



Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ingeniería
División de Ingeniería Civil y Geomática

T E S I S

“ANÁLISIS SÍSMICO DE TANQUES ELEVADOS PARA
ALMACENAR LÍQUIDOS: UNA NUEVA VISIÓN CON
ESPACIOS VECTORIALES COMPLEJOS”

Para obtener el título de:
Ingeniero Civil

P R E S E N T A:
Diego Iván Hernández Hernández

Dirigida por:
Dr. José Luis Urrutia Galicia

Ciudad Universitaria, México. Primavera 2012



**Soy un hombre de poca fe
y de mala memoria.**

**Cerrar ciclos no es lo mío,
tiendo siempre a recordar.**

**Añoro los tiempos pasados,
pero sé también que existe,
y por mi cuenta corre,
un futuro prometedor.**

"La obligación nos hace realizar acciones extrañas. Estudiar el camino de la obligación, con todos sus giros y vueltas, es como seguir el camino de la abeja a través de un campo de flores silvestres"

-Debes ser sincero contigo mismo, aceptar que terreno estás pisando y aceptar las responsabilidades...

-¿Hay algo más que me tengas que decir?

-Adiós, regresa cuando estés listo, cuando te sientas preparado.

-¿Y si nunca llega ese momento?

-Si nunca llega, me dio mucho gusto conocerte y saber de ti...

>>> Ya vendrá alguien que acepte la responsabilidad <<<

*No es verdad, no es verdad
que vengamos a esta tierra a vivir
sólo venimos para dormir, para soñar.*

Antiguo poema azteca

A mis padres

Julián y Virginia

A mi hermano

Alan

Y como diría un viejo amigo:

"...en el cristal, que con mi soplo empañó,
mires aparecer mi pensamiento".
Manuel Gutiérrez Nájera.

"Este Libro es el conjunto de lo aprendido a lo largo de mi carrera e incluso más allá de ella, en mi vida. La vida de cualquier persona, la mía no excede la sentencia, se encuentra rodeada de otras tantas que interfieren, modifican, embellecen y nutren dicha existencia. Por este motivo dedico mi pensamiento a ti".
Alan Sting Ramos Rojas.

El GRAN SUEÑO ha comenzado,
esto sólo es el principio,
y ¿sabes una cosa?
vamos de la mano.

Agradecimientos

Agradezco a mis padres y hermano, por ser los cimientos de lo que fue, es y será una gran estructura y por permitirme ser en todo momento, sin importar que interfiriera en sus asuntos.

Madre, siempre me apoyé en ti, aun cuando estaba en el fondo, tú estabas abajo, no sé cómo, pero siempre me sacabas, haciendo el trabajo rudo.

Padre, tus enseñanzas siguen siendo mágicas, sólo hablas cuando es necesario y abrazas cuando te faltan las palabras.

Hermano, siempre te admiraré, sabes como soy y como pienso, siempre lo has sabido, gracias por tenderme tu mano.

“Con pies de plomo y escalando una montaña a solas”

Gracias Dr. José Luis. Me ha enseñado más de lo que pudiera imaginarme Sus comentarios siempre acertados; su guía y conocimiento fueron invaluable en la elaboración de este trabajo.

Gracias a todos y cada uno de mis sinodales, quienes se tomaron un tiempo para leer y corregir este trabajo.

Gracias amigos, no los menciono por temor a omitir alguno. Siempre, con sus valiosas aportaciones y compañía, ¡estamos en el mismo barco!

Yare, compañera de vida y alma gemela, he aprendido y vivido mucho contigo. Así como los libros y sus historias tienen final, nosotros decidimos poner puntos suspensivos. Gracias por ser y existir, siempre con una sonrisa para mí.

Finalmente, doy las gracias a la Universidad Nacional Autónoma de México, a la Facultad de Ingeniería y al Instituto de Ingeniería, por permitirme crecer dentro de sus muros y en sus espacios.

A TODOS
GRACIAS

Por enseñarme un poco de la vida
y por convertirme en lo que hoy soy.

“Análisis Sísmico de Tanques elevados para Almacenar Líquidos:
Una nueva visión con espacios vectoriales complejos”

Contenido

NOMENCLATURA.....	II
INTRODUCCIÓN.....	IV
OBJETIVO GENERAL.....	V
OBJETIVOS ESPECÍFICOS.....	V
ALCANCE.....	V
CAPÍTULO 1.....	1
1.1 ESTADO DEL ARTE.....	2
1.2 VIBRACIONES. SISTEMAS POSITIVOS DEFINIDOS.....	3
1.2.1 Tipos de Vibraciones.....	3
1.3 ECUACIONES DE MOVIMIENTO TRADICIONALES.....	4
1.3.1 Segunda Ley de Newton.....	4
1.4 INGENIERÍA SÍSMICA.....	12
1.4.1 Análisis Sísmico para Sistemas de Uno y Varios Grados de Libertad.....	12
1.5 CONVERGENCIA EN LOS RESULTADOS.....	14
CAPÍTULO 2.....	16
2.1 NUEVO MODELO SEMIDEFINIDO CON ESPACIOS VECTORIALES COMPLEJOS.....	17
2.2 PRESENTACIÓN DEL NUEVO MÉTODO.....	17
2.2.1 Ecuaciones de Movimiento Urrutia (2008, [1]).....	18
2.2.2 Excitación en la base $F_0 \neq 0$	19
2.2.3 Excitación en el interior de la estructura $F_0 = 0$	20
2.2.4 Ejemplo.....	21
1.2.4 Segunda Ley de Movimiento de Newton.....	22
1.3 ALCANCE Y CUALIDADES DEL NUEVO MÉTODO.....	23
CAPÍTULO 3.....	24
3.1 APLICACIÓN A TANQUES ELEVADOS.....	25
3.1.1 Ecuaciones de Movimiento. Método Modificado de Lagrange.....	26
3.1.2 Ejemplo 1.....	27
3.1.3 Ejemplo 2 y Resultados Obtenidos.....	33
3.1 CONVERGENCIA EN LOS RESULTADOS.....	47
3.2 COMPARACIÓN CON RESULTADOS TRADICIONALES.....	48
CONCLUSIONES.....	50
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	52

Nomenclatura

a	Aceleración	$\left[\frac{m}{s^2}\right]$
c_c	Coefficiente de amortiguamiento crítico	$\left[\frac{kg}{s}\right]$
c_j	Coefficiente de amortiguamiento viscoso j	$\left[\frac{kg}{s}\right]$
CE	Estructura que soporta al tanque de almacenamiento	
CL	Líquido almacenado en el tanque elevado	
d	Distancia	$[m]$
$\frac{d}{dt}$	Primera derivada respecto al tiempo	
$\frac{d^2}{dt^2}$	Segunda derivada respecto al tiempo	
D	Diámetro del tanque elevado	$[m]$
$EC(t)$	Energía Cinética	$[J]$
$EP(t)$	Energía Potencial	$[J]$
Eq_1	Masas de inercia del sistema con la aceleración del terreno	$[N]$
Eq_2	Fuerza aplicada en el sistema	$[N]$
f	$F * e^{i\omega t}$	$[N]$
F	Fuerza aplicada al sistema dinámico	$[N]$
\mathcal{F}	Función de disipación de energía de Rayleigh	
H	Altura del tanque elevado	$[m]$

i	$\sqrt{-1}$	
k_j	Constante de rigidez j	$\left[\frac{N}{m}\right]$
\mathcal{L}	Ecuación Lagrangiana del sistema dinámico	
m_{cn}	Masa convectiva representativa del líquido	$[kg]$
m_j	Masa de la partícula j	$[kg]$
m_{im}	Masa impulsiva representativa del líquido	$[kg]$
$P(t)$	Potencia	$[W]$
r	Relación de Frecuencias	
R	Factor de magnificación	
t	Tiempo	$[s]$
v	Velocidad	$\left[\frac{m}{s}\right]$
$W(t)$	Trabajo	$[J]$
W_e	Trabajo de entrada al sistema dinámico	$[J]$
W_s	Trabajo de salida o Energía Mecánica Total del sistema	$[J]$
$x_c(t)$	Función complementaria, dependiente del tiempo	
$x_j(t)$	Desplazamiento de la partícula j, función del tiempo	$[m]$
$\dot{x}_j(t)$	Velocidad de la partícula j, función del tiempo	$\left[\frac{m}{s}\right]$
$\ddot{x}_j(t)$	Aceleración de la partícula j, función del tiempo	$\left[\frac{m}{s^2}\right]$
$x_p(t)$	Integral particular, dependiente del tiempo	
Z_{ij}	Elemento i,j, de la matriz de impedancia	
δ_{st}	Deflexión estática del resorte	$[m]$
ζ_j	Factor de amortiguamiento j	
Φ	Ángulo de fase	
λ_n	Raíces de primer orden de la ecuación de Bessel en el primer modo	
ω	Frecuencia de excitación	$\left[\frac{rad}{s}\right]$
ω_n	Frecuencia natural del sistema	$\left[\frac{rad}{s}\right]$

Introducción

Los modelos matemáticos utilizados en el análisis de estructuras en ingeniería civil se basan en las teorías actuales de estática y dinámica de resistencia de materiales, con el objetivo de diseñar estructuras que se comporten adecuadamente ante la acción de fuerzas naturales que las afectan durante su periodo de vida.

Esta tesis presenta un nuevo modelo semidefinido para analizar estructuras (en este caso aplicado a tanques elevados para almacenar líquidos), introduciendo las acciones sísmicas en la base, o sea, sin restricciones en la frontera.

Objetivo General

El objetivo general de esta investigación es mencionar las distintas restricciones que presentan los actuales métodos de análisis sísmico y compararlas con las nuevas perspectivas que establece el nuevo método que se presenta.

El nuevo método de análisis dinámico será delineado de forma clara en varios aspectos, al final se verá una aplicación en el análisis sísmico de tanques elevados para almacenar líquidos.

Objetivos Específicos

- Simular con el modelo propuesto el comportamiento de la estructura que soporta al tanque elevado así como también el comportamiento del agua contenida bajo una acción sísmica.
- Comprobar la exactitud del modelo del sistema con el recientemente encontrado concepto de equilibrio dinámico (Urrutia, 2008 [1]) (Segunda Ley de Newton) de un sistema semidefinido y con álgebra compleja.
- Introducir los conceptos de Trabajo, Energía Potencial Elástica, Energía Cinética y Potencia al análisis de estructuras bajo el modelo propuesto.

Alcance

Esta investigación se limita a los siguientes puntos:

- Se presentará el nuevo método para análisis sísmico empleando álgebra con vectores complejos.
- No se analizará de forma detallada la presión extra que ejerce el líquido contenido en el tanque cuando se encuentra bajo acciones sísmicas.

Lo anterior se desarrolla no sin antes explicar y hacer presente una revisión histórica en diferentes antecedentes, explicados en el capítulo uno, tales como: las vibraciones para sistemas positivo definido, ¿qué son?, ¿qué y cómo afectan a los sistemas dinámicos? y ¿cómo se resuelve el problema para los diferentes tipos de vibración?. También se verán las ecuaciones de movimiento tradicionales, basadas principalmente en la Segunda Ley de Newton, las formas de las distintas soluciones y sus diferentes formas de expresión. Con respecto a la ingeniería sísmica, se analizará cuál es la base que sustenta las suposiciones que se realizan para encontrar el comportamiento de estructuras, de uno o varios grados de libertad.

Adicional a lo anterior, se describe el problema de **convergencia** que en la literatura actual de ingeniería sísmica no se toma en cuenta y se mostrarán sus ventajas a la hora de resolver los problemas que hoy en día se presentan.

Para realizar y observar resultados claros cuando se aplica el nuevo método de análisis, primero es necesario presentarlo y detallar como funciona. Por ello, en el capítulo dos se muestra el nuevo modelo semidefinido con espacios vectoriales complejos, con su respectivo método para encontrar y resolver las ecuaciones de movimiento bajo dos formas de acción: (1) Asumiendo que la fuerza de excitación se presenta en la frontera del sistema (en el subespacio) y (2) Asumiendo que la fuerza de excitación se encuentra en la parte interna de la estructura, como actualmente se hace. Por lo anterior, se presentan dos ejemplos en el que cual se aplica el nuevo método de análisis, mostrando e interpretando los resultados obtenidos y comprobando la Segunda ley de Newton en un análisis de precisión de los cálculos realizados. Al final se explicarán alcances, ventajas y desventajas de los dos modelos utilizados.

En el capítulo tres se desarrolla el tema central de esta tesis: se aplica el nuevo método a tanques elevados para almacenar líquidos. Además de obtener e interpretar los nuevos resultados, se introducirán los conceptos físicos de trabajo, energía potencial elástica, energía cinética y potencia. Esto último se mostrará como otra alternativa de ver al problema de tanques elevados y en general de cualquier problema de mecánica. También se verá gráficamente y se discutirá el balance de energía en el sistema dinámico propuesto.

Capítulo 1

En este capítulo se escribe sobre el estado del arte actual y sobre las restricciones en el modelo matemático (no físico) que trata de representar los problemas mecánicos reales encontrados en ingeniería sísmica. Se hablará sobre el tipo de vibraciones y sus diferentes componentes. Así como sobre los diferentes métodos para encontrar y establecer las ecuaciones de movimiento que rigen a los sistemas mecánicos. Al final se presentan un análisis de convergencia de los resultados obtenidos por tales métodos y se hace ver la diferencia que existe respecto a la nueva metodología de análisis sísmico, que introduce la acción del sismo por la base o frontera del tanque elevado y no dentro de la estructura, haciendo uso de un álgebra compleja recientemente desarrollada (Urrutia 2011 [2]).

1.1 Estado del Arte

Actualmente, para que a un sistema mecánico como el que tratamos en esta tesis se le pueda encontrar una solución, es necesario que éste cumpla con ciertas condiciones, como la de imponer que el sistema de ecuaciones por resolver sea positivo definido. A su vez, el sistema mecánico tiene que cumplir con otras restricciones, mejor conocidas como condiciones de frontera.

Como primer punto en la mecánica clásica y como primera restricción, se dice que un sistema mecánico debe de ser un campo de fuerzas conservativo, esto es, que no importa el trayecto, sino solamente importan las configuraciones iniciales y finales, por lo tanto la energía mecánica de todo el sistema se mantiene constante.

Por ejemplo, Yépez (2007) [3], en su quinto capítulo establece, sobre física clásica:

- 1) *...“En los problemas en los que el movimiento de un sistema dinámico se restringe de alguna forma, a través de recipientes, cuerdas, paredes, barras, etc., las fuerzas de restricción se conocen por su efecto, no son un dato del problema ni obedecen la leyes generales del movimiento...
...donde aparecen restricciones, es necesario primero eliminarlas de la descripción por algún método”...*

El mismo Yépez más adelante, al clasificar las restricciones, afirma lo siguiente:

- 2) *“Se puede también clasificar las restricciones de acuerdo a su dependencia temporal:

Reónomas, si dependen del tiempo.
Esclerónomas, si son independientes del tiempo.”*

En las afirmaciones anteriores se notan dos cosas importantes.

En la primer afirmación se menciona que las restricciones no son dato del problema y que no obedecen las leyes generales del movimiento, cosa que habría que comprobar física y numéricamente, pues tanto las restricciones (normalmente algún tipo apoyo o apoyos) que intervienen en el problema, siempre limitan y modulan el comportamiento del sistema y deben de interactuar con el resto del sistema en todo instante para que se obtenga una solución en equilibrio. De no haber equilibrio con la(s) restricción(es), la estructura completa, al estar en desequilibrio, saldría viajando como un vehículo en movimiento bajo la acción de la fuerza resultante.

En la segunda afirmación se dice que existen restricciones o fronteras que no dependen del tiempo y para que ello suceda, las restricciones tendrían que ser constantes y no deberían de responder a ningún tipo de excitación. En la práctica, esta restricción equivale a suponer que la frontera tiene desplazamiento cero.

Dentro del contexto de mecánica clásica Lagrangiana, véase referencia [3], capítulo 5, cualquier sistema mecánico debe estar regido por una función potencial cuadrática positiva definida¹ para encontrar sus ecuaciones de movimiento y eventualmente una solución. Con esto en mente, a cada modelo establecido para representar los problemas que se enfrentan en la actualidad se le tienen que hacer ajustes, según las herramientas y simplificaciones existentes, para que sean los más similar posible a otros modelos matemáticos propuestos.

1.2 Vibraciones. Sistemas Positivos Definidos

Como definición, la vibración es un fenómeno dinámico en el que ocurren oscilaciones de las partículas de un sistema mecánico en torno a un punto de equilibrio.

Un sistema dinámico es una porción de materia que posee masa y rigidez así como aquellos elementos (fuerzas) que son capaces de provocar, mantener o reducir un movimiento.

Ante la excitación armónica, al intervalo de tiempo necesario para que el sistema dinámico cumpla con un ciclo completo de movimiento se le llama *periodo* de la vibración. A su vez, el número de ciclos por unidad de tiempo se define como *frecuencia* del movimiento y al desplazamiento máximo del sistema dinámico durante su periodo se le llama *amplitud*.

1.2.1 Tipos de Vibraciones

De forma sencilla, se puede clasificar a las vibraciones en:

- 1) Vibraciones Libres: cuando el sistema vibra bajo una excitación instantánea.
- 2) Vibraciones Forzadas: cuando el sistema vibra bajo una excitación constante.

A su vez, dicha clasificación se puede hacer más extensiva, dependiendo de la existencia o no de fuerzas resistentes que disipan la energía inducida, las cuales son:

- A) Sin amortiguamiento: cuando no se presentan resistencias pasivas al movimiento del sistema y la vibración no se disipa a través del tiempo.
- B) Con amortiguamiento: cuando se presentan resistencias pasivas al movimiento del sistema y la vibración se disipa a través del tiempo.

Entonces, estableciendo la presencia de amortiguamiento como una pérdida de energía dentro del sistema dinámico, se llega a otro tipo de clasificación para las vibraciones:

- a) Vibraciones Lineales: cuando los componentes principales del sistema tienen un comportamiento lineal bajo la acción de la excitación.
- b) Vibraciones no Lineales: cuando al menos un componente del sistema tiene un comportamiento no lineal bajo la acción de la excitación.

¹ Una función es positiva definida si nunca es negativa y es cero sólo cuando se valúa en el conjunto vacío.

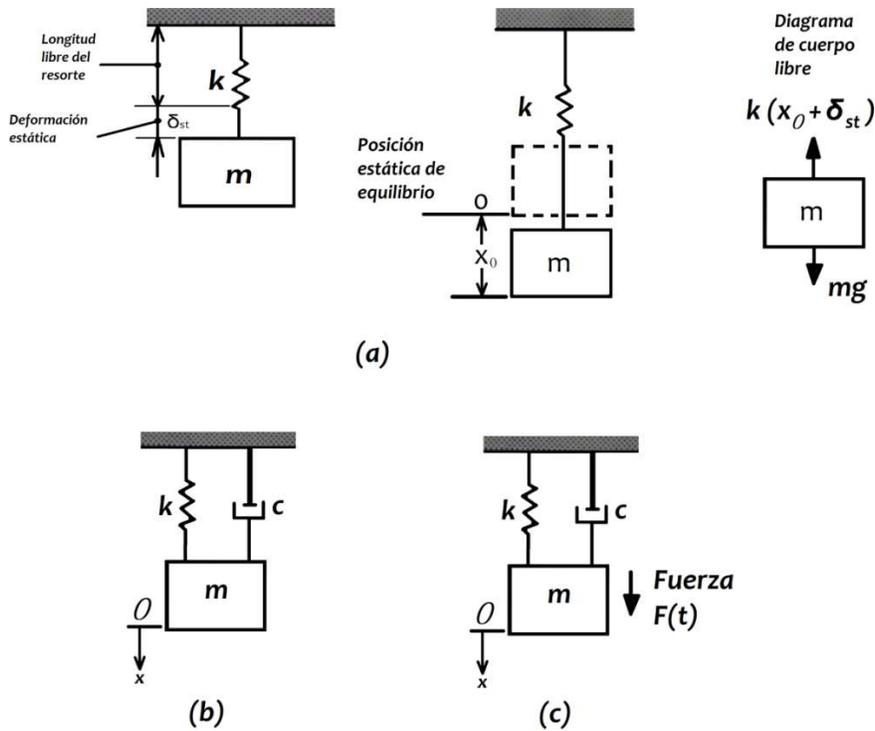


Figura 1. 1

Distintos sistemas de vibración: (a) vibración libre no amortiguada lineal; (b) vibración libre amortiguada; (c) vibración forzada amortiguada.

*Figura tomada de la referencia [4], capítulo *Simple vibratory systems*.

1.3 Ecuaciones de Movimiento Tradicionales

Las ecuaciones de movimiento, como una formulación matemática que define la evolución temporal de un sistema físico en el espacio, permiten determinar en cada instante de tiempo de análisis la futura posición de cualquier sistema en equilibrio. Estas pueden representarse en cualquier tipo de coordenadas.

Para determinar el estado dinámico de un sistema, el cual se define por la posición y velocidad de todas las partículas en un instante determinado, se debe proceder a determinar las *ecuaciones de movimiento* adecuadas según los datos iniciales del problema y sus restricciones.

1.3.1 Segunda Ley de Newton

En la ecuación 1.1 se establece que la fuerza F [N] es igual a la masa m [Kg] por la aceleración provocada a [m/s^2]; además, si se establece que la aceleración es la segunda derivada de la posición respecto al tiempo, en la ecuación 1.2, obtenemos una ecuación diferencial. Esta ecuación recibe el nombre de *ecuación de movimiento* y de ella podemos calcular la trayectoria de la partícula si se conoce la fuerza, pero debemos conocer las condiciones en un tiempo determinado para comenzar su análisis (condiciones iniciales o finales como un dato del problema).

Ecuación 1.1

$$F = m * a$$

Ecuación 1.2

$$F = m * \frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

Con la ecuación 1.2 y sus posibles soluciones se puede completar cualquier ciclo del sistema dinámico. Sin embargo, se debe dejar claro que La Segunda Ley de Newton es la ecuación principal que se debe satisfacer en los sistemas mecánicos para cualquier intervalo de tiempo dado y que existen distintos métodos para llegar a la solución. Por ejemplo, por mencionar algunos métodos: el método de D'Alembert-Euler-Lagrange, basado en el principio del trabajo virtual; el método de Hamilton y Hamilton-Jacobi, basado en un principio variacional; el método de Lagrange, basado en principios equivalentes, etc. (véase referencia [3] capítulo 5 y 9).

Para vibraciones armónicas simples, se hace referencia a la Ley de Hooke para cuerpos elásticos (véase figura 1.2). Esta ley menciona que la fuerza se encuentra relacionada con el producto de la constante de rigidez $[k]$ proporcionada por el cuerpo y su desplazamiento $x(t)$ como sigue:

Ecuación 1.3

$$F = k * x(t)$$

Relacionando la ecuación 1.2 con la ecuación 1.3 para predecir el movimiento que tendrá el cuerpo elástico ante la acción de una fuerza, se obtiene la ecuación 1.4².

Ecuación 1.4

$$F(x) = -k * x(t) = m * \frac{d^2x(t)}{dt^2}$$
³

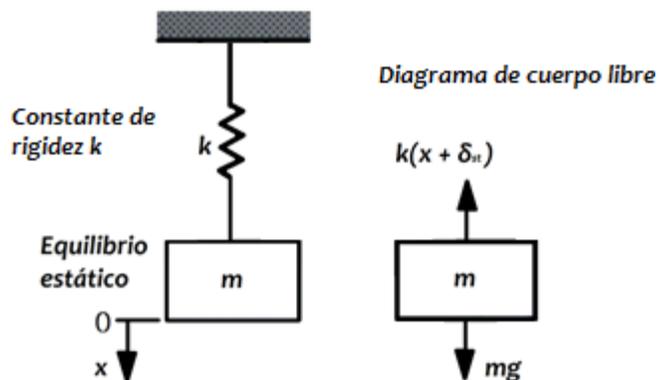


Figura 1. 2

Vibración armónica simple, constante de rigidez k y Ley de Hooke.

*Figura tomada de la referencia [4] *Simple vibratory systems*.

Reagrupando y simplificando con una división entre la masa, además de sustituir k/m por ω_n^2 ,⁴ la ecuación 1.4 se transforma en la llamada ecuación armónica, la cual es:

² Referencia [3] Yépez, pág. 45, subtema *Ley de Hooke. Oscilaciones armónicas*.

³ El signo negativo muestra una convención de equilibrio, ya que la constante de rigidez se opone a la deformación provocada por la fuerza ejercida.

⁴ Será conveniente llamar ω_n frecuencia natural circular del sistema.

Ecuación 1.5

$$\frac{\left(m * \frac{d^2 x(t)}{dt^2}\right)}{m} + \frac{(k * x(t))}{m} = 0$$

(a)

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \omega_n^2 * x(t) = 0$$

(b)

De la ecuación 1.5 (b), por ser una ecuación diferencial de segundo orden y homogénea, se puede resolver utilizando su ecuación característica (ecuación 1.6-1.10). Así obtenemos la forma de la ecuación 1.11, siendo a y b constantes arbitrarias para evaluar las condiciones conocidas.

Obtención de la ecuación característica:

Ecuación 1.6

$$\text{Det} \left| \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \omega_n^2 * x(t) \right| = 0$$

Ecuación 1.7

$$x(t) = A * e^{qt}$$

que al sustituir en la ecuación 1.5:

Ecuación 1.8

$$e^{qt} * \left(q^2 + \frac{k}{m}\right) = 0$$

Por lo que su solución se escribe como:

Ecuación 1.9

$$q = \pm i \sqrt{\frac{k}{m}} = \pm i \omega_n$$

Lo que permite escribir:

Ecuación 1.10

$$x(t) = A e^{i\omega_n t} + B e^{-i\omega_n t}$$

Conservando solamente la parte real de la solución, se arregla la ecuación de la siguiente forma:

Ecuación 1.11

$$x(t) = a * \cos(\omega_n t) + b * \sen(\omega_n t)$$

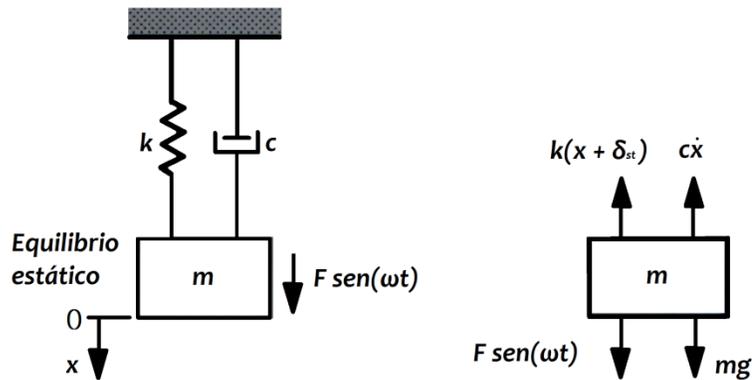


Figura 1.3

Modelo para sistemas de un grado de libertad.

*Figura tomada de la referencia [4] *Simple vibratory systems*.

Siguiendo ahora, con una vibración forzada amortiguada, derivada de la figura 1.3, se continúa con el siguiente análisis.

Para vibraciones armónicas con amortiguamiento, el desplazamiento $x(t)$ de la masa m se mide desde el estado de equilibrio o condición inicial del sistema. El desplazamiento es positivo hacia abajo del diagrama y entonces la velocidad $\dot{x}(t)$ y la aceleración $\ddot{x}(t)$ también los son en tal dirección. Una fuerza positiva $F(t)$ en la masa m produce una aceleración positiva.

Así, la ecuación de movimiento, haciendo referencia al diagrama de cuerpo libre, es de la forma de la ecuación 1.14, las fuerzas actuantes son: (1) la fuerza gravitacional mg la cual es una constante; (2) la fuerza del resorte $k(x + \delta_{st})$, la cual se opone al movimiento; (3) la fuerza de amortiguamiento $c\dot{x}(t)$ la cual se opone a la velocidad; y (4) la fuerza de excitación que se asume igual a $F * \text{sen}(\omega t)$.

Ecuación 1.12

$$F(t) = m * a = \sum (\text{fuerzas})_x$$

Ecuación 1.13

$$m \frac{d^2}{dt^2} (x + \delta_{st}) = -k(x + \delta_{st}) - c \frac{d}{dt} (x + \delta_{st}) + mg + F \text{sen}(\omega t)$$

Al desarrollar y ordenando los elementos tenemos

Ecuación 1.14

$$F * \text{sen}(\omega t) = m * \ddot{x}(t) + c * \dot{x}(t) + k * x(t)^5$$

Siendo la ecuación 1.14 una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden con coeficientes constantes, se procede a formular una solución general $x(t)$: que será la suma de la *función complementaria* $x_c(t)$ y la *integral particular* $x_p(t)$.

Ecuación 1.15

$$x(t) = x_c(t) + x_p(t)$$

⁵ Referencia [4], *Mechanical Vibrations, Theory and Applications*, pág. 33-34.

La función complementaria satisface la ecuación homogénea

Ecuación 1.16

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = 0$$

cuya solución es de la forma

Ecuación 1.17

$$x_c = Be^{st}$$

donde B y s son constantes. Sustituyendo la ecuación 1.17 en la ecuación 1.16 se tiene

Ecuación 1.18

$$(ms^2 + cs + k)Be^{st} = 0$$

Tomando en cuenta que Be^{st} no puede ser cero, en cualquier instante t , la ecuación 1.18 se reduce a

Ecuación 1.19

$$ms^2 + cs + k = 0$$

A la ecuación 1.19 se le llama *ecuación característica* del sistema. Entonces sus raíces son

Ecuación 1.20

$$s_{1,2} = \frac{1}{2m} \left(-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk} \right)$$

Como son dos raíces, la función complementaria se presenta como

Ecuación 1.21

$$x_c = B_1 e^{s_1 t} + B_2 e^{s_2 t}$$

donde B_1 y B_2 son constantes arbitrarias para evaluar las condiciones conocidas.

Para escribir las ecuaciones anteriormente descritas con un mejor entendimiento y definiendo algunos conceptos extras tales como: ω_n frecuencia circular natural de vibración del sistema; ζ como el factor de amortiguamiento, se tiene:

Ecuación 1.22

$$\frac{k}{m} = \omega_n^2 \quad \text{y} \quad \frac{c}{m} = 2\zeta\omega_n \quad \text{o} \quad \zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}}$$

De la ecuación 1.22, si m , c y k son constantes positivas, ζ será positiva. Si ahora se sustituye las expresiones de la ecuación 1.22 en las ecuaciones (1.16), (1.19) y (1.20) se tiene

Ecuación 1.23

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = 0$$

Ecuación 1.24

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

Ecuación 1.25

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}\omega_n$$

Cuando $\zeta > 1$, la ecuación 1.25 define que las raíces son reales, pero son distintas y negativas cuando $\sqrt{\zeta^2 - 1} < \zeta$. Si las dos raíces son negativas, el movimiento va disminuyendo en función del tiempo y éste es *aperiódico*.

Cuando $\zeta = 1$, la ecuación 1.25 muestra entonces que ambas raíces son igual a $-\omega_n$, lo que significa que la función complementaria es de la forma

$$x_c = (B_3 + B_4 t) * e^{-\omega_n t} \quad \text{Ecuación 1.26}$$

donde B_3 y B_4 son constantes. Nuevamente el movimiento es aperiódico. Así, el $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\omega_n t} = 0$, el movimiento eventualmente disminuirá a cero.

Cuando $\zeta < 1$, las raíces son complejas conjugadas.

Ecuación 1.27

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm i\sqrt{1 - \zeta^2}\omega_n$$

donde $i = \sqrt{-1}$. Entonces, en la literatura actual se define como frecuencia amortiguada a la siguiente expresión

$$\omega_d = \sqrt{1 - \zeta^2}\omega_n \quad \text{Ecuación 1.28}$$

y se usa la sintaxis de Euler $e^{\pm i\theta} = \cos(\theta) \pm i\text{sen}(\theta)$, la función complementaria x_c de la ecuación 1.26 se transforma en

$$x_c = e^{-\zeta\omega_n t} (B_1 e^{i\omega_d t} + B_2 e^{-i\omega_d t}) \quad \text{Ecuación 1.29}$$

(a)

o bien

$$x_c = e^{-\zeta\omega_n t} [(B_1 + B_2) \cos(\omega_d t) + i(B_1 - B_2) \text{sen}(\omega_d t)] \quad \text{(b)}$$

Si el desplazamiento $x_c(t)$ es una cantidad física real, los coeficientes $(B_1 + B_2)$ y $i(B_1 - B_2)$, en la ecuación 1.29 (b), serán reales también. Esto requerirá forzosamente que B_1 y B_2 sean números complejos conjugados. Así, nuevamente, la ecuación 1.29 se puede reescribir como

$$x_c = e^{-\zeta\omega_n t} (A_1 \cos(\omega_d t) + A_2 \text{sen}(\omega_d t)) \quad \text{Ecuación 1.30}$$

o bien

$$x_c = A e^{-\zeta\omega_n t} \text{sen}(\omega_d t + \psi) \quad \text{Ecuación 1.31}$$

donde A_1 y A_2 son constantes reales para evaluar las condiciones iniciales. La función armónica de la ecuación 1.30 se combina para dar origen a la ecuación 1.31, donde $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$ y $\psi = \tan^{-1}(A_1/A_2)$. El movimiento que describe la ecuación 1.31 consiste en un movimiento armónico cuya frecuencia ω_d y una amplitud $A e^{-\zeta\omega_n t}$ disminuyen exponencialmente en función del tiempo.

Para los casos anteriormente descritos, el tipo de movimiento descrito por $x_c(t)$ depende totalmente de la variable ζ . Se dice que el sistema está sobre amortiguado cuando $\zeta > 1$; que tiene un amortiguamiento crítico cuando $\zeta = 1$; o que simplemente el sistema está amortiguado cuando $\zeta < 1$.

Se debe tener claro que: (1) $x_c(t)$ es una curva debida a la vibración del sistema sólo si éste es amortiguado; (2) la frecuencia de oscilación ω_d es de menor magnitud que la frecuencia natural de vibración del sistema ω_n ; y (3) en todos los casos, $x_c(t)$ que eventualmente será cero, depende de la configuración inicial y las fuerzas de excitación del sistema.

El coeficiente crítico de amortiguamiento c_c es la cantidad de amortiguamiento necesario para que el sistema posea un amortiguamiento crítico. De la ecuación 1.22, tenemos que

$$c_c = 2\sqrt{km} \quad \text{Ecuación 1.32}$$

Por lo tanto, el factor de amortiguamiento ζ puede definirse como

$$\zeta = \frac{c}{c_c} \quad \text{Ecuación 1.33}$$

esta es una medida para que el amortiguamiento necesario c sea comparado con el necesario para que un sistema tenga amortiguamiento crítico.

La integral particular para la excitación $F(t) = F\text{sen}(\omega t)$ de la ecuación 1.14 se supone de la forma

$$x_p = X\text{sen}(\omega t - \Phi) \quad \text{Ecuación 1.34}$$

Los valores de X y Φ se pueden obtener al sustituir la ecuación 1.34 en la ecuación 1.14. Así, se puede mostrar la amplitud de X del estado fijo o respuesta armónica como

$$X = \frac{F}{\sqrt{(k - \omega^2 m)^2 + (\omega c)^2}} \quad \text{Ecuación 1.35}$$

o bien

$$X = \frac{F/k}{\sqrt{(1 - \omega^2 m/k)^2 + (\omega c/k)^2}} \quad \text{Ecuación 1.36}$$

y

$$\Phi = \tan^{-1}\left(\frac{\omega c}{k - \omega^2 m}\right) \quad \text{o} \quad \Phi = \tan^{-1}\left(\frac{\frac{\omega c}{k}}{1 - \frac{\omega^2 m}{k}}\right) \quad \text{Ecuación 1.37}$$

X es la amplitud de la respuesta armónica y $-\Phi$ es el ángulo de fase de $x_p(t)$, o sea el desplazamiento relativo para la excitación $F\text{sen}(\omega t)$ en Φ radianes.

Al sustituir las relaciones $k/m = \omega_n^2$ y $\omega c/k = 2\zeta\omega/\omega_n$ mientras se define $r = \omega/\omega_n$, en las ecuaciones 1.36 y 1.37 se convierten en

$$\frac{X}{\frac{F}{k}} = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} = R$$

Ecuación 1.38

Y

$$\Phi = \tan^{-1}\left(\frac{2\zeta r}{1-r^2}\right)$$

Ecuación 1.39

donde a R se le conoce como *factor de magnificación* y r el *radio de la frecuencia* de excitación a la frecuencia natural del sistema.

En resumen, algunas de las características más importantes del movimiento $X\text{sen}(\omega t - \Phi)$ debido a la excitación $F\text{sen}(\omega t)$ son:

- El movimiento descrito por la ecuación 1.26 es armónico y es de la misma frecuencia que la excitación. Para obtener una excitación armónica con una amplitud F constante y frecuencia ω , la amplitud X y el ángulo de fase Φ del movimiento deben de ser constantes. Por lo tanto, la *integral particular* da como resultado el estado fijo de respuesta debido a la excitación armónica.
- Ya que la integral particular no contiene constantes arbitrarias, el estado fijo de respuesta del sistema es independiente de las *condiciones iniciales*.
- La cantidad $X/(F/k) \triangleq R$ es llamado factor de magnificación, anteriormente descrito. Esto es una relación de desplazamiento, donde X es la amplitud del estado fijo de respuesta y F/k es el desplazamiento que le corresponde cuando $\omega = 0$. A R se le puede considerar mayor o menor que la unidad, dependiendo del factor de amortiguamiento ζ y el radio de frecuencia r .
- En resonancia, cuando $r = \frac{\omega}{\omega_n} = 1$, el factor de magnificación R está limitado sólo por el amortiguamiento en el sistema.
- El ángulo de fase Φ va desde 0 a 180°. El ángulo de fase varía con la frecuencia de excitación y el amortiguamiento del sistema. Sin amortiguamiento, el ángulo de fase puede ser 0 o 180°. En resonancia, cuando $r = 1$, el ángulo de fase es siempre 90°.

Por lo anterior descrito, la solución general a la ecuación de movimiento (ecuación 1.40), representa la respuesta del sistema a una excitación armónica dadas las condiciones iniciales.

Asumiendo que el sistema se encuentra en un estado amortiguado y que este a su vez desencadena una vibración, se sustituyen las ecuaciones 1.30 y 1.34 en la ecuación 1.15 para obtener

$$x(t) = Ae^{-\zeta\omega_n t}\text{sen}(\omega_d t + \psi) + X\text{sen}(\omega t - \Phi)$$

Ecuación 1.40

donde X y Φ son calculadas a partir de las expresiones 1.38 y 1.39, respectivamente. Cabe mencionar que únicamente las constantes A y ψ son arbitrarias y son evaluadas considerando las condiciones conocidas para la solución general.

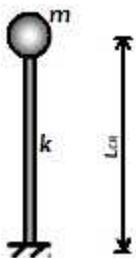
Aunque la excitación armónica y las condiciones iniciales son aplicadas al sistema, este a su vez pretende seguir la excitación y vibrar a su frecuencia natural. Como x_p se rige por la excitación, esta debe seguir la frecuencia de la misma. No así lo hace x_c , la cual no se rige por la excitación y el movimiento se vuelve pasajero. La frecuencia ω_d del movimiento relativo es a la que vibra libremente el sistema.

1.4 Ingeniería Sísmica

La ingeniería sísmica se encarga de estudiar el comportamiento de las estructuras sujetas a acciones sísmicas. Este comportamiento puede variar según las condiciones de cada estructura, como puede ser su peso, su geometría y la zona en la que se ubique. Por las diferentes cuestiones, es necesario plantear métodos de análisis que arrojen resultados que podamos interpretar para el diseño de las mismas.

1.4.1 Análisis Sísmico para Sistemas de Uno y Varios Grados de Libertad

El número de grados de libertad de una estructura se define como el número de coordenadas independientes necesarias para definir la posición geométrica de todas las masas del sistema. Así, un ejemplo de un sistema con un grado de libertad se observa en la figura 1.4.



Este modelo es ampliamente aplicado en el *análisis sísmico estático*, llamado así porque considera que la acción sísmica es aplicada durante un periodo de tiempo indefinido o de manera muy lenta. Además, la distribución de la fuerza sísmica se reparte linealmente según el peso y la altura de cada nivel de la estructura, además de aceptar que las aceleraciones en los diferentes niveles se distribuye linealmente partiendo desde cero hasta una aceleración máxima a_M en la punta (véase figura 1.5).

Figura 1. 4
Modelo un grado de libertad.

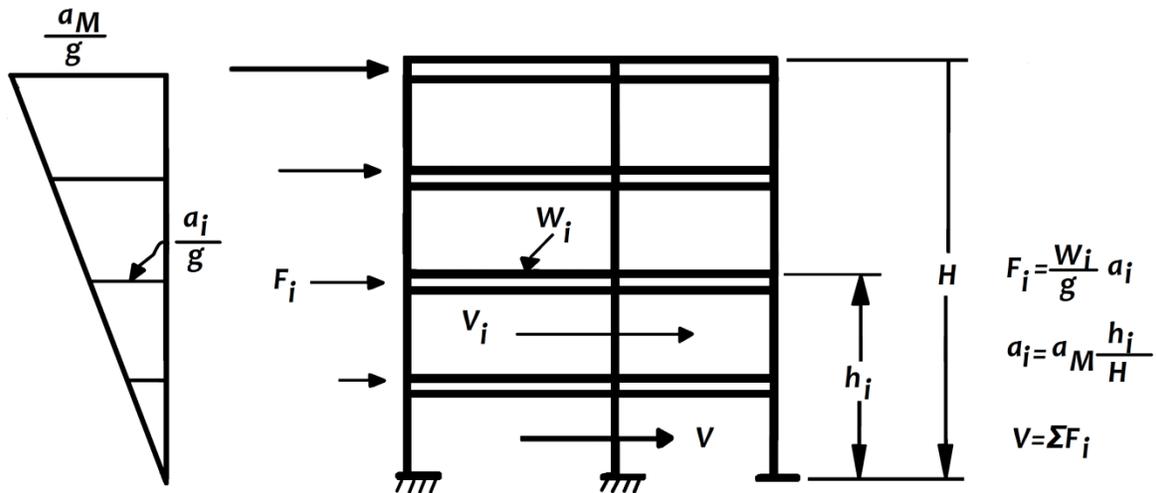


Figura 1.5

Distribución de fuerzas laterales según el método estático.

*Figura tomada de la referencia [6], *Diseño Estructural*.

El método estático tiene varias hipótesis de comportamiento que se deben tomar en cuenta para su aplicación, según reglamentos y la literatura en general. Algunas restricciones se mencionan a continuación:

- Los pesos de cada nivel son semejantes y su masa se distribuye de manera uniforme sobre cada una de sus plantas.
- La rigidez lateral de cada nivel está distribuida de manera uniforme en la planta y son semejantes entre cada nivel.
- La estructura es regular y tiende a ser simétrica.
- Una altura no mayor a 40 m para estructuras regulares y no mayor de 30m para estructuras irregulares.

Adicional a lo anterior, existe un procedimiento más elemental, llamado *análisis estático simplificado*, el cual sólo es aplicable a estructuras compuestas principalmente por muros de mampostería, considerando que la fuerza sísmica se distribuye de manera uniforme a lo largo de éstos, haciendo caso omiso de los desplazamientos horizontales, torsiones y momentos de volteo, restringiéndose únicamente a la suma de las resistencias al corte.

Como extra a los procedimientos ya mencionados, tenemos el procedimiento llamado *análisis sísmico como un péndulo invertido*, el cual aplica la fuerza sísmica en la parte superior de la estructura, como en la figura 1.6 (donde más del 50% de la masa total debería de estar). Cabe mencionar que este es el método que actualmente en México se aplica para analizar tanques elevados (Manual CFE [16]), incluyendo en el análisis los efectos hidrodinámicos del líquido almacenado.

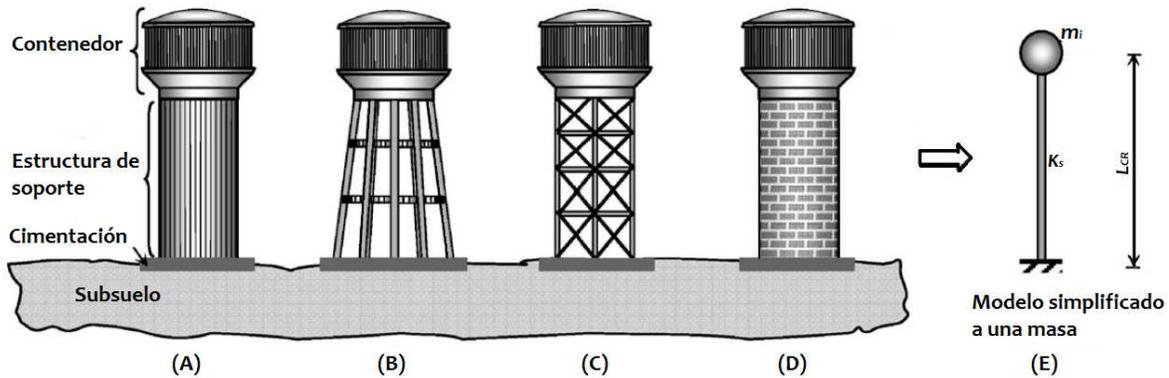


Figura 1. 6

Tanques elevados y modelo de un grado de libertad que los representa, sin importar el material del que esté hecha la estructura de soporte. En las figuras mostradas varían en el material de la estructura de soporte: (A) Concreto reforzado; (B) Acero; (C) Mixto, de concreto reforzado y acero; (D) de mampostería.

*Figura tomada de la referencia [10], *Simplified seismic analysis procedures for elevated tanks considering fluid-structure-soil interaction*.

Para las estructuras que no cumplan con lo anterior, se aplica el procedimiento llamado *análisis sísmico dinámico*, el cual tiene varios procedimientos y según la cantidad de información con la que se cuente, se elegirá el análisis que mejor aplique.

El *análisis sísmico dinámico modal* (también llamado análisis espectral) involucra las frecuencias naturales de vibración, el periodo de vibración de la estructura y sus modos de vibrar, suponiendo aceleraciones espectrales de diseño, según la zona en la que se encuentre la estructura y el tipo de suelo predominante con sus respectivas hipótesis de comportamiento (región y tipo de suelo establecidos por los reglamentos de cada localidad).

El *análisis dinámico paso a paso*, que es la solución directa a las ecuaciones de movimiento para una acelerograma medido con anterioridad, es muy laborioso y tedioso, pero, con la intervención de computadoras, su aplicación ha ido en aumento. Por ejemplo, para este tipo de procedimiento contamos con un método numérico asistido por computadora llamado *elementos finitos* (M. J. Turner, R. W. Clough, H. C. Martin, L. J. Topp, 1956) el cual arroja una solución analítica a aquellas expresiones matemáticas que dependen de alguna determinada incógnita (generalmente para ecuaciones diferenciales de difícil solución).

1.5 Convergencia en los Resultados

Los resultados arrojados por los diferentes procedimientos matemáticos de análisis sísmico no bastan para representar el comportamiento de las estructuras, algunos son muy extensos y confusos, otros muy simplificados y, sin embargo, muchos de estos métodos están totalmente alejados de lo que sucede en la realidad. Esto se debe quizá a distintas razones: la ausencia de teoría matemática que permitiera el desarrollo de modelos matemáticos más completos y precisos (la intervención de los números complejos); la interpretación del fenómeno sólo como un problema matemático y no como un problema físico-matemático; la comprobación de la precisión de la teoría con experimentos en el laboratorio (por mencionar un ejemplo, los experimentos en la mesa vibradora), entre otras.

La aplicación de las fuerzas sísmicas en la parte superior de la estructura, además del empotramiento en la base de la misma, son una simplificación del problema que restringen los resultados obtenidos, pues la falta de un desplazamiento de la base impide que haya comprobación alguna de los métodos aplicados, como también impide el equilibrio dinámico del sistema que ha sido recientemente encontrado y demostrado por Urrutia (2008, [1]). Si la base en verdad no se moviera cuando la estructura interactúa con un sismo, el sistema no estaría en equilibrio, lo que inmediatamente provocaría su colapso.

Capítulo 2

Estado del Arte Actual

En este capítulo se escribe sobre el nuevo modelo con espacios vectoriales complejos con sus diferentes características y aplicaciones, además de mostrar un ejemplo aplicado de ingeniería sísmica donde la 2da Ley de Newton se utilizará para verificar la precisión de los cálculos realizados. Todo lo descrito se ha publicado recientemente por Urrutia (2008, [1], 2011[2]).

2.1 Nuevo Modelo Semidefinido con Espacios Vectoriales Complejos

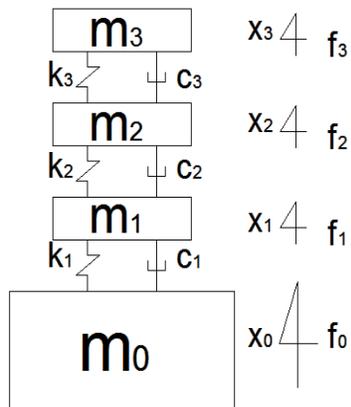
Para realizar un diseño adecuado, donde se garantice sobre todo la seguridad de las personas que utilizarán las estructuras, es necesario que los modelos representen las estructuras sean lo más completos posibles. Para que esto se logre, los modelos deben de satisfacer las condiciones generales que la naturaleza establece y no las hipótesis y axiomas de comportamiento que las teorías, por necesidad, actualmente requieren. Por ejemplo, para que los modelos actuales funcionen, el sistema representado debe de ser un sistema positivo definido, descrito en el capítulo uno, lo que excluye la participación de la frontera o base de la estructura.

Si las fuerzas aplicadas en los modelos, que provocan desplazamientos, velocidades y aceleraciones, se aplican en puntos dentro de la frontera, sobre cualquier punto de la estructura, los sistemas positivos definidos arrojarán resultados admisibles y físicamente explicables. Sin embargo, para casos como el problema sísmico en las estructuras los resultados arrojados suelen ser de difícil interpretación.

Por lo anterior descrito, Urrutia (2008, [1]) describe un método físico con vectores complejos en el que se incluye una estructura principal y su semiespacio móvil, acoplado dinámicamente con su respectiva rigidez y su amortiguamiento. Este nuevo método permite de manera clara introducir el efecto del sismo por la base o semiespacio móvil y simplemente observar como las masas de la estructura principal vibran de acuerdo a esa excitación, Urrutia (2011, [2]).

2.2 Presentación del Nuevo Método

En la figura 2.1 se muestra el sistema semidefinido⁶ con cuatro masas m_0 , m_1 , m_2 y m_3 unidas y acopladas por los resortes k_1 , k_2 y k_3 , y los amortiguadores c_1 , c_2 y c_3 . La masa m_0 representa una masa de suelo finita en la cual la estructura se encuentra cimentada. Tal modelo tiende a un sistema positivo definido clásico con 3 grados de libertad cuando la masa m_0 es mucho más grande que las otras tres masas o cuando esta tiende a infinito. A la masa m_0 , se le denomina comúnmente, *semiespacio*.



A las masas m_j y sus elementos de acoplamiento, la rigidez k_j y los amortiguadores c_j se les asignará el nombre de sistema principal. Las fuerzas f_0 , f_1 y f_2 son funciones del tiempo y representan las excitaciones que pueden ser aplicadas al sistema. Este modelo no tiene restricción alguna. Puede aplicarse la fuerza de excitación en cualquier parte sobre el sistema (incluida la masa m_0) provocando sus respectivos desplazamientos, pudiendo llegar a analizar otros problemas semidefinidos y para cualquier número de grados de libertad que se requiera.

Figura 2. 1
Sistema semidefinido, tres grados de libertad.

⁶ Se le llama sistema semidefinido cuando una raíz de la ecuación de frecuencias es cero, lo que provoca que no exista un movimiento relativo dentro del sistema, asumiendo que éste se comporte como un cuerpo rígido.

2.2.1 Ecuaciones de Movimiento Urrutia (2008, [1])

Las ecuaciones del movimiento para el sistema dinámico en su expresión matricial son

$$\begin{bmatrix} m_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \ddot{x}_0 \\ \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 & -c_1 & 0 & 0 \\ -c_1 & c_1 + c_2 & -c_2 & 0 \\ 0 & -c_2 & c_1 + c_2 & -c_3 \\ 0 & 0 & -c_3 & c_3 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_1 + k_2 & -k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} \quad \text{Ecuación 2. 1}$$

Si se supone una excitación armónica del tipo

$$f_j = F e^{i\omega t}; j = 0 \dots 3; i = \sqrt{-1} \quad \text{Ecuación 2. 2}$$

la respuesta cinemáticamente compatible de desplazamiento absoluto del sistema es

$$x_j(t) = X_j e^{i\omega t}; j = 0 \dots 3 \quad \text{Ecuación 2. 3}$$

Por lo que las derivadas con respecto al tiempo serían:

Para la velocidad:

Para la aceleración:

Ecuación 2. 4

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i\omega X_0 e^{i\omega t} \\ i\omega X_1 e^{i\omega t} \\ i\omega X_2 e^{i\omega t} \\ i\omega X_3 e^{i\omega t} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \ddot{x}_0 \\ \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega^2 X_0 e^{i\omega t} \\ -\omega^2 X_1 e^{i\omega t} \\ -\omega^2 X_2 e^{i\omega t} \\ -\omega^2 X_3 e^{i\omega t} \end{bmatrix}$$

Al sustituir las ecuaciones (2.2), (2.3) y (2.4) en la ecuación (2.1) se obtiene:

Ecuación 2. 5

$$\begin{bmatrix} -\omega^2 m_0 + i\omega c_1 + k_1 & -i\omega c_1 - k_1 & 0 & 0 \\ -i\omega c_1 - k_1 & -\omega^2 m_1 + i\omega(c_1 + c_2) + k_1 + k_2 & -i\omega c_2 - k_2 & 0 \\ 0 & -i\omega c_2 - k_2 & -\omega^2 m_2 + i\omega(c_2 + c_3) + k_2 + k_3 & -i\omega c_3 - k_3 \\ 0 & 0 & -i\omega c_3 - k_3 & -\omega^2 m_3 + i\omega c_3 + k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix}$$

La matriz cuadrada de lado izquierdo de la ecuación 2.5 se le llama matriz de impedancia dinámica Z_{ij} (Tse, 1978, [4]), lo que permite escribir a la matriz de la siguiente manera:

Ecuación 2. 6

$$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & 0 & 0 \\ Z_{12} & Z_{22} & Z_{23} & 0 \\ 0 & Z_{23} & Z_{33} & Z_{34} \\ 0 & 0 & Z_{34} & Z_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix}$$

Para fuerzas arbitrarias F_j , resolviendo la ecuación 2.6, se obtiene X_j con $j = 0,1,2$ y 3. Dicha ecuación, referencia [1] y [2] nos conduce a las *Funciones Generales de Transferencia*, válidas para cualquier sistema, por ejemplo: un edificio con una gran base o frontera móvil o un tren con cuatro carros acoplados bajo la acción de una fuerza motriz.

El problema se puede dividir en dos para facilitar su comprensión y su programación, asumiendo que la masa m_0 es mucho mayor a las demás masas, se tiene:

- (1) Aplicando una única fuerza en la frontera m_0 y haciendo nulas las fuerzas en el interior de la estructura.
- (2) Aplicando las fuerzas incidentes en el interior del sistema y haciendo nula la fuerza incidente en la frontera (en la masa m_0).

2.2.2 Excitación en la base $F_0 \neq 0$

Cuando la fuerza se transmite por medio de la masa m_0 , las fuerzas restantes F_1, F_2 y F_3 son igual a cero y por ende la respuesta $X_j(\omega)$ será

Ecuación 2. 7

$$X_0 = \frac{F_0 Z_{22} Z_{33} Z_{44} - F_0 Z_{22} Z_{34}^2 - F_0 Z_{22} Z_{34}^2 - F_0 Z_{23}^2 Z_{44}}{\Delta_\omega}$$

Con Δ_ω como el determinante de la matriz de impedancia dinámica. Este determinante es un índice de independencia lineal entre vectores complejos que forman una matriz. Debe de ser un número complejo distinto de cero. En caso de que no fuera así, indicaría que la matriz de impedancia es singular.⁷

Ecuación 2. 8

$$\Delta_\omega = Z_{11} Z_{22} Z_{33} Z_{44} - Z_{11} Z_{22} Z_{34}^2 - Z_{11} Z_{23}^2 Z_{44} - Z_{12}^2 Z_{33} Z_{44} + Z_{12}^2 Z_{34}^2$$

Ecuación 2. 9

$$X_1 = -\frac{Z_{12} F_0 Z_{33} Z_{44}}{\Delta_\omega}$$

Ecuación 2. 10

$$X_2 = \frac{Z_{12} Z_{23} Z_{44} F_0}{\Delta_\omega}$$

⁷Una matriz es singular cuando su determinante es igual a cero. Una matriz singular NO tiene matriz inversa.

Ecuación 2. 11

$$X_3 = -\frac{Z_{12}Z_{23}Z_{34}F_0}{\Delta_\omega}$$

Cuando los coeficientes de amortiguamiento c_j son reemplazados por $c_j = 2\zeta_j\omega_j m_j$, los elementos de la matriz de impedancia Z_{ij} en la ecuación 2.5 se convierten en

Ecuación 2. 12(a-g)

$$\begin{aligned} Z_{11} &= -\omega^2 m_0 + i\omega c_1 + k_1 \\ Z_{12} &= -i\omega c_1 - k_1 \\ Z_{22} &= -\omega^2 m_1 + i\omega(c_1 + c_2) + k_1 + k_2 \\ Z_{23} &= -i\omega c_2 - k_2 \\ Z_{33} &= -\omega^2 m_2 + i\omega(c_2 + c_3) + k_2 + k_3 \\ Z_{34} &= -i\omega c_3 - k_3 \\ Z_{44} &= -\omega^2 m_3 + i\omega c_3 + k_3 \end{aligned}$$

Con $\omega_j = \sqrt{k_j/m_j}$ y el desplazamiento de cualquier masa está dado por $X_j(\omega, t) = X_j e^{i\omega t}$. Siendo que X_j es un número complejo ($a + bi$).

2.2.3 Excitación en el interior de la estructura $F_0 = 0$

Para este segundo caso de excitación, se dice que F_1, F_2 y $F_3 \neq 0$ y $F_0 = 0$, para proceder con la respuesta a la excitación de la forma X_j , las cuales son

Ecuación 2. 13

$$X_0 = -\frac{F_1 Z_{12} Z_{33} Z_{44} + F_1 Z_{12} Z_{34}^2 + F_2 Z_{12} Z_{23} Z_{44} - F_3 Z_{12} Z_{23} Z_{34}}{\Delta_\omega}$$

Ecuación 2. 14

$$X_1 = \frac{Z_{11} [F_1 Z_{33} Z_{44} - F_1 Z_{34}^2 - F_2 Z_{34} Z_{44} + F_3 Z_{23} Z_{34}]}{\Delta_\omega}$$

Ecuación 2. 15

$$X_2 = \frac{F_2 [Z_{11} Z_{22} Z_{44} - Z_{12}^2 Z_{44}] - Z_{11} Z_{22} Z_{34} F_3 - Z_{11} Z_{23} Z_{44} F_1 + Z_{12}^2 Z_{34} F_3}{\Delta_\omega}$$

Ecuación 2. 16

$$X_3 = \frac{F_2 [Z_{12}^2 Z_{34} - Z_{11} Z_{22} Z_{34}] + F_3 [Z_{11} Z_{22} Z_{33} - Z_{11} Z_{23}^2 - Z_{12}^2 Z_{33}] + Z_{11} Z_{23} Z_{34} F_1}{\Delta_\omega}$$

Con las mismas definiciones para los elementos $Z_{ij}(\omega)$ dadas por las ecuaciones 2.12 (a-g). Por simplificación se ha escrito Z_{ij} en lugar de $Z_{ij}(\omega)$ como en las ecuaciones 2.13-2.16. El desplazamiento complejo será $X_j(\omega, t) = X_j e^{i\omega t}$. El desplazamiento observable real (véase referencia [34]) es dado según la siguiente igualdad $X_r = \text{Re}(X_j) = \text{Re}(X_j e^{i\omega t})$

2.2.4 Ejemplo⁸

La estructura de la figura 2.1 será analizada con los siguientes parámetros:

- Resortes $k_1 = 10$, $k_2 = k_3 = 0$ [unidades de fuerza/unidades de desplazamiento].
- Masas $m_0 = 10^9$; $m_1 = m_2 = m_3 = 10$ [unidades de masa].
- Amortiguamiento $\zeta_1 = 0.10$ (esto es 10% del amortiguamiento crítico) $\zeta_2 = \zeta_3 = 0$.

Bajo estas circunstancias el sistema será excitado por las fuerzas $F_1 = 10 + 0i$ y $F_0 = F_2 = F_3 = 0$ [unidades de fuerza].

Haciendo los resortes $k_2 = k_3 = 0$ y además los amortiguamientos $\zeta_2 = \zeta_3 = 0$ el sistema se vuelve equivalente a un sistema de dos grados de libertad.

Los resultados se muestran en la figura 2.2 (a), (b), (c) y (d). En dicha figura, los desplazamientos de x_2 y x_3 (c) y (d) son cero. Sin embargo, los desplazamientos de x_0 y x_1 (a) y (b) son diferentes de cero, no importa que tan pequeño es x_0 , nunca es cero. El desplazamiento de x_1 es similar al clásico movimiento del modelo de un grado de libertad, así como también se obtiene la diferencia $|x_1 - x_0|$, mostrado en la figura 2.3. Con este resultado se finaliza el modelo más simple (un grado de libertad) que se puede hacer para un problema de vibraciones.

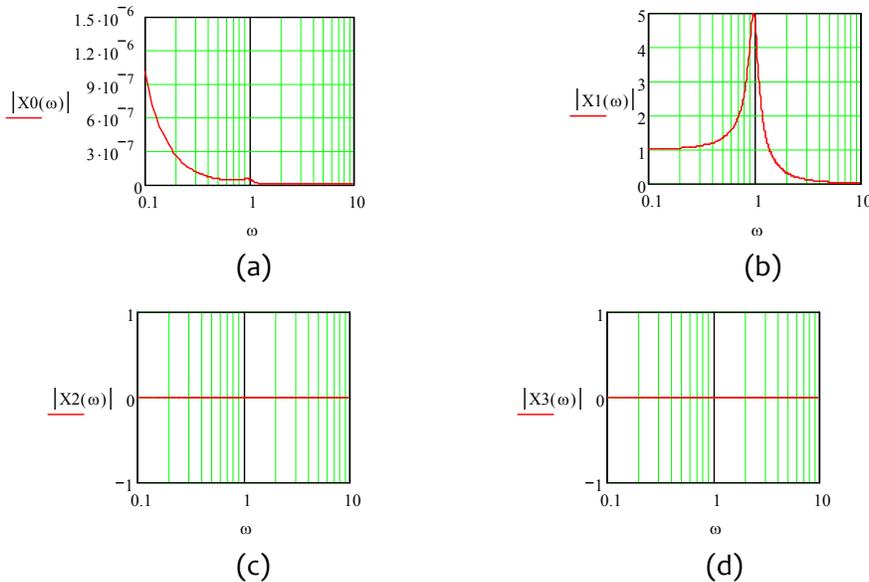


Figura 2. 2
Desplazamientos del modelo más simple para dos masas.

⁸ Ejemplo tomado de Urrutia, en la referencia [1]. *Contributions to Applied Mathematics in Engineering II*.

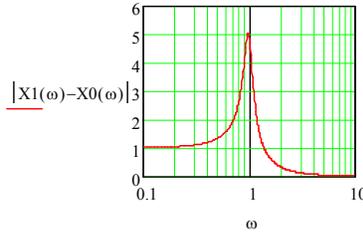
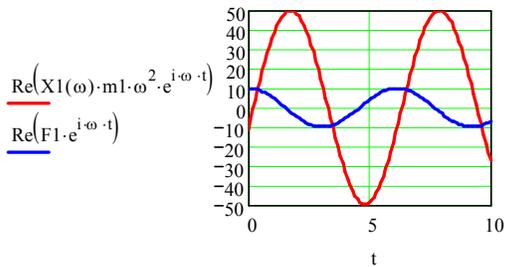


Figura 2. 3
Modelo clásico de un grado de libertad.

1.2.4 Segunda Ley de Movimiento de Newton

Una vez obtenidos los desplazamientos, se debería encontrar una forma para comprobar los resultados. En los programas actuales de análisis estructural la información de la que se dispone después de modelar una estructura involucra a las fuerzas F_j y los desplazamientos de las diversas masas internas X_j , pero no se menciona nada de las fuerzas en las fronteras. Ahora, con una frecuencia $\omega = 1.02345$ [rad/s] y el parámetro tiempo $t = 0..10$ [s] (de 0 a 10 segundos), se muestra en la figura 2.4 (a) la gráfica de la parte real de las fuerzas de inercia de la masa m_1 y la fuerza $F_1(t)$ expresadas como se sigue:

1. $Re(X1(\omega) * m1 * \omega^2 * e^{i\omega t})$
2. $Re(F1 * e^{i\omega t})$



(a) $Re(X1(\omega) * m1 * \omega^2 * e^{i\omega t})$

(b) $Re(F1 * e^{i\omega t})$

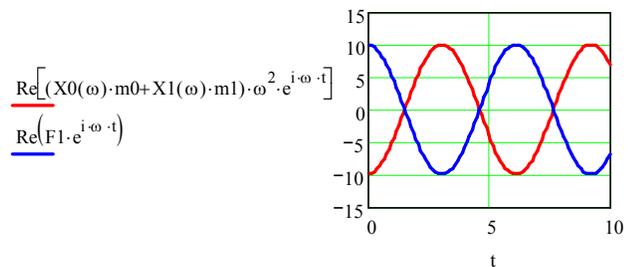


Figura 2. 4
FF1 (t) -vs- XX0 (t).

Se observa en la figura 2.4 (a) que las fuerzas de inercia 1 y la fuerza F_1 (2) nunca son iguales, para ningún instante de tiempo t , entonces la Segunda Ley de Newton no se cumple. Por lo tanto no existe un equilibrio dinámico. Sin embargo, cuando se incluye la fuerza de inercia de la masa m_0 , como se indica en la figura 2.4 (b), se nota que para cualquier instante

t , entre 0 y 10 [s], las fuerzas son iguales y de sentido contrario, cumpliendo con la Segunda Ley de Newton $\sum_{j=1}^{j=n} F_j = \sum_{j=1}^{j=n} m_j a_j^2$ por lo que ya existe el equilibrio dinámico.

1.3 Alcance y Cualidades del Nuevo Método

De primera instancia se puede establecer que se ha encontrado un modelo físico-matemático con un sistema semidefinido con vectores complejos, en una matriz de impedancias que ahora requiere que su determinante Δ_ω sea un número complejo distinto de cero en las ecuaciones 2.6 a 2.11. Cuando los espacios vectoriales complejos se añaden a las ecuaciones se introduce una manera de “memoria” que mantiene un registro de la trayectoria de la posición X_j para cada masa m_j durante cualquier instante de la excitación. Además de que se demuestra que la sumatoria de todas las fuerzas de inercia son siempre iguales y de sentido contrario a las fuerzas de excitación, lo que implica una comprobación de la segunda Ley de Newton al análisis del problema.

En Ingeniería Civil, el problema de excitación inducida por la frontera va en contraste con el método aproximado de reemplazar las fuerzas de un sismo por *fuerzas sísmicas efectivas*. Cuando usamos fuerzas sísmicas efectivas, estas excitaciones van siempre en fase y en sentido contrario a los movimientos efectuados por la base, excepto en el primer modo clásico de vibración, en el cual todas las masas se mueven en la misma dirección cuando la frecuencia de excitación es baja.

Se debe recalcar, que mientras el sistema se encuentra en su estado elástico, las trayectorias de cada masa siguen la *curva de histéresis*⁹ en sentido de las manecillas del reloj o viceversa, manteniendo siempre un equilibrio dinámico.

Este modelo también establece el ahora llamado *Principio de Reciprocidad* (antes teorema de reciprocidad). Una regla o ley que gobierna los fenómenos naturales o cualquier proceso físico o mecánico.

Aunque se deben corroborar los resultados con varios experimentos, por ejemplo, en la mesa vibradora, para verificar la precisión del método aplicado desde el punto de vista de la ingeniería y desde el punto de vista de la física, este modelo fácilmente se puede extrapolar a otros problemas de la ingeniería, por ejemplo, cuando la masa m_0 es de la misma magnitud de las masas restantes, estaremos hablando de partículas unidas como lo es en el caso de un ferrocarril; o un robot caminando, donde cada masa se mueve con independencia y sin ninguna restricción.

⁹ Para ampliar el conocimiento de la “curva de histéresis” véanse referencias [1] y [8].

CAPÍTULO 3

Capítulo 3

Este capítulo se enfoca al diseño de estructuras ante la acción de un sismo, que por lo general para hacer esto, se usan varios métodos como los mencionados en el capítulo 1. A continuación para el caso de tanques elevados se le aplicará el nuevo método semidefinido del capítulo 2 y los resultados obtenidos por dicho método se comparan con los obtenidos por métodos tradicionales.

CAPÍTULO 3

3.1 Aplicación a Tanques Elevados

Para realizar el análisis sísmico de tanques elevados, se considera el comportamiento de dos cosas principales (véase figura 3.1): (1) El comportamiento de la estructura que soporta al tanque de almacenamiento (CE) y (2) el comportamiento que tiene el líquido almacenado en dicho tanque (CL).

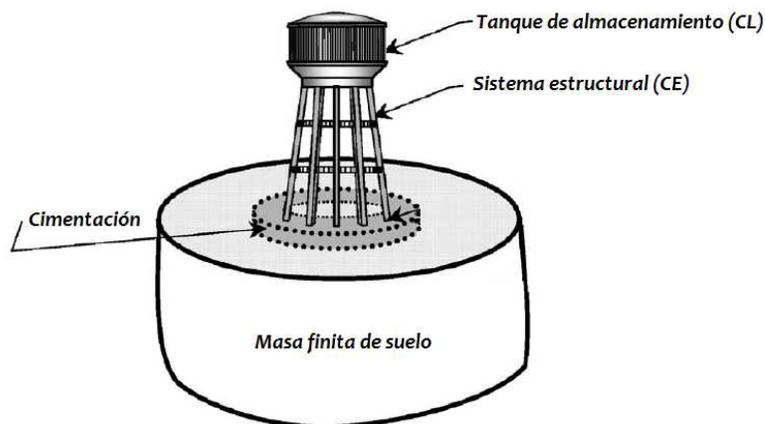


Figura 3. 1
Representación gráfica de un tanque elevado.

*Figura tomada de la referencia [10], *Simplified seismic analysis procedures for elevated tanks considering fluid-structure-soil interaction.*

Para ilustrar el CE, se requiere definir varias cosas: (1) la masa del tanque y la estructura, como una masa concentrada; (2) el fluido contenido; (3) una resistencia horizontal a la flexión (la rigidez de la estructura k_j); (4) un amortiguamiento (c); y (5) calcular las frecuencias circulares naturales de vibración (ω_n). Adicionalmente se propondrá colocar una masa finita de suelo que interactúe con la estructura, con el objetivo de quitar la restricción de frontera (lo que el empotramiento provocaría).

Para ilustrar el CL, se propone una interpretación del modelo hidrostático de Housner (1963, [10]), como se muestra en la figura 3.2(a). El fluido es reemplazado por dos masas: una masa *impulsiva* m_i , considerada como rígida y se encuentra adherida a las paredes del tanque; y una masa *convectiva* m_c , dividida en tres partículas y acoplada mediante una rigidez proporcionada por el agua (k_c) y su respectivo amortiguamiento. Respecto a este último, representa un problema a la hora de colocar su valor. Steve Jeffery, et al. [14] muestra una forma de encontrar su valor experimentalmente, mientras que la norma ASCE [15] (Sociedad Americana de Ingenieros Civiles, por sus siglas en inglés) recomienda un amortiguamiento del 0.5% en la masa convectiva y 2-5% para la masa impulsiva, al igual que IITK-GSDMA [13].

Según la literatura actual, la masa llamada impulsiva fue introducida por Housner en 1963, mientras que la masa convectiva, como una sola, fue introducida por Chen y Barber en 1976. Sin embargo, el modelo propuesto es una nueva forma añadida en esta investigación y se realiza así para tratar de representar el comportamiento del líquido (dado por el conjunto de masas y resortes m_2 y m_3), acoplado mediante las rigideces k_2, k_3 y k_4 , además de contar con su respectivo amortiguamiento c_2, c_3 y c_4 , representando su oleaje a la hora de ejecutar la vibración. Muestra además, la masa m_0 representativa del subespacio (masa de suelo finita). Así, tenemos un modelo de varios grados de libertad, representando la estructura de soporte y el líquido dentro del tanque figura 3.2 (b).

CAPÍTULO 3

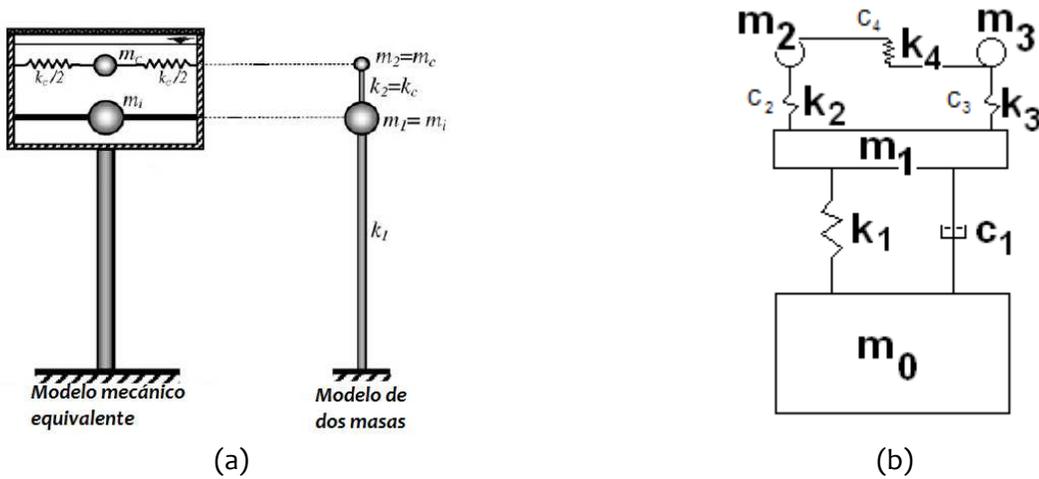


Figura 3. 2
Modelo de un tanque elevado por Housner (a) y el propuesto en esta tesis (b).

3.1.1 Ecuaciones de Movimiento. Método Modificado de Lagrange.

Las ecuaciones de movimiento estarán dadas por el método de Euler-Lagrange (también llamadas ecuaciones de Lagrange), el cual establece:

Ecuación 3. 1

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}_j} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X_j} + \frac{\partial F}{\partial \dot{X}_j} = 0$$

$$j = 1, 2, \dots, f$$

La aplicación de este método y de sus ecuaciones se observa en *Mecánica Analítica* de Yépez, et. al. [3] pág. 171-190, capítulo 5 “Método de Lagrange”, en el cual se habla de los sistemas con movimiento restringido, en los que aparecen fuerzas de restricción que no son conocidas a priori. Sin embargo, si se aplica directamente el método descrito en tal referencia, los resultados arrojados no se explican con facilidad debido a que no se lleva un orden en la aplicación del método y al final sólo se menciona que las ecuaciones se encuentran “acopladas”. En los ejemplos siguientes se aplicará el método con algunas reservas y se verá la variación con el método tradicional.

Para corregir los problemas que existen con el método de Euler-Lagrange original se consideran algunas modificaciones: (1) No se considera frontera alguna como lo establece el método original, o sea, no hay restricciones; (2) no se utiliza un sistema de referencia, los desplazamientos que se obtienen son *absolutos*; (3) se considera que los sentidos positivos están dados de abajo hacia arriba y de izquierda a derecha, referencia [25] y (4) las variables de desplazamiento X_j son números complejos que modelan la realidad de un proceso (referencia [27]) según la siguiente igualdad $X_j = X_j e^{i\omega t}$. La realidad de un proceso físico X_j se calcula como $Re(X_j)$ y no sólo como $Re(X_j)$ como todavía se hace. Las ventajas de esto último se verán más adelante.

CAPÍTULO 3

3.1.2 Ejemplo 1

Para que se realice un ejemplo, se definirá primero los valores de las distintas variables. Se referirá al ejemplo publicado en IITK-GDSMA [13], ejemplo 3, página 71, para representar las diferentes constantes necesarias para el nuevo modelo.

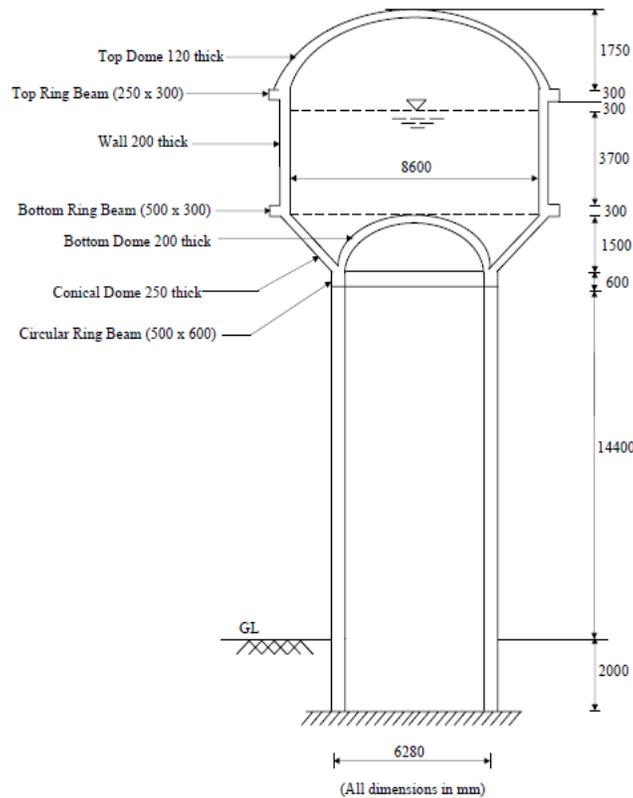


Figura 3. 3
Geometría del tanque elevado.

El tanque se analizará para cuando se encuentra lleno. El ejemplo trata de un tanque elevado soportado por una columna rígida de concreto reforzado mostrado en la figura 3.3.

La fuerza sísmica actuante, siendo ésta armónica, se aplicará en la base m_0 , cuya magnitud será de $F_0 = 10^9 [N]$ y se asignará una masa finita de suelo de $m_0 = 10^9 [kg]$ ¹⁰, de tal forma que la magnitud de la aceleración provocada sea $a = \frac{F_0}{m_0} = 1 \frac{m}{s^2}$. El sistema vibrará debido a que la fuerza de excitación tendrá una frecuencia de $\omega = 2 \frac{rad}{s}$ (este dato se obtuvo a partir de que se menciona un periodo de vibración de $T_c = 3.14 [s]$ para el líquido contenido; así, se tiene que $\omega = \frac{2\pi}{T_c} = 2 [rad/s]$).

¹⁰ Cabe aclarar que estas unidades son de masa y no de peso. En caso de que se requieran unidades de peso, es necesario multiplicar por la aceleración debido a la gravedad local.

CAPÍTULO 3

Tabla 3. 1

Distintas expresiones para calcular la rigidez de la masa convectiva del modelo propuesto.

Expresión	Sustitución	Resultado k_c [N/m]	Fuente
$k_c = 0.836 * \frac{mg}{h} * \tanh^2 \left(3.68 * \frac{h}{D} \right)$	$k_c = 0.836 * \frac{255\ 658 * 9.81}{4.4} * \tanh^2 \left(3.68 * \frac{4.4}{8.6} \right)$	$k_c = 434\ 362.11$	IITK-GDSMA Guidelines for Seismic Design of Liquids Storage Tanks. Provisions with Commentary and Explanatory Examples, [13]. Pág. 16.
$k_c = m_c * \omega_c^2$ $\omega_c^2 = \frac{g}{\frac{D}{2}} * 1.84 * \tan \left(1.84 * \frac{h}{\frac{D}{2}} \right)$	$k_c = 109\ 933 * \frac{9.81}{\frac{8.6}{2}} * 1.84 * \tan h \left(1.84 * \frac{4.4}{\frac{8.6}{2}} \right)$	$k_c = 440\ 586.74$	Simplified Seismic analysis procedures for elevated tanks considering fluid- structure-soil interaction [11]. Pág. 424. Housner's Model.
$k_c = m_c * \omega_c^2$ $\omega_n^2 = \frac{g}{\frac{D}{2}} * \lambda_1 * \tanh \left(\lambda_1 * \frac{h}{\frac{D}{2}} \right)$	$k_c = 109\ 933 * \frac{9.81}{\frac{8.6}{2}} * 1.8112 * \tanh \left(1.8112 * \frac{4.4}{\frac{8.6}{2}} \right)$	$k_c = 432\ 472.33$	Simplified Seismic analysis procedures for elevated tanks considering fluid- structure-soil interaction [11]. Pág. 424. Bauer's Model ¹² .

¹² La expresión de Bauer es utilizada para tanques que se encuentran en tierra. Sin embargo, la expresión se puede aplicar a tanques elevados ya que suponen que los periodos impulsivo y convectivo están desacoplados. Por lo tanto se pueden estudiar por separado.

CAPÍTULO 3

Con los datos del problema detallados, se sigue con las ecuaciones de movimiento. Para ello, en la figura 3.2 (b) se muestra el modelo que representa al tanque elevado. Al aplicar el método mencionado se tiene:

Para la primera masa m_0 tenemos que su potencial de velocidad es

$$\frac{1}{2}m_0\dot{X}_0^2 \quad \text{Ecuación 3. 2}$$

y el potencial de energía está dado por (rigidez k_1)

$$\frac{1}{2}k_1(X_1 - X_0)^2 \quad \text{Ecuación 3. 3}$$

la masa superior menos la masa inferior en el sentido positivo. Para la segunda masa m_1 , su energía cinética es

$$\frac{1}{2}m_1\dot{X}_1^2 \quad \text{Ecuación 3. 4}$$

y el potencial del resorte k_2 :
para el conjunto de masas m_1 y m_2

$$\frac{1}{2}k_2(X_2 - X_1)^2 \quad \text{Ecuación 3. 5}$$

para el conjunto de masas m_1 y m_3

$$\frac{1}{2}k_3(X_3 - X_1)^2 \quad \text{Ecuación 3. 6}$$

Por último, para las masas m_2 y m_3 se tiene

$$\frac{1}{2}m_2\dot{X}_2^2 \quad \text{Ecuación 3. 7}$$

$$\frac{1}{2}m_3\dot{X}_3^2 \quad \text{Ecuación 3. 8}$$

$$\frac{1}{2}k_4(X_3 - X_2)^2 \quad \text{Ecuación 3. 9}$$

Agrupando las ecuaciones 3.2-3.9 obtenemos la ecuación *Lagrangiana* (cabe recordar que se está hablando de *coordenadas absolutas* X_j complejas), descrita en la ecuación 3.10.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}[m_0\dot{X}_0^2 + m_1\dot{X}_1^2 + m_2\dot{X}_2^2 + m_3\dot{X}_3^2 - k_1(X_1 - X_0)^2 - k_2(X_2 - X_1)^2 - k_3(X_3 - X_1)^2 - k_4(X_3 - X_2)^2] \quad \text{Ecuación 3. 10}$$

CAPÍTULO 3

Por otra parte, siendo \mathcal{F} la función de disipación de Rayleigh: “las fuerzas existentes de fricción proporcionales a la velocidad de cada partícula” definida por

Ecuación 3. 11

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n (c_i * v_i^2)$$

Entonces, siguiendo con la misma convención de signos, para el sistema de cuatro partículas la ecuación \mathcal{F} es

Ecuación 3. 12

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} [c_1(\dot{X}_1 - \dot{X}_0)^2 + c_2(\dot{X}_2 - \dot{X}_1)^2 + c_3(\dot{X}_3 - \dot{X}_1)^2 + c_4(\dot{X}_3 - \dot{X}_2)^2]$$

Aplicando el método de Lagrange, se llega finalmente a las ecuaciones 3.13 (a-d).

Ecuación 3. 13 (a-d)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}_0} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X_0} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{X}_0} = m_0 \ddot{X}_0^2 - [k_1 X_1 - k_1 X_0] + [-c_1 \dot{X}_1 + c_1 \dot{X}_0]$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}_1} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X_1} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{X}_1} = m_1 \ddot{X}_1 - [-k_1 X_1 + k_1 X_0 + k_2 X_2 - k_2 X_1 + k_3 X_3 - k_3 X_1] + [c_1 \dot{X}_1 - c_1 \dot{X}_0 - c_2 \dot{X}_2 + c_2 \dot{X}_1 - c_3 \dot{X}_3 + c_3 \dot{X}_1]$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}_2} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X_2} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{X}_2} = m_2 \ddot{X}_2 - [-k_2 X_2 + k_2 X_1 + k_4 X_3 - k_4 X_2] + [c_2 \dot{X}_2 - c_2 \dot{X}_1 - c_4 \dot{X}_3 + c_4 \dot{X}_2]$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}_3} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X_3} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{X}_3} = m_3 \ddot{X}_3 - [-k_3 X_3 + k_3 X_1 - k_4 X_3 + k_4 X_2] + [c_3 \dot{X}_3 - c_3 \dot{X}_1 + c_4 \dot{X}_3 - c_4 \dot{X}_2]$$

Mostrando las ecuaciones 3.13 (a-d) y adjuntando las ecuaciones (2.2), (2.3) y (2.4) se obtienen las ecuaciones generales del movimiento como una matriz

Ecuación 3. 14

$$\begin{bmatrix} -\omega^2 m_0 + i\omega c_1 + k_1 & -i\omega c_1 - k_1 & 0 & 0 \\ -i\omega c_1 - k_1 & -\omega^2 m_1 + i\omega(c_1 + c_2 + c_3) + k_1 + k_2 + k_3 & -i\omega c_2 - k_2 & -i\omega c_3 - k_3 \\ 0 & -i\omega c_2 - k_2 & -\omega^2 m_2 + i\omega(c_2 + c_4) + k_2 + k_4 & -i\omega c_4 - k_4 \\ 0 & -i\omega c_3 - k_3 & -i\omega c_4 - k_4 & -\omega^2 m_3 + i\omega(c_3 + c_4) + k_3 + k_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix}$$

Por lo que a matriz de impedancia dinámica quedará como

Ecuación 3. 15

$$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & 0 & 0 \\ Z_{12} & Z_{22} & Z_{23} & Z_{24} \\ 0 & Z_{23} & Z_{33} & Z_{34} \\ 0 & Z_{24} & Z_{34} & Z_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix}$$

Al resolver estas ecuaciones, se obtienen los desplazamientos en metros [m] (función del tiempo) mostrado en la figura 3.4. En dicha figura se muestra la fuerza aplicada y su sentido a través del tiempo: mientras la fuerza va aplicada en sentido positivo cuanto $t = 0[s]$ al igual que las masas del líquido m_3 y m_4 , las masas del suelo y la estructura responden en sentido

CAPÍTULO 3

opuesto y a partir de ahí, los desplazamientos de la estructura siempre muestran la misma tendencia respecto a la carga F_0 . En la gráfica 3.4, la fuerza mostrada F_0 se encuentra dividida entre $1 \cdot 10^9$, ya que sólo importa visualizar su sentido y no su magnitud. En la figura 3.5 se muestra el equilibrio dinámico en el sistema a través del tiempo. Se hace notar que ante la acción sísmica por la frontera, solamente los desplazamientos de la estructura son casi idénticos a los del suelo. Sin embargo, se nota que X_2 y X_3 (el agua) se desplazan casi el doble pero en sentido contrario. De igual manera las aceleraciones de las masas del líquido, mostradas en la figura 3.6 muestran las mismas diferencias.

Estos resultados difieren de las hipótesis usadas en ingeniería sísmica que suponen que las mismas aceleraciones del terreno actúan sobre cada masa dentro de la estructura, sea ésta de uno o más grados de libertad.

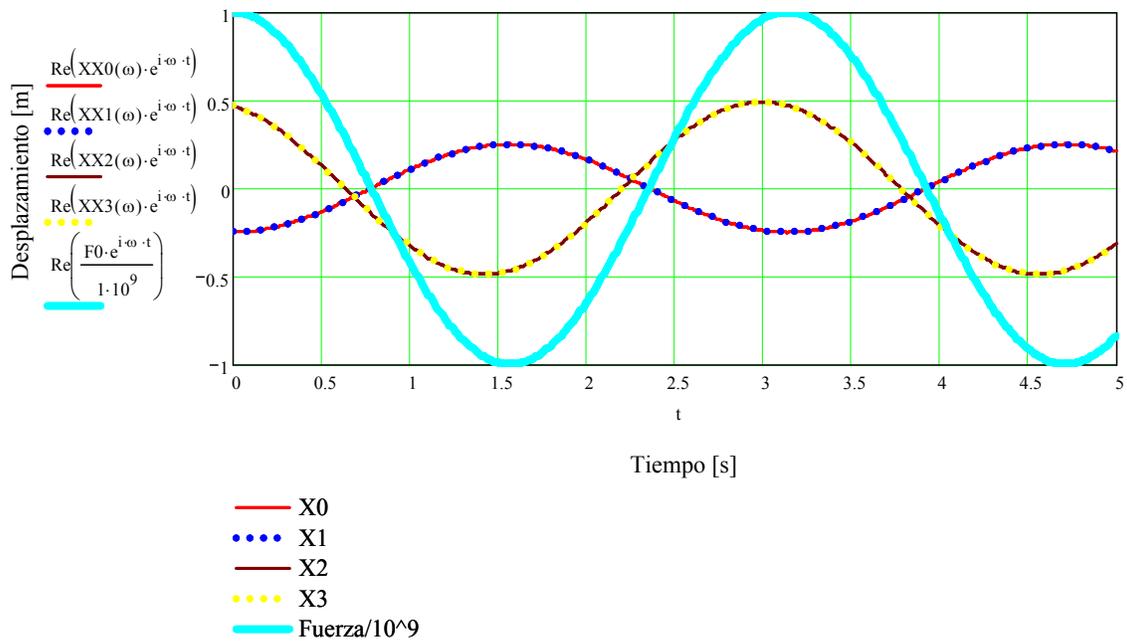


Figura 3. 4

Desplazamientos a través del tiempo una frecuencia de $\omega = 2 \text{ rad/s}$. Y Fuerza aplicada F_0 en menor escala.

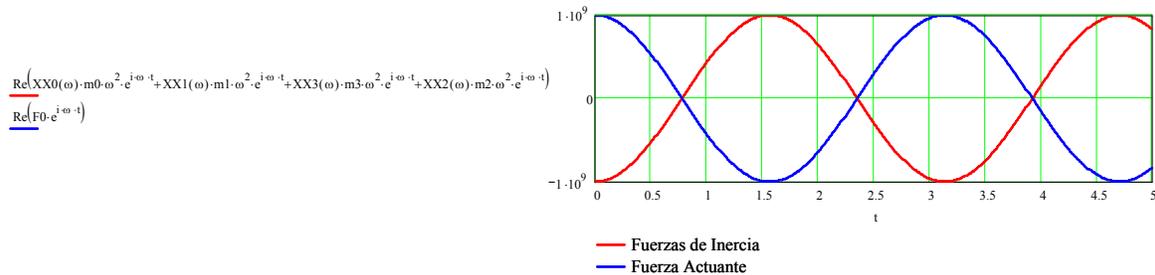


Figura 3. 5

Equilibrio dinámico a través del tiempo.

CAPÍTULO 3

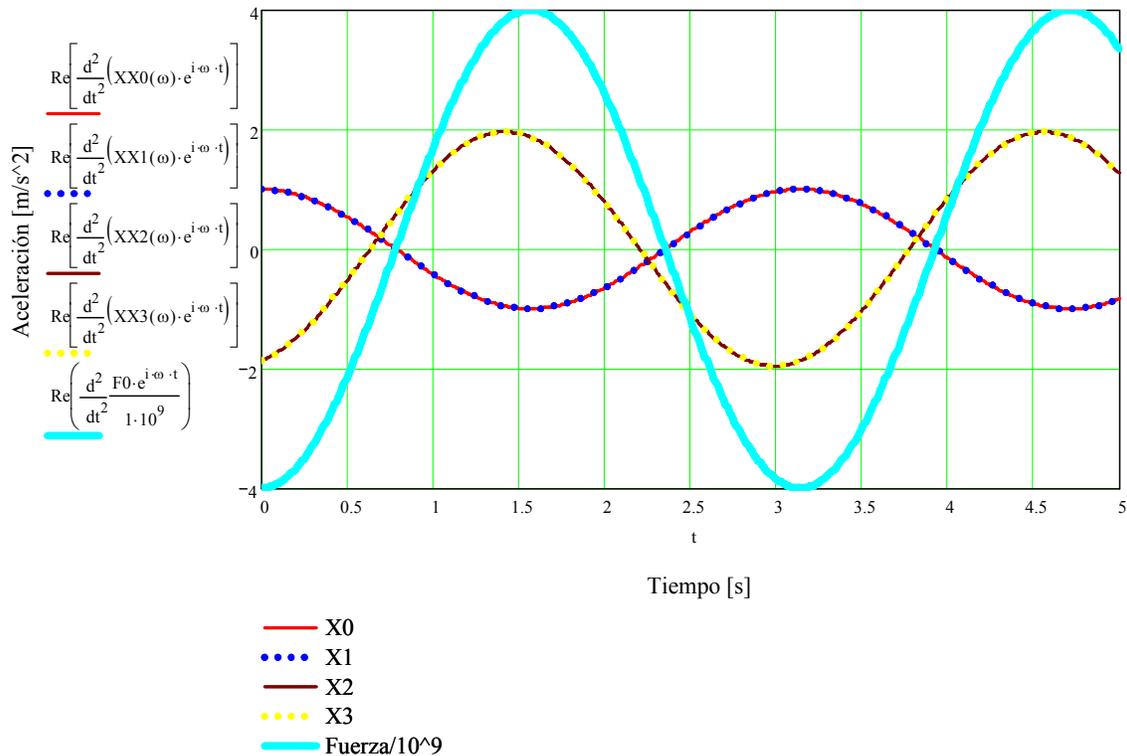


Figura 3. 6

Aceleraciones a través del tiempo a una frecuencia de $\omega = 2 \text{ rad/s}$. Y Fuerza aplicada F_0 en menor escala.

3.1.3 Ejemplo 2 y Resultados Obtenidos

Ilustrando otro ejemplo, el modelo será un poco más elaborado, mostrado en la figura 3.7: se colocaran las fronteras del tanque elevado, dadas por el conjunto de masas $m_{1,2,6}$ y resortes $k_{2,3}$, además de agregar tres masas $m_{3,4,5}$ que representan al líquido para mostrar sus diferentes modos de excitación a distintas frecuencias. Cabe mencionar que por falta de espacio los amortiguamientos c_j no se muestran, pero se deja establecido que a cada constante de rigidez k_j le corresponde su constante de amortiguamiento.

Los valores de las variables, tanto de las masas m_j como el valor de las constantes de rigidez k_j y de amortiguamiento ζ_j serán los mismos que el ejemplo anterior, pero con algunas variaciones para mostrar a detalle los resultados que se pueden obtener. Estas son consideraciones tomadas:

- a) La fuerza aplicada en la frontera m_0 será $f_0 = F_0 e^{i\omega t} = 10^9 e^{i\omega t} [N]$.
- b) La masa de suelo, para obtener una aceleración $a = 1 \text{ m/s}^2$, será $m_0 = 10^9 [kg]$; las masas que representan las fronteras del tanque contenedor, con la masa impulsiva del líquido contenido, serán $\frac{m_i}{3} = m_{1,2,6} = \frac{140 \ 612}{3} = 46 \ 871 [kg]$; y las masas del líquido,

CAPÍTULO 3

que representarán la masa convectiva del líquido almacenado será $\frac{m_c}{3} = m_{3,4,5} = \frac{109\,933}{3} = 36\,644[kg]$.

- c) La rigidez de la estructura $k_s = k_1$ será de $2.22 \times 10^8 \left[\frac{N}{m}\right]$, mientras que la rigidez del tanque contenedor está dado por $k_{2,3} = 1.5 \times 10^8 \left[\frac{N}{m}\right]$. Siendo que la rigidez del líquido debe de ser mucho menor en comparación con la rigidez de la estructura principal se propone usar, como en el ejemplo anterior, una rigidez total k_c pero repartida entre los 4 resortes involucrados, esto es $\frac{k_c}{4} = k_{4,5,6,7} = \frac{438\,000}{4} = 109\,500 \left[\frac{N}{m}\right]$.
- d) Los coeficientes de amortiguamiento se tomarán como cero, para que los diferentes modos de vibración del sistema sean representativos y se observen con mayor facilidad. Pero, para el análisis completo, tomarán valores del 5% para las fronteras del tanque y de la estructura, y de 0.5% para las partículas que representan al líquido.

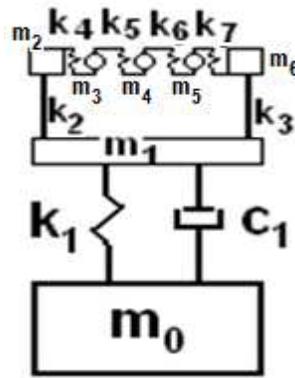


Figura 3.7

Modelo de un tanque elevado en el cual se muestra la superficie del líquido limitado por las paredes del tanque. *Elaboración propia.

Las ecuaciones de movimiento siguiendo el Método de Lagrange antes descrito, quedan descritas como:

$$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Z_{12} & Z_{22} & Z_{23} & 0 & 0 & 0 & Z_{27} \\ 0 & Z_{23} & Z_{33} & Z_{34} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Z_{34} & Z_{44} & Z_{45} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Z_{45} & Z_{55} & Z_{56} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Z_{56} & Z_{66} & Z_{67} \\ 0 & Z_{27} & 0 & 0 & 0 & Z_{67} & Z_{77} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{bmatrix}$$

Ecuación 3. 16

Con sus respectivos valores

$$\begin{aligned} Z_{11} &= -\omega^2 m_0 + i\omega c_1 + k_1 \\ Z_{12} &= -i\omega c_1 - k_1 \\ Z_{22} &= -\omega^2 m_1 + i\omega(c_1 + c_2 + c_3) + k_1 + k_2 + k_3 \\ Z_{23} &= -i\omega c_2 - k_2 \end{aligned}$$

Ecuación 3. 17(a-n)

CAPÍTULO 3

$$\begin{aligned}
 Z_{27} &= -i\omega c_3 - k_3 \\
 Z_{33} &= -\omega^2 m_2 + i\omega(c_2 + c_4) + k_2 + k_4 \\
 Z_{34} &= -i\omega c_4 - k_4 \\
 Z_{44} &= -\omega^2 m_3 + i\omega(c_4 + c_5) + k_4 + k_5 \\
 Z_{45} &= -i\omega c_5 - k_5 \\
 Z_{55} &= -\omega^2 m_4 + i\omega(c_5 + c_6) + k_5 + k_6 \\
 Z_{56} &= -i\omega c_6 - k_6 \\
 Z_{66} &= -\omega^2 m_5 + i\omega(c_6 + c_7) + k_6 + k_7 \\
 Z_{67} &= -i\omega c_7 - k_7 \\
 Z_{77} &= -\omega^2 m_6 + i\omega(c_7 + c_3) + k_7 + k_3
 \end{aligned}$$

La matriz de impedancia es su forma desarrollada, sustituyendo los valores de Z_{ij} , es:

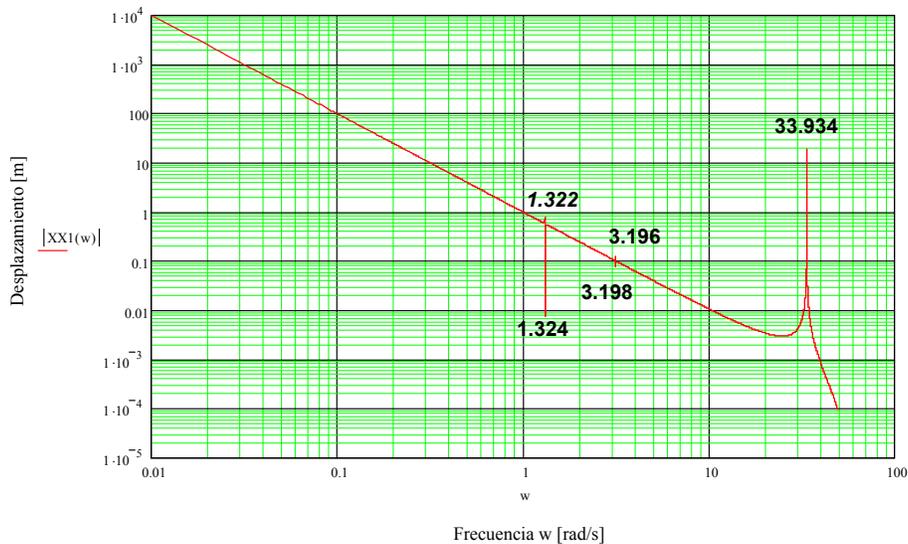
$$\begin{array}{cccc}
 \left[\begin{array}{cccc}
 -\omega^2 m_0 + i\omega c_1 + k_1 & -i\omega c_1 - k_1 & 0 & 0 \\
 -i\omega c_1 - k_1 & -\omega^2 m_1 + i\omega(c_1 + c_2 + c_3) + k_1 + k_2 + k_3 & -i\omega c_2 - k_2 & 0 \\
 0 & -i\omega c_2 - k_2 & -\omega^2 m_2 + i\omega(c_2 + c_4) + k_2 + k_4 & -i\omega c_4 - k_4 \\
 0 & 0 & -i\omega c_4 - k_4 & -\omega^2 m_3 + i\omega(c_4 + c_5) + k_4 + k_5 \\
 0 & 0 & 0 & -i\omega c_5 - k_5 \\
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -i\omega c_3 - k_3 & 0 & 0
 \end{array} \right. \\
 \hline
 \left. \begin{array}{cccc}
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -i\omega c_3 - k_3 \\
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -i\omega c_5 - k_5 & 0 & 0 & 0 \\
 -\omega^2 m_4 + i\omega(c_5 + c_6) + k_5 + k_6 & -i\omega c_6 - k_6 & 0 & 0 \\
 -i\omega c_6 - k_6 & -\omega^2 m_5 + i\omega(c_6 + c_7) + k_6 + k_7 & -i\omega c_7 - k_7 & 0 \\
 0 & -i\omega c_7 - k_7 & -\omega^2 m_6 + i\omega(c_7 + c_3) + k_7 + k_3 & 0
 \end{array} \right]
 \end{array}$$

*Es una matriz 7x7, donde la parte de debajo de la línea media es la parte que sigue a la derecha de la parte superior.

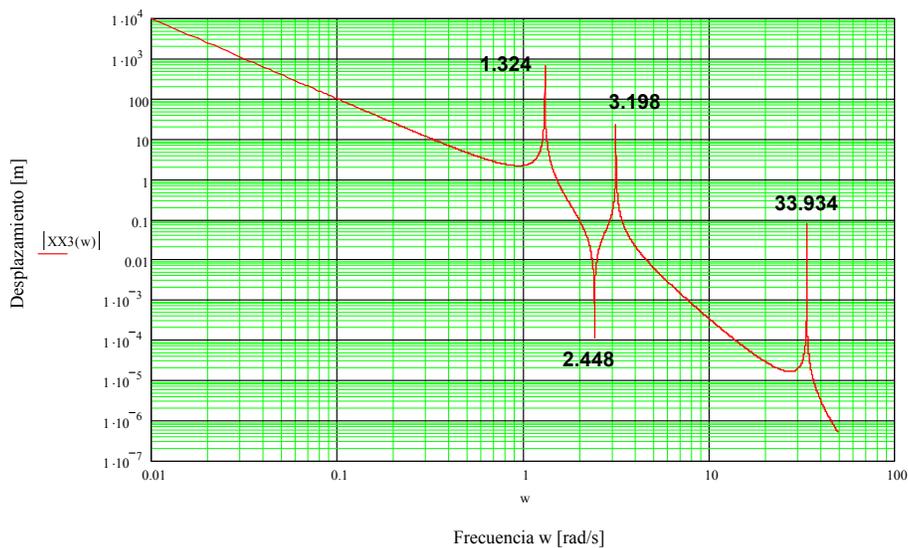
Al resolver las ecuaciones de movimiento, se encuentran los desplazamientos de cada partícula. Para analizar en qué momento el sistema cambia su modo de vibrar, es necesario graficar los desplazamientos contra la frecuencia de excitación, como se muestra en la figura 3.8. Así, se tiene que las frecuencias naturales de vibración, obtenidas a partir de los picos de la misma figura (A) y (B) son $\omega_n = (a)1.322; (b)1.324; (c)2.448; (d)3.196; (e)3.198; (f)33.934; [rad/s]$. A estas frecuencias se dice que el sistema dinámico entra en resonancia y se hace mención de un cambio de fase.

Por lo anterior, se elegirán tres frecuencias de vibración y se analizará el cambio de fase con su respectivo equilibrio dinámico. La primera será antes de la primera frecuencia de vibración, con un valor de $\omega = 1 [rad/s]$; la segunda será entre la segunda y tercera frecuencia natural, con un valor de $\omega = 1.7 [rad/s]$; y la tercera será entre la quinta y sexta frecuencia natural, con un valor de $\omega = 25 [rad/s]$. Estas frecuencias se observan con claridad en la figura 3.9.

CAPÍTULO 3



(A) Desplazamiento de la masa m_1 a distintas frecuencias.



(B) Desplazamiento de la masa m_3 a distintas frecuencias.

Figura 3. 8

Frecuencias naturales de vibración del sistema dinámico para las masas m_1 (A) y m_3 (B).

A la primera frecuencia de vibración elegida, se muestran los desplazamientos en la figura 3.10. En (A) los desplazamientos de la estructura, dados por las masas m_1, m_2 y m_6 junto con la masa finita de suelo m_0 , se mueven como una sola estructura, con una pequeña diferencia entre sí. Se mueven en fase y en el mismo sentido con la fuerza F_0 . Se observa también que los desplazamientos tienen un orden de un metro, lo que es un desplazamiento alto para este tipo de estructuras. En (B), las masas m_3, m_4 y m_5 , que representan al líquido, presentan un desplazamiento de un poco más del doble que las masas de la estructura principal, pero también se mueven en fase con la fuerza aplicada. Entonces, para la frecuencia de excitación $\omega = 1$ [rad/s] se puede decir que es muy baja pero peligrosa para el sistema, ya que el sistema se comporta como uno solo, como un cuerpo rígido en el primer modo de vibración.

CAPÍTULO 3

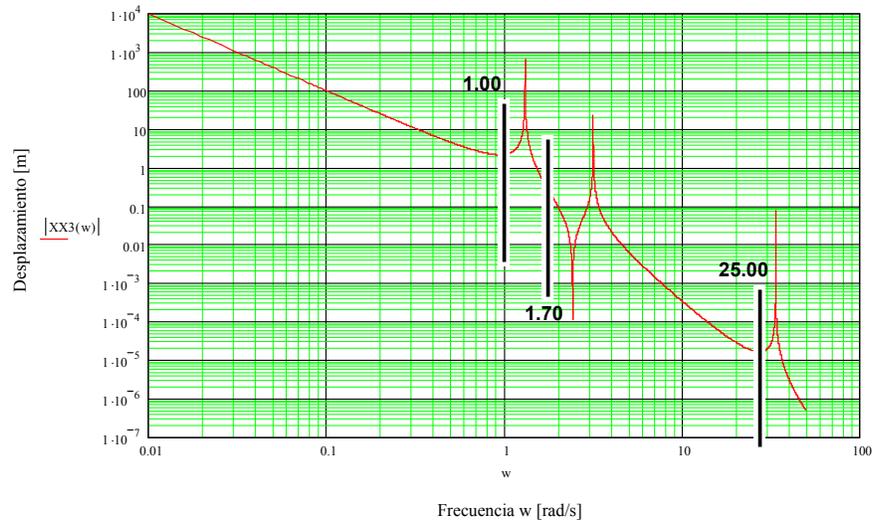
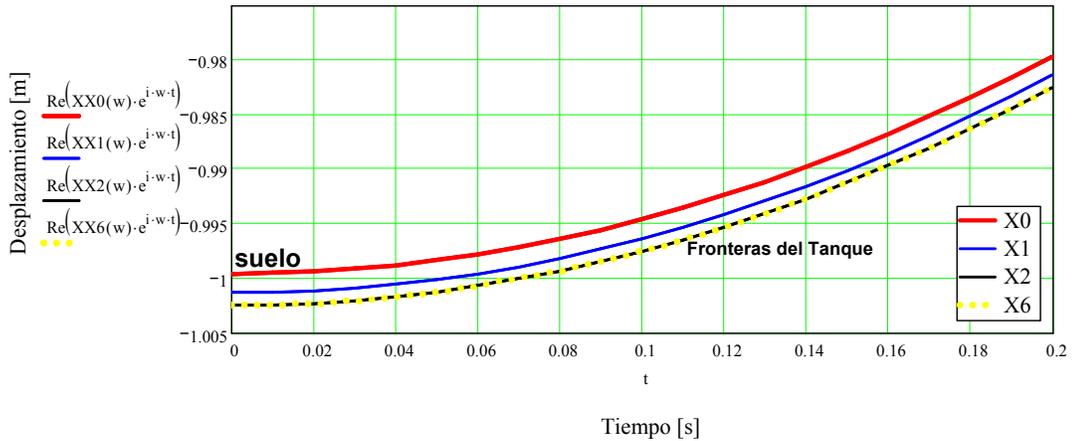
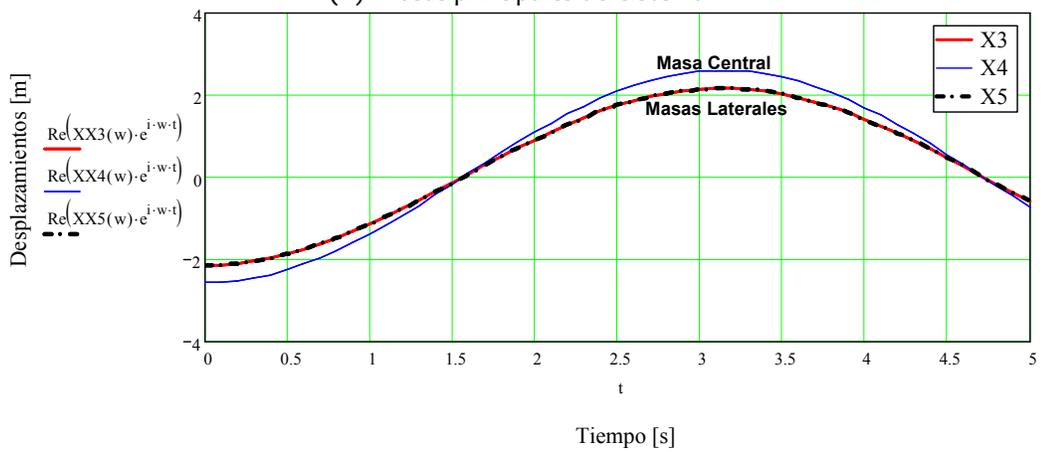


Figura 3. 9
Frecuencias a las que se analizará la estructura.



(A) Masas principales del sistema

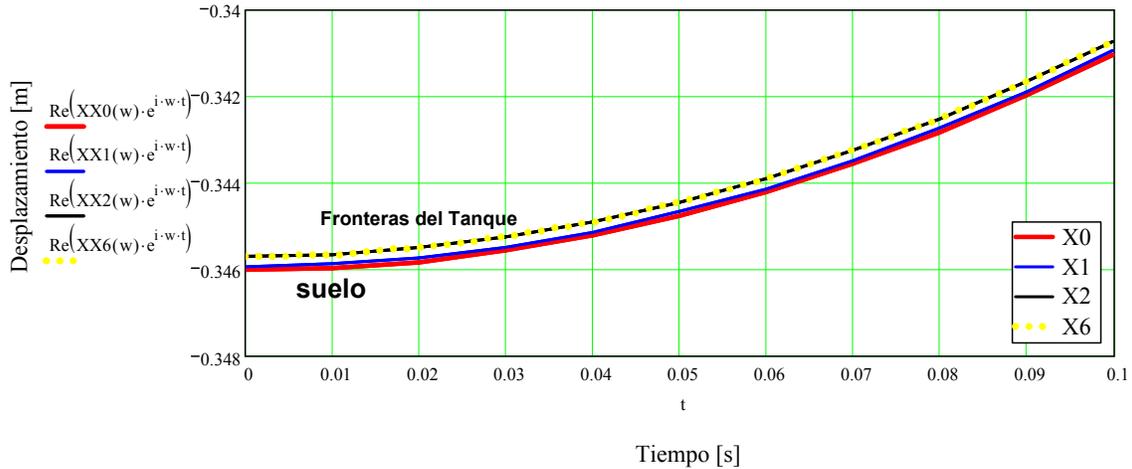


(B) Masas representativas del líquido

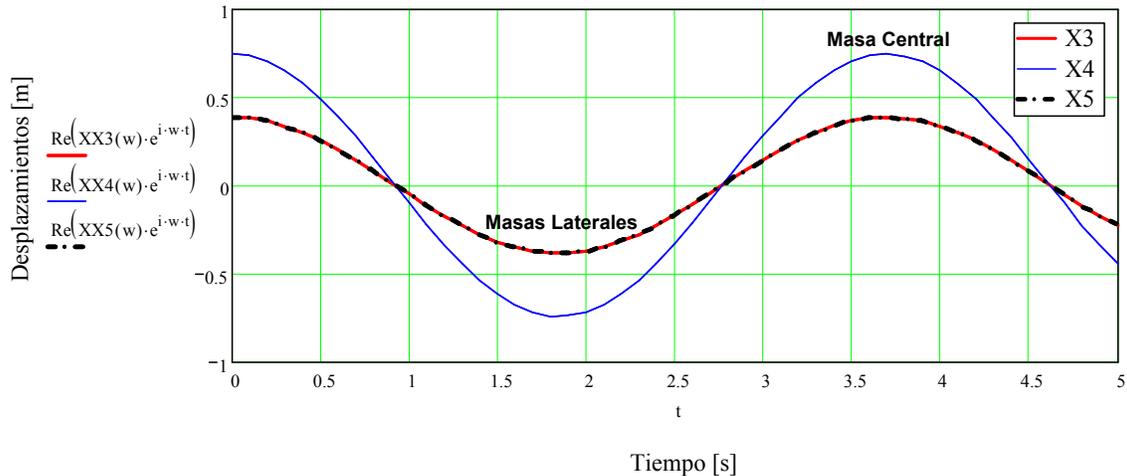
Figura 3. 10
Desplazamientos en el tiempo a una frecuencia de excitación $\omega = 1 \text{ rad/s}$.

CAPÍTULO 3

Los desplazamientos para la segunda frecuencia $\omega = 1.7 \text{ [rad/s]}$, se muestran en la figura 3.11. En (A), se muestran los desplazamientos de las masas principales de la estructura. Siguen estando en fase, con un desplazamiento similar pero más pequeño en comparación con la frecuencia anterior de $\omega = 1 \text{ [rad/s]}$. Sin embargo, en (B), el desplazamiento de las masas que representan al agua, han cambiado de fase en comparación con la frecuencia anterior pero con un desplazamiento menor.



(A) Masas principales del sistema



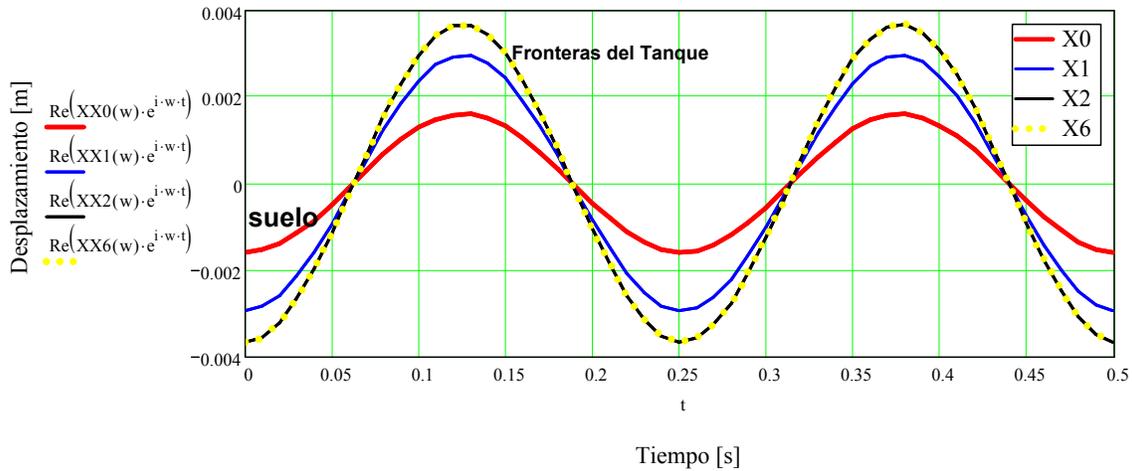
(B) Masas representativas del líquido

Figura 3. 11

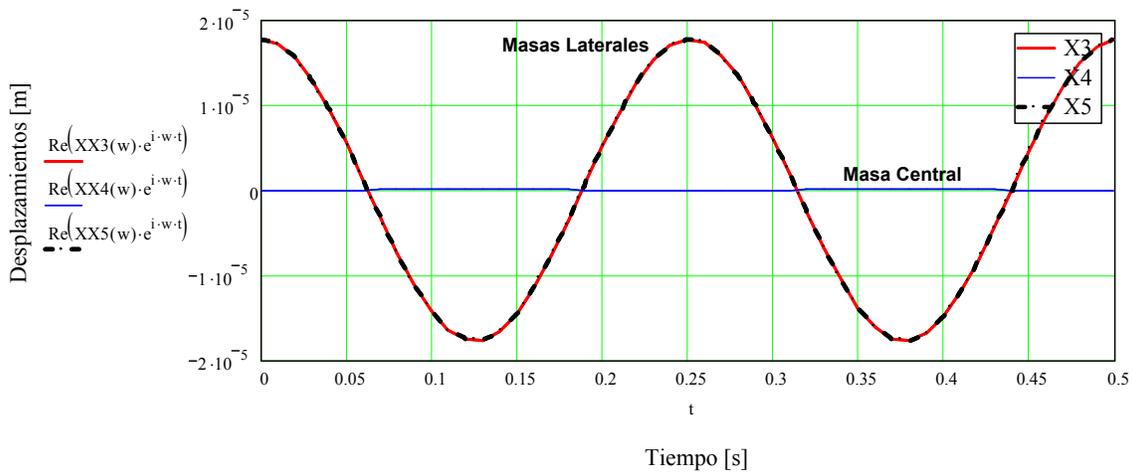
Desplazamientos en el tiempo a una frecuencia de excitación $\omega = 1.7 \text{ rad/s}$.

Los desplazamiento para la tercer frecuencia de excitación $\omega = 25 \text{ [rad/s]}$, se muestran en la figura 3.12. En (A), las masas principales del sistema se desplazan, a pesar de que la diferencia es muy pequeña, un poco desacopladas, pero siguen en fase con la fuerza de excitación. El desplazamiento presentado sigue siendo aún muy pequeño. En (B) el desplazamiento de las masas que representan al líquido es casi cero, ya que los resortes k_c son muy pequeños, lo que hace que las masas de agua están casi desacopladas de la estructura.

CAPÍTULO 3



(A) Masas principales del sistema



(B) Masas representativas del líquido

Figura 3. 12

Desplazamientos en el tiempo a una frecuencia de excitación $\omega = 25 \text{ rad/s}$.

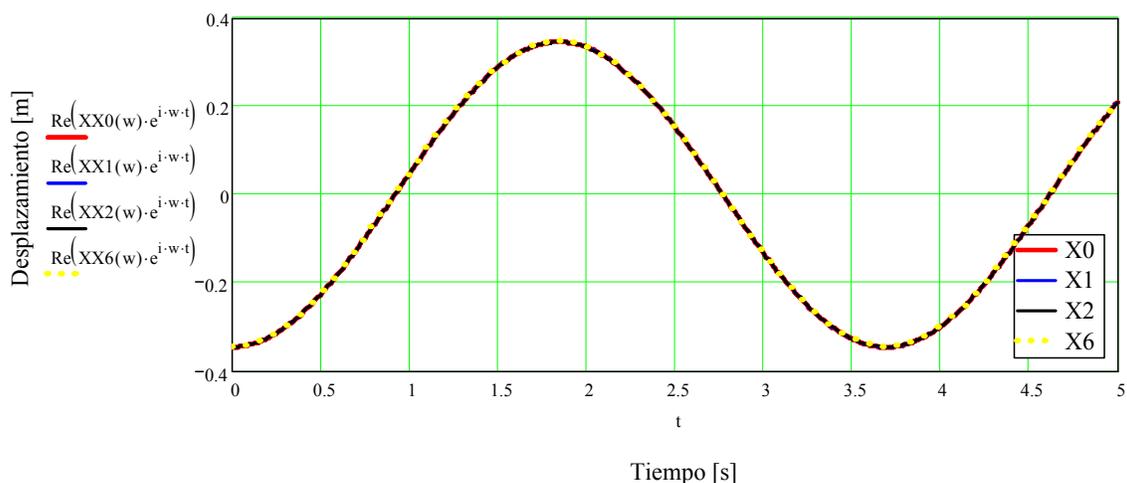
Por otro lado, al analizar el tanque de almacenamiento cuando se encuentra vacío, a una frecuencia de excitación $\omega = 1.7 \text{ [rad/s]}$, cuando la estructura principal vibra en sentido contrario que las masas del líquido, se observa una diferencia pequeña diferencia.

En la figura 3.13 se muestran los desplazamientos que se tienen bajo dicha frecuencia de excitación, cuando el tanque se encuentra lleno. Los desplazamientos de la estructura principal, se comportan como una sola, son de aproximadamente $X_{sis \text{ lleno}} = 0.34603 \text{ [m]}$, mientras que las masas que representan las masas del líquido tienen un desplazamiento aproximado de $X_{3,5} = 0.4 \text{ [m]}$ y $X_5 = 0.75 \text{ [m]}$.

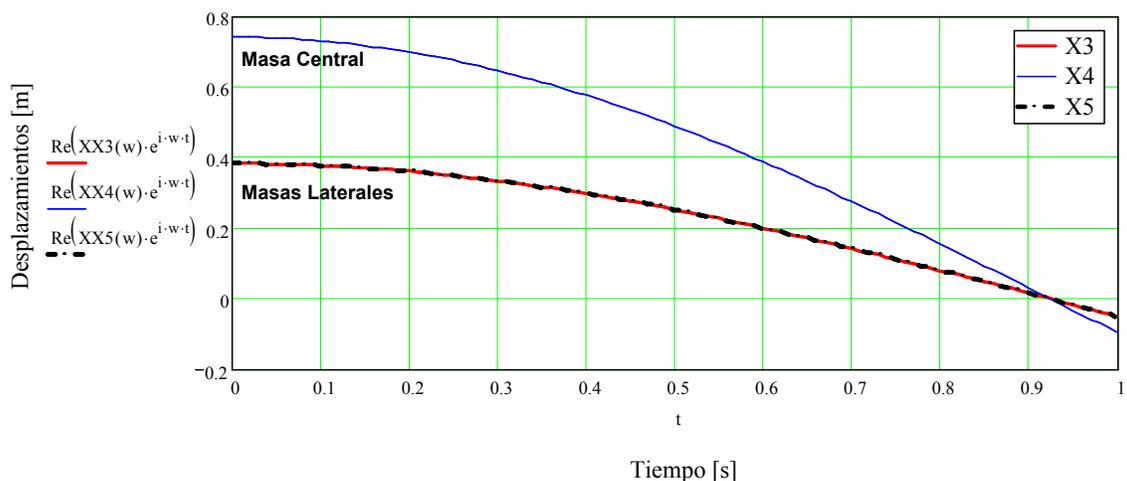
Cuando el tanque se encuentra vacío, los desplazamientos de las masas principales del sistema, que también se comportan como una sola, mostrados en la figura 3.14 (A) son de aproximadamente $X_{sis \text{ vacío}} = 0.34692 \text{ [m]}$ y las masas las masas de la superficie del líquido tiene un desplazamiento nulo.

CAPÍTULO 3

Al comparar ambos resultados, aunque la diferencia es de milésimas, de alrededor de $0.00089 [m]$, el desplazamiento cuando se encuentra vacío es mayor que cuando se encuentra lleno, por lo que se puede decir que el agua trabaja como un amortiguamiento. Sin embargo, si se estudia con más cuidado y pensando en que la masa convectiva puede aumentar de magnitud, se puede llegar a pensar que en un futuro esto podría ser un parámetro de diseño sísmico para que el agua actúe como un absorbedor de vibraciones.



(A) Masas principales del sistema

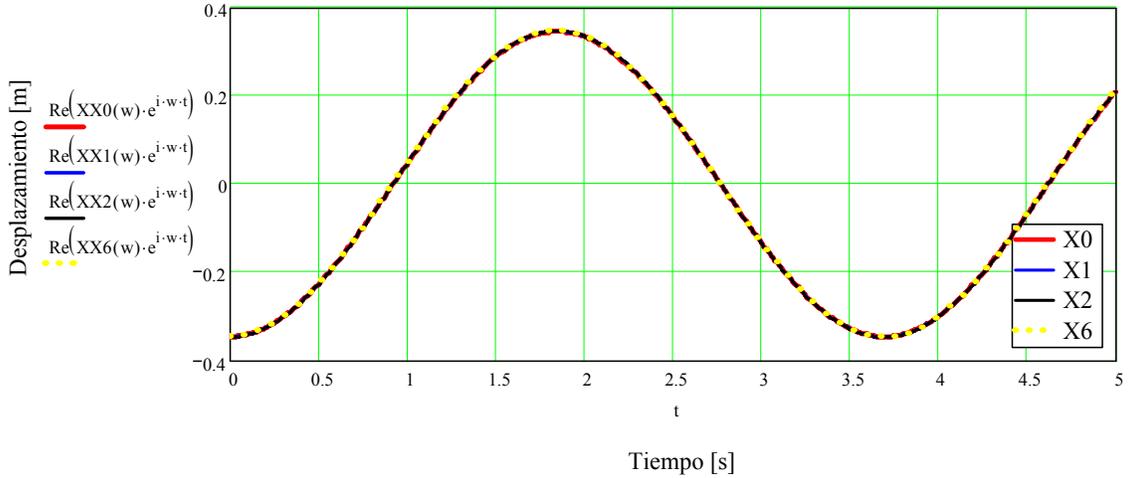


(B) Masas representativas del líquido

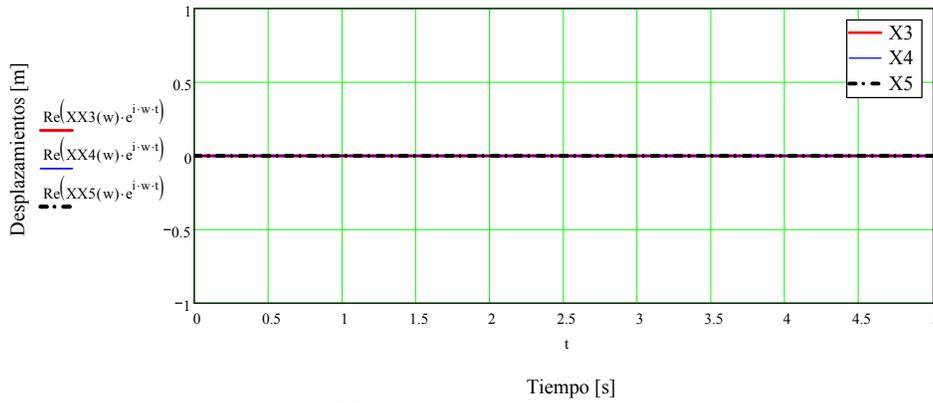
Figura 3. 13

Desplazamientos en el tiempo a una frecuencia de excitación $\omega = 1.7 \text{ rad/s}$. Cuando el tanque de almacenamiento se encuentra lleno.

CAPÍTULO 3



(A) Masas principales del sistema



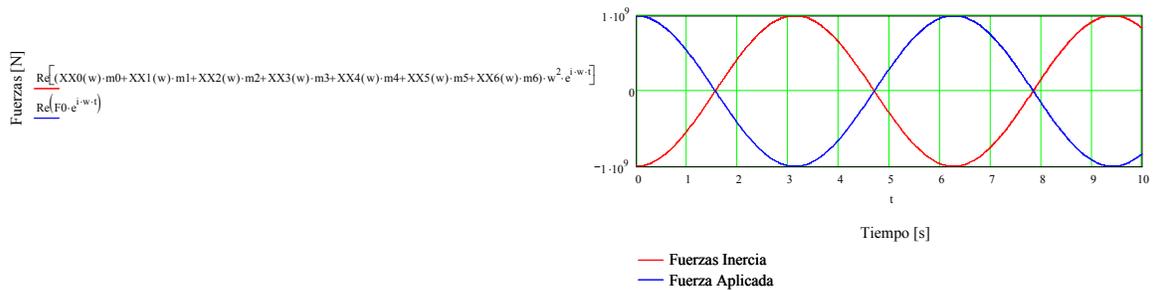
(B) Masas representativas del líquido

Figura 3. 14

Desplazamientos en el tiempo a una frecuencia de excitación $\omega = 1.7 \text{ rad/s}$. Cuando el tanque se encuentra vacío.

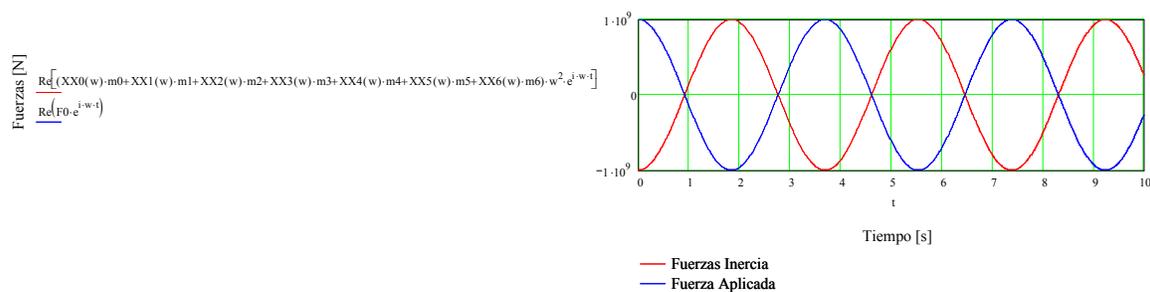
Comprobando que el equilibrio dinámico está presente en cualquier frecuencia, se muestra la figura 3.15 con sus respectivos incisos de frecuencia.

(a) Equilibrio dinámico del sistema, frecuencia $\omega = 1.00 \text{ rad/s}$.



CAPÍTULO 3

(b) Equilibrio dinámico del sistema, frecuencia $\omega = 1.7 \text{ rad/s}$.



(c) Equilibrio dinámico del sistema, frecuencia $\omega = 25 \text{ rad/s}$.

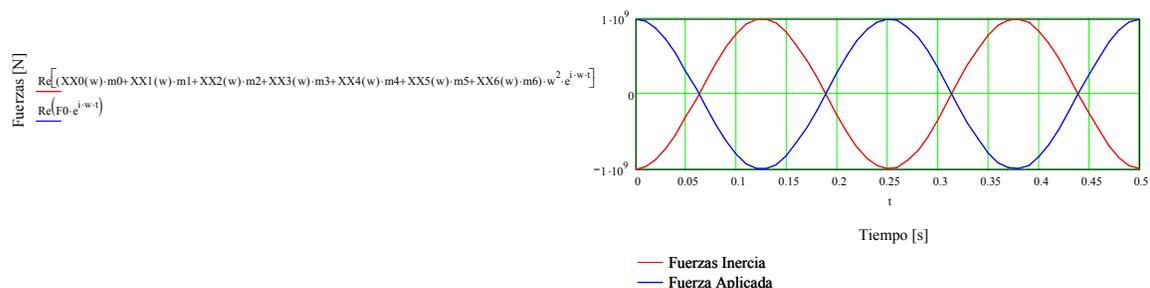


Figura 3.15

Equilibrio Dinámico a distintas frecuencias.

Ahora, siguiendo con los conceptos que se han introducido de física en este modelo, ahora se implementarán los conceptos de *Trabajo*, *Energía Cinética*, *Energía Potencial* elástica y *Potencia*, no sin antes mencionar su definición.

Para definir el concepto *Trabajo* (W), es necesario definir energía, ya que por definición, el Trabajo es un tránsito de energía. La energía es aquella capacidad que tienen los cuerpos para obrar, transformar o poner algo¹³ en movimiento. Entonces, *Trabajo* se considera como la energía necesaria para desplazar un cuerpo bajo la acción de una fuerza, o sea

Ecuación 3.18

$$W = F * d$$

En un sistema mecánico, el trabajo puede dividirse en dos partes: (1) el que ingresa al sistema por medio de la aplicación de una fuerza a una partícula, provocando un desplazamiento; y (2) el que sale o el que responde el sistema dinámico amortiguando y disipando la fuerza que provoca al trabajo de entrada si los elementos del sistema lo permiten.

La *energía cinética* (E_c) es una magnitud asociada al movimiento de cada una de las partículas de un sistema. Dicha magnitud viene dada por la expresión:

Ecuación 3.19

$$E_c = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n m_j * v_j^2$$

¹³ Entiéndase por “algo” cualquier tipo de masa en el espacio.

CAPÍTULO 3

Anunciando también un teorema que será útil, llamado teorema trabajo-energía para un sistema de n partículas:

“El trabajo realizado por las fuerzas aplicadas al sistema de n partículas entre dos configuraciones arbitrarias es igual al cambio en la energía cinética del sistema entre las mismas configuraciones”¹⁴

La *Energía Potencial elástica* (E_p) es la mitad de la sumatoria del trabajo realizado por la rigidez de cada partícula, esto es:

$$E_p = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n k_j * X_j^2$$

Ecuación 3. 20

Por último, la *Potencia* (P) se define en física como la cantidad de trabajo realizado por unidad de tiempo. Utilizando el teorema trabajo-energía para un sistema de n partículas, se puede escribir la potencia como

$$P = \frac{d}{dt}(W) = \frac{d}{dt}(F * X_i) = F * v_i$$

Ecuación 3. 21

Para sistemas donde el campo de fuerzas es conservativo¹⁵, el trabajo de entrada (W_e) será igual que el trabajo de salida (W_s), pues la energía del sistema se conserva para cualquier instante de tiempo. A W_s también se le denomina *Energía Mecánica Total del Sistema*, que es la suma de la energía cinética y energía potencial elástica.

Entonces, aplicando los conceptos anteriormente descritos y siguiendo con el modelo semidefinido, se tiene:

El trabajo generado a la hora de aplicar la fuerza $f_0 = F_0 e^{i\omega t} = 10^9 e^{i\omega t} [N]$ sobre la masa m_0 provocando el desplazamiento $X_0 e^{i\omega t}$ está dado por la expresión

$$W_e(t) = \frac{1}{2} F_0 X_0 e^{2i\omega t}$$

Ecuación 3. 22

Siendo la energía cinética del sistema

$$E_c(t) = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^6 m_j (X_j e^{i\omega t})^2$$

Ecuación 3. 23

Y la energía potencial elástica del sistema

¹⁴ Referencia [3] capítulo 4 “Teoremas de conservación”, pág. 149.

¹⁵ Un campo de fuerzas es conservativo si el trabajo realizado para desplazar una partícula entre dos puntos es independiente de la trayectoria seguida entre tales puntos.

CAPÍTULO 3

Ecuación 3. 24

$$EP(t) = \frac{1}{2} [k_1((X_1 - X_0)e^{i\omega t})^2 + k_2((X_2 - X_1)e^{i\omega t})^2 + k_3((X_6 - X_1)e^{i\omega t})^2 \\ + k_4((X_3 - X_2)e^{i\omega t})^2 + k_5((X_4 - X_3)e^{i\omega t})^2 + k_6((X_5 - X_4)e^{i\omega t})^2 \\ + k_7((X_6 - X_5)e^{i\omega t})^2]$$

Por lo que el trabajo de salida es

Ecuación 3. 25

$$Ws(t) = EC(t) + EP(t)$$

En la figura 3.16 (A) se muestra el equilibrio entre la energía de entrada y la energía de salida a una frecuencia de excitación $\omega = 3.196 \text{ rad/s}$. Este equilibrio sólo se logra cuando no existen fuerzas de disipación, cuando el amortiguamiento se considera nulo. Por mencionar un ejemplo, para el instante de tiempo $t = 1.5 \text{ [s]}$, los valores de las energías son:

Ecuación 3. 26 (a-c)

$$E_p(1.5) = -7.563 \times 10^7 - 1.246i \times 10^7 \text{ [J]}$$

$$E_c(1.5) = 1.24 \times 10^8 + 2.043 \times 10^7 \text{ [J]}$$

$$EW(1.5) = 4.84 \times 10^7 + 7.971i \times 10^6 \text{ [J]}$$

Al realizar la suma de éstas cantidades se obtiene la Ecuación 3.27 y la conservación de la energía se verifica

Ecuación 3. 27

$$EP(1.5) + EC(1.5) = EW(1.5)$$

En la figura 3.16 (B) se muestra la Potencia como la primera derivada del trabajo (de entrada y de salida) a la misma frecuencia de excitación $\omega = 2.644 \text{ [rad/s]}$. Para el instante de tiempo $t = 1.5 \text{ [s]}$, las diferentes potencias son:

Ecuación 3. 28

$$\frac{d}{dt} E_p(1.5) = 7.962 \times 10^7 - 4.834i \times 10^8 \text{ [W]}$$

$$\frac{d}{dt} E_c(1.5) = -1.306 \times 10^8 + 7.928i \times 10^8 \text{ [W]}$$

$$\frac{d}{dt} EW(1.5) = -5.095 \times 10^7 + 3.094i \times 10^8 \text{ [W]}$$

Que al realizar la suma algebraica, tenemos:

Ecuación 3. 29

$$\frac{d}{dt} E_p(1.5) + \frac{d}{dt} E_c(1.5) = \frac{d}{dt} EW(1.5)$$

CAPÍTULO 3

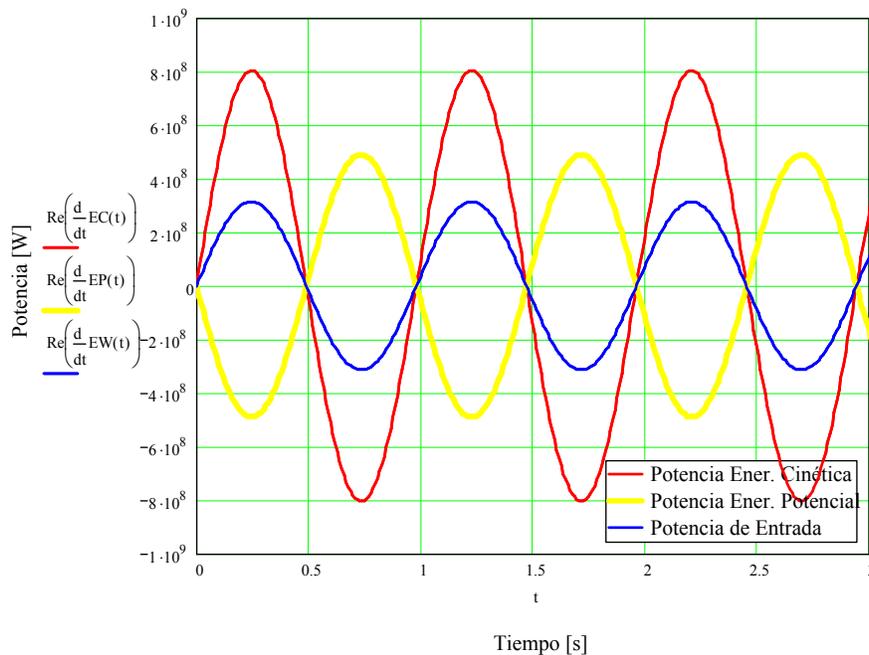
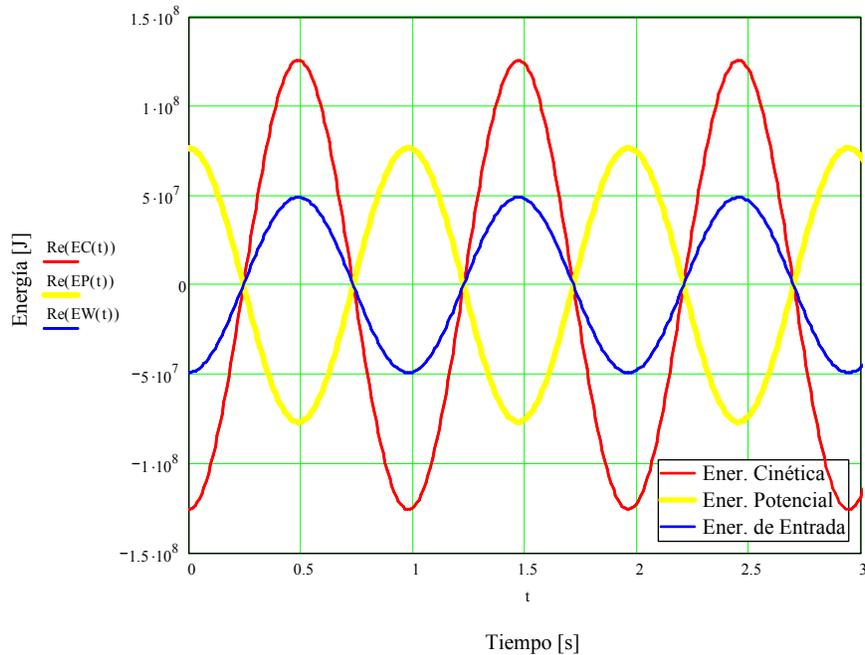


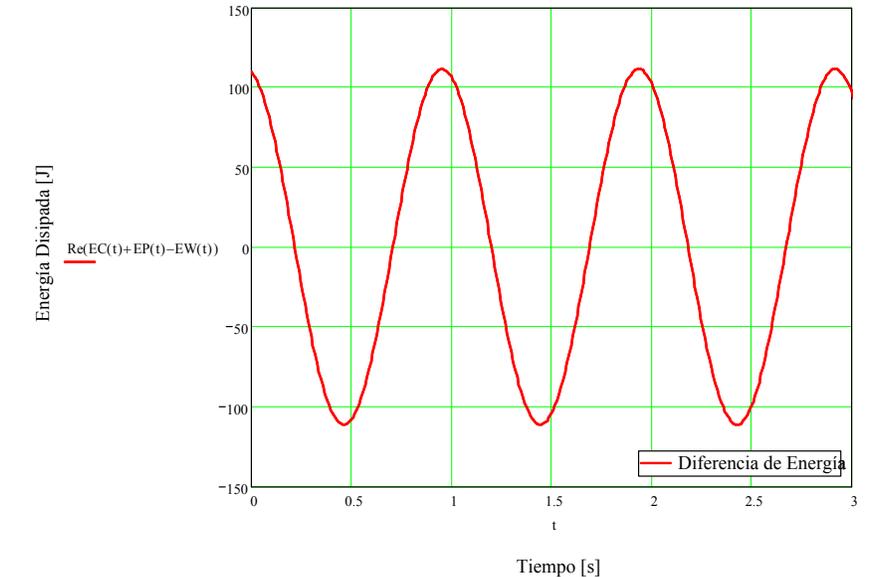
Figura 3.16

Equilibrio entre: Energía Potencial Elástica, Energía Cinética y Trabajo de Entrada; Potencia de entrada y de salida; ambas graficas sin fuerzas que disipen la energía a una frecuencia $\omega = 3.196 \text{ rad/s}$.

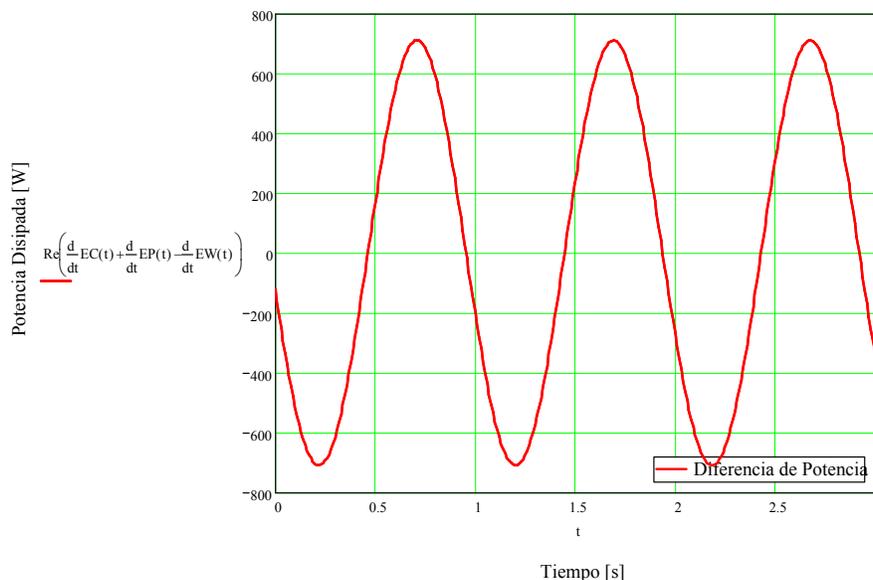
Por el equilibrio de energía anterior, se afirma que el sistema analizado es un sistema con un campo de fuerzas conservativo. Sin embargo, si se considera el efecto del amortiguamiento del 5% para la estructura principal y del 0.5% para los elementos que representan la superficie del líquido, ya no se cumple con el equilibrio de energía. En la figura 3.17 se muestran las variaciones de la diferencia de energía (A) y de potencia (B) a una excitación de

CAPÍTULO 3

$\omega = 3.196 \text{ rad/s}$. Se hace notar que la diferencia de energía es de alrededor de $100[\text{J}]$ en el trabajo y de $700[\text{W}]$ en la potencia, ambas diferencias causadas por el amortiguamiento. Este tema, se deja expuesto este punto para su futuro análisis, ya que la disipación de energía en el sistema expresada como una ecuación es aún teoría y falta más trabajo para mejorar su precisión.



(A) Variación de la energía del sistema [J]



(B) Variación de la Potencia del sistema [W]

Figura 3.17

Variación de la diferencia de energía y de Potencia en el sistema a una frecuencia $\omega = 3.196 \text{ rad/s}$.

En este ejemplo, el sistema resulta un poco más completo que el anterior: (1) se encuentran las frecuencias naturales de vibración del sistema; (2) se presentan y se demuestran los cambios de fase en distintas vibraciones con sus respectivos modos de vibración; (3) se analiza la posibilidad de que el líquido contenido funcione como un amortiguamiento, ya que la

CAPÍTULO 3

respuesta del tanque elevado cuando éste se encuentra lleno es menor que cuando se encuentra vacío. Esto sólo se puede lograr cuando el líquido vibra en sentido contrario a la estructura principal, es decir, en el segundo modo de vibración; (4) se realiza un análisis energético para comparar la energía de entrada con la energía total del sistema con y sin amortiguamiento; (5) se hace notar que la energía disipada por el amortiguamiento probablemente no está bien definida por la función de Rayleigh, ya que si se introduce tal ecuación en el equilibrio de energía, calculado con las ecuaciones 3.27 y 3.29, este no se comprueba.

3.1 Convergencia en los resultados

Una de las ventajas de la forma de análisis presentada en este trabajo es que los resultados obtenidos se pueden comprobar (viendo las gráficas 3.15 (a-c) y 3.16 (A-B)) al verificar el equilibrio dinámico del modelo físico matemático ante la fuerza aplicada f_0 y las fuerzas de inercia de toda la estructura incluyendo fundamentalmente la inercia del semiespacio que en general es siempre ignorado.

Por otra parte también se verificó el balance energético entre la energía y potencia de entrada con la energía y potencia de respuesta dada por el sistema (sin considerar amortiguamiento), para cualquier instante t_j y para cualquier frecuencia de excitación ω_j . Sin embargo, y aún cuando no es el objetivo de esta tesis comprobar estas ecuaciones considerando el amortiguamiento, se deja como futura investigación los resultados mostrados en la figura 3.17 (A-B), ya que las expresiones 3.27 y 3.29 no son satisfechas cuando el amortiguamiento es distinto de cero.

En toda la literatura actual las matrices de rigidez son positivo definidas y esto implica que todos los resortes que interconectan piso por piso deben de ser distintos de cero. Si arbitrariamente algún resorte intermedio se hiciera igual a cero, cualquier programa inmediatamente nos alertaría de que el sistema no tiene solución pues la matriz de rigideces no es positivo definida.

Ante este problema, el método presentado con un sistema semidefinido y con variable compleja, muestra la ventaja de un sistema de ecuaciones complejas que al hacer algún resorte igual a cero, el mismo programa (o más bien las ecuaciones) simplemente ignoran este hecho y asigna automáticamente desplazamiento cero a las masas a partir de las cuales un resorte se hace nulo. El resto de la estructura nos seguirá dando resultados correctos bajo la acción de las cargas a la parte de la estructura que se encuentra sometida.

Este tipo de resultados tendrían que ser comprobados inmediatamente a través de pruebas de laboratorio para ver qué tanta precisión existe entre los resultados obtenidos y la realidad. Cabe mencionar que como el modelo ahora ya es físico-matemático, resulta fácil encontrar un error de signo, de valor u otro tipo de equivocación en el modelo, pues si algún resultado resulta raro e incoherente, el modelo prácticamente lo dirá arrojando resultados físicamente inaceptables.

CAPÍTULO 3

3.2 Comparación con Resultados Tradicionales

Los resultados obtenidos muestran una total diferencia con los resultados que tradicionalmente se obtienen, por ejemplo, empezando con los desplazamientos, los mostrados aquí, son desplazamientos *absolutos* y sin ningún sistema de referencia que establezca una restricción. Además, mientras que el equilibrio dinámico denota que la solución es la correcta, en los resultados tradicionales no hay forma de realizar una comprobación ya que falta la información de la magnitud de la inercia correspondiente al semiespacio o soporte de la estructura y en este caso también del tanque elevado.

La aplicación de las fuerzas de excitación por la frontera, representada como una masa de suelo finita pero con movimiento, es una nueva forma de ver el análisis sísmico. En la literatura actual, no existe ninguna forma de que las fuerzas sean aplicadas en el lugar ya mencionado.

También, la representación de las masas del líquido con variable compleja es una nueva forma de ver el problema en tanques elevados; encontrar sus diferentes frecuencias naturales y sus distintos modos de vibración hacen que los resultados obtenidos sean muy valiosos para el análisis del modelo de una estructura. La introducción de los conceptos físicos como energía y potencia amplía la visión que se tiene de las estructuras hacia el campo de la dinámica.

Tradicionalmente, cuando se realiza el análisis sísmico de estructuras, a las masas del sistema se le atribuye la misma aceleración del terreno provocado por la fuerza sísmica. Sin embargo, si esto se hace con el nuevo modelo propuesto, obtenemos que para frecuencias de excitación muy bajas, los resultados obtenidos son aceptables y el error que asemeja tal suposición es pequeño. Pero si optamos por hacer lo mismo cuando la frecuencia de excitación va en aumento, el error obtenido también crece, por lo que al hacer tal suposición los resultados obtenidos ya son inaceptables. Esto se ve gráficamente expresado en la figura 3.18, donde se grafican dos curvas $Eq1(t)$, que representa las masas de inercia del sistema pero con la aceleración del terreno y $Eq2(t)$, que representa la fuerza aplicada F_0 aplicada al soporte. A una frecuencia de excitación baja $\omega = 0.01 \left[\frac{rad}{s} \right]$ se tiene que el error, definido como la diferencia de ambas magnitudes en valor absoluto del número complejo, es de 6.169 mientras que para una frecuencia de excitación alta $\omega = 10 \left[\frac{rad}{s} \right]$ el error producido es de 1.083×10^5 , lo que verifica lo dicho con anterioridad.

A pesar de que el error puede ser insignificante por la magnitud de la fuerza aplicada y que además en ingeniería un error tan pequeño puede pasarse por alto, el manejo del nuevo modelo semidefinido permite una mejor comprensión de los problemas de dinámica estructural.

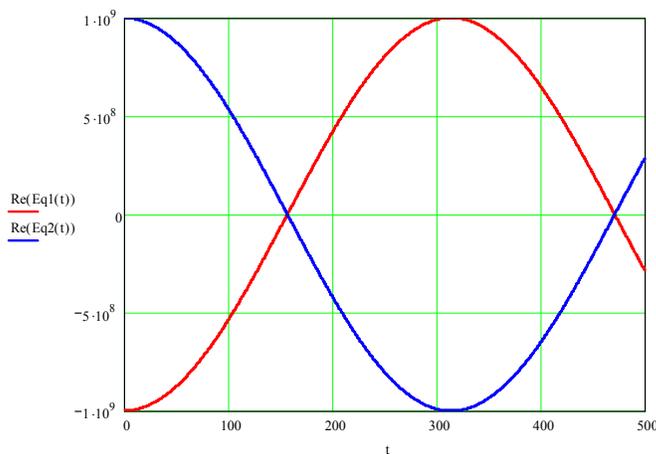
Adicional a lo anterior, a veces se argumenta que el manejo de variable compleja es bastante complicado. Sin embargo, ahora se tienen los nuevos equipos de cómputo que facilitan estas tareas.

Los conceptos de energía en las estructuras ya han sido estudiados y analizados. Por mencionar algunos ejemplos: Vitelmo Bertero, (2000) [19], escribe sobre el estado del arte y sobre la práctica del método “*Performance-Based Plastic Design*” (PBPD); Benjamín Huerta y Eduardo Reynoso, (2002) [20], escribe sobre un análisis de la energía obtenida a partir de

CAPÍTULO 3

acelerogramas de algunos sismos fuertes en el valle de México; Jinkoo Kim et. al., (2004) [21], escribe sobre un procedimiento de diseño sísmico simplificado para estructuras de acero basado en el concepto balance de energía; Leelataviwat et al.(2008) [22], escribe sobre el análisis de la evaluación sísmica basada en un concepto de energía usado satisfactoriamente para fines de diseño PBPD; Edén Bojórquez,(2009) [23], propone un procedimiento para el diseño sísmico de edificaciones de acero que toma en cuenta la confiabilidad estructural usando conceptos de energía.

La diferencia que existe entre los trabajos existentes, algunos ya mencionados, y lo que se realiza y se propone en esta tesis, es que en los primeros muestran diferencias e irregularidades en las mediciones de la energía y en la segunda se *demuestra* la conservación del balance dinámico de la estructura y además el balance entre la energía (lo mismo aplica a la potencia que también se trató someramente pero en forma precisa) de entrada a un sistema estructural y su energía de respuesta.



(a) Excitación a baja frecuencia

$$\omega = 0.01 \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$$
$$\text{Error} = 6.169$$

(b) Excitación a alta frecuencia

$$\omega = 10 \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$$

$$\text{Error} = 9.696 \times 10^4$$

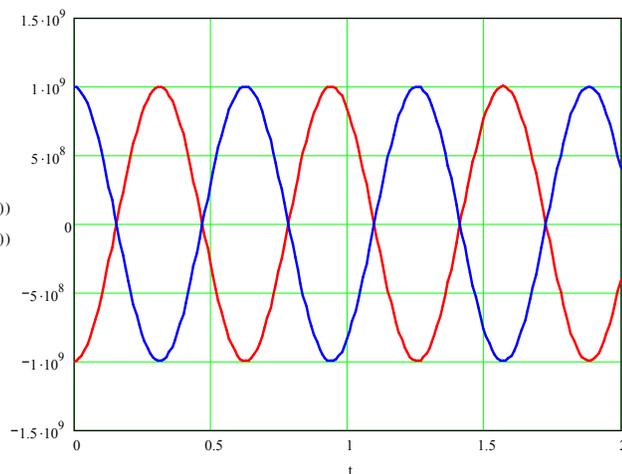


Figura 3.18

Equilibrio dinámico a baja y alta frecuencia de excitación con error presentado

Conclusiones

Muchas de las veces en que se analizan problemas de ingeniería se supone que los resultados arrojados son correctos, sin embargo, no es posible realizar una verificación que indique que la exactitud de la solución es aceptable. Si a esto se le suma lo mucho que se confía en los programas comerciales de cómputo, que **“facilitan las complejidades”** que hoy en día se enfrentan, se obtiene finalmente un conjunto de resultados que no nos conducen a un entendimiento claro y preciso de las distintas soluciones a los diferentes problemas.

En vista de los nuevos resultados presentados en esta tesis, se enuncian las siguientes conclusiones:

- En el modelo físico-matemático presentado se refleja una simplicidad (aún en variable y vectores complejos) y un manejo físico del problema tal, que con él se puede representar muchas situaciones y problemas de ingeniería civil. Surge ahora una necesidad de recurrir a los nuevos conocimientos desarrollados en esta tesis y a los presentados en las referencias [1], [2], [24] y [25].
- La aplicación a tanques elevados bajo acción sísmica es sólo una pequeña parte de lo que se puede tratar con el nuevo modelo presentado, por ejemplo, se puede ir desde el equilibrio dinámico a nivel molecular hasta hablar del equilibrio dinámico con cuerpos celestes.
- En adelante, con el nuevo modelo, se puede dejar a un lado aquellas simplificaciones que se hacían por falta de herramientas para resolver adecuadamente los problemas, como lo es el caso de las fronteras (empotramiento) y como es el caso de la aplicación de las fuerzas de excitación por el subespacio.
- Al analizar los diferentes modos de vibración que se vieron en el segundo ejemplo mostrado en el capítulo 3, para el tanque de almacenamiento lleno y en algunos casos vacío, se puede observar claramente los cambios de fase en las diferentes masas del sistema, los cuales ocurren antes y después de cada frecuencia natural de vibración del sistema.
- Con los resultados obtenidos, ahora se puede diseñar bajo distintos criterios, por ejemplo, diseñar por la energía que entra al sistema debido a la fuerza sísmica o a la energía de respuesta que tiene la estructura bajo la acción de distintas cargas o, como se viene haciendo, por los desplazamientos provocados o también por los desplazamientos que se quieran obtener bajo fuerzas determinadas. Distintas formas del modelo se pueden llegar a tener sin ninguna complicación, sobre todo bajo un

criterio de diseño y entendimiento del ingeniero analista. Por estas razones se puede simplificar el problema y sobre todo, demostrar la convergencia y precisión de los resultados que se obtengan.

- Se debe tener muy en cuenta que falta mucho por ajustar e investigar sobre los temas que hoy interesan a nuestra comunidad ingenieril y que no sólo hay que modificar las actuales teorías, sino también hay que modificar las bases, conceptos y herramientas matemáticas en muchas áreas de investigación. En este sentido se hace notar que en toda la literatura de ingeniería civil relacionada con la ingeniería sísmica no se usa variable compleja en la forma en que se hace en esta tesis y en las referencias presentadas en el curso de esta disertación.

*Se agradece el apoyo económico recibido por parte de la DGAPA-UNAM dentro del proyecto PAPIIT-IN107011, de la Dr. Sonia E. Ruiz Gómez.

Referencias Bibliográficas

1. *Contributions to Applied Mathematics in Engineering II*, artículo #2 “The semidefinite model for hysteretic nonlinear elastic vibrations of structures. Dynamic balance, the second Newtonian Law and the reciprocity theorem” por José Luis Urrutia Galicia, *Berichte aus dem Konstruktiven Ingenieurbau*, Universität der Bundeswehr München, ISSN 1431-5122 08/1, Alemania, 2008.
2. *Contributions to Applied Mathematics in Engineering III*, artículo #6 “A semidefinite harmonic oscillator for seismic analysis of structures in a complex space. A physical and mathematical shake table” por José Luis Urrutia Galicia, *Berichte aus dem Konstruktiven Ingenieurbau*, Universität der Bundeswehr München, ISSN 1431-5122 11/4, Alemania, 2011.
3. *Mecánica Analítica*, Enrique Yépez Mulia, Miztli Y. Yépez Martínez, Universidad Nacional Autónoma de México, Facultad de Ciencias, México, 2007.
4. *Mechanical Vibrations, Theory and Applications*, Francis S. Tse, Ivan E. Morse, Rolland T. Hinkle Second Edition. U.S.A, 1979.
5. *Análisis Sísmico Moderno. Ética Aplicada*, Salvador Ismael Gómez Chávez, Ed. Trillas, México, 2007.
6. *Diseño Estructural*, Meli, Roberto, Ed. Limusa, 2da Edición, México, 2009.
7. *Vibraciones. Teórico*. Prof. Ing. Mayer, Omar E. Universidad de Buenos Aires, Facultad de Ingeniería, Departamento de Ingeniería Mecánica. Argentina, 2002.
8. *What's Hysteresis?*, James P. Sethna, Cornell University Laboratory of Atomic and Solid State Physics, United States of America, 1994. Página de internet.
<http://www.lassp.cornell.edu/sethna/hysteresis/WhatIsHysteresis.html>
9. *Advanced Calculus for Applications*, Francis B. Hildebrand, Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, United States of America, Second Ed., 1976.
10. *The dynamic behavior of water tanks*, George W. Housner, Bulletin of the Seismological Society of America. Vol. 53, No. 2, pp 381-387. 1963.
11. *Simplified seismic analysis procedures for elevated tanks considering fluid-structure-soil interaction*. R. Livaoğlu, A. Doğangün. Department of Civil Engineering, Karadeniz Technical University, Gumushane-Trabzon, Turkey, 2006.
12. *Earthquakes pressures on fluid containers*, George W. Housner, Eight Technical Report under Office Naval Research, California Institute of Technology, Pasadena, California, United States of America, 1954. Página de Internet.
ftp://ftp.ecn.purdue.edu/ayhan/Sozen/Earthquake%20pressures%20on%20fluid%20containers%20_%20Housner_gw_1954.pdf

13. *IITK-GDSMA Guidelines for Seismic Design of Liquids Storage Tanks. Provisions with Commentary and Explanatory Examples.* Indian Institute of Technology Kanpur, Kanpur, India, 2007.
14. *Direct measurement of molecular stiffness and damping in confined water layers.* Steve Jeffery, et al., 2004. Página de Internet.
<http://www.nanomagnetics-inst.com/article/SPM%20Controller/SPM%20Controller-5.pdf>
15. *Minimum Design Loads for Buildings and Other Structures.* ASCE 7, American Society of Civil Engineers, Reston, Virginia, United States of America, 2005.
16. *Manual de Diseño de Obras Civiles, Diseño por Sismo.* Comisión Federal de Electricidad, México, 2008.
17. *Revised NZSEE Recommendations for Seismic Design of Storage Tanks.* D. Whittaker, D. Saunders, Beca International Ltd., New Zealand, 2008.
18. *Energy Concepts and Damage Indices,* Amador Teran-Gilmore, Universidad Autónoma Metropolitana, EERC-CUREe Synopsium, Berkeley, California, 1997. Página de Internet:
<http://nisee.berkeley.edu/lessons/teran-gilmore.html>
19. *Performance-based seismic engineering: conventional vs. innovative approaches,* Vitelmo V. Bertero, The 12th World conference on Earthquake Engineering, Auckland, New Zealand, 2000. Página de Internet: <http://www.iitk.ac.in/nicee/wcee/article/2074.pdf>
20. *Espectros de energía de movimientos fuertes registrados en México,* Benjamín Huerta y Eduardo Reynoso, revista Ingeniería Sísmica No. 66 45-72, Universidad Nacional Autónoma de México, México, 2002.
21. *An energy base method for seismic evaluation of structures,* Sutat Leelataviwat, et al., The 14th World conference on Earthquake Engineering, Beijing, China, 2008. Página de internet: http://www.iitk.ac.in/nicee/wcee/article/14_05-01-0037.PDF
22. *Energy-based seismic design of structures with buckling-restrained braces,* Jinkoo Kim et al., *Steel and Composite Structures*, Vol. 4, No. 6 437-452, South Korea, 2004. Página de Internet: <http://hibs.skku.ac.kr/labpds/up/SCS%20Vol.%204%20No.6%20437-452pp.pdf>
23. *Diseño sísmico de estructuras de acero basado en confiabilidad estructural y conceptos de energía,* Edén Bojórquez Mora, *Revista Ingeniería Sísmica* No. 81 53 -79, Universidad Nacional Autónoma de México, México, 2009.
24. *Comunicación personal con el Dr. José Luis Urrutia, en el Instituto de Ingeniería, UNAM.*
25. *Contributions to Applied Mathematics in Engineering III, artículo #5 “Space –Time and Memory ($\sqrt{-1} = i$). A close and clear view to an observable”,* José Luis Urrutia Galicia, *Berichte aus dem Konstruktiven Ingenieurbau*, Universität der Bundeswehr München, ISSN 1431-5122 11/4, Alemania, 2011.