



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

**PROGRAMA DE MAESTRIA Y DOCTORADO EN
INGENIERIA**

FACULTAD DE INGENIERIA

**ANÁLISIS ESTÁTICO DE UNA PLATAFORMA
DE SEIS GRADOS DE LIBERTAD**

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

MAESTRO EN INGENIERIA

MECANICA – MECANICA APLICADA

P R E S E N T A:

JORGE DÍAZ VELÁZQUEZ



TUTOR:
M. I. FRANCISCO CUENCA JIMÉNEZ

2007

Índice general

1. Generalidades	1
1.1. Justificación	1
1.2. Objetivo General	2
1.3. Metodología	2
1.4. Plataformas espaciales	2
1.5. Movilidad	3
1.6. Configuración cinemática	4
1.7. Grados de libertad	5
2. Análisis Cinemático	7
2.1. Introducción	7
2.2. Análisis de la posición	8
2.2.1 Marcos de referencia	9
2.2.2 Trayectoria propuesta	14
2.2.3 Posición angular θ_{4i}	22
2.2.4 Posición angular θ_{7i}	25
2.2.5 Posición angular θ_{8i}	28
2.2.6 Posición angular θ_{10i}	30
2.2.7 Posición angular θ_{11i}	33
2.2.8 Posición angular θ_{15i}	35
2.3. Análisis de la velocidad	37
2.3.1 Velocidad angular $\dot{\theta}_{4i}$	38
2.3.2 Velocidad angular $\dot{\theta}_{7i}$	40
2.3.3 Velocidad angular $\dot{\theta}_{8i}$	42
2.3.4 Velocidad angular $\dot{\theta}_{10i}$	44
2.3.5 Velocidad angular $\dot{\theta}_{11i}$	47
2.3.6 Velocidad angular $\dot{\theta}_{15i}$	50

3. Análisis Estático	54
3.1. Introducción	54
3.2. Fuerza y momento	55
3.2.1 Análisis estático de la plataforma	57
3.3. Solución estática	66
3.3.1 Torque T_{4yi}	68
3.3.2 Fuerza F_{01i}	70
3.3.3 Fuerza F_{12i}	71
3.3.4 Fuerza F_{23i}	73
3.3.5 Fuerza F_{34i}	74
3.3.6 Momento M_{01i}	76
3.3.7 Momento M_{12i}	77
3.3.8 Momento M_{23i}	79
3.3.9 Momento M_{34i}	80
Conclusiones	82
Bibliografía	84

Resumen

En esta tesis se describe la metodología para el análisis estático de una plataforma de seis grados de libertad, la arquitectura del sistema consiste en una plataforma fija de forma triangular unida a una plataforma móvil de forma hexagonal, el enlace entre ambas se da por medio de seis cadenas cinemáticas idénticas de tres eslabones cada una; a cada lado de la plataforma fija se une un par de cadenas formando un manipulador de tipo paralelo el cual en lo general, presenta cierta ventaja sobre los de tipo serial por su robustez.

El análisis del sistema inicia con el estudio de la cinemática inversa; basándonos en el manejo de matrices de transformación homogénea se determina la posición de cada una de las juntas de las cadenas para una trayectoria definida, posteriormente como un primer paso hacia el estudio de la dinámica, se efectúa el análisis de velocidad para finalmente pasar al desarrollo del modelo que permite establecer las ecuaciones de equilibrio estático, los resultados obtenidos en el análisis de posición se toman como dato, para determinar los valores numéricos de la magnitud de la fuerza resultante y los torques requeridos para mantener el equilibrio en un punto cualquiera de la trayectoria elegida. Para todo el análisis se presentan los gráficos que ilustran el comportamiento obtenido para el sistema propuesto.

Capítulo 1

Generalidades

Este capítulo presenta los aspectos teóricos generales del tema a desarrollar, haciendo énfasis en los aspectos metodológicos y en el estado del arte en el campo de estudio de las plataformas paralelas.

1.1 Justificación

El estudio, análisis y desarrollo de plataformas paralelas ha sido de gran interés para el hombre desde mediados de los años sesenta, ya que su versatilidad, permite una variada gama de aplicaciones; a diferencia de los manipuladores tradicionales, en los que existe una sola cadena cinemática entre la base y el efector final, en los sistemas paralelos se tiene la ventaja que hay un incremento de rigidez considerable aunque el área de trabajo sea más reducida, la mayoría de los diseños se basan en el original de Stewart [13] cuya aplicación más popular es precisamente la de los simuladores de vuelo que requieren de movimientos de precisión sin dejar de lado el control de las fuerzas que se tienen en el sistema.

Las plataformas a seis grados de libertad se han estudiado en forma ilimitada hasta cierto punto, pues existen aplicaciones que requieren de movimientos rápidos y precisos en una trayectoria previamente establecida. En este trabajo se propone tanto una arquitectura específica (fig. 1.3) como una trayectoria definida; a diferencia de algunas plataformas existentes que sólo hacen uso de juntas rotacionales, la propuesta esta formada por una base fija de tipo triangular y una plataforma móvil hexagonal unidas por seis cadenas cinemáticas idénticas en las que se emplean juntas de rotación y juntas universales, las cuales son más versátiles para efectos de transmitir el movimiento de rotación combinado con la orientación angular de tal manera que se presenta el estudio de la posición geométrica del sistema y el análisis estático del mismo porque es indispensable conocer las condiciones que permiten el equilibrio del sistema para poder definir bajo que parámetros dinámicos es posible diseñarlo en su totalidad, razón por la que además se incluye el análisis de velocidad como preámbulo al análisis dinámico.

1.2 Objetivo General

Desarrollar el modelo matemático para el análisis estático de una plataforma paralela de seis grados de libertad.

1.3 Metodología

El análisis ha sido dividido en dos partes para facilitar el proceso de cálculo numérico, en primer término se estudia la cinemática, es decir, se desarrolla el modelo matemático y se busca la solución algebraica para la determinación de la posición angular de las juntas, posteriormente, se desarrolla la solución numérica como parte de un proceso de verificación de resultados y se procede al análisis de velocidad del sistema; en la segunda parte, se da solución en forma numérica, al modelo que define el equilibrio estático del sistema.

1.4 Plataformas espaciales

La técnica moderna ha desarrollado sistemas complejos entre cuyos componentes encontramos mecanismos que incluyen elementos actuadores y otros dispositivos empleados para proporcionar una fuerza específica, ya sea en los elementos mismos o en las juntas. Una plataforma espacial paralela consiste básicamente en un plato (o efector) móvil que se conecta a una base fija (o soporte) por medio de varias cadenas cinemáticas, mismas que son controladas por actuadores que se acoplan a la base fija. Debido a la configuración geométrica y a que la fuerza externa puede ser distribuida entre los actuadores, este tipo de manipuladores tiene una gran capacidad de carga.

El diseño de mecanismos similares denominados manipuladores paralelos se remonta hacia el final de los años 20 cuando James E. Gwinnet [6] patentó una plataforma que se empleaba en las salas de cine para recrear situaciones diversas de las películas pues, las butacas se fijaban a una base móvil.

En 1934 Williard Pollard Jr.[9] solicitó la patente de una máquina para pintar que consistía de un control eléctrico y un manipulador mecánico, el cuál era en realidad una plataforma paralela básica y no sería sino hasta el año 1962 cuando Eric Gough y Whitehall [5] inventaron en Inglaterra un máquina universal para prueba de neumáticos; mientras que en los Estados Unidos, Klaus Cappel [3] se dio a la tarea de fabricar un hexápodo octaédrico para pruebas de tipo vibratorio en máquinas, tres años después se publicaría el trabajo de Stewart en el que se propone el diseño de una plataforma a seis grados de libertad que se puede emplear como simulador de vuelo; en el año de 1988 el profesor Raymond Clavel [4] de la École Polytechnique Federale à

Laussane desarrolló la plataforma delta que es un manipulador de alta velocidad con tres grados de libertad y como una variante presento un tetrápodo con tres movimientos de traslación y un movimiento rotacional, esta configuración puede aplicarse a una gran gama de operaciones en la industria del empaque y la farmacéutica, así como en el campo de la medicina.

1.5 Movilidad

Los sistemas empleados en manufactura a gran escala, aplicaciones biomecánicas, vehículos, etc. están formados por varios cuerpos que se unen por medio de diferentes tipos de juntas y elementos de fuerza. Las juntas son comúnmente empleadas para controlar la movilidad del sistema y restringir el movimiento a las direcciones deseadas. Los elementos de fuerza son dispositivos que pueden contener entre sus elementos amortiguadores, resortes, actuadores, etc.; la combinación de las juntas y los elementos de fuerza permite diseñar sistemas de multicuerpos capaces de desarrollar diversas tareas trayendo como consecuencia un posible incremento en el nivel de complejidad para efectos de análisis y estudio, de ahí que como parte importante del diseño de una plataforma sea necesario estudiar la movilidad de sus componentes.

En lo general, cualquier sistema mecánico se diseña para operaciones específicas establecidas por su configuración arquitectónica, los componentes de tales sistemas no son libres de tener un desplazamiento arbitrario debido a las restricciones ocasionadas por las juntas o elementos de fuerza que los unen; un elemento de fuerza no reduce el número de coordenadas independientes necesarias para describir la configuración del sistema, contrario a lo que sucede con las juntas que restringen el movimiento en algunas direcciones. Como se sabe, existen varios tipos de juntas, sin embargo, no las describiremos en su totalidad debido a que en el presente trabajo se emplea la junta de revoluta o rotacional y la junta universal.

La primera de ellas permite la unión de dos elementos de una manera tal que existe un movimiento de rotación entre uno y otro con respecto a un eje definido por la geometría de la junta, a cada uno de tales elementos se les denomina eslabón.

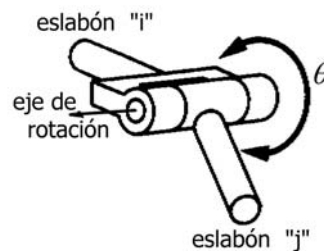


Figura 1.1 Junta de revolución

La segunda de las uniones se conoce también como junta cardan en Europa continental y como junta de Hooke en el Reino Unido, permite la transferencia de movimiento entre ejes que no son coaxiales y es en sí un sencillo mecanismo esférico de cuatro barras, la junta en sí consiste de dos juntas de revolución cuyos ejes son ortogonales una a otro y es común encontrarla configurada con un elemento cruzado tal como se muestra en la figura 1.2.

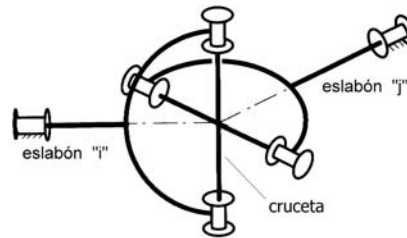


Figura 1.2 Junta universal

1.6 Configuración cinemática

La figura 1.3 muestra la estructura cinemática propuesta la cual consiste en un arreglo en paralelo de seis cadenas cinemáticas idénticas que se distribuyen por pares en una base triangular fija y se unen a una base móvil hexagonal formando así la plataforma que se estudia en esta tesis.

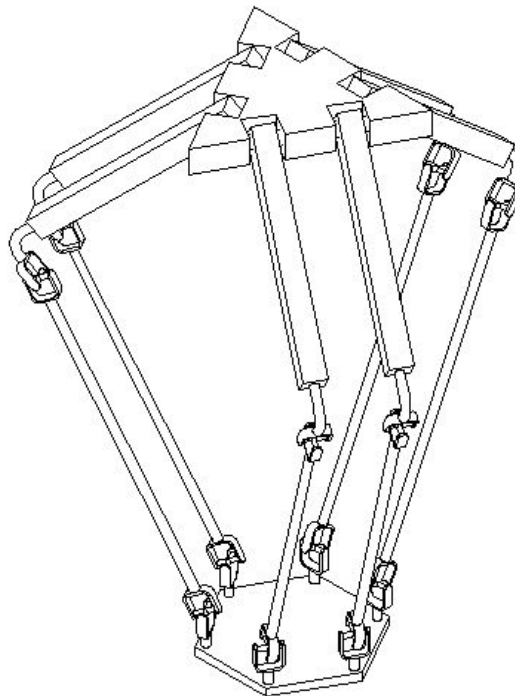


Figura 1.3 Plataforma propuesta

1. Generalidades

Considerando que las cadenas son idénticas será suficiente con describir a detalle una de ellas tal como se muestra en la figura 1.4.

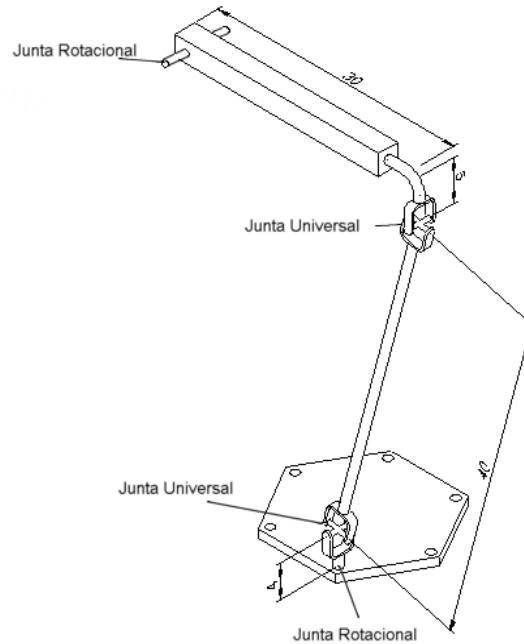


Figura 1.4 Cadena *i*

1.7 Grados de libertad

Los grados de libertad (GL) del sistema en estudio se determinan por medio de la fórmula siguiente [15]

$$GL = \lambda(l - j - 1) + \sum_{i=1}^j f_i - I_d \quad (1.1)$$

en donde se tiene que

GL = Grados de libertad de la plataforma

λ = Grados de libertad del sistema de referencia en el que se analiza el mecanismo

l = número de eslabones

j = número de juntas

f_i = grados de libertad de la i -ésima junta

I_d = grados de libertad de tipo pasivo

1. Generalidades

En nuestro caso se sigue que

$$\lambda = 6 \text{ (Se trata de una mecanismo espacial)}$$

$$l = 20$$

$$j = 24$$

$$f_i = 36$$

$$I_d = 0$$

$$GL = 6(20 - 24 - 1) + 36 - 0 = 6$$

Por lo que la plataforma que estudiaremos es de 6 grados de libertad.

Capítulo 2

Análisis Cinemático

2.1 Introducción

El análisis cinemático se enfoca al estudio de la geometría de los eslabones y su movimiento sin considerar las causas que lo originan, en este capítulo se desarrolla el análisis de posición y velocidad de la plataforma espacial para posteriormente realizar el análisis estático empleando las ecuaciones de equilibrio correspondientes.

El primer paso consiste en determinar las variables que se requieren para generar el desplazamiento, así, se establece la posición y la orientación de los eslabones del sistema, enseguida se procede al análisis de velocidad, derivando respecto al tiempo las expresiones obtenidas en el análisis de posición. La plataforma se puede representar en forma esquemática como una cadena cinemática de eslabones unidos por juntas, el extremo del primer eslabón se une a la base fija y el extremo del último eslabón de la cadena se une a la base que contiene al efector final. La cinemática inversa se aplica para el análisis y el problema se resuelve empleando matrices de transformación homogéneas y dado que se trata de un arreglo en paralelo, las expresiones algebraicas utilizadas se generalizan empleando un índice i que tomará los valores de 1 a 6 para hacer referencia a la cadena cinemática correspondiente, por último se presentan las gráficas que describen el comportamiento de cada una de las cadenas cinemáticas y con el propósito de suavizar la trayectoria propuesta para la plataforma, se emplea un polinomio de quinto grado.

2.2 Análisis de la posición

Para efectuar el análisis de la posición de un cuerpo rígido en el espacio, consideramos en primer lugar, un punto del mismo cuerpo y lo ubicamos con respecto a un sistema de referencia, la orientación la evaluamos considerando la rotación de un marco de referencia adherido al cuerpo con respecto a otro marco de referencia; las matrices de transformación homogénea que se emplean en el análisis se definen en la forma siguiente:

Matrices de Traslación

$$\mathbf{T}_{z1}(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{T}_{z2}(y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{T}_{z3}(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

En este caso tenemos que $\mathbf{T}_{z1}$ corresponde a la transformación lineal en el eje x del sistema de referencia, $\mathbf{T}_{z2}$ corresponde a la transformación lineal en el eje y mientras que $\mathbf{T}_{z3}$ se asocia a la transformación lineal en el eje coordenado z ; en cada caso hemos anotado como variable de la transformación un desplazamiento lineal que en lo general designamos por x , y , z mientras que será común que en el desarrollo del trabajo la designación correspondiente también se asocie a longitudes constantes como d_{ji}

Matrices de Rotación

$$\mathbf{T}_{z4}(\theta_x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta_x & -s\theta_x & 0 \\ 0 & s\theta_x & c\theta_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

$$\mathbf{T}_{z5}(\theta_y) = \begin{bmatrix} c\theta_y & 0 & s\theta_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s\theta_y & 0 & c\theta_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{T}_{z6}(\theta_z) = \begin{bmatrix} c\theta_z & -s\theta_z & 0 & 0 \\ s\theta_z & c\theta_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para el caso de la rotación tenemos que $\mathbf{T}_{z4}$ nos indica que hay una transformación homogénea con relación al giro del sistema con respecto al eje x , siendo en lo general el ángulo de giro, θ_x ; las transformaciones asociadas a

los giros con respecto al eje y y al eje z son, respectivamente $\mathbf{T}_{z5}$ y $\mathbf{T}_{z1}$ con los ángulos de giro etiquetados como θ_y y θ_z . En todos los casos de rotación se designarán los giros con una letra del alfabeto griego y es importante tener presente que las funciones trigonométricas *seno* y *coseno* han sido representadas como s y c con el propósito de abreviar la escritura de las ecuaciones.

2.2.1 Marcos de referencia

El análisis parte de la relación existente entre todos los eslabones del sistema con respecto a la **base de referencia inercial** (x_0, y_0, z_0), para ello se crean bases que se adhieren a cada eslabón del sistema, éstas, serán llamadas "**bases locales**" ($\mathbf{x}_{ji}, \mathbf{y}_{ji}, \mathbf{z}_{ji}$) y en donde el subíndice j nos indica el número de base y el subíndice i el número de cadena cinemática.

Las matrices de traslación se emplean para describir la distancia entre las bases (ecs. 2.1) y las matrices de rotación (ecs. 2.2) son usadas para obtener los cambios de dirección. El uso de las matrices homogéneas es sistemático, es suficiente con ordenar el producto de estas, mientras se recorre la arquitectura de la plataforma, los productos son agrupados por parejas y se renombran con la letra mayúscula $\mathbf{T}$ (por transformación) seguida de un subíndice que nos indica las bases involucradas, a manera de ejemplo, presentamos el desarrollo de las matrices requeridas para alcanzar la base local 4 a partir de la base inercial.

1. Nos alineamos en dirección de la cadena cinemática seleccionada, girando un ángulo δ_{1i} alrededor del eje z_0 para formar la base local ($\mathbf{x}_{1i}, \mathbf{y}_{1i}, \mathbf{z}_{1i}$), es decir $\mathbf{T}_{z6}(\delta_{1i})$.

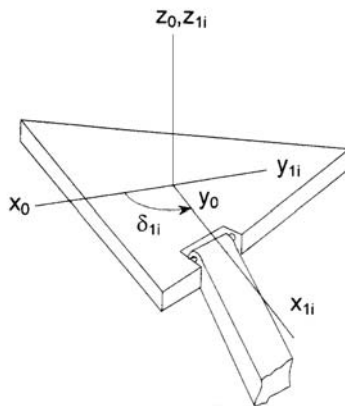


Figura 2.1 Transformación 1

2. Análisis Cinemático

2. Nos desplazamos una distancia d_{2i} sobre el eje x_{1i} para formar la base local $(\mathbf{x}_{2i}, \mathbf{y}_{2i}, \mathbf{z}_{2i})$ es decir $\mathbf{T}_{z1}(d_{2i})$.

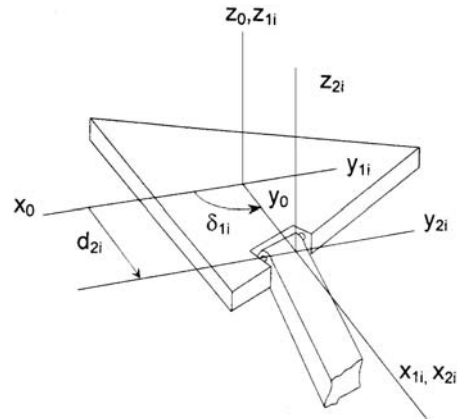


Figura 2.2 Transformación 2

3. Giramos un ángulo δ_{3i} alrededor del eje z_{2i} para formar la base local $(\mathbf{x}_{3i}, \mathbf{y}_{3i}, \mathbf{z}_{3i})$, esto es $\mathbf{T}_{z6}(\delta_{3i})$.

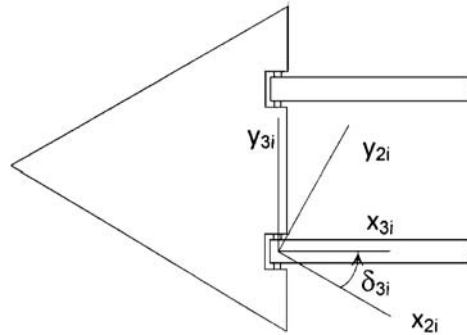


Figura 2.3 Transformación 3

4. Ahora se gira alrededor del eje y_{3i} un ángulo θ_{4i} para formar la base local $(\mathbf{x}_{4i}, \mathbf{y}_{4i}, \mathbf{z}_{4i})$ haciendo coincidir el eje x_{4i} con la orientación del eslabón 1, es decir $\mathbf{T}_{z5}(\theta_{4i})$.

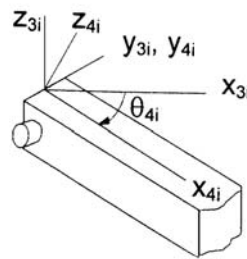


Figura 2.4 Transformación 4

2. Análisis Cinemático

En las figuras siguientes se muestra el resto de los componentes de la cadena cinemática i , indicando cada una de las bases que se establecieron para desarrollar el análisis de posición de la plataforma. La figura 2.5 muestra el eslabón 1 completo con las bases que llevan a la ubicación de la primera horquilla de la junta universal, mientras que la figura 2.6 nos muestra el eslabón 2 con las bases que conducen el análisis de la horquilla del extremo inferior.

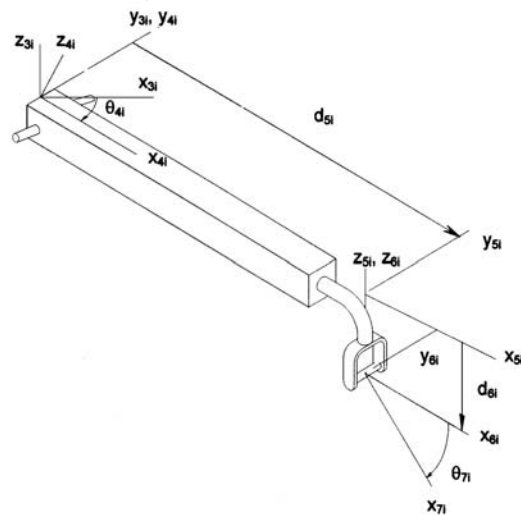


Figura 2.5 Eslabón 1 con bases locales

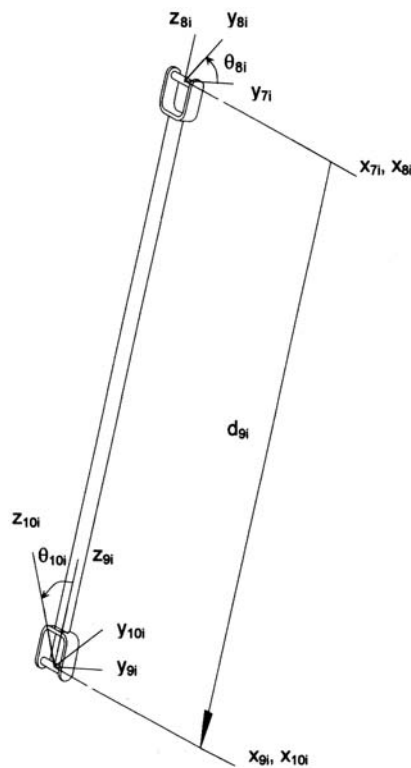


Figura 2.6 Eslabón 2 con bases locales

La figura 2.7 representa al eslabón final (3) que une la cadena a la plataforma móvil, mientras que en la figura 2.8 se muestra la plataforma móvil con su base local ($\mathbf{x}_p, \mathbf{y}_p, \mathbf{z}_p$).

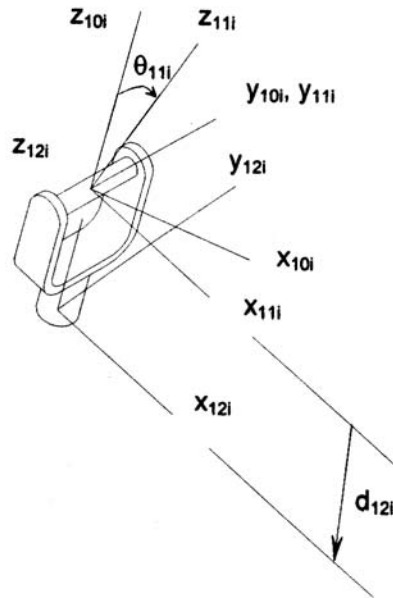


Figura 2.7 Eslabón 3 con bases locales

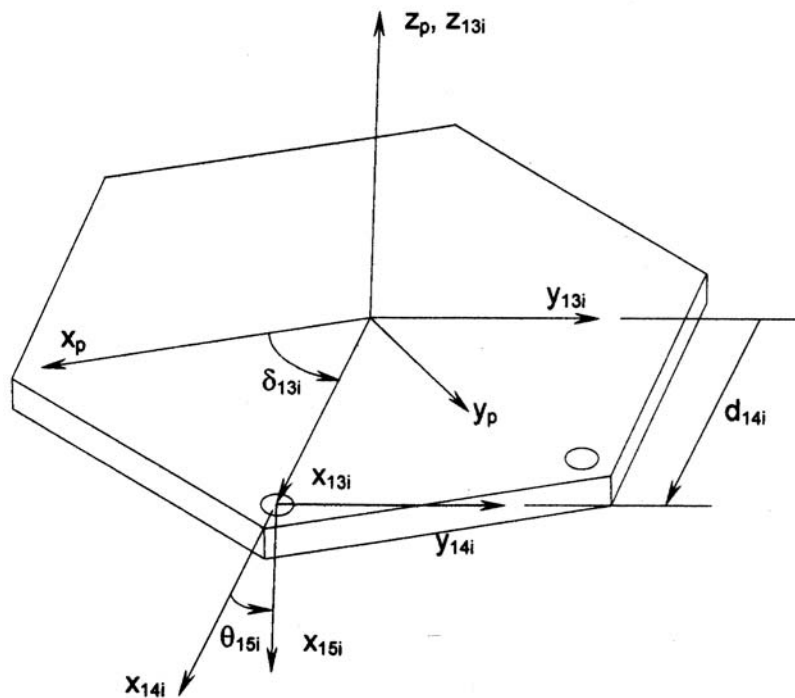


Figura 2.8 Plataforma móvil

2. Análisis Cinemático

De acuerdo a la base inercial y a las bases móviles, tenemos que la ecuación de lazo vectorial que debemos emplear para el análisis de posición es la siguiente:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{z6}(\delta_{1i})\mathbf{T}_{z1}(d_{2i})\mathbf{T}_{z6}(\delta_{3i})\mathbf{T}_{z5}(\theta_{4i})\mathbf{T}_{z1}(d_{5i})\mathbf{T}_{z3}(-d_{6i})\mathbf{T}_{z5}(\theta_{7i})\mathbf{T}_{z4}(\theta_{8i})\mathbf{T}_{z3}(-d_{9i})\mathbf{T}_{z4}(\theta_{10i})\dots \\ \mathbf{T}_{z5}(\theta_{11i})\mathbf{T}_{z3}(-d_{12i}) = \mathbf{T}_{z1}(x_p)\mathbf{T}_{z2}(y_p)\dots \\ \mathbf{T}_{z3}(z_p)\mathbf{T}_{z6}(\theta)\mathbf{T}_{z4}(\psi)\mathbf{T}_{z6}(\varphi)\mathbf{T}_{z6}(\delta_{13i})\mathbf{T}_{z1}(d_{14i})\mathbf{T}_{z6}(\theta_{15i}) \end{aligned}$$

Hagamos:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{02i} &= \mathbf{T}_{z6}(\delta_{1i})\mathbf{T}_{z1}(d_{2i}) \\ \mathbf{T}_{26i} &= \mathbf{T}_{z6}(\delta_{3i})\mathbf{T}_{z5}(\theta_{4i})\mathbf{T}_{z1}(d_{5i})\mathbf{T}_{z3}(-d_{6i}) \\ \mathbf{T}_{69i} &= \mathbf{T}_{z5}(\theta_{7i})\mathbf{T}_{z4}(\theta_{8i})\mathbf{T}_{z3}(-d_{9i}) \\ \mathbf{T}_{912i} &= \mathbf{T}_{z4}(\theta_{10i})\mathbf{T}_{z5}(\theta_{11i})\mathbf{T}_{z3}(-d_{12i}) \\ \mathbf{T}_{0P} &= \mathbf{T}_{z1}(x_p)\mathbf{T}_{z2}(y_p)\mathbf{T}_{z3}(z_p)\mathbf{T}_{z6}(\theta)\mathbf{T}_{z4}(\psi)\mathbf{T}_{z6}(\varphi) \\ \mathbf{T}_{P15i} &= \mathbf{T}_{z6}(\delta_{13i})\mathbf{T}_{z1}(d_{14i})\mathbf{T}_{z6}(\theta_{15i}) \end{aligned}$$

y entonces:

$$\mathbf{T}_{02i}\mathbf{T}_{26i}\mathbf{T}_{69i}\mathbf{T}_{912i} = \mathbf{T}_{0P}\mathbf{T}_{P15i} \quad (2.3)$$

De esta forma, nuestro problema se reduce a lo siguiente:

Análisis Cinemático Inverso

Dada la posición y la orientación de la plataforma móvil, x_p , y_p , z_p , θ , ψ y φ , hallar los valores θ_{4i} , θ_{7i} , θ_{8i} , θ_{10i} , θ_{11i} y θ_{15i} que definen el movimiento de las juntas que conforman la plataforma.

Las posiciones angulares correspondientes a cada cadena con respecto a la plataforma dependen de la orientación y de la trayectoria de la misma, los valores para el cálculo numérico son los siguientes:

$\delta_{11} = 30^\circ$	$\delta_{31} = -30^\circ$	$\delta_{131} = 30^\circ$
$\delta_{12} = 330^\circ$	$\delta_{32} = 30^\circ$	$\delta_{132} = 330^\circ$
$\delta_{13} = 150^\circ$	$\delta_{33} = -30^\circ$	$\delta_{133} = 150^\circ$
$\delta_{14} = 90^\circ$	$\delta_{34} = 30^\circ$	$\delta_{134} = 90^\circ$
$\delta_{15} = 270^\circ$	$\delta_{35} = -30^\circ$	$\delta_{135} = 270^\circ$
$\delta_{16} = 210^\circ$	$\delta_{36} = 30^\circ$	$\delta_{136} = 210^\circ$

con:

$$\begin{array}{lll}
 d_{2i} = 0.15 \text{ m} & d_{5i} = 0.30 \text{ m} & d_{6i} = 0.05 \text{ m} \\
 d_{9i} = 0.40 \text{ m} & d_{12i} = 0.04 \text{ m} & d_{14i} = 0.075 \text{ m}
 \end{array}$$

2.2.2 Trayectoria propuesta

El movimiento de un cuerpo en el espacio consiste de dos partes: Una trayectoria lineal o curva en el espacio que sigue un punto del cuerpo (el centro de gravedad o el efector final de un manipulador) y la orientación angular del cuerpo. Ambas partes deben satisfacer condiciones de posición, velocidad y aceleración tanto lineal como angular y ser realizadas en un tiempo definido previamente. A continuación se desarrolla la trayectoria lineal y la trayectoria angular que se propone para la plataforma en función del tiempo.

Trayectoria Lineal

Se define la curva en el espacio como una recta para el movimiento a seguir por un punto del cuerpo.

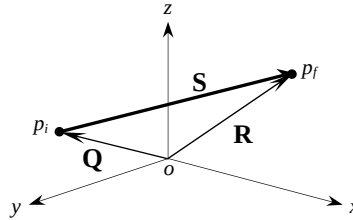


Figura 2.9. Recta en el espacio

La ecuación vectorial de posición se define a partir de la figura 1:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R} &= \mathbf{Q} + \mathbf{S} \\
 &= \mathbf{Q} + s\mathbf{u}
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

donde s es la magnitud del vector $\mathbf{S}$ y $\mathbf{u}$ es el vector unitario que define la orientación de $\mathbf{S}$. Para definir $\mathbf{R}$ en función del tiempo, se requiere que la magnitud s , cambie con respecto al mismo, es decir:

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{Q} + s(t)\mathbf{u} \tag{2.5}$$

Las ecuaciones vectoriales de velocidad y aceleración se definen como la primera y segunda derivada respecto al tiempo de la ecuación 2.5:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{V}(t) &= \dot{s}(t)\mathbf{u} \\
 \mathbf{A}(t) &= \ddot{s}(t)\mathbf{u}
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

ya que $\mathbf{Q}$ y $\mathbf{u}$ no varían respecto al tiempo, porque están definidos por puntos fijos en el espacio. La magnitud $s(t)$ debe satisfacer condiciones iniciales y finales de posición, velocidad y aceleración, es decir debe satisfacer 6 condiciones, según se muestra en la figura 2.10.

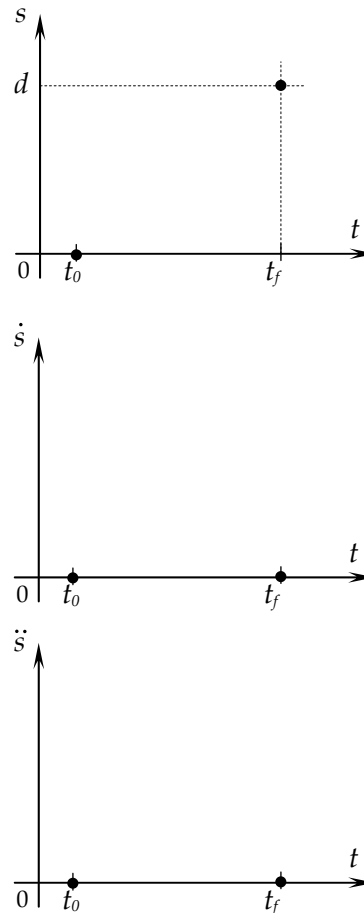


Figura 2.10 Condiciones iniciales

La primera gráfica indica el cambio de la magnitud del vector $\mathbf{S}$, que irá variando de 0 en un tiempo inicial t_0 , a $d = \|\mathbf{S}\|$ para un tiempo final t_f , los valores de tiempo, t_0 y t_f los definimos de manera arbitraria.

La segunda gráfica es la rapidez con que la magnitud del vector $\mathbf{S}$ cambia respecto al tiempo. Es decir, es la rapidez con que realiza el traslado del punto p_i a p_f , para un tiempo inicial t_0 y un tiempo final t_f .

La tercera gráfica es el cambio de la rapidez (aceleración) con que la magnitud del vector $\mathbf{S}$ cambia respecto al tiempo, para un tiempo inicial t_0 y un tiempo final t_f .

2. Análisis Cinemático

Para satisfacer las 6 condiciones, se empleará un polinomio de quinto grado, ya que este cuenta con 6 coeficientes a determinar. De esta manera, se tiene:

$$\begin{aligned} s(t) &= a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5 \\ \dot{s}(t) &= a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + 4a_4 t^3 + 5a_5 t^4 \\ \ddot{s}(t) &= 2a_2 + 6a_3 t + 12a_4 t^2 + 20a_5 t^3 \end{aligned} \quad (2.7)$$

Debido a que existen condiciones iniciales y finales de velocidad y aceleración, se obtienen las derivadas respecto al tiempo del polinomio de $s(t)$. A partir de la figura 2.10, para $t = t_0 = 0$ se tienen las 3 condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} s(t_0) &= s(0) = 0 \\ \dot{s}(t_0) &= \dot{s}(0) = 0 \\ \ddot{s}(t_0) &= \ddot{s}(0) = 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

al sustituirlas en las ecs.(2.7) se obtiene:

$$\begin{aligned} s(0) = 0 &= a_0 + a_1(0) + a_2(0)^2 + a_3(0)^3 + a_4(0)^4 + a_5(0)^5 \\ \dot{s}(0) = 0 &= a_1 + 2a_2(0) + 3a_3(0)^2 + 4a_4(0)^3 + 5a_5(0)^4 \\ \ddot{s}(0) = 0 &= 2a_2 + 6a_3(0) + 12a_4(0)^2 + 20a_5(0)^3 \end{aligned}$$

Simplificando:

$$\begin{aligned} 0 &= a_0 \\ 0 &= a_1 \\ 0 &= 2a_2 \end{aligned}$$

Finalmente, los 3 primeros coeficientes son:

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ a_1 &= 0 \\ a_2 &= 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

A partir de la figura 2.10 y repitiendo el proceso para $t = t_f$ se tienen las 3 condiciones finales:

$$\begin{aligned} s(t_f) &= d = \|p_f - p_i\| \\ \dot{s}(t_f) &= 0 \\ \ddot{s}(t_f) &= 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

donde $p_i = (x_i, y_i, z_i)$ y $p_f = (x_f, y_f, z_f)$, son las coordenadas de los puntos inicial y final de la trayectoria respectivamente.

2. Análisis Cinemático

La magnitud de la diferencia entre ellos, representa la distancia d que necesitamos recorrer en la línea recta. Al sustituir las ecs. (2.9) y (2.10) en la ec. (2.7) se obtiene:

$$\begin{aligned}\|p_f - p_i\| &= a_3 t_f^3 + a_4 t_f^4 + a_5 t_f^5 \\ 0 &= 3a_3 t_f^2 + 4a_4 t_f^3 + 5a_5 t_f^4 \\ 0 &= 6a_3 t_f + 12a_4 t_f^2 + 20a_5 t_f^3\end{aligned}$$

el sistema de ecuaciones se expresa de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} t_f^3 & t_f^4 & t_f^5 \\ 3t_f^2 & 4t_f^3 & 5t_f^4 \\ 6t_f & 12t_f^2 & 20t_f^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|p_f - p_i\| \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

al resolver el sistema de la ec. (2.11) se obtienen los 3 últimos coeficientes:

$$\begin{aligned}a_3 &= 10 \frac{\|p_f - p_i\|}{t_f^3} \\ a_4 &= -15 \frac{\|p_f - p_i\|}{t_f^4} \\ a_5 &= 6 \frac{\|p_f - p_i\|}{t_f^5}\end{aligned} \quad (2.12)$$

Sustituyendo las ecs.(2.9) y (2.12) en la ec. (2.7):

$$\begin{aligned}s(t_f) &= 10 \frac{\|p_f - p_i\|}{t_f^3} t^3 - 15 \frac{\|p_f - p_i\|}{t_f^4} t^4 + 6 \frac{\|p_f - p_i\|}{t_f^5} t^5 \\ \dot{s}(t_f) &= 30 \frac{\|p_f - p_i\|}{t_f^3} t^2 - 60 \frac{\|p_f - p_i\|}{t_f^4} t^3 + 30 \frac{\|p_f - p_i\|}{t_f^5} t^4 \\ \ddot{s}(t_f) &= 60 \frac{\|p_f - p_i\|}{t_f^3} t - 180 \frac{\|p_f - p_i\|}{t_f^4} t^2 + 120 \frac{\|p_f - p_i\|}{t_f^5} t^3\end{aligned} \quad (2.13)$$

Finalmente se obtienen las ecuaciones que representan el cambio de la magnitud de la posición, velocidad y aceleración en función del tiempo:

$$\begin{aligned}
s(t_f) &= \|p_f - p_i\| \left[10 \frac{\|p_f - p_i\|}{t_f^3} t^3 - 15 \frac{\|p_f - p_i\|}{t_f^4} t^4 + 6 \frac{\|p_f - p_i\|}{t_f^5} t^5 \right] \\
\dot{s}(t_f) &= \|p_f - p_i\| \left[30 \frac{\|p_f - p_i\|}{t_f^3} t^2 - 60 \frac{\|p_f - p_i\|}{t_f^4} t^3 + 30 \frac{\|p_f - p_i\|}{t_f^5} t^4 \right] \\
\ddot{s}(t_f) &= \|p_f - p_i\| \left[60 \frac{\|p_f - p_i\|}{t_f^3} t - 180 \frac{\|p_f - p_i\|}{t_f^4} t^2 + 120 \frac{\|p_f - p_i\|}{t_f^5} t^3 \right]
\end{aligned} \tag{2.14}$$

donde t = tiempo para realizar el movimiento y t_f = tiempo final para terminar el movimiento. Reescribiendo las ecs. (2.5) y (2.6) en función de los puntos de la recta:

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}(t) &= \mathbf{Q} + s(t)\mathbf{u} = (p_i - 0) + s(t) \frac{(p_f - p_i)}{\|p_f - p_i\|} \\
\mathbf{V}(t) &= s(t)\mathbf{u} = s(t) \frac{(p_f - p_i)}{\|p_f - p_i\|} \\
\mathbf{A}(t) &= s(t)\mathbf{u} = s(t) \frac{(p_f - p_i)}{\|p_f - p_i\|}
\end{aligned} \tag{2.15}$$

sustituyendo las ecs. (2.14) en las ecs. (2.15), se obtiene finalmente la ecuación vectorial de posición, la ecuación de velocidad y la de aceleración que debe seguir la plataforma móvil:

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}(t) &= \mathbf{p}_i + \left[10 \left(\frac{t}{t_f} \right)^3 - 15 \left(\frac{t}{t_f} \right)^4 + 6 \left(\frac{t}{t_f} \right)^5 \right] (\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i) \\
\mathbf{V}(t) &= \left[30 \frac{t^2}{t_f^3} - 60 \frac{t^3}{t_f^4} + 30 \frac{t^4}{t_f^5} \right] (\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i) \\
\mathbf{A}(t) &= \left[60 \frac{t}{t_f^3} - 180 \frac{t^2}{t_f^4} + 120 \frac{t^3}{t_f^5} \right] (\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i)
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Orientación Angular

Para la orientación se sigue un procedimiento similar, en el entendido de que para este caso, solo se desea pasar de valores iniciales a finales, para la posición, velocidad y aceleración angular de la plataforma móvil, ya que no se requiere cumplir con una trayectoria particular en el espacio. Esto conducirá a las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}\beta(t) &= \beta_i + \left[10 \left(\frac{t}{t_f} \right)^3 - 15 \left(\frac{t}{t_f} \right)^4 + 6 \left(\frac{t}{t_f} \right)^5 \right] (\beta_f - \beta_i) \\ \dot{\beta}(t) &= \left[30 \frac{t^2}{t_f^3} - 60 \frac{t^3}{t_f^4} + 30 \frac{t^4}{t_f^5} \right] (\beta_f - \beta_i) \\ \ddot{\beta}(t) &= \left[60 \frac{t}{t_f^3} - 180 \frac{t^2}{t_f^4} + 120 \frac{t^3}{t_f^5} \right] (\beta_f - \beta_i)\end{aligned}\tag{2.17}$$

donde el vector $\beta = (\psi, \theta, \varphi)$. De la misma manera $\beta_i = (\theta_i, \psi_i, \varphi_i)$ y $\beta_f = (\theta_f, \psi_f, \varphi_f)$, que se refieren a los valores iniciales y finales.

Para el sistema bajo estudio se propone que la trayectoria del centro de la plataforma móvil (x_p, y_p, z_p) , tenga como coordenadas inicial y final, las siguientes:

$$\mathbf{p}_f = (0.15, 0.15, -0.25) \text{ m y } \mathbf{p}_i = (0, 0, -0.5) \text{ m}$$

siendo la orientación:

$$\beta_f = (30^\circ, 30^\circ, 0) \text{ y } \beta_i = (0, 0, 0)$$

Para nuestro análisis tomamos un intervalo de tiempo de un segundo, presentándose entonces, el siguiente comportamiento de desplazamiento, velocidad y aceleración para el centro de la plataforma móvil.

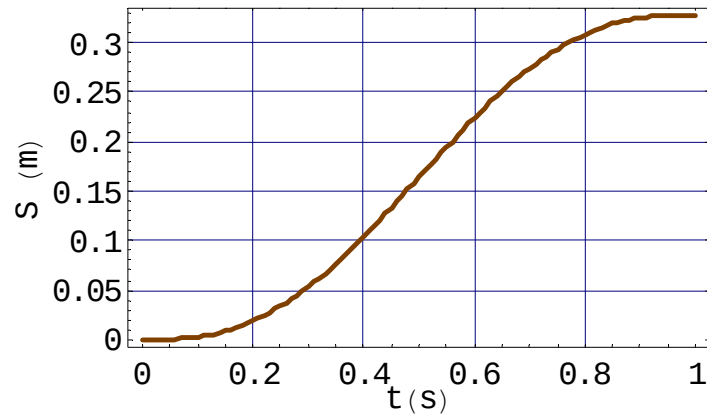


Figura 2.11 Desplazamiento del centro de la plataforma móvil

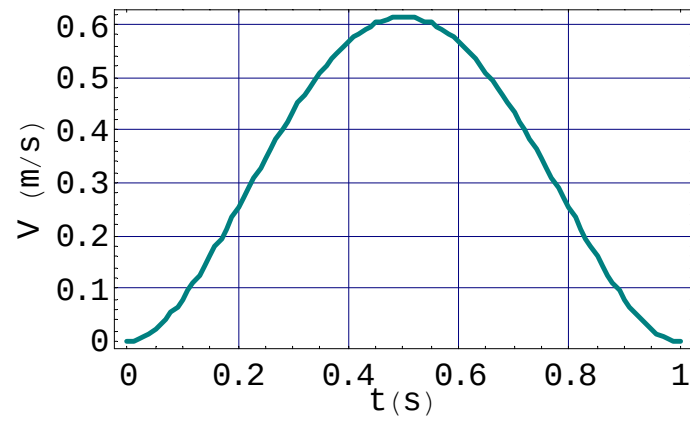


Figura 2.12 Velocidad lineal del centro de la plataforma móvil

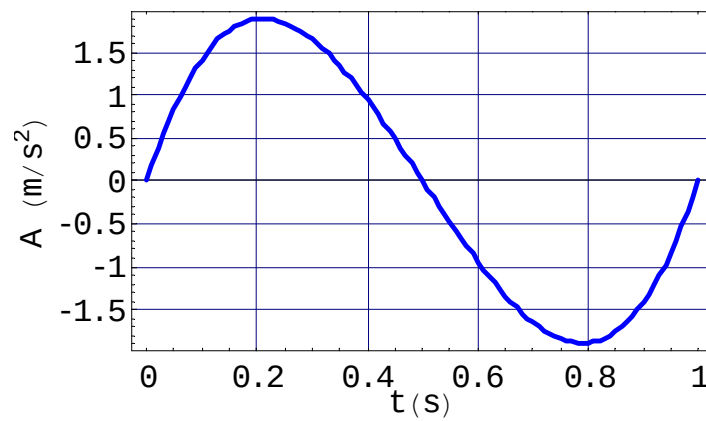


Figura 2.13 Aceleración lineal del centro de la plataforma móvil

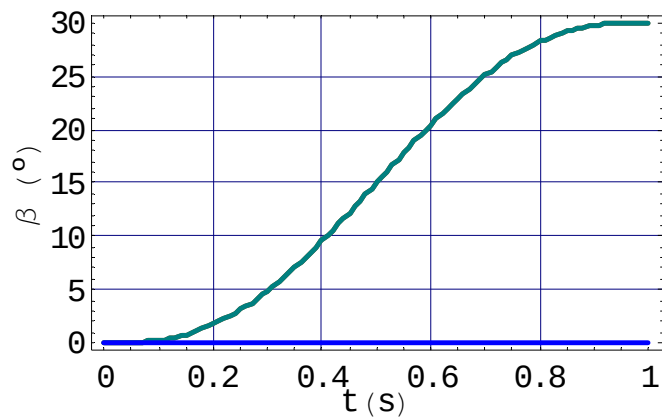


Figura 2.14 Orientación angular del centro de la plataforma móvil

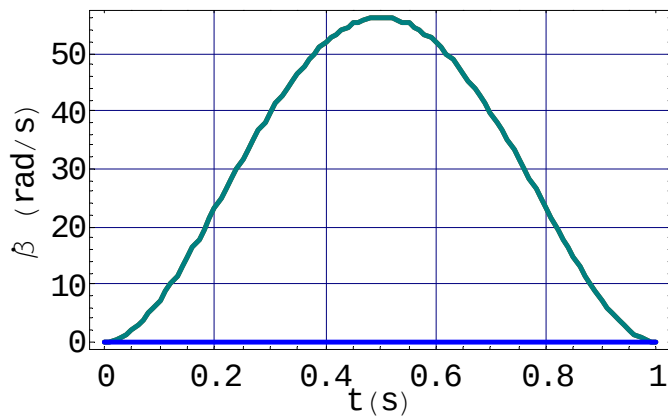


Figura 2.15 Velocidad angular del centro de la plataforma móvil

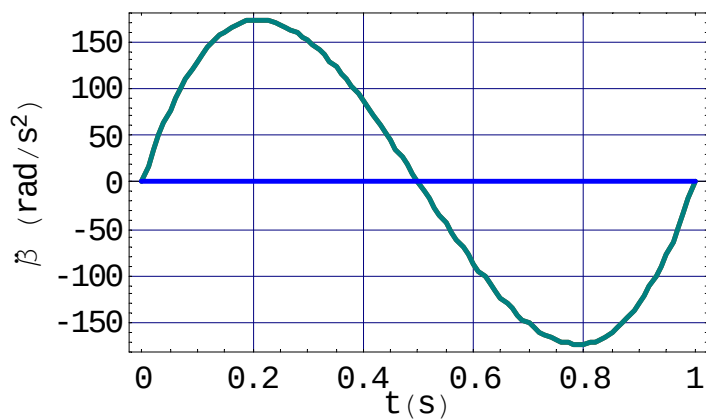


Figura 2.16 Aceleración angular del centro de la plataforma móvil

2.2.3 Posición Angular θ_{4i}

Para el cálculo de la posición angular θ_{4i} del eslabón motriz consideramos la configuración siguiente:

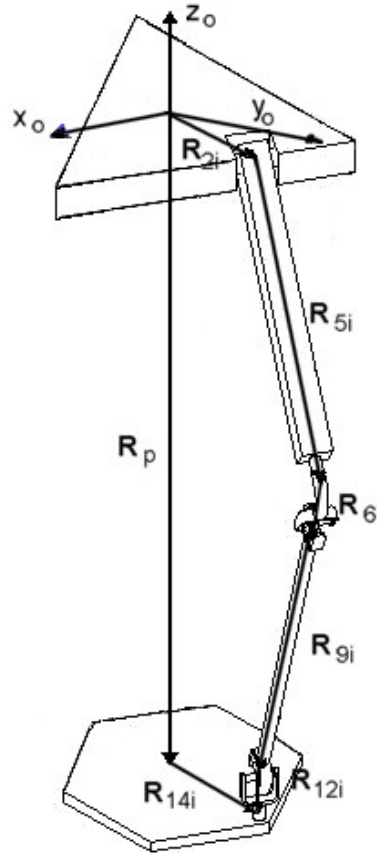


Figura 2.17 Arreglo cinemático

A partir de ella se establece la ecuación siguiente:

$$\mathbf{R}_{2i} + \mathbf{R}_{5i} + \mathbf{R}_{6i} + \mathbf{R}_{9i} + \mathbf{R}_{12i} - \mathbf{R}_{14i} - \mathbf{R}_p = 0 \quad (2.18)$$

de esta expresión, efectuamos el despeje de $\mathbf{R}_{9i}$:

$$\mathbf{R}_{9i} = (\mathbf{R}_p + \mathbf{R}_{14i} - \mathbf{R}_{12i}) - (\mathbf{R}_{2i} + \mathbf{R}_{5i} + \mathbf{R}_{6i}) \quad (2.19)$$

para esta ecuación se tiene que las transformaciones homogéneas nos conducen a:

$$\mathbf{R}_{9i} = \mathbf{T}_{0P}\mathbf{T}_{P15i}\mathbf{T}_{z3}(\mathbf{d}_{12i})\mathbf{n} - \mathbf{T}_{02i}\mathbf{T}_{26i}\mathbf{n} \quad (2.20)$$

con: $\mathbf{n} = [0,0,0,1]^T$

La magnitud del vector $\mathbf{R}_{9i}$ es:

$$\begin{aligned} d_{9i} &= \|\mathbf{R}_{9i}\| = \sqrt{\langle \mathbf{R}_{9i}, \mathbf{R}_{9i} \rangle} \\ d_{9i}^2 &= \langle \mathbf{R}_{9i}, \mathbf{R}_{9i} \rangle \\ \therefore \langle \mathbf{R}_{9i}, \mathbf{R}_{9i} \rangle - d_{9i}^2 &= 0 \end{aligned} \quad (2.21)$$

Considerando que esta expresión es una función de la posición angular de entrada para el sistema, se tiene que la solución algebraica nos conduce a una ecuación de la forma:

$$A_i \cos \theta_{4i} + B_i \sin \theta_{4i} + C_i = 0 \quad (2.22)$$

en donde las variables A_i , B_i y C_i son:

$$\begin{aligned} A_i &= 2(d_{2i}d_{5i}c\delta_{3i} + d_{6i}(z_p + d_{12i}c\psi) - d_{5i}(x_p c(\delta_{1i} + \delta_{3i}) + d_{14i}c(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta)c(\delta_{13i} + \varphi) + \\ &\quad y_p s(\delta_{1i} + \delta_{3i}) + d_{14i}c\psi s(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta)s(\delta_{13i} + \varphi)) + s\psi(d_{12i}d_{5i}s(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta) + d_{14i} \\ &\quad d_{6i}s(\delta_{13i} + \varphi)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_i &= 2(d_{5i}(z_p + d_{12i}c\psi) - d_{2i}d_{6i}c\delta_{3i}) + d_{6i}(x_p c(\delta_{1i} + \delta_{3i}) + d_{14i}c(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta)c(\delta_{13i} + \varphi) + \\ &\quad y_p s(\delta_{1i} + \delta_{3i}) + d_{14i}c\psi s(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta)s(\delta_{13i} + \varphi)) + s\psi(d_{14i}d_{5i}s(\delta_{13i} + \varphi) - d_{12i}d_{6i} \\ &\quad s(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_i &= d_{12i}^2 + d_{14i}^2 + d_{2i}^2 + d_{5i}^2 + d_{6i}^2 - d_{9i}^2 + x_p^2 + y_p^2 + z_p^2 - 2d_{2i}x_p c\delta_{1i} + d_{14i}x_p \\ &\quad c(\delta_{13i} - \theta + \varphi) - d_{14i}d_{2i}c(\delta_{13i} + \delta_{1i} - \theta + \varphi) + d_{14i}x_p c(\delta_{13i} + \theta + \varphi) - d_{14i}d_{2i}c(\delta_{13i} - \\ &\quad \delta_{1i} + \theta + \varphi) + 2d_{12i}z_p c\psi - 2d_{2i}y_p s\delta_{1i} - 2d_{14i}c\psi s(\delta_{13i} + \varphi)(d_{2i}s(\delta_{1i} - \theta) + x_p s\theta - y_p \\ &\quad c\theta) - d_{14i}y_p s(\delta_{13i} - \theta + \varphi) + d_{14i}y_p s(\delta_{13i} + \theta + \varphi) + 2s\psi(d_{12i}d_{2i}s(\delta_{1i} - \theta) + d_{12i}x_p \\ &\quad s\theta + d_{14i}z_p s(\delta_{13i} + \varphi) - d_{12i}y_p c\theta) \end{aligned}$$

La solución a la ecuación trascendental se obtiene al considerar que podemos sustituir:

$$\sin \theta_{4i} = \frac{2 \tan\left(\frac{\theta_{4i}}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{\theta_{4i}}{2}\right)} \quad (2.23)$$

y

$$\cos \theta_{4i} = \frac{1 - \tan^2 \left(\frac{\theta_{4i}}{2} \right)}{1 + \tan^2 \left(\frac{\theta_{4i}}{2} \right)} \quad (2.24)$$

Lo que nos conduce a:

$$A_i \left(\frac{1 - \tan^2 \left(\frac{\theta_{4i}}{2} \right)}{1 + \tan^2 \left(\frac{\theta_{4i}}{2} \right)} \right) + B_i \left(\frac{2 \tan \left(\frac{\theta_{4i}}{2} \right)}{1 + \tan^2 \left(\frac{\theta_{4i}}{2} \right)} \right) + C_i = 0$$

La reducción algebraica correspondiente nos permite obtener la ecuación cuadrática siguiente:

$$(C_i - A_i) \tan^2 \left(\frac{\theta_{4i}}{2} \right) + 2B_i \tan \left(\frac{\theta_{4i}}{2} \right) + (A_i + C_i) = 0$$

siendo entonces la solución:

$$\theta_{4i} = 2 \arctan \left(\frac{-B_i \pm \sqrt{B_i^2 - C_i^2 + A_i^2}}{C_i - A_i} \right) \quad (2.25)$$

A continuación se muestran las gráficas del ángulo θ_{4i} para las cadenas cinemáticas cuando la plataforma recorre la trayectoria descrita en el apartado anterior, para un tiempo de un segundo.

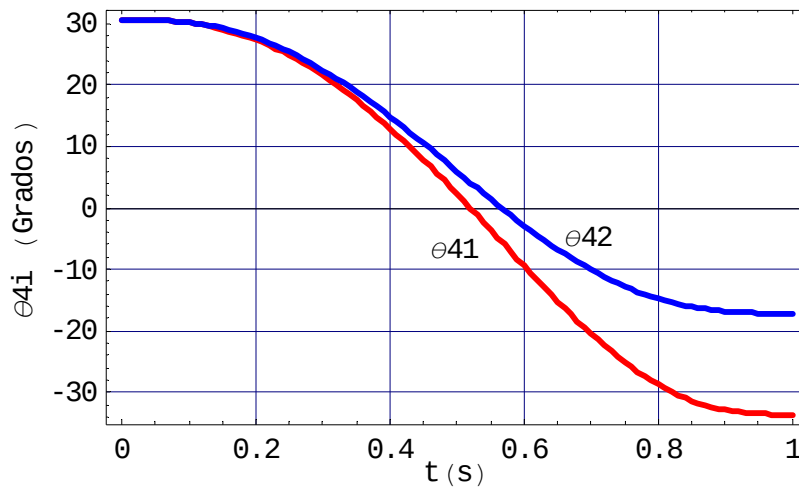
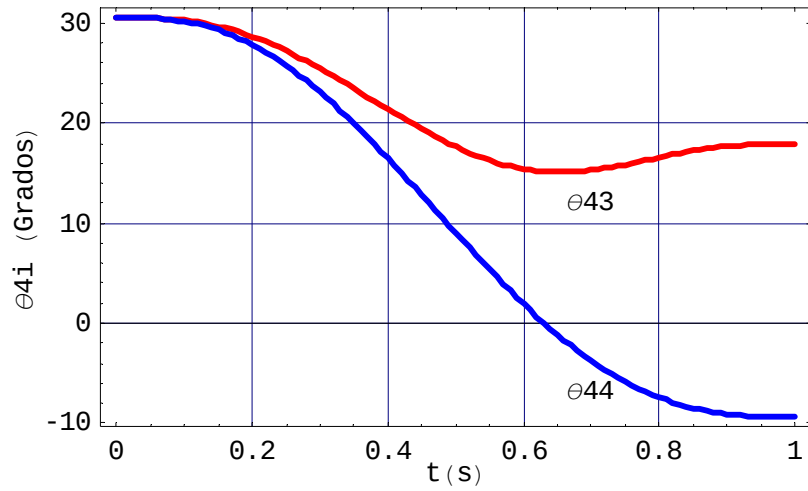
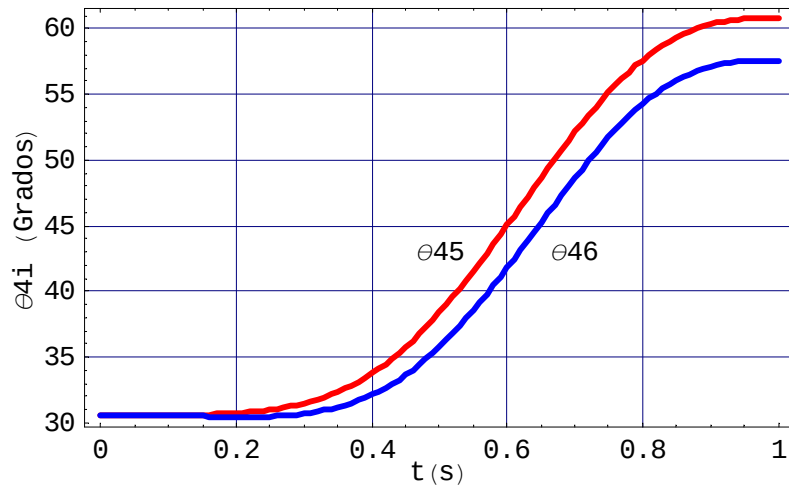


Figura 2.18 Gráficas de posición angular θ_{4i} de las cadenas 1 y 2

Figura 2.19 Gráficas de posición angular θ_{4i} de las cadenas 3 y 4Figura 2.20 Gráficas de posición angular θ_{4i} de las cadenas 5 y 6

2.2.4 Posición Angular θ_{7i}

Una vez calculado el valor de θ_{4i} , procedemos a calcular el valor del ángulo θ_{7i} , de acuerdo a la ecuación (2.3) y a las definiciones dadas para las transformaciones homogéneas, la evaluación se realiza considerando que:

$$\mathbf{T}_{69i} = \mathbf{T}_{26i}^{-1} \mathbf{T}_{02i}^{-1} \mathbf{T}_{0P} \mathbf{T}_{P15i} \mathbf{T}_{912i}^{-1} \quad (2.26)$$

donde:

$$\mathbf{T}_{69i} = \begin{bmatrix} c\theta_{7i} & s\theta_{7i}s\theta_{8i} & c\theta_{8i}s\theta_{7i} & -d_{9i}c\theta_{8i}s\theta_{7i} \\ 0 & c\theta_{8i} & -s\theta_{8i} & d_{9i}s\theta_{8i} \\ -s\theta_{7i} & c\theta_{7i}s\theta_{8i} & c\theta_{7i}c\theta_{8i} & -d_{9i}c\theta_{7i}c\theta_{8i} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y

$$\mathbf{T}_{26i}^{-1}\mathbf{T}_{02i}^{-1}\mathbf{T}_{0P}\mathbf{T}_{P15i}\mathbf{T}_{912i}^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11i} & a_{12i} & a_{13i} & a_{14i} \\ a_{21i} & a_{22i} & a_{23i} & a_{24i} \\ a_{31i} & a_{32i} & a_{33i} & a_{34i} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se procede a seleccionar los elementos a_{14i} y a_{34i} de cada matriz debido a que contienen longitudes y ángulos conocidos:

$$-d_{9i}c\theta_{8i}s\theta_{7i} = a_{14i}$$

$$-d_{9i}c\theta_{8i}c\theta_{7i} = a_{34i}$$

Despejando $-d_{9i}c\theta_{8i}$ tenemos:

$$-d_{9i}c\theta_{8i} = \frac{a_{14i}}{s\theta_{7i}}$$

$$-d_{9i}c\theta_{8i} = \frac{a_{34i}}{c\theta_{7i}}$$

Al igualar ambas expresiones se establece que:

$$\frac{a_{14i}}{s\theta_{7i}} = \frac{a_{34i}}{c\theta_{7i}}$$

Así:

$$a_{14i}c\theta_{7i} = a_{34i}s\theta_{7i}$$

De esta forma podemos establecer entonces que:

$$\theta_{7i} = \arctan\left(\frac{a_{14i}}{a_{34i}}\right) \quad (2.27)$$

2. Análisis Cinemático

con:

$$a_{14i} = -d_{2i}c\delta_{3i}c\theta_{4i} + x_p c(\delta_{1i} + \delta_{3i})c\theta_{4i} + d_{14i}c\delta_{13i}c(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta)c\theta_{4i}c\varphi + y_p c\theta_{4i}s(\delta_{1i} + \delta_{3i}) + d_{14i}c\theta_{4i}c\varphi c\psi s\delta_{13i}s(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta) - d_{12i}c\psi s\theta_{4i} - z_p s\theta_{4i} - d_{14i}c(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta)c\theta_{4i}s\delta_{13i}s\varphi - d_{5i} + d_{14i}c\delta_{13i}c\theta_{4i}c\psi s(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta)s\varphi - s\varphi(d_{12i}c\theta_{4i}s(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta) + d_{14i}s\theta_{4i}s(\delta_{13i} + \varphi))$$

$$a_{34i} = d_{6i} + c\theta_{4i}(z_p + d_{12i}c\psi + d_{14i}s\psi s(\delta_{13i} + \varphi)) + s\theta_{4i}(d_{14i}c(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta)c(\delta_{13i} + \varphi) + x_p c(\delta_{1i} + \delta_{3i}) + y_p s(\delta_{1i} + \delta_{3i}) - d_{2i}c\delta_{3i} + s(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta)(d_{14i}c\psi s(\delta_{13i} + \varphi) - d_{12i}s\psi))$$

Como en el caso anterior, las gráficas asociadas a la posición angular en cada una de las cadenas cinemáticas al recorrer la trayectoria son las siguientes:

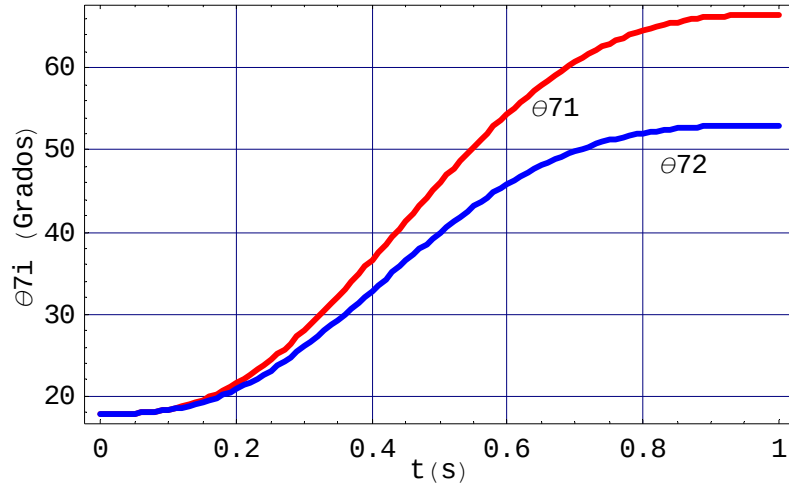


Figura 2.21 Gráficas de posición angular θ_{7i} de las cadenas 1 y 2

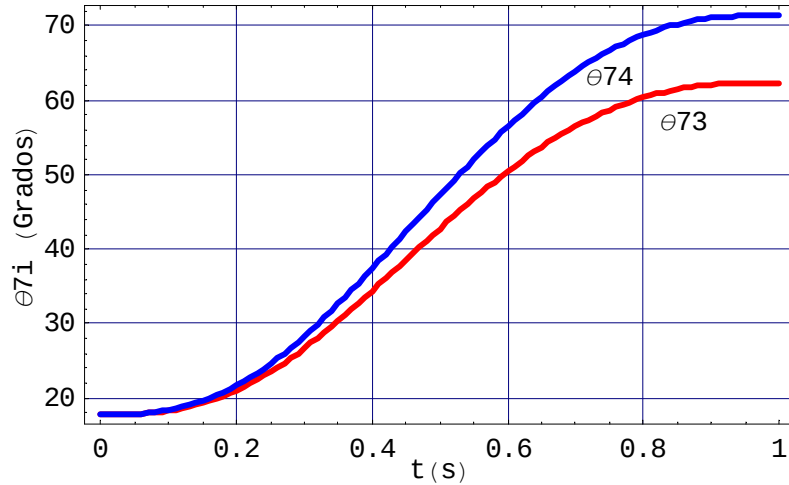


Figura 2.22 Gráficas de posición angular θ_{7i} de las cadenas 3 y 4

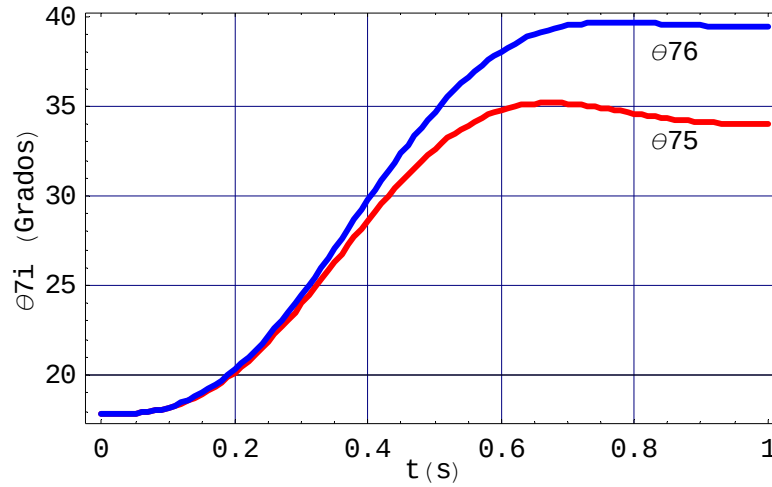


Figura 2.23 Gráficas de posición angular θ_{7i} de las cadenas 5 y 6

2.2.5 Posición Angular θ_{8i}

Para la determinación de la posición del extremo superior del eslabón 3 (Figura 2.6) nos basamos de nueva cuenta en la ecuación (2.26) tomando ahora en consideración los elementos a_{24i} y a_{34i} para calcular la variable deseada, que en este caso es θ_{8i} . Los valores asociados a cada variable son:

$$a_{24i} = d_{9i} s \theta_{8i}$$

$$a_{34i} = -d_{9i} c \theta_{7i} c \theta_{8i}$$

despejando d_{9i} en cada ecuación:

$$d_{9i} = \frac{a_{24i}}{s \theta_{8i}}$$

$$d_{9i} = -\frac{a_{34i}}{c \theta_{7i} c \theta_{8i}}$$

igualando se obtiene:

$$a_{34i} s \theta_{8i} = -a_{24i} c \theta_{7i} c \theta_{8i}$$

por lo que se establece:

$$\theta_{8i} = \arctan\left(-\frac{a_{24i}c\theta_{7i}}{a_{34i}}\right) \quad (2.28)$$

En este caso la variable a_{34i} es conocida y a_{24i} toma el valor:

$$a_{24i} = y_p c(\delta_{1i} + \delta_{3i}) + d_{2i} s\delta_{3i} - x_p s(\delta_{1i} + \delta_{3i}) - d_{14i} c(\delta_{13i} + \varphi) s(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta) - d_{12i} s\psi + c(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta)(d_{14i} c\psi s(\delta_{13i} + \varphi))$$

De esta manera las gráficas que muestran la posición angular θ_{8i} de todas las cadenas al recorrer la trayectoria propuesta se muestran a continuación:

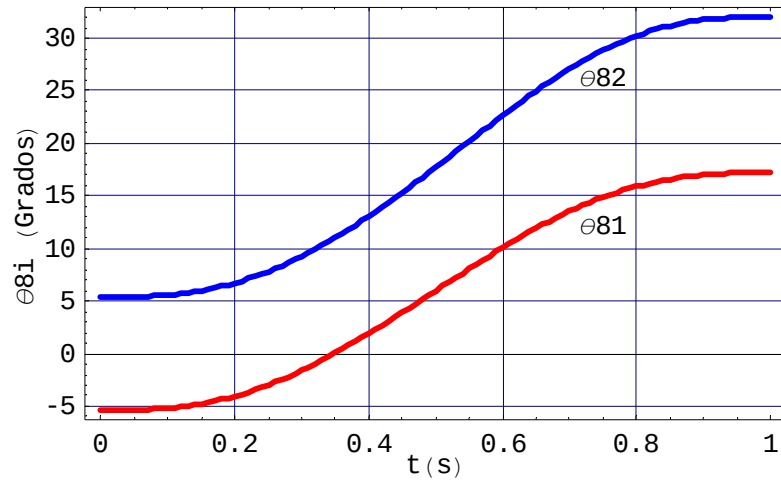


Figura 2.24 Gráficas de posición angular θ_{8i} de las cadenas 1 y 2

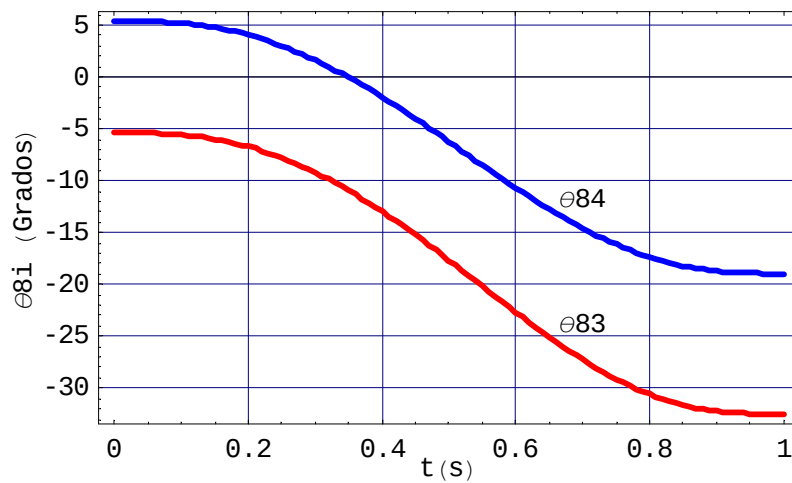
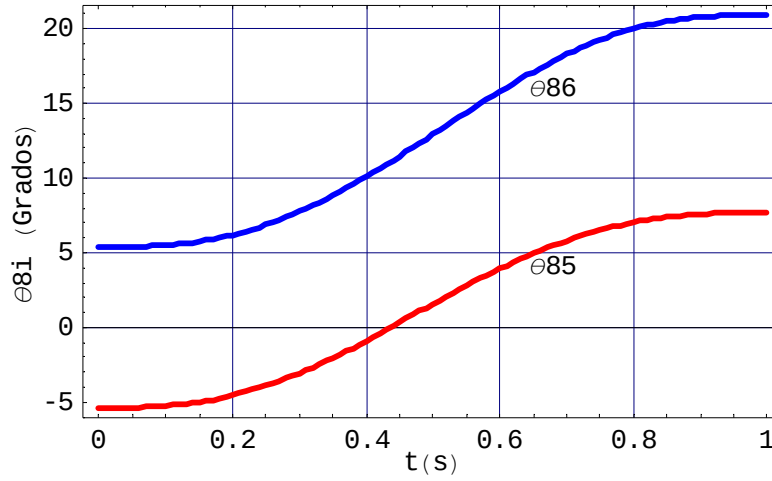


Figura 2.25 Gráficas de posición angular θ_{8i} de las cadenas 3 y 4Figura 2.26 Gráficas de posición angular θ_{8i} de las cadenas 5 y 6

2.2.6 Posición Angular θ_{10i}

La posición angular del extremo inferior del eslabón 3 (fig. 2.6) se determina despejando $\mathbf{T}_{912i}$ de la ecuación (2.3), esto es:

$$\mathbf{T}_{912i} = \mathbf{T}_{69i}^{-1} \mathbf{T}_{26i}^{-1} \mathbf{T}_{02i}^{-1} \mathbf{T}_{0P} \mathbf{T}_{P15i} \quad (2.29)$$

Para este caso la transformación $\mathbf{T}_{912i}$ es:

$$\mathbf{T}_{912i} = \begin{bmatrix} c\theta_{11i} & 0 & s\theta_{11i} & -d_{12i}s\theta_{11i} \\ s\theta_{10i}s\theta_{11i} & c\theta_{10i} & -c\theta_{11i}s\theta_{10i} & d_{12i}c\theta_{11i}s\theta_{10i} \\ -c\theta_{10i}s\theta_{11i} & s\theta_{10i} & c\theta_{11i}c\theta_{10i} & -d_{12i}c\theta_{11i}c\theta_{10i} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y

$$\mathbf{T}_{69i}^{-1} \mathbf{T}_{26i}^{-1} \mathbf{T}_{02i}^{-1} \mathbf{T}_{0P} \mathbf{T}_{P15i} = \begin{bmatrix} b_{11i} & b_{12i} & b_{13i} & b_{14i} \\ b_{21i} & b_{22i} & b_{23i} & b_{24i} \\ b_{31i} & b_{32i} & b_{33i} & b_{34i} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para resolver la posición angular, igualamos los elementos de la columna 4 en las filas 2 y 3 de la matriz anterior con los elementos que le corresponden del lado derecho de la transformación $\mathbf{T}_{912i}$, esto es:

$$d_{12i}c\theta_{11i}s\theta_{10i} = b_{24i}$$

$$-d_{12i}c\theta_{11i}c\theta_{10i} = b_{34i}$$

El despeje de $d_{12i}c\theta_{11i}$ nos conduce a:

$$d_{12i}c\theta_{11i} = \frac{b_{24i}}{s\theta_{10i}}$$

$$d_{12i}c\theta_{11i} = \frac{-b_{34i}}{c\theta_{10i}}$$

igualando:

$$b_{34i}s\theta_{10i} = -b_{24i}c\theta_{10i}$$

por lo que se concluye que

$$\theta_{10i} = \arctan\left(\frac{-b_{24i}}{b_{34i}}\right) \quad (2.30)$$

siendo las variables b_{24i} y b_{34i} las siguientes:

$$\begin{aligned} b_{24i} = & c\theta_{8i}(d_{2i}s\delta_{3i} - s(\delta_{1i} + \delta_{3i})(x_p + d_{14i}c\theta c(\delta_{13i} + \varphi) - d_{14i}c\psi s\theta s(\delta_{13i} + \varphi))) + c(\delta_{1i} + \\ & \delta_{3i})(c\theta_{8i}(y_p + d_{14i}c(\delta_{13i} + \varphi)s\theta + d_{14i}c\theta c\psi s(\delta_{13i} + \varphi)) + s(\theta_{4i} + \theta_{7i})s\theta_{8i}(x_p + d_{14i}c\theta \\ & c(\delta_{13i} + \varphi) - d_{14i}c\psi s\theta s(\delta_{13i} + \varphi))) + s\theta_{8i}(d_{6i}c\theta_{7i} - d_{5i}s\theta_{7i} + s\theta_{7i} + s(\theta_{4i} + \theta_{7i})(s(\delta_{1i} + \\ & \delta_{3i})(y_p + d_{14i}c(\delta_{13i} + \varphi)s\theta + d_{14i}c\theta c\psi s(\delta_{13i} + \varphi)) - d_{2i}c\delta_{3i}) + c(\theta_{4i} + \theta_{7i})(z_p + d_{14i} \\ & s(d_{13i} + \varphi)s\psi)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{34i} = & d_{9i} + d_{6i}c\theta_{7i}c\theta_{8i} + z_p c(\theta_{4i} + \theta_{7i})c\theta_{8i} - d_{5i}c\theta_{8i}s\theta_{7i} + y_p(c\theta_{8i}s(\delta_{1i} + \delta_{3i})s(\theta_{4i} + \theta_{7i}) - \\ & c(\delta_{1i} + \delta_{3i})s\theta_{8i}) - d_{2i}(c\delta_{3i}c\theta_{8i}s(\theta_{4i} + \theta_{7i}) + s\delta_{3i}s\theta_{8i}) + x_p(c(\delta_{1i} + \delta_{3i})c\theta_{8i}s(\theta_{4i} + \theta_{7i}) + \\ & s(\delta_{1i} + \delta_{3i})s\theta_{8i}) + d_{14i}s\delta_{13i}(-(c(\delta_{1i} + \delta_{3i})c\theta_{8i}s(\theta_{4i} + \theta_{7i}) + s(\delta_{1i} + \delta_{3i})s\theta_{8i})(c\varphi c\psi s\theta + \\ & c\theta s\varphi)) + (c\theta_{8i}s(\delta_{1i} + \delta_{3i})s(\theta_{4i} + \theta_{7i}) - c(\delta_{1i} + \delta_{3i})s\theta_{8i})(c\theta c\varphi c\psi - s\theta s\varphi) + c(\theta_{4i} + \theta_{7i}) \\ & c\theta_{8i}c\varphi s\psi) + d_{14i}c\delta_{13i}((c\theta_{8i}s(\delta_{1i} + \delta_{3i})s(\theta_{4i} + \theta_{7i}) - c(\delta_{1i} + \delta_{3i})s\theta_{8i})(c\varphi s\theta + c\theta c\psi s\varphi) + \\ & (c(\delta_{1i} + \delta_{3i})c\theta_{8i}s(\theta_{4i} + \theta_{7i}) + s(\delta_{1i} + \delta_{3i})s\theta_{8i})(c\theta c\varphi - c\psi s\theta s\varphi) + c(\theta_{4i} + \theta_{7i})c\theta_{8i}s\varphi s\psi) \end{aligned}$$

Los gráficos que muestran el comportamiento del ángulo θ_{10i} en el eslabón 3 para la trayectoria propuesta son los siguientes:

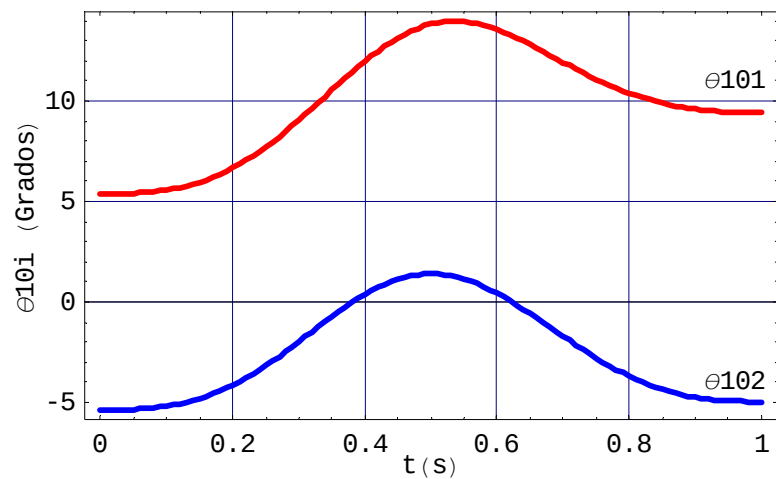


Figura 2.27 Gráficas de posición angular θ_{10i} de las cadenas 1 y 2

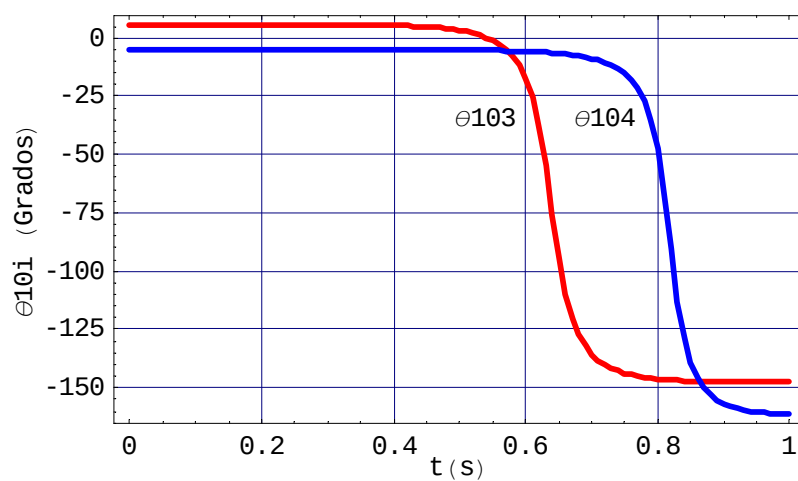


Figura 2.28 Gráficas de posición angular θ_{10i} de las cadenas 3 y 4

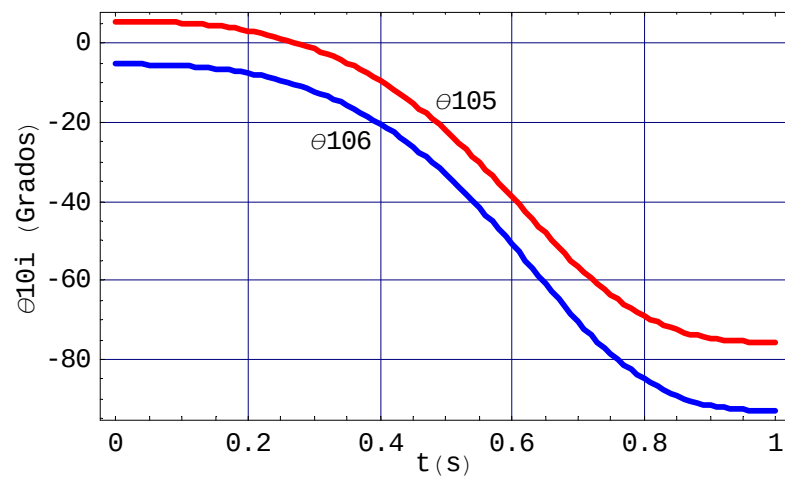


Figura 2.29 Gráficas de posición angular θ_{10i} de las cadenas 5 y 6

2.2.7 Posición Angular θ_{11i}

Tanto el extremo superior como el inferior del eslabón 3 (fig. 2.7) presenta un comportamiento cinemático que define la posición de la plataforma móvil, para el extremo superior la posición queda definida por el ángulo de giro θ_{11i} mismo que puede ser evaluado considerando de nueva cuenta la expresión (2.29) y seleccionando los elementos de la columna 4 y los renglones 1 y 3 de tal forma que se tiene:

$$-d_{12i}s\theta_{11i} = b_{14i}$$

$$-d_{12i}c\theta_{11i}c\theta_{10i} = b_{34i}$$

despejando $-d_{12i}$:

$$-d_{12i} = \frac{b_{14i}}{s\theta_{11i}}$$

$$-d_{12i} = \frac{b_{34i}}{c\theta_{11i}c\theta_{10i}}$$

Igualando ambas expresiones:

$$b_{34i}s\theta_{11i} = b_{14i}c\theta_{10i}c\theta_{11i}$$

de donde tenemos que:

$$\theta_{11i} = \arctan\left(\frac{b_{14i}c\theta_{10i}}{b_{34i}}\right) \quad (2.31)$$

La variable b_{34i} se conoce del cálculo anterior por lo que para este caso se tiene que:

$$b_{14i} = \frac{1}{4}(z_p s(\theta_{4i} + \theta_{7i}) - 4d_{5i}c\theta_{7i} - 4d_{6i}s\theta_{7i} - c(\theta_{4i} + \theta_{7i})(x_p c(\delta_{1i} + \delta_{3i}) - d_{2i}c\delta_{3i} + d_{14i}c(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta)c(\delta_{13i} + \varphi) + y_p s(\delta_{1i} + \delta_{3i}) + d_{14i}c\psi s(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta)s(\delta_{13i} + \varphi) + d_{14i}s\psi s(\theta_{4i} + \theta_{7i})s(\delta_{13i} + \varphi))$$

Las gráficas del comportamiento cinemático para el ángulo θ_{11i} de acuerdo a la trayectoria propuesta en el apartado 2.2.2 se muestran a continuación.

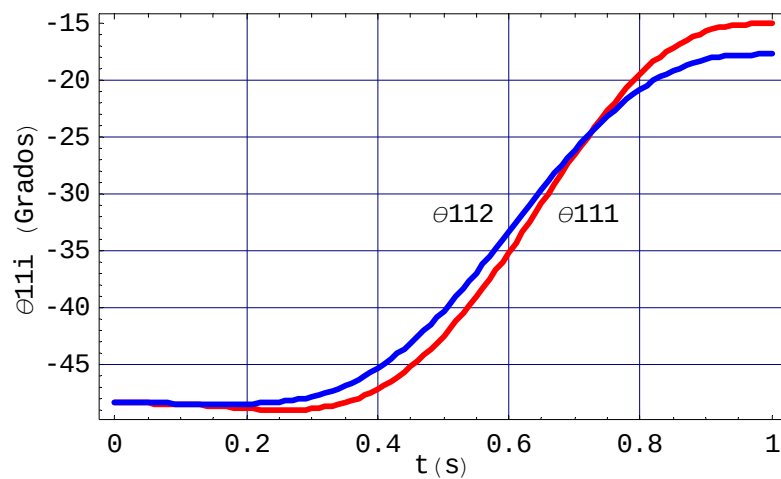


Figura 2.30 Gráficas de posición angular θ_{11i} de las cadenas 1 y 2

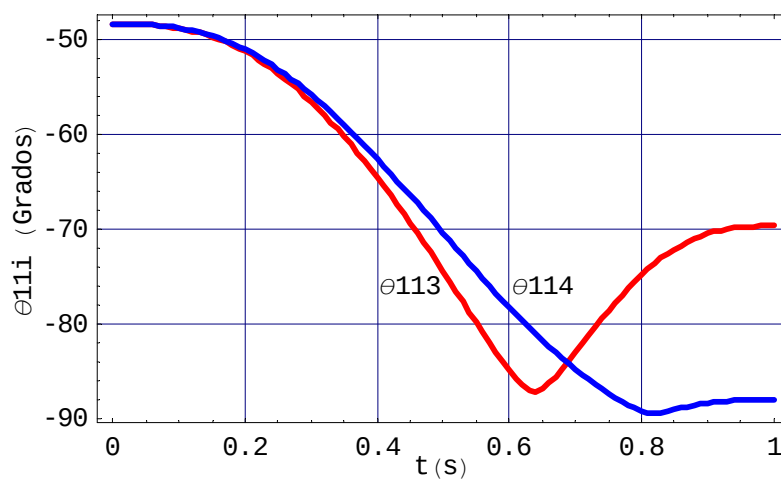


Figura 2.31 Gráficas de posición angular θ_{11i} para las cadenas 3 y 4

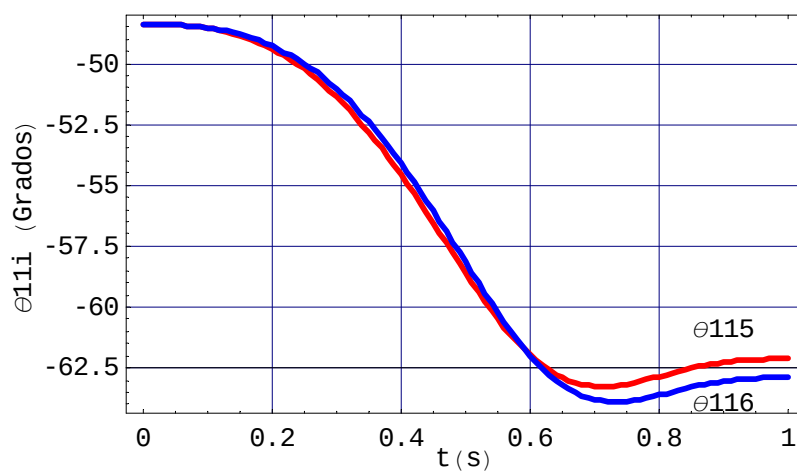


Figura 2.32 Gráficas de posición angular θ_{11i} para las cadenas 5 y 6

2.2.7 Posición Angular θ_{15i}

El último ángulo a calcular θ_{15i} , corresponde a la junta de unión entre el eslabón 3 y el plato móvil, (fig. 2.8), en este caso, la ecuación de lazo matricial, a partir de la ec. (2.3) es:

$$\mathbf{T}_{0P}^{-1}\mathbf{T}_{02i}\mathbf{T}_{26i}\mathbf{T}_{69i}\mathbf{T}_{912i} = \mathbf{T}_{P15i}$$

La transformación $\mathbf{T}_{0P}^{-1}\mathbf{T}_{02i}\mathbf{T}_{26i}\mathbf{T}_{69i}\mathbf{T}_{912i}$ es:

$$\mathbf{T}_{0P}^{-1}\mathbf{T}_{02i}\mathbf{T}_{26i}\mathbf{T}_{69i}\mathbf{T}_{912i} = \begin{bmatrix} c_{11i} & c_{12i} & c_{13i} & c_{14i} \\ c_{21i} & c_{22i} & c_{23i} & c_{24i} \\ c_{31i} & c_{32i} & c_{33i} & c_{34i} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

mientras que la transformación $\mathbf{T}_{P15i}$ es:

$$\mathbf{T}_{P15i} = \begin{bmatrix} c\delta_{13i}c\theta_{15i} - s\delta_{13i}s\theta_{15i} & -c\theta_{15i}s\delta_{13i} - c\delta_{13i}s\theta_{15i} & 0 & d_{14i}c\delta_{13i} \\ s\delta_{13i}c\theta_{15i} + c\delta_{13i}s\theta_{15i} & c\delta_{13i}c\theta_{15i} - s\delta_{13i}s\theta_{15i} & 0 & d_{14i}c\delta_{13i} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

Seleccionamos los valores de la columna 1, renglón 1 y 2 para determinar la variable θ_{15i} , al igualar con el lado izquierdo de la ecuación se tiene que:

$$\begin{aligned} c_{11i} &= c\delta_{13i}c\theta_{15i} - s\delta_{13i}s\theta_{15i} \\ c_{21i} &= s\delta_{13i}c\theta_{15i} + c\delta_{13i}s\theta_{15i} \end{aligned}$$

resolviendo para $s\theta_{15i}$ y $c\theta_{15i}$ se obtiene:

$$s\theta_{15i} = c_{21i}c\delta_{13i} - c_{11i}s\delta_{13i}$$

y

$$c\theta_{15i} = c_{11i}c\delta_{13i} + c_{21i}s\delta_{13i}$$

por lo que se concluye que:

$$\theta_{15i} = \arctan\left(\frac{c_{21i}c\delta_{13i} - c_{11i}s\delta_{13i}}{c_{11i}c\delta_{13i} + c_{21i}s\delta_{13i}}\right) \quad (2.33)$$

Para este caso, las variables c_{11i} y c_{21i} quedan definidas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} c_{11i} &= -(s(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta)(\alpha\psi s\theta_{11i}s(\theta_{10i} + \theta_{8i}) + \alpha\psi(s\theta_{11i}s\phi c(\theta_{10i} + \theta_{8i})s(\theta_{4i} + \theta_{7i}) - c\theta_{11i} \\ &\quad c(\theta_{4i} + \theta_{7i})) + c\theta_{11i}\alpha\phi c(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta)c(\theta_{4i} + \theta_{7i}) - s\theta_{11i}\alpha\phi c(\theta_{10i} + \theta_{8i})s(\theta_{4i} + \theta_{7i}) + \\ &\quad \alpha\psi s\phi s(\theta_{10i} + \theta_{8i})) - (c(\theta_{4i} + \theta_{7i})c(\theta_{10i} + \theta_{8i})s\theta_{11i} + c\theta_{11i}s\phi s\psi s(\theta_{4i} + \theta_{7i})) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{21i} = & \theta_{11i} \theta_{4i} \theta_{7i} \alpha \psi s \delta_{1i} s \delta_{3i} s \theta + \theta_{8i} \alpha \psi s \theta_{10i} s \theta_{11i} c(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta) - \theta_{10i} \theta_{7i} \theta_{8i} \alpha \psi \\
& \psi s \delta_{1i} s \delta_{3i} s \theta s \theta_{11i} s \theta_{4i} - \theta_{10i} \theta_{4i} \theta_{8i} \alpha \psi s \delta_{1i} s \delta_{3i} s \theta s \theta_{11i} s \theta_{7i} - \theta_{11i} \alpha \psi s \delta_{1i} s \delta_{3i} s \theta \\
& s \theta_{4i} s \theta_{7i} + \frac{1}{2}(\theta_{10i} c(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta - \varphi) s \theta_{11i} s \theta_{8i}) - \frac{1}{2}(\theta_{10i} c(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta + \varphi) s \theta_{11i} s \theta_{8i}) \\
& + c(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta) \theta_{10i} \alpha \psi s \theta_{11i} s \theta_{8i} + \theta_{7i} \alpha \psi s \delta_{1i} s \delta_{3i} s \theta s \theta_{10i} s \theta_{11i} s \theta_{4i} s \theta_{8i} + \theta_{4i} \alpha \psi \\
& \psi s \delta_{1i} s \delta_{3i} s \theta s \theta_{10i} s \theta_{11i} s \theta_{7i} s \theta_{8i} + \theta \theta_{11i} \theta_{4i} \theta_{7i} s \delta_{1i} s \delta_{3i} s \varphi + \theta_{8i} s(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta) s \theta_{10i} \\
& s \theta_{11i} s \varphi - \theta \theta_{10i} \theta_{7i} \theta_{8i} s \delta_{1i} s \delta_{3i} s \theta_{11i} s \theta_{4i} s \varphi - \theta \theta_{10i} \theta_{4i} \theta_{8i} s \delta_{1i} s \delta_{3i} s \theta_{11i} s \theta_{7i} s \varphi \\
& - \theta \theta_{11i} s \delta_{1i} s \delta_{3i} s \theta_{4i} s \theta_{7i} s \varphi + \theta \theta_{7i} s \delta_{1i} s \delta_{3i} s \theta_{10i} s \theta_{11i} s \theta_{4i} s \theta_{8i} s \varphi + \theta \theta_{4i} s \delta_{1i} s \delta_{3i} \\
& s \theta_{10i} s \theta_{11i} s \theta_{7i} s \theta_{8i} s \varphi + \theta \delta_{3i} (\theta_{11i} c(\theta_{4i} + \theta_{7i}) - s \theta_{11i} c(\theta_{10i} + \theta_{8i}) s(\theta_{4i} + \theta_{7i})) (\alpha \psi \psi) \\
& s(\delta_{1i} - \theta) - s \varphi c(\delta_{1i} - \theta)) + \theta \delta_{1i} s \delta_{3i} (\theta_{11i} c(\theta_{4i} + \theta_{7i}) - c(\theta_{10i} + \theta_{8i}) s(\theta_{4i} + \theta_{7i}) s \theta_{11i}) \\
& (\alpha \psi \psi - s \theta s \varphi) - \alpha \psi \psi (s \theta_{11i} c(\theta_{4i} + \theta_{7i}) c(\theta_{10i} + \theta_{8i}) + \theta_{11i} s \theta_{4i} + \theta_{7i})
\end{aligned}$$

Para este último caso las gráficas correspondientes son:

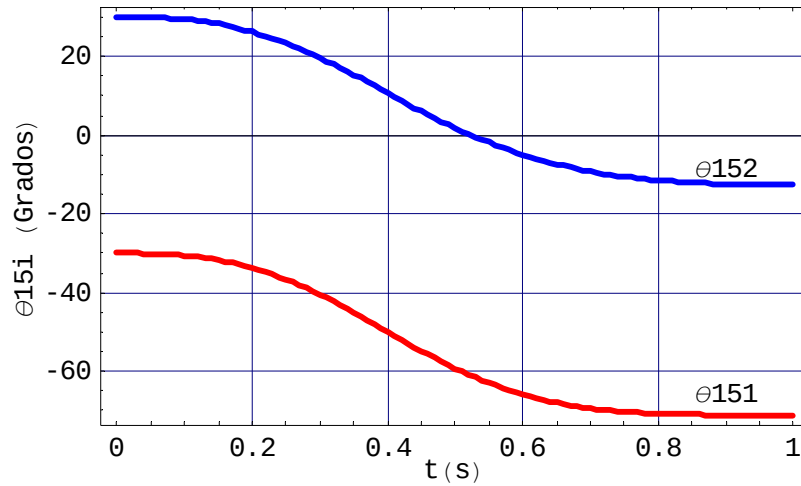


Figura 2.33 Gráficas de posición angular θ_{15i} de las cadenas 1 y 2

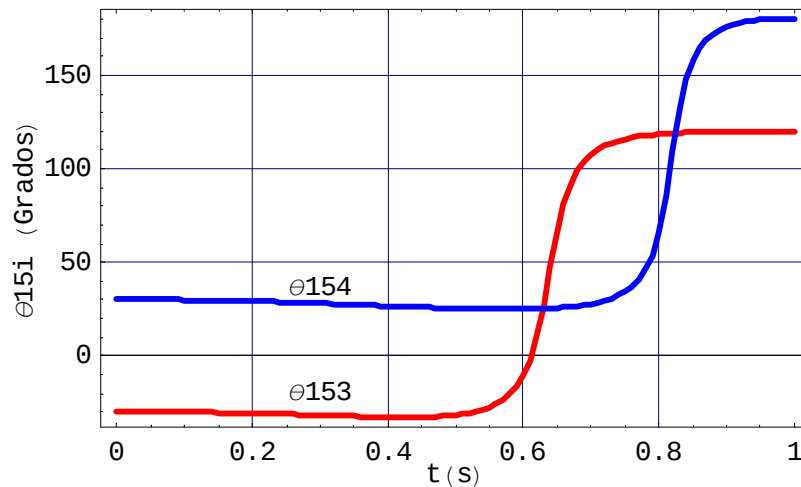


Figura 2.34 Gráficas de posición angular θ_{15i} de las cadenas 3 y 4

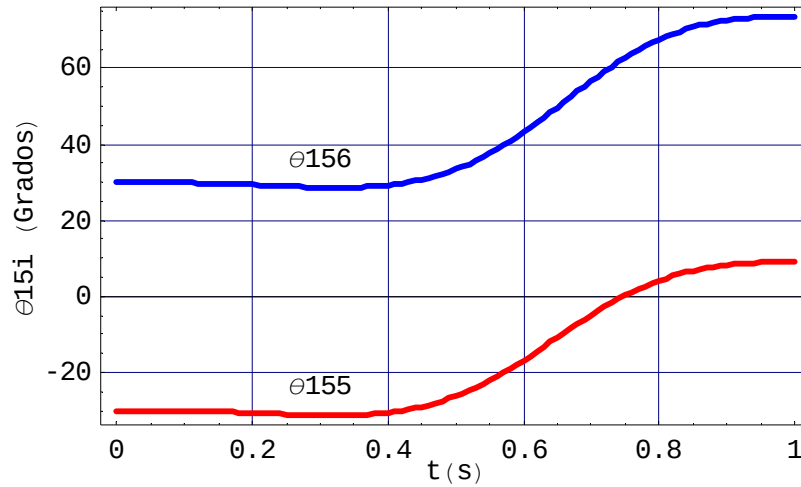


Figura 2.35 Gráficas de posición angular θ_{15i} de las cadenas 5 y 6

2.3 Análisis de la velocidad

El análisis de velocidad parte del supuesto de que se conoce por completo la posición y la orientación de cada componente del sistema porque son el resultado del análisis de posición, es importante porque en el caso de continuar con el estudio hasta la dinámica nos permitirá, por ejemplo, calcular la potencia requerida en el sistema para producir y controlar el movimiento propuesto. El análisis de velocidad es el siguiente paso en el estudio para pasar, de un análisis estático a uno dinámico, y es posible obtenerla al derivar la ecuación de posición con respecto al tiempo, en nuestro caso, la velocidad angular para cada una de las juntas se obtiene en forma algebraica considerando la solución de posición del apartado anterior.

Análisis Cinemático Inverso

Dada la velocidad lineal del centroide de la plataforma móvil $\dot{x}_p, \dot{y}_p, \dot{z}_p$, y su velocidad angular $\dot{\theta}, \dot{\phi}, \dot{\psi}$, hallar la velocidad angular de cada una de las juntas, a saber $\dot{\theta}_{4i}, \dot{\theta}_{7i}, \dot{\theta}_{8i}, \dot{\theta}_{10i}, \dot{\theta}_{11i}, \dot{\theta}_{15i}$, en cada una de las seis cadenas.

2.3.1 Velocidad Angular $\dot{\theta}_{4i}$

Recordemos que nuestra ecuación de posición es simplemente:

$$A_i c\theta_{4i} + B_i s\theta_{4i} + C_i = 0$$

Derivando respecto al tiempo la ecuación anterior y simplificando, se obtiene:

$$\dot{\theta}_{4i} = \frac{1}{C_{0i}} (C_{19i} \dot{x}_p + C_{20i} \dot{y}_p + C_{21i} \dot{z}_p + C_{22i} \dot{\theta} + C_{23i} \dot{\phi} + C_{24i} \dot{\psi}) \quad (2.34)$$

Donde:

$$\begin{aligned} C_{0i} &= A_i s\theta_{4i} - B_i c\theta_{4i} \\ C_{1i} &= -2d_{5i}c(\delta_{1i} + \delta_{3i}) \\ C_{2i} &= -2d_{5i}s(\delta_{1i} + \delta_{3i}) \\ C_{3i} &= 2d_{6i} \\ C_{4i} &= -2d_{5i}(d_{14i}c(\delta_{13i} + \phi)s(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta) + c(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta)(d_{12i}s\psi - d_{14i}c\psi s(\delta_{13i} + \phi))) \\ C_{5i} &= 2d_{14i}(d_{5i}c(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta)s(\delta_{13i} + \phi) + c(\delta_{13i} + \phi)(d_{6i}s\psi - d_{5i}c\psi s(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta))) \\ C_{6i} &= 2(c\psi d_{12i}d_{5i}s(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta) + d_{14i}d_{6i}s(\delta_{13i} + \phi)) + (d_{14i}d_{5i}s(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta)s(\delta_{13i} + \phi) \\ &\quad - d_{12i}d_{6i})s\psi) \\ C_{7i} &= 2d_{6i}c(\delta_{1i} + \delta_{3i}) \\ C_{8i} &= 2d_{6i}s(\delta_{1i} + \delta_{3i}) \\ C_{9i} &= 2d_{5i} \\ C_{10i} &= 2d_{6i}(d_{14i}c(\delta_{13i} + \phi)s(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta) + c(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta)(d_{12i}s\psi - d_{14i}c\psi s(\delta_{13i} + \phi))) \\ C_{11i} &= 2d_{14i}(c(\delta_{13i} + \phi)(d_{6i}c\psi s(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta) + d_{5i}s\psi) - d_{6i}c(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta)s(\delta_{13i} + \phi)) \\ C_{12i} &= -2(c\psi(d_{12i}d_{6i}s(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta) - d_{14i}d_{5i}s(\delta_{13i} + \phi)) + (d_{12i}d_{5i} + d_{14i}d_{6i})s(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta)s(\delta_{13i} + \phi))s\psi) \\ C_{13i} &= 2(x_p - d_{2i}c\delta_{1i} + d_{14i}c\theta c(\delta_{13i} + \phi) - d_{14i}c\psi s\theta s(\delta_{13i} + \phi) + d_{12i}s\theta s\psi) \\ C_{14i} &= 2(y_p - d_{2i}s\delta_{1i} + d_{14i}c(\delta_{13i} + \phi)s\theta + d_{14i}c\theta c\psi s(\delta_{13i} + \phi) - d_{12i}c\theta s\psi) \\ C_{15i} &= 2(z_p + d_{12i}c\psi + d_{14i}s(\delta_{13i} + \phi)\psi) \\ C_{16i} &= 2(d_{2i}c(\delta_{1i} - \theta) - y_p s\theta)(d_{14i}c\psi s(\delta_{13i} + \phi) - d_{12i}s\psi) + 2c\theta(d_{14i}y_p c(\delta_{13i} + \phi) - d_{14i} \\ &\quad x_p c\psi s(\delta_{13i} + \phi) + d_{12i}x_p s\psi) - 2d_{14i}c(\delta_{13i} + \phi)(d_{2i}s(\delta_{1i} - \theta) + x_p s\theta) \\ C_{17i} &= d_{14i}(y_p c(\delta_{13i} + \theta + \phi) - y_p c(\delta_{13i} - \theta + \phi) - 2c(\delta_{13i} + \phi)c\psi(d_{2i}s(\delta_{1i} - \theta) + x_p s\theta - \\ &\quad y_p c\theta) - x_p s(\delta_{13i} - \theta + \phi) + d_{2i}s(\delta_{13i} + \delta_{1i} - \theta + \phi) - x_p s(\delta_{13i} + \theta + \phi) + d_{2i}s(\delta_{13i} - \\ &\quad \delta_{1i} + \theta + \phi) + 2z_p c(\delta_{13i} + \phi)s\psi) \\ C_{18i} &= 2c\psi(d_{12i}d_{2i}s(\delta_{1i} - \theta) + d_{12i}x_p s\theta + d_{14i}z_p s(\delta_{13i} + \phi) - d_{12i}y_p c\theta) - 2d_{12i}z_p s\psi + \\ &\quad 2d_{14i}(d_{2i}s(\delta_{1i} - \theta) + x_p s\theta - y_p c\theta)s(\delta_{13i} + \phi)s\psi \\ C_{19i} &= C_{1i}c\theta_{4i} + C_{7i}s\theta_{4i} + C_{13i} \\ C_{20i} &= C_{2i}c\theta_{4i} + C_{8i}s\theta_{4i} + C_{14i} \\ C_{21i} &= C_{3i}c\theta_{4i} + C_{9i}s\theta_{4i} + C_{15i} \\ C_{22i} &= C_{4i}c\theta_{4i} + C_{10i}s\theta_{4i} + C_{16i} \\ C_{23i} &= C_{5i}c\theta_{4i} + C_{11i}s\theta_{4i} + C_{17i} \\ C_{24i} &= C_{6i}c\theta_{4i} + C_{12i}s\theta_{4i} + C_{18i} \end{aligned}$$

Las gráficas que nos muestran la velocidad angular $\dot{\theta}_{4i}$ de las diferentes cadenas cinemáticas durante el recorrido de la trayectoria propuesta son las siguientes:

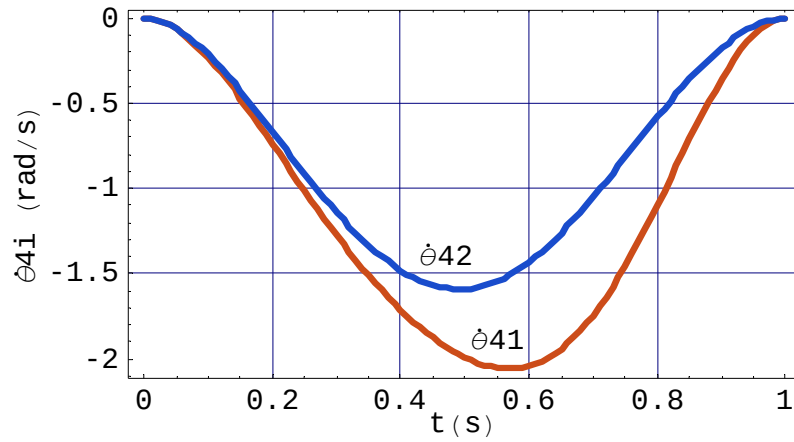


Figura 2.36 Gráfica de la velocidad angular $\dot{\theta}_{4i}$ en las cadenas 1 y 2

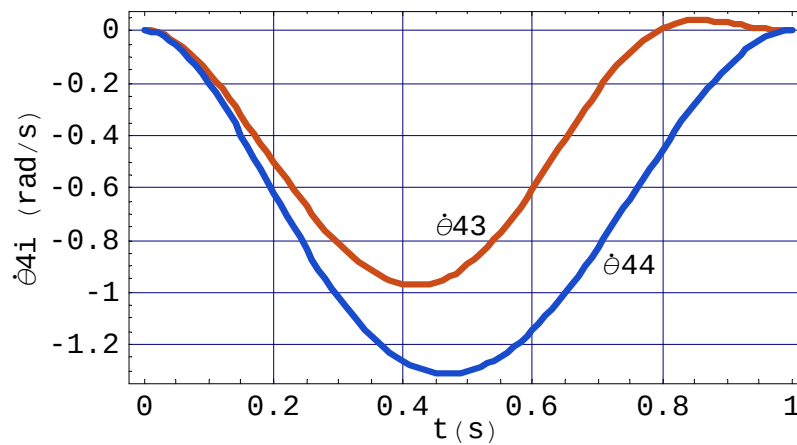


Figura 2.37 Gráfica de la velocidad angular $\dot{\theta}_{4i}$ en las cadenas 3 y 4

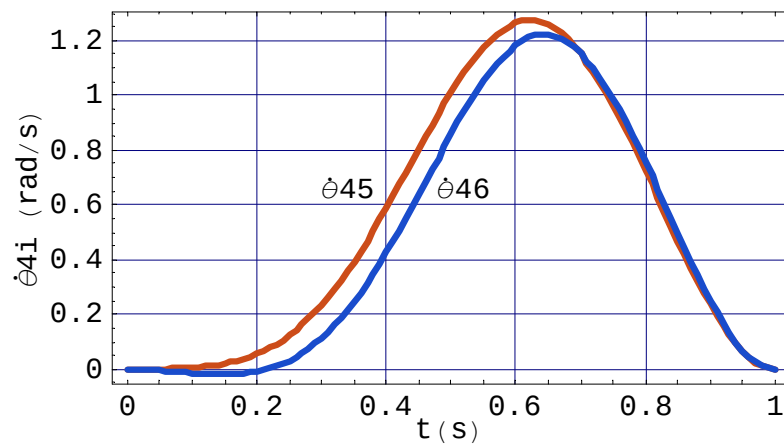


Figura 2.38 Gráfica de la velocidad angular $\dot{\theta}_{4i}$ en las cadenas 5 y 6

2.3.2 Velocidad Angular $\dot{\theta}_{7i}$

La solución a la ecuación de lazo matricial (ec. 2.26) nos lleva a obtener para la posición angular θ_{7i} la expresión siguiente:

$$a_{34i}s\theta_{7i} = a_{14i}c\theta_{7i}$$

De esta forma, al sustituir las constantes a_{14i} y a_{34i} y derivar con respecto al tiempo se obtiene, luego de simplificar, la expresión algebraica siguiente:

$$\dot{\theta}_{7i} = \frac{1}{D_{0i}} (D_{22i}\dot{x}_p + D_{23i}\dot{y}_p + D_{24i}\dot{z}_p + D_{25i}\dot{\theta} + D_{26i}\dot{\phi} + D_{27i}\dot{\psi}) \quad (2.35)$$

Donde:

$$D_{0i} = a_{34i}c\theta_{7i} + a_{14i}s\theta_{7i}$$

$$D_{1i} = c(\delta_{1i} + \delta_{3i})c\theta_{4i}$$

$$D_{2i} = c\theta_{4i}s(\delta_{1i} + \delta_{3i})$$

$$D_{3i} = s\theta_{4i}$$

$$D_{4i} = c\theta_{4i}(d_{14i}(\delta_{13i} + \phi)s(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta) + (c\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta)(d_{12i}s\psi - d_{14i}c\psi s(\delta_{13i} + \phi)))$$

$$D_{5i} = d_{14i}c(\delta_{13i} + \phi)(c\psi c\theta_{4i}s(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta) - s\psi s\theta_{4i}) - d_{14i}c(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta)c\theta_{4i}s(\delta_{13i} + \phi)$$

$$D_{6i} = (d_{12i}s\psi - d_{14i}c\psi s(\delta_{13i} + \phi))s\theta_{4i} - c\theta_{4i}s(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta)(d_{12i}c\psi + d_{14i}s(\delta_{13i} + \phi)s\psi)$$

$$D_{7i} = (d_{2i}c\delta_{3i} - x_p c(\delta_{1i} + \delta_{3i}) - d_{14i}c(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta)c(\delta_{13i} + \phi) - y_p s(\delta_{1i} + \delta_{3i}) + s(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta)(d_{12i}s\psi - d_{14i}c\psi s(\delta_{13i} + \phi)))s\theta_{4i} - c\theta_{4i}(z_p + d_{12i}c\psi + d_{14i}s(\delta_{13i} + \phi)s\psi)$$

$$D_{8i} = c(\delta_{1i} + \delta_{3i})s\theta_{4i}$$

$$D_{9i} = s(\delta_{1i} + \delta_{3i})s\theta_{4i}$$

$$D_{10i} = c\theta_{4i}$$

$$D_{11i} = (d_{14i}c(\delta_{13i} + \phi)s(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta) + c(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta)(d_{12i}s\psi - d_{14i}c\psi s(\delta_{13i} + \phi)))s\theta_{4i}$$

$$D_{12i} = d_{14i}(c(\delta_{13i} + \phi)(c\theta_{4i}s\psi + c\psi s(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta)s\theta_{4i}) - c(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta)s(\delta_{13i} + \phi)s\theta_{4i})$$

$$D_{13i} = c\theta_{4i}(d_{14i}c\psi s(\delta_{13i} + \phi) - d_{12i}s\psi) - s(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta)(d_{12i}c\psi + d_{14i}s(\delta_{13i} + \phi)s\psi)s\theta_{4i}$$

$$D_{14i} = c\theta_{4i}(x_p c(\delta_{1i} + \delta_{3i}) - d_{2i}c\delta_{3i} + d_{14i}c(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta)c(\delta_{13i} + \phi) + y_p s(\delta_{1i} + \delta_{3i}) + s(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta)(d_{14i}c\psi s(\delta_{13i} + \phi) - d_{12i}s\psi)) - (z_p + d_{12i}c\psi + d_{14i}s(\delta_{13i} + \phi)s\psi)s\theta_{4i}$$

$$D_{15i} = D_{1i}c\theta_{7i} - D_{8i}s\theta_{7i}$$

$$D_{16i} = D_{2i}c\theta_{7i} - D_{9i}s\theta_{7i}$$

$$D_{17i} = -D_{3i}c\theta_{7i} - D_{10i}s\theta_{7i}$$

$$D_{18i} = D_{4i}c\theta_{7i} - D_{11i}s\theta_{7i}$$

$$D_{19i} = D_{5i}c\theta_{7i} - D_{12i}s\theta_{7i}$$

$$D_{20i} = D_{6i}c\theta_{7i} - D_{13i}s\theta_{7i}$$

2. Análisis Cinemático

$$D_{21i} = D_{7i}c\theta_{7i} - D_{14i}s\theta_{7i}$$

$$D_{22i} = D_{15i} + (C_{19i}D_{21i})/C_{0i}$$

$$D_{23i} = D_{16i} + (C_{20i}D_{21i})/C_{0i}$$

$$D_{24i} = D_{17i} + (C_{21i}D_{21i})/C_{0i}$$

$$D_{25i} = D_{18i} + (C_{22i}D_{21i})/C_{0i}$$

$$D_{26i} = D_{19i} + (C_{23i}D_{21i})/C_{0i}$$

$$D_{27i} = D_{20i} + (C_{24i}D_{21i})/C_{0i}$$

La velocidad angular $\dot{\theta}_{7i}$, de las seis cadenas cinemáticas para la trayectoria propuesta es la siguiente:

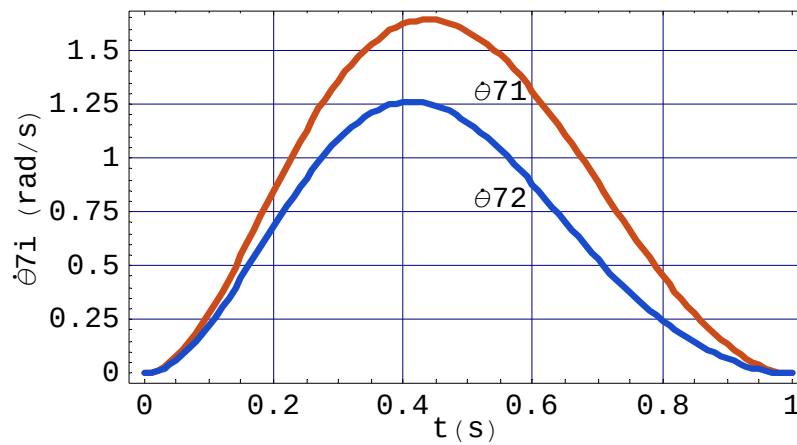


Figura 2.39 Gráfica de la velocidad angular $\dot{\theta}_{7i}$ en las cadenas 1 y 2

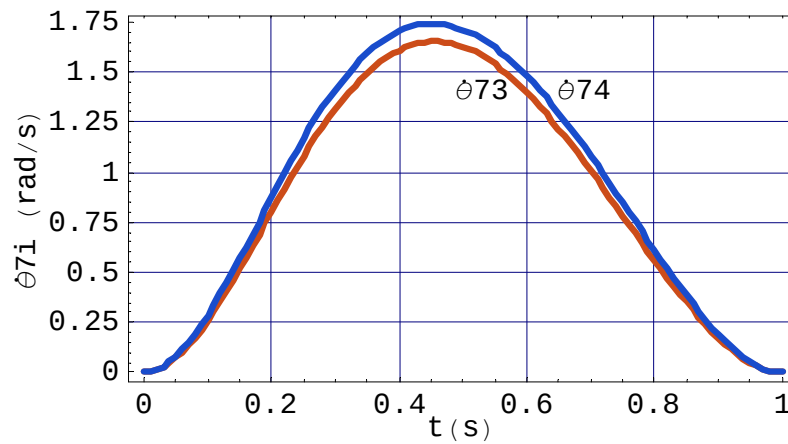


Figura 2.40 Gráfica de la velocidad angular $\dot{\theta}_{7i}$ en las cadenas 3 y 4

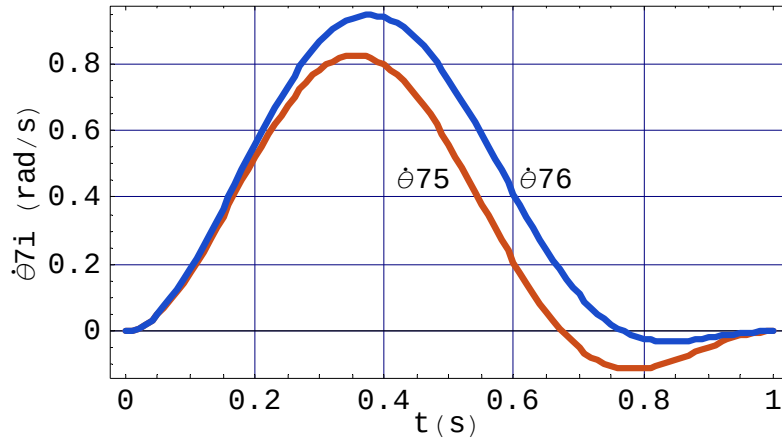


Figura 2.41 Gráfica de la velocidad angular $\dot{\theta}_{7i}$ en las cadenas 5 y 6

2.3.3 Velocidad Angular $\dot{\theta}_{8i}$

La ec. (2.26) nos conduce también a la solución para la velocidad angular $\dot{\theta}_{8i}$, la elección de los componentes a_{24i} y a_{34i} del arreglo matricial nos permite escribir:

$$a_{34i}s\theta_{8i} = -a_{24i}c\theta_{8i}$$

y al considerar la derivada respecto al tiempo de esta expresión tenemos:

$$\dot{\theta}_{8i} = \frac{1}{E_{0i}} (E_{14i}\dot{x}_p + E_{15i}\dot{y}_p + E_{16i}\dot{z}_p + E_{17i}\dot{\theta} + E_{18i}\dot{\phi} + E_{19i}\dot{\psi}) \quad (2.36)$$

En este caso cada uno de los coeficientes toma los valores siguientes:

$$E_{0i} = a_{34i}c\theta_{8i} + a_{24i}\theta_{7i}s(\theta_{7i}c\theta_{8i})s(\theta_{8i})$$

$$E_{1i} = -s(\delta_{1i} + \delta_{3i})$$

$$E_{2i} = c(\delta_{1i} + \delta_{3i})$$

$$E_{3i} = d_{14i}c(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta)c(\delta_{13i} + \varphi) + s(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta)(d_{14i}c\psi s(\delta_{13i} + \varphi) - d_{12i}s\psi)$$

$$E_{4i} = d_{14i}(c(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta)c(\delta_{13i} + \varphi)c\psi + s(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta)s(\delta_{13i} + \varphi))$$

$$E_{5i} = -c(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta)(d_{12i}c\psi + d_{14i}s\psi s(\delta_{13i} + \varphi))$$

$$E_{6i} = -E_{1i}c(\theta_{7i}c\theta_{8i}) - D_{8i}s\theta_{8i}$$

$$E_{7i} = -E_{2i}c(\theta_{7i}c\theta_{8i}) - D_{9i}s\theta_{8i}$$

$$E_{8i} = D_{10i}s\theta_{8i}$$

$$E_{9i} = -E_{3i}c(\theta_{7i}c\theta_{8i}) - D_{11i}s\theta_{8i}$$

2. Análisis Cinemático

$$\begin{aligned}
 E_{10i} &= -E_{4i}c(\theta_{7i}c\theta_{8i}) - D_{12i}s\theta_{8i} \\
 E_{11i} &= -E_{5i}c(\theta_{7i}c\theta_{8i}) - D_{13i}s\theta_{8i} \\
 E_{12i} &= D_{14i}s\theta_{8i} \\
 E_{13i} &= a_{24i}c\theta_{8i}s(\theta_{7i}c\theta_{8i}) \\
 E_{14i} &= E_{6i} - (C_{19i}E_{12i}/C_{0i}) + (D_{22i}E_{13i}/D_{0i}) \\
 E_{15i} &= E_{7i} - (C_{20i}E_{12i}/C_{0i}) + (D_{23i}E_{13i}/D_{0i}) \\
 E_{16i} &= -E_{8i} - (C_{21i}E_{12i}/C_{0i}) + (D_{24i}E_{13i}/D_{0i}) \\
 E_{17i} &= E_{9i} - (C_{22i}E_{12i}/C_{0i}) + (D_{25i}E_{13i}/D_{0i}) \\
 E_{18i} &= E_{10i} - (C_{23i}E_{12i}/C_{0i}) + (D_{26i}E_{13i}/D_{0i}) \\
 E_{19i} &= E_{11i} - (C_{24i}E_{12i}/C_{0i}) + (D_{27i}E_{13i}/D_{0i})
 \end{aligned}$$

En las gráficas siguientes se muestra el comportamiento en velocidad angular de la posición θ_{8i} para las diferentes cadenas cinemáticas de la plataforma al recorrer la trayectoria propuesta.

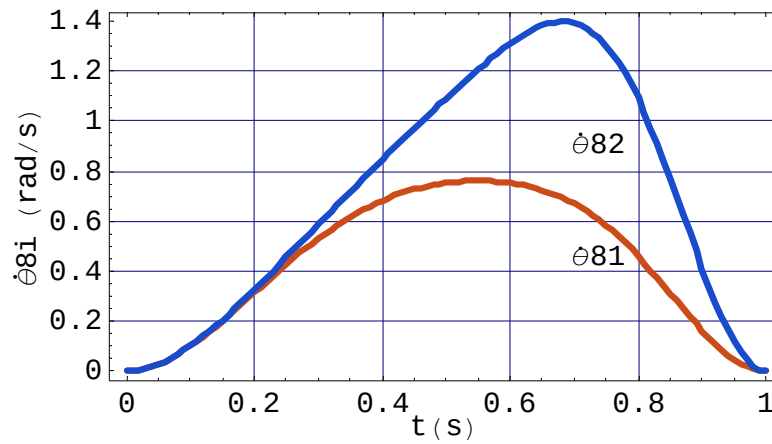


Figura 2.42 Gráfica de la velocidad angular $\dot{\theta}_{8i}$ en las cadenas 1 y 2

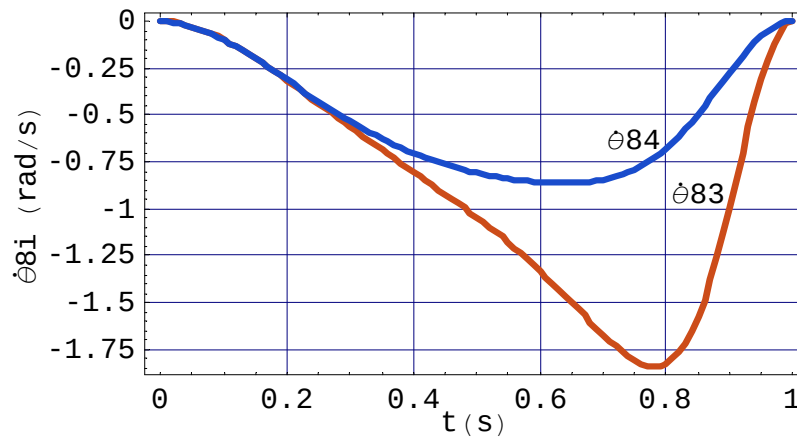


Figura 2.43 Gráfica de la velocidad angular $\dot{\theta}_{8i}$ en las cadenas 3 y 4

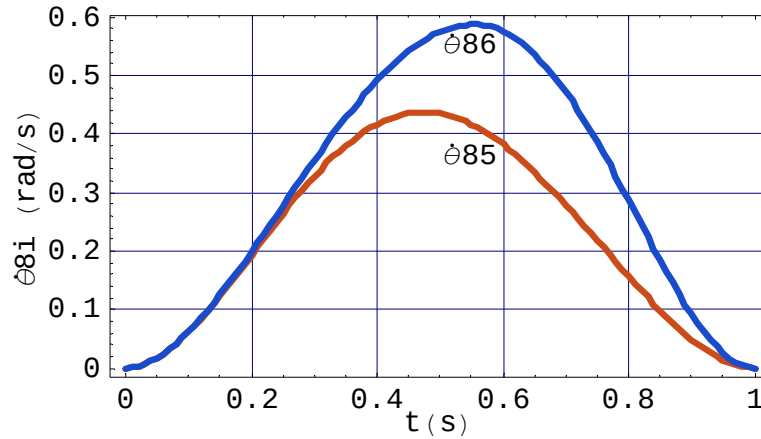


Figura 2.44 Gráfica de la velocidad angular $\dot{\theta}_{8i}$ en las cadenas 5 y 6

2.3.4 Velocidad Angular $\dot{\theta}_{10i}$

La solución algebraica de la ecuación de posición (2.29) nos conduce en este caso a:

$$b_{34i}s\theta_{10i} = -b_{24i}c\theta_{10i}$$

de donde al derivar con respecto al tiempo se puede establecer fácilmente que la velocidad angular asociada a la posición angular θ_{10i} es:

$$\dot{\theta}_{10i} = \frac{1}{F_{0i}} (F_{28i}\dot{x}_p + F_{29i}\dot{y}_p + F_{30i}\dot{z}_p + F_{31i}\dot{\theta} + F_{32i}\dot{\varphi} + F_{33i}\dot{\psi}) \quad (2.37)$$

las variables a emplear son las siguientes:

$$\begin{aligned} F_{0i} &= b_{24i}s\theta_{10i} - b_{34i}c\theta_{10i} \\ F_{1i} &= -c\theta_{8i}s(\delta_{1i} + \delta_{3i}) + c(\delta_{1i} + \delta_{3i})s(\theta_{4i} + \theta_{7i})s\theta_{8i} \\ F_{2i} &= c(\delta_{1i} + \delta_{3i})c\theta_{8i} + s(\delta_{1i} + \delta_{3i})s(\theta_{4i} + \theta_{7i})s\theta_{8i} \\ F_{3i} &= c(\theta_{4i} + \theta_{7i})s\theta_{8i} \\ F_{4i} &= d_{14i}(s(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta)(c(\delta_{13i} + \varphi)s(\theta_{4i} + \theta_{7i})s\theta_{8i} + c\theta_{8i}c\varphi s(\delta_{13i} + \varphi)) + c(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta) \\ &\quad (c\theta_{8i}c(\delta_{13i} + \varphi) - c\varphi s(\theta_{4i} + \theta_{7i})s\theta_{8i}s(\delta_{13i} + \varphi)) \\ F_{5i} &= d_{14i}(c(\delta_{1i} + \delta_{3i})(c(\delta_{13i} + \varphi)c\varphi(c\theta_{8i} - s\theta s(\theta_{4i} + \theta_{7i})s\theta_{8i}) - (c\theta_{8i}s\theta + c\theta s(\theta_{4i} + \theta_{7i}) \\ &\quad s\theta_{8i})s(\delta_{13i} + \varphi) + s(\delta_{1i} + \delta_{3i})(c(\delta_{13i} + \varphi)c\varphi(c\theta_{8i}s\theta + c\theta s(\theta_{4i} + \theta_{7i})s\theta_{8i}) + (c\theta c\theta_{8i} - s\theta \\ &\quad s(\theta_{4i} + \theta_{7i})s\theta_{8i})s(\delta_{13i} + \varphi)) + c(\theta_{4i} + \theta_{7i})c(\delta_{13i} + \varphi)s\theta_{8i}s\varphi) \\ F_{6i} &= d_{14i}(s(\delta_{13i} + \varphi)(c(\theta_{4i} + \theta_{7i})c\varphi s\theta_{8i} - (c(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta)c\theta_{8i} + s(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta)s(\theta_{4i} + \theta_{7i}) \\ &\quad s\theta_{8i})s\varphi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{7i} &= s\theta_{8i}(-z_p s(\theta_{4i} + \theta_{7i})) + c(\theta_{4i} + \theta_{7i})(-d_{2i}c\delta_{3i} + x_p c(\delta_{1i} + \delta_{3i}) + d_{14i}c(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta) \\
&\quad c(\delta_{13i} + \varphi) + y_p s(\delta_{1i} + \delta_{3i}) + d_{14i}c\psi s(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta)s(\delta_{13i} + \varphi)) - d_{14i}s(\theta_{4i} + \theta_{7i})s(\delta_{13i} + \\
&\quad \varphi)s\psi) \\
F_{8i} &= s\theta_{8i}(-d_{5i}c\theta_{7i} - d_{6i}s\theta_{7i} - z_p s(\theta_{4i} + \theta_{7i}) + c(\theta_{4i} + \theta_{7i})(-d_{2i}c\delta_{3i} + x_p c(\delta_{1i} + \delta_{3i}) + d_{14i} \\
&\quad c(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta)c(\delta_{13i} + \varphi) + y_p s(\delta_{1i} + \delta_{3i}) + d_{14i}c\psi s(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta)s(\delta_{13i} + \varphi) - d_{14i} \\
&\quad s(\theta_{4i} + \theta_{7i})s(\delta_{13i} + \varphi)s\psi) \\
F_{9i} &= -(c(\delta_{1i} + \delta_{3i})s\theta_{8i}(y_p + d_{14i}c(\delta_{13i} + \varphi)s\theta + d_{14i}c\theta\psi s(\delta_{13i} + \varphi))) + c(\delta_{1i} + \delta_{3i})c\theta_{8i} \\
&\quad s(\theta_{4i} + \theta_{7i})(x_p + d_{14i}c\theta c(\delta_{13i} + \varphi) - d_{14i}c\psi s\theta s(\delta_{13i} + \varphi)) - s\theta_{8i}(d_{2i}s\delta_{3i} - s(\delta_{1i} + \delta_{3i}) \\
&\quad (x_p + d_{14i}c\theta c(\delta_{13i} + \varphi) - d_{14i}c\psi s\theta s(\delta_{13i} + \varphi))) + c\theta_{8i}(d_{6i}c\theta_{7i} - d_{5i}s\theta_{7i} + s(\theta_{4i} + \theta_{7i}) \\
&\quad (s(\delta_{1i} + \delta_{3i})(y_p + d_{14i}c(\delta_{13i} + \varphi)s\theta + d_{14i}c\theta\psi s(\delta_{13i} + \varphi)) - d_{2i}c\delta_{3i}) + c(\theta_{4i} + \theta_{7i})(z_p + \\
&\quad d_{14i}s(\delta_{13i} + \varphi)s\psi)) \\
F_{10i} &= c(\delta_{1i} + \delta_{3i})c\theta_{8i}s(\theta_{4i} + \theta_{7i}) + s(\delta_{1i} + \delta_{3i})s\theta_{8i} \\
F_{11i} &= s(\delta_{1i} + \delta_{3i})c\theta_{8i}s(\theta_{4i} + \theta_{7i}) - c(\delta_{1i} + \delta_{3i})s\theta_{8i} \\
F_{12i} &= c(\theta_{4i} + \theta_{7i})c\theta_{8i} \\
F_{13i} &= d_{14i}(-(s\theta_{8i}(c(\delta_{1i} + \delta_{3i})c\theta c(\delta_{13i} + \varphi) + \alpha\psi c\psi s\delta_{13i}s(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta) - s\delta_{13i}s(\delta_{1i} + \delta_{3i}) \\
&\quad s\theta s\varphi)) + c\delta_{13i}(-(s\theta_{8i}(\alpha\psi s(\delta_{1i} + \delta_{3i})s\theta + \psi s(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta)s\varphi)) + c\theta_{8i}s(\theta_{4i} + \theta_{7i}) \\
&\quad (\alpha\psi s(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta) - \psi s(\delta_{1i} + \delta_{3i})s\theta s\varphi)) - c\theta_{8i}s(\theta_{4i} + \theta_{7i})(\alpha\psi c\psi s\delta_{13i}s(\delta_{1i} + \delta_{3i})s\theta + \\
&\quad s\delta_{13i}s(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta)s\varphi + c(\delta_{1i} + \delta_{3i})c\theta\psi s(\delta_{13i} + \varphi))) \\
F_{14i} &= d_{14i}(-(s\theta_{8i}(c(\delta_{1i} + \delta_{3i})c\theta c(\delta_{13i} + \varphi)\psi + \alpha\psi s\delta_{13i}s(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta) - \psi s\delta_{13i}s(\delta_{1i} + \\
&\quad \delta_{3i})s\theta s\varphi)) + c\delta_{13i}(-(s\theta_{8i}(\alpha\psi c\psi s(\delta_{1i} + \delta_{3i})s\theta + s(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta)s\varphi)) + c\theta_{8i}s(\theta_{4i} + \theta_{7i}) \\
&\quad (\alpha\psi c\psi s(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta) - s(\delta_{1i} + \delta_{3i})s\theta s\varphi)) + c\theta_{8i}(-(s(\theta_{4i} + \theta_{7i})(\alpha\psi s\delta_{13i}s(\delta_{1i} + \delta_{3i})s\theta + \\
&\quad \psi s\delta_{13i}s(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta)s\varphi + c(\delta_{1i} + \delta_{3i})c\theta s(\delta_{13i} + \varphi))) + c(\theta_{4i} + \theta_{7i})c(\delta_{13i} + \varphi)s\psi)) \\
F_{15i} &= d_{14i}s(\delta_{13i} + \varphi)(c\theta_{8i}\psi c(\theta_{4i} + \theta_{7i}) + (s\theta_{8i}c(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta) - (c\theta_{8i}s(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta)s(\theta_{4i} + \\
&\quad \theta_{7i})))s\psi) \\
F_{16i} &= c\theta_{8i}(c(\theta_{4i} + \theta_{7i})(x_p c(\delta_{1i} + \delta_{3i}) - d_{2i}c\delta_{3i} + d_{14i}c(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta)c(\delta_{13i} + \varphi) + y_p s(\delta_{1i} + \\
&\quad \delta_{3i}) + d_{14i}c\psi s(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta)s(\delta_{13i} + \varphi)) - d_{14i}s(\theta_{4i} + \theta_{7i})s(\delta_{13i} + \varphi)s\psi - z_p s(\theta_{4i} + \theta_{7i})) \\
F_{17i} &= c\theta_{8i}(c(\theta_{4i} + \theta_{7i})(x_p c(\delta_{1i} + \delta_{3i}) - d_{2i}c\delta_{3i} + d_{14i}c(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta)c(\delta_{13i} + \varphi) + y_p s(\delta_{1i} + \\
&\quad \delta_{3i}) + d_{14i}c\psi s(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta)s(\delta_{13i} + \varphi)) - d_{14i}s(\theta_{4i} + \theta_{7i})s(\delta_{13i} + \varphi)s\psi - d_{5i}c\theta_{7i} - d_{6i} \\
&\quad s\theta_{7i} - z_p s(\theta_{4i} + \theta_{7i})) \\
F_{18i} &= c\theta_{8i}(s(\delta_{1i} + \delta_{3i})(x_p + d_{14i}c\theta c(\delta_{13i} + \varphi) - d_{14i}c\psi s\theta s(\delta_{13i} + \varphi)) - d_{2i}s\delta_{3i} - c(\delta_{1i} + \\
&\quad \delta_{3i})(c\theta_{8i}(y_p + d_{14i}c(\delta_{13i} + \varphi)s\theta + d_{14i}c\theta\psi s(\delta_{13i} + \varphi)) + s(\theta_{4i} + \theta_{7i})s\theta_{8i}(x_p + d_{14i}c\theta \\
&\quad c(\delta_{13i} + \varphi) - d_{14i}c\psi s\theta s(\delta_{13i} + \varphi))) - s\theta_{8i}(d_{6i}c\theta_{7i} - d_{5i}s\theta_{7i} + s(\theta_{4i} + \theta_{7i})(-d_{2i}c\delta_{3i} + \\
&\quad s(\delta_{1i} + \delta_{3i})(y_p + d_{14i}c(\delta_{13i} + \varphi)s\theta + d_{14i}c\theta\psi s(\delta_{13i} + \varphi))) + c(\theta_{4i} + \theta_{7i})(z_p + d_{14i}s(\delta_{13i} \\
&\quad + \varphi)s\psi)) \\
F_{19i} &= F_{1i}c\theta_{10i} + F_{10i}s\theta_{10i} \\
F_{20i} &= F_{2i}c\theta_{10i} + F_{11i}s\theta_{10i} \\
F_{21i} &= F_{3i}c\theta_{10i} + F_{12i}s\theta_{10i} \\
F_{22i} &= F_{4i}c\theta_{10i} + F_{13i}s\theta_{10i} \\
F_{23i} &= F_{5i}c\theta_{10i} + F_{14i}s\theta_{10i} \\
F_{24i} &= F_{6i}c\theta_{10i} + F_{15i}s\theta_{10i} \\
F_{25i} &= F_{7i}c\theta_{10i} + F_{16i}s\theta_{10i} \\
F_{26i} &= F_{8i}c\theta_{10i} + F_{17i}s\theta_{10i} \\
F_{27i} &= F_{9i}c\theta_{10i} + F_{18i}s\theta_{10i} \\
F_{28i} &= F_{19i} + (C_{19i}F_{25i}/C_{0i}) + (D_{22i}F_{26i}/D_{0i}) + (E_{14i}F_{27i}/E_{0i}) \\
F_{29i} &= F_{20i} + (C_{20i}F_{25i}/C_{0i}) + (D_{23i}F_{26i}/D_{0i}) + (E_{15i}F_{27i}/E_{0i})
\end{aligned}$$

2. Análisis Cinemático

$$F_{30i} = F_{21i} + (C_{21i}F_{25i}/C_{0i}) + (D_{24i}F_{26i}/D_{0i}) + (E_{16i}F_{27i}/E_{0i})$$

$$F_{31i} = F_{22i} + (C_{22i}F_{25i}/C_{0i}) + (D_{25i}F_{26i}/D_{0i}) + (E_{17i}F_{27i}/E_{0i})$$

$$F_{32i} = F_{23i} + (C_{23i}F_{25i}/C_{0i}) + (D_{26i}F_{26i}/D_{0i}) + (E_{18i}F_{27i}/E_{0i})$$

$$F_{33i} = F_{24i} + (C_{24i}F_{25i}/C_{0i}) + (D_{27i}F_{26i}/D_{0i}) + (E_{19i}F_{27i}/E_{0i})$$

Las gráficas de la velocidad angular $\dot{\theta}_{10i}$ para la trayectoria propuesta, en cada una de las cadenas son las siguientes:

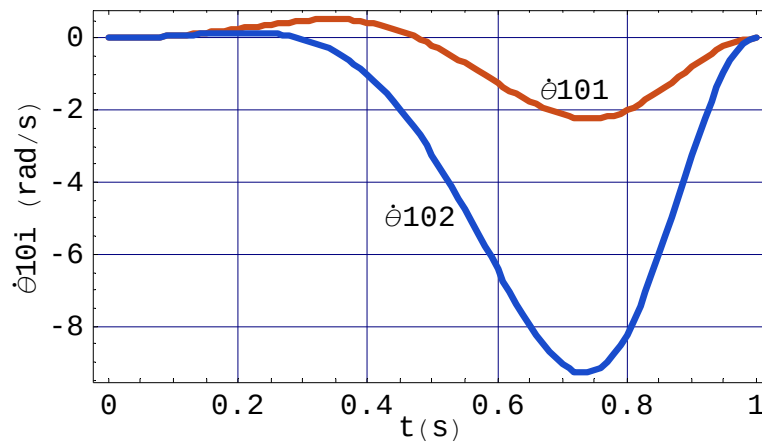


Figura 2.45 Gráfica de la velocidad angular $\dot{\theta}_{10i}$ en las cadenas 1 y 2

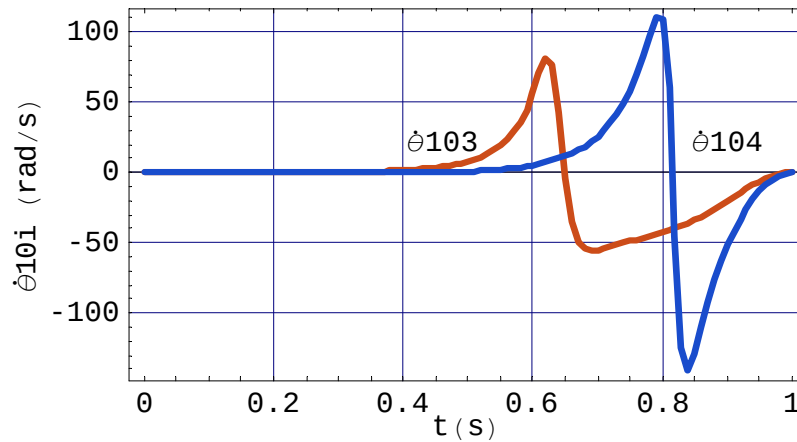


Figura 2.46 Gráfica de la velocidad angular $\dot{\theta}_{10i}$ en las cadenas 3 y 4

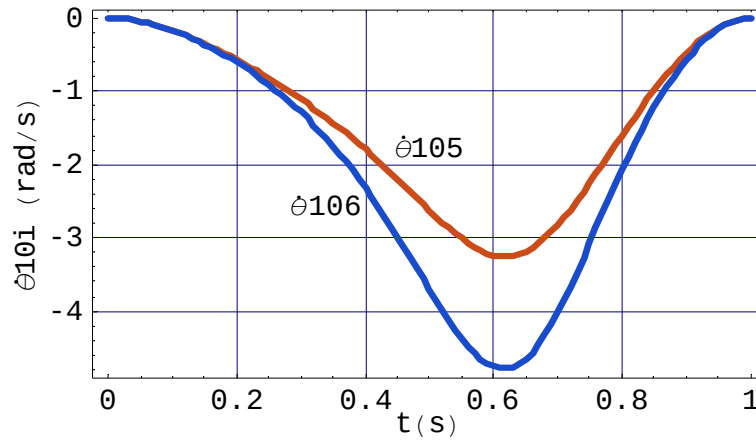


Figura 2.47 Gráfica de la velocidad angular $\dot{\theta}_{10i}$ en las cadenas 5 y 6

2.3.5 Velocidad Angular $\dot{\theta}_{11i}$

Para el caso de la posición angular θ_{11i} , se resuelve también la ecuación (2.29) considerando los elementos de la columna 4, filas 1 y 3, de tal manera que tenemos:

$$b_{34i}s\theta_{11i} = b_{14i}c\theta_{10i}c\theta_{11i}$$

expresión que al derivar con respecto al tiempo nos conduce a:

$$\dot{\theta}_{11i} = \frac{1}{G_{0i}} (G_{28i}\dot{x}_p + G_{29i}\dot{y}_p + G_{30i}\dot{z}_p + G_{31i}\dot{\theta} + G_{32i}\dot{\varphi} + G_{33i}\dot{\psi}) \quad (2.38)$$

En esta ecuación los coeficientes son:

$$\begin{aligned} G_{0i} &= b_{34i}c\theta_{11i} + b_{14i}c\theta_{10i}s\theta_{11i} \\ G_{1i} &= c(\delta_{1i} + \delta_{3i})c(\theta_{4i} + \theta_{7i}) \\ G_{2i} &= s(\delta_{1i} + \delta_{3i})c(\theta_{4i} + \theta_{7i}) \\ G_{3i} &= -s(\theta_{4i} + \theta_{7i}) \\ G_{4i} &= d_{14i}c(\theta_{4i} + \theta_{7i})(c(\delta_{13i} + \varphi)s(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta) - c\psi s(\delta_{13i} + \varphi)c(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta)) \\ G_{5i} &= d_{14i}(c(\theta_{4i} + \theta_{7i})(c\psi c(\delta_{13i} + \varphi)s(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta) - c(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta)s(\delta_{13i} + \varphi)) - s\psi c(\delta_{13i} + \varphi)s(\theta_{4i} + \theta_{7i})) \\ G_{6i} &= -(d_{14i}s(\delta_{13i} + \varphi)(c\psi s(\theta_{4i} + \theta_{7i}) + s\psi c(\theta_{4i} + \theta_{7i})s(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta))) \\ G_{7i} &= -s(\theta_{4i} + \theta_{7i})(x_p c(\delta_{1i} + \delta_{3i}) - d_{2i}c\delta_{3i} + d_{14i}c(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta)c(\delta_{13i} + \varphi) + y_p s(\delta_{1i} + \delta_{3i}) + d_{14i}c\psi s(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta)s(\delta_{13i} + \varphi)) - c(\theta_{4i} + \theta_{7i})(z_p + d_{14i}s(\delta_{13i} + \varphi)s\psi) \\ G_{8i} &= -d_{6i}c\theta_{7i} - (s(\theta_{4i} + \theta_{7i})(x_p c(\delta_{1i} + \delta_{3i}) - d_{2i}c\delta_{3i} + d_{14i}c(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta)c(\delta_{13i} + \varphi) + y_p s(\delta_{1i} + \delta_{3i}) + d_{14i}c\psi s(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta)s(\delta_{13i} + \varphi)) - d_{5i}s\theta_{7i} + c(\theta_{4i} + \theta_{7i})(z_p + d_{14i}s(\delta_{13i} + \varphi)s\psi)) \end{aligned}$$

2. Análisis Cinemático

$$\begin{aligned}
G_{9i} &= c\theta_{8i}c(\delta_{1i} + \delta_{3i})s(\theta_{4i} + \theta_{7i}) + s\theta_{8i}s(\delta_{1i} + \delta_{3i}) \\
G_{10i} &= c\theta_{8i}s(\delta_{1i} + \delta_{3i})s(\theta_{4i} + \theta_{7i}) - c(\delta_{1i} + \delta_{3i})s\theta_{8i} \\
G_{11i} &= c(\theta_{4i} + \theta_{7i})c\theta_{8i} \\
G_{12i} &= d_{14i}(-(s\theta_{8i})(c\theta c(\delta_{1i} + \delta_{3i})c(\delta_{13i} + \varphi) + \alpha\varphi\psi s\delta_{13i}s(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta) - s\theta\varphi s\delta_{13i}s(\delta_{1i} + \delta_{3i})) + c\delta_{13i}(-(s\theta s\theta_{8i}(\alpha\varphi s(\delta_{1i} + \delta_{3i}) + s\varphi\psi s(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta))) + c\theta_{8i}s(\theta_{4i} + \theta_{7i})(\alpha\varphi s(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta) - s\theta\varphi\psi s(\delta_{1i} + \delta_{3i}))) - c\theta s(\theta_{4i} + \theta_{7i})(s\theta\alpha\varphi\psi s\delta_{13i}s(\delta_{1i} + \delta_{3i}) + s\delta_{13i}s(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta)s\varphi + c(\delta_{1i} + \delta_{3i})c\theta\alpha\psi s(\delta_{13i} + \varphi))) \\
G_{13i} &= d_{14i}(-(s\theta_{8i}(c\theta\alpha\psi c(\delta_{1i} + \delta_{3i})c(\delta_{13i} + \varphi) + \alpha\varphi s\delta_{13i}s(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta) - s\theta\varphi\psi s\delta_{13i}s(\delta_{1i} + \delta_{3i}))) + c\delta_{13i}(-(s\theta_{8i}(s\theta\alpha\varphi\psi s(\delta_{1i} + \delta_{3i}) + s(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta)s\varphi)) + c\theta_{8i}s(\theta_{4i} + \theta_{7i})(\alpha\varphi\psi s(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta) - s\theta\varphi s(\delta_{1i} + \delta_{3i}))) + c\theta_{8i}(-(s(\theta_{4i} + \theta_{7i})(s\theta\alpha\varphi s\delta_{13i}s(\delta_{1i} + \delta_{3i}) + s\varphi\psi s\delta_{13i}s(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta) + c\theta c(\delta_{1i} + \delta_{3i})s(\delta_{13i} + \varphi))) + s\varphi c(\theta_{4i} + \theta_{7i})c(\delta_{13i} + \varphi))) \\
G_{14i} &= d_{14i}s(\delta_{13i} + \varphi)(c\theta_{8i}\alpha\psi c(\theta_{4i} + \theta_{7i}) + -(c\theta_{8i}s(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta)s(\theta_{4i} + \theta_{7i}) + c(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta)s\theta_{8i})s\varphi) \\
G_{15i} &= c\theta_{8i}(-(z_p s(\theta_{4i} + \theta_{7i})) + c(\theta_{4i} + \theta_{7i})(x_p c(\delta_{1i} + \delta_{3i}) - d_{2i}c\delta_{3i} + d_{14i}c(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta)c(\delta_{13i} + \varphi) + y_p s(\delta_{1i} + \delta_{3i}) + d_{14i}\alpha\psi s(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta)s(\delta_{13i} + \varphi)) - d_{14i}s(\theta_{4i} + \theta_{7i})s(\delta_{13i} + \varphi)s\varphi) \\
G_{16i} &= c\theta_{8i}(-d_{5i}c\theta_{7i} - d_{6i}s\theta_{7i} - z_p s(\theta_{4i} + \theta_{7i}) + c(\theta_{4i} + \theta_{7i})(x_p c(\delta_{1i} + \delta_{3i}) - d_{2i}c\delta_{3i} + d_{14i}c(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta)c(\delta_{13i} + \varphi) + y_p s(\delta_{1i} + \delta_{3i}) + d_{14i}\alpha\psi s(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta)s(\delta_{13i} + \varphi)) - d_{14i}s(\theta_{4i} + \theta_{7i})s(\delta_{13i} + \varphi)s\varphi) \\
G_{17i} &= c\theta_{8i}(s(\delta_{1i} + \delta_{3i})(x_p + d_{14i}c\theta c(\delta_{13i} + \varphi) - d_{14i}\alpha\psi s\theta s(\delta_{13i} + \varphi)) - d_{2i}s\delta_{3i}) - c(\delta_{1i} + \delta_{3i})(c\theta_{8i}(y_p + d_{14i}s\theta c(\delta_{13i} + \varphi) + d_{14i}c\theta\alpha\psi s(\delta_{13i} + \varphi)) + s(\theta_{4i} + \theta_{7i})s\theta_{8i})(x_p + d_{14i}c\theta c(\delta_{13i} + \varphi) - d_{14i}\alpha\psi s\theta s(\delta_{13i} + \varphi))) - s\theta_{8i}(d_{6i}c\theta_{7i} - d_{5i}s\theta_{7i} + s(\theta_{4i} + \theta_{7i})(-d_{2i}c\delta_{3i} + s(\delta_{1i} + \delta_{3i})(y_p + d_{14i}c(\delta_{13i} + \varphi)s\theta + d_{14i}c\theta\alpha\psi s(\delta_{13i} + \varphi))) + c(\theta_{4i} + \theta_{7i})(z_p + d_{14i}s(\delta_{13i} + \varphi)s\varphi)) \\
G_{18i} &= G_{1i}c\theta_{10i}c\theta_{11i} - G_{9i}s\theta_{11i} \\
G_{19i} &= G_{2i}c\theta_{10i}c\theta_{11i} - G_{10i}s\theta_{11i} \\
G_{20i} &= G_{3i}c\theta_{10i}c\theta_{11i} - G_{11i}s\theta_{11i} \\
G_{21i} &= G_{4i}c\theta_{10i}c\theta_{11i} - G_{12i}s\theta_{11i} \\
G_{22i} &= G_{5i}c\theta_{10i}c\theta_{11i} - G_{13i}s\theta_{11i} \\
G_{23i} &= G_{6i}c\theta_{10i}c\theta_{11i} - G_{14i}s\theta_{11i} \\
G_{24i} &= G_{7i}c\theta_{10i}c\theta_{11i} - G_{15i}s\theta_{11i} \\
G_{25i} &= G_{8i}c\theta_{10i}c\theta_{11i} - G_{16i}s\theta_{11i} \\
G_{26i} &= G_{17i}s\theta_{11i} \\
G_{27i} &= b_{14i}c\theta_{11i}s\theta_{10i} \\
G_{28i} &= G_{18i} + (C_{19i}G_{24i}/C_{0i}) + (D_{22i}G_{25i}/D_{0i}) - (E_{14i}G_{26i}/E_{0i}) - (F_{28i}G_{27i}/F_{0i}) \\
G_{29i} &= G_{19i} + (C_{20i}G_{24i}/C_{0i}) + (D_{23i}G_{25i}/D_{0i}) - (E_{15i}G_{26i}/E_{0i}) - (F_{29i}G_{27i}/F_{0i}) \\
G_{30i} &= G_{20i} + (C_{21i}G_{24i}/C_{0i}) + (D_{24i}G_{25i}/D_{0i}) - (E_{16i}G_{26i}/E_{0i}) - (F_{30i}G_{27i}/F_{0i}) \\
G_{31i} &= G_{21i} + (C_{22i}G_{24i}/C_{0i}) + (D_{25i}G_{25i}/D_{0i}) - (E_{17i}G_{26i}/E_{0i}) - (F_{31i}G_{27i}/F_{0i}) \\
G_{32i} &= G_{22i} + (C_{23i}G_{24i}/C_{0i}) + (D_{26i}G_{25i}/D_{0i}) - (E_{18i}G_{26i}/E_{0i}) - (F_{32i}G_{27i}/F_{0i}) \\
G_{33i} &= G_{23i} + (C_{24i}G_{24i}/C_{0i}) + (D_{26i}G_{25i}/D_{0i}) - (E_{19i}G_{26i}/E_{0i}) - (F_{33i}G_{27i}/F_{0i})
\end{aligned}$$

El comportamiento de la velocidad angular $\dot{\theta}_{11i}$, para las diferentes cadenas cinemáticas de acuerdo a la trayectoria propuesta es el siguiente:

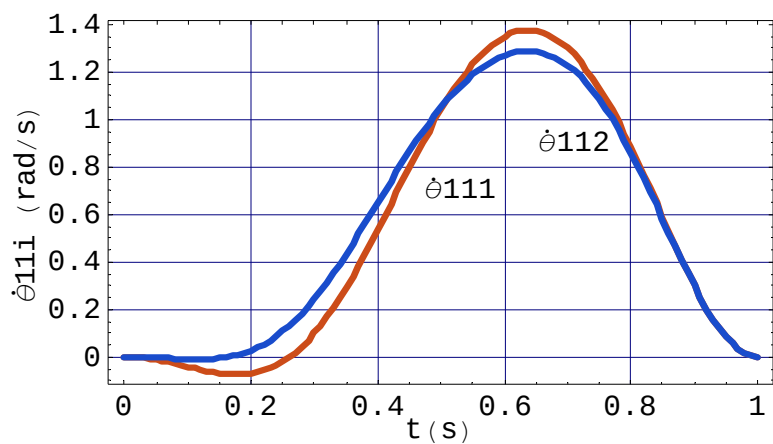


Figura 2.48 Gráfica de la velocidad angular $\dot{\theta}_{11i}$ en las cadenas 1 y 2

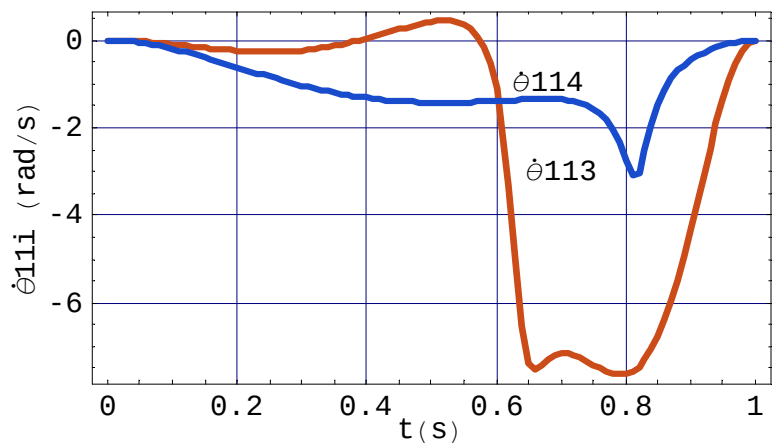


Figura 2.49 Gráfica de la velocidad angular $\dot{\theta}_{11i}$ en las cadenas 3 y 4

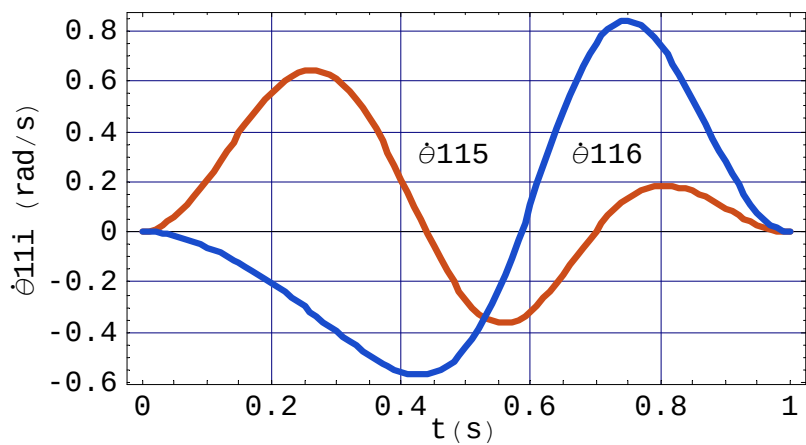


Figura 2.50 Gráfica de la velocidad angular $\dot{\theta}_{11i}$ en las cadenas 5 y 6

2.3.6 Velocidad Angular $\dot{\theta}_{15i}$

En este último caso tenemos que, al resolver la posición angular θ_{15i} con la ecuación (2.3) seleccionamos los valores de la columna 1, renglón 1 y 2 para determinar la variable y al igualar y resolver para $s\theta_{15i}$ y $c\theta_{15i}$ se obtiene:

$$s\theta_{15i} = c_{21i}c\delta_{13i} - c_{11i}s\delta_{13i}$$

y

$$c\theta_{15i} = c_{11i}c\delta_{13i} + c_{21i}s\delta_{13i}$$

de tal manera que al derivar con respecto al tiempo y simplificar tenemos:

$$\dot{\theta}_{15i} = \frac{1}{H_{0i}} (H_{21i}\dot{x}_p + H_{22i}\dot{y}_p + H_{23i}\dot{z}_p + H_{24i}\dot{\theta} + H_{25i}\dot{\phi} + H_{26i}\dot{\psi}) \quad (2.39)$$

Los coeficientes de esta ecuación son los siguientes:

$$H_{0i} = b_{11i}c(\delta_{13i} + \theta_{15i}) + b_{21i}s(\delta_{13i} + \theta_{15i})$$

$$H_{1i} = c(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta)(\alpha\phi s\theta_{11i}s(\theta_{10i} + \theta_{8i}) + s\phi c\psi(s\theta_{11i}c(\theta_{10i} + \theta_{8i})s(\theta_{4i} + \theta_{7i}) - c\theta_{11i}c(\theta_{4i} + \theta_{7i}))) + s(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta)(c\theta_{11i}c(\theta_{4i} + \theta_{7i})\alpha\phi + s\theta_{11i}(c\psi s(\theta_{10i} + \theta_{8i})s\phi - c(\theta_{10i} + \theta_{8i})\alpha\phi s(\theta_{4i} + \theta_{7i})))$$

$$H_{2i} = c\theta_{11i}(c(\theta_{4i} + \theta_{7i})(\alpha\phi c\psi s(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta) - s\phi c(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta)) - \alpha\phi s(\theta_{4i} + \theta_{7i})s\psi) + s\theta_{11i}(s(\theta_{10i} + \theta_{8i})(c(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta)\alpha\phi c\psi + s(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta)s\phi) - c(\theta_{10i} + \theta_{8i})(s(\theta_{4i} + \theta_{7i})(\alpha\phi c\psi s(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta) - c(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta)s\phi) + c(\theta_{4i} + \theta_{7i})\alpha\phi s\psi))$$

$$H_{3i} = s\phi(-(c\psi(c(\theta_{4i} + \theta_{7i})c(\theta_{10i} + \theta_{8i})s\theta_{11i} + c\theta_{11i}s(\theta_{4i} + \theta_{7i}))) + s(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta)(-c(\theta_{11i}c(\theta_{4i} + \theta_{7i})) + c(\theta_{10i} + \theta_{8i})s\theta_{11i}s(\theta_{4i} + \theta_{7i}))s\psi - c(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta)s\theta_{11i}s(\theta_{10i} + \theta_{8i})s\psi)$$

$$H_{4i} = -((s\theta_{11i}c(\theta_{4i} + \theta_{7i})c(\theta_{10i} + \theta_{8i}) + c\theta_{11i}s(\theta_{4i} + \theta_{7i}))(\alpha\phi c(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta) + s\phi c\psi s(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta))) + (c(\theta_{10i} + \theta_{8i})s\theta_{11i}s(\theta_{4i} + \theta_{7i}) - c\theta_{11i}c(\theta_{4i} + \theta_{7i}))s\phi s\psi$$

$$H_{5i} = s\theta_{11i}(c(\theta_{10i} + \theta_{8i})(-\alpha\phi s(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta)) + c(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta)c\psi s\phi) + s(\theta_{10i} + \theta_{8i})(s(\theta_{4i} + \theta_{7i})(c(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta)\alpha\phi + c\psi s(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta)s\phi) + c(\theta_{4i} + \theta_{7i})s\phi s\psi))$$

$$H_{6i} = -(s(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta)(c\theta_{11i}\alpha\phi s(\theta_{10i} + \theta_{8i}) + c\psi(c(\theta_{4i} + \theta_{7i})s\theta_{11i} + c\theta_{11i}c(\theta_{10i} + \theta_{8i})s(\theta_{4i} + \theta_{7i}))s\phi) - c(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta)(c(\theta_{4i} + \theta_{7i})\alpha\phi s\theta_{11i} + c\theta_{11i}(c(\theta_{10i} + \theta_{8i})\alpha\phi s(\theta_{4i} + \theta_{7i}) - c\psi s(\theta_{10i} + \theta_{8i})s\phi)) + (s\theta_{11i}s(\theta_{4i} + \theta_{7i}) - c\theta_{11i}c(\theta_{4i} + \theta_{7i})c(\theta_{10i} + \theta_{8i}))s\phi s\psi$$

$$H_{7i} = c\theta_{8i}s\theta_{10i}s\theta_{11i}\alpha\phi c\psi s(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta) - c\delta_{1i}s\delta_{3i}c\theta_{11i}s\theta\alpha\phi c\psi c(\theta_{4i} + \theta_{7i}) + c\delta_{1i}s\delta_{3i}s\theta_{11i}s\theta\alpha\phi c\psi c(\theta_{10i} + \theta_{8i})s(\theta_{4i} + \theta_{7i}) + \alpha\phi c\psi s\theta_{8i}c\theta_{10i}s\theta_{11i}s(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta) + \frac{1}{2}(c\theta_{10i}s\theta_{11i}s\theta_{8i}s(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta - \phi)) - s\delta_{1i}s\delta_{3i}c\theta_{4i}c\theta_{7i}c\theta_{11i}s\theta s\phi - c(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta)c\theta_{8i}s\theta_{10i}s\theta_{11i}s\phi + s\theta_{4i}c\theta_{7i}c\theta_{8i}c\theta_{10i}s\theta_{11i}s\delta_{1i}s\delta_{3i}s\theta s\phi + c\theta_{10i}c\theta_{4i}c\theta_{8i}s\delta_{1i}s\delta_{3i}s\theta s\theta_{11i}s\theta_{7i}s\phi + c\theta_{11i}s\delta_{1i}s\delta_{3i}s\theta s\theta_{4i}s\theta_{7i}s\phi - c\theta_{7i}s\delta_{1i}s\delta_{3i}s\theta s\theta_{10i}s\theta_{11i}s\theta_{4i}s\theta_{8i}s\phi - \theta_{4i}s\delta_{1i}s\delta_{3i}s\theta s\theta_{10i}s\theta_{11i}s\theta_{7i}s\theta_{8i}s\phi + c\theta s\delta_{3i}(c\theta_{11i}c(\theta_{4i} + \theta_{7i}) - c(\theta_{10i} + \theta_{8i})s\theta_{11i}s(\theta_{4i} + \theta_{7i}))(\alpha\phi c\psi s\delta_{1i} - c\delta_{1i}s\phi) - c\delta_{3i}(c\theta_{11i}$$

$$\begin{aligned}
& c(\theta_{4i} + \theta_{7i}) - c(\theta_{10i} + \theta_{8i})s\theta_{11i}s(\theta_{4i} + \theta_{7i}))(c(\delta_{1i} - \theta)\alpha\varphi\psi + s(\delta_{1i} - \theta)s\varphi) - \frac{1}{2}(c\theta_{10i}s\theta_{11i} \\
& s\theta_{8i}s(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta + \varphi)) \\
H_{8i} = & c\theta_{8i}\alpha\varphi s(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta)s\theta_{10i}s\theta_{11i} - c\delta_{1i}s\delta_{3i}c\theta_{11i}c(\theta_{4i} + \theta_{7i})\alpha\varphi s\theta + c\delta_{1i}s\delta_{3i}s\theta_{11i} \\
& c(\theta_{10i} + \theta_{8i})\alpha\varphi s\theta s(\theta_{4i} + \theta_{7i}) + \frac{1}{2}(c\theta_{10i}s\theta_{11i}s\theta_{8i}s(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta - \varphi)) - c\theta_{11i}c\theta_{4i}c\theta_{7i} \\
& \alpha\varphi s\delta_{1i}s\delta_{3i}s\theta s\varphi - c(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta)c\theta_{8i}\alpha\varphi s\theta_{10i}s\theta_{11i}s\varphi + c\theta_{10i}c\theta_{7i}c\theta_{8i}\alpha\varphi s\delta_{1i}s\delta_{3i}s\theta \\
& s\varphi s\theta_{11i}s\theta_{4i} + c\theta_{10i}c\theta_{4i}c\theta_{8i}\alpha\varphi s\delta_{1i}s\delta_{3i}s\theta s\theta_{11i}s\theta_{7i}s\varphi + c\theta_{11i}\alpha\varphi s\delta_{1i}s\delta_{3i}s\theta s\theta_{4i}s\theta_{7i} \\
& s\varphi - c(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta)c\theta_{10i}\alpha\varphi s\theta_{11i}s\theta_{8i}s\varphi - c\theta_{7i}\alpha\varphi s\delta_{1i}s\delta_{3i}s\theta s\theta_{10i}s\theta_{11i}s\theta_{4i}s\theta_{8i}s\varphi - \\
& c\theta_{4i}\alpha\varphi s\delta_{1i}s\delta_{3i}s\theta s\theta_{10i}s\theta_{11i}s\theta_{7i}s\theta_{8i}s\varphi + c\theta s\delta_{3i}(c\theta_{11i}c(\theta_{4i} + \theta_{7i}) - c(\theta_{10i} + \theta_{8i})s\theta_{11i} \\
& s(\theta_{4i} + \theta_{7i}))(\alpha\varphi s\delta_{1i} - c\delta_{1i}\alpha\varphi s\varphi) - c\delta_{3i}(c\theta_{11i}c(\theta_{4i} + \theta_{7i}) - c(\theta_{10i} + \theta_{8i})s\theta_{11i}s(\theta_{4i} + \\
& \theta_{7i}))(c(\delta_{1i} - \theta)\alpha\varphi + \alpha\varphi s(\delta_{1i} - \theta)s\varphi) + \frac{1}{2}(c\theta_{10i}s\theta_{11i}s\theta_{8i}s(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta + \varphi)) + (c(\theta_{4i} + \\
& \theta_{7i})c(\theta_{10i} + \theta_{8i})s\theta_{11i} + c\theta_{11i}s(\theta_{4i} + \theta_{7i}))s\varphi s\varphi \\
H_{9i} = & \frac{1}{4}(\alpha\varphi(-4c\theta_{11i}\alpha\varphi s(\theta_{4i} + \theta_{7i}) + s\theta_{11i}(c(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta - \theta_{10i} - \theta_{4i} - \theta_{7i} - \theta_{8i}) - c(\delta_{1i} + \\
& \delta_{3i} - \theta - \theta_{10i} + \theta_{4i} + \theta_{7i} - \theta_{8i}) + c(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta + \theta_{10i} - \theta_{4i} - \theta_{7i} + \theta_{8i}) - c(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \\
& \theta + \theta_{10i} + \theta_{4i} + \theta_{7i} + \theta_{8i}) - 4c(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta)s(\theta_{10i} + \theta_{8i}))s\varphi - 4c(\theta_{4i} + \theta_{7i})(c(\theta_{10i} + \theta_{8i}) \\
& \alpha\varphi s\theta_{11i} + c\theta_{11i}s(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta)s\varphi))) \\
H_{10i} = & -c\theta_{10i}c\theta_{4i}c\theta_{7i}c\theta_{8i}\alpha\varphi\psi s\delta_{1i}s\delta_{3i}s\theta s\theta_{11i} - c\theta_{11i}c\theta_{7i}\alpha\varphi\psi s\delta_{1i}s\delta_{3i}s\theta s\theta_{4i} - c\theta_{11i}c\theta_{4i} \\
& \alpha\varphi\psi s\delta_{1i}s\delta_{3i}s\theta s\theta_{7i} + c\theta_{10i}c\theta_{8i}\alpha\varphi\psi s\delta_{1i}s\delta_{3i}s\theta s\theta_{11i}s\theta_{4i}s\theta_{7i} + c\theta_{4i}c\theta_{7i}\alpha\varphi\psi s\delta_{1i}s\delta_{3i}s\theta \\
& s\theta_{10i}s\theta_{11i}s\theta_{8i} - \alpha\varphi\psi s\delta_{1i}s\delta_{3i}s\theta s\theta_{10i}s\theta_{11i}s\theta_{4i}s\theta_{7i}s\theta_{8i} - c\theta_{10i}c\theta_{4i}c\theta_{7i}c\theta_{8i}s\delta_{1i}s\delta_{3i}s\varphi \\
& s\theta_{11i} - c\theta_{11i}c\theta_{7i}s\delta_{1i}s\delta_{3i}s\theta_{4i}s\varphi - c\theta_{11i}c\theta_{4i}s\delta_{1i}s\delta_{3i}s\theta_{7i}s\varphi + c\theta_{10i}c\theta_{8i}s\delta_{1i}s\delta_{3i}s\theta_{4i} \\
& s\theta_{11i}s\theta_{7i}s\varphi + c\theta_{4i}c\theta_{7i}s\delta_{1i}s\delta_{3i}s\theta_{10i}s\theta_{11i}s\theta_{8i}s\varphi - c\theta s\delta_{1i}s\delta_{3i}s\theta_{10i}s\theta_{11i}s\theta_{4i}s\theta_{7i}s\theta_{8i}s\varphi + \\
& c\delta_{3i}(c(\theta_{4i} + \theta_{7i})c(\theta_{10i} + \theta_{8i})s\theta_{11i} + c\theta_{11i}s(\theta_{4i} + \theta_{7i}))(c(\delta_{1i} - \theta)s\varphi - \alpha\varphi\psi s(\delta_{1i} - \theta)) + c\delta_{1i} \\
& s\delta_{3i}(c(\theta_{4i} + \theta_{7i})c(\theta_{10i} + \theta_{8i})s\theta_{11i} + c\theta_{11i}s(\theta_{4i} + \theta_{7i}))(s\theta s\varphi - c\theta\alpha\varphi\psi) - c\theta_{11i}c(\theta_{4i} + \theta_{7i}) \\
& \alpha\varphi s\varphi + c(\theta_{10i} + \theta_{8i})\alpha\varphi s\theta_{11i}s(\theta_{4i} + \theta_{7i})s\varphi \\
H_{11i} = & (s\theta_{11i}(c\theta_{10i}(2s\delta_{1i}s\delta_{3i}s(\theta_{4i} + \theta_{7i})s\theta_{8i}(\alpha\varphi\psi s\theta + c\theta s\varphi) + 2c\theta_{8i}(c(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta)\alpha\varphi \\
& \psi + s(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta)s\varphi)) + 2(-(c(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta)\alpha\varphi\psi s\theta_{10i}s\theta_{8i}) + c\delta_{1i}c\theta\alpha\varphi\psi s\delta_{3i}s(\theta_{4i} + \\
& \theta_{7i})s(\theta_{10i} + \theta_{8i}) + c\delta_{3i}\alpha\varphi\psi s(\delta_{1i} - \theta)s(\theta_{4i} + \theta_{7i})s(\theta_{10i} + \theta_{8i}) - s(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta)s\theta_{10i}s\theta_{8i} \\
& s\varphi - c\delta_{3i}c(\delta_{1i} - \theta)s(\theta_{4i} + \theta_{7i})s(\theta_{10i} + \theta_{8i})s\varphi - c\delta_{1i}s\delta_{3i}s\theta s(\theta_{4i} + \theta_{7i})s(\theta_{10i} + \theta_{8i})s\varphi + \\
& c\theta_{7i}c\theta_{8i}s\delta_{1i}s\delta_{3i}s\theta_{10i}s\theta_{4i}(\alpha\varphi\psi s\theta + c\theta s\varphi) + c\theta_{4i}c\theta_{8i}s\delta_{1i}s\delta_{3i}s\theta_{10i}s\theta_{7i}(\alpha\varphi\psi s\theta + c\theta s\varphi) \\
& + c(\theta_{4i} + \theta_{7i})\alpha\varphi s(\theta_{10i} + \theta_{8i})s\varphi))/2 \\
H_{12i} = & s\theta_{11i}(c(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta)c(\theta_{10i} + \theta_{8i})\alpha\varphi\psi + c(\theta_{10i} + \theta_{8i})s(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta)s\varphi + s(\theta_{10i} + \\
& \theta_{8i}))(c\theta_{7i}s\delta_{1i}s\delta_{3i}s\theta_{4i}(\alpha\varphi\psi s\theta + c\theta s\varphi) + c\theta_{4i}s\delta_{1i}s\delta_{3i}s\theta_{7i}(\alpha\varphi\psi s\theta + c\theta s\varphi) + s(\theta_{4i} + \theta_{7i}) \\
& (\alpha\varphi\psi(c\delta_{1i}c\theta s\delta_{3i} + c\delta_{3i}s(\delta_{1i} - \theta))) - (c\delta_{1i}c\delta_{3i}c\theta + s(\delta_{1i} + \delta_{3i})s\theta)s\varphi + c(\theta_{4i} + \theta_{7i})\alpha\varphi s\varphi)) \\
H_{13i} = & -\alpha\varphi\psi s\delta_{1i}s\delta_{3i}s\theta s\theta_{11i}c\theta_{4i}c\theta_{7i} - c\theta_{10i}c\theta_{11i}c\theta_{7i}c\theta_{8i}\alpha\varphi\psi s\delta_{1i}s\delta_{3i}s\theta s\theta_{4i} - c\theta_{10i}c\theta_{11i} \\
& c\theta_{4i}c\theta_{8i}\alpha\varphi\psi s\delta_{1i}s\delta_{3i}s\theta s\theta_{7i} + \alpha\varphi\psi s\delta_{1i}s\delta_{3i}s\theta s\theta_{11i}s\theta_{4i}s\theta_{7i} + (c\theta_{10i}c\theta_{11i}c(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \\
& \theta - \varphi)s\theta_{8i})/2 - (c\theta_{10i}c\theta_{11i}c(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta + \varphi)s\theta_{8i})/2 + c\theta_{11i}c\theta_{7i}\alpha\varphi\psi s\delta_{1i}s\delta_{3i}s\theta s\theta_{10i} \\
& s\theta_{4i}s\theta_{8i} + c\theta_{11i}c\theta_{4i}\alpha\varphi\psi s\delta_{1i}s\delta_{3i}s\theta s\theta_{10i}s\theta_{7i}s\theta_{8i} + c(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta)c\theta_{11i}\alpha\varphi\psi s(\theta_{10i} + \\
& \theta_{8i}) + c\theta_{11i}c\theta_{8i}s(\delta_{1i} + \delta_{3i} - \theta)s\theta_{10i}s\varphi - c\theta_{4i}c\theta_{7i}s\delta_{1i}s\delta_{3i}s\theta_{11i}s\varphi - c\theta_{10i}c\theta_{11i}c\theta_{7i}
\end{aligned}$$

2. Análisis Cinemático

$$\begin{aligned}
& c\theta_{8i}s\delta_{1i}s\delta_{3i}s\theta_{4i}s\varphi - c\theta c\theta_{10i}c\theta_{11i}c\theta_{4i}c\theta_{8i}s\delta_{1i}s\delta_{3i}s\theta_{7i}s\varphi + c\theta s\delta_{1i}s\delta_{3i}s\theta_{11i}s\theta_{4i}s\theta_{7i}s\varphi + \\
& c\theta c\theta_{11i}c\theta_{7i}s\delta_{1i}s\delta_{3i}s\theta_{10i}s\theta_{4i}s\theta_{8i}s\varphi + c\theta c\theta_{11i}c\theta_{4i}s\delta_{1i}s\delta_{3i}s\theta_{10i}s\theta_{7i}s\theta_{8i}s\varphi + c\delta_{3i}(c(\theta_{4i} + \\
& \theta_{7i})s\theta_{11i} + c\theta_{11i}c(\theta_{10i} + \theta_{8i})s(\theta_{4i} + \theta_{7i}))(s\varphi c(\delta_{1i} - \theta) - c\varphi c\psi s(\delta_{1i} - \theta)) + c\delta_{1i}s\delta_{3i}(c(\theta_{4i} + \\
& \theta_{7i})s\theta_{11i} + c\theta_{11i}c(\theta_{10i} + \theta_{8i})s(\theta_{4i} + \theta_{7i}))(s\theta s\varphi - c\theta c\varphi c\psi) - c\theta_{11i}c(\theta_{4i} + \theta_{7i})c(\theta_{10i} + \\
& \theta_{8i})c\varphi s\psi + c\varphi s\theta_{11i}s(\theta_{4i} + \theta_{7i})s\varphi \\
H_{14i} &= H_{7i}c(\delta_{13i} + \theta_{15i}) - H_{1i}s(\delta_{13i} + \theta_{15i}) \\
H_{15i} &= H_{8i}c(\delta_{13i} + \theta_{15i}) - H_{2i}s(\delta_{13i} + \theta_{15i}) \\
H_{16i} &= H_{9i}c(\delta_{13i} + \theta_{15i}) - H_{3i}s(\delta_{13i} + \theta_{15i}) \\
H_{17i} &= H_{10i}c(\delta_{13i} + \theta_{15i}) - H_{4i}s(\delta_{13i} + \theta_{15i}) \\
H_{18i} &= H_{11i}c(\delta_{13i} + \theta_{15i}) - H_{5i}s(\delta_{13i} + \theta_{15i}) \\
H_{19i} &= H_{12i}c(\delta_{13i} + \theta_{15i}) - H_{5i}s(\delta_{13i} + \theta_{15i}) \\
H_{20i} &= H_{13i}c(\delta_{13i} + \theta_{15i}) - H_{6i}s(\delta_{13i} + \theta_{15i}) \\
H_{21i} &= (C_{19i}H_{17i}/C_{0i}) + (D_{22i}H_{17i}/D_{0i}) + (E_{14i}H_{18i}/E_{0i}) + (F_{28i}H_{19i}/F_{0i}) + (G_{28i}H_{20i}/G_{0i}) \\
H_{22i} &= (C_{20i}H_{17i}/C_{0i}) + (D_{23i}H_{17i}/D_{0i}) + (E_{15i}H_{18i}/E_{0i}) + (F_{29i}H_{19i}/F_{0i}) + (G_{29i}H_{20i}/G_{0i}) \\
H_{23i} &= (C_{21i}H_{17i}/C_{0i}) + (D_{24i}H_{17i}/D_{0i}) + (E_{16i}H_{18i}/E_{0i}) + (F_{30i}H_{19i}/F_{0i}) + (G_{30i}H_{20i}/G_{0i}) \\
H_{24i} &= H_{14i} + (C_{22i}H_{17i}/C_{0i}) + (D_{25i}H_{17i}/D_{0i}) + (E_{17i}H_{18i}/E_{0i}) + (F_{31i}H_{19i}/F_{0i}) + (G_{31i}H_{20i}/G_{0i}) \\
H_{25i} &= H_{15i} + (C_{23i}H_{17i}/C_{0i}) + (D_{26i}H_{17i}/D_{0i}) + (E_{18i}H_{18i}/E_{0i}) + (F_{32i}H_{19i}/F_{0i}) + (G_{32i}H_{20i}/G_{0i}) \\
H_{26i} &= H_{16i} + (C_{24i}H_{17i}/C_{0i}) + (D_{27i}H_{17i}/D_{0i}) + (E_{19i}H_{18i}/E_{0i}) + (F_{33i}H_{19i}/F_{0i}) + (G_{33i}H_{20i}/G_{0i})
\end{aligned}$$

Las gráficas correspondientes a la velocidad angular $\dot{\theta}_{15i}$, para la trayectoria propuesta son las siguientes:

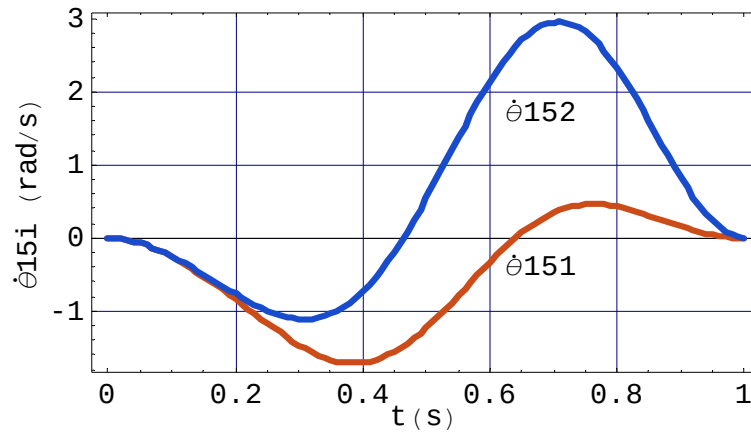
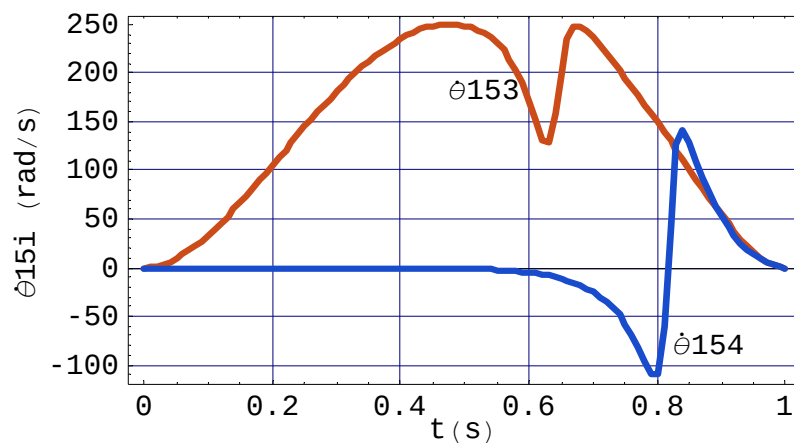
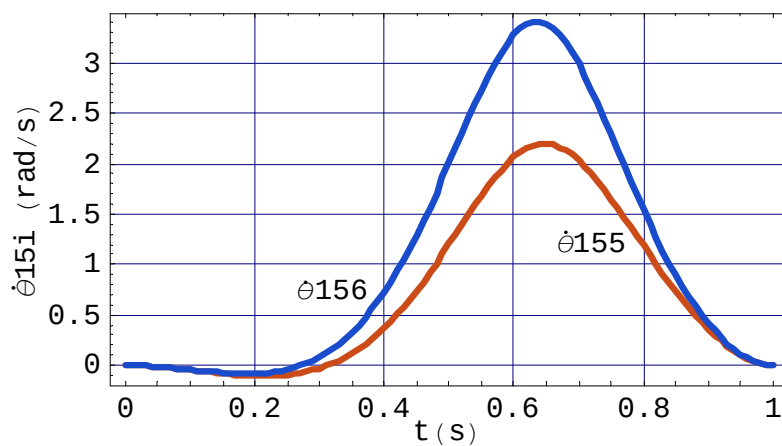


Figura 2.51 Gráfica de la velocidad angular $\dot{\theta}_{15i}$ en las cadenas 1 y 2

Figura 2.52 Gráfica de la velocidad angular $\dot{\theta}_{15i}$ en las cadenas 3 y 4Figura 2.53 Gráfica de la velocidad angular $\dot{\theta}_{15i}$ en las cadenas 5 y 6

Capítulo 3

Análisis Estático

3.1 Introducción

En general, una máquina se emplea con un propósito definido, ya sea para transformar energía, transmitir potencia o transmitir una fuerza o un torque, sin embargo un mecanismo, ya sea plano o espacial, se emplea tanto para aplicar y transmitir una fuerza como para generar un movimiento específico, en los casos más simples la fuerza se transmite desde un punto de entrada hasta otro que se considera como salida, tal como sucede en palancas y sistemas cable - polea los cuales se pueden considerar como máquinas estáticas. En algunos otros casos, es posible analizar una máquina con los métodos de la estática porque funcionan sin movimiento o bien porque las velocidades de operación producen efectos dinámicos despreciables. En el caso que nos ocupa se realiza como primer paso un análisis estático de fuerza para determinar el efecto dinámico en el efector final.

La técnica a emplear para el análisis es similar a la que se estudia en un curso básico de ingeniería, sin embargo, en una plataforma, el número de componentes y su configuración geométrica le añaden cierta complejidad al problema en estudio, de ahí que sea necesario emplear un método específico para obtener una solución rápida en forma eficiente, siendo la base, la segunda ley de Newton ya que involucra en forma directa el concepto de equilibrio estático.

3.2 Fuerza y momento

Los tipos de fuerza que actúan en cualquiera de los elementos de la plataforma pueden ser de carácter interno o externo, tal como sucede con la fuerza aplicada por el propio peso de los componentes, la acción de tales fuerzas se puede manifestar como un momento en el que se observa que la tendencia a la rotación del elemento con respecto al brazo de palanca implica la deformación y la posible flexión del cuerpo creando esfuerzos que afecten la vida útil del sistema. En el diagrama siguiente se muestra un cuerpo ubicado en un marco de referencia inercial ($\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0$) y sobre el que actúa tanto una fuerza externa $\mathbf{f}_p$ como su propio peso $\mathbf{w}$.

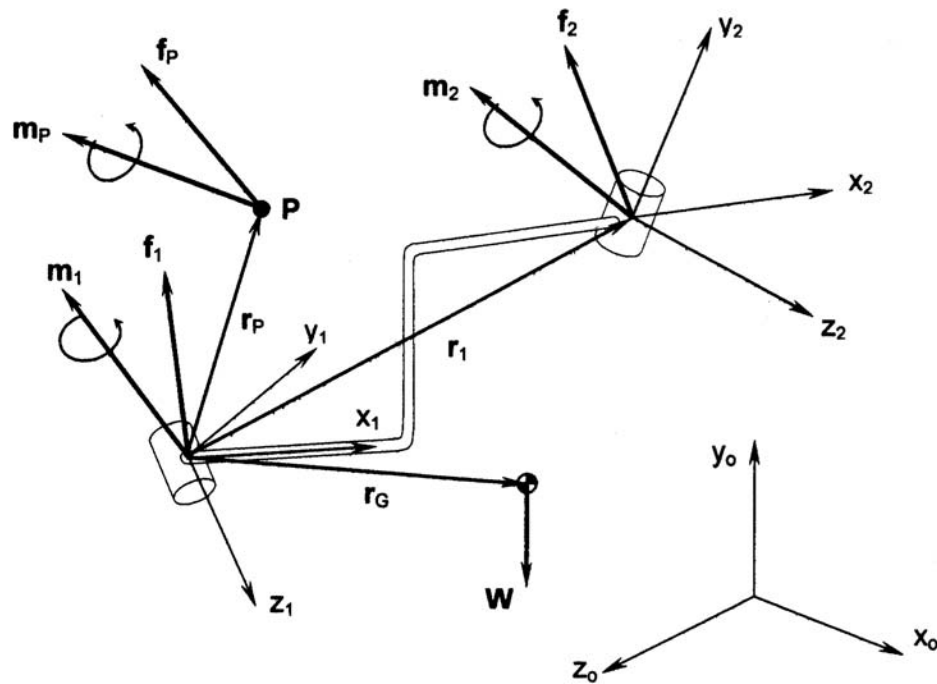


Figura 3.1 Diagrama general de cuerpo libre

En donde:

$\mathbf{f}_1$ = fuerza de reacción definida en la base local unida al cuerpo ($\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1, \mathbf{z}_1$)

$\mathbf{m}_1$ = momento de reacción definido en la base local ($\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1, \mathbf{z}_1$)

$\mathbf{f}_2$ = fuerza de reacción definida en la base local unida a otro cuerpo
($\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2, \mathbf{z}_2$)

$\mathbf{m}_2$ = momento de reacción definido en la base local ($\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2, \mathbf{z}_2$)

$\mathbf{f}_p$ = fuerza externa definida en la base inercial ($\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0$)

$\mathbf{m}_p$ = momento externo definido en la base inercial ($\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0$)

$\mathbf{w}$ = peso del cuerpo definido en la base inercial ($\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0$)

La aplicación directa de la segunda ley de Newton y la consideración del efecto acción reacción (tercera ley de Newton) en el diagrama de cuerpo libre (figura 3.1) establece entonces el análisis estático como:

$$\sum \mathbf{F} = \mathbf{0} \quad (3.1)$$

$$\sum \mathbf{M} = \mathbf{0} \quad (3.2)$$

De esta forma, la aplicación directa de estas ecuaciones al sistema representado en la figura 3.1, nos permite concluir que:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_1 - [\mathbf{R}_{12}]\mathbf{f}_2 + [\mathbf{R}_{10}]\mathbf{w} + [\mathbf{R}_{10}]\mathbf{f}_p &= \mathbf{0} \\ \mathbf{m}_1 - [\mathbf{R}_{12}]\mathbf{m}_2 - \mathbf{r}_1 \times ([\mathbf{R}_{12}]\mathbf{f}_2) + \mathbf{r}_G \times ([\mathbf{R}_{10}]\mathbf{w}) + \mathbf{r}_p \times ([\mathbf{R}_{10}]\mathbf{f}_p) + [\mathbf{R}_{10}]\mathbf{m}_p &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

Donde las matrices $[\mathbf{R}_{12}]$ y $[\mathbf{R}_{10}]$ transforman los vectores definidos en las bases $(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2, \mathbf{z}_2)$ y $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0)$ a la base $(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1, \mathbf{z}_1)$ respectivamente, decidiendo de manera arbitraria escribir tales ecuaciones.

La ecuación de momentos se puede reescribir sustituyendo el producto cruz mediante una matriz antisimétrica formada por los elementos de los vectores de posición, es decir:

$$\mathbf{r} \times ([\mathbf{R}]\mathbf{f}) = [\mathbf{S}][\mathbf{R}]\mathbf{f}$$

donde:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= [x, y, z]^T \\ \mathbf{S} &= \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

de esta manera se tiene:

$$\mathbf{m}_1 - [\mathbf{R}_{12}]\mathbf{m}_2 - [\mathbf{S}_1][\mathbf{R}_{12}]\mathbf{f}_2 + [\mathbf{S}_G][\mathbf{R}_{10}]\mathbf{w} + [\mathbf{S}_p][\mathbf{R}_{10}]\mathbf{f}_p + [\mathbf{R}_{10}]\mathbf{m}_p = \mathbf{0}$$

La forma matricial del sistema de ecuaciones es:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{m}_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} [\mathbf{R}_{12}] & [0] \\ [\mathbf{S}_1][\mathbf{R}_{12}] & [\mathbf{R}_{12}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_2 \\ \mathbf{m}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [\mathbf{R}_{10}] & [0] \\ [\mathbf{S}_p][\mathbf{R}_{10}] & [\mathbf{R}_{10}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_p \\ \mathbf{m}_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [\mathbf{R}_{10}] & [0] \\ [\mathbf{S}_G][\mathbf{R}_{10}] & [\mathbf{R}_{10}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

renombrando:

$$\mathbf{F}_1 - [\mathbf{Q}_{12}]\mathbf{F}_2 + [\mathbf{Q}_{10}]\mathbf{F}_p + [\mathbf{Q}_w]\mathbf{W} = \mathbf{0} \quad (3.3)$$

donde:

$$\mathbf{F}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{m}_1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{F}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_2 \\ \mathbf{m}_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{F}_p = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_p \\ \mathbf{m}_p \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{Q}_{12}] = \begin{bmatrix} [\mathbf{R}_{12}] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{S}_1][\mathbf{R}_{12}] & [\mathbf{R}_{12}] \end{bmatrix} \quad [\mathbf{Q}_{10}] = \begin{bmatrix} [\mathbf{R}_{10}] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{S}_p][\mathbf{R}_{10}] & [\mathbf{R}_{10}] \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{Q}_w] = \begin{bmatrix} [\mathbf{R}_{10}] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{S}_G][\mathbf{R}_{10}] & [\mathbf{R}_{10}] \end{bmatrix} \quad [\mathbf{W}] = \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

De tal manera que en lo general establecemos que

$$\mathbf{F}^A + \mathbf{F}^R = \mathbf{0} \quad (3.4)$$

y en donde:

$$\mathbf{F}^A = [\mathbf{Q}_{10}]\mathbf{F}_p + [\mathbf{Q}_w]\mathbf{W}$$

$$\mathbf{F}^R = \mathbf{F}_1 - [\mathbf{Q}_{12}]\mathbf{F}_2$$

siendo:

$\mathbf{F}^A$ = Torsor de agentes externos (fuerzas y momentos aplicados)

$\mathbf{F}^R$ = Torsor de reacción (fuerza resultante y momento resultante de reacción)

3.2.1 Análisis Estático de la Plataforma

Para la aplicación directa de las ecuaciones de equilibrio procedemos a verificar en forma previa que exista conformidad en nuestro sistema de ecuaciones, es decir que exista un número de incógnitas similar al número de ecuaciones que se pueden establecer. El número de elementos que conforman a la plataforma es de 19 y dado que en cada uno puede actuar la fuerza y el momento en tres direcciones posibles se pueden escribir seis ecuaciones para cada cuerpo usando la ecuación (3.4), esto es:

$$19 \times 6 = 114 \text{ ecuaciones}$$

Las incógnitas que presenta el sistema son:

	juntas	× elementos	×	incógnitas	=	parcial
Fuerza en juntas rotacionales	=	2×6	×	5	=	60
Fuerza en juntas universales	=	2×6	×	4	=	48
Torque en juntas rotacionales	=	1×6	×	1	=	6
Total						= 114

Dado que el número de incógnitas es de 114 y concuerda con el número de ecuaciones, procedemos a efectuar el análisis estático de la plataforma considerando los componentes de una cadena y la plataforma móvil.

Cuerpo 1i

El diagrama de cuerpo libre es el siguiente:

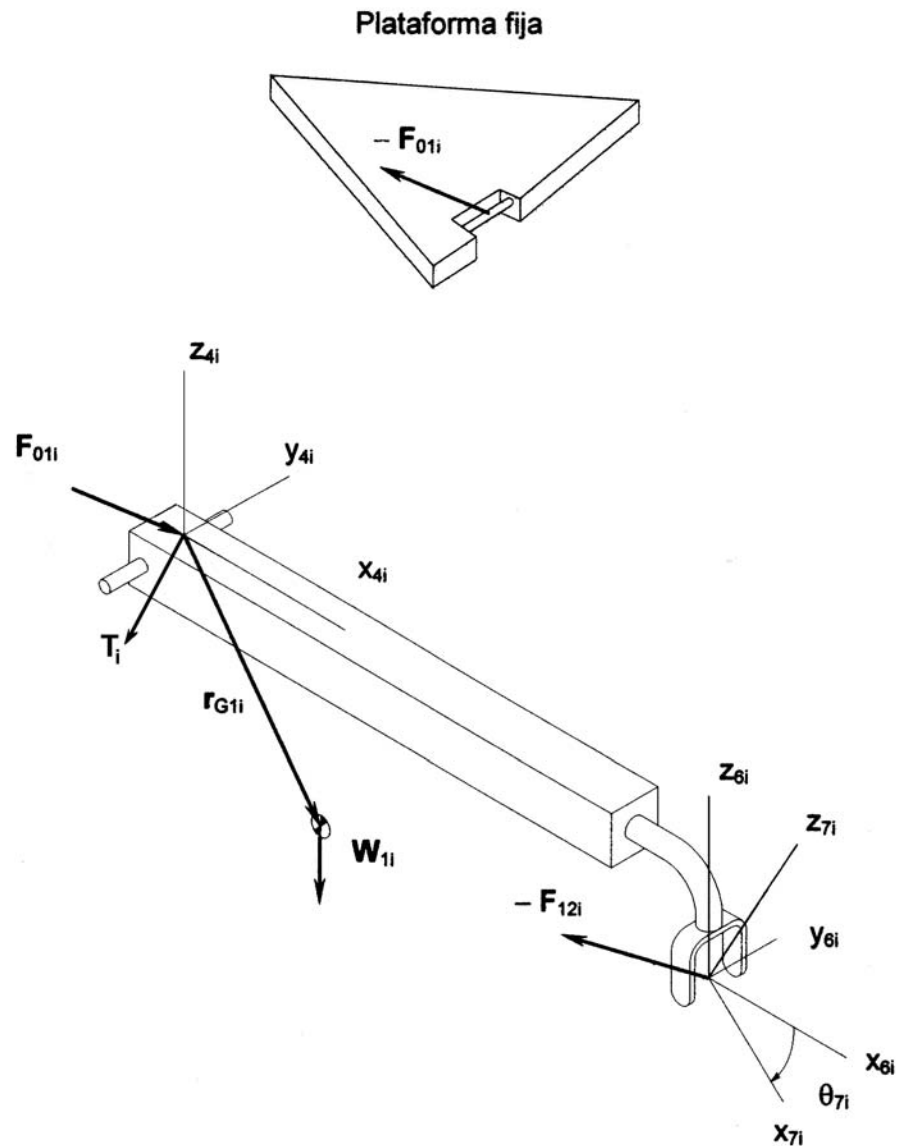


Figura 3.2 Diagrama de cuerpo libre del cuerpo 1i y la plataforma fija

El torque suministrado, así como la fuerza y el momento ejercidos por un cuerpo sobre otro en cualquier cadena son:

$\mathbf{T}_i$ = Torsor de torque suministrado al cuerpo $1i$

$\mathbf{F}_{01i}$ = Torsor de fuerza que ejerce el cuerpo 0 (plataforma fija) en el cuerpo $1i$

$\mathbf{F}_{12i}$ = Torsor de fuerza que ejerce el cuerpo $2i$ sobre el cuerpo $1i$

La ecuación general de equilibrio estático es:

$$\mathbf{F}_{4i}^A + \mathbf{F}_{4i}^R = \mathbf{0} \quad (3.5)$$

Donde:

$$\mathbf{F}_{4i}^A = \mathbf{T}_i + \mathbf{Q}_{4i,0} \mathbf{W}_{1i} \quad (3.6)$$

$$\mathbf{F}_{4i}^R = \mathbf{F}_{01i} - \mathbf{Q}_{4i,7i} \mathbf{F}_{12i} \quad (3.7)$$

Con:

$$\mathbf{T}_i = [0, 0, 0, 0, T_{4yi}, 0]^T$$

$$\mathbf{Q}_{4i,0} = \begin{bmatrix} [\mathbf{R}_{4i,0}] & [0] \\ [\mathbf{S}_{4i,0}][\mathbf{R}_{4i,0}] & [\mathbf{R}_{4i,0}] \end{bmatrix}$$

De acuerdo a las figuras 2.1 a 2.3 tenemos que:

$$\mathbf{R}_{0,4i} = \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i})\mathbf{R}_{z6}(\delta_{3i})\mathbf{R}_{z5}(\theta_{4i})$$

Entonces:

$$\mathbf{R}_{4i,0} = \mathbf{R}_{0,4i}^T = \mathbf{R}_{z5}^T(\theta_{4i})\mathbf{R}_{z6}^T(\delta_{3i})\mathbf{R}_{z6}^T(\delta_{1i})$$

$$\mathbf{R}_{4i,0} = \mathbf{R}_{z5}(-\theta_{4i})\mathbf{R}_{z6}(-\delta_{3i})\mathbf{R}_{z6}(-\delta_{1i})$$

y

$$\mathbf{S}_{4i,0} = \mathbf{S}_{G1i} = \mathbf{S}(x_{G1i}, y_{G1i}, z_{G1i}) = \begin{bmatrix} 0 & -z_{G1i} & y_{G1i} \\ z_{G1i} & 0 & -x_{G1i} \\ -y_{G1i} & x_{G1i} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{W}_{1i} = [0, 0, -m_{1i}g, 0, 0, 0]^T$$

$$\mathbf{F}_{01i} = [F_{01xi}, F_{01yi}, F_{01zi}, M_{01xi}, 0, M_{01zi}]^T$$

$$\mathbf{Q}_{4i,7i} = \begin{bmatrix} [\mathbf{R}_{4i,7i}] & [0] \\ [\mathbf{S}_{4i,7i}][\mathbf{R}_{4i,7i}] & [\mathbf{R}_{4i,7i}] \end{bmatrix}$$

Donde:

$$\mathbf{R}_{4i,7i} = \mathbf{R}_{z5}(\theta_{7i})$$

y

$$\mathbf{S}_{4i,7i} = \mathbf{S}(d_{5i}, 0, -d_{6i}) = \begin{bmatrix} 0 & -d_{6i} & 0 \\ d_{6i} & 0 & -d_{5i} \\ 0 & d_{5i} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}_{12i} = [F_{12xi}, F_{12yi}, F_{12zi}, 0, 0, M_{12zi}]^T$$

Cuerpo 2i

El diagrama de cuerpo libre es el siguiente:

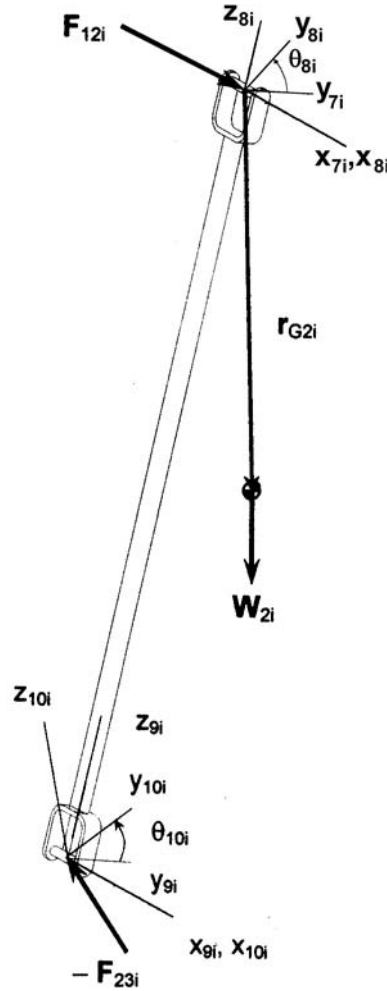


Figura 3.3 Diagrama de cuerpo libre del eslabón 2i

Para este eslabón, las fuerzas y momentos ejercidos son:

$\mathbf{F}_{12i}$ = Torsor de fuerza que ejerce el cuerpo 1i sobre el cuerpo 2i

$\mathbf{F}_{23i}$ = Torsor de fuerza que ejerce el cuerpo 3i sobre el cuerpo 2i

La ecuación general de equilibrio estático es:

$$\mathbf{F}_{7i}^A + \mathbf{F}_{7i}^R = \mathbf{0} \quad (3.8)$$

donde:

$$\mathbf{F}_{7i}^A = \mathbf{Q}_{7i,0} \mathbf{W}_{2i} \quad (3.9)$$

y:

$$\mathbf{F}_{71}^R = \mathbf{F}_{12i} - \mathbf{Q}_{7i,10i} \mathbf{F}_{23i} \quad (3.10)$$

Con:

$$\mathbf{Q}_{7i,0} = \begin{bmatrix} [\mathbf{R}_{7i,0}] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{S}_{7i,0}][\mathbf{R}_{7i,0}] & [\mathbf{R}_{7i,0}] \end{bmatrix}$$

siendo:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{0,7i} &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \mathbf{R}_{z6}(\delta_{3i}) \mathbf{R}_{z5}(\theta_{4i}) \mathbf{R}_{z5}(\theta_{7i}) \\ \mathbf{R}_{7i,0} &= \mathbf{R}_{0,7i}^T = \mathbf{R}_{z5}^T(\theta_{7i}) \mathbf{R}_{z5}^T(\theta_{4i}) \mathbf{R}_{z6}^T(\delta_{3i}) \mathbf{R}_{z6}^T(\delta_{1i}) \\ \mathbf{R}_{7i,0} &= \mathbf{R}_{z5}(-\theta_{7i}) \mathbf{R}_{z5}(-\theta_{4i}) \mathbf{R}_{z6}(-\delta_{3i}) \mathbf{R}_{z6}(-\delta_{1i}) \\ &= \mathbf{R}_{z5}(-\theta_{4i} - \theta_{7i}) \mathbf{R}_{z6}(-\delta_{1i} - \delta_{3i}) \end{aligned}$$

y:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{7i,0} &= \mathbf{R}_{z4}(\theta_{8i}) \mathbf{S}_{G2i} \mathbf{R}_{z4}(\theta_{8i})^T \\ &= \mathbf{R}_{z4}(\theta_{8i}) \mathbf{S}(x_{G2i}, y_{G2i}, z_{G2i}) \mathbf{R}_{z4}(-\theta_{8i}) \end{aligned}$$

con:

$$\mathbf{S}(x_{G2i}, y_{G2i}, z_{G2i}) = \begin{bmatrix} 0 & -z_{G2i} & y_{G2i} \\ z_{G2i} & 0 & -x_{G2i} \\ -y_{G2i} & x_{G2i} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{W}_{2i} = [0, 0, -m_{2i}g, 0, 0, 0]^T$$

$$\mathbf{Q}_{7i,10i} = \begin{bmatrix} [\mathbf{R}_{7i,10i}] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{S}_{7i,10i}][\mathbf{R}_{7i,10i}] & [\mathbf{R}_{7i,10i}] \end{bmatrix}$$

donde:

$$\mathbf{R}_{7i,10i} = \mathbf{R}_{z4}(\theta_{8i}) \mathbf{R}_{z4}(\theta_{10i}) = \mathbf{R}_{z4}(\theta_{8i} + \theta_{10i})$$

y:

$$\mathbf{S}_{7i,10i} = \mathbf{R}_{z4}(\theta_{8i}) \mathbf{S}(0, 0, -d_{9i}) \mathbf{R}_{z4}(-\theta_{8i})$$

siendo:

$$\mathbf{S}(0, 0, -d_{9i}) = \begin{bmatrix} 0 & -d_{9i} & 0 \\ -d_{9i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}_{23i} = [F_{23xi}, F_{23yi}, F_{23zi}, 0, 0, M_{23zi}]^T$$

Cuerpo 3i

El diagrama de cuerpo libre es el siguiente

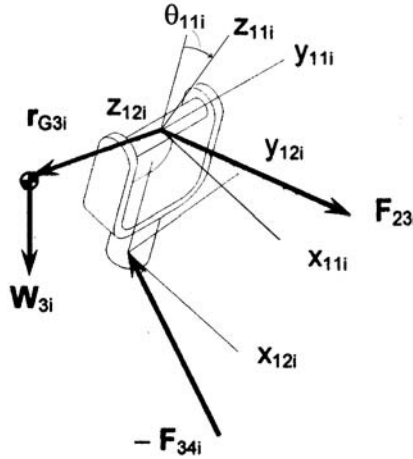


Figura 3.4 Diagrama de cuerpo libre del cuerpo 3i

Las fuerzas y momentos ejercidos en la horquilla que se une a la plataforma móvil son:

$\mathbf{F}_{23i}$ = Torsor de fuerza que ejerce el cuerpo 2i sobre el cuerpo 3i

$\mathbf{F}_{34i}$ = Torsor de fuerza que ejerce el cuerpo 4i sobre el cuerpo 3i

La ecuación general de equilibrio estático es:

$$\mathbf{F}_{10i}^A + \mathbf{F}_{10i}^R = \mathbf{0} \quad (3.11)$$

donde:

$$\mathbf{F}_{10i}^A = \mathbf{Q}_{10i,0} \mathbf{W}_{3i} \quad (3.12)$$

$$\mathbf{F}_{10i}^R = \mathbf{F}_{23i} - \mathbf{Q}_{10i,12i} \mathbf{F}_{34i} \quad (3.13)$$

Con:

$$\mathbf{Q}_{10i,0} = \begin{bmatrix} [\mathbf{R}_{10i,0}] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{S}_{10i,0}] [\mathbf{R}_{10i,0}] & [\mathbf{R}_{10i,0}] \end{bmatrix}$$

como:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{0,10i} &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i}) \mathbf{R}_{z6}(\delta_{3i}) \mathbf{R}_{z5}(\theta_{4i}) \mathbf{R}_{z5}(\theta_{7i}) \mathbf{R}_{z4}(\theta_{8i}) \mathbf{R}_{z4}(\theta_{10i}) \\ \mathbf{R}_{0,10i} &= \mathbf{R}_{z6}(\delta_{1i} + \delta_{3i}) \mathbf{R}_{z5}(\theta_{4i} + \theta_{7i}) \mathbf{R}_{z4}(\theta_{8i} + \theta_{10i}) \end{aligned}$$

entonces:

$$\mathbf{R}_{10i,0} = \mathbf{R}_{z4}(-\theta_{8i} - \theta_{10i})\mathbf{R}_{z5}(-\theta_{4i} - \theta_{7i})\mathbf{R}_{z6}(-\delta_{1i} - \delta_{3i})$$

siendo:

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_{10i,0} &= \mathbf{R}_{z5}(\theta_{11i})\mathbf{S}_{G3i}\mathbf{R}_{z5}(\theta_{11i})^T \\ &= \mathbf{R}_{z5}(\theta_{11i})\mathbf{S}(x_{G3i}, y_{G3i}, z_{G3i})\mathbf{R}_{z5}(-\theta_{11i})\end{aligned}$$

y en donde:

$$\mathbf{S}(x_{G3i}, y_{G3i}, z_{G3i}) = \begin{bmatrix} 0 & -z_{G3i} & y_{G3i} \\ z_{G3i} & 0 & -x_{G3i} \\ -y_{G3i} & x_{G3i} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{W}_{3i} = [0, 0, -m_{3i}g, 0, 0, 0]^T$$

$$\mathbf{Q}_{10i,12i} = \begin{bmatrix} [\mathbf{R}_{10i,12i}] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{S}_{10i,12i}][\mathbf{R}_{10i,12i}] & [\mathbf{R}_{10i,12i}] \end{bmatrix}$$

con:

$$\mathbf{R}_{10i,12i} = \mathbf{R}_{z5}(\theta_{11i})$$

y:

$$\mathbf{S}_{10i,12i} = \mathbf{R}_{z5}(\theta_{11i})\mathbf{S}(0, 0, -d_{12i})\mathbf{R}_{z5}(-\theta_{11i})$$

para este caso:

$$\mathbf{S}(0, 0, -d_{12i}) = \begin{bmatrix} 0 & -d_{12i} & 0 \\ -d_{12i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}_{34i} = [F_{34xi}, F_{34yi}, F_{34zi}, M_{34xi}, M_{34yi}, 0]^T$$

Plataforma móvil P

El diagrama de cuerpo libre es el siguiente

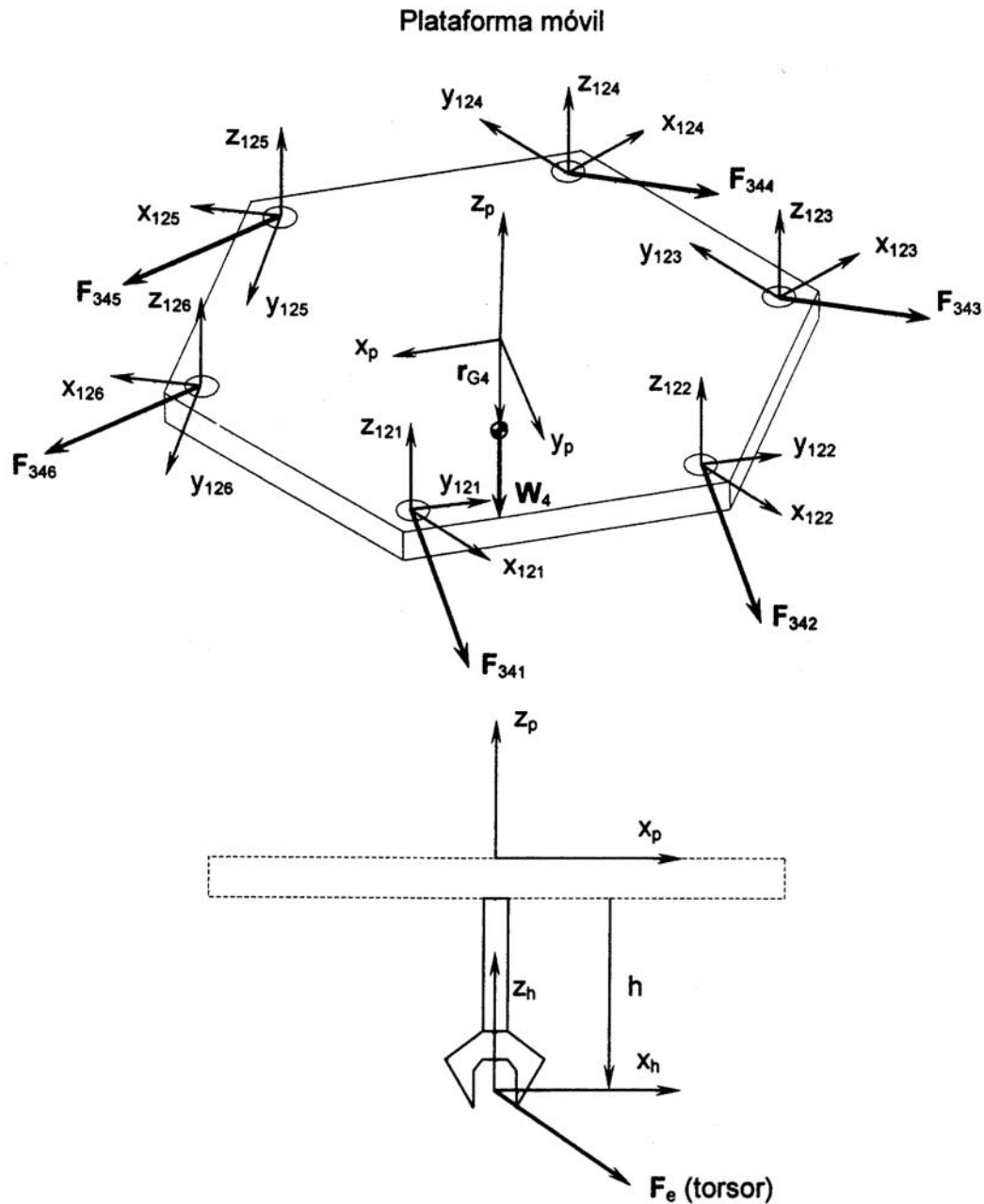


Figura 3.5 Diagrama de cuerpo libre de la plataforma móvil y del efector final

Las fuerzas y momentos ejercidos sobre la plataforma móvil son:

F_{34i} = Torsor de fuerza que ejerce el cuerpo $3i$ sobre el cuerpo $4i$

F_e = Torsor de fuerza externa actuando sobre el cuerpo $4i$

La ecuación general de equilibrio estático es:

$$\mathbf{F}_P^A + \mathbf{F}_P^R = \mathbf{0} \quad (3.14)$$

donde:

$$\mathbf{F}_P^A = \mathbf{Q}_{P,e} \mathbf{F}_e + \mathbf{Q}_{P,0} \mathbf{W}_P \quad (3.15)$$

$$\mathbf{F}_P^R = \sum_{i=1}^6 \mathbf{Q}_{P,12i} \mathbf{F}_{34i} \quad (3.16)$$

Con:

$$\mathbf{Q}_{P,e} = \begin{bmatrix} [\mathbf{R}_{P,e}] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{S}_{P,e}][\mathbf{R}_{P,e}] & [\mathbf{R}_{P,e}] \end{bmatrix}$$

Y en donde:

$$\mathbf{R}_{P,e} = \mathbf{R}_{P,0}$$

y

$$\mathbf{S}_{P,e} = \mathbf{S}(0,0,-h)$$

$$\mathbf{F}_e = [F_{ex}, F_{ey}, F_{ez}, M_{ex}, M_{ey}, M_{ez}]^T$$

$$\mathbf{Q}_{P,0} = \begin{bmatrix} [\mathbf{R}_{P,0}] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{S}_{P,0}][\mathbf{R}_{P,0}] & [\mathbf{R}_{P,0}] \end{bmatrix}$$

como:

$$\mathbf{R}_{0,P} = \mathbf{R}_{z6}(\theta) \mathbf{R}_{z4}(\psi) \mathbf{R}_{z6}(\varphi)$$

entonces:

$$\mathbf{R}_{P,0} = \mathbf{R}_{z6}(-\varphi) \mathbf{R}_{z4}(-\psi) \mathbf{R}_{z6}(-\theta)$$

y:

$$\mathbf{S}_{P,0} = \mathbf{S}(x_{GP}, y_{GP}, z_{GP})$$

$$\mathbf{W}_P = [0, 0, -m_P g, 0, 0, 0]^T$$

$$\mathbf{Q}_{P,12i} = \begin{bmatrix} [\mathbf{R}_{P,12i}] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{S}_{P,12i}][\mathbf{R}_{P,12i}] & [\mathbf{R}_{P,12i}] \end{bmatrix}$$

en donde:

$$\mathbf{R}_{P,12i} = \mathbf{R}_{z6}(\delta_{13i}) \mathbf{R}_{z6}(\theta_{15i}) = \mathbf{R}_{z6}(\delta_{13i} + \theta_{15i})$$

y:

$$\mathbf{S}_{P,12i} = \mathbf{R}_{z6}(\delta_{13i}) \mathbf{S}(d_{14i}, 0, 0) \mathbf{R}_{z6}(-\delta_{13i})$$

$$\mathbf{F}_{34i} = [F_{34xi}, F_{34yi}, F_{34zi}, M_{34xi}, M_{34yi}, 0]^T$$

3.3 Solución estática

El conjunto de ecuaciones a resolver es de tipo lineal y por esta razón se procede a buscar la solución en forma numérica, para ello formulamos el sistema de ecuaciones de la siguiente manera:

$$EcuaEstaticas = VECTORCERO \quad (3.17)$$

El lado izquierdo del sistema de ecuaciones es:

$$EcuaEstaticas = \{ees11, ees21, ees31, ees12, ees22, ees32, ees13, ees23, ees33, ees14, ees24, ees34, ees15, ees25, ees35, ees16, ees26, ees36, eesp\}$$

cada componente tiene la forma que hemos establecido anteriormente:

$$\begin{aligned} ees1i &= \mathbf{F}_{4i}^A + \mathbf{F}_{4i}^R \\ ees2i &= \mathbf{F}_{7i}^A + \mathbf{F}_{7i}^R \\ ees3i &= \mathbf{F}_{10i}^A + \mathbf{F}_{10i}^R \\ eesp &= \mathbf{F}_P^A + \mathbf{F}_P^R \end{aligned}$$

mientras que el lado derecho es:

$$VECTORCERO = \{CERO, CERO, CERO, CERO, CERO, CERO, CERO, CERO, CERO, CERO, CERO, CERO, CERO, CERO, CERO, CERO\}$$

$$\text{con } CERO = \{\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}\}$$

Las incógnitas que buscamos para cada cadena "i" son el torque suministrado y las fuerzas y momentos generados en cada una de las juntas de los componentes, mismos han sido representados en el diagrama de cuerpo libre correspondiente, en general, las componentes respectivas son las siguientes: $T_{4yi}, F_{01xi}, F_{01yi}, F_{01zi}, M_{01xi}, M_{01zi}, F_{12xi}, F_{12yi}, F_{12zi}, M_{12xi}, F_{23xi}, F_{23yi}, F_{23zi}, M_{23xi}, F_{34xi}, F_{34yi}, F_{34zi}, M_{34xi}, M_{34yi}$.

Los datos a considerar de masa, posición del centro de masa, orientación de la plataforma, ubicación del efector final, fuerza externa aplicada y momento externo aplicado a la plataforma móvil para el cálculo numérico de las incógnitas son:

3. Análisis Estático

Aceleración del campo gravitacional:

$$g = 9.81 \text{ m/s}^2$$

Masa:

$$m_{1i} = 0.074 \text{ kg}$$

$$m_{2i} = 0.092 \text{ kg}$$

$$m_{3i} = 0.032 \text{ kg}$$

$$m_p = 0.22 \text{ kg}$$

Posición y orientación de la plataforma:

$$x_p = 0$$

$$y_p = 0$$

$$z_p = -0.5 \text{ m}$$

$$\theta = 0^\circ$$

$$\psi = 0^\circ$$

$$\varphi = 0^\circ$$

Posición del centro de masa de cada cuerpo:

$$x_{G1} = d_{51}/2 \text{ m}$$

$$y_{G1} = 0$$

$$z_{G1} = d_{61}/2 \text{ m}$$

$$x_{G2} = 0$$

$$y_{G2} = 0$$

$$z_{G2} = -d_{91}/2 \text{ m}$$

$$x_{G3} = 0$$

$$y_{G3} = 0$$

$$z_{G3} = -d_{121}/2 \text{ m}$$

$$x_{GP} = 0$$

$$y_{GP} = 0$$

$$z_{GP} = -0.02 \text{ m}$$

Fuerza externa neta aplicada:

$$F_{ex} = 1 \text{ N}$$

$$F_{ey} = 0$$

$$F_{ez} = 1 \text{ N}$$

Momento externo neto aplicado:

$$M_{ex} = 0$$

$$M_{ey} = 5$$

$$M_{ez} = 0 \text{ Nm}$$

Distancia de la plataforma fija al centro efector final

$$h = 0.05 \text{ m}$$

Una vez que se desarrolla el código correspondiente y se ejecuta el programa obtenemos los resultados de torque, fuerza y momento en cada una de las juntas de las cadenas.

3.3.1 Torque T_{4yi}

Los gráficos siguientes nos muestran en primer lugar el torque requerido en el "motor" de la plataforma fija que mueve al eslabón motriz de cada cadena (i) para mantener el equilibrio estático en cualquiera de los puntos que se asocian a la trayectoria de movimiento elegida.

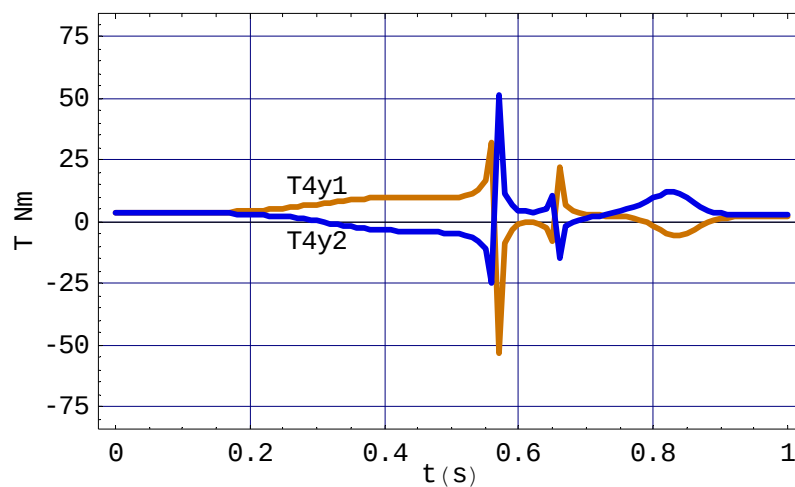
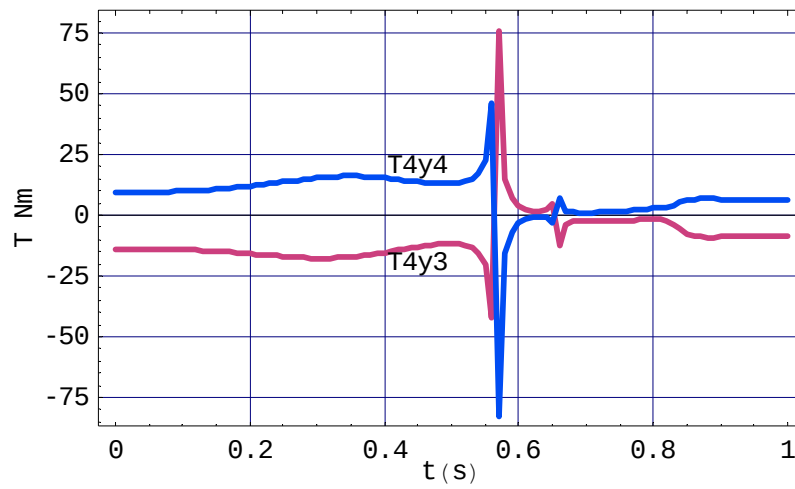
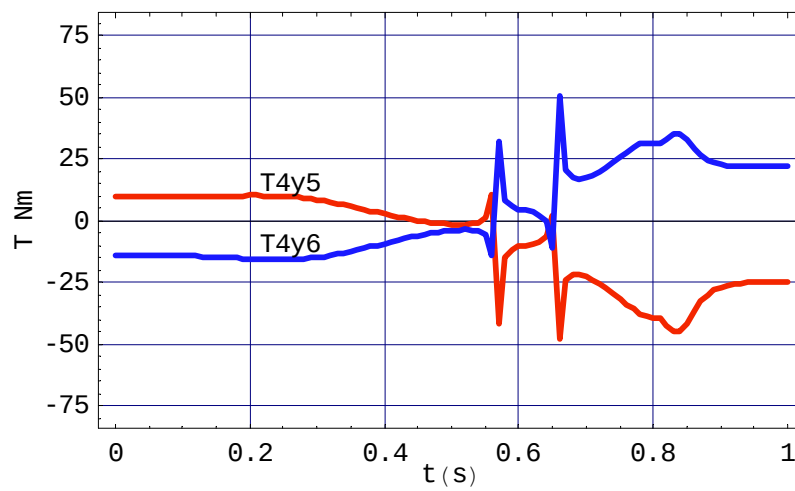


Figura 3.6 Torque T_{4y} en las cadenas 1 y 2

Figura 3.7 Torque T_{4y} en las cadenas 3 y 4Figura 3.8 Torque T_{4y} en las cadenas 5 y 6

3.3.2 Fuerza $\mathbf{F}_{01i}$

La gráfica de la magnitud de la fuerza $\mathbf{F}_{01i}$ entre la plataforma fija (0) y el brazo motriz (1) en cada cadena (i) se muestra a continuación

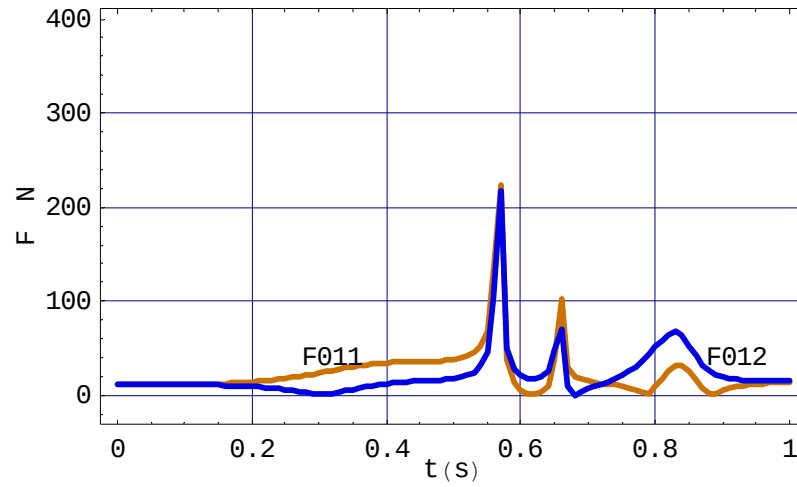


Figura 3.9 Fuerza $\mathbf{F}_{01}$ en las cadenas 1 y 2

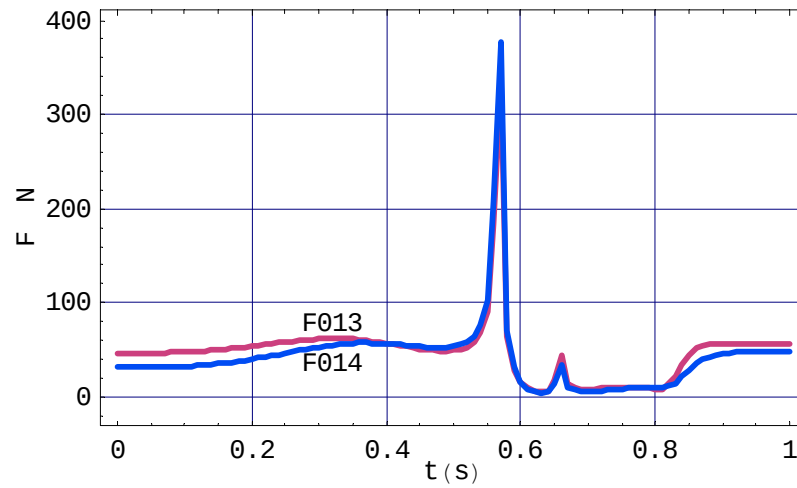
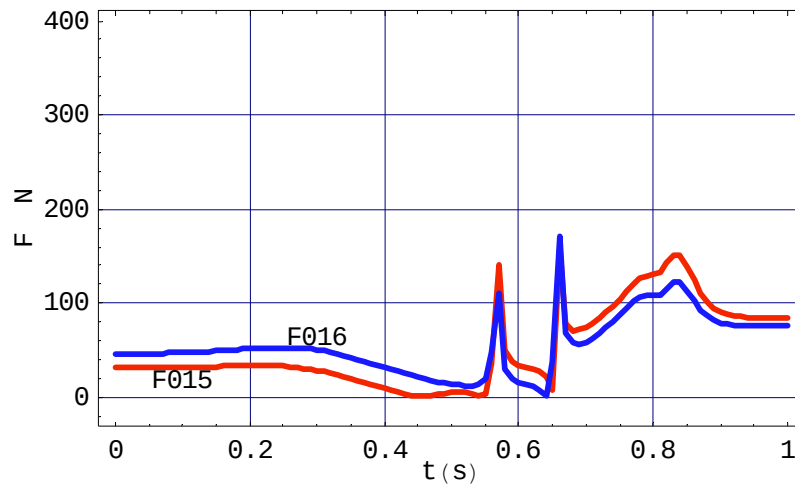
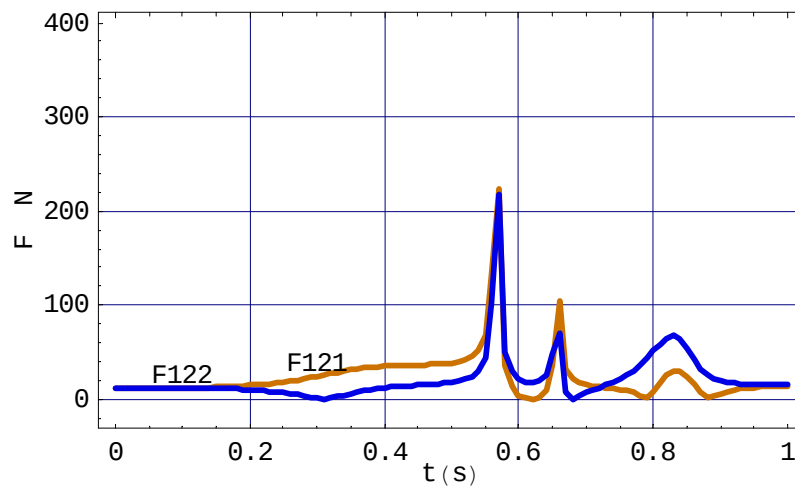


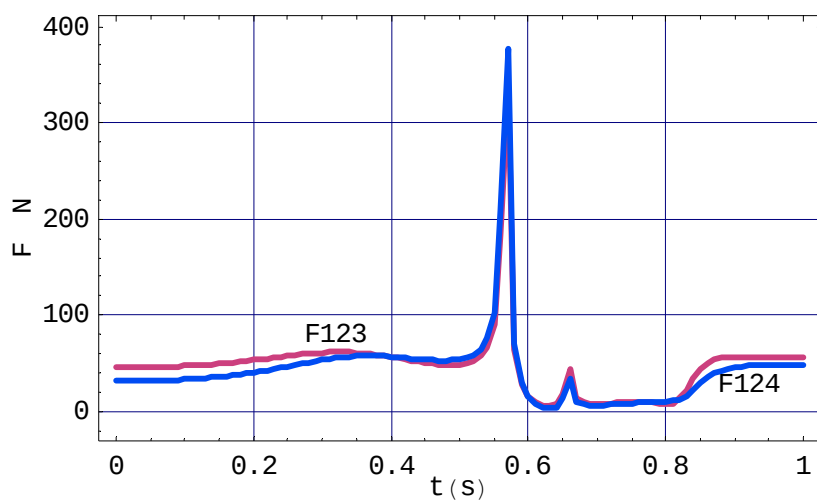
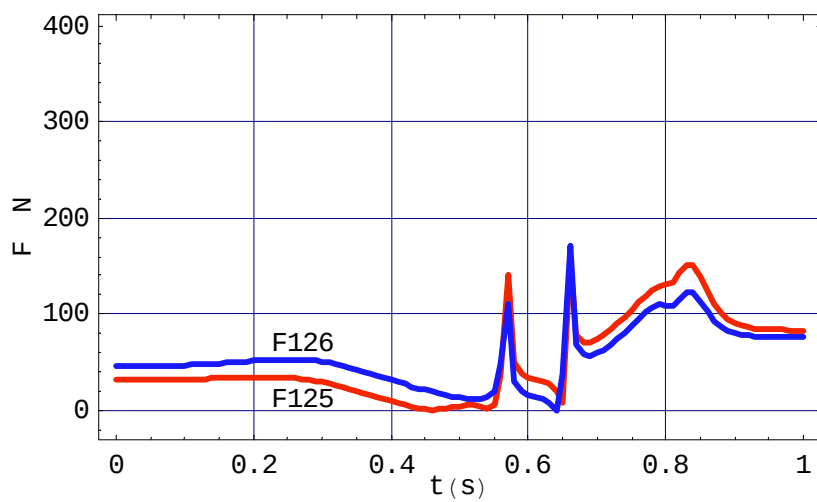
Figura 3.10 Fuerza $\mathbf{F}_{01}$ en las cadenas 3 y 4

Figura 3.11 Fuerza F_{01} en las cadenas 5 y 6

3.3.3 Fuerza F_{12i}

Las gráficas de la magnitud de la fuerza F_{12i} en la cruceta de la junta del brazo motriz (1) y el elemento de conexión (2) en cada cadena (i) son las siguientes:

Figura 3.12 Fuerza F_{12} en las cadenas 1 y 2

Figura 3.13 Fuerza F_{12} en las cadenas 3 y 4Figura 3.14 Fuerza F_{12} en las cadenas 5 y 6

3.3.4 Fuerza $\mathbf{F}_{23i}$

Las gráficas de la magnitud de la fuerza en la cruceta de la junta del elemento de conexión (2) y el eslabón (3) que se ensambla en la plataforma móvil en cada cadena (i) ($\mathbf{F}_{23i}$) son las siguientes:

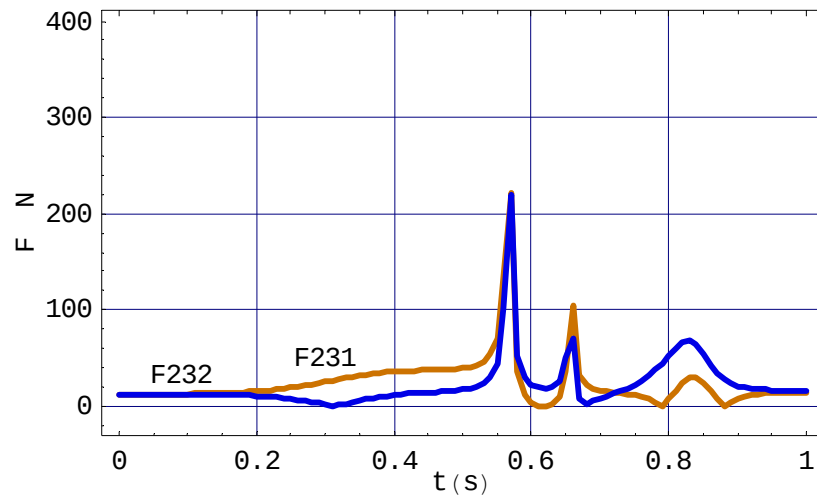


Figura 3.15 Fuerza $\mathbf{F}_{23}$ en las cadenas 1 y 2

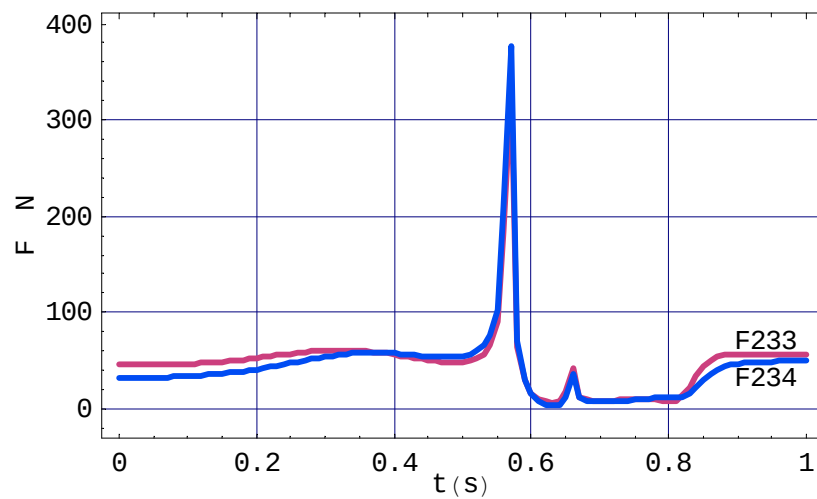
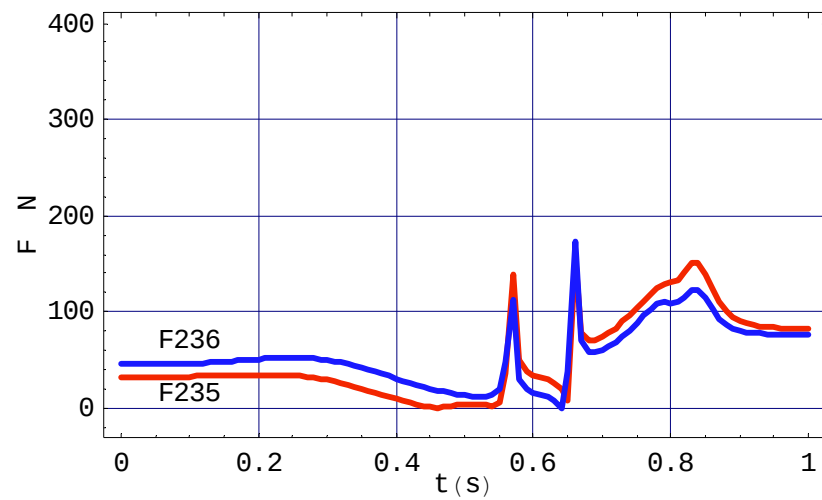
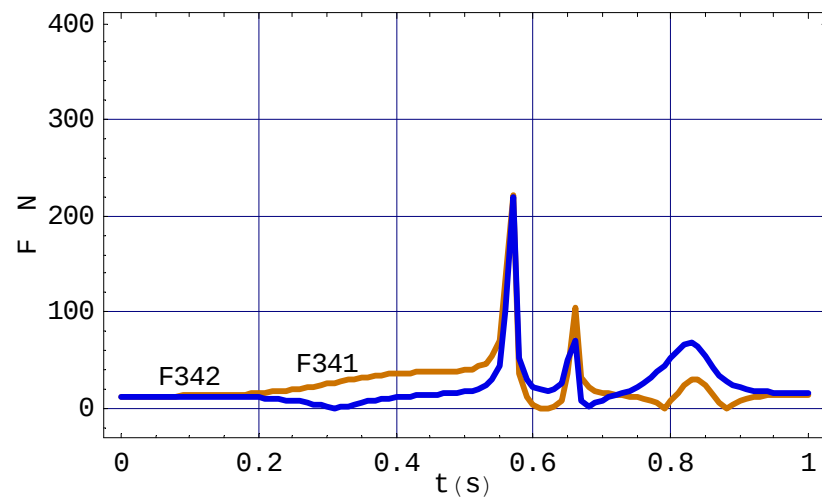


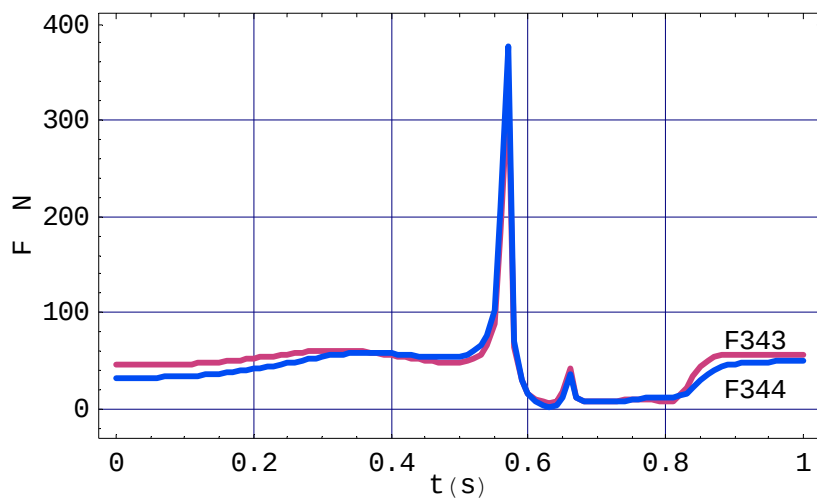
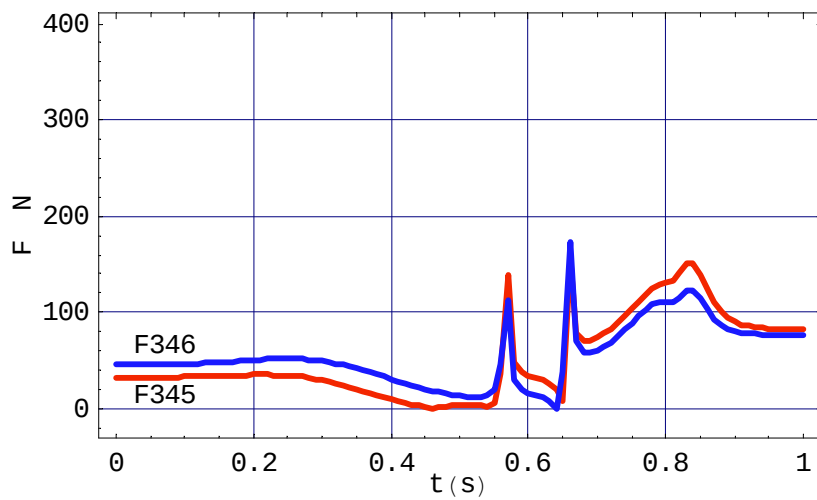
Figura 3.16 Fuerza $\mathbf{F}_{23}$ en las cadenas 3 y 4

Figura 3.17 Fuerza F_{23} en las cadenas 5 y 6

3.3.5 Fuerza F_{34i}

Las gráficas de la magnitud de la fuerza generada en el ensamble de la junta (3) con la plataforma móvil (4) en cada cadena (i) (F_{34i}) son las siguientes:

Figura 3.18 Fuerza F_{34} en las cadenas 1 y 2

Figura 3.19 Fuerza $\mathbf{F}_{34}$ en las cadenas 3 y 4Figura 3.20 Fuerza $\mathbf{F}_{34}$ en las cadenas 5 y 6

3.3.6 Momento M_{01i}

La magnitud del momento requerido (M_{01i}) para el equilibrio estático en la primera de las juntas de cada cadena es el que se muestra a continuación:

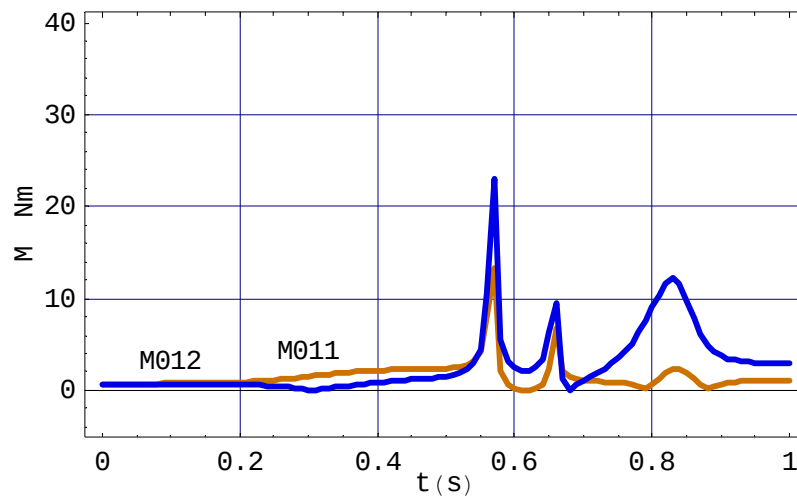


Figura 3.21 Momento M_{01} aplicado en la junta 1 de las cadenas 1 y 2

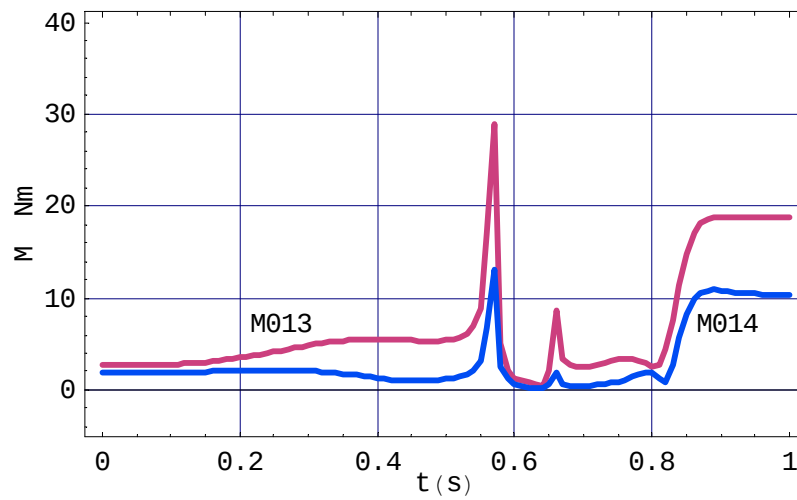


Figura 3.22 Momento M_{01} aplicado en la junta 1 de las cadenas 3 y 4

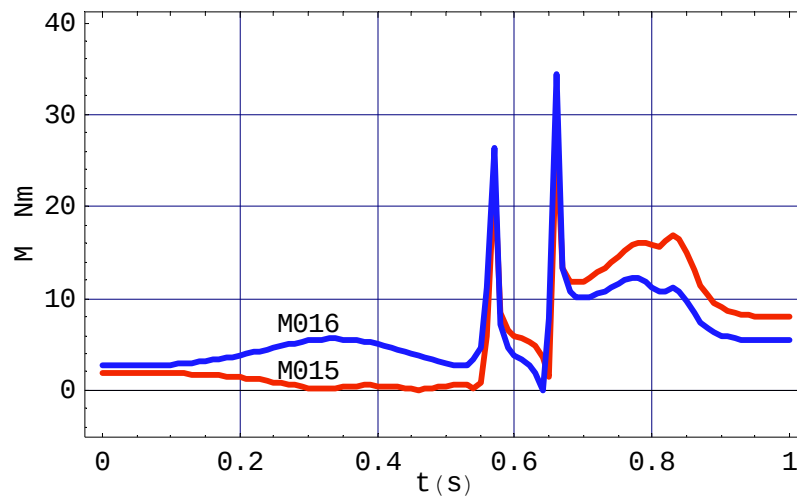


Figura 3.23 Momento M_{01} aplicado en la junta 1 de las cadenas 5 y 6

3.3.7 Momento M_{12i}

En la cruceta de la junta que une al eslabón 1 con el eslabón 2, el momento requerido para el equilibrio en cada cadena (i) (M_{12i}) es el que se muestra a continuación

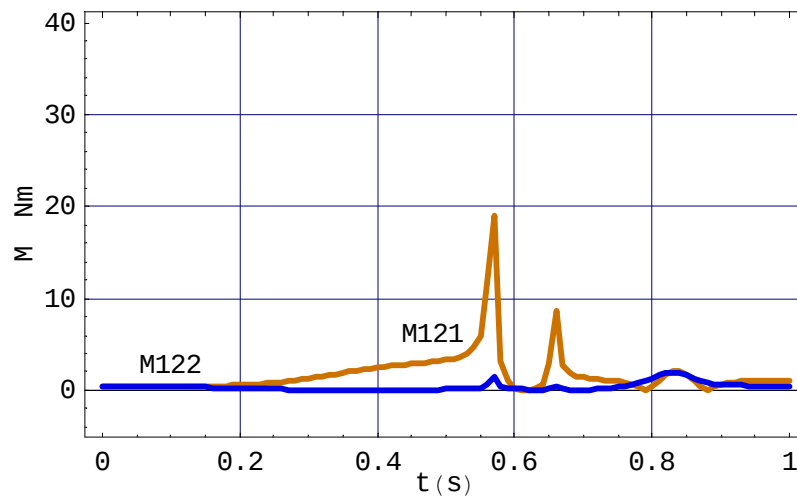
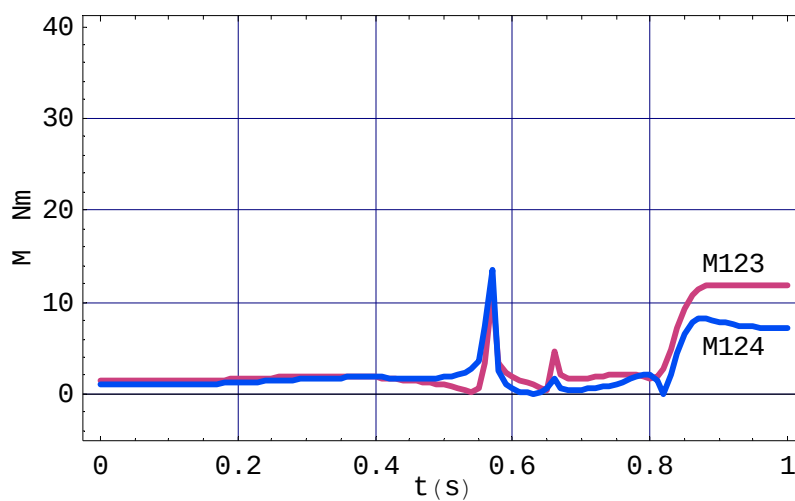
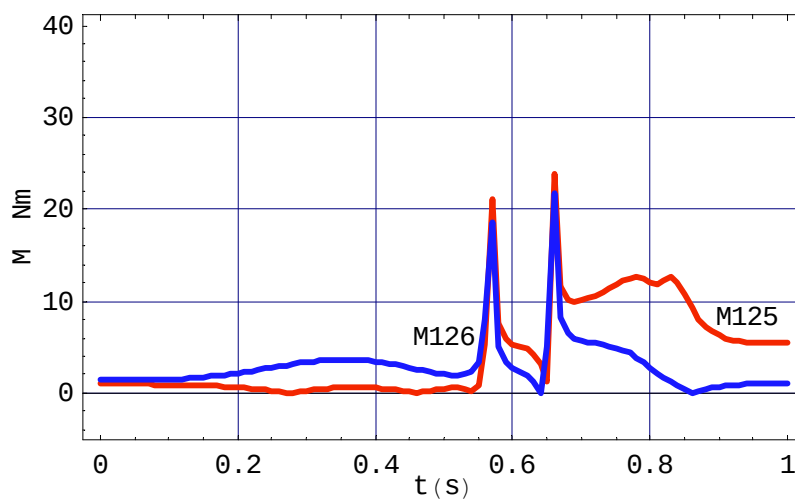


Figura 3.24 Momento M_{12} aplicado en la junta 1 de las cadenas 1 y 2

Figura 3.25 Momento $\mathbf{M}_{12}$ aplicado en la junta 1 de las cadenas 3 y 4Figura 3.26 Momento $\mathbf{M}_{12}$ aplicado en la junta 1 de las cadenas 5 y 6

3.3.8 Momento M_{23i}

Para la junta que une a los eslabones 2 y 3, tenemos los siguientes gráficos de resultados para cada cadena (i)

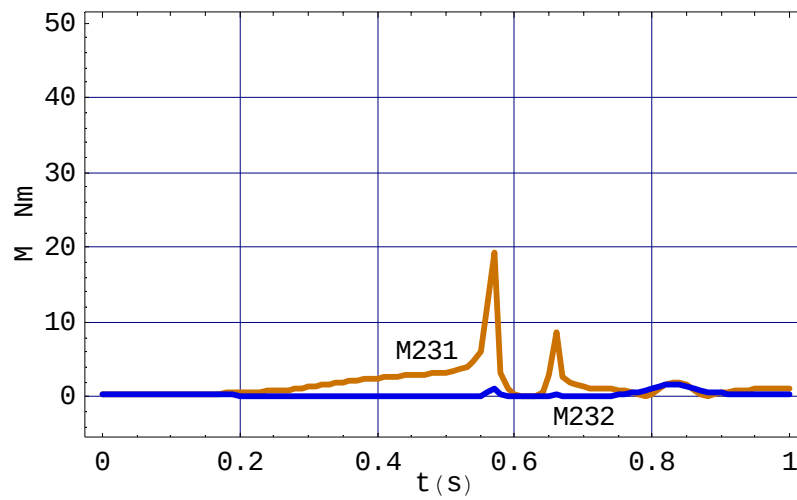


Figura 3.27 Momento M_{23} aplicado en la junta 1 de las cadenas 1 y 2

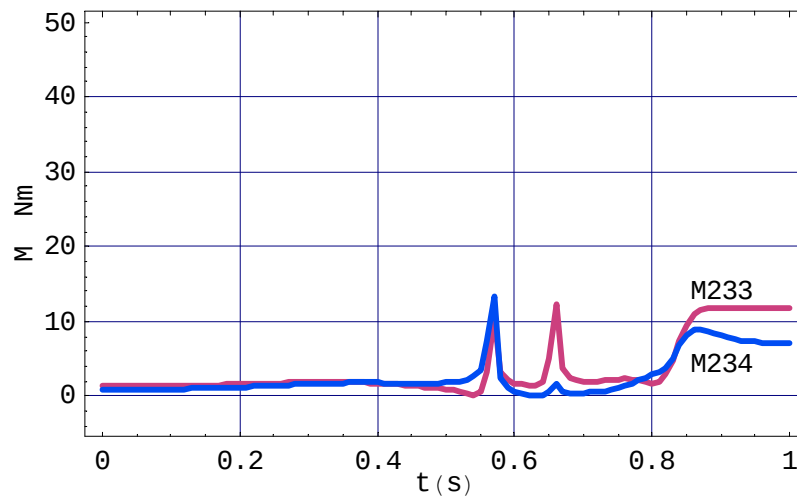


Figura 3.28 Momento M_{23} aplicado en la junta 1 de las cadenas 3 y 4

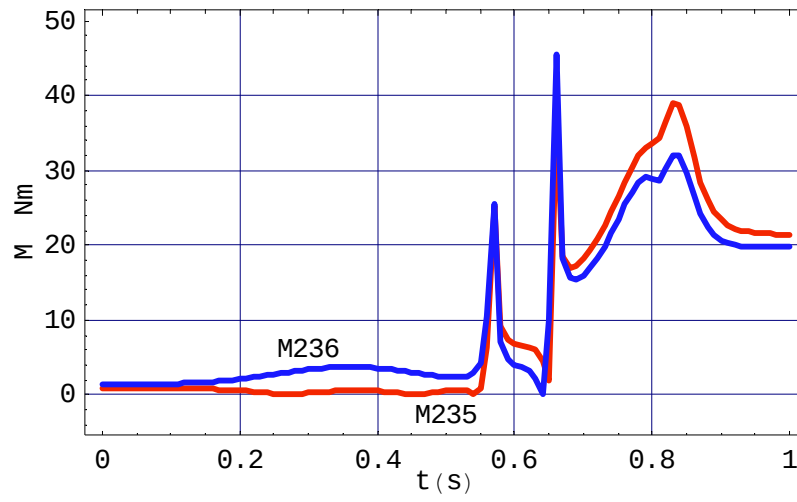


Figura 3.29 Momento $\mathbf{M}_{23}$ aplicado en la junta 1 de las cadenas 5 y 6

3.3.9 Momento $\mathbf{M}_{34i}$

Para la última junta tenemos los siguientes gráficos de momento requerido en el equilibrio estático ($\mathbf{M}_{34}$) en cada cadena (i)

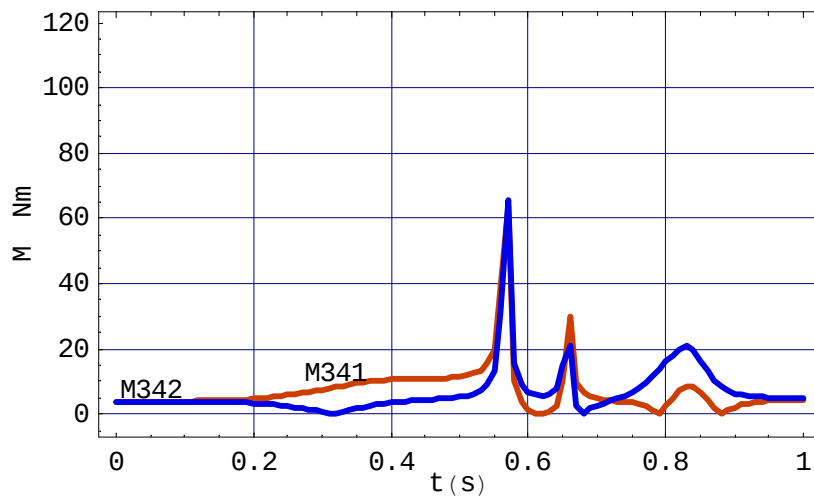


Figura 3.30 Momento $\mathbf{M}_{34}$ aplicado en la junta 1 de las cadenas 1 y 2

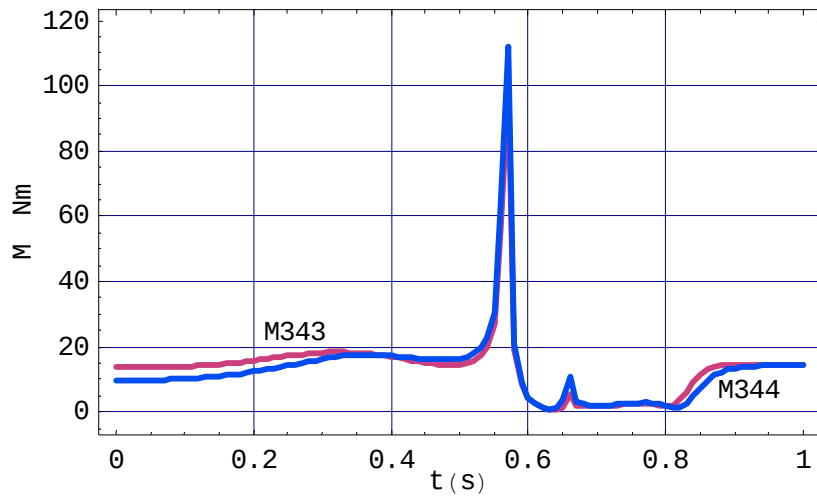


Figura 3.31 Momento $\mathbf{M}_{34}$ aplicado en la junta 1 de las cadenas 3 y 4

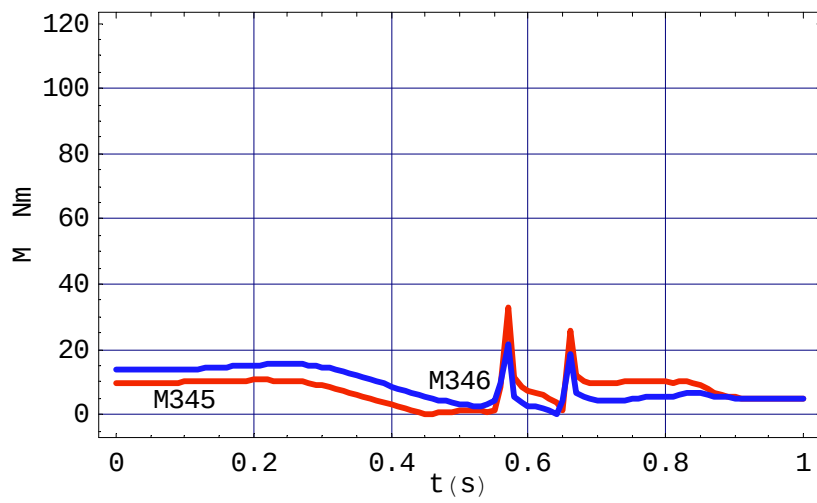


Figura 3.32 Momento $\mathbf{M}_{34}$ aplicado en la junta 1 de las cadenas 5 y 6

Conclusiones

La metodología empleada para el análisis estático de una plataforma paralela de seis grados de libertad, nos brinda la flexibilidad que se requiere en el diseño cinemático de este tipo de sistemas, pues la geometría propuesta puede ser modificada para obtener valores de torque, fuerza y momento óptimos para el equilibrio estático, siendo esto, una ventaja al momento de desarrollar un modelo dinámico que conlleve al diseño mecánico total de cada uno de los componentes de las seis cadenas y de las plataformas, ya que de acuerdo a los resultados, podemos observar un comportamiento característico por cada par de cadenas, así las cadenas 1 y 2 presentan un perfil similar en cuanto a posición y velocidad se refiere y de igual manera ocurre con las cadenas etiquetadas como 3 y 4 y 5 y 6, lo cual nos proporciona una idea clara de cómo transcurre el movimiento paralelo para cada par de cadenas cinemáticas y como es que se alcanzan valores críticos de velocidad de acuerdo a la trayectoria y a las dimensiones propuestas para cada uno de los elementos.

Para el análisis estático también se procedió a agrupar los valores de torque, fuerza y momento por cada par de elementos porque se tiene un perfil (comportamiento) semejante al caso de la cinemática, presentándose los valores extremos justo en el instante en que el tiempo toma un valor aproximado de 0.6 segundos, esto es, podemos establecer que una vez que el sistema ha recorrido la mitad de la trayectoria, se generan los valores críticos de cada variable ya que el sistema alcanza los puntos singulares, es decir, la ubicación en la que el modelo matemático presenta varias soluciones posibles, lo cual se traduce físicamente como la imposibilidad para controlar el movimiento (o la no ensamblabilidad del mecanismo) ya que la plataforma móvil coincide en algún plano con uno de los eslabones (o bien otra posibilidad es que la plataforma gire 90° alrededor de un eje perpendicular a ella) de tal manera que justo en tales posiciones los valores de torque, fuerza y momento se incrementan en forma notable para reducir de nuevo su magnitud acercándose en algunos casos a los valores iniciales al momento de empezar el recorrido en la trayectoria especificada.

El desarrollo algebraico y la secuencia de cálculo numérica se complementan de tal suerte que los resultados obtenidos nos indican que es factible definir una geometría adecuada para proporcionar una alta rigidez a los componentes con el propósito de reducir la posibilidad vibraciones, y otros efectos no deseados, pero más importante aún, se tiene ventaja con respecto a los manipuladores seriales ya que es posible que se pueda definir un volumen o área de trabajo de tamaño reducido, permitiendo que las funciones para el control de posición tengan una precisión milimétrica, lo cual a su vez implica que se pueda trabajar con altas velocidades y aceleraciones las cuales se pueden traducir en torsores de gran utilidad para algunas aplicaciones en las que se requiere transmitir (o emplear) una gran fuerza con un mínimo de energía o potencia consumida.

Bibliografia

- [1] Alizade, Rasim I. and Tagiyev Nazim R., **A forward and reverse displacement analysis of a 6-DOF in parallel manipulator**, *Mechanism and Machine Theory*, Volume 29, Issue 1, January 1994, pages 115-124
- [2] Bonev, Ilian A. and Ryu Jeha., **A new approach to orientation workspace analysis of 6-DOF parallel manipulators**, *Mechanism and Machine Theory*, Volume 36, Issue 1, January 2001., pages 15-28
- [3] Cappel, K.L., **Motion simulator**, *US Patent No. 3,295,224*, January 3, 1967.
- [4] Clavel, R., **Conception d'un robot parallèle rapide à 4 degrés de liberté**, *Ph.D. Thesis, EPFL, Lausanne, Suisse*, 1991.
- [5] Gough, V.E. and Whitehall, S.G., **Universal tyre test machine**, *Proceedings of the FISITA Ninth International Technical Congress*, pp. 117-137, May, 1962.
- [6] Gwinnett, J.E., **Amusement devices**, *US Patent No. 1,789,680*, January 20, 1931
- [7] Merlet, J.P., **Parallel manipulators: State of Art and Perspectives**.
http://www.inria.fr/priesme/personnel/merlet/Etat/etat_de_lart.html
- [8] Nikravish, P.E., **Computer-Aided Analysis of Mechanical Systems**, Prentice-Hall, 1988
- [9] Pollard, W.L.G., **Spray painting machine**, *US Patent No. 2,213,108*, August 26, 1940
- [10] Shen H., Yang T. and Ma L. **Synthesis and structure analysis of kinematic structures of 6-dof parallel robotic mechanism**, *Mechanism and Machine Theory*, Volume 40, Issue 10, October 2005, pages 1099-1208

-
- [11] Spong, Mark W. and Vidyasagar M., **Robot Dynamics and Control**, John Wiley & Sons, 1989
 - [12] Stejskal, V. and Valasek M., **Kinematics and Dynamics of Machinery**, Marcel Dekker, 1996
 - [13] Stewart, D., **A platform with six degrees of freedom**, *Proceedings of the IMechE*, Vol. 180, Pt. 1, No. 15, pp. 371-385, 1965-66.
 - [14] Waldron, K. J. and Kinzel G.L., **Kinematics, Dynamics and Design of Machinery**, John Wiley & Sons, 2003
 - [15] Yang, DCH and Lee, TW, **Feasibility Study of a Platform Type of Robotic Manipulators from a Kinematic Viewpoint**. *Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design*, June 1984, Vol 106, 191-198