo de elasticidad del material

Sustituyendo 38 en 37, se tiene:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \frac{E(\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22})}{(1 - \nu^2)} \\ \sigma_{22} &= \frac{E(\varepsilon_{22} + \nu\varepsilon_{11})}{(1 - \nu^2)} \\ \tau_{12} &= G\gamma_{12} = \frac{E(1 + \nu)}{2(1 - \nu)}\gamma_{12}\end{aligned}\tag{39}$$

En forma matricial:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}\tag{40}$$

La ecuación 40 es utilizada en la formulación de la matriz de rigidez del elemento cuadrilátero.

Deformación plana

Se plantean las mismas hipótesis de esfuerzo plano excepto la número 4, pues en deformación plana $\varepsilon_{i3} = 0$, $i = 1, \dots, 3$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{11} + \lambda\varepsilon_{22} \\ \sigma_{22} &= (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{22} + \lambda\varepsilon_{11} \\ \sigma_{33} &= \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) \\ \sigma_{12} &= \sigma_{21} = 2\mu\varepsilon_{12}\end{aligned}\tag{41}$$

Sustituyendo los valores de 38 en 41:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \frac{E((1 - \nu)\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22})}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)} \\ \sigma_{22} &= \frac{E((1 - \nu)\varepsilon_{22} + \nu\varepsilon_{11})}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)} \\ \tau_{12} &= G\gamma_{12} = \frac{E(1 - 2\nu)}{2(1 - 2\nu)(1 + \nu)}\gamma_{12}\end{aligned}\tag{42}$$

En forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \frac{E^*}{1 - \nu^{*2}} \begin{bmatrix} 1 & \nu^* & 0 \\ \nu^* & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu^*}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}\tag{43}$$

donde:

$$E^* = \frac{E}{1 - \nu^2} \quad (44)$$

$$\nu^* = \frac{\nu}{1 - \nu}$$

Definición de las variables

El vector de desplazamientos en un nodo se define como:

$$\mathbf{u}(x, y) = \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} \quad (45)$$

No se considera el desplazamiento en la dirección "Z" ya que esta no contribuye a la energía de deformación.

El correspondiente vector de deformación se define por sus tres componentes independientes como:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x, y) = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x(x, y) \\ \varepsilon_y(x, y) \\ \gamma_{xy}(x, y) \end{Bmatrix} \quad (46)$$

Y el vector de esfuerzo, también, está definido por sus tres componentes independientes:

$$\boldsymbol{\sigma}(x, y) = \begin{Bmatrix} \sigma_x(x, y) \\ \sigma_y(x, y) \\ \tau_{xy}(x, y) \end{Bmatrix} \quad (47)$$

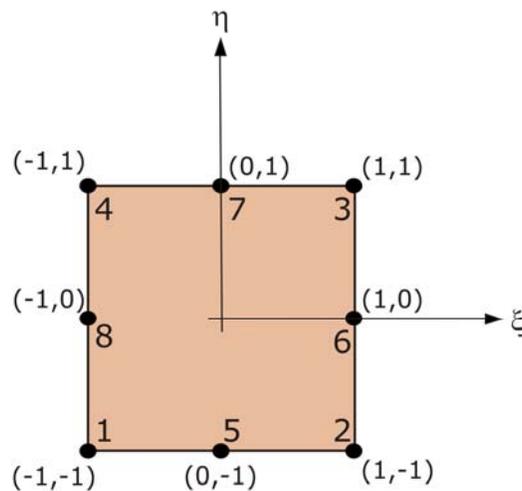


Figura II.12. Elemento cuadrilátero *maestro* de 8 nodos en el plano ξ, η .

Matriz de rigidez del elemento cuadrilátero de 8 nodos

La matriz de rigidez de un elemento cuadrilátero *maestro*, como el mostrado en la figura II.12, puede obtenerse a partir de la energía de deformación elástica en el cuerpo, dada por:

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega \quad (48)$$

Al considerar elementos de espesor constante:

$$U = \frac{1}{2} t \int_A \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} dA \quad (49)$$

donde t es el espesor del elemento cuadrilátero.

En la figura II.12 se muestra un elemento *maestro* en el plano $\xi\eta$, en donde $-1 \leq \xi \leq 1$ y $-1 \leq \eta \leq 1$.

Mediante el uso del elemento *maestro*, se realiza la formulación para un elemento cuadrado y que representará a un elemento como el de la figura II.10, donde la liga o mapeo entre un dominio y el otro serán las funciones de interpolación.

En un sistema de coordenadas x, y las deformaciones se relacionan con los desplazamientos mediante la expresión:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} = \mathbf{S} \mathbf{u} \quad (50)$$

El campo de desplazamientos del elemento se expresa en términos de valores en sus 8 nodos. Por lo tanto, el vector de desplazamientos en los nodos es:

$$\mathbf{u}^T = \{u_1 \ v_1 \ u_2 \ v_2 \ u_3 \ v_3 \ u_4 \ v_4 \ u_5 \ v_5 \ u_6 \ v_6 \ u_7 \ v_7 \ u_8 \ v_8\} \quad (51)$$

Al expresar el vector de desplazamientos del elemento en función de los desplazamientos en los nodos por medio de funciones de interpolación, se tiene que:

$$\bar{\mathbf{u}}(x, y) = \mathbf{N} \mathbf{u} \quad (52)$$

donde:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & N_6 & 0 & N_7 & 0 & N_8 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & N_6 & 0 & N_7 & 0 & N_8 \end{bmatrix} \quad (53)$$

Las funciones de interpolación N_i se pueden expresar en función de coordenadas locales y tomando en cuenta que:

$$\begin{aligned} N_i &= 1 \text{ para el nodo } j, \text{ cuando } i = j \\ N_i &= 0 \text{ para el nodo } j, \text{ cuando } i \neq j \end{aligned}$$

Así:

$$\begin{aligned} N_1 &= 1/4 (1 - \xi)(1 - \eta) - 1/2 N_5 - 1/2 N_6 \\ N_2 &= 1/4 (1 + \xi)(1 - \eta) - 1/2 N_5 - 1/2 N_6 \\ N_3 &= 1/4 (1 + \xi)(1 + \eta) - 1/2 N_6 - 1/2 N_7 \\ N_4 &= 1/4 (1 - \xi)(1 + \eta) - 1/2 N_7 - 1/2 N_8 \\ N_5 &= 1/2 (1 - \xi^2)(1 - \eta) \\ N_6 &= 1/2 (1 + \xi^2)(1 - \eta^2) \\ N_7 &= 1/2 (1 - \xi^2)(1 + \eta) \\ N_8 &= 1/2 (1 - \xi)(1 - \eta^2) \end{aligned} \quad (54)$$

En la formulación isoparamétrica, se usan las mismas funciones de forma para expresar las coordenadas de un punto dentro del elemento en términos de las coordenadas locales, esto es:

$$\begin{aligned} x &= N_1 x_1 + N_2 x_2 + \dots + N_8 x_8 \\ y &= N_1 y_1 + N_2 y_2 + \dots + N_8 y_8 \end{aligned} \quad (55)$$

Las derivadas de una función en coordenadas x, y en términos de sus derivadas en coordenadas ξ, η se expresan de la siguiente manera:

Sea $f = f(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$, por la regla de la cadena de diferenciación:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \xi} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial f}{\partial \eta} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{aligned} \quad (56)$$

Matricialmente:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \xi} \\ \frac{\partial f}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{Bmatrix} = \mathbf{J} \begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (57)$$

donde \mathbf{J} es conocida como matriz Jacobiana.

Al despejar la derivada de la función con respecto a las variables locales tenemos:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \xi} \\ \frac{\partial f}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \xi} \\ \frac{\partial f}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (58)$$

Al considerar la ecuación 50, donde la función a derivar es \mathbf{u} :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (59)$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial v}{\partial \xi} \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} \end{Bmatrix}$$

Sustituyendo en la ecuación 50:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x, y) = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -J_{21} & J_{22} \\ -J_{21} & J_{22} & -J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ \frac{\partial v}{\partial \xi} \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (60)$$

Simplificando:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x, y) = \mathbf{A} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ \frac{\partial v}{\partial \xi} \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (61)$$

donde:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -J_{21} & J_{22} \\ -J_{21} & J_{22} & -J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \quad (62)$$

Pero además, se sabe que:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ \frac{\partial v}{\partial \xi} \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial \eta} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial \xi} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial \eta} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial \xi} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} \mathbf{u} = \mathbf{G} \mathbf{u} \quad (63)$$

La matriz G contiene las derivadas de las funciones de forma con respecto a ξ y η .

Entonces:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{S}\mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{G}\mathbf{u} \quad (64)$$

Y, al expresar los esfuerzos en términos de los desplazamientos en los nodos, mediante la relación esfuerzo-deformación mostrada en la ecuación 40:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}\mathbf{A}\mathbf{G}\mathbf{u} \quad (65)$$

Sustituyendo en la ecuación 49, se llega a que la matriz de rigidez del elemento cuadrilátero es:

$$\mathbf{k}_e = t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \det \mathbf{J} d\xi d\eta \quad (66)$$

donde $\mathbf{B} = \mathbf{A}\mathbf{G}$.

Es importante destacar que la matriz de rigidez \mathbf{k}_e del elemento es de orden 16 y que para realizar su integración se puede hacer uso de la cuadratura de Gauss (Zienkiewicz y Taylor, 1994) por tratarse de integrales complejas.

Para modelar elementos cuadriláteros en 3D, es preciso realizar una transformación de coordenadas a la matriz de rigidez mostrada en la ecuación 66. Dicha transformación se realiza de una manera similar a la mostrada en la ecuación 35, donde la matriz de transformación (\mathbf{T}) es función de los cosenos directores del elemento cuadrilátero. Con la aplicación de la transformación de coordenadas se obtendrá una matriz de rigidez en el espacio y su orden será de 24x24.

III. Daño estructural

En la actualidad, existe un gran número de estudios en donde se plantean métodos para localizar y cuantificar el daño en las estructuras (Doebeling, *et al.*, 1998). Dichos métodos se basan en la medición de diferentes propiedades de las estructuras y poseen distintas ventajas y desventajas para localizar y estimar daño.

La mayoría de los métodos de detección de daño utilizan las propiedades dinámicas de las estructuras, como formas modales y frecuencias, en donde un cambio en dichas propiedades podría representar la presencia de daño en alguno de los elementos que componen a la estructura.

Gracias a los avances en la instrumentación de edificios, en la actualidad resulta relativamente sencillo obtener de una manera adecuada las propiedades dinámicas de estos. Incluso, se puede tener un seguimiento del comportamiento de las estructuras y analizar la evolución de las propiedades dinámicas en distintos tiempos y después de distintos eventos o fenómenos físicos como los sismos.

En este capítulo, se presenta un algoritmo que permite estimar daño estructural, definido como la pérdida o degradación de rigidez (d_k) de un elemento estructural (Escobar *et al.*, 2001).

1. Localización y detección de daño estructural comparando matrices de rigideces en elementos de la estructura

Se presenta una forma de estimar daño estructural mediante la medición de las propiedades dinámicas de una estructura. Así, para detectar la presencia de daño, primero se plantea un modelo de referencia *base*, es decir, un modelo de la estructura sin daño; después se obtienen propiedades dinámicas para poder conocer su rigidez actual (o estado de daño actual). Y por último, mediante una comparación de rigideces, se obtiene el daño de los elementos que componen a la estructura.

Para un sistema de varios grados de libertad, la ecuación de movimiento en una estructura sin daño es:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{F} \quad (67)$$

donde:

\mathbf{M} y \mathbf{K} son las matrices de masas y rigideces respectivamente
 $\ddot{\mathbf{u}}$, \mathbf{u} y \mathbf{F} representan correspondientemente los vectores de aceleraciones, desplazamientos y fuerzas en la estructura.

La ecuación diferencial 67 tiene una solución como la que se muestra en la ecuación 68, y los modos y frecuencias de vibrar pueden obtenerse mediante el uso de la descomposición en valores y vectores característicos.

$$(\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M})\boldsymbol{\phi} = 0 \quad (68)$$

donde:

ω son los valores característicos de la solución y representan las frecuencias de vibrar de la estructura sin daño.
 $\boldsymbol{\phi}$ son los vectores característicos y representan las formas modales de la estructura, de igual manera, para un estado sin daño.

Si además se considera que la masa de la estructura (\mathbf{M}) se mantiene constante en el tiempo, se puede afirmar que un cambio en las propiedades dinámicas de la estructura ($\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\varphi}$) obligarían a considerar un cambio en su matriz de rigidez.

Como ya se ha mencionado, es posible obtener las formas modales y frecuencias de vibración mediante el uso de una técnica de instrumentación. Si se conocieran todos estos parámetros dinámicos y se pudiera obtener la solución de la ecuación 67, se tendría ahora una matriz de rigidez de la estructura para un estado de daño, esto es:

$$(\mathbf{K}_d - \boldsymbol{\omega}_d^2 \mathbf{M}) \boldsymbol{\varphi}_d = 0 \quad (69)$$

Por otro lado, la matriz de rigidez global (\mathbf{K}) de una estructura es igual a la suma de las matrices de rigidez de los n elementos que la componen:

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^n \mathbf{K}e_i \quad (70)$$

De manera similar, para un estado de daño, la matriz de rigidez global de la estructura se constituye de la suma de las matrices de rigidez de los n elementos que la componen, afectadas por un factor de degradación de rigidez (d_k), es decir (Escobar, *et al.*, 2001):

$$\mathbf{K}_d = \sum_{i=1}^n \mathbf{K}e_i (1 - d_{k_i}), \text{ para } 0 \leq d_k \leq 1 \quad (71)$$

Por lo tanto, la ecuación que permite relacionar un estado sin daño con un estado con daño estará dada por:

$$\mathbf{K}_d = \sum_{i=1}^n \mathbf{K}e_i - \sum_{i=1}^n d_{k_i} \mathbf{K}e_i = \mathbf{K} - \sum_{i=1}^n d_{k_i} \mathbf{K}e_i \quad (72)$$

También:

$$\mathbf{K} - \mathbf{K}_d = \sum_{i=1}^n d_{k_i} \mathbf{K}e_i \quad (73)$$

Como se trata de matrices cuadradas, simétricas y de orden ngl (número de grados de libertad); la ecuación 73 puede escribirse como un sistema de ecuaciones lineales tomando sólo los términos independientes de las matrices. Las incógnitas que se buscan son los factores de degradación de rigidez (d_k) de cada elemento, por tanto:

$$\mathbf{k} - \mathbf{k}_d = \mathbf{S}_k \mathbf{d}_k \quad (74)$$

en donde:

El vector $\mathbf{k} - \mathbf{k}_d$, de orden m (donde $m = ngl(ngl+1)/2$), contiene los términos independientes de la diferencia entre las matrices \mathbf{K} y \mathbf{K}_d .

La matriz \mathbf{S}_k contiene, en sus columnas, los términos independientes de cada una de las matrices de rigidez de los elementos que componen a la estructura.

\mathbf{S}_k es de orden $m \times n$.

El vector \mathbf{d}_k es el vector incógnita y contiene los factores de degradación de cada uno de los elementos estructurales. Es de orden $n \times 1$.

Un problema que se puede apreciar en la ecuación 74, es que el sistema de ecuaciones no es consistente, puesto que la matriz \mathbf{S}_k no es cuadrada. Para resolver este sistema, se puede hacer uso de algún método numérico como el *método de la pseudoinversa* (que se basa en la descomposición de valores singulares), por el *método de mínimos cuadrados* o por *programación lineal*.

En estudios previos (Fierro, 2001), se ha observado que el *método de descomposición de valores singulares* produce mejores resultados, sobre todo en estructuras modeladas como marcos planos.

Otro problema que presenta la ecuación 74, consiste en que en la práctica no es posible obtener el vector \mathbf{k}_d de una manera precisa. La obtención de la matriz de rigideces \mathbf{K}_d se complica debido a que, cuando se instrumenta una estructura, generalmente el número de grados de libertad que se mide es mucho menor que el número de grados de libertad del modelo *base*.

Para tratar de encontrar una solución adecuada al problema se podría reducir el sistema mostrado en la ecuación 73 a un orden inferior (que podría ser al número de grados de libertad medidos) o expandir la matriz de rigideces \mathbf{K}_d al número de grados de libertad considerados en el modelo *base*.

Según Zimmerman *et al.*, (2001), la reducción del modelo o la expansión de los parámetros dinámicos medidos presentan diferentes desventajas. Una es que el daño localizado en los elementos del modelo con todos los grados de libertad se distribuye o dispersa entre los demás elementos al realizar la reducción. Mientras que un problema en el proceso expansión de los parámetros dinámicos lleva a errores que indican detección de daño falso, es decir se localiza daño donde no existe.

En este trabajo utilizó la reducción del modelo base mediante el uso del *Método de la Matriz de Transformación* (Escobar, *et al.*, 2001). Sin embargo, no se descarta la posibilidad de que en el futuro se pudiera realizar la expansión de los parámetros dinámicos con errores mínimos en la expansión, pues se ha observado que trabajar con un sistema con todos los grados de libertad produce mejores resultados en detección y localización de daño.

2. El Método de la Matriz de Transformación

El *Método de la Matriz de Transformación* se basa en la comparación de las matrices de rigidez reducidas de un modelo *base* y la matriz de rigidez de la estructura obtenida de parámetros dinámicos medidos en un número de grados de libertad limitado o grados de libertad primarios (Escobar, *et al.*, 2001).

Para pasar del modelo *base* a uno reducido (figura III.1) se realiza una condensación estática con la matriz de transformación \mathbf{T} .

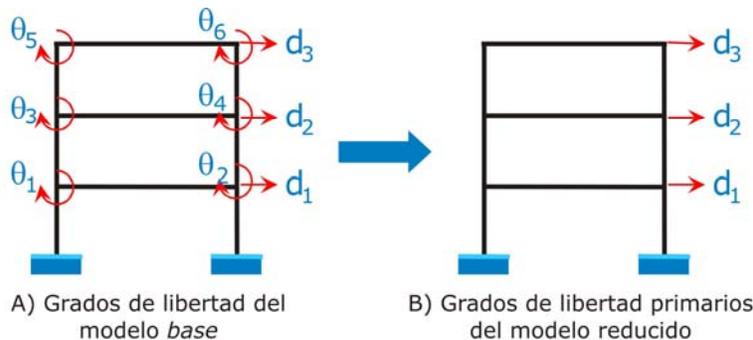


Figura III.1. Reducción de los grados de libertad del modelo base a grados de libertad primarios.

La matriz de rigidez reducida de la estructura ($\bar{\mathbf{K}}$) se obtiene mediante la siguiente transformación:

$$\bar{\mathbf{K}} = \mathbf{T}^T \mathbf{K} \mathbf{T} \quad (75)$$

La matriz \mathbf{T} , una función de los grados de libertad primarios y secundarios de la estructura:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ -\mathbf{K}_{22}^{-1} \mathbf{K}_{21} \end{bmatrix} \quad (76)$$

donde \mathbf{K}_{22} y \mathbf{K}_{21} son submatrices de la matriz de rigideces de la estructura.

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \quad (77)$$

En la ecuación 77 el subíndice 1 representa los grados de libertad primarios y el subíndice 2 representa los grados de libertad secundarios.

Al aplicar la transformación lineal de la ecuación 75 a cada matriz de rigidez en la ecuación 73, se tendrá el sistema de ecuaciones expresado en su forma reducida como:

$$\bar{\mathbf{K}} - \bar{\mathbf{K}}_d = \sum_{i=1}^n dk_i \bar{\mathbf{K}} e_i \quad (78)$$

Y la forma reducida del sistema mostrado en la ecuación 74 será:

$$\bar{\mathbf{k}} - \bar{\mathbf{k}}_d = \bar{\mathbf{S}}_k \mathbf{d}_k \quad (79)$$

La solución del sistema, puede obtenerse también mediante el uso de algún método numérico como se mencionó en el capítulo anterior.

Cálculo de la matriz de rigidez reducida a partir de la medición de propiedades dinámicas

Existen diferentes algoritmos que permiten obtener la matriz de rigidez reducida de un edificio a partir de parámetros dinámicos (Acevedo, 2005). Sin embargo, la mayoría son sensibles a la cantidad y calidad de datos obtenidos en la medición experimental (Galiote, 2006).

El MMT utiliza el algoritmo desarrollado por Baruch y Bar Itzhack (Baruch y Bar Itzhack, 1978), que supone que la masa permanece constante. También, dicho algoritmo hace la suposición de que no se conocen todos los modos y frecuencias de vibrar de la estructura y que además los modos de vibrar medidos no son ortogonales. Así, realiza una corrección *óptima* a fin de que los modos cumplan con la condición de ortogonalidad, cuya solución directa se muestra en la ecuación siguiente (Baruch y Bar Itzhack, 1978):

$$\bar{\mathbf{K}}_a = (\bar{\mathbf{K}} - \bar{\mathbf{M}} \mathbf{Z} \mathbf{H} + \bar{\mathbf{M}} \mathbf{X} \bar{\boldsymbol{\Omega}}^2 \mathbf{X}^T \bar{\mathbf{M}}) \quad (80)$$

donde:

$\bar{\mathbf{K}}_a$ es la matriz de rigidez ajustada y reducida

$$\mathbf{H} = \mathbf{I} - \mathbf{Y}$$

$$\mathbf{X} = \bar{\boldsymbol{\Phi}} (\bar{\boldsymbol{\Phi}}^T \bar{\mathbf{M}} \bar{\boldsymbol{\Phi}})^{-1/2}$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X} \mathbf{X}^T \bar{\mathbf{M}}$$

$$\mathbf{Z} = \mathbf{X} \mathbf{X}^T \bar{\mathbf{K}}$$

$\bar{\boldsymbol{\Phi}}$ es la matriz de modos de vibrar considerando los grados de libertad reducidos

$\bar{\Omega}$ es la matriz diagonal con las correspondientes frecuencias de vibrar
 \mathbf{I} es la matriz identidad.

Algoritmo de detección de daño

Para poder estimar el estado de daño de una estructura, es necesario establecer las condiciones iniciales del problema que incluyan la eliminación de ecuaciones e incógnitas, así como el intervalo del factor de degradación de rigidez (d_k) (Escobar *et al.*, 2004):

1. Obtener la matriz de rigidez reducida ($\bar{\mathbf{K}}_d$) de la estructura a partir de los parámetros dinámicos medidos, así como su correspondiente vector de términos independientes ($\bar{\mathbf{k}}_d$).
2. Calcular las matrices $\mathbf{K}e_i$, \mathbf{K} y \mathbf{T} . Inicialmente, se calcula la matriz de transformación (\mathbf{T}) a partir de la matriz de rigidez del modelo *base* (\mathbf{K}), es decir, inicialmente se considera que no existe daño.
3. Se calculan las matrices reducidas $\bar{\mathbf{K}} = \mathbf{T}^T \mathbf{K} \mathbf{T}$ y $\bar{\mathbf{K}}e_i = \mathbf{T}^T \mathbf{K}e_i \mathbf{T}$.
4. Se obtienen el vector \mathbf{k} y la matriz \mathbf{S}_k formados por los términos independientes.
5. Se resuelve el sistema de ecuaciones mostrado en la ecuación 79 para \mathbf{d}_k .
6. Con el vector \mathbf{d}_k obtenido, se calcula la matriz de rigidez expandida (\mathbf{K}_d) para un estado de daño y su correspondiente matriz de transformación (\mathbf{T}_d).
7. Se obtiene la matriz $\bar{\mathbf{K}}_d = \mathbf{T}_d^T \mathbf{K}_d \mathbf{T}_d$ y se forma un vector $\bar{\mathbf{k}}_{da}$ de términos independientes.
8. Si la diferencia entre el vector $\bar{\mathbf{k}}_d$ (obtenido de la medición de los parámetros dinámicos de la estructura) y $\bar{\mathbf{k}}_{da}$ (obtenido en el paso anterior) es menor que una tolerancia establecida, el proceso termina; de lo contrario, el proceso regresa al paso 3 utilizando la matriz de transformación (\mathbf{T}_d) calculada en el paso anterior.

Como se puede observar, el procedimiento es iterativo y converge al estado de daño que presenta la estructura.

Convergencia del método

Con la finalidad de tener un criterio que permita terminar el proceso, descrito en el algoritmo de detección de daño, es necesario medir la aproximación alcanzada en cada iteración.

Inicialmente, se puede suponer que la estructura no presenta daño para calcular la matriz de transformación (paso 2 del algoritmo), entonces, el proceso iterativo puede converger al estado de daño definido por el vector $\bar{\mathbf{k}}_d$. Esto se puede lograr si la matriz de transformación, empleada en el paso 3 del algoritmo, en la iteración $n+1$ se calcula por una fracción de la suma de los estados de daño obtenidos en las iteraciones anteriores n y $n-1$, por ejemplo:

$$dk_{n+1} = \beta dk_n + (1 - \beta) dk_{n-1} \quad (81)$$

De una manera equivalente al método de bisección, en cada iteración el algoritmo propuesto encuentra un valor óptimo de β (de valores propuestos por el usuario). De esta forma, la matriz de transformación muestra un cambio gradual que permite la localización de elementos dañados por aproximaciones sucesivas.

A fin de medir la aproximación lograda en cada iteración, se emplea la siguiente ecuación:

$$e = \min \|\bar{\mathbf{K}}_d - \bar{\mathbf{K}}_{da}\|^2 \quad (82)$$

Una forma de terminar el proceso iterativo consiste en establecer una tolerancia que permita comparar los términos de los vectores de la ecuación anterior.

3. Propuestas para el mejoramiento del Método de la Matriz de Transformación

A fin de mejorar la velocidad de convergencia y la precisión del método se realizaron tres propuestas:

1. Resolver el sistema de ecuaciones de la ecuación 79 una vez. Después, a partir de la segunda iteración, sustituir el extremo izquierdo de la igualdad por la diferencia entre el vector \mathbf{K}_d y el \mathbf{k}_{da} obtenido en cada iteración con la finalidad de obtener un vector de daño \mathbf{d}_{ka} que represente la aproximación al factor de daño real en cada iteración.
2. Sustituir la ecuación 81 por una ecuación basada en el método de la interpolación lineal y que es función del factor de daño y de la tasa de cambio obtenidos en cada iteración.
3. Eliminar las columnas de la matriz \mathbf{S}_k (ecuación 79) que correspondan a elementos sin daño, es decir, si *a priori* se sabe que algunos elementos no presentan daño, se podrá desprestigiar su participación en el sistema de ecuaciones a resolver. También, si en cada iteración se observa que el daño en algunos elementos converge a 0, se puede considerar que dichos elementos no participan mediante la eliminación de sus columnas correspondientes en la matriz \mathbf{S}_k .

Aproximaciones sucesivas del factor de daño

El sistema de ecuaciones 79 se resuelve sólo una vez. Posteriormente, a partir de la segunda iteración, se resuelve un sistema como el mostrado a continuación:

$$\bar{\mathbf{k}}_d - \bar{\mathbf{k}}_{da} = \bar{\mathbf{S}}_k \mathbf{d}_{ka} \quad (83)$$

donde:

$\bar{\mathbf{k}}_{da}$ representa el vector de términos independientes de la matriz de rigidez con daño de cada iteración

\mathbf{d}_{ka} es la aproximación al vector de daño real en cada iteración

Entonces, el factor de daño en la *i*-ésima iteración será:

$$\mathbf{d}_{ki} = \mathbf{d}_{ki-1} + \mathbf{d}_{ka} \quad (84)$$

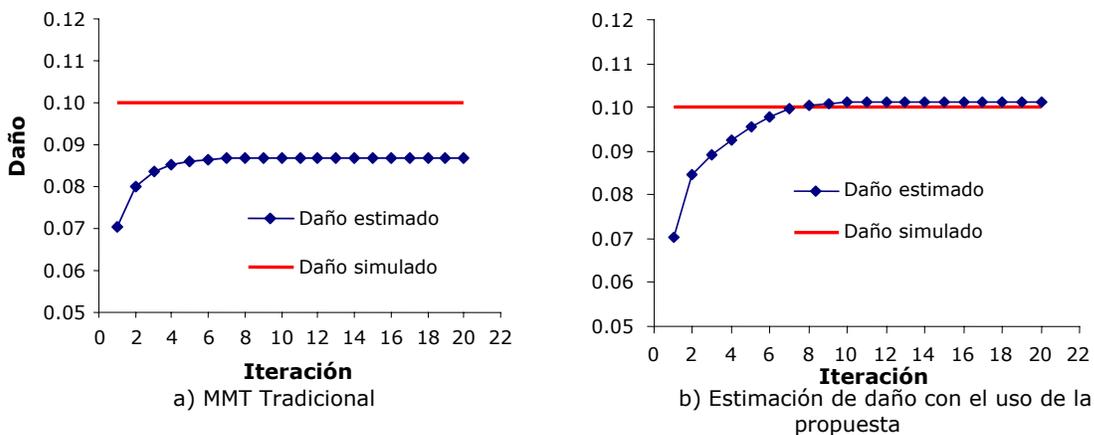


Figura III.2. Evolución del daño estimado en cada iteración para un elemento típico.

En la figura III.2 se muestra la ventaja del empleo de esta propuesta. Como se puede apreciar, el daño simulado se estima de una manera más precisa que con el método tradicional.

Interpolación lineal del factor de daño

En muchos casos, la velocidad de convergencia del método no es práctica en términos de tiempo de ejecución de los cálculos. Por ejemplo, en la figura III.3 se muestra la evolución del factor de daño en cada iteración para un elemento típico de una estructura. Donde se puede ver que la convergencia del factor de daño es lenta.

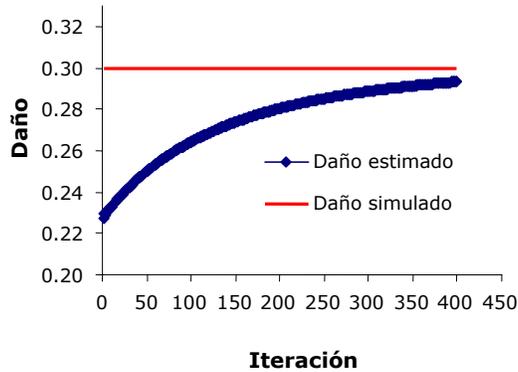


Figura III.3. Evolución del daño estimado en cada iteración para un elemento típico.

Con la finalidad de reducir el número de iteraciones en la estimación del daño, se planteó una ecuación que es función del factor de daño y de la tasa de cambio en cada iteración (Guerrero, *et al.* 2006). Para ello, primero se graficó el factor de daño contra la tasa de cambio en cada iteración (figura III.4).

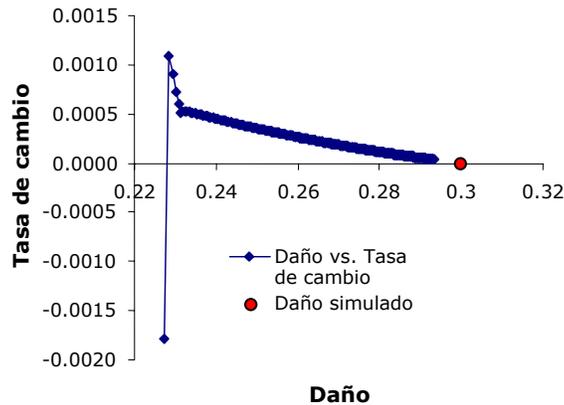


Figura III.4. Variación del factor de daño contra la tasa de cambio en cada Iteración de un elemento típico.

En la figura III.4 se aprecia que la tasa de cambio tiende a cero y el factor de daño se acerca al daño buscado cuando el número de iteraciones tiende a "infinito". Por esa razón, se plantea la siguiente interpolación lineal:

$$\frac{dk_i - dk_{i-1}}{\Delta_i - \Delta_{i-1}} = \frac{dk_{i+1} - dk_i}{\Delta_{i+1} - \Delta_i} \quad (85)$$

donde:

dk y Δ son el factor de daño y la tasa de cambio del factor de daño respectivamente.

El subíndice $i-1$, i , $i+1$ representan los valores en la iteración anterior, la iteración actual y la próxima iteración correspondientemente.

Por otro lado, de acuerdo con lo observado en la figura III.4, cuando el número de iteraciones tiende a *infinito*, el límite de la tasa de cambio tiende a 0. Entonces, para determinar el factor de daño en la iteración $i+1$ se reagrupan los términos de la ecuación 85 y se obtiene la ecuación 86, con la que se reemplaza a la expresión 81 del método tradicional:

$$dk_{i+1} = dk_i - \Delta_i \frac{dk_i - dk_{i-1}}{\Delta_i - \Delta_{i-1}} \quad (86)$$

Al aplicar la expresión 86 en el cálculo del factor de daño para el elemento típico mostrado en la figura III.3, se aprecia que el número de iteraciones ha disminuido considerablemente.

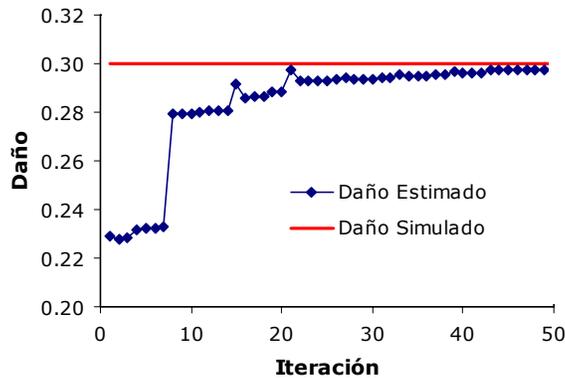


Figura III.5. Variación del factor de daño en un elemento típico aplicando la ecuación 86.

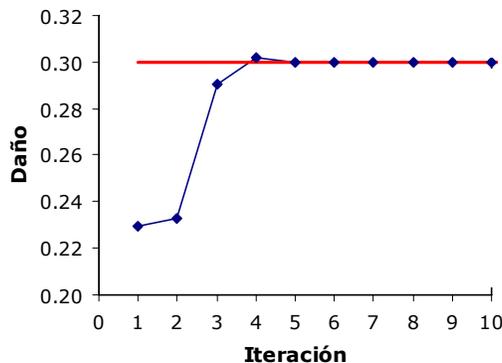


Figura III.6. Variación del factor de daño de un elemento típico despreciando la participación de elementos cuyo daño estructural converge a 0.

Elementos que no presentan daño estructural

Cuando se considera que el daño estructural que presentan algunos elementos es muy pequeño o nulo, el sistema de ecuaciones se puede reducir mediante la eliminación de columnas de la matriz S_k . Así, la solución de la ecuación 79 puede obtenerse de una manera más rápida y precisa. Lo mismo se puede hacer cuando, durante el proceso iterativo, se observa que el factor daño de algunos elementos converge a 0.

Estas suposiciones permiten que el número de iteraciones, en el procedimiento, se reduzca de manera muy considerable como se puede observar en la figura III.6.

Como se puede observar en las figuras III.3, III.5 y III.6, al desprestigiar la participación de elementos sin daño o cuyo factor de daño converge a 0 y al hacer uso de la ecuación 86, la localización del daño estructural resulta, en general, mucho más rápida y precisa. Al comparar la figura III.3 y la figura III.6 se aprecia que el número de iteraciones, en la estimación del daño simulado del elemento, se redujo de más de 400 iteraciones a sólo 5.

Finalmente, en la figura III.7 se presenta el algoritmo de detección de daño en forma de diagrama de flujo.

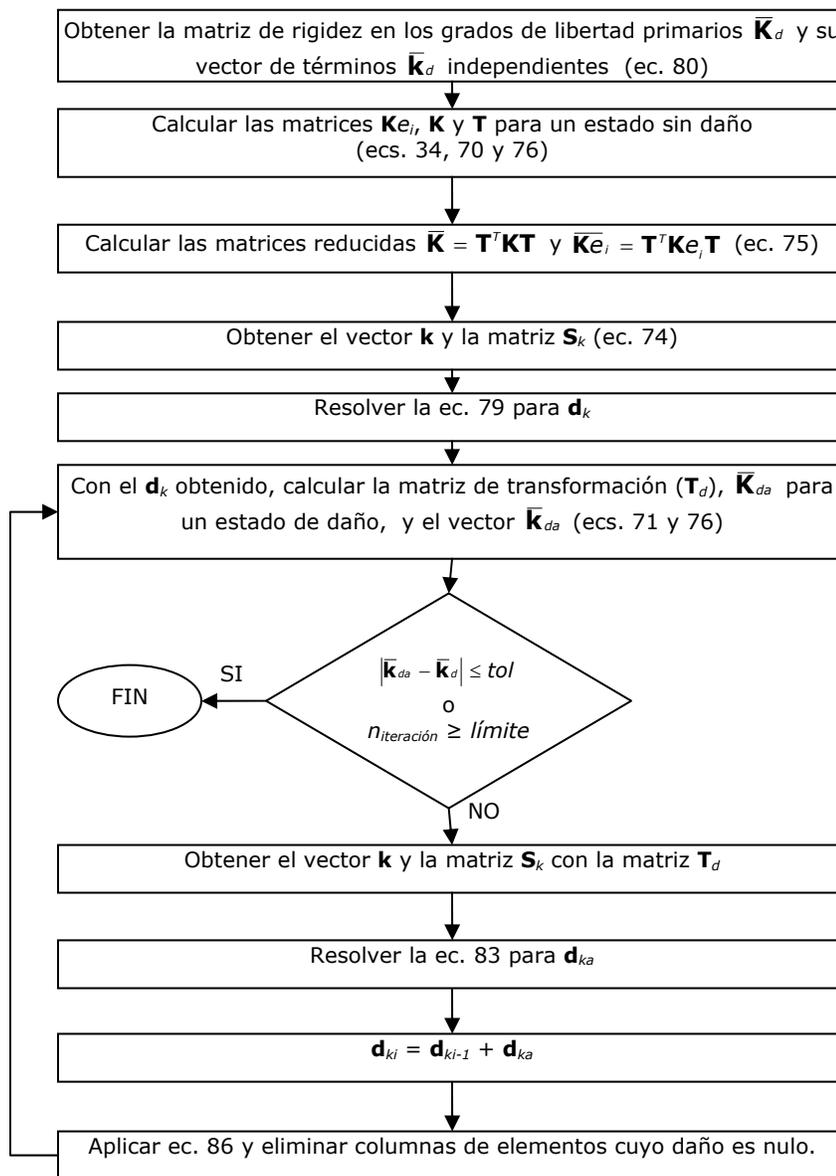


Figura III.7. Diagrama de flujo del algoritmo de detección de daño.

IV. Programa de cómputo

Debido a la gran cantidad de cálculos numéricos requeridos en la detección de daño estructural, durante los años anteriores se hacía uso de distintos programas de cómputo.

Estos programas permitían, de manera separada, obtener las matrices de rigideces de los elementos que componen a las estructuras modeladas; obtener la matriz de rigidez lateral de la estructura a partir de la información modal; y por otro lado, aplicar el algoritmo de detección de daño.

Lo anterior se lograba mediante el uso de distintos programas comerciales y otros elaborados particularmente para distintos casos. Existiendo en ocasiones un código o programa por cada caso o modelo de estudio.

Una parte importante de este trabajo, ha sido la de desarrollar un programa integral como herramienta útil, que permita realizar la localización y cuantificación del daño en estructuras de una manera automatizada.

Dicho programa se desarrolló en lenguaje *Fortran* por su gran capacidad para el manejo numérico.

El programa permite modelar el daño en estructuras constituidas por marcos planos, en tres dimensiones y elementos cuadriláteros de 4 a 8 nodos. La combinación de elementos cuadriláteros y marcos es posible de modelar también en este programa.

El uso del programa queda definido básicamente por los siguientes pasos:

1. Se ejecuta el programa llamado "dmg.exe".
2. El programa solicita al usuario el nombre del archivo de datos de entrada. Que contiene la información de la estructura, como: nodos, definición de elementos, materiales, secciones de los elementos, modos y frecuencias de vibrar, etc.
3. El programa realiza el procesamiento de la información y guarda los resultados en un archivo de salida.
4. El usuario puede analizar la información en el archivo de salida generado con formato de texto.

La calibración del programa se llevó a cabo en dos partes:

- ◆ Se verificaron los valores de las matrices de rigidez de los elementos de marcos planos, marcos tridimensionales y elementos cuadriláteros mediante el cálculo de las mismas matrices en hojas electrónicas, así como con el apoyo de programas de análisis estructural comerciales y otros hechos anteriormente.
- ◆ Se modelaron diferentes estructuras con daño, como las reportadas por Escobar *et al.* (2005), a fin de verificar los resultados de salida del programa.

V. Ejemplos de aplicación

A fin de medir la precisión del método de la matriz de transformación para detección de daño, con sus propuestas de mejoramiento, se modelan 6 estructuras con distintos casos de daño simulado.

1. Marco en 2D con 10 pisos y un claro

Estructura constituida por un marco plano a base de columnas y trabes de concreto reforzado cuyas secciones, materiales y dimensiones se muestran en la figura V.1.

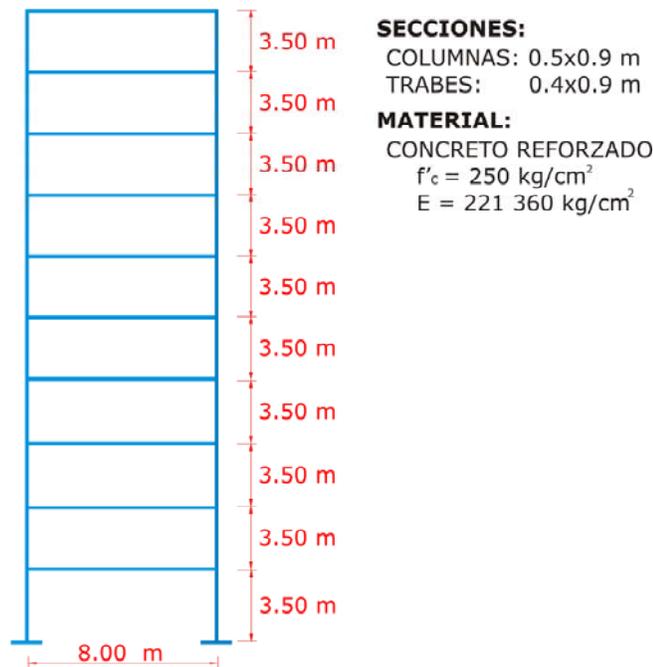


Figura V.1. Marco plano de concreto reforzado.

Se simulan y evalúan dos casos de daño considerando que se cuenta con la información modal completa, es decir, 10 modos y frecuencias de vibrar.

Los casos de daño y su estimación se muestran en las figuras V.2 y V.3. Como se puede apreciar, el daño se estimó correctamente en ambos casos y con un reducido número de iteraciones.

En las figuras V.2 y V.3 se puede observar que el daño se estima de una manera "exacta". Esto se puede deber a que:

1. Se hace la suposición de que se cuenta con la información modal completa.
2. El sistema de ecuaciones lineales de la ecuación 79 está sobre-determinado, es decir, se cuenta con más ecuaciones que incógnitas. En otras palabras, la matriz \mathbf{S}_k tiene más renglones que columnas (es de orden 55x30).
3. Se trata de un marco plano simétrico.

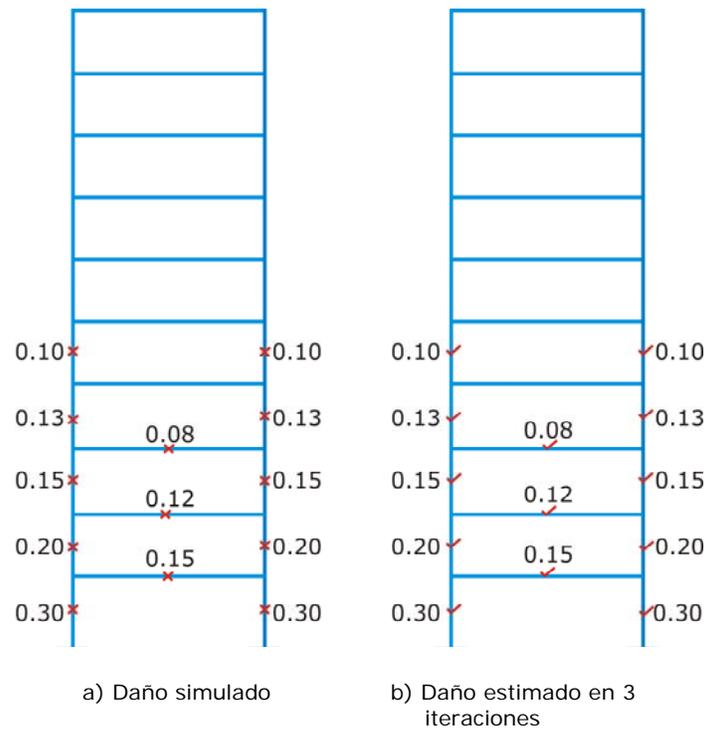


Figura V.2. Daño estructural en marco plano de 10 pisos y 1 claro (Caso I)

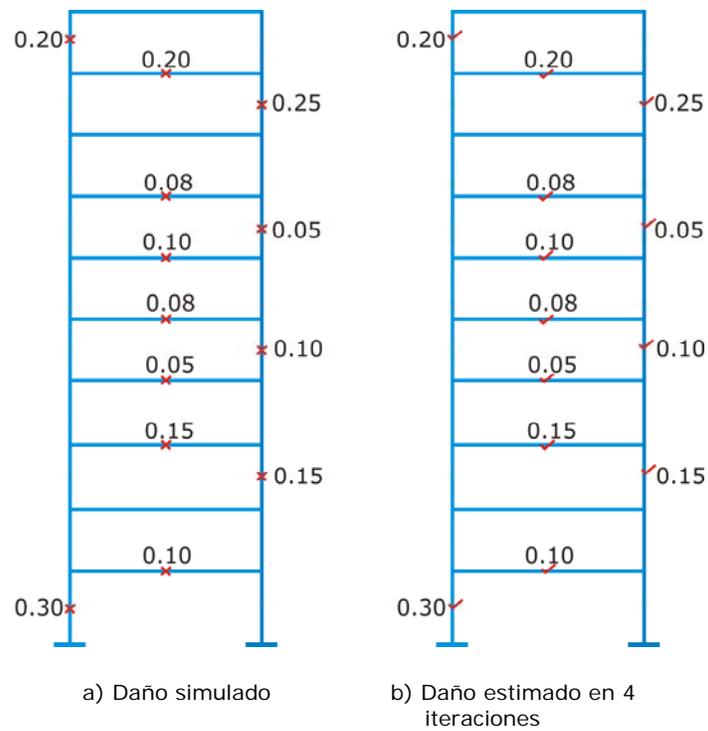


Figura V.3. Daño estructural en marco plano de 10 pisos y 1 claro (Caso II)

2. Marco en 2D con 10 pisos y 4 claros

Estructura de concreto reforzado con 4 claros de 9 m y altura de 4.95 m para el primer entreciso, 4.15 m para el segundo y 3.75 m para los niveles superiores. Las secciones de traveses y columnas de esta estructura se muestran en la figura V.3.

La resistencia nominal del concreto que la constituye es $f'_c = 250 \text{ kg/cm}^2$ y su módulo de elasticidad $E = 221360 \text{ kg/cm}^2$.

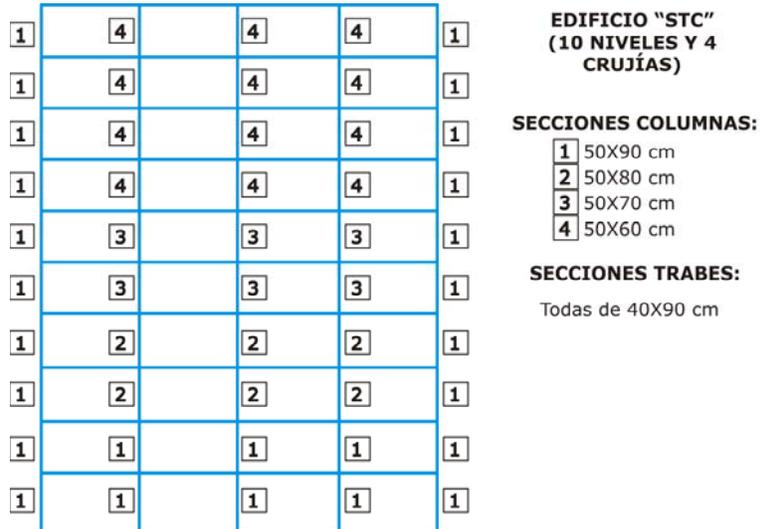


Figura V.4. Marco plano de concreto reforzado con 10 pisos y 4 claros.

Se simulan y evalúan dos casos de daño considerando que se cuenta con la información modal completa. Los casos de daño y su estimación se muestran en las figuras V.5 y V.6.

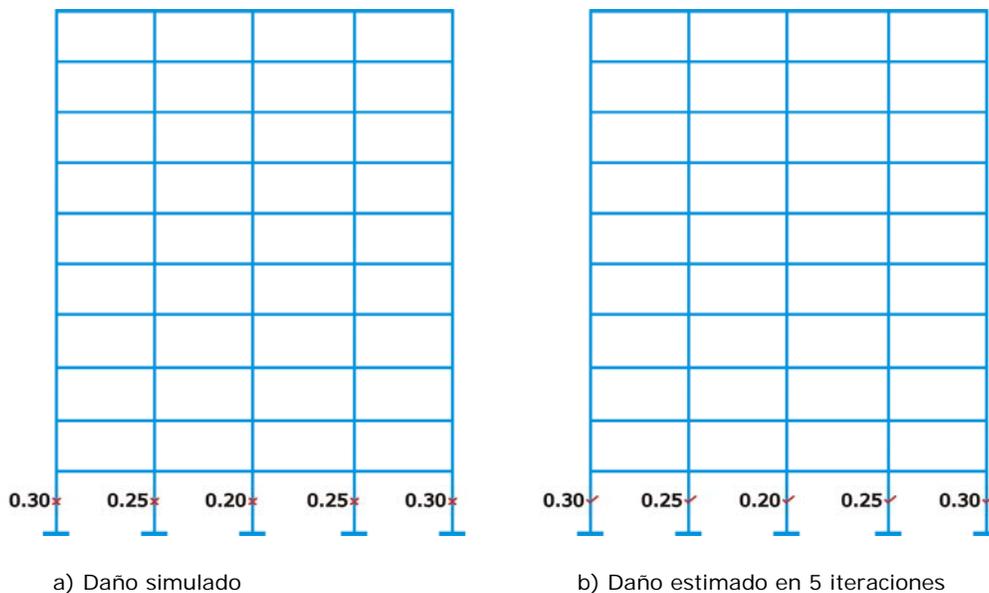


Figura V.5. Daño estructural en marco plano de 10 pisos y 4 claros (Caso I).

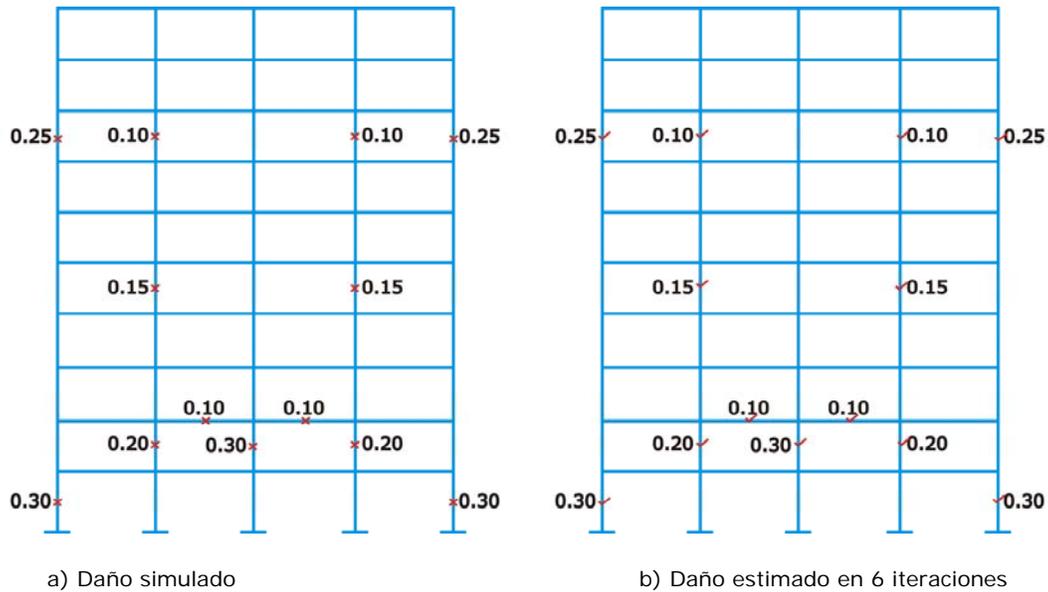


Figura V.6. Daño estructural en marco plano de 10 pisos y 4 claros (Caso II).

Como se observa, el daño también se estimó correctamente en ambos casos con un número reducido de iteraciones.

3. Marco en 2D con asimetría en elevación

La estructura está compuesta por un marco plano de 3 niveles con 2 crujiás. Está constituida de columnas y vigas de acero estructural de sección I (módulo de elasticidad $E = 2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$).

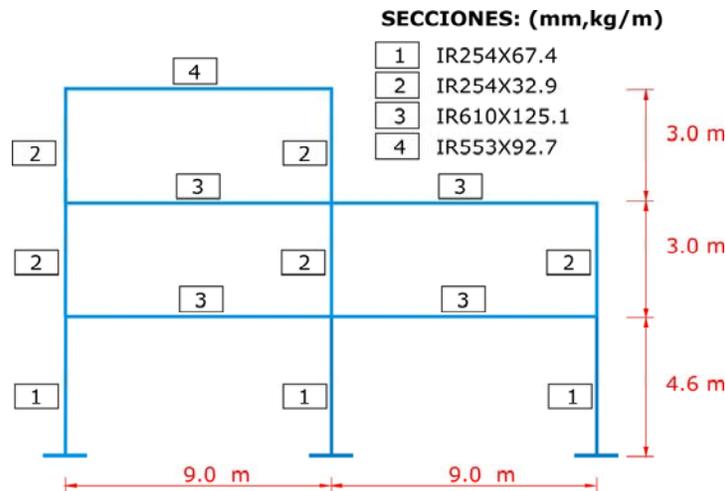


Figura V.7. Marco plano de acero estructural con asimetría en elevación.

Se simularon los casos de daño siguientes:

- I. Se cuenta con 3 modos y frecuencias de vibrar de la estructura en la dirección lateral.

- II. Se cuenta con los dos primeros modos de vibrar y sus correspondientes frecuencias de vibración en dirección lateral.

Para el caso I, se simuló daño en las tres columnas de la estructura (figura V.8).

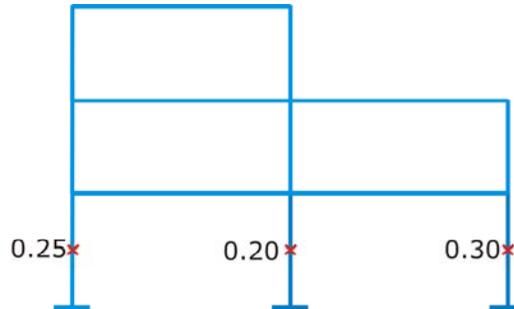


Figura V.8. Daño simulado en marco plano asimétrico (Caso I).

A fin de obtener la matriz de rigidez lateral o reducida de la estructura, se aplicó la ecuación 80. Dicha matriz se obtuvo de manera "exacta" cuando se cuenta con la información modal completa (en este caso, 3 modos y frecuencias de vibrar, uno por cada nivel) (Acevedo, 2005).

Al aplicar el algoritmo de detección de daño se obtuvieron los resultados mostrados en la figura V.9.

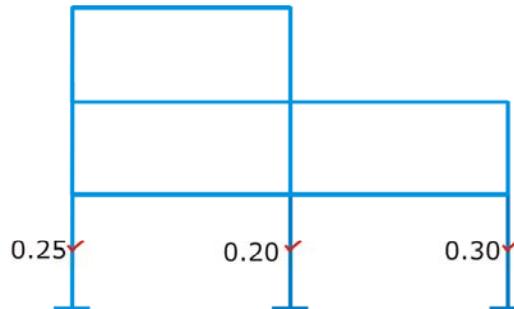


Figura V.9. Daño estimado en marco plano asimétrico considerando 3 modos y frecuencias de vibrar (Caso I, en 6 iteraciones).

Los resultados obtenidos muestran que para este caso de daño, y con la información modal completa, se llegó correctamente al daño simulado.

Caso II. Se considera que sólo se cuenta con los 2 primeros modos y frecuencias de vibrar, se calculó la matriz de rigidez lateral de la estructura mediante la ecuación 80.

Las diferencias en porcentaje, entre la matriz de rigidez lateral exacta y la obtenida con información modal incompleta se muestran en la Tabla V.1.

Tabla V.1. Diferencias, en porcentaje, entre la matriz de rigidez lateral exacta y la matriz de rigidez lateral reconstruida con 2 modos de vibrar.

$$\Delta \bar{K}_d = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2.35\% & 4.10\% & 54.77\% \\ \hline 4.10\% & 2.91\% & 2.32\% \\ \hline 54.77\% & 2.32\% & 0.76\% \\ \hline \end{array}$$

Al aplicar el algoritmo de detección de daño se obtuvieron los resultados mostrados en la figura V.10.

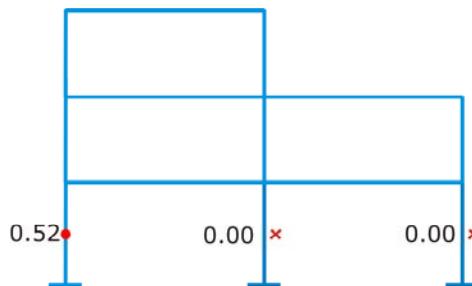


Figura V.10. Detección de daño en marco plano asimétrico considerando 2 modos y frecuencias de vibrar (Caso I, en 9 iteraciones).

Como se observa, no se estimó correctamente el daño. Sólo en la primera columna se localizó daño, pero con un factor de más del doble del simulado.

El daño estimado según se observa en la figura anterior, puede deberse a que no se cuenta con la información modal completa; el sistema de ecuaciones a resolver está subdeterminado (es decir, se tienen menos ecuaciones que incógnitas siendo la matriz S_k de orden 6×13); se trata de un marco plano con asimetría.

Para caso II de daño, se simuló daño en las tres columnas de la estructura y en dos vigas (figura V.11).

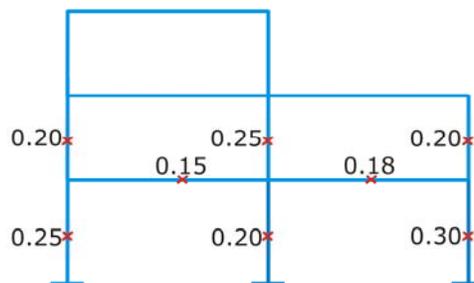
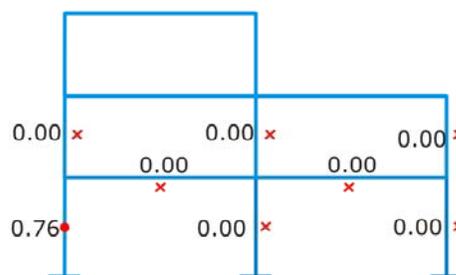


Figura V.11. Daño simulado en marco plano asimétrico (Caso II).

Los resultados obtenidos al considerar 3 y 2 modos y frecuencias de vibrar de la estructura se muestran en las figuras V.12a y V.12b respectivamente.



a) Daño estimado con 3 modos de vibrar



b) Daño estimado con 2 modos de vibrar

Figura V.12. Daño simulado en marco plano asimétrico (Caso II).

Los resultados de la figura V.12 muestran que para ese estado de daño simulado, al considerar el caso I, el factor de daño se estimó de una manera aproximada. Se subestimó en las vigas, se sobreestimó en las columnas centrales y resultó aproximado en columnas laterales.

Por otro lado, en el caso II, el daño no se localizó adecuadamente. Al igual que el primer estado de daño, en éste sólo se localizó daño en la primera columna, siendo sobre-estimado por más del triple del simulado.

De la figura V.12a se deduce que el daño se localizó correctamente, sin embargo la cuantificación del factor de daño no es exacta. Esto puede deberse principalmente a la asimetría de la estructura y a que el sistema de ecuaciones a resolver está sub-determinado.

De acuerdo con los resultados mostrados en la figura V.12b se deduce que el daño no se localizó ni se cuantificó adecuadamente. Lo que se puede deber, en gran medida, a la información modal incompleta.

4. Estructura en 3D simétrica en planta y en elevación

Estructura compuesta de columnas y vigas de concreto (figura V.13). El concreto tiene una resistencia de 250 kg/cm^2 y módulo de elasticidad $E = 2.21 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$.

Las secciones transversales de las columnas y vigas son de $50 \times 50 \text{ cm}$ y de $30 \times 50 \text{ cm}$ respectivamente.

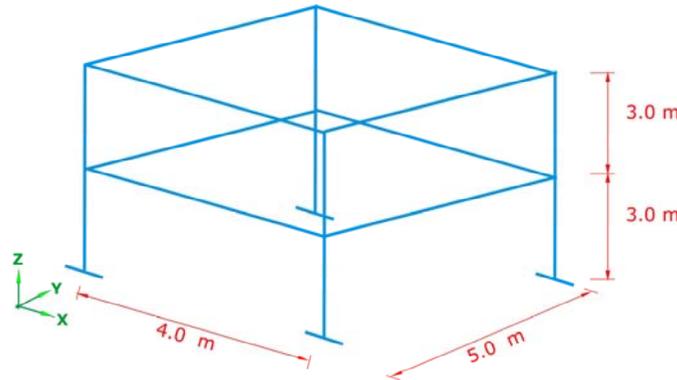


Figura V.13. Estructura tridimensional de concreto reforzado simétrica en planta y en elevación.

Se simuló daño en las columnas del primer piso (figura V.14).

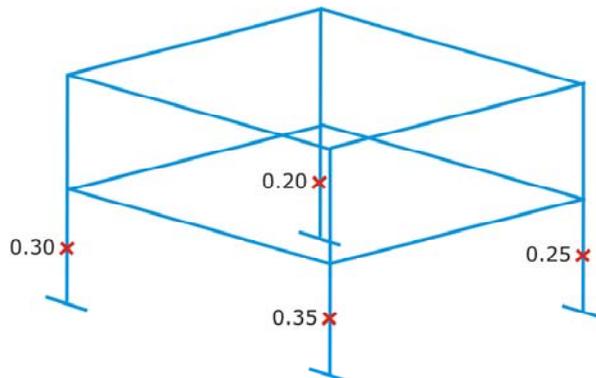


Figura V.14. Daño simulado para la estructura en tres dimensiones.

Se aplicó el algoritmo de detección de daño considerando que:

1. Se conoce la información modal completa, es decir, se conocen 2 modos y frecuencias de vibrar en dirección "X", 2 en dirección "Y" y 2 rotacionales con respecto al eje "Z".
2. Se conoce sólo el primer modo de vibrar.

Los resultados obtenidos se muestran en las figuras V.15a y V.15b.

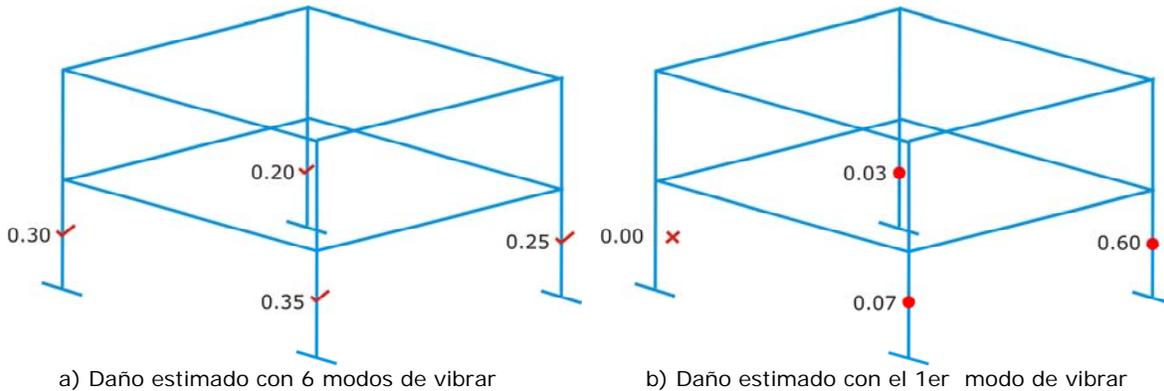


Figura V.15. Daño estimado en estructura tridimensional simétrica.

Como se puede apreciar en la figura V.15, el daño simulado se estimó de una manera exacta cuando se utilizó la información modal completa. Sin embargo, cuando se utilizó sólo un modo de vibrar, el daño se localizó sólo en 3 de 4 columnas simuladas, subestimando en 2 columnas y sobreestimando en una.

Una vez más, se aprecia que al aplicar el algoritmo con información modal incompleta, no se logra determinar el daño adecuadamente.

5. Estructura en 3D de 2 pisos con elementos barra y elementos cuadriláteros

Se modeló una estructura muy similar a la mostrada en la figura V.13, compuesta de columnas y vigas de concreto reforzado y con elementos cuadriláteros en las losas (figura V.16). El concreto tiene una resistencia de 250 kg/cm^2 y módulo de elasticidad $E = 2.21 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$.

Las secciones transversales de las columnas y vigas son de $50 \times 50 \text{ cm}$ y de $30 \times 50 \text{ cm}$ respectivamente, y el espesor de los elementos cuadriláteros o losas es de 20 cm . Se considera que las losas sólo se deforman en el plano horizontal. También, se considera que son losas macizas y que están constituidas por concreto reforzado $f'_c = 250 \text{ kg/cm}^2$.

Para esta estructura se simuló el estado de daño de la figura V.17, considerando que:

1. se conoce la información modal completa (6 formas modales y 6 frecuencias de vibrar).
2. se conoce sólo el primer modo y frecuencia de vibrar.

Los resultados obtenidos al aplicar el algoritmo de detección de daño se muestran en las figuras V.18a y V.18b.

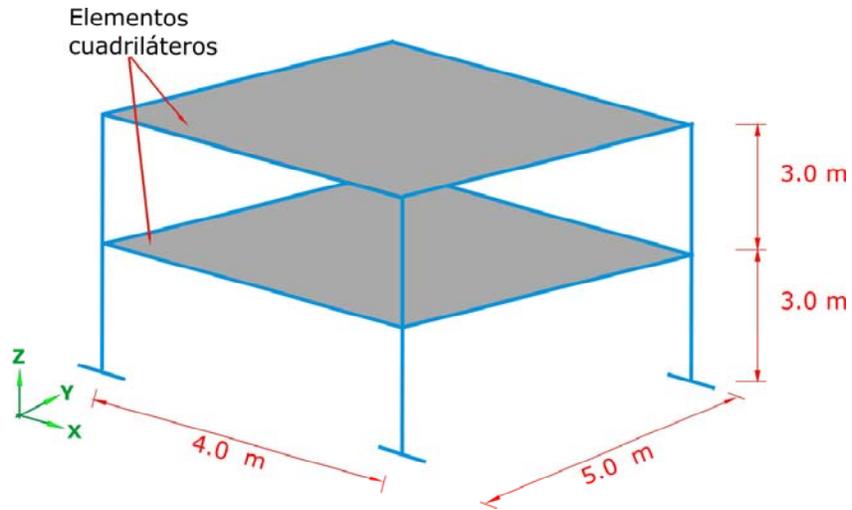


Figura V.16. Estructura tridimensional de concreto reforzado formada por elementos barra y elementos cuadriláteros.

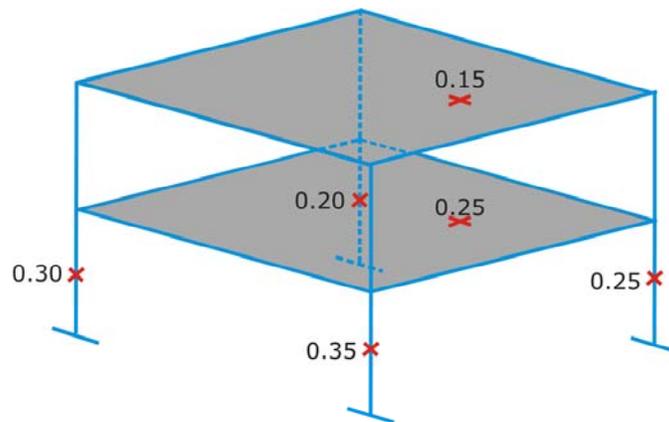
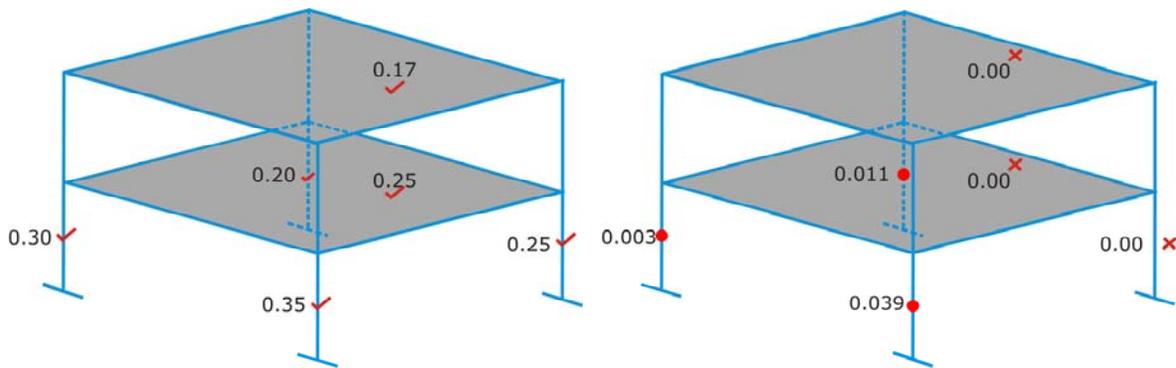


Figura V.17. Estado de daño en estructura tridimensional.



a) Daño estimado con 6 modos de vibrar

b) Daño estimado con el 1er modo de vibrar

Figura V.18. Daño estimado en estructura tridimensional.

Como se observa en la figura V.18, el daño simulado se estimó de una manera muy precisa cuando se utilizó la información modal completa. El factor de daño sobreestimó sólo en un elemento cuadrilátero, ya que el daño simulado es de 15% y el estimado resultó de 17%. Sin embargo, se puede decir que para fines prácticos los resultados son adecuados, pues el error relativo entre estos resultados es de 0.13.

Por otra parte, cuando se usó del primer modo de vibrar, el daño se localizó sólo en 3 de las 4 columnas siendo subestimado. Además de que no se logró detectar el daño en los elementos cuadriláteros. Esto lleva a suponer una vez más que el daño no se localiza de una manera adecuada cuando se utiliza información modal incompleta.

6. Estructura en 3D de 5 pisos con elementos barra y elementos cuadriláteros

Se modeló una estructura en 3D regular en planta y elevación constituida de 5 pisos, 1 crujía en dirección "X" y una en "Y".

El edificio se compone de columnas y vigas de concreto reforzado, así como, de elementos cuadriláteros como losas constituidas del mismo material (figura V.19).

Se consideró que el concreto tiene una resistencia nominal $f'_c = 250 \text{ kg/cm}^2$ y módulo de elasticidad $E = 14000\sqrt{f'_c}$ en kg/cm^2 .

Las secciones transversales se describen a continuación:

- ◆ columnas de 50x50 cm.
- ◆ vigas de 30x50 cm.
- ◆ losas de 20 cm de espesor.

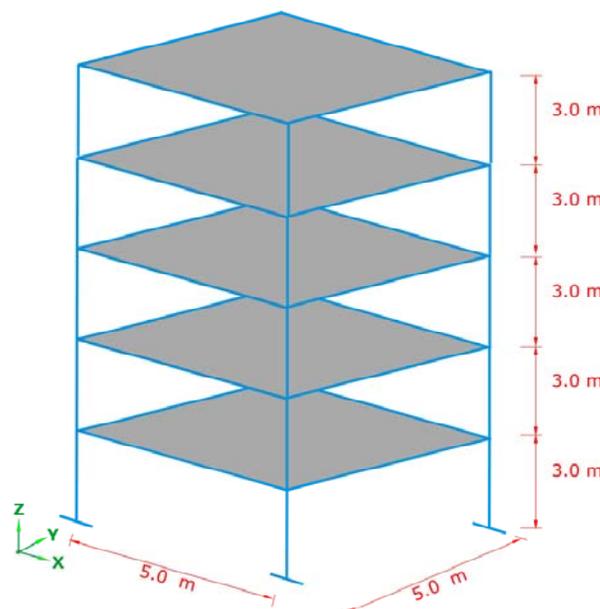


Figura V.19. Estructura tridimensional de 5 pisos.

Se simuló un estado de daño en esta estructura considerando que:

1. se conoce la información modal completa (15 modos y frecuencias de vibrar).
2. se conoce sólo el primer modo y frecuencia de vibrar.

Los resultados (figuras V.21a y V.21b) muestran que el daño se detectó de una manera muy precisa cuando se usó la información modal completa, ya que se detectó el daño exacto en todos los elementos, con excepción de la losa del primer nivel pues se simuló 15% de daño y se detectó 17%. Con esto, se puede decir que los resultados son adecuados para fines prácticos.

Por otro lado, para el caso de información modal incompleta, se aprecia que los resultados no son adecuados, pues de los 14 elementos en los que se simuló daño, sólo se logró detectar en 2 vigas y en 2 columnas. Siendo además, subestimado en todos los casos. También se puede apreciar que se detectó daño en dos vigas del último piso que se habían simulado como no dañadas.

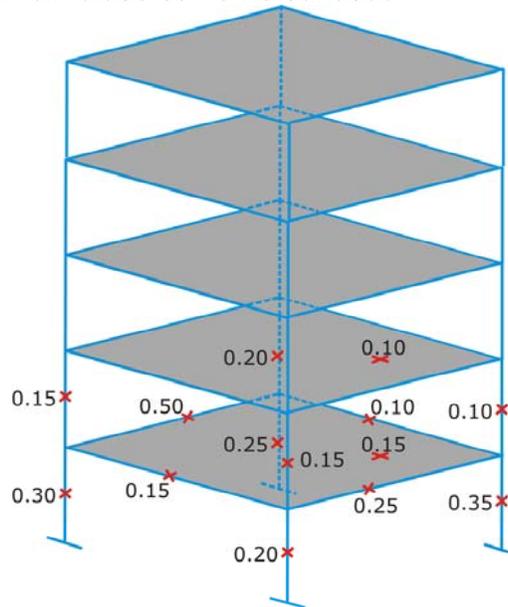
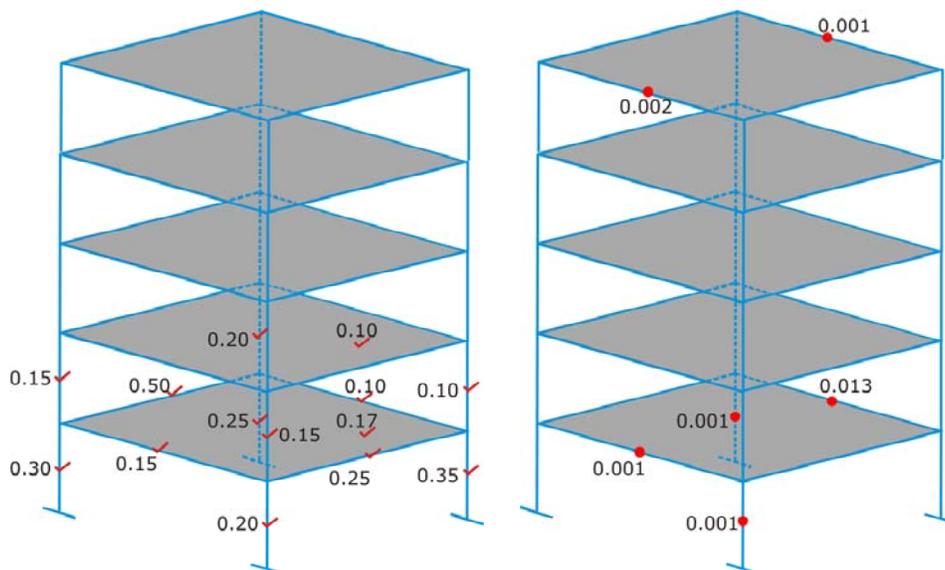


Figura V.20. Estado de daño en estructura tridimensional de 5 pisos.



a) Daño estimado con 6 modos de vibrar

b) Daño estimado con el 1er modo de vibrar

Figura V.21. Daño estimado en estructura tridimensional.

VI. Conclusiones y recomendaciones

Con base en los resultados obtenidos de la simulación de daño en estructuras modeladas como elementos finitos y con las propuestas hechas al Método de la Matriz de Transformación se establecen las siguientes conclusiones y recomendaciones:

El método mostrado para detección de daño, resulta ser una herramienta útil en la estimación de daño. Además se ha evaluado la aplicación del método a distintos elementos finitos, tales como: barras en dos dimensiones, barras en tres dimensiones y elementos cuadriláteros de 4 a 8 nodos.

Las consideraciones hechas en el capítulo III.3 permiten mejorar la precisión del método así como reducir las iteraciones de una manera importante en el algoritmo de detección de daño.

La técnica de descomposición de valores singulares es una herramienta útil para resolver sistemas mal condicionados.

En estudios anteriores se observó que para estructuras simples se detecta adecuadamente el daño para el caso de información modal incompleta, lo cual no ocurrió en las estructuras que se evaluaron en este trabajo.

En los ejemplos de aplicación, se observó que al hacer uso de la información modal completa, se logró determinar el daño simulado en las estructuras de una manera muy adecuada, estimándose el daño de una manera exacta en casi todos los casos. Sin embargo, al considerar información modal incompleta se observó que no se logró detectar el daño adecuadamente. Esto se debe a que al reconstruir la matriz de rigidez lateral de una estructura mediante el algoritmo de Baruch y Bar Itzhack se generan errores muy grandes cuando se usa poca información modal.

Como se pudo observar, la información modal incompleta es un tema preocupante, pues afecta directamente a la estimación del daño en estructuras. Por esta razón se sugiere trabajar, principalmente, en la mejora de la reconstrucción de la matriz de rigidez lateral de la estructura al contar con poca información modal.

Por otro lado, se ha observado que el trabajar con matrices de rigidez expandidas en todos los grados de libertad (los del modelo base) produce mejores resultados que si se trabaja con modelos condensados. Pues al resolver el sistema mostrado en la ecuación 74, el daño se estima correctamente desde la primera solución, por lo que el método dejaría de ser iterativo y sería más preciso. De acuerdo con esto se recomienda seguir trabajando en la expansión de las matrices de rigidez de las estructuras a partir de la medición de sus parámetros dinámicos. Pero, sin descuidar el tema de la información modal incompleta.

En los ejemplos de aplicación se evaluaron estructuras en 2 y 3 dimensiones compuestas de un material. Sin embargo se recomienda evaluar un número mayor de estructuras que involucren un mayor número de elementos, asimetrías geométricas en planta y elevación, asimetrías de rigidez, distintos materiales en una misma estructura, etcétera. Esto con la finalidad de evaluar la aplicabilidad del método en distintas configuraciones estructurales.

La detección de daño en estructuras resulta ser un problema de gran interés e importancia en la evaluación la seguridad de las estructuras. Es por ello que resulta

crucial seguir trabajando e invirtiendo en investigación a fin de contar con algoritmos que permitan la estimación de daño estructural de una manera precisa y realista, donde se consideren los distintos factores que puedan intervenir en la localización de daño.

El problema de localización y cuantificación de daño en estructuras es un tema aún no resuelto, pues involucra una gran cantidad de factores que afectan directamente la estimación del daño. Dichos factores pueden ser: la instrumentación limitada de los grados de libertad de una estructura; incertidumbres al obtener las propiedades dinámicas de las estructuras, información modal incompleta; variaciones en el tiempo de las propiedades de las estructuras como masas, rigideces y materiales; efectos de elementos no estructurales; efectos de interacción suelo-estructura; etc.

VII. Referencias

1. Acevedo H. (2005), "Reconstrucción de la matriz de rigideces de marcos a partir de sus parámetros modales experimentales", Tesis de maestría, UNAM, México.
2. Baruch, M., y Bar Itzhak, I.Y. (1978), "Optimal weighted orthogonalization of measured modes", *AIAA Journal*, 16, 4, 346-351, Apr.
3. Buchanan, G., (1995), "Schaum's outline of theory and problems of finite Element analysis", McGraw-Hill.
4. Chandrupatla, T. R. y Belegundu, A. D., (2002), "Introduction to Finite Elements in Engineering", 2nd Edition, Prentice-Hall.
5. Doebling, S., Farrar, C., y Prime, M., (1998) "A summary review of vibration-based damage identification methods", Engineering Analysis Group, Los Alamos, National Laboratory, Los Alamos, NM, USA.
6. Escobar, J.A., Fierro, F. y Gómez, R., (2004), "Damage detection in building structures", *13th World Conference on Earthquake Engineering*, Vancouver, B.C., Canada.
7. Escobar, J.A., Sosa, J.J. y Gómez, R., (2001), "Damage detection in framed buildings", *Canadian Journal of Civil Engineering*, 28, 1-13.
8. Escobar, J.A., Sosa, J.J. y Gómez, R., (2005), "Structural damage detection using the transformation matrix", *Computers and Structures*, 83, 357-368.
9. Felippa, C., (2004), "Introduction to Finite Element Methods", Department of Aerospace Engineering Science. University of Colorado, Colorado, USA.
10. Fierro, F. (2001), "Identificación de daño estructural en modelos de edificios usando parámetros modales", Tesis de maestría, División de estudios de posgrado, Facultad de Ingeniería – UNAM.
11. Galiote, M., (2006), "Una aplicación de la instrumentación sísmica de edificios", Tesis de maestría. Posgrado en Ingeniería (Civil) – UNAM.
12. Guerrero H., Escobar J.A. y Gómez R., (2006), "Structural damage detection with the improved transformation matrix method", First European Conference on Earthquake Engineering and Seismology, Ginebra, Suiza, 2006.
13. Guyan R. J., (1965), "Reduction of stiffness and mass matrices", *AIAA journal*, pp. 380.
14. Hetnarski, R. y Ignaczak, J., (2004), "Mathematical theory of elasticity", Taylor & Francis.
15. Moaveni, S. (2003), "Finite Element Analysis", Theory and applications with ANSYS, 2nd edition, Minnesota State University, Pearson Education, Inc.

16. Murià-Vila D. y González R. (1995), "Propiedades dinámicas de edificios de la ciudad de México", Informe al Departamento del Distrito Federal, Instituto de Ingeniería, UNAM.
17. Murià-Vila D., González R., Torres, J., y Fuentes, L. (1997), "Incertidumbres en la estimación de las frecuencias de vibración en edificios", Instituto de Ingeniería, UNAM.
18. Rytter, A., (1993), "Vibration based inspection of civil engineering structures," Ph.D. Dissertation, Department of Building Technology and Structural Engineering, Aalborg University, Denmark.
19. Sohn H. y Law K. H., (1997), "A bayesian probabilistic approach for structure damage detection". Department of Civil Engineering. Standford University, Standford, CA, U.SA.
20. Wikipedia, (2006), Sitio en Internet, es.wikipedia.org
21. Zienkiewicz, O. C. y Taylor, R. L. (1994), "El Método de los Elementos Finitos, Formulación básica y problemas lineales". Volumen 1, 4ª edición, McGraw-Hill.
22. Zimmerman, D., Kim, H., Bartkowicz, T. y Kaouk, M., (2001), "Damage detection using expanded dynamic residuals", Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, Dec. 2001, Vol. 123, p.p. 699-705.