



UNIVERSIDAD NACIONAL
AVENIDA DE
MEXICO

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

**PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN
INGENIERÍA**

FACULTAD DE INGENIERÍA

**ANÁLISIS CINEMÁTICO Y DINÁMICO
DE UN ROBOT PARALELO ESPACIAL RUS**

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

DOCTOR EN INGENIERÍA

INGENIERÍA MECÁNICA – MECÁNICA APLICADA

P R E S E N T A :

FRANCISCO CUENCA JIMÉNEZ

TUTOR:

DR. LEOPOLDO ADRIÁN GONZÁLEZ GONZÁLEZ



2008

JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dr. Marcelo López Parra

Secretario: Dr. Alejandro Cuahutemoc Ramírez Reivich

Vocal: Dr. Leopoldo Adrián González González

1^{er} Suplente: Dr. Jesús Manuel Dorador González

2^{do} Suplente: Dr. Jorge Carrera Bolaños

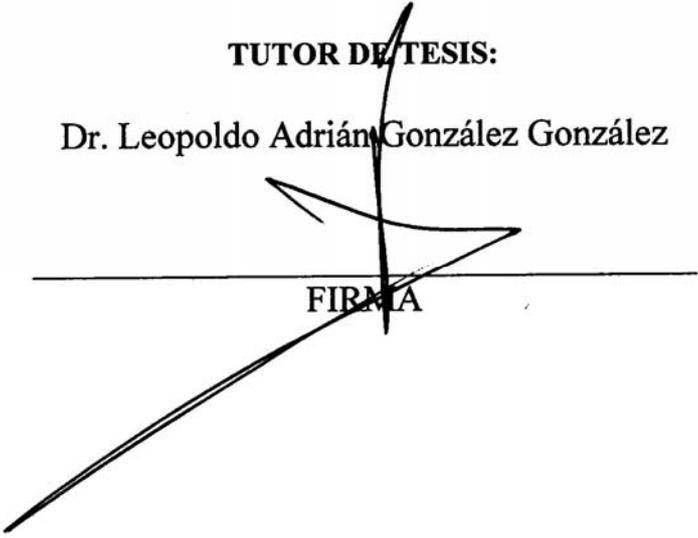
Lugar donde se realizó la tesis:

Departamento de Posgrado en Ingeniería Mecánica de la Facultad de Ingeniería

TUTOR DE TESIS:

Dr. Leopoldo Adrián González González

FIRMA

A handwritten signature in black ink is written over a horizontal line. The signature is stylized and appears to be the name of the tutor, Dr. Leopoldo Adrián González González. The word "FIRMA" is printed below the line.

Dedicatorias y Agradecimientos

A mis padres: Felipe y Donata,
que ya no vieron el fin de esta etapa.

A mis hermanos: Betzabeth, Juvela, Juan.

A mi tutor, por ayudarme a lograr este objetivo.

A Lupita, por su amor y apoyo en todo momento.

A mis amigos Mario e Irma, Eusebio, Mario Acosta y
Oscar Rendón

A CONACyT por su apoyo durante el primer
año de estudio doctoral.

Índice general

Introducción	III
1. Cinemática de Cuerpo Rígido	1
1.1. Introducción	1
1.2. Conceptos Generales de Cinemática de Cuerpo Rígidos y su Relación con el Concepto de Cuaternión	2
1.3. Orientación de un Cuerpo en el Espacio	13
1.4. Ecuación de Posición	20
1.5. Ecuación de Velocidad Lineal	21
1.6. Ecuación de Aceleración Lineal	29
2. Análisis Cinemático	44
2.1. Introducción	44
2.2. Análisis de Posición	45
2.2.1. Ecuaciones de Posición	46
2.2.2. Orientación de la Junta Esférica	52
2.2.3. Gráficas de Posición	53
2.3. Análisis de Velocidad	61
2.3.1. Ecuaciones de Velocidad	61
2.3.2. Velocidad Angular de la Junta Esférica	65
2.3.3. Gráficas de Velocidad	66
2.4. Análisis de Aceleración	73
2.4.1. Ecuaciones de Aceleración	73
2.4.2. Aceleración Angular de la Junta Esférica	77
2.4.3. Gráficas de Aceleración	78
3. Análisis Dinámico	85
3.1. Introducción	85
3.2. Análisis Dinámico de Fuerzas	87
3.3. Fuerzas y Momentos del Cuerpo 2i	94
3.3.1. Definiendo Fuerza $\mathbf{F}_{5,5}^i$	94
3.3.2. Definiendo Fuerza $\mathbf{F}_{8,5}^i$	95
3.3.3. Definiendo Peso $\mathbf{w}_{2,5}^i$	95
3.3.4. Definiendo Torque $\mathbf{T}_{5,5}^i$	96
3.3.5. Definiendo Momento $\mathbf{M}_{5,5}^i$	96

3.3.6.	Definiendo Momento $\mathbf{M}_{8,5}^i$	97
3.3.7.	Transformando Fuerzas, Torques y Momentos al Espacio \mathcal{R}^3	97
3.4.	Vectores de Posición en Momentos del Cuerpo 2i	98
3.5.	Fuerzas y Momentos del Cuerpo 3i	98
3.5.1.	Definiendo Fuerza $\mathbf{F}_{8,8}^i$	98
3.5.2.	Definiendo Fuerza $\mathbf{F}_{9,8}^i$	98
3.5.3.	Definiendo Peso $\mathbf{w}_{3,8}^i$	99
3.5.4.	Definiendo Momento $\mathbf{M}_{8,8}^i$	99
3.5.5.	Transformando Fuerzas, Torques y Momentos al Espacio \mathcal{R}^3	99
3.6.	Vectores de Posición en Momentos del Cuerpo 3i	100
3.7.	Fuerzas y Momentos del Cuerpo p	100
3.7.1.	Definiendo Fuerza $\mathbf{F}_{9,p}^i$	100
3.7.2.	Definiendo Fuerza $\mathbf{F}_{t,p}$, Pesos $\mathbf{w}_{p,p}$, $\mathbf{w}_{c,p}$ y Momento $\mathbf{M}_{t,p}$	101
3.7.3.	Transformando Fuerzas, Torques y Momentos al Espacio \mathcal{R}^3	102
3.8.	Vectores de Posición en Momentos del Cuerpo p	102
3.9.	Aceleración del Cuerpo 2i	102
3.9.1.	Definiendo la Aceleración del Centro de Gravedad $\mathbf{A}_{2,5}^i$	103
3.9.2.	Transformando la Aceleración del Centro de Gravedad, la Velocidad Angular y Aceleración Angular del Cuerpo 2i al Espacio \mathcal{R}^3	105
3.10.	Aceleración del Cuerpo 3i	106
3.10.1.	Definiendo la Aceleración del Centro de Gravedad $\mathbf{A}_{3,8}^i$	106
3.10.2.	Transformando la Aceleración del Centro de Gravedad, la Velocidad Angular y Aceleración Angular del Cuerpo 3i al Espacio \mathcal{R}^3	110
3.11.	Aceleración de la plataforma móvil	111
3.11.1.	Definiendo la Aceleración del Centro de Gravedad $\mathbf{A}_{p,p}$	111
3.11.2.	Transformando la Aceleración del Centro de Gravedad, la Velocidad Angular y Aceleración Angular de la plataforma y el cuerpo sobre el mismo, al Espacio \mathcal{R}^3	112
3.12.	Gráficas de Torques, Fuerzas y Momentos	113
4.	Conclusiones	129
A.	Álgebra de Cuaterniones	133
B.	Generación de Trayectoria	135

Introducción

En esta tesis se presenta el análisis cinemático y dinámico de una plataforma paralela espacial mediante la aplicación de la función vectorial de rotación del álgebra de cuaterniones. A continuación se presentan algunos antecedentes.

Recientemente, el interés en la dinámica de multicuerpos rígidos se ha incrementado, debido al hecho de que muchos sistemas físicos pueden ser simulados como modelos de multicuerpos y también debido a las ventajas en el hardware y software de los equipos de cómputo actuales.

Las ventajas de las computadoras permiten al investigador simular sistemas complejos al derivar algoritmos para formular y resolver las ecuaciones de movimiento para diferentes casos a analizar.

De este modo las ecuaciones suministran información acerca del comportamiento del sistema, asistiendo significativamente al analista para implementar cambios en la geometría, sugerir la aplicación de materiales para un uso específico, realizar pruebas de estabilidad para alcanzar una configuración de equilibrio, validar resultados obtenidos de metodologías para balanceo estático y dinámico de multicuerpos, experimentar el comportamiento de actuadores y como consecuencia probar métodos de control.

Es sabido que el comportamiento del modelo dinámico de cualquier tipo de sistema mecánico espacial, descanza sobre la formulación empleada para describir su movimiento angular: posición, velocidad y aceleración angular [16],[34]. El movimiento lineal: posición, velocidad y aceleración lineal de un punto arbitrario sobre el cuerpo (centro de gravedad por ejemplo), depende de la descripción de la orientación mencionada.

Una de las formulaciones generalmente empleadas para la descripción de la orientación de un cuerpo rígido, son los ángulos de Euler. Dicha herramienta matemática adolece de la desventaja de no poder describir ciertas configuraciones del cuerpo en cuestión [10], [16], [34], debido a singularidades matemáticas de la matriz, que representa la orientación del cuerpo. Una forma de evitar tal situación es implementando en el algoritmo computacional condiciones para evitar la división entre cero [10]. Esta medida hace imposible, seguir el movimiento de un cuerpo, a través de todas las posibles orientaciones que este tome.

Dada la importancia de poder modelar cinemáticamente y dinámicamente multicuerpos rígidos, existe la necesidad de estudiar alternativas para resolver el problema anterior. Una

forma de representar la orientación de un cuerpo en el espacio [3], que no sufre de las singularidades ya dichas, son los cuaterniones o parámetros de Euler de norma unitaria [16].

Estado del Arte

El estudio de los cuaterniones o parámetros de Euler y su aplicación al análisis cinemático y dinámico de cuerpos rígidos se considera a continuación:

En [25] **Méndez**, aplica el álgebra de cuaterniones a los sistemas mecánicos de cadenas cerradas, desarrollando el análisis de la posición de mecanismos y modelos de síntesis para conducción de cuerpo rígido con movimiento plano. Ambos modelos hacen referencia a una posición inicial del mecanismo denominada *configuración no deformada* y una posición actual denominada *configuración deformada*. De esta manera se establecen composiciones de rotaciones planas mediante la función de rotación del álgebra de cuaterniones que permite involucrar ambas configuraciones. Además se establece una metodología que permite resolver ambos problemas mediante un mismo enfoque.

En [21] **Márquez**, aplica el álgebra de cuaterniones a los sistemas mecánicos de cadenas abiertas, en el cual se desarrolla el análisis de la posición de robots manipuladores planos y espaciales. Se establecen los modelos cinemático inverso y directo para un manipulador plano de 2 grados de libertad (gdl) y el manipulador espacial *puma* de 6 gdl. La *configuración no deformada* y *deformada*, permite establecer de manera natural la posición *home* de inicio del movimiento de los manipuladores y las posibles posiciones futuras. Los movimientos espaciales de los cuerpos se establecen mediante composiciones de cuaterniones de rotación, lo que genera una ecuación paramétrica de posición no lineal, debido a la función de rotación de cuaterniones y a las condiciones de unicidad de las normas de los parámetros de los cuaterniones incógnitas que permiten completar el sistema de ecuaciones a resolver. La solución de los modelos es obtenida mediante la aplicación de un método numérico debido a la naturaleza de las ecuaciones.

En [6] **Cuenca**, estudia la cinemática de un manipulador paralelo plano mediante la aplicación del álgebra de cuaterniones. Se establecen modelos de posición, que no emplean rotaciones relativas al eslabón anterior, de esta manera los ángulos de las rotaciones establecidos son absolutos, obteniéndose modelos muy simplificados para las configuraciones *no deformada* y *deformada* del análisis. También se aplica el álgebra de complejos, vista como un subespacio del álgebra de cuaterniones y tratada como una pareja de parámetros ordenados de números reales y no de la manera exponencial. El álgebra compleja se relaciona con el álgebra de cuaterniones mediante rotaciones en un eje perpendicular al plano de movimiento, en este caso el eje z y mediante la aplicación de una transformación que permite pasar del espacio vectorial \mathcal{R}^4 al \mathcal{R}^2 , eliminando componentes de vectores con valor cero. Aplicando la función de rotación de los cuaterniones y la transformación dicha, se obtiene la multiplicación de números complejos que se sabe implica una rotación en el plano. Los modelos cinemáticos resultantes aplicando el álgebra compleja, son mucho más simples que en el caso de los cuaterniones, estando claro que su uso está limitado al movimiento plano desventaja que no muestran los cuaterniones.

En [45] **Vega**, genera de manera sistemática ecuaciones cinemáticas de manipuladores, basado en el estudio del movimiento de las juntas cinemáticas más comúnmente empleadas: juntas rotacionales y prismáticas. Se establecen modelos de tres tipos de manipuladores y se estudia el efecto de las secuencias de movimientos de los cuerpos y se inicia el estudio de las reflexiones para crear un modelo de posición que permita la evasión de obstáculos. Con la teoría establecida se crean algoritmos computacionales y se integran en programas que permiten visualizar el movimiento de los manipuladores mediante una simulación tridimensional de los mismos.

En [24] **Martínez**, estudia la modelación matemática de la intersección de trayectorias planas y tridimensionales, aplicados a un objeto y el órgano terminal de manipuladores. Se establecen restricciones que deben satisfacer las funciones seguidoras que mueven al manipulador para alcanzar su objetivo, tales como: instante de la generación de las trayectorias, instante de intersección y velocidad inicial. Conocidas las ecuaciones paramétricas de las trayectorias que serán interceptadas, se establece un sistema de ecuaciones algebraicas que determinan las ecuaciones paramétricas de la trayectoria interceptora. Conocidas estas últimas, se resuelve la cinemática inversa de la posición de los manipuladores, modelados mediante el álgebra de cuaterniones.

En [18] **Jiménez**, identifica y caracteriza movimientos: secuenciados, simultáneos e híbridos de robots. Se establece un marco teórico para la evasión de obstáculos de un robot de dos grados de libertad y se formulan tres problemas de evasión utilizando movimientos secuenciados y simultáneos. Basada en la teoría establecida se simula un proceso de manufactura requerido por la empresa ABB Sistemas S.A., mediante un robot de tres grados de libertad. Se emplea el álgebra de cuaterniones para el análisis cinemático de los manipuladores estudiados.

En [12] **Flores**, modela una cadena cinemática abierta de dos grados de libertad e implementa mediante un prototipo el control cinemático del mismo para la comprobación experimental del modelo de la posición. El movimiento es ejecutado mediante motores de paso a través de una interface conectada a una computadora.

En [40] **Rubio**, caracteriza dos transformaciones lineales asociadas con una rotación y con una reflexión utilizando el espacio vectorial de los complejos, estos, vistos como un subespacio de los cuaterniones. Además establece dos modelos cinemáticos de posicionamiento de un robot plano de dos grados de libertad utilizando las funciones de rotación y reflexión establecidas. Construye el marco teórico del proceso de evasión de obstáculos, caracterizado por el robot plano y un obstáculo fijo en el plano x-y. Formula el algoritmo que contiene los criterios de evasión y por último simula el movimiento resultante.

En [36] **Pérez**, modela los movimientos de un robot paralelo plano RRR, Caracteriza cuatro clases de movimientos: simultáneos, secuenciales unitarios, secuenciales mixtos, secuenciales híbridos. Propone además un modelo de información operacional para robots manipuladores usando la notación Booch. Este modelo de información, se aplica para generar las reglas que determinan las clases y número de movimientos asociados al robot paralelo. El modelo cinemático es construido utilizando el álgebra de los números complejos y se formulan

los problemas cinemáticos directo e inverso. Un prototipo del robot paralelo es construido y controlado para probar algunos movimientos simultáneos.

En [42] **Soto**, presenta la aplicación sistemática del álgebra de cuaterniones para obtener los modelos matemáticos de las secuencias reales de un brazo mecánico de tres grados de libertad. Se establecen diferentes modelos, rotando en diferentes secuencias los cuerpos del manipulador al seguir una trayectoria preescrita.

En [29] **Navarro**, presenta una forma sistemática para construir un simulador computacional relacionado con un sistema de manufactura tipo serial. El módulo de producción estudiado, consiste en la aplicación de cordones de soldadura a un componente metal-mecánico. Se utilizaron en el estudio, tres robots manipuladores espaciales de tres grados de libertad para simular las operaciones de soldadura. Los modelos cinemáticos de posicionamiento de los robots se generaron utilizando el álgebra de cuaterniones. El sistema de control de operaciones del módulo se basa en un código binario de procesos. Los modelos cinemáticos fueron programados en el software mathematica.

En [8] **Delfín**, presenta el modelo cinemático de un robot paralelo plano. Se establecen los problemas cinemáticos directo e inverso para los modelos de posición, velocidad y aceleración. Se establecen además las primera y segunda derivadas de las bases locales deformadas, las relaciones entre las componentes de las velocidades y aceleraciones angulares y los componentes de las derivadas de los números complejos definidos en forma paramétrica. Se implementaron las ecuaciones de los modelos en un software específico para un prototipo construido.

En [41], [23] y [11], **Ruelas, Martínez y Esquer**, extienden el uso de los complejos en su forma parametrizada, vistos como un subespacio de los cuaterniones, para poder realizar análisis y síntesis de robots y mecanismos planos involucrando conceptos de velocidad, aceleración y trayectorias, algunos de estos estudios tuvieron una aplicación posterior en un software de simulación o en su caso de síntesis de mecanismos para cuatro puntos de presición.

En [22] **Márquez**, establece la aplicación del álgebra de cuaterniones para la solución de problemas cinemáticos y dinámicos de robot manipuladores. Se desarrolla una metodología sistemática y generalizada para modelar la cinemática y la dinámica de robots seriales. Se parametriza en términos de cuaterniones las ecuaciones cinemáticas y dinámicas. Se establecen las relaciones entre las posiciones, velocidades, aceleraciones angulares y los cuaterniones. Por último se solucionan las ecuaciones del tipo polinomial de la cinemática y dinámica de manera simbólica, mediante el desarrollo de programas computacionales para la simulación del comportamiento del sistema robótico.

En [26] **Méndez**, aplica el álgebra de cuaterniones a la solución de la cinemática y dinámica de mecanismos planos y espaciales de un solo lazo vectorial. Se desarrollan modelos cinemáticos espaciales mediante configuraciones iniciales (*configuración no deformada*) y configuraciones finales (*configuración deformada*) de los mecanismos. Se establecen composiciones de rotaciones espaciales mediante la función de rotación de cuaterniones. Además se crean modelos dinámicos para los casos planos y espaciales.

En [43], **Spring** compara los parámetros de Euler con los parámetros de Rodrigues, ángulos de Euler y otros conjuntos de parámetros utilizados para la descripción de rotaciones arbitrarias. Mostrando que los parámetros de Euler tienen la ventaja de ser un mapeo dos a uno y no singular para describir una rotación. En adición muestra que los parámetros de Euler forman un cuaternión unitario y que puede ser manipulado usando el álgebra de cuaterniones. Spring muestra a través de ejemplos que la aplicación de tal álgebra simplifica grandemente la manipulación de múltiples rotaciones y la rotación de marcos de referencia.

En [13], **Friberg** establece un método para calcular los parámetros de Euler usando los datos de tres puntos no colineales los cuales pueden ser dados a partir de un marco inercial. El propósito es facilitar la derivación de las condiciones iniciales para la solución de ecuaciones diferenciales de movimiento.

En [47], **Wampler** realiza la demostración de las 40 soluciones no singulares de la cinemática directa de un plataforma general de Stewart, mediante el uso de las coordenadas de Soma, las cuales son idénticas a los cuaterniones duales excepto por un factor de un medio. Los cuaterniones duales pueden ser representados usando cuaterniones unitarios para la rotación de cuerpos y para la representación de un vector de posición.

En [20] **Mántaras** et al, se establece un modelo tridimensional del comportamiento cinemático de una suspensión tipo McPherson, con el propósito de determinar la influencia de los parámetros del sistema sobre la dirección del vehículo. En dicho modelo la orientación de los sistemas de referencia móviles establecidos en los cuerpos que forma la suspensión, son definidas usando parámetros de Euler, buscando eliminar los problemas de incertidumbre presentado por otras coordenadas angulares.

En [48], **Yuan**, los cuaterniones son utilizados para modelar los errores de la orientación del órgano terminal en manipuladores para el problema de control de la velocidad y aceleración. La formulación del cuaternión simplifica grandemente el análisis de estabilidad del error dinámico de la orientación.

En [4], **Chou** los cuaterniones son utilizados para describir rotaciones arbitrarias en el espacio sin degenerar en singularidades. Cantidades físicas como desplazamiento angular, velocidad, aceleración y momentum angular, son expresadas de forma vectorial como matricial en el espacio vectorial de los cuaterniones.

En [17], **Husty** resuelve el problema cinemático directo de plataformas tipo Stewart-Gough. Este usa un conjunto mínimo de ecuaciones de restricción obtenidas mediante un mapeo cinemático para producir un polinomio de variable única de 4° grado. Dicho mapeo representa un movimiento espacial arbitrario en un sistema fijo, mediante una rotación y una traslación de un vector definido en un sistema en movimiento. La rotación expresada en términos de parámetros de Euler (cuaterniones de norma unitaria), permite establecer superficies de restricción algebraicas, que corresponde a la restricción de que un punto de un cuerpo rígido está acotado a moverse sobre una esfera. De esta manera el movimiento de cualquiera seis puntos del plato móvil de la plataforma, puede ser representado como moviéndose sobre seis superficies esféricas mediante dicho mapeo cinemático.

En [7], **Dam** et al, proponen el uso de los cuaterniones como un método para rotar objetos y ser usados en la animación por computadora. Para lograr tal objetivo se requieren definir orientaciones iniciales y finales y mediante métodos de interpolación, crear orientaciones intermedias a través de las funciones de interpolación. En dicha investigación se propone un nuevo método óptimo de interpolación llamado "spring", cuya característica importante en las funciones creadas, es la percepción de la velocidad angular en el movimiento.

En [28], **Mullineux** emplea los cuaterniones para describir traslaciones y rotaciones en el espacio tridimensional, mediante el álgebra de Clifford. Para obtener traslaciones, define una variable de valor pequeño, relacionado al cuadrado de uno de los vectores base de su espacio, cuando la variable pequeña, tiende a cero, se obtiene una traslación. De esta manera, se pueden establecer desplazamientos espaciales de objetos tridimensionales, definiendo posiciones de puntos a través de los cuales se generan movimientos suaves, empleado técnicas de interpolación mediante funciones de Bézier y B-spline.

En [35], **Perez** et al, aplica cuaterniones duales para la síntesis cinemática de sistemas robóticos restringidos. Estos sistemas se componen de cadenas seriales con restricciones en el movimiento, impuestos por las juntas empleadas. Las ecuaciones cinemática son formuladas mediante desplazamiento de tornillos sucesivos, tal que las variables diseño son las coordenadas que definen los ejes de las juntas en una posición de referencia. Entonces los cuaterniones duales, se emplean para definir dichos desplazamientos y para simplificar la estructura de las ecuaciones de diseño.

En [30]-[34] **Nikravesh** et al, realizaron estudios desde un punto de vista matricial de los parámetros de Euler y sus derivadas respecto al tiempo, estableciendo identidades entre: los parámetros, velocidades y aceleraciones angulares de los cuerpos, dichas identidades permiten establecer ecuaciones cinemáticas y dinámicas para sistemas mecánicos restringidos (cuerpos unidos por juntas cinemáticas). Lo anterior derivó en un procedimiento sistemático para generar las ecuaciones de movimiento para sistemas mecánicos que puede ser orientado para la creación de programas de computadora de propósito general. Una consecuencia directa del procedimiento es la exigencia del conocimiento tanto de las propiedades matemáticas de los parámetros de Euler, como de cada uno de los modelos que representan las juntas cinemáticas para crear ecuaciones de restricción del movimiento.

En [27], **Morton** especifica la orientación de un cuerpo rígido arbitrario en términos de un conjunto de cuatro parámetros de Euler. De esta manera reemplaza el vector de velocidad angular en la ecuación de momentum angular del cuerpo, dejándola en función de los parámetros. A través del uso de las ecuaciones de Euler, se fórmulan las ecuaciones dinámicas rotacionales en términos de un sistema de ocho ecuaciones diferenciales acopladas de primer orden involucrando los cuatro parámetros de Euler y los cuatro momentums conjugados. El conjunto de ecuaciones diferenciales es resuelto numéricamente para un caso representativo de movimiento libre de torque de un cuerpo rígido arbitrario asimétrico.

En [9], **Dooley y McCarthy** establecen las ecuaciones dinámicas de movimiento de sistemas de robots cooperantes, mediante la conexión de ecuaciones de movimiento de los cuerpos del sistema y el objeto a manipular y empleando las ecuaciones de restricción de la cadena

cerrada. Las restricciones se establecen mediante el álgebra de cuaterniones duales. Estos emplean cuaterniones para formar un vector de dimensión ocho y representar un desplazamiento espacial, siendo los cuatro primeros términos asociados a la rotación y los segundos términos asociados a la traslación. Con esta álgebra se establece y resuelve el modelo dinámico de un péndulo doble, en el cual la única fuerza externa es la gravedad y se verifica la conservación de la energía para el movimiento.

En [5], **Cooke** et al, se establece la creación de un simulador aerodinámico de propósito general que es particularmente útil a los estudiantes de aerodinámica, para analizar de manera gráfica las características de estabilidad y de control de diferentes aeronaves. Una característica clave del simulador es el uso de los cuaterniones para la representación de la orientación del avión, para evitar las singularidades y las altas variaciones de datos asociadas con los ángulo de Euler, la representación más común de la orientación.

En [19], **Le Saux** et al, se resuelve de manera numérica el modelo dinámico de un disco en rodamiento sobre un soporte plano. Dicho modelo simula la dinámica de un disco tomando en cuenta diferentes modelos de fricción: resistencia contra el deslizamiento, giro y rodamiento, además se estudia el decaimiento de la energía del sistema durante su etapa final. Dado que el disco experimenta rotaciones arbitrarias y debido a que la descripción de la orientación de un cuerpo rígido basado en tres parámetros incluye una singularidad para una cierta orientación, el modelo dinámico parametriza la orientación del disco con parámetros de Euler (cuaterniones unitarios).

En [14], **Geradin** et al, aplican los cuaterniones para modelar las rotaciones experimentadas por cuerpos deformables, muestran una técnica para representar grandes rotaciones finitas en términos de solamente tres parámetros independientes, el vector de rotación conformal, es descrito y aplicado a la formulación de elemento finito de problemas de mecanismos tridimensionales. Un elemento finito de viga que experimenta grandes rotaciones finitas y varios tipos de juntas rígidas se han desarrollado. Se presentan ejemplos de prueba los cuales demuestran la aplicabilidad de la técnica propuesta.

Objetivos de la Tesis

Muchas de las referencias mencionadas, establecen tanto ecuaciones cinemáticas como ecuaciones dinámicas de sistemas mecánicos espaciales empleando el álgebra de cuaterniones o los parámetros de Euler. En el estudio de los sistemas mecánicos, un área de interés reciente ha sido los robots paralelos espaciales o plataformas paralelas espaciales.

Los estudios actuales empleando el álgebra de cuaterniones, se han avocado a resolver el problema de la posición de las plataformas en sus modalidades de cinemática inversa y directa, nula atención han sido dadas a los análisis de velocidad y aceleración y como una consecuencia al análisis dinámico. Siendo estos análisis de gran importancia para el diseño y control de cualquier dispositivo mecánico y debido al aumento de aplicaciones utilizando robots paralelos espaciales, se establece un interés en la investigación de estos robots empleando el álgebra de cuaterniones como una herramienta analítica para generar y estudiar modelos tanto cinemáticos como dinámicos.

Por otra parte en [37] y [38], **Ávila** reportó dos investigaciones posdoctorales relacionadas, donde se estudian de manera sistemática las propiedades de los cuaterniones para modelar rotaciones de cuerpos rígidos. En [38] se desarrolla un modelo cinemático de la posición para un manipulador serial empleando la función de rotación vectorial definida en [37]. En dichas investigaciones no se estudian modelos cinemáticos de la velocidad y aceleración, ni dinámicos del manipulador serial.

Se concluye de esta manera, que no existe investigación alguna relacionada con los análisis cinemático y dinámico de robots paralelos espaciales, empleando el álgebra de cuaterniones o empleando los parámetros de Euler. Razón por la cual se presenta la siguiente tesis, cuyos desarrollos emplearán la definición de rotación vectorial del álgebra de cuaterniones definida en [37].

Objetivos de la Tesis

Los objetivos de esta tesis son el análisis cinemático y dinámico de un robot paralelo espacial, empleando la rotación del álgebra de cuaterniones en su forma vectorial.

Aportaciones al Estado del Arte

Aplicación de la operación de multiplicación del álgebra de cuaterniones:

- Para la representación de las composiciones de rotaciones de cuerpos rígidos.
- Para la representación de las composiciones de velocidades y aceleraciones angulares en función de los parámetros de los cuaterniones.
- Para la definición de las velocidades y aceleraciones lineales de puntos de un cuerpo rígido en función de los parámetros de los cuaterniones.
- Para establecer la relación existente entre las velocidades y aceleraciones angulares y los parámetros de los cuaterniones.
- Para establecer las ecuaciones de restricción cinemática de juntas esféricas, en los modelos de la posición, velocidad y aceleración.
- Para la transformación a distintas bases de los vectores de velocidad y aceleración tanto lineal como angular.
- Para la transformación a distintas bases de los vectores de fuerzas y momentos tanto externos como internos.

Las aportaciones anteriores son el resultado final de las siguientes ideas y cuestionamientos.

Antecedente: Se parte de conocer que es posible rotar un cuerpo rígido, empleando un cuaternión general (rotación de un ángulo alrededor de un eje, ambos arbitrarios) y la función vectorial de rotación del álgebra de cuaterniones definida en [37].

Para establecer el **modelo cinemático de posición** se plantea lo siguiente:

Dada la regla de rotación de un cuerpo rígido empleando un cuaternión general

- 1.- ¿Existe una regla de composición de rotaciones para expresar la misma orientación del cuerpo rígido?
- 2.- ¿Esta regla se basa en la operación de multiplicación o la función de rotación del álgebra de cuaterniones?
- 3.- Dado uno de los casos anteriores ¿cómo se define esta regla?

Para establecer el **modelo cinemático de velocidad** se plantea lo siguiente:

- 4.- ¿Cuál es la expresión de **velocidad angular** asociada al cuaternión general?
- 5.- ¿Cuál es la expresión de **velocidad angular** asociada a la composición de rotaciones?
- 6.- ¿Cómo se define la regla que asocia la **velocidad angular** a la **velocidad lineal** en ambos casos?
- 7.- ¿Cuál es la relación que existe entre las **velocidades angulares** definidas en \mathcal{R}^4 y \mathcal{R}^3 ?

Para establecer el **modelo cinemático de aceleración** se plantea lo siguiente:

- 8.- ¿Cuál es la expresión de **aceleración angular** asociada al cuaternión general?
- 9.- ¿Cuál es la expresión de **aceleración angular** asociada a la composición de rotaciones?
- 10.- ¿Cómo se define la regla que asocia la **aceleración angular** a la **aceleración lineal** en ambos casos?
- 11.- ¿Cuál es la relación que existe entre las **aceleraciones angulares** definidas en \mathcal{R}^4 y \mathcal{R}^3 ?

Para establecer el **modelo dinámico** se plantea lo siguiente:

Empleando las ecuaciones dinámicas de Newton-Euler, las cuales definen sus ecuaciones en las bases locales adheridas a los cuerpos:

- 12.- ¿Cuál es la regla para expresar velocidades y aceleraciones, tanto lineales como angulares, en las bases locales?
- 13.- ¿Cuál es la regla para expresar vectores de fuerzas y momentos, tanto internos como externos, en las bases locales?

A partir de los cuestionamientos establecidos, se desarrolla la presente tesis.

Estructura de la Tesis

La tesis está estructurada en cuatro capítulos y dos apéndices.

El **Capítulo 1** se abordan conceptos generales de la cinemática de cuerpos rígidos desde el punto de vista de la mecánica del medio continuo. Se definen los conceptos de cuerpo, movimiento de un cuerpo, además de la primera y segunda derivadas conocidas como la velocidad y aceleración del movimiento. De esta manera, se puede establecer el concepto de movimiento rígido y el movimiento de un cuerpo rígido compuesto de traslaciones y rotaciones. Por último se dan los conceptos de base global, base inercial y base local. Todo lo anterior para justificar las operaciones entre las coordenadas de los puntos de un cuerpo y los cuaterniones involucrados. Por otra parte se abordan conceptos de la cinemática espacial de cuerpos rígidos asociados a la variación de la magnitud y orientación de un vector respecto al tiempo. Dichos conceptos se representan en el espacio vectorial de los cuaterniones. Se obtiene expresiones para la **posición**, **velocidad** y **aceleración** tanto **lineal** como **angular**, considerando el movimiento del cuerpo como una sucesión de rotaciones y en función de los parámetros de los cuaterniones.

También se obtienen representaciones matriciales asociadas a las funciones de **velocidad** y **aceleración angular**, que son familiares al movimiento tridimensional de los cuerpo rígidos. Por último se muestran las propiedades geométricas de los conceptos obtenidos y como se definen estos entre los espacios vectoriales de \mathcal{R}^3 y \mathcal{R}^4 .

El **Capítulo 2** presenta el **análisis de posición, velocidad y aceleración** de una Plataforma Paralela Espacial y se resuelve el problema **cinemático inverso**. Se emplean las formulaciones hechas en el **Capítulo 1**, para expresar conceptos de **velocidad** y **aceleración lineal** en función de la **velocidad** y **aceleración angular** en términos de los parámetros de los cuaterniones.

Para el **análisis de posición**, el movimiento de los cuerpos se obtiene mediante la función de rotación de los cuaterniones. La ecuación de posición se establece usando ecuaciones de lazo vectorial y las normas de los cuaterniones incógnitas. Esto permite el cálculo de los parámetros de los cuaterniones y a partir de estos se calculan los ángulos girados por los cuerpos.

Para el **análisis de velocidad y aceleración**, las ecuaciones se establecen mediante la primera y segunda derivada respecto al tiempo de las ecuaciones de posición y las normas. De la solución de este sistema de ecuaciones, se obtienen las velocidades y aceleraciones angulares de los cuerpos.

El **Capítulo 3** presenta el **análisis dinámico** de la plataforma desde el punto de vista de los parámetros de los cuaterniones. Se establece el diagrama de cuerpo libre para la plataforma, mostrando las fuerzas y momentos de reacción que representan las restricciones impuestas por las juntas cinemáticas. También se establecen las fuerzas y torques externos aplicados a la plataforma debido al contacto con el medio y/o por las necesidades de actuación.

Las ecuaciones dinámicas de Newton – Euler son escritas para cada cuerpo rígido. Y por último vectores de velocidad, aceleración, fuerzas y momentos se expresan en distintos sistemas de referencia mediante la función de rotación de los cuaterniones.

El **Capítulo 4** recoge a manera de conclusiones las aportaciones fundamentales de este trabajo, así como las principales líneas de investigación que basadas en el trabajo sugiere el autor.

El **Apéndice A** presenta algunas propiedades del álgebra de cuaterniones.

El **Apéndice B** presenta la generación de una trayectoria propuesta, que deberá seguir un punto del órgano terminal de la plataforma y su orientación respectiva.

Capítulo 1

Cinemática de Cuerpo Rígido

1.1. Introducción

En este capítulo se abordan conceptos generales de la cinemática de cuerpos rígidos desde el punto de vista de la mecánica del medio continuo [1],[15]. Se define el concepto de cuerpo, movimiento de un cuerpo y la trayectoria que este escribe, además de la primera y segunda derivadas conocidas como la velocidad y aceleración del movimiento. Se definen también el campo material y espacial asociado con dicho movimiento. De esta manera, se puede establecer el concepto de movimiento rígido y el movimiento de un cuerpo rígido compuesto de traslaciones y rotaciones. También se establecen de manera introductoria los cuaterniones y algunas de sus propiedades y la relación que esta guarda con las rotaciones. Por último se dan los conceptos de base global, base inercial y base local [2]. Este último dependiente de la función de movimiento, un punto material en el cuerpo definido como origen de un sistema y una base en \mathcal{R}^3 . Todo lo anterior para justificar las operaciones entre las coordenadas de los puntos de un cuerpo y los cuaterniones involucrados.

De esta manera, para poder modelar los movimientos de cuerpos rígidos, se desarrolla mediante la representación paramétrica de la rotación dada en [37], conceptos de la cinemática de cuerpos rígidos asociados a la variación de la magnitud y orientación de un vector respecto al tiempo. El desarrollo de dichos conceptos tendrán su representación en \mathcal{R}^4 , el espacio vectorial de los cuaterniones.

Se presentan entonces las formulaciones de las **ecuaciones de posición, velocidad y aceleración lineal** de puntos de un cuerpo rígido y las **ecuaciones de posición, velocidad y aceleración angular** de cuerpos rígidos en el espacio tridimensional utilizando el álgebra de cuaterniones. El análisis principia considerando que la orientación de un cuerpo rígido en el espacio tridimensional puede definirse mediante una rotación alrededor de un eje o mediante

la composición de un mínimo de tres rotaciones en ejes distintos [44].

Lo anterior permitirá en una segunda instancia, obtener expresiones para la **posición**, **velocidad** y **aceleración** tanto **lineal** como **angular**, considerando el movimiento del cuerpo como una sucesión de rotaciones y en función de los parámetros de los cuaterniones. En una tercera instancia se obtienen algunas representaciones matriciales asociadas a las funciones de **velocidad** y **aceleración angular**, que son familiares al movimiento tridimensional de los cuerpos rígidos.

Así mismo se demuestran las propiedades geométricas asociadas a las definiciones obtenidas, tales como la perpendicularidad entre los vectores de velocidad lineal y los vectores de posición, así como las componentes vectoriales tangenciales y normales de la aceleración lineal, entre otros. Por último se muestra la relación que existe entre los vectores que representan la velocidad y aceleración angular de manera paramétrica en \mathcal{R}^4 y su contraparte en el espacio de \mathcal{R}^3 .

1.2. Conceptos Generales de Cinemática de Cuerpo Rígidos y su Relación con el Concepto de Cuaternión

El estudio de la cinemática de cuerpos rígidos se basa en [1]:

A Definición de cuerpo general \mathcal{B} .

B Definición de movimiento de un cuerpo.

C Definición de cuerpo rígido.

D El movimiento de un cuerpo rígido compuesto exclusivamente de traslaciones y rotaciones.

Estos conceptos se toman casi sin modificación de [15].

La introducción de los cuaterniones se basa en:

E Representación de rotaciones mediante la teoría de cuaterniones.

A su vez, para poder manejar adecuadamente en el contexto de ingeniería mecánica la cinemática y dinámica de los cuerpos considerados, es necesario introducir los conceptos de:

F Base global, base inercial y, sobre todo, base local.

En lo que sigue se explicitan los puntos A a F.

A. Conceptos Básicos Generales

Definición .- Un cuerpo \mathcal{B} es una región regular del espacio \mathcal{E}^3 asociado al espacio afín $(\mathcal{E}^3, \mathcal{R}^3, \mathbf{p})$, o sea, para $\mathcal{B} \neq \emptyset$:

- a) \mathcal{B} es acotado.
- b) \mathcal{B} es simplemente conexo.
- c) La frontera de \mathcal{B} , $\partial\mathcal{B}$, está formada por un número finito de partes:

$$\partial\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^n \partial\mathcal{B}_i, \quad n \geq 1$$

Tal que cada $\partial\mathcal{B}_i$ admite una representación analítica. Las partes $\partial\mathcal{B}_i$ pueden intersectarse cuando mucho en un conjunto de medida cero de \mathcal{E}^3 .

B. Movimiento de un Cuerpo

Definición .- Un movimiento \mathbf{x} de un cuerpo \mathcal{B} es una función de clase C^3 :

$$\mathbf{x}: \mathcal{B} \times \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{E}$$

Tal que para cada t fijo, la función $\mathbf{x}(\cdot, t)$ es una deformación. De esta manera un movimiento es una familia de deformaciones de un parámetro suave, siendo el parámetro el tiempo t .

Se refiere a:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{p}, t)$$

Como el **lugar** ocupado por el punto material \mathbf{p} en el tiempo t y se escribe:

$$\mathcal{B}_t = \mathbf{x}(\mathcal{B}, t)$$

Para el **lugar** ocupado por el cuerpo en el tiempo t .

Es frecuentemente más conveniente trabajar con **lugares** y tiempos que con puntos materiales y tiempos, por esta razón se introduce la **trayectoria**.

Definición .- La **trayectoria** \mathcal{T} del movimiento \mathbf{x} es:

$$\mathcal{T} = \{(\mathbf{x}, t) \mid \mathbf{x} \in \mathcal{B}_t, \quad t \in \mathcal{R}\}$$

Para cada t , $x(\cdot, t)$ es una función uno a uno de \mathcal{B} sobre \mathcal{B}_t ; por lo tanto existe para cada t , su inversa:

$$p(\cdot, t) : \mathcal{B}_t \longrightarrow \mathcal{B}$$

Tal que:

$$\begin{aligned} x(p(\mathbf{x}, t), t) &= \mathbf{x} \\ p(x(\mathbf{p}, t), t) &= \mathbf{p} \end{aligned}$$

Dado $(\mathbf{x}, t) \in \mathcal{T}$:

$$\mathbf{p} = p(\mathbf{x}, t)$$

Es el punto material que ocupa el lugar \mathbf{x} en el tiempo t .

La función:

$$p : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{B}$$

Así definida, es llamada la **función de referencia** del movimiento.

La derivada de x respecto al tiempo:

$$\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{p}, t) = \frac{\partial}{\partial t} x(\mathbf{p}, t)$$

Se llama la **velocidad del movimiento**. Y la segunda derivada de x respecto al tiempo:

$$\ddot{\mathbf{x}}(\mathbf{p}, t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} x(\mathbf{p}, t)$$

Se llama la **aceleración del movimiento**.

Usando la función de referencia p se puede describir la velocidad $\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{p}, t)$ como una función $v(\mathbf{x}, t)$ del lugar \mathbf{x} en el tiempo t . Específicamente:

$$v : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{V}$$

Es definido por:

$$v(\mathbf{x}, t) = \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{p}, t) = \dot{\mathbf{x}}(p(\mathbf{x}, t), t)$$

Y es llamada la **descripción espacial de la velocidad**. El vector $v(\mathbf{x}, t)$ es la velocidad del punto material, el cual en el tiempo t , ocupa el lugar \mathbf{x} .

Más generalmente, cualquier campo asociado con el movimiento puede ser expresado como una función del *punto material* y el tiempo con dominio $\mathcal{B} \times \mathcal{R}$, o como una función del *lugar* y el tiempo con dominio \mathcal{T} .

Por lo tanto se introduce la siguiente terminología: un **campo material** es una función con dominio $\mathcal{B} \times \mathcal{R}$, un **campo espacial** es una función con dominio \mathcal{T} . El campo $\dot{\mathbf{x}}$ es **material**, el campo \mathbf{v} es **espacial**.

Definimos la **descripción espacial** Φ_s de un campo material $(\mathbf{p}, t) \mapsto \Phi(\mathbf{p}, t)$ por:

$$\Phi_s(\mathbf{x}, t) = \Phi(\mathbf{p}(\mathbf{x}, t), t)$$

Y la **descripción material** Ω_m de un campo espacial $(\mathbf{x}, t) \mapsto \Omega(\mathbf{x}, t)$ por:

$$\Omega_m(\mathbf{p}, t) = \Omega(\mathbf{x}(\mathbf{p}, t), t)$$

La descripción material de Φ_s es:

$$(\Phi_s)_m = \Phi$$

La descripción espacial de Ω_m es:

$$(\Omega_m)_s = \Omega$$

Dado un campo material Φ se escribe:

$$\dot{\Phi}(\mathbf{p}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\mathbf{p}, t)$$

Para la derivada con respecto al tiempo t manteniendo el punto material \mathbf{p} fijo, y:

$$\nabla \Phi(\mathbf{p}, t) = \nabla_{\mathbf{p}} \Phi(\mathbf{p}, t)$$

Para el gradiente con respecto a \mathbf{p} manteniendo t fijo. $\dot{\Phi}$ es llamado **derivada temporal material** de Φ , $\nabla \Phi$ es llamado el **gradiente material** de Φ . En particular, el campo material:

$$\mathbf{F} = \nabla \mathbf{x}$$

Es el **gradiente de deformación** en el movimiento \mathbf{x} . Ya que el mapeo $(\mathbf{p}, t) \mapsto \mathbf{x}(\mathbf{p}, t)$ es una deformación de \mathcal{B} :

$$\det \mathbf{F} \geq 0$$

Similarmente, dado un campo espacial Ω se escribe:

$$\Omega'(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \Omega(\mathbf{x}, t)$$

Para la derivada con respecto t , manteniendo el lugar \mathbf{x} fijo, y:

$$\text{grad } \Omega(\mathbf{x}, t) = \nabla_{\mathbf{x}} \Omega(\mathbf{x}, t)$$

Para el gradiente con respecto a \mathbf{x} manteniendo t fijo. Ω' es llamado **derivada temporal espacial** de Ω , $\text{grad } \Omega$ es llamado el **gradiente espacial** de Ω .

Es conveniente definir la **derivada temporal material** $\dot{\Omega}$ de un *campo espacial* Ω . $\dot{\Omega}$ representa la derivada temporal de Ω manteniendo el punto material fijo. De esta manera para calcular $\dot{\Omega}$, se transforma Ω a la descripción material, se toma la derivada temporal material, y entonces se transforma de regreso a la descripción espacial:

$$\dot{\Omega} = ((\Omega_m)_s)^\bullet$$

Esto es:

$$\dot{\Omega}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \Omega(\mathbf{x}(\mathbf{p}, t), t) \Big|_{\mathbf{p}=\mathbf{p}(\mathbf{x}, t)}$$

La siguiente proposición muestra que la derivada temporal material conmuta con las transformaciones materiales y espaciales.

Proposición .- Sea Φ un campo material suave, Ω un campo espacial suave. Entonces:

$$\begin{aligned} (\dot{\Phi})_s &= (\Phi_s)^\bullet \equiv \dot{\Phi}_s \\ (\dot{\Omega})_m &= (\Omega_m)^\bullet \equiv \dot{\Phi}_m \end{aligned}$$

La relación entre las derivadas temporales materiales y espaciales es mostrada en la siguiente proposición.

Proposición .- Sean φ y \mathbf{u} campos espaciales suaves con φ valuado escalarmente y valuado \mathbf{u} vectorialmente. Entonces:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \varphi' + v \cdot \text{grad} \varphi \\ \dot{\mathbf{u}} &= \mathbf{u}' + (\text{grad} \mathbf{u}) \mathbf{v} \end{aligned}$$

De esta manera en particular:

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{v}' + (\text{grad} \mathbf{v}) \mathbf{v}$$

Una simple aplicación de la proposición anterior, es expresada en el siguiente resultado, el cual da la derivada temporal material del **vector de posición** $\mathbf{r}: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{V}$ definido por:

$$\mathbf{r}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \mathbf{o}$$

Proposición .- Considere el vector de posición como un campo espacial definido por $\mathbf{r}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{r}(\mathbf{x})$ para cada $(\mathbf{x}, t) \in \mathcal{T}$. Entonces:

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}$$

Proposición .- Sea \mathbf{u} un campo vectorial espacial suave. Entonces:

$$\nabla(\mathbf{u}_m) = \text{grad}(\mathbf{u})_m \mathbf{F}$$

Donde \mathbf{F} es el gradiente de deformación.

El campo espacial:

$$\mathbf{L} = \text{grad} \mathbf{v}$$

Es llamado el **gradiente de velocidad**.

Proposición

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{F}} &= \dot{\mathbf{L}}_m \mathbf{F} \\ \ddot{\mathbf{F}} &= (\text{grad} \dot{\mathbf{v}})_m \mathbf{F} \end{aligned}$$

Dado un punto material \mathbf{p} , la función $\mathbf{s} : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{E}$ definido por:

$$\mathbf{s}(t) = \mathbf{x}(\mathbf{p}, t)$$

Es llamado **líneas de trayectoria** de \mathbf{p} . Claramente \mathbf{s} es una solución de la ecuación diferencial:

$$\dot{\mathbf{s}}(t) = \mathbf{v}(\mathbf{s}(t), t)$$

C. Cuerpo Rígido

Definición .- Un movimiento \mathbf{x} es **rígido** si:

$$\frac{\partial}{\partial t} |\mathbf{x}(\mathbf{p}, t) - \mathbf{x}(\mathbf{q}, t)| = 0$$

Para $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathcal{B}$ y $t \in \mathcal{R}^+$. De esta manera, un movimiento es rígido, si la distancia entre cualquiera dos puntos materiales permanece constante en el tiempo.

Definición .- Se dice que un cuerpo \mathcal{B} es **rígido**, si sólo admite movimientos rígidos de \mathcal{B} .

D. Movimiento de un Cuerpo Rígido compuesto de Traslaciones y Rotaciones.

Caracterización .- Sea \times un movimiento, y sea \mathbf{v} el correspondiente campo de velocidades. Entonces lo siguiente es equivalente:

a) \times es rígido.

b) En cada tiempo t , $\mathbf{v}(\cdot, t)$ tiene la forma de un desplazamiento rígido infinitesimal de, esto es, $\mathbf{v}(\cdot, t)$ admite la representación:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{y}, t) + \mathbf{W}(t)(\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

Para $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{B}_t$, donde $\mathbf{W}(t)$ es una tensor antisimétrico.

c) El gradiente de velocidad $\mathbf{L}(\mathbf{x}, t)$ es antisimétrico para cada $(\mathbf{x}, t) \in \mathcal{T}$

Caracterización .- Sea \times un movimiento rígido de \mathcal{B} , entonces para $t = t_0$ fijo, $\times(\mathbf{p}, t_0)$ es una deformación homogénea y:

$$\times(\mathbf{p}, t_0) = \times(\mathbf{q}, t_0) + \mathbf{R}(t)(\mathbf{p} - \mathbf{q})$$

Para $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathcal{B}$, $\mathbf{R} : \mathcal{R} \longrightarrow \text{Ort}$, $\text{Ort} = \{\mathbf{R} \mid \mathbf{R} \text{ es ortogonal y } \det \mathbf{R} > 0\}$. \mathbf{R} es ortogonal si:

$$\mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^T\mathbf{R} = \mathbf{I}$$

Equivalentemente:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{R}\mathbf{u} \cdot \mathbf{R}\mathbf{v}$$

El conjunto de todos los $\mathbf{v} \in \mathcal{R}^3$ tal que:

$$\mathbf{R}\mathbf{v} = \mathbf{v}$$

Es un subespacio unidimensional de \mathcal{R}^3 , llamado **eje de \mathbf{R}** .

E. Cuaterniones y Rotaciones

Como es sabido, los cuaterniones forman un cuerpo no conmutativo (Apéndice A), esto es su suma es conmutativa, pero la multiplicación no. La forma clásica de los cuaterniones es (a, b) , $a, b \in \mathcal{C}$. Con suma:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

Y multiplicación:

$$(a, b)(c, d) = (ac - b\bar{d}, ad + b\bar{c})$$

Donde \bar{d} es el complejo conjugado.

Teorema .- *El cuerpo de cuaterniones es isomorfo a $\mathcal{R} \times \mathcal{R}^3 = \{(a, \mathbf{v}) | a \in \mathcal{R}, \mathbf{v} \in \mathcal{R}^3\}$ con las operaciones [1]:*

▪ *Suma:*

$$(a, \mathbf{v}) + (b, \mathbf{w}) = (a + b, \mathbf{v} + \mathbf{w})$$

▪ *Multiplicación:*

$$(a, \mathbf{v}) * (b, \mathbf{w}) = (ab - \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}, a\mathbf{w} + b\mathbf{v} + (\mathbf{v} \times \mathbf{w}))$$

La norma de un cuaternión es:

$$\|(a, \mathbf{v})\| = \sqrt{a^2 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}$$

Su inverso multiplicativo es:

$$(a, \mathbf{v})^{-1} = \left(\frac{a}{\|(a, \mathbf{v})\|}, -\frac{\mathbf{v}}{\|(a, \mathbf{v})\|} \right)$$

Para $(a, \mathbf{v}) \neq (a, \mathbf{0})$

Teorema (Fórmula de Hamilton para Rotaciones).- *Un cuaternión \mathbf{q} se llama rotación si tiene la forma:*

$$\mathbf{q} = \left(\cos \frac{\varphi}{2}, \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2} \mathbf{e} \right)$$

Donde \mathbf{e} es un vector unitario llamado **eje de rotación**. Entonces un giro de φ radianes alrededor de \mathbf{e} , está dado por:

$$\mathbf{a}' = \mathbf{q} * \mathbf{a} * \mathbf{q}^{-1}$$

Caracterización de las Rotaciones

1. $\|\mathbf{q}\| = 1$
2. Las rotaciones con cuaterniones forman un grupo isomorfo al grupo de las matrices ortogonales con determinante positivo de 3×3 .

De esta manera, todo lo que algebraicamente se puede realizar con rotaciones clásicas, es factible de ser realizado mediante el subgrupo multiplicativo de los cuaterniones \mathbf{q} .

Para la congruencia con el resto de la tesis, basta con explicitar las operaciones en términos de **coordenadas**, para lo cual se requiere el concepto de base, del cual se derivan otros conceptos importantes para los sistemas mecánicos con eslabones.

F. Bases

Se hace notar que el concepto de base está definido para el espacio vectorial del espacio afín [2].

Definición .- Sea \mathbf{V} un espacio vectorial, un conjunto generador de \mathbf{V} cuyos elementos forman un conjunto linealmente independiente se llama **base de \mathbf{V}** .

La cardinalidad de una base se llama dimensión de \mathbf{V} . En nuestro caso $\mathbf{V} = \mathcal{R}^3$, $\dim \mathcal{R}^3 = 3$. El concepto de base permite definir un sistema de coordenadas en \mathcal{E}^3 .

Definición .- Sea $(\mathcal{E}^3, \mathcal{R}^3, \mathbf{p})$ un espacio afín. Sea $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, una base de \mathcal{R}^3 . Sea \mathbf{o} , un punto de \mathcal{E}^3 , que se deja fijo y se llama **origen**. Se le asignan las coordenadas:

$$\mathbf{o} = (0, 0, 0)$$

Se definen tres rectas en \mathcal{E}^3 :

$$\mathcal{L}_1 = \{\mathbf{p} \mid \mathbf{p} = \mathbf{o} + \alpha \mathbf{e}_1, \alpha \in \mathcal{R}\}$$

$$\mathcal{L}_2 = \{\mathbf{p} \mid \mathbf{p} = \mathbf{o} + \beta \mathbf{e}_2, \beta \in \mathcal{R}\}$$

$$\mathcal{L}_3 = \{\mathbf{p} \mid \mathbf{p} = \mathbf{o} + \gamma \mathbf{e}_3, \gamma \in \mathcal{R}\}$$

Las coordenadas de un punto cualquiera \mathbf{p} se definen como las coordenadas en $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ de su vector de posición \mathbf{r} :

$$\mathbf{r} = \mathbf{p} - \mathbf{o}$$

$$\mathbf{r} = \alpha \mathbf{e}_1 + \beta \mathbf{e}_2 + \gamma \mathbf{e}_3 \Rightarrow \mathbf{p} = (\alpha, \beta, \gamma)$$

Ahora sea \mathcal{B} un cuerpo, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{E}^3$. Asumiendo que $\mathbf{o} \in \mathcal{B}$, y sea $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ una base de \mathcal{R}^3 , el sistema:

$$\{\mathbf{o}; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$$

Define unos ejes coordenados en la configuración material de \mathcal{B} .

Sea $x: \mathcal{B} \times \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{E}^3 \times \mathcal{R}$ un movimiento de \mathcal{B} . Para cada instante $t > 0$ definimos un sistema de coordenadas en la configuración espacial \mathcal{B}_t :

$$\{x(\mathbf{o}, t); \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$$

Recordemos que para \mathbf{p}_o fijo, $x(\mathbf{p}_o, t)$ nos da la línea de trayectoria de \mathbf{p}_o . Si estamos hablando de un cuerpo sencillo, (no de un multicuerpo), entonces se dice que $\{\mathbf{o}; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ es una **base global** y $\{x(\mathbf{o}, t); \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ es una **base local**.

Esto obedece a la siguiente consideración: Sea x un movimiento rígido de \mathcal{B} . Consideremos el desplazamiento del origen \mathbf{o} , como una función del tiempo t , o sea de un parámetro real:

$$\mathbf{s}_o(t) = x(\mathbf{o}, t)$$

Como tal es la solución del siguiente sistema [15]:

$$\dot{\mathbf{s}}_o(t) = \mathbf{v}(\mathbf{s}_o(t), t)$$

Definamos una función φ del espacio de cuaterniones $\{(a, \mathbf{v}) | a \in \mathcal{R}, \mathbf{v} \in \mathcal{R}^3\}$ en el espacio afín $(\mathcal{E}^3, \mathcal{R}^3, \mathbf{p})$. Sabemos que un sistema de coordenada en \mathcal{E}^3 es equivalente a la definición de \mathcal{E}^3 como sistemas de coordenadas:

$$\overline{\mathcal{E}^3} = \{\mathbf{p}_o + (\alpha \mathbf{e}_1 + \beta \mathbf{e}_2 + \gamma \mathbf{e}_3)\}$$

Donde $\mathbf{p}_o \in \mathcal{E}^3$ (como conjunto de puntos), $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ base de \mathcal{R}^3 . Para el espacio de los cuaterniones \mathcal{Q} , sea:

$$\varphi = \mathcal{Q} \rightarrow \overline{\mathcal{E}^3}$$

Tal que:

$$\varphi((\lambda, \mathbf{v})) = \mathbf{s}_o(\lambda) + (\alpha \mathbf{e}_1 + \beta \mathbf{e}_2 + \gamma \mathbf{e}_3)$$

Donde (α, β, γ) son las coordenadas de \mathbf{v} . De esta manera definimos un sistema de coordenadas con origen en $\mathbf{s}_o(\lambda)$ para cada λ . Podemos llamar a cada:

$$\mathbf{s}_o(\lambda) + \sum_{i=1}^3 (\alpha_i \mathbf{e}_i)$$

Un sistema **local** de coordenadas, con la ventaja de que ponemos en relación la imagen $x(\mathcal{B}, t)$ del cuerpo \mathcal{B} con el espacio \mathcal{Q} de los cuaterniones. Esto permite definir una rotación (o un conjunto de rotaciones) por medio de los cuaterniones \mathcal{Q} .

Por último por **base inercial** se entiende un sistema de coordenadas cartesianas generalmente basadas en una base ortonormal que incluye un parámetro llamado tiempo, en el cual,

el cuerpo sobre el que no se ejerce fuerza alguna, se encuentra en estado de reposo o movimiento rectilíneo con velocidad constante.

Definición .- Sea $a + (\alpha \mathbf{e}_1 + \beta \mathbf{e}_2 + \gamma \mathbf{e}_3)$ un cuaternión y \mathbf{q} un cuaternión-rotación. Para cada tiempo λ una rotación de \mathcal{B}_λ está dada por:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \varphi^{-1}(\mathbf{s}_o(\lambda); \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \\ \varphi(\mathbf{q} * \mathbf{a} * \mathbf{q}^{-1}) &= \varphi(\mathbf{q} * \varphi^{-1}(\mathbf{s}_o(\lambda); \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) * \mathbf{q}^{-1}) \end{aligned}$$

Quedando de esta manera, todo definido en términos de operaciones con las coordenadas de los puntos de \mathcal{B} y de los cuaterniones involucrados, el resto de la tesis queda sustentado en esta base.

1.3. Orientación de un Cuerpo en el Espacio

Para las siguientes definiciones se establece una base inercial (invariante respecto al tiempo) $\mathbf{e}_j \in \mathcal{R}^3$, para $j = 1, 2, 3$, y una base local $\mathbf{e}_j^n \in \mathcal{R}^3$, unida a un cuerpo rígido y que rota con él. La orientación del cuerpo está definida por la orientación de la base local \mathbf{e}_j^n . Se establecen también bases $\underline{\mathbf{e}}_j, \underline{\mathbf{e}}_j^n \in \mathcal{R}^4$ asociadas a las bases inercial y local en \mathcal{R}^3 , que permitirán realizar operaciones en el espacio vectorial de los cuaterniones y que se relacionan entre sí, mediante la transformación $\mathbf{T}_V : \mathbf{Q}_V \rightarrow \mathcal{R}^3$ [37], es decir $\mathbf{e}_j = \mathbf{T}_V(\underline{\mathbf{e}}_j)$ y $\mathbf{e}_j^n = \mathbf{T}_V(\underline{\mathbf{e}}_j^n)$.

Se tienen, entonces vectores unitarios $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, dirigidos en los ejes coordenados x, y, z , respectivamente (fig. 1.1). También se tienen vectores unitarios $\mathbf{e}_1^n, \mathbf{e}_2^n, \mathbf{e}_3^n$, dirigidos en los ejes coordenados x_n, y_n, z_n , unidos al cuerpo rígido. En el inicio del movimiento ambas bases \mathbf{e}_j y \mathbf{e}_j^n coinciden.

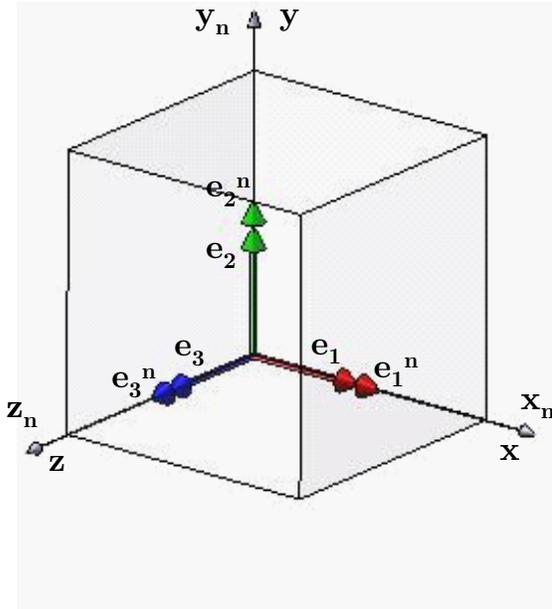


Fig. 1.1 Inicio del movimiento

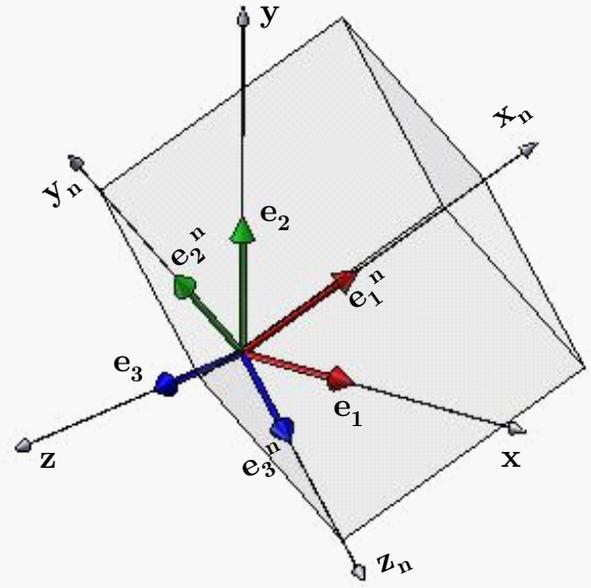


Fig. 1.2 Orientación final

Para un movimiento de rotación cualquiera del cuerpo (fig. 1.2), existe un cuaternión general con eje de giro en el espacio tridimensional y de ángulo θ , que define la orientación final del cuerpo y que se establece como:

Definición 1.- La orientación en el espacio de una base local \mathbf{e}_j^n unida a un cuerpo rígido, respecto a una base inercial \mathbf{e}_j , se expresa como:

$$\underline{\mathbf{e}}_j^n = \rho(\mathbf{q}, \underline{\mathbf{e}}_j) = \frac{1}{\|\mathbf{q}\|^2} \mathbf{q} * \underline{\mathbf{e}}_j * \bar{\mathbf{q}} \quad (1.1)$$

Tal que $\mathbf{e}_j^n = \mathbf{T}_V(\underline{\mathbf{e}}_j^n)$ y donde $\mathbf{q} = \cos(\frac{\theta_j}{2})\mathbf{e}_0 + \text{sen}(\frac{\theta_j}{2})\mathbf{e}_j$, para $j = 1, 2, 3$. Además dados $\mathbf{p} = (p_0, p_1, p_2, p_3)$ y $\mathbf{q} = (q_0, q_1, q_2, q_3)$ se tiene:

$$\mathbf{p} * \mathbf{q} = (p_0q_0 - p_1q_1 - p_2q_2 - p_3q_3, p_0q_1 + p_1q_0 + p_2q_3 - p_3q_2, \\ p_0q_2 - p_1q_3 + p_2q_0 + p_3q_1, p_0q_3 + p_1q_2 - p_2q_1 + p_3q_0)$$

$$Y \bar{\mathbf{q}} = (q_0, -q_1, -q_2, -q_3).$$

Dado que la orientación de un cuerpo rígido en el espacio tridimensional está completamente definida mediante tres rotaciones [44], es posible establecer la definición anterior mediante la composición de tres cuaterniones de rotación. Para este propósito se definen las siguientes ideas:

- 1.- Se asocian cuaterniones $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$, a los ejes x, y, z , respectivamente, los cuales rotarán con el cuerpo (fig 1.3a).
- 2.- Se produce el giro en el eje x usando el cuaternión \mathbf{p}_1 . Los elemento de la base \mathbf{e}_j^1 y los cuaterniones experimentan la rotación (fig 1.3b).
- 3.- Se produce el giro en el eje y_1 usando el cuaternión \mathbf{p}_2^1 (previamente rotado). Los elemento de la base \mathbf{e}_j^2 y los cuaterniones experimentan la rotación (fig 1.3c).
- 4.- Se produce el giro en el eje z_2 usando el cuaternión \mathbf{p}_3^2 (previamente rotado). Los elemento de la base \mathbf{e}_j^3 y los cuaterniones experimentan la rotación (fig 1.3d).

Las distintas orientaciones que los elementos de las base $\mathbf{e}_j^1, \mathbf{e}_j^2, \mathbf{e}_j^3$, y los cuaterniones $\mathbf{p}_2^1, \mathbf{p}_3^2$, ocupan, serán definidas analíticamente mediante la función de rotación ρ . Se tiene entonces la siguiente proposición:

Proposición 1.- *La orientación en el espacio de una base local \mathbf{e}_j^n unida a un cuerpo rígido, que experimenta tres rotaciones respecto a una base inercial \mathbf{e}_j , se expresa como:*

$$\underline{\mathbf{e}}_j^n = \rho(\mathbf{q}, \mathbf{e}_j) = \frac{1}{\|\mathbf{q}\|^2} \mathbf{q} * \mathbf{e}_j * \bar{\mathbf{q}} \quad (1.2)$$

Tal que $\mathbf{e}_j^n = \mathbf{T}_V(\underline{\mathbf{e}}_j^n)$ y donde $\mathbf{q} = \mathbf{p}_1 * \mathbf{p}_2 * \mathbf{p}_3$, para $\mathbf{p}_1 = (p_{10}, p_{11}, 0, 0)$, $\mathbf{p}_2 = (p_{20}, 0, p_{22}, 0)$, $\mathbf{p}_3 = (p_{30}, 0, 0, p_{33})$, cuaterniones con eje de giro en x, y, z , respectivamente.

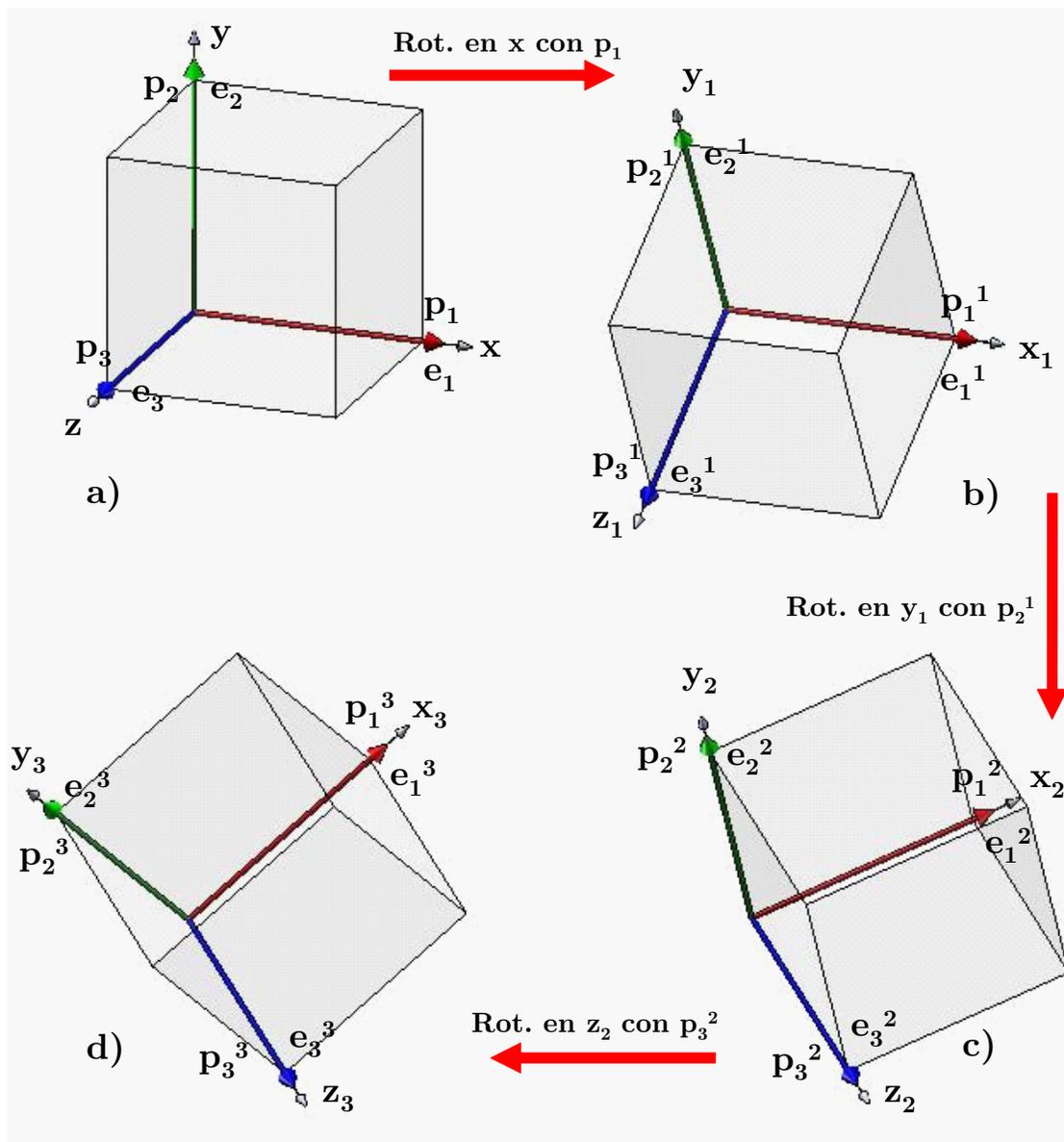


Fig. 1.3 Composición de rotaciones

Demostración:

Dados $\mathbf{p}_1 = (p_{10}, p_{11}, 0, 0)$, $\mathbf{p}_2 = (p_{20}, 0, p_{22}, 0)$, $\mathbf{p}_3 = (p_{30}, 0, 0, p_{33})$, cuaterniones con eje de giro en x, y, z , respectivamente, se produce la rotación de la base e_j^1 y de los cuaterniones

\mathbf{p}_j^1 (fig. 1.3b), en el eje x mediante \mathbf{p}_1 :

$$\underline{\mathbf{e}}_j^1 = \rho(\mathbf{p}_1, \underline{\mathbf{e}}_j) \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1^1 &= \rho(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_1) = \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2^1 &= \rho(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) \\ \mathbf{p}_3^1 &= \rho(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_3) \end{aligned} \quad (1.4)$$

La ec.(1.4) establece la posición actual de los cuaterniones de rotación. Se produce la rotación de la base $\underline{\mathbf{e}}_j^2$ y de los cuaterniones \mathbf{p}_j^2 (fig. 1.3c), en el eje y_1 mediante \mathbf{p}_2^1 :

$$\underline{\mathbf{e}}_j^2 = \rho(\mathbf{p}_2^1, \underline{\mathbf{e}}_j^1) \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1^2 &= \rho(\mathbf{p}_2^1, \mathbf{p}_1^1) \\ \mathbf{p}_2^2 &= \rho(\mathbf{p}_2^1, \mathbf{p}_2^1) = \mathbf{p}_2^1 \\ \mathbf{p}_3^2 &= \rho(\mathbf{p}_2^1, \mathbf{p}_3^1) \end{aligned} \quad (1.6)$$

Se produce la rotación de la base $\underline{\mathbf{e}}_j^3$ y de los cuaterniones \mathbf{p}_j^3 (fig. 1.3d), en el eje z_2 mediante \mathbf{p}_3^2 :

$$\underline{\mathbf{e}}_j^3 = \rho(\mathbf{p}_3^2, \underline{\mathbf{e}}_j^2) \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1^3 &= \rho(\mathbf{p}_3^2, \mathbf{p}_1^2) \\ \mathbf{p}_2^3 &= \rho(\mathbf{p}_3^2, \mathbf{p}_2^2) \\ \mathbf{p}_3^3 &= \rho(\mathbf{p}_3^2, \mathbf{p}_3^2) = \mathbf{p}_3^2 \end{aligned} \quad (1.8)$$

Además las siguientes propiedades se cumplen:

$$\overline{\mathbf{p} * \mathbf{q}} = \overline{\mathbf{q}} * \overline{\mathbf{p}} \quad (1.9)$$

$$\mathbf{p} * \overline{\mathbf{p}} = \overline{\mathbf{p}} * \mathbf{p} = \mathbf{1} = (1, 0, 0, 0) \quad (1.10)$$

A continuación se simplifican las expresiones anteriores.

Simplificando $\underline{\mathbf{e}}_j^1$

De ec.(1.3) se tiene:

$$\underline{\mathbf{e}}_j^1 = \rho(\mathbf{p}_1, \underline{\mathbf{e}}_j) = \frac{1}{\|\mathbf{p}_1\|^2} \mathbf{p}_1 * \underline{\mathbf{e}}_j * \overline{\mathbf{p}}_1 \quad (1.11)$$

Simplificando $\mathbf{p}_2^1, \mathbf{p}_3^1$

De ec.(1.4) y sus conjugados, ec.(1.9), se tiene:

$$\mathbf{p}_2^1 = \rho(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = \frac{1}{\|\mathbf{p}_1\|^2} \mathbf{p}_1 * \mathbf{p}_2 * \bar{\mathbf{p}}_1 \quad (1.12)$$

$$\bar{\mathbf{p}}_2^1 = \frac{1}{\|\mathbf{p}_1\|^2} \mathbf{p}_1 * \bar{\mathbf{p}}_2 * \bar{\mathbf{p}}_1 \quad (1.13)$$

$$\mathbf{p}_3^1 = \rho(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_3) = \frac{1}{\|\mathbf{p}_1\|^2} \mathbf{p}_1 * \mathbf{p}_3 * \bar{\mathbf{p}}_1 \quad (1.14)$$

$$\bar{\mathbf{p}}_3^1 = \frac{1}{\|\mathbf{p}_1\|^2} \mathbf{p}_1 * \bar{\mathbf{p}}_3 * \bar{\mathbf{p}}_1 \quad (1.15)$$

Simplificando $\underline{\mathbf{e}}_j^2$

De la misma manera de ec.(1.5) se tiene:

$$\underline{\mathbf{e}}_j^2 = \rho(\mathbf{p}_2^1, \underline{\mathbf{e}}_j^1) = \frac{1}{\|\mathbf{p}_2^1\|^2} \mathbf{p}_2^1 * \underline{\mathbf{e}}_j^1 * \bar{\mathbf{p}}_2^1 \quad (1.16)$$

Sustituyendo ecs.(1.11)–(1.13) en ec.(1.16):

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{e}}_j^2 &= \frac{1}{\|\mathbf{p}_2^1\|^2} \left(\frac{1}{\|\mathbf{p}_1\|^2} \mathbf{p}_1 * \mathbf{p}_2 * \bar{\mathbf{p}}_1 \right) * \left(\frac{1}{\|\mathbf{p}_1\|^2} \mathbf{p}_1 * \underline{\mathbf{e}}_j * \bar{\mathbf{p}}_1 \right) * \left(\frac{1}{\|\mathbf{p}_1\|^2} \mathbf{p}_1 * \bar{\mathbf{p}}_2 * \bar{\mathbf{p}}_1 \right) \\ &= \frac{1}{\|\mathbf{p}_2^1\|^2} \left(\frac{1}{\|\mathbf{p}_1\|^2} \right)^3 (\mathbf{p}_1 * \mathbf{p}_2 * (\bar{\mathbf{p}}_1 * \mathbf{p}_1) * \underline{\mathbf{e}}_j * (\bar{\mathbf{p}}_1 * \mathbf{p}_1) * \bar{\mathbf{p}}_2 * \bar{\mathbf{p}}_1) \end{aligned}$$

Usando la propiedad de la ec.(1.10) se cumple que $\bar{\mathbf{p}}_1 * \mathbf{p}_1 = \mathbf{1}$, sustituyendo:

$$\underline{\mathbf{e}}_j^2 = \frac{1}{\|\mathbf{p}_2^1\|^2} \left(\frac{1}{\|\mathbf{p}_1\|^2} \right)^3 (\mathbf{p}_1 * \mathbf{p}_2 * \underline{\mathbf{e}}_j * \bar{\mathbf{p}}_2 * \bar{\mathbf{p}}_1) \quad (1.17)$$

Además para cualquier cuaternión unitario \mathbf{p} se cumple que $\|\mathbf{p}\| = 1$, entonces:

$$\left(\frac{1}{\|\mathbf{p}\|^2} \right)^3 = (1)^3 = 1 = \frac{1}{\|\mathbf{p}\|^2} \quad (1.18)$$

Finalmente se tiene:

$$\underline{\mathbf{e}}_j^2 = \frac{1}{\|\mathbf{p}_2^1\|^2} \frac{1}{\|\mathbf{p}_1\|^2} (\mathbf{p}_1 * \mathbf{p}_2 * \underline{\mathbf{e}}_j * \bar{\mathbf{p}}_2 * \bar{\mathbf{p}}_1) \quad (1.19)$$

Simplificando \mathbf{p}_3^2

De ec.(1.6) se tiene:

$$\mathbf{p}_3^2 = \rho(\mathbf{p}_2^1, \mathbf{p}_3^1) = \frac{1}{\|\mathbf{p}_2^1\|^2} \mathbf{p}_2^1 * \mathbf{p}_3^1 * \bar{\mathbf{p}}_2^1 \quad (1.20)$$

Sustituyendo ecs.(1.12)–(1.14) en ec.(1.20):

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_3^2 &= \frac{1}{\|\mathbf{p}_2^1\|^2} \left(\frac{1}{\|\mathbf{p}_1\|^2} \mathbf{p}_1 * \mathbf{p}_2 * \bar{\mathbf{p}}_1 \right) * \left(\frac{1}{\|\mathbf{p}_1\|^2} \mathbf{p}_1 * \mathbf{p}_3 * \bar{\mathbf{p}}_1 \right) * \left(\frac{1}{\|\mathbf{p}_1\|^2} \mathbf{p}_1 * \bar{\mathbf{p}}_2 * \bar{\mathbf{p}}_1 \right) \\ &= \frac{1}{\|\mathbf{p}_2^1\|^2} \left(\frac{1}{\|\mathbf{p}_1\|^2} \right)^3 (\mathbf{p}_1 * \mathbf{p}_2 * (\bar{\mathbf{p}}_1 * \mathbf{p}_1) * \mathbf{p}_3 * (\bar{\mathbf{p}}_1 * \mathbf{p}_1) * \bar{\mathbf{p}}_2 * \bar{\mathbf{p}}_1) \\ \mathbf{p}_3^2 &= \frac{1}{\|\mathbf{p}_2^1\|^2} \frac{1}{\|\mathbf{p}_1\|^2} (\mathbf{p}_1 * \mathbf{p}_2 * \mathbf{p}_3 * \bar{\mathbf{p}}_2 * \bar{\mathbf{p}}_1) \end{aligned} \quad (1.21)$$

De ec.(1.21) se puede definir su conjugado:

$$\bar{\mathbf{p}}_3^2 = \frac{1}{\|\mathbf{p}_2^1\|^2} \frac{1}{\|\mathbf{p}_1\|^2} (\mathbf{p}_1 * \mathbf{p}_2 * \bar{\mathbf{p}}_3 * \bar{\mathbf{p}}_2 * \bar{\mathbf{p}}_1) \quad (1.22)$$

Simplificando $\underline{\mathbf{e}}_j^3$

De ec.(1.7) se tiene:

$$\underline{\mathbf{e}}_j^3 = \rho(\mathbf{p}_3^2, \underline{\mathbf{e}}_j^2) = \frac{1}{\|\mathbf{p}_3^2\|^2} \mathbf{p}_3^2 * \underline{\mathbf{e}}_j^2 * \bar{\mathbf{p}}_3^2 \quad (1.23)$$

Sustituyendo ecs.(1.19), (1.21) y (1.22) en ec.(1.23) y usando las propiedades (1.10) y (1.18):

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{e}}_j^3 &= \frac{1}{\|\mathbf{p}_3^2\|^2} \mathbf{p}_3^2 * \underline{\mathbf{e}}_j^2 * \bar{\mathbf{p}}_3^2 \\ &= \frac{1}{\|\mathbf{p}_3^2\|^2} \left(\frac{1}{\|\mathbf{p}_2^1\|^2} \frac{1}{\|\mathbf{p}_1\|^2} \mathbf{p}_1 * \mathbf{p}_2 * \mathbf{p}_3 * \bar{\mathbf{p}}_2 * \bar{\mathbf{p}}_1 \right) * \\ &\quad \left(\frac{1}{\|\mathbf{p}_2^1\|^2} \frac{1}{\|\mathbf{p}_1\|^2} \mathbf{p}_1 * \mathbf{p}_2 * \underline{\mathbf{e}}_j * \bar{\mathbf{p}}_2 * \bar{\mathbf{p}}_1 \right) * \\ &\quad \left(\frac{1}{\|\mathbf{p}_2^1\|^2} \frac{1}{\|\mathbf{p}_1\|^2} \mathbf{p}_1 * \mathbf{p}_2 * \bar{\mathbf{p}}_3 * \bar{\mathbf{p}}_2 * \bar{\mathbf{p}}_1 \right) \\ \underline{\mathbf{e}}_j^3 &= \frac{1}{\|\mathbf{p}_3^2\|^2} \frac{1}{\|\mathbf{p}_2^1\|^2} \frac{1}{\|\mathbf{p}_1\|^2} (\mathbf{p}_1 * \mathbf{p}_2 * \mathbf{p}_3 * \underline{\mathbf{e}}_j * \bar{\mathbf{p}}_3 * \bar{\mathbf{p}}_2 * \bar{\mathbf{p}}_1) \end{aligned} \quad (1.24)$$

A partir de la propiedad de ortogonalidad [37]:

$$\langle \rho(\mathbf{p}, \mathbf{q}), \rho(\mathbf{p}, \mathbf{r}) \rangle = \langle \mathbf{q}, \mathbf{r} \rangle$$

Se pueden simplificar:

$$\begin{aligned}\|\mathbf{p}_3^2\|^2 &= \langle \mathbf{p}_3^2, \mathbf{p}_3^2 \rangle = \langle \rho(\mathbf{p}_2^1, \mathbf{p}_3^1), \rho(\mathbf{p}_2^1, \mathbf{p}_3^1) \rangle = \langle \mathbf{p}_3^1, \mathbf{p}_3^1 \rangle \\ &= \langle \rho(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_3), \rho(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_3) \rangle = \langle \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_3 \rangle \\ \|\mathbf{p}_3^2\|^2 &= \|\mathbf{p}_3\|^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|\mathbf{p}_2^1\|^2 &= \langle \mathbf{p}_2^1, \mathbf{p}_2^1 \rangle = \langle \rho(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2), \rho(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) \rangle = \langle \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_2 \rangle \\ \|\mathbf{p}_2^1\|^2 &= \|\mathbf{p}_2\|^2\end{aligned}$$

Sustituyendo en ec.(1.24):

$$\mathbf{e}_j^3 = \frac{1}{\|\mathbf{p}_1\|^2} \frac{1}{\|\mathbf{p}_2\|^2} \frac{1}{\|\mathbf{p}_3\|^2} (\mathbf{p}_1 * \mathbf{p}_2 * \mathbf{p}_3 * \mathbf{e}_j * \bar{\mathbf{p}}_3 * \bar{\mathbf{p}}_2 * \bar{\mathbf{p}}_1) \quad (1.25)$$

Además las siguientes propiedades se cumplen para las normas:

$$\begin{aligned}\|\mathbf{p}_1\|^2 \|\mathbf{p}_2\|^2 \|\mathbf{p}_3\|^2 &= \langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_1 \rangle \langle \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_2 \rangle \langle \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_3 \rangle \\ &= (p_{10}^2 + p_{11}^2) (p_{20}^2 + p_{22}^2) (p_{30}^2 + p_{33}^2)\end{aligned} \quad (1.26)$$

Por otro lado se tiene:

$$\begin{aligned}\|\mathbf{p}_1 * \mathbf{p}_2 * \mathbf{p}_3\|^2 &= \langle \mathbf{p}_1 * \mathbf{p}_2 * \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_1 * \mathbf{p}_2 * \mathbf{p}_3 \rangle \\ &= (p_{10}^2 + p_{11}^2) (p_{20}^2 + p_{22}^2) (p_{30}^2 + p_{33}^2)\end{aligned} \quad (1.27)$$

De ecs.(1.26) y (1.27) se concluye que:

$$\|\mathbf{p}_1\|^2 \|\mathbf{p}_2\|^2 \|\mathbf{p}_3\|^2 = \|\mathbf{p}_1 * \mathbf{p}_2 * \mathbf{p}_3\|^2 \quad (1.28)$$

Finalmente si renombramos \mathbf{e}_j^3 por \mathbf{e}_j^n , la ec.(1.25) puede ser declarada como:

$$\mathbf{e}_j^n = \frac{1}{\|\mathbf{q}\|^2} \mathbf{q} * \mathbf{e}_j * \bar{\mathbf{q}} = \rho(\mathbf{q}, \mathbf{e}_j)$$

$$\mathbf{q} = \mathbf{p}_1 * \mathbf{p}_2 * \mathbf{p}_3$$

Que es lo que buscamos. ■

La **Proposición 1** puede aplicarse para cuaterniones con ejes de giro diferentes del orden x, y, z . Ya que la demostración se cumpliría para rotaciones con ejes cualesquiera.

1.4. Ecuación de Posición

Apartir de la **Definición 1** y la **Proposición 1**, la posición actual de un vector \mathbf{r} que experimenta una rotación arbitraria \mathbf{q} , está dada por:

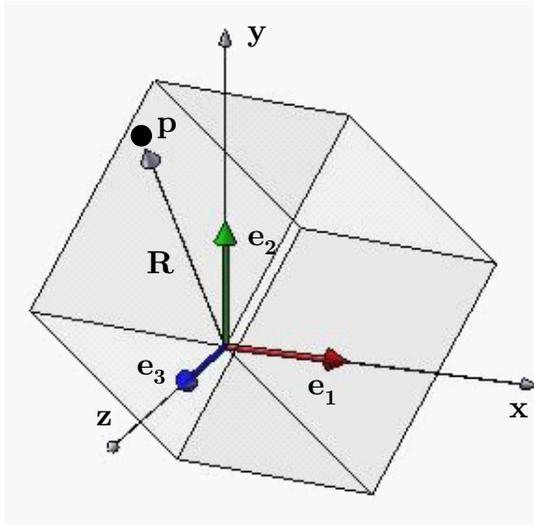


Fig. 1.4 Base inercial

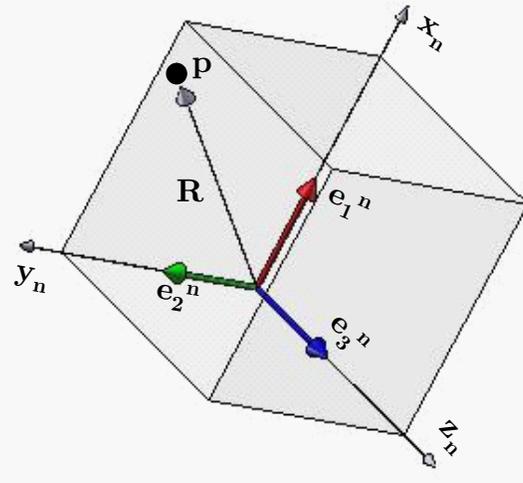


Fig 1.5 Base local

Proposición 2.- La *posición* de un vector cualquiera $\mathbf{R} \in \mathcal{R}^4$, que varía su *orientación* y *magnitud* con el tiempo, está dada por:

$$\mathbf{R} = \rho(\mathbf{q}, \mathbf{r}) = \frac{1}{\|\mathbf{q}\|^2} \mathbf{q} * \mathbf{r} * \bar{\mathbf{q}} \quad (1.29)$$

Donde $\mathbf{r} = r_j \mathbf{e}_j$.

Demostración:

De las figuras 1.4 y 1.5, se tiene:

$$\mathbf{R} = R_j \mathbf{e}_j$$

$$\mathbf{R} = r_j \mathbf{e}_j^n$$

Apartir de la **Definición 1** o de la **Proposición 1**, la base local \mathbf{e}_j^n puede ser expresada como una combinación lineal de la base inercial \mathbf{e}_j , esto es:

$$\begin{aligned} R_j \mathbf{e}_j &= r_j \mathbf{e}_j^n \\ &= r_j \rho(\mathbf{q}, \mathbf{e}_j) \\ &= \rho(\mathbf{q}, r_j \mathbf{e}_j) \\ \mathbf{R} &= \rho(\mathbf{q}, \mathbf{r}) \end{aligned}$$

La expresión anterior es válida, si el cuaternión \mathbf{q} es una rotación simple o si esta, representa una composición de tres rotaciones $\mathbf{q} = \mathbf{p}_1 * \mathbf{p}_2 * \mathbf{p}_3$, donde \mathbf{p}_j es una rotación en un eje cualquiera para $j = 1, 2, 3$. Además $\mathbf{r} = r_j \mathbf{e}_j$. ■

1.5. Ecuación de Velocidad Lineal

Teorema 1.- La velocidad lineal \mathbf{V} de un vector cualquiera \mathbf{R} , que varía su *orientación* y *magnitud* con el tiempo, está dada por:

$$\mathbf{V} = (\mathbf{W} * \mathbf{R} - \mathbf{R} * \mathbf{W}) + \rho(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{r}}) \quad (1.30)$$

Para $\mathbf{R}, \mathbf{V} \in \mathcal{R}^4$ y $\mathbf{W} = \dot{\mathbf{q}} * \bar{\mathbf{q}}$, donde:

$$\begin{aligned} \mathbf{W} &- \text{vector de velocidad angular media asociado a } \mathbf{q} \\ (\mathbf{W} * \mathbf{R} - \mathbf{R} * \mathbf{W}) &- \text{vector de velocidad lineal por cambio de orientación} \\ \rho(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{r}}) &- \text{vector de velocidad lineal por cambio de magnitud} \end{aligned}$$

Demostración:

A partir de la **Proposición 2**, se tiene la siguiente función del tiempo:

$$\mathbf{R}(t) = \rho(\mathbf{q}(t), \mathbf{r}(t)) = \frac{1}{\|\mathbf{q}(t)\|^2} \mathbf{q}(t) * \mathbf{r}(t) * \bar{\mathbf{q}}(t) \quad (1.29)$$

Derivando respecto al tiempo:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{R}}(t) &= \mathbf{V}(t) = \dot{\rho}(\mathbf{q}(t), \mathbf{r}(t)) = \left(\frac{1}{\|\mathbf{q}(t)\|^2} \mathbf{q}(t) * \mathbf{r}(t) * \bar{\mathbf{q}}(t) \right) \dot{} \\ &= \left(\frac{1}{\|\mathbf{q}(t)\|^2} \right) \dot{} (\mathbf{q}(t) * \mathbf{r}(t) * \bar{\mathbf{q}}(t)) + \left(\frac{1}{\|\mathbf{q}(t)\|^2} \right) (\mathbf{q}(t) * \mathbf{r}(t) * \bar{\mathbf{q}}(t)) \dot{} \\ &= \left(\frac{1}{\|\mathbf{q}(t)\|^2} \right) (\mathbf{q}(t) * \mathbf{r}(t) * \bar{\mathbf{q}}(t)) \dot{} \\ \mathbf{V}(t) &= \frac{1}{\|\mathbf{q}(t)\|^2} \left(\dot{\mathbf{q}}(t) * \mathbf{r}(t) * \bar{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{q}(t) * \mathbf{r}(t) * \dot{\bar{\mathbf{q}}}(t) + \mathbf{q}(t) * \dot{\mathbf{r}}(t) * \bar{\mathbf{q}}(t) \right) \quad (1.31) \end{aligned}$$

Los dos primeros términos establecen una variación de orientación con respecto al tiempo del vector \mathbf{r} . Estos términos miden la velocidad lineal en la configuración inicial \mathbf{r} . Se procederá a definirlos en la configuración actual \mathbf{R} . El tercer término establece una variación de magnitud del vector \mathbf{r} , este se encuentra definido en la configuración actual. Por lo tanto se expresarán los términos restantes en la posición instantánea del vector. De ec.(1.29):

$$\begin{aligned}
\rho(\bar{\mathbf{q}}(t), \mathbf{R}(t)) &= \frac{1}{\|\bar{\mathbf{q}}(t)\|^2} \bar{\mathbf{q}}(t) * \left(\frac{1}{\|\mathbf{q}(t)\|^2} \mathbf{q}(t) * \mathbf{r}(t) * \bar{\mathbf{q}}(t) \right) * \mathbf{q}(t) \\
&= \frac{1}{\|\bar{\mathbf{q}}(t)\|^2} \frac{1}{\|\mathbf{q}(t)\|^2} (\bar{\mathbf{q}}(t) * \mathbf{q}(t)) * \mathbf{r}(t) * (\bar{\mathbf{q}}(t) * \mathbf{q}(t)) \\
&= \frac{1}{\|\bar{\mathbf{q}}(t) * \mathbf{q}(t)\|^2} \mathbf{r}(t) \\
\rho(\bar{\mathbf{q}}(t), \mathbf{R}(t)) &= \mathbf{r}(t)
\end{aligned} \tag{1.32}$$

Sustituyendo ecs.(1.32) en ec.(1.31) y eliminando el parámetro (t) por brevedad:

$$\mathbf{V} = \frac{1}{\|\mathbf{q}\|^2} \left(\dot{\bar{\mathbf{q}}} * \rho(\bar{\mathbf{q}}, \mathbf{R}) * \bar{\mathbf{q}} + \mathbf{q} * \rho(\bar{\mathbf{q}}, \mathbf{R}) * \dot{\bar{\mathbf{q}}} + \mathbf{q} * \dot{\mathbf{r}} * \bar{\mathbf{q}} \right) \tag{1.33}$$

Analizando el primer término de ec.(1.33):

$$\begin{aligned}
\dot{\bar{\mathbf{q}}} * \rho(\bar{\mathbf{q}}, \mathbf{R}) * \bar{\mathbf{q}} &= \dot{\bar{\mathbf{q}}} * \left(\frac{1}{\|\bar{\mathbf{q}}\|^2} \bar{\mathbf{q}} * \mathbf{R} * \mathbf{q} \right) * \bar{\mathbf{q}} \\
&= \frac{1}{\|\bar{\mathbf{q}}\|^2} \dot{\bar{\mathbf{q}}} * \bar{\mathbf{q}} * \mathbf{R}
\end{aligned} \tag{1.34}$$

Analizando el segundo término de ec.(1.33):

$$\begin{aligned}
\mathbf{q} * \rho(\bar{\mathbf{q}}, \mathbf{R}) * \dot{\bar{\mathbf{q}}} &= \mathbf{q} * \left(\frac{1}{\|\bar{\mathbf{q}}\|^2} \bar{\mathbf{q}} * \mathbf{R} * \mathbf{q} \right) * \dot{\bar{\mathbf{q}}} \\
&= \frac{1}{\|\bar{\mathbf{q}}\|^2} \mathbf{R} * \mathbf{q} * \dot{\bar{\mathbf{q}}}
\end{aligned} \tag{1.35}$$

Sustituyendo ecs.(1.34), (1.35) en ec.(1.33):

$$\begin{aligned}
\mathbf{V} &= \frac{1}{\|\mathbf{q}\|^2} \left(\frac{1}{\|\bar{\mathbf{q}}\|^2} \dot{\bar{\mathbf{q}}} * \bar{\mathbf{q}} * \mathbf{R} + \frac{1}{\|\bar{\mathbf{q}}\|^2} \mathbf{R} * \mathbf{q} * \dot{\bar{\mathbf{q}}} \right) + \frac{1}{\|\mathbf{q}\|^2} \mathbf{q} * \dot{\mathbf{r}} * \bar{\mathbf{q}} \\
\mathbf{V} &= \frac{1}{\|\mathbf{q}\|^2} \frac{1}{\|\bar{\mathbf{q}}\|^2} \left(\dot{\bar{\mathbf{q}}} * \bar{\mathbf{q}} * \mathbf{R} + \mathbf{R} * \mathbf{q} * \dot{\bar{\mathbf{q}}} \right) + \rho(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{r}})
\end{aligned} \tag{1.36}$$

A partir de la propiedad $\mathbf{q} * \bar{\mathbf{q}} = \mathbf{1}$, se obtiene la siguiente identidad derivando respecto al tiempo:

$$\begin{aligned}
\dot{\bar{\mathbf{q}}} * \bar{\mathbf{q}} + \mathbf{q} * \dot{\bar{\mathbf{q}}} &= \mathbf{0} \\
\mathbf{q} * \dot{\bar{\mathbf{q}}} &= -\dot{\bar{\mathbf{q}}} * \bar{\mathbf{q}}
\end{aligned} \tag{1.37}$$

Utilizando la propiedad de la ec.(1.28) y sustituyendo ec.(1.37) en ec.(1.36):

$$\begin{aligned}\mathbf{V} &= \frac{1}{\|\mathbf{q} * \bar{\mathbf{q}}\|^2} \left(\dot{\mathbf{q}} * \bar{\mathbf{q}} * \mathbf{R} - \mathbf{R} * \dot{\mathbf{q}} * \bar{\mathbf{q}} \right) + \rho(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{r}}) \\ \mathbf{V} &= (\mathbf{W} * \mathbf{R} - \mathbf{R} * \mathbf{W}) + \rho(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{r}})\end{aligned}\quad (1.38)$$

Tal que $\|\mathbf{q} * \bar{\mathbf{q}}\|^2 = 1$ y $\mathbf{W} = \dot{\mathbf{q}} * \bar{\mathbf{q}}$. Finalmente se obtiene lo que buscamos. ■

A continuación se muestra la relación que tiene el vector \mathbf{W} con la velocidad angular de la base local $\underline{\mathbf{e}}_j^n$ y su respectiva representación matricial.

Corolario 1.- El vector $\mathbf{W} \in \mathcal{R}^4$ que representa la velocidad angular media asociada a \mathbf{q} de la base local $\underline{\mathbf{e}}_j^n$, está dado por:

$$\mathbf{W} = \dot{\mathbf{q}} * \bar{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \dot{\theta} \underline{\mathbf{u}} \quad (1.39)$$

Donde $\underline{\mathbf{u}}$ es el vector unitario del eje de giro y se define como $\underline{\mathbf{u}} = (0, u_x, u_y, u_z)$, tal que $\|\underline{\mathbf{u}}\| = 1$. Además la representación matricial de la función $\psi_j = (\mathbf{W} * \underline{\mathbf{e}}_j - \underline{\mathbf{e}}_j * \mathbf{W})$, para $j = 1, 2, 3$, asociada al vector \mathbf{W} es:

$$[\mathbf{M}_\mathbf{W}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega_z & \omega_y \\ 0 & \omega_z & 0 & -\omega_x \\ 0 & -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \quad (1.40)$$

Tal que: $\omega_x = \dot{\theta} u_x$, $\omega_y = \dot{\theta} u_y$, $\omega_z = \dot{\theta} u_z$.

Demostración:

El cuaternión general \mathbf{q} y su conjugado se definen respectivamente como:

$$\begin{aligned}\mathbf{q} &= \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\underline{\mathbf{e}}_0 + \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\underline{\mathbf{u}} \\ \bar{\mathbf{q}} &= \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\underline{\mathbf{e}}_0 - \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\underline{\mathbf{u}}\end{aligned}$$

Donde $\underline{\mathbf{e}}_0 = (1, 0, 0, 0)$, $\underline{\mathbf{u}} = (0, u_x, u_y, u_z)$ y $\|\underline{\mathbf{u}}\| = 1$. La derivada de \mathbf{q} respecto al tiempo para $\underline{\mathbf{e}}_0$ y $\underline{\mathbf{u}}$ fija es:

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{q}} &= \frac{d\mathbf{q}}{dt} = \frac{d\mathbf{q}}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} \\
&= \frac{d}{d\theta} \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathbf{e}_0 + \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathbf{u} \right) \dot{\theta} \\
&= \left(\frac{d\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{d\theta}\mathbf{e}_0 + \frac{d\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)}{d\theta}\mathbf{u} \right) \dot{\theta} \\
\dot{\mathbf{q}} &= \frac{1}{2}\dot{\theta} \left(-\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathbf{e}_0 + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathbf{u} \right)
\end{aligned}$$

Renombrando $\cos = c$, $\operatorname{sen} = s$ y tomando en cuenta que $\mathbf{u} * \mathbf{u} = -\|\mathbf{u}\|^2\mathbf{e}_0 = -\mathbf{e}_0$, se procede a calcular \mathbf{W} :

$$\begin{aligned}
\mathbf{W} &= \dot{\mathbf{q}} * \bar{\mathbf{q}} \\
&= \frac{1}{2}\dot{\theta} \left(-s\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathbf{e}_0 + c\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathbf{u} \right) * \left(c\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathbf{e}_0 - s\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathbf{u} \right) \\
\mathbf{W} &= \frac{1}{2}\dot{\theta} \left(-s\left(\frac{\theta}{2}\right)c\left(\frac{\theta}{2}\right)(\mathbf{e}_0 * \mathbf{e}_0) + s^2\left(\frac{\theta}{2}\right)(\mathbf{e}_0 * \mathbf{u}) \right) + \\
&\quad \frac{1}{2}\dot{\theta} \left(c^2\left(\frac{\theta}{2}\right)(\mathbf{u} * \mathbf{e}_0) - c\left(\frac{\theta}{2}\right)s\left(\frac{\theta}{2}\right)(\mathbf{u} * \mathbf{u}) \right)
\end{aligned}$$

Donde $\mathbf{e}_0 * \mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_0$, $\mathbf{e}_0 * \mathbf{u} = \mathbf{u} * \mathbf{e}_0 = \mathbf{u}$, $s\left(\frac{\theta}{2}\right)c\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{2}s\theta$, simplificando:

$$\begin{aligned}
\mathbf{W} &= \frac{1}{2}\dot{\theta} \left(-\frac{1}{2}s\theta\mathbf{e}_0 + s^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathbf{u} + c^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathbf{u} + \frac{1}{2}s\theta\mathbf{e}_0 \right) \\
&= \frac{1}{2}\dot{\theta} \left(s^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + c^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) \mathbf{u} \\
\mathbf{W} &= \frac{1}{2}\dot{\theta} \mathbf{u} \tag{1.41}
\end{aligned}$$

Se obtiene lo que buscamos. Lo anterior confirma que \mathbf{W} es el vector de velocidad angular media. A continuación obtenemos la representación matricial. Evaluando la función $\psi_j = (\mathbf{W} * \mathbf{e}_j - \mathbf{e}_j * \mathbf{W})$ respecto a la base $\mathbf{e}_j \in \mathcal{R}^4$ para $j = 0, 1, 2, 3$, y usando ec.(1.41) se tiene:

$$\begin{aligned}
\psi_0 &= (\mathbf{W} * \mathbf{e}_0 - \mathbf{e}_0 * \mathbf{W}) = \left(0, 0, 0, 0 \right) \\
\psi_1 &= (\mathbf{W} * \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_1 * \mathbf{W}) = \left(0, 0, \dot{\theta}u_z, -\dot{\theta}u_y \right) \\
\psi_2 &= (\mathbf{W} * \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_2 * \mathbf{W}) = \left(0, -\dot{\theta}u_z, 0, \dot{\theta}u_x \right) \\
\psi_3 &= (\mathbf{W} * \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_3 * \mathbf{W}) = \left(0, \dot{\theta}u_y, -\dot{\theta}u_x, 0 \right)
\end{aligned}$$

La representación matricial es:

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{M}_W] &= [\psi_0, \psi_1, \psi_2, \psi_3] \\
 [\mathbf{M}_W] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\dot{\theta}u_z & \dot{\theta}u_y \\ 0 & \dot{\theta}u_z & 0 & -\dot{\theta}u_x \\ 0 & -\dot{\theta}u_y & \dot{\theta}u_x & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega_z & \omega_y \\ 0 & \omega_z & 0 & -\omega_x \\ 0 & -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \quad (1.42)
 \end{aligned}$$

Donde: $\omega_x = \dot{\theta}u_x$, $\omega_y = \dot{\theta}u_y$, $\omega_z = \dot{\theta}u_z$. La submatriz obtenida al eliminar el primer renglón y columna de la ec.(1.42), es la matriz antisimétrica correspondiente a la velocidad angular de la base local $\mathbf{e}_j^n \in \mathcal{R}^3$, respecto a la base inercial $\mathbf{e}_j \in \mathcal{R}^3$, [39], visto también como un movimiento esférico relativo entre ambas bases [46]. ■

A continuación se establecen definiciones equivalentes al **Corolario 1** para \mathbf{W} y $[\mathbf{M}_W]$, para una composición de rotaciones.

Corolario 2.- Si \mathbf{q} representa una composición de rotaciones, tal que $\mathbf{q} = \mathbf{p}_1 * \mathbf{p}_2 * \mathbf{p}_3$, el vector de velocidad angular media $\mathbf{W} \in \mathcal{R}^4$ asociado a \mathbf{q} está dado por:

$$\mathbf{W} = \dot{\mathbf{q}} * \bar{\mathbf{q}} = \mathbf{W}_1 + \rho(\mathbf{p}_1, \mathbf{W}_2) + \rho(\mathbf{p}_1 * \mathbf{p}_2, \mathbf{W}_3) \quad (1.43)$$

Donde $\mathbf{W}_j = \dot{\mathbf{p}}_j * \bar{\mathbf{p}}_j = \frac{1}{2} \dot{\theta}_j \underline{\mathbf{e}}_j$, $\dot{\mathbf{p}}_j = \frac{1}{2} \dot{\theta}_j (\underline{\mathbf{e}}_j * \mathbf{p}_j)$, \mathbf{W}_j —vector de velocidad angular media asociado a \mathbf{p}_j , para $j = 1, 2, 3$. Además la representación matricial de la función $\psi_j = (\mathbf{W} * \underline{\mathbf{e}}_j - \underline{\mathbf{e}}_j * \mathbf{W})$, para $j = 1, 2, 3$, asociada al vector \mathbf{W} es:

$$[\mathbf{M}_W] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(c\theta_1 c\theta_2 \omega_3 + s\theta_1 \omega_2) & c\theta_1 \omega_2 - c\theta_2 s\theta_1 \omega_3 \\ 0 & c\theta_1 c\theta_2 \omega_3 + s\theta_1 \omega_2 & 0 & -(\omega_1 + s\theta_2 \omega_3) \\ 0 & -(c\theta_1 \omega_2 - c\theta_2 s\theta_1 \omega_3) & \omega_1 + s\theta_2 \omega_3 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.44)$$

Tal que $\dot{\theta}_j = \omega_j$.

Demostración:

Se sabe que $\mathbf{q} = \mathbf{p}_1 * \mathbf{p}_2 * \mathbf{p}_3$. De la definición de \mathbf{W} se tiene:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{W} &= \dot{\mathbf{q}} * \bar{\mathbf{q}} \\
 &= (\mathbf{p}_1 * \mathbf{p}_2 * \mathbf{p}_3)^\bullet * (\overline{\mathbf{p}_1 * \mathbf{p}_2 * \mathbf{p}_3}) \\
 &= (\dot{\mathbf{p}}_1 * \mathbf{p}_2 * \mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_1 * \dot{\mathbf{p}}_2 * \mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_1 * \mathbf{p}_2 * \dot{\mathbf{p}}_3) * (\overline{\mathbf{p}_3} * \overline{\mathbf{p}_2} * \overline{\mathbf{p}_1}) \\
 &= \dot{\mathbf{p}}_1 * \bar{\mathbf{p}}_1 + \mathbf{p}_1 * (\dot{\mathbf{p}}_2 * \bar{\mathbf{p}}_2) * \bar{\mathbf{p}}_1 + \mathbf{p}_1 * \mathbf{p}_2 * (\dot{\mathbf{p}}_3 * \bar{\mathbf{p}}_3) * \bar{\mathbf{p}}_2 * \bar{\mathbf{p}}_1 \\
 \mathbf{W} &= \mathbf{W}_1 + \rho(\mathbf{p}_1, \mathbf{W}_2) + \rho(\mathbf{p}_1 * \mathbf{p}_2, \mathbf{W}_3) \quad (1.45)
 \end{aligned}$$

Donde $\mathbf{W}_j = \dot{\mathbf{p}}_j * \bar{\mathbf{p}}_j$, para $j = 1, 2, 3$. Se obtiene lo que buscamos. Para obtener la representación matricial, es necesario expresar \mathbf{W}_j en función de $\dot{\theta}_j$. Para esto se tiene:

$$\mathbf{p}_j = \cos\left(\frac{\theta_j}{2}\right)\mathbf{e}_0 + \operatorname{sen}\left(\frac{\theta_j}{2}\right)\mathbf{e}_j \quad (1.46)$$

La derivada de \mathbf{p}_j respecto al tiempo para \mathbf{e}_0 y \mathbf{e}_j fija es:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{p}}_j &= \frac{d\mathbf{p}_j}{dt} = \frac{d\mathbf{p}_j}{d\theta_j} \frac{d\theta_j}{dt} \\ &= \frac{d}{d\theta_j} \left(\cos\left(\frac{\theta_j}{2}\right)\mathbf{e}_0 + \operatorname{sen}\left(\frac{\theta_j}{2}\right)\mathbf{e}_j \right) \dot{\theta}_j \\ &= \frac{1}{2} \left(-\operatorname{sen}\left(\frac{\theta_j}{2}\right)\mathbf{e}_0 + \cos\left(\frac{\theta_j}{2}\right)\mathbf{e}_j \right) \dot{\theta}_j \\ \dot{\mathbf{p}}_j &= \frac{1}{2} \dot{\theta}_j (\mathbf{e}_j * \mathbf{p}_j) \end{aligned} \quad (1.47)$$

Sustituyendo en la definición de \mathbf{W}_j :

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_j &= \dot{\mathbf{p}}_j * \bar{\mathbf{p}}_j \\ &= \frac{1}{2} \dot{\theta}_j (\mathbf{e}_j * \mathbf{p}_j) * \bar{\mathbf{p}}_j \\ \mathbf{W}_j &= \frac{1}{2} \dot{\theta}_j \mathbf{e}_j \end{aligned} \quad (1.48)$$

Se confirma nuevamente que \mathbf{W}_j es el vector de velocidad angular media. A continuación obtenemos la representación matricial. Evaluando la función $\psi_j = (\mathbf{W} * \mathbf{e}_j - \mathbf{e}_j * \mathbf{W})$ respecto a la base $\mathbf{e}_j \in \mathcal{R}^4$ para $j = 0, 1, 2, 3$ y usando ecs.(1.45), (1.46) y (1.48) se tiene:

$$\begin{aligned} \psi_0 &= (\mathbf{W} * \mathbf{e}_0 - \mathbf{e}_0 * \mathbf{W}) = \left(0, 0, 0, 0 \right) \\ \psi_1 &= (\mathbf{W} * \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_1 * \mathbf{W}) = \left(0, 0, c\theta_1 c\theta_2 \dot{\theta}_3 + s\theta_1 \dot{\theta}_2, -c\theta_1 \dot{\theta}_2 + c\theta_2 s\theta_1 \dot{\theta}_3 \right) \\ \psi_2 &= (\mathbf{W} * \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_2 * \mathbf{W}) = \left(0, -c\theta_1 c\theta_2 \dot{\theta}_3 - s\theta_1 \dot{\theta}_2, 0, \dot{\theta}_1 + s\theta_2 \dot{\theta}_3 \right) \\ \psi_3 &= (\mathbf{W} * \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_3 * \mathbf{W}) = \left(0, c\theta_1 \dot{\theta}_2 - c\theta_2 s\theta_1 \dot{\theta}_3, -\dot{\theta}_1 - s\theta_2 \dot{\theta}_3, 0 \right) \end{aligned}$$

Así:

$$\begin{aligned} [\mathbf{M}_\mathbf{W}] &= \left[\psi_0, \psi_1, \psi_2, \psi_3 \right] \\ [\mathbf{M}_\mathbf{W}] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(c\theta_1 c\theta_2 \omega_3 + s\theta_1 \omega_2) & c\theta_1 \omega_2 - c\theta_2 s\theta_1 \omega_3 \\ 0 & c\theta_1 c\theta_2 \omega_3 + s\theta_1 \omega_2 & 0 & -(\omega_1 + s\theta_2 \omega_3) \\ 0 & -(c\theta_1 \omega_2 - c\theta_2 s\theta_1 \omega_3) & \omega_1 + s\theta_2 \omega_3 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.49)$$

Donde $\cos = c$, $\sen = s$ y $\dot{\theta}_j = \omega_j$. La submatriz obtenida al eliminar el primer renglón y columna de la ec.(1.49), es la matriz antisimétrica correspondiente a la velocidad angular de la base local $\mathbf{e}_j^n \in \mathcal{R}^3$, respecto a la base inercial $\mathbf{e}_j \in \mathcal{R}^3$. Donde los ejes $\mathbf{e}_j = \mathbf{T}_V(\mathbf{e}_j)$ de los vectores \mathbf{W}_j , ec.(1.48), para $j = 2, 3$, son orientados a la posición actual mediante los términos $\rho(\mathbf{p}_1, \mathbf{W}_2)$ y $\rho(\mathbf{p}_1 * \mathbf{p}_2, \mathbf{W}_3)$ de la ec.(1.45). ■

Definición 2.- Los vectores de velocidad angular $\underline{\omega}_j \in \mathcal{R}^4$ y $\omega_j \in \mathcal{R}^3$ asociados a $\mathbf{W}_j = \frac{1}{2} \dot{\theta}_j \mathbf{e}_j$, están dados por:

$$\underline{\omega}_j = 2 \mathbf{W}_j = 2 \left(\dot{\mathbf{p}}_j * \bar{\mathbf{p}}_j \right) = \dot{\theta}_j \mathbf{e}_j \quad (1.50)$$

$$\omega_j = \mathbf{T}_V(\underline{\omega}_j) \quad (1.51)$$

A continuación se muestran las propiedades geométricas asociadas a cada vector que forman parte de la **ecuación de velocidad lineal**. ec.(1.30).

Proposición 3.- Para cualquier vector \mathbf{S} , el vector resultante de $(\mathbf{n} * \mathbf{S} - \mathbf{S} * \mathbf{n})$, es perpendicular a \mathbf{S} , tal que:

$$\langle \mathbf{n} * \mathbf{S} - \mathbf{S} * \mathbf{n}, \mathbf{S} \rangle = 0 \quad (1.52)$$

Para $\mathbf{S} = (s_0, s_1, u_2, u_3)$ y $\mathbf{n} = (n_0, n_1, n_2, n_3)$.

Demostración:

Realizando de manera directa la operación:

$$\mathbf{n} * \mathbf{S} - \mathbf{S} * \mathbf{n} = \mathbf{2} (0, (s_3 n_2 - s_2 n_3), (s_1 n_3 - s_3 n_1), (s_2 n_1 - s_1 n_2))$$

Calculando el producto punto:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{n} * \mathbf{S} - \mathbf{S} * \mathbf{n}, \mathbf{S} \rangle &= \mathbf{2} (s_3 n_2 - s_2 n_3) s_1 + \mathbf{2} (s_1 n_3 - s_3 n_1) s_2 + \mathbf{2} (s_2 n_1 - s_1 n_2) s_3 \\ &= \mathbf{2} (s_3 n_2 s_1 - s_1 n_2 s_3) + \mathbf{2} (s_1 n_3 s_2 - s_2 n_3 s_1) + \mathbf{2} (s_2 n_1 s_3 - s_3 n_1 s_2) \\ \langle \mathbf{n} * \mathbf{S} - \mathbf{S} * \mathbf{n}, \mathbf{S} \rangle &= 0 \end{aligned}$$

Que es lo que buscamos. ■

Proposición 4.- El vector $(\mathbf{W} * \mathbf{R} - \mathbf{R} * \mathbf{W})$ está asociado al término tangencial de la velocidad, ya que genera vectores perpendiculares a \mathbf{R} , tal que:

$$\langle \mathbf{W} * \mathbf{R} - \mathbf{R} * \mathbf{W}, \mathbf{R} \rangle = 0 \quad (1.53)$$

Demostración:

Calculando el producto punto entre vectores $(\mathbf{W} * \mathbf{R} - \mathbf{R} * \mathbf{W})$ y \mathbf{R} , donde $\mathbf{W} = \frac{1}{2} \dot{\theta} \underline{\mathbf{u}}$ de ec.(1.39) (**Corolario 1**) y $\mathbf{R} = r_j \underline{\mathbf{e}}_j^n$ (**Proposición 2**):

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{W} * \mathbf{R} - \mathbf{R} * \mathbf{W}, \mathbf{R} \rangle &= \left\langle \left(\frac{1}{2} \dot{\theta} \underline{\mathbf{u}} \right) * r_j \underline{\mathbf{e}}_j^n - r_j \underline{\mathbf{e}}_j^n * \left(\frac{1}{2} \dot{\theta} \underline{\mathbf{u}} \right), r_j \underline{\mathbf{e}}_j^n \right\rangle \\ &= \frac{1}{2} \dot{\theta} (r_j)^2 \langle \underline{\mathbf{u}} * \underline{\mathbf{e}}_j^n - \underline{\mathbf{e}}_j^n * \underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{e}}_j^n \rangle \end{aligned}$$

$$\langle \mathbf{W} * \mathbf{R} - \mathbf{R} * \mathbf{W}, \mathbf{R} \rangle = 0$$

Utilizando la **Proposición 3**. Esto demuestra que los vectores del producto punto son perpendiculares y como consecuencia uno tangente al otro, que es lo que buscamos. ■

Proposición 5.- El vector $\rho(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{r}})$ está en la dirección de \mathbf{R} , ya que cumple:

$$\cos\theta = \frac{\langle \rho(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{r}}), \mathbf{R} \rangle}{\|\rho(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{r}})\| \|\mathbf{R}\|} = 1 \quad (1.54)$$

Por lo tanto $\theta = 0^\circ$.

Demostración:

El ángulo entre vectores $\rho(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{r}})$ y \mathbf{R} está dado por:

$$\cos\theta = \frac{\langle \rho(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{r}}), \mathbf{R} \rangle}{\|\rho(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{r}})\| \|\mathbf{R}\|} \quad (1.55)$$

Tomado el numerador y sustituyendo $\mathbf{R} = \rho(\mathbf{q}, \mathbf{r})$ (**Proposición 2**):

$$\begin{aligned} \langle \rho(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{r}}), \mathbf{R} \rangle &= \langle \rho(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{r}}), \rho(\mathbf{q}, \mathbf{r}) \rangle \\ &= \langle \dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r} \rangle \end{aligned} \quad (1.56)$$

En la ec.(1.56) se empleó la propiedad de ortogonalidad, $\langle \rho(\mathbf{p}, \mathbf{q}), \rho(\mathbf{p}, \mathbf{r}) \rangle = \langle \mathbf{q}, \mathbf{r} \rangle$. Tomando el denominador:

$$\begin{aligned} \|\rho(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{r}})\| \|\mathbf{R}\| &= \sqrt{\langle \rho(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{r}}), \rho(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{r}}) \rangle} \sqrt{\langle \rho(\mathbf{q}, \mathbf{r}), \rho(\mathbf{q}, \mathbf{r}) \rangle} \\ &= \sqrt{\langle \dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{r}} \rangle} \sqrt{\langle \mathbf{r}, \mathbf{r} \rangle} \end{aligned} \quad (1.57)$$

Sustituyendo ecs.(1.56) y (1.57) en ec.(1.55):

$$\cos\theta = \frac{\langle \dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r} \rangle}{\sqrt{\langle \dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{r}} \rangle} \sqrt{\langle \mathbf{r}, \mathbf{r} \rangle}} \quad (1.58)$$

De la **Proposición 2** y su derivada respecto al tiempo:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= r_j \mathbf{e}_j \\ \dot{\mathbf{r}} &= \dot{r}_j \mathbf{e}_j \end{aligned}$$

Sustituyendo en ec.(1.58):

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{\langle \dot{r}_j \mathbf{e}_j, r_j \mathbf{e}_j \rangle}{\sqrt{\langle \dot{r}_j \mathbf{e}_j, \dot{r}_j \mathbf{e}_j \rangle} \sqrt{\langle r_j \mathbf{e}_j, r_j \mathbf{e}_j \rangle}} \\ &= \frac{\dot{r}_j r_j \langle \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_j \rangle}{\sqrt{(\dot{r}_j)^2 \langle \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_j \rangle} \sqrt{(r_j)^2 \langle \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_j \rangle}} \\ &= \frac{\dot{r}_j r_j \langle \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_j \rangle}{\dot{r}_j r_j \sqrt{\langle \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_j \rangle}^2} \\ \cos\theta &= \frac{\langle \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_j \rangle}{\langle \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_j \rangle} = 1 \end{aligned}$$

Indicando que el ángulo entre vectores es cero, que es lo que buscamos. ■

En la siguiente sección se desarrollan las ecuaciones para la aceleración lineal y angular en función de los parámetros de los cuaterniones.

1.6. Ecuación de Aceleración Lineal

Teorema 2.- La *aceleración lineal* \mathbf{A} de un vector cualquiera \mathbf{R} , que varía su *orientación* y *magnitud* con el tiempo, está dada por:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= (\mathbf{H} * \mathbf{R} - \mathbf{R} * \mathbf{H}) - 2(\mathbf{W} * \mathbf{R} - \mathbf{R} * \mathbf{W}) * \mathbf{W} + \\ &2 \left(\mathbf{W} * \rho(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{r}}) - \rho(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{r}}) * \mathbf{W} \right) + \rho(\mathbf{q}, \ddot{\mathbf{r}}) \end{aligned} \quad (1.59)$$

Para $\mathbf{R}, \mathbf{A} \in \mathcal{R}^4$ y $\mathbf{W} = \dot{\mathbf{q}} * \bar{\mathbf{q}}$, $\mathbf{H} = \ddot{\mathbf{q}} * \bar{\mathbf{q}}$, donde:

- \mathbf{H} – vector de aceleración general angular asociado a \mathbf{q}
 $(\mathbf{H} * \mathbf{R} - \mathbf{R} * \mathbf{H})$ – vector de aceleración lineal por cambio de orientación
 (componente tangencial)
 $2(\mathbf{W} * \mathbf{R} - \mathbf{R} * \mathbf{W}) * \mathbf{W}$ – vector de aceleración lineal por cambio de orientación
 (componente normal)
 $2(\mathbf{W} * \rho(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{r}}) - \rho(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{r}}) * \mathbf{W})$ – vector de aceleración lineal por cambio de orientación
 y magnitud (componente de Coriolis)
 $\rho(\mathbf{q}, \ddot{\mathbf{r}})$ – vector de aceleración lineal por cambio de magnitud

Demostración:

A partir del **Teorema 1**, ec.(1.30) se tiene:

$$\mathbf{V} = (\mathbf{W} * \mathbf{R} - \mathbf{R} * \mathbf{W}) + \rho(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{r}}) \quad (1.30)$$

Derivando ec.(1.30) respecto al tiempo:

$$\dot{\mathbf{V}} = \mathbf{A} = \left(\dot{\mathbf{W}} * \mathbf{R} - \mathbf{R} * \dot{\mathbf{W}} \right) + \left(\mathbf{W} * \dot{\mathbf{R}} - \dot{\mathbf{R}} * \mathbf{W} \right) + \dot{\rho}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{r}}) \quad (1.60)$$

Analizando el primer término de la ec.(1.60)

Se tiene:

$$\dot{\mathbf{W}} = \left(\dot{\mathbf{q}} * \bar{\mathbf{q}} \right)' = \ddot{\mathbf{q}} * \bar{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}} * \dot{\bar{\mathbf{q}}} \quad (1.61)$$

Del segundo término de ec.(1.61) y utilizando $\bar{\mathbf{q}} * \mathbf{q} = 1$:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}} * \dot{\bar{\mathbf{q}}} &= \dot{\mathbf{q}} * 1 * \dot{\bar{\mathbf{q}}} \\ &= \dot{\mathbf{q}} * (\bar{\mathbf{q}} * \mathbf{q}) * \dot{\bar{\mathbf{q}}} \\ &= \left(\dot{\mathbf{q}} * \bar{\mathbf{q}} \right) * \left(\mathbf{q} * \dot{\bar{\mathbf{q}}} \right) \end{aligned}$$

De ec.(1.37) $\mathbf{q} * \dot{\bar{\mathbf{q}}} = -\dot{\mathbf{q}} * \bar{\mathbf{q}}$:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}} * \dot{\bar{\mathbf{q}}} &= \left(\dot{\mathbf{q}} * \bar{\mathbf{q}} \right) * \left(-\dot{\mathbf{q}} * \bar{\mathbf{q}} \right) \\ &= -\mathbf{W} * \mathbf{W} \end{aligned} \quad (1.62)$$

De esta manera ec.(1.61) se escribe como:

$$\dot{\mathbf{W}} = \ddot{\mathbf{q}} * \bar{\mathbf{q}} - \mathbf{W} * \mathbf{W} \quad (1.63)$$

Sustituyendo ec.(1.63) en el primer término de ec.(1.60):

$$\begin{aligned}
\left(\dot{\mathbf{W}} * \mathbf{R} - \mathbf{R} * \dot{\mathbf{W}} \right) &= \left(\ddot{\mathbf{q}} * \bar{\mathbf{q}} - \mathbf{W} * \mathbf{W} \right) * \mathbf{R} - \mathbf{R} * \left(\ddot{\mathbf{q}} * \bar{\mathbf{q}} - \mathbf{W} * \mathbf{W} \right) \\
&= \left(\ddot{\mathbf{q}} * \bar{\mathbf{q}} \right) * \mathbf{R} - \mathbf{R} * \left(\ddot{\mathbf{q}} * \bar{\mathbf{q}} \right) - (\mathbf{W} * \mathbf{W} * \mathbf{R} - \mathbf{R} * \mathbf{W} * \mathbf{W})
\end{aligned} \tag{1.64}$$

Además utilizando $\mathbf{W} = \frac{1}{2} \dot{\theta} \mathbf{u}$ y tomando en cuenta que $\mathbf{u} * \mathbf{u} = -\mathbf{e}_0$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{W} * \mathbf{W} &= \left(\frac{1}{2} \dot{\theta} \mathbf{u} \right) * \left(\frac{1}{2} \dot{\theta} \mathbf{u} \right) = \frac{1}{4} \left(\dot{\theta} \right)^2 (\mathbf{u} * \mathbf{u}) \\
&= -\frac{1}{4} \left(\dot{\theta} \right)^2 \mathbf{e}_0
\end{aligned} \tag{1.65}$$

Recordar que $\mathbf{e}_0 = \mathbf{1}$, es el elemento neutro multiplicativo para los cuaterniones [37]. Usando ec.(1.65) en el segundo término de ec.(1.64):

$$\begin{aligned}
\mathbf{W} * \mathbf{W} * \mathbf{R} &= \left(-\frac{1}{4} \left(\dot{\theta} \right)^2 \mathbf{e}_0 \right) * \mathbf{R} = -\frac{1}{4} \left(\dot{\theta} \right)^2 (\mathbf{e}_0 * \mathbf{R}) \\
&= -\frac{1}{4} \left(\dot{\theta} \right)^2 \mathbf{R}
\end{aligned} \tag{1.66}$$

De la misma manera:

$$\begin{aligned}
\mathbf{R} * \mathbf{W} * \mathbf{W} &= \mathbf{R} * \left(-\frac{1}{4} \left(\dot{\theta} \right)^2 \mathbf{e}_0 \right) = -\frac{1}{4} \left(\dot{\theta} \right)^2 (\mathbf{R} * \mathbf{e}_0) \\
&= -\frac{1}{4} \left(\dot{\theta} \right)^2 \mathbf{R}
\end{aligned} \tag{1.67}$$

Por lo tanto:

$$\mathbf{W} * \mathbf{W} * \mathbf{R} = \mathbf{R} * \mathbf{W} * \mathbf{W} \tag{1.68}$$

Reescribiendo ec.(1.64), donde $\mathbf{H} = \ddot{\mathbf{q}} * \bar{\mathbf{q}}$:

$$\begin{aligned}
\left(\dot{\mathbf{W}} * \mathbf{R} - \mathbf{R} * \dot{\mathbf{W}} \right) &= \left(\ddot{\mathbf{q}} * \bar{\mathbf{q}} \right) * \mathbf{R} - \mathbf{R} * \left(\ddot{\mathbf{q}} * \bar{\mathbf{q}} \right) \\
&= \mathbf{H} * \mathbf{R} - \mathbf{R} * \mathbf{H}
\end{aligned} \tag{1.69}$$

Analizando el segundo término de la ec.(1.60)

$$\begin{aligned}
 \left(\mathbf{W} * \dot{\mathbf{R}} - \dot{\mathbf{R}} * \mathbf{W} \right) &= (\mathbf{W} * \mathbf{V} - \mathbf{V} * \mathbf{W}) \\
 &= \mathbf{W} * \left((\mathbf{W} * \mathbf{R} - \mathbf{R} * \mathbf{W}) + \rho(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{r}}) \right) - \left((\mathbf{W} * \mathbf{R} - \mathbf{R} * \mathbf{W}) + \rho(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{r}}) \right) * \mathbf{W} \\
 &= (\mathbf{W} * \mathbf{W} * \mathbf{R} - 2 \mathbf{W} * \mathbf{R} * \mathbf{W} + \mathbf{R} * \mathbf{W} * \mathbf{W}) + \\
 &\quad \left(\mathbf{W} * \rho(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{r}}) - \rho(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{r}}) * \mathbf{W} \right)
 \end{aligned}$$

Sustituyendo ec.(1.68):

$$\begin{aligned}
 \left(\mathbf{W} * \dot{\mathbf{R}} - \dot{\mathbf{R}} * \mathbf{W} \right) &= (-2 \mathbf{W} * \mathbf{R} * \mathbf{W} + 2 \mathbf{R} * \mathbf{W} * \mathbf{W}) + \left(\mathbf{W} * \rho(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{r}}) - \rho(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{r}}) * \mathbf{W} \right) \\
 &= -2 (\mathbf{W} * \mathbf{R} - \mathbf{R} * \mathbf{W}) * \mathbf{W} + \left(\mathbf{W} * \rho(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{r}}) - \rho(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{r}}) * \mathbf{W} \right) \quad (1.70)
 \end{aligned}$$

Analizando el tercer término de la ec.(1.60)

$$\begin{aligned}
 \dot{\rho}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{r}}) &= \left(\frac{1}{\|\mathbf{q}\|^2} \mathbf{q} * \dot{\mathbf{r}} * \bar{\mathbf{q}} \right) \dot{} \\
 &= \frac{1}{\|\mathbf{q}\|^2} \left(\dot{\mathbf{q}} * \dot{\mathbf{r}} * \bar{\mathbf{q}} + \mathbf{q} * \dot{\mathbf{r}} * \dot{\bar{\mathbf{q}}} + \mathbf{q} * \ddot{\mathbf{r}} * \bar{\mathbf{q}} \right) \\
 &= \frac{1}{\|\mathbf{q}\|^2} \left(\dot{\mathbf{q}} * (\bar{\mathbf{q}} * \mathbf{q}) * \dot{\mathbf{r}} * \bar{\mathbf{q}} + \mathbf{q} * \dot{\mathbf{r}} * (\bar{\mathbf{q}} * \mathbf{q}) * \dot{\bar{\mathbf{q}}} + \mathbf{q} * \ddot{\mathbf{r}} * \bar{\mathbf{q}} \right) \\
 &= \frac{1}{\|\mathbf{q}\|^2} \left(\mathbf{W} * (\mathbf{q} * \dot{\mathbf{r}} * \bar{\mathbf{q}}) - (\mathbf{q} * \dot{\mathbf{r}} * \bar{\mathbf{q}}) * \mathbf{W} + \mathbf{q} * \ddot{\mathbf{r}} * \bar{\mathbf{q}} \right) \\
 &= \left(\mathbf{W} * \rho(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{r}}) - \rho(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{r}}) * \mathbf{W} \right) + \rho(\mathbf{q}, \ddot{\mathbf{r}}) \quad (1.71)
 \end{aligned}$$

Ecuación final

Sustituyendo ecs.(1.69), (1.70), (1.71) en ec.(1.60):

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} &= (\mathbf{H} * \mathbf{R} - \mathbf{R} * \mathbf{H}) - 2 (\mathbf{W} * \mathbf{R} - \mathbf{R} * \mathbf{W}) * \mathbf{W} + \\
 &\quad \left(\mathbf{W} * \rho(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{r}}) - \rho(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{r}}) * \mathbf{W} \right) + \left(\mathbf{W} * \rho(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{r}}) - \rho(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{r}}) * \mathbf{W} \right) + \\
 &\quad \rho(\mathbf{q}, \ddot{\mathbf{r}})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} &= (\mathbf{H} * \mathbf{R} - \mathbf{R} * \mathbf{H}) - 2 (\mathbf{W} * \mathbf{R} - \mathbf{R} * \mathbf{W}) * \mathbf{W} + \\
 &\quad 2 \left(\mathbf{W} * \rho(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{r}}) - \rho(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{r}}) * \mathbf{W} \right) + \rho(\mathbf{q}, \ddot{\mathbf{r}})
 \end{aligned}$$

Que es lo que buscamos. ■

Corolario 3.- El vector $\dot{\mathbf{W}} \in \mathcal{R}^4$ que representa la aceleración angular media asociada a \mathbf{q} de la base local \mathbf{e}_j^n , está dado por:

$$\dot{\mathbf{W}} = \ddot{\mathbf{q}} * \bar{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}} * \dot{\bar{\mathbf{q}}} = \frac{1}{2} \ddot{\theta} \mathbf{u} \quad (1.72)$$

Donde \mathbf{u} es el vector unitario del eje de giro y se define como $\mathbf{u} = (0, u_x, u_y, u_z)$, tal que $\|\mathbf{u}\| = 1$.

Demostración:

El cuaternión general \mathbf{q} y su conjugado se definen respectivamente como:

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathbf{e}_0 + \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathbf{u} \\ \bar{\mathbf{q}} &= \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathbf{e}_0 - \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathbf{u} \end{aligned}$$

Donde $\mathbf{e}_0 = (1, 0, 0, 0)$, $\mathbf{u} = (0, u_x, u_y, u_z)$ y $\|\mathbf{u}\| = 1$. Renombrando $\cos(\frac{\theta}{2}) = c$, $\text{sen}(\frac{\theta}{2}) = s$, la derivada de \mathbf{q} respecto al tiempo para \mathbf{e}_0 y \mathbf{u} fija es:

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \dot{\theta} (-s\mathbf{e}_0 + c\mathbf{u})$$

La derivada de $\dot{\mathbf{q}}$ respecto al tiempo para \mathbf{e}_0 y \mathbf{u} fija es:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{q}} &= \frac{d\dot{\mathbf{q}}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \dot{\theta} (-s\mathbf{e}_0 + c\mathbf{u}) \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{d\dot{\theta}}{dt} (-s\mathbf{e}_0 + c\mathbf{u}) + \frac{1}{2} \dot{\theta} \frac{d}{dt} (-s\mathbf{e}_0 + c\mathbf{u}) \frac{d\theta}{dt} \\ &= \frac{1}{2} \ddot{\theta} (-s\mathbf{e}_0 + c\mathbf{u}) + \frac{1}{4} \left(\dot{\theta} \right)^2 (-c\mathbf{e}_0 - s\mathbf{u}) \end{aligned}$$

Tomando en cuenta que $\mathbf{u} * \mathbf{u} = -\mathbf{e}_0$, se procede a calcular $\ddot{\mathbf{q}} * \bar{\mathbf{q}}$:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{q}} * \bar{\mathbf{q}} &= \frac{1}{2} \ddot{\theta} (-s\mathbf{e}_0 + c\mathbf{u}) * (c\mathbf{e}_0 - s\mathbf{u}) + \\ &\quad \frac{1}{4} \left(\dot{\theta} \right)^2 (-c\mathbf{e}_0 - s\mathbf{u}) * (c\mathbf{e}_0 - s\mathbf{u}) \\ &= \frac{1}{2} \ddot{\theta} (-s c \mathbf{e}_0 * \mathbf{e}_0 + s^2 \mathbf{e}_0 * \mathbf{u} + c^2 \mathbf{u} * \mathbf{e}_0 - c s \mathbf{u} * \mathbf{u}) + \\ &\quad \frac{1}{4} \left(\dot{\theta} \right)^2 (-c^2 \mathbf{e}_0 * \mathbf{e}_0 + c s \mathbf{e}_0 * \mathbf{u} - s c \mathbf{u} * \mathbf{e}_0 + s^2 \mathbf{u} * \mathbf{u}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{\mathbf{q}} * \bar{\mathbf{q}} &= \frac{1}{2} \ddot{\theta} (-sc\mathbf{e}_0 * \mathbf{e}_0 + s^2\mathbf{e}_0 * \mathbf{u} + c^2\mathbf{u} * \mathbf{e}_0 - cs\mathbf{u} * \mathbf{u}) + \\
&\quad \frac{1}{4} \left(\dot{\theta}\right)^2 (-c^2\mathbf{e}_0 * \mathbf{e}_0 + cs\mathbf{e}_0 * \mathbf{u} - sc\mathbf{u} * \mathbf{e}_0 + s^2\mathbf{u} * \mathbf{u}) \\
&= \frac{1}{2} \ddot{\theta} (-sc\mathbf{e}_0 + s^2\mathbf{u} + c^2\mathbf{u} + cs\mathbf{e}_0) + \\
&\quad \frac{1}{4} \left(\dot{\theta}\right)^2 (-c^2\mathbf{e}_0 + cs\mathbf{u} - sc\mathbf{u} - s^2\mathbf{e}_0) \\
\ddot{\mathbf{q}} * \bar{\mathbf{q}} &= -\frac{1}{4} \left(\dot{\theta}\right)^2 \mathbf{e}_0 + \frac{1}{2} \ddot{\theta} \mathbf{u} \tag{1.73}
\end{aligned}$$

También de ec.(1.65):

$$\mathbf{W} * \mathbf{W} = -\frac{1}{4} \left(\dot{\theta}\right)^2 \mathbf{e}_0$$

Calculando $\dot{\mathbf{W}}$:

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{W}} &= \ddot{\mathbf{q}} * \bar{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}} * \dot{\bar{\mathbf{q}}} = \ddot{\mathbf{q}} * \bar{\mathbf{q}} - \mathbf{W} * \mathbf{W} \\
&= -\frac{1}{4} \left(\dot{\theta}\right)^2 \mathbf{e}_0 + \frac{1}{2} \ddot{\theta} \mathbf{u} + \frac{1}{4} \left(\dot{\theta}\right)^2 \mathbf{e}_0 \\
\dot{\mathbf{W}} &= \frac{1}{2} \ddot{\theta} \mathbf{u}
\end{aligned}$$

Se obtiene lo que buscamos. Lo anterior confirma que $\dot{\mathbf{W}}$ es el vector de aceleración angular media. ■

Corolario 4.- El vector $\mathbf{H} \in \mathcal{R}^4$ que representa la aceleración general angular asociada a \mathbf{q} de la base local \mathbf{e}_j^n , está dado por:

$$\mathbf{H} = \ddot{\mathbf{q}} * \bar{\mathbf{q}} = -\frac{1}{4} \left(\dot{\theta}\right)^2 \mathbf{e}_0 + \frac{1}{2} \ddot{\theta} \mathbf{u} \tag{1.74}$$

Donde $\mathbf{u} = (0, u_x, u_y, u_z)$, tal que $\|\mathbf{u}\| = 1$. Además la representación matricial de la función $\dot{\psi}_j = (\mathbf{H} * \mathbf{e}_j - \mathbf{e}_j * \mathbf{H}) - 2(\mathbf{W} * \mathbf{e}_j - \mathbf{e}_j * \mathbf{W}) * \mathbf{W}$, para $j = 1, 2, 3$, asociada a los vectores \mathbf{H} y \mathbf{W} es:

$$[\mathbf{M}_{\mathbf{H}}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(\omega_y^2 + \omega_z^2) & -\alpha_z + \omega_x \omega_z & \alpha_y + \omega_x \omega_z \\ 0 & \alpha_z + \omega_x \omega_y & -(\omega_x^2 + \omega_z^2) & -\alpha_x + \omega_y \omega_z \\ 0 & -\alpha_y + \omega_x \omega_z & \alpha_x + \omega_y \omega_z & -(\omega_x^2 + \omega_y^2) \end{bmatrix} \tag{1.75}$$

Tal que: $\omega_x = \dot{\theta}u_x$, $\omega_y = \dot{\theta}u_y$, $\omega_z = \dot{\theta}u_z$, $\alpha_x = \ddot{\theta}u_x$, $\alpha_y = \ddot{\theta}u_y$, $\alpha_z = \ddot{\theta}u_z$.

Demostración:

A partir de las ecs.(1.39) y (1.73):

$$\begin{aligned}\mathbf{W} &= \dot{\mathbf{q}} * \bar{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \dot{\theta} \mathbf{u} \\ \mathbf{H} &= \ddot{\mathbf{q}} * \bar{\mathbf{q}} = -\frac{1}{4} \left(\dot{\theta} \right)^2 \mathbf{e}_0 + \frac{1}{2} \ddot{\theta} \mathbf{u}\end{aligned}$$

Evaluando la función $\dot{\psi}_j = (\mathbf{H} * \mathbf{e}_j - \mathbf{e}_j * \mathbf{H}) - 2(\mathbf{W} * \mathbf{e}_j - \mathbf{e}_j * \mathbf{W}) * \mathbf{W}$ respecto a la base $\mathbf{e}_j \in \mathcal{R}^4$ para $j = 0, 1, 2, 3$, se tiene:

$$\begin{aligned}\dot{\psi}_0 &= (\mathbf{H} * \mathbf{e}_0 - \mathbf{e}_0 * \mathbf{H}) - 2(\mathbf{W} * \mathbf{e}_0 - \mathbf{e}_0 * \mathbf{W}) * \mathbf{W} \\ &= (0, 0, 0, 0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{\psi}_1 &= (\mathbf{H} * \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_1 * \mathbf{H}) - 2(\mathbf{W} * \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_1 * \mathbf{W}) * \mathbf{W} \\ &= (0, -(\omega_y^2 + \omega_z^2), \alpha_z + \omega_x \omega_y, -\alpha_y + \omega_x \omega_z)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{\psi}_2 &= (\mathbf{H} * \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_2 * \mathbf{H}) - 2(\mathbf{W} * \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_2 * \mathbf{W}) * \mathbf{W} \\ &= (0, -\alpha_z + \omega_x \omega_y, -(\omega_x^2 + \omega_z^2), \alpha_x + \omega_y \omega_z)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{\psi}_3 &= (\mathbf{H} * \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_3 * \mathbf{H}) - 2(\mathbf{W} * \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_3 * \mathbf{W}) * \mathbf{W} \\ &= (0, \alpha_y + \omega_x \omega_z, -\alpha_x + \omega_y \omega_z, -(\omega_x^2 + \omega_y^2))\end{aligned}$$

La representación matricial es:

$$\begin{aligned}[\mathbf{M}_H] &= \begin{bmatrix} \dot{\psi}_0 & \dot{\psi}_1 & \dot{\psi}_2 & \dot{\psi}_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(\omega_y^2 + \omega_z^2) & -\alpha_z + \omega_x \omega_y & \alpha_y + \omega_x \omega_z \\ 0 & \alpha_z + \omega_x \omega_y & -(\omega_x^2 + \omega_z^2) & -\alpha_x + \omega_y \omega_z \\ 0 & -\alpha_y + \omega_x \omega_z & \alpha_x + \omega_y \omega_z & -(\omega_x^2 + \omega_y^2) \end{bmatrix} \\ [\mathbf{M}_H] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha_z & \alpha_y \\ 0 & \alpha_z & 0 & -\alpha_x \\ 0 & -\alpha_y & \alpha_x & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(\omega_y^2 + \omega_z^2) & \omega_x \omega_y & \omega_x \omega_z \\ 0 & \omega_x \omega_y & -(\omega_x^2 + \omega_z^2) & \omega_y \omega_z \\ 0 & \omega_x \omega_z & \omega_y \omega_z & -(\omega_x^2 + \omega_y^2) \end{bmatrix}\end{aligned}\tag{1.76}$$

Donde: $\omega_x = \dot{\theta}u_x$, $\omega_y = \dot{\theta}u_y$, $\omega_z = \dot{\theta}u_z$, $\alpha_x = \ddot{\theta}u_x$, $\alpha_y = \ddot{\theta}u_y$, $\alpha_z = \ddot{\theta}u_z$. La submatriz obtenida al eliminar el primer renglón y columna de cada matriz de la ec.(1.76), está formada por una matriz antisimétrica correspondiente a la aceleración angular y una matriz simétrica correspondiente a los efectos giroscópicos producidos por la velocidad angular, ambos de la base local $\mathbf{e}_j^n \in \mathcal{R}^3$, respecto a la base inercial $\mathbf{e}_j \in \mathcal{R}^3$. ■

A continuación se establece un equivalente al **Corolario 4** para una composición de rotaciones.

Corolario 5.- Si \mathbf{q} representa una composición de rotaciones, tal que $\mathbf{q} = \mathbf{p}_1 * \mathbf{p}_2 * \mathbf{p}_3$, el vector de aceleración general angular $\mathbf{H} \in \mathcal{R}^4$ asociado a \mathbf{q} está dado por:

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \ddot{\mathbf{q}} * \bar{\mathbf{q}} \\ &= \mathbf{H}_1 + \rho(\mathbf{p}_1, \mathbf{H}_2) + \rho(\mathbf{p}_1 * \mathbf{p}_2, \mathbf{H}_3) + \\ &\quad 2\mathbf{W}_1 * \rho(\mathbf{p}_1, \mathbf{W}_2) + 2\mathbf{W}_1 * \rho(\mathbf{p}_1 * \mathbf{p}_2, \mathbf{W}_3) + \\ &\quad 2\rho(\mathbf{p}_1, \mathbf{W}_2) * \rho(\mathbf{p}_1 * \mathbf{p}_2, \mathbf{W}_3) \end{aligned} \quad (1.77)$$

Donde $\mathbf{H}_j = \ddot{\mathbf{p}}_j * \bar{\mathbf{p}}_j = -\frac{1}{4} \left(\dot{\theta}_j \right)^2 \mathbf{e}_0 + \frac{1}{2} \ddot{\theta}_j \mathbf{e}_j$, $\ddot{\mathbf{p}}_j = \left(-\frac{1}{4} \left(\dot{\theta}_j \right)^2 \mathbf{e}_0 + \frac{1}{2} \ddot{\theta}_j \mathbf{e}_j \right) * \mathbf{p}_j$, \mathbf{H}_j —vector de aceleración general angular asociado a \mathbf{p}_j , para $j = 1, 2, 3$.

Demostración:

Se sabe que $\mathbf{q} = \mathbf{p}_1 * \mathbf{p}_2 * \mathbf{p}_3$. Además:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{q}} &= (\mathbf{p}_1 * \mathbf{p}_2 * \mathbf{p}_3)^{\ddot{}} \\ &= (\dot{\mathbf{p}}_1 * \mathbf{p}_2 * \mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_1 * \dot{\mathbf{p}}_2 * \mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_1 * \mathbf{p}_2 * \dot{\mathbf{p}}_3)^{\dot{}} \\ &= \ddot{\mathbf{p}}_1 * \mathbf{p}_2 * \mathbf{p}_3 + \dot{\mathbf{p}}_1 * \dot{\mathbf{p}}_2 * \mathbf{p}_3 + \dot{\mathbf{p}}_1 * \mathbf{p}_2 * \dot{\mathbf{p}}_3 + \\ &\quad \dot{\mathbf{p}}_1 * \dot{\mathbf{p}}_2 * \mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_1 * \ddot{\mathbf{p}}_2 * \mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_1 * \dot{\mathbf{p}}_2 * \dot{\mathbf{p}}_3 + \\ &\quad \dot{\mathbf{p}}_1 * \mathbf{p}_2 * \dot{\mathbf{p}}_3 + \mathbf{p}_1 * \dot{\mathbf{p}}_2 * \dot{\mathbf{p}}_3 + \mathbf{p}_1 * \mathbf{p}_2 * \ddot{\mathbf{p}}_3 \\ \ddot{\mathbf{q}} &= \ddot{\mathbf{p}}_1 * \mathbf{p}_2 * \mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_1 * \ddot{\mathbf{p}}_2 * \mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_1 * \mathbf{p}_2 * \ddot{\mathbf{p}}_3 + \\ &\quad 2 \dot{\mathbf{p}}_1 * \dot{\mathbf{p}}_2 * \mathbf{p}_3 + 2 \dot{\mathbf{p}}_1 * \mathbf{p}_2 * \dot{\mathbf{p}}_3 + 2 \mathbf{p}_1 * \dot{\mathbf{p}}_2 * \dot{\mathbf{p}}_3 \end{aligned} \quad (1.78)$$

De la definición de \mathbf{H} se tiene:

$$\begin{aligned}
\mathbf{H} &= \ddot{\mathbf{q}} * \bar{\mathbf{q}} \\
&= (\mathbf{p}_1 * \mathbf{p}_2 * \mathbf{p}_3)^{\bullet\bullet} * (\bar{\mathbf{p}}_3 * \bar{\mathbf{p}}_2 * \bar{\mathbf{p}}_1) \\
&= \ddot{\mathbf{p}}_1 * \bar{\mathbf{p}}_1 + \\
&\quad \mathbf{p}_1 * (\ddot{\mathbf{p}}_2 * \bar{\mathbf{p}}_2) * \bar{\mathbf{p}}_1 + \\
&\quad \mathbf{p}_1 * \mathbf{p}_2 * (\ddot{\mathbf{p}}_3 * \bar{\mathbf{p}}_3) * \bar{\mathbf{p}}_2 * \bar{\mathbf{p}}_1 + \\
&\quad 2 \dot{\mathbf{p}}_1 * (\dot{\mathbf{p}}_2 * \bar{\mathbf{p}}_2) * \bar{\mathbf{p}}_1 + \\
&\quad 2 \dot{\mathbf{p}}_1 * \mathbf{p}_2 * (\dot{\mathbf{p}}_3 * \bar{\mathbf{p}}_3) * \bar{\mathbf{p}}_2 * \bar{\mathbf{p}}_1 + \\
&\quad 2 \mathbf{p}_1 * \dot{\mathbf{p}}_2 * (\dot{\mathbf{p}}_3 * \bar{\mathbf{p}}_3) * \bar{\mathbf{p}}_2 * \bar{\mathbf{p}}_1
\end{aligned} \tag{1.79}$$

Analizando el cuarto término de ec.(1.79)

Se sabe que $\bar{\mathbf{p}} * \mathbf{p} = \mathbf{1}$:

$$\begin{aligned}
2 \dot{\mathbf{p}}_1 * (\dot{\mathbf{p}}_2 * \bar{\mathbf{p}}_2) * \bar{\mathbf{p}}_1 &= 2 \dot{\mathbf{p}}_1 * \mathbf{1} * \mathbf{W}_2 * \bar{\mathbf{p}}_1 \\
&= 2 (\dot{\mathbf{p}}_1 * \bar{\mathbf{p}}_1) * (\mathbf{p}_1 * \mathbf{W}_2 * \bar{\mathbf{p}}_1) \\
&= 2 \mathbf{W}_1 * \rho(\mathbf{p}_1, \mathbf{W}_2)
\end{aligned} \tag{1.80}$$

Analizando el quinto término de ec.(1.79)

$$\begin{aligned}
2 \dot{\mathbf{p}}_1 * \mathbf{p}_2 * (\dot{\mathbf{p}}_3 * \bar{\mathbf{p}}_3) * \bar{\mathbf{p}}_2 * \bar{\mathbf{p}}_1 &= 2 \dot{\mathbf{p}}_1 * \mathbf{1} * \mathbf{p}_2 * \mathbf{W}_3 * \bar{\mathbf{p}}_2 * \bar{\mathbf{p}}_1 \\
&= 2 (\dot{\mathbf{p}}_1 * \bar{\mathbf{p}}_1) * (\mathbf{p}_1 * \mathbf{p}_2 * \mathbf{W}_3 * \bar{\mathbf{p}}_2 * \bar{\mathbf{p}}_1) \\
&= 2 \mathbf{W}_1 * \rho(\mathbf{p}_1 * \mathbf{p}_2, \mathbf{W}_3)
\end{aligned} \tag{1.81}$$

Analizando el sexto término de ec.(1.79)

$$\begin{aligned}
2 \mathbf{p}_1 * \dot{\mathbf{p}}_2 * (\dot{\mathbf{p}}_3 * \bar{\mathbf{p}}_3) * \bar{\mathbf{p}}_2 * \bar{\mathbf{p}}_1 &= 2 \mathbf{p}_1 * \dot{\mathbf{p}}_2 * \mathbf{1} * \mathbf{W}_3 * \bar{\mathbf{p}}_2 * \bar{\mathbf{p}}_1 \\
&= 2 \mathbf{p}_1 * (\dot{\mathbf{p}}_2 * \bar{\mathbf{p}}_2) * (\mathbf{p}_2 * \mathbf{W}_3 * \bar{\mathbf{p}}_2) * \bar{\mathbf{p}}_1 \\
&= 2 \mathbf{p}_1 * \mathbf{W}_2 * \mathbf{1} * (\mathbf{p}_2 * \mathbf{W}_3 * \bar{\mathbf{p}}_2) * \bar{\mathbf{p}}_1 \\
&= 2 (\mathbf{p}_1 * \mathbf{W}_2 * \bar{\mathbf{p}}_1) * (\mathbf{p}_1 * \mathbf{p}_2 * \mathbf{W}_3 * \bar{\mathbf{p}}_2 * \bar{\mathbf{p}}_1) \\
&= 2 \rho(\mathbf{p}_1, \mathbf{W}_2) * \rho(\mathbf{p}_1 * \mathbf{p}_2, \mathbf{W}_3)
\end{aligned} \tag{1.82}$$

Sustituyendo ecs.(1.80)–(1.82) en ec.(1.79):

$$\begin{aligned}
 \mathbf{H} &= \mathbf{H}_1 + \\
 &\quad \rho(\mathbf{p}_1, \mathbf{H}_2) + \\
 &\quad \rho(\mathbf{p}_1 * \mathbf{p}_2, \mathbf{H}_3) + \\
 &\quad 2 \mathbf{W}_1 * \rho(\mathbf{p}_1, \mathbf{W}_2) + \\
 &\quad 2 \mathbf{W}_1 * \rho(\mathbf{p}_1 * \mathbf{p}_2, \mathbf{W}_3) + \\
 &\quad 2 \rho(\mathbf{p}_1, \mathbf{W}_2) * \rho(\mathbf{p}_1 * \mathbf{p}_2, \mathbf{W}_3)
 \end{aligned} \tag{1.83}$$

Que es lo que buscamos. Donde para $j = 1, 2, 3$:

$$\mathbf{H}_j = \ddot{\mathbf{p}}_j * \bar{\mathbf{p}}_j \tag{1.84}$$

Para expresarla en función de $\ddot{\theta}_j$ y $\dot{\theta}_j$, procedemos derivando ec.(1.47):

$$\begin{aligned}
 \ddot{\mathbf{p}}_j &= \frac{d\dot{\mathbf{p}}_j}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \dot{\theta}_j \underline{\mathbf{e}}_j * \mathbf{p}_j \right) \\
 &= \frac{1}{2} \frac{d\dot{\theta}_j}{dt} (\underline{\mathbf{e}}_j * \mathbf{p}_j) + \frac{1}{2} \dot{\theta}_j \frac{d}{d\theta_j} (\underline{\mathbf{e}}_j * \mathbf{p}_j) \frac{d\theta_j}{dt} \\
 &= \frac{1}{2} \ddot{\theta}_j (\underline{\mathbf{e}}_j * \mathbf{p}_j) + \frac{1}{2} \left(\dot{\theta}_j \right)^2 \left(\underline{\mathbf{e}}_j * \frac{d\mathbf{p}_j}{d\theta_j} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \ddot{\theta}_j (\underline{\mathbf{e}}_j * \mathbf{p}_j) + \frac{1}{2} \left(\dot{\theta}_j \right)^2 \left(\underline{\mathbf{e}}_j * \frac{1}{2} (\underline{\mathbf{e}}_j * \mathbf{p}_j) \right) \\
 &= \frac{1}{2} \ddot{\theta}_j (\underline{\mathbf{e}}_j * \mathbf{p}_j) - \frac{1}{4} \left(\dot{\theta}_j \right)^2 (\underline{\mathbf{e}}_0 * \mathbf{p}_j) \\
 \ddot{\mathbf{p}}_j &= \left(-\frac{1}{4} \left(\dot{\theta}_j \right)^2 \underline{\mathbf{e}}_0 + \frac{1}{2} \ddot{\theta}_j \underline{\mathbf{e}}_j \right) * \mathbf{p}_j
 \end{aligned} \tag{1.85}$$

Donde $\underline{\mathbf{e}}_j * \underline{\mathbf{e}}_j = -\underline{\mathbf{e}}_0$. Sustituyendo ec.(1.85) en ec.(1.84):

$$\begin{aligned}
 \mathbf{H}_j &= \left(-\frac{1}{4} \left(\dot{\theta}_j \right)^2 \underline{\mathbf{e}}_0 + \frac{1}{2} \ddot{\theta}_j \underline{\mathbf{e}}_j \right) * (\mathbf{p}_j * \bar{\mathbf{p}}_j) \\
 \mathbf{H}_j &= \left(-\frac{1}{4} \left(\dot{\theta}_j \right)^2 \underline{\mathbf{e}}_0 + \frac{1}{2} \ddot{\theta}_j \underline{\mathbf{e}}_j \right)
 \end{aligned} \tag{1.86}$$

Donde \mathbf{H}_j es el vector de aceleración general angular, ya que contiene el efecto tangencial asociado a $\frac{1}{2} \ddot{\theta}_j \underline{\mathbf{e}}_j$ y el efecto normal asociado a $-\frac{1}{4} \left(\dot{\theta}_j \right)^2 \underline{\mathbf{e}}_0$. ■

Corolario 6.- El vector $\dot{\mathbf{W}}_j \in \mathcal{R}^4$ que representa la aceleración angular media asociada a \mathbf{p}_j de la base local $\underline{\mathbf{e}}_j^n$, está dado por:

$$\dot{\mathbf{W}}_j = \ddot{\mathbf{p}}_j * \bar{\mathbf{p}}_j + \dot{\mathbf{p}}_j * \dot{\bar{\mathbf{p}}}_j = \frac{1}{2} \ddot{\theta}_j \underline{\mathbf{e}}_j \quad (1.87)$$

Donde $\underline{\mathbf{e}}_j$ es el vector unitario del eje de giro para $j = 1, 2, 3$.

Demostración:

Se sabe de ec.(1.48) que:

$$\mathbf{W}_j = \dot{\mathbf{p}}_j * \bar{\mathbf{p}}_j \quad (1.48)$$

Derivando respecto al tiempo:

$$\dot{\mathbf{W}}_j = \ddot{\mathbf{p}}_j * \bar{\mathbf{p}}_j + \dot{\mathbf{p}}_j * \dot{\bar{\mathbf{p}}}_j \quad (1.88)$$

De la ec.(1.47) y su conjugado se tiene:

$$\dot{\mathbf{p}}_j = \frac{1}{2} \dot{\theta}_j (\underline{\mathbf{e}}_j * \mathbf{p}_j) \quad (1.47)$$

$$\dot{\bar{\mathbf{p}}}_j = -\frac{1}{2} \dot{\theta}_j (\bar{\mathbf{p}}_j * \underline{\mathbf{e}}_j) \quad (1.89)$$

Sustituyendo ecs.(1.47), (1.89) y (1.85) en ec.(1.88):

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{W}}_j &= \left(-\frac{1}{4} (\dot{\theta}_j)^2 \underline{\mathbf{e}}_0 + \frac{1}{2} \ddot{\theta}_j \underline{\mathbf{e}}_j \right) * \mathbf{p}_j * \bar{\mathbf{p}}_j - \frac{1}{2} \dot{\theta}_j (\underline{\mathbf{e}}_j * \mathbf{p}_j) * \frac{1}{2} \dot{\theta}_j (\bar{\mathbf{p}}_j * \underline{\mathbf{e}}_j) \\ &= \left(-\frac{1}{4} (\dot{\theta}_j)^2 \underline{\mathbf{e}}_0 + \frac{1}{2} \ddot{\theta}_j \underline{\mathbf{e}}_j \right) - \frac{1}{4} (\dot{\theta}_j)^2 \underline{\mathbf{e}}_j * (\mathbf{p}_j * \bar{\mathbf{p}}_j) * \underline{\mathbf{e}}_j \\ &= \left(-\frac{1}{4} (\dot{\theta}_j)^2 \underline{\mathbf{e}}_0 + \frac{1}{2} \ddot{\theta}_j \underline{\mathbf{e}}_j \right) + \frac{1}{4} (\dot{\theta}_j)^2 \underline{\mathbf{e}}_0 \\ \dot{\mathbf{W}}_j &= \frac{1}{2} \ddot{\theta}_j \underline{\mathbf{e}}_j \end{aligned}$$

Donde $\underline{\mathbf{e}}_j * \underline{\mathbf{e}}_j = -\underline{\mathbf{e}}_0$. Se obtiene lo que buscamos. ■

Definición 3.- Los vectores de aceleración angular $\underline{\alpha}_j \in \mathcal{R}^4$ y $\alpha_j \in \mathcal{R}^3$ asociados a $\dot{\mathbf{W}}_j = \frac{1}{2} \ddot{\theta}_j \underline{\mathbf{e}}_j$, están dados por:

$$\underline{\alpha}_j = 2 \dot{\mathbf{W}}_j = 2 \left(\ddot{\mathbf{p}}_j * \bar{\mathbf{p}}_j + \dot{\mathbf{p}}_j * \dot{\bar{\mathbf{p}}}_j \right) = \ddot{\theta}_j \underline{\mathbf{e}}_j \quad (1.90)$$

$$\alpha_j = \mathbf{T}_V(\underline{\alpha}_j) \quad (1.91)$$

A continuación se muestran las propiedades geométricas asociadas a cada vector que forman parte de la ecuación de aceleración lineal. ec.(1.59).

Proposición 6.- El vector $(\mathbf{H} * \mathbf{R} - \mathbf{R} * \mathbf{H})$ está asociado al término tangencial de la aceleración, ya que genera vectores perpendiculares a \mathbf{R} , tal que:

$$\langle \mathbf{H} * \mathbf{R} - \mathbf{R} * \mathbf{H}, \mathbf{R} \rangle = 0 \quad (1.92)$$

Demostración:

Para $\mathbf{H} = -\frac{1}{4} \left(\dot{\theta} \right)^2 \mathbf{e}_0 + \frac{1}{2} \ddot{\theta} \mathbf{u}$ de ec.(1.74) (**Corolario 4**), simplificamos el vector:

$$\begin{aligned} (\mathbf{H} * \mathbf{R} - \mathbf{R} * \mathbf{H}) &= \left(-\frac{1}{4} \left(\dot{\theta} \right)^2 \mathbf{e}_0 + \frac{1}{2} \ddot{\theta} \mathbf{u} \right) * \mathbf{R} - \mathbf{R} * \left(-\frac{1}{4} \left(\dot{\theta} \right)^2 \mathbf{e}_0 + \frac{1}{2} \ddot{\theta} \mathbf{u} \right) \\ &= \left(-\frac{1}{4} \left(\dot{\theta} \right)^2 \mathbf{e}_0 \right) * \mathbf{R} - \mathbf{R} * \left(-\frac{1}{4} \left(\dot{\theta} \right)^2 \mathbf{e}_0 \right) + \\ &\quad \left(\frac{1}{2} \ddot{\theta} \mathbf{u} \right) * \mathbf{R} - \mathbf{R} * \left(\frac{1}{2} \ddot{\theta} \mathbf{u} \right) \\ &= -\frac{1}{4} \left(\dot{\theta} \right)^2 (\mathbf{e}_0 * \mathbf{R} - \mathbf{R} * \mathbf{e}_0) + \frac{1}{2} \ddot{\theta} (\mathbf{u} * \mathbf{R} - \mathbf{R} * \mathbf{u}) \\ &= -\frac{1}{4} \left(\dot{\theta} \right)^2 (\mathbf{R} - \mathbf{R}) + \frac{1}{2} \ddot{\theta} (\mathbf{u} * \mathbf{R} - \mathbf{R} * \mathbf{u}) \\ (\mathbf{H} * \mathbf{R} - \mathbf{R} * \mathbf{H}) &= \frac{1}{2} \ddot{\theta} (\mathbf{u} * \mathbf{R} - \mathbf{R} * \mathbf{u}) \end{aligned}$$

Calculando el producto punto entre vectores $(\mathbf{H} * \mathbf{R} - \mathbf{R} * \mathbf{H})$ y \mathbf{R} , donde $\mathbf{R} = r_j \mathbf{e}_j^n$ (**Proposición 2**):

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{H} * \mathbf{R} - \mathbf{R} * \mathbf{H}, \mathbf{R} \rangle &= \left\langle \frac{1}{2} \ddot{\theta} (\mathbf{u} * \mathbf{R} - \mathbf{R} * \mathbf{u}), \mathbf{R} \right\rangle \\ &= \frac{1}{2} \ddot{\theta} \langle \mathbf{u} * r_j \mathbf{e}_j^n - r_j \mathbf{e}_j^n * \mathbf{u}, r_j \mathbf{e}_j^n \rangle \\ &= \frac{1}{2} \ddot{\theta} (r_j)^2 \langle \mathbf{u} * \mathbf{e}_j^n - \mathbf{e}_j^n * \mathbf{u}, \mathbf{e}_j^n \rangle \end{aligned}$$

$$\langle \mathbf{H} * \mathbf{R} - \mathbf{R} * \mathbf{H}, \mathbf{R} \rangle = 0$$

Utilizando la **Proposición 3**. Esto demuestra que los vectores del producto punto son perpendiculares y como consecuencia uno tangente al otro, que es lo que buscamos. ■

Proposición 7.- El vector $-2 (\mathbf{W} * \mathbf{R} - \mathbf{R} * \mathbf{W}) * \mathbf{W}$ está asociado al término normal de la aceleración, ya que genera vectores perpendiculares a \mathbf{W} , tal que:

$$\langle -2 (\mathbf{W} * \mathbf{R} - \mathbf{R} * \mathbf{W}) * \mathbf{W}, \mathbf{W} \rangle = 0 \quad (1.93)$$

Demostración:

Para $\mathbf{W} = \frac{1}{2} \dot{\theta} \underline{\mathbf{u}}$, $\underline{\mathbf{u}} = (0, u_1, u_2, u_3)$ y $\mathbf{R} = r_j \underline{\mathbf{e}}_j^n = r_1 \underline{\mathbf{e}}_1^n + r_2 \underline{\mathbf{e}}_2^n + r_3 \underline{\mathbf{e}}_3^n$, se tiene:

$$\langle \mathbf{R}, \underline{\mathbf{u}} \rangle = r_1 u_1 + r_2 u_2 + r_3 u_3 \quad (1.94)$$

Así:

$$\begin{aligned} \langle -2 (\mathbf{W} * \mathbf{R} - \mathbf{R} * \mathbf{W}) * \mathbf{W}, \mathbf{W} \rangle &= -2 (\langle \mathbf{W} * \mathbf{R} * \mathbf{W}, \mathbf{W} \rangle - \langle \mathbf{R} * \mathbf{W} * \mathbf{W}, \mathbf{W} \rangle) \\ &= -2 \left(-\frac{1}{8} (\dot{\theta})^3 \langle \mathbf{R}, \underline{\mathbf{u}} \rangle + \frac{1}{8} (\dot{\theta})^3 \langle \mathbf{R}, \underline{\mathbf{u}} \rangle \right) \end{aligned}$$

$$\langle -2 (\mathbf{W} * \mathbf{R} - \mathbf{R} * \mathbf{W}) * \mathbf{W}, \mathbf{W} \rangle = 0$$

Que es lo que buscamos. ■

Proposición 8.- El vector $2 (\mathbf{W} * \rho(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{r}}) - \rho(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{r}}) * \mathbf{W})$ tiene dirección tangencial a \mathbf{R} , ya que cumple:

$$\langle 2 (\mathbf{W} * \rho(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{r}}) - \rho(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{r}}) * \mathbf{W}), \mathbf{R} \rangle = 0 \quad (1.95)$$

Demostración:

Para $\mathbf{W} = \frac{1}{2} \dot{\theta} \underline{\mathbf{u}}$, $\mathbf{R} = r_j \underline{\mathbf{e}}_j^n$ y $\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}_j \underline{\mathbf{e}}_j$ (**Proposición 5**), se tiene:

$$\begin{aligned} \langle 2 (\mathbf{W} * \rho(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{r}}) - \rho(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{r}}) * \mathbf{W}), \mathbf{R} \rangle &= 2 \left\langle \left(\frac{1}{2} \dot{\theta} \underline{\mathbf{u}} * \rho(\mathbf{q}, \dot{r}_j \underline{\mathbf{e}}_j) - \rho(\mathbf{q}, \dot{r}_j \underline{\mathbf{e}}_j) * \frac{1}{2} \dot{\theta} \underline{\mathbf{u}} \right), r_j \underline{\mathbf{e}}_j^n \right\rangle \\ &= 2 \left(\frac{1}{2} \dot{\theta} \dot{r}_j r_j \right) \langle (\underline{\mathbf{u}} * \rho(\mathbf{q}, \underline{\mathbf{e}}_j) - \rho(\mathbf{q}, \underline{\mathbf{e}}_j) * \underline{\mathbf{u}}), \underline{\mathbf{e}}_j^n \rangle \\ &= \dot{\theta} \dot{r}_j r_j \langle \underline{\mathbf{u}} * \underline{\mathbf{e}}_j^n - \underline{\mathbf{e}}_j^n * \underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{e}}_j^n \rangle \end{aligned}$$

$$\langle 2 (\mathbf{W} * \rho(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{r}}) - \rho(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{r}}) * \mathbf{W}), \mathbf{R} \rangle = 0$$

Donde $\underline{e}_j^n = \rho(\mathbf{q}, \underline{e}_j)$ (**Definición 1**) y utilizando la **Proposición 3**, se demuestra que los vectores del producto punto son perpendiculares y como consecuencia uno tangente al otro, que es lo que buscamos. ■

Proposición 9.- El vector $\rho(\mathbf{q}, \ddot{\mathbf{r}})$ está en la dirección de \mathbf{R} , ya que cumple:

$$\cos\theta = \frac{\langle \rho(\mathbf{q}, \ddot{\mathbf{r}}), \mathbf{R} \rangle}{\|\rho(\mathbf{q}, \ddot{\mathbf{r}})\| \|\mathbf{R}\|} = 1 \quad (1.96)$$

Por lo tanto $\theta = 0^\circ$.

Demostración:

El ángulo entre vectores $\rho(\mathbf{q}, \ddot{\mathbf{r}})$ y \mathbf{R} está dado por:

$$\cos\theta = \frac{\langle \rho(\mathbf{q}, \ddot{\mathbf{r}}), \mathbf{R} \rangle}{\|\rho(\mathbf{q}, \ddot{\mathbf{r}})\| \|\mathbf{R}\|} \quad (1.97)$$

De la **Proposición 5**, ec.(1.56):

$$\langle \rho(\mathbf{q}, \ddot{\mathbf{r}}), \mathbf{R} \rangle = \langle \ddot{\mathbf{r}}, \mathbf{r} \rangle \quad (1.98)$$

De la **Proposición 5** y tomando el denominador:

$$\|\rho(\mathbf{q}, \ddot{\mathbf{r}})\| \|\mathbf{R}\| = \sqrt{\langle \ddot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}} \rangle} \sqrt{\langle \mathbf{r}, \mathbf{r} \rangle} \quad (1.99)$$

Sustituyendo ecs.(1.98) y (1.99) en ec.(1.97):

$$\cos\theta = \frac{\langle \ddot{\mathbf{r}}, \mathbf{r} \rangle}{\sqrt{\langle \ddot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}} \rangle} \sqrt{\langle \mathbf{r}, \mathbf{r} \rangle}} \quad (1.100)$$

De la **Proposición 5**, $\dot{\mathbf{r}} = r_j \dot{\underline{e}}_j$, tomando su derivada respecto al tiempo:

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{r}_j \underline{e}_j$$

Sustituyendo en ec.(1.100):

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{\langle \ddot{r}_j \underline{e}_j, r_j \underline{e}_j \rangle}{\sqrt{\langle \ddot{r}_j \underline{e}_j, \ddot{r}_j \underline{e}_j \rangle} \sqrt{\langle r_j \underline{e}_j, r_j \underline{e}_j \rangle}} \\ &= \frac{\ddot{r}_j r_j \langle \underline{e}_j, \underline{e}_j \rangle}{\ddot{r}_j r_j \sqrt{\langle \underline{e}_j, \underline{e}_j \rangle^2}} \\ \cos\theta &= \frac{\langle \underline{e}_j, \underline{e}_j \rangle}{\langle \underline{e}_j, \underline{e}_j \rangle} = 1 \end{aligned}$$

Indicando que el ángulo entre vectores es cero, que es lo que buscamos. ■

A partir de la teoría desarrollada se modelarán los movimientos experimentados por la plataforma paralela espacial en los capítulos siguientes .

Capítulo 2

Análisis Cinemático

2.1. Introducción

En este capítulo se presenta el **análisis de posición, velocidad y aceleración** de una **Plataforma Paralela Espacial**. Se emplean las formulaciones previamente hechas en el **Capítulo 1**, para expresar conceptos de **posición, velocidad y aceleración lineal** en función de la **posición, velocidad y aceleración angular** en términos de los parámetros de los cuaterniones.

Para realizar el **análisis de posición**, se define una base inercial de localización arbitraria y bases locales unidas a los cuerpos de la plataforma. Estas se relacionan entre sí, mediante la función de rotación de los cuaterniones. La ecuación de posición queda establecida mediante ecuaciones de lazo vectorial y las normas de los cuaterniones incógnitas, que relacionan traslaciones y rotaciones experimentadas por los cuerpos mediante cuaterniones de traslación y rotación. Las ecuaciones de lazo y de normas permiten el cálculo de los parámetros de los cuaterniones de las juntas rotacionales y universales que son parte de la plataforma, estas a su vez definen los ángulos asociados a los ejes de giros de dichas juntas. Por último la relación entre la base inercial y las bases locales de las juntas esféricas y las normas de sus cuaterniones incógnitas, establecen las ecuaciones necesarias para determinar los ángulos de los giros de dichas juntas. Esto completa el **análisis de posición** de la **Plataforma Paralela Espacial**.

Los **análisis de velocidad y aceleración**, se establecen mediante la primera y segunda derivada respecto al tiempo de las ecuaciones de posición y las normas. Conceptos de velocidad y aceleración tanto lineal como angular serán funciones de parámetros de cuaterniones. A partir de dichos parámetros se obtienen las velocidades y aceleraciones angulares de los ejes de las juntas cinemáticas rotacionales, universales y esféricas.

El problema a resolver para la **Plataforma Paralela Espacial** será el problema **cin-**

emático inverso. Este relaciona el movimiento de la plataforma móvil con el movimiento de los eslabones que conforman las cadenas cinemáticas. El movimiento de la plataforma móvil se definirá mediante: el cambio de orientación de la plataforma y una trayectoria que seguirá un punto arbitrario de la misma, ambos como una función del tiempo y condiciones de posición, velocidad y aceleración iniciales y finales a satisfacer.

2.2. Análisis de Posición

Se tiene una plataforma espacial formada por una base fija, con cadenas cinemáticas utilizando juntas RUS (R-rotacional, U-universal, S-esférica) y una plataforma móvil con 6 GDL (Grados de Libertad) como se muestra en la figura 2.1.

Los cuerpos tienen movimiento relativo uno con respecto al otro. Para modelar estos movimientos se definen los siguientes elementos:

1. Una **base inercial** que no altera su posición con respecto al tiempo.
2. Bases en cada cuerpo (eslabones) que se denominarán **bases locales** y que estarán referidos a la **base inercial**. En estas bases se orientará un elemento de la base \mathbf{e}_j^n con el eje longitudinal del cuerpo.
3. Se establecerán relaciones entre las **bases locales** y la **base inercial** a través de la función de rotación mediante cuaterniones.
4. Con las ecuaciones cinemáticas de lazo y las normas de los cuaterniones incógnitas, se establecerá el sistema de ecuaciones que modelen el movimiento de los cuerpos acoplados.

Los modelos cinemáticos desarrollados en este capítulo, estarán en función de los parámetros de los cuaterniones incógnitas involucrados. Se analiza la cadena i , donde cada una de las cadenas cinemáticas que componen la plataforma son independientes de las demás. Esto ayudará a visualizar las incógnitas y ecuaciones involucradas. Se resolverá el problema **cinemático inverso** para los análisis de **posición, velocidad y aceleración**.

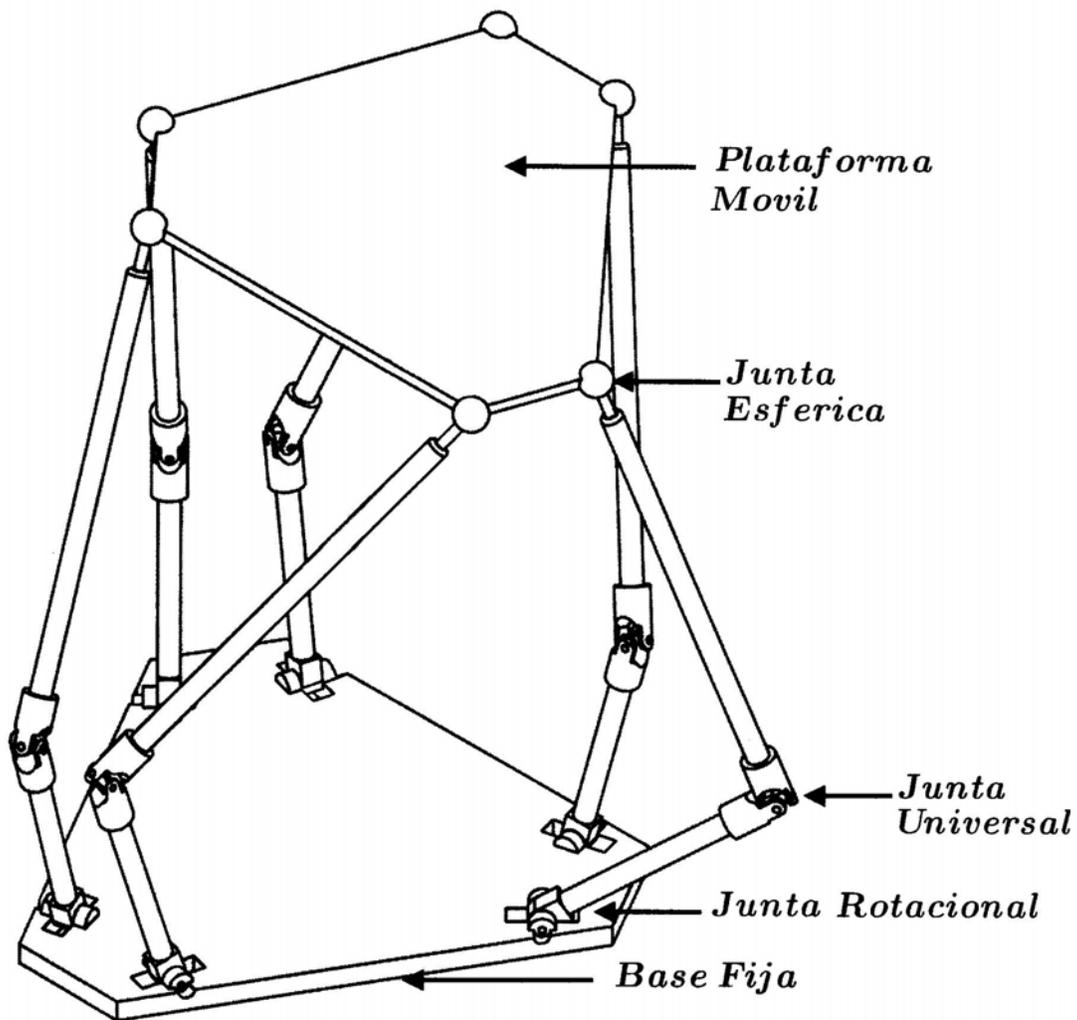


Fig. 2.1 Plataforma Espacial

2.2.1. Ecuaciones de Posición

El problema **Cinemático Inverso** para la **posición** se define como:

Dados el vector de posición \mathbf{R}_p y los ángulos ψ, θ, ϕ , que definen respectivamente la posición del origen y la orientación de la base \mathbf{e}_j^p en la plataforma móvil, determinar los ángulos θ_5^i de las juntas rotacionales, los ángulos θ_7^i y θ_8^i de las juntas universales, y los ángulos θ_{10}^i , θ_{11}^i y θ_{12}^i de las juntas esféricas de las cadenas cinemáticas.

Se tienen entonces las siguientes bases inercial y locales asignadas, figura 2.2, 2.3 y 2.4:

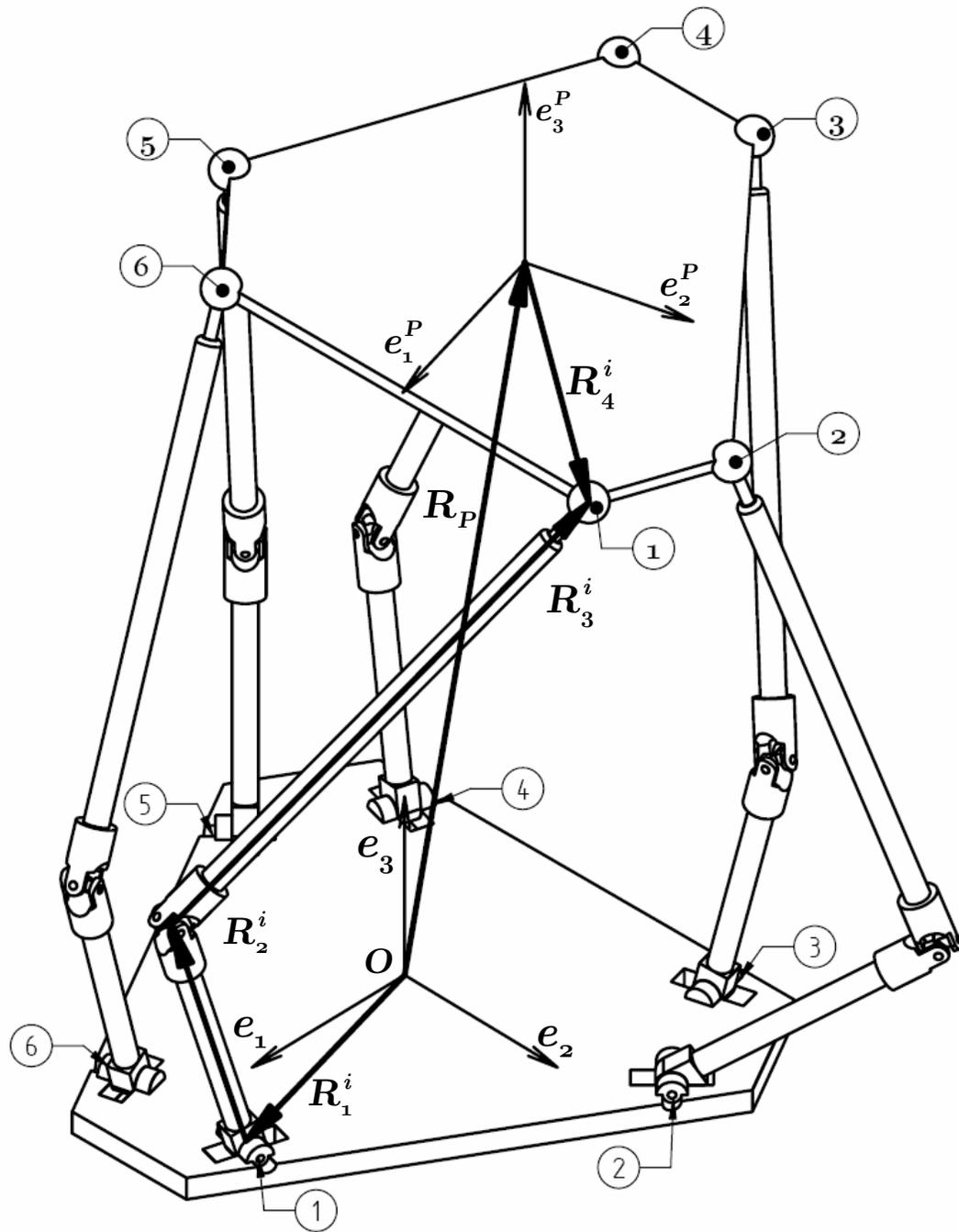


Fig. 2.2 Base inercial y base móvil de la Plataforma

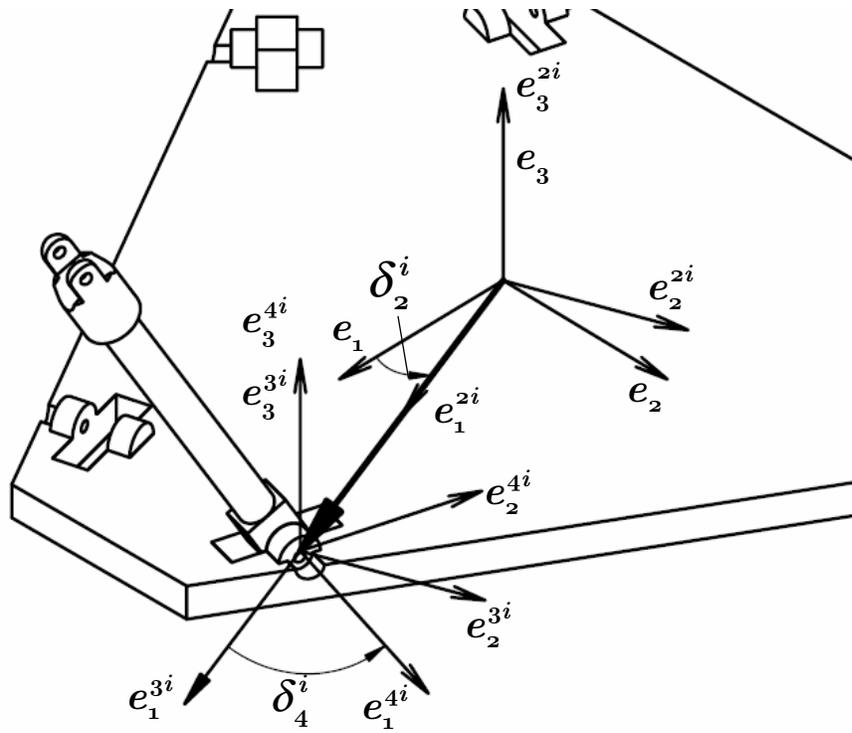


Fig. 2.3 Base fija

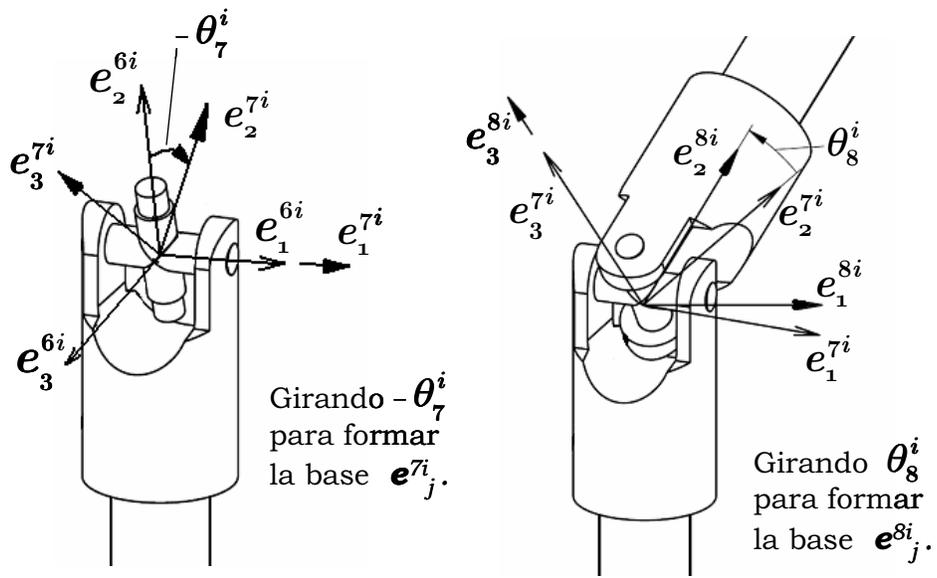


Fig. 2.5 Juntas Universales

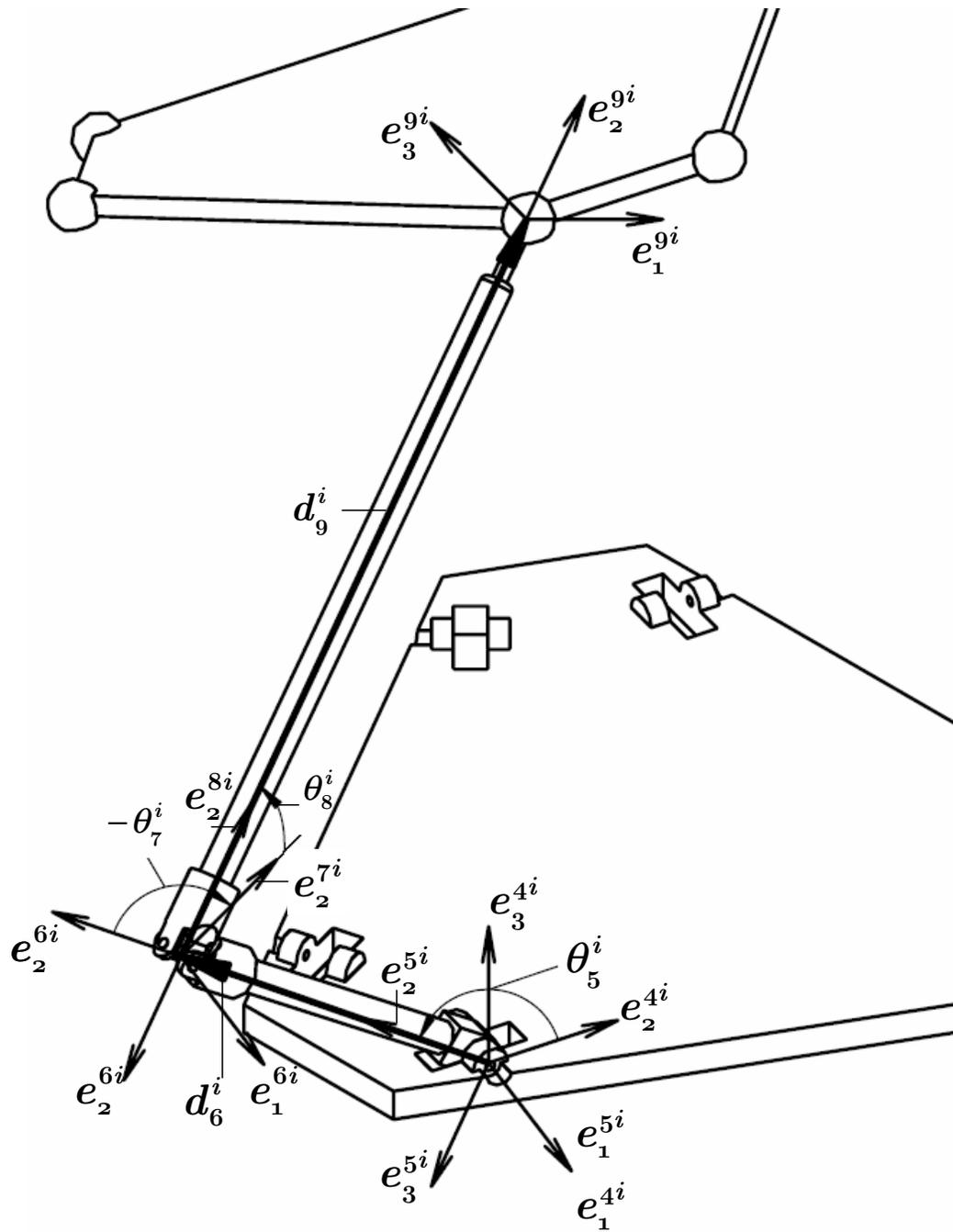


Fig. 2.4 Cadena cinemática i

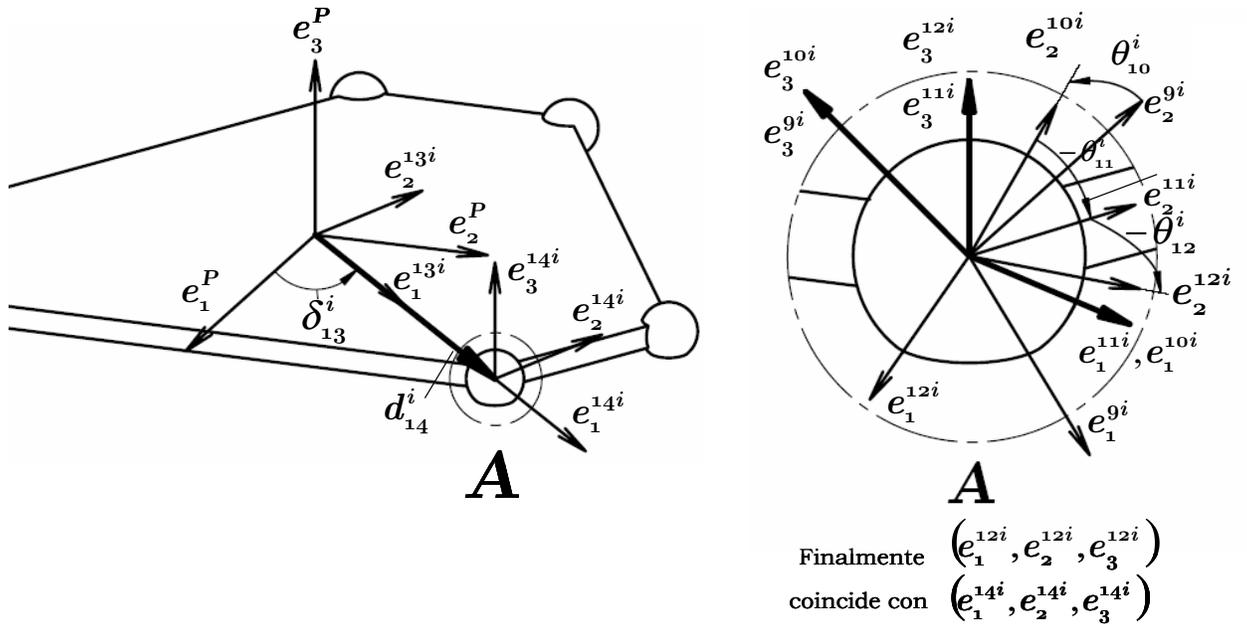


Fig. 2.6 Plataforma móvil y junta esférica

Las ecuaciones siguientes están definidas en \mathcal{R}^4 . La ecuación de posición y las normas de los cuaterniones incógnitas se definen como (fig. 2.2):

$$\mathbf{R}_1^i + \mathbf{R}_2^i + \mathbf{R}_3^i - \mathbf{R}_4^i = \mathbf{R}_p \quad (2.1)$$

$$\|\mathbf{p}_{5i}\|^2 = \langle \mathbf{p}_{5i}, \mathbf{p}_{5i} \rangle = 1$$

$$\|\mathbf{p}_{7i}\|^2 = \langle \mathbf{p}_{7i}, \mathbf{p}_{7i} \rangle = 1 \quad (2.2)$$

$$\|\mathbf{p}_{8i}\|^2 = \langle \mathbf{p}_{8i}, \mathbf{p}_{8i} \rangle = 1$$

Donde los vectores de posición y las bases locales se forman a partir de las figuras 2.2–2.6:

$$\mathbf{R}_1^i = d_3^i \underline{\mathbf{e}}_1^{2i}$$

$$\mathbf{R}_2^i = d_6^i \underline{\mathbf{e}}_2^{5i}$$

$$\mathbf{R}_3^i = d_9^i \underline{\mathbf{e}}_2^{8i}$$

$$\mathbf{R}_4^i = d_{14}^i \underline{\mathbf{e}}_1^{13i}$$

$$\mathbf{R}_p = \begin{pmatrix} 0, & x, & y, & z \end{pmatrix}$$

$$\underline{\mathbf{e}}_1^{2i} = \rho(\mathbf{p}_{2i}, \underline{\mathbf{e}}_1)$$

$$\underline{\mathbf{e}}_2^{5i} = \rho(\mathbf{q}_{5i}, \underline{\mathbf{e}}_2)$$

$$\underline{\mathbf{e}}_2^{8i} = \rho(\mathbf{q}_{8i}, \underline{\mathbf{e}}_2)$$

$$\underline{\mathbf{e}}_1^{13i} = \rho(\mathbf{q}_{13i}, \underline{\mathbf{e}}_1)$$

$$\mathbf{q}_{5i} = \mathbf{p}_{2i} * \mathbf{p}_{4i} * \mathbf{p}_{5i}$$

$$\mathbf{q}_{8i} = \mathbf{p}_{2i} * \mathbf{p}_{4i} * \mathbf{p}_{5i} * \mathbf{p}_{7i} * \mathbf{p}_{8i} = \mathbf{q}_{5i} * \mathbf{p}_{7i} * \mathbf{p}_{8i}$$

$$\mathbf{q}_p = \mathbf{q}_1 * \mathbf{q}_2 * \mathbf{q}_3$$

$$\mathbf{q}_{13i} = \mathbf{q}_p * \mathbf{p}_{13i}$$

Los cuaterniones que definen la orientación de las bases locales son:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{p}_{2i} &= \left(p_{2i0}, 0, 0, p_{2i3} \right) = \left(\cos \left(\frac{\delta_2^i}{2} \right), 0, 0, \operatorname{sen} \left(\frac{\delta_2^i}{2} \right) \right) \\
 \mathbf{p}_{4i} &= \left(p_{4i0}, 0, 0, p_{4i3} \right) = \left(\cos \left(\frac{\delta_4^i}{2} \right), 0, 0, \operatorname{sen} \left(\frac{\delta_4^i}{2} \right) \right) \\
 \mathbf{p}_{5i} &= \left(p_{5i0}, p_{5i1}, 0, 0 \right) = \left(\cos \left(\frac{\theta_5^i}{2} \right), \operatorname{sen} \left(\frac{\theta_5^i}{2} \right), 0, 0 \right) \\
 \mathbf{p}_{7i} &= \left(p_{7i0}, p_{7i1}, 0, 0 \right) = \left(\cos \left(\frac{\theta_7^i}{2} \right), \operatorname{sen} \left(\frac{\theta_7^i}{2} \right), 0, 0 \right) \\
 \mathbf{p}_{8i} &= \left(p_{8i0}, 0, 0, p_{8i3} \right) = \left(\cos \left(\frac{\theta_8^i}{2} \right), 0, 0, \operatorname{sen} \left(\frac{\theta_8^i}{2} \right) \right) \\
 \mathbf{p}_{13i} &= \left(p_{13i0}, 0, 0, p_{13i3} \right) = \left(\cos \left(\frac{\delta_{13}^i}{2} \right), 0, 0, \operatorname{sen} \left(\frac{\delta_{13}^i}{2} \right) \right)
 \end{aligned}$$

Los cuaterniones que definen la orientación de la plataforma móvil son:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{q}_1 &= \left(q_{10}, 0, 0, q_{13} \right) = \left(\cos \left(\frac{\psi}{2} \right), 0, 0, \operatorname{sen} \left(\frac{\psi}{2} \right) \right) \\
 \mathbf{q}_2 &= \left(q_{20}, 0, q_{22}, 0 \right) = \left(\cos \left(\frac{\theta}{2} \right), 0, \operatorname{sen} \left(\frac{\theta}{2} \right), 0 \right) \\
 \mathbf{q}_3 &= \left(q_{30}, 0, 0, q_{33} \right) = \left(\cos \left(\frac{\phi}{2} \right), 0, 0, \operatorname{sen} \left(\frac{\phi}{2} \right) \right)
 \end{aligned}$$

Cada cuaternión \mathbf{p} y \mathbf{q} , está asociado a ángulos constantes o variables. El problema cinemático se puede resolver teóricamente desde los puntos de vista de calcular los parámetros de cada vector o calcular los ángulos asociados.

A partir de las ecs.(2.1) y (2.2) se tiene un sistemas de 6 ecuaciones con 6 incógnitas. Las 6 ecuaciones siendo las componentes x, y, z de la ec.(2.1) y las 3 ecuaciones de (2.2). Las 6 incógnitas siendo las componentes de los cuaterniones \mathbf{p}_{5i} , \mathbf{p}_{7i} , \mathbf{p}_{8i} , es decir $(p_{5i0}, p_{5i1}, p_{7i0}, p_{7i1}, p_{8i0}, p_{8i3})$. El sistema de ecuaciones para la posición resulta en un sistema de ecuaciones no lineales requiriendo de un método numérico para su solución. Una vez obtenidos \mathbf{p}_{5i} , \mathbf{p}_{7i} , \mathbf{p}_{8i} , los ángulos asociados $(\theta_5^i, \theta_7^i, \theta_8^i)$, se pueden determinar mediante las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}
 \tan \left(\frac{\theta_5^i}{2} \right) &= \frac{\operatorname{sen} \left(\frac{\theta_5^i}{2} \right)}{\cos \left(\frac{\theta_5^i}{2} \right)} = \frac{p_{5i1}}{p_{5i0}} \\
 \theta_5^i &= 2 \tan^{-1} \left(\frac{p_{5i1}}{p_{5i0}} \right)
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

De la misma manera:

$$\begin{aligned}
 \theta_7^i &= 2 \tan^{-1} \left(\frac{p_{7i1}}{p_{7i0}} \right) \\
 \theta_8^i &= 2 \tan^{-1} \left(\frac{p_{8i1}}{p_{8i3}} \right)
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

2.2.2. Orientación de la Junta Esférica

Para calcular el movimiento de la junta esférica para la cadena i , se tomará en cuenta que las orientaciones de las bases $\underline{\mathbf{e}}_j^{12i}$ y $\underline{\mathbf{e}}_j^{14i}$ son las mismas (fig. 2.6). De esta manera se tiene:

$$\underline{\mathbf{e}}_j^{12i} = \underline{\mathbf{e}}_j^{14i} \quad (2.5)$$

$$\underline{\mathbf{e}}_j^{12i} = \rho(\mathbf{q}_{12i}, \underline{\mathbf{e}}_j) \quad (2.6)$$

$$\underline{\mathbf{e}}_j^{14i} = \rho(\mathbf{q}_{14i}, \underline{\mathbf{e}}_j) \quad (2.7)$$

Si definimos:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_{8i} &= \mathbf{p}_{2i} * \mathbf{p}_{4i} * \mathbf{p}_{5i} * \mathbf{p}_{7i} * \mathbf{p}_{8i} \\ \mathbf{q}_{si} &= \mathbf{p}_{10i} * \mathbf{p}_{11i} * \mathbf{p}_{12i} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Además $\mathbf{q}_{14i} = \mathbf{q}_{13i}$, ya que $\underline{\mathbf{e}}_j^{14i}$ es una base trasladada, así podemos definir:

$$\mathbf{q}_{12i} = \mathbf{q}_{8i} * \mathbf{q}_{si} \quad (2.9)$$

$$\mathbf{q}_{14i} = \mathbf{q}_p * \mathbf{p}_{13i} \quad (2.10)$$

Sustituyendo ec.(2.6) y (2.7) en ec.(2.5):

$$\rho(\mathbf{q}_{12i}, \underline{\mathbf{e}}_j) = \rho(\mathbf{q}_{14i}, \underline{\mathbf{e}}_j)$$

Para que la igualdad se cumpla, se debe satisfacer:

$$\mathbf{q}_{12i} = \mathbf{q}_{14i} \quad (2.11)$$

Sustituyendo ec.(2.9) en ec.(2.11) y despejando \mathbf{q}_s :

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_{8i} * \mathbf{q}_{si} &= \mathbf{q}_{14i} \\ \mathbf{q}_{si} &= \bar{\mathbf{q}}_{8i} * \mathbf{q}_{14i} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Finalmente sustituyendo ec.(2.8) y (2.10) se tiene:

$$\mathbf{p}_{10i} * \mathbf{p}_{11i} * \mathbf{p}_{12i} = \bar{\mathbf{q}}_{8i} * \mathbf{q}_p * \mathbf{p}_{13i} \quad (2.13)$$

La ec.(2.13) debe satisfacer las siguientes restricciones en función de los parámetros de los cuaterniones:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{p}_{10i}\|^2 &= \langle \mathbf{p}_{10i}, \mathbf{p}_{10i} \rangle = 1 \\ \|\mathbf{p}_{11i}\|^2 &= \langle \mathbf{p}_{11i}, \mathbf{p}_{11i} \rangle = 1 \\ \|\mathbf{p}_{12i}\|^2 &= \langle \mathbf{p}_{12i}, \mathbf{p}_{12i} \rangle = 1 \end{aligned} \quad (2.14)$$

Donde:

$$\begin{aligned}\mathbf{p}_{10i} &= \left(p_{10i0}, 0, 0, p_{10i3} \right) = \left(\cos\left(\frac{\theta_{10}^i}{2}\right), 0, 0, \operatorname{sen}\left(\frac{\theta_{10}^i}{2}\right) \right) \\ \mathbf{p}_{11i} &= \left(p_{11i0}, p_{11i1}, 0, 0 \right) = \left(\cos\left(\frac{\theta_{11}^i}{2}\right), \operatorname{sen}\left(\frac{\theta_{11}^i}{2}\right), 0, 0 \right) \\ \mathbf{p}_{12i} &= \left(p_{12i0}, 0, 0, p_{12i3} \right) = \left(\cos\left(\frac{\theta_{12}^i}{2}\right), 0, 0, \operatorname{sen}\left(\frac{\theta_{12}^i}{2}\right) \right)\end{aligned}$$

El sistema de ecuaciones (2.13) y (2.14) representan un sistema no lineal de 7 ecuaciones con 6 incógnitas, siendo estas últimas $(p_{10i0}, p_{10i3}, p_{11i0}, p_{11i1}, p_{12i0}, p_{12i3})$. De ec.(2.13) se pueden elegir 3 ecuaciones escalares más las 3 ecuaciones de ec.(2.14) para la solución de los parámetros de los cuaterniones, estos a su vez permitirán determinar los ángulos asociados $(\theta_{10}^i, \theta_{11}^i, \theta_{12}^i)$, de forma semejante a ec.(2.3), es decir:

$$\begin{aligned}\theta_{10}^i &= 2 \tan^{-1} \left(\frac{p_{10i3}}{p_{10i0}} \right) \\ \theta_{11}^i &= 2 \tan^{-1} \left(\frac{p_{11i1}}{p_{11i0}} \right) \\ \theta_{12}^i &= 2 \tan^{-1} \left(\frac{p_{12i3}}{p_{12i0}} \right)\end{aligned}\tag{2.15}$$

2.2.3. Gráficas de Posición

A continuación se muestran las gráficas de desplazamientos angulares que la plataforma espacial genera, al seguir la trayectoria descrita en el **Apéndice B**, para los puntos inicial \mathbf{p}_i y final \mathbf{p}_f y con los ángulos iniciales $\boldsymbol{\beta}_i = (\psi_i, \theta_i, \phi_i)$ y finales $\boldsymbol{\beta}_f = (\psi_f, \theta_f, \phi_f)$ para un tiempo de 10 segundos. Así el vector de posición \mathbf{R}_p del origen del sistema $\underline{\mathbf{e}}_j^p$ está definido como:

$$\begin{aligned}\mathbf{p}_i &= \left(0, 0, 0, 0.3 \right) m \\ \mathbf{p}_f &= \left(0, 0.07, 0.15, 0.25 \right) m \\ \mathbf{R}_p &= \mathbf{p}_i + \left[10 \left(\frac{t}{t_f} \right)^3 - 15 \left(\frac{t}{t_f} \right)^4 + 6 \left(\frac{t}{t_f} \right)^5 \right] (\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i)\end{aligned}$$

Y los ángulos $\boldsymbol{\beta} = (\psi, \theta, \phi)$, que definen la orientación de la base $\underline{\mathbf{e}}_j^p$ en la plataforma móvil, están definidos como:

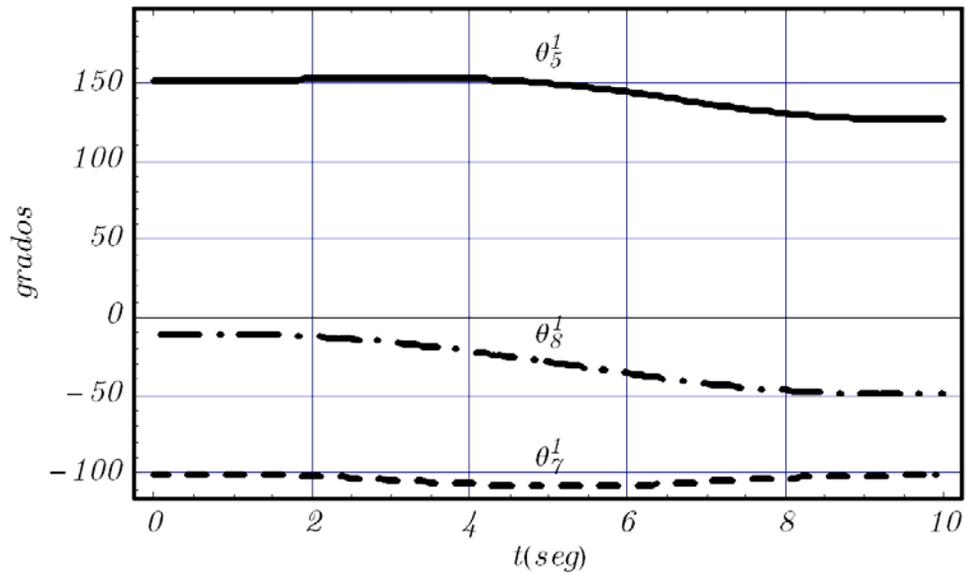
$$\begin{aligned}\boldsymbol{\beta}_i &= (\psi_i, \theta_i, \phi_i) = \left(0^\circ, 0^\circ, 0^\circ \right) = \left(0, 0, 0 \right) \text{ rad} \\ \boldsymbol{\beta}_f &= (\psi_f, \theta_f, \phi_f) = \left(15^\circ, 30^\circ, 5^\circ \right) = \left(0.261, 0.523, 0.087 \right) \text{ rad} \\ \boldsymbol{\beta} &= \boldsymbol{\beta}_i + \left[10 \left(\frac{t}{t_f} \right)^3 - 15 \left(\frac{t}{t_f} \right)^4 + 6 \left(\frac{t}{t_f} \right)^5 \right] (\boldsymbol{\beta}_f - \boldsymbol{\beta}_i)\end{aligned}$$

Además los datos utilizados para la plataforma son mostrados en la tabla siguiente, donde d_j^i está en metros y δ_j^i en grados:

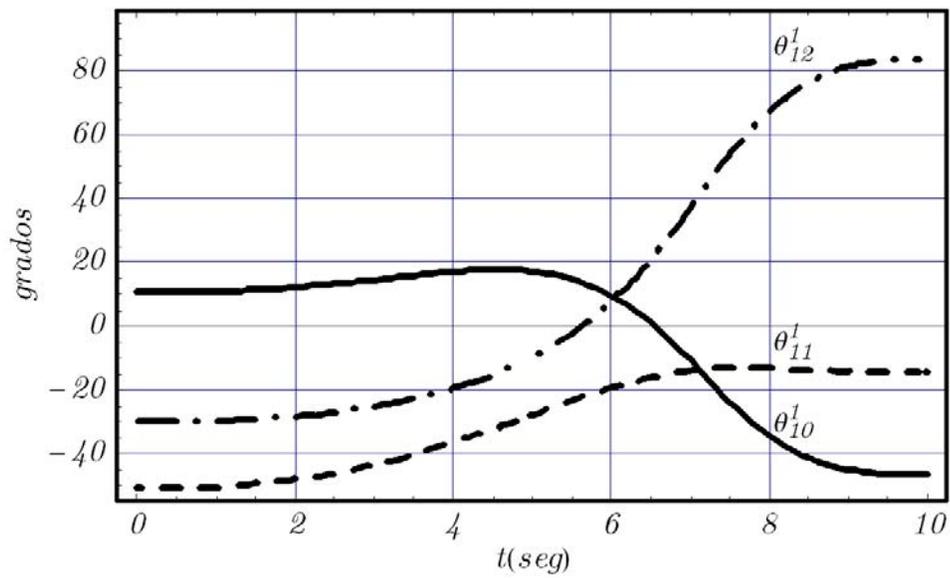
i	1	2	3	4	5	6
d_3^i	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15
d_6^i	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15
d_9^i	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3
d_{14}^i	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15
δ_2^i	15°	105°	135°	225°	255°	345°
δ_4^i	60°	-60°	60	-60°	60°	-60°
δ_{13}^i	45°	75°	165°	195°	285°	315°

Cadena Cinemática 1

Las gráficas para los ángulos $(\theta_5^1, \theta_7^1, \theta_8^1)$, según ecs.(2.3) y (2.4) son:

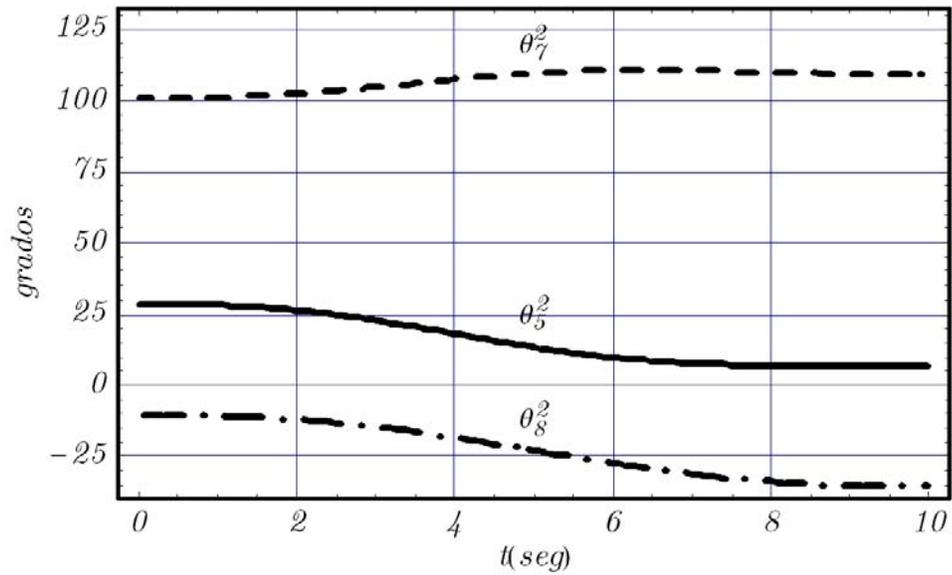


Las gráficas para los ángulos $(\theta_{10}^1, \theta_{11}^1, \theta_{12}^1)$, según ecs.(2.15) son:

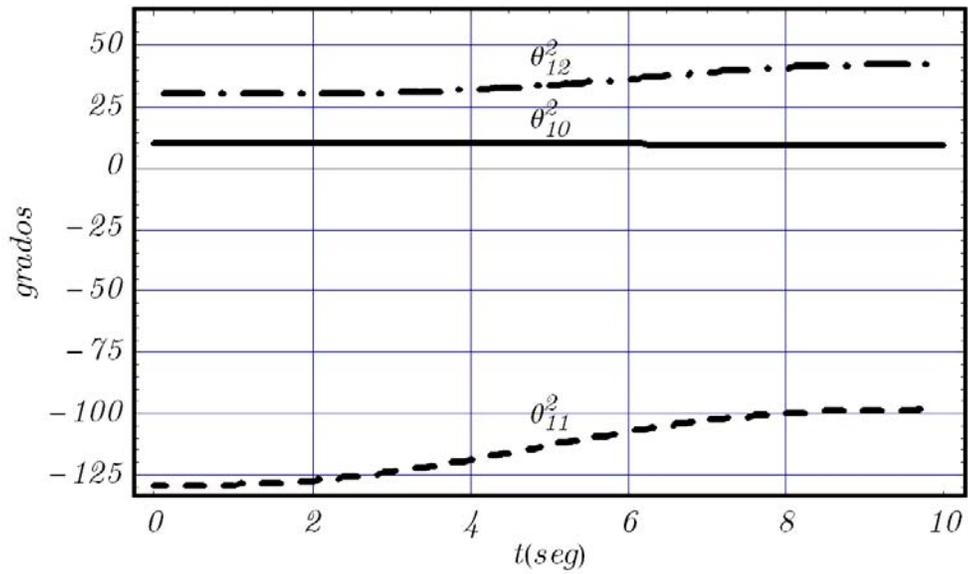


Cadena Cinemática 2

Las gráficas para los ángulos $(\theta_5^2, \theta_7^2, \theta_8^2)$, según ecs.(2.3) y (2.4) son:

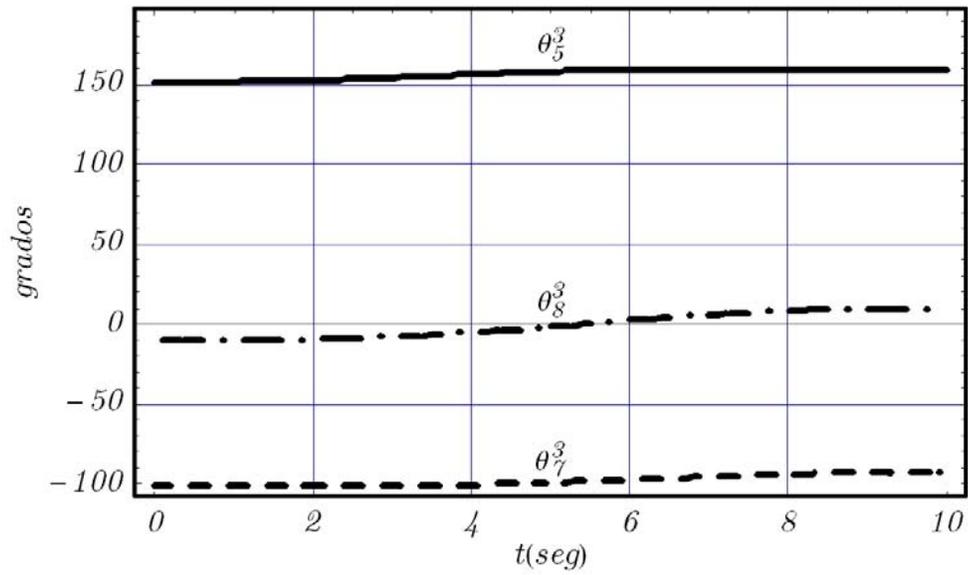


Las gráficas para los ángulos $(\theta_{10}^2, \theta_{11}^2, \theta_{12}^2)$, según ecs.(2.15) son:

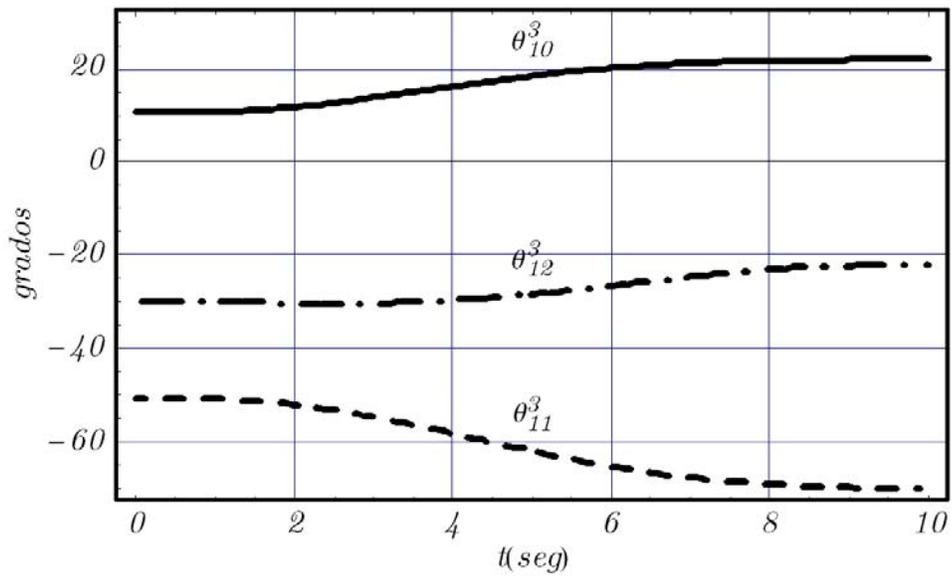


Cadena Cinemática 3

Las gráficas para los ángulos $(\theta_5^3, \theta_7^3, \theta_8^3)$, según ecs.(2.3) y (2.4) son:



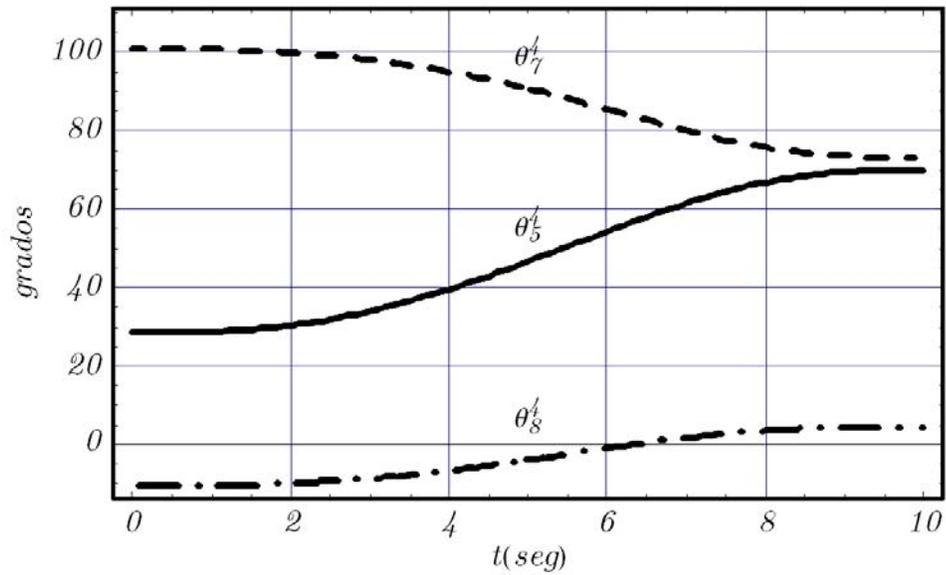
Las gráficas para los ángulos $(\theta_{10}^3, \theta_{11}^3, \theta_{12}^3)$, según ecs.(2.15) son



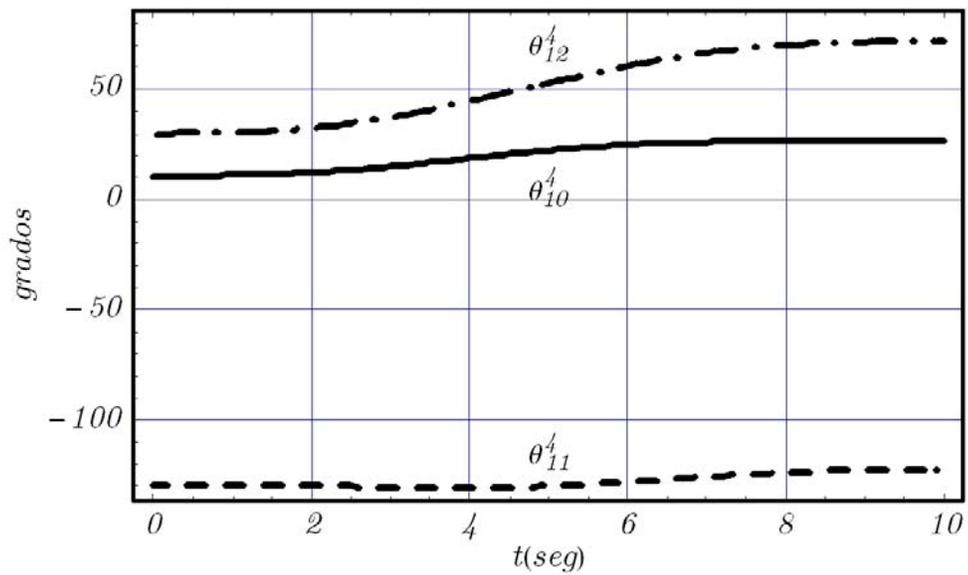
:

Cadena Cinemática 4

Las gráficas para los ángulos $(\theta_5^4, \theta_7^4, \theta_8^4)$, según ecs.(2.3) y (2.4) son:

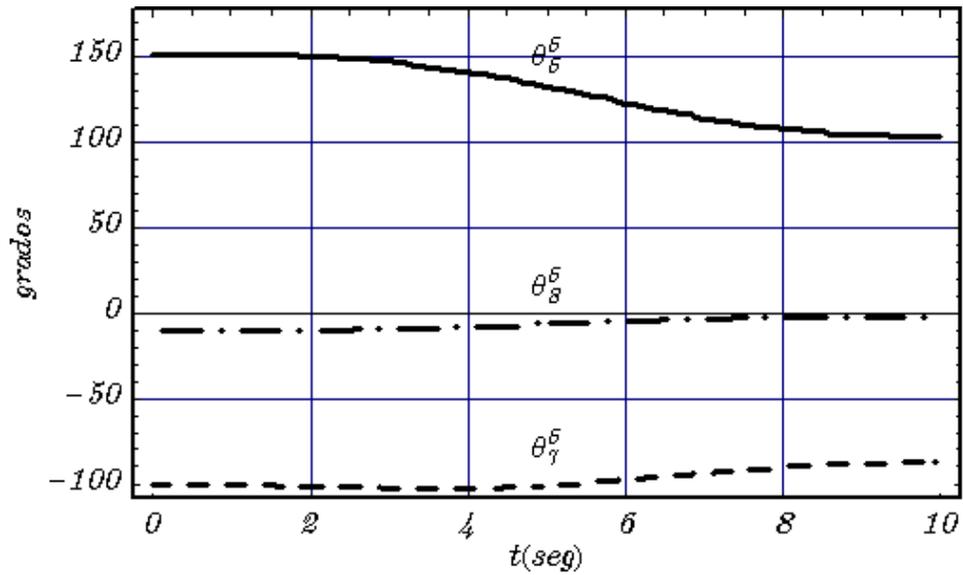


Las gráficas para los ángulos $(\theta_{10}^4, \theta_{11}^4, \theta_{12}^4)$, según ecs.(2.15) son:

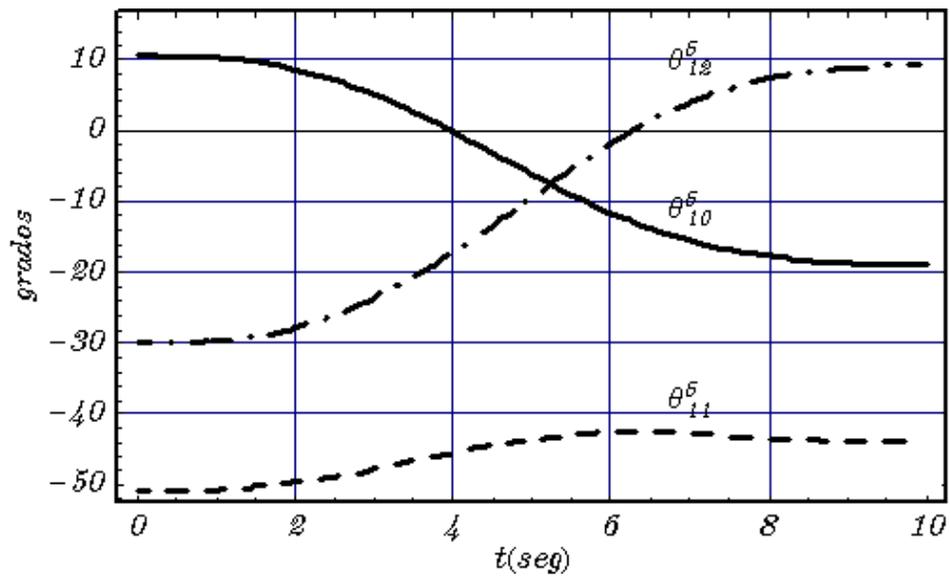


Cadena Cinemática 5

Las gráficas para los ángulos $(\theta_5^5, \theta_7^5, \theta_8^5)$, según ecs.(2.3) y (2.4) son:

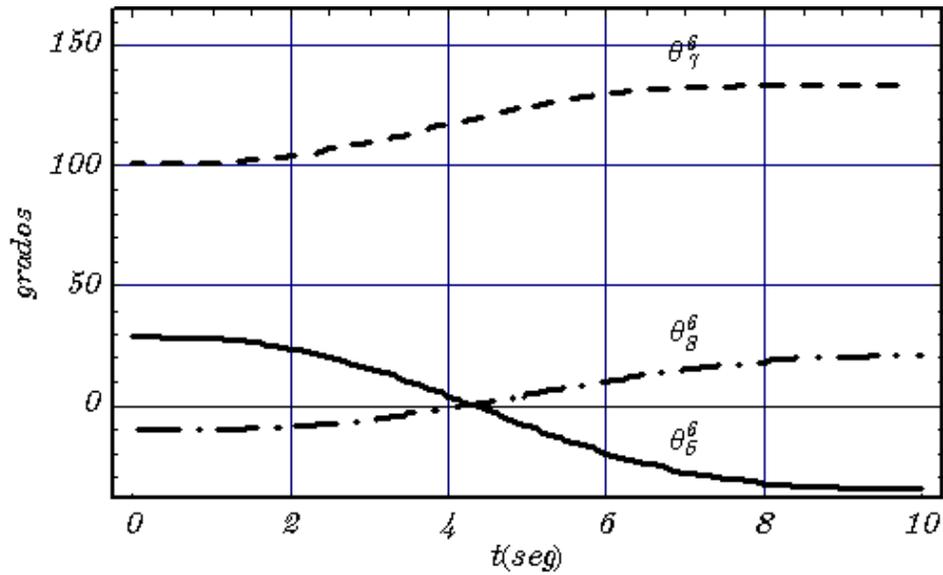


Las gráficas para los ángulos $(\theta_{10}^5, \theta_{11}^5, \theta_{12}^5)$, según ecs.(2.15) son:

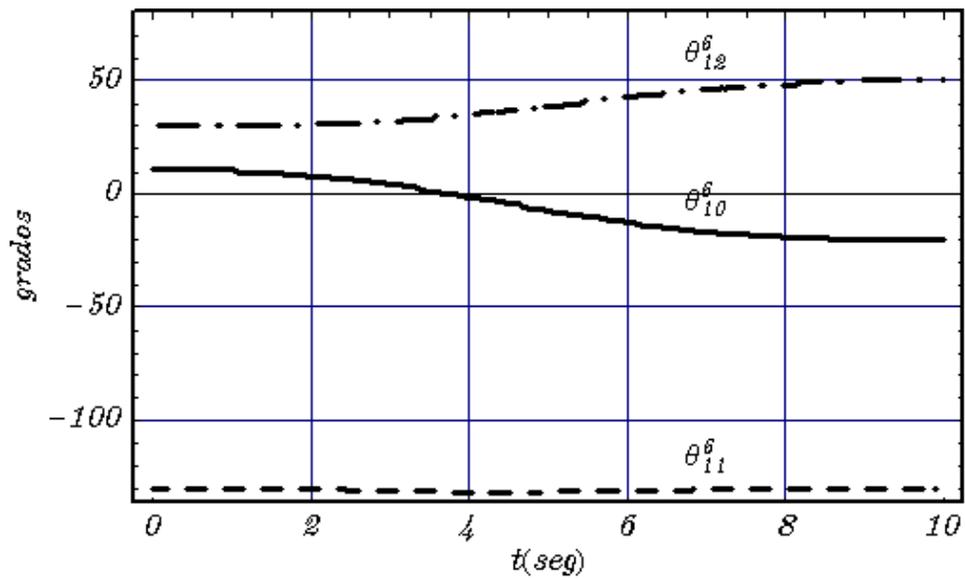


Cadena Cinemática 6

Las gráficas para los ángulos $(\theta_5^6, \theta_7^6, \theta_8^6)$, según ecs.(2.3) y (2.4) son:



Las gráficas para los ángulos $(\theta_{10}^6, \theta_{11}^6, \theta_{12}^6)$, según ecs.(2.15) son:



2.3. Análisis de Velocidad

2.3.1. Ecuaciones de Velocidad

El problema **Cinemático Inverso** para la **velocidad** se define como:

Dados el vector de velocidad \mathbf{V}_p y las velocidades angulares $\dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\phi}$, (figura 2.19), que definen respectivamente la velocidad lineal del origen y la velocidad angular de la base \mathbf{e}_j^p en la plataforma móvil, determinar las velocidades angulares $\dot{\theta}_5^i$ de las juntas rotacionales, las velocidades angulares $\dot{\theta}_7^i$ y $\dot{\theta}_8^i$ de las juntas universales, y las velocidades angulares $\dot{\theta}_{10}^i, \dot{\theta}_{11}^i$ y $\dot{\theta}_{12}^i$ de las juntas esféricas de las cadenas cinemáticas.

Las ecuaciones están definidas en \mathcal{R}^4 . La ecuación de velocidad y las derivadas de las normas de los cuaterniones incógnitas se obtienen derivando respecto al tiempo las ecs.(2.1) y (2.2):

$$\mathbf{V}_1^i + \mathbf{V}_2^i + \mathbf{V}_3^i - \mathbf{V}_4^i = \mathbf{V}_p \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{p}_{5i}\|^{\bullet} &= \langle \dot{\mathbf{p}}_{5i}, \mathbf{p}_{5i} \rangle = 0 \\ \|\mathbf{p}_{7i}\|^{\bullet} &= \langle \dot{\mathbf{p}}_{7i}, \mathbf{p}_{7i} \rangle = 0 \\ \|\mathbf{p}_{8i}\|^{\bullet} &= \langle \dot{\mathbf{p}}_{8i}, \mathbf{p}_{8i} \rangle = 0 \end{aligned} \quad (2.17)$$

Utilizando el **Teorema 1 (Capítulo 1)** se definen los vectores de velocidad:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_1^i &= \mathbf{0} \\ \mathbf{V}_2^i &= \mathbf{W}_2^i * \mathbf{R}_2^i - \mathbf{R}_2^i * \mathbf{W}_2^i \\ \mathbf{V}_3^i &= \mathbf{W}_3^i * \mathbf{R}_3^i - \mathbf{R}_3^i * \mathbf{W}_3^i \\ \mathbf{V}_4^i &= \mathbf{W}_p * \mathbf{R}_4^i - \mathbf{R}_4^i * \mathbf{W}_p \\ \mathbf{V}_p &= \left(0, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z} \right) \end{aligned}$$

Donde $\mathbf{V}_1^i = \mathbf{0}$, es la derivada respecto al tiempo de un vector constante, además:

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_2^i &= \dot{\mathbf{q}}_{5i} * \bar{\mathbf{q}}_{5i} \\ \mathbf{W}_3^i &= \dot{\mathbf{q}}_{8i} * \bar{\mathbf{q}}_{8i} \\ \mathbf{W}_p &= \dot{\mathbf{q}}_p * \bar{\mathbf{q}}_p \end{aligned} \quad (2.18)$$

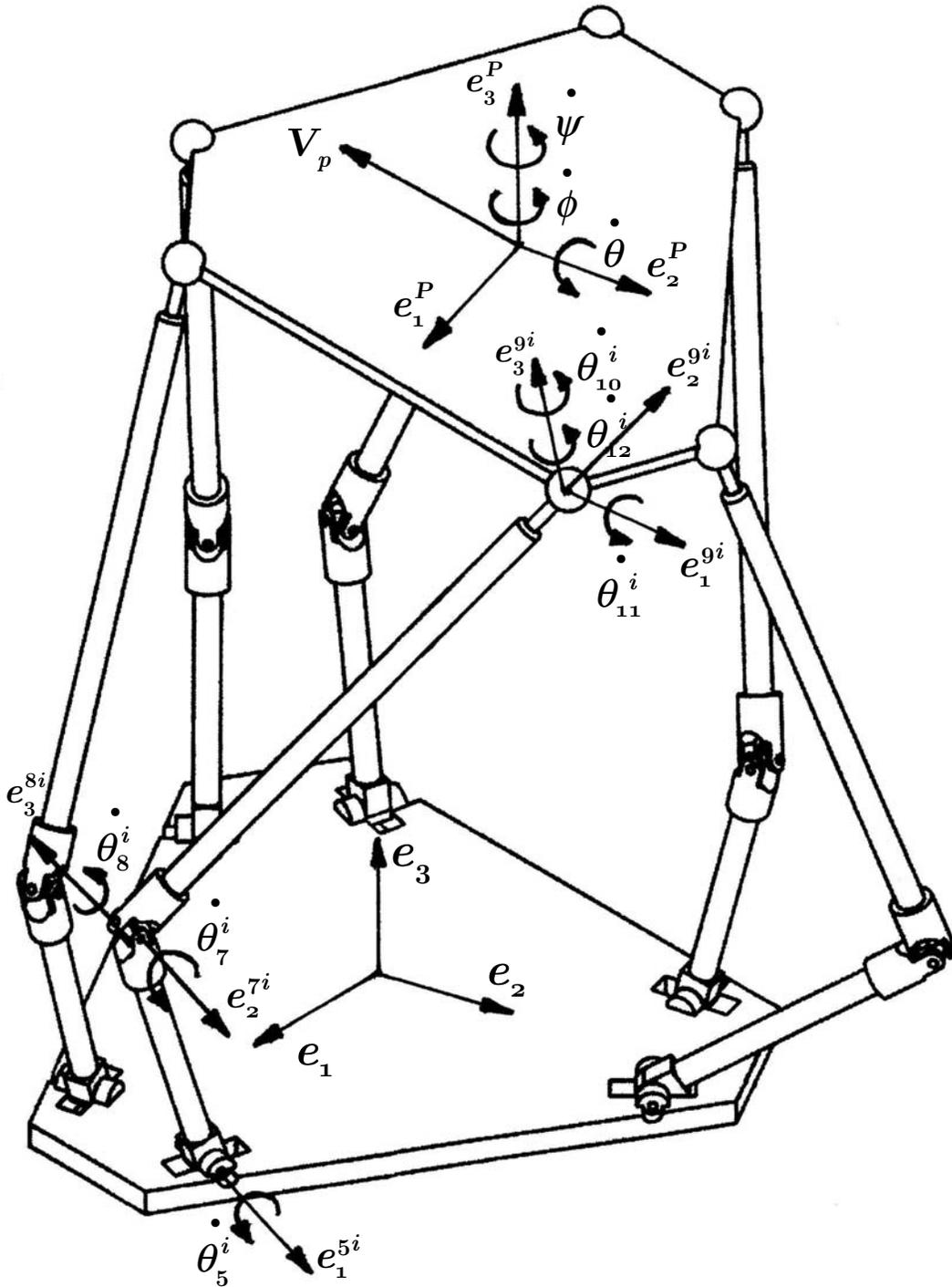


Fig. 2.19 Velocidades lineales y angulares

Donde:

\mathbf{W}_2^i = vector de velocidad angular absoluta del eslabón 2 de la cadena i
asociada al cuaternión \mathbf{q}_{5i}

\mathbf{W}_3^i = vector de velocidad angular absoluta del eslabón 3 de la cadena i
asociada al cuaternión \mathbf{q}_{8i}

\mathbf{W}_p = vector de velocidad angular absoluta de la plataforma móvil
asociada al cuaternión \mathbf{q}_p

A continuación se procede a simplificar las ecs.(2.18) a partir de las siguientes definiciones:

$$\dot{\mathbf{q}}_{5i} = (\mathbf{p}_{2i} * \mathbf{p}_{4i} * \mathbf{p}_{5i})^\bullet = \dot{\mathbf{p}}_{2i} * \mathbf{p}_{4i} * \mathbf{p}_{5i} + \mathbf{p}_{2i} * \dot{\mathbf{p}}_{4i} * \mathbf{p}_{5i} + \mathbf{p}_{2i} * \mathbf{p}_{4i} * \dot{\mathbf{p}}_{5i} = \mathbf{p}_{2i} * \mathbf{p}_{4i} * \dot{\mathbf{p}}_{5i}$$

$$\bar{\mathbf{q}}_{5i} = \bar{\mathbf{p}}_{5i} * \bar{\mathbf{p}}_{4i} * \bar{\mathbf{p}}_{2i}$$

$$\dot{\mathbf{q}}_{8i} = (\mathbf{q}_{5i} * \mathbf{p}_{7i} * \mathbf{p}_{8i})^\bullet = \dot{\mathbf{q}}_{5i} * \mathbf{p}_{7i} * \mathbf{p}_{8i} + \mathbf{q}_{5i} * \dot{\mathbf{p}}_{7i} * \mathbf{p}_{8i} + \mathbf{q}_{5i} * \mathbf{p}_{7i} * \dot{\mathbf{p}}_{8i}$$

$$\bar{\mathbf{q}}_{8i} = \bar{\mathbf{p}}_{8i} * \bar{\mathbf{p}}_{7i} * \bar{\mathbf{q}}_{5i}$$

$$\dot{\mathbf{q}}_p = (\mathbf{q}_1 * \mathbf{q}_2 * \mathbf{q}_3)^\bullet = \dot{\mathbf{q}}_1 * \mathbf{q}_2 * \mathbf{q}_3 + \mathbf{q}_1 * \dot{\mathbf{q}}_2 * \mathbf{q}_3 + \mathbf{q}_1 * \mathbf{q}_2 * \dot{\mathbf{q}}_3$$

$$\bar{\mathbf{q}}_p = \bar{\mathbf{q}}_3 * \bar{\mathbf{q}}_2 * \bar{\mathbf{q}}_1$$

Donde $\dot{\mathbf{p}}_{2i} = \dot{\mathbf{p}}_{4i} = \mathbf{0}$, ya que están definidos con los ángulos constantes δ_2^i y δ_4^i , respectivamente. Usando el **Corolario 2 (Capítulo 1)**, se pueden definir los elementos de $\dot{\mathbf{q}}_p$ en función de las velocidades angulares $\dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\phi}$ de la plataforma móvil, de la manera siguiente:

$$\dot{\mathbf{q}}_1 = \frac{1}{2} \dot{\psi} (\mathbf{e}_3 * \mathbf{q}_1)$$

$$\dot{\mathbf{q}}_2 = \frac{1}{2} \dot{\theta} (\mathbf{e}_2 * \mathbf{q}_2)$$

$$\dot{\mathbf{q}}_3 = \frac{1}{2} \dot{\phi} (\mathbf{e}_3 * \mathbf{q}_3)$$

Y se puede reescribir $\dot{\mathbf{q}}_p$ como:

$$\dot{\mathbf{q}}_p = \frac{1}{2} \dot{\psi} (\mathbf{e}_3 * \mathbf{q}_1) * \mathbf{q}_2 * \mathbf{q}_3 + \mathbf{q}_1 * \frac{1}{2} \dot{\theta} (\mathbf{e}_2 * \mathbf{q}_2) * \mathbf{q}_3 + \mathbf{q}_1 * \mathbf{q}_2 * \frac{1}{2} \dot{\phi} (\mathbf{e}_3 * \mathbf{q}_3)$$

De esta manera reescribimos ec.(2.18) como:

$$\begin{aligned}
\mathbf{W}_2^i &= \left(\mathbf{p}_{2i} * \mathbf{p}_{4i} * \dot{\mathbf{p}}_{5i} \right) * \left(\bar{\mathbf{p}}_{5i} * \bar{\mathbf{p}}_{4i} * \bar{\mathbf{p}}_{2i} \right) \\
\mathbf{W}_3^i &= \dot{\mathbf{q}}_{5i} * \bar{\mathbf{q}}_{5i} + \mathbf{q}_{5i} * \left(\dot{\mathbf{p}}_{7i} * \bar{\mathbf{p}}_{7i} \right) * \bar{\mathbf{q}}_{5i} + \mathbf{q}_{5i} * \mathbf{p}_{7i} * \left(\dot{\mathbf{p}}_{8i} * \bar{\mathbf{p}}_{8i} \right) * \bar{\mathbf{p}}_{7i} * \bar{\mathbf{q}}_{5i} \\
\mathbf{W}_p &= \dot{\mathbf{q}}_1 * \bar{\mathbf{q}}_1 + \mathbf{q}_1 * \left(\dot{\mathbf{q}}_2 * \bar{\mathbf{q}}_2 \right) * \bar{\mathbf{q}}_1 + \mathbf{q}_1 * \mathbf{q}_2 * \left(\dot{\mathbf{q}}_3 * \bar{\mathbf{q}}_3 \right) * \bar{\mathbf{q}}_2 * \bar{\mathbf{q}}_1 \\
&= \frac{1}{2} \dot{\psi} \mathbf{e}_3 + \mathbf{q}_1 * \left(\frac{1}{2} \dot{\theta} \mathbf{e}_2 \right) * \bar{\mathbf{q}}_1 + \mathbf{q}_1 * \mathbf{q}_2 * \left(\frac{1}{2} \dot{\phi} \mathbf{e}_3 \right) * \bar{\mathbf{q}}_2 * \bar{\mathbf{q}}_1
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Además las derivadas de los cuaterniones son:

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{p}}_{5i} &= \left(\dot{p}_{5i0}, \dot{p}_{5i1}, 0, 0 \right) \\
\dot{\mathbf{p}}_{7i} &= \left(\dot{p}_{7i0}, \dot{p}_{7i1}, 0, 0 \right) \\
\dot{\mathbf{p}}_{8i} &= \left(\dot{p}_{8i0}, 0, 0, \dot{p}_{8i3} \right)
\end{aligned}$$

La ec.(2.19) muestra el uso de los valores de velocidad angular $\left(\dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\phi} \right)$, requeridos en el movimiento del plato móvil. Las ecuaciones (2.16) y (2.17), representan un sistema lineal de 6 ecuaciones con 6 incógnitas, siendo estas últimas $\left(\dot{p}_{5i0}, \dot{p}_{5i1}, \dot{p}_{7i0}, \dot{p}_{7i1}, \dot{p}_{8i0}, \dot{p}_{8i3} \right)$. Una vez realizado el análisis de velocidad, las velocidades angulares en las juntas cinemáticas $\left(\dot{\theta}_5^i, \dot{\theta}_7^i, \dot{\theta}_8^i \right)$, asociadas a los cuaterniones $\left(\dot{\mathbf{p}}_{5i}, \dot{\mathbf{p}}_{7i}, \dot{\mathbf{p}}_{8i} \right)$, se obtienen aplicando el **Corolario**

2 de la manera siguiente. Para $\dot{\theta}_5^i$ asociado a $\dot{\mathbf{p}}_{5i}$, se tiene:

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{p}}_{5i} * \bar{\mathbf{p}}_{5i} &= \frac{1}{2} \dot{\theta}_5^i \mathbf{e}_1 \\
\left\langle \dot{\mathbf{p}}_{5i} * \bar{\mathbf{p}}_{5i}, \mathbf{e}_1 \right\rangle &= \frac{1}{2} \dot{\theta}_5^i \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \rangle \\
\dot{\theta}_5^i &= 2 \left\langle \dot{\mathbf{p}}_{5i} * \bar{\mathbf{p}}_{5i}, \mathbf{e}_1 \right\rangle
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Siguiendo el mismo procedimiento, se pueden calcular:

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{p}}_{7i} * \bar{\mathbf{p}}_{7i} &= \frac{1}{2} \dot{\theta}_7^i \mathbf{e}_1 \\
\dot{\theta}_7^i &= 2 \left\langle \dot{\mathbf{p}}_{7i} * \bar{\mathbf{p}}_{7i}, \mathbf{e}_1 \right\rangle
\end{aligned} \tag{2.21}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{p}}_{8i} * \bar{\mathbf{p}}_{8i} &= \frac{1}{2} \dot{\theta}_8^i \mathbf{e}_3 \\
\dot{\theta}_8^i &= 2 \left\langle \dot{\mathbf{p}}_{8i} * \bar{\mathbf{p}}_{8i}, \mathbf{e}_3 \right\rangle
\end{aligned} \tag{2.22}$$

2.3.2. Velocidad Angular de la Junta Esférica

Derivando respecto al tiempo la expresión (2.13), donde $\dot{\mathbf{p}}_{13i} = \mathbf{0}$, ya que está definido con el ángulo constante δ_{13}^i :

$$\dot{\mathbf{p}}_{10i} * \mathbf{p}_{11i} * \mathbf{p}_{12i} + \mathbf{p}_{10i} * \dot{\mathbf{p}}_{11i} * \mathbf{p}_{12i} + \mathbf{p}_{10i} * \mathbf{p}_{11i} * \dot{\mathbf{p}}_{12i} = \dot{\bar{\mathbf{q}}}_{8i} * \mathbf{q}_p * \mathbf{p}_{13i} + \bar{\mathbf{q}}_{8i} * \dot{\mathbf{q}}_p * \mathbf{p}_{13i} \quad (2.23)$$

Además se cumple que $\dot{\bar{\mathbf{q}}} = \dot{\mathbf{q}}$, así:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_{8i} &= \mathbf{q}_{5i} * \mathbf{p}_{7i} * \mathbf{p}_{8i} \\ \dot{\mathbf{q}}_{8i} &= \dot{\mathbf{q}}_{5i} * \mathbf{p}_{7i} * \mathbf{p}_{8i} + \mathbf{q}_{5i} * \dot{\mathbf{p}}_{7i} * \mathbf{p}_{8i} + \mathbf{q}_{5i} * \mathbf{p}_{7i} * \dot{\mathbf{p}}_{8i} \\ \dot{\bar{\mathbf{q}}}_{8i} &= \dot{\bar{\mathbf{q}}}_{8i} = \bar{\mathbf{p}}_{8i} * \bar{\mathbf{p}}_{7i} * \dot{\bar{\mathbf{q}}}_{5i} + \bar{\mathbf{p}}_{8i} * \bar{\mathbf{p}}_{7i} * \dot{\bar{\mathbf{q}}}_{5i} + \dot{\bar{\mathbf{p}}}_{8i} * \bar{\mathbf{p}}_{7i} * \bar{\mathbf{q}}_{5i} \end{aligned}$$

Derivando respecto al tiempo las normas respectivas, ec.(2.14):

$$\begin{aligned} \|\mathbf{p}_{10i}\|^{\bullet} &= \langle \dot{\mathbf{p}}_{10i}, \mathbf{p}_{10i} \rangle = 0 \\ \|\mathbf{p}_{11i}\|^{\bullet} &= \langle \dot{\mathbf{p}}_{11i}, \mathbf{p}_{11i} \rangle = 0 \\ \|\mathbf{p}_{12i}\|^{\bullet} &= \langle \dot{\mathbf{p}}_{12i}, \mathbf{p}_{12i} \rangle = 0 \end{aligned} \quad (2.24)$$

Donde:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{p}}_{10i} &= \begin{pmatrix} \dot{p}_{10i0}, & 0, & 0, & \dot{p}_{10i3} \end{pmatrix} \\ \dot{\mathbf{p}}_{11i} &= \begin{pmatrix} \dot{p}_{11i0}, & \dot{p}_{11i1}, & 0, & 0 \end{pmatrix} \\ \dot{\mathbf{p}}_{12i} &= \begin{pmatrix} \dot{p}_{12i0}, & 0, & 0, & \dot{p}_{12i3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Las ecuaciones (2.23) y (2.24) representan un sistema lineal de 7 ecuaciones con 6 incógnitas, siendo estas últimas $\left(\dot{p}_{10i0}, \dot{p}_{10i3}, \dot{p}_{11i0}, \dot{p}_{11i1}, \dot{p}_{12i0}, \dot{p}_{12i3}\right)$. De ec.(2.23) se pueden elegir 3 ecuaciones escalares más las 3 ecuaciones de ec.(2.24) para la solución de las derivadas de los parámetros de los cuaterniones. Una vez realizado el análisis de velocidad, las velocidades angulares de la juntas esféricas $\left(\dot{\theta}_{10}^i, \dot{\theta}_{11}^i, \dot{\theta}_{12}^i\right)$, asociados a los cuaterniones $\left(\dot{\mathbf{p}}_{10i}, \dot{\mathbf{p}}_{11i}, \dot{\mathbf{p}}_{12i}\right)$,

se obtienen aplicando el **Corolario 2** de la manera siguiente:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{p}}_{10i} * \bar{\mathbf{p}}_{10i} &= \frac{1}{2} \dot{\theta}_{10}^i \mathbf{e}_3 \\ \dot{\theta}_{10}^i &= 2 \left\langle \dot{\mathbf{p}}_{10i} * \bar{\mathbf{p}}_{10i}, \mathbf{e}_3 \right\rangle\end{aligned}\quad (2.25)$$

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{p}}_{11i} * \bar{\mathbf{p}}_{11i} &= \frac{1}{2} \dot{\theta}_{11}^i \mathbf{e}_1 \\ \dot{\theta}_{11}^i &= 2 \left\langle \dot{\mathbf{p}}_{11i} * \bar{\mathbf{p}}_{11i}, \mathbf{e}_1 \right\rangle\end{aligned}\quad (2.26)$$

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{p}}_{12i} * \bar{\mathbf{p}}_{12i} &= \frac{1}{2} \dot{\theta}_{12}^i \mathbf{e}_3 \\ \dot{\theta}_{12}^i &= 2 \left\langle \dot{\mathbf{p}}_{12i} * \bar{\mathbf{p}}_{12i}, \mathbf{e}_3 \right\rangle\end{aligned}\quad (2.27)$$

2.3.3. Gráficas de Velocidad

A continuación se muestran las gráficas de velocidades angulares que la plataforma espacial genera, al seguir la trayectoria descrita en el **Apéndice B**, para un tiempo de 10 segundos. El vector de velocidad lineal \mathbf{V}_p del origen del sistema \mathbf{e}_j^p está definido como:

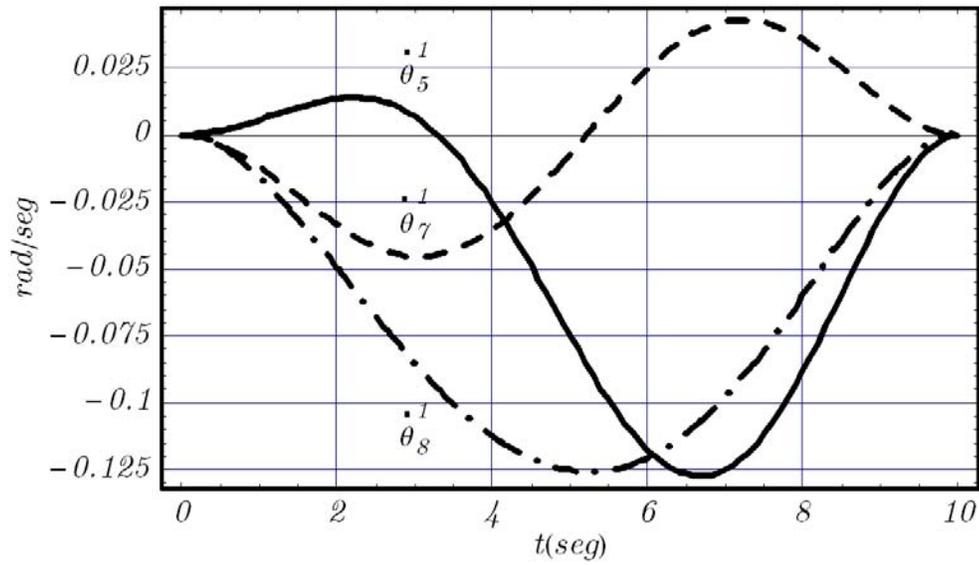
$$\mathbf{V}_p = \left[30 \frac{t^2}{t_f^3} - 60 \frac{t^3}{t_f^4} + 30 \frac{t^4}{t_f^5} \right] (\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i)$$

El vector de velocidad angular $\dot{\boldsymbol{\beta}} = \left(\dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\phi} \right)$, de la base \mathbf{e}_j^p en la plataforma móvil, está definido como:

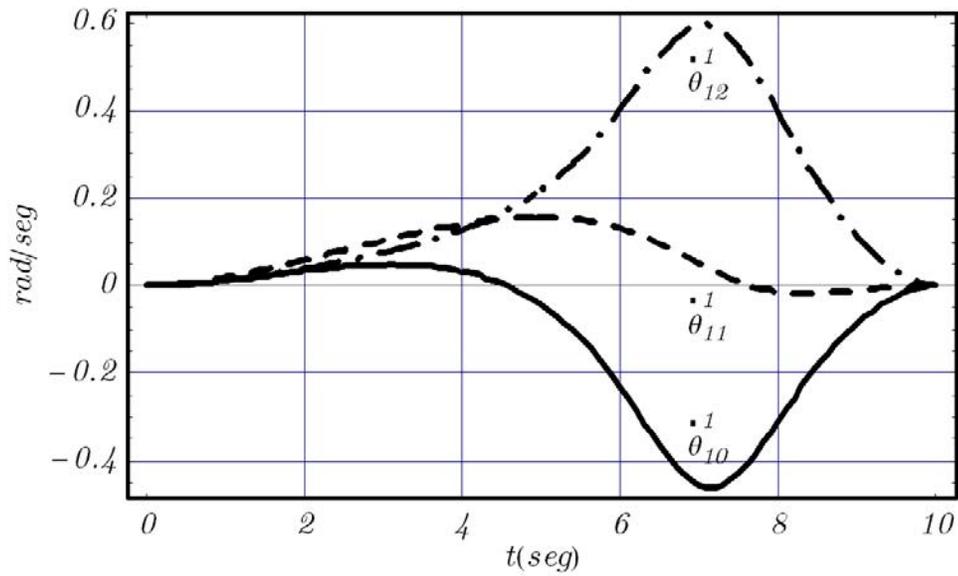
$$\dot{\boldsymbol{\beta}} = \left[30 \frac{t^2}{t_f^3} - 60 \frac{t^3}{t_f^4} + 30 \frac{t^4}{t_f^5} \right] (\boldsymbol{\beta}_f - \boldsymbol{\beta}_i)$$

Cadena Cinemática 1

Las gráficas para las velocidades angulares ($\overset{\cdot}{\theta}_5, \overset{\cdot}{\theta}_7, \overset{\cdot}{\theta}_8$), según ecs.(2.20) – (2.22) son:

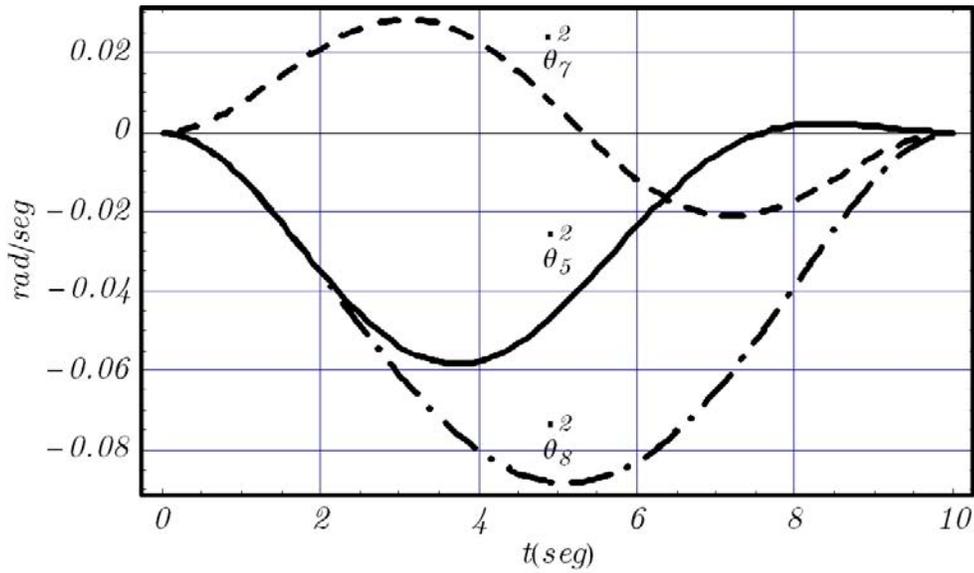


Las gráficas para las velocidades angulares ($\overset{\cdot}{\theta}_{10}, \overset{\cdot}{\theta}_{11}, \overset{\cdot}{\theta}_{12}$), según ecs.(2.25) – (2.27) son:

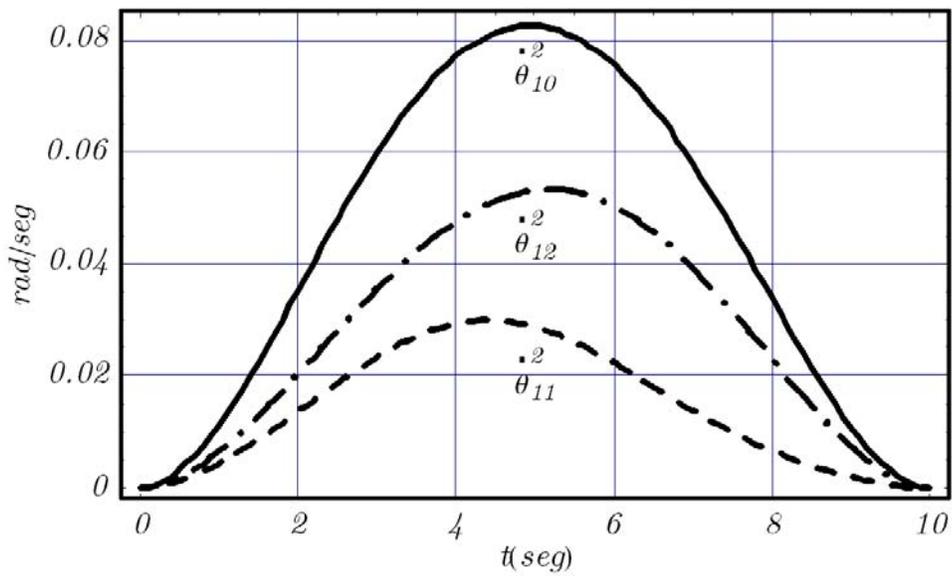


Cadena Cinemática 2

Las gráficas para las velocidades angulares ($\overset{\cdot}{\theta}_5, \overset{\cdot}{\theta}_7, \overset{\cdot}{\theta}_8$), según ecs.(2.20) – (2.22) son:

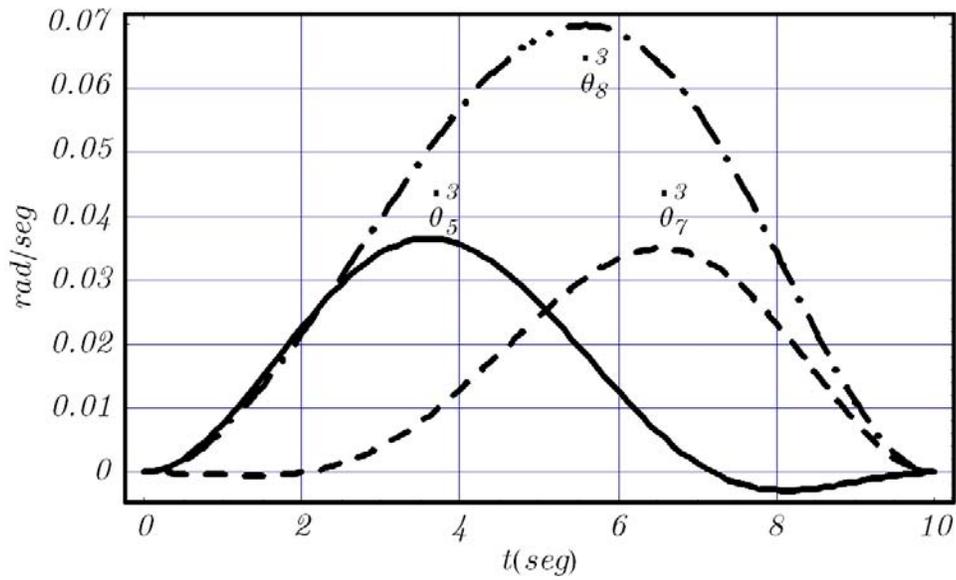


Las gráficas para las velocidades angulares ($\overset{\cdot}{\theta}_{10}, \overset{\cdot}{\theta}_{11}, \overset{\cdot}{\theta}_{12}$), según ecs.(2.25) – (2.27) son:

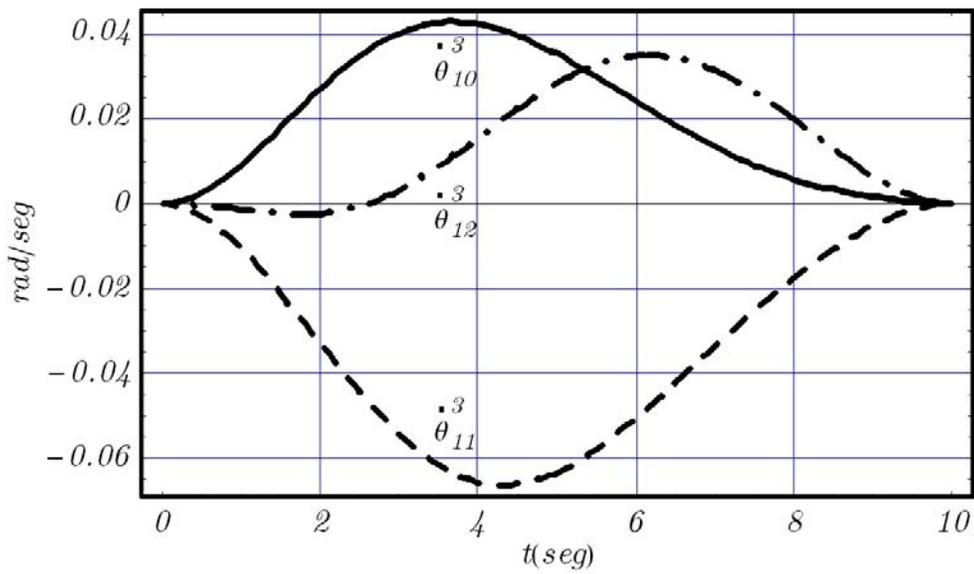


Cadena Cinemática 3

Las gráficas para las velocidades angulares ($\overset{\cdot}{\theta}_5, \overset{\cdot}{\theta}_7, \overset{\cdot}{\theta}_8$), según ecs.(2.20) – (2.22) son:

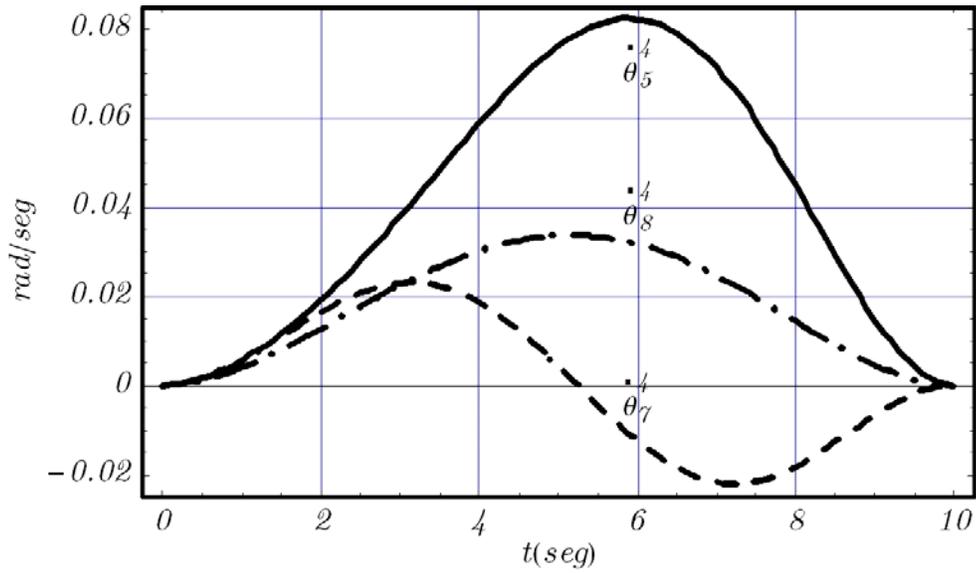


Las gráficas para las velocidades angulares ($\overset{\cdot}{\theta}_{10}, \overset{\cdot}{\theta}_{11}, \overset{\cdot}{\theta}_{12}$), según ecs.(2.25) – (2.27) son:

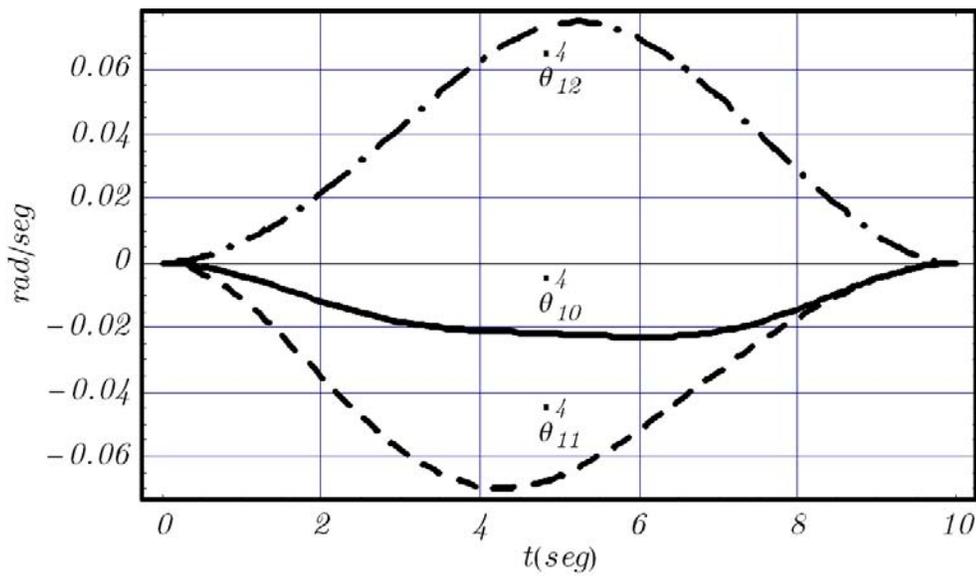


Cadena Cinemática 4

Las gráficas para las velocidades angulares ($\overset{\cdot}{\theta}_5, \overset{\cdot}{\theta}_7, \overset{\cdot}{\theta}_8$), según ecs.(2.20) – (2.22) son:

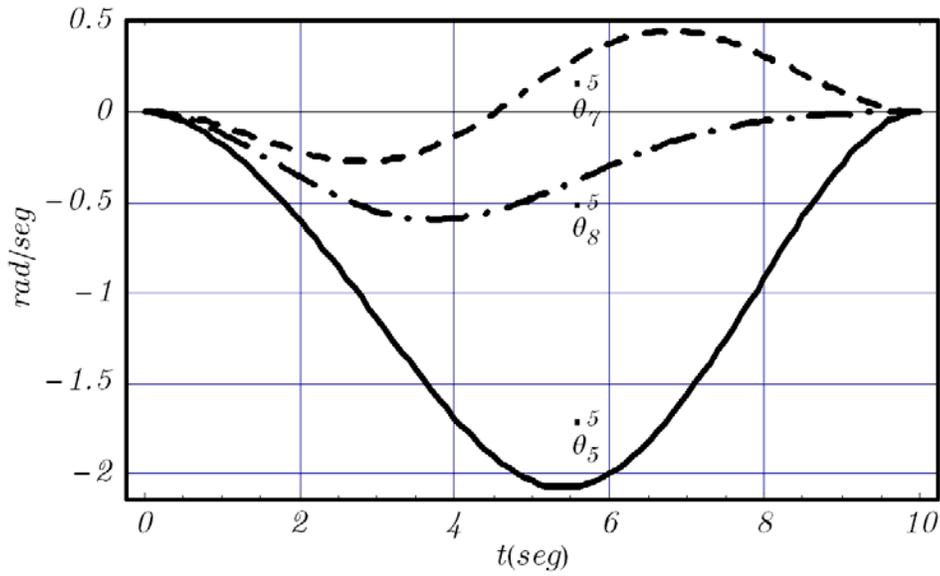


Las gráficas para las velocidades angulares ($\overset{\cdot}{\theta}_{10}, \overset{\cdot}{\theta}_{11}, \overset{\cdot}{\theta}_{12}$), según ecs.(2.25) – (2.27) son:

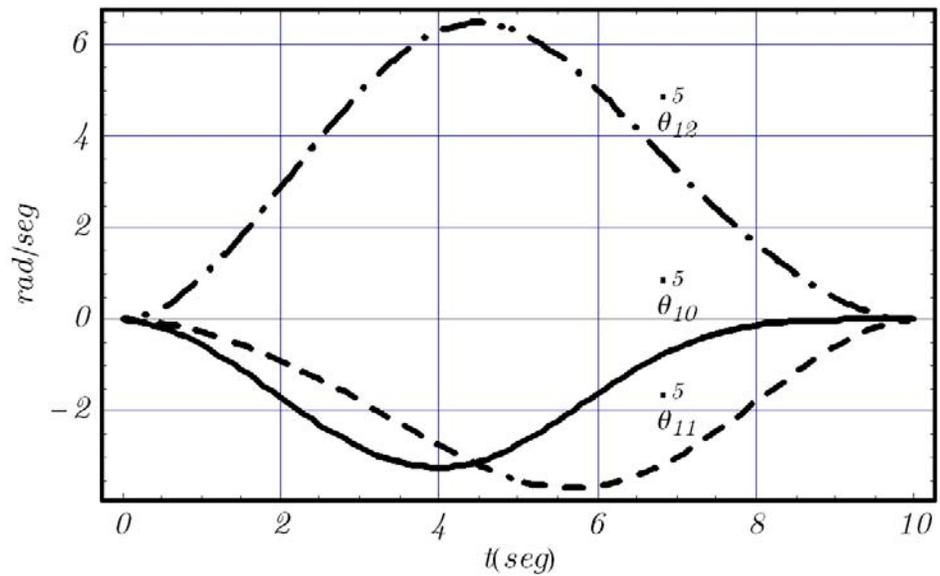


Cadena Cinemática 5

Las gráficas para las velocidades angulares ($\dot{\theta}_5, \dot{\theta}_7, \dot{\theta}_8$), según ecs.(2.20) – (2.22) son:

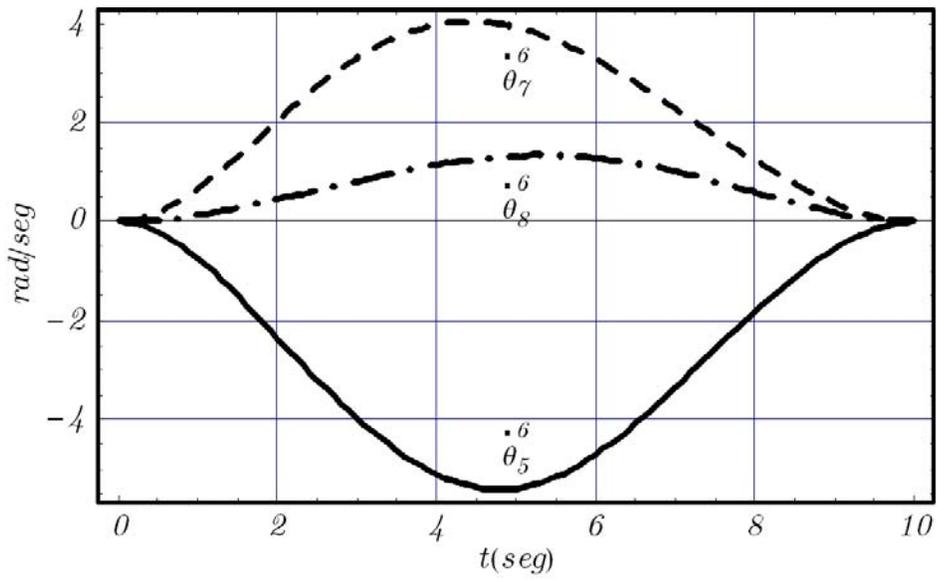


Las gráficas para las velocidades angulares ($\dot{\theta}_{10}, \dot{\theta}_{11}, \dot{\theta}_{12}$), según ecs.(2.25) – (2.27) son:

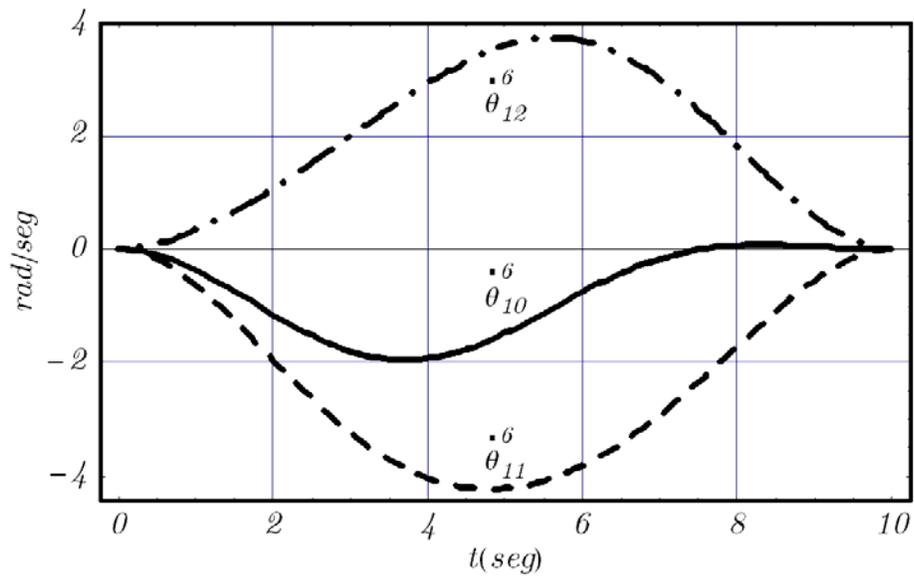


Cadena Cinemática 6

Las gráficas para las velocidades angulares ($\overset{\cdot}{\theta}_5, \overset{\cdot}{\theta}_7, \overset{\cdot}{\theta}_8$), según ecs.(2.20) – (2.22) son:



Las gráficas para las velocidades angulares ($\overset{\cdot}{\theta}_{10}, \overset{\cdot}{\theta}_{11}, \overset{\cdot}{\theta}_{12}$), según ecs.(2.25) – (2.27) son:



2.4. Análisis de Aceleración

2.4.1. Ecuaciones de Aceleración

El problema **Cinemático Inverso** para la **aceleración** se define como:

Dados el vector de aceleración \mathbf{A}_p y las aceleraciones angulares ψ, θ, ϕ , (figura 2.32) que definen respectivamente la aceleración lineal del origen y la aceleración angular de la base \mathbf{e}_j^p en la plataforma móvil, determinar las aceleraciones angulares θ_5^i de las juntas rotacionales, las aceleraciones angulares θ_7^i y θ_8^i de las juntas universales, y las aceleraciones angulares $\theta_{10}^i, \theta_{11}^i$ y θ_{12}^i de las juntas esféricas de las cadenas cinemáticas.

Las ecuaciones están definidas en \mathcal{R}^4 . La ecuación de aceleración y las derivadas de las normas de los cuaterniones incógnitas se obtienen derivando respecto al tiempo las ecs. (2.16) y (2.17):

$$\mathbf{A}_1^i + \mathbf{A}_2^i + \mathbf{A}_3^i - \mathbf{A}_4^i = \mathbf{A}_p \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{p}_{5i}\|^{\bullet\bullet} &= \langle \ddot{\mathbf{p}}_{5i}, \mathbf{p}_{5i} \rangle + \langle \dot{\mathbf{p}}_{5i}, \dot{\mathbf{p}}_{5i} \rangle = 0 \\ \|\mathbf{p}_{7i}\|^{\bullet\bullet} &= \langle \ddot{\mathbf{p}}_{7i}, \mathbf{p}_{7i} \rangle + \langle \dot{\mathbf{p}}_{7i}, \dot{\mathbf{p}}_{7i} \rangle = 0 \\ \|\mathbf{p}_{8i}\|^{\bullet\bullet} &= \langle \ddot{\mathbf{p}}_{8i}, \mathbf{p}_{8i} \rangle + \langle \dot{\mathbf{p}}_{8i}, \dot{\mathbf{p}}_{8i} \rangle = 0 \end{aligned} \quad (2.29)$$

Utilizando el **Teorema 2 (Capítulo 1)** se definen los vectores de aceleración:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1^i &= \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_2^i &= \mathbf{H}_2^i * \mathbf{R}_2^i - \mathbf{R}_2^i * \mathbf{H}_2^i - 2(\mathbf{W}_2^i * \mathbf{R}_2^i - \mathbf{R}_2^i * \mathbf{W}_2^i) * \mathbf{W}_2^i \\ \mathbf{A}_3^i &= \mathbf{H}_3^i * \mathbf{R}_3^i - \mathbf{R}_3^i * \mathbf{H}_3^i - 2(\mathbf{W}_3^i * \mathbf{R}_3^i - \mathbf{R}_3^i * \mathbf{W}_3^i) * \mathbf{W}_3^i \\ \mathbf{A}_4^i &= \mathbf{H}_p * \mathbf{R}_4^i - \mathbf{R}_4^i * \mathbf{H}_p - 2(\mathbf{W}_p * \mathbf{R}_4^i - \mathbf{R}_4^i * \mathbf{W}_p) * \mathbf{W}_p \\ \mathbf{A}_p &= \left(0, \ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z} \right) \end{aligned}$$

Donde $\mathbf{A}_1^i = \mathbf{0}$, es la derivada respecto al tiempo de un vector constante, además :

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_2^i &= \ddot{\mathbf{q}}_{5i} * \bar{\mathbf{q}}_{5i} \\ \mathbf{H}_3^i &= \ddot{\mathbf{q}}_{8i} * \bar{\mathbf{q}}_{8i} \\ \mathbf{H}_p &= \ddot{\mathbf{q}}_p * \bar{\mathbf{q}}_p \end{aligned} \quad (2.30)$$

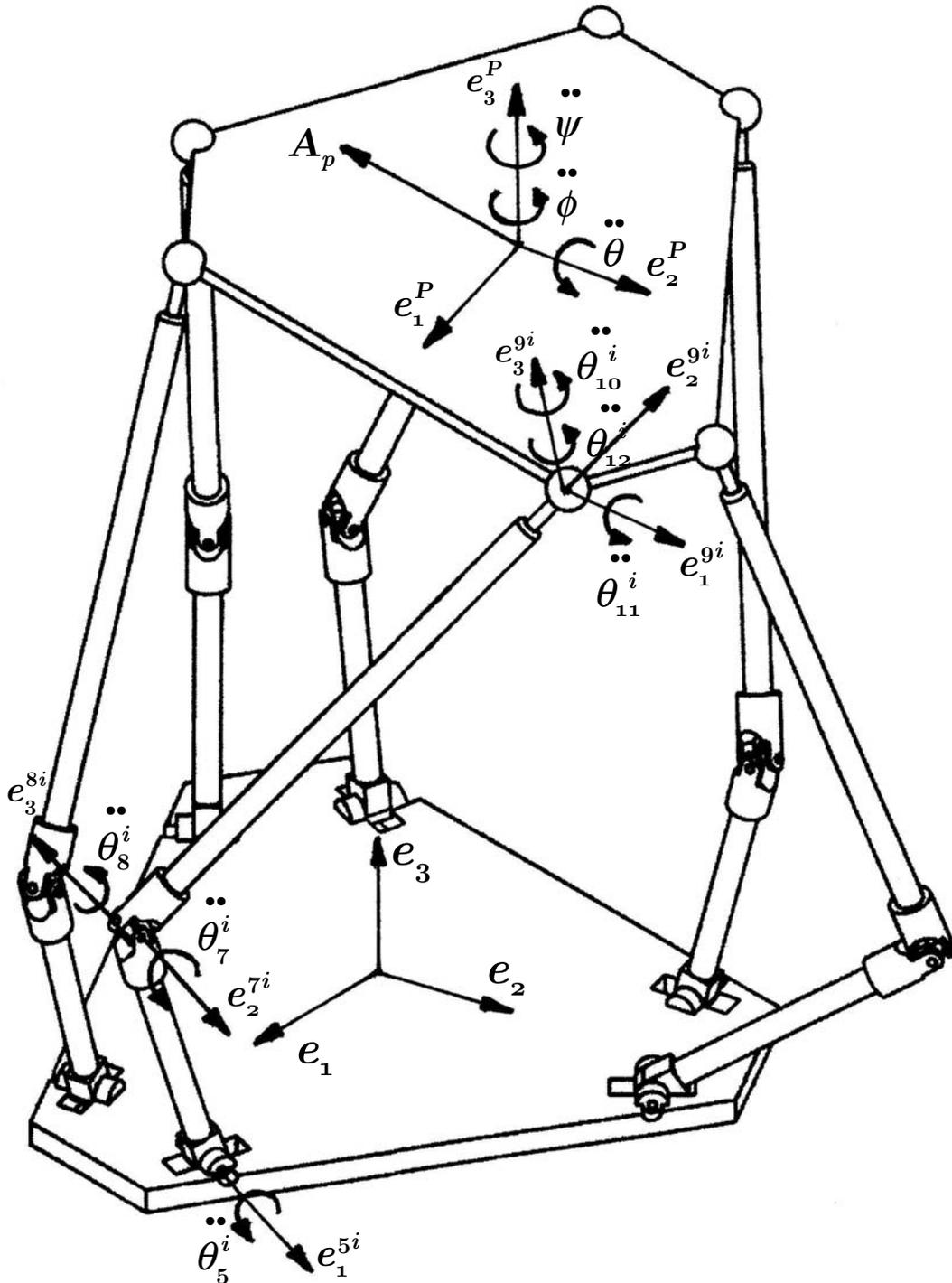


Fig. 2.32 Aceleraciones lineales y angulares

Donde:

\mathbf{H}_2^i = vector general de aceleración angular absoluta del eslabón 2 de la cadena i asociada al cuaternión \mathbf{q}_{5i}

\mathbf{H}_3^i = vector general de aceleración angular absoluta del eslabón 3 de la cadena i asociada al cuaternión \mathbf{q}_{8i}

\mathbf{H}_p = vector general de aceleración angular absoluta de la plataforma móvil asociada al cuaternión \mathbf{q}_p

Se tienen las siguientes definiciones:

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{q}}_{5i} &= \mathbf{p}_{2i} * \mathbf{p}_{4i} * \ddot{\mathbf{p}}_{5i} \\ \ddot{\mathbf{q}}_{8i} &= \ddot{\mathbf{q}}_{5i} * \mathbf{p}_{7i} * \mathbf{p}_{8i} + \mathbf{q}_{5i} * \ddot{\mathbf{p}}_{7i} * \mathbf{p}_{8i} + \mathbf{q}_{5i} * \mathbf{p}_{7i} * \ddot{\mathbf{p}}_{8i} + \\ &\quad 2 \left(\dot{\mathbf{q}}_{5i} * \dot{\mathbf{p}}_{7i} * \mathbf{p}_{8i} + \dot{\mathbf{q}}_{5i} * \mathbf{p}_{7i} * \dot{\mathbf{p}}_{8i} + \mathbf{q}_{5i} * \dot{\mathbf{p}}_{7i} * \dot{\mathbf{p}}_{8i} \right) \\ \ddot{\mathbf{q}}_p &= \ddot{\mathbf{q}}_1 * \mathbf{q}_2 * \mathbf{q}_3 + \mathbf{q}_1 * \ddot{\mathbf{q}}_2 * \mathbf{q}_3 + \mathbf{q}_1 * \mathbf{q}_2 * \ddot{\mathbf{q}}_3 + \\ &\quad 2 \left(\dot{\mathbf{q}}_1 * \dot{\mathbf{q}}_2 * \mathbf{q}_3 + \dot{\mathbf{q}}_1 * \mathbf{q}_2 * \dot{\mathbf{q}}_3 + \mathbf{q}_1 * \dot{\mathbf{q}}_2 * \dot{\mathbf{q}}_3 \right)\end{aligned}$$

Usando el **Corolario 5**, se pueden definir los elementos de $\ddot{\mathbf{q}}_p$ de la manera siguiente:

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{q}}_1 &= \left(-\frac{1}{4} \left(\dot{\psi} \right)^2 \mathbf{e}_0 + \frac{1}{2} \ddot{\psi} \mathbf{e}_3 \right) * \mathbf{q}_1 \\ \ddot{\mathbf{q}}_2 &= \left(-\frac{1}{4} \left(\dot{\theta} \right)^2 \mathbf{e}_0 + \frac{1}{2} \ddot{\theta} \mathbf{e}_2 \right) * \mathbf{q}_2 \\ \ddot{\mathbf{q}}_3 &= \left(-\frac{1}{4} \left(\dot{\phi} \right)^2 \mathbf{e}_0 + \frac{1}{2} \ddot{\phi} \mathbf{e}_3 \right) * \mathbf{q}_3\end{aligned}$$

Y se puede reescribir $\ddot{\mathbf{q}}_p$ como:

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{q}}_p &= \left(-\frac{1}{4} \left(\dot{\psi} \right)^2 \mathbf{e}_0 + \frac{1}{2} \ddot{\psi} \mathbf{e}_3 \right) * \mathbf{q}_1 * \mathbf{q}_2 * \mathbf{q}_3 + \\ &\quad \mathbf{q}_1 * \left(-\frac{1}{4} \left(\dot{\theta} \right)^2 \mathbf{e}_0 + \frac{1}{2} \ddot{\theta} \mathbf{e}_2 \right) * \mathbf{q}_2 * \mathbf{q}_3 + \\ &\quad \mathbf{q}_1 * \mathbf{q}_2 * \left(-\frac{1}{4} \left(\dot{\phi} \right)^2 \mathbf{e}_0 + \frac{1}{2} \ddot{\phi} \mathbf{e}_3 \right) * \mathbf{q}_3 + \\ &\quad \frac{1}{2} \dot{\psi} \dot{\theta} (\mathbf{e}_3 * \mathbf{q}_1) * (\mathbf{e}_2 * \mathbf{q}_2) * \mathbf{q}_3 + \\ &\quad \frac{1}{2} \dot{\psi} \dot{\phi} (\mathbf{e}_3 * \mathbf{q}_1) * \mathbf{q}_2 * (\mathbf{e}_3 * \mathbf{q}_3) + \\ &\quad \frac{1}{2} \dot{\theta} \dot{\phi} \mathbf{q}_1 * (\mathbf{e}_2 * \mathbf{q}_2) * (\mathbf{e}_3 * \mathbf{q}_3)\end{aligned}$$

De esta manera reescribimos \mathbf{H}_p como:

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}_p &= \left(-\frac{1}{4} \left(\dot{\psi} \right)^2 \mathbf{e}_0 + \frac{1}{2} \ddot{\psi} \mathbf{e}_3 \right) + \\
&\mathbf{q}_1 * \left(-\frac{1}{4} \left(\dot{\theta} \right)^2 \mathbf{e}_0 + \frac{1}{2} \ddot{\theta} \mathbf{e}_2 \right) * \bar{\mathbf{q}}_1 + \\
&\mathbf{q}_1 * \mathbf{q}_2 * \left(-\frac{1}{4} \left(\dot{\phi} \right)^2 \mathbf{e}_0 + \frac{1}{2} \ddot{\phi} \mathbf{e}_3 \right) * \bar{\mathbf{q}}_2 * \bar{\mathbf{q}}_1 + \\
&\frac{1}{2} \dot{\psi} \dot{\theta} (\mathbf{e}_3 * \mathbf{q}_1) * (\mathbf{e}_2 * \bar{\mathbf{q}}_1) + \\
&\frac{1}{2} \dot{\psi} \dot{\phi} (\mathbf{e}_3 * \mathbf{q}_1) * \mathbf{q}_2 * \mathbf{e}_3 * \bar{\mathbf{q}}_2 * \bar{\mathbf{q}}_1 + \\
&\frac{1}{2} \dot{\theta} \dot{\phi} \mathbf{q}_1 * (\mathbf{e}_2 * \mathbf{q}_2) * (\mathbf{e}_3 * \bar{\mathbf{q}}_2) * \bar{\mathbf{q}}_1
\end{aligned} \tag{2.31}$$

Además las derivadas de los cuaterniones son:

$$\begin{aligned}
\ddot{\mathbf{p}}_{5i} &= \left(\ddot{p}_{5i0}, \ddot{p}_{5i1}, 0, 0 \right) \\
\ddot{\mathbf{p}}_{7i} &= \left(\ddot{p}_{7i0}, \ddot{p}_{7i1}, 0, 0 \right) \\
\ddot{\mathbf{p}}_{8i} &= \left(\ddot{p}_{8i0}, 0, 0, \ddot{p}_{8i3} \right)
\end{aligned}$$

La ec.(2.31) muestra el uso de los valores de aceleración angular $\left(\ddot{\psi}, \ddot{\theta}, \ddot{\phi} \right)$, requeridos en el movimiento del plato móvil. Las ecuaciones (2.28) y (2.29), representan un sistema lineal de 6 ecuaciones con 6 incógnitas, siendo estas últimas $\left(\ddot{p}_{5i0}, \ddot{p}_{5i1}, \ddot{p}_{7i0}, \ddot{p}_{7i1}, \ddot{p}_{8i0}, \ddot{p}_{8i3} \right)$. Una vez realizado el análisis de aceleración, las aceleraciones angulares en las juntas cinemáticas $\left(\ddot{\theta}_5^i, \ddot{\theta}_7^i, \ddot{\theta}_8^i \right)$, asociadas a los cuaterniones $\left(\ddot{\mathbf{p}}_{5i}, \ddot{\mathbf{p}}_{7i}, \ddot{\mathbf{p}}_{8i} \right)$, se obtienen aplicando el **Corolario**

5 de la manera siguiente. Para $\ddot{\theta}_5^i$ asociado a $\ddot{\mathbf{p}}_{5i}$, se tiene:

$$\begin{aligned}
\ddot{\mathbf{p}}_{5i} * \bar{\mathbf{p}}_{5i} &= -\frac{1}{4} \left(\dot{\theta}_5^i \right)^2 \mathbf{e}_0 + \frac{1}{2} \ddot{\theta}_5^i \mathbf{e}_1 \\
\left\langle \ddot{\mathbf{p}}_{5i} * \bar{\mathbf{p}}_{5i}, \mathbf{e}_1 \right\rangle &= -\frac{1}{4} \left(\dot{\theta}_5^i \right)^2 \langle \mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1 \rangle + \frac{1}{2} \ddot{\theta}_5^i \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \rangle \\
\ddot{\theta}_5^i &= 2 \left\langle \ddot{\mathbf{p}}_{5i} * \bar{\mathbf{p}}_{5i}, \mathbf{e}_1 \right\rangle
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Donde $\langle \mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1 \rangle = 0$. Siguiendo el mismo procedimiento, se puede calcular:

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{p}}_{7i} * \bar{\mathbf{p}}_{7i} &= -\frac{1}{4} \left(\dot{\theta}_7^i \right)^2 \mathbf{e}_0 + \frac{1}{2} \ddot{\theta}_7^i \mathbf{e}_1 \\ \ddot{\theta}_7^i &= 2 \left\langle \ddot{\mathbf{p}}_{7i} * \bar{\mathbf{p}}_{7i}, \mathbf{e}_1 \right\rangle\end{aligned}\tag{2.33}$$

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{p}}_{8i} * \bar{\mathbf{p}}_{8i} &= -\frac{1}{4} \left(\dot{\theta}_8^i \right)^2 \mathbf{e}_0 + \frac{1}{2} \ddot{\theta}_8^i \mathbf{e}_3 \\ \ddot{\theta}_8^i &= 2 \left\langle \ddot{\mathbf{p}}_{8i} * \bar{\mathbf{p}}_{8i}, \mathbf{e}_3 \right\rangle\end{aligned}\tag{2.34}$$

2.4.2. Aceleración Angular de la Junta Esférica

Derivando respecto al tiempo la expresion (2.23), donde $\dot{\mathbf{p}}_{13i} = \mathbf{0}$, ya que está definido con el ángulo constante δ_{13}^i :

$$\begin{aligned}&\ddot{\mathbf{p}}_{10i} * \mathbf{p}_{11i} * \mathbf{p}_{12i} + \mathbf{p}_{10i} * \ddot{\mathbf{p}}_{11i} * \mathbf{p}_{12i} + \mathbf{p}_{10i} * \mathbf{p}_{11i} * \ddot{\mathbf{p}}_{12i} + \\ &2 \left(\dot{\mathbf{p}}_{10i} * \dot{\mathbf{p}}_{11i} * \mathbf{p}_{12i} + \dot{\mathbf{p}}_{10i} * \mathbf{p}_{11i} * \dot{\mathbf{p}}_{12i} + \mathbf{p}_{10i} * \dot{\mathbf{p}}_{11i} * \dot{\mathbf{p}}_{12i} \right) \\ &= \ddot{\bar{\mathbf{q}}}_{8i} * \mathbf{q}_p * \mathbf{p}_{13i} + \bar{\mathbf{q}}_{8i} * \ddot{\mathbf{q}}_p * \mathbf{p}_{13i} + 2\dot{\bar{\mathbf{q}}}_{8i} * \dot{\mathbf{q}}_p * \mathbf{p}_{13i}\end{aligned}\tag{2.35}$$

Donde:

$$\begin{aligned}\ddot{\bar{\mathbf{q}}}_{8i} &= \ddot{\mathbf{q}}_{5i} * \mathbf{p}_{7i} * \mathbf{p}_{8i} + \mathbf{q}_{5i} * \ddot{\mathbf{p}}_{7i} * \mathbf{p}_{8i} + \mathbf{q}_{5i} * \mathbf{p}_{7i} * \ddot{\mathbf{p}}_{8i} \\ &2 \left(\dot{\mathbf{q}}_{5i} * \dot{\mathbf{p}}_{7i} * \mathbf{p}_{8i} + \dot{\mathbf{q}}_{5i} * \mathbf{p}_{7i} * \dot{\mathbf{p}}_{8i} + \mathbf{q}_{5i} * \dot{\mathbf{p}}_{7i} * \dot{\mathbf{p}}_{8i} \right)\end{aligned}\tag{2.36}$$

$$\ddot{\bar{\bar{\mathbf{q}}}}_{8i} = \ddot{\bar{\mathbf{q}}}_{8i}$$

Derivando respecto al tiempo las normas respectivas, ec.(2.24):

$$\begin{aligned}\|\mathbf{p}_{10i}\|^{\ddot{\bullet}} &= \left\langle \ddot{\mathbf{p}}_{10i}, \mathbf{p}_{10i} \right\rangle + \left\langle \dot{\mathbf{p}}_{10i}, \dot{\mathbf{p}}_{10i} \right\rangle = 0 \\ \|\mathbf{p}_{11i}\|^{\ddot{\bullet}} &= \left\langle \ddot{\mathbf{p}}_{11i}, \mathbf{p}_{11i} \right\rangle + \left\langle \dot{\mathbf{p}}_{11i}, \dot{\mathbf{p}}_{11i} \right\rangle = 0 \\ \|\mathbf{p}_{12i}\|^{\ddot{\bullet}} &= \left\langle \ddot{\mathbf{p}}_{12i}, \mathbf{p}_{12i} \right\rangle + \left\langle \dot{\mathbf{p}}_{12i}, \dot{\mathbf{p}}_{12i} \right\rangle = 0\end{aligned}\tag{2.37}$$

Donde:

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{p}}_{10i} &= \left(\ddot{p}_{10i0}, 0, 0, \ddot{p}_{10i3} \right) \\ \ddot{\mathbf{p}}_{11i} &= \left(\ddot{p}_{11i0}, \ddot{p}_{11i1}, 0, 0 \right) \\ \ddot{\mathbf{p}}_{12i} &= \left(\ddot{p}_{12i0}, 0, 0, \ddot{p}_{12i3} \right)\end{aligned}$$

Las ecuaciones (2.35) y (2.37) representan un sistema lineal de 7 ecuaciones con 6 incógnitas, siendo estas últimas $\left(\ddot{p}_{10i0}, \ddot{p}_{10i3}, \ddot{p}_{11i0}, \ddot{p}_{11i1}, \ddot{p}_{12i0}, \ddot{p}_{12i3}\right)$. De (2.35) se pueden elegir 3 ecuaciones escalares más las 3 ecuaciones de (2.37) para la solución de las derivadas de los parámetros de los cuaterniones. Una vez realizado el análisis de aceleración, las aceleraciones angulares de la juntas esféricas $\left(\ddot{\theta}_{10}, \ddot{\theta}_{11}, \ddot{\theta}_{12}\right)$, asociados a los cuaterniones $\left(\ddot{\mathbf{p}}_{10i}, \ddot{\mathbf{p}}_{11i}, \ddot{\mathbf{p}}_{12i}\right)$, se obtienen aplicando el **Corolario 5** de la manera siguiente:

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{p}}_{10i} * \bar{\mathbf{p}}_{10i} &= -\frac{1}{4} \left(\dot{\theta}_{10}^i\right)^2 \mathbf{e}_0 + \frac{1}{2} \ddot{\theta}_{10}^i \mathbf{e}_3 \\ \ddot{\theta}_{10}^i &= 2 \left\langle \ddot{\mathbf{p}}_{10i} * \bar{\mathbf{p}}_{10i}, \mathbf{e}_3 \right\rangle\end{aligned}\quad (2.38)$$

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{p}}_{11i} * \bar{\mathbf{p}}_{11i} &= -\frac{1}{4} \left(\dot{\theta}_{11}^i\right)^2 \mathbf{e}_0 + \frac{1}{2} \ddot{\theta}_{11}^i \mathbf{e}_1 \\ \ddot{\theta}_{11}^i &= 2 \left\langle \ddot{\mathbf{p}}_{11i} * \bar{\mathbf{p}}_{11i}, \mathbf{e}_1 \right\rangle\end{aligned}\quad (2.39)$$

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{p}}_{12i} * \bar{\mathbf{p}}_{12i} &= -\frac{1}{4} \left(\dot{\theta}_{12}^i\right)^2 \mathbf{e}_0 + \frac{1}{2} \ddot{\theta}_{12}^i \mathbf{e}_3 \\ \ddot{\theta}_{12}^i &= 2 \left\langle \ddot{\mathbf{p}}_{12i} * \bar{\mathbf{p}}_{12i}, \mathbf{e}_3 \right\rangle\end{aligned}\quad (2.40)$$

2.4.3. Gráficas de Aceleración

A continuación se muestran las gráficas de aceleraciones angulares que la plataforma espacial genera, al seguir la trayectoria descrita en el **Apéndice B**, para un tiempo de 10 segundos. El vector de aceleración lineal \mathbf{A}_p del origen del sistema \mathbf{e}_j^p está definido como:

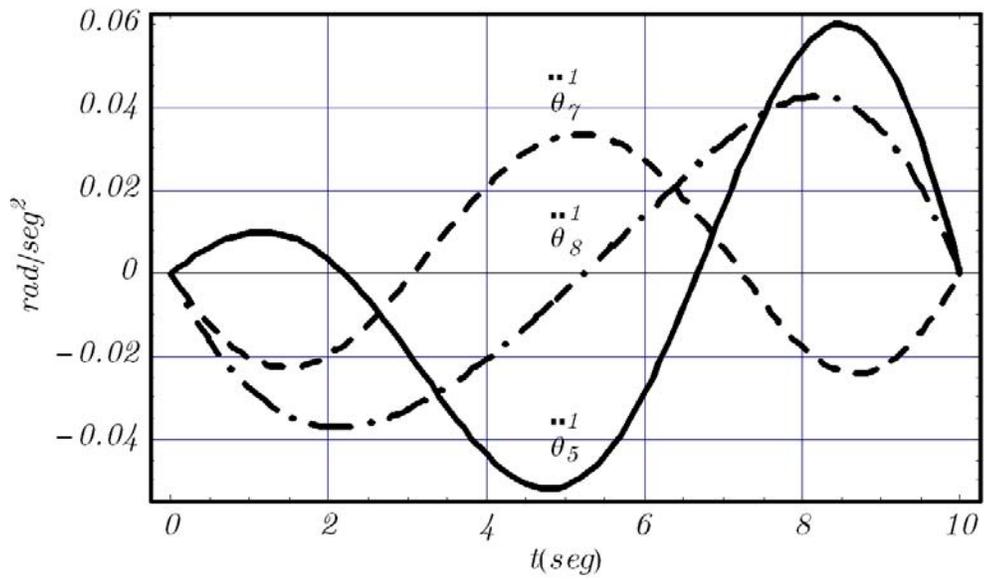
$$\mathbf{A}_p = \left[60 \frac{t}{t_f^3} - 180 \frac{t^2}{t_f^4} + 120 \frac{t^3}{t_f^5} \right] (\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i)$$

El vector de aceleración angular $\ddot{\boldsymbol{\beta}} = \left(\ddot{\psi}, \ddot{\theta}, \ddot{\phi}\right)$, de la base \mathbf{e}_j^p en la plataforma móvil, está definido como:

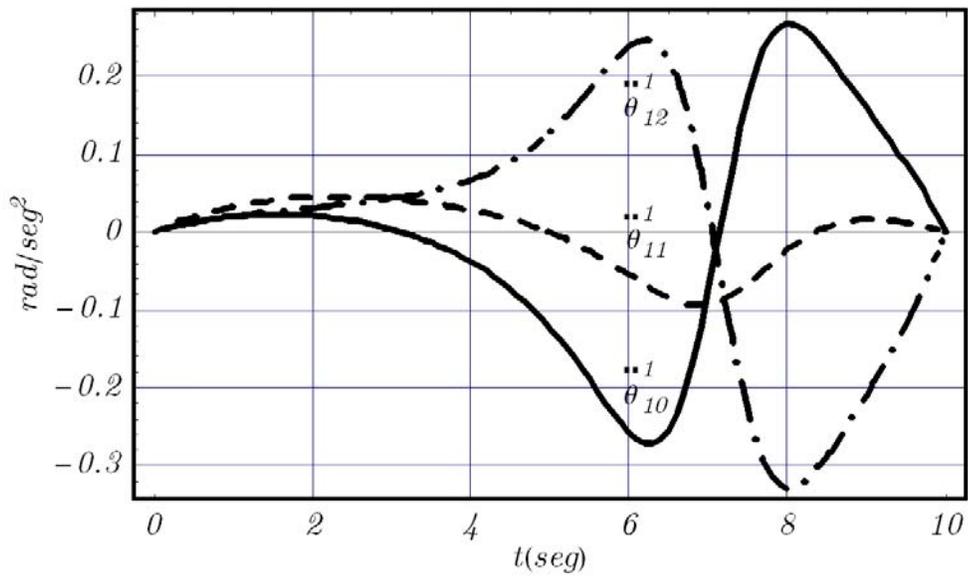
$$\ddot{\boldsymbol{\beta}} = \left[60 \frac{t}{t_f^3} - 180 \frac{t^2}{t_f^4} + 120 \frac{t^3}{t_f^5} \right] (\boldsymbol{\beta}_f - \boldsymbol{\beta}_i)$$

Cadena Cinemática 1

Las gráficas para las aceleraciones angulares ($\overset{\bullet\bullet}{\theta}_5, \overset{\bullet\bullet}{\theta}_7, \overset{\bullet\bullet}{\theta}_8$), según ecs.(2.32)–(2.34) son:

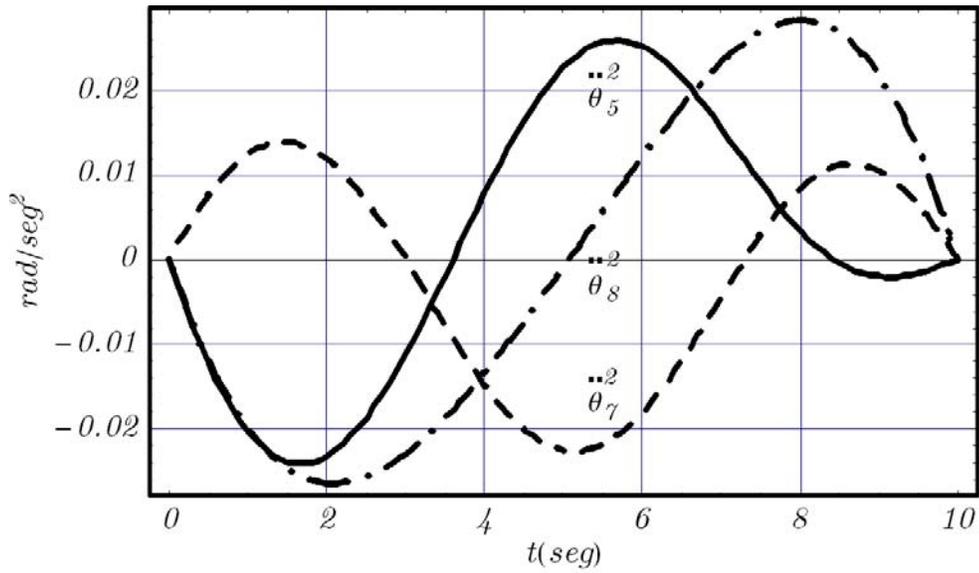


Las gráficas para las aceleraciones angulares ($\overset{\bullet\bullet}{\theta}_{10}, \overset{\bullet\bullet}{\theta}_{11}, \overset{\bullet\bullet}{\theta}_{12}$), según ecs.(2.38)–(2.40) son:

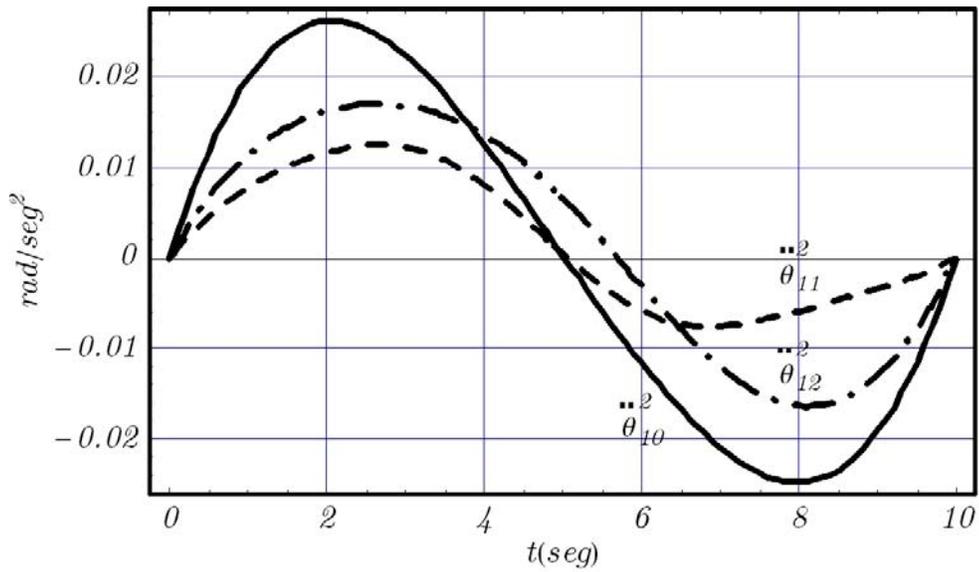


Cadena Cinemática 2

Las gráficas para las aceleraciones angulares ($\overset{\bullet\bullet}{\theta}_5, \overset{\bullet\bullet}{\theta}_7, \overset{\bullet\bullet}{\theta}_8$), según ecs.(2.32)–(2.34) son:

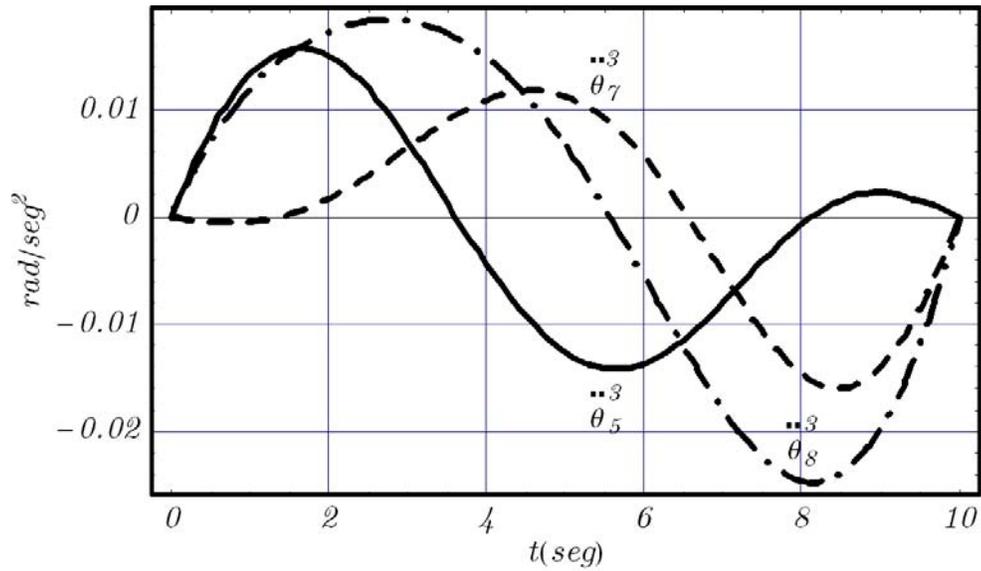


Las gráficas para las aceleraciones angulares ($\overset{\bullet\bullet}{\theta}_{10}, \overset{\bullet\bullet}{\theta}_{11}, \overset{\bullet\bullet}{\theta}_{12}$), según ecs.(2.38)–(2.40) son:

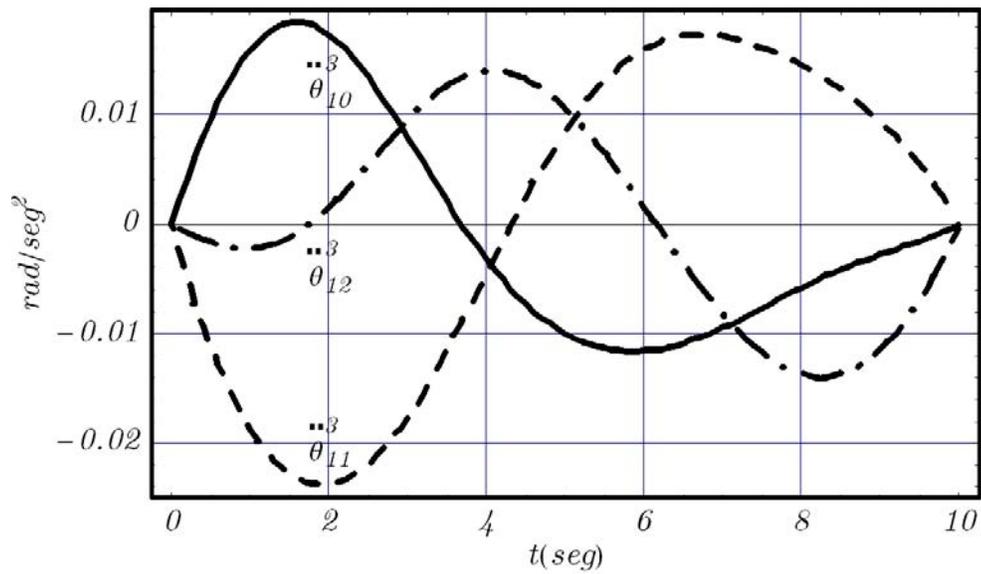


Cadena Cinemática 3

Las gráficas para las aceleraciones angulares ($\overset{\bullet\bullet}{\theta}_5, \overset{\bullet\bullet}{\theta}_7, \overset{\bullet\bullet}{\theta}_8$), según ecs.(2.32)–(2.34) son:

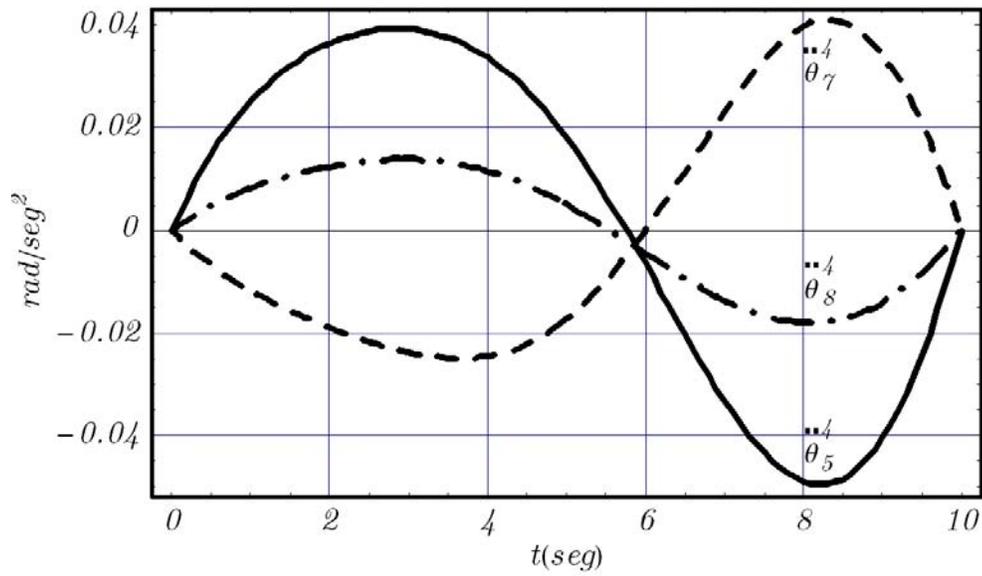


Las gráficas para las aceleraciones angulares ($\overset{\bullet\bullet}{\theta}_{10}, \overset{\bullet\bullet}{\theta}_{11}, \overset{\bullet\bullet}{\theta}_{12}$), según ecs.(2.38)–(2.40) son:

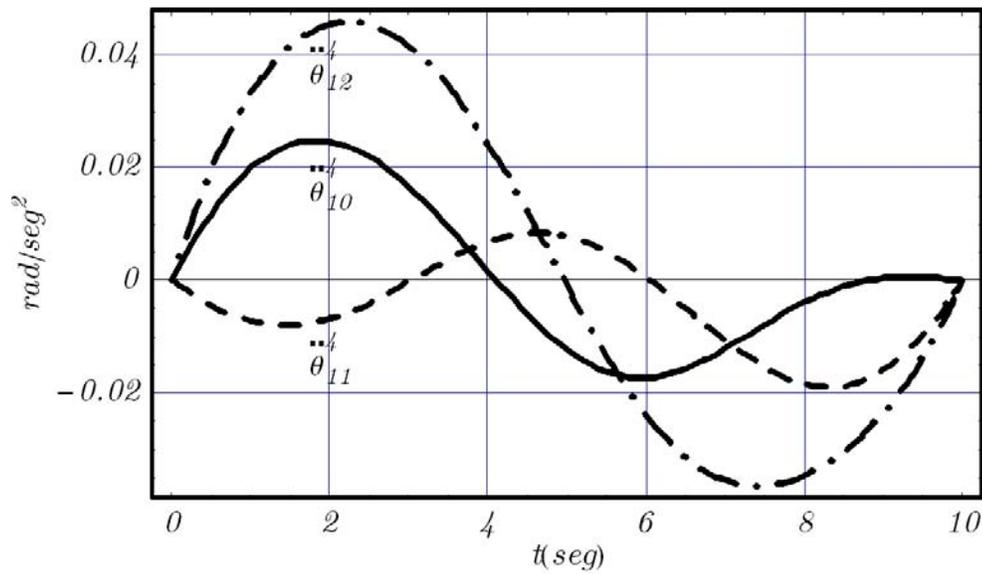


Cadena Cinemática 4

Las gráficas para las aceleraciones angulares ($\overset{\bullet\bullet}{\theta}_5, \overset{\bullet\bullet}{\theta}_7, \overset{\bullet\bullet}{\theta}_8$), según ecs.(2.32)–(2.34) son:

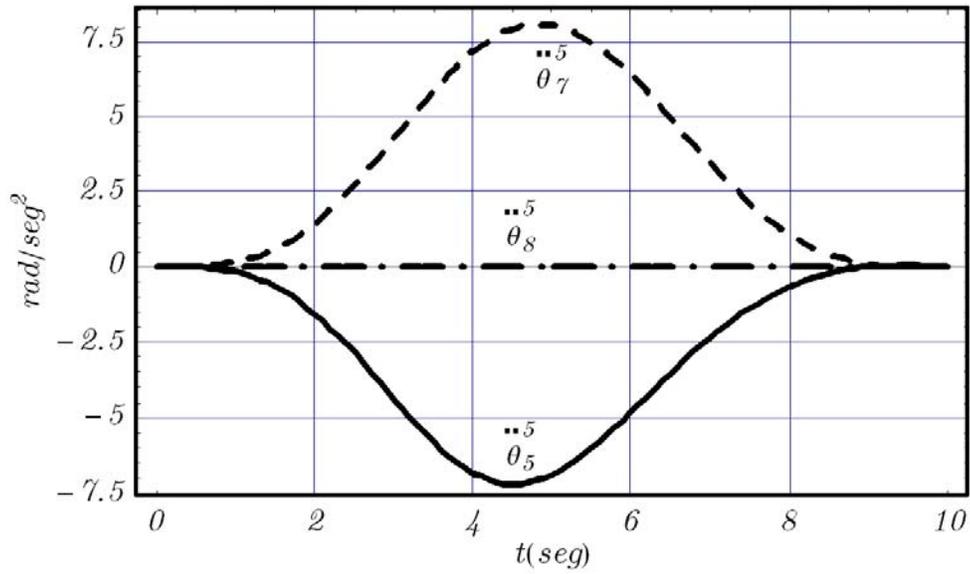


Las gráficas para las aceleraciones angulares ($\overset{\bullet\bullet}{\theta}_{10}, \overset{\bullet\bullet}{\theta}_{11}, \overset{\bullet\bullet}{\theta}_{12}$), según ecs.(2.38)–(2.40) son:

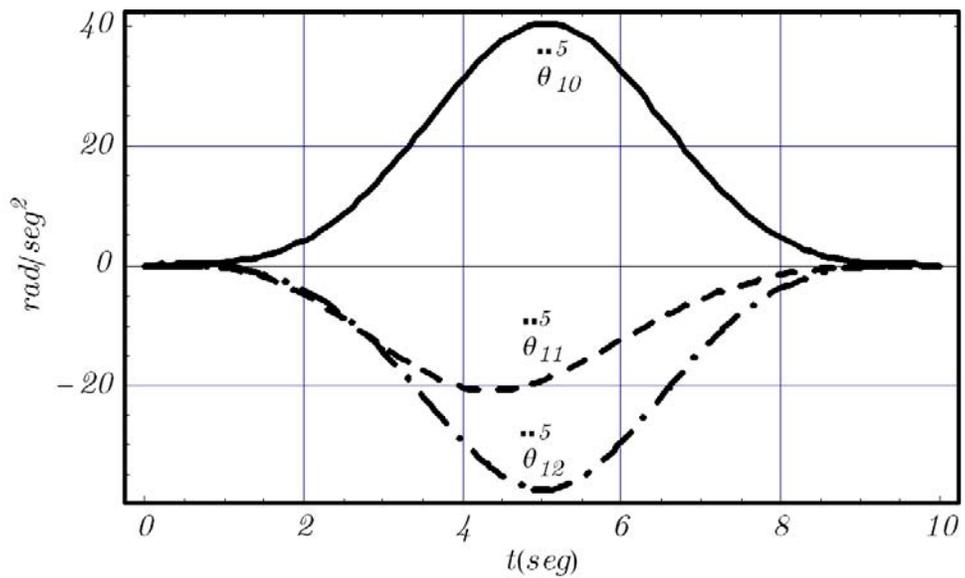


Cadena Cinemática 5

Las gráficas para las aceleraciones angulares ($\overset{\bullet\bullet}{\theta}_5, \overset{\bullet\bullet}{\theta}_7, \overset{\bullet\bullet}{\theta}_8$), según ecs.(2.32)–(2.34) son:

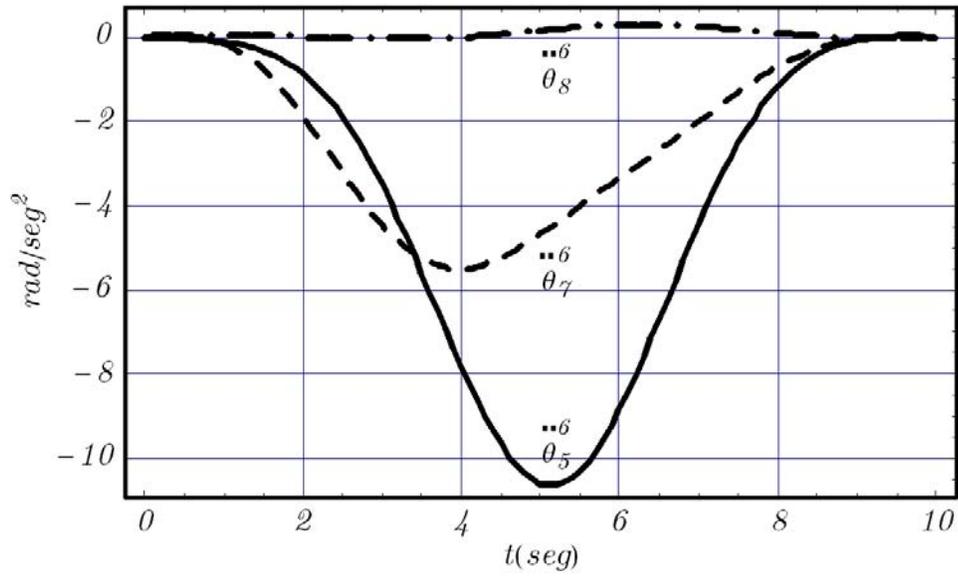


Las gráficas para las aceleraciones angulares ($\overset{\bullet\bullet}{\theta}_{10}, \overset{\bullet\bullet}{\theta}_{11}, \overset{\bullet\bullet}{\theta}_{12}$), según ecs.(2.38)–(2.40) son:

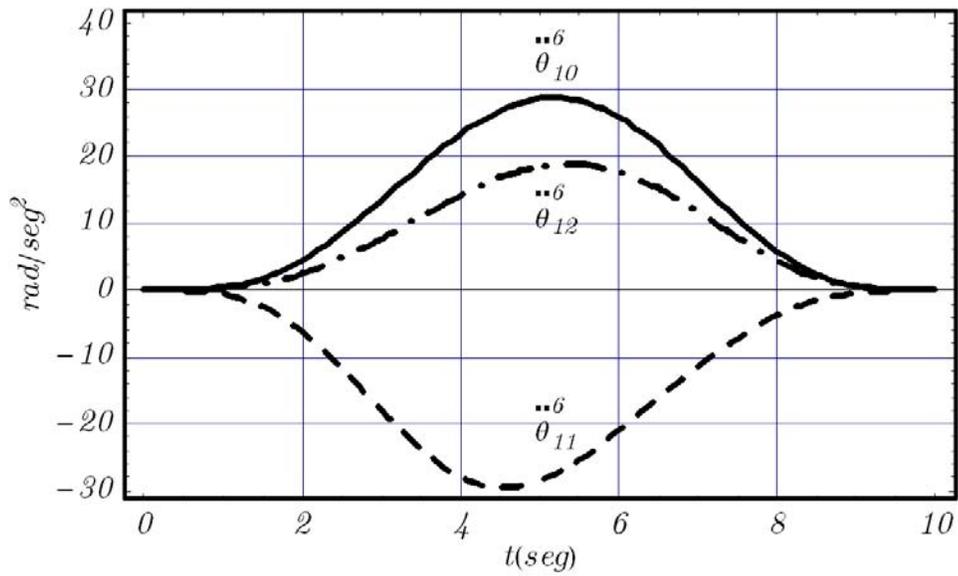


Cadena Cinemática 6

Las gráficas para las aceleraciones angulares ($\overset{\bullet\bullet}{\theta}_5, \overset{\bullet\bullet}{\theta}_7, \overset{\bullet\bullet}{\theta}_8$), según ecs.(2.32)–(2.34) son:



Las gráficas para las aceleraciones angulares ($\overset{\bullet\bullet}{\theta}_{10}, \overset{\bullet\bullet}{\theta}_{11}, \overset{\bullet\bullet}{\theta}_{12}$), según ecs.(2.38)–(2.40) son:



Capítulo 3

Análisis Dinámico

3.1. Introducción

Interés en el Análisis Dinámico

Recientemente, el interés en la dinámica de multicuerpos se ha incrementado, debido, no solo al hecho de que muchos sistemas físicos pueden ser simulados como modelos de multicuerpos, sino también debido a las ventajas en el hardware y software de computadoras.

Las ventajas de las computadoras permiten al investigador simular sistemas complejos al derivar algoritmos para formular y resolver las ecuaciones de movimiento para diferentes casos ha analizar.

De este modo las ecuaciones suministran información acerca del comportamiento del sistema, asistiendo significativamente al analista para implementar cambios en la geometría, sugerir la aplicación de materiales para un uso específico, realizar pruebas de estabilidad para alcanzar una configuración de equilibrio, validar resultados obtenidos de metodologías para balanceo estático y dinámico de multicuerpos, experimentar el comportamiento de actuadores y como consecuencia probar métodos de control.

Formulaciones Dinámicas

Diferentes fomulaciones han sido empleadas para establecer las ecuaciones dinámicas de sistemas de multicuerpos. Las formulaciones más comunes están basadas en definiciones de energía, tales como los métodos de Euler-Lagrange y Trabajo Virtual y en definiciones de la mecánica vectorial como el método de Newton-Euler .

Las formulaciones energéticas emplean cantidades escalares de trabajo y energía las cuales son menos intuitivas y menos transparentes en su forma final y la cual requiere un manejo

matemático complicado mientras más cuerpos tenga el sistema y más variables estén involucradas en su definición de posición y orientación.

También la obtención de fuerzas y momentos de reacción en los pares cinemáticos, requeridos en aplicaciones de diseño de la estructura de los sistemas, no se pueden obtener en primera instancia y/o requieren de planteamiento extras para su cálculo.

Sin embargo los métodos energéticos permiten obtener ecuaciones dinámicas de multicuerpos de forma cerrada (expresiones en las cuales las fuerzas o torques motrices incógnitas del sistema aparecen despejadas del conjunto de ecuaciones) de una manera directa siguiendo las bases de su formulación matemática.

Las aproximaciones vectoriales tienen la ventaja de ser intuitivos, de emplear una notación más concisa y no requieren de un manejo matemático complejo, sin embargo la obtención de una posible forma cerrada para las variables incógnitas, es una tarea más compleja que la de los métodos energéticos, debido a las incógnitas de fuerzas y momentos de reacción establecidas en las ecuaciones.

Por otro lado, la relativa sencillez en el establecimiento de las ecuaciones dinámicas (no buscando la forma cerrada de las mismas), la posible obtención de las reacciones incógnitas, útiles en la etapa del diseño para determinar la resistencia requerida de los elementos, así como la obtención de las fuerzas o los torques de los actuadores, aunado todo esto al apoyo de las computadoras para su solución, hacen este método atractivo para el analista involucrado en el diseño mecánico de un sistema de multicuerpos. Estas son las razones para su aplicación en esta sección, en la plataforma de estudio.

Formulación Newton - Euler

En esta formulación, primero se aíslan todos los cuerpos rígidos del sistema, creando lo que se conoce como diagrama de cuerpo libre. Se adhieren marcos de referencia local en el centro de masa de cada cuerpo rígido, siendo por lo general paralelos a los marcos de referencia empleados para modelar las juntas cinemáticas del sistema. Se establecen las fuerzas y momentos de reacción en cada cuerpo rígido, en sustitución de las restricciones impuestas por las juntas cinemáticas.

Estas fuerzas y momentos de reacción sobre las juntas cinemáticas son considerados de la misma magnitud y en direcciones opuestas, actuando sobre diferentes cuerpos a lo largo de la misma línea de acción de acuerdo a la tercera ley de Newton. También se establecen las fuerzas y torques externos aplicados a cada cuerpo rígido, generados por el contacto con el medio y/o por las necesidades de actuación.

Entonces las ecuaciones de Newton – Euler son escritas con respecto al marco de referencia local adherido en el centro de masa de cada cuerpo rígido. Para describir las distintas cantidades cinemáticas y de fuerzas con respecto al sistema en el centro de masa, se utilizará la definición de rotación establecida para el álgebra de Cuaterniones, permitiendo así establecer definiciones entre distintos marcos de referencia.

3.2. Análisis Dinámico de Fuerzas

En esta sección se desarrolla el problema dinámico inverso aplicado a la plataforma paralela. Esta se define a continuación:

Problema Dinámico Inverso

Consiste en determinar las fuerzas de los actuadores, conocidos el movimiento lineal de algún punto de la plataforma móvil y el movimiento angular de la misma como una función del tiempo y las fuerza externas actuando sobre el sistema.

A partir de la formulación de Newton-Euler se tiene:

$$\mathbf{F} = m \mathbf{a}_G \quad (3.1)$$

$$\mathbf{M}_G = \mathbf{I}_G \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{I}_G \boldsymbol{\omega}) \quad (3.2)$$

Donde:

\mathbf{F} = Fuerza resultante de las fuerzas externas e internas actuando sobre el cuerpo

\mathbf{M}_G = Momento resultante de las fuerzas y momentos externos e internos actuando sobre el cuerpo, respecto al centro de gravedad (C.G.)

\mathbf{a}_G = Vector de aceleración lineal del C. G. del cuerpo

\mathbf{I}_G = Matriz de inercia de masa respecto al C. G.

$\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\alpha}$ = Vectores de velocidad y aceleración angular del cuerpo

La figura 3.2, muestra las fuerzas actuando en un cuerpo sobre la plataforma móvil.

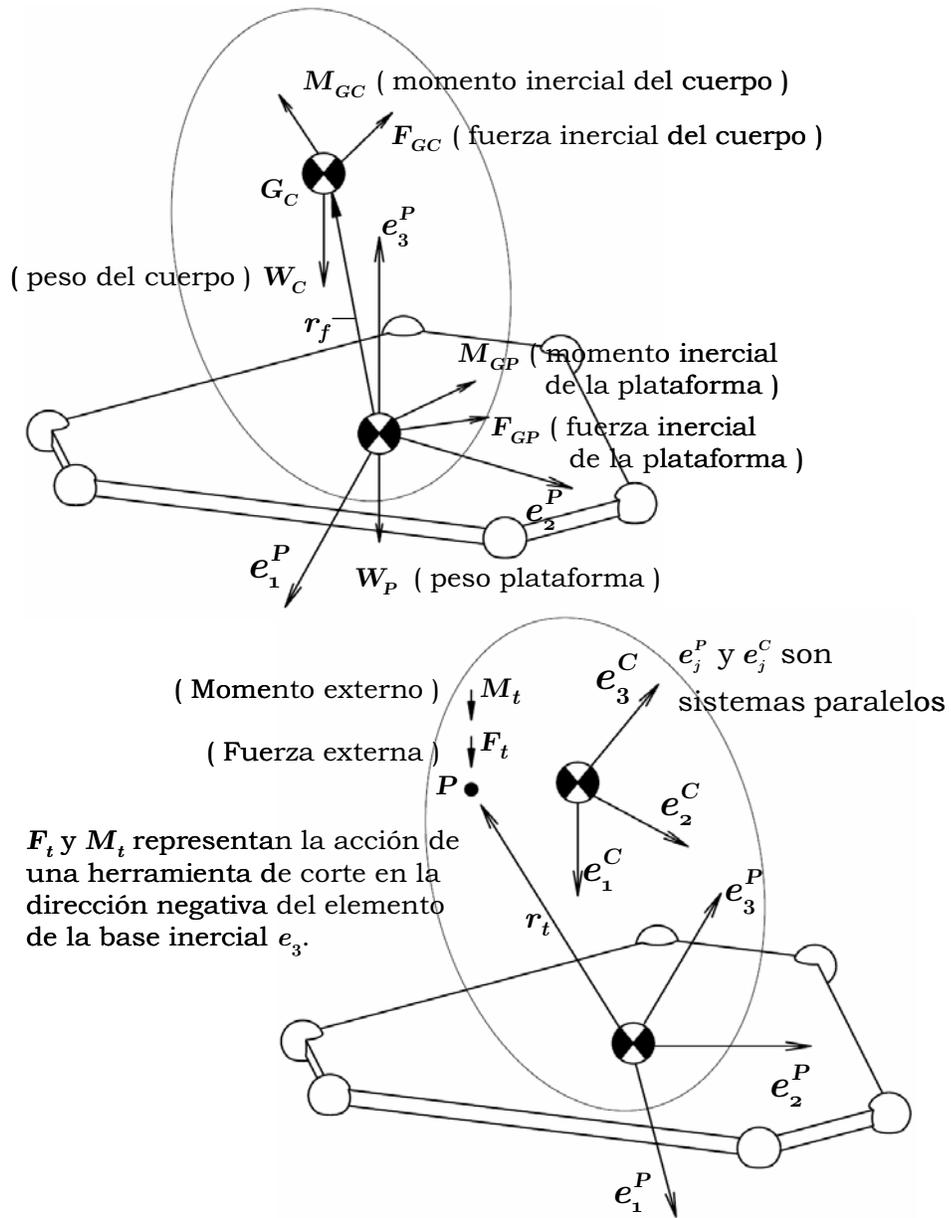


Fig 3.2 Cuerpo montado en la plataforma móvil

La figura 3.3, muestra las fuerzas de reacción en la junta universal de la cadena i .

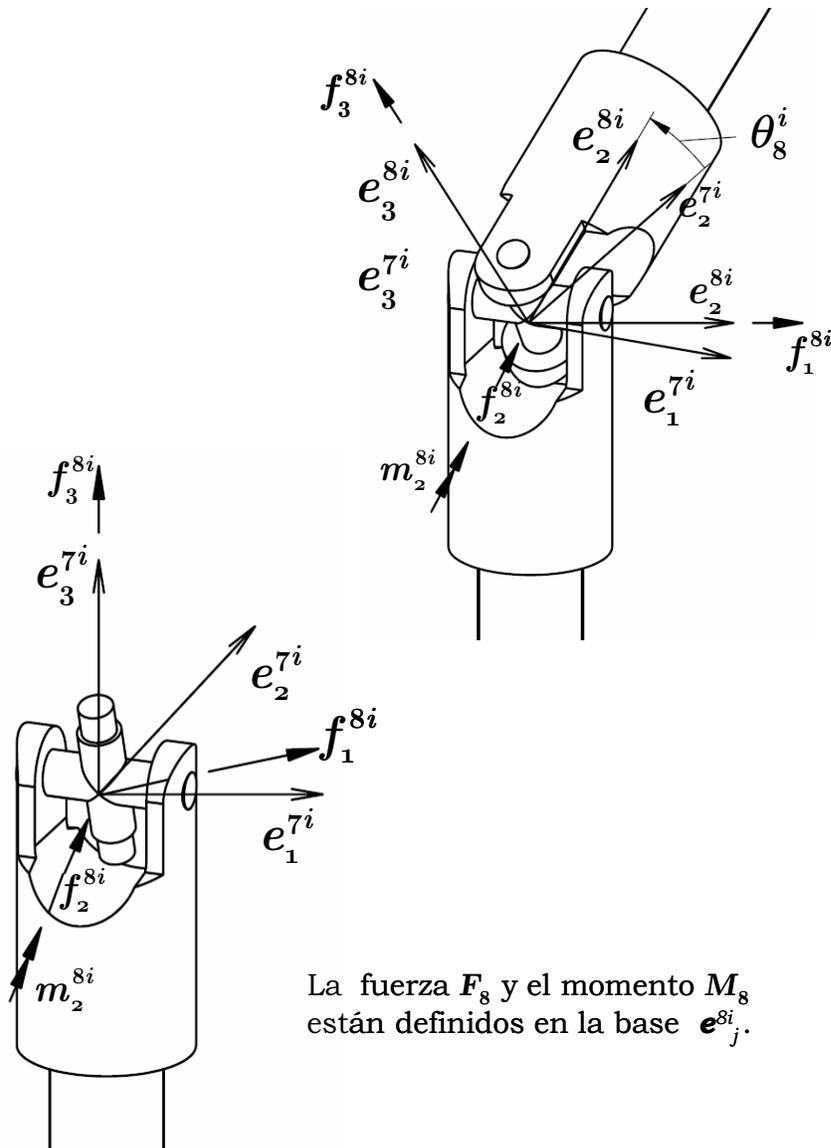


Fig 3.3 Fuerzas y momentos en junta universal

La fig.3.4, muestra los vectores utilizados en la definición de los momentos de la cadena i .

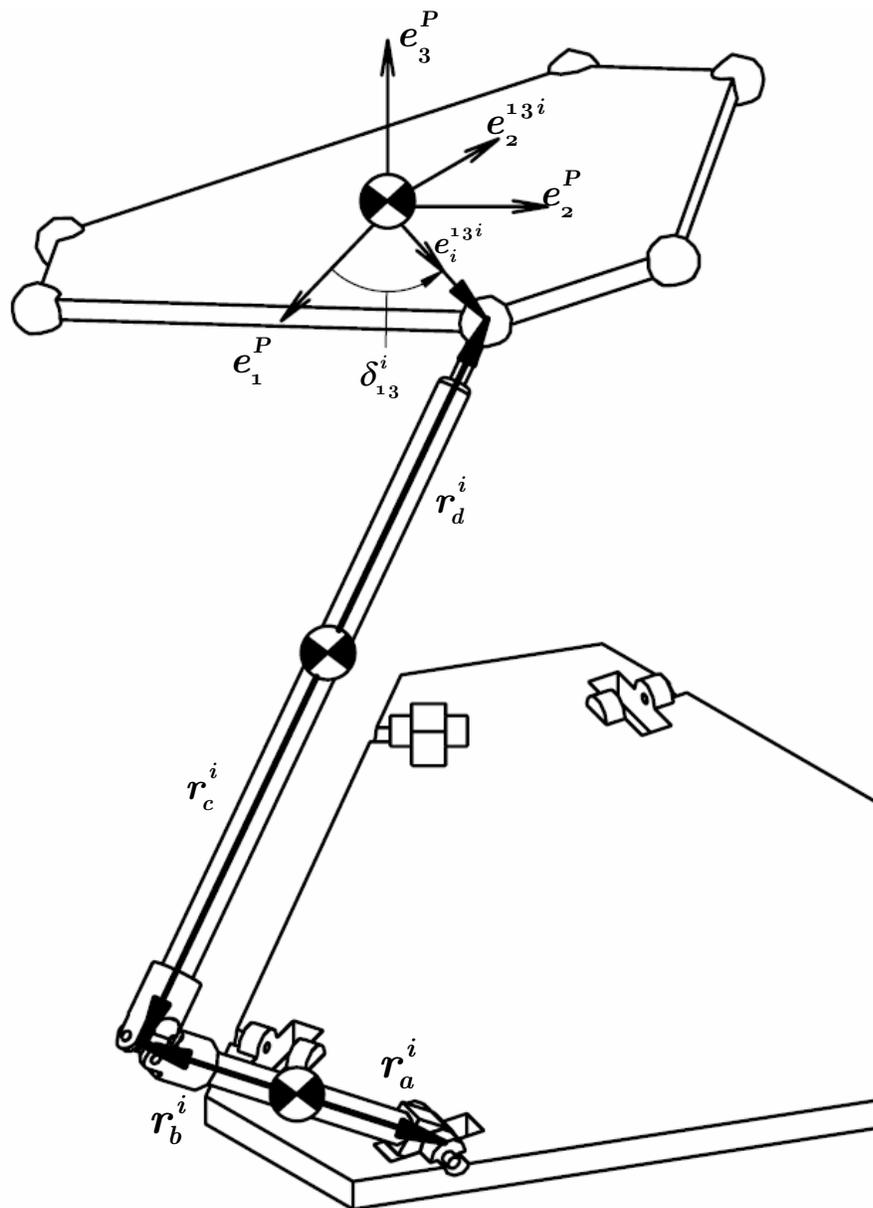


Fig. 3.4 Vectores de brazo de los momentos

La siguiente nomenclatura es aplicada en la formulación de las ecuaciones de equilibrio dinámico para la plataforma:

- $\mathbf{a}_{j,k}^i$ = vector de aceleración del C. G. en la cadena i , del cuerpo j y expresada en la base k
- $\mathbf{a}_{p,p}^i$ = vector de aceleración del C.G. de la plataforma p expresada en la base p
- $\mathbf{a}_{c,p}^i$ = vector de aceleración del C.G. del cuerpo c en la plataforma expresada en la base p
- $\mathbf{w}_{j,k}^i$ = vector de peso en la cadena i , del cuerpo j y expresada en la base k
- $\mathbf{w}_{p,p}, \mathbf{w}_{c,p}$ = vectores de peso de la plataforma p y del cuerpo c expresadas en la base p
- $\mathbf{F}_{j,k}^i$ = vector de fuerza en la cadena i , definida en la base j y expresada en la base k
- $\mathbf{T}_{j,k}^i, \mathbf{M}_{j,k}^i$ = vectores de torque y momento en la cadena i , definida en la base j y expresada en la base k
- $\mathbf{F}_{t,p}, \mathbf{M}_{t,p}$ = vectores de fuerza y momento externos definidas en la base inercial y expresadas en la base p
- $\mathbf{F}_{Gp,p}, \mathbf{F}_{Gc,p}$ = vectores de fuerzas inerciales de la plataforma p y del cuerpo c expresadas en la base p
- $\mathbf{M}_{Gp,p}, \mathbf{M}_{Gc,p}$ = vectores de momentos inerciales de la plataforma p y del cuerpo c expresadas en la base p
- $\boldsymbol{\omega}_{j,k}^i, \boldsymbol{\alpha}_{j,k}^i$ = vector de velocidad y aceleración angular en la cadena i , del cuerpo j y expresada en la base k
- $\mathbf{I}_{j,k}^i$ = matriz de inercia en la cadena i , del cuerpo j y expresada en la base k
- $\mathbf{I}_{p,p}, \mathbf{I}_{c,p}$ = matriz de inercia de la plataforma p y del cuerpo c expresadas en la base p

- $\mathbf{r}_a^i, \mathbf{r}_b^i$ = vectores de posición de las fuerzas $\mathbf{F}_{5,5}^i$ y $\mathbf{F}_{8,5}^i$ respectivamente, medidos desde el C.G. del cuerpo $2i$ en la cadena i y expresada en la base \mathbf{e}_j^{5i} .
- $\mathbf{r}_c^i, \mathbf{r}_d^i$ = vectores de posición de las fuerzas $\mathbf{F}_{8,8}^i$ y $\mathbf{F}_{9,8}^i$ respectivamente, medidos desde el C.G. del cuerpo $3i$ en la cadena i y expresada en la base \mathbf{e}_j^{8i} .
- \mathbf{r}_e^i = vector de posición de la fuerza $\mathbf{F}_{9,p}^i$, medido desde el C.G. de la plataforma móvil y expresada en la base \mathbf{e}_j^p .
- $\mathbf{r}_t^i, \mathbf{r}_f^i$ = vectores de posición de las fuerzas $\mathbf{F}_{t,p}$ y $\mathbf{w}_{c,p}$ respectivamente, medidos desde el C.G. de la plataforma móvil y expresada en la base \mathbf{e}_j^p .
- \mathbf{R}_{Gj}^i = vector de posición relativo del C.G. del cuerpo j , definido en la base inercial \mathbf{e}_j .

Aplicando las ecs.(3.1) y (3.2) a los cuerpo de la plataforma paralela.

Ecuaciones de equilibrio dinámico para el cuerpo $2i$

Las ecuaciones son expresadas en la base local \mathbf{e}_j^{5i} unida al cuerpo.

$$\mathbf{F}_{5,5}^i - \mathbf{F}_{8,5}^i + \mathbf{w}_{2,5}^i = m_2^i \mathbf{a}_{2,5}^i \quad (3.3)$$

$$\mathbf{r}_a^i \times \mathbf{F}_{5,5}^i - \mathbf{r}_b^i \times \mathbf{F}_{8,5}^i + \mathbf{M}_{5,5}^i - \mathbf{M}_{8,5}^i + \mathbf{T}_{5,5}^i = \mathbf{I}_{2,5}^i \boldsymbol{\alpha}_{2,5}^i + \boldsymbol{\omega}_{2,5}^i \times (\mathbf{I}_{2,5}^i \boldsymbol{\omega}_{2,5}^i) \quad (3.4)$$

Ecuaciones de equilibrio dinámico para el cuerpo $3i$

Las ecuaciones son expresadas en la base local \mathbf{e}_j^{8i} unida al cuerpo.

$$\mathbf{F}_{8,8}^i - \mathbf{F}_{9,8}^i + \mathbf{w}_{3,8}^i = m_3^i \mathbf{a}_{3,8}^i \quad (3.5)$$

$$\mathbf{r}_c^i \times \mathbf{F}_{8,8}^i - \mathbf{r}_d^i \times \mathbf{F}_{9,8}^i + \mathbf{M}_{8,8}^i = \mathbf{I}_{3,8}^i \boldsymbol{\alpha}_{3,8}^i + \boldsymbol{\omega}_{3,8}^i \times (\mathbf{I}_{3,8}^i \boldsymbol{\omega}_{3,8}^i) \quad (3.6)$$

Ecuaciones de equilibrio dinámico para la plataforma móvil

Las ecuaciones son expresadas en la base local \mathbf{e}_j^p unida al cuerpo.

$$\sum_{i=1}^6 \mathbf{F}_{9,p}^i + \mathbf{F}_{t,p} + \mathbf{w}_{p,p} + \mathbf{w}_{c,p} = \mathbf{F}_{Gp,p} + \mathbf{F}_{Gc,p} \quad (3.7)$$

$$\sum_{i=1}^6 \mathbf{r}_e^i \times \mathbf{F}_{9,p}^i + \mathbf{r}_t \times \mathbf{F}_{t,p} + \mathbf{r}_f \times \mathbf{w}_{c,p} + \mathbf{M}_{t,p} = \mathbf{M}_{Gp,p} + \mathbf{M}_{Gc,p} + \mathbf{r}_f \times \mathbf{F}_{Gc,p} \quad (3.8)$$

Donde la fuerza externa $\mathbf{F}_{t,p}$ y momento externo $\mathbf{M}_{t,p}$, representan la acción de una herramienta de corte en la dirección negativa del elemento de la base inercial \mathbf{e}_3 y transformada a la base local \mathbf{e}_j^p . Además:

$$\mathbf{F}_{Gp,p} = m_p \mathbf{a}_{p,p}$$

$$\mathbf{F}_{Gc,p} = m_c \mathbf{a}_{c,p}$$

$$\mathbf{M}_{Gp,p} = \mathbf{I}_{p,p} \boldsymbol{\alpha}_{p,p} + \boldsymbol{\omega}_{p,p} \times (\mathbf{I}_{p,p} \boldsymbol{\omega}_{p,p})$$

$$\mathbf{M}_{Gc,p} = \mathbf{I}_{c,p} \boldsymbol{\alpha}_{p,p} + \boldsymbol{\omega}_{p,p} \times (\mathbf{I}_{c,p} \boldsymbol{\omega}_{p,p})$$

En la siguiente sección se procede a definir cada una de las fuerzas y momentos de las expresiones anteriores.

3.3. Fuerzas y Momentos del Cuerpo 2i

Las fuerzas a definir para este cuerpo a partir de las ecs.(3.3) y (3.4) son: $\mathbf{F}_{5,5}^i$, $\mathbf{F}_{8,5}^i$, $\mathbf{w}_{2,5}^i$, $\mathbf{T}_{5,5}^i$, $\mathbf{M}_{5,5}^i$, $\mathbf{M}_{8,5}^i$.

3.3.1. Definiendo Fuerza $\mathbf{F}_{5,5}^i$

Expresando $\mathbf{F}_{5,1}^i$ (vector de fuerza en la cadena i , definida en la base 5 y expresada en la base 1) en la base inercial \mathbf{e}_j , para $j = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{5,1}^i &= f_j^{5i} \mathbf{e}_j^{5i} \\ &= f_j^{5i} \rho(\mathbf{q}_{5i}, \mathbf{e}_j) \\ \mathbf{F}_{5,1}^i &= f_j^{5i} (\mathbf{q}_{5i} * \mathbf{e}_j * \bar{\mathbf{q}}_{5i}) \end{aligned}$$

Donde f_j^{ki} = componente j de la fuerza k de la cadena i . Expresando $\mathbf{F}_{5,1}^i$ en la base local \mathbf{e}_j^{5i} :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{5,5}^i &= \rho(\bar{\mathbf{q}}_{5i}, \mathbf{F}_{5,1}^i) \\ &= \bar{\mathbf{q}}_{5i} * \mathbf{F}_{5,1}^i * \mathbf{q}_{5i} \\ &= \bar{\mathbf{q}}_{5i} * f_j^{5i} (\mathbf{q}_{5i} * \mathbf{e}_j * \bar{\mathbf{q}}_{5i}) * \mathbf{q}_{5i} \\ &= (\bar{\mathbf{q}}_{5i} * \mathbf{q}_{5i}) * f_j^{5i} \mathbf{e}_j * (\bar{\mathbf{q}}_{5i} * \mathbf{q}_{5i}) \\ \mathbf{F}_{5,5}^i &= f_j^{5i} \mathbf{e}_j \end{aligned} \tag{3.9}$$

En la ec.(3.9) se aplicó la identidad $\bar{\mathbf{q}} * \mathbf{q} = \mathbf{1}$.

3.3.2. Definiendo Fuerza $\mathbf{F}_{8,5}^i$

Expresando $\mathbf{F}_{8,1}^i$ en la base inercial $\underline{\mathbf{e}}_j$, para $j = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{8,1}^i &= f_j^{8i} \underline{\mathbf{e}}_j^{8i} \\ &= f_j^{8i} \rho(\mathbf{q}_{8i}, \underline{\mathbf{e}}_j) \\ \mathbf{F}_{8,1}^i &= f_j^{8i} (\mathbf{q}_{8i} * \underline{\mathbf{e}}_j * \bar{\mathbf{q}}_{8i})\end{aligned}$$

Expresando $\mathbf{F}_{8,1}^i$ en la base local $\underline{\mathbf{e}}_j^{5i}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{8,5}^i &= \rho(\bar{\mathbf{q}}_{5i}, \mathbf{F}_{8,1}^i) \\ &= \bar{\mathbf{q}}_{5i} * \mathbf{F}_{8,1}^i * \mathbf{q}_{5i} \\ &= \bar{\mathbf{q}}_{5i} * f_j^{8i} (\mathbf{q}_{8i} * \underline{\mathbf{e}}_j * \bar{\mathbf{q}}_{8i}) * \mathbf{q}_{5i} \\ \mathbf{F}_{8,5}^i &= (\bar{\mathbf{q}}_{5i} * \mathbf{q}_{8i}) * f_j^{8i} \underline{\mathbf{e}}_j * (\bar{\mathbf{q}}_{8i} * \mathbf{q}_{5i})\end{aligned}\tag{3.10}$$

Donde:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{q}}_{5i} * \mathbf{q}_{8i} &= \bar{\mathbf{q}}_{5i} * (\mathbf{q}_{5i} * \mathbf{p}_{7i} * \mathbf{p}_{8i}) = \mathbf{p}_{7i} * \mathbf{p}_{8i} \\ \bar{\mathbf{q}}_{8i} * \mathbf{q}_{5i} &= (\bar{\mathbf{p}}_{8i} * \bar{\mathbf{p}}_{7i} * \bar{\mathbf{q}}_{5i}) * \mathbf{q}_{5i} = \bar{\mathbf{p}}_{8i} * \bar{\mathbf{p}}_{7i} = \overline{\mathbf{p}_{7i} * \mathbf{p}_{8i}}\end{aligned}$$

Definiendo:

$$\mathbf{p}_{78i} = \mathbf{p}_{7i} * \mathbf{p}_{8i}\tag{3.11}$$

Sustituyendo ec.(3.11) en ec.(3.10):

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{8,5}^i &= \mathbf{p}_{78i} * f_j^{8i} \underline{\mathbf{e}}_j * \bar{\mathbf{p}}_{78i} \\ &= f_j^{8i} (\mathbf{p}_{78i} * \underline{\mathbf{e}}_j * \bar{\mathbf{p}}_{78i}) \\ \mathbf{F}_{8,5}^i &= f_j^{8i} \underline{\mathbf{a}}_j^{5i}\end{aligned}\tag{3.12}$$

Donde $\underline{\mathbf{a}}_j^{5i} = \mathbf{p}_{78i} * \underline{\mathbf{e}}_j * \bar{\mathbf{p}}_{78i}$ y además $\mathbf{F}_{8,5}^i \in \mathcal{R}^4$. O también:

$$\mathbf{F}_{8,5}^i = \rho(\mathbf{p}_{78i}, \mathbf{f}_{8,5}^i)\tag{3.13}$$

Donde $\mathbf{f}_{8,5}^i = f_j^{8i} \underline{\mathbf{e}}_j \in \mathcal{R}^4$.

3.3.3. Definiendo Peso $\mathbf{w}_{2,5}^i$

Expresando $\mathbf{w}_{2,1}^i$ (vector de peso en la cadena i , del cuerpo 2 y expresada en la base 1) en la base inercial $\underline{\mathbf{e}}_j$, para $j = 1, 2, 3$:

$$\mathbf{w}_{2,1}^i = -m_{2g}^i \underline{\mathbf{e}}_3$$

Expresando $\mathbf{w}_{2,1}^i$ en la base local $\underline{\mathbf{e}}_j^{5i}$:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{w}_{2,5}^i &= \rho(\bar{\mathbf{q}}_{5i}, \mathbf{w}_{2,1}^i) \\
 &= \bar{\mathbf{q}}_{5i} * \mathbf{w}_{2,1}^i * \mathbf{q}_{5i} \\
 &= \bar{\mathbf{q}}_{5i} * (-m_{2g}^i \underline{\mathbf{e}}_3) * \mathbf{q}_{5i} \\
 &= -m_{2g}^i \rho(\bar{\mathbf{q}}_{5i}, \underline{\mathbf{e}}_3) \\
 \mathbf{w}_{2,5}^i &= -m_{2g}^i \underline{\mathbf{b}}_3^{5i}
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

Donde $\underline{\mathbf{b}}_3^{5i} = \rho(\bar{\mathbf{q}}_{5i}, \underline{\mathbf{e}}_3)$.

3.3.4. Definiendo Torque $\mathbf{T}_{5,5}^i$

Expresando $\mathbf{T}_{5,1}^i$ (vector de torque en la cadena i , definida en la base 5 y expresada en la base 1) en la base inercial $\underline{\mathbf{e}}_j$, para $j = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{T}_{5,1}^i &= t^i \underline{\mathbf{e}}_1 \\
 &= t^i \rho(\mathbf{q}_{5i}, \underline{\mathbf{e}}_1) \\
 \mathbf{T}_{5,1}^i &= t^i (\mathbf{q}_{5i} * \underline{\mathbf{e}}_1 * \bar{\mathbf{q}}_{5i})
 \end{aligned}$$

Donde t^i = torque del actuador de la cadena i . Expresando $\mathbf{T}_{5,1}^i$ en la base local $\underline{\mathbf{e}}_j^{5i}$:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{T}_{5,5}^i &= \rho(\bar{\mathbf{q}}_{5i}, \mathbf{T}_{5,1}^i) \\
 &= \bar{\mathbf{q}}_{5i} * t^i (\mathbf{q}_{5i} * \underline{\mathbf{e}}_1 * \bar{\mathbf{q}}_{5i}) * \mathbf{q}_{5i} \\
 &= (\bar{\mathbf{q}}_{5i} * \mathbf{q}_{5i}) * t^i \underline{\mathbf{e}}_1 * (\bar{\mathbf{q}}_{5i} * \mathbf{q}_{5i}) \\
 \mathbf{T}_{5,5}^i &= t^i \underline{\mathbf{e}}_1
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

3.3.5. Definiendo Momento $\mathbf{M}_{5,5}^i$

Expresando $\mathbf{M}_{5,1}^i$ en la base inercial $\underline{\mathbf{e}}_j$, para $j = 2, 3$:

$$\mathbf{M}_{5,1}^i = m_j^{5i} \underline{\mathbf{e}}_j^{5i} = m_j^{5i} \rho(\mathbf{q}_{5i}, \underline{\mathbf{e}}_j)$$

Donde m_j^{ki} = componente j del momento k de la cadena i . Expresando $\mathbf{M}_{5,1}^i$ en la base local $\underline{\mathbf{e}}_j^{5i}$:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}_{5,5}^i &= \rho(\bar{\mathbf{q}}_{5i}, \mathbf{M}_{5,1}^i) \\
 \mathbf{M}_{5,5}^i &= m_j^{5i} \underline{\mathbf{e}}_j
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

3.3.6. Definiendo Momento $\mathbf{M}_{8,5}^i$

Expresando $\mathbf{M}_{8,1}^i$ en la base inercial $\underline{\mathbf{e}}_j$:

$$\mathbf{M}_{8,1}^i = m_2^{8i} \underline{\mathbf{e}}_2^{8i} = m_2^{8i} \rho(\mathbf{q}_{8i}, \underline{\mathbf{e}}_2)$$

Expresando $\mathbf{M}_{8,1}^i$ en la base local $\underline{\mathbf{e}}_j^{5i}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{8,5}^i &= \rho(\bar{\mathbf{q}}_{5i}, \mathbf{M}_{8,1}^i) \\ &= m_2^{8i} \rho(\mathbf{p}_{78i}, \underline{\mathbf{e}}_2) \\ \mathbf{M}_{8,5}^i &= m_2^{8i} \underline{\mathbf{a}}_2^{5i} \end{aligned} \tag{3.17}$$

Donde $\underline{\mathbf{a}}_2^{5i} = \rho(\mathbf{p}_{78i}, \underline{\mathbf{e}}_2)$.

3.3.7. Transformando Fuerzas, Torques y Momentos al Espacio \mathcal{R}^3

Expresiones (3.9), (3.12), (3.13), (3.14), (3.15), (3.16), (3.17), están en el espacio vectorial \mathcal{R}^4 , para su sustitución en las ecuaciones dinámicas (3.3) y (3.4) se definen en \mathcal{R}^3 de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{5,5}^i &= f_j^{5i} \mathbf{e}_j \\ \mathbf{F}_{8,5}^i &= f_j^{8i} \underline{\mathbf{a}}_j^{5i} \\ \mathbf{F}_{8,5}^i &= \mathbf{T}_V(\rho(\mathbf{p}_{78i}, \mathbf{f}_{8,5}^i)) \in \mathbf{R}^3 \\ \mathbf{f}_{8,5}^i &= f_j^{8i} \underline{\mathbf{e}}_j \in \mathbf{R}^4 \end{aligned} \tag{3.18}$$

$$\mathbf{w}_{2,5}^i = -m_2^i g \mathbf{b}_3^{5i}$$

$$\mathbf{T}_{5,5}^i = t^i \mathbf{e}_1$$

$$\mathbf{M}_{5,5}^i = m_j^{5i} \mathbf{e}_j$$

$$\mathbf{M}_{8,5}^i = m_2^{8i} \underline{\mathbf{a}}_2^{5i}$$

La diferencia entre bases de \mathcal{R}^3 y \mathcal{R}^4 , es el subrayado entre ellas, es decir $\mathbf{e}_j \in \mathcal{R}^3$ y $\underline{\mathbf{e}}_j \in \mathcal{R}^4$.

3.4. Vectores de Posición en Momentos del Cuerpo 2i

Los vectores \mathbf{r}_a^i y \mathbf{r}_b^i están definidos en la base local $\underline{\mathbf{e}}_j^{5i}$, de la misma manera que ec.(3.9). En el espacio vectorial \mathcal{R}^4 se tiene:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_a^i &= -l_a^i \underline{\mathbf{e}}_2 \\ \mathbf{r}_b^i &= l_b^i \underline{\mathbf{e}}_2\end{aligned}$$

En el espacio vectorial \mathcal{R}^3 se tiene:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_a^i &= -l_a^i \underline{\mathbf{e}}_2 \\ \mathbf{r}_b^i &= l_b^i \underline{\mathbf{e}}_2\end{aligned}\tag{3.19}$$

Tal que $\underline{\mathbf{e}}_2 = \mathbf{T}_V(\underline{\mathbf{e}}_2) \in \mathcal{R}^3$. La expresiones de (3.19) se sustituyen en las ecuaciones dinámicas (3.4).

3.5. Fuerzas y Momentos del Cuerpo 3i

Las fuerzas a definir para este cuerpo a partir de las ecs.(3.5) y (3.6) son: $\mathbf{F}_{8,8}^i$, $\mathbf{F}_{9,8}^i$, $\mathbf{w}_{3,8}^i$, $\mathbf{M}_{8,8}^i$.

3.5.1. Definiendo Fuerza $\mathbf{F}_{8,8}^i$

Expresando $\mathbf{F}_{8,1}^i$ en la base inercial $\underline{\mathbf{e}}_j$, para $j = 1, 2, 3$:

$$\mathbf{F}_{8,1}^i = f_j^{8i} \underline{\mathbf{e}}_j^{8i} = f_j^{8i} \rho(\mathbf{q}_{8i}, \underline{\mathbf{e}}_j)$$

Expresando $\mathbf{F}_{8,1}^i$ en la base local $\underline{\mathbf{e}}_j^{8i}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{8,8}^i &= \rho(\bar{\mathbf{q}}_{8i}, \mathbf{F}_{8,1}^i) \\ \mathbf{F}_{8,8}^i &= f_j^{8i} \underline{\mathbf{e}}_j\end{aligned}\tag{3.20}$$

3.5.2. Definiendo Fuerza $\mathbf{F}_{9,8}^i$

Expresando $\mathbf{F}_{9,1}^i$ en la base inercial $\underline{\mathbf{e}}_j$, para $j = 1, 2, 3$:

$$\mathbf{F}_{9,1}^i = f_j^{9i} \underline{\mathbf{e}}_j^{9i} = f_j^{9i} \rho(\mathbf{q}_{8i}, \underline{\mathbf{e}}_j)$$

Las bases $\underline{\mathbf{e}}_j^{8i}$ y $\underline{\mathbf{e}}_j^{9i}$ son paralelas. Expresando $\mathbf{F}_{9,1}^i$ en la base local $\underline{\mathbf{e}}_j^{8i}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{9,8}^i &= \rho(\bar{\mathbf{q}}_{8i}, \mathbf{F}_{9,1}^i) \\ \mathbf{F}_{9,8}^i &= f_j^{9i} \underline{\mathbf{e}}_j\end{aligned}\tag{3.21}$$

3.5.3. Definiendo Peso $\mathbf{w}_{3,8}^i$

Expresando $\mathbf{w}_{3,1}^i$ en la base inercial $\underline{\mathbf{e}}_j$, para $j = 1, 2, 3$:

$$\mathbf{w}_{3,1}^i = -m_3^i g \underline{\mathbf{e}}_3$$

Expresando $\mathbf{w}_{3,1}^i$ en la base local $\underline{\mathbf{e}}_j^{8i}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_{3,8}^i &= \rho(\bar{\mathbf{q}}_{8i}, \mathbf{w}_{3,1}^i) \\ &= \rho(\bar{\mathbf{q}}_{8i}, -m_3^i g \underline{\mathbf{e}}_3) \\ &= -m_3^i g \rho(\bar{\mathbf{q}}_{8i}, \underline{\mathbf{e}}_3) \\ \mathbf{w}_{3,8}^i &= -m_3^i g \underline{\mathbf{a}}_3^{8i} \end{aligned} \tag{3.22}$$

Donde $\underline{\mathbf{a}}_3^{8i} = \rho(\bar{\mathbf{q}}_{8i}, \underline{\mathbf{e}}_3)$.

3.5.4. Definiendo Momento $\mathbf{M}_{8,8}^i$

Expresando $\mathbf{M}_{8,1}^i$ en la base inercial $\underline{\mathbf{e}}_j$:

$$\mathbf{M}_{8,1}^i = m_2^{8i} \underline{\mathbf{e}}_2^{8i} = m_2^{8i} \rho(\mathbf{q}_{8i}, \underline{\mathbf{e}}_2)$$

Expresando $\mathbf{M}_{8,1}^i$ en la base local $\underline{\mathbf{e}}_j^{8i}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{8,8}^i &= \rho(\bar{\mathbf{q}}_{8i}, \mathbf{M}_{8,1}^i) \\ \mathbf{M}_{8,8}^i &= m_2^{8i} \underline{\mathbf{e}}_2 \end{aligned} \tag{3.23}$$

3.5.5. Transformando Fuerzas, Torques y Momentos al Espacio \mathcal{R}^3

Expresiones (3.20), (3.21), (3.22), (3.23), están en el espacio vectorial \mathcal{R}^4 , para su sustitución en las ecuaciones dinámicas (3.5) y (3.6) se definen en \mathcal{R}^3 de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{8,8}^i &= f_j^{8i} \underline{\mathbf{e}}_j \\ \mathbf{F}_{9,8}^i &= f_j^{9i} \underline{\mathbf{e}}_j \end{aligned} \tag{3.24}$$

$$\mathbf{w}_{3,8}^i = -m_3^i g \underline{\mathbf{a}}_3^{8i}$$

$$\mathbf{M}_{8,8}^i = m_2^{8i} \underline{\mathbf{e}}_2$$

Donde $\underline{\mathbf{e}}_j \in \mathcal{R}^3$.

3.6. Vectores de Posición en Momentos del Cuerpo 3i

Los vectores \mathbf{r}_c^i y \mathbf{r}_d^i están definidos en la base local $\underline{\mathbf{e}}_j^{8i}$, de la misma manera que ec.(3.20). En el espacio vectorial \mathcal{R}^4 se tiene:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_c^i &= -l_c^i \underline{\mathbf{e}}_2 \\ \mathbf{r}_d^i &= l_d^i \underline{\mathbf{e}}_2\end{aligned}$$

En el espacio vectorial \mathcal{R}^3 se tiene:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_c^i &= -l_c^i \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{r}_d^i &= l_d^i \mathbf{e}_2\end{aligned}\tag{3.25}$$

Tal que $\mathbf{e}_2 = \mathbf{T}_V(\underline{\mathbf{e}}_2) \in \mathcal{R}^3$. La expresiones de (3.25) se sustituyen en las ecuaciones dinámicas (3.6).

3.7. Fuerzas y Momentos del Cuerpo p

3.7.1. Definiendo Fuerza $\mathbf{F}_{9,p}^i$

Expresando $\mathbf{F}_{9,1}^i$ en la base inercial $\underline{\mathbf{e}}_j$, para $j = 1, 2, 3$:

$$\mathbf{F}_{9,1}^i = f_j^{9i} \underline{\mathbf{e}}_j^{9i} = f_j^{9i} \rho(\mathbf{q}_{10i}, \underline{\mathbf{e}}_j)$$

Expresando $\mathbf{F}_{9,1}^i$ en la base local $\underline{\mathbf{e}}_j^p$:

$$\mathbf{F}_{9,p}^i = \rho(\bar{\mathbf{q}}_p, \mathbf{F}_{9,1}^i)\tag{3.26}$$

A continuación se procederá a definir el cuaternión \mathbf{q}_{10i} . De la cinemática (**Capítulo 2**), se tiene la *transformación relativa* entre las bases $\underline{\mathbf{e}}_j^{9i}$ y $\underline{\mathbf{e}}_j^{14i}$ dada por:

$$\mathbf{q}_{si} = \mathbf{p}_{10i} * \mathbf{p}_{11i} * \mathbf{p}_{12i}$$

Esta transformación representa los tres giros que experimenta la junta esférica, para que la base $\underline{\mathbf{e}}_j^{9i}$ esté paralela a la base $\underline{\mathbf{e}}_j^{14i}$. También la *transformación relativa* de la base móvil $\underline{\mathbf{e}}_j^p$ respecto a la base $\underline{\mathbf{e}}_j^{9i}$ de la junta esférica y su conjugado están dadas por:

$$\begin{aligned}\mathbf{q}_{9i} &= \mathbf{q}_{si} * \bar{\mathbf{p}}_{13i} \\ \bar{\mathbf{q}}_{9i} &= \mathbf{p}_{13i} * \bar{\mathbf{q}}_{si}\end{aligned}$$

Así, la *transformación absoluta* de la base $\underline{\mathbf{e}}_j^{9i}$ en la junta esférica, respecto a la base inercial está dada por:

$$\mathbf{q}_{10i} = \mathbf{q}_p * \mathbf{p}_{13i} * \overline{\mathbf{q}}_{si} = \mathbf{q}_p * \overline{\mathbf{q}}_{9i} \quad (3.27)$$

Desarrollando ec.(3.26):

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{9,p}^i &= \overline{\mathbf{q}}_p * \mathbf{F}_{9,1}^i * \mathbf{q}_p \\ &= \overline{\mathbf{q}}_p * f_j^{9i} (\mathbf{q}_{10i} * \underline{\mathbf{e}}_j * \overline{\mathbf{q}}_{10i}) * \mathbf{q}_p \\ \mathbf{F}_{9,p}^i &= (\overline{\mathbf{q}}_p * \mathbf{q}_{10i}) * (f_j^{9i} \underline{\mathbf{e}}_j) * (\overline{\mathbf{q}}_{10i} * \mathbf{q}_p) \end{aligned} \quad (3.28)$$

Simplificando mediante la sustitución de ec.(3.27):

$$\overline{\mathbf{q}}_p * \mathbf{q}_{10i} = \overline{\mathbf{q}}_p * (\mathbf{q}_p * \overline{\mathbf{q}}_{9i}) = \overline{\mathbf{q}}_{9i}$$

$$\overline{\mathbf{q}}_{10i} * \mathbf{q}_p = (\mathbf{q}_{9i} * \overline{\mathbf{q}}_p) * \mathbf{q}_p = \mathbf{q}_{9i}$$

Sustituyendo en ec.(3.28):

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{9,p}^i &= \overline{\mathbf{q}}_{9i} * (f_j^{9i} \underline{\mathbf{e}}_j) * \mathbf{q}_{9i} \\ &= f_j^{9i} (\overline{\mathbf{q}}_{9i} * \underline{\mathbf{e}}_j * \mathbf{q}_{9i}) \\ \mathbf{F}_{9,p}^i &= f_j^{9i} \underline{\mathbf{a}}_j^{p9i} \end{aligned} \quad (3.29)$$

Donde $\underline{\mathbf{a}}_j^{p9i} = \overline{\mathbf{q}}_{9i} * \underline{\mathbf{e}}_j * \mathbf{q}_{9i}$.

3.7.2. Definiendo Fuerza $\mathbf{F}_{t,p}$, Pesos $\mathbf{w}_{p,p}$, $\mathbf{w}_{c,p}$ y Momento $\mathbf{M}_{t,p}$

La fuerza externa $\mathbf{F}_{t,p}$ y momento externo $\mathbf{M}_{t,p}$, representan la acción de una herramienta de corte en la dirección negativa del elemento de la base inercial $\underline{\mathbf{e}}_3$ y transformada a la base local $\underline{\mathbf{e}}_j^p$. Expresando $\mathbf{F}_{t,1}$ en la base inercial $\underline{\mathbf{e}}_j$:

$$\mathbf{F}_{t,1} = -f_t \underline{\mathbf{e}}_3 \quad (3.30)$$

Expresando $\mathbf{F}_{t,p}$ en la base local $\underline{\mathbf{e}}_j^p$:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{t,p} &= \rho(\overline{\mathbf{q}}_p, \mathbf{F}_{t,1}) \\ &= -f_t \rho(\overline{\mathbf{q}}_p, \underline{\mathbf{e}}_3) \\ \mathbf{F}_{t,p} &= -f_t \underline{\mathbf{a}}_3^p \end{aligned} \quad (3.31)$$

De la misma manera los pesos y el momento:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_{p,p} &= -m_p g \underline{\mathbf{a}}_3^p \\ \mathbf{w}_{c,p} &= -m_c g \underline{\mathbf{a}}_3^p \\ \mathbf{M}_{t,p} &= -m_t \underline{\mathbf{a}}_3^p \end{aligned} \quad (3.32)$$

3.7.3. Transformando Fuerzas, Torques y Momentos al Espacio \mathcal{R}^3

Expresiones (3.29), (3.31), (3.32), están en el espacio vectorial \mathcal{R}^4 , para su sustitución en las ecuaciones dinámicas (3.7) y (3.8) se definen en \mathcal{R}^3 de la manera siguiente:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{9,p}^i &= f_j^{9i} \mathbf{a}_j^{p9i} \\ \mathbf{F}_{t,p} &= -f_t \mathbf{a}_3^p\end{aligned}\tag{3.33}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{w}_{p,p} &= -m_p g \mathbf{a}_3^p \\ \mathbf{w}_{c,p} &= -m_c g \mathbf{a}_3^p\end{aligned}$$

$$\mathbf{M}_{t,p} = -m_t \mathbf{a}_3^p$$

Donde \mathbf{a}_j^{p9i} , $\mathbf{a}_3^p \in \mathcal{R}^3$.

3.8. Vectores de Posición en Momentos del Cuerpo p

En el espacio vectorial \mathcal{R}^4 se tiene para $j = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_e^i &= l_e^i \mathbf{a}_1^{13i} = d_{14}^i \rho(\mathbf{p}_{13i}, \mathbf{e}_1) \\ \mathbf{r}_t &= l_{tj} \mathbf{e}_j \\ \mathbf{r}_f &= l_{fj} \mathbf{e}_j\end{aligned}$$

En el espacio vectorial \mathcal{R}^3 se redefine:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_e^i &= l_e^i \mathbf{a}_1^{13i} \\ \mathbf{r}_t &= l_{tj} \mathbf{e}_j \\ \mathbf{r}_f &= l_{fj} \mathbf{e}_j\end{aligned}\tag{3.34}$$

Tal que $\mathbf{e}_j = \mathbf{T}_V(\underline{\mathbf{e}}_j) \in \mathcal{R}^3$. La expresiones de (3.34) se sustituyen en las ecuaciones dinámicas (3.8).

3.9. Aceleración del Centro de Gravedad, Velocidad y Aceleración Angular del Cuerpo 2i

La figura 3.5, define los vectores de posición de los centros de gravedad de los cuerpos de la plataforma.

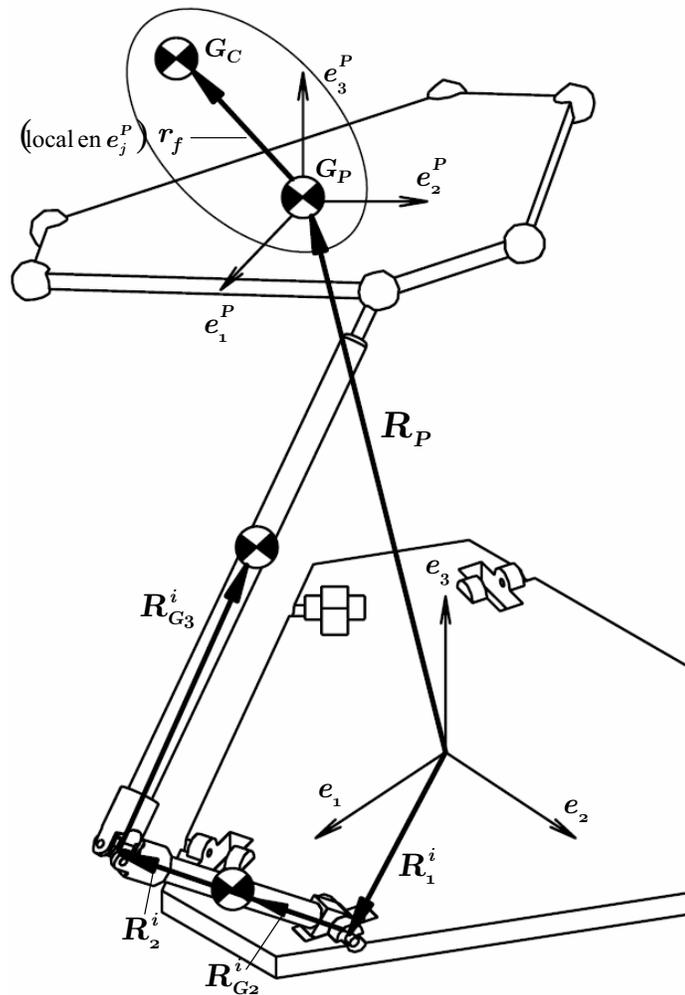


Fig. 3.5 Vectores de centro de gravedad

3.9.1. Definiendo la Aceleración del Centro de Gravedad $A_{2,5}^i$

El vector de posición del centro de gravedad del cuerpo 2i se define en la base inercial $\underline{e}_j \in \mathcal{R}^4$ como:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{2,1}^i &= \mathbf{R}_1^i + \mathbf{R}_{G2}^i \\ &= d_3^i \underline{e}_1^{2i} + d_{G2}^i \underline{e}_2^{5i} \end{aligned}$$

De la cinemática (**Capítulo 2**), el vector de velocidad del centro de gravedad se define como:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{2,1}^i &= \mathbf{V}_1^i + \mathbf{V}_{G2}^i = \mathbf{V}_{G2}^i \\ &= \mathbf{W}_2^i * \mathbf{R}_{G2}^i - \mathbf{R}_{G2}^i * \mathbf{W}_2^i \end{aligned}$$

Donde $\mathbf{V}_1^i = \mathbf{0}$, por ser constante. El vector de aceleración del centro de gravedad se define como:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{2,1}^i &= \mathbf{A}_1^i + \mathbf{A}_{G2}^i = \mathbf{A}_{G2}^i \\ &= (\mathbf{H}_2^i * \mathbf{R}_{G2}^i - \mathbf{R}_{G2}^i * \mathbf{H}_2^i) - 2(\mathbf{W}_2^i * \mathbf{R}_{G2}^i - \mathbf{R}_{G2}^i * \mathbf{W}_2^i) * \mathbf{W}_2^i \end{aligned} \quad (3.35)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_2^i &= \dot{\mathbf{q}}_{5i} * \bar{\mathbf{q}}_{5i} \\ \mathbf{H}_2^i &= \ddot{\mathbf{q}}_{5i} * \bar{\mathbf{q}}_{5i} \end{aligned}$$

A continuación se procederá a transformar la aceleración $\mathbf{A}_{2,1}^i$, ec.(3.35), expresada en la base inercial, para expresarla en la base local $\underline{\mathbf{e}}_j^{5i}$. La transformación se hará para cada uno de los elementos \mathbf{W}_2^i , \mathbf{H}_2^i , \mathbf{R}_{G2}^i .

Transformando \mathbf{W}_2^i

Expresado en la base inercial:

$$\mathbf{W}_2^i = \dot{\mathbf{q}}_{5i} * \bar{\mathbf{q}}_{5i} = \mathbf{p}_{2i} * \mathbf{p}_{4i} * \left(\dot{\bar{\mathbf{p}}}_{5i} * \bar{\mathbf{p}}_{5i} \right) * \bar{\mathbf{p}}_{4i} * \bar{\mathbf{p}}_{2i}$$

Donde:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_{5i} &= \mathbf{p}_{2i} * \mathbf{p}_{4i} * \mathbf{p}_{5i} \\ \bar{\mathbf{q}}_{5i} &= \bar{\mathbf{p}}_{5i} * \bar{\mathbf{p}}_{4i} * \bar{\mathbf{p}}_{2i} \\ \dot{\mathbf{q}}_{5i} &= \mathbf{p}_{2i} * \mathbf{p}_{4i} * \dot{\bar{\mathbf{p}}}_{5i} \end{aligned}$$

Expresado en la base $\underline{\mathbf{e}}_j^{5i}$:

$$\mathbf{W}_{2,5}^i = \rho(\bar{\mathbf{q}}_{5i}, \mathbf{W}_2^i) = \bar{\mathbf{p}}_{5i} * \left(\dot{\bar{\mathbf{p}}}_{5i} * \bar{\mathbf{p}}_{5i} \right) * \mathbf{p}_{5i} \quad (3.36)$$

La ec.(3.36) es una rotación con el mismo eje de giro que el elemento a rotar, por lo tanto el elemento a rotar no es afectado, quedando:

$$\mathbf{W}_{2,5}^i = \dot{\bar{\mathbf{p}}}_{5i} * \bar{\mathbf{p}}_{5i} \quad (3.37)$$

Transformando \mathbf{H}_2^i

De la misma manera, expresado en la base $\underline{\mathbf{e}}_j^{5i}$:

$$\mathbf{H}_{2,5}^i = \rho(\bar{\mathbf{q}}_{5i}, \mathbf{H}_2^i) = \ddot{\bar{\mathbf{p}}}_{5i} * \bar{\mathbf{p}}_{5i} \quad (3.38)$$

Transformando \mathbf{R}_{G2}^i

De la misma manera, expresado en la base inercial:

$$\mathbf{R}_{G2}^i = d_{G2}^i \underline{\mathbf{e}}_2^{5i} = d_{G2}^i \rho(\mathbf{q}_{5i}, \underline{\mathbf{e}}_2)$$

Expresado en la base $\underline{\mathbf{e}}_j^{5i}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{G2,5}^i &= \rho(\bar{\mathbf{q}}_{5i}, \mathbf{R}_{G2}^i) \\ &= \rho(\bar{\mathbf{q}}_{5i}, d_{G2}^i \underline{\mathbf{e}}_2^{5i}) \\ \mathbf{R}_{G2,5}^i &= d_{G2}^i \underline{\mathbf{e}}_2 \end{aligned} \quad (3.39)$$

Finalmente se define la aceleración del centro de gravedad del cuerpo 2i en la base local $\underline{\mathbf{e}}_j^{5i}$ como:

$$\mathbf{A}_{2,5}^i = (\mathbf{H}_{2,5}^i * \mathbf{R}_{G2,5}^i - \mathbf{R}_{G2,5}^i * \mathbf{H}_{2,5}^i) - 2 (\mathbf{W}_{2,5}^i * \mathbf{R}_{G2,5}^i - \mathbf{R}_{G2,5}^i * \mathbf{W}_{2,5}^i) * \mathbf{W}_{2,5}^i \quad (3.40)$$

3.9.2. Transformando la Aceleración del Centro de Gravedad, la Velocidad Angular y Aceleración Angular del Cuerpo 2i al Espacio \mathcal{R}^3

La aceleración de centro de gravedad, la velocidad angular y la aceleración angular, necesitan sustituirse en las ecuaciones dinámicas (3.3) y (3.4). Su definición en \mathcal{R}^3 , a partir de su definición paramétrica en \mathcal{R}^4 , se hace de la manera siguiente:

Aceleración del Centro de Gravedad

A partir de la ec.(3.40), se obtiene la aceleración del centro de gravedad $\mathbf{a}_{2,5}^i \in \mathcal{R}^3$:

$$\mathbf{a}_{2,5}^i = \mathbf{T}_V (\mathbf{A}_{2,5}^i) \quad (3.41)$$

Velocidad Angular

Según ec.(3.37), la velocidad angular $\mathbf{W}_{2,5}^i \in \mathcal{R}^4$, se define como:

$$\mathbf{W}_{2,5}^i = \dot{\mathbf{p}}_{5i} * \bar{\mathbf{p}}_{5i} \quad (3.37)$$

Según **Definición 2 (Capítulo 1)**, la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}_{2,5}^i \in \mathcal{R}^3$, se define como:

$$\boldsymbol{\omega}_{2,5}^i = \mathbf{T}_V (\underline{\boldsymbol{\omega}}_{2,5}^i) = \mathbf{T}_V (2 \mathbf{W}_{2,5}^i) = \mathbf{T}_V (2 \dot{\mathbf{p}}_{5i} * \bar{\mathbf{p}}_{5i}) \quad (3.42)$$

Aceleración Angular

Derivando respecto al tiempo ec.(3.37), se obtiene la aceleración angular $\dot{\mathbf{W}}_{2,5}^i \in \mathcal{R}^4$:

$$\dot{\mathbf{W}}_{2,5}^i = \ddot{\mathbf{p}}_{5i} * \bar{\mathbf{p}}_{5i} + \dot{\mathbf{p}}_{5i} * \dot{\bar{\mathbf{p}}}_{5i} = \mathbf{H}_{2,5}^i + \dot{\mathbf{p}}_{5i} * \dot{\bar{\mathbf{p}}}_{5i} \quad (3.43)$$

Según **Definición 3 (Capítulo 1)**, la aceleración angular $\alpha_{2,5}^i \in \mathcal{R}^3$, se define como:

$$\alpha_{2,5}^i = \mathbf{T}_V(\underline{\alpha}_{2,5}^i) = \mathbf{T}_V\left(2 \dot{\mathbf{W}}_{2,5}^i\right) = \mathbf{T}_V\left(2\left(\mathbf{H}_{2,5}^i + \dot{\mathbf{p}}_{5i} * \dot{\bar{\mathbf{p}}}_{5i}\right)\right) \quad (3.44)$$

3.10. Aceleración del Centro de Gravedad, Velocidad y Aceleración Angular del Cuerpo 3i

3.10.1. Definiendo la Aceleración del Centro de Gravedad $\mathbf{A}_{3,8}^i$

El vector de posición del centro de gravedad del cuerpo 3i se define en la base inercial $\mathbf{e}_j \in \mathcal{R}^4$ como:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{3,1}^i &= \mathbf{R}_1^i + \mathbf{R}_2^i + \mathbf{R}_{G3}^i \\ &= d_3^i \mathbf{e}_1^{2i} + d_6^i \mathbf{e}_2^{5i} + d_{G3}^i \mathbf{e}_2^{8i} \end{aligned}$$

De la cinemática (**Capítulo 2**), el vector de velocidad del centro de gravedad se define como:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{3,1}^i &= \mathbf{V}_1^i + \mathbf{V}_2^i + \mathbf{V}_{G3}^i = \mathbf{V}_2^i + \mathbf{V}_{G3}^i \\ &= (\mathbf{W}_2^i * \mathbf{R}_2^i - \mathbf{R}_2^i * \mathbf{W}_2^i) + (\mathbf{W}_3^i * \mathbf{R}_{G3}^i - \mathbf{R}_{G3}^i * \mathbf{W}_3^i) \end{aligned}$$

El vector de aceleración del centro de gravedad se define como:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{3,1}^i &= \mathbf{A}_1^i + \mathbf{A}_2^i + \mathbf{A}_{G3}^i = \mathbf{A}_2^i + \mathbf{A}_{G3}^i \\ &= (\mathbf{H}_2^i * \mathbf{R}_2^i - \mathbf{R}_2^i * \mathbf{H}_2^i) - 2(\mathbf{W}_2^i * \mathbf{R}_2^i - \mathbf{R}_2^i * \mathbf{W}_2^i) * \mathbf{W}_2^i + \\ &\quad (\mathbf{H}_3^i * \mathbf{R}_{G3}^i - \mathbf{R}_{G3}^i * \mathbf{H}_3^i) - 2(\mathbf{W}_3^i * \mathbf{R}_{G3}^i - \mathbf{R}_{G3}^i * \mathbf{W}_3^i) * \mathbf{W}_3^i \end{aligned} \quad (3.45)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_2^i &= \dot{\mathbf{q}}_{5i} * \bar{\mathbf{q}}_{5i} \\ \mathbf{H}_2^i &= \ddot{\mathbf{q}}_{5i} * \bar{\mathbf{q}}_{5i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_3^i &= \dot{\mathbf{q}}_{8i} * \bar{\mathbf{q}}_{8i} \\ \mathbf{H}_3^i &= \ddot{\mathbf{q}}_{8i} * \bar{\mathbf{q}}_{8i} \end{aligned}$$

A continuación se procederá a transformar la aceleración $\mathbf{A}_{3,1}^i$, ec.(3.45), expresada en la base inercial, para expresarla en la base local $\underline{\mathbf{e}}_j^{8i}$. La transformación se hará para cada uno de los elementos $\mathbf{W}_2^i, \mathbf{H}_2^i, \mathbf{R}_2^i, \mathbf{W}_3^i, \mathbf{H}_3^i, \mathbf{R}_{G3}^i$.

Transformando \mathbf{W}_2^i

Expresado en la base inercial:

$$\mathbf{W}_2^i = \dot{\mathbf{q}}_{5i} * \bar{\mathbf{q}}_{5i}$$

Donde:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{q}}_{5i} &= \bar{\mathbf{p}}_{5i} * \bar{\mathbf{p}}_{4i} * \bar{\mathbf{p}}_{2i} \\ \dot{\mathbf{q}}_{5i} &= \mathbf{p}_{2i} * \mathbf{p}_{4i} * \dot{\mathbf{p}}_{5i}\end{aligned}$$

Expresado en la base $\underline{\mathbf{e}}_j^{8i}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{W}_{2,8}^i &= \rho(\bar{\mathbf{q}}_{8i}, \mathbf{W}_2^i) = \bar{\mathbf{q}}_{8i} * \left(\dot{\mathbf{q}}_{5i} * \bar{\mathbf{q}}_{5i} \right) * \mathbf{q}_{8i} \\ \mathbf{q}_{8i} &= \mathbf{q}_{5i} * \mathbf{p}_{7i} * \mathbf{p}_{8i} \\ \bar{\mathbf{q}}_{8i} &= \bar{\mathbf{p}}_{8i} * \bar{\mathbf{p}}_{7i} * \bar{\mathbf{q}}_{5i}\end{aligned}\tag{3.46}$$

Donde:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{q}}_{8i} * \dot{\mathbf{q}}_{5i} &= \bar{\mathbf{p}}_{8i} * \bar{\mathbf{p}}_{7i} * \bar{\mathbf{q}}_{5i} * \left(\mathbf{p}_{2i} * \mathbf{p}_{4i} * \dot{\mathbf{p}}_{5i} \right) \\ &= \bar{\mathbf{p}}_{8i} * \bar{\mathbf{p}}_{7i} * \left(\bar{\mathbf{p}}_{5i} * \bar{\mathbf{p}}_{4i} * \bar{\mathbf{p}}_{2i} \right) * \left(\mathbf{p}_{2i} * \mathbf{p}_{4i} * \dot{\mathbf{p}}_{5i} \right) \\ &= \bar{\mathbf{p}}_{8i} * \bar{\mathbf{p}}_{7i} * \left(\bar{\mathbf{p}}_{5i} * \dot{\mathbf{p}}_{5i} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{q}}_{5i} * \mathbf{q}_{8i} &= \bar{\mathbf{q}}_{5i} * \left(\mathbf{q}_{5i} * \mathbf{p}_{7i} * \mathbf{p}_{8i} \right) \\ &= \mathbf{p}_{7i} * \mathbf{p}_{8i}\end{aligned}$$

Sustituyendo en ec.(3.46), las relaciones anteriores, tal que se cumple $\bar{\mathbf{p}}_{5i} * \dot{\mathbf{p}}_{5i} = \dot{\mathbf{p}}_{5i} * \bar{\mathbf{p}}_{5i}$ (por la conmutatividad de cuaterniones con el mismo eje de giro) y empleando ec.(3.37):

$$\begin{aligned}\mathbf{W}_{2,8}^i &= \bar{\mathbf{p}}_{8i} * \bar{\mathbf{p}}_{7i} * \left(\dot{\mathbf{p}}_{5i} * \bar{\mathbf{p}}_{5i} \right) * \mathbf{p}_{7i} * \mathbf{p}_{8i} \\ &= \bar{\mathbf{p}}_{78i} * \mathbf{W}_{2,5}^i * \mathbf{p}_{78i} \\ \mathbf{W}_{2,8}^i &= \rho(\bar{\mathbf{p}}_{78i}, \mathbf{W}_{2,5}^i)\end{aligned}\tag{3.47}$$

Donde $\mathbf{p}_{78i} = \mathbf{p}_{7i} * \mathbf{p}_{8i}$.

Transformando \mathbf{H}_2^i

De la misma manera, expresado en la base $\underline{\mathbf{e}}_j^{8i}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_{2,8}^i &= \rho(\bar{\mathbf{q}}_{8i}, \mathbf{H}_2^i) \\ &= \rho(\bar{\mathbf{p}}_{78i}, \mathbf{H}_{2,5}^i)\end{aligned}\quad (3.48)$$

Transformando \mathbf{R}_2^i

De la misma manera, expresado en la base inercial:

$$\mathbf{R}_2^i = d_6^i \underline{\mathbf{e}}_2^{5i} = d_6^i \rho(\mathbf{q}_{5i}, \underline{\mathbf{e}}_2)$$

Expresado en la base $\underline{\mathbf{e}}_j^{8i}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_{2,8}^i &= \rho(\bar{\mathbf{q}}_{8i}, \mathbf{R}_2^i) \\ &= \rho(\bar{\mathbf{q}}_{8i}, d_6^i \underline{\mathbf{e}}_2^{5i}) \\ &= d_6^i \rho(\bar{\mathbf{p}}_{78i}, \underline{\mathbf{e}}_2) \\ \mathbf{R}_{2,8}^i &= d_6^i \underline{\mathbf{b}}_2^{8i}\end{aligned}\quad (3.49)$$

Donde $\underline{\mathbf{b}}_2^{8i} = \rho(\bar{\mathbf{p}}_{78i}, \underline{\mathbf{e}}_2)$.

Transformando \mathbf{W}_3^i

Expresado en la base inercial:

$$\mathbf{W}_3^i = \dot{\mathbf{q}}_{8i} * \bar{\mathbf{q}}_{8i}$$

Expresado en la base $\underline{\mathbf{e}}_j^{8i}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{W}_{3,8}^i &= \rho(\bar{\mathbf{q}}_{8i}, \mathbf{W}_3^i) = \bar{\mathbf{q}}_{8i} * \left(\dot{\mathbf{q}}_{8i} * \bar{\mathbf{q}}_{8i} \right) * \mathbf{q}_{8i} \\ &= \bar{\mathbf{q}}_{8i} * \dot{\mathbf{q}}_{8i}\end{aligned}\quad (3.50)$$

Donde:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{q}}_{8i} * \dot{\mathbf{q}}_{8i} &= \bar{\mathbf{p}}_{8i} * \bar{\mathbf{p}}_{7i} * \bar{\mathbf{q}}_{5i} * \left(\dot{\mathbf{q}}_{5i} * \mathbf{p}_{7i} * \mathbf{p}_{8i} + \mathbf{q}_{5i} * \dot{\mathbf{p}}_{7i} * \mathbf{p}_{8i} + \mathbf{q}_{5i} * \mathbf{p}_{7i} * \dot{\mathbf{p}}_{8i} \right) \\ &= \bar{\mathbf{p}}_{8i} * \bar{\mathbf{p}}_{7i} * \left(\bar{\mathbf{q}}_{5i} * \dot{\mathbf{q}}_{5i} \right) * \mathbf{p}_{7i} * \mathbf{p}_{8i} + \\ &\quad \bar{\mathbf{p}}_{8i} * \left(\bar{\mathbf{p}}_{7i} * \dot{\mathbf{p}}_{7i} \right) * \mathbf{p}_{8i} + \\ &\quad \bar{\mathbf{p}}_{8i} * \dot{\mathbf{p}}_{8i} \\ \bar{\mathbf{q}}_{8i} * \dot{\mathbf{q}}_{8i} &= \bar{\mathbf{p}}_{78i} * \left(\bar{\mathbf{q}}_{5i} * \dot{\mathbf{q}}_{5i} \right) * \mathbf{p}_{78i} + \\ &\quad \bar{\mathbf{p}}_{8i} * \left(\dot{\mathbf{p}}_{7i} * \bar{\mathbf{p}}_{7i} \right) * \mathbf{p}_{8i} + \\ &\quad \bar{\mathbf{p}}_{8i} * \dot{\mathbf{p}}_{8i}\end{aligned}\quad (3.51)$$

Donde:

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{q}}_{5i} * \dot{\bar{\mathbf{q}}}_{5i} &= \bar{\mathbf{p}}_{5i} * \bar{\mathbf{p}}_{4i} * \bar{\mathbf{p}}_{2i} * \left(\mathbf{p}_{2i} * \mathbf{p}_{4i} * \dot{\mathbf{p}}_{5i} \right) \\
&= \bar{\mathbf{p}}_{5i} * \dot{\bar{\mathbf{p}}}_{5i} \\
&= \dot{\bar{\mathbf{p}}}_{5i} * \bar{\mathbf{p}}_{5i} \\
&= \mathbf{W}_{2,5}^i
\end{aligned} \tag{3.52}$$

En la expresión anterior se utilizó la ec.(3.37). Finalmente sustituyendo ecs.(3.51) y (3.52) en ec.(3.50) se tiene:

$$\begin{aligned}
\mathbf{W}_{3,8}^i &= \bar{\mathbf{p}}_{78i} * \mathbf{W}_{2,5}^i * \mathbf{p}_{78i} + \\
&\quad \bar{\mathbf{p}}_{8i} * \left(\dot{\bar{\mathbf{p}}}_{7i} * \bar{\mathbf{p}}_{7i} \right) * \mathbf{p}_{8i} + \\
&\quad \bar{\mathbf{p}}_{8i} * \dot{\bar{\mathbf{p}}}_{8i}
\end{aligned} \tag{3.53}$$

Transformando \mathbf{H}_3^i

De la misma manera, expresado en la base $\underline{\mathbf{e}}_j^{8i}$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}_{3,8}^i &= \rho(\bar{\mathbf{q}}_{8i}, \mathbf{H}_3^i) \\
&= \bar{\mathbf{q}}_{8i} * \mathbf{H}_3^i * \mathbf{q}_{8i} \\
&= \bar{\mathbf{q}}_{8i} * \left(\ddot{\bar{\mathbf{q}}}_{8i} * \bar{\mathbf{q}}_{8i} \right) * \mathbf{q}_{8i} \\
&= \bar{\mathbf{q}}_{8i} * \ddot{\bar{\mathbf{q}}}_{8i}
\end{aligned} \tag{3.54}$$

Transformando \mathbf{R}_{G3}^i

De la misma manera, expresado en la base inercial:

$$\mathbf{R}_{G3}^i = d_{G3}^i \mathbf{e}_2^{8i} = d_{G3}^i \rho(\mathbf{q}_{8i}, \mathbf{e}_2)$$

Expresado en la base $\underline{\mathbf{e}}_j^{8i}$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_{G3,8}^i &= \rho(\bar{\mathbf{q}}_{8i}, \mathbf{R}_{G3}^i) \\
&= \bar{\mathbf{q}}_{8i} * \mathbf{R}_{G3}^i * \mathbf{q}_{8i} \\
&= \bar{\mathbf{q}}_{8i} * \left(d_{G3}^i \mathbf{q}_{8i} * \mathbf{e}_2 * \bar{\mathbf{q}}_{8i} \right) * \mathbf{q}_{8i} \\
\mathbf{R}_{G3,8}^i &= d_{G3}^i \mathbf{e}_2
\end{aligned} \tag{3.55}$$

Finalmente se define la aceleración del centro de gravedad del cuerpo 3i en la base local $\underline{\mathbf{e}}_j^{8i}$ como:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_{3,8}^i &= \left(\mathbf{H}_{2,8}^i * \mathbf{R}_{2,8}^i - \mathbf{R}_{2,8}^i * \mathbf{H}_{2,8}^i \right) - 2 \left(\mathbf{W}_{2,8}^i * \mathbf{R}_{2,8}^i - \mathbf{R}_{2,8}^i * \mathbf{W}_{2,8}^i \right) * \mathbf{W}_{2,8}^i + \\
&\quad \left(\mathbf{H}_{3,8}^i * \mathbf{R}_{G3,8}^i - \mathbf{R}_{G3,8}^i * \mathbf{H}_{3,8}^i \right) - 2 \left(\mathbf{W}_{3,8}^i * \mathbf{R}_{G3,8}^i - \mathbf{R}_{G3,8}^i * \mathbf{W}_{3,8}^i \right) * \mathbf{W}_{3,8}^i
\end{aligned} \tag{3.56}$$

3.10.2. Transformando la Aceleración del Centro de Gravedad, la Velocidad Angular y Aceleración Angular del Cuerpo 3i al Espacio \mathcal{R}^3

La aceleración de centro de gravedad, la velocidad angular y la aceleración angular, necesitan sustituirse en las ecuaciones dinámicas (3.5) y (3.6). Su definición en \mathcal{R}^3 a partir de su definición paramétrica en \mathcal{R}^4 se hace de la manera siguiente:

Aceleración del Centro de Gravedad

A partir de la ec.(3.56), se obtiene la aceleración del centro de gravedad $\mathbf{a}_{3,8}^i \in \mathcal{R}^3$:

$$\mathbf{a}_{3,8}^i = \mathbf{T}_V (\mathbf{A}_{3,8}^i) \quad (3.57)$$

Velocidad Angular

Según ec.(3.50), la velocidad angular $\mathbf{W}_{3,8}^i \in \mathcal{R}^4$, se define como:

$$\mathbf{W}_{3,8}^i = \bar{\mathbf{q}}_{8i} * \dot{\mathbf{q}}_{8i} \quad (3.50)$$

Según **Definición 2 (Capítulo 1)**, la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}_{3,8}^i \in \mathcal{R}^3$, se define como:

$$\boldsymbol{\omega}_{3,8}^i = \mathbf{T}_V (\underline{\boldsymbol{\omega}}_{3,8}^i) = \mathbf{T}_V (2 \mathbf{W}_{3,8}^i) = \mathbf{T}_V (2 \bar{\mathbf{q}}_{8i} * \dot{\mathbf{q}}_{8i}) \quad (3.58)$$

Aceleración Angular

Derivando respecto al tiempo ec.(3.50), se obtiene la aceleración angular $\dot{\mathbf{W}}_{3,8}^i \in \mathcal{R}^4$:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{W}}_{3,8}^i &= \dot{\bar{\mathbf{q}}}_{8i} * \dot{\mathbf{q}}_{8i} + \bar{\mathbf{q}}_{8i} * \ddot{\mathbf{q}}_{8i} \\ &= \bar{\mathbf{q}}_{8i} * \ddot{\mathbf{q}}_{8i} + \dot{\bar{\mathbf{q}}}_{8i} * \dot{\mathbf{q}}_{8i} \\ &= \mathbf{H}_{3,8}^i + \dot{\bar{\mathbf{q}}}_{8i} * \dot{\mathbf{q}}_{8i} \end{aligned} \quad (3.59)$$

Según **Definición 3 (Capítulo 1)**, la aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}_{3,8}^i \in \mathcal{R}^3$, se define como:

$$\boldsymbol{\alpha}_{3,8}^i = \mathbf{T}_V (\underline{\boldsymbol{\alpha}}_{3,8}^i) = \mathbf{T}_V (2 \dot{\mathbf{W}}_{3,8}^i) = \mathbf{T}_V (2 (\mathbf{H}_{3,8}^i + \dot{\bar{\mathbf{q}}}_{8i} * \dot{\mathbf{q}}_{8i})) \quad (3.60)$$

3.11. Aceleración del Centro de Gravedad, Velocidad y Aceleración Angular de la plataforma móvil

3.11.1. Definiendo la Aceleración del Centro de Gravedad $\mathbf{A}_{p,p}$

El vector de posición, velocidad y aceleración del centro de gravedad de la plataforma móvil se define en la base inercial $\mathbf{e}_j \in \mathcal{R}^4$ como:

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_p &= \begin{pmatrix} 0 & x & y & z \end{pmatrix} \\ \mathbf{V}_p &= \begin{pmatrix} 0 & \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{pmatrix} \\ \mathbf{A}_p &= \begin{pmatrix} 0 & \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (3.61)$$

La aceleración del centro de gravedad de la plataforma móvil en la base local \mathbf{e}_j^p , se define como:

$$\mathbf{A}_{p,p} = \rho(\bar{\mathbf{q}}_p, \mathbf{A}_p) \quad (3.62)$$

El vector de posición del centro de gravedad del cuerpo en la plataforma se define en la base inercial $\mathbf{e}_j \in \mathcal{R}^4$ como:

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_f &= \mathbf{R}_p + \mathbf{R}'_f \\ &= \mathbf{R}_p + l_{fj} \mathbf{e}_j^p\end{aligned}\quad (3.63)$$

Donde $\mathbf{e}_j^p = \rho(\mathbf{q}_p, \mathbf{e}_j)$. El vector de velocidad del centro de gravedad del cuerpo en la plataforma se define como:

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_f &= \mathbf{V}_p + \mathbf{V}'_f \\ &= \mathbf{V}_p + (\mathbf{W}_p * \mathbf{R}'_f - \mathbf{R}'_f * \mathbf{W}_p)\end{aligned}\quad (3.64)$$

El vector de aceleración del centro de gravedad del cuerpo en la plataforma se define como:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_f &= \mathbf{A}_p + \mathbf{A}'_f \\ &= \mathbf{A}_p + (\mathbf{H}_p * \mathbf{R}'_f - \mathbf{R}'_f * \mathbf{H}_p) - 2(\mathbf{W}_p * \mathbf{R}'_f - \mathbf{R}'_f * \mathbf{W}_p) * \mathbf{W}_p\end{aligned}\quad (3.65)$$

A continuación se procederá a transformar la aceleración \mathbf{A}_f , ec.(3.65), expresada en la base inercial, para expresarla en la base local \mathbf{e}_j^p . La transformación se hará para cada uno de los elementos $\mathbf{W}_p, \mathbf{H}_p, \mathbf{R}'_f$.

Transformando $\mathbf{W}_p, \mathbf{H}_p, \mathbf{R}'_f$

$$\begin{aligned}\mathbf{W}_{p,p} &= \rho(\bar{\mathbf{q}}_p, \mathbf{W}_p) = \bar{\mathbf{q}}_p * \mathbf{W}_p * \mathbf{q}_p \\ &= \bar{\mathbf{q}}_p * \left(\dot{\bar{\mathbf{q}}}_p * \bar{\mathbf{q}}_p \right) * \mathbf{q}_p \\ \mathbf{W}_{p,p} &= \bar{\mathbf{q}}_p * \dot{\bar{\mathbf{q}}}_p\end{aligned}\quad (3.66)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_{p,p} &= \rho(\bar{\mathbf{q}}_p, \mathbf{H}_p) = \bar{\mathbf{q}}_p * \mathbf{H}_p * \mathbf{q}_p \\ &= \bar{\mathbf{q}}_p * \left(\ddot{\bar{\mathbf{q}}}_p * \bar{\mathbf{q}}_p \right) * \mathbf{q}_p \\ \mathbf{H}_{p,p} &= \bar{\mathbf{q}}_p * \ddot{\bar{\mathbf{q}}}_p\end{aligned}\quad (3.67)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{R}'_{f,p} &= \rho(\bar{\mathbf{q}}_p, \mathbf{R}'_f) = \bar{\mathbf{q}}_p * \mathbf{R}'_f * \mathbf{q}_p \\ &= \bar{\mathbf{q}}_p * \left(l_{fj} \mathbf{q}_p * \underline{\mathbf{e}}_j * \bar{\mathbf{q}}_p \right) * \mathbf{q}_p \\ \mathbf{R}'_{f,p} &= l_{fj} \underline{\mathbf{e}}_j\end{aligned}\quad (3.68)$$

Finalmente se define la aceleración del centro de gravedad del cuerpo en la plataforma en la base local $\underline{\mathbf{e}}_j^p$ como:

$$\mathbf{A}_{f,p} = \mathbf{A}_{p,p} + (\mathbf{H}_{p,p} * \mathbf{R}'_{f,p} - \mathbf{R}'_{f,p} * \mathbf{H}_{p,p}) - 2(\mathbf{W}_{p,p} * \mathbf{R}'_{f,p} - \mathbf{R}'_{f,p} * \mathbf{W}_{p,p}) * \mathbf{W}_{p,p} \quad (3.69)$$

3.11.2. Transformando la Aceleración del Centro de Gravedad, la Velocidad Angular y Aceleración Angular de la plataforma y el cuerpo sobre el mismo, al Espacio \mathcal{R}^3

La aceleración del centro de gravedad, la velocidad angular y la aceleración angular, necesitan sustituirse en las ecuaciones dinámicas (3.7) y (3.8). Su definición en \mathcal{R}^3 a partir de su definición paramétrica en \mathcal{R}^4 se hace de la manera siguiente:

Aceleración del Centro de Gravedad

A partir de las ecs.(3.62) y (3.69), se obtienen la aceleraciones del centro de gravedad $\mathbf{a}_{p,p}$ y $\mathbf{a}_{f,p} \in \mathcal{R}^3$:

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_{p,p} &= \mathbf{T}_V(\mathbf{A}_{p,p}) \\ \mathbf{a}_{f,p} &= \mathbf{T}_V(\mathbf{A}_{f,p})\end{aligned}\quad (3.70)$$

Velocidad Angular

Según ec.(3.66), la velocidad angular $\mathbf{W}_{p,p} \in \mathcal{R}^4$, se define como:

$$\mathbf{W}_{p,p} = \bar{\mathbf{q}}_p * \dot{\mathbf{q}}_p \quad (3.71)$$

Según **Definición 2 (Capítulo 1)**, la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}_{p,p} \in \mathcal{R}^3$, se define como:

$$\boldsymbol{\omega}_{p,p} = \mathbf{T}_V(\underline{\boldsymbol{\omega}}_{p,p}) = \mathbf{T}_V(2 \mathbf{W}_{p,p}) = \mathbf{T}_V\left(2 \bar{\mathbf{q}}_p * \dot{\mathbf{q}}_p\right) \quad (3.72)$$

Aceleración Angular

Derivando respecto al tiempo ec.(3.71), se obtiene la aceleración angular $\dot{\mathbf{W}}_{p,p} \in \mathcal{R}^4$:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{W}}_{p,p} &= \dot{\bar{\mathbf{q}}}_p * \dot{\mathbf{q}}_p + \bar{\mathbf{q}}_p * \ddot{\mathbf{q}}_p \\ &= \bar{\mathbf{q}}_p * \ddot{\mathbf{q}}_p + \dot{\bar{\mathbf{q}}}_p * \dot{\mathbf{q}}_p \\ &= \mathbf{H}_{p,p} + \dot{\bar{\mathbf{q}}}_p * \dot{\mathbf{q}}_p \end{aligned} \quad (3.73)$$

Según **Definición 3 (Capítulo 1)**, la aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}_{p,p} \in \mathcal{R}^3$, se define como:

$$\boldsymbol{\alpha}_{p,p} = \mathbf{T}_V(\underline{\boldsymbol{\alpha}}_{p,p}) = \mathbf{T}_V\left(2 \dot{\mathbf{W}}_{p,p}\right) = \mathbf{T}_V\left(2 \left(\mathbf{H}_{p,p} + \dot{\bar{\mathbf{q}}}_p * \dot{\mathbf{q}}_p\right)\right) \quad (3.74)$$

3.12. Gráficas de Torques, Fuerzas y Momentos

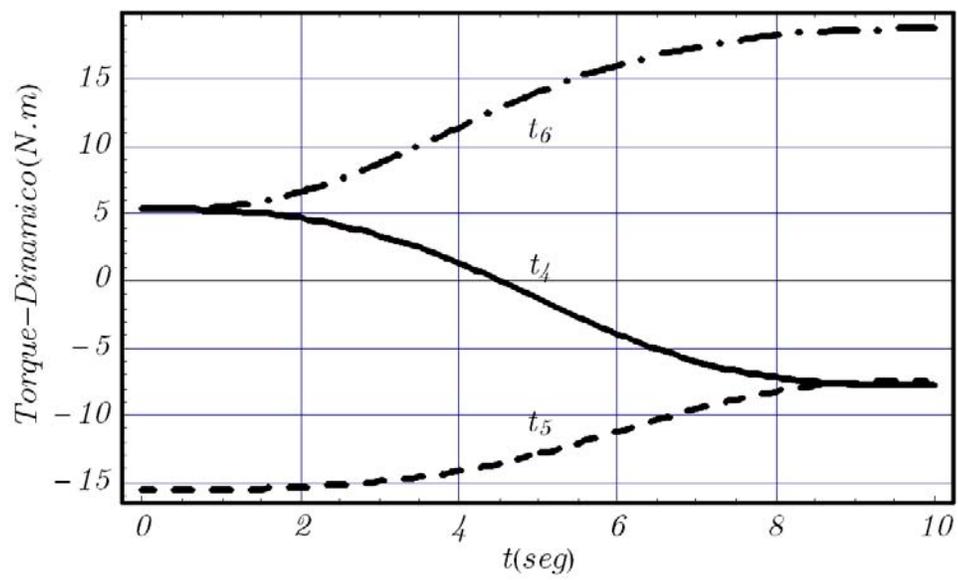
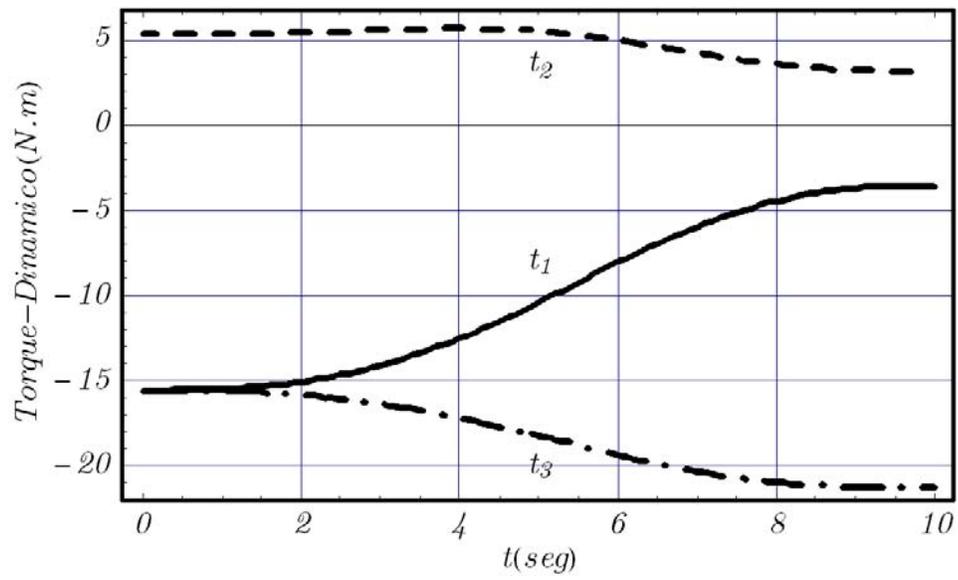
En esta sección se muestra la solución de las ecuaciones dinámicas, mediante las gráficas de torques, fuerzas y momentos que la plataforma paralela genera al seguir la trayectoria descrita en el **Apéndice B**, para un tiempo de 10 segundos. Los datos utilizados para $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ son:

$l_a^i =$	0.075 m	$l_c^i =$	0.15 m	$d_3^i =$	0.15 m
$l_b^i =$	0.075	$l_d^i =$	0.15	$d_6^i =$	0.15
$m_2^i =$	2 kg	$m_3^i =$	3 kg	$d_{G2}^i =$	0.075
				$d_{G3}^i =$	0.15
$l_e^i =$	0.15 m				
$l_{t1} =$	0 m	$l_{f1} =$	0 m		
$l_{t2} =$	0	$l_{f2} =$	0		
$l_{t3} =$	0.15	$l_{f3} =$	0.075		
$m_p =$	4 kg	$m_c =$	5 kg		

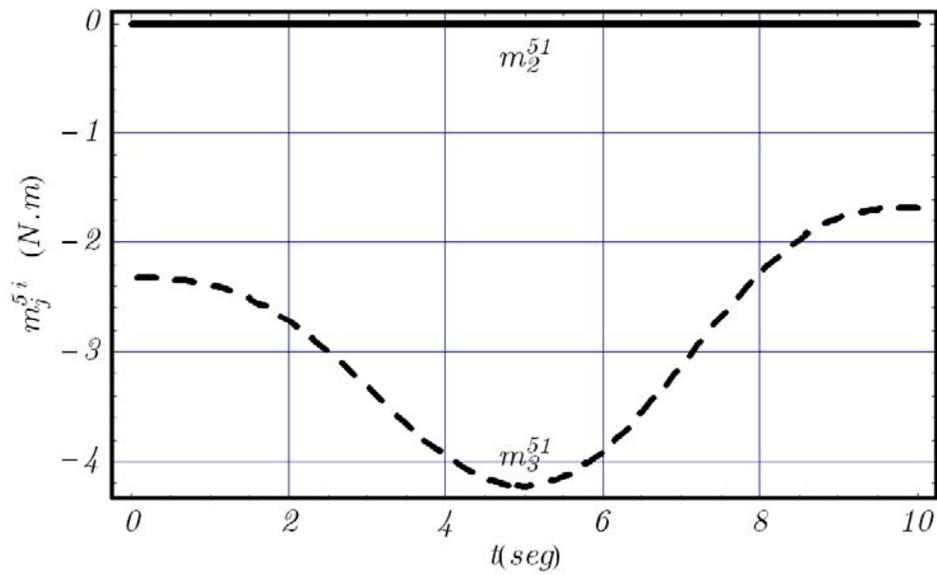
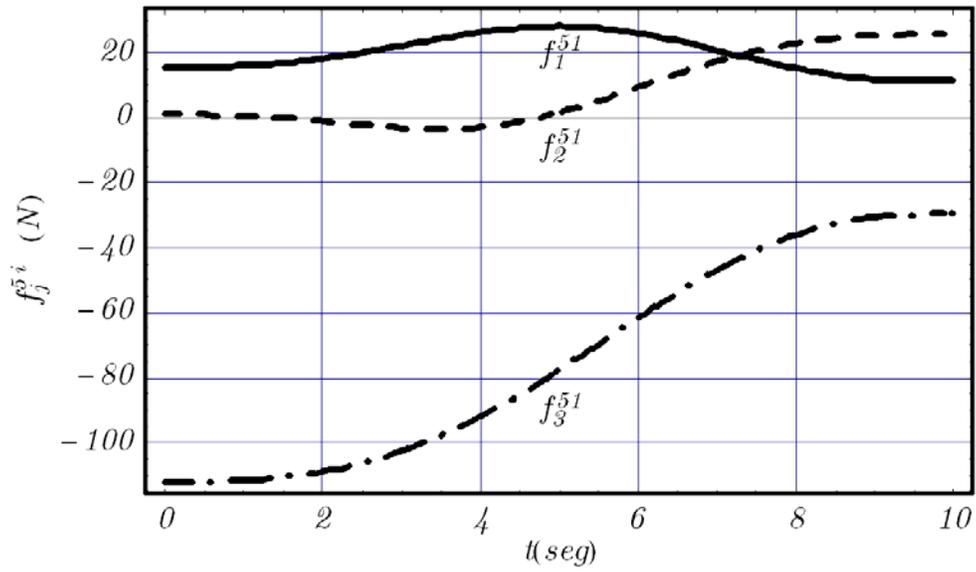
$$\begin{aligned}
 \mathbf{I}_{2,5}^i &= \begin{bmatrix} 1 \times 10^{-4} & 0 & 0 \\ 0 & 3.8 \times 10^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & 3.8 \times 10^{-3} \end{bmatrix} \text{ kg.m}^2 \\
 \mathbf{I}_{3,8}^i &= \begin{bmatrix} 1.5 \times 10^{-4} & 0 & 0 \\ 0 & 2.2575 \times 10^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 2.2575 \times 10^{-2} \end{bmatrix} \\
 \mathbf{I}_{p,p} &= \begin{bmatrix} 1 \times 10^{-2} & -4.5 \times 10^{-2} & -5.6 \times 10^{-2} \\ -4.5 \times 10^{-2} & 3.8 \times 10^{-2} & -5.7 \times 10^{-1} \\ -5.6 \times 10^{-2} & -5.7 \times 10^{-1} & 3.8 \times 10^{-2} \end{bmatrix} \\
 \mathbf{I}_{c,p} &= \begin{bmatrix} 2.5 \times 10^{-3} & 0 & 0 \\ 0 & 5 \times 10^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & 5 \times 10^{-3} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

A continuación se muestran las gráficas de los torques impulsores y las fuerzas y momentos de reacción en cada cadena cinemática.

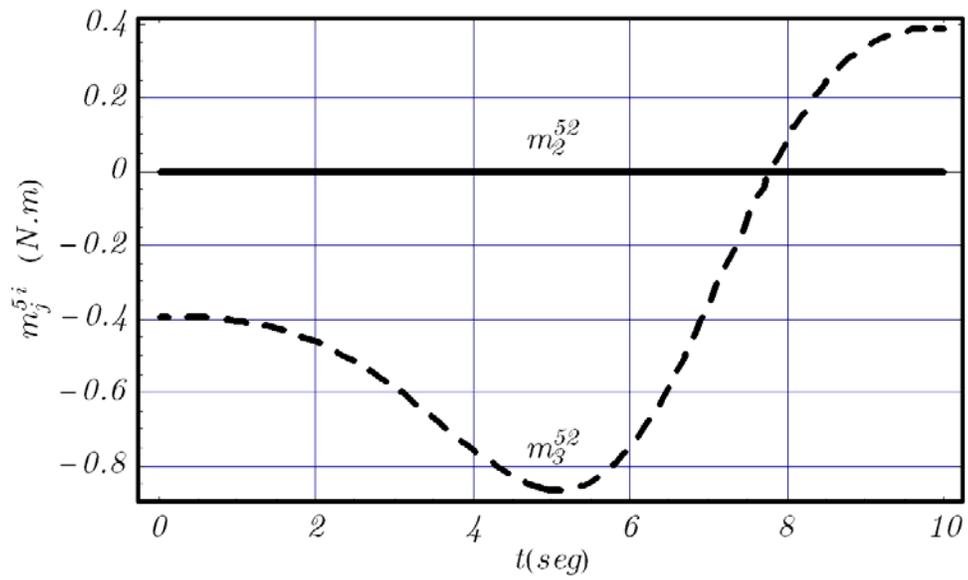
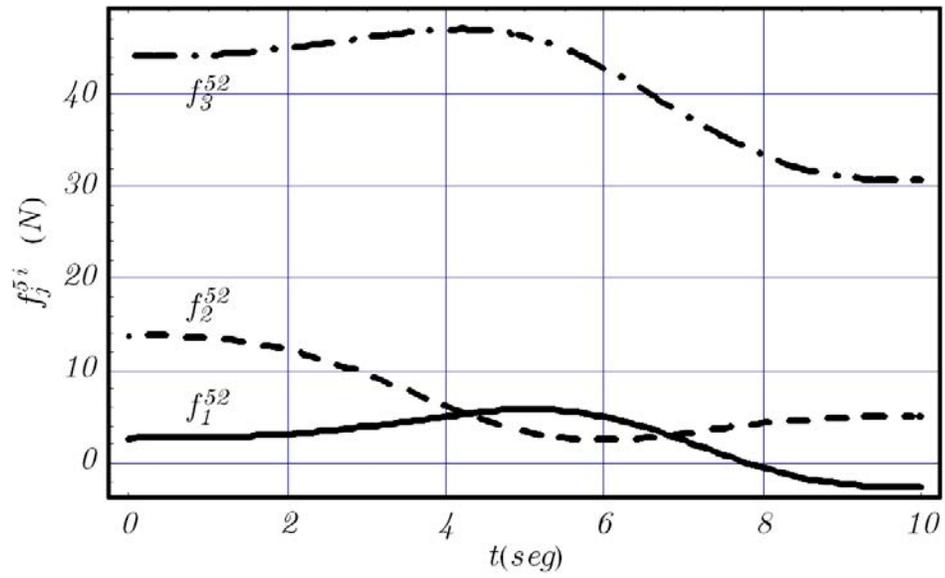
Torques de las 6 cadenas



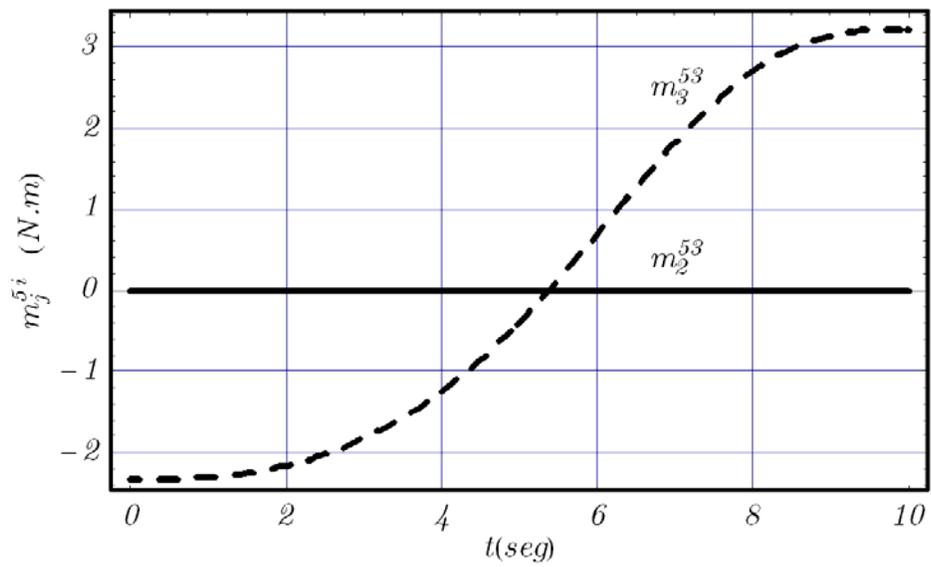
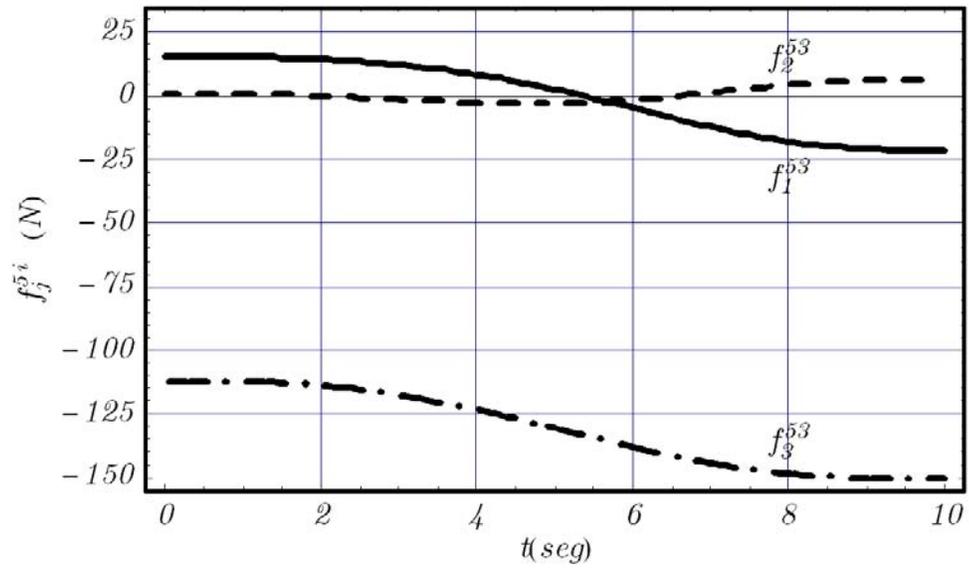
Componentes de Fuerzas y Momentos en Juntas Rotacionales
Cadena Cinemática 1



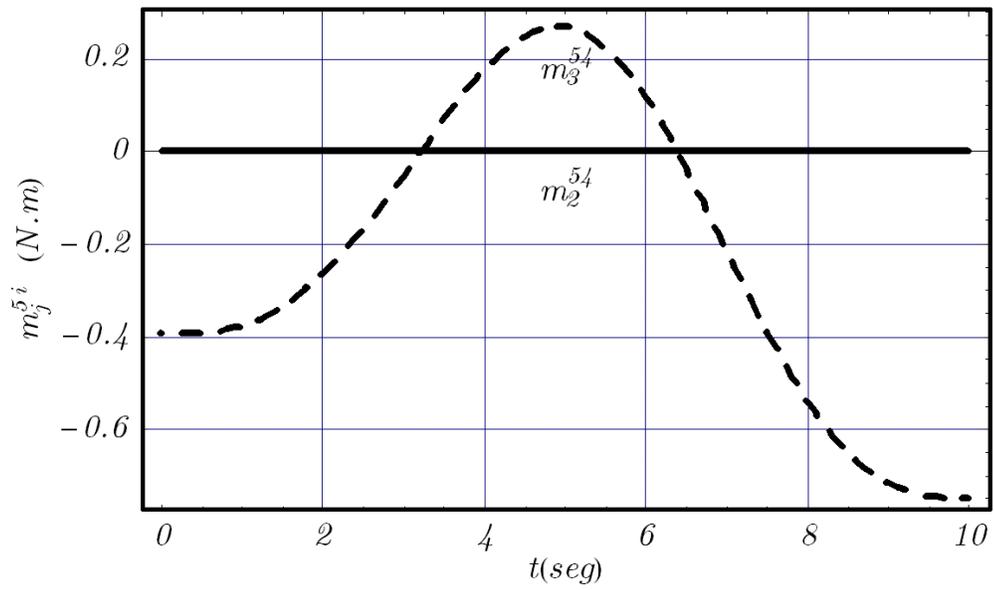
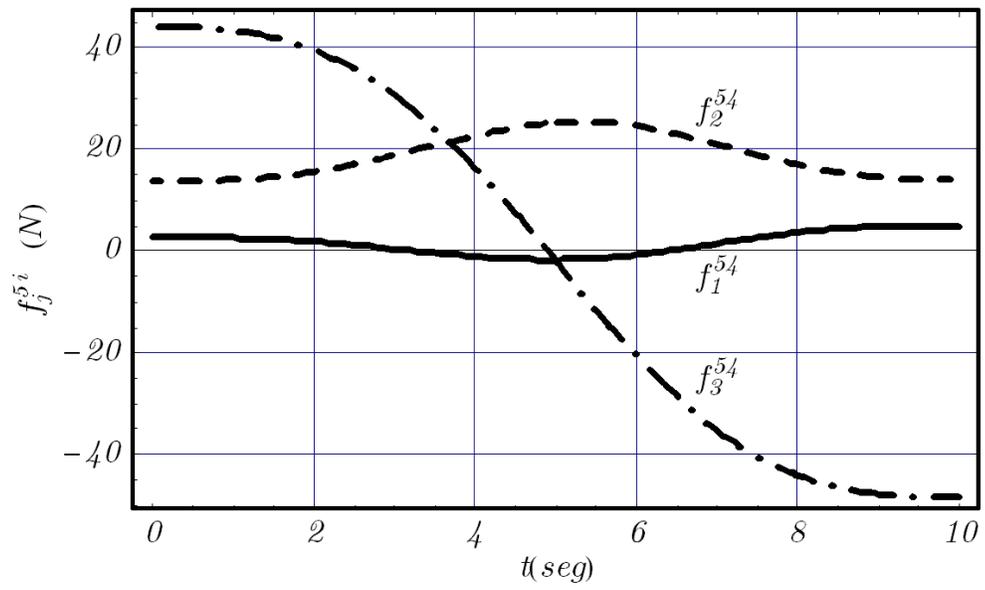
Cadena Cinemática 2



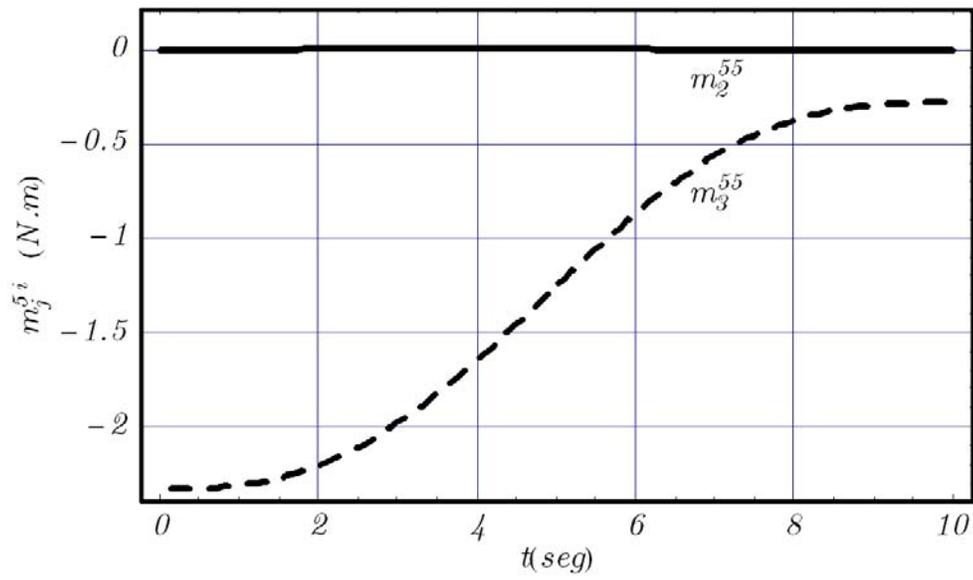
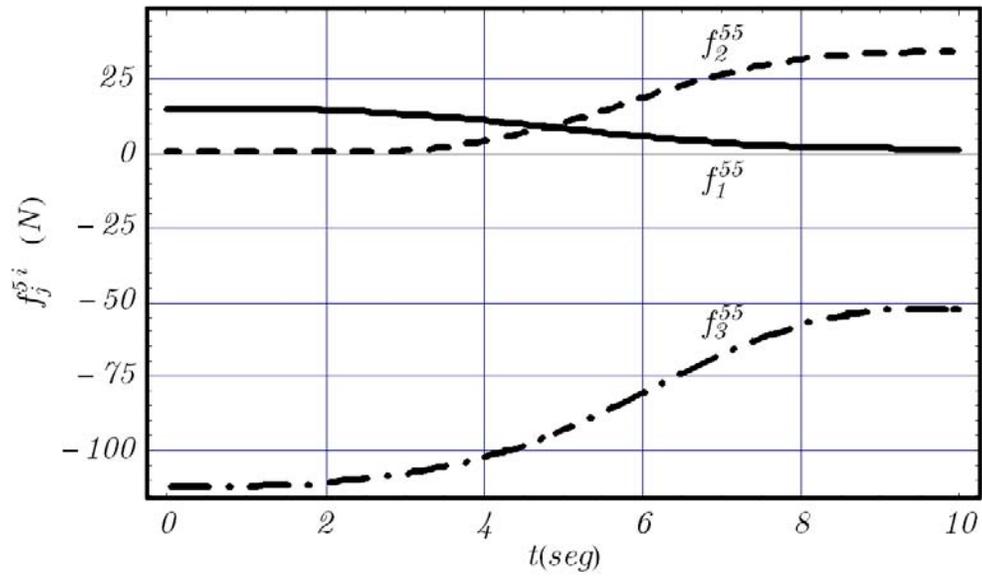
Cadena Cinemática 3



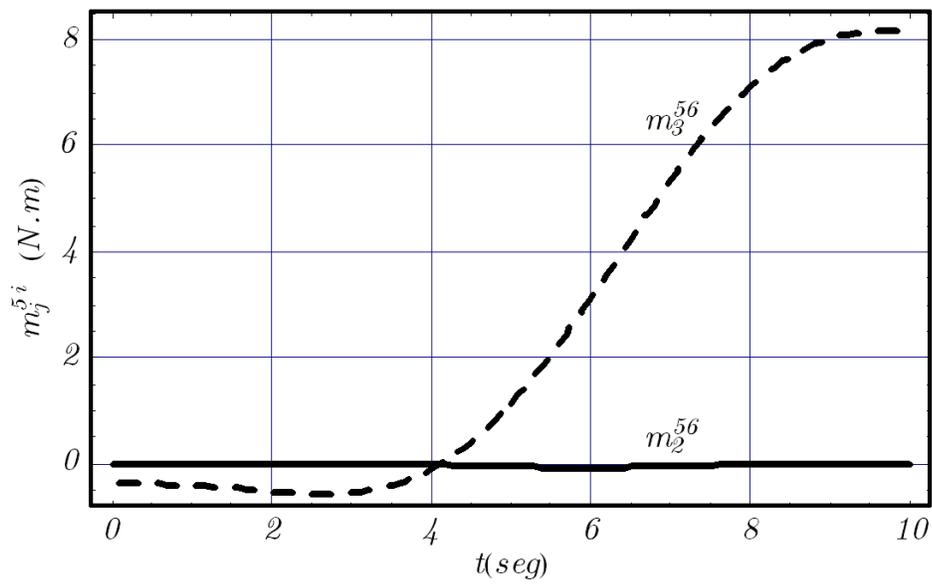
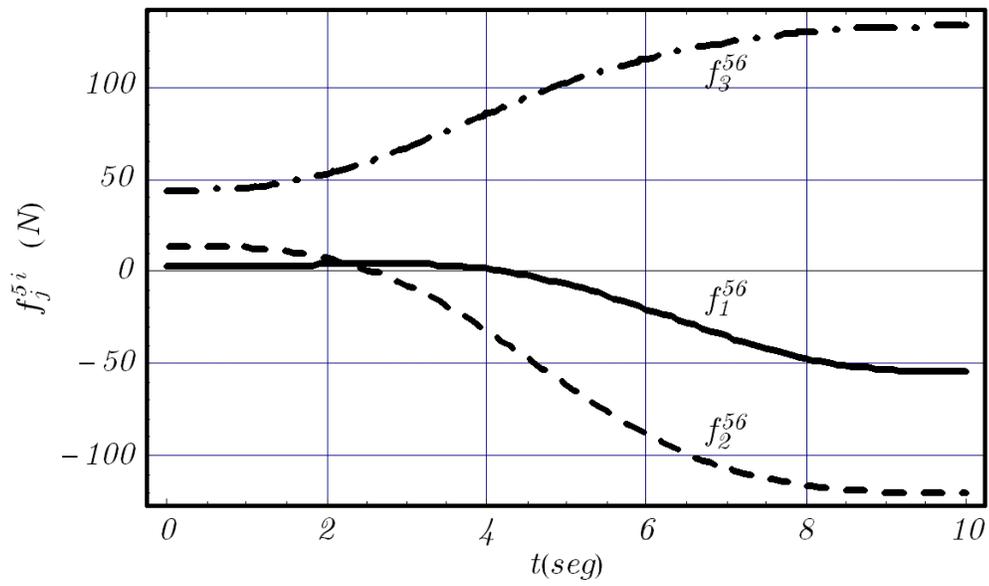
Cadena Cinemática 4



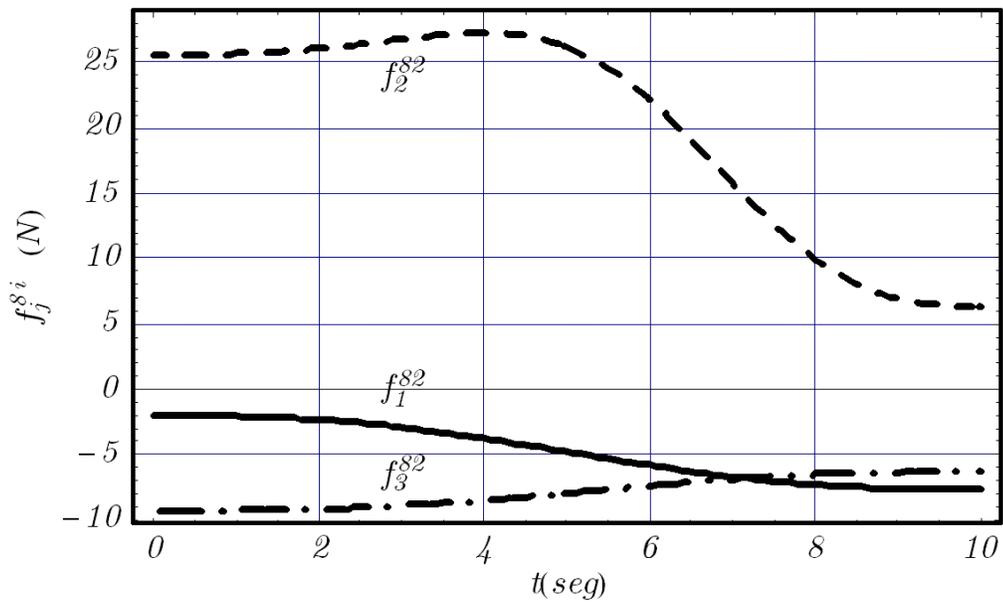
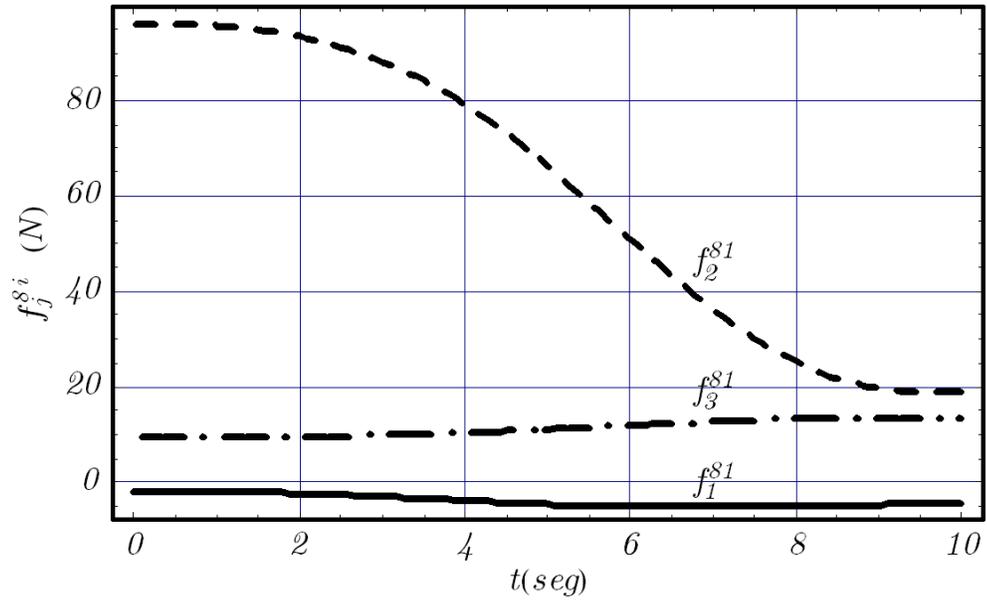
Cadena Cinemática 5

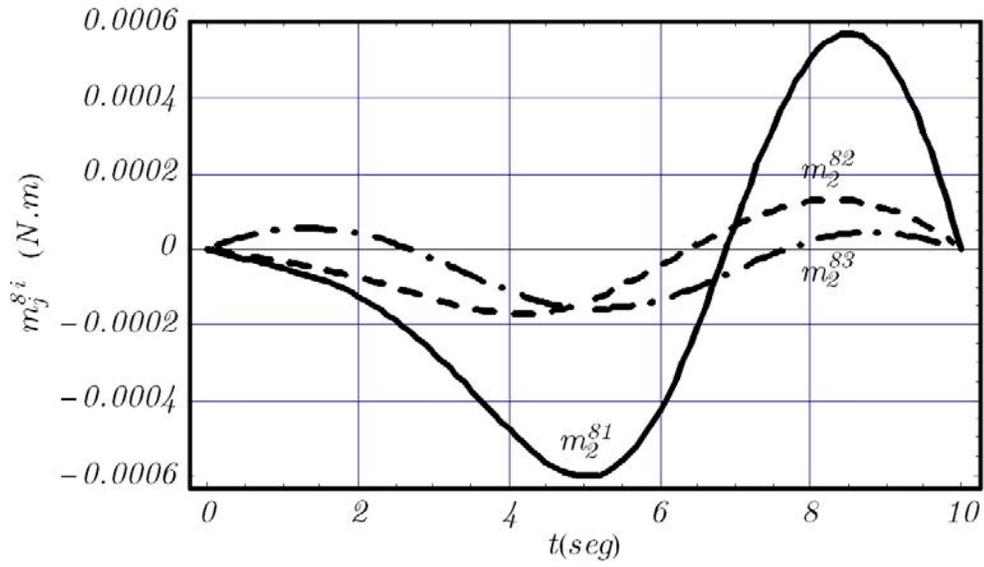
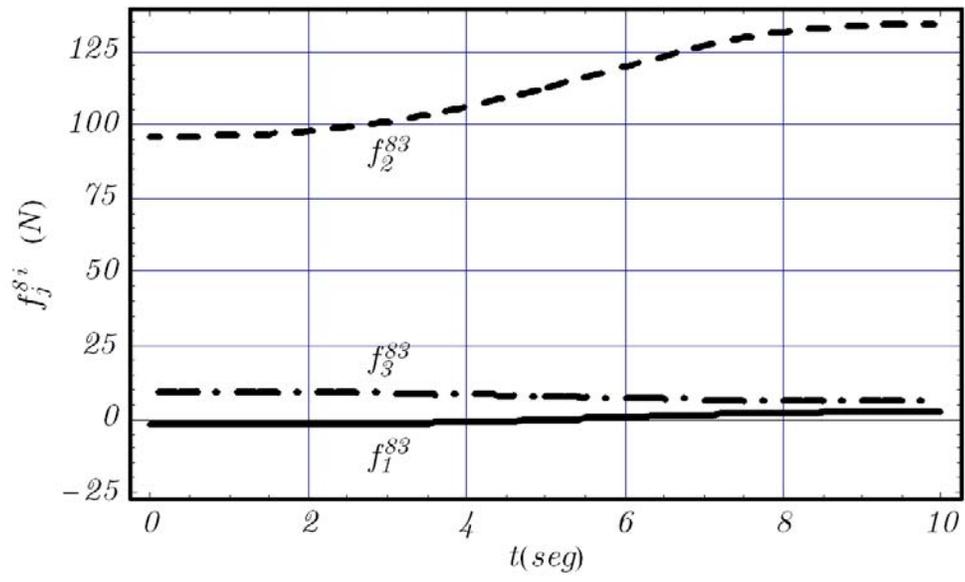


Cadena Cinemática 6

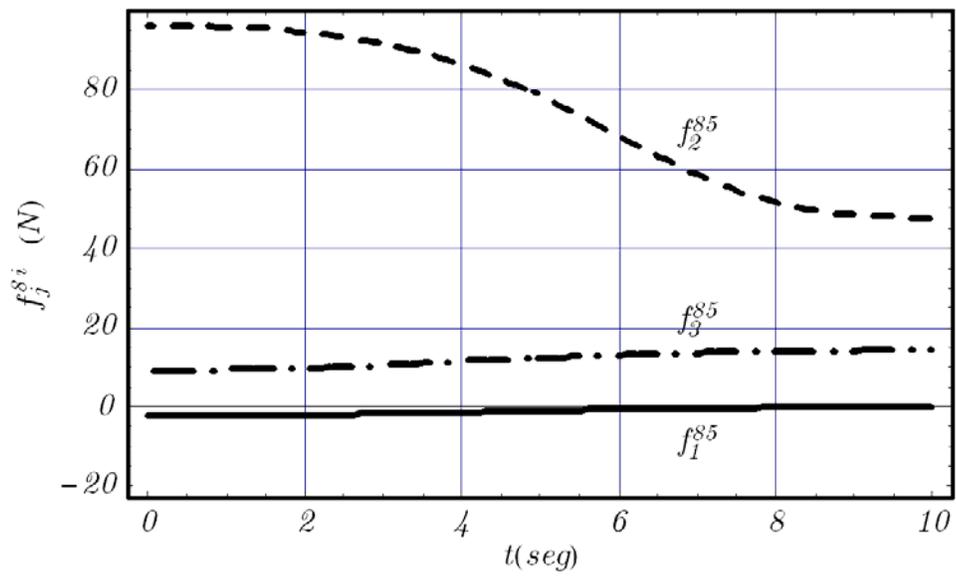
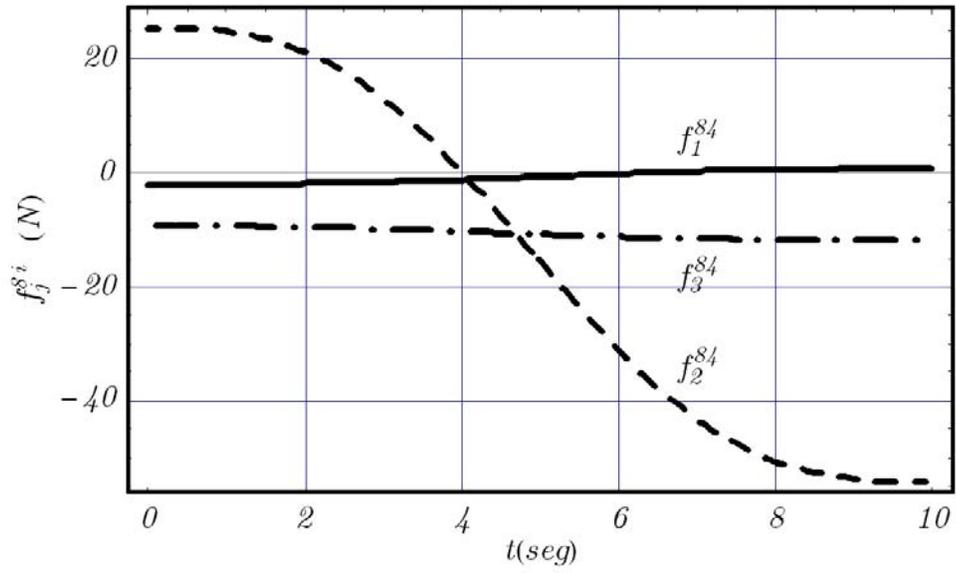


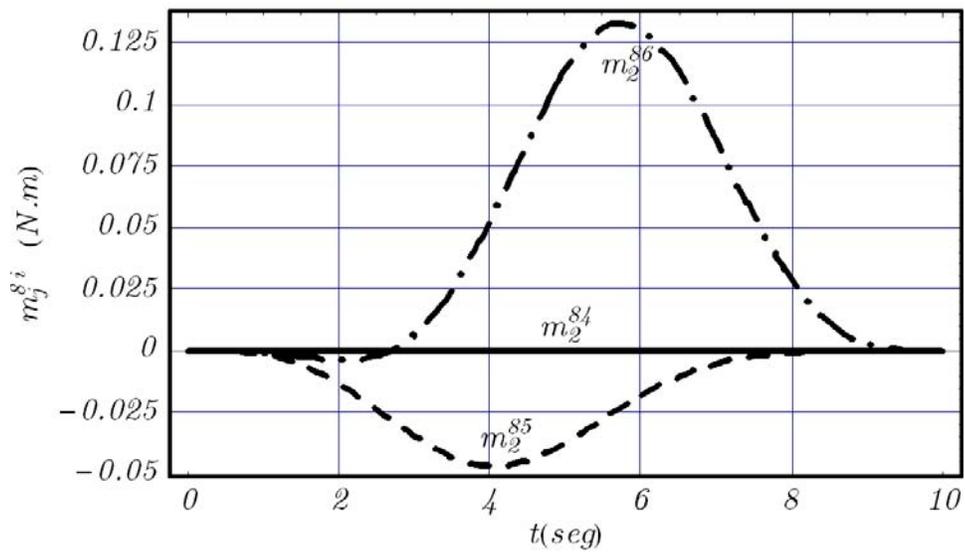
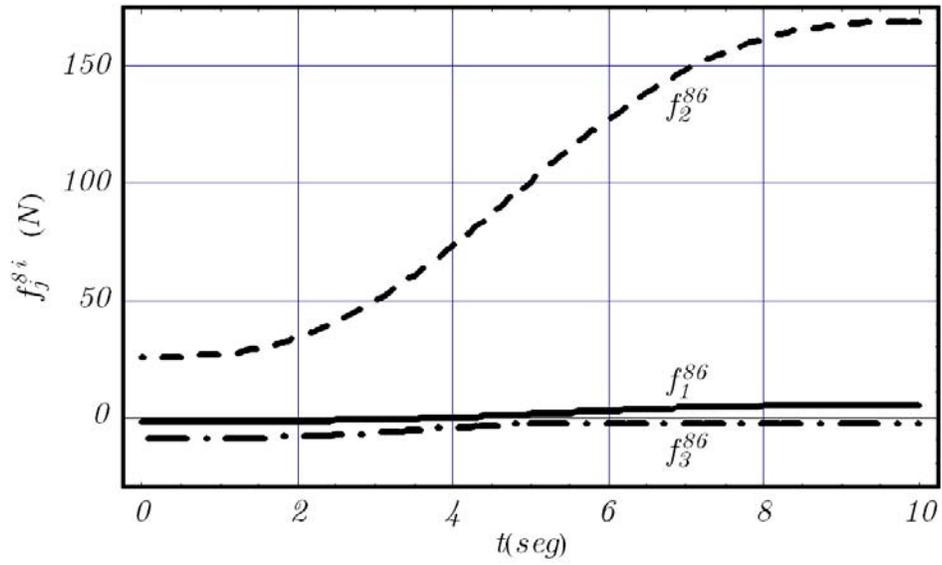
Componentes de Fuerzas y Momentos en Juntas Universales
Cadenas Cinemáticas 1,2,3



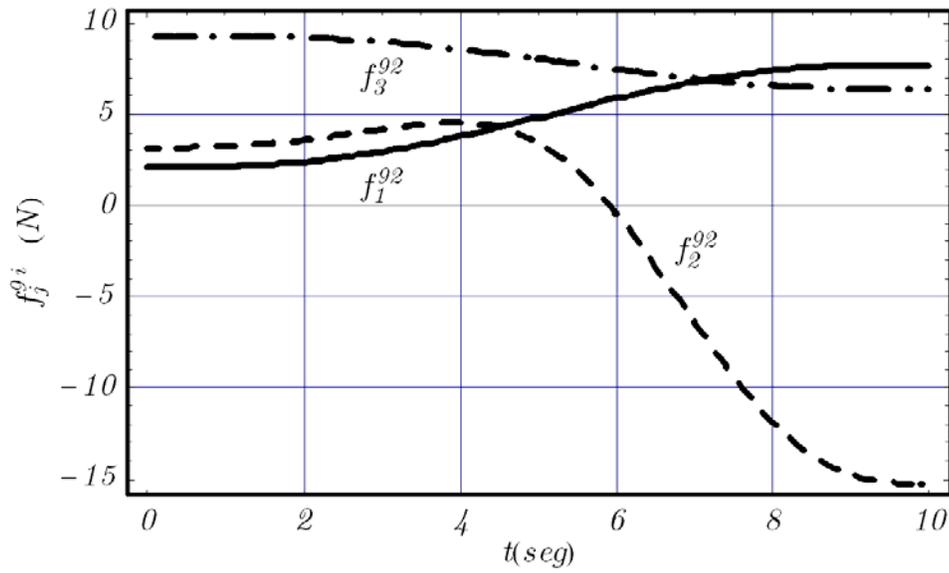
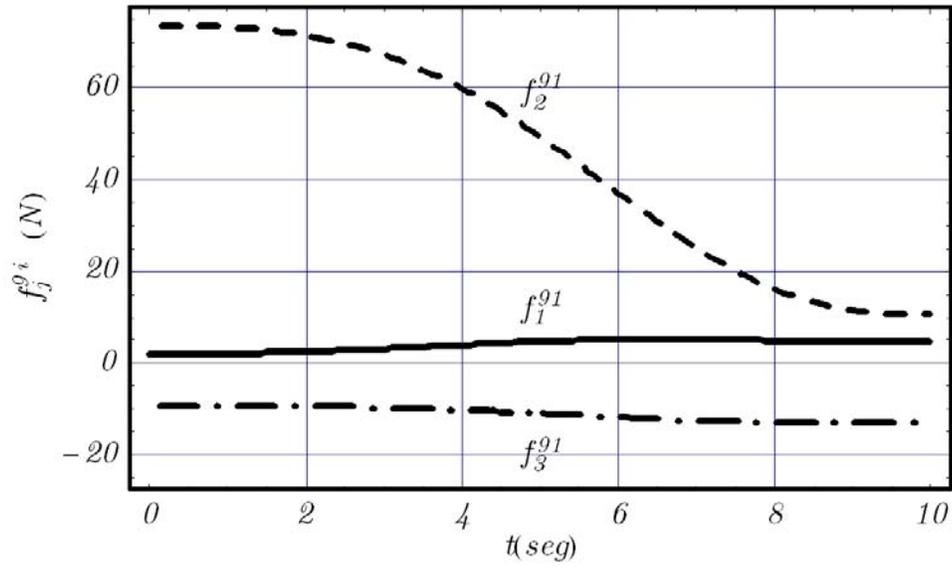


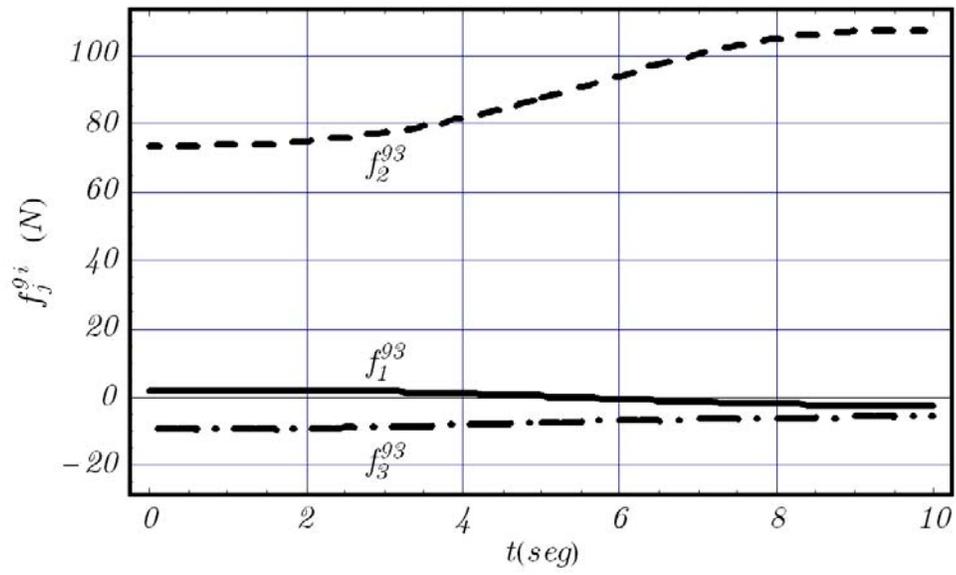
Cadenas Cinemáticas 4,5,6



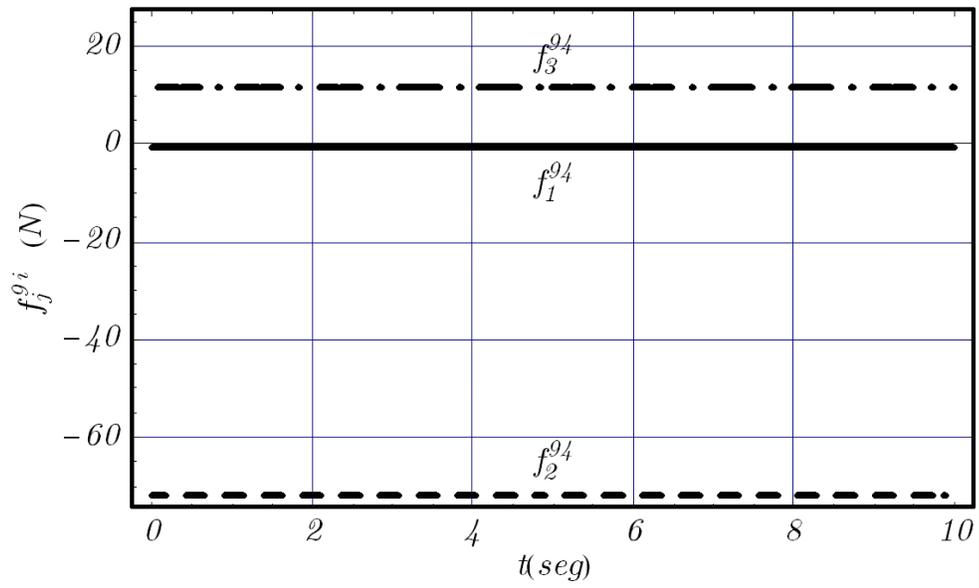


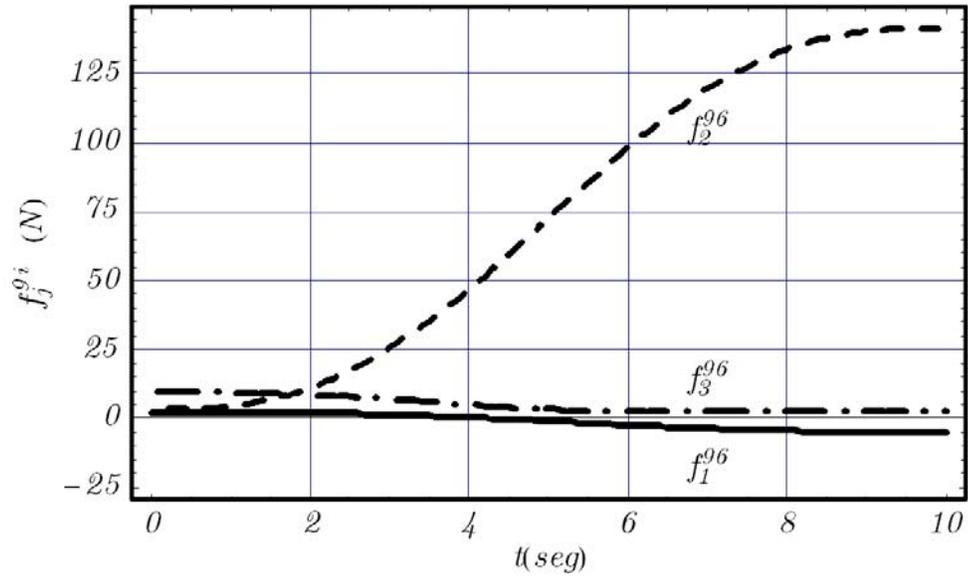
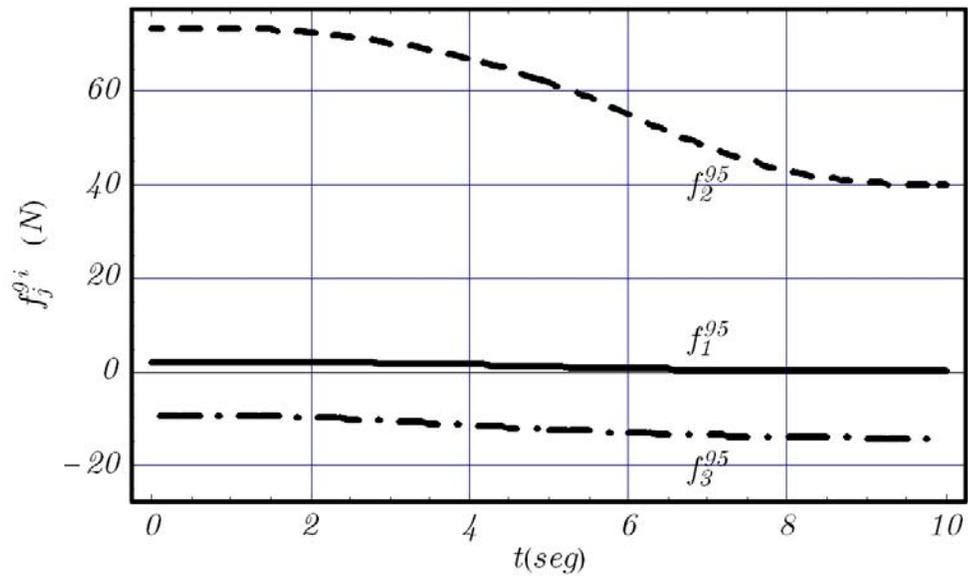
Componentes de Fuerzas en Juntas Esféricas
Cadenas Cinemáticas 1,2,3





Cadenas Cinemáticas 4,5,6





Capítulo 4

Conclusiones

Este capítulo recoge a manera de conclusiones las aportaciones fundamentales de este trabajo, así como las principales líneas de investigación que basadas en el mismos se sugieren.

Las aportaciones principales de este trabajo son:

- 1.- El planteamiento de las ecuaciones cinemáticas y dinámicas utilizando el álgebra de cuaterniones desde un punto de vista vectorial.
 - El planteamiento vectorial permitió relacionar de manera directa conceptos de la cinemática tridimensional de cuerpos rígidos, tales como: la variación de la magnitud y orientación de un vector respecto al tiempo, la demostración de las componentes tangencial y normal de la velocidad y aceleración lineal. De la definiciones vectoriales anteriores se establecieron las ecuaciones dinámicas de la manera usual que en el espacio tridimensional.
- 2.- Relaciones de velocidad y aceleración tanto lineal como angular en términos de los parámetros de los cuaterniones.
 - Se demostró la forma en que se propagan las velocidades y aceleraciones angulares en el movimiento de un cuerpo rígido en el espacio vectorial de los cuaterniones, la relación que existe entre las velocidades y aceleraciones angulares en función de parámetros de cuaterniones y los mismos conceptos en el espacio tridimensional.
- 3.- El establecimiento de las ecuaciones de posición, velocidad y aceleración desde un punto de vista vectorial.
 - El planteamiento vectorial permitió de manera directa el análisis cinemático a través de ecuaciones de lazo, tanto para las cadenas cinemáticas como para las

juntas esféricas. Se estableció la ecuación del movimiento de la junta esférica, mediante la multiplicación de los cuaterniones que representan sus giros. Quedando una ecuación muy simple, ajena a la función de rotación de cuaterniones.

En esta etapa final del estudio, es posible contestar las preguntas que en el inicio de la tesis se plantearon.

1.-¿Existe una regla de composición de rotaciones para expresar la misma orientación del cuerpo rígido?

R.- La regla existe.

2.- ¿Esta regla se define mediante la operación binaria de multiplicación o la función de rotación?

R. - La regla se define mediante la función binaria de multiplicación.

3.- Dado unos de los casos anteriores ¿cómo se define esta regla?

R.- Los cuaterniones involucrados aparecen multiplicados de izquierda a derecha (ec.1.2).

4.- ¿Cuál es la expresión de **velocidad angular** asociada al cuaternión general?

R.- La definición es la multiplicación de la derivada respecto al tiempo del cuaternión por su vector conjugado (ec.1.30).

5.- ¿Cuál es la expresión de **velocidad angular** asociada a la composición de rotaciones?

R.- Se define mediante la ec.(1.43).

6.- ¿Cómo se define la regla que asocia la **velocidad angular** a la **velocidad lineal** en ambos casos?

R.- La regla está definida por la ec.(1.30).

7.- ¿Cual es la relación que existe entre las **velocidades angulares** definidas en \mathcal{R}^4 y \mathcal{R}^3 ?

R.- La velocidad angular en \mathcal{R}^4 es igual a un medio de la velocidad angular en \mathcal{R}^3 ec.(1.39).

8.- ¿Cuál es la expresión de **aceleración angular** asociada al cuaternión general?

R.- La definición es la multiplicación de la segunda derivada respecto al tiempo del cuaternión por su conjugado mas la multiplicación de su primera derivada por el conjugado de la misma (ec.1.72).

9.- ¿Cuál es la expresión de **aceleración angular** asociada a la composición de rotaciones?

R.- Se define mediante la ec.(1.87).

10.- ¿Cómo se define la regla que asocia la **aceleración angular** a la **aceleración lineal** en ambos casos?

R.- La regla está definida por la ec.(1.59).

11.- ¿Cuál es la relación que existe entre las **aceleraciones angulares** definidas en \mathcal{R}^4 y \mathcal{R}^3 ?

R.- La aceleración angular en \mathcal{R}^4 es igual a un medio de la aceleración angular en \mathcal{R}^3 ec.(1.72).

12.- ¿Cuál es la regla para expresar en las bases locales velocidades y aceleraciones, tanto lineales como angulares?

R.- Respuesta de pregunta 13.

13.- ¿Cuál es la regla para expresar en las bases locales vectores de fuerzas y momentos, tanto internos como externos?

*R.- Ambas preguntas tienen la siguiente respuesta. Para expresar un vector de una base local B a una base local A , se emplea la función de rotación de los cuaterniones $\rho(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ (**Capítulo 1**), donde \mathbf{p} es el vector que contiene el ángulo y el eje de la rotación y \mathbf{q} es el vector a rotar. Para transformar vectores en sentido inverso, es decir de la base A a la B , la función ρ emplea un cuaternión con giro contrario, es decir $\rho(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{q})$.*

Un hecho no esperado y derivado del estudio, tiene que ver con las ecuaciones que representan los movimientos de la junta esférica. Debido a la manera en que se forman las ecuaciones de lazo en el análisis de posición de la plataforma, estas solo aportan información del giro de las juntas rotacionales y universales. Los giros de las juntas esféricas están excluidas. Era necesario tener dicha información para utilizarlas en el análisis dinámico de fuerzas. Las ecuaciones planteadas para las juntas esféricas se muestran en el capítulo 2, ecs.(2.13)-(2.14), que representan una composición de los giros involucrados. Dichas ecuaciones o sus equivalentes tanto en la posición como en la velocidad y aceleración, no aparecen en ninguna referencia o bibliografía consultada. Siendo esta, otra aportación de la presente tesis.

Las líneas de investigación más significativas que se sugieren a partir de este trabajo son las siguientes:

1.- Solución de forma cerrada, para obtener expresiones de cada uno de los ángulos de las juntas cinemáticas, sin depender de un método numérico. Esto implica, resolver las ecuaciones polinomiales del análisis de la posición mediante métodos algebraicos.

2.- Solución del problema dinámico directo, que involucra la solución de las ecuaciones dinámicas de la plataforma desde el punto de vista de ecuaciones algebraico-diferenciales.

3.- Estudio de métodos numéricos para la solución de las ecuaciones algebraico-diferenciales en función de parámetros de cuaterniones.

4.- Desarrollo de modelos para el estudio de los esfuerzos y deformaciones presentadas en la plataforma espacial.

5.- Desarrollo de modelos para el estudio de las vibraciones del sistema.

6.- Planteamiento de las ecuaciones dinámicas utilizando métodos energéticos como el de Euler-Lagrange.

7.- Como una consecuencia de lo anterior, estudio de métodos de control en función de parámetros de cuaterniones.

Apéndice A

Álgebra de Cuaterniones

Se definen dos operaciones en el conjunto de \mathcal{R}^4 [37], una aditiva $\oplus : \mathcal{R}^4 \times \mathcal{R}^4 \rightarrow \mathcal{R}^4$ y otra multiplicativa $*$: $\mathcal{R}^4 \times \mathcal{R}^4 \rightarrow \mathcal{R}^4$ mediante los cuales los conjuntos (\mathcal{R}^4, \oplus) y $(\mathcal{R}^4, *)$ forman respectivamente un grupo aditivo conmutativo y un grupo multiplicativo no conmutativo.

$$\begin{aligned}
 i) \quad (a, b, c, d) \oplus (\alpha, \beta, \gamma, \delta) &= (a + \alpha, b + \beta, c + \gamma, d + \delta) \\
 ii) \quad (a, b, c, d) * (\alpha, \beta, \gamma, \delta) &= (a\alpha - b\beta - c\gamma - d\delta, a\beta + b\alpha + c\delta - d\gamma, \\
 &\quad a\gamma - b\delta + c\alpha + d\beta, a\delta + b\gamma - c\beta + d\delta) \quad (A1) \\
 &\quad \forall (a, b, c, d), (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathcal{R}^4
 \end{aligned}$$

Estas operaciones satisfacen los resultados siguientes:

- Dados $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{s} \in \mathcal{Q}$, $\mathbf{p} = (a, b, c, d)$, $\mathbf{q} = (\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, $\mathbf{s} = (x, y, z, w)$, $\underline{\mathbf{1}} = (0, 0, 0, 0)$, la operación suma cumple:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{p} \oplus (\mathbf{q} \oplus \mathbf{s}) &= (\mathbf{p} \oplus \mathbf{q}) \oplus \mathbf{s} \\
 \underline{\mathbf{1}} \oplus \mathbf{p} &= \mathbf{p} \oplus \underline{\mathbf{1}} = \mathbf{p} \quad (A2) \\
 \mathbf{p} \oplus \mathbf{q} &= \mathbf{q} \oplus \mathbf{p} \\
 \mathbf{p} \oplus \underline{\mathbf{p}}^{-1} &= \underline{\mathbf{p}}^{-1} \oplus \mathbf{p} = \underline{\mathbf{1}}
 \end{aligned}$$

Donde $\underline{\mathbf{1}}$, es el elemento neutro para la adición. El elemento inverso para la adición se define $\underline{\mathbf{p}}^{-1} = -\mathbf{p}$.

- Dados $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{s} \in \mathcal{Q}$, $\mathbf{p} = (a, b, c, d)$, $\mathbf{q} = (\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, $\mathbf{s} = (x, y, z, w)$, $\mathbf{1} = (1, 0, 0, 0)$, la operación multiplicación cumple:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{p} * (\mathbf{q} * \mathbf{s}) &= (\mathbf{p} * \mathbf{q}) * \mathbf{s} \\
 \mathbf{1} * \mathbf{p} &= \mathbf{p} * \mathbf{1} = \mathbf{p} \quad (A3) \\
 \mathbf{p} * \mathbf{q} &= -\mathbf{q} * \mathbf{p}
 \end{aligned}$$

Donde $\mathbf{1}$, es el elemento neutro para la multiplicación. El elemento inverso para la multiplicación se define como:

$$\mathbf{p}^{-1} = \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \bar{\mathbf{p}} \quad (A4)$$

Donde $\bar{\mathbf{p}} = (a, -b, -c, -d)$, es el conjugado de \mathbf{p} . Y la norma se define como $\|\mathbf{p}\| = \langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle^{1/2}$. Además se cumplen las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{p} \oplus \mathbf{q}) * \mathbf{s} &= \mathbf{p} * \mathbf{s} \oplus \mathbf{q} * \mathbf{s} \\
 \mathbf{p} * (\mathbf{q} \oplus \mathbf{s}) &= \mathbf{p} * \mathbf{q} \oplus \mathbf{p} * \mathbf{s} \\
 \overline{(\mathbf{p} \oplus \mathbf{q})} &= \bar{\mathbf{p}} \oplus \bar{\mathbf{q}} \\
 \overline{\mathbf{p} * \mathbf{q}} &= \bar{\mathbf{q}} * \bar{\mathbf{p}} \\
 \mathbf{p} * \bar{\mathbf{p}} &= \bar{\mathbf{p}} * \mathbf{p}
 \end{aligned} \tag{A5}$$

- La multiplicación por escalar se define para $\alpha \in \mathcal{R}$ como:

$$\alpha \bullet \mathbf{p} = (\alpha a, \alpha b, \alpha c, \alpha d) \tag{A6}$$

- Considerando los dos espacios vectoriales siguientes de \mathcal{Q} :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{Q}_R &= \{(a, 0, 0, 0) : a \in R\} \subset \mathcal{Q}, \\
 \mathcal{Q}_V &= \{(0, b, c, d) : b, c, d \in R\} \subset \mathcal{Q},
 \end{aligned} \tag{A7}$$

Los cuales son isomorfos a \mathcal{R} y \mathcal{R}^3 respectivamente. Se muestran que las transformaciones $\mathbf{T}_R : \mathcal{Q}_R \rightarrow \mathcal{R}$, $\mathbf{T}_V : \mathcal{Q}_V \rightarrow \mathcal{R}^3$ definidas por:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{T}_R(a, 0, 0, 0) &= a, & \forall (a, 0, 0, 0) \in \mathcal{Q}_R \\
 \mathbf{T}_V(0, b, c, d) &= (b, c, d), & \forall (0, b, c, d) \in \mathcal{Q}_V
 \end{aligned} \tag{A8}$$

Son isomorfismos.

La definición siguiente establece la rotación en el espacio vectorial de los cuaterniones:

Definición.-Sea $\rho(\mathbf{p}, \bullet) : \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{Q}$, $\mathbf{p} \in \mathcal{Q}$ fijo, definido por:

$$\rho(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \mathbf{p} * \mathbf{q} * \mathbf{p}^{-1} = \frac{1}{\|\mathbf{p}\|^2} (\mathbf{p} * \mathbf{q} * \bar{\mathbf{p}}), \quad \forall \mathbf{q} \in \mathcal{Q}. \tag{A9}$$

La cual representa una rotación en \mathcal{R}^4 .

Teorema .- La transformación $\rho(\mathbf{p}, \bullet) : \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{Q}$ es lineal, ortogonal y $\rho(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \in \mathcal{Q}_V$, $\forall \mathbf{q} \in \mathcal{Q}_V$. Tal que $\forall \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{s} \in \mathcal{Q}$, $\alpha \in \mathcal{R}$:

$$\begin{aligned}
 \rho(\mathbf{p}, \mathbf{q} \oplus \mathbf{s}) &= \rho(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \oplus \rho(\mathbf{p}, \mathbf{s}) \\
 \rho(\mathbf{p}, \alpha \mathbf{q}) &= \alpha \rho(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \\
 \langle \rho(\mathbf{p}, \mathbf{q}), \rho(\mathbf{p}, \mathbf{s}) \rangle &= \langle \mathbf{q}, \mathbf{s} \rangle
 \end{aligned} \tag{A10}$$

Apéndice B

Generación de Trayectoria

El movimiento de un cuerpo en el espacio consiste de dos partes: Una **trayectoria lineal o curva en el espacio** que sigue un punto del cuerpo (el centro de gravedad o el órgano terminal de un manipulador) y la **orientación angular** del cuerpo. Ambas partes deben satisfacer condiciones de **posición, velocidad y aceleración** tanto lineal como angular y ser realizadas en un **tiempo** preescrito. A continuación se desarrollan la trayectoria lineal y angular del cuerpo en función del tiempo.

Trayectoria Lineal

Se define la curva en el espacio como una recta para el movimiento a seguir por un punto del cuerpo.

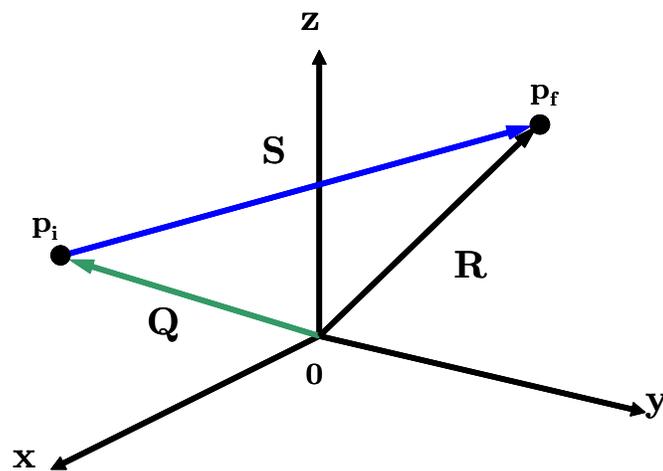


Fig A1. Recta en el espacio

La ecuación vectorial de **posición** se define a partir de la figura B1:

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \mathbf{Q} + \mathbf{S} \\ &= \mathbf{Q} + s \mathbf{u} \end{aligned} \tag{B1}$$

Donde s es la magnitud del vector \mathbf{S} y \mathbf{u} es el vector unitario que define la orientación de \mathbf{S} . Para definir \mathbf{R} en función del tiempo, se requiere que la magnitud s , cambie con respecto al mismo, es decir:

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{Q} + s(t) \mathbf{u} \quad (\text{B2})$$

A partir de la ec.(B2), la ecs. vectoriales de **velocidad** y **aceleración** se definen como la primera y segunda derivada respecto al tiempo:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(t) &= \dot{s}(t) \mathbf{u} \\ \mathbf{A}(t) &= \ddot{s}(t) \mathbf{u} \end{aligned} \quad (\text{B3})$$

Donde \mathbf{Q} y \mathbf{u} no varían respecto al tiempo, ya que están definidos por puntos fijos en el espacio. La magnitud $s(t)$ debe satisfacer condiciones iniciales y finales de posición, velocidad y aceleración, es decir debe satisfacer 6 condiciones, según se muestra en la figura B2:

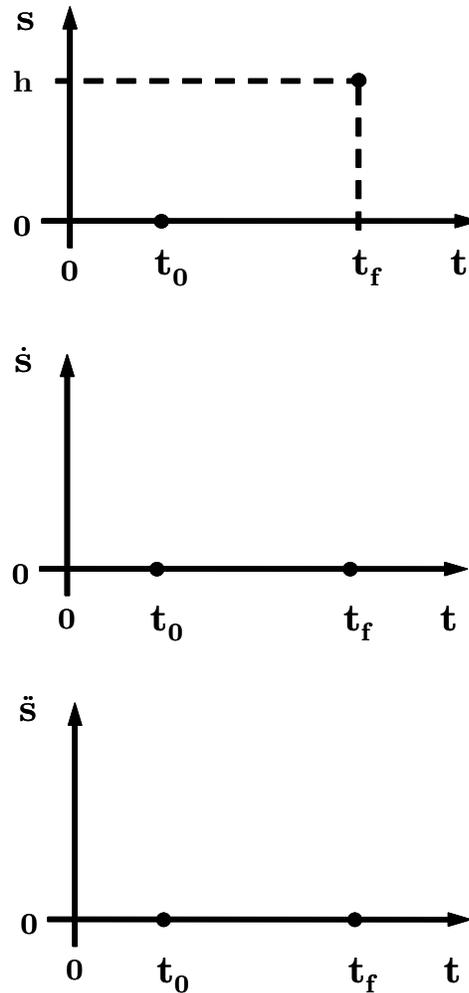


Fig A2. Condiciones iniciales

La primera gráfica indica el cambio de la magnitud del vector \mathbf{S} , que irá variando de 0 para un tiempo inicial t_0 a h para un tiempo final t_f , t_0 y t_f definidos de manera arbitraria, donde $h = \|\mathbf{S}\|$.

La segunda gráfica es la rapidez con que la magnitud del vector \mathbf{S} cambia respecto al tiempo. Es decir, es la rapidez con que realiza el traslado del punto \mathbf{p}_i a \mathbf{p}_f , para un tiempo inicial t_0 y un tiempo final t_f .

La tercera gráfica es el cambio de la rapidez (aceleración) con que la magnitud del vector \mathbf{S} cambia respecto al tiempo, para un tiempo inicial t_0 y un tiempo final t_f .

Para satisfacer las 6 condiciones, se empleará un polinomio de quinto grado, ya que este cuenta con 6 coeficientes a determinar. De esta manera, se tiene:

$$\begin{aligned} s(t) &= a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5 \\ \dot{s}(t) &= a_1 + 2 a_2 t + 3 a_3 t^2 + 4 a_4 t^3 + 5 a_5 t^4 \\ \ddot{s}(t) &= 2 a_2 + 6 a_3 t + 12 a_4 t^2 + 20 a_5 t^3 \end{aligned} \quad (\text{B4})$$

Debido a que existen condiciones iniciales y finales de velocidad y aceleración, se obtienen las derivadas respecto al tiempo del polinomio de $s(t)$. A partir de la figura B2, para $t = t_0 = 0$ (el valor de 0, es asignado arbitrariamente) se tienen las 3 condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} s(t_0) &= s(0) = 0 \\ \dot{s}(t_0) &= \dot{s}(0) = 0 \\ \ddot{s}(t_0) &= \ddot{s}(0) = 0 \end{aligned} \quad (\text{B5})$$

Al sustituirlos en las ecs.(B4) se obtienen:

$$\begin{aligned} s(0) &= 0 = a_0 + a_1 (0) + a_2 (0)^2 + a_3 (0)^3 + a_4 (0)^4 + a_5 (0)^5 \\ \dot{s}(0) &= 0 = a_1 + 2 a_2 (0) + 3 a_3 (0)^2 + 4 a_4 (0)^3 + 5 a_5 (0)^4 \\ \ddot{s}(0) &= 0 = 2 a_2 + 6 a_3 (0) + 12 a_4 (0)^2 + 20 a_5 (0)^3 \end{aligned}$$

Simplificando:

$$\begin{aligned} 0 &= a_0 \\ 0 &= a_1 \\ 0 &= 2 a_2 \end{aligned}$$

Finalmente los 3 primeros coeficientes son:

$$a_0 = 0 \quad a_1 = 0 \quad a_2 = 0 \quad (\text{B6})$$

A partir de la figura B2 y repitiendo el proceso para $t = t_f$ se tienen las 3 condiciones finales:

$$\begin{aligned} s(t_f) &= h = \|\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i\| \\ \dot{s}(t_f) &= 0 \\ \ddot{s}(t_f) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B7})$$

Donde $\mathbf{p}_i = (x_i, y_i, z_i)$ y $\mathbf{p}_f = (x_f, y_f, z_f)$, significan coordenadas de los puntos inicial y final de la trayectoria respectivamente, la magnitud de la diferencia entre ellos, representa la distancia h que necesitamos recorrer en la línea recta. Al sustituir ecs.(B6), (B7) en (B4) se obtiene:

$$\begin{aligned}\|\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i\| &= a_3 t_f^3 + a_4 t_f^4 + a_5 t_f^5 \\ 0 &= 3 a_3 t_f^2 + 4 a_4 t_f^3 + 5 a_5 t_f^4 \\ 0 &= 6 a_3 t_f + 12 a_4 t_f^2 + 20 a_5 t_f^3\end{aligned}$$

El sistema de ecs. se expresa de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} t_f^3 & t_f^4 & t_f^5 \\ 3 t_f^2 & 4 t_f^3 & 5 t_f^4 \\ 6 t_f & 12 t_f^2 & 20 t_f^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i\| \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B8})$$

Al resolver el sistema de la ec.(B8) se obtienen los 3 últimos coeficientes:

$$\begin{aligned}a_3 &= 10 \frac{\|\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i\|}{t_f^3} \\ a_4 &= -15 \frac{\|\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i\|}{t_f^4} \\ a_5 &= 6 \frac{\|\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i\|}{t_f^5}\end{aligned} \quad (\text{B9})$$

Sustituyendo ecs.(B6) y (B9) en ec.(B4):

$$\begin{aligned}s(t) &= 10 \frac{\|\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i\|}{t_f^3} t^3 - 15 \frac{\|\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i\|}{t_f^4} t^4 + 6 \frac{\|\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i\|}{t_f^5} t^5 \\ \dot{s}(t) &= 30 \frac{\|\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i\|}{t_f^3} t^2 - 60 \frac{\|\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i\|}{t_f^4} t^3 + 30 \frac{\|\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i\|}{t_f^5} t^4 \\ \ddot{s}(t) &= 60 \frac{\|\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i\|}{t_f^3} t - 180 \frac{\|\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i\|}{t_f^4} t^2 + 120 \frac{\|\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i\|}{t_f^5} t^3\end{aligned} \quad (\text{B10})$$

Finalmente se obtienen las ecuaciones que representan el cambio de la magnitud de la posición, velocidad y aceleración en función del tiempo:

$$\begin{aligned}s(t) &= \|\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i\| \left[10 \left(\frac{t}{t_f} \right)^3 - 15 \left(\frac{t}{t_f} \right)^4 + 6 \left(\frac{t}{t_f} \right)^5 \right] \\ \dot{s}(t) &= \|\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i\| \left[30 \frac{t^2}{t_f^3} - 60 \frac{t^3}{t_f^4} + 30 \frac{t^4}{t_f^5} \right] \\ \ddot{s}(t) &= \|\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i\| \left[60 \frac{t}{t_f^3} - 180 \frac{t^2}{t_f^4} + 120 \frac{t^3}{t_f^5} \right]\end{aligned} \quad (\text{B11})$$

Donde $t =$ tiempo para realizar el movimiento y $t_f =$ tiempo final para terminar el movimiento. Reescribiendo las ecs. (B2) y (B3) en función de los puntos de la recta:

$$\begin{aligned}\mathbf{R}(t) &= \mathbf{Q} + s(t) \mathbf{u} = (\mathbf{p}_i - \mathbf{0}) + s(t) \frac{(\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i)}{\|\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i\|} \\ \mathbf{V}(t) &= \dot{s}(t) \mathbf{u} = \dot{s}(t) \frac{(\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i)}{\|\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i\|} \\ \mathbf{A}(t) &= \ddot{s}(t) \mathbf{u} = \ddot{s}(t) \frac{(\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i)}{\|\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i\|}\end{aligned}\tag{B12}$$

Sustituyendo ecs. (B11) en ecs. (B12), se obtienen finalmente la ecuación vectorial de posición, velocidad y aceleración que debe seguir la plataforma móvil:

$$\begin{aligned}\mathbf{R}(t) &= \mathbf{p}_i + \left[10 \left(\frac{t}{t_f} \right)^3 - 15 \left(\frac{t}{t_f} \right)^4 + 6 \left(\frac{t}{t_f} \right)^5 \right] (\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i) \\ \mathbf{V}(t) &= \left[30 \frac{t^2}{t_f^3} - 60 \frac{t^3}{t_f^4} + 30 \frac{t^4}{t_f^5} \right] (\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i) \\ \mathbf{A}(t) &= \left[60 \frac{t}{t_f^3} - 180 \frac{t^2}{t_f^4} + 120 \frac{t^3}{t_f^5} \right] (\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i)\end{aligned}\tag{B13}$$

Orientación Angular

Para la orientación se sigue un procedimiento similar, aclarando que para este caso, solo se desea pasar de valores iniciales a finales, para la posición, velocidad y aceleración angular de la plataforma móvil, ya que no se requiere cumplir con una trayectoria particular en el espacio. Esto conducirá a las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\beta}(t) &= \boldsymbol{\beta}_i + \left[10 \left(\frac{t}{t_f} \right)^3 - 15 \left(\frac{t}{t_f} \right)^4 + 6 \left(\frac{t}{t_f} \right)^5 \right] (\boldsymbol{\beta}_f - \boldsymbol{\beta}_i) \\ \dot{\boldsymbol{\beta}}(t) &= \left[30 \frac{t^2}{t_f^3} - 60 \frac{t^3}{t_f^4} + 30 \frac{t^4}{t_f^5} \right] (\boldsymbol{\beta}_f - \boldsymbol{\beta}_i) \\ \ddot{\boldsymbol{\beta}}(t) &= \left[60 \frac{t}{t_f^3} - 180 \frac{t^2}{t_f^4} + 120 \frac{t^3}{t_f^5} \right] (\boldsymbol{\beta}_f - \boldsymbol{\beta}_i)\end{aligned}\tag{B14}$$

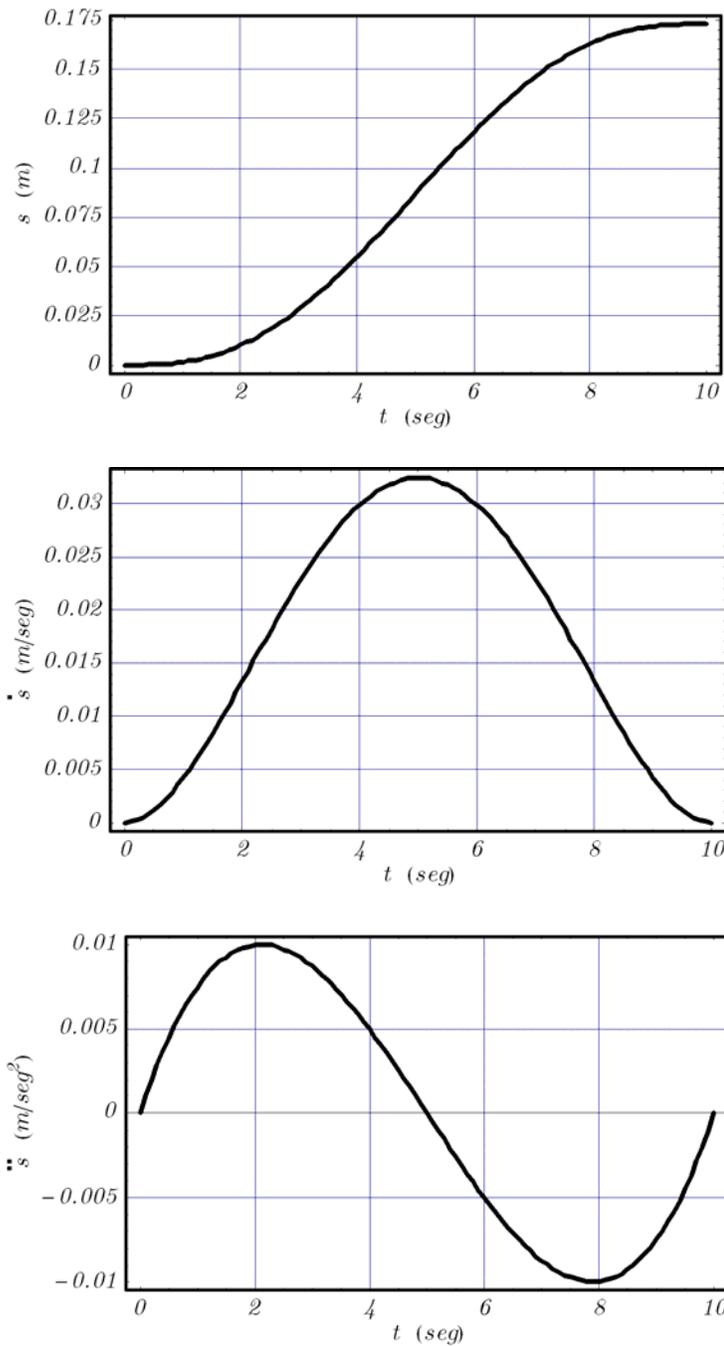
Donde el vector $\boldsymbol{\beta} = (\psi, \theta, \phi)$. De la misma manera $\boldsymbol{\beta}_i = (\psi_i, \theta_i, \phi_i)$ y $\boldsymbol{\beta}_f = (\psi_f, \theta_f, \phi_f)$, que se refieren a los valores iniciales y finales.

Ejemplo Numérico

Dados los siguientes datos del desplazamiento lineal:

$$\mathbf{p}_i = (0, 0, 0.3) m \quad \mathbf{p}_f = (0.07, 0.15, 0.25) m \quad 0 \leq t \leq 10 \text{ seg} \quad t_f = 10 \text{ seg}$$

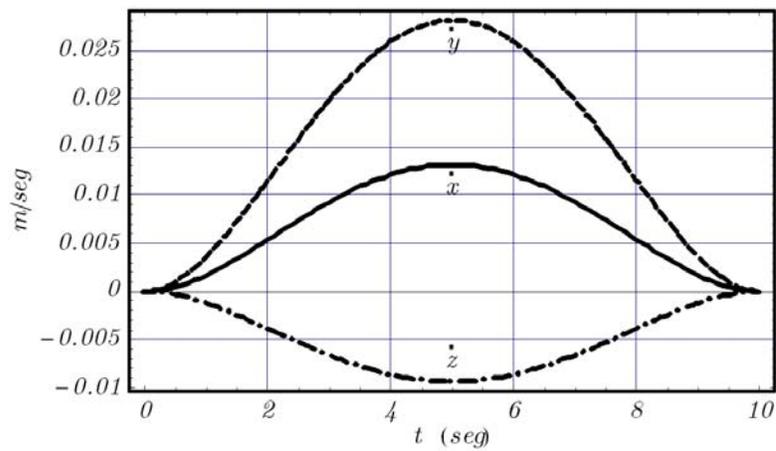
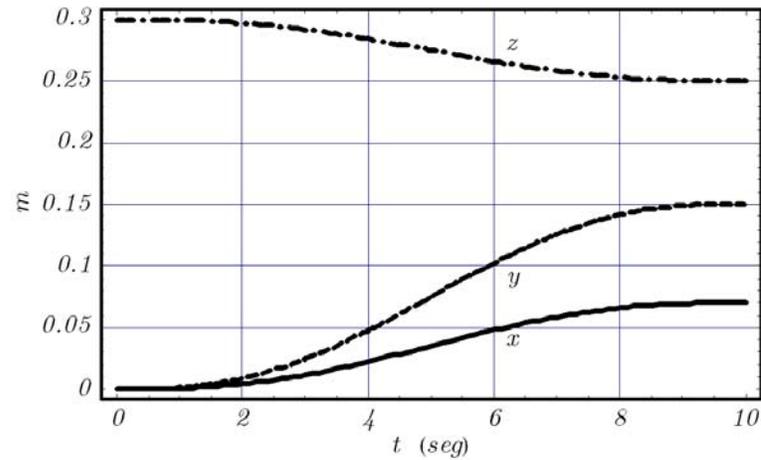
Donde $\|\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i\| = 0.172916 m$. Las gráficas de s , \dot{s} y \ddot{s} de ec.(B11) son:

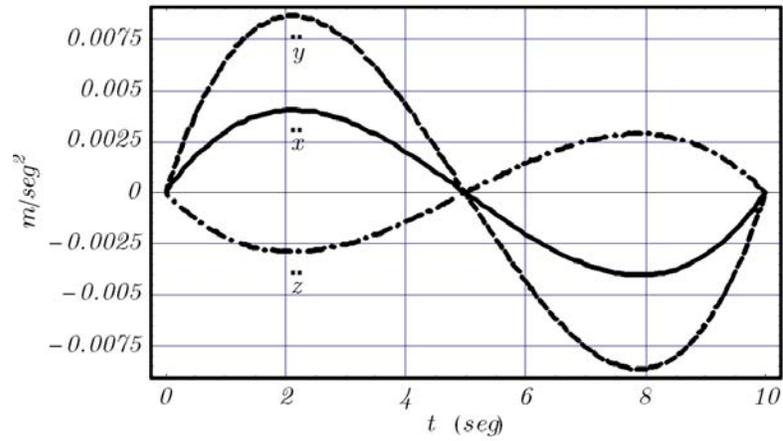


A partir de la ecs.(B13) se tiene la siguiente tabla:

t	R m			V m/s			A m/s^2		
	x	y	z	\dot{x}	\dot{y}	\dot{z}	\ddot{x}	\ddot{y}	\ddot{z}
0	0	0	0.3	0	0	0	0	0	0
1	0.5^{-3}	1.2^{-3}	0.299	1.7^{-3}	3.6^{-3}	-1.2^{-3}	3.4^{-3}	6.4^{-3}	-2.1^{-3}
2	0.4^{-2}	8.6^{-3}	0.297	5.3^{-3}	1.15^{-2}	-3.8^{-3}	4^{-3}	8.6^{-3}	-2.8^{-3}
3	1.14^{-2}	2.44^{-2}	0.291	9.2^{-3}	1.98^{-2}	-6.6^{-3}	3.5^{-3}	7.5^{-3}	-2.5^{-3}
4	2.22^{-2}	4.76^{-2}	0.284	1.2^{-2}	2.59^{-2}	-8.6^{-3}	2^{-3}	4.3^{-3}	-1.4^{-3}
5	3.5^{-2}	7.5^{-2}	0.275	1.31^{-2}	2.81^{-2}	-9.3^{-3}	-5.82^{-18}	-1.24^{-17}	4.16^{-18}
6	4.77^{-2}	0.102	0.265	1.20^{-2}	2.59^{-2}	-8.6^{-3}	-2^{-3}	-4.3^{-3}	1.4^{-3}
7	5.85^{-2}	0.125	0.258	9.2^{-3}	1.98^{-2}	-6.6^{-3}	-3.5^{-3}	-7.5^{-3}	2.5^{-3}
8	6.59^{-2}	0.141	0.252	5.3^{-3}	1.15^{-2}	-3.8^{-3}	-4^{-3}	-8.6^{-3}	2.8^{-3}
9	6.94^{-2}	0.148	0.250	1.7^{-3}	3.6^{-3}	-1.2^{-3}	-3^{-3}	-6.4^{-3}	2.1^{-3}
10	0.07	0.15	0.25	-3.10^{-17}	-6.66^{-17}	2.22^{-17}	-1.55^{-17}	-3.33^{-17}	1.11^{-17}

Las gráficas de las componentes **R**, **V** y **A** de ecs.(B13) son:





Dados los siguientes datos del desplazamiento angular:

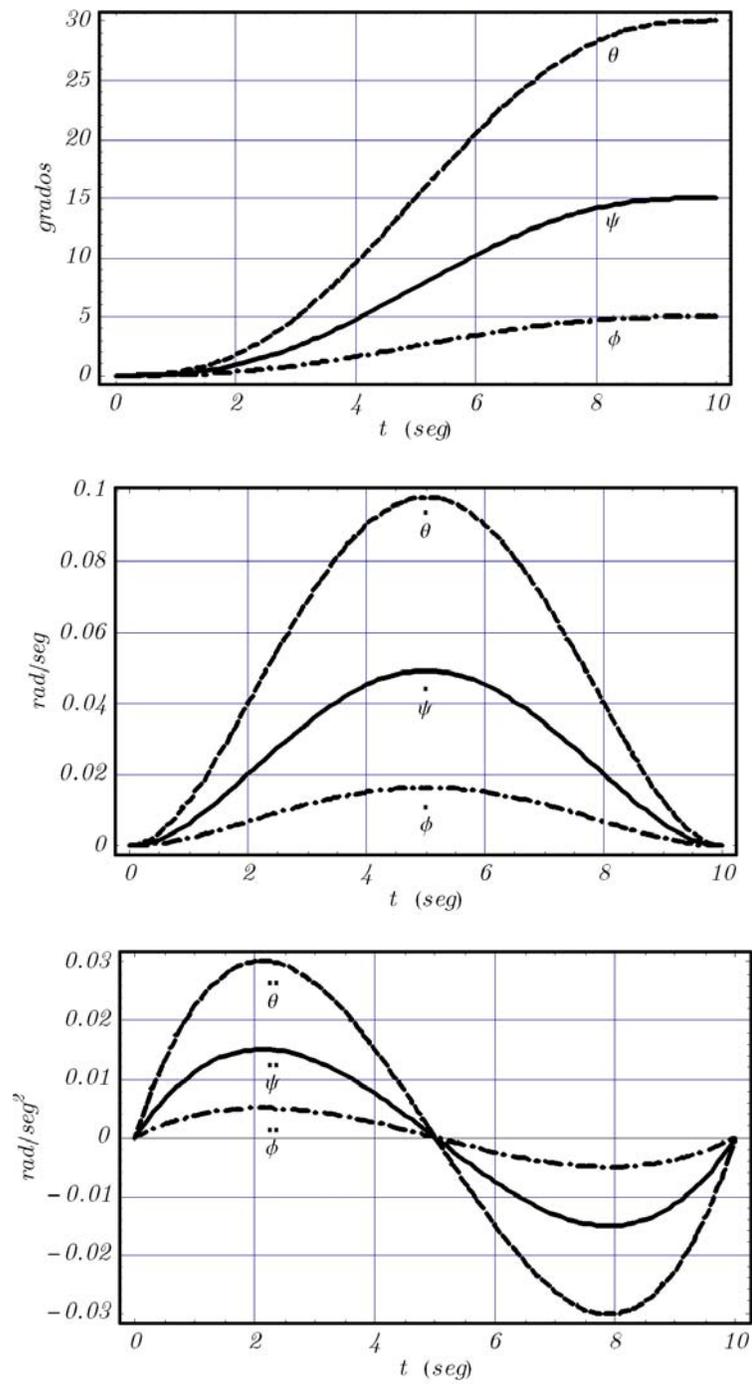
$$\beta_i = (0^\circ, 0^\circ, 0^\circ) = (0, 0, 0) \text{ rad}$$

$$\beta_f = (15^\circ, 30^\circ, 5^\circ) = (0.261, 0.523, 0.087) \text{ rad}$$

A partir de la ecs.(B14) se tiene la siguiente tabla:

t	β grados			$\dot{\beta}$ rad/s			$\ddot{\beta}$ rad/s ²		
	ψ	θ	ϕ	$\dot{\psi}$	$\dot{\theta}$	$\dot{\phi}$	$\ddot{\psi}$	$\ddot{\theta}$	$\ddot{\phi}$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0.128	0.256	0.042	0.006	0.012	0.002	0.011	0.022	0.003
2	0.868	1.737	0.289	0.020	0.040	0.006	0.015	0.030	0.005
3	2.446	4.892	0.815	0.034	0.069	0.011	0.013	0.026	0.004
4	4.761	9.523	1.587	0.045	0.090	0.015	0.007	0.015	0.002
5	7.5	15	2.5	0.049	0.098	0.016	0	0	0
6	10.238	20.476	3.412	0.045	0.090	0.015	-0.007	-0.015	-0.002
7	12.553	25.107	4.184	0.034	0.069	0.011	-0.013	-0.026	-0.004
8	14.131	28.262	4.710	0.020	0.040	0.006	-0.015	-0.030	-0.005
9	14.871	29.743	4.957	0.006	0.012	0.002	-0.011	-0.022	-0.003
10	15	30	5	0	0	0	0	0	0

Las gráficas de β , $\dot{\beta}$ y $\ddot{\beta}$ de ecs.(B14) son:



Bibliografía

- [1] Carrera Bolaños Jorge: **Apuntes de Mecánica del Medio Continuo**. Facultad de Ingeniería, UNAM, 1995-2008.
- [2] Carrera Bolaños Jorge: Comunicación Personal, 2008.
- [3] Casteljau P. : **Les Quaternions**. Hermes, Paris-Londres-Lausanne, 1987.
- [4] Chou Jack C. K. : **Quaternion Kinematic and Dynamic Differential Equations**. IEEE Transactions on Robotics and Automation. Vol. 8, No. 1. February 1992, pp. 53-64.
- [5] Cooke Joseph M., Zyda Michael J., Pratt David R., McGhee robert B. : **NPSNET:Flight Simulation Dynamic modeling using Quaternions**. Naval Postgraduate School, Department of Computer Science, CodeCS/Zk Monterey, California 93943-5100 USA, January 25, 1994, In Presence, Vol. 1, No. 4, pp. 404-420.
- [6] Cuenca Jiménez Francisco: **Modelado del Análisis Cinemático de una Plataforma Paralela Plana: Una Aplicación del Álgebra de Cuaterniones**. Tesis de Maestría en Ingeniería Mecánica, Agosto de 1996, Posgrado en Ingeniería UNAM, México, D.F.
- [7] Dam Erik B., Koch Martin. Lillholm Martin : **Quaternions, Interpolation and Animation**. Technical Report DIKU-TR-98/5, Department of Computer Science, University of Copenhagen, Denmark, July 17, 1998.
- [8] Delfín Vázquez Juan José: **Análisis Cinemático de un Robot Paralelo Planar de Tres Grados de Libertad Tipo RRR**. Tesis de Maestría en Ingeniería Mecánica, Mayo de 2004, Posgrado en Ingeniería UNAM-ITESCA, México, D.F.
- [9] Dooley J. R., McCarthy J. M. : **Spatial Rigid Body Dynamics Using Dual Quaternion Components**. Proceedings of the 1991 IEEE Interantional Conference on Robotics and Automation. Sacramento California Sciences, April 1991, pp. 90-95.
- [10] Duman Ildeniz : **Design, Implementation and Testing Real-Time Software System for a Quaternion-Based Attitude Estimation Filter**. Naval Postgraduate School, Monterey, California, March 1999.
- [11] Esquer Alcaraz Hyrum: **Modelación Cinemática y de Trayectoria de un Robot de 2GDL Usando la Rotación Usual de Números Complejos**. Tesis de Maestría en Ingeniería Mecánica, Mayo de 2004, Posgrado en Ingeniería UNAM-ITESCA, México, D.F.

- [12] Flores Campos Juan Alejandro: **Control de Robots Manipuladores**. Tesis de Maestría en Ingeniería Mecánica, Septiembre de 1998, Posgrado en Ingeniería UNAM, México, D.F.
- [13] Friberg O. : **Computation of Euler Parameters from Multipoint Data**. Journal of Mechanism, Transmissions, and Automation in Design, Vol 110, June 1988, pp. 117-121.
- [14] Geradin M., Cardona A.: **Kinematics and Dynamics of Rigid and Flexible Mechanism Using Finite Elements and Quaternion Algebra**. Computational Mechanics 4, 1989,pp 115-135.
- [15] Gurtin E. Morton: **An Introduction to Continuum Mechanics**. Academic Press, 1981.
- [16] Haug Edward J. : **Computer Aided Kinematic and Dynamics of Mechanical System: Volume 1 Basic Methods**. Allyn and Bacon, 1989.
- [17] Husty Manfred L. : **An Algorithm for Solving the Direct Kinematic of Stewart-Gough-Type Platforms**. McGill Centre for Intelligent Machines., McGill University, montreal, Quebec, Canada, June 1994.
- [18] Jiménez López Eusebio: **Simulación de un Proceso de Manufactura con Obstáculo en la Línea de Producción**. Tesis de Maestría en Ingeniería Mecánica, Septiembre de 1998, Posgrado en Ingeniería UNAM, México, D.F.
- [19] Le Saux C., Leine R. I. , Glocker C.: **Dynamics of a Rolling Disk in the Presence of Dry Friction**. Journal of Nonlinear Science. Vol. 15, pp. 27–61 (2005).
- [20] Mántaras Daniel A., Luque Pablo, Vera Carlos : **Development and Validation of a Three-Dimensional Kinematic Model for the McPherson Steering and Suspension Mechanism**. Mechanism and Machine Theory, Vol. 39, 2006, pp. 603-619.
- [21] Márquez Miranda Mario: **Modelado Cinemático de Sistemas Mecánicos de Cadena Abierta**. Tesis de Maestría en Ingeniería Mecánica, Junio de 1995, Posgrado en Ingeniería UNAM, México, D.F.
- [22] Márquez Miranda Mario: **Modelado Cinemático y Dinámico de Robots Utilizando Cuaterniones**. Tesis de Doctorado en Ingeniería Mecánica, Junio de 2000, Universidad Anáhuac del Sur, Escuela de Ingeniería, México, D.F.
- [23] Martínez Gradilla Gabriel: **Análisis y Síntesis de un Mecanismos de Cuatro Barras, Conducción de Cuerpo Rígido para Tres y Cuatro Puntos de Precisión Usando Números Complejos**. Tesis de Maestría en Ingeniería Mecánica, Marzo de 2004, Posgrado en Ingeniería UNAM-ITESCA, México, D.F.
- [24] Martínez Martínez Roberto: **Modelación y Simulación Computacional de Trayectorias Tridimensionales**. Tesis de Maestría en Ingeniería Mecánica, Octubre de 1997, Posgrado en Ingeniería UNAM, México, D.F.

- [25] Méndez Canseco Mauricio Cirilo: **Modelado Cinemático de Sistemas Mecánicos de Cadena Cerrada**. Tesis de Maestría en Ingeniería Mecánica, Junio de 1995, Posgrado en Ingeniería UNAM, México, D.F.
- [26] Méndez Canseco Mauricio Cirilo: **Dinámica de Cuerpos Rígidos con Cuaterniones una Aplicación a los Mecanismos**. Tesis de Doctorado en Ingeniería Mecánica, Junio de 2000, Universidad Anáhuac del Sur, Escuela de Ingeniería, México, D.F.
- [27] Morton Harold S, Jr : **Hamiltonian and Lagrangian Formulations of Rigid Body Rotational Dynamics Based on the Euler Parameters**. The Journal of Astronautical Sciences, Vol. 41, October-December 1993, pp. 569-591.
- [28] Mullineaux Glen. : **Modelling Spatial Displacements using Clifford Algebra**. Journal of Mechanical Design, Vol 126, May 2004, pp. 420-424.
- [29] Navarro Antonio José: **Flexibilidad de un Sistema de Manufactura Tipo Serial**. Tesis de Maestría en Ingeniería Mecánica, Enero de 2004, Posgrado en Ingeniería UNAM, México, D.F.
- [30] Nikravesh Parviz E., Chung I. S. : **Application of Euler Parameters to the Dynamic Analysis of Three-Dimensional Constrained Mechanical Systems**. Journal of Mechanical Design, Vol 104, October 1982, pp. 785-791.
- [31] Nikravesh Parviz E. : **Spatial Kinematics and Dynamic Analysis with Euler Parameters**. Computer Aided Analysis and Optimization of Mechanical System Dynamics. Haug E.J. (Ed.), Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1984, pp 261-281.
- [32] Nikravesh Parviz E., R. A. Wehage, O. K. Kwon : **Euler Parameters in Computational Kinematics and Dynamics. Part 1**. Journal of Mechanism, Transmissions, and Automation in Design, Vol 107, September 1985, pp. 359-365.
- [33] Nikravesh Parviz E., O. K. Kwon, R. A. Wehage : **Euler Parameters in Computational Kinematics and Dynamics. Part 2**. Journal of Mechanism, Transmissions, and Automation in Design, Vol 107, September 1985, pp. 366-369.
- [34] Nikravesh Parviz E. : **Computer Aided Analysis of Mechanical System**. Prentice Hall, 1988.
- [35] Perez Alba, McCarthy J. M. : **Dual Quaternion Synthesis of Constraint Robotic Systems**. Journal of Mechanical Design, Vol 126, May 2004, pp. 425-435.
- [36] Pérez Contreras Julio Alejandro: **Caracterización y Prueba de las Secuencias Simultáneas de un Robot Paralelo Experimental Tipo RRR**. Tesis de Maestría en Ingeniería Mecánica, Enero de 2001, Posgrado en Ingeniería UNAM, México, D.F.
- [37] Reyes Ávila Luis : **Quaternions: Une Representation Parametrique Systematique des Rotations Finies. Partie I: Le Cadre Théorique**. Rapports de Recherche No 1303. INRIA-ROCQUENCOURT, Octobre 1990.

- [38] Reyes Ávila Luis : **Quaternions: Une Representation Parametrique Systematique des Rotations Finies. Partie II: Quelques Applications.** Rapports de Recherche No 1454. INRIA-ROCQUENCOURT, Juin 1991.
- [39] Roberson R. E; Schwertassek R. : **Dynamics of Multibody Systems.** Springer-Verlag, 1988.
- [40] Rubio Suárez Alfredo: **Evasión de Obstáculos Mediante Multicuerpos Rígidos.** Tesis de Maestría en Ingeniería Mecánica, Marzo de 2000, Posgrado en Ingeniería UNAM, México, D.F.
- [41] Ruelas Ruiz José Efrén: **Modelación, Programación y Simulación de Sistemas Mecánicos de Cadena Cinemática Cerrada en el Plano.** Tesis de Maestría en Ingeniería Mecánica, Junio de 2004, Posgrado en Ingeniería UNAM-ITESCA, México, D.F.
- [42] Soto Escobar Martín: **Modelación y Análisis de las Secuencias de Movimiento de un Brazo Mecánico de Tres Grados de Libertad.** Tesis de Maestría en Ingeniería Mecánica, Enero de 2004, Posgrado en Ingeniería UNAM, México, D.F.
- [43] Spring Kerry W : **Euler Parameters and the Use of Quaternion Algebra in the Manipulation of Finite rotations: A Review.** Mechanism and Machine Theory, Vol. 21, No. 5, 1986, pp. 365-373.
- [44] Suh C. H. & Radcliffe C. W. : **Kinematics and Mechanism Design.** John Wiley & Sons, 1978.
- [45] Vega González Miguel Ángel: **Simulación Computacional de Cadenas Cinemáticas Abiertas Tridimensionales.** Tesis de Maestría en Ingeniería Mecánica, Agosto de 1997, Posgrado en Ingeniería UNAM, México, D.F.
- [46] Vladimír Stejskal, Michael Valášek, **Kinematics and Dynamics of Machinery.** Marcel Dekker, Inc. 1996
- [47] Wampler Charles W. : **Forward Displacement Analysis of General Six-In-Parallel SPS (Stewart) Platform Manipulators using Soma Coordinates.** Mechanism and Machine Theory, Vol. 31, No. 3, 1996, pp. 331-337.
- [48] Yuan Joseph S. C. : **Closed-Loop Manipulator Control Using Quaternion Feedback.** IEEE Journal of Robotics and Automation. Vol. 4, No. 4. August 1988, pp. 434-440.