

CAPÍTULO 8

CONCEPTOS BÁSICOS DEL MÉTODO POR ELEMENTO FINITO

8.1 GENERALIDADES

El método del elemento finito (MEF en español o FEM en inglés) es un método numérico para la resolución de ecuaciones diferenciales, utilizado en diversos problemas de ingeniería y física.

El método se basa en dividir el cuerpo, estructura o dominio (medio continuo) sobre el que están definidas ciertas ecuaciones integrales que caracterizan el comportamiento físico del problema (figura 8.1), en una serie de subdominios no intersectantes entre sí denominados elementos finitos. El conjunto de elementos finitos forma una partición del dominio también llamada discretización.

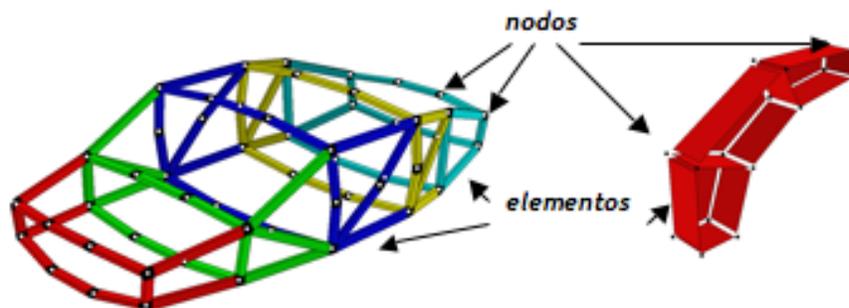


FIGURA 8.1 Ejemplos de discretización

Dentro de cada elemento se distinguen una serie de puntos representativos llamados nodos. Dos nodos son adyacentes si pertenecen al mismo elemento finito, además, un nodo sobre la frontera de un elemento finito puede pertenecer a varios elementos (figura 8.2). El conjunto de nodos considerando sus relaciones de adyacencia se conoce como

mallas. Los cálculos se realizan sobre una malla o discretización creada a partir del dominio con programas generadores de mallas, en una etapa previa a los cálculos que se denomina pre-proceso. De acuerdo con estas relaciones de adyacencia o conectividad se relaciona el valor de un conjunto de variables incógnitas definidas en cada nodo y denominadas grados de libertad. El conjunto de relaciones entre el valor de una determinada variable entre los nodos se puede escribir en forma de sistema de ecuaciones lineales (o linealizadas), la matriz de dicho sistema de ecuaciones se llama matriz de rigidez del sistema. El número de ecuaciones de dicho sistema es proporcional al número de nodos.

Típicamente, el método del elemento finito se programa computacionalmente para calcular el campo de desplazamientos y, posteriormente, a través de relaciones cinemáticas y constitutivas, las deformaciones y tensiones respectivamente, cuando se trata de un problema de mecánica de sólidos deformables o más generalmente un problema de mecánica del medio continuo. El método de los elementos finitos es muy usado debido a su generalidad y a la facilidad de introducir dominios de cálculo complejos (en dos o tres dimensiones).

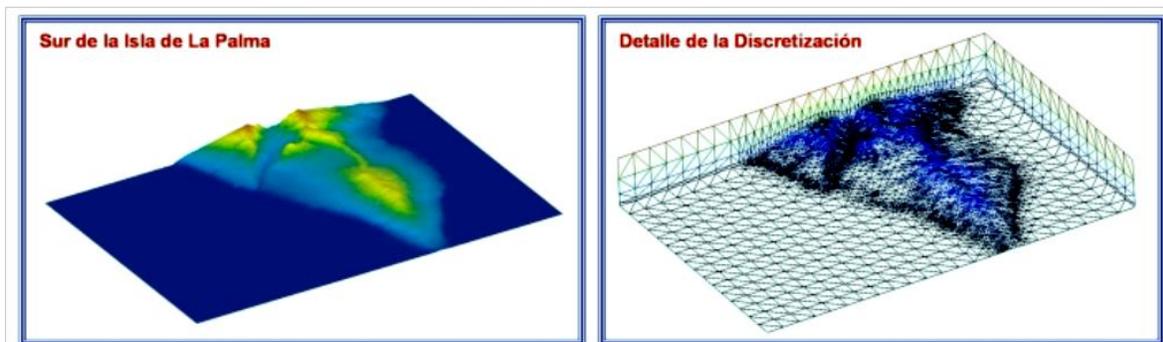


FIGURA 8.2 Discretización para aplicaciones geológicas

Además, el método es fácilmente adaptable a problemas de difusión del calor, de mecánica de fluidos para calcular campos de velocidades y presiones, o de campo electromagnético. Dada la imposibilidad práctica de encontrar la solución analítica de estos problemas, con frecuencia, en la práctica ingenieril, los métodos numéricos y, en particular, los elementos finitos se convierten en la única alternativa práctica de cálculo.

Una importante propiedad del método es la convergencia, si se consideran particiones de elementos finitos sucesivamente más finas, la solución numérica calculada converge rápidamente hacia la solución exacta del sistema de ecuaciones

8.2 HISTORIA

Diversos autores han considerado que Arquímedes (figura 8.3) utilizó un método semejante al del elemento finito para determinar el volumen de algunos sólidos. Aunque él calculó áreas, longitudes y volúmenes de objetos geométricos, dividiéndolos en otros más sencillos y luego sumando sus contribuciones, el concepto de aproximación variacional no se observa por ningún lado. La relación con la definición de MEF es muy pobre. Se puede argumentar que la medida del volumen (área, longitud) de un objeto es una función escalar de su geometría. Cambiando “medida” por energía y “objetos” por elementos en las líneas anteriores, la descripción se aproxima a lo establecido por el MEF “la energía del sistema es igual a la suma de la energía de cada elemento”. Sin embargo, Arquímedes necesitaba las definiciones de derivada para realizar sus cálculos de energía y el Cálculo no fue inventado sino hasta 20 siglos después.



FIGURA 8.3 Arquímedes de Siracusa

En 1941, Hrenikoff presentó una solución para problemas elásticos usando el “método de trabajo del marco”. En un artículo publicado en 1943, Courant usó interpolación polinomial por partes sobre subregiones triangulares para modelar problemas de torsión. Las ideas básicas del método del elemento finito se originaron en el análisis estructural de las aeronaves. En el periodo de 1950-1962, Turner trabajando para Boeing formula y

perfecciona el Método por Rigidez Directo. Turner y otros investigadores obtuvieron matrices de rigidez para armaduras, vigas y otros elementos y presentaron sus resultados en 1956. Clough fue el primero en acuñar y emplear el término elemento finito en 1960.

En los primeros años de la década de 1960, los ingenieros usaron el método para obtener soluciones aproximadas en problemas de análisis de esfuerzos, flujo de fluidos, transferencia de calor y otras áreas. Un libro de Argyris, publicado en 1955, sobre teoremas de energía y métodos matriciales, cimentó métodos adicionales en los estudios de elemento finito. El primer libro sobre elementos finitos por Zienkiewicz y Cheng fue publicado en 1967. A finales de la década de 1960 y principios de la siguiente, el análisis por elemento finito se aplicó a problemas no lineales y de grandes deformaciones. El libro de Oden sobre continuos no lineales apareció en 1972.

8.3 DELIMITACIÓN DEL MÉTODO

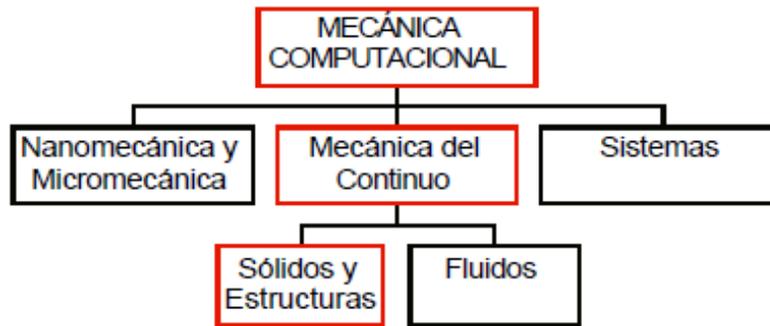
El campo de la mecánica puede ser subdividido en tres áreas (figura 8.4). La mecánica teórica estudia las leyes y principios fundamentales de la mecánica, pero considerando solo su valor científico. La mecánica aplicada transfiere el conocimiento teórico hacia aplicaciones científicas y de ingeniería, atendiendo principalmente la construcción de modelos matemáticos que representen fenómenos físicos. La mecánica computacional resuelve problemas específicos aplicando métodos numéricos implementados en computadoras digitales (simulación).



FIGURA 8.4 Ramas de la Mecánica

Mecánica computacional

Varias ramas de la mecánica computacional pueden distinguirse de acuerdo a la escala física en que se enfocan (figura 8.5)

**FIGURA 8.5** Ramas de la mecánica computacional

La nanomecánica trata con fenómenos de la materia a nivel molecular y atómico. Por ésta razón se encuentra ligada a la física y química de las partículas. La micromecánica, por su parte, trabaja a nivel cristalográfico y granular de la materia. Su principal aplicación tecnológica es el diseño y fabricación de materiales y microdispositivos.

La mecánica del continuo estudia los cuerpos a nivel macroscópico, utilizando modelos continuos en los cuales la microestructura es considerada como homogénea gracias a promedios cualitativos. Las áreas tradicionales de aplicación son la mecánica de sólidos y de fluidos. Se incluyen las estructuras debido a que, obviamente, son fabricadas con sólidos. La mecánica computacional de sólidos usa aproximaciones de ciencias aplicadas, mientras que la mecánica estructural computacional hace énfasis en aplicaciones tecnológicas para el análisis y diseño de estructuras.

La mecánica computacional de fluidos estudia problemas que involucran el movimiento y equilibrio de líquidos y gases. Las áreas beneficiadas con sus desarrollos tecnológicos son la hidrodinámica, aerodinámica, acústica, física de la atmósfera, combustión y propulsión.

Finalmente, los sistemas identifican objetos mecánicos, naturales o artificiales, que realizan una función fácilmente reconocible. Ejemplos de sistemas artificiales son todos aquellos dispositivos hechos por el hombre. Los demás sistemas en los que el hombre no tiene participación se consideran como naturales.

Estática vs. Dinámica

Los problemas del continuo pueden ser subdivididos de acuerdo a si sus efectos inerciales son considerados o no (figura 8.6). En dinámica, la dependencia del tiempo actual debe ser considerada explícitamente, porque el cálculo de fuerzas inerciales requiere tomar derivadas con respecto al tiempo actual.



FIGURA 8.6 Ramas de la mecánica del continuo

Los problemas en estática también pueden depender del tiempo actual pero ignoran o desprecian las fuerzas inerciales. Por consiguiente, los problemas estáticos pueden ser clasificados en estrictamente estáticos y cuasiestáticos. En los primeros, el tiempo no necesita ser considerado explícitamente; cualquier tiempo registrado como respuesta, se usa como parámetro de orden, si es que alguno se necesita. En los problemas cuasiestáticos, tales como la edificación de cimientos, fluencia en metal, plasticidad o fatiga cíclica, una medida real es requerida pero las fuerzas inerciales aún son despreciadas.

Lineal vs. no lineal

Una clasificación de los problemas estáticos, particularmente relevante para estas notas, se muestra en la figura 8.7. El análisis estático lineal involucra problemas estáticos en los cuales la respuesta es lineal en el sentido causa y efecto. Por ejemplo, si las fuerzas aplicadas se duplican, los desplazamientos y esfuerzos internos también se duplican. Los problemas que caen fuera de este dominio son clasificados como no lineales.

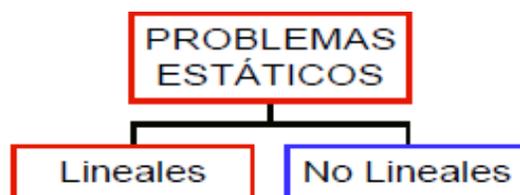


FIGURA 8.7 División de problemas estáticos

Métodos de discretización

Finalmente, se pueden clasificar los análisis estáticos basándose en el método de discretización (*figura 8.8*) por medio del cual el modelo matemático del continuo es discretizado en el espacio, es decir, convertirlo en un modelo discreto con un número finito de grados de libertad:



FIGURA 8.8 Métodos de discretización

En los problemas lineales, el método del elemento finito domina actualmente la escena en lo relativo a discretización espacial. Los métodos por fronteras finitas constituyen una segunda alternativa en áreas de aplicación específicas. Para problemas no lineales, el dominio de los métodos por elemento finito es enorme.

Los métodos por diferencias finitas aplicados en sólidos y mecánica de estructuras han desaparecido virtualmente debido a que son poco prácticos. Sin embargo, para mecánica de fluidos estos métodos son aún importantes. Los métodos por volúmenes finitos, que se relacionan directamente con la discretización de las leyes de conservación, son importantes en problemas difíciles de la mecánica de fluidos; por ejemplo, en dinámica de gases con número de Reynolds elevado.

Los métodos espectrales se basan en correspondencias que transforman dimensiones espaciales y/o temporales a espacios (por ejemplo, el dominio de frecuencias), donde el problema es mucho más sencillo de resolver.

De reciente aparición se tienen los métodos por mallado automático. Estos combinan técnicas y herramientas del elemento finito, por ejemplo la formulación variacional e interpolación, con características de diferencias finitas como el soporte no localizado.

Variantes del método por elemento finito

Actualmente el término MEF identifica a una amplia gama de técnicas (figura 8.9) que comparten características descritas en los puntos anteriores. Dos subclasificaciones que se ajustan a la mecánica de estructuras son:

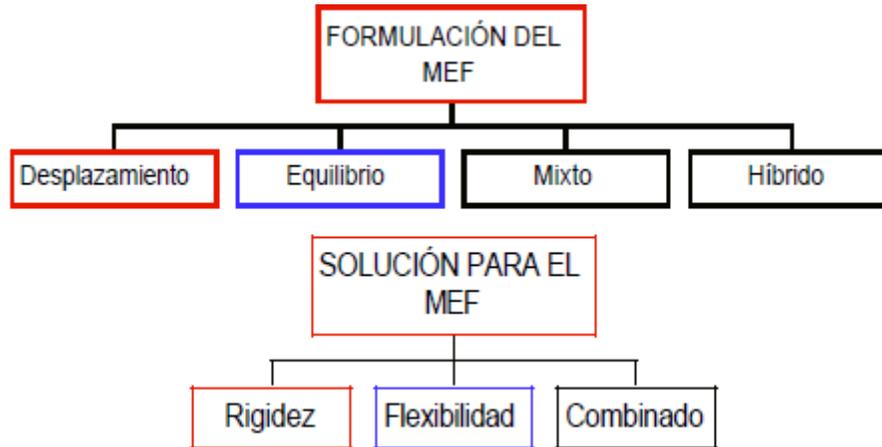


FIGURA 8.9 Variantes del Elemento Finito

Utilizando la clasificación anterior, podemos establecer el tema principal de estas notas: Análisis computacional por elemento finito de problemas estáticos lineales. De las variantes mostradas, se pondrá especial atención a la formulación por desplazamiento y a la solución por rigidez. Esta combinación recibe el nombre de Método directo por rigidez o DSM.

8.4 APLICACIONES DEL ELEMENTO FINITO

El objeto de estas notas es estudiar el Método del elemento finito, pero ¿qué es un elemento finito? El concepto básico puede ser parcialmente ilustrado a través de un antiguo problema: encontrar el perímetro L de un círculo cuyo diámetro es d . Como $L = \pi d$, esto equivale a obtener un valor numérico para π . Se dibuja un círculo de radio r y diámetro $d = 2r$ como se muestra en la figura 8.10a. Se inscribe un polígono regular de n lados, donde $n = 8$ en la figura 8.10b. Se renombran los lados del polígono como elementos y los vértices como nodos. Las etiquetas de los nodos son enteros que van de 1 a 8. Considérese un elemento típico, el que une los nodos 4-5, como se muestra en la

figura 8.10c. Este es un caso del elemento genérico $i - j$ mostrado en la figura 8.10d. La longitud del elemento es $L_{ij} = 2r \text{sen}(\pi/n) = 2r \text{sen}(180^\circ/n)$. Como todos los elementos tienen la misma longitud, el perímetro del polígono es $L_n = nL_{ij}$, de donde la aproximación para π resulta $\pi_n = L_n/d = n \text{sen}(180^\circ/n)$.

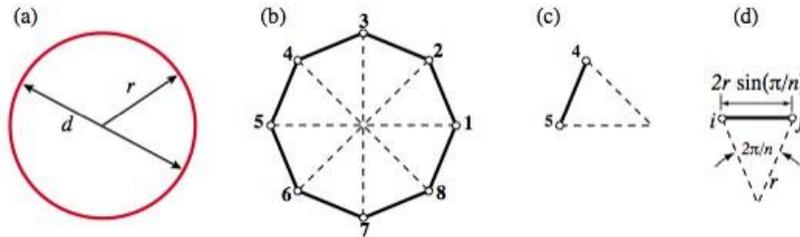


FIGURA 8.10 El problema de “encontrar el número π ” tratado con conceptos de MEF: **(a)** objeto continuo, **(b)** aproximación discreta por polígonos regulares inscritos, **(c)** elemento desconectado, **(d)** elemento genérico

Para facilitar la explicación se ha implementado un sencillo algoritmo en *Mathematica*®, mismo que se anexa en las siguientes páginas (*Archimedes_nb*).

Algunas ideas del MEF, pueden identificarse gracias al ejemplo anterior. El círculo, visto como un objeto matemático, es reemplazado por polígonos. Estos constituyen la aproximación discreta del círculo. Los lados, renombrados como elementos, están completamente identificados por los nodos en sus extremos. Los elementos pueden separarse desconectando sus nodos, un proceso llamado desensamble en el MEF. Gracias a este proceso, un elemento genérico puede ser definido, independientemente del círculo original, por el segmento que conecta dos nodos i y j . La propiedad relevante del elemento, en este ejemplo, es la longitud de su lado L_{ij} , misma que puede ser calculada en el elemento genérico independientemente de los otros, una propiedad conocida como soporte local en el MEF. La propiedad objetivo: el perímetro del polígono, es obtenido al reconectar n elementos y sumando su longitud; los pasos correspondientes en el MEF son el ensamble y la solución, respectivamente. Por supuesto que no existe nada particular en el problema del círculo, pues la misma técnica se puede utilizar para obtener la longitud de curvas suaves.

8.5 TÉCNICAS PARA FORMULAR ECUACIONES ELEMENTALES

En general, hay diversos modos de enfocar el problema mediante elemento finito: (1) formulación directa, (2) formulación mediante la energía potencial y (3) formulación por pesos residuales. Es importante notar que los pasos básicos que se usan en el análisis por elementos finitos son los mismos, sin tener en cuenta cómo se genera el modelo.

Arquimedes_FEM.nb

ARQUIMEDES FEM

El ejemplo se propone para un polígono de 8 lados, sin embargo es mejor escribir el algoritmo para polígonos de n lados, teniendo en cuenta que un círculo puede ser tratado como un polígono de $n = \infty$.

Primero se genera una función `aproxpi` que tiene como argumento el número de lados. Del lado izquierdo, aparece la expresión obtenida de la figura 9.10. Se incluye el comando `N` para obtener valores numéricos hasta 20 cifras.

```
aproxpi [n_] := N[n Sin [180 Degree / n] , 20]
```

Con la función definida, ahora se evalúa para un polígono de 8 lados:

```
aproxpi [8]  
3.0614674589207181738
```

O bien para un conjunto de polígonos:

```
aproxpi [{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256}] // TableForm  
0  
2.00000000000000000000  
2.8284271247461900976  
3.0614674589207181738  
3.1214451522580522856  
3.1365484905459392638  
3.1403311569547529123  
3.1412772509327728681  
3.1415138011443010763
```

En general, se puede generar una lista para polígonos de cualquier número de lados y se construye una tabla para ver hacia donde tienden los valores. Este resultado puede compararse con el valor exacto de π a 20 cifras.

```
d = Range [0, 300, 10];  
TableForm [{d, aproxpi [d]}, TableAlignments -> Center,  
TableDirections -> {Row, Column},  
TableHeadings -> {"# Elementos", "Aproximación de Pi"},  
TableSpacing -> {1, 1}]  
N [Pi, 20]
```

Arquimedes_FEM.nb

Power::infy : Infinite expression $\frac{1}{0}$ encountered. More_

# Elementos	Aproximación de Pi
0	Indeterminate
10	3.0901699437494742410
20	3.1286893008046173802
30	3.1358538980296041420
40	3.1383638291137978013
50	3.1395259764656688038
60	3.1401573745766299633
70	3.1405381245360447821
80	3.1407852607254887217
90	3.1409547032250874481
100	3.1410759078128293839
110	3.1411655873065879233
120	3.1412337969447783133
130	3.1412868806971975178
140	3.1413290014126912132
150	3.1413629825035439184
160	3.1413907937005283337
170	3.1414138430520839917
180	3.1414331587110323075
190	3.1414495056081077357
200	3.1414634623641351507
210	3.1414754732053599249
220	3.1414858837532030294
230	3.1414949661687534581
240	3.1415029371226656457
250	3.1415099708381519786
260	3.1415162086925171883
270	3.1415217663771939427
280	3.1415267393008577166
290	3.1415312067115870816
300	3.1415352348737380390

3.1415926535897932385

Formulación directa

De acuerdo con este método, la matriz de rigidez y las ecuaciones de los elementos que relacionan a las fuerzas nodales con los desplazamientos nodales son obtenidas usando las condiciones de equilibrio de fuerzas para un elemento básico. Este método es muy utilizado en problemas de elementos unidimensionales, debido a su sencillez de implementación.

Formulación mediante pesos residuales

Este método es usado para desarrollar las ecuaciones de los elementos cuando se conoce la ecuación diferencial que describe al fenómeno físico. El método más usado es el de Galerkin; éste permite obtener las mismas ecuaciones que en el método de la energía, pero existen caso especiales en donde la función de la energía potencial no es viable.

Formulación usando la energía o trabajo

En el desarrollo de la matriz de rigidez y las ecuaciones de los elementos bidimensionales y tridimensionales, es mucho más sencillo aplicar el método de la energía. El principio de trabajo virtual (usando desplazamientos virtuales), el principio de energía potencial mínima y el teorema de Castigliano son usados frecuentemente para encontrar las ecuaciones de los elementos.

El principio de trabajo virtual es aplicable para cualquier tipo de material, el principio de energía potencial mínima y el teorema de Castigliano son teoremas aplicables para materiales elásticos. Sin embargo, el principio de trabajo virtual puede ser usado cuando no existe función potencial. Los tres principios permiten obtener las mismas ecuaciones elementales para materiales elásticos y lineales.

8.6 ETAPAS PARA SOLUCIONAR PROBLEMAS MEDIANTE MEF

Las siguientes etapas comprenden los pasos básicos para formular problemas mediante el método del elemento finito.

Fase de preproceso

- ✓ Crear y discretizar la solución dominio en elementos finitos, esto es, subdividir el problema en nodos y elementos.
- ✓ Asumir una función forma a representar el comportamiento físico de un elemento, que es, una función continua aproximada que se asume para la solución del elemento.
- ✓ Desarrollar las ecuaciones para el elemento
- ✓ Armar los elementos a representar en el problema completo, construir la matriz global de rigidez.
- ✓ Aplicar condiciones de frontera, condiciones iniciales y cargas.

Fase de solución

- ✓ Resolver un conjunto de ecuaciones algebraicas lineales o no lineales simultáneas para obtener resultados globales; tal como valores de desplazamientos y temperaturas en diferentes nodos.

Fase de postproceso

- ✓ Con base en los resultados globales obtenidos, se puede volver en el proceso de solución para conocer los valores de desplazamiento o temperatura locales en diversos nodos.

El siguiente ejemplo ilustra los pasos y el procedimiento a realizar en una formulación directa.

EJEMPLO 8.1. Sea un cuerpo en forma de trapecio (figura 8.11), con una sección transversal variable que soporta una carga P , según lo mostrado en la figura. El cuerpo está fijado en la base mayor y en el otro extremo, la base menor, lleva la carga P . El ancho del cuerpo en la parte superior es w_1 , y en la parte inferior es w_2 ; su espesor es t y su longitud es L . El módulo de la elasticidad de la barra es E . Se debe determinar cuánto se deformará el cuerpo en varios puntos a lo largo de su longitud cuando se aplica la carga P . No se tendrá en cuenta el peso del cuerpo en el análisis, si se asume que la carga aplicada es considerablemente más grande que el peso de la barra.

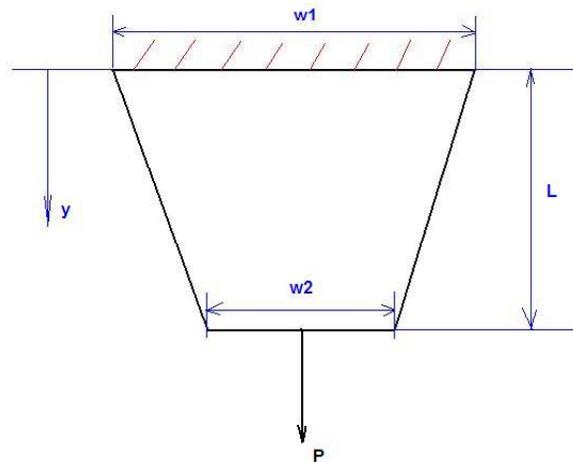


FIGURA 8.11 Dimensiones del trapecio

SOLUCIÓN

Fase de preprocesado

Se subdivide el trapecio en nodos y elementos, se simplificará el problema para resaltar los pasos básicos del análisis por elemento finito, y se representará al mismo por medio de un modelo que tiene 5 nodos y 4 elementos, como se indica en la figura 8.12.

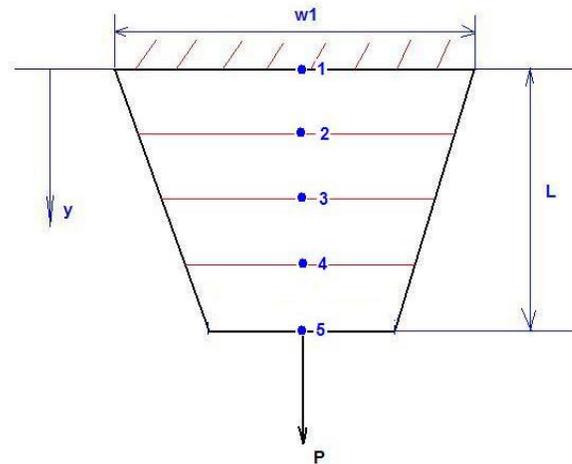


FIGURA 8.12 División en nodos y elementos

Luego se reconstruye al trapecio con cuatro subcuerpos rectangulares, cuyas secciones serán el promedio de las secciones de los límites de cada subcuerpo original. Se divide al cuerpo en 4 subcuerpos, cada uno de ellos tendrá una altura l , igual a $L/4$, de acuerdo con la siguiente expresión:

$$w_i = w_1 + \left[\frac{w_2 - w_1}{L} \right] y_i$$

Se calculan las sucesivas bases menores w_i dentro del trapecio en función de y , luego con el valor w_i se obtienen las secciones a cada incremento de l , esto resulta en 5 secciones que se muestran en la figura 8.13.

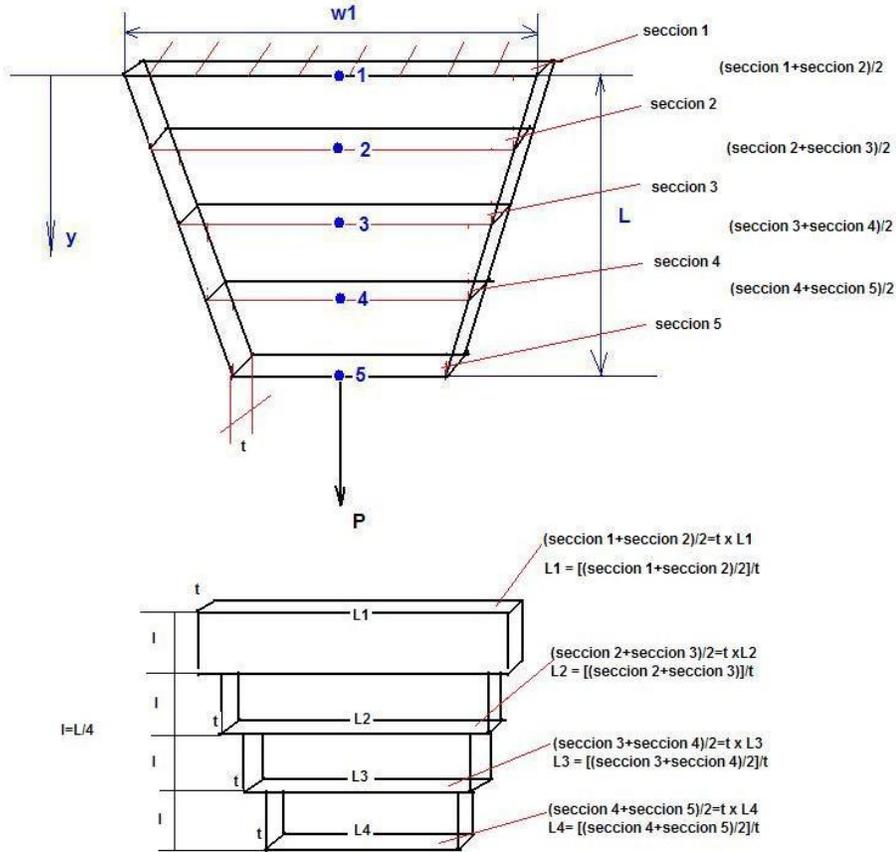


FIGURA 8.13 Dimensiones de las bases menores

Se hace el promedio de estas dos secciones, una superior y otra inferior, luego se igualan a la sección promedio de un cuerpo rectangular de espesor t y el largo se determina como L_1 , L_2 , L_3 y L_4 . Con esta simplificación se logra transformar al cuerpo en forma de trapecio (figura 8.14), en otro de geometría parecida pero formada de cuatro subsecciones rectangulares, con 5 nodos y 4 elementos.

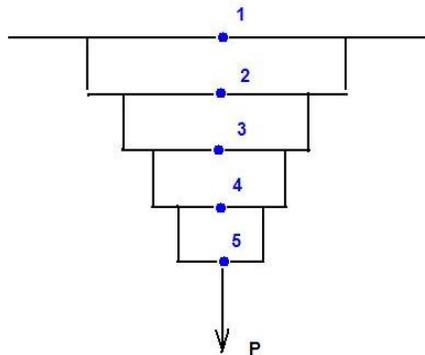


FIGURA 8.14 Trapecio aproximado por cuatro secciones rectangulares

8.7 ENERGÍA POTENCIAL Y EQUILIBRIO. MÉTODO DE RAYLEIGH - RITZ

En la mecánica de sólidos, el problema consiste en determinar el campo de desplazamientos del cuerpo (figura 8.15) que satisfaga las ecuaciones de equilibrio. Como los esfuerzos están relacionados con deformaciones unitarias que, a su vez, están relacionadas con desplazamientos, esto conduce a resolver ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden. A la solución de este conjunto de ecuaciones se le llama una solución exacta. Tales soluciones exactas existen para geometrías y condiciones de carga simples, que pueden encontrarse con ayuda de la teoría de la elasticidad. Para problemas de geometrías complejas y condiciones de frontera y de carga general, la obtención de tales soluciones es una tarea casi imposible. Los métodos de solución aproximada usualmente emplean métodos de energía potencial o con variación, que imponen condiciones menos estrictas sobre las funciones.

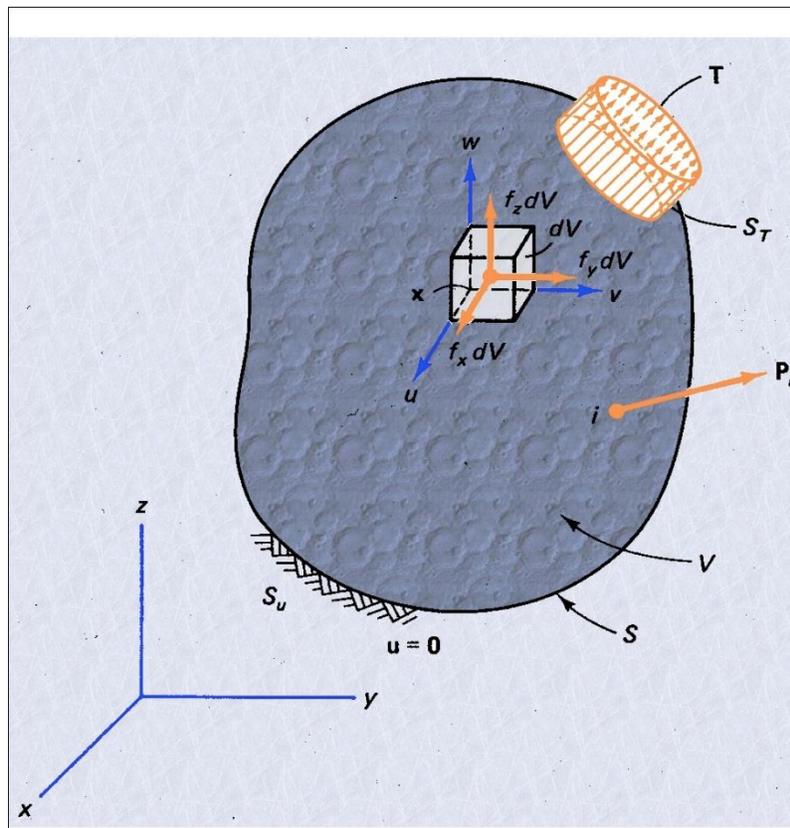


FIGURA 8.15 Cuerpo tridimensional

Resolución numérica de sistemas lineales

La dificultad de resolver un sistema lineal radica en que, esencialmente, se debe invertir una matriz. Una posible estrategia para simplificar los cálculos consiste en sustituir la matriz a invertir A por otra de fácil inversión y reescribir un sistema equivalente que se resuelve de forma aproximada basándose en una solución aproximada del sistema. El esquema es el siguiente:

Dado el sistema $Ax = b$ escribir la matriz A en la forma $A = S - P$, donde la matriz S es de fácil inversión. Entonces se puede reescribir el sistema como $Sx = b + Px$. Si x^0 es una solución aproximada, se busca la solución del sistema $Sx = b + Px^0$, de fácil cálculo:

$$x = S^{-1}(b + Px^0) \quad (8.1)$$

En realidad, el resultado que se obtiene es una aproximación x_1 de la solución del sistema $Ax = b$. A partir de ella se puede repetir el procedimiento y construir de forma iterativa la sucesión (x^k) que se espera converja a la solución del sistema. La regla iterativa será

$$x^{k+1} = S^{-1}(b + Px^k) \quad (8.2)$$

Y para conseguir la convergencia; si x es la solución buscada, el error en el paso $k + 1$ puede expresarse como

$$\|x^{k+1} - x\| = \|S^{-1}P(x^k - x)\| \leq \|S^{-1}P\| \|x^k - x\|$$

y por tanto

$$\|x^{k+1} - x\| = \|S^{-1}P\|^{k+1} \|x^0 - x\| \quad (8.3)$$

por lo que si $\|S^{-1}P\| < 1$ el método converge independientemente de la aproximación de partida x^0 .

Esta es una condición suficiente para la convergencia, pero no es necesaria. Otra condición suficiente es que el autovalor mayor (en módulo) de la matriz $S^{-1}P$ sea estrictamente menor que 1.

A continuación se muestra uno de los métodos iterativos más comunes y sencillos para resolver sistemas lineales.

Método de Gauss–Jacobi

Consiste en despejar de la ecuación i -ésima la incógnita x_i ($x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$), lo cual es posible siempre que ningún elemento de la diagonal de A sea nulo ($\forall k, a_{kk} \neq 0$). En caso de que alguno lo fuera, se deben permutar las ecuaciones hasta conseguir una diagonal libre de ceros. Con el sistema escrito en esta forma se utilizan las coordenadas de la aproximación x^k en el lado derecho del sistema para obtener las coordenadas de x^{k+1} en el lado izquierdo. Desarrollando para cada valor:

$$\begin{aligned} x_1^{k+1} &= \frac{1}{a_{11}} \left(b_1 - (a_{12}x_2^k + a_{13}x_3^k + \dots + a_{1n}x_n^k) \right) \\ x_2^{k+1} &= \frac{1}{a_{22}} \left(b_2 - (a_{21}x_1^k + a_{23}x_3^k + \dots + a_{2n}x_n^k) \right) \\ &\vdots \\ x_n^{k+1} &= \frac{1}{a_{nn}} \left(b_n - (a_{n1}x_1^k + a_{n2}x_2^k + \dots + a_{nn-1}x_{n-1}^k) \right) \end{aligned} \tag{8.4}$$

La descomposición de A equivalente a este método consiste en tomar como S la diagonal de A y entonces $P = S - A$ está formada por los elementos que no están sobre la diagonal (con signo cambiado) en su posición y ceros en la diagonal.

EJEMPLO 8.2. Resuelva el siguiente sistema por el método de Gauss – Jacobi

$$\begin{pmatrix} 8 & 2 & 0 \\ 2 & 8 & 2 \\ 0 & 2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN

La descomposición $A = S - P$ permite expresar el sistema como:

$$\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Y al invertir la matriz S , se logra la forma para el método de Gauss – Jacobi:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Si se inicia el método con el vector $x^0 = (0,0,0)$, las sucesivas iteraciones tienen por

resultado lo siguiente $\begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ 0 \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{4} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ 0 \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{63}{64} \\ 0 \\ \frac{63}{64} \end{pmatrix} \quad \text{que convergen a} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Energía potencial Π

La energía potencial total Π de un cuerpo elástico se define como la suma de la energía de deformación unitaria total (U) y el potencial de trabajo:

$$\text{Energía Potencial Total} = \text{Energía de Deformación} + \text{Potencial de Trabajo}$$

$$\Pi = (U) + (WP)$$

Para materiales elásticos lineales, la energía de deformación por unidad de volumen en el cuerpo es $\frac{1}{2}\sigma\varepsilon$. Para el cuerpo elástico que se muestra (figura 8.15), la energía de deformación unitaria total U está dada por

$$U = \frac{1}{2} \int_V \sigma \varepsilon dV \tag{8.5}$$

siendo

$$\sigma = [\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy}] \quad \text{esfuerzos}$$

$$\varepsilon = [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}, \gamma_{xy}] \quad \text{deformaciones}$$

El potencial de trabajo WP está dado por

$$WP = -\int_V u f dV - \int_S u T dS - \sum_i u_i P_i \quad (8.6)$$

siendo

$u_i = [u, v, w]$	vector de desplazamientos
$f = [f_x, f_y, f_z]$	fuerza distribuida por unidad de volumen
$T = [T_x, T_y, T_z]$	fuerza de cuerpo
$P_i = [P_x, P_y, P_z]$	carga actuando en un punto i

El potencial total para el cuerpo elástico general mostrado en la figura 8.15 es

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \sigma \varepsilon dV - \int_V u f dV - \int_S u T dS - \sum_i u_i P_i \quad (8.7)$$

Se consideran sistemas conservativos, donde el potencial de trabajo es independiente de la trayectoria, es decir, si el sistema se desplaza desde una configuración dada y se trae de regreso al estado inicial, las cargas efectúan un trabajo nulo, independientemente de la trayectoria. Entonces, el principio de la energía potencial se enuncia como sigue:

Principio de la energía potencial mínima

Para sistemas conservativos, de todos los campos de desplazamiento cinemáticamente admisibles, aquellos que corresponden a condiciones de equilibrio extremizan la energía potencial total. Si la condición es un mínimo, el estado de equilibrio es estable.

Los desplazamientos cinemáticamente admisibles son aquellos que satisfacen la naturaleza de valor único de los desplazamientos (compatibilidad) y las condiciones de frontera. En los problemas donde los desplazamientos son las incógnitas, la compatibilidad se satisface automáticamente.

EJEMPLO 8.3. Se tiene un resorte (figura 8.16) cuya constante de elasticidad es k .

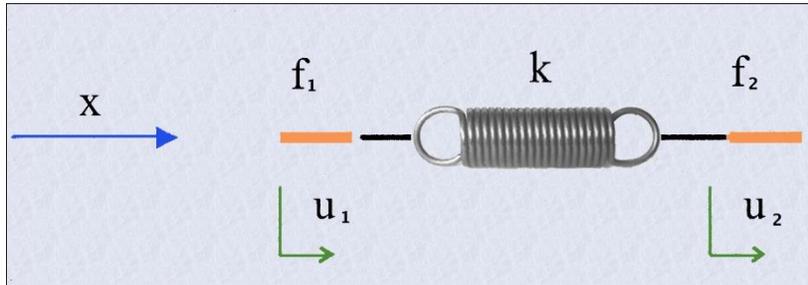


FIGURA 8.16 Resorte simple

Dos fuerzas externas f_1 y f_2 están aplicadas a los nodos 1 y 2, respectivamente. Los desplazamientos de los nodos desde el estado no deformado son u_1 y u_2 . Considérese el sentido positivo del eje x hacia la derecha.

Analizar la figura y determinar lo siguiente:

- La energía potencial total
- Las ecuaciones de equilibrio en forma matricial.

SOLUCIÓN

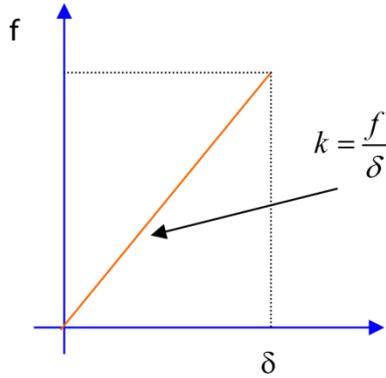
- La energía potencial total se obtiene a partir de la expresión 8.7:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \sigma \varepsilon dV - \int_V u f dV - \int_S u T dS - \sum_i u_i P_i \quad (8.7)$$

Y del análisis se llega a la siguiente expresión:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \sigma \varepsilon dV - \sum_i u_i P_i \quad (8.8)$$

Para calcular la energía asociada al resorte deformado, se utiliza la siguiente gráfica:



Ley de Hooke	$f = k\delta$
Área bajo la curva (representa energía)	$A = \frac{1}{2} f\delta$
Sustituyendo f en A	$A = \frac{1}{2} k\delta^2$

Considérese que la deformación del resorte δ es igual a la diferencia de desplazamientos, es decir $\delta = u_2 - u_1$; entonces se pueden sustituir las expresiones obtenidas en la energía potencial total:

$$\Pi = \frac{1}{2}k(u_2 - u_1)^2 - f_1u_1 - f_2u_2 \qquad \text{ENERGÍA POTENCIAL TOTAL}$$

b. Para el equilibrio de este sistema, se necesita minimizar Π con respecto a u_1 y u_2

Las dos ecuaciones están dadas por

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_i} = 0 \qquad ; \quad i = 1, 2 \qquad (8.9)$$

que son en forma explícita

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial u_1} &= -k(u_2 - u_1) - f_1 = ku_1 - ku_2 - f_1 = 0 \\ \frac{\partial \Pi}{\partial u_2} &= k(u_2 - u_1) - f_2 = -ku_1 + ku_2 - f_2 = 0 \end{aligned} \qquad (8.10)$$

Estas ecuaciones de equilibrio pueden escribirse en la forma $KU = F$, como sigue:

$$\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \qquad (8.11)$$

en donde K se conoce como *matriz de rigidez elemental*, y es la parte más importante del método del elemento finito, pues al invertirla, y resolver correctamente el sistema, se pueden conocer los desplazamientos, las deformaciones, los esfuerzos, etc.

EJEMPLO 8.4. Se tiene el siguiente sistema de resortes (figura 8.17)

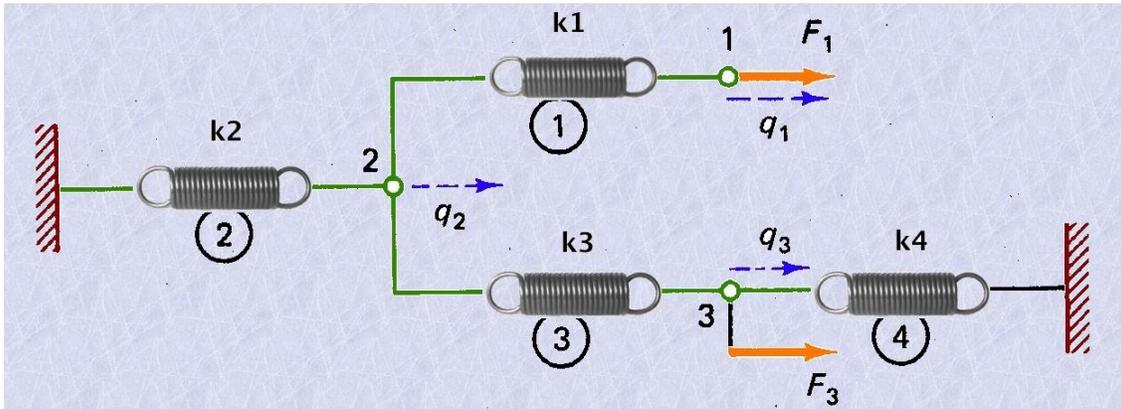


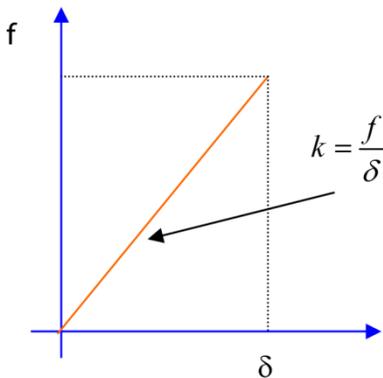
FIGURA 8.17 Sistema de resortes

Analizar la figura y determinar lo siguiente:

- La energía potencial total del sistema
- Las ecuaciones de equilibrio en forma matricial

SOLUCIÓN

- Para calcular la energía potencial total, es necesario manipular un poco la expresión de la ley de Hooke. En la siguiente gráfica se observa el comportamiento de un resorte sometido a una carga de tracción



Ley de Hooke	$f = k\delta$
Área bajo la curva (representa energía)	$A = \frac{1}{2} f\delta$
Sustituyendo f en A	$A = \frac{1}{2} k\delta^2$

Se aplica la última expresión en cada resorte y el resultado debe sumarse a la energía generada por las cargas externas aplicadas en los nodos 1 y 3. De esta forma, la energía potencial total es:

$$\Pi = \frac{1}{2}k_1\delta_1^2 + \frac{1}{2}k_2\delta_2^2 + \frac{1}{2}k_3\delta_3^2 + \frac{1}{2}k_4\delta_4^2 - f_1u_1 - f_3u_3 \quad (8.12)$$

donde $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ y δ_4 son los alargamientos de los cuatro resortes. Como $\delta_1 = u_1 - u_2, \delta_2 = u_2 - u_3, \delta_3 = u_3 - u_2, \delta_4 = u_5 - u_3$, se tiene

$$\Pi = \frac{1}{2}k_1(u_1 - u_2)^2 + \frac{1}{2}k_2(u_2 - u_3)^2 + \frac{1}{2}k_3(u_3 - u_2)^2 + \frac{1}{2}k_4(u_5 - u_3)^2 - f_1u_1 - f_3u_3 \quad (8.13)$$

donde u_1, u_2, u_3 son los desplazamientos de los nodos 1, 2 y 3, respectivamente.

Para el equilibrio de este sistema con tres grados de libertad, se necesita minimizar la función Π con respecto a u_1, u_2, u_3 . Las tres ecuaciones están dadas por

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_i} = 0 \quad ; \quad i = 1, 2, 3 \quad (8.14)$$

que son en forma explícita

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial u_1} &= k_1(u_1 - u_2) - f_1 = 0 \\ \frac{\partial \Pi}{\partial u_2} &= -k_1(u_1 - u_2) + k_2(u_2 - u_3) + k_3(u_3 - u_2) = 0 \\ \frac{\partial \Pi}{\partial u_3} &= k_3(u_3 - u_2) + k_4(u_5 - u_3) - f_3 = 0 \end{aligned} \quad (8.15)$$

Esas ecuaciones de equilibrio pueden escribirse en la forma $KU = F$, como sigue:

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ 0 \\ f_3 \end{bmatrix} \quad (8.16)$$

Por otra parte, sí se escriben las ecuaciones del sistema considerando el equilibrio de cada nodo por separado (figura 8.18).

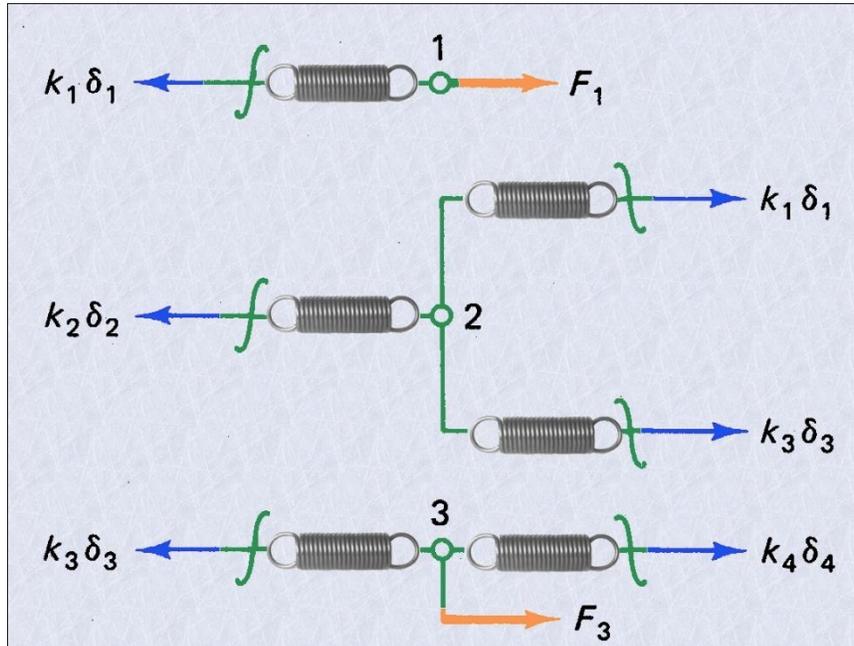


FIGURA 8.18 Solución considerando equilibrio nodal

resulta lo siguiente

$$\begin{aligned}
 k_1 \delta_1 &= f_1 \\
 k_2 \delta_2 - k_1 \delta_1 - k_3 \delta_3 &= 0 \\
 k_3 \delta_3 - k_4 \delta_4 &= f_3
 \end{aligned}
 \tag{8.17}$$

que es precisamente el conjunto de ecuaciones representado anteriormente.

8.8 METODOLOGÍA PARA EL MODELADO NUMÉRICO DE PROCESOS DE CORTE

En el proceso cognitivo de problemas complejos la aceptación de modelos físicos que representen el nivel presente de conocimiento es muy importante. La complicación excesiva del modelo aumenta ligeramente el trabajo al definir los requisitos de entrada y de hardware para obtener los resultados esperados, por lo que hace su efectiva utilización imposible. De ahí que el compromiso entre la desinformación del problema y la

complicación del modelo convertido sea esencial. En el siguiente paso se crea el modelo matemático entendido como una descripción matemática de las dependencias físicas del fenómeno observado. Esta descripción se puede proporcionar mediante ecuaciones algebraicas, ecuaciones diferenciales ordinarias o parciales, ecuaciones diferenciales e integrales o ecuaciones diferenciales con retardo. Estas últimas cobran mayor relevancia para el modelado de procesos donde debe considerarse la influencia que la historia del proceso genera en el estado actual del sistema.

La siguiente etapa de modelado dinámico es el análisis de las ecuaciones de movimiento del sistema en estudio. El método de análisis depende del tipo de las ecuaciones del modelo. Para ecuaciones diferenciales lineales se obtienen soluciones analíticas. Sin embargo, para los sistemas no-lineales más simples no hay soluciones precisas, o la determinación de estas soluciones es muy inconveniente. En estos casos, se puede aplicar una aproximación mediante métodos analíticos con base en funciones elementales, pero sobre todo los métodos numéricos predominan en el análisis de sistemas no-lineales.

En la última etapa del modelado, los parámetros para los que las características dinámicas requeridas pueden ser obtenidas se seleccionan, a esto se le llama síntesis y optimización. Aparte del análisis teórico mencionado anteriormente, se debe contar con investigación experimental adecuada. Ésta permite la identificación de los parámetros físicos del modelo y la verificación del modelo matemático y los resultados obtenidos.

8.9 MÉTODO DE ELEMENTO FINITO APLICADO A PROCESOS DE DEFORMACIÓN

La técnica del elemento finito cuyo boom inició en la década de los sesenta y se logró aplicar al cálculo de análisis estructuras mediante computadoras.

El concepto básico del método es la discretización. Un número de puntos finitos son identificados en el dominio de la función, y el valor de la función y sus derivadas son especificados cuando es conveniente. Estos puntos se conocen como nodos, el dominio

de la función es representada aproximadamente por una colección de subdominios llamados elementos finitos.

Una vez que el cuerpo es dividido en elementos finitos, conectados mediante nodos, (este proceso se conoce como mallado) se procede al ensamble de las ecuaciones en las fronteras de cada elemento para que haya continuidad. En sistemas lineales los nodos serán igual al número de variables o incógnitas, por lo tanto, entre más fino sea el mallado mayor cantidad de incógnitas se tendrán, de modo que es esencial el uso de una computadora para resolverlas, en este caso son variables de campo.

El método de elemento finito (MEF) puede ser aplicado a problemas que impliquen deformaciones y esfuerzos, ya que permite resolver ecuaciones diferenciales parciales para figuras arbitrarias, esto es debido a que las ecuaciones son muy difíciles de resolver mediante métodos analíticos, como la separación de variables que solo abarca figuras muy sencillas.

Independientemente de la naturaleza del problema, el MEF sigue los siguientes pasos:

1. Definición del problema y su dominio
2. Discretización del dominio
3. Identificación de las variables de estado
4. Formulación del problema
5. Establecimiento de los sistemas de referencia
6. Construcción de las formulaciones de aproximación de los elementos
7. Determinación de las ecuaciones al nivel de cada elemento
8. Transformación de coordenadas
9. Ensamblaje de las ecuaciones de los elementos
10. Introducción de las condiciones de contorno
11. Solución del conjunto de ecuaciones simultáneas resultantes
12. Interpretación de los resultados

MEF aplicado al rango elástico

El MEF puede ser aplicado a muchos problemas que impliquen la solución a ecuaciones diferenciales por medio de métodos numéricos, en el caso del modelado del comportamiento mecánico se tienen que resolver las siguientes ecuaciones: la constitutiva, relación entre deformación y esfuerzo, las de equilibrio y las de velocidad, por lo tanto se tienen 15 incógnitas, 6 debido a las componentes de las fuerzas y momentos, 6 esfuerzos (normales y tangenciales) y 3 componentes de velocidad. Aunque hay casos donde se reducen las incógnitas de los problemas debido a que se pueden simplificar. El comportamiento elástico lineal es utilizado en la industria porque muchos productos trabajan bajo la consideración de que no deben presentar una deformación permanente o un cambio de forma bajo la aplicación de cargas externas, también es útil cuando se busca la solución a problemas de esfuerzos y deformaciones a nivel microscópico, como en las dislocaciones con ciertas condiciones particulares, en esta parte sólo analizaremos el comportamiento elástico lineal.

La teoría elástica lineal se basa en los siguientes cuatro puntos:

- Las deformaciones son pequeñas
- El comportamiento del material es lineal
- Los efectos dinámicos son despreciados
- No se generan huecos o traslapes durante la deformación

Como regla general se tiene que la deformación debe de ser del orden de 10^{-2} de las dimensiones del cuerpo, y el error asociado a este tipo de comportamiento no excedan el 1%. La decisión entre escoger un análisis lineal dependerá de si los esfuerzos sobrepasan el esfuerzo de cedencia o no, aunque si las deformaciones son pequeñas el resultado mediante análisis lineal puede ser válido, como en el caso del concreto. Por ello, se presentan las ecuaciones que se resuelven por MEF en el rango elástico.

La idealización de que el comportamiento es estático se debe a que la aceleración cuando se aplican las cargas es muy baja, por lo tanto no hay efectos inerciales. Un criterio para determinar qué tan baja puede ser la aceleración está determinado mediante:

$$\left| f^{d'Alembert} \right| = |Ma|$$

Si las $f^{d'Alembert}$ son pequeñas en comparación con las fuerzas inerciales, entonces es aplicable.

La cuarta suposición implica que el material es un medio continuo, sin traslapes o cavidades en su interior.

Estas suposiciones también implican que el material no falla, evidentemente esto no es cierto, en tales casos se deben considerar comportamientos no lineales.

Cinemática

Si se define un vector con dos componentes una en la dirección \mathbf{i} y la otra en la dirección \mathbf{j} , y utilizando coordenadas cartesianas, matricialmente se queda:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix}$$

Se puede demostrar que en un volumen de control, bajo la suposición de que existen pequeños gradientes de desplazamiento, las deformaciones quedan definidas como:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right)$$

Así que las deformaciones se encuentran en términos del campo de velocidades y se puede escribir tensorialmente de la forma:

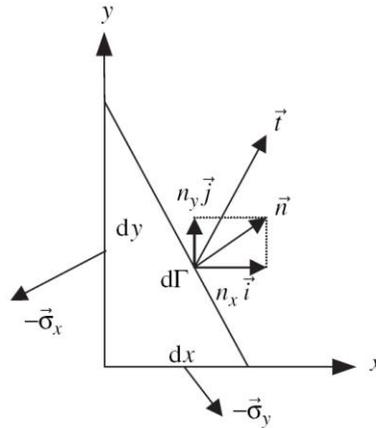
$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} = \nabla_s \mathbf{u} = \nabla_s \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix}, \text{ donde } \nabla_s = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$$

Esfuerzos y tracciones

Los esfuerzos se definen vectorialmente como $\vec{\sigma}_x = \sigma_{xx}\vec{i} + \sigma_{xy}\vec{j}$, $\vec{\sigma}_y = \sigma_{xy}\vec{i} + \sigma_{yy}\vec{j}$, estos son esfuerzos actuando en los planos x , y , respectivamente, en ocasiones es útil representar el tensor de esfuerzos de forma simétrica:

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{bmatrix}$$

La tracción, al igual que los esfuerzos, es una fuerza aplicada sobre una superficie en particular, mientras que los esfuerzos proveen información de la tracción en cualquier punto.



De acuerdo a la imagen vector normal es $\vec{n} = n_x\vec{i} + n_y\vec{j}$, si se considera un espesor, unitario el vector t queda como $t = \boldsymbol{\tau}\vec{n}$

Ecuaciones de equilibrio

Si se considera que las fuerzas de tracción actúan sobre el plano xy , y que puede que existan fuerzas de cuerpo (debidas a campos gravitacionales, magnéticos, etc...) definidas como:

$$\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j}$$

En un análisis estático la suma de fuerzas es igual a cero por lo que queda:

$$\frac{\partial \vec{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{\sigma}_y}{\partial y} + \vec{b} = 0$$

Escrito en forma matricial queda:

$$\nabla_s^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = 0$$

Ecuaciones constitutivas

Las ecuaciones que relacionan los esfuerzos y las deformaciones se conocen como ecuaciones constitutivas y en el rango elástico están regidas por la Ley de Hook generalizada.

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}$$

Donde D es una matriz de 3×3 que depende en el caso de problemas bidimensionales si se trata de un esfuerzo plano o de una deformación plana.

Para esfuerzo plano:

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix}$$

Para deformación plana:

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1-\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix}$$

FEM aplicado para deformación plástica

Para el caso donde la deformación se encuentra en el rango plástico los procesos son no lineales, en el análisis de conformado de metales como: forja, trefilado, laminación en caliente, etc., es normalmente aceptable despreciar las deformaciones elásticas frente a las deformaciones plásticas o visco plásticas, el proceso es altamente considerado como no-lineal en su comportamiento de deformación y de la fricción de contacto, para la mayoría de los casos prácticos se admite un análisis cuasi estático, ya que los efectos dinámicos pueden despreciarse a excepción de los procesos de alta velocidad. En estos casos, se analiza la evolución de la deformación de tal manera que en cada instante el estado de un cuerpo en el curso de la deformación satisfaga las condiciones de equilibrio.

La deformación plástica generalmente sobrepasa a la deformación elástica y las idealizaciones de comportamiento rígido-plástico o rígido-viscoelástico son aceptables.

El problema asociado con la deformación plástica es un problema de condiciones de frontera. Para el caso de comportamiento rígido-visco plástico las condiciones de frontera se establecen como sigue: en algún punto del proceso de distorsión cuasi estática, la forma de la figura, la distribución interna de temperaturas y los valores de los parámetros del material están dados. Así, el vector velocidad se encuentra definido en una superficie S_u a la cual se le aplica una carga F en cierta superficie S_F . La solución a este problema es la distribución de esfuerzos y velocidades que cumplan con las ecuaciones constitutivas y las condiciones de frontera

Software libre

En los siguientes links podemos encontrar códigos de uso libre para aplicar el MEF.

<http://www.salome-platform.org/>

<http://www.dynaexamples.com/metalfforming/metal-forming-iv>