

CAPÍTULO 6

COMPORTAMIENTO ELÁSTICO

6.1 ANTECEDENTES

Una vez establecidas las ecuaciones generales, las cuales representan las condiciones que deberán ser cumplidas por cualquier medio continuo para cualquier posición y tiempo, es necesario definir las ecuaciones que describan el comportamiento de medios idealizados, las cuales se denominan como ecuaciones constitutivas.

En los sólidos es común observar que su deformación es proporcional a la carga aplicada, situación que también se puede describir en el sentido de que las deformaciones son proporcionales a las sollicitaciones (esfuerzos) presentes en el material

$$[\Delta\varepsilon \propto \Delta f] \text{ o } [\varepsilon \propto \sigma]$$

Considerando toda la evidencia experimental que se ha generado hasta la fecha, y simplificando la respuesta, se puede afirmar que la deformación es una función única de las sollicitaciones aplicadas; de tal manera que se descarta cualquier efecto de la velocidad de carga

$$\varepsilon \neq g\left(\frac{\partial f_i}{\partial t}\right)$$

Por otra parte, una vez que se elimina la carga la deformación desaparece completamente y, en general, estas deformaciones son muy pequeñas (infinitesimales). En el caso de cualquier medio continuo que presenta un comportamiento con las restricciones antes descritas se define su comportamiento como *elástico*, describiéndose como *inelásticos* aquellos materiales cuyo comportamiento no cumple con las condiciones antes especificadas. Afortunadamente, un buen número de materiales tales como los metales y el concreto cumplen con las condiciones establecidas y en otros casos, como la madera, se puede aproximar, dentro de ciertos rangos, su comportamiento.

En general en los sólidos, para el caso de pequeñas deformaciones (infinitesimales), se puede describir su comportamiento como lineal; mientras que para grandes deformaciones la relación entre esfuerzo y deformación será no lineal.

En primer término, en este capítulo se analizará el comportamiento de sólidos elásticos lineales, considerando los diferentes modelos idealizados, para al final describir las condiciones en las cuales se presentan comportamientos elásticos no lineales.

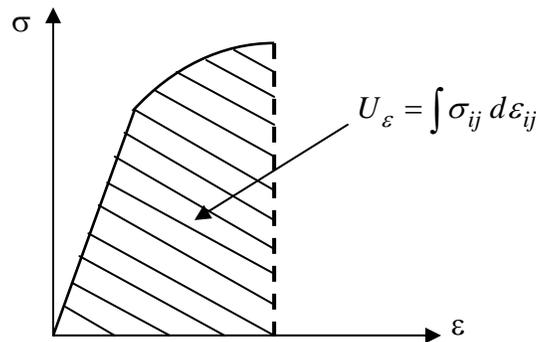


FIGURA 6.1 COMPORTAMIENTO CARACTERÍSTICO DE UN SÓLIDO ELÁSTICO LINEAL. EN UNA PRIMERA ETAPA LA RELACIÓN ESFUERZO-DEFORMACIÓN ES LINEAL, LA CUAL CORRESPONDE CON LA ZONA ELÁSTICA. POSTERIORMENTE, LA RELACIÓN SE VUELVE NO LINEAL, LA QUE CORRESPONDE CON LAS DEFORMACIONES PERMANENTES (DEFORMACIÓN PLÁSTICA)

6.2 DESCRIPCIÓN DEL COMPORTAMIENTO

Con base en las características enunciadas se formula la ecuación constitutiva de un material elástico ideal (sólido elástico lineal), en la forma $\sigma_{ij} = f(\epsilon_{kl})$, donde σ_{ij} representa al tensor de esfuerzos de Cauchy, mientras que ϵ_{kl} es el tensor de deformación infinitesimal. En el caso de la deformación elástica se considera que los desplazamientos son muy pequeños (infinitesimales) por lo que las descripciones lagrangiana y euleriana son equivalentes, por lo que

$$\epsilon_{kl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) \approx \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

Con base en lo enunciado se desarrolla un sistema de ecuaciones de la forma

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11} &= C_{1111}(\varepsilon_{11}) + C_{1112}(\varepsilon_{12}) + \dots + C_{1123}(\varepsilon_{23}) + \dots + C_{1133}(\varepsilon_{33}) \\
 \sigma_{12} &= C_{1211}(\varepsilon_{11}) + C_{1212}(\varepsilon_{12}) + \dots + C_{1223}(\varepsilon_{23}) + \dots + C_{1233}(\varepsilon_{33}) \\
 &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \quad \quad \cdot \quad \quad \cdot \\
 &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \quad \quad \cdot \quad \quad \cdot \\
 &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \quad \quad \cdot \quad \quad \cdot \\
 \sigma_{33} &= C_{3311}(\varepsilon_{11}) + C_{3312}(\varepsilon_{12}) + \dots + C_{3323}(\varepsilon_{23}) + \dots + C_{3333}(\varepsilon_{33})
 \end{aligned}$$

Las que en forma matricial se pueden representar a través de

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{21} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{32} \\ \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1112} & C_{1113} & C_{1121} & C_{1122} & C_{1123} & C_{1131} & C_{1132} & C_{1133} \\ C_{1211} & C_{1212} & C_{1213} & C_{1221} & C_{1222} & C_{1223} & C_{1231} & C_{1232} & C_{1233} \\ C_{1311} & C_{1312} & C_{1313} & C_{1321} & C_{1322} & C_{1323} & C_{1331} & C_{1332} & C_{1333} \\ C_{2111} & C_{2112} & C_{2113} & C_{2121} & C_{2122} & C_{2123} & C_{2131} & C_{2132} & C_{2133} \\ C_{2211} & C_{2212} & C_{2213} & C_{2221} & C_{2222} & C_{2223} & C_{2231} & C_{2232} & C_{2233} \\ C_{2311} & C_{2312} & C_{2313} & C_{2321} & C_{2322} & C_{2323} & C_{2331} & C_{2332} & C_{2333} \\ C_{3111} & C_{3112} & C_{3113} & C_{3121} & C_{3122} & C_{3123} & C_{3131} & C_{3132} & C_{3133} \\ C_{3211} & C_{3212} & C_{3213} & C_{3221} & C_{3222} & C_{3223} & C_{3231} & C_{3232} & C_{3233} \\ C_{3311} & C_{3312} & C_{3313} & C_{3321} & C_{3322} & C_{3323} & C_{3331} & C_{3332} & C_{3333} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{32} \\ \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

Sistema que en forma tensorial y notación índice se escribe como

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (6.2)$$

donde C_{ijkl} es un tensor de cuarto orden que representa una transformación lineal del espacio de las deformaciones al espacio de los esfuerzos. En el caso de que el material se considere como homogéneo, éste será un tensor de constantes elásticas independientes de la posición

$$C_{ijkl} \neq f(x_i)$$

Al ser un tensor de cuarto rango, entonces existirán 81 coeficientes en C_{ijkl} . Por otra parte, el tensor de deformaciones infinitesimales es simétrico, por lo que

$$\begin{aligned}\varepsilon_{kl} &= \varepsilon_{lk} \\ C_{ijkl} &= C_{ijlk}\end{aligned}$$

Esto representa que 3 columnas del arreglo matricial son linealmente dependientes, por lo que el tensor se reduce a 54 coeficientes independientes (9 renglones \times 6 columnas); por otra parte, el tensor de esfuerzos de Cauchy también es simétrico, lo que se representa como

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

Situación por la que el tensor presenta simetría en los dos primeros índices $C_{ijkl} = C_{jikl}$, lo que se traduce a que 3 renglones son linealmente dependientes, entonces se concluye que estas dos restricciones significan que sólo existen 36 coeficientes linealmente independientes (6 renglones \times 6 columnas). En notación índice todo lo antes expuesto se expresa como

$$\sigma_{ji} = \sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$$

Considerando una base e_i y una nueva base e'_i , entonces

$$C'_{ijkl} = C_{ir}C_{js}C_{kt}C_{lv}C_{rstv}$$

Como ya se mencionó, si el cuerpo es homogéneo C_{ijkl} no es función de x_i , entonces

$$C_{ijkl} \neq f(x_i) \neq f(X_i)$$

Como $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ (tensor simétrico), tenemos por ejemplo

$$\begin{aligned}\sigma_{21} &= C_{2111}\varepsilon_{11} + C_{2112}\varepsilon_{12} + C_{2113}\varepsilon_{13} + C_{2121}\varepsilon_{21} + C_{2122}\varepsilon_{22} + C_{2123}\varepsilon_{23} + C_{2131}\varepsilon_{31} \\ &\quad + C_{2132}\varepsilon_{32} + C_{2133}\varepsilon_{33}\end{aligned}$$

Como $\varepsilon_{21} = \varepsilon_{12}$; $\varepsilon_{13} = \varepsilon_{31}$; $\varepsilon_{23} = \varepsilon_{32}$

$$\therefore \sigma_{21} = C_{2111}\varepsilon_{11} + (C_{2112} + C_{2121})\varepsilon_{21} + (C_{2113} + C_{2131})\varepsilon_{13} + (C_{2123} + C_{2132})\varepsilon_{32} \\ + C_{2122}\varepsilon_{22} + C_{2133}\varepsilon_{33}$$

$$\Rightarrow \sigma_{21} = C_{2111}\varepsilon_{11} + k_{2112}\varepsilon_{21} + k_{2113}\varepsilon_{13} + k_{2123}\varepsilon_{23} + C_{2122}\varepsilon_{22} + C_{2133}\varepsilon_{33}$$

\therefore Se comprueba la reducción a 54 constantes.

Como el tensor de esfuerzos es simétrico, entonces $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$

Por ejemplo, $\sigma_{12} = \sigma_{21} \Rightarrow \sigma_{12} - \sigma_{21} = 0$

$$0 = (C_{1211} - C_{2111})\varepsilon_{11} + (C_{1222} - C_{2122})\varepsilon_{22} + (C_{1233} - C_{2133})\varepsilon_{33} \\ + (k_{1212} - k_{2112})\varepsilon_{12} + (k_{1223} - k_{2123})\varepsilon_{23} + (k_{1231} - k_{2131})\varepsilon_{31}$$

con lo que se constata que las restricciones impuestas por la simetría del tensor de esfuerzos y de deformaciones da lugar a que el número de constantes linealmente independientes sea de 36.

Al deformar el cuerpo se almacena energía elástica en el material, de tal manera que

$$U(\varepsilon_{ij}) = \int \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}$$

Donde

$U(\varepsilon_{ij})$ – Función de energía almacenada

$$\therefore \frac{\partial U(\varepsilon_{ij})}{\partial \varepsilon_{ij}} = \sigma_{ij}$$

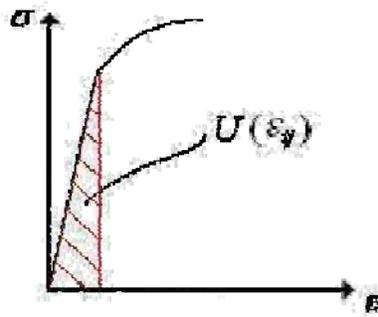


FIGURA 6.2 LA ENERGÍA DE DEFORMACIÓN ELÁSTICA ALMACENADA EN EL CUERPO ESTÁ REPRESENTADA POR EL ÁREA BAJO LA CURVA $\sigma - \epsilon$

La energía almacenada con la deformación elástica no depende de la base, de tal forma que

$$\begin{aligned}
 dU &= \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} = \sigma_{kl} d\epsilon_{kl} \\
 \sigma_{ij} &= C_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad \text{o} \quad \sigma_{kl} = C_{klij} \epsilon_{ij} \\
 \Rightarrow \quad \sigma_{kl} &= \sigma_{ij} \quad \text{y} \quad \epsilon_{kl} = \epsilon_{ij} \quad d\epsilon_{kl} = d\epsilon_{ij} \\
 \therefore \quad dU &= (C_{ijkl} \epsilon_{kl}) d\epsilon_{ij} = (C_{klij} \epsilon_{ij}) d\epsilon_{kl} \\
 \therefore \quad C_{ijkl} &= C_{klij}
 \end{aligned}$$

Lo cual representa que el tensor de constantes elásticas es simétrico. Realizando el análisis de los términos presentes en el tensor

C_{1111}	C_{1112}	C_{1113}	C_{1121}	C_{1122}	C_{1123}	C_{1131}	C_{1132}	C_{1133}	6
C_{1211}	C_{1212}	C_{1213}	C_{1221}	C_{1222}	C_{1223}	C_{1231}	C_{1232}	C_{1233}	5
C_{1311}	C_{1312}	C_{1313}	C_{1321}	C_{1322}	C_{1323}	C_{1331}	C_{1332}	C_{1333}	4
C_{2111}	C_{2112}	C_{2113}	C_{2121}	C_{2122}	C_{2123}	C_{2131}	C_{2132}	C_{2133}	0
C_{2211}	C_{2212}	C_{2213}	C_{2221}	C_{2222}	C_{2223}	C_{2231}	C_{2232}	C_{2233}	3
C_{2311}	C_{2312}	C_{2313}	C_{2321}	C_{2322}	C_{2323}	C_{2331}	C_{2332}	C_{2333}	2
C_{3111}	C_{3112}	C_{3113}	C_{3121}	C_{3122}	C_{3123}	C_{3131}	C_{3132}	C_{3133}	0
C_{3211}	C_{3212}	C_{3213}	C_{3221}	C_{3222}	C_{3223}	C_{3231}	C_{3232}	C_{3233}	0
C_{3311}	C_{3312}	C_{3313}	C_{3321}	C_{3322}	C_{3323}	C_{3331}	C_{3332}	C_{3333}	1

$$\Sigma = 21$$

Se concluye que sólo pueden existir 21 constantes elásticas linealmente independientes.

Otra forma de demostrar lo anterior es a través de las siguientes reflexiones:

$$U = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}$$

Entonces,

$$U = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \varepsilon_{ij}$$

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{rs}} = \frac{\partial (C_{ijrs} \varepsilon_{rs})}{\partial \varepsilon_{rs}} = C_{ijrs} \frac{\partial \varepsilon_{rs}}{\partial \varepsilon_{rs}} + \varepsilon_{rs} \frac{\partial C_{ijrs}}{\partial \varepsilon_{rs}}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{rs}} = C_{ijrs}$$

y como

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}}$$

de estas dos ecuaciones anteriores se tiene que

$$\Rightarrow C_{ijrs} = \frac{\partial^2 U}{\partial \varepsilon_{rs} \partial \varepsilon_{ij}}$$

$$\therefore \frac{\partial^2 U}{\partial \varepsilon_{rs} \partial \varepsilon_{ij}} = \frac{\partial^2 U}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{rs}}$$

$$\Rightarrow C_{ijrs} = C_{rsij}$$

Como ya ha sido mencionado, con base en la simetría del tensor de esfuerzos y del tensor de deformaciones, el número de constantes elásticas linealmente independientes es de 36, situación que permite una descripción matricial de la forma

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1113} & C_{1112} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2213} & C_{2212} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & C_{3323} & C_{3313} & C_{3312} \\ C_{2311} & C_{2322} & C_{2333} & C_{2323} & C_{2313} & C_{2312} \\ C_{3111} & C_{3122} & C_{3133} & C_{3123} & C_{3113} & C_{1312} \\ C_{1211} & C_{1222} & C_{1233} & C_{1223} & C_{1213} & C_{1212} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{31} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} \quad (6.3)$$

Ahora bien, realizando un cambio de variable de la forma

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11} &= \sigma_1 & \varepsilon_{11} &= \varepsilon_1 \\
 \sigma_{22} &= \sigma_2 & \varepsilon_{22} &= \varepsilon_2 \\
 \sigma_{33} &= \sigma_3 & \varepsilon_{33} &= \varepsilon_3 \\
 \sigma_{23} &= \sigma_{32} = \sigma_4 & 2\varepsilon_{23} &= \varepsilon_4 = 2\varepsilon_{32} \\
 \sigma_{31} &= \sigma_{13} = \sigma_5 & 2\varepsilon_{31} &= \varepsilon_5 = 2\varepsilon_{13} \\
 \sigma_{12} &= \sigma_{21} = \sigma_6 & 2\varepsilon_{12} &= \varepsilon_6 = 2\varepsilon_{21}
 \end{aligned}$$

Se tiene entonces que

$$\sigma_\alpha = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \sigma_6 & \sigma_5 \\ \sigma_6 & \sigma_2 & \sigma_4 \\ \sigma_5 & \sigma_4 & \sigma_3 \end{pmatrix} \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \frac{1}{2}\varepsilon_6 & \frac{1}{2}\varepsilon_5 \\ \frac{1}{2}\varepsilon_6 & \varepsilon_2 & \frac{1}{2}\varepsilon_4 \\ \frac{1}{2}\varepsilon_5 & \frac{1}{2}\varepsilon_4 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, empleando una falsa notación índice, se puede escribir una descripción material en la forma

$$\sigma_\alpha = C_{\alpha\beta} \varepsilon_\beta \quad (6.4)$$

por lo que matricialmente se tiene

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

Con una representación matricial de la relación esfuerzo-deformación es más sencillo visualizar que el número máximo de constantes elásticas linealmente independientes es 21, ya que la matriz $C_{\alpha\beta}$ deberá ser simétrica, por lo que

$$C_{\alpha\beta} = C_{\beta\alpha}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{ccccc} C_{12} = C_{21} & C_{13} = C_{31} & C_{14} = C_{41} & C_{15} = C_{51} & C_{16} = C_{61} \\ C_{23} = C_{32} & C_{24} = C_{42} & C_{25} = C_{52} & C_{26} = C_{62} & C_{34} = C_{43} \\ C_{35} = C_{53} & C_{36} = C_{63} & C_{45} = C_{54} & C_{46} = C_{64} & C_{56} = C_{65} \end{array}$$

6.3 IDEALIZACIONES PARA EL COMPORTAMIENTO ELÁSTICO

En el caso de los materiales elásticos se realizan varias idealizaciones en la descripción de su comportamiento, de tal forma que se definen:

- i. Sólido elástico, homogéneo, lineal y totalmente anisotrópico con 21 constantes elásticas linealmente independientes, como ya se ha demostrado.
- ii. Sólido elástico, homogéneo, lineal y monotrópico con 13 constantes elásticas linealmente independientes (sólido elástico monoclinico, con un solo plano de reflexión y un eje de simetría).

- iii. Sólido elástico, homogéneo, lineal y ortotrópico con 9 constantes elásticas linealmente independientes (medio continuo con dos ejes de simetría y dos planos de reflexión).
- iv. Sólido elástico, homogéneo y transversalmente isotrópico con 5 constantes elásticas linealmente independientes (para este caso se define un infinito número de planos de reflexión que se forman al rotar sobre el eje de simetría).
- v. Sólido elástico, homogéneo, lineal e isotrópico; con dos constantes elásticas linealmente independientes. El material es isotrópico cuando sus propiedades mecánicas son descritas sin referencia a la dirección.

Conforme se reduce el grado de anisotropía se añaden restricciones al comportamiento elástico del material, de tal forma que el sólido elástico, homogéneo, lineal e isotrópico representa un alto grado de idealización; sin embargo, en un gran número de ocasiones se considera esta descripción en virtud de que si bien cualquier sólido cristalino es por definición anisotrópico, también es conveniente mencionar que los sólidos son en general policristalinos y al estar sus cristales orientados al azar se puede considerar este comportamiento como isotrópico (las propiedades no varían con la dirección).

Simetría elástica

Para describir las diferentes idealizaciones realizadas para el comportamiento de los medios continuos elásticos es conveniente definir el concepto de simetría elástica. Este término se emplea para definir direcciones elásticas equivalentes, de tal forma que las constantes C_{ijkl} permanezcan inalteradas por la transformación entre 2 juegos de ejes. Si la transformación es una reflexión de los ejes con respecto a algún plano se dice que el material presenta un plano de simetría elástica (figura 6.4). Con dos planos de simetría la transformación representará la reflexión en dos ejes (figura 6.5), y por consecuencia deberá cumplir con las restricciones de aquella en que solo existe un eje de reflexión. Por otra parte, se puede tener un infinito número de ejes si la transformación se produce al girar un par de ejes un ángulo θ arbitrario (figura 6.3), esto alrededor del tercer eje cartesiano. En este caso, la transformación está dada por

$$Q_{ij} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \text{sen } \theta & 0 \\ -\text{sen } \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esta transformación representa la rotación de un ángulo θ sobre el eje x_3 , al cual se denomina como eje de simetría elástica.

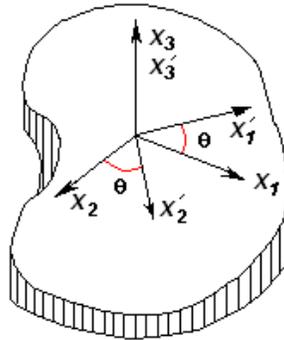


FIGURA 6.3 SIMETRÍA ELÁSTICA CARACTERÍSTICA DE UN MATERIAL TRANSVERSALMENTE ISOTRÓPICO. EN ESTE CASO EXISTE UN INFINITO NÚMERO DE PLANOS DE REFLEXIÓN QUE SE GENERAN AL GIRAR LOS EJES x_1x_2 UN ÁNGULO θ ALREDEDOR DEL EJE x_3 (EJE DE SIMETRÍA ELÁSTICA), DANDO LUGAR A UNA NUEVA BASE $x'_1x'_2x'_3$, PARA LA CUAL LAS PROPIEDADES ELÁSTICAS PERMANECEN INALTERADAS

En todos los casos se deberá cumplir que las constantes elásticas sean iguales en el sistema de referencia inicial y en el sistema transformado. Considerando la notación material y empleando pseudo índices se tiene que

$$\sigma'_\alpha = C'_{\alpha\beta} \varepsilon'_\beta$$

$$\sigma_\alpha = C_{\alpha\beta} \varepsilon_\beta$$

donde la matriz de constantes elásticas no deberá sufrir alteración con el cambio de base (simetría elástica)

$$C'_{\alpha\beta} = C_{\alpha\beta}$$

Por otra parte, los esfuerzos y deformaciones deberán cumplir con las reglas de transformación tal que

$$\sigma'_\alpha = Q\sigma_\alpha Q^T$$

$$\varepsilon'_\beta = Q\varepsilon_\beta Q^T$$

donde Q representa la matriz ortogonal de cambio de base.

Sólido elástico, homogéneo, lineal y monotrópico

Se define con esta denominación a aquel material idealizado que presenta simetría elástica respecto a un plano, de tal forma que si existe simetría sobre el eje x_3 (éste gira un ángulo de $\pi/2$, figura 6.4), entonces el plano formado por x_1x_2 actuará como plano de reflexión.

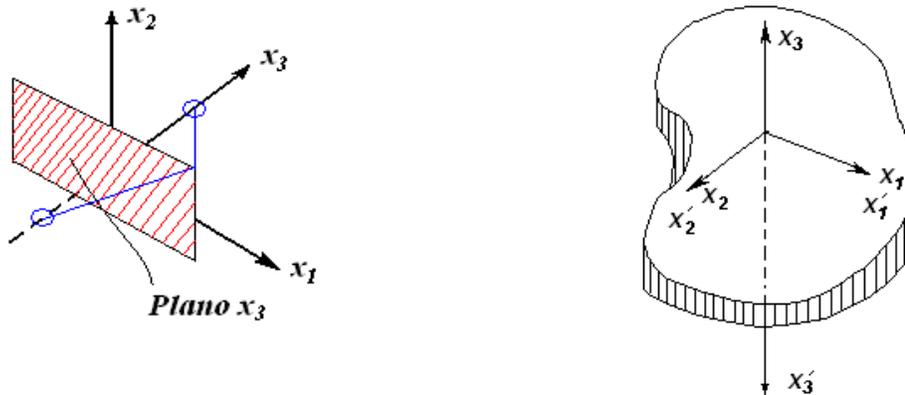


FIGURA 6.4 PLANO DE REFLEXIÓN PARA UN MATERIAL MONOTRÓPICO (UN SOLO EJE DE SIMETRÍA)

$$x'_{ij} = Q_{ij}x_j$$

$$Q_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Imagen espejo por simetría en el plano x_3 de tal forma que $q_{33} = -1$, resulta evidente que la simetría se podría presentar en cualquier eje cambiando solamente la posición del signo negativo. Por ejemplo, si el plano de reflexión fuera el x_2x_3 , entonces el eje de simetría será el x_1 , y la matriz de transformación queda $e'_i = Qe_i$

Donde

$$Q = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para el caso en estudio se ha considerado que el eje x_1 es de simetría elástica por lo que, como ya fue mencionado, la simetría material con respecto al plano S_1 requiere que los componentes C_{ijkl} en la ecuación

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}$$

sean exactamente iguales que C'_{ijkl} en la ecuación $\sigma'_{ij} = C'_{ijkl} \varepsilon'_{kl}$

$$e'_1 = -e_1, \quad e'_2 = e_2, \quad e'_3 = e_3$$

Cuando este es el caso, nuevas restricciones son impuestas en las componentes del tensor de constantes elásticas, lo que lleva a la reducción del número de componentes independientes.

Las componentes del tensor de elasticidad deberán permanecer sin cambio en la transformación

$$C'_{ijkl} = C_{ijkl}$$

por otra parte,

$$C'_{ijkl} = Q_{mi} Q_{nj} Q_{rk} Q_{sl} C_{mnrsl}$$

y

$$C_{ijkl} = Q_{mi} Q_{nj} Q_{rk} Q_{sl} C_{mnrsl}$$

donde

$$Q = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q_{11} = -1$$

$$Q_{22} = Q_{33} = 1, \quad \text{y los otros } Q_{ij} = 0$$

$$\Rightarrow C_{1112} = Q_{11}Q_{11}Q_{11}Q_{22}C_{1112} + 0 + \dots = (-1)(-1)(-1)(1)C_{1112}$$

$$C_{1112} = -C_{1112}$$

$$\therefore C_{1112} = 0$$

A través de esta relación se pueden definir aquellos elementos que serán diferentes de cero.

Por otra parte, dado que la transformación es una matriz ortogonal, el problema se puede analizar mediante

$$\begin{pmatrix} \sigma_1' & \sigma_6' & \sigma_5' \\ \sigma_6' & \sigma_2' & \sigma_4' \\ \sigma_5' & \sigma_1' & \sigma_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 & \sigma_6 & \sigma_5 \\ \sigma_6 & \sigma_2 & \sigma_4 \\ \sigma_5 & \sigma_4 & \sigma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \sigma_6 & -\sigma_5 \\ \sigma_6 & \sigma_2 & -\sigma_4 \\ -\sigma_5 & -\sigma_4 & \sigma_3 \end{pmatrix}$$

Y para deformaciones

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1' & \frac{1}{2}\varepsilon_6' & \frac{1}{2}\varepsilon_5' \\ \frac{1}{2}\varepsilon_6' & \varepsilon_2' & \frac{1}{2}\varepsilon_4' \\ \frac{1}{2}\varepsilon_5' & \frac{1}{2}\varepsilon_4' & \varepsilon_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \frac{1}{2}\varepsilon_6 & \frac{1}{2}\varepsilon_5 \\ \frac{1}{2}\varepsilon_6 & \varepsilon_2 & \frac{1}{2}\varepsilon_4 \\ \frac{1}{2}\varepsilon_5 & \frac{1}{2}\varepsilon_4 & \varepsilon_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & -\frac{1}{2}\varepsilon_6 & -\frac{1}{2}\varepsilon_5 \\ -\frac{1}{2}\varepsilon_6 & \varepsilon_2 & -\frac{1}{2}\varepsilon_4 \\ -\frac{1}{2}\varepsilon_5 & -\frac{1}{2}\varepsilon_4 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}$$

Se considera que las 36 constantes son diferentes

$$\sigma_1 = C_{11}\varepsilon_1 + C_{12}\varepsilon_2 + C_{13}\varepsilon_3 + C_{14}\varepsilon_4 + C_{15}\varepsilon_5 + C_{16}\varepsilon_6$$

Considerando que x_1x_2 es un plano de reflexión tal que $C_{\alpha\beta}$ permanece inalterado en una nueva base en la cual $x'_3 = -x_3$; en este sistema, se tiene

$$\sigma'_1 = C'_{11}\varepsilon'_1 + C'_{12}\varepsilon'_2 + C'_{13}\varepsilon'_3 + C'_{14}\varepsilon'_4 + C'_{15}\varepsilon'_5 + C'_{16}\varepsilon'_6 \quad (6.6)$$

pero

$$\begin{aligned} \varepsilon'_1 &= \varepsilon_1, & \varepsilon'_2 &= \varepsilon_2, & \varepsilon'_3 &= \varepsilon_3, & \varepsilon'_4 &= -\varepsilon_4, & \varepsilon'_5 &= -\varepsilon_5, & \varepsilon'_6 &= \varepsilon_6 \\ \sigma'_1 &= \sigma_1, & \sigma'_2 &= \sigma_2, & \sigma'_3 &= \sigma_3, & \sigma'_4 &= -\sigma_4, & \sigma'_5 &= -\sigma_5, & \sigma'_6 &= \sigma_6 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\sigma'_1 = \sigma_1 = C_{11}\varepsilon_1 + C_{12}\varepsilon_2 + C_{13}\varepsilon_3 + C_{14}\varepsilon_4 + C_{15}\varepsilon_5 + C_{16}\varepsilon_6 \quad (6.7)$$

Como resultado, para que se conserve la igualdad entre (i) y (ii) se debe cumplir

$$C_{14} = C_{15} = 0$$

Por un análisis similar se tiene que:

$$C_{24} = C_{25} = 0$$

$$C_{34} = C_{35} = 0$$

$$C_{64} = C_{65} = 0$$

Desarrollando ahora para σ_4 y σ'_4

$$\sigma_4 = C_{41}\varepsilon_1 + C_{42}\varepsilon_2 + C_{43}\varepsilon_3 + C_{44}\varepsilon_4 + C_{45}\varepsilon_5 + C_{46}\varepsilon_6$$

$$\sigma'_4 = C'_{41}\varepsilon'_1 + C'_{42}\varepsilon'_2 + C'_{43}\varepsilon'_3 + C'_{44}\varepsilon'_4 + C'_{45}\varepsilon'_5 + C'_{46}\varepsilon'_6$$

$$\Rightarrow \sigma'_4 = -\sigma_4 = C_{41}\varepsilon_1 + C_{42}\varepsilon_2 + C_{43}\varepsilon_3 - C_{44}\varepsilon_4 - C_{45}\varepsilon_5 + C_{46}\varepsilon_6$$

Por lo tanto, se concluye que $C_{41}, C_{42}, C_{43}, C_{46}, C_{51}, C_{52}, C_{53}, C_{56}$ son también igual a cero para el plano x_1x_2 de simetría elástica, por lo que $C_{\alpha\beta}$ queda

$$C_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{54} & C_{55} & 0 \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (6.8)$$

Reducción de 36 a 13 constantes. Como ya se demostró, por las restricciones impuestas por la energía de deformación se tiene que el tensor es simétrico, entonces $C_{\alpha\beta} = C_{\beta\alpha}$, con lo que el número de constantes elásticas se reduce a 13. La relación existente entre los términos del tensor de constantes elásticas con los términos que aparecen en la representación matricial se tiene que

$$C_{11} = C_{1111}, \quad C_{12} = C_{1122}, \quad C_{13} = C_{1133}, \quad C_{14} = 2C_{1123} = 0, \quad C_{16} = 2C_{1112}$$

$$C_{21} = C_{2211}, \quad C_{22} = C_{2222}, \quad C_{23} = C_{2233}$$

$$C_{33} = C_{3333}, \quad C_{36} = C_{3312}$$

$$C_{44} = 4C_{2323}, \quad C_{45} = 4C_{2313}$$

$$C_{55} = 4C_{1313}$$

$$C_{66} = 4C_{1212}$$

Constantes elásticas para un material monotrópico (monoclínico)

Para analizar el significado físico de las constantes elásticas descritas en la matriz $C_{\alpha\beta}$ es conveniente definir su inversa (matriz de complianza) $\Omega_{\beta\alpha}$, de tal forma que

$$\sigma_\alpha = C_{\alpha\beta} \varepsilon_\beta \Rightarrow (C_{\alpha\beta})^{-1} \sigma_\alpha = (C_{\alpha\beta})^{-1} C_{\alpha\beta} \varepsilon_\beta$$

$$\therefore (C_{\alpha\beta})^{-1} \sigma_{\alpha} = \varepsilon_{\beta}$$

$$\begin{aligned} \text{Sí} \quad \Omega_{\beta\alpha} &= (C_{\alpha\beta})^{-1} \\ \Rightarrow \quad \varepsilon_{\beta} &= \Omega_{\beta\alpha} \sigma_{\alpha} \end{aligned} \quad (6.9)$$

Es entonces que se pueden describir éstas a través de

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{31} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_2} & -\frac{\nu_{13}}{E_3} & 0 & 0 & \frac{\eta_{16}}{G_6} \\ -\frac{\nu_{21}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_3} & 0 & 0 & \frac{\eta_{26}}{G_6} \\ -\frac{\nu_{31}}{E_1} & -\frac{\nu_{32}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & \frac{\eta_{36}}{G_6} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu_4} & \frac{\varphi_{45}}{G_5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\varphi_{54}}{G_4} & \frac{1}{\mu_5} & 0 \\ \frac{\psi_{61}}{E_1} & \frac{\psi_{62}}{E_2} & \frac{\psi_{63}}{E_3} & 0 & 0 & \frac{1}{\mu_6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} \quad (6.10)$$

donde las constantes elásticas $(E, G, \nu, \eta, \varphi, \mu, \psi)$ que aparecen en la expresión 6.8 tienen el siguiente significado físico:

- Módulo de elasticidad (E). Representa la relación existente entre el esfuerzo normal y la deformación normal, tal que $E_i = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}$, donde el subíndice representa el eje sobre el cual se refiere el módulo de elasticidad.
- Módulo de rigidez a corte ($\mu_{\beta} = G_{\beta} = \frac{\tau}{\gamma} = \frac{\tau}{2\varepsilon}$). Representa la relación entre el esfuerzo de corte y la deformación angular; el subíndice indica plano y dirección de referencia.
- Coeficiente de Poisson ($\nu_{\alpha\beta} = -\frac{\varepsilon_{\alpha}}{\varepsilon_{\beta}}$). Representa la relación de la deformación transversal (inducida) con relación a la deformación longitudinal (principal), donde

los subíndices indicarán la dirección de cada una de estas deformaciones y por consecuencia la dirección de aplicación del esfuerzo normal β y de la deformación resultante α .

- Factor de acoplamiento entre una sollicitación a corte y la correspondiente deformación longitudinal ($\eta_{\alpha\beta}$). El índice α representa la dirección de deformación, mientras que β se refiere a las características de la sollicitación a corte que provoca la deformación.
- Factor de acoplamiento entre sollicitaciones a corte ($\varphi_{\alpha\beta}$). Relaciona la deformación a corte en un plano α con los esfuerzos de corte en un plano β .
- Factor de acoplamiento entre un esfuerzo normal y una deformación a corte ($\psi_{\alpha\beta}$). Relaciona la deformación a corte en un plano α con el esfuerzo normal en dirección β .

La simetría de la matriz demanda que

$$\begin{aligned} \frac{\nu_{21}}{E_1} &= \frac{\nu_{12}}{E_2}, & \frac{\nu_{31}}{E_1} &= \frac{\nu_{13}}{E_3}, & \frac{\nu_{32}}{E_2} &= \frac{\nu_{23}}{E_3} \\ \frac{\eta_{16}}{G_6} &= \frac{\psi_{61}}{E_1}, & \frac{\eta_{26}}{G_6} &= \frac{\psi_{62}}{E_2}, & \frac{\eta_{36}}{G_6} &= \frac{\psi_{63}}{E_3} \\ \frac{\varphi_{45}}{G_5} &= \frac{\varphi_{54}}{G_4} \end{aligned}$$

Si $\sigma_{11} \neq 0$ y $\sigma_{ij} = 0 \forall ij \neq 11$

$$\Rightarrow \varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E_1}; \quad \nu_{12} = -\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}}; \quad \nu_{13} = -\frac{\varepsilon_{33}}{\varepsilon_{11}}; \quad \Rightarrow \varepsilon_6 = 2\varepsilon_{12} = \frac{\psi_{61}}{E_1} \sigma_1$$

Si $\sigma_6 = \sigma_{12} \neq 0, \sigma_{ij} = 0, \forall i, j$

$$\Rightarrow \varepsilon_1 = \frac{\eta_{16}}{G_6} \sigma_6$$

E_1, E_2 y E_3 son los módulos elásticos en los ejes x_1, x_2, x_3

En un material monotrópico con \hat{e}_3 como normal del plano de simetría, un esfuerzo normal produce una deformación de corte en el plano x_1x_2 , con η_{ij} como coeficientes de acoplamiento, esto aun cuando el esfuerzo de corte en dicho plano sea cero. Por otra parte, una sollicitación a corte en el plano x_1x_2 generará deformaciones normales $(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33})$, aun cuando no existan esfuerzos normales. Asimismo, cortantes en el plano x_3x_1 provocarán deformaciones a corte en x_2x_3 , lo mismo sucederá al invertir las consideraciones.

Sólido elástico, homogéneo, lineal y ortotrópico

Si existen dos planos de simetría elástica se define al material como ortotrópico. Este representa un comportamiento con restricciones adicionales a las impuestas a un sólido monotrópico. Para este caso se define que los ejes de simetría elástica son x_2 y el x_3 , por lo que los planos de reflexión estarán dados por x_1x_3 y por x_1x_2 (figura 6.5), por tal motivo, la transformación es

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

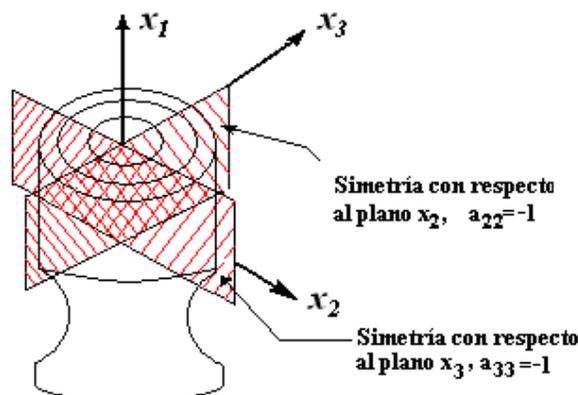


FIGURA 6.5 PLANOS DE REFLEXIÓN EN UN MATERIAL ORTOTRÓPICO (2 EJES DE SIMETRÍA)

Se tiene entonces que la relación de los esfuerzos descritos en la base original con los descritos a través de la base transformada es

$$\begin{pmatrix} \sigma'_1 & \sigma'_6 & \sigma'_5 \\ \sigma'_6 & \sigma'_2 & \sigma'_4 \\ \sigma'_5 & \sigma'_4 & \sigma'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 & \sigma_6 & \sigma_5 \\ \sigma_6 & \sigma_2 & \sigma_4 \\ \sigma_5 & \sigma_4 & \sigma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & -\sigma_6 & -\sigma_5 \\ -\sigma_6 & \sigma_2 & \sigma_4 \\ -\sigma_5 & \sigma_4 & \sigma_3 \end{pmatrix}$$

Por un procedimiento análogo para las deformaciones, se tiene que

$$\begin{pmatrix} \varepsilon'_1 & \frac{1}{2}\varepsilon'_6 & \frac{1}{2}\varepsilon'_5 \\ \frac{1}{2}\varepsilon'_6 & \varepsilon'_2 & \frac{1}{2}\varepsilon'_4 \\ \frac{1}{2}\varepsilon'_5 & \frac{1}{2}\varepsilon'_4 & \varepsilon'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & -\frac{1}{2}\varepsilon_6 & -\frac{1}{2}\varepsilon_5 \\ -\frac{1}{2}\varepsilon_6 & \varepsilon_2 & \frac{1}{2}\varepsilon_4 \\ -\frac{1}{2}\varepsilon_5 & \frac{1}{2}\varepsilon_4 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}$$

Al definir la simetría elástica $C_{\alpha\beta} = C'_{\alpha\beta}$, y para cumplir con lo anterior

$$\sigma_1 = \sigma'_1$$

$$\sigma_1 = C_{11}\varepsilon_1 + C_{12}\varepsilon_2 + C_{13}\varepsilon_3 + C_{14}\varepsilon_4 + C_{15}\varepsilon_5 + C_{16}\varepsilon_6$$

$$\sigma'_1 = C'_{11}\varepsilon'_1 + C'_{12}\varepsilon'_2 + C'_{13}\varepsilon'_3 + C'_{14}\varepsilon'_4 + C'_{15}\varepsilon'_5 + C'_{16}\varepsilon'_6$$

Como $-\varepsilon_6 = \varepsilon'_6$, $\varepsilon_5 = -\varepsilon'_5 \Rightarrow$ se requiere que $C_{15} = C_{16} = 0$ y, por

consecuencia, $C_{25} = C_{26} = C_{35} = C_{36} = C_{45} = C_{46} = 0$

Entonces, desarrollando

$$\sigma'_6 = -\sigma_6$$

$$\sigma_6 = C_{61}\varepsilon_1 + C_{62}\varepsilon_2 + C_{63}\varepsilon_3 + C_{64}\varepsilon_4 + C_{65}\varepsilon_5 + C_{66}\varepsilon_6$$

$$\sigma'_6 = C'_{61}\varepsilon'_1 + C'_{62}\varepsilon'_2 + C'_{63}\varepsilon'_3 + C'_{64}\varepsilon'_4 + C'_{65}\varepsilon'_5 + C'_{66}\varepsilon'_6$$

$$\sigma'_6 = -\sigma_6 \quad \Rightarrow \quad C_{61} = C_{62} = C_{63} = C_{64} = 0$$

$$\sigma'_5 = -\sigma_5 \quad \Rightarrow \quad C_{51} = C_{52} = C_{53} = C_{54} = 0$$

Como en este caso, además de cumplir con sus restricciones particulares deberá cumplir con las ya establecidas para un sólido monotrópico, entonces

$$C_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}$$

Dado que la matriz es simétrica, entonces existirán sólo 9 constantes elásticas linealmente independientes.

De todo lo antes expuesto se tiene que la relación matricial de esfuerzo con deformación para un sólido elástico ortotrópico, de la forma $\varepsilon_\beta = \Omega_{\beta\alpha} \sigma_\alpha$, queda

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_1 \\ \varepsilon_{22} & \varepsilon_2 \\ \varepsilon_{33} & \varepsilon_3 \\ 2\varepsilon_{23} & \varepsilon_4 \\ 2\varepsilon_{31} & \varepsilon_5 \\ 2\varepsilon_{12} & \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_2} & -\frac{\nu_{13}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{21}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{31}}{E_1} & -\frac{\nu_{32}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu_{44}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu_{55}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu_{66}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & \sigma_{11} \\ \sigma_2 & \sigma_{22} \\ \sigma_3 & \sigma_{33} \\ \sigma_4 & \sigma_{23} \\ \sigma_5 & \sigma_{31} \\ \sigma_6 & \sigma_{12} \end{bmatrix}$$

(6.11)

donde E_1, E_2, E_3 representan los módulos de elasticidad en dirección de los ejes x_1, x_2, x_3 ; $\mu_{44} = G_{23}, \mu_{55} = G_{31}, \mu_{66} = G_{12}$ representan los módulos de rigidez en los planos x_2x_3, x_3x_1, x_1x_2 respectivamente. Por su parte, ν_{ij} representa el coeficiente de Poisson donde la carga se aplica en el eje x_j y la deformación se presenta en dirección x_i .

Determinación de las constantes elásticas independientes con base en la notación tensorial

En notación índice para el material ortotrópico antes descrito se tiene que

$$C_{ijklm} = a_{ir} a_{js} a_{kt} a_{mn} C_{rstm}$$

Ejes de simetría: x_2, x_3

No existe simetría en x_1

La ecuación anterior, como en el caso ya tratado del monotrópico, representa que el tensor de constantes elásticas (4° orden) definido en el sistema original puede ser transformado a las nuevas coordenadas a través del sistema $a_{ir} a_{js} a_{kt} a_{mn}$ (tensor de rango 8).

Como ya ha sido mencionado, la transformación es de la forma

$$Q_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Por lo que

$$C_{ijklm} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{2222} & C_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{2323} & 0 & 0 \\ & \text{simetría} & & & C_{1313} & 0 \\ & & & & & C_{1212} \end{bmatrix}$$

Sea que el desarrollo se realice con una base tensorial o sea que se defina una relación matricial, lo anterior representa que el material tiene tres módulos de elasticidad de acuerdo con las direcciones coordenadas, así como también tres módulos de rigidez a corte. En el

caso de los coeficientes de Poisson, éstos se encuentran relacionados a través de los módulos de elasticidad, es por consecuencia que las ecuaciones de la forma $\varepsilon = \varepsilon(\sigma)$ se expresan

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E_1} \sigma_{11} - \frac{\nu_{21} \sigma_{22}}{E_2} - \frac{\nu_{31} \sigma_{33}}{E_3}$$

$$\varepsilon_{22} = -\frac{\nu_{21}}{E_1} \sigma_{11} + \frac{\sigma_{22}}{E_2} - \frac{\nu_{23}}{E_3} \sigma_{33}$$

$$\varepsilon_{33} = -\frac{\nu_{31}}{E_1} \sigma_{11} - \frac{\nu_{32} \sigma_{22}}{E_2} + \frac{\sigma_{33}}{E_3}$$

$$\varepsilon_{23} = \frac{1}{2G_{23}} \sigma_{23}$$

$$\varepsilon_{31} = \frac{1}{2G_{31}} \sigma_{31}$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2G_{12}} \sigma_{12}$$

De las constantes $E_1, E_2, E_3, \nu_{21}, \nu_{31}, \nu_{12}, \nu_{32}, \nu_{13}, \nu_{23}, \mu_{44}, \mu_{55}, \mu_{66}$ sólo nueve son linealmente independientes, donde

- E_1, E_2 y E_3 son los módulos de Young en los ejes x_1, x_2, x_3
- $\mu_{44}, \mu_{55}, \mu_{66}$ son los módulos de corte en los planos x_2x_3, x_3x_1, x_1x_2
- ν_{ij} es el coeficiente de Poisson con dirección de carga j y dirección transversal i .

Entonces se deberá cumplir que

$$\frac{\nu_{21}}{E_1} = \frac{\nu_{12}}{E_2}; \quad \frac{\nu_{31}}{E_1} = \frac{\nu_{13}}{E_3}; \quad \frac{\nu_{32}}{E_2} = \frac{\nu_{23}}{E_3}$$

Sólido elástico, homogéneo, lineal y transversalmente isotrópico

Un sólido elástico homogéneo, lineal y transversalmente isotrópico representa una extensión del comportamiento descrito para el material ortotrópico. La diferencia sustancial la representa el que en éste no existirán tan solo dos planos de reflexión que se definen al hacer girar la base un ángulo de π radianes alrededor del eje x_1 , sino que la rotación se hará para cualquier ángulo θ entre 0 y 2π radianes, lo que se traduce en un número infinito de planos de reflexión, dando como consecuencia que las propiedades elásticas sean las mismas, sin importar la dirección, esto sobre el plano x_2x_3 . Es por lo anterior que se define al material como transversalmente isotrópico. De lo antes expuesto, se concluye que si existe un plano S_1 tal que cualquier plano perpendicular a éste es un plano de simetría, entonces se denomina al material como transversalmente isotrópico. Al plano S_1 se le denomina como plano de isotropía y su normal e_1 es el eje de isotropía transversal. Un material transversalmente isotrópico es también ortotrópico.

Ecuación constitutiva para un material elástico transversalmente isotrópico

De acuerdo con la figura 6.7, considérese que existe un plano S_3 tal que cualquier plano perpendicular es un plano de reflexión, por lo que S_3 representa un plano de isotropía. Si S'_β representa un plano cuya normal \hat{e}'_β es perpendicular al plano S_3 y a su vez describe un ángulo β con el eje $x_1(\hat{e}_1)$, entonces S'_β es un plano de reflexión.

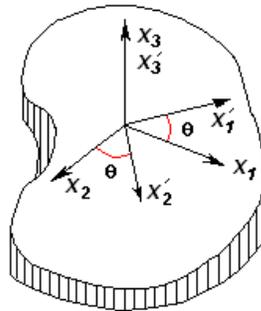


FIGURA 6.6 UN MATERIAL TRANSVERSALMENTE ISOTRÓPICO PRESENTA UN INFINITO NÚMERO DE PLANOS DE REFLEXIÓN, LO CUALES SE GENERAN AL GIRAR EL SISTEMA COOR DENADO UN ÁNGULO CUALQUIERA ALREDEDOR DEL EJE x_3

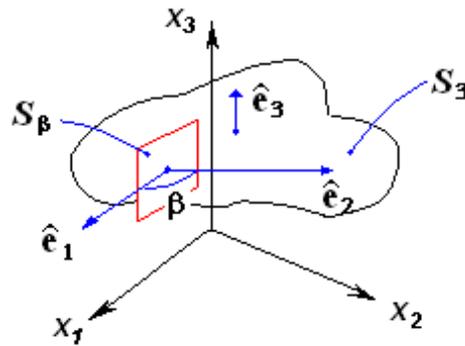


FIGURA 6.7 MATERIAL TRANSVERSALMENTE ISOTRÓPICO, EN ESTE CASO LOS EJES x_1, x_2 GIRAN UN ÁNGULO β ALREDEDOR DEL EJE x_3

Entonces para cualquier ángulo β , el plano S_β será por definición plano de simetría. Por tanto, si C'_{ijkl} representa las componentes del tensor C con respecto a la base \hat{e}'_i , la transformación estará dada por

$$e'_1 = \cos \theta \hat{e}_1 + \text{sen } \theta \hat{e}_2$$

$$e'_2 = -\text{sen } \theta \hat{e}_1 + \cos \theta \hat{e}_2$$

$$e'_3 = \hat{e}_3$$

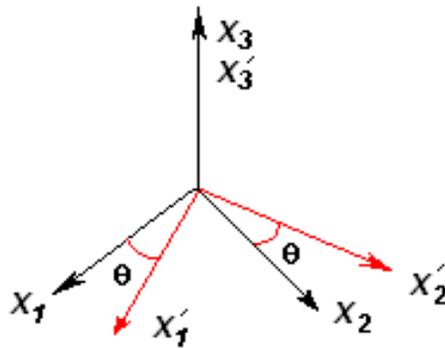


FIGURA 6.8 CUALQUIER ÁNGULO θ ENTRE 0 Y 2π RADIANES GENERA UNA NUEVA BASE

Una rotación de π radianes dará lugar a un material ortotrópico, por lo que se puede considerar al sólido transversalmente isotrópico como una extensión del comportamiento del sólido elástico ortotrópico.

$$Q = \begin{pmatrix} \cos \theta & \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) & \cos \frac{\pi}{2} \\ \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) & \cos \theta & \cos \frac{\pi}{2} \\ \cos \frac{\pi}{2} & \cos \frac{\pi}{2} & \cos 0^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow Q_{11} = \cos \theta; Q_{12} = \sin \theta; Q_{21} = -\sin \theta; Q_{22} = \cos \theta; Q_{31} = Q_{32} = Q_{13} = Q_{23} = 0; Q_{33} = 1$$

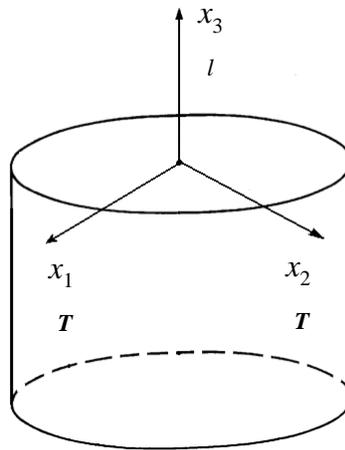


FIGURA 6.9 LAS PROPIEDADES EN TODA DIRECCIÓN TRANSVERSAL T SON SIMÉTRICAS CON RESPECTO AL EJE LONGITUDINAL l

Entonces para cualquier ángulo de rotación de los ejes

$$C'_{1112} = C'_{1113} = C'_{1222} = C'_{1223} = C'_{1233} = C'_{1322} = C'_{1323} = C'_{1333} = C'_{1123} = C'_{2223} = C'_{2333} = C'_{1213} = 0 \quad \dots(6.12)$$

Como se mencionó anteriormente, la condición 6.12 es satisfactoria para cualquier θ no conduciendo a mayores restricciones; sin embargo, para $\theta = 0^\circ$ se tiene (esto será referido a la base original)

$$C_{1112} = C_{1113} = C_{1222} = C_{1223} = C_{1233} = C_{1322} = C_{1323} = C_{1333} = C_{1123} = C_{2223} = C_{2333} = C_{1213} = 0$$

por lo que a partir de la ecuación de cambio de base en forma tensorial (tensor de rango 8)

$$C_{ijkl} = a_{ir} a_{js} a_{kt} a_{mn} C_{rstn} \quad (6.13)$$

Realizando las operaciones y sustituyendo los valores de Q_{ij} en la ecuación 6.11 se tiene

$$\begin{aligned} C'_{1113} &= Q_{11}^3 Q_{13} C_{1111} + Q_{11}^2 Q_{21} Q_{23} C_{1122} + Q_{21}^2 Q_{11} Q_{13} C_{2211} + Q_{11}^2 Q_{31} Q_{33} C_{1133} \\ &\quad + Q_{31}^2 Q_{11} Q_{13} C_{3311} + Q_{11}^2 Q_{21} Q_{23} C_{1212} + Q_{11} Q_{21}^2 Q_{13} C_{1221} + Q_{21}^2 Q_{11} Q_{13} C_{2121} \\ &\quad + Q_{21} Q_{11}^2 Q_{23} C_{2112} + \dots = 0 + 0 + 0 + \dots = 0 \end{aligned}$$

Por lo que $C'_{1113} = 0$ es satisfecho en conjunto con

$$C'_{1223} = C'_{1322} = C'_{1333} = 0$$

Por otra parte, $Q_{33} = 1$, de lo que se tiene

$$C'_{1323} = Q_{11} Q_{12} C_{1313} + Q_{21} Q_{22} C_{2323} = 0$$

lo que requiere que

$$\cos \theta \sin \theta (C_{1313} - C_{2323}) = 0$$

razón por la cual

$$C_{1313} = C_{2323}$$

En forma similar $C'_{2333} = 0$, lo que conduce a que $C_{1133} = C_{2233}$ y de $C'_{1112} = 0$ se concluye que

$$\begin{aligned}
 C'_{1112} = & Q_{11}^3 Q_{12} C_{1111} + Q_{21}^3 Q_{22} C_{2222} + Q_{11}^2 Q_{21} Q_{22} C_{1122} + Q_{21}^2 Q_{11} Q_{12} C_{2211} \\
 & + Q_{11}^2 Q_{21} Q_{22} C_{1212} + Q_{11} Q_{21}^2 Q_{12} C_{1221} + Q_{21}^2 Q_{11} Q_{12} C_{2121} + Q_{21} Q_{11}^2 Q_{22} C_{2112}
 \end{aligned}$$

Pero $\cos \theta \sin \theta \neq 0 \Rightarrow$

$$-\cos^2 \theta C_{1111} + \sin^2 \theta C_{2222} + (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) C_{1122} + 2(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) C_{1212} = 0$$

De un proceso similar para $C_{1222} = 0$, se puede obtener

$$-\sin^2 \theta C_{1111} + \cos^2 \theta C_{2222} - (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) C_{1122} - 2(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) C_{1212} = 0$$

de lo que

$$C_{1111} = C_{2222}$$

y

$$C_{1212} = \frac{1}{2}(C_{1111} - C_{1122})$$

Luego entonces S_β será un plano de simetría, de tal forma que los coeficientes elásticos

C'_{ijkl} sean iguales a los C_{ijkl} para cualquier ángulo θ quedando en forma matricial

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ C_{1122} & C_{1111} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ C_{1133} & C_{1133} & C_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{1313} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1313} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{1111} - C_{1122}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{31} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix}$$

$$C_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{11}-C_{12}) \end{pmatrix}$$

Por tanto, el número de constantes elásticas se reduce a cinco $(\lambda, \mu_T, \mu_L, \phi, \zeta)$, por lo que para un material sólido, elástico, transversalmente isotrópico con eje de simetría $x_3(e_3)$, la ecuación constitutiva de la forma $\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$ se puede representar en forma simplificada (seudonotación índice) como $\sigma_\alpha = C_{\alpha\beta}\varepsilon_\beta$

$$C_{11} = \lambda + 2\mu_T = \lambda + 2G_{12}$$

$$C_{12} = \lambda$$

$$C_{13} = \lambda + \phi$$

$$C_{33} = \lambda + 2\phi + 4\mu_L - 2\mu_T + \zeta = \lambda + 2\phi + 4G_{31} - 2G_{12} + \zeta$$

$$C_{44} = \mu_T = G_{12}$$

$$\frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) = \mu_L = G_{31} = G_{32}$$

en donde

$\mu_{44} = \mu_{55} = \mu_T = G_T = G_{12}$ es el módulo de corte en el plano de isotropía transversal

$\mu_{66} = \mu_L = G_L = G_{31} = G_{32}$ es el módulo de corte en cualquier plano perpendicular al plano de isotropía transversal

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu_T & \lambda & \lambda + \phi & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu_T & \lambda + \phi & 0 & 0 & 0 \\ \lambda + \phi & \lambda + \phi & \lambda + 2\phi + 4\mu_L - 2\mu_T + \zeta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix}$$

Considerando la metodología empleada para definir las constantes elásticas linealmente independientes en un material monotrópico y ortotrópico; y definiendo que la rotación se producirá alrededor del eje x_1 , para que así este comportamiento corresponda con las restricciones ya impuestas, entonces se tendrá que la matriz de cambio de base está dada por

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \text{sen } \theta \\ 0 & -\text{sen } \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

Dado que se deberá cumplir que $\sigma_\alpha = C_{\alpha\beta} \varepsilon_\beta$, esto en representación matricial y utilizando una seudonotación índice, entonces

$$\sigma'_\alpha = C'_{\alpha\beta} \varepsilon'_\beta$$

donde

$$C_{ijkl} = C'_{ijkl}$$

$$\sigma' = Q \sigma Q^T$$

$$\varepsilon' = Q \varepsilon Q^T$$

en notación matricial se tiene

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} | \sigma_1 \\ \sigma_{22} | \sigma_2 \\ \sigma_{33} | \sigma_3 \\ \sigma_{23} | \sigma_4 \\ \sigma_{31} | \sigma_5 \\ \sigma_{12} | \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{22} - C_{23}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 | \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_2 | \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_3 | \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_4 | 2\varepsilon_{23} \\ \varepsilon_5 | 2\varepsilon_{31} \\ \varepsilon_6 | 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix}$$

Los elementos de la matriz de rigidez cumplen con

$$C_{11} > 0, \quad C_{33} > 0, \quad C_{44} > 0, \quad C_{11} - C_{12} > 0$$

Considerando las constantes

Módulo elástico transversal (E_T). Para un sistema donde existe isotropía en el plano $x_2x_3 \Rightarrow E_2 = E_3 = E_T = C_{22} = C_{33}$.

Módulo elástico longitudinal (E_l) $\Rightarrow E_1 = E_l \neq E_T = C_{11}$

Considerando ahora la representación $\varepsilon_\beta = K_{\beta\alpha}\sigma_\alpha$, donde $K_{\beta\alpha} = (C_{\alpha\beta})^{-1}$, se tiene entonces en descripción matricial

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_1 \\ \varepsilon_{22} & \varepsilon_2 \\ \varepsilon_{33} & \varepsilon_3 \\ 2\varepsilon_{23} & \varepsilon_4 \\ 2\varepsilon_{31} & \varepsilon_5 \\ 2\varepsilon_{12} & \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_2} & -\frac{\nu_{13}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{21}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{31}}{E_1} & -\frac{\nu_{32}}{E_2} & \frac{1}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & \sigma_{11} \\ \sigma_2 & \sigma_{22} \\ \sigma_3 & \sigma_{33} \\ \sigma_4 & \sigma_{23} \\ \sigma_5 & \sigma_{31} \\ \sigma_6 & \sigma_{12} \end{bmatrix} \quad (6.14)$$

Para este caso, como ya ha sido manifestado, las constantes elásticas para el sólido elástico transversalmente isotrópico son

Módulo de elasticidad longitudinal ($E_1 = E_L$) y transversal ($E_2 = E_T$)

Coefficiente de Poisson longitudinal ($\nu_{12} = \nu_L$) y transversal ($\nu_{23} = \nu_T$)

Módulo de Rigidez a corte longitudinal G_{23} y transversal G_{12}

Desarrollando el arreglo matricial 6.14, se tiene

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= \frac{\sigma_{11}}{E_1} - \frac{\nu_L \sigma_{22}}{E_2} - \frac{\nu_L \sigma_{33}}{E_2} \\ \varepsilon_{22} &= -\frac{\nu_L}{E_2} \sigma_{11} + \frac{\sigma_{22}}{E_2} - \frac{\nu_T \sigma_{33}}{E_2} \\ \varepsilon_{33} &= -\frac{\nu_L \sigma_{11}}{E_2} - \frac{\nu_T \sigma_{22}}{E_2} + \frac{\sigma_{33}}{E_2} \\ \varepsilon_{23} &= \frac{1}{2G_{23}} \sigma_{23} = \frac{1}{2G_T} \sigma_{23} \\ \varepsilon_{31} &= \frac{1}{2G_{13}} \sigma_{31} = \frac{1}{2G_L} \sigma_{31} \\ \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2G_{12}} \sigma_{12} = \frac{1}{2G_L} \sigma_{12}\end{aligned}\tag{6.15}$$

Todo lo anterior dado que deberá existir simetría en el tensor rigidez o matriz de complianza.

La descripción de un comportamiento característico para un sólido elástico transversalmente isotrópico se puede emplear para materiales tales como la madera o los huesos largos (por ejemplo el fémur o la tibia), materiales en los cuales es claro que se tienen propiedades diferentes en el eje longitudinal con respecto a su plano transversal.

Sólido elástico lineal homogéneo e isotrópico

El mayor nivel de idealización se presenta cuando se considera un material sólido, elástico, homogéneo, lineal e isotrópico. En este caso, se considera que las propiedades son iguales en cualquier dirección, no sólo en un plano como en el transversalmente isotrópico, figura 6.8. Si bien cualquier sólido cristalino será por definición no isotrópico, es necesario recordar que en general los sólidos son policristalinos y que sus cristales usualmente se orientan al azar dando como consecuencia que sus propiedades elásticas, las cuales se evalúan de

manera macroscópica, representen promedios de las definidas para cada dirección cristalográfica.

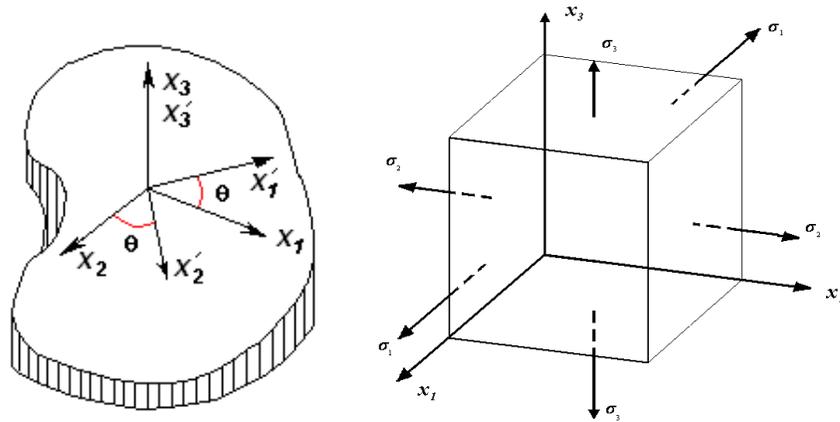


FIGURA 6.10 EN UN MATERIAL ISOTRÓPICO CUALQUIER TRÍADA DE EJES MUTUAMENTE PERPENDICULARES REPRESENTA UNA BASE Y EN CUALESQUIER BASE LAS PROPIEDADES ELÁSTICAS SERÁN IGUALES

Por ejemplo, un metal recocido o que provenga de fundición se puede considerar sin mayor inconveniente como isotrópico; sin embargo, la misma aleación después de una fuerte deformación en frío, que provoca que los cristales se orienten de manera preferencial, ya no se podrá considerar que presenta un comportamiento isotrópico, sino en el mejor de los casos se describirá como transversalmente isotrópico.

Considerando una base $x_1x_2x_3$, la descripción en forma tensorial queda

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl}$$

Ahora para una base $x'_1x'_2x'_3$, la cual se obtiene al girar los ejes a cualquier ángulo se tendrá

$$\sigma'_{ij} = C'_{ijkl} \epsilon'_{kl}$$

Al ser isotrópico el material, entonces el tensor de constantes elásticas será siempre igual en cualquier base

$$C_{ijkl} = C'_{ijkl}$$

Dado que la representación (tensor) no se modifica (mantiene sus mismos componentes) con respecto a cualquier base, se le denomina isotrópico. Este tipo de tensores, como fue

comentado en el capítulo 1, tienen propiedades particulares como son de que su suma (de tensores isotrópicos) da lugar a un nuevo tensor isotrópico, la multiplicación por un escalar produce un nuevo tensor isotrópico y el producto entre tensores isotrópicos es igualmente isotrópico; por último, es conveniente recordar que el único tensor isotrópico de rango dos es la delta de Kronecker.

El tensor de constantes elásticas deberá cumplir con las restricciones ya antes enumeradas,

$$C_{ijkl} = C_{ijlk}$$

$$C_{ijkl} = C_{jikl}$$

$$C_{ijkl} = C_{klij}$$

El tensor al ser isotrópico se puede descomponer en la suma de varios tensores igualmente isotrópicos

$$C_{ijkl} = A_{ijkl} + B_{ijkl} + H_{ijkl}$$

Éstos a su vez se pueden descomponer a través del producto con un escalar, de tal forma que

$$A_{ijkl} = \lambda a_{ijkl}$$

$$B_{ijkl} = \alpha b_{ijkl}$$

$$H_{ijkl} = \beta h_{ijkl}$$

$$\therefore C_{ijkl} = \lambda a_{ijkl} + \alpha b_{ijkl} + \beta h_{ijkl}$$

A su vez, los tensores a_{ijkl} , b_{ijkl} , h_{ijkl} se pueden descomponer en el producto de dos tensores isotrópicos, sin embargo, el único tensor isotrópico de rango dos es la delta de Kronecker (δ_{ij}).

$$\Rightarrow a_{ijkl} = \delta_{ij} \delta_{kl}$$

$$b_{ijkl} = \delta_{ik} \delta_{jl}$$

$$h_{ijkl} = \delta_{il} \delta_{jk}$$

Los índices de δ_{ij} son indistintos ya que de todas las formas representa al tensor identidad de rango dos para la operación producto. Sustituyendo se tiene

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}$$

$$\sigma_{ij} = (\lambda a_{ijkl} + \alpha b_{ijkl} + \beta h_{ijkl}) \varepsilon_{kl}$$

$$(\lambda \delta_{ij} \delta_{kl}) \varepsilon_{kl} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} = \lambda \varepsilon_k \varepsilon_k \delta_{ij}$$

$$(\alpha \delta_{ik} \delta_{jl}) \varepsilon_{kl} = (\alpha \delta_{ik}) \varepsilon_{jk} = \alpha \delta_{ik} \varepsilon_{jk} = \alpha \varepsilon_{ij}$$

$$(\beta \delta_{il} \delta_{jk}) \varepsilon_{kl} = (\beta \delta_{il} \delta_{jk}) \varepsilon_{lk} = (\beta \delta_{il}) \varepsilon_{jl} = \beta \varepsilon_{ij}$$

$$\alpha \varepsilon_{ij} + \beta \varepsilon_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij}$$

$$\therefore \sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}$$

Por su parte, en notación general se expresa como

$$\sigma = \lambda I \Delta + 2\mu \varepsilon$$

donde $\Delta = \nabla \cdot u$

A las constantes elásticas λ , μ se les define como constantes de Lamé en honor del matemático francés Gabriel Lamé (1795-1870), quien en 1852 publicó su Teoría Matemática de la Elasticidad, en la cual se desarrollaron por vez primera estas expresiones.

Desarrollando las ecuaciones para el Sólido, Elástico, Homogéneo, Lineal e Isotrópico (SEHLI) y sustituyendo en la descripción tensorial, se tiene que:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{21} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{32} \\ \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & \mu & 0 & \mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 & \mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & 0 & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & \mu & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & \lambda + 2\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{32} \\ \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$$

La primera constante de Lamé λ no tiene significado físico, mientras que $\mu = G$ representa al módulo de rigidez a corte. La relación esfuerzo-deformación, en forma matricial, para un SEHLI se expresa como

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \frac{1}{2}\varepsilon_4 \\ \frac{1}{2}\varepsilon_5 \\ \frac{1}{2}\varepsilon_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{11} = \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2\mu\varepsilon_{11}$$

$$\sigma_{22} = \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2\mu\varepsilon_{22}$$

$$\sigma_{33} = \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2\mu\varepsilon_{33}$$

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} = 2\mu\varepsilon_{12} = 2\mu\varepsilon_{21}$$

$$\sigma_{23} = \sigma_{32} = 2\mu\varepsilon_{23} = 2\mu\varepsilon_{32}$$

$$\sigma_{31} = \sigma_{13} = 2\mu\varepsilon_{31} = 2\mu\varepsilon_{13}$$

Otras constantes elásticas

A partir de la relación general $\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}$ se tiene que

$$\sigma_{kk} = 3\lambda \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{kk}$$

$$\sigma_{kk} = (3\lambda + 2\mu) \varepsilon_{kk}$$

Se define el esfuerzo hidrostático como

$$\sigma_H = \frac{\sigma_{kk}}{3}$$

De lo que se tiene que

$$\sigma_H = \left(\lambda + \frac{2}{3} \mu \right) \varepsilon_{kk}$$

La ecuación anterior relaciona la componente esférica del esfuerzo σ_H (esfuerzo hidrostático) con el cambio elástico de volumen ε_{kk} . A la constante de proporcionalidad se le denomina como factor de compresibilidad (k), entonces

$$k = \lambda + \frac{2\mu}{3}$$

Por lo tanto, la ecuación se puede expresar como

$$\sigma_H = k \varepsilon_{ii}$$

La ecuación general $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ se puede despejar para expresar en la forma $\varepsilon = \varepsilon(\sigma)$, de tal forma que

$$(\sigma_{ij} - \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij}) \frac{1}{2\mu} = \varepsilon_{ij}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \left(\sigma_{ij} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right)$$

Si se considera ahora un estado uniaxial de esfuerzos

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{tal que}$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_{11} = \frac{1}{2\mu} \left(\sigma_{11} - \left(\frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \right) \sigma_{11} \right)$$

Tomando un común denominador

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{(3\lambda + 2\mu)\sigma_{11} - \lambda\sigma_{11}}{(3\lambda + 2\mu)} \right) = \frac{(\lambda + \mu)\sigma_{11}}{\mu(3\lambda + 2\mu)}$$

y si se define el módulo de elasticidad o módulo de Young como la relación existente entre el esfuerzo normal y la deformación normal, tal que

$$E = \frac{\sigma_{11}}{\varepsilon_{11}}$$

por lo que de la expresión

$$\varepsilon_{11} = \frac{(\lambda + \mu)\sigma_{11}}{\mu(3\lambda + 2\mu)} = \frac{\sigma_{11}}{E_{11}}$$

se puede despejar el módulo de elasticidad, considerando además que por ser un material isotrópico

$$E_{11} = E_{22} = E_{33} = E$$

$$\Rightarrow \quad E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{(\lambda + \mu)}$$

Si se define al coeficiente de Poisson ν como la relación de la deformación transversal ε_T a la deformación longitudinal ε_L , se tendrá que para un estado uniaxial de esfuerzos

$$\nu = -\frac{\varepsilon_T}{\varepsilon_L}$$

$$\Rightarrow \quad \nu = -\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}} \quad \text{o} \quad \nu = -\frac{\varepsilon_{33}}{\varepsilon_{11}}$$

y sustituyendo en la ecuación general

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{2\mu} \left(0 - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \sigma_{11} \right)$$

y en la definición de coeficiente de Poisson

$$\nu = -\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}} = -\frac{\frac{-\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \sigma_{11}}{\frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} \sigma_{11}}$$

Se tiene que

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

Despejando

$$2(\lambda + \mu)\nu = \lambda$$

$$(2\lambda\nu + 2\mu\nu) = \lambda$$

$$2\mu\nu = \lambda(1 - 2\nu)$$

$$\lambda = \frac{2\mu\nu}{(1 - 2\nu)}$$

Dado que la constante de Lamé λ no tiene significado físico resultará mucho más práctico describir la relación de $\varepsilon = \varepsilon(\sigma)$ a través del módulo de elasticidad y del coeficiente de Poisson, por lo que sustituyendo

$$E = \frac{\mu \left(3 \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} + 2\mu \right)}{\left(\frac{2\mu\nu}{1-2\nu} \right) + \mu} = \frac{\mu \left(\frac{6\mu\nu + 2\mu(1-2\nu)}{1-2\nu} \right)}{\left(\frac{2\mu\nu + \mu(1-2\nu)}{1-2\nu} \right)}$$

$$E = \frac{\mu(6\mu\nu + 2\mu - 4\mu\nu)}{2\mu\nu + \mu - 2\mu\nu} = \frac{2\mu^2(\nu+1)}{\mu}$$

$$\Rightarrow E = 2\mu(1+\nu)$$

$$\therefore \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Además, si se sustituye en

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \left(\sigma_{ij} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \Rightarrow \frac{1}{2\mu} = \frac{(1+\nu)}{E}$$

$$\frac{\lambda}{(3\lambda + 2\mu)} = \frac{\frac{2\mu\nu}{1-2\nu}}{3 \left(\frac{2\mu\nu}{1-2\nu} \right) + \frac{2\mu(1-2\nu)}{1-2\nu}}$$

$$\frac{\lambda}{(3\lambda + 2\mu)} = \frac{2\mu\nu}{6\mu\nu + 2\mu - 4\mu\nu}$$

$$\frac{\lambda}{(3\lambda + 2\mu)} = \frac{\nu}{\nu + 1}$$

$$\varepsilon_{ij} = \left(\frac{1+\nu}{E} \right) \left(\sigma_{ij} - \left(\frac{\nu}{\nu+1} \right) \sigma_{kk} \delta_{ij} \right)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E} \left[(1+\nu) \sigma_{ij} - \nu \sigma_{kk} \delta_{ij} \right]$$

$$\therefore \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu(1+\nu)} \left[(1+\nu) \sigma_{ij} - \nu \sigma_{kk} \delta_{ij} \right]$$

Esta ecuación se le conoce como Ley de Hooke generalizada, la cual al desarrollarla da lugar a

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E}((1+\nu)\sigma_{11} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})) = \frac{1}{E}(\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33}))$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{E}((1+\nu)\sigma_{22} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})) = \frac{1}{E}(\sigma_{22} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{33}))$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{1}{E}((1+\nu)\sigma_{33} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})) = \frac{1}{E}(\sigma_{33} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}))$$

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \frac{1}{2\mu}\sigma_{12}$$

$$\varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} = \frac{1}{2\mu}\sigma_{23}$$

$$\varepsilon_{31} = \varepsilon_{13} = \frac{1}{2\mu}\sigma_{31}$$

Estas ecuaciones se pueden presentar en forma matricial como

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix} \begin{matrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \frac{\varepsilon_4}{2} \\ \frac{\varepsilon_4}{2} \\ \frac{\varepsilon_4}{2} \end{matrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2\mu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2\mu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2\mu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} \begin{matrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{matrix}$$

El valor del coeficiente de Poisson de un sólido elástico isotrópico es del orden de $\frac{1}{3}$, sin embargo, si el material es incompresible se tiene que

$$k = \lambda + \frac{2}{3}\mu = (3\lambda + 2\mu)\frac{1}{3}$$

Sustituyendo en

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}$$

$$\frac{k}{E} = \frac{\frac{1}{3}(3\lambda + 2\mu)}{\frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}} = \frac{1}{3} \left(\frac{\lambda + \mu}{\mu} \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{\lambda}{\mu} + 1 \right)$$

Y al sustituir el valor de $\frac{\lambda}{\mu}$

$$2\nu\lambda + 2\mu\nu = \lambda \quad \Rightarrow \quad 2\mu\nu = \lambda - 2\nu\lambda = \lambda(1 - 2\nu)$$

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{2\nu}{1 - 2\nu}$$

$$\frac{k}{E} = \frac{1}{3} \left(\frac{\lambda}{\mu} + 1 \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{2\nu}{1 - 2\nu} + 1 \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1 - 2\nu} \right)$$

$$\frac{k}{E} = \frac{1}{3 - 6\nu} \quad \Rightarrow \quad 3(1 - 2\nu)k = E$$

$$\frac{E}{k} = 3 - 6\nu$$

Al ser incompresible el sólido

$$\Rightarrow k \rightarrow \infty$$

$$\Rightarrow \nu = \frac{1}{6} \left(3 - \frac{E}{\infty} \right) = \frac{3}{6} = 0.5$$

$$\therefore \nu \rightarrow 0.5$$

Esto representa que cuando el material es incompresible el coeficiente de Poisson será de

$$\nu = \frac{1}{2}$$

6.4 APLICACIÓN DE LA TEORÍA DE LA ELASTICIDAD EN EL ANÁLISIS DE DIFERENTES PROBLEMAS BÁSICOS

Estudio de una barra circular sometida a torsión

Una barra de sección circular de radio r , diámetro ϕ y longitud l , la cual es sometida a un momento torsionante M_T , en el eje longitudinal de la barra (figura 6.11). Considere que se trata de un sólido, elástico, homogéneo, lineal e isotrópico y con esa base determine:

- Campo de desplazamientos
- Tensor de deformación
- Tensor de esfuerzos
- Esfuerzos principales y su orientación con relación al eje longitudinal de la barra

Con la finalidad de facilitar el análisis, el sistema coordenado se elige de tal forma que el origen coincida con el empotramiento de la barra, donde un eje (x_1) corresponde el eje de simetría de ésta, mientras que los otros dos están referidos al plano transversal. El momento torsionante provoca una deformación angular θ sobre el plano x_2x_3 , la cual es función de la distancia al origen $\theta = \theta(x_1)$, siendo ésta cero para $x_1 = 0$ y máxima para $x_1 = l$.

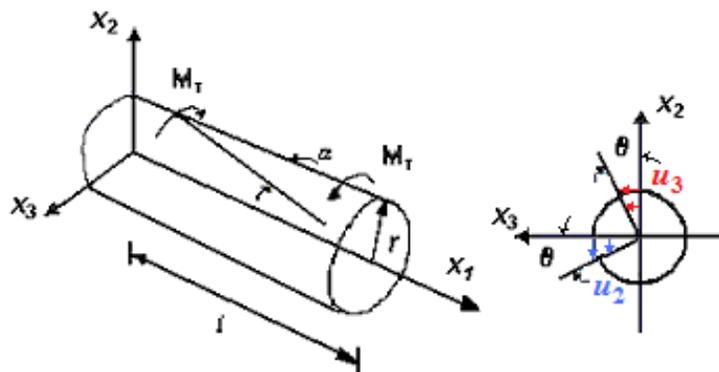


FIGURA 6.11 CILINDRO SOMETIDO A UN MOMENTO TORSIONANTE

El campo de desplazamientos u está dado por

$$u = \theta \times r$$

$$\theta = \theta \hat{e}_1 + 0 \hat{e}_2 + 0 \hat{e}_3$$

$$r = x_1 \hat{e}_1 + x_2 \hat{e}_2 + x_3 \hat{e}_3$$

$$\begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ \theta & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \bar{u} = 0 \hat{e}_1 - \theta x_3 \hat{e}_2 + \theta x_2 \hat{e}_3$$

a) Por tanto, el campo de desplazamientos queda

$$\therefore u = -x_3 \theta \hat{e}_2 + x_2 \theta \hat{e}_3$$

A partir de la descripción del campo de desplazamientos y conociendo que

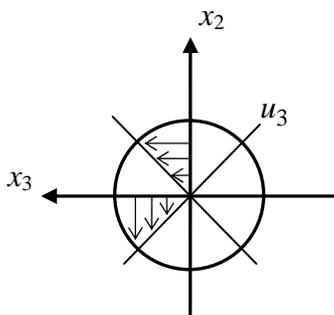
$$\theta = f(x_1)$$

y dado que si

$$x_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta = 0$$

$$x_1 = l \quad \Rightarrow \quad \theta = \theta_{\text{máx}}$$

se puede definir el campo de deformaciones



$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 0$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) = \frac{1}{2} \left(0 + \left(-x_3 \frac{\partial \theta}{\partial x_1} \right) \right) = \frac{1}{2} \left(-x_3 \frac{\partial \theta}{\partial x_1} \right)$$

$$\varepsilon_{23} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) = \frac{1}{2} (-\theta + \theta) = 0$$

$$\varepsilon_{31} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) = \frac{1}{2} \left(x_2 \frac{\partial \theta}{\partial x_1} + 0 \right) = \frac{1}{2} \left(x_2 \frac{\partial \theta}{\partial x_1} \right)$$

b) El tensor de deformaciones $\varepsilon = \frac{1}{2} [\nabla_X u + (\nabla_X u)^T]$ queda

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} x_3 \frac{\partial \theta}{\partial x_1} & \frac{1}{2} x_2 \frac{\partial \theta}{\partial x_1} \\ -\frac{1}{2} x_3 \frac{\partial \theta}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} x_2 \frac{\partial \theta}{\partial x_1} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

c) Dado que se trata de un sólido elástico isotrópico $\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}$, el tensor de esfuerzos está dado por

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & -\mu x_3 \frac{\partial \theta}{\partial x_1} & \mu x_2 \frac{\partial \theta}{\partial x_1} \\ -\mu x_3 \frac{\partial \theta}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ \mu x_2 \frac{\partial \theta}{\partial x_1} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La validez del campo de esfuerzos se puede verificar a través del cumplimiento de la ecuación de Cauchy, considerando la existencia de equilibrio y despreciando las fuerzas de cuerpo

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{2} x_3 \mu \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{1}{2} x_2 \mu \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_3 \partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\mu x_3 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_1^2} + 0 + 0 = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu x_2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_1^2} + 0 + 0 = 0$$

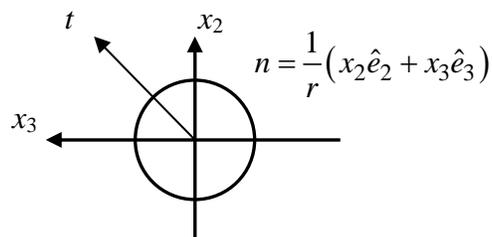
De lo antes expuesto se concluye que será necesario cumplir con

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x_1^2} = 0$$

Entonces se constata que

$$\frac{\partial \theta}{\partial x_1} = \text{ctte}$$

Se deberá cumplir también que la fuerza en las superficies laterales sea igual a cero (no existe carga aplicada sobre éstas).



$$t_i = \sigma_{ij} n_j = 0$$

$$\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} 0 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & 0 & 0 \\ \sigma_{31} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

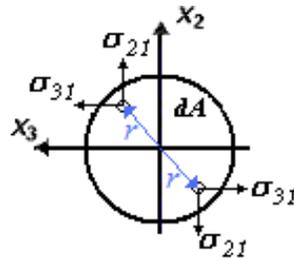
$$t_i = \frac{1}{r}(\sigma_{12}x_2 + \sigma_{13}x_3)(\hat{e}_1 + 0\hat{e}_2 + 0\hat{e}_3)$$

Sustituyendo el valor de las componentes del esfuerzo, se tiene que

$$t_i = \mu \frac{\partial \theta}{\partial x_1} (-x_3x_2 + x_2x_3)\hat{e}_1 = 0$$

De lo que se concluye que las superficies están libres de cargas, esto es, la barra es sometida a momentos de torsión pura.

En cualquier superficie normal a x_1 aparecerán los esfuerzos de corte σ_{21} , σ_{31} ; donde el primero genera una rotación en dirección de las manecillas del reloj, mientras que el segundo hace lo mismo en dirección contraria. Además, se conoce que no existe ninguna fuerza resultante sobre dicho plano, esto es



De la figura se debe cumplir lo siguiente:

- Resultantes en $x_1 = l$

$$R_1 = \int \sigma_{11}n_1 dA = 0$$

$$R_2 = \int \sigma_{21}n_1 dA = -\mu \frac{\partial \theta}{\partial x_1} \int x_3 dA = 0$$

$$R_3 = \int \sigma_{31}n_1 dA = +\mu \frac{\partial \theta}{\partial x_1} \int x_2 dA = 0$$

Si bien al integrar las fuerzas sobre el plano cuya normal es \hat{e}_1 , la resultante debe ser igual a cero, ya que no existe ninguna fuerza que se esté aplicando. Por otra parte, el momento que

los esfuerzos generan alrededor del eje x_1 se debe a la aplicación del momento torsionante, y se deberán equilibrar con éste

$$M_{T_1} = \int (x_2 \sigma_{31} - x_3 \sigma_{21}) dA$$

Sustituyendo el momento torsionante sobre el eje x_1 se tiene que

$$M_{T_1} = \int \mu \frac{\partial \theta}{\partial x_1} (x_2^2 + x_3^2) dA$$

Además,

$$M_{T_2} = M_{T_3} = 0$$

Resulta evidente que

$$M_{T_1} = \mu \frac{\partial \theta}{\partial x_1} \int r^2 dA$$

Por otra parte, la definición de momento polar de inercia (I_p) de la sección transversal de área es

$$I_p = \int r^2 dA$$

por lo que el momento torsionante sobre x_1 se expresa

$$M_{T_1} = \mu \frac{\partial \theta}{\partial x_1} I_p$$

$$I_p = \int_0^r r^2 dA = \int_0^r \int_0^{2\pi} r^2 r d\theta dr = \frac{\pi r^4}{2}$$

De lo anterior queda

$$\frac{\partial \theta}{\partial x_1} = \frac{M_{T_1}}{\mu I_p}$$

Lo que significa que la distorsión angular $\frac{\partial \theta}{\partial x_1}$ es directamente proporcional a la sollicitación aplicada e inversamente proporcional a la rigidez del material μ y a la rigidez geométrica I_p

De otra forma, despejando el módulo de rigidez a corte (μ) se tiene

$$\mu = \frac{M_{T_1}}{\left(\frac{\partial \theta}{\partial x_1}\right) I_p}$$

Lo anterior representa que se puede determinar el módulo de rigidez a corte a través de un ensayo de torsión.

Sustituyendo en el tensor de esfuerzos se tiene

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-\mu x_3 M_T}{\mu I_p} & \frac{\mu x_2 M_T}{\mu I_p} \\ \frac{-\mu x_3 M_T}{\mu I_p} & 0 & 0 \\ \frac{\mu x_2 M_T}{\mu I_p} & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ -x_3 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{M_T}{I_p}$$

La aplicación de un momento torsionante genera un estado de esfuerzos de corte puro donde estos son proporcionales al momento aplicado y a la distancia al eje de rotación e inversamente proporcionales al momento polar de inercia I_p . Donde para una barra de sección circular, la rigidez geométrica es proporcional al diámetro a la cuarta, por lo que una barra hueca es más eficiente, con relación a su peso, para transmitir el par.

$$I_p = \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi D^4}{32}; \quad I_p = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32}$$

Esfuerzos principales

Con base en el estado de esfuerzos σ_{ij} se puede analizar éste, para lo anterior se considerará un elemento diferencial que se encuentra en la superficie de la barra y cuya posición corresponde con uno de los ejes coordenados. Se debe de tener en cuenta que existe simetría con respecto al eje longitudinal x_1 , por lo que el resultado de los esfuerzos principales corresponderá a cualquier elemento en la superficie de la barra. Por otra parte, se trata de un estado a corte puro, por lo que su representación en el círculo de Mohr estará dada por la figura 6.12, y los esfuerzos principales serán:

$$x_2 = 0; \quad x_3 = r$$

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0$$

$$I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = 0$$

$$I_2 = \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{33}\sigma_{11} - (\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2)$$

$$I_2 = -(\sigma_{12}^2 + \sigma_{31}^2)$$

$$I_2 = -\left[\left(\frac{M_T x_3}{I_p} \right)^2 + \left(\frac{M_T x_2}{I_p} \right)^2 \right] = -\left(\frac{M_T}{I_p} \right)^2 (x_3^2 + x_2^2) = -\left(\frac{M_T}{I_p} \right)^2 (r^2)$$

$$I_3 = \sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33} + 2\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{31} - (\sigma_{11}\sigma_{23}^2 + \sigma_{22}\sigma_{31}^2 + \sigma_{33}\sigma_{12}^2)$$

$$I_3 = 0$$

$$\sigma^3 - \left(\frac{M_T}{I_p} \right)^2 (x_3^2 + x_2^2) \sigma = 0$$

$$\sigma \left(\sigma^2 - \left(\frac{M_T}{I_p} \right)^2 (x_3^2 + x_2^2) \right) = 0$$

$$\sigma_2 = 0$$

$$\sigma_{1,3} = \pm \frac{M_T}{I_p} r$$

donde r es la distancia desde el centro de la barra.

Lo anterior indica que los máximos normales son iguales a los cortantes máximos, lo que corresponde con un estado de corte puro.

Para el valor principal

$$\sigma_1 = \frac{M_T}{I_p} R$$

siendo R el radio del cilindro, la ecuación del eigenvector queda

$$-\frac{M_T R}{I_p} n_1 - \frac{M_T R}{I_p} n_2 = 0$$

$$-\frac{M_T R}{I_p} n_3 = 0$$

De lo que se desprende que $n_1 = -n_2$, $n_3 = 0$, por lo que el eigenvector es $n = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{e}_1 - \hat{e}_2)$

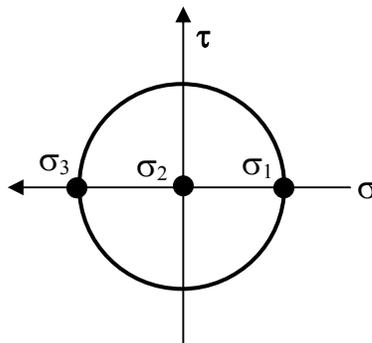


FIGURA 6.12 CIRCULO DE MOHR, LA APLICACIÓN DEL MOMENTO TORSIONANTE GENERA UN ESTADO DE CORTE PURO

Esta normal determina que para un plano cuya normal sea \hat{e}_1 en la coordenada $(x_1, 0, r)$ se define un ángulo de $\pi/4$ con relación al eje x_1 ; lo que da lugar a una falla con un desarrollo helicoidal a $\pi/4$ con relación a dicho eje, esto para el caso de la fractura de la barra para un material frágil.

Barra sometida a carga uniaxial (tracción o compresión)

Suponga una barra sometida a una carga uniaxial (tracción o compresión) la cual coincide con su eje longitudinal (figura 6.13). La carga provoca una deformación infinitesimal en el rango elástico, por lo que

$$x_i \cong X_i$$

$$\sigma_{11} = \frac{f_1}{\int_A n_1 dA}$$

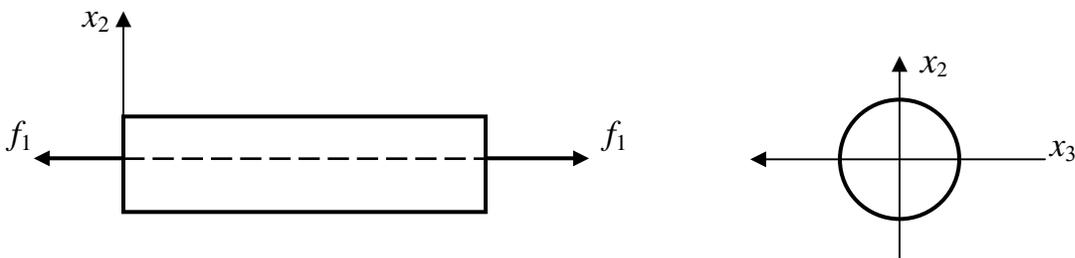


FIGURA 6.13 BARRA CILÍNDRICA DE RADIO EXTERIOR R , LA CUAL ES SOMETIDA A UNA CARGA f_1

En $x_1 = 0, x_1 = l$ se tiene f_1 , por otra parte para $0 < x_1 < l$, entonces

$$\sigma_{11} = \frac{f}{A_1}, \quad \sigma_{12} = \sigma_{31} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{23} = 0$$

Considerando lo anterior se tiene que

- i. Las ecuaciones de equilibrio son satisfechas $\nabla \cdot \sigma = 0$

- ii. Las condiciones de frontera se satisfacen
- iii. Existe un campo de desplazamientos que corresponde con el campo de esfuerzos

Tensor de esfuerzos

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{f_1}{A_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) $\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0$

b) En la superficie del cilindro

$$f_2 = f_3 = 0$$

De la ley de Hooke se tiene que para un material elástico isotrópico y dado que se trata de un estado uniaxial de carga:

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E}(\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33})) = \frac{\sigma_{11}}{E}$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{E}(\sigma_{22} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{33})) = -\frac{\nu\sigma_{11}}{E}$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{1}{E}(\sigma_{33} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})) = -\frac{\nu\sigma_{11}}{E}$$

Es por consecuencia que el tensor de deformaciones queda

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{\sigma_{11}}{E} & 0 & 0 \\ 0 & -\nu \frac{\sigma_{11}}{E} & 0 \\ 0 & 0 & -\nu \frac{\sigma_{11}}{E} \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \\ \varepsilon_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \\ \varepsilon_{33} &= \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{aligned}$$

Por su parte, el campo de desplazamientos está dado por

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \Rightarrow \int \frac{\sigma_{11}}{E} \partial x_1 = \int \partial u_1$$
$$\therefore u_1 = \sigma_{11} \frac{x_1}{E} + f(x_2, x_3)$$

Como el elemento está empotrado

$$x_1 = 0 \Rightarrow u_1(0) = 0 \quad \forall x_2, x_3 \quad \therefore f(x_2, x_3) = 0$$

$$\Rightarrow u_1(x_1) = \frac{\sigma_{11}}{E} x_1$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \Rightarrow \int \frac{-\nu \sigma_{11}}{E} \partial x_2 = \int \partial u_2$$

$$\therefore u_2 = -\nu \sigma_{11} \frac{x_1}{E} + f(x_1, x_3)$$

$$\text{para } x_2 = 0 \Rightarrow u_2(0) = 0 \quad \forall x_1, x_3 \quad \therefore f(x_1, x_3) = 0$$

$$\Rightarrow u_2(x_2) = \frac{-\nu \sigma_{11}}{E} x_2$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \Rightarrow \int \frac{-\nu \sigma_{11}}{E} \partial x_3 = \int \partial u_3$$

$$\therefore u_3 = -\nu \sigma_{11} \frac{x_3}{E} + f(x_1, x_2)$$

$$\text{para } x_3 = 0 \Rightarrow u_3(0) = 0 \quad \forall x_1, x_2 \quad \therefore f(x_1, x_2) = 0$$

$$\Rightarrow u_3(x_3) = \frac{-\nu \sigma_{11}}{E} x_3$$

El esfuerzo normal máximo y el cortante máximo están dados por

$$\sigma_{\text{máx}} = \sigma_{11} ; \quad \tau_{\text{máx}} = \frac{\sigma_{11}}{2}$$

Principio de Saint Venant

Si la distribución de fuerzas que actúan en la porción de la superficie de un cuerpo es reemplazada por una diferente distribución de fuerzas que actúan en la misma porción del cuerpo, de tal forma que éstas generan los mismos efectos, entonces se puede referir a ellas como equivalentes, ya que sus efectos en zonas alejadas al punto de aplicación son esencialmente los mismos, en virtud de que dan lugar a las mismas fuerzas resultantes y a los mismos pares. Este concepto permite simplificar el estudio de los elementos estructurales al poder reemplazar las cargas que realmente se aplican por otras que, causando los mismos efectos, faciliten el análisis.

Viga (barra) sometida a flexión pura

Considere una barra que es sometida a un momento flexionante M_f . Para facilitar el análisis, los ejes se pueden considerar de tal forma que solo se presente momento alrededor de uno de éstos. El M_f produce flexión de la barra al ser aplicado (figura 6.14) y las superficies laterales están libres de cargas de tracción.

El momento flexionante aplicado a la barra deberá ser contrarrestado por las sollicitaciones que se generan al interior de ésta, por esto es que se produce el siguiente estado de esfuerzos:

$$\sigma_{11} \neq 0$$

$$\sigma_{22} = \sigma_{33} = 0$$

$$\sigma_{12} = \sigma_{23} = \sigma_{31} = 0$$

Estado de esfuerzos

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

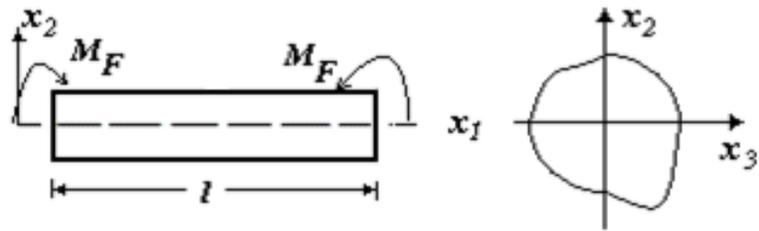


FIGURA 6.14 BARRA DE SECCIÓN CUALESQUIERA A LA CUAL SE LE APLICA UN MOMENTO FLECTOR ALREDEDOR DE x_3

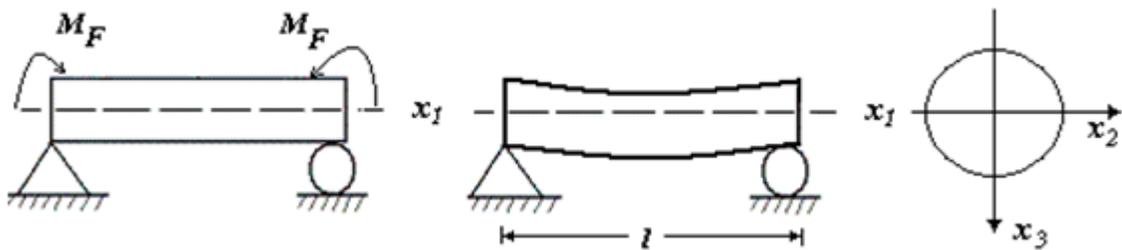


FIGURA 6.15 VIGA DE SECCIÓN CIRCULAR SOMETIDA A UN MOMENTO FLEXIONANTE

Considerando que se trata de un sólido elástico isotrópico se tiene que

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\nu & 0 \\ 0 & 0 & -\nu \end{pmatrix} \frac{\sigma_{11}}{E}$$

La barra es sometida a momentos aplicados en los extremos del elemento de igual magnitud y de sentido opuesto

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0$$

$$\therefore \text{eje } x_1 \quad \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} = 0 \quad (6.16)$$

$$\Rightarrow \sigma_{11} = f(x_2, x_3)$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E}; \quad \varepsilon_{22} = -\frac{\nu \sigma_{11}}{E}; \quad \varepsilon_{33} = -\frac{\nu \sigma_{11}}{E}$$

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{31} = 0$$

Si se considera que $M_f = M_3$, esto es que el momento flexionante solo produce rotación alrededor de x_3 , entonces, para $x_2 = 0$ se define una superficie neutra.

Por otra parte, se tiene que las superficies laterales están libres de esfuerzos

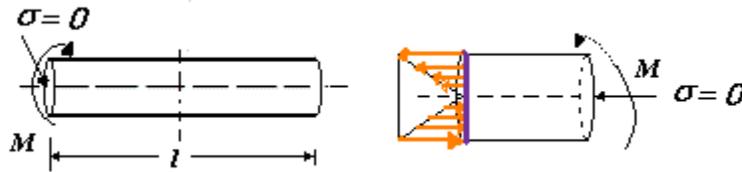


FIGURA 6.16 ESTADO DE ESFUERZOS EN UNA VIGA SOMETIDA A MOMENTO FLECTOR PURO

Por condiciones de equilibrio se requiere

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} = 0$$

Con base en las ecuaciones de compatibilidad o integrabilidad

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2}$$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{1}{E} \sigma_{11} \\ \varepsilon_{22} &= -\frac{\nu \sigma_{11}}{E} \\ \varepsilon_{33} &= -\frac{\nu \sigma_{11}}{E} \end{aligned} \right\} \quad (6.17)$$

de la ecuación 6.17 se tiene que

$$-\nu \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_2^2} = 0 \quad (6.18)$$

como de la ecuación de Cauchy se tiene que $\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} = 0$, entonces se concluye que

$$\frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_1^2} = 0 \text{ y entonces de la ecuación 6.18, } \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_2^2} = 0$$

Por lo tanto, σ_{11} se trata de una función lineal $\Rightarrow \sigma_{11} = \alpha x_2 + cte$, como existe cambio en el sentido del esfuerzo σ_{11} , se puede definir el origen sobre dicho plano, al cual se denomina como neutro o de esfuerzo nulo.

Por otra parte, se debe cumplir también con que

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_3^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{13}}{\partial x_1 \partial x_3}$$

$$-\nu \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_3^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_3^2} = 0$$

pero como $\sigma_{11} = \sigma(x_2) \therefore \sigma_{11} = \alpha x_2$ cumple con las condiciones anteriores.

Dado que las superficies laterales están libres de esfuerzos y como el esfuerzo σ_{11} se genera como una respuesta de la barra al momento flexionante M_3 aplicado, se debe cumplir que

$$f_1 = \int_A t_1 da = 0 \Rightarrow \int_A (\sigma_{11} n_1) dA = 0$$

$$M_3 - \int_A x_2 \sigma_{11} dA = 0$$

$$\therefore \quad f_1 = \int_A \alpha x_2 dA = 0 \quad M_3 - \alpha \int_A x_2^2 dA = 0$$

donde el término $\int x_2^2 dA = I_3$ representa el momento de inercia de la sección transversal con relación al eje x_3 , entonces, es entonces factible despejar la variable α

$$\therefore \quad \alpha = \frac{M_3}{I_3} \quad \Rightarrow \quad \sigma_{11} = -\frac{M_3 x_2}{I_3}$$

El signo se ha definido considerando que en la parte positiva de x_2 los esfuerzos serán compresivos mientras que en la negativa, éstos serán de tracción.

Para una sección transversal circular el momento de inercia es

$$I = \frac{\pi r^4}{4}$$

Por lo tanto, el esfuerzo máximo está dado por $(x_2)_{\text{máx}} = c$, donde c representa el radio de la barra si ésta fuera de sección circular. De lo anterior se tiene que el esfuerzo máximo es

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{Mc}{I} = \frac{M}{s}$$

$$s = \frac{I}{c} \quad \text{Módulo de la sección elástica}$$

Como

$$\begin{aligned} \sigma_{11} = -\frac{M_3 x_2}{I_3} & \Rightarrow \varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E} = -\frac{M_3 x_2}{I_3 E} \\ \nu = -\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}} = -\frac{\varepsilon_{33}}{\varepsilon_{11}} & \Rightarrow \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \frac{M_3}{I_{33} E} \nu x_2 \end{aligned}$$

De lo anterior se tiene que por encima del eje neutro, las deformaciones longitudinales serán negativas mientras que para x_2 negativo éstas serán positivas dado que los esfuerzos serán de tracción.

Con base en lo anterior, los desplazamientos quedan

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \Rightarrow \int \frac{-M_3 x_2}{EI_{33}} \partial x_1 = \int \partial u_1 \\ \therefore u_1 & = -M_3 \frac{x_1 x_2}{EI_{33}} + f(x_2, x_3) \end{aligned}$$

Como el elemento está empotrado

$$\begin{aligned} x_1 = 0 & \Rightarrow u_1(0) = 0 \quad \forall x_2, x_3 \quad \therefore f(x_2, x_3) = 0 \\ & \Rightarrow u_1(x_i) = -\frac{M_3}{EI_{33}} x_1 x_2 \end{aligned}$$

Para el eje x_2

$$\begin{aligned} \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \Rightarrow \int \frac{\nu M_3 x_2}{EI_{33}} \partial x_2 = \int \partial u_2 \\ \therefore u_2 & = \nu M_3 \frac{x_2^2}{2EI_{33}} + g(x_1, x_3) \end{aligned}$$

$$x_2 = 0 \Rightarrow u_2(0) = 0 \quad \forall x_1, x_3 \quad \therefore g(x_1, x_3) \neq 0$$

Se sabe que

$$\varepsilon_{12} = 0 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = -\frac{\partial u_2}{\partial x_1}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_1} = \frac{M_3 x_1}{I_{33} E} \quad \Rightarrow \quad \int \partial u_2 = \int \frac{M_3 x_1}{I_{33} E} \partial x_1$$

$$\therefore g(x_1) = \frac{M_3 x_1^2}{2I_{33} E}$$

Además,

$$\varepsilon_{23} = 0 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_3} = -\frac{\partial u_3}{\partial x_2}$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial x_2} = -\frac{\partial u_2}{\partial x_3} = \frac{\nu M_3 x_3}{I_{33} E} \quad \Rightarrow \quad \int \partial u_2 = \int -\frac{\nu M_3 x_3}{I_{33} E} \partial x_3$$

$$\therefore g(x_3) = -\frac{\nu M_3 x_3^2}{2I_{33} E}$$

$$g(x_1, x_3) = \frac{M_3}{2I_{33} E} \left(-\nu x_3^2 + x_1^2 \right)$$

$$\therefore u_2 = \frac{M_3}{2I_{33} E} \left(\nu x_2^2 + x_1^2 - \nu x_3^2 \right)$$

Para el eje x_3

$$\varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{\nu M_3 x_2}{EI_{33}} \partial x_3 = \int \partial u_3$$

$$\therefore u_3 = \nu M_3 \frac{x_2 x_3}{EI_{33}} + h(x_1, x_2)$$

Se sabe que

$$\varepsilon_{13} = 0 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \Rightarrow \frac{\partial u_1}{\partial x_3} = -\frac{\partial u_3}{\partial x_1}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_3} = 0 \Rightarrow -\frac{\partial u_3}{\partial x_1} = 0$$

$\therefore h(x_1) = \text{cte}$ pero en el empotramiento $x_1 = 0$ y $u_3 = 0$

$$\therefore \text{cte} = 0 \Rightarrow h(x_1) = 0$$

Se sabe que

$$\varepsilon_{23} = 0 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \Rightarrow \frac{\partial u_2}{\partial x_3} = -\frac{\partial u_3}{\partial x_2}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_3} = -\frac{\nu M_3 x_3}{I_{33} E}$$

$$-\frac{\partial u_3}{\partial x_2} = \frac{\nu M_3 x_3}{I_{33} E} + h'(x_2)$$

Sumando las dos anteriores

$$h'(x_2) = 0$$

Considerando el empotramiento $h(x_2) = 0$

$$\therefore h(x_1, x_2) = 0$$

$$\Rightarrow u_3 = \frac{\nu M_3 x_2 x_3}{I_{33} E}$$

Donde al producto del momento de inercia con el módulo de elasticidad representa la rigidez del elemento mecánico (rigidez a flexión).

Como u_1 es función lineal de x_2 , una sección transversal plana continuará plana al ser rotada sobre el eje en un ángulo θ

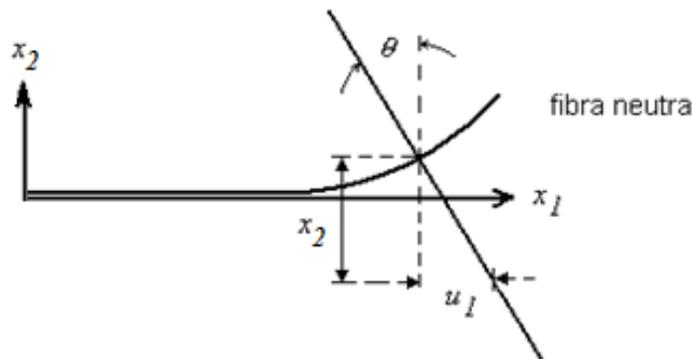
$$\theta \hat{=} \tan \theta = \frac{u_1}{x_2} = \frac{M_3 x_1}{EI_3}$$

El desplazamiento de las partículas a lo largo del eje x_1 , para $x_2 = x_3 = 0$

$$u_1 = u_3 = 0 ; \quad u_2 \neq 0$$

El desplazamiento de este elemento material (al cual se denomina como fibra neutra) es frecuentemente usado para definir la deflexión de la viga

$$-\frac{\partial u_2}{\partial x_1} = \frac{M_3 x_1}{EI_3} = \tan \theta$$



Efecto combinado de flexión y torsión

Dado que la deformación se efectúa en el rango elástico, el fenómeno se considera lineal. Entonces, el tensor de esfuerzos estará dado por la suma término a término de los tensores asociados al momento torsionante y al momento flexionante, por lo que el estado de esfuerzos queda

$$\sigma_{ijc} = \sigma_{ijF} + \sigma_{ijT}$$

$$\sigma_{ijc} = \begin{bmatrix} \frac{-M_f x_2}{I_{33}} & -\frac{M_T x_3}{I_p} & \frac{M_T x_2}{I_p} \\ -\frac{M_T x_3}{I_p} & 0 & 0 \\ \frac{M_T x_2}{I_p} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

6.5 ESTADOS PARTICULARES DE ESFUERZO Y DEFORMACIÓN

La física de cualquier problema siempre se desarrolla en un espacio tridimensional, sin embargo, la ingeniería representa el arte de aplicar la física y las matemáticas buscando la mejor relación entre la aproximación de los resultados a la realidad y la solución más simple que demande menores recursos matemáticos y computacionales. Es por consecuencia que en muchos problemas de ingeniería, una condición triaxial real sea idealizada a dos dimensiones (plana). Esto reduce de 6 a 3 el número de incógnitas y por tanto, simplifica las metodologías de solución, permitiendo en muchos de los casos soluciones analíticas prácticamente imposibles para el caso tridimensional.

Si una de las dimensiones es pequeña en comparación de las otras, entonces, los esfuerzos en la dirección menor se desprecian y el problema se estudia en el plano que definen las otras dimensiones, a esta situación se le denomina como *estado plano de esfuerzos*.

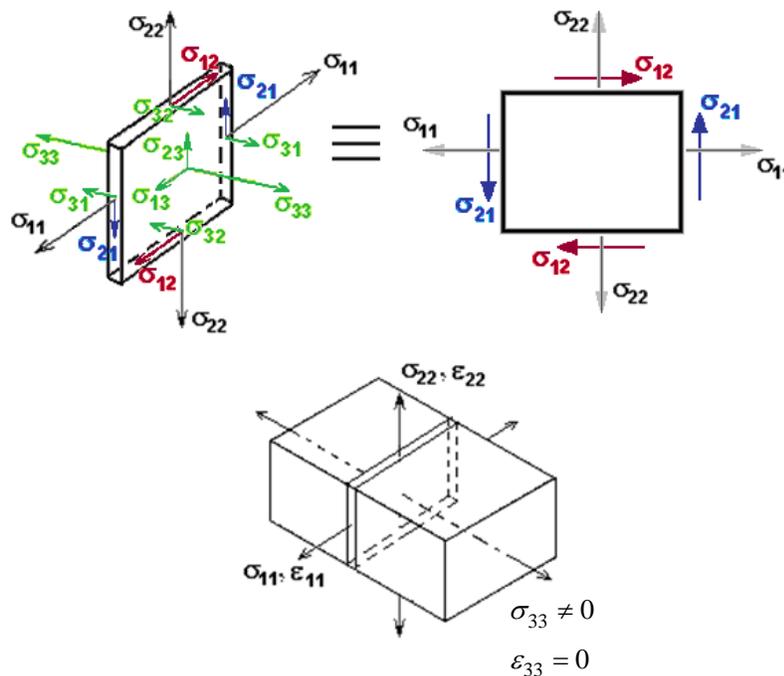


FIGURA 6.17 EN LA IMAGEN SUPERIOR SE OBSERVAN LAS CONDICIONES CARACTERÍSTICAS QUE DEFINEN UN ESTADO BIAIXIAL DE ESFUERZOS. POR SU PARTE, LA IMAGEN INFERIOR REPRESENTA LAS CONDICIONES DE UN ESTADO BIAIXIAL DE DEFORMACIÓN

Por otra parte, si una de las dimensiones es muy grande en comparación con las otras, entonces se considera que la deformación en dicha dirección se puede despreciar definiéndose a tal situación como *estado de deformación biaxial* o *estado plano de deformación*, figura 6.17.

Resulta por demás evidente, de un primer análisis de la teoría de la elasticidad, que un estado biaxial de esfuerzos no corresponderá con uno de deformación biaxial, sino que por condiciones de equilibrio un estado biaxial de deformación corresponde con un estado triaxial de esfuerzos, donde uno de los esfuerzos normales será linealmente dependiente de los otros dos esfuerzos normales. Situación parecida se presenta para un estado biaxial de esfuerzos, el cual corresponde con un estado triaxial de deformación, en donde la deformación en el eje perpendicular al plano es diferente de cero, resultando linealmente dependiente de las otras dos deformaciones normales.

Estado plano de esfuerzos (Estado biaxial de esfuerzos)

En este caso el cuerpo se caracteriza en que una de sus dimensiones es mucho menor que las otras (figura 6.18) $x_3 \ll x_1, x_2$, por tal motivo, los esfuerzos normal y de corte en dicha dirección se consideran despreciables, por lo que

$$\sigma_{33} = \sigma_{31} = \sigma_{13} = \sigma_{32} = \sigma_{23} = 0$$

$$x_3 \ll x_1, x_2$$

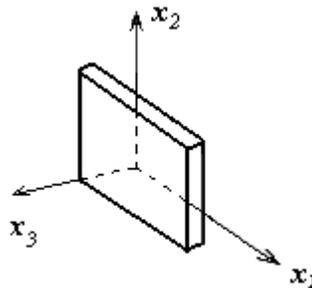


FIGURA 6.18 ESTADO PLANO DE ESFUERZOS

El estado de esfuerzos se expresa como

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y el de deformaciones, considerando un sólido elástico isotrópico

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{33} = 0 = \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2\mu\varepsilon_{33} = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{33} + \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})$$

de lo cual se obtiene

$$\varepsilon_{33} = \frac{-\lambda}{\lambda + 2\mu}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})$$

Estado de deformación biaxial

El caso de deformación plana se presenta esquemáticamente en la figura 6.19, donde una de las dimensiones es sensiblemente mayor que las otras ($x_3 \gg x_2, x_1$), por lo que la deformación en esta dirección será mucho menor que en los otros dos ejes, razón por la cual se desprecia, definiéndose como un *estado plano de deformación*.

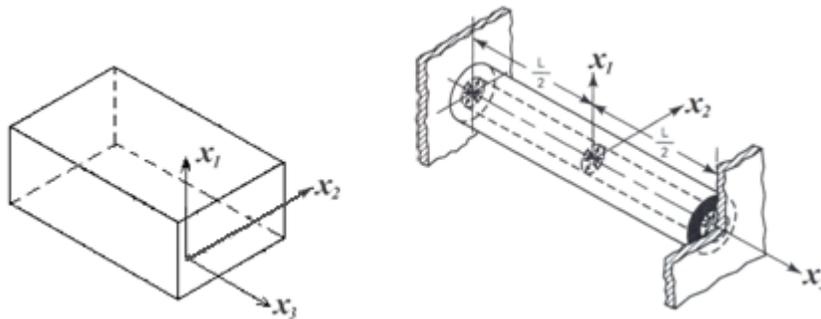


FIGURA 6.19 ESTADO DE DEFORMACIÓN PLANA. SE CARACTERIZA EN QUE UNA DE LAS DIMENSIONES ES MUCHO MAYOR QUE LAS OTRAS

Por consecuencia, el tensor de deformación se expresará como

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por otra parte, considerando la Ley de Hooke generalizada, se tiene

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu(1+\nu)} (\sigma_{ij}(1+\nu) - \nu\sigma_{kk}\delta_{ij})$$

Como $\varepsilon_{33} = 0 \Rightarrow \sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})$, por lo que el estado de esfuerzos se expresa como

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \end{pmatrix}$$

En este caso de deformación plana, el vector desplazamientos queda

$$u_1 = u_1(x_1, x_2), \quad u_2 = u_2(x_1, x_2), \quad u_3 = 0$$

Por consecuencia, las deformaciones se expresan como

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \varepsilon_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \varepsilon_{33} &= 0 \\ \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) & \varepsilon_{23} = \varepsilon_{31} &= 0 \end{aligned}$$

De las ecuaciones de Cauchy considerando equilibrio y despreciando las fuerzas de cuerpo

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} = 0 \tag{6.19}$$

$$\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} = 0 \quad (6.20)$$

$$\frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} = 0 \quad \sigma_{33} = \sigma(x_1, x_2)$$

El sistema de ecuaciones diferenciales no puede ser resuelto de inmediato ya que σ_{33} es una composición lineal de σ_{11}, σ_{22} ; de tal forma que $\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})$. Por consecuencia, será necesario desarrollar una tercera ecuación diferencial para proceder a resolver el sistema; esta ecuación diferencial se desarrolla a partir de las *ecuaciones de compatibilidad* de la siguiente forma

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2}$$

Considerando la Ley de Hooke, al sustituir el valor de σ_{33} y expresar la ecuación en la forma $\varepsilon = \varepsilon(\sigma_{11}, \sigma_{22})$, se tiene que

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E}[\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33})] = \frac{1}{E}[\sigma_{11} - \nu\sigma_{22} - \nu^2\sigma_{11} - \nu^2\sigma_{22}]$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{E}[\sigma_{22} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{33})] = \frac{1}{E}[\sigma_{22} - \nu\sigma_{11} - \nu^2\sigma_{11} - \nu^2\sigma_{22}]$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E}[\sigma_{11}(1 - \nu^2) - \nu\sigma_{22}(1 + \nu)] = \frac{1}{E}[\sigma_{11}(1 - \nu^2) - \sigma_{22}(\nu + \nu^2)]$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{E}[\sigma_{22}(1 - \nu^2) - \nu\sigma_{11}(1 + \nu)] = \frac{1}{E}[\sigma_{22}(1 - \nu^2) - \sigma_{11}(\nu + \nu^2)]$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{\sigma_{12}}{2\mu}$$

Sustituyendo los valores de ε_{11} y de ε_{22} en la primera ecuación de compatibilidad, se tiene que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{E} \left[\frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_2^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_2^2} - \nu^2 \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_2^2} - \nu^2 \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_2^2} \right] + \frac{1}{E} \left[\frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_1^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_1^2} - \nu^2 \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_1^2} - \nu^2 \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_1^2} \right] \\ &= \frac{2}{2\mu} \frac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} \end{aligned} \quad (6.21)$$

De las ecuaciones de equilibrio, derivando la primera con respecto a x_1 y la segunda con respecto a x_2 , para después sumarlas se tiene

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \sigma_{21}}{\partial x_2 \partial x_1} + \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_2^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_2^2} = -2 \frac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} \quad (6.22)$$

La ecuación 6.22 se puede sustituir en la primera ecuación de compatibilidad 6.22, de tal forma que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\mu(1+\nu)} \left(\frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_2^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_2^2} - \nu^2 \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_2^2} - \nu^2 \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_1^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_1^2} - \nu^2 \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_1^2} - \nu^2 \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_1^2} \right) + \\ & \frac{(1+\nu)}{2\mu(1+\nu)} \left(\frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_2^2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (6.23)$$

Simplificando la ecuación 6.23, se tiene

$$\left(\frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_2^2} - \nu^2 \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_1^2} - \nu^2 \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_2^2} - \nu^2 \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_1^2} - \nu^2 \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_1^2} \right) = 0$$

$$\begin{aligned} \therefore (1-\nu^2) \left(\frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_1^2} \right) &= 0 \\ \Rightarrow \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) (\sigma_{11} + \sigma_{22}) &= 0 \\ \therefore \nabla^2 (\sigma_{11} + \sigma_{22}) &= 0 \end{aligned}$$

El sistema de tres ecuaciones diferenciales con tres incógnitas queda entonces

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} = 0; \quad \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} = 0; \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) (\sigma_{11} + \sigma_{22}) = 0 \quad (6.24)$$

Incógnitas: σ_{11} , σ_{22} , σ_{21}

Función de esfuerzos de Airy

Este tipo de sistemas de ecuaciones diferenciales (ecuación 6.14), es relativamente frecuente en matemáticas; razón por la cual se buscó una solución desde inicios del siglo XIX. El honor correspondió a George Biddel Airy [1801-1892], astrónomo y matemático inglés, quien hacia 1862 propuso la solución (Airy Stress function method). Lo anterior a través de una función escalar φ tal que $\nabla^4 \varphi = 0$; es entonces que

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x_2^4} = 0$$

$$\varphi = f(x_1, x_2)$$

Airy demostró que existe una sola función φ , tal que en ausencia de fuerzas de cuerpo, el campo de esfuerzos quede definido a través de

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2}$$

$$\sigma_{22} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2}$$

$$\sigma_{12} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2}$$

Entonces, cualquier función escalar φ que satisface la ecuación $\nabla^4 \varphi = 0$ genera una posible solución al problema elástico, por tal motivo es denominada como *Función de esfuerzos de Airy* (φ). Una solución elemental la representa cualquier polinomio de tercer grado que genera un campo de esfuerzos y de deformaciones lineal, donde las soluciones particulares dependerán de las condiciones de frontera establecidas. La función de esfuerzos de Airy juega un papel fundamental en el estudio de los problemas de deformación plana, simplificación muy usual en la mecánica de sólidos.

Como ya fue mencionada, una posible solución a la ecuación biarmónica es a través de funciones polinomiales de diversos grados cuyos coeficientes son asignados para que se cumpla $\nabla^4 \varphi = 0$. Por ejemplo, para un polinomio de segundo grado

$$\varphi_2 = \frac{a_2}{2} x_1^2 + b_2 x_1 x_2 + \frac{c_2}{2} x_2^2$$

define unos esfuerzos asociados

$$\sigma_{11} = c_2; \quad \sigma_{22} = a_2; \quad \sigma_{12} = -b_2$$

Lo cual indica que los tres esfuerzos son constantes en el cuerpo. Este sistema podría ser utilizado para representar un estado de tensión simple, tensión biaxial o cortante puro.

Un polinomio de tercer grado

$$\varphi_3 = \frac{a_3}{6} x_1^3 + \frac{b_3}{2} x_1^2 x_2 + \frac{c_3}{2} x_1 x_2^2 + \frac{d_3}{6} x_2^3$$

da como resultado los esfuerzos

$$\sigma_{11} = c_3 x_1 + d_3 x_2; \quad \sigma_{22} = a_3 x_1 + b_3 x_2; \quad \sigma_{12} = -b_3 x_1 - c_3 x_2$$

para $a_3 = b_3 = c_3 = 0$, las expresiones se reducen a

$$\sigma_{11} = d_3 x_2; \quad \sigma_{22} = \sigma_{12} = 0$$

lo cual representa el caso de flexión pura en una barra de sección rectangular.

Un polinomio de cuarto grado

$$\varphi_4 = \frac{a_4}{12} x_1^4 + \frac{b_4}{6} x_1^3 x_2 + \frac{c_4}{2} x_1^2 x_2^2 + \frac{d_4}{6} x_1 x_2^3 + \frac{e_4}{12} x_2^4$$

dado que

$$\nabla^4 \varphi = 0 \Rightarrow e_4 = -(2c_4 + a_4) \quad \therefore$$

$$\sigma_{11} = c_4 x_1^2 + d_4 x_1 x_2 - (2c_4 + a_4) x_2^2$$

$$\sigma_{22} = a_4 x_1^2 + b_4 x_1 x_2 + c_4 x_2^2$$

$$\sigma_{12} = -\frac{b_4}{2} x_1^2 - 2c_4 x_1 x_2 - \frac{d_4}{2} x_2^2$$

Muchos problemas de importancia práctica son resueltos a través de la combinación de polinomios como los antes descritos.

Aplicación de las funciones de esfuerzo de Airy en la determinación del estado de esfuerzos y deformaciones asociados a la presencia de una dislocación de borde

En ciencia de materiales, para justificar el nivel de esfuerzos necesarios para producir una deformación permanente en una estructura cristalina, se definió desde los años 30 del siglo XX la existencia de defectos cristalinos denominados como dislocaciones. Estos defectos cristalinos se han descrito en su forma primitiva como dislocaciones de borde (figura 6.20) y de tipo helicoidal.

En ambos casos, la presencia de la dislocación generará un campo elástico asociado, el cual interactúa con los campos de las otras dislocaciones presentes en el cristal. Estos defectos requieren, además, una cierta energía para su formación, la cual se almacena a través del campo de deformación elástica durante el proceso de formación de las dislocaciones.

En el caso particular de una dislocación de borde, ésta se puede representar a través de un campo biaxial de deformación, tal que los desplazamientos u_1 y u_2 son variables y $u_3 = 0$

Por consecuencia, para una dislocación de borde se deberá cumplir que

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} = 0$$

$$\nabla^2 (\sigma_{11} + \sigma_{22}) = 0$$

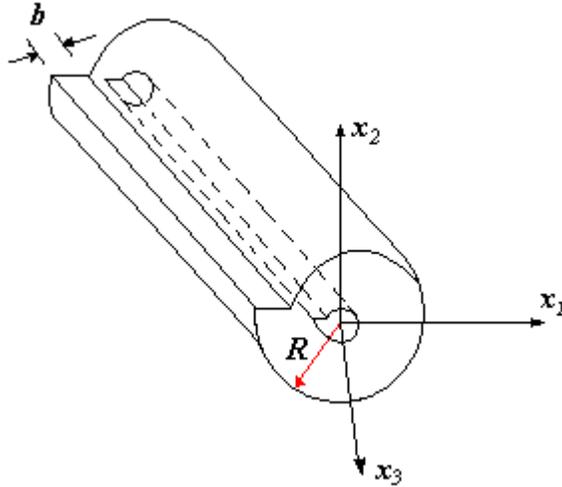


FIGURA 6.20 DESCRIPCIÓN ESQUEMÁTICA DE UNA DISLOCACIÓN DE BORDE

A partir del análisis de las condiciones de frontera se determinó que la función de Airy de los esfuerzos que da solución al problema está dada por

$$\phi = -\frac{Gb}{2\pi(1-\nu)} x_2 \ln(x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$$

En virtud de que los esfuerzos asociados se definen por

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} \quad \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1 \partial x_2} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} = \sigma_{11} = -\frac{Gb x_2 (3x_1^2 + x_2^2)}{2\pi(1-\nu)(x_1^2 + x_2^2)^2}$$

$$\sigma_{12} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{Gb x_1 (x_1^2 - x_2^2)}{2\pi(1-\nu)(x_1^2 + x_2^2)^2}$$

$$\sigma_{22} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} = \frac{Gb x_2 (x_1^2 - x_2^2)}{2\pi(1-\nu)(x_1^2 + x_2^2)^2}$$

$$\therefore \sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = -\frac{G\nu x_2}{\pi(1-\nu)(x_1^2 + x_2^2)^2}$$

Viga curvada sometida a flexión pura

Se considerará una viga curvada, tal como se muestra en la figura 6.21.

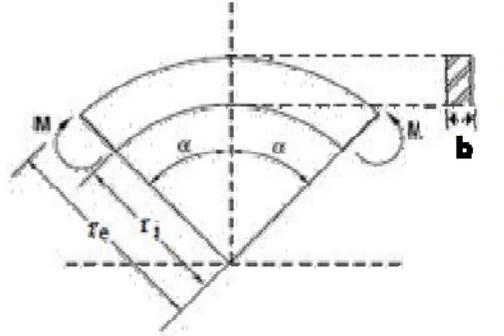


FIGURA 6.21 CONDICIONES QUE SE PRESENTAN POR FLEXIÓN PURA EN UNA VIGA CURVADA

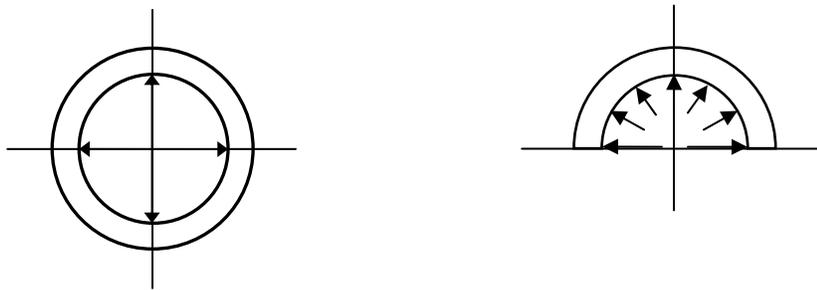


FIGURA 6.22 LA SECCIÓN DEL TUBO SE PUEDE VISUALIZAR COMO UNA VIGA CURVADA, LA SOLICITACIÓN QUE PROVOCA LOS ESFUERZOS ES LA PRESIÓN HIDROSTÁTICA (p_H)

Para la viga curvada en los extremos (superficies límite) $r = a$, $r = b$, $\theta = \pm\alpha$, $z = \pm \frac{h}{2}$ están libres de cargas de tracción. Suponiendo que h es muy pequeño comparado con las otras dimensiones, se pretende obtener una solución al problema considerando un estado de esfuerzos planos, para una viga curva sobre la que se aplican momentos M_f en los extremos $\theta = \pm\alpha$.

Para un problema de deformación plana en coordenadas polares, se tiene

$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta})$$

$$\varepsilon_{rr} = \frac{1}{E}((1-\nu^2)\sigma_{rr} - \nu(1+\nu)\sigma_{\theta\theta})$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{E}((1-\nu^2)\sigma_{\theta\theta} - \nu(1+\nu)\sigma_{rr})$$

$$\frac{\sigma_{r\theta}}{2\mu} = \frac{(1+\nu)}{E}\sigma_{r\theta}$$

$$\varepsilon_{rz} = \varepsilon_{\theta z} = \varepsilon_{zz} = 0$$

Para las condiciones establecidas, la solución está dada por:

$$\sigma_{rr} = \frac{A}{r^2} + B(1 + 2\ln r) + 2C$$

$$\sigma_{\theta\theta} = -\frac{A}{r^2} + B(3 + 2\ln r) + 2C$$

$$\sigma_{r\theta} = 0$$

Para la viga curva se pueden utilizar las soluciones para deformación plana en coordenadas polares, que están dadas por las ecuaciones antes indicadas.

Estas ecuaciones deben cumplirse en las superficies $r = a$, $r = b$, $\theta = \pm\alpha$ donde dichas superficies están libres de cargas

$$0 = \frac{A}{a^2} + B(1 + 2\ln a) + 2C$$

$$0 = \frac{A}{b^2} + B(1 + 2\ln b) + 2C$$

En la cara $\theta = \alpha$ se presenta un esfuerzo normal $\sigma_{\theta\theta}$, dada por las expresiones anteriormente enunciadas, calculando la resultante sobre dicha cara se tiene

$$f_{\theta} = 0 = \int_a^b \sigma_{\theta\theta} h dr = h \left[\frac{A}{r} + B(3r + 2r \ln r) + 2C r \right]_a^b$$

Estos esfuerzos normales requieren de un par equilibrio, situación que se expresa como

$$0 = \int_a^b \sigma_{\theta\theta} r l dr + M_f l$$

ecuación que por unidad de ancho queda

$$0 = \int_a^b \sigma_{\theta\theta} r dr + M_f$$

por lo que

$$-M_f = -A \operatorname{Ln} \frac{b}{a} + B(b^2 - a^2) + B(b^2 \operatorname{Ln} b - a^2 \operatorname{Ln} a) + C(b^2 - a^2)$$

Ecuación que, con base en lo expuesto, se puede simplificar como

$$-M_f = -A \operatorname{Ln} \frac{b}{a} - B(b^2 \operatorname{Ln} b - a^2 \operatorname{Ln} a) - C(b^2 - a^2)$$

De lo anterior se puede determinar el valor de las constantes A, B, C

$$A = -\frac{4M_f}{N} a^2 b^2 \operatorname{Ln} \frac{b}{a}$$

$$B = -\frac{2M_f}{N} (b^2 - a^2)$$

$$C = \frac{M_f}{N} [(b^2 - a^2) + 2(b^2 \operatorname{Ln} b - a^2 \operatorname{Ln} a)]$$

$$N = \left[(b^2 - a^2)^2 - 4a^2 b^2 \left(\operatorname{Ln} \frac{b}{a} \right)^2 \right]$$

Con lo que

$$\sigma_{rr} = -\frac{4M_f}{N} \left(\frac{a^2 b^2}{r^2} \operatorname{Ln} \frac{b}{a} + \left(b^2 \operatorname{Ln} \frac{r}{b} \right) + a^2 \operatorname{Ln} \frac{a}{r} \right)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = -\frac{4M_f}{N} \left(\frac{-a^2 b^2}{r^2} \text{Ln} \frac{b}{a} + \left(b^2 \text{Ln} \frac{r}{b} \right) + a^2 \text{Ln} \frac{a}{r} + (b^2 - a^2) \right)$$

$$\sigma_{r\theta} = 0$$

Para el caso de la determinación del estado de esfuerzos considerando una presión interna p_i y una presión externa p_e (tubo), se tiene que:

$$\sigma_{rr} = -p_i, \text{ para } r = a \quad \text{y} \quad \sigma_{rr} = -p_e, \text{ para } r = b$$

$$\sigma_{rr} = -p_i \left(\frac{\frac{b^2}{r^2} - 1}{\frac{b^2}{a^2} - 1} \right) - p_e \left(\frac{-\frac{a^2}{r^2} + 1}{-\frac{a^2}{b^2} + 1} \right)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = p_i \left(\frac{\frac{b^2}{r^2} + 1}{\frac{b^2}{a^2} - 1} \right) - p_e \left(\frac{\frac{a^2}{r^2} + 1}{-\frac{a^2}{b^2} + 1} \right)$$

$$\sigma_{r\theta} = 0$$

6.6 ECUACIONES DE LA TEORÍA INFINITESIMAL DE LA ELASTICIDAD

Para el desarrollo de esta teoría se consideran desplazamientos infinitesimales, para un sólido elástico lineal e isotrópico, en donde todos los términos en la ecuación son cantidades asociadas con una partícula, la cual está en la posición (X_1, X_2, X_3) .

Considerando el caso de pequeños movimientos (infinitesimales), como los que caracterizan la deformación elástica de los metales, de tal forma que cada partícula es vecina de su estado natural (sin esfuerzos), y que X_i define la posición del estado natural (descripción Lagrangiana) de la partícula típica, entonces

$$x_i \hat{=} X_i$$

Los desplazamientos u_i y las magnitudes ∇u también son pequeños. Por definición se tiene que

$$x_1 = X_1 + u_1; \quad x_2 = X_2 + u_2; \quad x_3 = X_3 + u_3$$

por lo tanto, las componentes de velocidad

$$v_i = \frac{Dx_i}{Dt} = \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)_{x_i \text{ fija}} + v_1 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) + v_2 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_2} \right) + v_3 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_3} \right)$$

donde v_i son las velocidades asociadas con los desplazamientos infinitesimales u_i , tomando en cuenta lo anterior, se concluye que el efecto de $(\nabla u) \cdot v$ es despreciable ya que $\nabla u \ll 1$, $v \ll 1$; es entonces que la velocidad y aceleración se pueden aproximar como:

$$v_i \hat{=} \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)_{x_i \text{ fija}}$$

$$a_i \hat{=} \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \right)_{x_i \text{ fija}}$$

Por otra parte, el volumen de la partícula dV está asociado con el volumen inicial como

$$dV = (1 + \varepsilon_{kk}) dV_0$$

Las densidades se relacionan de acuerdo con

$$\rho = (1 + \varepsilon_{kk})^{-1} \rho_0 \hat{=} (1 - \varepsilon_{kk}) \rho_0$$

Nuevamente, negando el efecto de cantidades de orden superior se tiene que

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} \cong \rho_0 \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \right)_{x_i \text{ fija}}$$

Reemplazando los términos antes desarrollados en la ecuación de movimiento de Cauchy, se tiene

$$\rho \left(\frac{D^2}{Dt^2} \right) u_i = \rho B_i + \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \right)$$

con

$$\rho_0 \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \right) = \rho_0 B_i + \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \right) \quad (6.25)$$

En la ecuación 6.25 todas las componentes están en función de coordenadas espaciales y, como las ecuaciones se establecen para movimientos infinitesimales, no hay necesidad de hacer distinción entre coordenadas espaciales y materiales.

Para un campo de desplazamientos u_i se dice que éste describe el movimiento en un medio elástico si satisface la ecuación 6.25. Cuando un campo de desplazamientos es dado $u_i = u_i(x_1, x_2, x_3, t)$, para estar seguros de que el movimiento es posible primero se deberá determinar el campo de deformaciones

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

y a partir de éste el campo de esfuerzos

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}$$

La sustitución de u_i y σ_{ij} en la ecuación 6.25 permitirá verificar si el movimiento es posible; donde las solicitaciones en la superficie o en las fronteras del campo necesarias para mantener el movimiento están dadas por

$$t_i = \sigma_{ij} n_j$$

Por otra parte, si las condiciones de frontera están prescritas (por ejemplo, determinadas fronteras del cuerpo deberán permanecer fijas y otras deberán permanecer libres de sollicitaciones, ambas a cualquier tiempo, etc.), entonces, considerando que u_i debe ser solución del problema, éste deberá cumplir las condiciones prescritas o de frontera.

Ecuaciones de Navier

Las ecuaciones de Navier describen el movimiento en términos de componentes de desplazamiento solamente. Para su desarrollo se consideran desplazamientos infinitesimales así como la teoría elástica.

De la ecuación característica para un sólido elástico isotrópico

$$\sigma_{ij} = \lambda e \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} = \lambda e \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \lambda \frac{\partial e}{\partial x_j} \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j \partial x_i} \right)$$

$$\frac{\partial (\varepsilon_{kk})}{\partial x_j} \delta_{ij} = \frac{\partial e}{\partial x_i}$$

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \varepsilon_{kk} = \frac{\partial e}{\partial x_i}$$

$$e = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$$

$$e = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \nabla \cdot \mathbf{v}$$

Sustituyendo en la ecuación de movimiento, se tiene que

$$\rho_0 \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \right) = \rho_0 B_i + (\lambda + \mu) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) \varepsilon_{kk} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \right)$$

En su forma general, la ecuación se expresa como

$$\rho_0 \left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \right) = \rho_0 \mathbf{B} + (\lambda + \mu) \nabla e + \mu \nabla \cdot (\nabla \mathbf{u})$$

$$\rho_0 \left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \right) = \rho_0 \mathbf{B} + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \nabla \cdot (\nabla \mathbf{u})$$

a la cual se le conoce como *ecuación de la teoría infinitesimal de la elasticidad o ecuación de Navier*.

Ecuación de Navier en coordenadas rectangulares

$$\rho_0 \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \right) = \rho_0 B_1 + (\lambda + \mu) \left(\frac{\partial e}{\partial x_1} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) u_1$$

$$\rho_0 \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \right) = \rho_0 B_2 + (\lambda + \mu) \left(\frac{\partial e}{\partial x_2} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) u_2$$

$$\rho_0 \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} \right) = \rho_0 B_3 + (\lambda + \mu) \left(\frac{\partial e}{\partial x_3} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) u_3$$

Ecuaciones de Navier en coordenadas cilíndricas

Por otra parte, las ecuaciones de Navier en coordenadas cilíndricas (r, θ, z) se expresan en función del campo de desplazamiento

$$\mathbf{u}(r, \theta, z; t) = u_r(r, \theta, z; t) \hat{e}_r + u_\theta(r, \theta, z; t) \hat{e}_\theta + u_z(r, \theta, z; t) \hat{e}_z$$

$$\nabla u_{(r,\theta,z)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta \right) & \frac{\partial u_r}{\partial z} \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right) & \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Si se considera que se trata de un sólido elástico e isotrópico, entonces

$$T = \lambda e I + 2\mu E$$

donde

$$e = \nabla \cdot u$$

$$E = \frac{1}{2} (\nabla u + (\nabla u)^T)$$

$$E_{r,\theta,\phi} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Por consiguiente, se tiene

$$\sigma_{rr} = \lambda e + 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \lambda e + 2\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right)$$

$$\sigma_{zz} = \lambda e + 2\mu \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} \right)$$

$$\sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta r} = \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right)$$

$$\sigma_{\theta z} = \sigma_{z\theta} = \mu \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} \right)$$

$$\sigma_{zr} = \sigma_{rz} = \mu \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right)$$

Por otra parte, la ecuación de Navier en forma general se expresa

$$\rho_0 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) = \rho_0 B + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot u) + \mu \nabla \cdot (\nabla u)$$

donde

$$\nabla u = U$$

representa un tensor de segundo rango, para el cual la divergencia está dada por

$$(\text{div}U)_r = \frac{\partial U_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial U_{r\theta}}{\partial \theta} \right) + \frac{U_{rr} - U_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial U_{rz}}{\partial z}$$

$$(\text{div}U)_\theta = \frac{\partial U_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial U_{\theta\theta}}{\partial \theta} \right) + \frac{U_{r\theta} + U_{\theta r}}{r} + \frac{\partial U_{\theta z}}{\partial z}$$

$$(\text{div}U)_z = \frac{\partial U_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial U_{z\theta}}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial U_{zz}}{\partial z} + \frac{U_{zr}}{r}$$

Desarrollando lo antes expuesto, se tiene que

$$\varepsilon_{kk} = e = \nabla \cdot u = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} = \rho_0 B_r + (\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial r} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{u_r}{r^2} \right)$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} = \rho_0 B_\theta + \left(\frac{\lambda + \mu}{r} \right) \frac{\partial e}{\partial \theta} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r^2} \right)$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = \rho_0 B_z + (\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} \right)$$

Ecuaciones de Navier en coordenadas esféricas (r, θ, ϕ)

$$\sigma_{rr} = \lambda e + 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \lambda e + 2\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right)$$

$$\sigma_{\phi\phi} = \lambda e + 2\mu \left(\frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_\theta \cot \theta}{r} \right)$$

$$\sigma_{r\theta} = \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right)$$

$$\sigma_{\theta\phi} = \mu \left(\frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} - \frac{u_\phi \cot \theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\phi}{\partial \theta} \right)$$

$$\sigma_{\phi r} = \mu \left(\frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} + \frac{\partial u_\phi}{\partial r} - \frac{u_\phi}{r} \right)$$

$$e = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{2u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{u_\theta \cot \theta}{r}$$

Partiendo de que

$$u_{(r,\theta,\phi)} = u_r(r, \theta, \phi; t)\hat{e}_r + u_\theta(r, \theta, \phi; t)\hat{e}_\theta + u_\phi(r, \theta, \phi; t)\hat{e}_\phi$$

Las ecuaciones de Navier para coordenadas esféricas quedan

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} = \rho_0 B_r + (\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial r} + \mu \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_r) \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \phi^2} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (u_\theta \sin \theta) - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \right)$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} = \rho_0 B_\theta + \left(\frac{\lambda + \mu}{r} \right) \frac{\partial e}{\partial \theta} + \mu \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (u_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \phi^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \right) \right)$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_\phi}{\partial t^2} = \rho_0 B_\phi + \left(\frac{\lambda + \mu}{r \sin \theta} \right) \frac{\partial e}{\partial \phi} + \mu \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u_\phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} u_\phi \sin \theta \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u_\phi}{\partial \phi^2} + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} \right)$$

6.7 ANÁLISIS DEL DESPLAZAMIENTO DE ONDAS ELÁSTICAS A TRAVÉS DE UN SÓLIDO

Análisis de una onda plana irrotacional

En esta etapa se utilizarán las ecuaciones de Navier para el análisis del movimiento de ondas elásticas a través de un *material elástico, lineal e isotrópico*. Se trata de un problema elastodinámico en el que se considera el desplazamiento de un tren de ondas infinito y sin

amortiguamiento, el cual describe un desplazamiento de tipo senoidal. El movimiento de estas ondas se va a describir como longitudinal y transversal, y dado que se trata de un problema elástico lineal se podrá analizar su efecto considerando superposición de éstas. En primera instancia se considerará una onda longitudinal, tal que

$$u_1 = a \operatorname{sen} \frac{2\pi}{l} (x_1 - v_l t)$$

$$u_2 = 0 ; u_3 = 0$$

En este movimiento cada partícula ejecuta una oscilación armónica simple de amplitud a alrededor de su estado natural, con una longitud de onda l y velocidad de fase v_l .

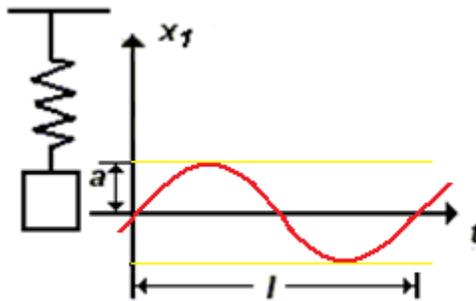


FIGURA 6.22 ONDA LONGITUDINAL. LA SEÑAL SE DESPLAZA EN LA MISMA DIRECCIÓN EN QUE OSCILAN LAS PARTÍCULAS

Al tratarse de una onda longitudinal en la cual la señal se desplaza en la misma dirección en que oscilan las partículas, y de acuerdo a como se han definido los ejes, el movimiento siempre será en dirección del vector \hat{e}_1 .

La velocidad de fase v_l representa la velocidad a la cual la alteración senoidal de longitud de onda l se desplaza en dirección \hat{e}_1 , de tal forma que todas las partículas se mueven en fase.

$$\frac{dx_1}{dt} = v_l$$

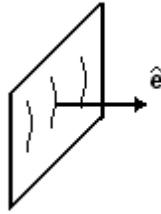


FIGURA 6.23 COMO EL MOVIMIENTO DE LAS PARTÍCULAS ES PARALELO A LA DIRECCIÓN DE PROPAGACIÓN DE LA ONDA, ENTONCES, SE TRATA DE UNA ONDA LONGITUDINAL

Los componentes de la deformación son

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{2\pi a}{l} \cos \frac{2\pi}{l}(x_1 - v_l t)$$

$$\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \varepsilon_{12} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{31} = 0$$

$$\varepsilon_{ii} = \varepsilon_{11} = \hat{e}$$

$$\sigma_{11} = \lambda \varepsilon_{11} + 2\mu \varepsilon_{11} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_1}{\partial x_1}$$

$$\sigma_{22} = \sigma_{33} = \lambda \varepsilon_{11} = \lambda \frac{\partial u_1}{\partial x_1}$$

$$\sigma_{12} = \sigma_{23} = \sigma_{31} = 0$$

Sustituyendo en la ecuación de Navier

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \rho B_i + (\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}$$

y despreciando las fuerzas de cuerpo

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial x_1} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} \right)$$

$$\Rightarrow \rho_0 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_1}{\partial x_1^2}$$

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(a \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi}{l} \right) (x_1 - v_l t) \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(-a v_l \frac{2\pi}{l} \right) \cos \left(\frac{2\pi}{l} \right) (x_1 - v_l t)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = -a \left(v_l \frac{2\pi}{l} \right)^2 \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi}{l} \right) (x_1 - v_l t)$$

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(a \left(\frac{2\pi}{l} \right) \cos \frac{2\pi}{l} (x_1 - v_l t) \right)$$

$$\therefore \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} = -a \left(\frac{2\pi}{l} \right)^2 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{l} (x_1 - v_l t)$$

Sustituyendo de nuevo en la ecuación de Navier

$$\rho_0 a \left(\frac{v_l 2\pi}{l} \right)^2 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{l} (x_1 - v_l t) = (\lambda + 2\mu) a \left(\frac{2\pi}{l} \right)^2 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{l} (x_1 - v_l t)$$

$$\therefore \rho_0 v_l^2 = \lambda + 2\mu$$

Por consecuencia, la velocidad de movimiento de una onda elástica a través de un sólido se puede considerar también como una constante elástica y está dada por

$$\Rightarrow v_l = \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\rho_0} \right)^{1/2}$$

Presentando la ecuación anterior en la forma $v_l = v_l(E, \nu, \rho_0)$, para lo que se sustituye

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)}; \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

se tiene entonces que

$$v_l = \left(\frac{\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} + 2\frac{E}{2(1+\nu)}}{\rho_0} \right)^{1/2}$$

Si se considera que el coeficiente de Poisson para sólido elástico, isotrópico es del orden de $\frac{1}{3}$, entonces

$$v_l \approx \left(\frac{3E}{2\rho_0} \right)^{1/2}$$

Por lo que será posible determinar en forma aproximada el módulo de elasticidad a partir de conocer la velocidad de desplazamiento de una señal acústica a través de material

$E = \frac{2\rho_0 v_l^2}{3}$. Para esta onda los componentes del tensor de rotación

$$w_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

quedan

$$w_{ij} = [0]$$

Por lo tanto, la onda se define como irrotacional.

Por otra parte, $\nabla \cdot \mathbf{u} = \varepsilon_{11} \neq 0$ por lo que el volumen cambia armónicamente con

$$e = \nabla \cdot \mathbf{u} = \varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{2\pi a}{l} \cos \frac{2\pi}{l} (x_1 - v_l t)$$

Es por consecuencia que la onda se denomina como dilatacional.

De todo lo expuesto resulta evidente que la velocidad de propagación de ondas en el sólido elástico depende de las propiedades de éste, y no de las características de la señal (longitud de onda).

Onda plana de equivolumen

En virtud de que para el análisis se partió de la consideración de superposición de efectos, se procederá ahora al análisis de una señal transversal, por lo que

$$u_1 = 0$$

$$u_2 = a \operatorname{sen} \frac{2\pi}{l} (x_1 - v_T t)$$

$$u_3 = 0$$

Resulta evidente que la señal tendrá la misma amplitud y longitud de onda que la señal longitudinal, definiendo su velocidad de propagación como v_t , tanto en dirección de \hat{e}_2 como de \hat{e}_3 , sin embargo, considerando de nuevo el principio de superposición, se tratará como una onda transversal cuyo movimiento es paralelo a \hat{e}_2 , por lo que

$$\varepsilon_{13} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) = 0$$

$$\varepsilon_{23} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) = 0$$

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \neq 0$$

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_2}{\partial x_1}$$

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \varepsilon_{ii} = e = 0$$

$$\varepsilon_{13} = \varepsilon_{31} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} = 0$$

Como consecuencia de lo expuesto se tiene que la onda transversal es una señal que sólo genera esfuerzos de corte y se caracteriza por su invariabilidad del volumen.

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi}{l} \right) a \cos \left(\frac{2\pi}{l} \right) (x_1 - v_t t)$$

$$\sigma_{12} = \mu a \left(\frac{2\pi}{l} \right) \cos \left(\frac{2\pi}{l} \right) (x_1 - v_t t)$$

Sustituyendo en la ecuación de Navier

$$\rho_0 \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \right) = \mu \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) u_2$$

$$\therefore \rho_0 \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \right)^2 = \mu \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} \right)$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left(-a \left(\frac{2\pi}{l} \right) v_t \cos \left(\frac{2\pi}{l} \right) (x_1 - v_t t) \right)$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = \left(-a \left(\frac{2\pi v_t}{l} \right)^2 \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi}{l} \right) (x_1 - v_t t) \right)$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(a \left(\frac{2\pi}{l} \right) \cos \left(\frac{2\pi}{l} \right) (x_1 - v_t t) \right)$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} = \left(-a \left(\frac{2\pi}{l} \right)^2 \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi}{l} \right) (x_1 - v_t t) \right)$$

$$\rho_0 a \left(\frac{2\pi v_t}{L} \right)^2 \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi}{l} \right) (x_1 - v_t t) = \left(\mu a \left(\frac{2\pi}{l} \right)^2 \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi}{l} \right) (x_1 - v_t t) \right)$$

$$\therefore \rho_0 v_t^2 = \mu$$

$$\Rightarrow v_t = \left(\frac{\mu}{\rho_0} \right)^{1/2}$$

Por consecuencia, se tiene que la onda transversal o de corte representa también una constante elástica. Por último, es conveniente analizar la relación existente entre la velocidad de la onda longitudinal con la de la onda transversal

$$\frac{v_l}{v_t} = \frac{\left(\frac{\lambda + 2\mu}{\rho_0}\right)^{1/2}}{\left(\frac{\mu}{\rho_0}\right)^{1/2}}$$

$$\left(\frac{v_l}{v_t}\right)^2 = \frac{(\lambda + 2\mu)}{\mu}$$

Dado que la primera constante de Lamé (λ) se puede relacionar con ν y μ en la forma

$$\lambda = \frac{2\mu\nu}{1 - 2\nu}$$

por tanto,

$$\frac{\frac{2\mu\nu}{(1 - 2\nu)} + 2\mu}{\mu} = \left[\frac{v_l}{v_t}\right]^2$$

$$\frac{2\mu\nu + 2\mu(1 - 2\nu)}{\mu(1 - 2\nu)} = \frac{2\mu\nu + 2\mu - 4\mu\nu}{\mu(1 - 2\nu)} = \left[\frac{v_l}{v_t}\right]^2$$

$$\frac{2 - 2\nu}{(1 - 2\nu)} = \frac{1 + (1 - 2\nu)}{(1 - 2\nu)} = 1 + \frac{1}{(1 - 2\nu)} = \left[\frac{v_l}{v_t}\right]^2$$

En consecuencia,

$$\frac{v_l}{v_t} = \left[1 + \frac{1}{(1 - 2\nu)}\right]^{1/2}$$

Se concluye entonces que la relación entre la velocidad longitudinal y transversal de la onda elástica depende exclusivamente del coeficiente de Poisson. Sólo para una deformación plástica, el coeficiente de Poisson alcanza el valor de un medio, mientras que para cualquier deformación elástica este cociente será del orden de $\frac{1}{3}$, por lo que en cualquier deformación

$$\text{elástica } v_l > v_t \text{ ya que } \left(\frac{v_l}{v_t} \right)^2 \approx 4 \quad \therefore \quad \frac{v_l}{v_t} \approx 2 .$$

6.8 ELASTICIDAD NO LINEAL

En materiales como hules y algunos termoplásticos se presentan comportamientos muy diferentes que en los metales (figura 6.24), ya que su comportamiento en el rango elástico es no lineal, además de caracterizarse por presentar grandes deformaciones (deformaciones finitas). Mientras que en los metales el rango elástico es inferior, en general, al 0.1%, los elastómeros alcanzan en ocasiones rangos elásticos hasta del 100%.

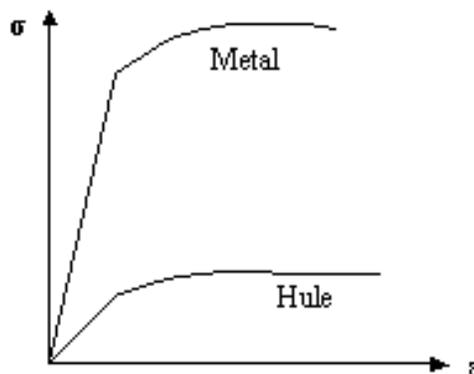


FIGURA 6.24 DIFERENCIA EN EL COMPORTAMIENTO ENTRE UN METAL Y UN HULE EN UN ENSAYO DE TRACCIÓN

La razón del comportamiento no lineal del hule se debe a su estructura molecular, en la cual pueden presentarse rotaciones o reordenamientos que modifiquen el comportamiento del material. Dado el número de posibles acomodos (orientaciones) relativos a los ángulos del

enlace con respecto a la cadena, las ecuaciones de elasticidad para estos materiales se derivan a partir de conceptos de termodinámica estadística.

En los metales la estructura cristalina permanece inalterada cuando el material es deformado elásticamente (deformaciones finitas), los átomos se mueven a posiciones cercanas o adyacentes a las de equilibrio, dando lugar a una fuerza restauradora, y a partir de la ecuación de Helmholtz se determina la fuerza generada al estirar el material en forma uniaxial.

$$f = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial \ell} \right|_{\theta, V} \quad (6.26)$$

donde f es la fuerza, ℓ la longitud, θ y V representan un proceso que se efectúa a temperatura y volumen constante.

Como la energía libre (φ) es

$$\varphi = u - \theta \eta \quad (6.27)$$

donde η representa la entropía, entonces

$$f = \frac{\partial u}{\partial \ell} - \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \ell} \quad (6.28)$$

El segundo término de la ecuación 6.27 no contribuye a la carga si el ordenamiento atómico permanece inalterado. Para un hule ideal, la energía interna no cambia con un incremento de longitud, razón por la que la primera parte de la ecuación 6.27 será igual a cero, entonces como resultado, la variación de la entropía será negativa cuando la longitud se incrementa, lo que se traduce en un reordenamiento de la estructura.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. En la figura 6.25 se presenta la distorsión generada por una dislocación de tornillo (hélice) en un cristal.

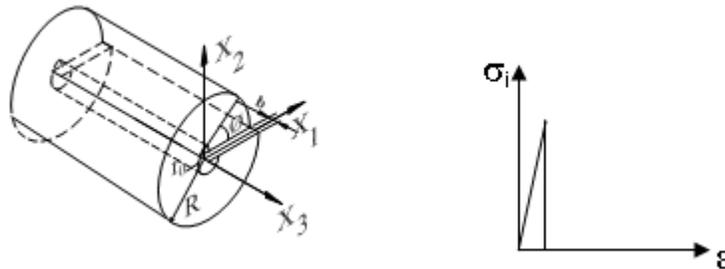


FIGURA 6.25 DESCRIPCIÓN ESQUEMÁTICA DE UNA DISLOCACIÓN HELICOIDAL

Dado que se trata de un sólido elástico lineal, entonces el trabajo de deformación es

$$W = \int \sigma d\varepsilon = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon, \text{ donde el vector de Burgers de la dislocación } \bar{b} \text{ tiene una magnitud}$$

b y es paralelo al eje x_3 . Con base en lo antes expuesto y considerando que se trata de un sólido elástico homogéneo lineal e isotrópico, determine:

- Tensor de deformaciones asociado
- Tensor de esfuerzos asociado
- ¿Cuál es el cambio del volumen asociado a la presencia de la dislocación de tornillo?
- ¿Cuál será la rapidez de variación de volumen asociado a la condición antes expuesta?
- Considerando que la teoría de medios continuos se puede aplicar a partir de un radio r_0 y hasta el radio del cristal R , determine la energía de deformación elástica asociada a la dislocación.
- Explique usted que sucederá con respecto al estado de esfuerzos y a la energía involucrada, si el material no es isotrópico.
- Despreciando el efecto de las fuerzas de cuerpo ¿existirá equilibrio?

- h) Considerando que los esfuerzos normales sobre las paredes laterales del elemento deben ser igual a cero y que el esfuerzo axial debe ser diferente de cero, ¿el modelo propuesto cumple con estas condiciones?

SOLUCIÓN

Considerando que los desplazamientos producidos por la dislocación son (figura 6.25)

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad u_3 = f(\theta) = \frac{b}{2\pi} \theta$$

$$u_3 = \frac{b}{2\pi} \arctan \frac{x_2}{x_1}$$

a)
$$\frac{d \tan^{-1} u}{dx} = \frac{du}{1+u^2}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 0 \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = 0 \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_3} = 0$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_1} = 0 \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0 \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_3} = 0$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial x_1} = -\frac{\frac{x_2}{x_1^2}}{1 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2} = -\frac{\frac{x_2}{x_1^2}}{\frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2}} = -\frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2}$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial x_2} = \frac{\frac{1}{x_1}}{1 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2} = \frac{\frac{1}{x_1}}{\frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2}} = \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0$$

Por consecuencia el tensor de deformaciones asociado se expresa:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -x_2 \\ 0 & 0 & x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{bmatrix} \frac{b}{4\pi(x_1^2 + x_2^2)}$$

Considerando que se trata de un SEHLI, cuya ecuación constitutiva es

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}$$

b)
$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -x_2 \\ 0 & 0 & x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{bmatrix} \frac{\mu b}{2\pi(x_1^2 + x_2^2)}$$

c) $\varepsilon_{kk} = 0 \Rightarrow$ El cambio de volumen es igual a cero

d) $\dot{\varepsilon}_{kk} = 0 \Rightarrow$ La rapidez de variación de volumen es igual a cero

e)

$$W_V = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\sigma_{13} \varepsilon_{13} + \sigma_{23} \varepsilon_{23} + \sigma_{31} \varepsilon_{31} + \sigma_{32} \varepsilon_{32})$$

$$W_V = \frac{\mu x_2^2 b^2}{8\pi^2 (x_1^2 + x_2^2)^2} + \frac{\mu x_1^2 b^2}{8\pi^2 (x_1^2 + x_2^2)^2}$$

$$\dot{W}_T = \int_0^l \int_0^{2\pi} \int_{r_0}^R \frac{\mu (x_1^2 + x_2^2) b^2}{8\pi^2 (x_1^2 + x_2^2)^2} dz r d\theta dr$$

$$W_T = \int_V \frac{b^2 \mu r^2}{8\pi^2 r^4} dz r d\theta dr = \frac{2\pi l \mu b^2}{8\pi^2} \int_{r_0}^R \frac{dr}{r}$$

$$W_T = \frac{\mu b^2 l}{4\pi} \ln \frac{R}{r_0}$$

f) Se modifica el estado de esfuerzos y deformaciones, así como la energía involucrada.

g)

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} = 0 \quad \text{Se cumple eje } x_1$$

$$\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} = 0 \quad \text{Se cumple eje } x_2$$

$$\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} = 0 \quad \text{Se cumple eje } x_3$$

$$\therefore \frac{\mu b}{2\pi} \left[\frac{2x_1x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} - \frac{2x_1x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} + 0 \right] = 0 \quad \therefore \quad \text{Existe equilibrio}$$

h) Los esfuerzos normales en las paredes laterales son igual a cero

Superficie lateral

$$\text{Vector unitario } n = \frac{1}{a}(x_1\hat{e}_1 + x_2\hat{e}_2 + 0\hat{e}_3)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \sigma_{13} \\ 0 & 0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{1}{a} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sigma_{31}x_1 + \sigma_{32}x_2 \end{bmatrix} \frac{1}{a} = -\frac{\mu b x_2 x_1}{2\pi a(x_1^2 + x_2^2)} + \frac{\mu b x_1 x_2}{2\pi a(x_1^2 + x_2^2)} = 0$$

Cargas en el plano $(0\hat{e}_1 + 0\hat{e}_2 + \hat{e}_3)$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \sigma_{13} \\ 0 & 0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \sigma_{13}\hat{e}_1 + \sigma_{23}\hat{e}_2 + 0\hat{e}_3$$

2. El estado de esfuerzos en un cuerpo está dado por σ_{ij}

$$\sigma_{ij} = \alpha \begin{pmatrix} x_2^2 x_1 & 2x_1^3 - x_2 x_1^2 & 0 \\ 2x_1^3 - x_2 x_1^2 & 3x_2^2 x_1 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

Si dicho estado de esfuerzos provoca una deformación biaxial, determine:

- El valor de σ_{33} ,
- Considerando que las fuerzas de cuerpo se expresan como

$$B_i = B_1 \hat{e}_1 + B_2 \hat{e}_2 + B_3 \hat{e}_3$$

¿Existirá equilibrio cuando $B_i = 0 \hat{e}_i$?

- En caso de no existir equilibrio ¿cuál es la aceleración en función de la posición y de las propiedades del material? Considere que la densidad está dada por ρ .
- Para $X_i(1,1,1)$ determine las deformaciones y esfuerzos principales. Considere que el material presenta un coeficiente de Poisson ν y módulo de rigidez al corte μ . El material es sólido, elástico, homogéneo, lineal e isotrópico con $\nu = \frac{1}{3}$.

SOLUCIÓN

- Para un SEHLI con una condición de deformación biaxial, de la ecuación constitutiva se tiene

$$\Rightarrow \sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = 4\nu x_2^2 x_1$$

- $\nabla \sigma + \rho B = 0$ Condición de equilibrio

Para el eje x_1

$$\alpha(x_2^2 - x_1^2) + \rho B_1 = 0 \quad \therefore \text{no existe equilibrio en dirección } \hat{e}_1$$

$$\Rightarrow \exists \text{ para } B_1 = \frac{\alpha}{\rho}(x_1^2 - x_2^2)$$

Para el eje x_2

$$\alpha(6x_1^2 - 2x_2x_1 + 6x_2x_1) + \rho B_2 = 0 \quad \therefore \text{no existe equilibrio en dirección } \hat{e}_2$$

$$\Rightarrow \exists \quad \text{para } B_2 = -\frac{\alpha}{\rho} [6x_1^2 + 4x_1x_2]$$

Para el eje x_3

$$\frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + \rho B_3 = 0; \quad \sigma_{33} = f(x_1, x_2) \therefore \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} = 0 \Rightarrow B_3 = 0$$

\therefore existe equilibrio en dirección \hat{e}_3

De todo lo anterior para que exista equilibrio la aceleración de cuerpo está dada por

$$B_i = \frac{\alpha}{\rho} (x_1^2 - x_2^2) \hat{e}_1 - \frac{\alpha}{\rho} [6x_1^2 + 4x_1x_2] \hat{e}_2 + 0 \hat{e}_3$$

c)

$$\sigma_{(1,1,1)} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4\nu \end{pmatrix}$$

Sustituyendo el coeficiente de Poisson, se tiene que los esfuerzos principales son

$$\sigma_{(1,1,1)p} = \alpha \begin{pmatrix} 3.41 & 0 & 0 \\ 0 & 1.33 & 0 \\ 0 & 0 & 0.58 \end{pmatrix}$$

3. Considere un medio elástico, homogéneo, lineal e isotrópico en el cual se presenta el siguiente campo de desplazamientos:

$$u_3 = \text{sen } \beta(x_3 - ct) + a \text{sen } \beta(x_3 + ct)$$

$$u_1 = u_2 = 0$$

- a) ¿Cuál es la naturaleza de la onda elástica que describe el campo de desplazamientos? Longitudinal o transversal, irrotacional o isovolumen.

- b) ¿Cuál es la dirección de propagación?
- c) Determine el campo de deformaciones asociado.
- d) Determine el campo de esfuerzos asociado.
- e) ¿En qué condiciones la ecuación de movimiento (Navier) es satisfecha cuando se desprecian las fuerzas de cuerpo?
- f) Si para la frontera $x_3 = 0$, ésta se encuentra libre de solicitaciones, entonces, en qué condiciones la ecuación de movimiento satisface las condiciones de frontera para cualquier tiempo.

SOLUCIÓN

- a) $u_3 = f(x_3) \therefore$ se trata de una onda longitudinal, asimismo

$$\nabla u = (\nabla u)^T \therefore \text{Irrotacional, longitudinal; dirección de propagación } \hat{e}_3$$

- b) Se propaga en dirección de x_3
- c) El estado de deformaciones asociado está dado por

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}$$

- d) Recordando que

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}$$

$$\therefore \sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda + 2\mu) \end{pmatrix} \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$$

La ecuación de Navier, para el caso analizado, permite concluir que

$$\frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} = \rho_0 \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}$$

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} = \rho_0 \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}$$

Como $u_3 = \text{sen } \beta(x_3 - ct) + a \text{sen } \beta(x_3 + ct) \Rightarrow$

$$(\lambda + 2\mu)(\beta^2 (\text{sen } \beta(x_3 - ct) + a \text{sen } \beta(x_3 + ct))) = ((c\beta)^2 (\text{sen } \beta(x_3 - ct) + a \text{sen } \beta(x_3 + ct)))\rho_0$$

$$(\lambda + 2\mu) = \rho_0 c^2 \quad \therefore \quad c = \left(\frac{(\lambda + 2\mu)}{\rho_0} \right)^{1/2}$$

c - velocidad longitudinal de de la onda elástica

$$\frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \beta(\cos \beta(x_3 - ct) + a \cos \beta(x_3 + ct))$$

e) En $x_3 = 0 \forall x_1, x_2$ no deben existir sollicitaciones $\therefore \sigma_{33} = 0$, pero $\sigma_{33} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$

$$\text{y } \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \beta(\cos \beta(x_3 - ct) + a \cos \beta(x_3 + ct))$$

como

$$x_3 = 0 \Rightarrow \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \beta(\cos(-\beta ct) + a \cos \beta ct)$$

$$\sigma_{33} = 0 = (\lambda + 2\mu) \beta(\cos(-\beta ct) + a \cos \beta ct)$$

$$\therefore a = -1$$

4. Las funciones de Airy de esfuerzos (φ) se emplean para describir el estado de esfuerzos para condiciones de deformación plana. Si la función de esfuerzos de Airy para un cierto estado de sollicitaciones se describe como

$$\varphi = \alpha x_1 x_2^3 + \beta x_1 x_2$$

- ¿Será factible dicha descripción?
- Determine el estado de esfuerzos asociado a una deformación plana.
- Determine los valores de α y β , dado que la función de Airy (φ) describe la deformación de una viga en cantiliver de acuerdo con la siguiente figura:

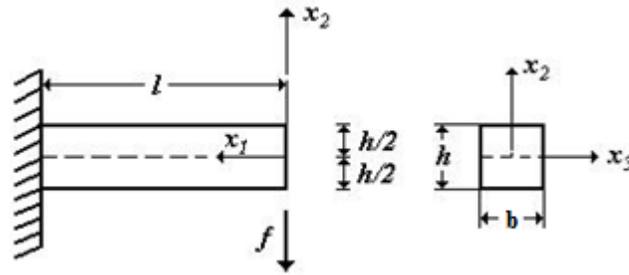


FIGURA 6.26 VIGA EN VOLADIZO CON UNA CARGA f_2 QUE PROVOCA UN MOMENTO FLECTOR Y UN ESFUERZO DE CORTE. EL MOMENTO FLECTOR A SU VEZ GENERA ESFUERZOS NORMALES σ_{11}

SOLUCIÓN

a) Para un estado de deformación plana

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

Ecuación constitutiva (SEHLI)

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu(1+\nu)} (\sigma_{ij}(1+\nu) - \nu \sigma_{kk} \delta_{ij})$$

$$\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})$$

Como la deformación es plana, entonces

$$u_i = u_1(x_1, x_2) \hat{e}_1 + u_2(x_1, x_2) \hat{e}_2 + 0 \hat{e}_3$$

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon(x_1, x_2) \Rightarrow \sigma_{ij} = \sigma(x_1, x_2)$$

Recordando que dado que existe equilibrio y se desprecian las fuerzas de cuerpo, la ecuación de Cauchy se expresa

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} = 0$$

Donde la tercera ecuación diferencial se genera a partir de una de las condiciones de integrabilidad y se expresa

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) (\sigma_{11} + \sigma_{22}) = 0$$

La solución del sistema se expresa a través de una función escalar de la forma

$\varphi = \varphi(x_1, x_2)$, denominada función de Airy, de tal forma que:

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2}; \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2}; \quad \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2}$$

De lo antes expuesto dado que $\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) (\sigma_{11} + \sigma_{22}) = 0; \Rightarrow \nabla^2 (\sigma_{11} + \sigma_{22}) = 0 \therefore$

se debe cumplir que $\nabla^4 \varphi = 0$

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x_1^4} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x_2^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} = 0$$

Ya que

$$\varphi = \alpha x_1 x_2^3 + \beta x_1 x_2$$

\Rightarrow se observa que se cumple con lo antes expuesto.

Por tanto, φ sí reúne las características para ser una función de Airy:

b) Conocida la función de Airy solución del problema, los esfuerzos asociados se determinan como

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2}, \quad \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2}$$

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} = 6\alpha x_1 x_2; \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} = 0; \quad \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} = -(3\alpha x_2^2 + \beta)$$

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 6\alpha x_1 x_2 & -(3\alpha x_2^2 + \beta) & 0 \\ -(3\alpha x_2^2 + \beta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6\alpha \nu x_1 x_2 \end{pmatrix}$$

c) Diagrama de momentos

Viga sometida a un momento de flexión $M_f = fx_1$. Ésta es de sección rectangular con un peralte (altura) h , ancho b y longitud l . Los ejes se definen en el extremo opuesto al empotramiento, considerando lo anterior $I_{33} = \frac{1}{12}bh^3$

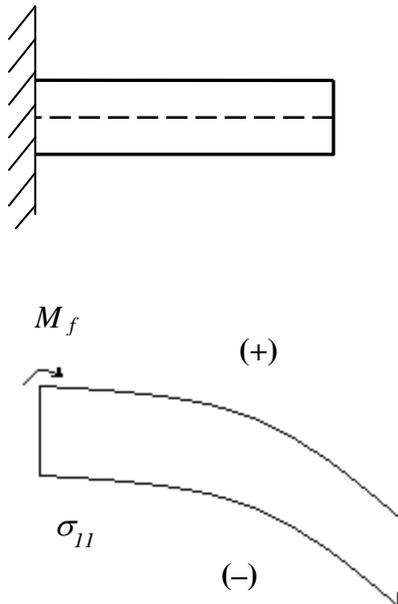
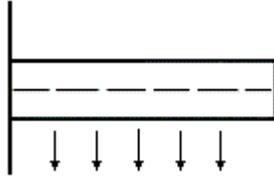


FIGURA 6.27 GEOMETRÍA DE LA VIGA ANTES DE SER CARGADA (FIGURA SUPERIOR) Y DISTORSIÓN SUFRIDA COMO CONSECUENCIA DE LA CARGA f

Por efecto de la carga, la viga se deforma de acuerdo con la figura 6.27

$$\sigma_{11} = \frac{M_f x_2}{I_{33}} = \frac{fx_1 x_2}{\left(\frac{bh^3}{12}\right)} = 12f \frac{x_1 x_2}{h^3 b}$$

$$\sigma_{11} = 6\alpha x_1 x_2 = 12f \frac{x_1 x_2}{h^3 b} \quad \Rightarrow \quad 6\alpha = \frac{12f}{bh^3} \quad \text{o} \quad 3\alpha = \frac{6f}{bh^3}$$



$$\bar{\tau} = \frac{f}{A} \quad \bar{\sigma}_{12} = \frac{f}{bh}$$

Sin embargo, se observa que en la cara superior e inferior de la viga no existen cargas verticales, por lo que $\sigma_{12} = 0$ para $x_2 = \pm \frac{h}{2}$, entonces

$$\sigma_{12} = 0 = -\left(3\alpha \frac{h_2^2}{4} + \beta\right) = -\left(\frac{6f}{bh^3} \frac{h_2^2}{4} + \beta\right) \Rightarrow \beta = -\frac{3f}{2bh}$$

$$\sigma_{12}(x_2) = -\left(\frac{6f}{bh^3} x_2^2 - \frac{3f}{2bh}\right)$$

Por consecuencia, la función de Airy solución para una viga en cantiliver con una carga f es

$$\varphi = \alpha x_1 x_2^3 + \beta x_1 x_2 \Rightarrow \varphi = \frac{2f}{bh^3} x_1 x_2^3 - \left(\frac{6f x_2^2}{bh^3} + \frac{f}{bh}\right) x_1 x_2,$$

De esta forma, el estado de esfuerzos se expresa

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} = 6\alpha x_1 x_2; \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} = 0; \quad \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} = 3\alpha x_2^2 + \beta$$

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{12f}{bh^3} x_1 x_2 & -\left(\frac{6f}{bh^3} x_2^2 - \frac{3f}{2bh}\right) & 0 \\ -\left(\frac{6f}{bh^3} x_2^2 - \frac{3f}{2bh}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{12f}{bh^3} \nu x_1 x_2 \end{pmatrix}$$

5. La ecuación constitutiva para un sólido, elástico, homogéneo, lineal e isotrópico, es de la forma:

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}$$

A partir de lo anterior demuestre que una forma equivalente de la misma es

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu(1+\nu)} (\sigma_{ij}(1+\nu) - \nu \sigma_{kk} \delta_{ij})$$

SOLUCIÓN

De la ecuación constitutiva

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} (\sigma_{ij} - \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij}) \quad (6.19)$$

Recordando que

$$\varepsilon_{kk} = \frac{\sigma_{ii}}{3\lambda + 2\mu}$$

Sustituyendo ε_{kk} en la ecuación 6.19

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \left(\sigma_{ij} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right) \quad (6.20)$$

Como $\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$, entonces $\lambda = \frac{2\mu\nu}{(1-2\nu)}$

Sustituyendo en la ecuación 6.20

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \left(\sigma_{ij} - \left(\frac{\frac{2\mu\nu}{(1-2\nu)}}{\frac{6\mu\nu}{(1-2\nu)} + \frac{2\mu - 4\mu\nu}{(1-2\nu)}} \right) \sigma_{kk} \delta_{ij} \right)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \left[\sigma_{ij} - \left(\frac{\nu}{\nu+1} \right) \sigma_{kk} \delta_{ij} \right]$$

$$\therefore \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu(1+\nu)} \left[\sigma_{ij}(1+\nu) - \nu \sigma_{kk} \delta_{ij} \right]$$

6. Un sólido elástico, homogéneo, lineal e isotrópico, presenta un módulo de elasticidad de 72 GPa y un coeficiente de Poisson de 0.33. Una pieza del material anterior es sometida a una serie de sollicitaciones que provocan en un punto del cuerpo una distorsión, la cual se puede representar mediante el tensor e_{ij} .

$$e_{ij} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & -4 & -3 \\ 2 & -3 & -9 \end{pmatrix} \times 10^{-3} \text{ m/m}$$

Con base en lo anterior y considerando que la deformación está dentro del rango elástico, determine:

- Tensor de deformación y rotación asociado
- Vector de rotación. ¿Cómo se puede definir el flujo con base a este dato?
- Deformaciones principales
- Tensor de esfuerzos asociado
- Esfuerzos principales
- Desviador de esfuerzos
- Esfuerzos principales asociados al desviador
- Energía por unidad de volumen asociada a la deformación elástica

SOLUCIÓN

- a) $\nabla u = (\nabla u)^T \therefore$ el tensor es simétrico, razón por la que el desplazamiento es irrotacional

$$\Rightarrow \varepsilon_{ij} = e_{ij} \quad \therefore \quad w_{ij} = [0] \quad \Rightarrow \quad \varphi_i = 0\hat{e}_i$$

Por consecuencia, se pueden calcular las deformaciones principales, las cuales quedan

$$\varepsilon_{ijp} = \begin{pmatrix} 4.5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -10.5 \end{pmatrix} \times 10^{-3}$$

b) Considerando las propiedades elásticas del MC y la deformación volumétrica unitaria

ε_{ii}

$$E = 72 \text{ GPa} \quad \nu = \frac{1}{3} \quad \varepsilon_{ii} = -9 \times 10^{-3}$$

Se tiene que

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} = \frac{\frac{E}{3}}{\left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)} = \frac{3E}{4} = 54 \text{ GPa}$$

$$E = 2\mu(1+\nu)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{E}{2\left(\frac{4}{3}\right)} = \frac{3E}{8} = 27 \text{ GPa}$$

Le ecuación constitutiva del SEHLI se expresa

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}$$

$$\Rightarrow \sigma_{ij} = \begin{pmatrix} -270 & -54 & 108 \\ -54 & -702 & -162 \\ 108 & -162 & -972 \end{pmatrix} \text{ MPa}$$

c)

$$\sigma_{ijp} = \begin{pmatrix} -240 & 0 & 0 \\ 0 & -649 & 0 \\ 0 & 0 & -1055.2 \end{pmatrix} \text{ MPa}$$

d)

$$\sigma_{ijH} = -648 \text{ MPa}$$

$$\Rightarrow S_{ij} = \begin{pmatrix} 378 & -54 & 108 \\ -54 & -54 & -162 \\ 108 & -162 & -324 \end{pmatrix} \text{ MPa}$$

e)

$$S_{ijp} = \begin{pmatrix} 408.16 & 0 & 0 \\ 0 & -0.947 & 0 \\ 0 & 0 & -407.216 \end{pmatrix} \text{ MPa}$$

f)

$$W = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3) = \frac{1}{2} (-240 \times 4.5 + 649 \times 3 + 1055.2 \times 10.5)$$

$$\Rightarrow W = 5973.3 \text{ kJ/m}^3$$

7. Para un sistema biaxial de deformación, defina el tensor de esfuerzos y el de deformación característicos. Desarrolle el sistema de ecuaciones diferenciales que es necesario resolver para determinar los esfuerzos. ¿Cuántas incógnitas se tienen?, ¿cuáles son éstas?, ¿qué condiciones se deberán cumplir para que el estado de deformación se pueda definir como biaxial?, ¿cómo queda el campo de desplazamientos?

SOLUCIÓN

Condición biaxial de deformación. Número de incógnitas = 3

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}$$

Estado de esfuerzos asociado. Número de incógnitas = 3

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$$

dado que:

$$\varepsilon_{33} = 0 = \frac{1}{2\mu(1+\nu)}(\sigma_{33} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}))$$

$$\therefore \sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})$$

Sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} = 0$$

El campo de desplazamientos

$$u_i = f_1(x_1, x_2)\hat{e}_1 + f_2(x_1, x_2)\hat{e}_2 + 0\hat{e}_3$$

$$\nabla^2(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = 0$$

Se cumple que $x_3 \gg x_1, x_2$, es decir que la dimensión en un eje es dominante con relación a las otras.

8. Un plano octaédrico es aquel que está igualmente inclinado con los ejes principales asociados al sistema.

a) Demuestre que el esfuerzo normal en un plano octaédrico está dado por:

$$\sigma_{oct} = \frac{I_1\sigma}{3}$$

b) Demuestre que el esfuerzo de corte en el plano octaédrico está dado por:

$$\tau_{oct} = \frac{1}{3}((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2)^{1/2}$$

donde $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ son los esfuerzos principales.

SOLUCIÓN

La normal del plano octaédrico es

$$n_i = \frac{1}{\sqrt{3}}(\hat{e}_1 + \hat{e}_2 + \hat{e}_3)$$

Donde $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ son los esfuerzos principales

$$\sigma_{ijp} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$$

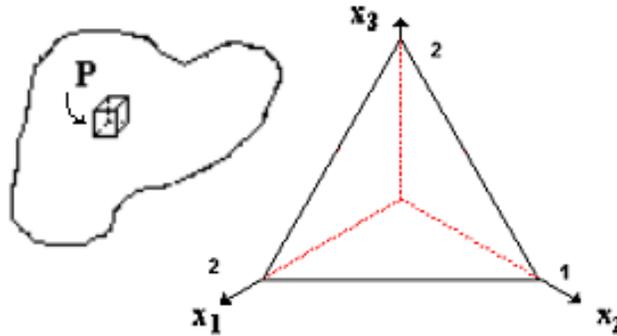


FIGURA 6.28 UN PLANO OCTAÉDRICO ESTÁ IGUALMENTE INCLINADO CON RELACIÓN A LOS EJES

a) El vector de esfuerzos asociado al plano octaédrico es

$$t_i = \sigma_{ij}n_j$$

$$t_i = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$t_i = \frac{\sigma_1}{\sqrt{3}}\hat{e}_1 + \frac{\sigma_2}{\sqrt{3}}\hat{e}_2 + \frac{\sigma_3}{\sqrt{3}}\hat{e}_3$$

Por otra parte, la componente normal al plano octédrico (esfuerzo normal octaédrico) es

$$t_N = t_i n_i = \frac{\sigma_1}{3} + \frac{\sigma_2}{3} + \frac{\sigma_3}{3}$$

$$\therefore |\sigma_N| = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{I_1 \sigma}{3} = \sigma_{oct} = \sigma_H$$

Resulta por demás evidente que el esfuerzo normal octaédrico es el esfuerzo hidrostático.

b) Por otra parte, analizando las componentes en forma vectorial se tiene que

$$|\sigma|^2 = |\sigma_N|^2 + |\tau_{oct}|^2$$

$$\therefore \tau_{oct}^2 = |\sigma|^2 - \sigma_N^2 = \frac{1}{3}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{1}{9}[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + 2\sigma_1\sigma_2 + 2\sigma_2\sigma_3 + 2\sigma_3\sigma_1]$$

Simplificando queda

$$\tau_{oct}^2 = \frac{2}{9}[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1]$$

Por otra parte,

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2$$

$$(\sigma_2 - \sigma_3)^2 = \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\sigma_2\sigma_3$$

$$(\sigma_3 - \sigma_1)^2 = \sigma_3^2 + \sigma_1^2 - 2\sigma_3\sigma_1$$

Sumando los términos

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_1^2 + 2\sigma_2^2 + 2\sigma_3^2 - 2\sigma_1\sigma_2 - 2\sigma_2\sigma_3 - 2\sigma_3\sigma_1$$

De la relación anterior se concluye que

$$\tau_{oct}^2 = \frac{1}{9}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]$$

$$\Rightarrow \tau_{oct} = \frac{1}{3} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$\tau_{oct} = \frac{2}{3} (\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2)^{1/2}$$

9. El estado de esfuerzos en un punto de un medio continuo está dado por

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 2\sigma & \alpha\sigma & \beta\sigma \\ \alpha\sigma & -\sigma & \gamma\sigma \\ \beta\sigma & \gamma\sigma & -\sigma \end{pmatrix} \quad \text{MPa}$$

- Determine los valores de las constantes α , β y γ , de tal forma que el vector de esfuerzos en el plano octaédrico (igualmente inclinado con relación a los ejes) no exista.
- ¿Cuál será el esfuerzo normal y esfuerzos de corte asociados a dicho plano?
- ¿Cuál será la magnitud de la deformación hidrostática asociada al punto bajo análisis?
- Si el material es sólido elástico homogéneo lineal e isotrópico, determine el tensor de deformaciones asociado.
- ¿En qué magnitud difieren los esfuerzos principales asociados al tensor y desviador de esfuerzos correspondiente?
- Considerando lo definido en el inciso a), determine los esfuerzos principales en el punto bajo análisis.
- Con la consideración del inciso a), determine las deformaciones principales en el punto bajo análisis.

SOLUCIÓN

a)

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & \alpha & \beta \\ \alpha & -1 & \gamma \\ \beta & \gamma & -1 \end{pmatrix} \sigma$$

Como en el plano octaédrico el vector de esfuerzos es nulo, entonces

$$t_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \alpha & \beta \\ \alpha & -1 & \gamma \\ \beta & \gamma & -1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$2 + \alpha + \beta = 0$$

$$\alpha - 1 + \gamma = 0$$

$$\beta + \gamma - 1 = 0$$

$$\gamma = 1 - \beta \quad \text{o} \quad \beta = 1 - \gamma$$

$$\alpha = 1 - \gamma$$

$$2 + [1 - \gamma] + [1 - \gamma] = 0$$

$$4 - 2\gamma = 0$$

$$\gamma = 2 \quad \therefore \quad \alpha = \beta = -1$$

b) Dado que el vector de esfuerzos en el plano octaédrico es nulo, entonces

$$\tau_{oct} = \sigma_{oct} = 0$$

c) El normal octaédrico o esfuerzo hidrostático es cero, razón por la que la deformación hidrostática también lo es

$$\varepsilon_{kk} = \frac{\sigma_H}{k}$$

$$\sigma = 0 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_{kk} = 0$$

d) Tensor de deformaciones considerando SEHLI

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu(1+\nu)} (\sigma_{ij}(1+\nu) - \nu\sigma_{kk}\sigma_{ij})$$

$$\sigma_{ij} = \sigma \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{MPa}$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{2\mu(1+\nu)}(\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33})) = \frac{\sigma}{2\mu(1+\nu)}(2 + 2\nu)$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{\sigma}{\mu}$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{2\mu(1+\nu)}(\sigma_{22} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{33})) = \frac{\sigma}{2\mu(1+\nu)}(-1 - \nu)$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{-\sigma}{2\mu}$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{1}{2\mu(1+\nu)}(\sigma_{33} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})) = \frac{\sigma}{2\mu(1+\nu)}(-1 - \nu) = \frac{-\sigma(1+\nu)}{2\mu(1+\nu)} = -\frac{\sigma}{2\mu}$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{-\sigma}{2\mu}$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{\sigma_{12}}{2\mu} = \frac{-\sigma}{2\mu}$$

$$\varepsilon_{13} = \frac{\sigma_{13}}{2\mu} = \frac{-\sigma}{2\mu}$$

$$\varepsilon_{23} = \frac{\sigma_{23}}{2\mu} = \frac{2\sigma}{2\mu} = \frac{\sigma}{\mu}$$

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \frac{\sigma}{\mu}$$

e) Al ser el esfuerzo hidrostático igual a cero, entonces el tensor y su desviador asociado son iguales

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_H \delta_{ij} \quad \text{dado que } \sigma_H = 0 \Rightarrow \quad S_{ij} = \sigma_{ij}$$

f) Esfuerzos principales

$$\sigma_{ij} = \sigma \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma_{ij_p} = \sigma \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

g)

h) Por su parte, las deformaciones principales en la coordenada analizada son

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\sigma}{2\mu} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \varepsilon_{ij_p} = \frac{\sigma}{2\mu} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

10. Un sólido es sometido a una serie de sollicitaciones en su rango elástico, de tal forma que se han obtenido los siguientes resultados al aplicar sollicitaciones en diferentes direcciones:

Prueba # 1

Carga uniaxial a tracción aplicada a lo largo del eje x_1 (longitudinal)

Esfuerzo resultante = 100 MPa

Deformación longitudinal = 1×10^{-3}

Deformación transversal en los ejes $x_2, x_3 = -3.2 \times 10^{-4}$

No se presentaron deformaciones a corte

Prueba # 2

Carga uniaxial a compresión a lo largo del eje x_2

Esfuerzo resultante = 250 MPa

Deformación longitudinal = -2.5×10^{-3}

Deformación transversal en los ejes $x_1, x_3 = 8 \times 10^{-4}$

No se presentaron deformaciones a corte

Prueba # 3

Ensayo de torsión. El momento torsionante es aplicado a una barra de sección circular cuyo eje longitudinal es x_1 .

En este caso la deformación a corte en el plano $x_3x_2 = 5.28 \times 10^{-4}$

Con base en lo antes expuesto:

- Indique el tipo de comportamiento característico (isotrópico, transversalmente isotrópico, ortotrópico, etc.). Justifique su respuesta.
- Determine los estados de esfuerzos y deformaciones que se describen para las pruebas 1 y 2.
- Calcule las constantes elásticas factibles de determinar a través de los datos presentados.

SOLUCIÓN

Prueba #1	Prueba #2	Prueba #3
$\sigma_{11} = 100 \text{ MPa}$	$\sigma_{22} = 250 \text{ MPa}$	
$\varepsilon_{11} = 1 \times 10^{-3}$	$\varepsilon_{22} = -2.5 \times 10^{-3}$	Ensayo de torsión \Rightarrow Corte puro
$\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -3.2 \times 10^{-4}$	$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{33} = 8 \times 10^{-4}$	$\varepsilon_{23} = 5.28 \times 10^{-4}$
$\varepsilon_{31} = \varepsilon_{12} = \varepsilon_{23} = 0$	$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{31} = 0$	

No existe deformación de corte cuando los esfuerzos son normales, ni deformación normal cuando los esfuerzos son de corte, por lo tanto, se descarta que se trata de un sólido elástico monotrópico, entonces sólo se puede tratar de:

- (SEHLI) Sólido elástico isotrópico
- (SEHLTI) Sólido elástico transversalmente isotrópico
- (SEHLO) Sólido elástico ortotrópico

En el caso más general, SEHLO la ecuación constitutiva permite describir las siguientes relaciones:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E_1} - \frac{\nu_{21}\sigma_{22}}{E_2} - \frac{\nu_{31}\sigma_{33}}{E_3}$$

Para el ensayo #1 se reduce a

$$\varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E_1} \quad \Rightarrow \quad E_1 = \frac{\sigma_{11}}{\varepsilon_{11}} = \frac{100}{10^{-3}} \text{ MPa} = 100 \text{ GPa}$$

Por otra parte,

$$\varepsilon_{22} = -\frac{\nu_{12}\sigma_{11}}{E_1} + \frac{\sigma_{22}}{E_2} - \frac{\nu_{32}}{E_3}$$

se reduce a

$$\varepsilon_{22} = -\frac{\nu_{12}\sigma_{11}}{E_1} \quad \therefore \quad \nu_{12} = -\frac{\varepsilon_{22}E_1}{\sigma_{11}} = -\frac{(-3.2 \times 10^{-4}) \times 100 \times 10^7}{100 \times 10^6} = 0.32$$

Además,

$$\varepsilon_{33} = -\frac{\nu_{13}\sigma_{11}}{E_1} + \frac{\sigma_{23}\sigma_{22}}{E_2} + \frac{\sigma_{33}}{E_3}$$

lo que se reduce a

$$\varepsilon_{33} = -\frac{\nu_{13}\sigma_{11}}{E_1} \quad \therefore \quad \nu_{13} = -\frac{\varepsilon_{33}E_1}{\sigma_{11}} = 0.32$$

Para el ensayo #2. Prueba de compresión

Considerando un modelo general similar al ensayo 1 se tiene:

$$\varepsilon_{22} = -\frac{\nu_{12}\sigma_{11}}{E_1} + \frac{\sigma_{22}}{E_2} - \frac{\nu_{32}}{E_3}\sigma_{33}$$

Se reduce a

$$E_2 = \frac{\sigma_{22}}{\varepsilon_{22}} = \frac{2.5 \times 10^8}{2.5 \times 10^{-3}} \therefore E_2 = 1 \times 10^{11} = 100 \times 10^9 = 100 \text{ GPa}$$

$$\Rightarrow E_1 = E_2$$

$$\nu = -\frac{\varepsilon_T}{\varepsilon_l} \Rightarrow \nu_{21} = -\frac{8 \times 10^{-4}}{2.5 \times 10^{-3}} = 0.32$$

$$\nu_{23} = -\frac{8 \times 10^{-4}}{2.5 \times 10^{-3}} = 0.32$$

De todo lo anterior, se constata que se trata de un sólido elástico homogéneo, lineal e isotrópico.

$$\frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2} \Rightarrow \frac{\nu_{13}}{E_1} = \frac{\nu_{31}}{E_3} \Rightarrow E_3 = \frac{E_1 \nu_{31}}{\nu_{13}}$$

$$\frac{\nu_{23}}{E_2} = \frac{\nu_{32}}{E_3} \Rightarrow E_3 = \frac{\nu_{32}}{\nu_{23}} E_2 \Rightarrow E_3 = E_2$$

Para un SEHLI $E_1 = E_2 = E_3$

$$\nu_{12} = \nu_{23} = \nu_{31} = \nu$$

11. Para el caso de un medio continuo cuyo comportamiento se puede describir como el de un sólido, elástico, homogéneo, lineal e isotrópico, el cual es sometido a deformaciones infinitesimales, desarrolle una expresión (ecuación diferencial) que describa el comportamiento en función de los desplazamientos (u_i), de las propiedades elásticas (E , k , λ , μ , ν) y de la densidad (ρ).

Dado que las deformaciones son muy pequeñas se puede considerar que:

$$\frac{Dv_i}{Dt} \approx \frac{D^2 u_i}{Dt^2}$$

por otra parte, $\rho(t) \approx \rho_0$

Para el desarrollo de la función tome como base la ecuación de Cauchy.

SOLUCIÓN

Ecuación de Cauchy

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho B_i = \rho \frac{Dv_i}{Dt}$$

Para desplazamientos infinitesimales:

$$\frac{Dv_i}{Dt} \hat{=} \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad \rho(t) \hat{=} \rho_0$$

Entonces,

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho_0 B_i = \rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$$

Dado que se trata de un sólido, elástico, la ecuación constitutiva es

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad \varepsilon_{kk} = \nabla \cdot \mathbf{u}$$

En general,

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

Sustituyendo se tiene:

$$\therefore (\lambda + \mu) \nabla e + \mu \nabla \cdot (\nabla u) + \rho_0 B = \rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

que es la ecuación de Navier (Teoría infinitesimal de la elasticidad).

12. Una viga de sección circular es sujeta a una combinación de sollicitaciones, de tal forma que se aplica un momento flexionante de 28000 Nm, además de una carga de tracción a lo largo del eje longitudinal de 10000 N. Si el límite elástico del material es de 124 MPa (esfuerzo máximo de diseño). Determine cuál deberá ser el diámetro mínimo de la barra.

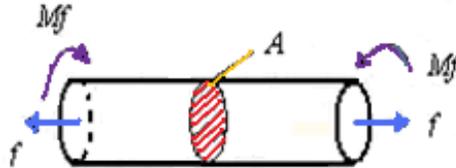


FIGURA 6.29 BARRA DE SECCIÓN CIRCULAR DE RADIO r Y LONGITUD l LA CUAL ES SOMETIDA A UNA CARGA AXIAL f Y UN MOMENTO FLEXIONANTE M_f

SOLUCIÓN

$$M_f = 28000 \text{ N m}$$

$$f = 10000 \text{ N}$$

$$\sigma_0 = 124 \text{ MPa}$$

$$\phi_{\text{mín}} = ?$$

Al tratarse de fenómenos lineales sí se puede realizar superposición de esfuerzos, por tanto,

$$I_{33} = \frac{1}{4} \pi r^4$$

$$\sigma_{11} = \frac{Mx}{I} = \frac{4Mr}{\pi r^4}$$

$$\sigma'_{11} = \frac{f}{\pi r^2}$$

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} + \sigma'_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{f}{\pi r^2} + \frac{4M}{\pi r^3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Los esfuerzos principales serán

$$\sigma_2 = \sigma_3 = 0$$

$$\sigma_1 = \frac{f}{\pi r^2} + \frac{4M}{\pi r^3} = \frac{fr + 4M}{\pi r^3}$$

La cedencia se presenta de acuerdo con el criterio de Tresca cuando el cortante máximo alcanza un valor crítico $\tau_2 = k$. Dicho criterio se puede expresar en forma simplificada como $\sigma_0 = \sigma_1 - \sigma_2$. Por otra parte, el criterio de Von Mises indica que la cedencia se presenta cuando el segundo invariante del desviador de esfuerzos alcanza un valor crítico $J_2 = k^2$, a partir de lo cual se puede demostrar que

$$\sigma_{VM} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \quad \therefore \sigma_{VM} \geq \sigma'_0.$$

Como consecuencia de lo antes expuesto, y siendo que el criterio de Von Mises es el más preciso, se tiene que la deformación elástica se presentará siempre y cuando que no exista cedencia; entonces, el esfuerzo eficaz será menor que el de fluencia, por tanto, en el límite

$$\sigma_{VM}^2 = \frac{1}{2} (2\sigma_1^2) \quad ; \quad \sigma'_0 = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_0$$

$$\left(\frac{f}{\pi r^2} + \frac{4M}{\pi r^3} \right)^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_0 \right)^2$$

$$\left(\frac{10000}{\pi r^2} + \frac{4 \times 28000}{\pi r^3} \right)^2 = \frac{4 \times (124 \times 10^6)^2}{3}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{112 \times 10^3 + 1 \times 10^4 r}{\pi r^3} \right)^2 = \frac{12.5 \times 10^9 + 1 \times 10^8 r^2 + 2.24 \times 10^9 r}{\pi^2 r^6} = 2.05 \times 10^{16}$$

$$\Rightarrow r^6 - 4.94 \times 10^{-10} r^2 - 1.107 \times 10^{-8} r - 6.177 \times 10^{-8} = 0$$

La única raíz real positiva es

$$r = 0.063 \text{ m}$$

De otra forma, considerando Tresca

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_0 \quad , \quad \sigma_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_1 = \sigma_0$$

$$\sigma_0 = \frac{f}{\pi r^2} + \frac{4M}{\pi r^3}$$

$$124 \times 10^6 = \frac{10000}{\pi r^2} + \frac{4 \times 28000}{\pi r^3}$$

Por lo que se tiene el polinomio

$$r^3 - 2.56 \times 10^{-5} r - 2.87 \times 10^{-4} = 0$$

La única raíz real del polinomio es

$$r = 6.6 \times 10^{-2} \text{ m}$$

Los resultados anteriores confirman lo indicado por la teoría, ya que Tresca es un criterio conservador en comparación con Von Mises, el cual predice la falla para un menor esfuerzo o demanda una dimensión mayor (radio mínimo de la barra de sección circular) para soportar las sollicitaciones.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Para resolver un sistema biaxial de deformaciones es necesario determinar $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$, esto a partir de la solución simultánea de las tres ecuaciones diferenciales características del sistema:

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) (\sigma_{11} + \sigma_{22}) = 0$$

Para este caso, la solución se expresa a través de una función de Airy (φ), en este caso los esfuerzos se definen como:

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} \quad \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2}$$

Con base en lo anterior, demuestre que φ representa una función de esfuerzos de Airy:

$$\varphi = \frac{3F}{4c} \left(x_1 x_2 - \frac{x_1 x_2^3}{3c^2} \right) + \frac{P}{4c} x_2^2$$

Asimismo, defina el estado de esfuerzos y de deformación asociado al caso bajo análisis.

Considere que el material se comporta como un sólido, elástico, homogéneo, lineal e isotrópico, con constantes elásticas E, ν, μ, λ, k .

Nota: La función φ antes indicada se emplea para describir el comportamiento de una viga sometida a una carga en el eje x_1 , P y otra que genera flexión sobre la barra F y que se describe en dirección del eje x_2 . La barra tiene un peralte (altura) $2c$, un ancho b y una longitud l .

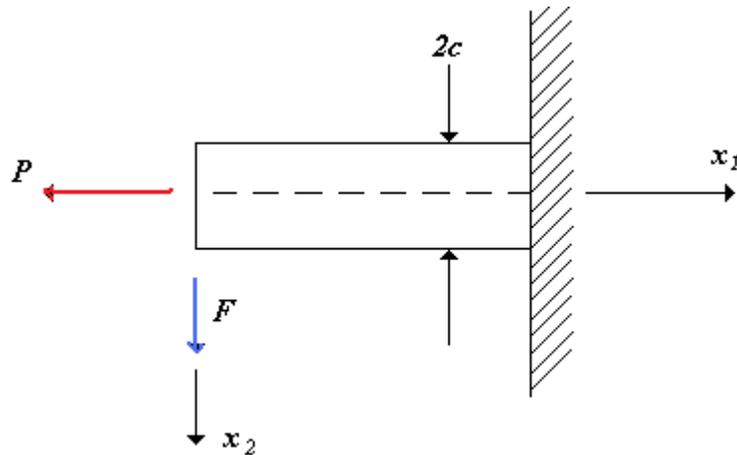


FIGURA 6.30 VIGA EMPOTRADA CON CARGAS P Y F .

2. La ecuación constitutiva de un sólido, elástico, homogéneo, lineal e isotrópico, se expresa como:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu(1+\nu)} (\sigma_{ij}(1+\nu) - \nu\sigma_{kk}\delta_{ij})$$

donde

ε - deformación

σ - esfuerzo

μ - Módulo de Rigidez a corte (Representa la relación del esfuerzo de corte a la deformación angular)

ν - Coeficiente de Poisson $\nu = -\frac{\varepsilon_T}{\varepsilon_l}$ (Representa la relación de la deformación transversal a la longitudinal)

Con base en lo anterior, desarrolle las ecuaciones representadas a través de la notación índice.

En el rango elástico, la relación esfuerzo deformación es lineal y la energía de deformación se expresa como

$$dw = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}$$

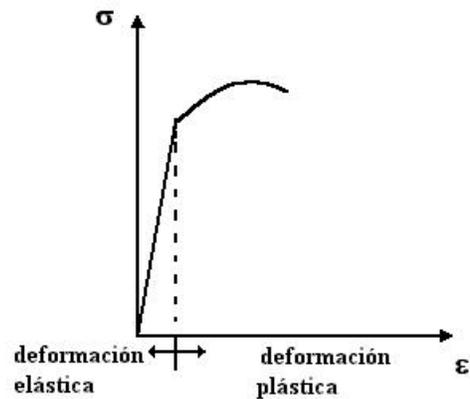


FIGURA 6.31 TRABAJO DE DEFORMACIÓN ELÁSTICA $W^e = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \epsilon_{ij}$

Considerando lo antes expuesto, determine la expresión en notación índice que representa el trabajo de deformación elástica.

- Un cuerpo es sometido a una serie de sollicitaciones que provoca la distorsión del mismo, situación que se puede representar con el tensor $\nabla_X u(X_i, t)$. Con esta base defina los tensores de deformación (ϵ_{ij}) y de rotación (ω_{ij}).

Por otra parte, determine las deformaciones y esfuerzos principales considerando que el material presenta un módulo de elasticidad de 200 GPa y un coeficiente de Poisson de $1/3$, es homogéneo e isotrópico y las deformaciones son elásticas.

Determine el estado de esfuerzos correspondientes.

$$e_{ij} = \begin{pmatrix} 25 & 10 & -12 \\ 2 & 8 & -15 \\ 9 & 7 & -10 \end{pmatrix} \times 10^{-3} \quad \text{m/m}$$

- La distribución de esfuerzos en un cuerpo está dada por σ_{ij} . Con base en lo anterior:
 - Considere que la deformación es biaxial y determine el valor de σ_{33} . El coeficiente de Poisson es igual a $1/3$.

- b) Para el elemento diferencial ubicado en $X_i(2,2,1)$, determine el estado de deformaciones, así como los valores principales de los esfuerzos y las deformaciones. Considere que el material presenta un coeficiente de Poisson ν y módulo de rigidez a corte μ .

$$\sigma_{ij} = \alpha \begin{bmatrix} x_1 + x_2 & 2x_1 - x_2 & 0 \\ 2x_1 - x_2 & x_1 - 3x_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

5. Un sólido elástico, homogéneo, lineal e isotrópico, presenta un módulo de elasticidad de 72 Gpa y un módulo de Poisson de 0.30.

Una pieza del material anterior es sometida a una serie de sollicitaciones, las cuales provocan en un elemento diferencial X_i del cuerpo una distorsión que se puede representar mediante el tensor e_{ij} .

$$e_{ij} = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 5 \\ 4 & -4 & -3 \\ 7 & 10 & -8 \end{pmatrix} \times 10^{-3} \frac{\text{m}}{\text{m}}$$

Con base en lo anterior y considerando que la deformación está dentro del rango elástico, determine el estado de esfuerzos en dicho elemento diferencial.

6. Determine el número de constantes elásticas linealmente independientes que existen para un material monotrópico.
7. Aplicando la teoría de medios continuos se puede comprobar que el estado de deformaciones asociado a una dislocación de hélice, se puede expresar como:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \frac{-bx_2}{4\pi(x_1^2 + x_2^2)} \\ 0 & 0 & \frac{bx_1}{4\pi(x_1^2 + x_2^2)} \\ \frac{-bx_2}{4\pi(x_1^2 + x_2^2)} & \frac{bx_1}{4\pi(x_1^2 + x_2^2)} & 0 \end{vmatrix}$$

donde el vector de Burgers de la dislocación \bar{b} tiene una magnitud b y es paralelo al eje x_3 .

Considerando que se trata de un material homogéneo, elástico, lineal e isotrópico, se cumplirá entonces con $\sigma_{ij} = \lambda e \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}$, donde λ, μ son constantes de Lamé, $e = \varepsilon_{ii} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$.

Con base en lo expuesto y partiendo de que no existen fuerzas de cuerpo y que además no hay aceleración en el cuerpo, verifique la existencia de equilibrio en cualquier elemento diferencial de la dislocación de hélice.

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho B_i = \rho a_i$$

Asimismo, compruebe la existencia de un vector de desplazamientos $u(u_1, u_2, u_3)$ que da lugar a ε_{ij} .

Por otro lado, determine cuál será la variación de volumen que se asocia a la presencia de la dislocación para cualquier condición, y cuál será la rapidez de variación del volumen asociada al estado de deformación descrito para la dislocación.

Considerando que la deformación elástica está definida como $W^e = \frac{1}{2}(\sigma_{ij}\varepsilon_{ij})$, y que la teoría de medios continuos se puede aplicar a partir de un radio r_0 y hasta el radio del cristal R , determine la energía asociada a la dislocación; asimismo, determine los esfuerzos y deformaciones principales, máxima deformación y esfuerzos de corte.

8. El campo de desplazamiento asociado a un medio continuo está dado por (coordenadas rectangulares).

$$u_1 = \frac{-bX_3X_2}{X_1} \quad u_2 = \frac{bX_1X_3}{X_2} \quad u_3 = X_3b \operatorname{sen} X_2$$

Además, se ha determinado que

$$x_1 = (X_2 + X_3), \quad x_2 = aX_1, \quad x_3 = \frac{X_2X_1}{X_3}$$

Si el material es sólido elástico, homogéneo, lineal e isotrópico, con un coeficiente de Poisson (ν) y módulo de compresibilidad (k), determine:

- Tensor de esfuerzos
- En ausencia de fuerzas de cuerpo, ¿el campo de esfuerzos estará en equilibrio?
- Campo de rapidez de deformación.

9. Un sólido elástico, homogéneo, lineal e isotrópico, presenta un módulo de elasticidad de 70 GPa y un coeficiente de Poisson de 1/3. Cuando al material se le aplica una fuerza \bar{f} ($\bar{f} = 500\hat{e}_1 + 250\hat{e}_2 - 750\hat{e}_3$), ésta provoca en el elemento diferencial $X = (5, 1, 2)$ una serie de desplazamientos cuyo gradiente valuado en X está dado por:

$$(\nabla u)_X = \begin{pmatrix} -6 & 3 & 8 \\ 5 & 9 & -2 \\ 2 & 12 & 20 \end{pmatrix} \times 10^{-4} \text{ m/m}$$

Con base en las deformaciones producidas por efectos de los desplazamientos, y considerando que éstas se encuentran en el rango elástico, determine para el punto en cuestión:

- Estado de deformaciones
- Estado de esfuerzos
- Cambio de volumen
- Esfuerzo hidrostático

10. Para una dislocación de borde se ha determinado la siguiente función de Airy.

$$\varphi = -\frac{Gb}{2\pi(1-\nu)} x_2 \ln(x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$$

donde

G - Módulo de rigidez a corte, ν - Coeficiente de Poisson, b - magnitud del vector de Burger asociado a la dislocación

Con base en lo anterior, determine el estado de esfuerzos y deformaciones correspondientes; asimismo, compruebe la existencia de equilibrio.

Si la energía asociada a la dislocación se puede expresar como $U = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}$ considerando que el material es isotrópico, determine la energía asociada a la dislocación de borde.

11. El estado de esfuerzos en un elemento X_i a un tiempo t está dado por

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} -16.18 & 0 & 0 \\ 0 & 34.18 & 0 \\ 0 & 0 & 50 \end{pmatrix} \text{ MPa}$$

Si con otra base de referencia el estado se representa como

$$\sigma'_{ij}(X_i, t) = \begin{pmatrix} -16.18 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 25 \\ 0 & 25 & \sigma_{33} \end{pmatrix} \text{ MPa}$$

y se trata de un material sólido elástico, homogéneo, lineal e isotrópico, determine el estado de deformaciones correspondiente a σ'_{ij} , así como su representación en ejes principales. Considere que $\nu = 1/3$, $E=200$ GPa.

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$$

¿Cómo están orientados los ejes principales de deformación con relación a los principales de esfuerzos?

Calcule la matriz de rotación.

12. Desarrolle las relaciones que permiten determinar cualesquier constante elástica a partir de conocer dos de éstas. Esto para un sólido elástico, lineal homogéneo e isotrópico.

	λ, μ	E, ν	μ, ν	E, ν	K, ν
λ					
μ					
E					
ν					
k					

13. Para una condición de deformación plana en un medio continuo, se ha propuesto como solución la siguiente función de Airy:

$$\varphi = 2x_1^4 + 12x_1^2 x_2^2 - 6x_2^4$$

- Determine el estado de esfuerzos asociado al medio continuo.
 - Si se trata de un sólido elástico, homogéneo, lineal e isotrópico, determine el campo de deformaciones.
 - ¿Existirá un vector de desplazamientos a través del cual se representa la deformación del sólido?
 - Verifique la existencia de condiciones de equilibrio.
14. El tensor de distorsión para un elemento de un bloque de acero está dado por U_{ij} .

$$U_{ij} = \begin{pmatrix} 6 & 8 & -6 \\ 9 & -9 & 15 \\ 18 & 6 & -25 \end{pmatrix} \times 10^{-4}$$

Las constantes de Lamé del material (λ, μ) son respectivamente 120 y 73 GPa. Con base en lo anterior, determine el tensor de deformación (ε_{ij}) , el de rotación (ω_{ij}) , el de esfuerzos (σ_{ij}) (deformación elástica), el desviador esfuerzos, el esfuerzo efectivo, la deformación efectiva, los esfuerzos y deformaciones principales, la deformación volumétrica, así como las restantes constantes elásticas (módulo de elasticidad, coeficiente de Poisson, constante de compresibilidad).

15. Determine si en ausencia de fuerzas de cuerpo el desviador de esfuerzos S_{ij} cumple con condiciones de equilibrio; asimismo, determine si $S_{33} = -\alpha(x_1^2 + x_2^2)$.

$$S_{ij} = \begin{pmatrix} \alpha(x_2^2 + \nu(x_1^2 - x_2^2)) & -2\alpha\nu x_1 x_2 & 0 \\ -2\alpha\nu x_1 x_2 & \alpha(x_1^2 + \nu(x_2^2 - x_1^2)) & 0 \\ 0 & 0 & S_{33} \end{pmatrix}$$

16. Para el estado de esfuerzos σ_{ij} , determine el valor de σ_{33} que garantice que la deformación es biaxial.

Considere que se trata de una deformación elástica y que el material es homogéneo, lineal e isotrópico, con constantes elásticas λ (constante de Lamé), μ (módulo de rigidez a corte), ν (coeficiente de Poisson), k (constante de compresibilidad), E (módulo de elasticidad).

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \alpha(x_2^2 + \nu(x_1^2 - x_2^2)) & -2\nu\alpha x_1 x_2 & 0 \\ -2\nu\alpha x_1 x_2 & \alpha(x_1^2 + \nu(x_2^2 - x_1^2)) & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

17. En la figura 6.32 se presenta la distorsión generada por una dislocación de tornillo (hélice) en un cristal. Si se considera que los desplazamientos producidos por la dislocación son



FIGURA 6.32 DESCRIPCIÓN ESQUEMÁTICA DE LA DISTORSIÓN GENERADA EN EL CRISTAL POR EFECTO DE UNA DISLOCACIÓN DE TORNILLO. A LA DERECHA SE OBSERVA EL DIAGRAMA $\sigma - \epsilon$ CONSIDERANDO QUE EL MATERIAL ES SEHLI

$$u_1 = 0, u_2 = 0, u_3 = f(\theta) = \frac{b}{2\pi} \theta$$

$$u_3 = \frac{b}{2\pi} \tan^{-1} \frac{x_2}{x_1}$$

donde el vector de Burgers de la dislocación \hat{b} tiene una magnitud b y es paralelo al eje x_3 .

Con base en lo antes expuesto y tomando en cuenta que se trata de un sólido elástico homogéneo lineal e isotrópico, determine:

- Tensor de deformaciones asociado
 - Tensor de esfuerzos asociado
 - ¿Cuál es el cambio del volumen asociado a la presencia de la dislocación de tornillo?
 - ¿Cuál será la rapidez de variación de volumen asociado a la condición antes expuesta?
 - Considerando que la teoría de medios continuos se puede aplicar a partir de un radio r_0 y hasta el radio del cristal R , determine la energía de asociada a la dislocación.
 - Explique usted que sucederá con respecto al estado de esfuerzos y a la energía involucrada, si el material es ortotrópico.
 - Despreciando el efecto de las fuerzas de cuerpo ¿existirá equilibrio?
 - Considerando que los esfuerzos normales sobre las paredes laterales del elemento son nulos y que el esfuerzo axial debe ser diferente de cero, ¿el modelo propuesto cumple con estas condiciones?
18. Una barra de sección circular de radio R y longitud l , es sometida a un momento torsionante M_T , donde el eje x_1 coincide con el eje del cilindro. El momento torsionante produce un pequeño ángulo de rotación definido por θ , donde $\theta = \theta(x_1)$, (la deformación es elástica).

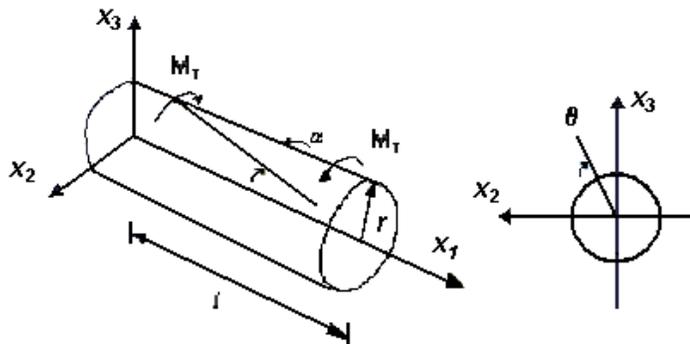


FIGURA 6.33 BARRA DE SECCIÓN CIRCULAR DE DIÁMETRO ϕ Y LONGITUD l , LA CUAL ES DEFORMADA POR UN MOMENTO TORSIONANTE APLICADO EN $x_1 = l$. LA BARRA SE ENCUENTRA EMPOTRADA EN $x_1 = 0$

Considerando lo antes expuesto, determine:

- a) Estado de deformaciones asociado
- b) Estado de esfuerzos
- c) Deformaciones principales
- d) Esfuerzos principales
- e) ¿En qué planos se presentan los esfuerzos máximos?
- f) Si el material de la barra se comporta frágil, qué ángulo describirá la superficie de fractura con el eje longitudinal.
- g) ¿Qué pasa si la barra presenta una sección elíptica?

19. Describa el estado de esfuerzos y deformaciones que corresponden a:

- a) Estado biaxial de esfuerzos
- b) Estado biaxial de deformaciones

20. Las ecuaciones de Navier se pueden expresar como

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \rho_0 \mathbf{B} + (\lambda + \mu) \nabla e + \mu \operatorname{div}(\nabla \mathbf{u})$$

Con base en lo antes expuesto, exprese las ecuaciones de Navier en coordenadas rectangulares, cilíndricas y esféricas.

21. En una deformación plástica el vector desplazamiento está dado por

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{u}} &= \alpha(2X_3 + 3X_2)\hat{\mathbf{e}}_1 + ((X_2 + 3X_1))\hat{\mathbf{e}}_2 + (2X_1 + 3X_2 + 2X_3)\hat{\mathbf{e}}_3 \\ \alpha &= 10^{-2} \end{aligned}$$

Para el elemento diferencial que originalmente se ubicaba en la posición (0.08, 0.1, 0.14), determine el estado de deformación asociado, así como las deformaciones principales y la deformación máxima a corte. ¿Cómo es la deformación en todo el MC?

22. Una barra de sección circular de diámetro ϕ y radio R es sometida a una serie de sollicitaciones que provocan flexión y torsión en ésta. El momento flector alrededor de x_3 , M_f actúa en el extremo de la barra de acuerdo con lo indicado en la figura 6.34, en el

mismo extremo se aplica un momento torsionante M_T sobre el eje x_1 . Por otra parte, la barra es sometida a una carga distribuida p y una carga concentrada f a la mitad de la barra. Esta carga f está a un ángulo θ con respecto al eje x_1 . Con base en lo antes expuesto, determine el estado de esfuerzos en la forma $\sigma_{ij} = h(x_1, x_2)$, así como también la función de Airy que es solución del problema.

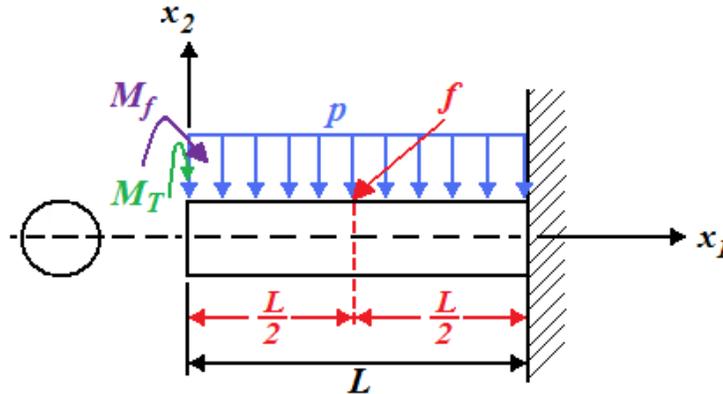


FIGURA 6.34

23. Determine la relación existente entre el módulo de elasticidad y velocidad de ondas elástica longitudinales y transversales en un sólido de Hooke.
24. Para resolver un sistema biaxial de deformaciones es necesario determinar $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$, esto a partir de la solución simultánea de las tres ecuaciones diferenciales características del sistema:

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) (\sigma_{11} + \sigma_{22}) = 0$$

Para este caso, la solución se expresa a través de una función de Airy (ϕ), y los esfuerzos se definen como:

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2}, \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2}, \quad \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1 \partial x_2}$$

Con base en lo anterior, determine la función de esfuerzos (ϕ) para la viga horizontal de la figura 6.35, considere que existe simetría con relación a la carga aplicada (F), la cual es de 10 000 lb_f, asimismo, tome en cuenta que el cable que transmite la carga se encuentra a un ángulo (θ). Defina los esfuerzos a que estará sometida la viga.

Determine la función de Airy $\varphi = f(x_1, x_2; F, \theta, L, I_{33})$. Donde x_1, x_2 son los ejes longitudinal (horizontal) y transversal (vertical) con relación a la viga. F es la carga aplicada, θ es el ángulo entre el cable y la horizontal, L es la longitud de la viga, e I_{33} representa al momento de inercia sobre el eje x_3 .

Considere a la viga como empotrada. Tome en cuenta que el material se comporta como un sólido elástico homogéneo e isotrópico, con constantes elásticas E, ν, μ, λ, k .

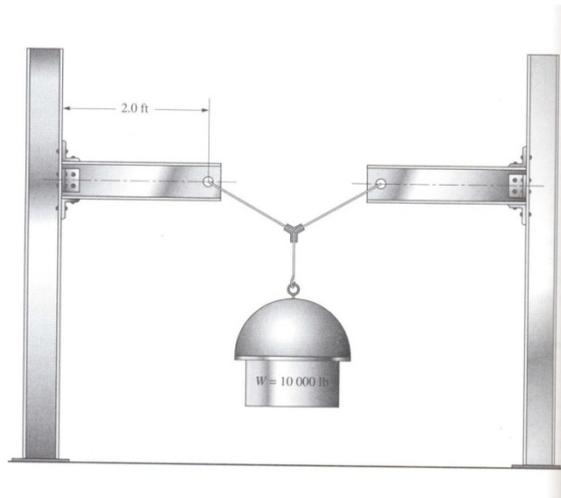


FIGURA 6.35

25. Una viga tipo I [S510x143], de acero A572-HSLA grado 65 (figura 6.36), con $\sigma_u = 552 \text{ MPa}$; $\sigma_0 = 448 \text{ MPa}$; $\varepsilon_m = 17\%$, es sometida a una carga concentrada f_2 [30 kN] y una distribuida $[p]$ de 7500 N/m. Considere que la viga tiene una longitud de 10 m. Las propiedades de la viga S510x143 son:

Peso 1.4 kN/m

$$I_x = 6.95 \times 10^8 \text{ mm}^4; \quad S_x = \frac{I_x}{y_{\text{máx}}} = 2.47 \times 10^6 \text{ mm}^3; \quad A = 1820 \text{ mm}^2,$$

Peralte (altura total de la viga) - 516 mm

Espesor en el alma - 20.3 mm

a) Con base en lo anterior, determine el estado de esfuerzos $[\sigma_{ij} = \sigma(f_2, p; x_1, x_2)]$ como una función de las solicitaciones y de la posición. Considere que la deformación se puede describir como biaxial.

De ser factible determine la función de Airy que es solución del problema. ¿Soportará la viga las cargas aplicadas?

El peso de la viga ya ha sido considerado como parte de la carga distribuida, donde I_x representa el momento de inercia con respecto al plano medio vertical (momento de inercia) y S_x es el primer momento de área.

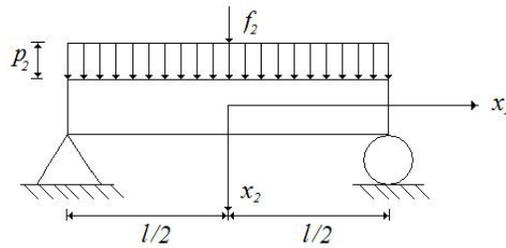


FIGURA 6.36

26. Un sólido elástico, homogéneo, lineal y ortotrópico, presenta constantes elásticas E_i, ν_i, μ_j, k hasta totalizar 9 linealmente independientes. Si las deformaciones que han sido determinadas experimentalmente en una cierta región del material se expresan como:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} 12 & -5 & 8 \\ -5 & 7 & -15 \\ 8 & -15 & -9 \end{bmatrix} \times 10^{-4} \frac{\text{m}}{\text{m}}$$

Determine el estado de esfuerzos correspondiente a dicho elemento diferencial del material, si algunas de las constantes elásticas del material son:

$$E_1 = 150 \text{ GPa}$$

$$E_2 = 180 \text{ GPa}$$

$$E_3 = 200 \text{ GPa}$$

$$\nu_{12} = 0.3$$

$$\nu_{13} = 0.28$$

$$\nu_{23} = 0.33$$

$$\mu_4 = 60 \text{ GPa}$$

$$\mu_5 = 70 \text{ GPa}$$

$$\mu_6 = 75 \text{ GPa}$$

27. Un sólido elástico, homogéneo, lineal y ortotrópico, presenta constantes elásticas E_i, ν_i, μ_j, k hasta totalizar 9 linealmente independientes. Si las deformaciones que han sido determinadas experimentalmente en una cierta región del material se expresan como:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} 18 & 5 & 8 \\ 5 & 6 & -12 \\ 8 & -12 & -15 \end{bmatrix} \times 10^{-4} \frac{\text{m}}{\text{m}}$$

Determine el estado de esfuerzos correspondiente a dicho elemento diferencial del material, si algunas de las constantes elásticas del material son:

$$E_1 = 100 \text{ G Pa}; E_2 = 120 \text{ G Pa}; E_3 = 150 \text{ G Pa}; \nu_{12} = 0.31; \nu_{13} = 0.27, \nu_{23} = 0.33$$

$$\mu_4 = 50 \text{ G Pa}; \mu_5 = 60 \text{ G Pa}; \mu_6 = 75 \text{ G Pa}$$

También, calcule la deformación y esfuerzo hidrostáticos, así como la constante de compresibilidad.

Determine el desviador de esfuerzos y de deformaciones.

28. Una barra de sección circular está bajo la acción de una carga axial f_1 y un momento flexionante Mf_3

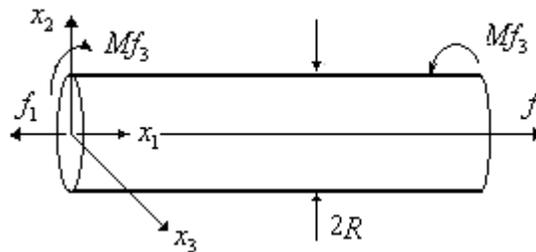


Figura 6.37

Con base en lo anterior, determine el estado de esfuerzos y deformaciones para cualquier posición y tiempo.

Si el esfuerzo de cedencia del material es σ_0 , determine el radio R mínimo de la barra.

29. A una barra de hierro colado de 200 cm de largo y 5 cm de diámetro es aplicada, en ambos extremos, una fuerza longitudinal de igual magnitud y sentido contrario P . Con base en lo anterior determine el esfuerzo normal máximo y los cortantes máximos, ¿a

qué ángulo se presentarán éstos con relación al eje longitudinal de la barra? Describa el estado de esfuerzos y deformaciones, si uno de los ejes del sistema cartesiano es coincidente con el eje de la barra, mientras que los otros dos se encuentran sobre un plano cuya normal es el eje longitudinal. Si las cargas son de tracción, determine la longitud final de la barra, así como las contracciones laterales.

$$E = 103 \text{ GPa}, \nu = \frac{1}{3}, P = 100 \text{ kN}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu(1+\nu)} (\sigma_{ij}(1+\nu) - \nu\sigma_{kk}\delta_{ij})$$

$$E = 2\mu(1+\nu)$$

Si la barra en cuestión se coloca en un núcleo indeformable cuyo diámetro interior es de 5 cm y cuya longitud es mayor que la de la barra, que sucederá al aplicar a la barra la carga P , pero ahora de compresión, ¿Cuál será el estado de esfuerzos y deformaciones?

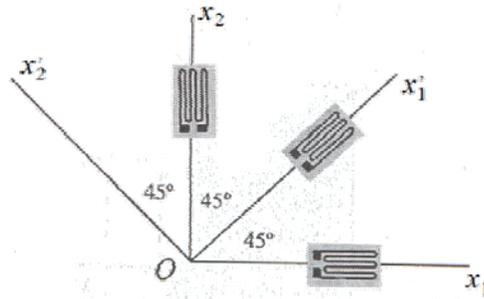
30. Una banda de un sólido elástico homogéneo, lineal e isotrópico, cuyo espesor es despreciable en comparación con sus otras dos dimensiones, está sometida a una serie de sollicitaciones que generan un estado de esfuerzos: $T_{11} = \alpha x_1^2 x_2$; $T_{22} = \alpha n x_2^3$; $T_{12} = f(x_1, x_2)$. Donde n es un escalar y $\alpha = 1 \text{ MPa/m}^3$. Determine la función que describe el esfuerzo cortante. Determine el estado de esfuerzos y de deformaciones, considere que $T_{23} = T_{31} = 0$; $T_{33} = f(x_1, x_2)$.

31. El arreglo de galgas extensométricas para un estado de deformaciones plano (figura 6.38), mide las deformaciones normales (longitudinales) a lo largo de los ejes x_1 , x_2 (base original) y del eje x'_1 (nuevo sistema de referencia), tal que:

$$\varepsilon_{11} = 6 \times 10^{-4} \quad ; \quad \varepsilon_{22} = 4 \times 10^{-4} \quad ; \quad \varepsilon'_{11} = 8 \times 10^{-4}$$

Determinar la deformación angular ε_{12} , la deformación normal ε'_{22} y verificar que:

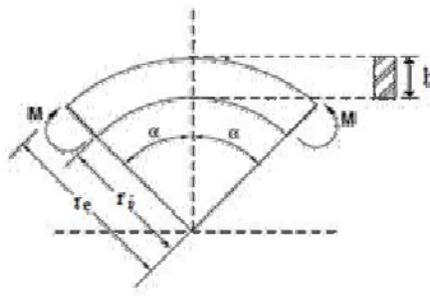
$$\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} = \varepsilon'_{11} + \varepsilon'_{22}$$


FIGURA 6.38

Para el estado de deformaciones en la base original, determinar las deformaciones principales y las direcciones principales asociadas.

Con base en lo antes expuesto y considerando que se trata de un sólido elástico y transversalmente isotrópico con $\mu_l = 50$ GPa, $\mu_T = 56$ GPa, $\nu_l = \frac{1}{3}$, $\nu_T = 0.3$, $\lambda = 98$ GPa, determine el estado de esfuerzos asociado.

32. En coordenadas polares una función de esfuerzos de Airy está dada por $\varphi = Cr^2(\cos 2\theta - \cos 2\alpha)$, donde C, α son constantes, considerando que $\sigma_{r\theta} = -\tau$, cuando $\theta = -\alpha$. Determine el estado general de esfuerzos y el valor de la constante C .
33. La viga curva de la figura 2 cuyas superficie interior y exterior, así como las laterales están dadas por $r_i, r_e; \theta = \pm\alpha$, está sometida a un momento flector puro M_f , de tal forma que r_i, r_e están libres de esfuerzos de tracción, lo mismo que $z = \pm \frac{h}{2}$. Considerando que se trata de un sólido elástico e isotrópico (SEHLI) y que su espesor (h) es muy pequeño comparado con las otras dimensiones, determine el estado de esfuerzos en la viga.


FIGURA 6.39 VIGA CURVA SOMETIDA A UN MOMENTO FLECTOR PURO

34. Para la viga simplemente apoyada de la figura 6.40, determine la función de esfuerzos de Airy solución del sistema. Con base en lo anterior, determine las constantes del polinomio de la forma: $\phi = \phi_2 + \phi_3 + \phi_5$ que representa la función solución.

Considere que el material se comporta como un sólido elástico homogéneo e isotrópico, con constantes elásticas E, ν, μ, λ, k .

$$\sigma_{11} = \sigma(x_1, x_2); \quad \sigma_{22} = 0 \quad \text{para } x_2 = h; \quad \sigma_{22} = p_2 \quad \text{para } x_2 = -h; \quad \sigma_{22} = \sigma(x_2) \sigma_{12} = \sigma(x_1, x_2)$$

$$\sigma_{12} = 0 \quad \forall x_2 = \pm h; \quad \sigma_{12} = \sigma_{12\text{máx}} \quad \forall x_2 = 0$$

Para el análisis considere superposición de efectos, en el caso de la carga distribuida la cara superior de la viga está sometida a la carga distribuida p_2 (carga/área), mientras que en la parte inferior la carga es cero. Para el caso de la carga concentrada, ésta sólo genera cortante. El esfuerzo σ_{11} , en los extremos del elemento $\sigma_{11} = 0$ para $x_1 = \pm \frac{l}{2}$.

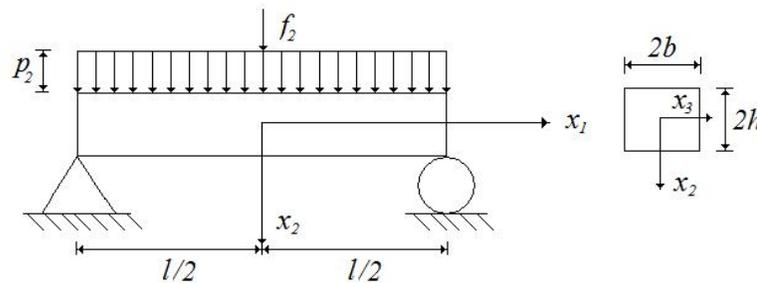


FIGURA 6.40

35. Para el elemento mecánico de la figura 6.41, determine la función de Airy solución del problema. Considere que la pieza tiene una longitud L un ancho b y un espesor h . Para motivo del análisis considere al elemento como de sección transversal constante.

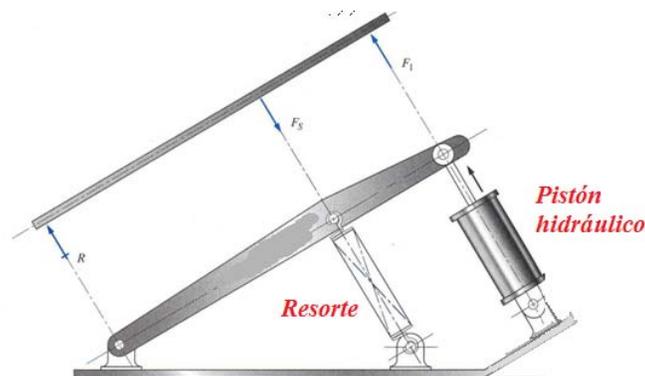


FIGURA 6.41

36. Para la estructura de la figura 6.42, determine la función de Airy solución del problema.

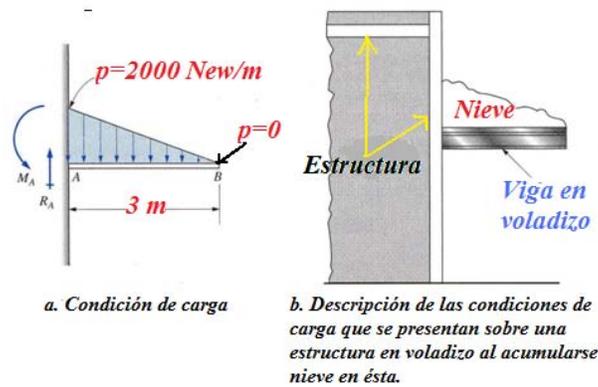


FIGURA 6.42

37. Determine el estado de esfuerzos en coordenadas cilíndricas para un tubo de diámetro interior d y diámetro exterior D , que se encuentra a la presión interior p_i y a la presión exterior p_e .

38. Una placa es sometida a una carga axial f_1 en dirección del eje x_1 (figura 6.43); la carga genera al interior de la placa un esfuerzo σ_{11} . La placa presenta una discontinuidad en su interior, la cual es de un radio a . Determine la concentración de esfuerzos que genera la discontinuidad antes descrita.

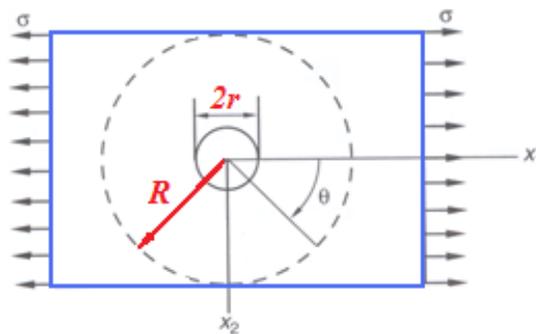


FIGURA 6.43 PLACA SOMETIDA A TRACCIÓN CON UNA DISCONTINUIDAD CIRCULAR DE RADIO r , EL ANCHO DE LA PLACA ES $2R$.