

Capítulo 6

Registro de variaciones en sensores capacitivos

6.1. Esquemas de medición de variaciones en la capacitancia

Un sensor o un transductor convierte un efecto físico o químico en una señal eléctrica. Esta puede ser un voltaje, una corriente, un cambio en una capacitancia o en una resistencia. Con el propósito de ser procesadas posteriormente, estas cantidades deben ser convertidas en señales eléctricas, usualmente un voltaje. Debido a que las señales proporcionadas por los sensores son muy pequeñas, éstas deben amplificarse y filtrarse. También son necesarios procesos de compensación, linealización y calibración para corregir cualquier inconveniente que la señal pueda presentar. Idealmente, este procesamiento de la señal debe realizarse antes de la transmisión para evitar su distorsión por lo que muchos fabricantes optan por diseñar el dispositivo microelectromecánico, la electrónica de control y acondicionamiento de señal en el mismo dado (System on a Chip-SoC). Sin embargo, existe la alternativa de diseñar en dos dados diferentes el microsistema y la electrónica y colocarlos en un mismo empaque (System in package-SiP). Lo analizado en este capítulo es válido para ambos casos.

Dadas las características de la mayoría de los materiales y procesos para la fabricación de MEMS, el arreglo geométrico de placas paralelas para la creación de actuadores y sensores en los Microsistemas es muy común. Para la creación de estos dispositivos los materiales generalmente empleados son metales (aluminio, cobre, oro, nickel y aleaciones de nickel-hierro) y metaloides (silicio, germanio y aleaciones de silicio-germanio) dadas sus características mecánicas y eléctricas. En la arquitectura de estos dispositivos, es común que una de las placas sea sostenida por vigas que permiten su desplazamiento o giro en alguna dirección o sentido y funcionan como resortes al ser sometidas a flexión o torsión; la otra placa, normalmente, se encuentra anclada a la superficie del dado sobre el que está fabricado el dispositivo y existe entre ambas placas una área de traslape y una separación. La placa móvil constituye, en principio, un sistema masa-resorte y dependerá de las condiciones de operación del dispositivo (si es empacado al vacío o no) si el sistema cuenta además con un amortiguador, el cual estará formado por las delgadas capas de aire que comprimen o sobre las que se deslizan las placas.

Dado que el dispositivo de placas paralelas es en esencia un sistema masa-resorte-amortiguador por su configuración mecánica, su uso como actuador o sensor está determinado por la forma en que el microsistema es conectado con otros dispositivos electrónicos externos para recibir o entregar señales eléctricas.

Como actuador, la base del funcionamiento del dispositivo es la fuerza eléctrica provocada por la presencia de cargas electrostáticas en la superficie de las placas paralelas. Si las restricciones de movimiento de las placas son tales que sólo es posible su traslación en una dirección o su rotación sobre un eje, al alternar los signos de las cargas que almacena, entre iguales y opuestos, se obtiene un efecto de atracción y repulsión (que depende de la magnitud y signo de las cargas y de la separación y área de traslape entre las placas) que a su vez se traduce en un movimiento oscilatorio del dispositivo, ya sea traslacional o rotacional. Para alternar los

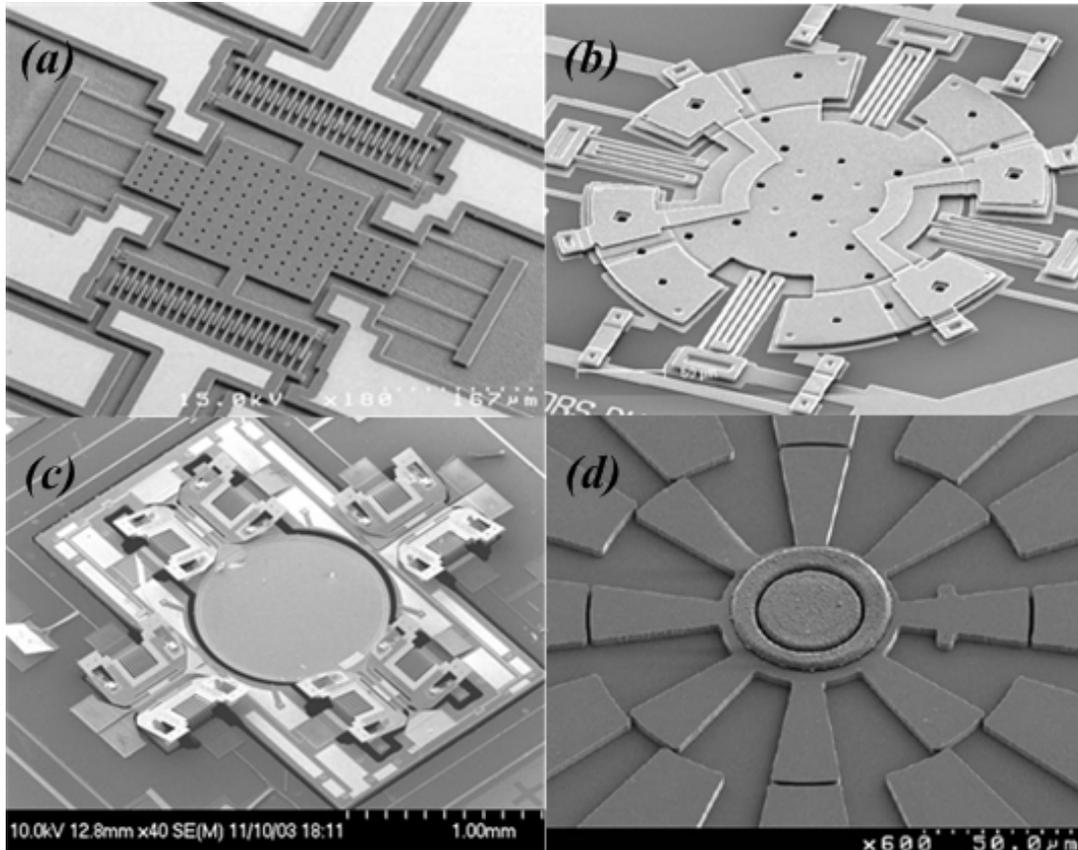


Figura 6.1: Ejemplos de actuadores de placas paralelas. (a) Microrresonador con peine electrostático para movimiento lateral (consignado en *The MEMS Handbook: design and fabrication*, editado por Mohamed Gad-el-Hak, CRC Press, 2006). (b) Giroscopio con actuadores de placas paralelas dispuestos en pila vertical (consignado en *Robust Micromachined Vibratory Gyroscopes*, Cenk Acar, University of California, 2004). (c) Scanner bidimensional con peines electrostáticos verticales (consignado en <http://www.stanford.edu/~wibool/research.html>, 2009). (d) Micromotor electrostático (consignado en *Comprehensive Microsystems* editado por Yogesh B. Gianchandani, Elsevier, 2008).

signos de las cargas sobre las placas normalmente se aplica en una de ellas una señal eléctrica periódica que varía sus valores de voltaje entre positivos y negativos y en la otra se aplica una señal constante de amplitud igual o mayor al máximo de la señal oscilatoria (para de este modo maximizar la fuerza eléctrica). Así, la presencia de la fuerza eléctrica permite alterar el estado de equilibrio del sistema (generalmente en reposo) y convertirlo en una fuente motriz dentro de un microsistema más complejo o para otros dispositivos. La faceta como actuador del dispositivo de placas paralelas ha sido cubierta con todo detalle en el capítulo anterior y en el actual se estudiará su faceta como sensor.

Como sensor, la base del funcionamiento del dispositivo es la variación de la capacitancia debido al aumento o disminución de la distancia entre placas. Esta distancia se modifica por efecto de los cambios de presión o variaciones de movimiento a los que se somete el dado sobre el que está construido el dispositivo, es decir, las placas varían su proximidad gracias a que todo el chip en el que se encuentra montado el sensor experimenta diferentes presiones que deflexionan las placas o gracias a que se somete a movimientos con cambios de velocidad y dirección a los que la masa suspendida por resortes (la placa móvil) se opone. En general, estas variaciones de presión o movimiento son los fenómenos físicos que resultan de interés registrar

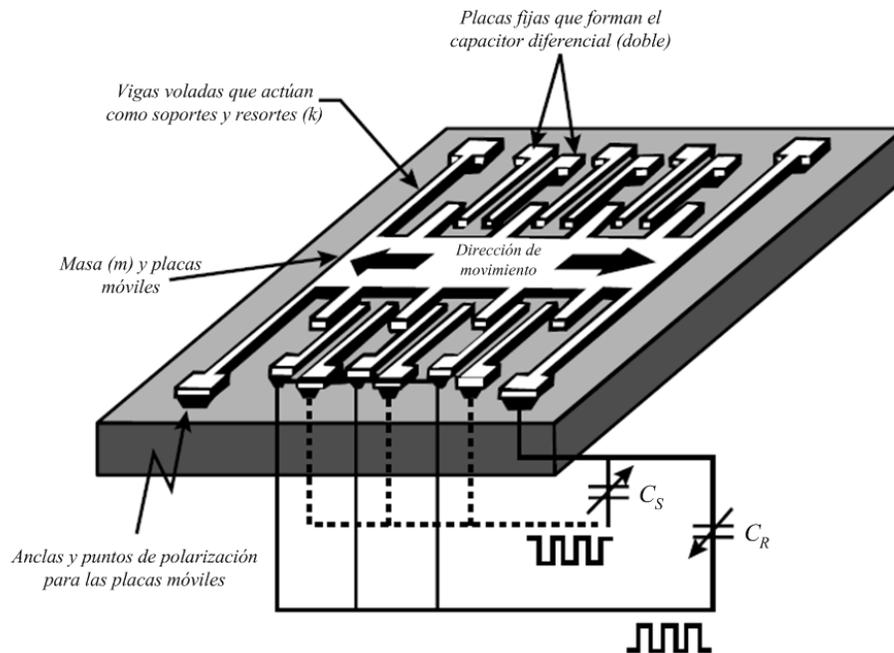


Figura 6.2: Acelerómetro basado en un sistema masa-resorte con sensores capacitivos del tipo diferencial.

por lo que los sensores capacitivos en Microsistemas son empleados de forma regular en sensores inerciales (acelerómetros y giroscopios) y en sensores de presión. En este tipo de sensores, las señales eléctricas de alimentación sirven para generar una señal de salida sensible a los cambios en el capacitor variable de placas paralelas pero crean un efecto colateral indeseable en la proximidad de las placas pues generan una fuerza eléctrica que tiende a unir las o separarlas según las cargas almacenadas. Este efecto puede contrarrestarse mediante la adición de una tercera placa fija, colocada de forma simétrica en el arreglo geométrico de las placas, que se alimenta con la misma señal que la suministrada a la otra placa fija, a fin de contrarrestar la atracción o repulsión que la primera placa ejerce sobre la placa móvil. Esta adición, mejora también de forma significativa el desempeño del sensor capacitivo, pues crea un capacitor variable diferencial, es decir, mientras la capacitancia en un par de placas disminuye por efecto de su separación, entre el otro par de placas ésta aumenta debido a su mayor proximidad.

Al adoptar esta arquitectura, que transforma el sensor capacitivo en uno de tipo diferencial, se puede aprovechar el efecto de equilibrio mecánico alcanzado gracias a las fuerzas eléctricas de igual magnitud y dirección pero sentido opuesto para aumentar la resistencia de la masa a los cambios de movimiento o presión, y de este modo mejorar su rango de operación frente a estos fenómenos. El aire o el vacío entre las placas paralelas cumple la función de dieléctrico para completar el capacitor. Las formas que estos sensores pueden tomar son muy variadas, como puede apreciarse en las fotografías de la figura 6.3.

Este capítulo consta de tres secciones, en la primera se aborda el funcionamiento de diversos circuitos acondicionadores de señal para sensores capacitivos y se llega a conclusiones que deben ser tomadas como recomendaciones para el diseño de Microsistemas con el propósito de lograr un mejor desempeño del microsistema. En la segunda sección se abordan los efectos que las señales de polarización suministradas al capacitor generan sobre el propio microsistema (fuerzas eléctricas que modifican la proximidad de las placas

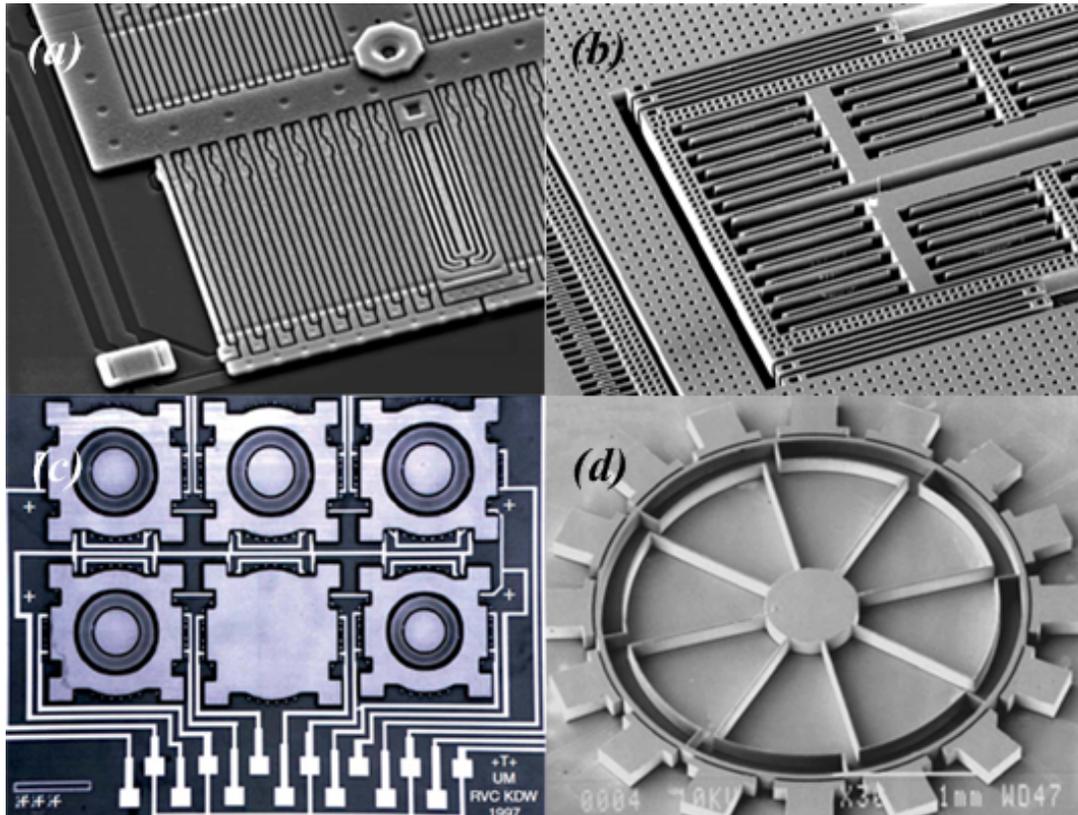


Figura 6.3: Ejemplos de sensores capacitivos de placas paralelas. (a) Parte de un acelerómetro diseñado por la empresa Freescale en el que se muestra un sensor capacitivo diferencial (consignado en *The MEMS Handbook, Applications*, editado por Mohamed Gad-el-Hak, CRC Press, 2006). (b) Parte de un giroscopio vibratorio en el que se aprecia el uso de sensores capacitivos de placas paralelas para registrar el movimiento de una masa de prueba (consignado en *Robust Micromachined Vibratory Gyroscopes*, Cenk Acar, University of California, 2004). (c) Vista superior de un arreglo de cinco sensores de presión basados en diafragmas con un capacitor de referencia al centro (consignado en *Comprehensive Microsystems*, editado por Yogesh B. Gianchandani, Elsevier, 2008). (d) Giroscopio vibratorio con electrodos de actuación, registro y control (consignado en *Comprehensive Microsystems*, editado por Yogesh B. Gianchandani, Elsevier, 2008).

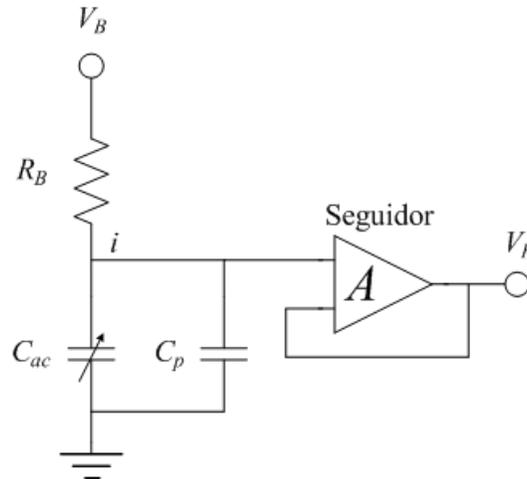


Figura 6.4: Esquema de medición de variaciones de capacitancia a través de un voltaje directo de polarización.

y con ello la capacitancia del dispositivo aún sin la presencia de aceleración externa alguna), en esta sección también se llega a resultados que representan recomendaciones que deben considerarse para el diseño de sensores capacitivos. Finalmente, en la tercera sección se abordan los efectos que diversas formas de aceleración tienen sobre el sistema.

6.1.1. Mediciones a través de un voltaje directo de polarización

Uno de los métodos más simples para registrar pequeños cambios en un microsistema que cuenta con un dispositivo capacitivo inercial es la aplicación de un voltaje directo de polarización [45] como se ilustra en el esquema 6.4, donde V_B es el voltaje directo de polarización, C_{ac} es el capacitor variable cuyo comportamiento se desea registrar y R_B es un resistor de polarización con un gran valor. Este método de medición sólo registra las variaciones de capacitancia, por lo que es común su uso en Sistemas Microelectromecánicos que cuentan con capacitores de placa móvil y electrodos fijos para registrar desplazamientos que están asociados con variables físicas que resultan de interés estudiar.

Existen diversas configuraciones de capacitores de placas paralelas que pueden emplearse en Microsistemas con el fin de registrar desplazamientos, pero una de las más utilizadas es la que se muestra en la figura 6.5 y corresponde a un típico sensor capacitivo de presión.

En este dispositivo una de las placas se encuentre fija y la otra esta suspendida gracias a elementos que actúan como resortes. La placa suspendida se encuentra expuesta, de algún modo, a las variaciones de presión provenientes del ambiente. A medida que la placa suspendida recibe mayor presión del entorno se aproxima a la placa fija, variando así la la capacitancia del dispositivo. A la razón entre el desplazamiento Δx de la placa y la presión Δp que actúa sobre la placa suspendida se le define como la sensibilidad mecánica del dispositivo:

$$S_m = \frac{\Delta x}{\Delta p} = \frac{A}{k}$$

donde k es la constante elástica efectiva de los resortes que sostienen la placa suspendida y A es el área de traslape entre las placas paralelas. Para una distancia d entre las placas, la capacitancia nominal se calcula

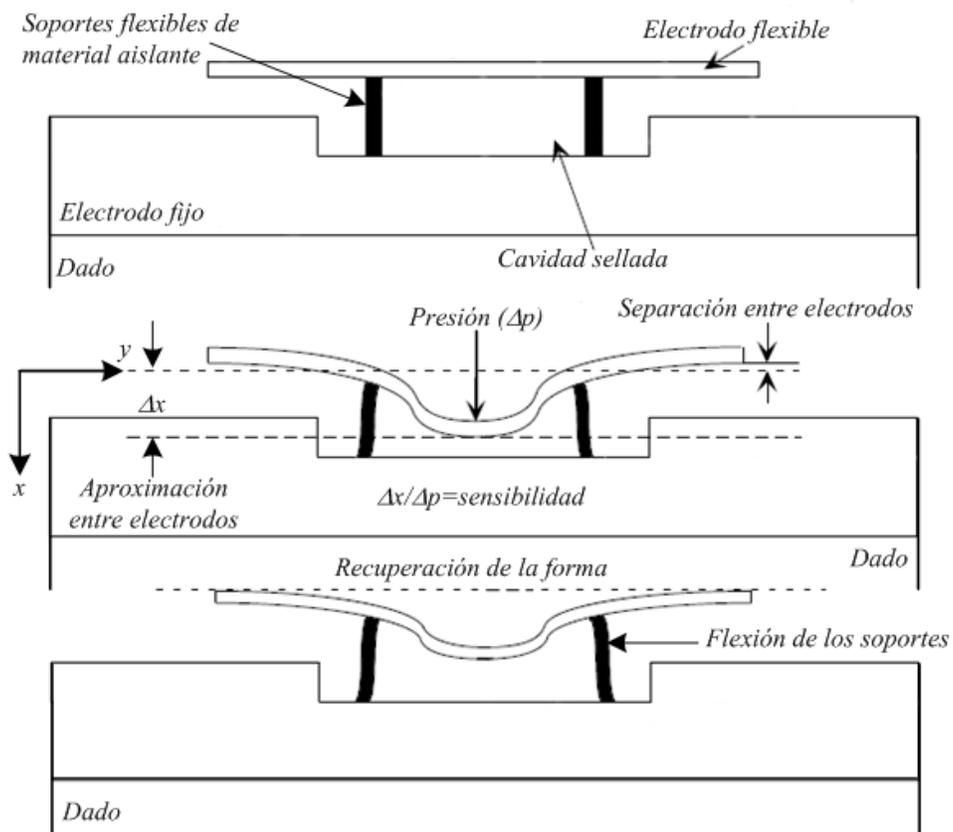


Figura 6.5: Sensor de presión basado en placas paralelas.

como $C_0 = A\varepsilon\varepsilon_0/d$. Si la placa suspendida oscila, por efecto de la presión, en dirección normal a la placa fija con una amplitud δ y una frecuencia radial ω , la capacitancia del capacitor de placas paralelas se obtiene a partir de:

$$C_{ac} = \frac{A\varepsilon\varepsilon_0}{d + \delta \sin \omega t} \doteq C_0 \left(1 - \frac{\delta}{d} \sin \omega t \right)$$

Del circuito mostrado en la figura 6.4, si la constante de tiempo $R_B C_0$ es mucho mayor que $1/\omega$, la carga eléctrica almacenada en el capacitor se mantiene constante. Por lo tanto, el voltaje V'_B en el punto i en la terminal del capacitor de placas variable se obtiene a partir de:

$$C_0 V_B = \left(C_0 - \frac{\delta}{d} C_0 \sin \omega t \right) V'_B$$

Así, se puede deducir que:

$$V'_B \cong V_B \left(1 + \frac{\delta}{d} \sin \omega t \right) = V_B + v_{ac}$$

donde $v_{ac} = (V_B/d) \delta \sin \omega t \equiv v_{ac,i} \sin \omega t$ es la componente oscilatoria de la señal de voltaje en el capacitor variable debida a las variaciones de presión. De este modo, se define a $S_e = V_B/d$ como la sensibilidad eléctrica en circuito abierto del sensor de presión. Así, la sensibilidad total en circuito abierto del sensor de presión se expresa como:

$$S_{total} = S_e S_m = \frac{AV_B}{kd} = \frac{v_{ac,i}}{\Delta p}$$

La señal v_{ac} se transforma en una señal de baja impedancia a través del circuito seguidor que se muestra en la figura 6.4 antes de ser amplificada. En este proceso, la señal será atenuada debido a la presencia de capacitancias parásitas C_p y a la capacitancia de entrada C_i del amplificador operacional (seguidor). La sensibilidad en la salida del seguidor será:

$$S_F = \frac{C_0}{C_0 + C_p + C_i} S_{total}$$

Es muy importante tener en cuenta que la sensibilidad eléctrica en circuito abierto, $S_e = V_B/d$, es directamente proporcional al voltaje de polarización V_B . Por lo que, en principio, puede lograrse una mayor sensibilidad mediante un mayor voltaje de polarización. Sin embargo, el valor del voltaje de polarización está limitado por el voltaje de llegada (voltaje de máximo de atracción entre las placas antes de que colapsen) que permite la estructura de placas paralelas del sensor de presión. Para una operación confiable, V_B deberá ser menor que el voltaje de llegada $V_{llegada}$ por un coeficiente α . Si $V_B = \alpha V_{llegada}$, la sensibilidad en circuito abierto del dispositivo será:

$$S_{total} = \frac{\alpha A V_{llegada}}{kd} = \alpha \sqrt{\frac{8Ad}{27k\varepsilon\varepsilon_0}}$$

Ecuación que resulta de gran valor en el diseño de Microsistemas como el sensor capacitivo de presión.

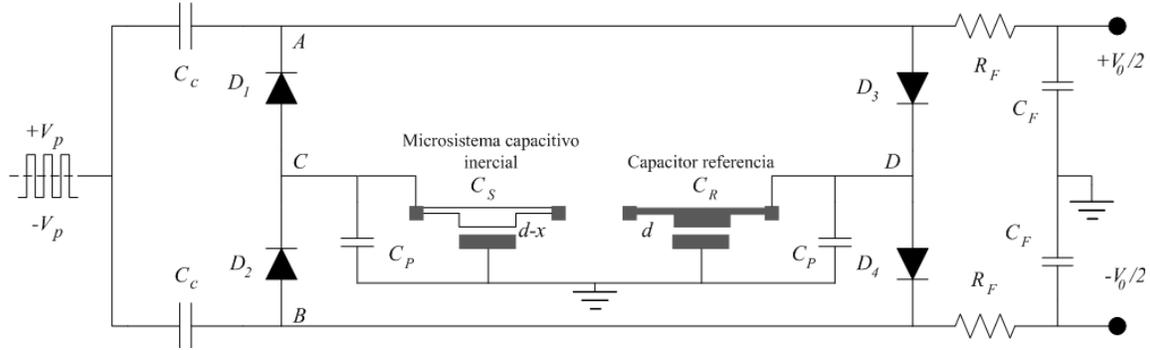


Figura 6.6: Circuito basado en diodos rectificadores (puente de Wheatstone) para el registro de variaciones en la capacitancia.

6.1.2. Medición mediante arreglos de diodos

Si se define la capacitancia de un capacitor empleado para registrar variaciones como C_S , se tiene que las variaciones registradas serán una pequeña fracción de este valor nominal, en consecuencia, con el propósito de registrar dichas variaciones por mínimas que sean, la capacitancia C_S es comparada con un capacitor de referencia C_R el cual es similar a C_S . El circuito eléctrico mostrado en la figura 6.6 permite la comparación de dos capacitancias (C_S y C_R) empleando un arreglo de cuatro diodos similares (D_1 , D_2 , D_3 y D_4) y un conjunto de capacitores de acoplamiento [46] cuyos valores son mucho mayores que los capacitores de registro y referencia. La señal de excitación es un tren de escalones con una amplitud $\pm V_P$ y una frecuencia mucho mayor que la frecuencia natural de la estructura mecánica del microsistema en cuestión.

Conversión de capacitancia a voltaje

La componente oscilatoria de la señal de excitación se aplica en las terminales denominadas A y B y es ligeramente atenuada por los capacitores C_C , dado que el valor de los capacitores de acoplamiento C_C es mucho mayor que los capacitores C_S y C_R . Cuando el voltaje de excitación alcanza el valor $+V_P$, el capacitor C_S es cargado a través del diodo D_2 en tanto que el capacitor C_R es cargado a través del diodo D_3 . Cuando el voltaje de excitación es $-V_P$, el capacitor C_S se descarga a través del diodo D_1 y el capacitor C_R se descarga a través del diodo D_4 . Debido al efecto de rectificación de los diodos, en un ciclo de la señal de excitación, un cierto porcentaje de la carga se transfiere desde el punto B al punto A siguiendo la trayectoria $B - C - A$ y otro porcentaje se transfiere del punto A al B siguiendo la trayectoria $A - D - B$. No debiera existir transferencia neta de carga entre los puntos B y A si C_S es exactamente igual a C_R . Pero dado que C_S eventualmente será diferente de C_R existirá una transferencia neta de carga entre los puntos A y B , y será entonces cuando aparecerá una diferencia de potencial entre los puntos A y B .

Supongase que el voltaje final en A es $V_O/2$ y el voltaje en B es $-V_O/2$ después de varios ciclos, entonces la carga transferida del punto B al punto A en un ciclo será:

$$\Delta Q_{BA} = 2 \left(V_P - \frac{1}{2} V_O - V_F \right) (C_S + C_P)$$

donde V_F es la caída de voltaje en el diodo y C_P es la capacitancia parásita paralela a C_S . Del mismo modo, la carga transferida desde el punto A al punto B en un ciclo será:

$$\Delta Q_{AB} = 2 \left(V_P + \frac{1}{2} V_O - V_F \right) (C_R + C_P)$$

Se tiene que $\Delta Q_{BA} = \Delta Q_{AB}$, por lo tanto, el voltaje de salida en circuito abierto será:

$$V_O = \frac{2(V_P - V_F)(C_S - C_R)}{C_S + C_R + 2C_P} \quad (6.1)$$

Obviamente el voltaje de salida no puede exceder $2V_F$.

La caída de voltaje en los diodos, V_F , reduce el voltaje efectivo de excitación a $(V_P - V_F)$ y la dependencia del voltaje V_F de la temperatura provoca ruido de origen térmico. Para eliminar estos efectos, es necesario emplear relevadores en lugar de diodos.

No linealidad

Para un desplazamiento x de la placa móvil, se tiene que $C_S = dC_O/(d - x)$. Si $C_R = C_O = A\epsilon\epsilon_0/d$, el voltaje de salida será:

$$V_O = \frac{2(V_P - V_F)C_0\tilde{x}}{2C_O + 2C_P - (C_O + 2C_P)\tilde{x}} \cong (V_P - V_F) \frac{C_0\tilde{x}}{C_O + C_P} \left(1 + \frac{C_O + 2C_P}{2C_O + 2C_P}\tilde{x}\right)$$

donde $\tilde{x} = x/d$. Si el cociente de C_P entre C_O es definido como η , se tiene:

$$V_O = (V_P - V_F) \frac{\tilde{x}}{1 + \eta} \left(1 + \frac{0,5 + \eta}{1 + \eta}\tilde{x}\right)$$

A partir de la ecuación anterior es posible concluir que mientras la capacitancia parásita sea grande (un valor grande para η), menor será la sensibilidad y mayor la no linealidad.

Un problema común para la medición de la capacitancia es el efecto colateral de la fuerza electrostática provocado por la señal de excitación [47]. Para el puente de diodos mostrado en la figura 6.6, el voltaje en el capacitor es $V_P - V_F$. La fuerza electrostática causante del cambio en la capacitancia es $\Delta F \approx AG\epsilon\epsilon_0(V_P - V_F)^2/2d^2$. Esto provocará un error que puede ser significativo (tema que será abordado más adelante).

Para reducir la fuerza electrostática se debe emplear una estructura simétrica en el microsistema, para hacer un registro diferencial de las variaciones en la capacitancia (figura 6.7). Así, las fuerzas electrostáticas en ambos lados de los electrodos móviles se cancelarán entre sí.

$$\Delta F = \frac{A\epsilon\epsilon_0(V_P - V_F)^2}{2d^2} \left[\frac{1}{(1 - \tilde{x})^2} - \frac{1}{(1 + \tilde{x})^2} \right] \approx \frac{A\epsilon\epsilon_0(V_P - V_F)^2}{2d^2} (4\tilde{x})(1 + 2\tilde{x}^2)$$

Una ventaja adicional de este esquema de registro es la mejora significativa de la linealidad dado que C_S y C_R cambian en direcciones opuestas [48]. Para un desplazamiento, x , del electrodo móvil, se tiene que:

$$C_S = C_O \frac{1}{1 - \tilde{x}}, C_R = \frac{1}{1 + \tilde{x}} \quad (6.2)$$

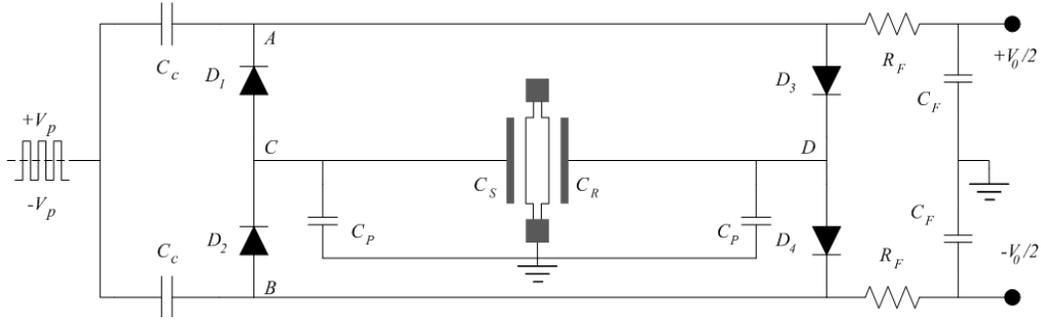


Figura 6.7: Puente de Wheatstone para registrar cambios en un capacitor variable diferencial.

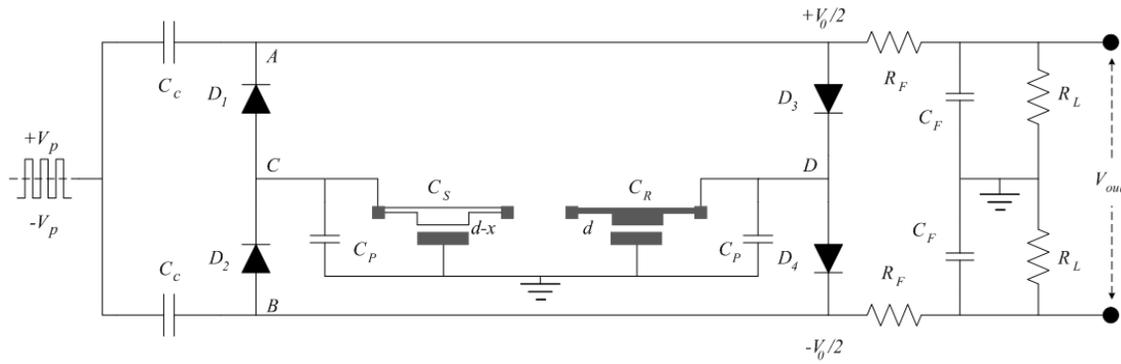


Figura 6.8: Puente de Wheatstone con carga externa.

Sustituyendo estos valores en la ecuación 6.1, el voltaje de salida en circuito abierto será:

$$V_O = \frac{2(V_P - V_F)C_O}{C_O + C_P(1 - \tilde{x}^2)} \tilde{x}$$

Para un pequeño desplazamiento, la salida será aproximadamente:

$$V_0 \equiv 2(V_P - V_F) \frac{1}{1 + \eta} \left(1 + \frac{\eta}{1 + \eta} \tilde{x}^2 \right) \quad (6.3)$$

De la ecuación 6.3 se concluye que: i) la sensibilidad es mayor (el doble) para mediciones diferenciales comparadas con las mediciones hechas en un capacitor simple, ii) la no linealidad se reduce significativamente debido a la ausencia del término cuadrático en la ecuación 6.3 y iii) la no linealidad provocada por la capacitancia parásita C_P especialmente para $C_P \leq C_O$.

Efecto de carga

Ahora considérese el puente de diodos empleado para registrar las variaciones de capacitancia, con una carga externa como se muestra en la figura 6.8.

De acuerdo con lo señalado anteriormente, la corriente neta que fluye de A a B será:

$$\Delta I_{BA} = I_{BA} - I_{AB} = [2(V_P - V_F)(C_S - C_R) - V_O(C_S + C_R + 2C_P)](f)$$

donde f es la frecuencia de la señal de excitación. Por lo tanto, la corriente en la carga será:

$$I_L = \frac{V_O}{2(R_F + R_L)}$$

Dado que las dos corrientes (I_{BA} e I_{AB}) deben ser la misma, se tiene que:

$$V_O = \frac{2(V_P - V_F)(C_S - C_R)}{C_S + C_R + 2C_P} \frac{2(R_F + R_L)(C_S + C_R + 2C_P)f}{1 + 2(R_F + R_L)(C_S + C_R + 2C_P)f} \quad (6.4)$$

Y el voltaje de la salida en las terminales de la carga externa será:

$$V_{out} = \frac{R_L}{R_L + R_F} V_O$$

La ecuación 6.4 implica que la impedancia de salida del puente de diodos (excluyendo R_F , C_F y R_L) será:

$$R_{out} = \frac{1}{2(C_S + C_R + 2C_P)f}$$

El hecho de que la impedancia de salida del puente de diodos sea inversamente proporcional a la frecuencia de excitación puede corroborarse para la mayoría de las mediciones capacitivas.

De hecho, el voltaje de salida aumenta con la frecuencia de la señal de excitación a baja frecuencia y se va a cero para altas frecuencias de acuerdo con lo señalado en la ecuación 6.4. El voltaje de salida cae de nuevo para muy altas frecuencias, dado que los diodos no trabajan adecuadamente bajo estas condiciones. Por esta razón, la frecuencia de la señal de excitación está usualmente en el rango de 100 kHz a 10 MHz.

6.1.3. Medición mediante doble excitación

Con un esquema de doble excitación, el desplazamiento de la placa móvil puede registrarse mediante la aplicación de un par de señales sinusoidales de excitación como se muestra en la figura 6.9.

Aquí C_P es la capacitancia parásita y C_i es la capacitancia de entrada del amplificador operacional cumpliendo funciones de seguidor de voltaje. El registro de la capacitancia se hace mediante dos señales sinusoidales de igual amplitud, $+V_R$ y $-V_R$, con la misma frecuencia ω [49]. Cuando C_S y C_R son exactamente iguales, el voltaje de entrada para el amplificador es cero. Si C_S y C_R son diferentes, el voltaje de entrada

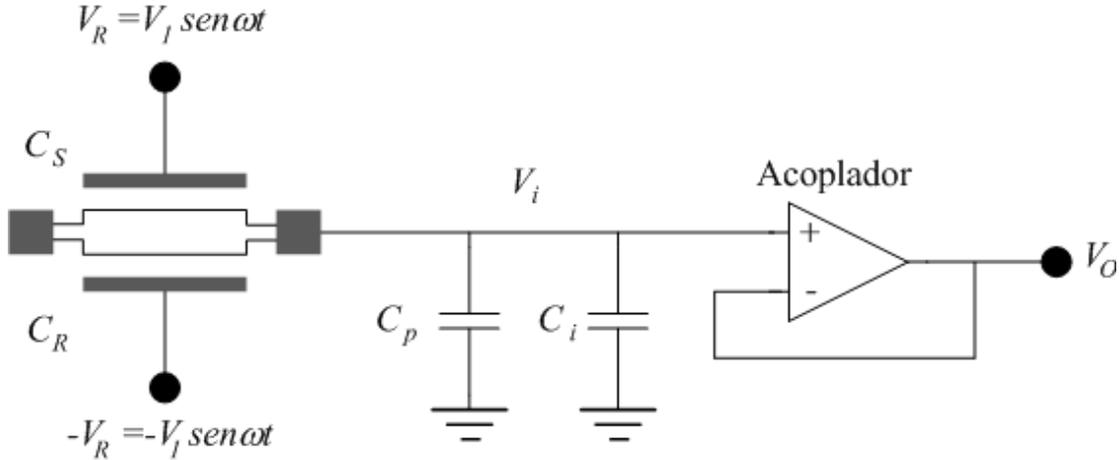


Figura 6.9: Circuito para el registro de variaciones en la capacitancia mediante la aplicación de dos señales sinusoidales.

para el amplificador (seguidor), V_i , puede determinarse gracias a la condición de corriente nula de entrada del amplificador operacional.

$$(V_R - V_i) C_S \omega = (V_R - V_i) C_R \omega + V_i (C_P + C_i) \omega$$

Así, la señal de voltaje en la placa móvil será:

$$V_i = \frac{C_S - C_R}{C_S + C_R + C_P + C_i} V_R$$

Para un pequeño desplazamiento x y de acuerdo con las ecuaciones 6.2, se tiene que:

$$V_i = \frac{2C_O V_R}{2C_O + (C_P + C_i)(1 - \tilde{x}^2)} \tilde{x}$$

Dado que V_i es independiente de C_P y C_i , la precisión y estabilidad de los registros se deteriora. Para solucionar esto, se puede emplear un esquema de realimentación como el mostrado en la figura 6.10.

donde C_{FB} es un capacitor de realimentación. Aprovechando el balance de corriente, como se hace en otros esquemas de registro, se tiene que:

$$(V_R - V_i) C_S \omega = (V_R + V_i) C_R \omega + V_i \omega (C_P + C_i) + (V_i + A_1 V_i) C_{FB} \omega$$

La señal de voltaje en la placa móvil se a partir de:

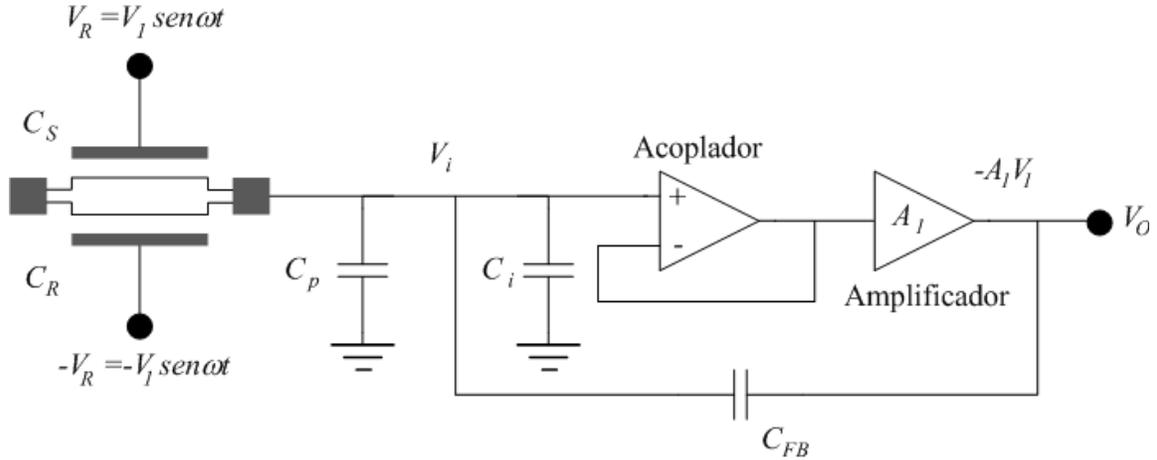


Figura 6.10: Circuito para el registro de variaciones en la capacitancia mediante la aplicación de dos señales sinusoidales y realimentación.

$$V_i = \frac{(C_S - C_R) V_R}{C_S + C_R + C_P + C_i + (1 + A_i) C_{FB}}$$

donde A_1 es la ganancia de lazo abierto del amplificador A_1 . La salida del circuito será:

$$V_O = -A_1 V_i = \frac{A_1 (C_S - C_R) V_R}{C_S + C_R + C_P + C_i + (1 + A_1) C_{FB}}$$

Si A_1 es lo suficientemente grande, se tiene que la salida del circuito será aproximadamente:

$$V_O \doteq -\frac{C_S - C_R}{C_{FB}} V_R = -\frac{2C_{O\tilde{x}}}{C_{FB} (1 - \tilde{x}^2)} V_R$$

La salida V_O es linealmente dependiente de la capacitancia diferencial, $C_S - C_R$, pero independiente de la capacitancia parásita C_P .

6.1.4. Medición mediante balance de fuerzas electrostáticas

Para implantar este esquema es necesario sustituir el capacitor de realimentación mostrado en la figura 6.10, C_{FB} , por un resistor con un valor muy alto, R_{FB} , de modo tal que un voltaje de CD pueda realimentarse. Además deben agregarse dos señales de CD de igual valor pero signos contrarios como voltaje de offset para las señales sinusoidales de excitación [50] e insertarse un demodulador síncrono entre el amplificador operacional que funciona como seguidor y el amplificador A_1 . De este modo, el voltaje de realimentación de DC cambiará las fuerzas electrostáticas entre las placas o electrodos, de modo que la realimentación puede considerarse como electromecánica. Por lo tanto, las mediciones no son mediciones puramente eléctricas de la capacitancia, sino un control electromecánico en lazo cerrado que reacciona en función de las variaciones registradas.

Al principio, la placa móvil está en su posición de equilibrio entre las placas fijas. La distancia de separación es d para ambos lados. En este caso, la señal de excitación no genera ninguna señal de entrada

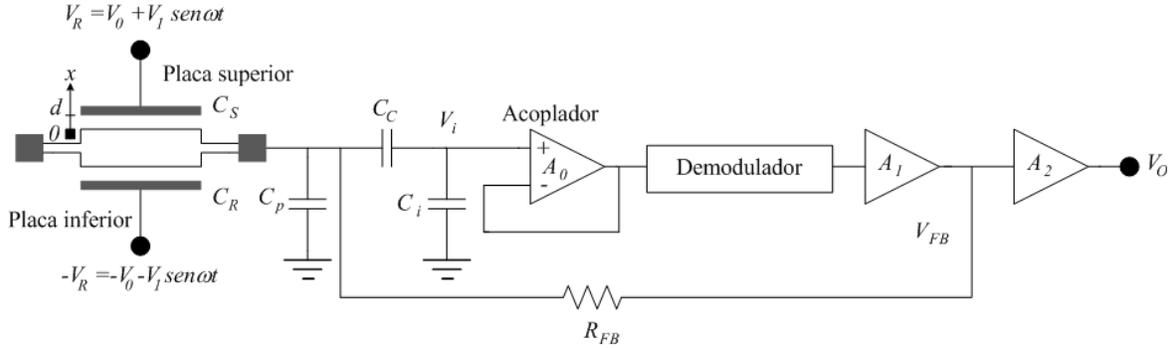


Figura 6.11: Técnica para registro de variaciones en la capacitancia y balance de fuerzas electrostáticas presentes en el sensor.

para el seguidor A_0 ($V_i = 0$) y no existe una fuerza resultante actuando sobre la placa móvil central (según la figura 6.11). Si la placa móvil se desplaza una distancia x en sentido positivo (según el eje de referencia colocado en el diagrama) como resultado de la inercia al aparecer una aceleración en sentido negativo ($-a$) que afecta a todo el dado en donde se encuentra el microsistema, la señal sinusoidal V_i aparecerá en la entrada del amplificador A_0 , la cual, para valores pequeños de C_P y C_i será:

$$V_i = \tilde{x}V_1 \text{ sen } \omega t$$

Esta señal se amplifica y procesa para realimentar un voltaje de DC, V_{FB} , a la entrada a través de R_{FB} . Así, el V_{FB} que se obtendrá queda como:

$$V_{FB} = +A_{op}V_1\tilde{x} \quad (6.5)$$

donde A_{op} es la ganancia de lazo abierto resultante del seguidor, el demodulador y el amplificador operacional A_1 . Si los componentes electrónicos se eligen de modo tal que la ganancia sea grande, la fuerza resultante sobre la placa móvil provocada por la realimentación será negativa (según el eje de referencia en el diagrama). El voltaje positivo de DC en la placa móvil permite diferenciar las fuerzas electrostáticas provenientes de la placa superior e inferior.

Por lo tanto, el desplazamiento de la placa central es reducido por la realimentación electromecánica y la reducción es significativa si A_{op} es suficientemente grande. De hecho, la placa central se mantiene casi siempre en su posición original de equilibrio. Dado que el desplazamiento de la placa central es muy pequeño, la aceleración repentina ($-a$) se registra por el voltaje de realimentación, el cual con su sola aparición genera una fuerza electrostática que balancea la fuerza externa. Por lo tanto, esta técnica de registro de variaciones es conocida como esquema de medición mediante balance de fuerzas electrostáticas. En esencia, sin embargo, el registro de variaciones se hace a través de mediciones de capacitancia.

En el análisis de la relación entre el voltaje de alimentación y la aceleración considérese, por simplicidad, que V_1 es mucho más pequeño que V_0 , de modo tal que la fuerza electrostática provocada por el componente de alta frecuencia sea despreciable, así la fuerza electrostática aplicada sobre la placa móvil será:

$$F_e = \frac{A\varepsilon\varepsilon_0}{2d^2} \left[\frac{(V_O - A_{op}V_1\tilde{x})^2}{(1 - \tilde{x})^2} - \frac{(V_O + A_{op}V_1\tilde{x})^2}{(1 + \tilde{x})^2} \right] \quad (6.6)$$

donde A es el área de las placas. Si se emplea la relación $V_1 = \alpha V_O$, se tiene:

$$F_e = \frac{A\varepsilon\varepsilon_0V_O^2}{2d^2} \left[\frac{(1 - \alpha A_{op}\tilde{x})^2}{(1 - \tilde{x})^2} - \frac{(1 + \alpha A_{op}\tilde{x})^2}{(1 + \tilde{x})^2} \right] \quad (6.7)$$

Y para $\alpha A_{op}\tilde{x} \ll 1$ y $\alpha A_{op}\tilde{x} \gg 1$, la fuerza electrostática queda expresada como:

$$F_e \doteq -\frac{A\varepsilon\varepsilon_0V_O^2\alpha A_{op}\tilde{x}}{d^2} \quad (6.8)$$

El desplazamiento está determinado por la ecuación:

$$ma - \frac{2a\varepsilon\varepsilon_0V_O^2\alpha A_{op}}{d^3}x - kx = 0$$

Por lo tanto, se tiene:

$$\tilde{x} = \frac{ma}{kd + 2a\varepsilon\varepsilon_0V_O^2\alpha A_{op}/d^2} \quad (6.9)$$

Si A_{op} es lo suficientemente grande tal que kd en el denominador puede ser despreciada y \tilde{x} será:

$$\tilde{x} = \frac{d^2ma}{2A\varepsilon\varepsilon_0V_O^2\alpha A_{op}} \quad (6.10)$$

Obviamente, dado que \tilde{x} es muy pequeña, a partir de la ecuación 6.5, se tiene que el voltaje de realimentación V_{FB} será:

$$V_{FB} = \frac{d^2ma}{2A\varepsilon\varepsilon_0V_O} \quad (6.11)$$

Dado que V_{FB} es directamente proporcional a ma , puede considerarse como una medición de la aceleración. Con la fuerza electrostática, la ecuación para la vibración amortiguada de la masa será:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx + \frac{2A\varepsilon\varepsilon_0V_O^2\alpha A_{op}}{d^3}x = 0 \quad (6.12)$$

Esto significa que el sistema tiene una constante elástica efectiva k_{eff} :

$$k_{eff} = k + \frac{2A\varepsilon\varepsilon_0V_O^2\alpha A_{op}}{d^3} \quad (6.13)$$

Por lo tanto, la frecuencia de resonancia del sistema se incrementa con la realimentación electromecánica. La frecuencia del sistema es ahora $\omega'_0 = \sqrt{k_{eff}/m}$ en lugar de $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. En tanto que la frecuencia de resonancia se incrementa debido a la realimentación electromecánica, la razón de amortiguamiento (coeficiente de amortiguamiento relativo) del microsistema se reduce a $\zeta' = \zeta\omega_0/\omega'_0$.

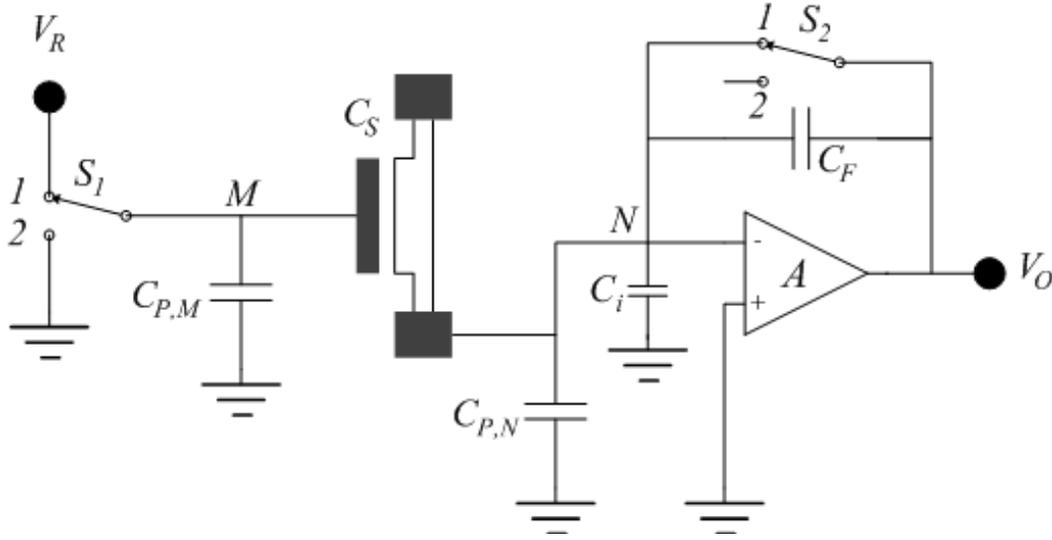


Figura 6.12: Diagrama del circuito para el registro de variaciones en la capacitancia a través de conmutación de capacitores.

6.1.5. Medición mediante conmutación de capacitores

El esquema de registro de variaciones en la capacitancia mediante la conmutación de capacitores es muy útil en mediciones de capacitancias muy pequeñas [51]. El diagrama mostrado en la figura 6.12 describe la conexión de los diferentes elementos.

Los interruptores S_1 y S_2 son interruptores analógicos CMOS, V_R es un voltaje de referencia y A un amplificador operacional ideal sin voltaje de offset (corrimiento). Para el tiempo $t = t_1$, ambos interruptores están en sus respectivas posiciones "1", la carga en C_S es $C_S V_R$ y la carga en C_F es cero. Para el tiempo $t = t_2$ ambos interruptores están en sus respectivas posiciones "2". Dado que la placa izquierda del capacitor variable está aterrizada, la carga almacenada en la placa móvil fluye a través del punto N y carga el capacitor C_F . Así, el voltaje en la salida V_O puede encontrarse a través de la relación que describe la conservación de la carga:

$$C_S V_R = (C_S + C_i + C_{P,N}) V_N + (V_N - V_O) C_F \quad (6.14)$$

Si la ganancia de lazo abierto del amplificador es $-A_O$, se tiene que:

$$V_O = -A_O V_N \quad (6.15)$$

A partir de las ecuaciones 6.14 y 6.15, se tiene:

$$C_S V_R = - (C_S + C_i + C_{P,N}) \frac{1}{A_O} V_O - C_F \frac{1 + A_O}{A_O} V_O$$

y

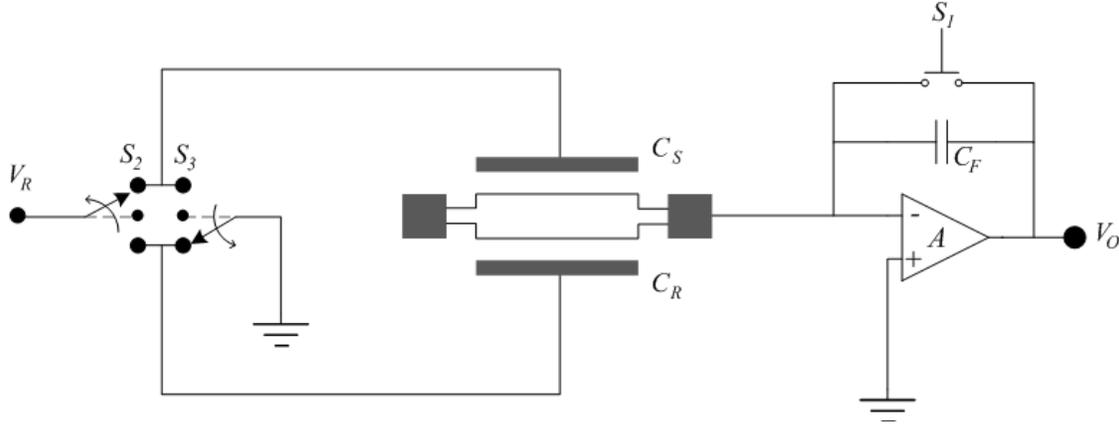


Figura 6.13: Diagrama del circuito de conmutación de capacitores para registrar variaciones en un capacitor variable diferencial.

$$V_O = \frac{A_O C_S V_R}{(A_O + 1) C_F + C_S + C_i + C_{P,N}}$$

Dado que A_O es grande, los efectos de C_i y $C_{P,N}$ son mínimos. Entonces, la salida es directamente proporcional a C_S :

$$V_O = \frac{C_S}{C_F} V_R$$

Para una capacitancia cambiante C_S , S_1 y S_2 deben conmutar rápidamente (alta frecuencia) entre sus posiciones "1" y "2", y un retenedor debe agregarse a la salida del amplificador operacional para facilitar el procesamiento de la señal.

Alternativamente pueden intercambiarse las posiciones de C_S y C_F [52]. En esta configuración, la señal de salida es inversamente proporcional a la capacitancia registrada C_S , y directamente proporcional al desplazamiento de la placa móvil x . Este esquema tiene la ventaja de proporcionar un mayor rango de operación lineal para la realización de mediciones, además de que la carga transferida al capacitor variable será constante en cantidad, y debido a ello, el rango de operación del sistema completo puede extenderse gracias a la fuerza electrostática constante presente entre las placas del dispositivo.

El diagrama 6.13 muestra un esquema de registro de variaciones que compara el capacitor variable con un capacitor de referencia [53]. Para realizar las mediciones, S_1 se emplea para inicializar el circuito mediante la descarga del capacitor de realimentación C_F . A continuación, los interruptores S_2 y S_3 son colocados en las posiciones mostradas en el diagrama para cargar C_S y descargar C_R . Y en un tercer movimiento, S_2 y S_3 , son llevados a las posiciones opuestas (mostradas por las flechas en el diagrama). Con ello, el voltaje de salida será:

$$V_O = \frac{C_S - C_R}{C_F} V_{ref}$$

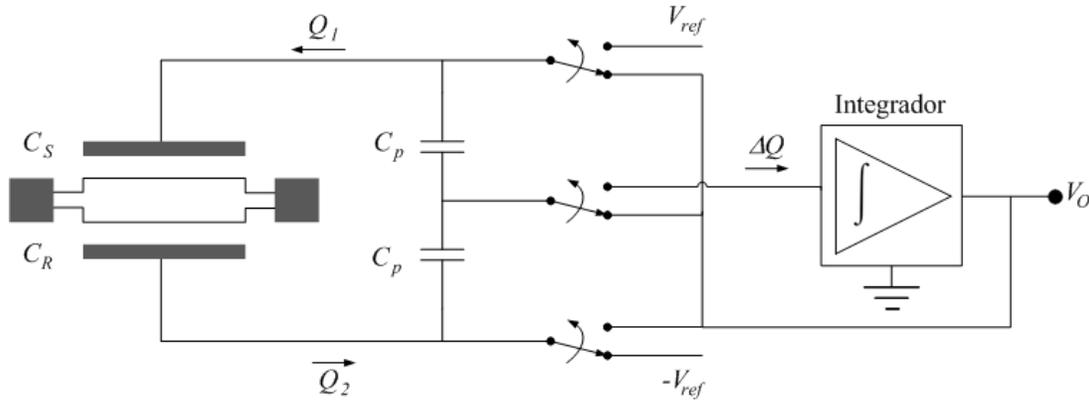


Figura 6.14: Diagrama de un puente autobalanceado para medir un capacitor variable diferencial.

Otro circuito basado en conmutación de capacitores para registrar una capacitancia diferencial se muestra en la figura 6.14.

Los electrodos fijos de los capacitores C_S y C_R son periódicamente conmutados entre los voltajes de referencia $+V_{ref}$ / $-V_{ref}$ y el voltaje de salida V_O , resultando en la transferencia de cargas Q_1 y Q_2 hacia los capacitores C_S y C_R , respectivamente. La diferencia entre las cargas transferidas está dada por:

$$\Delta Q = (C_S + C_P)(V_{ref} - V_O) - (C_R + C_P)(V_{ref} + V_O) \quad (6.16)$$

El circuito integrador muestrea ΔQ de la placa móvil y la integra, generando el voltaje de salida V_O que es realimentado al circuito de excitación para establecer la condición de equilibrio $\Delta Q = 0$. Por esta razón, el método se conoce como puente de auto-balanceo. De la ecuación 6.16, puede determinarse el voltaje de salida:

$$V_O = \frac{C_S - C_R}{C_S + C_R + 2C_P}$$

La forma de abordar hasta ahora los tópicos acerca de los esquemas de medición mediante conmutación de capacitores son meramente conceptuales, dado que los interruptores se implantan con tecnología CMOS y las mediciones involucran circuitos mucho más complejos y el control de los propios interruptores.

6.1.6. Medición de la frecuencia

Dado que frecuencia de salida es fácil de acoplar con un sistema digital, este esquema puede emplearse para la medición de la capacitancia. El método más simple de medición de frecuencia emplea un oscilador Schmitt [55], tal como se muestra en el diagrama de la figura 6.15.

Si el voltaje de histeresis del oscilador es V_h , la frecuencia de oscilación será:

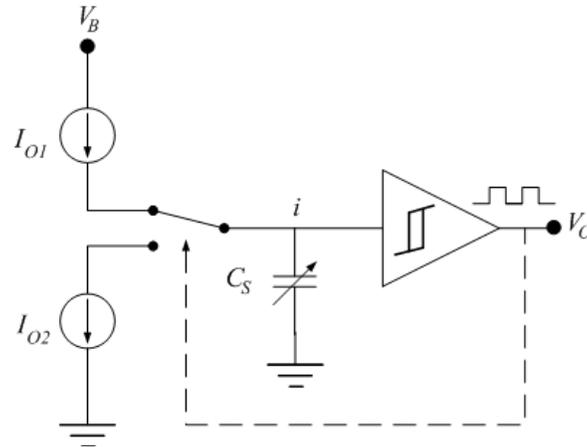


Figura 6.15: Diagrama con un oscilador de Schmitt para medir cambios en la frecuencia de oscilación de un circuito.

$$f = \frac{I_{O1}I_{O2}}{(I_{O1} + I_{O2})V_h} \frac{1}{C_S} = \frac{I_{O1}I_{O2}}{(I_{O1} + I_{O2})V_hC_O} (1 - \tilde{x}) \quad (6.17)$$

Como puede apreciarse en la ecuación 6.17, la variación de la frecuencia de salida está linealmente relacionada con el desplazamiento de la placa móvil.

Muchos dispositivos en combinación con el oscilador de Schmitt presentan dificultades de estabilidad en su estado inicial. Por ello, este tipo de circuito se emplea principalmente en el registro de variaciones de capacitancia en capacitores variables diferenciales. Una posible configuración para conectar este circuito se muestra en el diagrama de la figura 6.16 [56].

Cuando los capacitores variable y de referencia son conectados al oscilador alternadamente, la diferencia de las frecuencias es una indicación estable de las variaciones de capacitancia que se esta interesado en registrar.

$$\Delta f = f_S - f_R = \frac{I_O}{2V_h} \left(\frac{1}{C_S} - \frac{1}{C_R} \right)$$

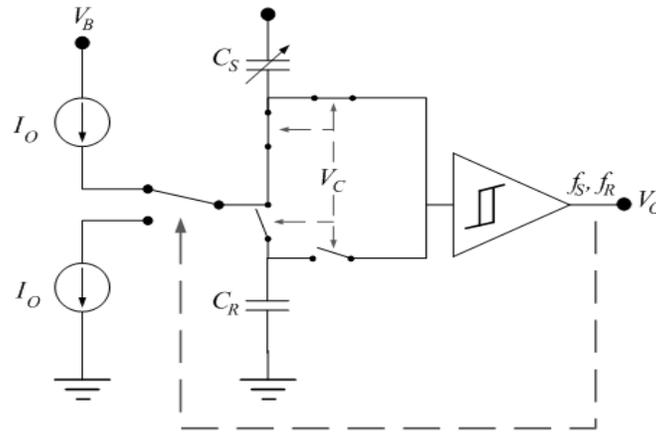


Figura 6.16: Variante en el uso de un oscilador de Schmitt para el registro de cambios en la frecuencia de oscilación de un circuito.

6.2. Efectos de la excitación eléctrica en sistemas que reciben una aceleración cte.

Como se abordó en la sección anterior, la excitación eléctrica es muy importante para registrar las variaciones de capacitancia en un microsistema, variaciones que a su vez están asociadas con desplazamientos de la placa móvil provocados por los movimientos experimentados por el microsistema completo. El voltaje de excitación provoca una fuerza electrostática entre los electrodos que a su vez es causa de algunos movimientos de la placa móvil. Por lo tanto, la precisión de las mediciones o incluso la operación normal del sensor capacitivo se ve afectada por el voltaje de excitación [57].

Generalmente, el voltaje de excitación consiste de un componente de CA y un componente de CD. Una forma comúnmente empleada es $\pm V_0 \pm V_1 \sin \omega t$, donde la frecuencia ω (en el orden de 10^6) es usualmente mucho más grande que la frecuencia de la señal que es medida y la frecuencia natural de oscilación de la estructura mecánica del microsistema (ambas en el orden de $10^3 \sim 10^4$). Por lo tanto, la fuerza sobre el electrodo móvil es el promedio de la fuerza electrostática del voltaje de excitación:

$$F_e = \frac{A\epsilon\epsilon_0}{2(d-x)^2} \left(V_0^2 + \frac{1}{2}V_1^2 \right)$$

Si el voltaje efectivo se define como $V_{ef} = \sqrt{(V_0^2 + V_1^2/2)}$, la forma general de la fuerza electrostática actuando sobre el electrodo será:

$$F_e = \frac{A\epsilon\epsilon_0}{2(d-x)^2} V_{ef}^2$$

6.2.1. Efectos de la excitación eléctrica en un capacitor simple

La configuración de capacitor simple es común en acelerómetros y sensores de presión; los elementos básicos se muestran en el esquema de la figura 6.17.

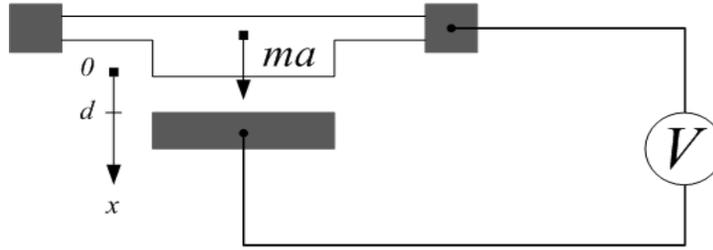


Figura 6.17: Esquema con la estructura de un dispositivo capacitivo simple.

Dado que la excitación eléctrica se presenta únicamente entre dos placas (es decir, no existe una tercera placa para configurar un dispositivo diferencial), la ecuación para determinar el desplazamiento de la placa móvil será:

$$\frac{A\epsilon\epsilon_0 V_{ef}^2}{2(d-x)^2} + ma - kx = 0 \quad (6.18)$$

donde ma es la fuerza en la dirección x y d es la distancia inicial entre las placas o electrodos del capacitor. Si se definen $\tilde{x} = x/d$, $p = A\epsilon\epsilon_0 V_{ef}^2 / 2kd^3$ y $q = ma/kd$, la ecuación anterior puede reescribirse del siguiente modo:

$$\tilde{x} - \frac{p}{(1-\tilde{x})^2} = q \quad (6.19)$$

A partir de esta ecuación se tienen los siguientes casos:

V_{ef} **cero, es decir, $p = 0$**

A partir de 6.19 se tiene $\tilde{x} = q$ y por tanto la relación entre el desplazamiento y la aceleración es lineal.

V_{ef} **diferente de cero y valores muy pequeños de p , q y x**

Para valores pequeños de \tilde{x} , y empleando la aproximación de $(1+y)^{-1} = (1-y+y^2-y^3+\dots)$ (aproximación de la función mediante una serie de Maclaurin) hasta la segunda potencia, la ecuación 6.19 puede reescribirse como:

$$3p\tilde{x}^2 - (1-2p)\tilde{x} + (p+q) = 0 \quad (6.20)$$

La solución a la ecuación será:

$$\tilde{x} = \frac{(1-2p) - \sqrt{(1-2p)^2 - 12p(p+q)}}{6p}$$

Empleando la aproximación de $\sqrt{1-y} = (1 - y/2 - y^2/8 - y^3/16 + \dots)$ (aproximación de la función mediante una serie de Maclaurin) para valores pequeños de p y q , la solución a la ecuación 6.20 puede aproximarse como:

$$\tilde{x} = \frac{p(1-4p+7p^2)}{(1-2p)^3} + \frac{1-4p+10p^2}{(1-2p)^3}q \left(1 + \frac{3p}{1-4p+10p^2}q\right)$$

A partir de esta ecuación se puede concluir que:

1. El voltaje de excitación provoca un corrimiento aún cuando la aceleración sea nula como lo indica el primer término del lado derecho. Obviamente, mientras mayor sea el valor de p (es decir, mayor voltaje de excitación) mayor será el corrimiento de la posición original de reposo del sistema.
2. La sensibilidad del dispositivo es proporcional a $(1-4p+10p^2)/(1-2p)^3$, lo cual evidentemente está directamente relacionado con el voltaje de excitación. Por lo tanto, mientras mayor sea el voltaje de excitación, mayor será la sensibilidad del dispositivo.
3. El voltaje de excitación provoca no-linealidad en la relación desplazamiento y aceleración. La no-linealidad es $3pq_{m\acute{a}x}/4(1-4p+10p^2)$, donde $q_{m\acute{a}x}$ es el valor de q que corresponde al máximo del rango de aceleración.

Planteamiento general

En general, puede observarse el comportamiento de las variables que intervienen en la ecuación 6.19 empleando gráficas para distintos valores de sus parámetros y variables. Por definición, la ecuación 6.19 es una función de \tilde{x} y p :

$$f(\tilde{x}, p) = \tilde{x} - \frac{p}{(1-\tilde{x})^2}$$

Las curvas de f como función de x y p se muestran en la figura 6.18. Las soluciones a la ecuación 6.19 para valores dados de p y q pueden encontrarse mediante la intersección entre una línea horizontal $f = q$ y la curva correspondiente al valor de p .

Para un par de valores de p y q , tales como $p = 0,05$ y $q = 0,2$ existen dos intersecciones entre las curvas (A y B). El desplazamiento correspondiente al punto A (en $x \cong 0,3d$) representa una solución estable pero el desplazamiento correspondiente al punto B (en $x \cong 0,67d$) es una solución inestable.

Se tiene que para un valor específico de p , existe un valor máximo f , $f_{m\acute{a}x}$ correspondiente a una aceleración crítica, $a_c = f_{m\acute{a}x}kd/m$. Para un valor de q más grande que $f_{m\acute{a}x}$ (es decir, para una aceleración a mucho mayor que a_c) no existe una solución estable para la ecuación. Esto significa que el efecto de llegada ocurre debido al efecto combinado de la fuerza electrostática y la inercia. Esto es, en tanto mayor sea el valor de p (lo que significa que el valor del voltaje de excitación es considerable) menor será el valor de $f_{m\acute{a}x}$. Para un mayor rango de operación confiable, p debe ser tan pequeño como sea posible. Sin embargo, con un valor pequeño de p , la sensibilidad del dispositivo disminuye. Por lo tanto, en el diseño de Microsistemas que empleen sensores capacitivos de placas paralelas, en particular aquellos que tiene sólo un par de éstas, debe tenerse en consideración este aspecto para lograr un buen compromiso entre sensibilidad y estabilidad.

A partir de la condición $\delta f/\delta \tilde{x} = 0$, puede encontrarse la ecuación para determinar el valor de $f_{m\acute{a}x}$:

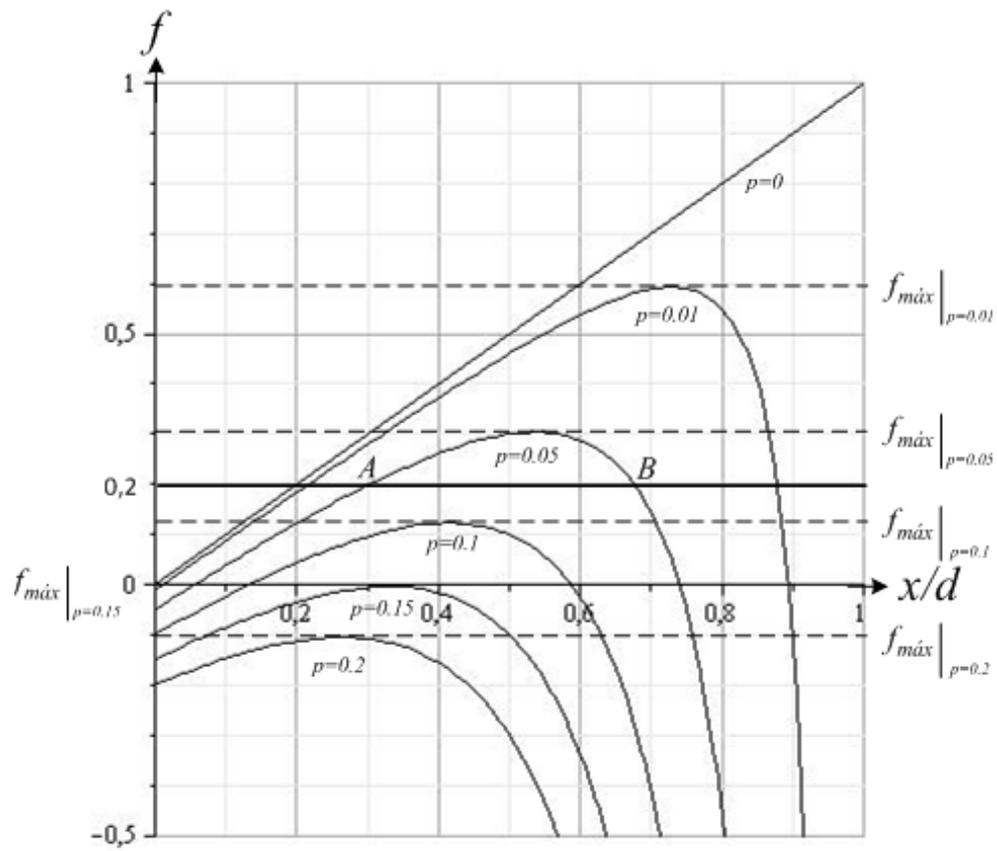


Figura 6.18: Gráfica de aceleración (q) en función del desplazamiento relativo (x/d) para distintos valores de voltaje (p) en un capacitor simple.

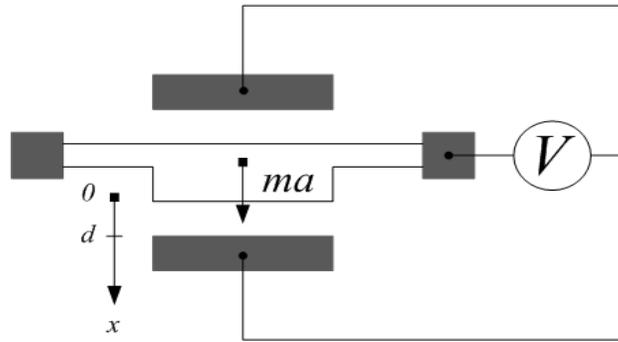


Figura 6.19: Esquema con la estructura de un dispositivo capacitivo diferencial (doble capacitor).

$$f_{m\acute{a}x} = 1 - \frac{3}{2} \sqrt[3]{2p}$$

Por ejemplo, para $p = 0,05$, $f_{m\acute{a}x}$ es 0,304, es decir, la aceleración máxima que no provoca el efecto de llegada (colapso mecánico y circuito corto eléctrico) es $0,304kd/m$, en lugar de kd/m . Para $p = 0,1$, la aceleración máxima se reduce a $0,122kd/m$. El acelerómetro colapsa si p es mayor a $4/27$.

6.2.2. Efectos de la excitación eléctrica en un capacitor doble

Para un capacitor doble, es decir, con dos placas fijas y una placa móvil colocados de forma tal que generan dos juegos de electrodos, como el mostrado en la figura 6.19, la ecuación para el desplazamiento de la placa móvil será:

$$\frac{A\varepsilon\varepsilon_0 V_{ef}^2}{2d^2} \left[\frac{1}{(1-\tilde{x})^2} - \frac{1}{(1+\tilde{x})^2} \right] + ma - kx = 0 \quad (6.21)$$

Si se definen $\tilde{x} = x/d$, $p = A\varepsilon\varepsilon_0 V_{ef}^2 / 2kd^3$ y $q = ma/kd$, la ecuación anterior puede reescribirse del siguiente modo:

$$\tilde{x} \left[1 - \frac{4p}{(1-\tilde{x}^2)^2} \right] = q \quad (6.22)$$

A partir de la ecuación 6.22 se tienen los casos siguientes.

V_{ef} **cero, es decir**, $p = 0$

Se tiene que $\tilde{x} = q$. La relación entre desplazamiento y aceleración es lineal.

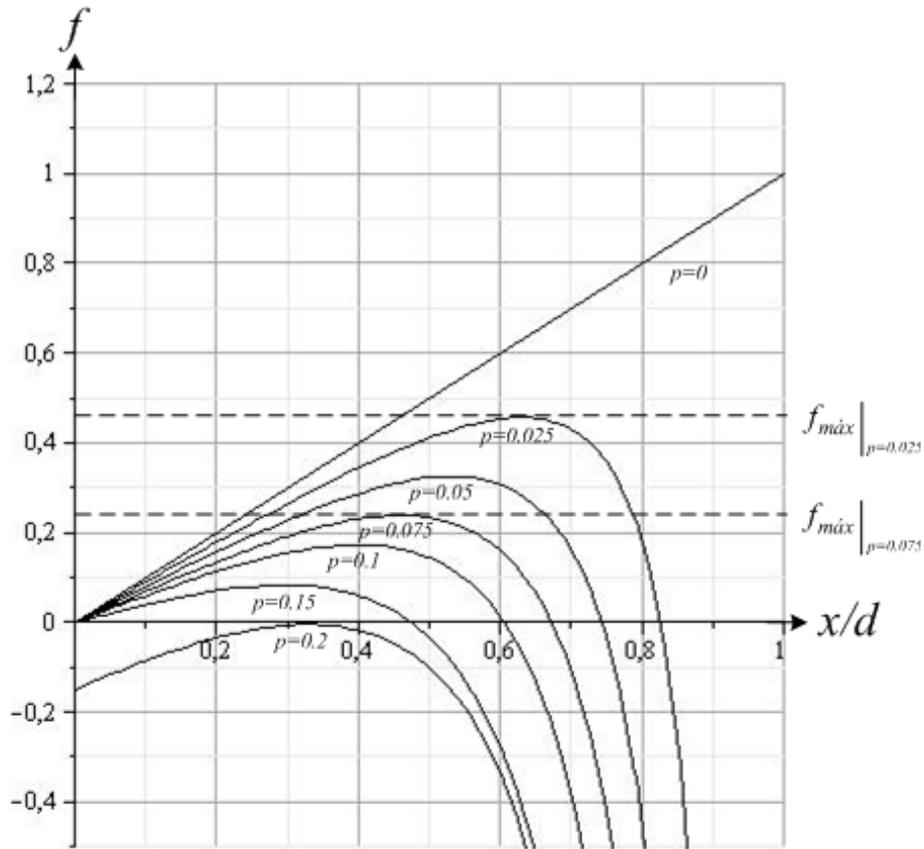


Figura 6.20: Gráfica de aceleración (q) en función del desplazamiento realtivo (x/d) para distintos valores de voltaje (p) en un capacitor diferencial (doble).

V_{ef} diferente de cero y valores muy pequeños de p , q y x

No se tiene corrimiento provocado por el voltaje de excitación debido a las fuerzas electrostáticas simétricas actuando sobre la placa móvil.

Para valores muy pequeños de \tilde{x} , $\tilde{x} \cong q/(1-4p)$. Esto significa que mientras mayor sea el voltaje de excitación, mayor será la sensibilidad del microsistema. Y el máximo valor de p para una operación estable es 0,25.

Planteamiento general

El comportamiento de la ecuación 6.22, para distintos valores de sus variables puede apreciarse, si se define a f como función de \tilde{x} y p , se fija un valor para p como parámetro y se traza la gráfica de f con respecto a \tilde{x} :

$$f(\tilde{x}, p) = \tilde{x} \left[1 - \frac{4p}{(1 - \tilde{x}^2)^2} \right] \quad (6.23)$$

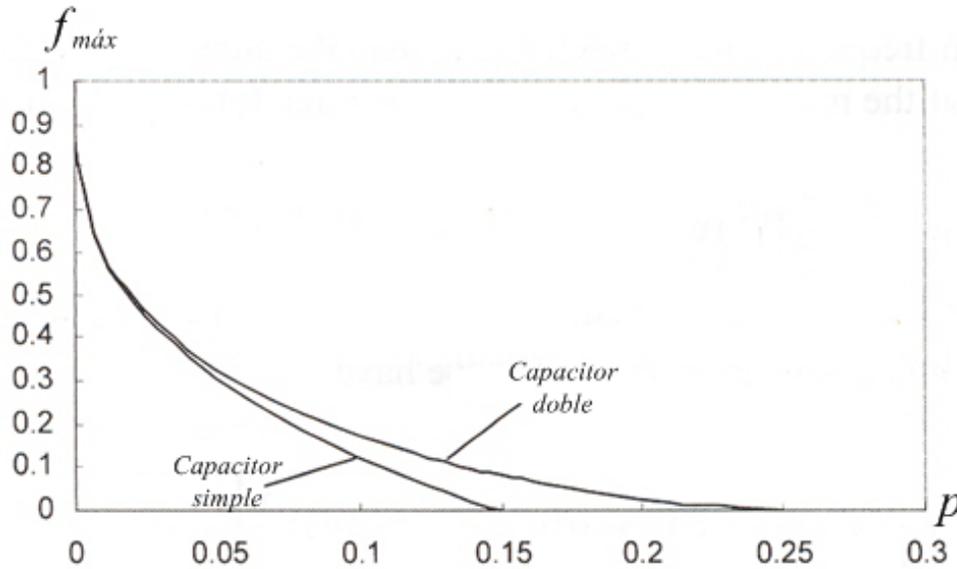


Figura 6.21: Gráfica de la relación entre la aceleración máxima (f) y voltaje (p) para las configuraciones de capacitor simple y doble.

Las soluciones a la ecuación 6.23 para un conjunto de valores de p y q pueden encontrarse mediante las intersecciones de la línea horizontal $f = q$ para el valor q y la curva de f respecto de \tilde{x} para p .

Para un par de valores de p y q , tales como, $p = 0,05$ y $q = 0,3$, existen dos intersecciones entre la línea $f = 0,3$ y la curva de f respecto de \tilde{x} . La primera de estas intersecciones (en $x \cong 0,42d$) corresponde a una solución estable pero la intersección a la derecha (en $x \cong 0,61d$) corresponde a una solución inestable.

Para un valor específico de p existe un valor máximo acotado de f . Para un valor de q mayor que $f_{máx}$, no existe solución en los números reales para la ecuación. Esto significa que la masa que conforma la placa móvil sufre un efecto de llegada debido a la combinación de la fuerza electrostática y la inercia. En tanto mayor sea el valor de p (lo que significa un mayor valor de V_{ef}) menor será el valor de $f_{máx}$. Si se considera el valor de $p = 0,05$, la $f_{máx}$ es alrededor de $0,32$. Por lo tanto, la aceleración crítica a_c para provocar el efecto de llegada (o colapso) es $0,32kd/m$. Para $p = 0,1$, la aceleración crítica se reduce a $0,17kd/m$. No existe una solución estable para p mayor que $0,25$, incluso si la masa se encuentra en su posición original de reposo, ésta será empujada hasta hacer contacto con uno de los electrodos fijos (efecto de llegada o colapso).

A partir de lo analizado, se puede concluir hasta este momento, que la configuración de capacitor doble para un microsistema es mejor que la configuración de capacitor simple, dado que no existe corrimiento provocado por la aplicación de un voltaje de excitación y el voltaje de excitación puede ser mayor sin provocar la presencia del efecto de llegada.

En la gráfica siguiente se muestra la dependencia de $f_{máx}$ respecto de p para un capacitor simple y para un capacitor doble. A partir de esta gráfica se puede apreciar que en ambos casos, para una operación confiable del microsistema, p debe ser pequeña, pero ello afecta directa y negativamente la sensibilidad del dispositivo.

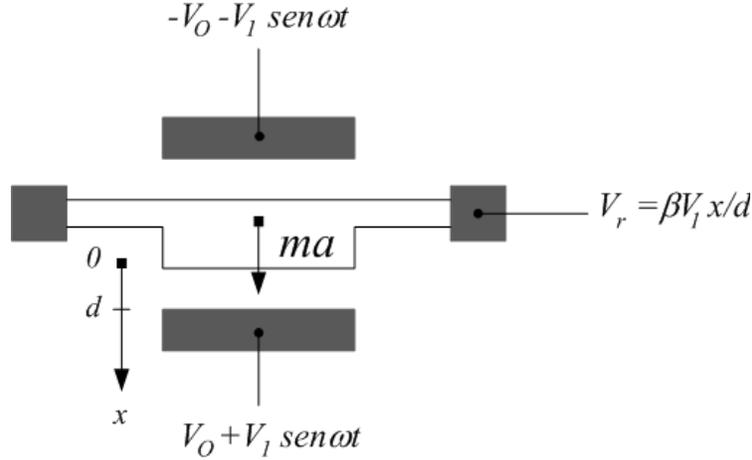


Figura 6.22: Versión simplificada de la estructura de un sensor capacitivo realimentado para lograr el balanceo de fuerzas eléctricas.

6.2.3. Efectos de la excitación eléctrica en un capacitor configurado para el balanceo de fuerzas

Para un dispositivo capacitivo configurado para balancear fuerzas con un voltaje de realimentación V_r , el voltaje de realimentación es proporcional al desplazamiento de la masa (para desplazamientos pequeños): $V_r = \beta V_1 \tilde{x}$, donde β es el coeficiente de realimentación del circuito [50]. Dado que V_0 y V_r están restringidos por el voltaje proporcionado por el circuito electrónico de realimentación V_s , se tiene que $V_0, V_r \leq V_s/2$.

Con el voltaje de realimentación, la fuerza electrostática actuando sobre la masa será:

$$F_e = \frac{A\epsilon\epsilon_0}{2d^2} \left[\frac{(V_0 + V_1 \text{sen } \omega t - V_r)^2}{(1 - \tilde{x})^2} - \frac{(V_0 + V_1 \text{sen } \omega t + V_r)^2}{(1 + \tilde{x})^2} \right] \quad (6.24)$$

Dado que la frecuencia de excitación, ω , es mucho mayor que las frecuencias de la señal medida y que la frecuencia natural de la estructura mecánica del sistema, la fuerza promedio actuando sobre la masa será:

$$\bar{F}_e = \frac{A\epsilon\epsilon_0}{2d^2 (1 - \tilde{x}^2)^2} \left[4 \left(V_0^2 + \frac{1}{2} V_1^2 \right) \tilde{x} + 4V_r^2 \tilde{x} - 4V_r V_0 - 4V_r V_0 \tilde{x}^2 \right] \quad (6.25)$$

Empleando la relación $V_r = \beta V_1 \tilde{x}$ y definiendo $V_1 = \alpha V_0$, se tiene:

$$\bar{F}_e = \frac{2A\epsilon\epsilon_0 V_0^2}{d^2 (1 - \tilde{x}^2)^2} \left[\left(1 + \frac{1}{2} \alpha^2 \right) \tilde{x} - (\alpha\beta\tilde{x}) + (\alpha\beta\tilde{x})^2 \tilde{x} - (\alpha\beta\tilde{x}) \tilde{x}^2 \right] \quad (6.26)$$

Por lo tanto, la ecuación de balanceo de fuerzas para la masa sujeta a una aceleración a será:

$$ma - kd\tilde{x} + \frac{2A\varepsilon\varepsilon_0V_0^2}{d^2(1-\tilde{x}^2)^2} \left[\left(1 + \frac{1}{2}\alpha^2\right)\tilde{x} - (\alpha\beta\tilde{x}) + (\alpha\beta\tilde{x})^2\tilde{x} - (\alpha\beta\tilde{x})\tilde{x}^2 \right] = 0$$

Si se definen ahora $p_0 = A\varepsilon\varepsilon_0V_0^2/2kd^3$ y $q = ma/kd$, se tiene:

$$q = \tilde{x} - \frac{4p_0}{(1-\tilde{x}^2)^2} \left[\left(1 + \frac{1}{2}\alpha^2\right)\tilde{x} - (\alpha\beta\tilde{x}) + (\alpha\beta\tilde{x})^2\tilde{x} - (\alpha\beta\tilde{x})\tilde{x}^2 \right] \quad (6.27)$$

A partir de esta ecuación se tienen relacionadas de forma directa a q y \tilde{x} y se pueden analizar los casos siguientes.

V_{ef} **cero, es decir**, $p_0 = 0$

Dado que $q = \tilde{x}$, la relación entre fuerza y desplazamiento es lineal.

V_{ef} **diferente de cero y valores muy pequeños de p_0 , q y x**

En este caso, se tiene $\tilde{x} \cong \frac{q}{1-4p_0(1+\alpha^2/2)+4p_0\alpha\beta}$. La relación entre \tilde{x} y q esta determinada por el valor de β . Para $\beta \neq 0$, en tanto mayor sea el valor de β , menor será el desplazamiento debido a la realimentación electromecánica, lo cual no es deseable en el comportamiento del sistema.

Planteamiento general

Nuevamente se hará uso de gráficas para analizar la relación entre q y \tilde{x} . Si se define la función $f(\tilde{x}, \beta, p_0, \alpha)$:

$$f(\tilde{x}, \beta, p_0, \alpha) = \tilde{x} - \frac{4p_0}{(1-\tilde{x}^2)^2} \left[\left(1 + \frac{1}{2}\alpha^2\right)\tilde{x} - (\alpha\beta\tilde{x}) + (\alpha\beta\tilde{x})^2\tilde{x} - (\alpha\beta\tilde{x})\tilde{x}^2 \right]$$

y se trazan las curvas para $f(\tilde{x}, \beta, p_0, \alpha)$ con diferentes valores para β y valores específicos de p_0 y α se obtiene la gráfica mostrada en la figura 6.23.

En los cálculos, el techo de valores para V_0 esta dado por V_r . Para valores pequeños de β , el máximo de la curva, $f_{máx}$, también es pequeño debido a la fuerza electrostática provocada por la señal de excitación. Esto significa que la aceleración crítica que provoca el efecto de llegada, es decir, $a_c = f_{máx}kd/m$, es pequeño. $f_{máx}$ se incrementa con β hasta que β alcanza un valor cercano a 5, momento en que la curva tiene su mayor linealidad. Todas las curvas con β mayor a 5 se juntan para valores grandes de x debido a que el voltaje de realimentación está restringido por el valor máximo de V_0 .

De las gráficas de $f(\tilde{x}, \beta, p_0, \alpha)$ se puede apreciar que para un valor pequeño de β , se maximiza el valor de p_0 y se disminuyen los máximos de las curvas (debido a la gran fuerza electrostática provocada por la señal de excitación). Esto significa que en tanto mayor sea el valor de p , menor será la aceleración crítica a_c , que provoca el efecto de llegada. Sin embargo, si la realimentación es suficientemente grande $f_{máx}$ puede

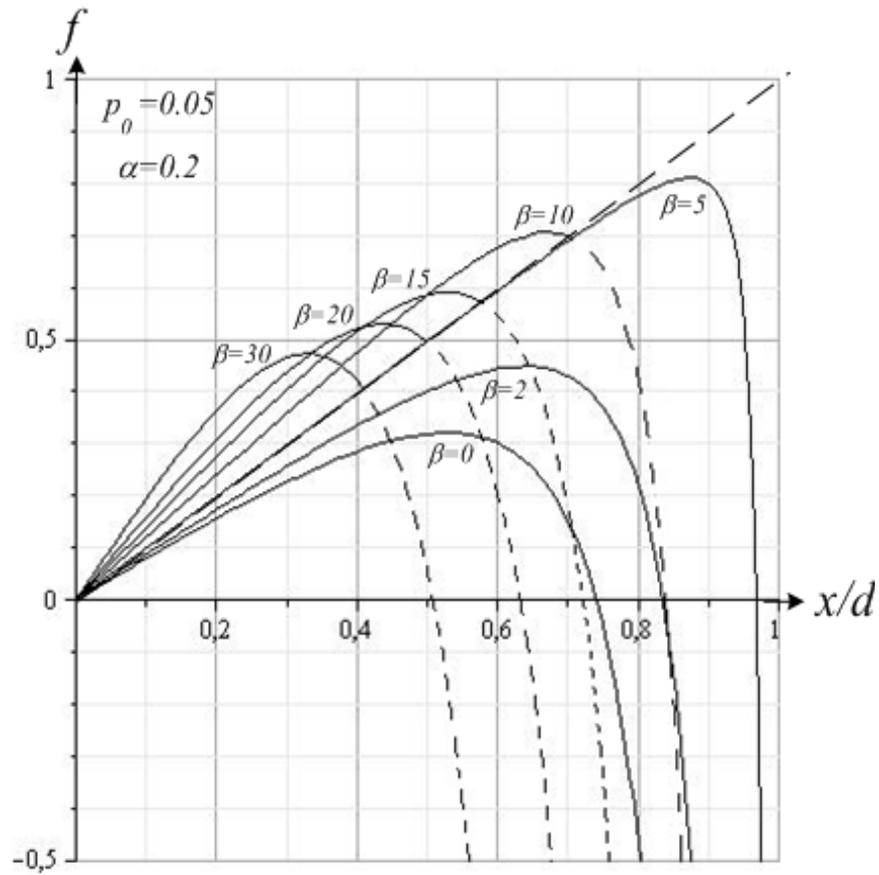


Figura 6.23: Gráfica de la relación aceleración (f) en función del desplazamiento relativo (x/d) para distintos valores de voltaje de realimentación (β).

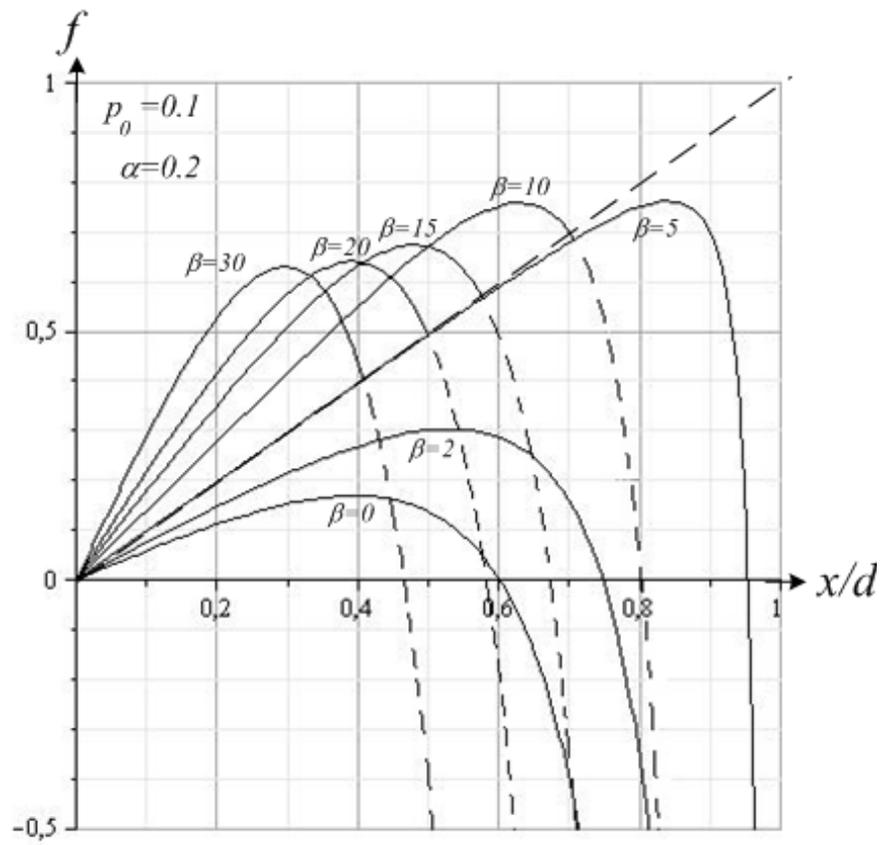


Figura 6.24: Gráfica de la relación aceleración (f) en función del desplazamiento relativo (x/d) para distintos valores de voltaje de realimentación (β).

sobrepasar el valor de 0,8. Lo que significa que el efecto de llegada provocado por la señal de excitación es eliminado principalmente por la realimentación.

En resumen, puede concluirse que, de las tres configuraciones analizadas, la de capacitor doble con realimentación electromecánica (configuración para el balanceo de fuerzas) es la que menos se ve afectada por los efectos colaterales de la señal de excitación y tiene el mejor desempeño, bajo la consideración de una aceleración constante.

6.3. Efectos de la excitación en sistemas que reciben acel. con forma de escalón

En Microsistemas basados en dispositivos capacitivos para registrar movimientos las fuerzas mecánicas son dinámicas y el amortiguamiento de la estructura mecánica en su conjunto es mucho menor a la unidad. Bajo estas condiciones, un dispositivo inercial capacitivo es más susceptible de fallar por el efecto de llegada (colapso) debido al movimiento de sobreimpulso de la masa. En las peores condiciones, el efecto de amortiguamiento es cercano a cero (debido principalmente al empacamiento al vacío a la que son sometidos los Microsistemas), situación que reduce el rango de operación confiable del dispositivo. Este escenario de amortiguamiento cero (el peor caso) debe tenerse en cuenta para el diseño de Microsistemas con dispositivos capacitivos inerciales en los que los efectos de dicho amortiguamiento son difíciles de modelar. En virtud de lo anterior será necesario analizar con mayor detalle el comportamiento de un dispositivo capacitivo inercial que tiene un amortiguamiento pequeño y es sometido a aceleraciones con forma de escalón o impulso [58].

6.3.1. Efectos de la excitación eléctrica en un capacitor simple

Para un dispositivo basado en un capacitor simple alimentado con una señal de excitación $V = V_0 \pm V_1 \sin \omega t$, la posición de equilibrio de la masa, llamada x_0 , antes de que aparezca una aceleración con forma de escalón esta determinada por la ecuación 5.13. Con una aceleración con forma de escalón (con a iniciando en $t = 0$) actuando sobre la masa ubicada en su posición inicial de equilibrio x_0 , la energía cinética de la masa será:

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \int_{x_0}^x \left[\frac{A\epsilon\epsilon_0 V^2}{2(d-x)^2} + ma - kx \right] dx$$

Dado que el máximo desplazamiento que la masa puede alcanzar está determinado por la condición de $\dot{x} = 0$, la ecuación para el máximo desplazamiento x_1 será:

$$p \frac{1}{1-\tilde{x}} + q\tilde{x}_1 - \frac{1}{2}\tilde{x}_1^2 = p \frac{1}{1-\tilde{x}_0} + q\tilde{x}_0 - \frac{1}{2}\tilde{x}_0^2$$

donde $q = ma/kd$ y $\tilde{x} = x/d$. Una solución de la ecuación para \tilde{x}_1 puede encontrarse si q es suficientemente pequeña. Sin embargo, una solución fuera de los números reales puede hallarse en la región ($0 \sim 1$) cuando q alcanza valores más allá del valor crítico q_c . Esto significa que el desplazamiento de la masa puede incrementarse continuamente hasta que haga contacto con el electrodo.

Para encontrar el valor crítico q_c , q se expresa como función de \tilde{x}_1 .

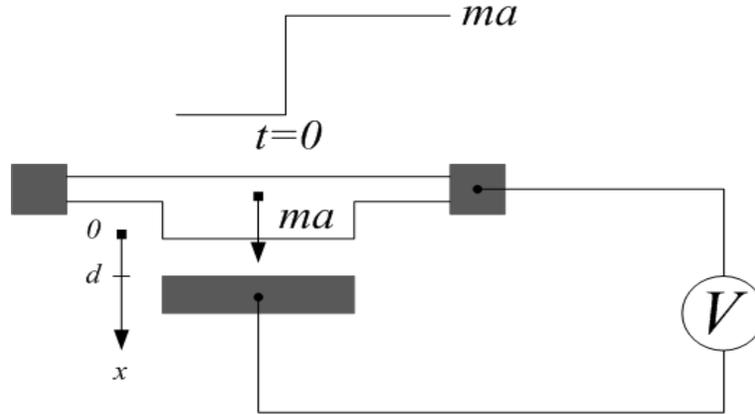


Figura 6.25: Esquema de la estructura básica de un sensor capacitivo simple sometido a una aceleración con forma de escalón.

$$q(\tilde{x}_1) = \frac{1}{2}(\tilde{x}_1 + \tilde{x}_0) - \frac{p}{(1 - \tilde{x}_0)(1 - \tilde{x}_1)}$$

Existe un valor crítico de q_c , el cual corresponde al máximo valor de \tilde{x}_1 , llamado \tilde{x}_m . Para hallar \tilde{x}_m se parte de la condición $\delta q / \delta \tilde{x}_1 = 0$:

$$\tilde{x}_m = 1 - \sqrt{\frac{2p}{1 - \tilde{x}_0}}$$

Por lo tanto, q_c será:

$$q_c = \frac{1}{2}(\tilde{x}_m + \tilde{x}_0) - \frac{p}{(1 - \tilde{x}_0)(1 - \tilde{x}_m)}$$

La dependencia de q_c respecto de p para una aceleración con forma de escalón se muestra en la gráfica de la figura 6.26.

Típicamente, q_c para una aceleración con forma de escalón es menor que para una aceleración constante por un factor de 0,5 a 0,7 (para la misma p). El nivel crítico de la aceleración para una operación confiable del dispositivo capacitivo inercial será $a_c = \omega_0^2 dq_c$. Puesto que q_c es fuertemente dependiente de p , la dependencia en realidad es respecto del voltaje de excitación.

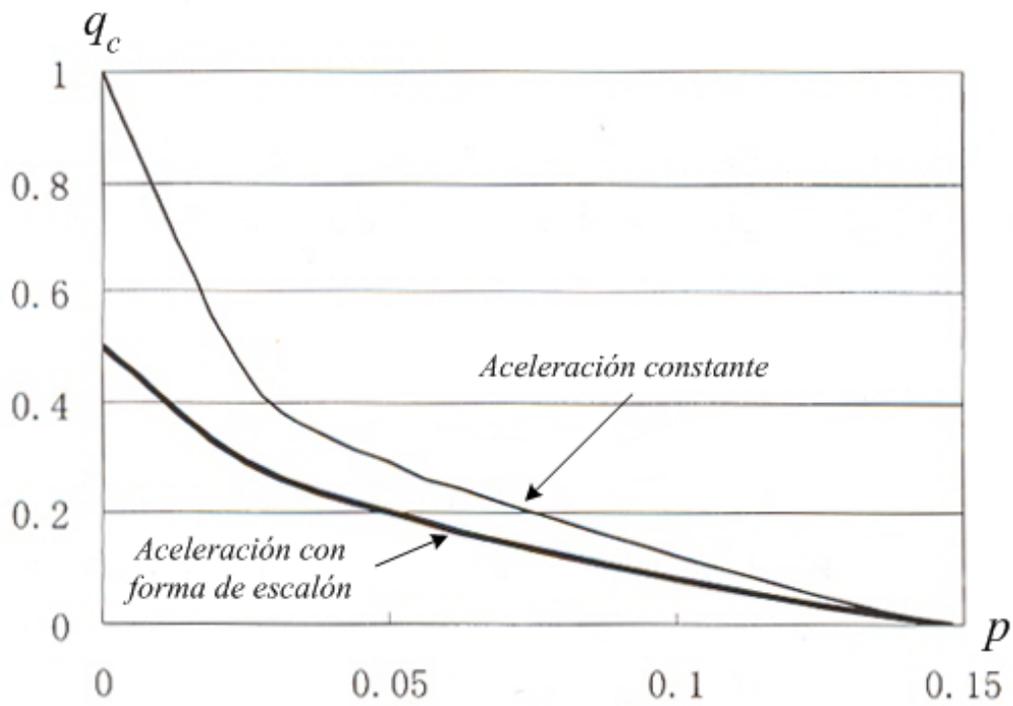


Figura 6.26: Dependencia de la aceleración máxima (q_c) respecto del voltaje (p) para una aceleración constante y una aceleración con forma de escalón.

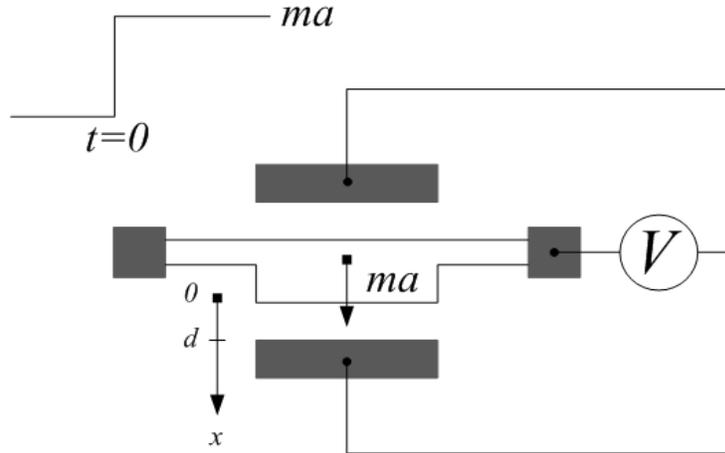


Figura 6.27: Esquema de la estructura básica de un sensor capacitivo diferencial (doble) sometido a una aceleración con forma de escalón.

6.3.2. Efectos de la excitación eléctrica en un capacitor doble

Para la configuración de un capacitor doble, la posición original de equilibrio de la masa será justo al centro entre los dos electrodos ($x = 0$). Si es aplicada una aceleración con forma de escalón en el tiempo $t = 0$, la ecuación que modela el comportamiento dinámico de la masa será:

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \int \left\{ \frac{A\epsilon\epsilon_0 V^2}{2d_0^2} \left[\frac{1}{(1-\tilde{x})^2} - \frac{1}{(1+\tilde{x})^2} \right] + ma - kx \right\} dx$$

Lo que puede expresarse como:

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 = 2\frac{A\epsilon\epsilon_0 V^2}{2d_0} \frac{\tilde{x}^2}{1-\tilde{x}^2} + mad_0\tilde{x} - \frac{1}{2}kd_0^2\tilde{x}^2$$

Al introducir $\dot{x} = 0$, la expresión para q puede hallarse:

$$q = \frac{1}{2}\tilde{x}_1 - 2p\frac{\tilde{x}_1}{1-\tilde{x}_1^2}$$

El valor crítico q_c correspondiente a \tilde{x}_m se calcula por la condición $\delta q/\delta y_1 = 0$. Así, se tiene:

$$\tilde{x}_m = \sqrt{(1+2p) - \sqrt{4p(2+p)}}$$

Para un valor específico de p , \tilde{x}_m puede hallarse a partir de la ecuación anterior y entonces q_c puede obtenerse a partir de:

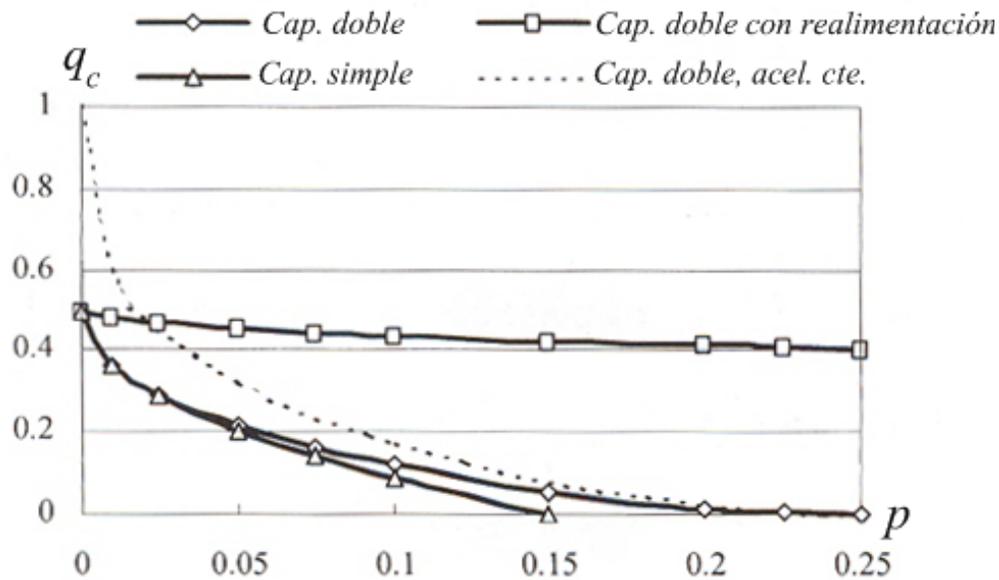


Figura 6.28: Dependencia de la aceleración crítica (q_c) respecto del voltaje de alimentación (p) para distintos arreglos en los capacitores y aceleración con forma de escalón.

$$q_c = \frac{1}{2} \tilde{x}_m - 2p \frac{\tilde{x}_m}{1 - \tilde{x}_m^2}$$

La aceleración crítica para una operación confiable es $a_c = \omega_0^2 d_0 q_c$. La dependencia de q_c respecto de p se muestra en la gráfica de la figura 6.28.

Para efectos de comparación, también se muestra la dependencia de q_c respecto de p para una aceleración constante. El valor de q_c para una aceleración con forma de escalón es menor que el presente para una aceleración constante por un factor de 0,5 a 0,7 para el mismo nivel de excitación.

6.3.3. Efectos de la excitación eléctrica en un capacitor configurado para el balanceo de fuerzas

En un dispositivo capacitivo inercial configurado para el balanceo de fuerzas se hace uso de un voltaje de realimentación V_r . El desplazamiento de la masa, requiere que el voltaje de realimentación V_r sea $V_r = \beta V_1 \tilde{x}$, donde β es el coeficiente de realimentación. Dado que V_r tiene un valor tope determinado por el circuito electrónico de realimentación V_s , este se ubica como $V_r \leq V_s/2$.

De acuerdo con la configuración mostrada en la figura 6.29, la fuerza electrostática aplicada a la masa será:

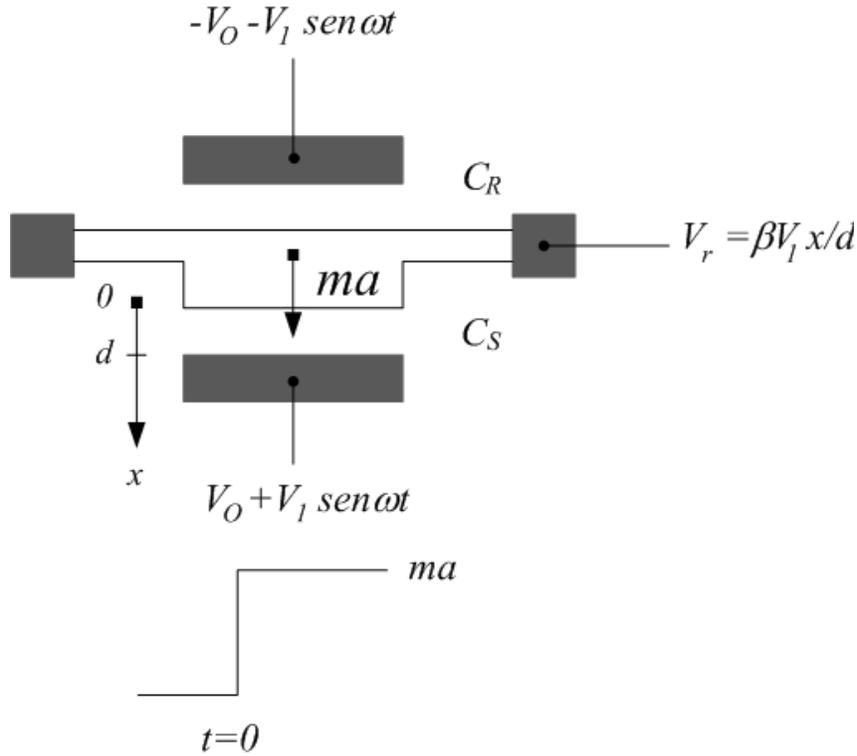


Figura 6.29: Esquema de la estructura básica de un sensor capacitivo diferencial (doble) con realimentación para el balanceo de fuerzas sometido a una aceleración con forma de escalón.

$$\bar{F}_e = \frac{2A\epsilon\epsilon_0 V_0^2}{d^2(1-\tilde{x}^2)^2} \left[\left(1 + \frac{1}{2}\alpha^2\right) \tilde{x} - (\alpha\beta\tilde{x}) + (\alpha\beta\tilde{x})^2 \tilde{x} - (\alpha\beta\tilde{x}) \tilde{x}^2 \right]$$

Con una aceleración con forma de escalón, la energía cinética de la masa se obtiene a partir de:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m\dot{x}^2 &= \int (\bar{F}_e + ma - kx) dx \\ &= \int \left(\frac{2A\epsilon\epsilon_0}{(1-\tilde{x}^2)^2} \left[\left(1 + \frac{1}{2}\alpha^2\right) V_0^2 \tilde{x} - (\alpha\beta\tilde{x}) V_0 + (\alpha\beta\tilde{x})^2 V_0^2 \tilde{x} - (\alpha\beta\tilde{x}) V_0 \tilde{x}^2 \right] + ma - kx \right) dx \end{aligned}$$

Dado que el voltaje de realimentación V_r iguala a $\alpha\beta\tilde{x}V_0$ para pequeños desplazamientos y $V_r = V_0$ (es decir $\alpha\beta\tilde{x} = 1$) para $\tilde{x} \geq 1/\alpha\beta$ debido a la restricción del circuito electrónico de realimentación, la ecuación debe analizarse en dos regiones y el valor crítico q_c deberá ser el mayor entre los dos máximos registrados, uno por región. La dependencia de q_c respecto de p para la condición de $\alpha = 2$, $\beta = 5$ se muestra en la gráfica. Cuando esta curva de desempeño del sistema es comparada con las curvas de las configuraciones que no consideran realimentación, se aprecia que el rango de operación confiable del dispositivo mejora notablemente gracias a la realimentación electromecánica.

6.4. Efectos de la excitación en sistemas que reciben una acel. con forma de pulso

Debido al efecto combinado de la inercia, la fuerza elástica y la fuerza electrostática generada por la excitación eléctrica existen restricciones en el rango de operación confiable de un dispositivo capacitivo inercial que recibe una aceleración con forma de pulso. La masa del dispositivo puede colapsarse contra alguno de los electrodos (efecto de llegada) si el nivel o duración del pulso de aceleración es muy grande.

6.4.1. Efectos de la excitación eléctrica en un capacitor simple

De acuerdo con la ecuación 5.2, con el voltaje de excitación V , la energía potencial (referida al estado $x = 0$) de un capacitor simple será:

$$E(x) = \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{A\varepsilon\varepsilon_0}{d-x} - \frac{A\varepsilon\varepsilon_0}{d} \right) V^2 = \frac{1}{2}kd^2 \left(\tilde{x}^2 - 2p \frac{\tilde{x}}{1-\tilde{x}} \right)$$

La condición para valorar los extremos de $E(x)$ será: $\tilde{x}(1-\tilde{x})^2 = p$. Bajo la condición de $p < 0,148$, existen dos soluciones para x en el rango de 0 a d ; una posición equilibrada estable x_0 correspondiente a un mínimo de energía y una posición equilibrada inestable x_1 correspondiente a un máximo de energía. Generalmente tanto x_0 como x_1 se obtienen a través de cálculos numéricos.

La energía potencial del sistema en una posición equilibrada estable es $E(x_0)$. Si la energía desatada por el pulso de aceleración es mayor que la barrera potencial $E(x_1) - E(x_0)$, la masa puede sobrepasar la posición x_1 y puede hacer contacto con el electrodo (efecto de llegada).

Si la amplitud del pulso de aceleración, a , es suficientemente grande y la duración del pulso, Δt , es suficientemente pequeña tal que la velocidad y el desplazamiento de la masa al final del pulso es pequeño, las condiciones iniciales pueden aproximarse como:

$$x_0 = a(\Delta t), \quad \dot{x}_0 = \frac{1}{2}a(\Delta t)^2 \quad (6.28)$$

Por lo tanto, la condición para una operación confiable será $\frac{1}{2}ma^2(\Delta t)^2 \leq E(\tilde{x}_1) - E(\tilde{x}_0)$, o, $a(\Delta t) \leq \omega_0 d \sqrt{(\tilde{x}_1^2 - \tilde{x}_0^2) - 2p \left(\frac{\tilde{x}_1}{1-\tilde{x}_1} - \frac{\tilde{x}_0}{1-\tilde{x}_0} \right)} \equiv \omega_0 d f_1(p)$, donde $f_1(p) = \sqrt{(\tilde{x}_1^2 - \tilde{x}_0^2) - 2p \left(\frac{\tilde{x}_1}{1-\tilde{x}_1} - \frac{\tilde{x}_0}{1-\tilde{x}_0} \right)}$.

Los resultados muestran que el valor crítico de $(a\Delta t)$ es proporcional al factor $f_1(p)$ así como a $d\omega_0$. La dependencia de $f_1(p)$ respecto de p está dada por la gráfica de la figura 6.30.

El análisis anterior es válido si la amplitud del pulso de aceleración es grande y la duración del pulso es breve de modo que las condiciones iniciales sean las marcadas por las ecuaciones 6.28. Esto significa que:

1. La inercia debe ser mucho mas grande que la fuerza elástica durante el tiempo que dura el pulso. Esto significa que $ma \gg ka(\Delta t)^2/2$. Por lo tanto, el cumplimiento de esta condición establece que $\Delta t \ll \sqrt{2}/\omega_0$.
2. La inercia debe ser mucho mayor que la fuerza de amortiguamiento al final de la duración del pulso. Esto significa que $ma \gg ca(\Delta t)$ (donde c es el coeficiente de amortiguamiento). El cumplimiento de esta condición significa que $\Delta t \ll m/c = 1/2n$ o que $\Delta t \ll Q/\omega_0$.

Por lo tanto, la condición para una operación confiable será que $\Delta t \ll \sqrt{2}/\omega_0$, si Q es suficientemente grande.

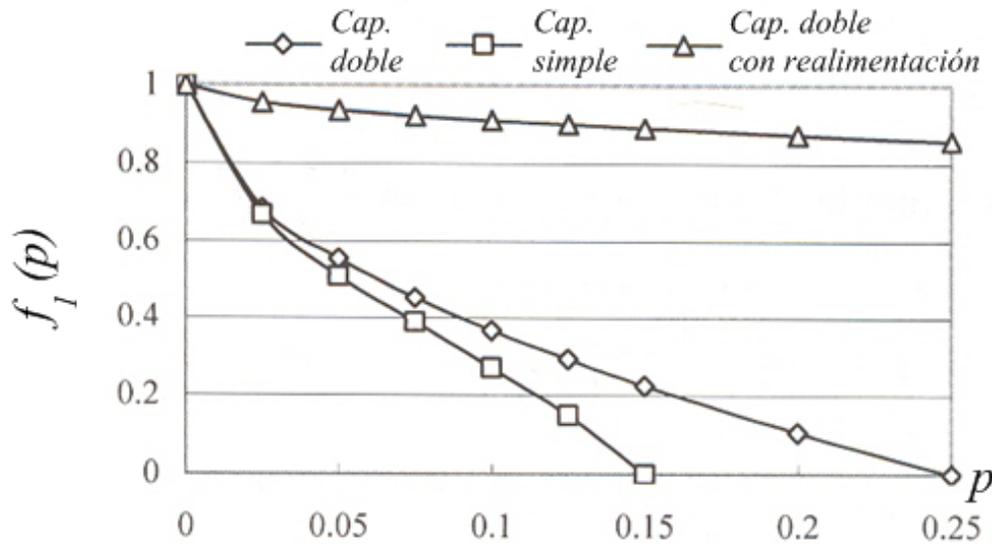


Figura 6.30: Dependencia de $f(p)$ respecto de p para configuraciones en el capacitor variable con un sólo lado, diferencial y diferencial con realimentación.

6.4.2. Efectos de la excitación eléctrica en un capacitor doble

De acuerdo con la ecuación 5.29 con el voltaje de excitación V , la energía potencial (referida al estado $x = 0$) de un capacitor doble será:

$$E(\tilde{x}) = \frac{1}{2}kd^2\tilde{x}^2 - \frac{A\varepsilon\varepsilon_0V^2\tilde{x}^2}{d(1-\tilde{x}^2)} \quad (6.29)$$

De la condición $\delta E(x)/\delta x = 0$, las posiciones para los extremos de $E(x)$ serán:

$$\tilde{x}_1 = 0, \quad \tilde{x}_{2,3} = \pm \sqrt{1 - \sqrt{\frac{C_0V^2}{kd^2}}} = \pm \sqrt{1 - \sqrt{4p}}$$

Para una condición originalmente estable ($V < \sqrt{kd^3/2A\varepsilon\varepsilon_0}$), $x_1 = 0$ es la posición de mínima energía (posición equilibrada estable) en tanto que x_1 y x_2 son posiciones de máxima energía (posiciones equilibradas inestables).

Por lo tanto si la energía proporcionada por el pulso de aceleración es mayor que la barrera potencial entre x_2 (o x_3) y x_1 , la masa irá más allá de la posición x_2 (o x_3) y hará contacto con alguno de los electrodos (efecto de llegada), provocando la falla del sistema. A partir de la ecuación 6.29 puede determinarse la barrera potencial:

$$E(x_2) = \frac{1}{2}kd^2(1 - \sqrt{4p})^2$$

Por lo tanto, la condición para una operación confiable del dispositivo capacitivo inercial será $ma^2 (\Delta t)^2 / 2 = E(x_2)$, o

$$a\Delta t = d\omega_0 (1 - 2\sqrt{p}) = d\omega_0 f_2(p)$$

dónde

$$f_2(p) = 1 - 2\sqrt{p}$$

La dependencia de $f_2(p)$ respecto de p se muestra en la gráfica de la figura 6.30. Como podrá apreciarse en las curvas $f_2(p)$ es consistentemente mayor que $f_1(p)$, por lo que la configuración de capacitor doble tiene un mayor rango de operación confiable que la configuración de capacitor simple.

6.4.3. Efectos de la excitación eléctrica en un capacitor configurado para el balanceo de fuerzas

Para un dispositivo capacitivo inercial con configuración para el balanceo de fuerzas la dependencia de la energía del sistema respecto del desplazamiento será:

$$E(\tilde{x}) = \frac{1}{2}kd^2\tilde{x}^2 - \frac{A\varepsilon\varepsilon_0}{2d}\tilde{x} \left(\frac{V^2 - 2VV_r + V_r^2}{1 - \tilde{x}} - \frac{V^2 + 2VV_r + V_r^2}{1 + \tilde{x}} \right)$$

dónde $V = V_0 + V_1 \sin \omega t$, $V_1 = \alpha V_0$, $V_r = \alpha\beta V_0 \tilde{x}$ para $\tilde{x} < 1/\alpha\beta$ pero $V_r = V_0$ para $\tilde{x} \geq 1/\alpha\beta$. Por simplicidad, se considera la condición $\alpha\beta < 1$ tal que $\tilde{x} < 1/\alpha\beta$. Dado que ω es mucho mayor que la frecuencia natural de oscilación de la estructura mecánica, se tiene que $\overline{V^2} = V_0^2 + V_1^2/2$ y $\overline{V} = V_0$. Por lo tanto, la energía promedio será:

$$E(\tilde{x}) = \frac{1}{2}kd^2\tilde{x}^2 - \frac{A\varepsilon\varepsilon_0 V_0^2}{d(1 - \tilde{x}^2)}\tilde{x}^2 \left[\left(1 + \frac{1}{2}\alpha^2 - 2\alpha\beta \right) + \alpha^2\beta^2\tilde{x}^2 \right]$$

Más aún, para \tilde{x} pequeña, la ecuación anterior puede aproximarse como:

$$E(\tilde{x}) = \frac{1}{2}kd^2\tilde{x}^2 - \frac{A\varepsilon\varepsilon_0 V_0^2}{d} \left(1 + \frac{1}{2}\alpha^2 - 2\alpha\beta \right) \left(\frac{\tilde{x}^2}{1 - \tilde{x}^2} \right)$$

Si la energía se normaliza con la máxima energía potencial mecánica, $kd^2/2$, se tiene:

$$\overline{E}(\tilde{x}) = \frac{2E(\tilde{x})}{kd^2} = \tilde{x}^2 - 4p_0 \left(1 + \frac{1}{2}\alpha^2 - 2\alpha\beta \right) \left(\frac{\tilde{x}^2}{1 - \tilde{x}^2} \right)$$

dónde $p_0 = \frac{A\varepsilon\varepsilon_0 V_0^2}{2kd^3} = p / \left(1 + \frac{1}{2}\alpha^2 \right)$. Debe aclararse que p_0 es ligeramente más pequeña que p .

Los extremos de la función de energía pueden determinarse a partir de la condición $\delta\overline{E}(\tilde{x})/\delta\tilde{x} = 0$. Para lo cual será posible encontrar tres soluciones:

$$\tilde{x}_1 = 0, \tilde{x}_{2,3} = \pm \sqrt{1 - \sqrt{4p_0(1 + \alpha^2/2 - 2\alpha\beta)}}$$

En concordancia con la condición para encontrar una solución real $1 > 4p_0(1 + \alpha^2/2 - 2\alpha\beta) > 0$, \tilde{x}_1 corresponde a un mínimo de energía y \tilde{x}_2 y \tilde{x}_3 corresponde a dos máximos de energía con el mismo valor. La diferencia de energía entre \tilde{x}_1 y \tilde{x}_2 (o \tilde{x}_3) será:

$$\Delta E = E(\tilde{x}_2) - E(\tilde{x}_1) = \frac{1}{2}kd_0^2 \left(1 - \sqrt{4p_0 \left(1 + \frac{1}{2}\alpha^2 - 2\alpha\beta \right)} \right)^2$$

Por lo tanto, para un pulso de aceleración de amplitud a y duración Δt , la condición crítica para una operación confiable es $ma^2(\Delta t)^2/2 = \Delta E$, o,

$$a(\Delta t_c) = \omega_0 d_0 f_3(p, \alpha, \beta)$$

dónde $f_3(p, \alpha, \beta) = 1 - \sqrt{4p_0(1 + \alpha^2/2 - 2\alpha\beta)}$.

Para un conjunto de valores de p_0 y α , el máximo de la función $f_3(p, \alpha, \beta)$ aparece en $\beta = 1/\alpha$ y el valor máximo será $f_3(p_0, \alpha, \beta) = 1 - \alpha\sqrt{2p_0}$. El valor es muy cercano a la unidad para valores pequeños de p_0 y α . La dependencia de $f_3(p, \alpha, \beta)$ respecto de p para $\alpha = 0,2$ y $\beta = 5$ se muestra en la gráfica de la figura 6.30. $f_3(p, \alpha, \beta)$ es generalmente mucho mayor que $f_1(p)$ y $f_2(p)$. Esto significa que el rango de operación confiable para un dispositivo capacitivo inercial se incrementa significativamente con el uso de una configuración de realimentación.