



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

PROGRAMA DE MAESTRIA Y DOCTORADO EN
INGENIERIA

FACULTAD DE INGENIERIA

SOLUCION DE LAS ECUACIONES DE NAVIER-STOKES
PARA FLUJO INCOMPRESIBLE USANDO
METODOS LIBRES DE MALLA PARA
BAJOS NUMEROS DE REYNOLDS

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

MAESTRO EN INGENIERIA

MECÁNICA – TERMOFLUIDOS

P R E S E N T A :

APOLINAR PEREZ LOPEZ

TUTOR:

DR. RUBEN AVILA RODRIGUEZ

2008



JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dr. Jaime Gonzalo Cervantes de Gortari

Secretario: Dr. Francisco Javier Solorio Ordaz

Vocal: Dr. Rubén Ávila Rodríguez

1er Suplente: Dr. Eduardo Ramos Mora

2do Suplente: Dr. Pedro González Casanova

Lugar donde se realizó la tesis:

DEPARTAMENTO DE TERMOFLUIDOS, FACULTAD DE INGENIERIA

TUTOR DE TESIS:

DR. RUBÉN ÁVILA RODRÍGUEZ

FIRMA

Solución de las ecuaciones de Navier-Stokes para flujo incompresible usando métodos libres de malla para bajos números de Reynolds

por Apolinar Pérez López

México, D.F., mayo de 2008



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

A mis padres: Abel y Tere
A Lety, Lore, Mayte y Merly
A mis mis padrinos Rafa y Lupe
Gracias por estar conmigo siempre

Agradecimientos

A Dios.

A la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM) por haberme dado el apoyo financiero para cursar los estudios de maestría a través de la Dirección General de Estudios de Posgrado (DGEP).

A mis Profesores del Departamento de Termofluidos de la Facultad de Ingeniería: Dr. Rubén Ávila director de esta tesis, Dr. Jaime Cervantes, Dr. Francisco Solorio y Dr. Federico Méndez.

Al Departamento de Visualización Científica de la Dirección General de Supercómputo Académico (DGSCA) por los apoyos para la visualización de los datos que se obtuvieron en este trabajo.

A las instituciones que han sido eslabones en mi formación académica: Esc. Prim. Dr. Belisario Domínguez, Esc. Sec. Tec. # 44, CECyT La Trinitaria y a mi alma mater, el Instituto Tecnológico de Tuxtla Gutiérrez.

Índice general

| | |
|--|----------|
| Resumen | xI |
| Lista de símbolos | xIII |
| 1. Introducción | 1 |
| 2. Fundamentos teóricos del método local sin malla de Petrov-Galerkin | 7 |
| 2.1. Método de los residuos pesados | 7 |
| 2.2. Mínimos cuadrados móviles | 8 |
| 2.2.1. Funciones de peso | 15 |
| 2.3. Aplicación del método local sin malla de Petrov-Galerkin: Ecuación de difusión de calor | 16 |
| 2.3.1. La forma débil | 17 |
| 2.3.2. Discretización de la forma débil | 19 |
| 2.3.3. Discretización temporal | 21 |
| 2.4. Condiciones de frontera | 21 |
| 2.5. Implementación numérica del método local sin malla de Petrov-Galerkin | 22 |

| | |
|--|-----------|
| 3. El método local sin malla de Petrov-Galerkin para la solución de las ecuaciones de Navier-Stokes | 25 |
| 3.1. Las ecuaciones de Navier-Stokes | 25 |
| 3.2. Corrección de presiones-velocidad | 27 |
| 4. Resultados | 33 |
| 4.1. Distribución de temperaturas en anulos esféricos | 33 |
| 4.2. Flujo entre cilindros rotatorios concéntricos | 45 |
| 4.3. Flujo alrededor de un cilindro | 47 |
| 4.4. Flujo alrededor de un automóvil | 51 |
| 4.5. Convección natural en una cavidad triangular | 52 |
| 5. Conclusiones | 61 |
| A. Algoritmo cubo-esfera | 63 |
| B. Transformaciones de superficies curvas | 67 |
| C. Transformaciones de vectores e integrales de superficie | 71 |
| D. Forma débil de las ecuaciones de Navier-Stokes | 75 |
| D.1. Forma débil de la ecuación de continuidad | 76 |
| D.2. Forma débil de las ecuaciones de cantidad de movimiento . . . | 76 |
| D.3. Forma débil de la ecuación de la energía | 77 |
| Bibliografía | 79 |

Índice de figuras

| | |
|--|----|
| 2.1. Dominio del problema | 9 |
| 2.2. Aproximación por mínimos cuadrados móviles | 11 |
| 2.3. Funciones de interpolación basadas en el método de los mínimos cuadrados móviles | 14 |
| 2.4. Primeras derivadas de las funciones de interpolación basadas en el método de los mínimos cuadrados móviles | 14 |
| 2.5. Segundas derivadas de las funciones de interpolación basadas en el método de los mínimos cuadrados móviles | 14 |
| 2.6. Función de peso “spline” de cuarto orden de soporte compacto | 16 |
| 2.7. Formas de los subdominios de las funciones de peso (2D) . . . | 16 |
| 4.1. Sección de una esfera hueca | 35 |
| 4.2. Distribución de temperaturas y flujos de calor en la dirección radial de una esfera hueca | 36 |
| 4.3. Sección de una esfera hueca compuesta de dos materiales . . . | 37 |
| 4.4. Distribución de temperaturas y flujo de calor en la dirección radial de una esfera hueca con una condición de interface . . . | 38 |
| 4.5. Distribución de temperaturas y flujo de calor en la dirección radial para la esfera hueca compuesta de dos materiales | 39 |
| 4.6. Esfera hueca en donde se muestra la ubicación de los polos . . | 40 |

| | |
|---|----|
| 4.7. Distribución de temperaturas en una esfera hueca con condiciones de frontera no homogéneas y regiones polares enfriadas a la misma temperatura | 41 |
| 4.8. Distribución de temperaturas en una esfera hueca con condiciones de frontera no homogéneas y regiones polares enfriadas a temperaturas diferentes | 42 |
| 4.9. Distribución de temperaturas en anulos esféricos con condiciones de frontera no homogéneas y regiones polares enfriadas a la misma temperatura | 43 |
| 4.10. Distribución de temperaturas en anulos esféricos con condiciones de frontera no homogéneas y regiones polares enfriadas a temperaturas diferentes | 44 |
| 4.11. Geometría para el flujo entre cilindros rotatorios y distribución de nodos | 45 |
| 4.12. Solución para el flujo entre cilindros rotatorios | 46 |
| 4.13. Distribución de nodos alrededor del cilindro | 48 |
| 4.14. Estelas detrás del cilindro a diferentes números de Reynolds | 49 |
| 4.15. Distribución de nodos alrededor de la geometría de un automóvil | 52 |
| 4.16. Campo de velocidades alrededor de la geometría de un automóvil | 52 |
| 4.17. Detalle de los vectores de velocidad en la estela detrás del perfil del automóvil | 53 |
| 4.18. Diagrama para la cavidad triangular | 54 |
| 4.19. Convección natural en el interior de una cavidad triangular para $Ra= 1000$ y $Pr=0.7$ | 58 |
| 4.20. Convección natural en el interior de una cavidad triangular para $Ra= 20000$ y $Pr=0.7$ | 59 |
| 4.21. Variación del número de Nusselt local con la distancia en la pared vertical y en la pared inclinada | 60 |
| A.1. Descomposición de una esfera en seis regiones | 64 |

| | |
|---|----|
| A.2. Transformación de posiciones cubo-esfera | 64 |
| B.1. Transformación de coordenadas | 68 |

Resumen

Esta tesis trata sobre la simulación numérica de un flujo incompresible en estado estacionario bidimensional empleando el método local sin malla de Petrov-Galerkin. Las ecuaciones de continuidad, de cantidad de movimiento y de energía se resuelven en su forma débil en un sistema de coordenadas cartesianas con subdominios locales de integración. El esquema de interpolación por mínimos cuadrados móviles se usa para generar las funciones de expansión. La función de peso utilizada en el método de los residuales pesados es una función spline de cuarto orden, la cual es la misma que aquella empleada para generar las funciones de expansión basadas en mínimos cuadrados móviles. Los aspectos teóricos y la implementación numérica del método local sin malla de Petrov-Galerkin se describen resolviendo la ecuación de difusión de calor en estado transitorio en tres dimensiones. En el caso de difusión de calor se obtiene la distribución de temperaturas en anulos esféricos, empleando coordenadas cartesianas. Para la simulación numérica del flujo de un fluido se emplean variables primitivas y para satisfacer las ecuaciones de cantidad de movimiento y de continuidad, el campo de presiones y el de velocidad se obtiene utilizando un procedimiento iterativo en el que se corrigen simultáneamente el campo de presiones y el de velocidades. Los resultados que se presentan son para bajos números de Reynolds: (1).- flujo de Couette en cilindros rotatorios concéntricos, (2).- flujo alrededor de un cilindro infinito, (3).- flujo alrededor de un automóvil y (4).- convección natural en una cavidad triangular con bajo número de Rayleigh.

Capítulo 1

Introducción

La motivación de este trabajo es la solución numérica de las ecuaciones de la Dinámica de Fluidos para un flujo incompresible. Estas ecuaciones (ecuación de continuidad, ecuaciones de cantidad de movimiento y ecuación de la energía) son ecuaciones diferenciales parciales (EDPs) de segundo orden, no lineales, que resultan muy complicadas de resolver con técnicas analíticas. Resolver estas ecuaciones es de mucho interés no sólo en el campo de la ingeniería, sino también en el campo de las matemáticas aplicadas y de la física.

Aunque a lo largo de los años se han desarrollado importantes herramientas matemáticas para resolver las ecuaciones de la dinámica de los fluidos, siempre es necesario hacer ciertas idealizaciones del problema físico para poder obtener una solución analítica, que en ocasiones se encuentra muy lejos de la realidad. Las soluciones analíticas que se disponen hasta el momento son para flujos en configuraciones geométricas sencillas.

El surgimiento de las computadoras ha tenido un gran impacto en la ingeniería y en particular en el campo de la Mecánica de Fluidos, dando lugar a lo que ahora se conoce como Dinámica de Fluidos Computacional (DFC), en la que se emplean métodos numéricos para resolver las EDPs que rigen el comportamiento de los fluidos. La DFC nos permite la elaboración de algoritmos numéricos para resolver problemas a los que comúnmente se enfrentan los ingenieros cuando interviene un fluido.

La DFC ha tenido un avance muy importante con las computadoras cada vez más rápidas, tanto, que existen en el mercado códigos computacionales que permiten resolver muchos problemas en la industria e incluso en el campo

de la investigación.

Estos códigos emplean los tradicionales métodos numéricos basados en mallas computacionales, tales como el método de los elementos finitos (MEF) y el método del volumen finito (MVF), entre los más populares. Sin embargo, estos métodos se enfrentan a serias dificultades cuando se desean resolver problemas complicados y de mucho interés en ingeniería tales como los de cambio de fase, problemas de flujos con fronteras móviles, flujos con superficie libre, flujos alrededor de cuerpos con partes con movimiento independiente, etc.

Esto no quiere decir que esos métodos no puedan resolver este tipo de problemas, la cuestión es lo complicado que resultan los procedimientos para resolver las ecuaciones debido a la dependencia en una malla, que se traduce en un alto costo computacional. La generación de las mallas computacionales, en ocasiones consume hasta un 70% del tiempo total de computo para resolver el problema (Muñoz et al., 2005).

Aunque actualmente se lleva a cabo una intensa investigación para superar esas complicaciones empleando métodos basados en mallas, en los últimos años han surgido una gran variedad de métodos numéricos conocidos como métodos libres de malla ó métodos sin malla (*Meshfree Methods*) en los que se elimina la dependencia del mallado computacional y las ecuaciones se resuelven completamente en términos de nodos (Belytschko et al., 1996).

En general, los métodos libres de malla se encuentran en la etapa de desarrollo y han sido aplicados con cierto éxito a la solución de problemas en Mecánica de Sólidos. Pero los intentos para simular flujos incompresibles han sido pocos y por lo general utilizan una formulación de variables derivadas (vorticidad y función de corriente) (Wu et al., 2005). Con esta formulación se tiene la ventaja de eliminar el cálculo de las presiones durante la simulación, ya que la presión es un término que aparece en las ecuaciones de cantidad de movimiento y de la cual no se tiene una ecuación explícita para encontrarla, pero la principal desventaja de la formulación de variables derivadas es que no puede extenderse a flujos 3D.

La otra alternativa es el empleo de variables primitivas, pero el uso de este enfoque también tiene sus dificultades, ya que como se mencionó, no se tiene una ecuación explícita para calcular el campo de presiones. El problema es el mismo cuando se usan métodos basados en malla y para superar esta dificultad un método muy conocido es el método SIMPLE (semi implicit method for pressure linked equations) utilizado ampliamente cuando se resuelven las ecuaciones de gobierno con el MVF (White, 2005).

Lin y Atluri (2001) propusieron un método para resolver las ecuaciones de Navier-Stokes para un flujo incompresible utilizando un método libre de malla. Su método se basa en añadir un término de perturbación τ , a la formulación débil de las ecuaciones, lo que genera una ecuación para encontrar las presiones. Se tiene la desventaja de que es necesario encontrar el parámetro τ adecuado para no obtener presiones espurias (Lin and Atluri, 2001).

El objetivo de esta tesis es presentar los fundamentos teóricos necesarios para implementar numéricamente un método libre de malla y con estas bases desarrollar un código computacional capaz de resolver las ecuaciones de Navier-Stokes para un flujo incompresible en estado estacionario utilizando el método local sin malla de Petrov-Galerkin (MLPG, *Meshless Local Petrov Galerkin*), acoplado a un algoritmo iterativo implícito para encontrar el campo de presiones. Los casos que se presentan son para bajos números de Reynolds $1 < Re < 40$, y son para el flujo entre cilindros rotatorios concéntricos, flujo alrededor de un cilindro infinito en dos dimensiones, flujo alrededor de un automóvil con geometría simplificada y convección natural en una cavidad triangular a bajo número de Rayleigh.

El procedimiento para implementar el MLPG se presenta en detalle a partir de resolver la ecuación de difusión de calor en tres dimensiones y en estado transitorio. Esta ecuación se resuelve con el objetivo de encontrar la distribución de temperaturas en anulos esféricos. También se presenta el caso en el que los anulos esféricos son de materiales diferentes.

La simulación, primero, del problema de distribución de temperaturas en los anulos esféricos y luego del flujo entre cilindros rotatorios concéntricos nos permite validar el código computacional ya que existen soluciones analíticas disponibles para esos problemas cuando las condiciones de frontera son homogéneas. Además el procedimiento para resolver el problema de conducción en los anulos esféricos puede ser utilizado para futuros trabajos orientados a simular problemas del tipo de cambio de fase en geometrías esféricas.

Cuando se resuelven problemas de difusión de calor o de dinámica de fluidos en esferas lo más común es emplear coordenadas esféricas, pero esta técnica presenta algunas desventajas cuando se discretizan las ecuaciones diferenciales parciales ya que se presentan singularidades en los polos (Ronchi et al., 1996). En la literatura esto es conocido como el “problema del polo”, el cual se evita en este trabajo empleando el método del *cubo-esfera* que es un algoritmo muy útil para resolver problemas en geometrías esféricas, pero utilizando coordenadas cartesianas.

Por otro lado, en la simulación del flujo incompresible, el algoritmo para

encontrar el campo de presiones se detalla en este trabajo y consiste básicamente en un procedimiento iterativo para obtener el campo de presiones y el de velocidades a través de correcciones a ambos campos. En el primer paso del procedimiento se proponen un campo de velocidades u_i^* y uno de presiones p^* arbitrarios, con los que se resuelven las ecuaciones discretas de cantidad de movimiento, para obtener nuevos campos u_i^{**} los cuales serán forzados a satisfacer la ecuación de continuidad mediante correcciones al campo de velocidades u_i' y al de presiones p' . Usando los campos actualizados $u_i = u_i^{**} + u_i'$ y $p = p^* + p'$ en las ecuaciones discretas de cantidad de movimiento se generan un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, u_1' , u_2' y p' para cada nodo dentro del dominio. Luego de resolver este sistema se satisface la ecuación de continuidad y los campos actualizados se utilizan como valores propuestos para la siguiente iteración, hasta que se alcanza convergencia. Posteriormente, es posible resolver la ecuación de la energía con el campo de velocidades obtenido.

Este trabajo está organizado de la siguiente manera: En el capítulo 2 se presenta el procedimiento matemático necesario para poder aplicar la metodología del MLPG a cualquier ecuación diferencial dada. A fin de introducir al lector algunos de los conceptos más importantes que se manejarán a lo largo de este trabajo, en la sección 2.1 se presenta una breve introducción al método de los residuos pesados del que pueden deducirse los métodos numéricos existentes (método de los elementos finitos, volúmenes finitos, elementos espectrales, etc.) y desde luego el MLPG. El procedimiento para construir las funciones de expansión basadas en el método de interpolación por mínimos cuadrados móviles, las cuales son empleadas en los métodos libres de malla, se presenta en la sección 2.2.

En las secciones 2.3–2.4 se presenta la aplicación del MLPG para resolver la ecuación de difusión de calor en tres dimensiones y en estado transitorio, utilizando coordenadas cartesianas. Aunque esta metodología puede aplicarse a cualquier EDP se ha elegido la ecuación de difusión porque nos permite mostrar la forma en que puede llevarse a cabo la discretización temporal y como se satisfacen las condiciones de frontera. El capítulo 2 concluye con la sección 2.5 presentando a manera de resumen los pasos a seguir para desarrollar un código computacional que resuelva numéricamente una ecuación diferencial parcial.

El capítulo 3 trata sobre la aplicación del método MLPG para resolver las ecuaciones de Navier-Stokes. La forma débil de las ecuaciones de conti-

nidad, de cantidad de movimiento y de la energía se obtienen para el caso bidimensional, que son las que se resuelven en este trabajo. En la sección 3.2 se detalla el algoritmo iterativo que se emplea para encontrar el campo de presiones y velocidades.

En el capítulo 4 se presentan los resultados que se obtuvieron utilizando el MLPG. Se presentan primero, los resultados de difusión pura en una esfera hueca cuando se tienen tanto condiciones de frontera homogéneas como no homogéneas y cuando la esfera hueca esta compuesta de materiales diferentes, en el que para cada material se tendrá un anulo esférico. Posteriormente, se presentan los resultados aplicando el MLPG en la solución de las ecuaciones de Navier-Stokes para un fluido incompresible con bajo número de Reynolds. Los casos resueltos son: (i) flujo entre cilindros rotatorios concéntricos, (ii) flujo que pasa alrededor de un cilindro infinito bidimensional (iii) flujo alrededor de la geometría de un automóvil y (iv) convección natural en el interior de una cavidad triangular con bajo número de Rayleigh.

La sección 5 finaliza esta tesis presentando las conclusiones y los trabajos a futuro en el área de la simulación numérica de fluidos incompresibles utilizando métodos libres de malla. En los apéndices se presentan aspectos matemáticos muy importantes a tomar en cuenta para implementar el MLPG, así como el método del cubo-esfera que se utiliza para generar la posición y vecindad de los nodos en el dominio físico para el caso de difusión.

Capítulo 2

Fundamentos teóricos del método local sin malla de Petrov-Galerkin

En este capítulo se presentan los fundamentos matemáticos del MLPG. Con la finalidad de introducir algunos conceptos importantes que se manejan a lo largo de este trabajo, en la sección 2.1 se presenta brevemente el método de los residuos pesados siguiendo el procedimiento utilizado por Fries y Matthies (2004). En la sección 2.2 se presenta el procedimiento estandar para generar las funciones de interpolación por mínimos cuadrados móviles, las cuales son utilizadas en el MLPG como funciones de expansión.

Las secciones 2.3–2.4 presentan la aplicación de la metodología MLPG en la solución de la ecuación de difusión de calor en estado transitorio (3D). El capítulo concluye con la sección 2.5 presentando un algoritmo general para escribir un código computacional empleando el MLPG.

2.1. Método de los residuos pesados

La mayoría de los métodos numéricos pueden deducirse a partir del método de los residuos pesados (WRM, *Weighted Residual Method*). En términos generales, el objetivo del WRM es resolver numéricamente una ecuación diferencial parcial dada:

$$\mathcal{L}u(x) = f(x) \tag{2.1}$$

en donde \mathcal{L} es cualquier operador diferencial, $f(x)$ es un término fuente y $u(x)$ son las funciones que satisfacen la ecuación.

Se comienza proponiendo una función de aproximación $u^h(x) \approx u(x)$, la cual se expresa como la sumatoria de un conjunto de *Funciones de Expansión* Φ (también llamadas funciones de forma) y parámetros nodales desconocidos \mathbf{u} (incógnitas), esto es

$$u^h(x) = \Phi^T(x)\mathbf{u} = \sum_{j=1}^N \Phi_j(x)u_j \quad (2.2)$$

en donde N es el número de términos de la sumatoria, de tal manera que con este pueda obtenerse una buena aproximación.

Al reemplazar u^h por u en la EDP dada (ec. 2.1), obtenemos un error residual $r = \mathcal{L}u^h - f$, ya que en general la aproximación no satisface exactamente la ecuación. El residual r es “pesado” por medio de un conjunto de *Funciones de Prueba* Ψ , haciendo que ambos conjuntos de funciones sean ortogonales, esto es:

$$\int \Psi r d\Omega = \int \Psi (\mathcal{L}u^h - f) d\Omega = 0 \quad (2.3)$$

La expresión anterior es la forma discreta de la EDP y debe ser evaluada considerando las condiciones de frontera dadas. De la ec. (2.3), puede obtenerse un sistema de ecuaciones del tipo $\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{b}$ que debe resolverse para determinar las incógnitas \mathbf{u} , como se explicará en la sec. 2.3 de forma detallada.

Dependiendo de la elección de las funciones de prueba Ψ usadas en el WRM pueden producirse diferentes métodos numéricos, tales como colocación, volumen finito, método de momentos, entre otros (Karniadakis and Sherwin, 1999). Para el método que nos interesa, el MLPG, las funciones de prueba Ψ son diferentes a las funciones de expansión Φ . En este trabajo, las funciones de interpolación por mínimos cuadrados móviles se emplean como funciones de expansión Φ y las funciones de prueba Ψ son las mismas funciones de peso w que se emplean para obtener las funciones Φ (ver sec. 2.2)

2.2. Mínimos cuadrados móviles

El método de los mínimos cuadrados móviles (MLS, *Moving Least Squares*) se desarrolló para interpolar datos aleatorios con exactitud (Lancaster

and Salkauskas, 1981). Los métodos MLS son ampliamente usados en los métodos libres de malla para generar las funciones de expansión ya que son fáciles de implementar en problemas n -dimensionales y estos métodos son los utilizados en el método MLPG para este propósito. Existen diversos procedimientos para generar las funciones de expansión basadas en los métodos MLS. En esta sección las funciones de expansión Φ se obtienen minimizando una norma discreta L_2 (Fries and Matthies, 2004).

Suponga una función $u(\mathbf{x})$ definida en un dominio Ω , con frontera Γ . Dentro de este dominio, colocamos un conjunto de nodos $\mathbf{x}_i, i = 1, \dots, N$. Deseamos obtener una aproximación local u^h de la función u en algún punto \mathbf{x} , por lo que en su vecindad definimos un subdominio $\Omega_{\mathbf{x}}$, ambos localizados completamente dentro del dominio del problema Ω (ver fig. 2.1).

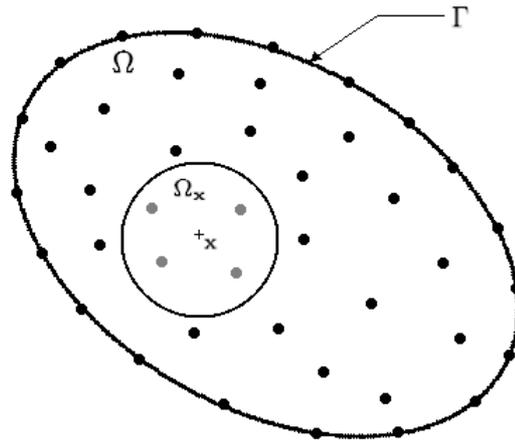


Figura 2.1: El punto \mathbf{x} y su vecindad, definida por el subdominio $\Omega_{\mathbf{x}}$. El conjunto de nodos del problema se muestran en puntos negros y los nodos en la vecindad del punto \mathbf{x} se muestran en gris. El dominio global se representa por Ω cerrado por su frontera Γ (2D).

Los métodos MLS definen la aproximación local de u alrededor de \mathbf{x} como:

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m p_i(\mathbf{x})a_i(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\mathbf{a}(\mathbf{x}) \quad (2.4)$$

donde m es el número de términos del polinomio base, $p_i(\mathbf{x})$ son funciones monomiales y $a_i(\mathbf{x})$ son sus coeficientes, los cuales están en función de las coordenadas espaciales $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$. Las bases más frecuentemente utili-

zadas son las bases lineales:

$$\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = [1, x_1] \text{ para 1D; } m = 2 \quad (2.5)$$

$$\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = [1, x_1, x_2] \text{ para 2D; } m = 3 \quad (2.6)$$

y las bases cuadráticas:

$$\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = [1, x_1, x_1^2] \text{ para 1D; } m = 3 \quad (2.7)$$

$$\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = [1, x_1, x_2, x_1^2, x_1x_2, x_2^2] \text{ para 2D; } m = 6 \quad (2.8)$$

Para obtener los coeficientes $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ construimos una funcional con norma L_2 entre la aproximación local y la función:

$$\begin{aligned} J(\mathbf{x}) &= \sum_{j=1}^n w_j(\mathbf{x}) [u^h(\mathbf{x}) - u(\mathbf{x}_j)]^2 \\ &= \sum_{j=1}^n w_j(\mathbf{x}) [\mathbf{p}^T(\mathbf{x}_j) \mathbf{a}(\mathbf{x}) - u_j]^2 \end{aligned} \quad (2.9)$$

donde \mathbf{x}_j son las posiciones de los n nodos que se encuentran alrededor de la vecindad del punto \mathbf{x} , esto es, dentro del subdominio $\Omega_{\mathbf{x}}$; $w_j(\mathbf{x})$ son funciones de peso de soporte compacto asociada a cada nodo (que se discuten más adelante en ésta misma sección) y u_j son los valores de la función u evaluada en cada nodo (ver fig. 2.2 para el caso 1D).

La ecuación (2.9) puede escribirse en forma matricial como:

$$J(\mathbf{x}) = (\mathbf{P}\mathbf{a} - \mathbf{u})^T \mathbf{w}(\mathbf{x}) (\mathbf{P}\mathbf{a} - \mathbf{u}) \quad (2.10)$$

donde:

$$\mathbf{u}^T = (u_1, u_2, \dots, u_n) \quad (2.11)$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_1(\mathbf{x}_1) & p_2(\mathbf{x}_1) & \dots & p_m(\mathbf{x}_1) \\ p_1(\mathbf{x}_2) & p_2(\mathbf{x}_2) & \dots & p_m(\mathbf{x}_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_1(\mathbf{x}_n) & p_2(\mathbf{x}_n) & \dots & p_m(\mathbf{x}_n) \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

y

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} w_1(\mathbf{x}) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & w_2(\mathbf{x}) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & w_n(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

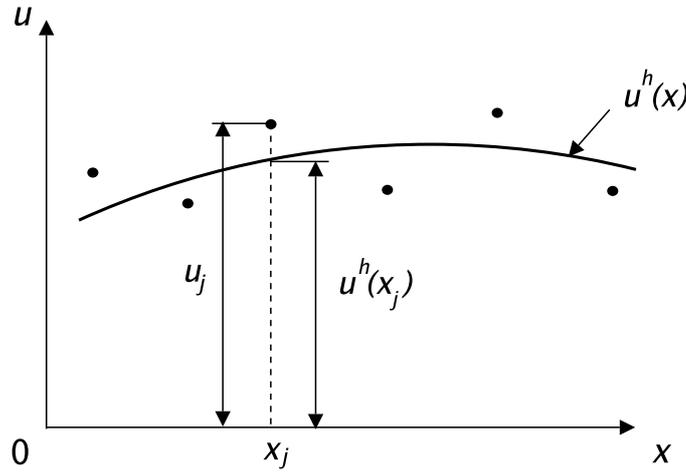


Figura 2.2: La función de aproximación $u^h(\mathbf{x})$ y los parámetros nodales u_j en la aproximación por mínimos cuadrados móviles (1D).

Para encontrar los coeficientes $\mathbf{a}(\mathbf{x})$, calculamos las derivadas de $J(\mathbf{x})$ con respecto a $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ y las igualamos a cero, esto es:

$$\frac{\partial J(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{a}} = 0 \quad (2.14)$$

Aplicamos este procedimiento a la ecuación (2.9) y obtenemos:

$$\sum_{j=1}^n w_j(\mathbf{x}) \mathbf{p}(\mathbf{x}_j) [\mathbf{p}^T(\mathbf{x}_j) \mathbf{a}(\mathbf{x}) - u_j] = 0$$

ó

$$\sum_{j=1}^n w_j(\mathbf{x}) \mathbf{p}(\mathbf{x}_j) \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_j) \mathbf{a}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n w_j(\mathbf{x}) \mathbf{p}(\mathbf{x}_j) u_j \quad (2.15)$$

que puede reescribirse en forma matricial como:

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}) \mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{x}) \mathbf{u} \quad (2.16)$$

donde $\mathbf{M}(\mathbf{x})$ es llamada *matriz de momento* y está definida como:

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}^T \mathbf{w}(\mathbf{x}) \mathbf{P} \quad (2.17)$$

y

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}^T \mathbf{w}(\mathbf{x}) \quad (2.18)$$

Por lo tanto de la ec. (2.16):

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = [\mathbf{M}(\mathbf{x})]^{-1} \mathbf{B}(\mathbf{x}) \mathbf{u} \quad (2.19)$$

y reemplazando esta última en la ecuación (2.4) tenemos:

$$u^h(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) [\mathbf{M}(\mathbf{x})]^{-1} \mathbf{B}(\mathbf{x}) \mathbf{u} \quad (2.20)$$

Finalmente, la aproximación u^h puede ser expresada de manera semejante a la ec. (2.2) :

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n \Phi_j(\mathbf{x}) u_j = \Phi^T(\mathbf{x}) \mathbf{u} \quad (2.21)$$

de donde obtenemos las funciones de expansión MLS:

$$\Phi^T(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) [\mathbf{M}(\mathbf{x})]^{-1} \mathbf{B}(\mathbf{x}) \quad (2.22)$$

Para evaluar estas funciones deben definirse puntos en donde se desea conocer su valor empleando un código numérico para invertir la matriz $\mathbf{M}(\mathbf{x})$. Más adelante se verá que estos puntos corresponden a los puntos de integración por cuadratura de Gauss-Lobatto-Legendre. En la literatura esto es conocido como “evaluación digital de una función de expansión”, ya que no conocemos su forma explícita como las usadas en el método del elemento finito (Bathe and Wilson, 1976).

Las funciones de expansión Φ solo están definidas cuando la matriz $\mathbf{M}(\mathbf{x})$ es no singular. Una condición para ello, es que al menos m funciones de peso sean diferentes de cero para cada punto $\mathbf{x} \in \Omega_{\mathbf{x}}$ y que los nodos en $\Omega_{\mathbf{x}}$ no esten distribuidos con algún arreglo especial, por ejemplo, en una línea recta (Fries and Matthies, 2004).

Las primeras derivadas parciales de las funciones de expansión MLS se obtienen con la regla del producto (Fries and Matthies, 2004):

$$\Phi_{,k}^T(\mathbf{x}) = \mathbf{p}_{,k}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{p}^T \mathbf{M}_{,k}^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{p}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{B}_{,k} \quad (2.23)$$

en donde $\mathbf{M}_{,k}^{-1} = -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{M}_{,k} \mathbf{M}^{-1}$ y los índices precedidos por una coma representan derivadas parciales, esto es, $(\)_{,k} = \partial(\) / \partial x_k$. Las segundas derivadas se obtienen de manera análoga (Fries and Matthies, 2004):

$$\begin{aligned} \Phi_{,kl}^T(\mathbf{x}) = & \mathbf{p}_{,kl}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{p}_{,k}^T \mathbf{M}_{,l}^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{p}_{,l}^T \mathbf{M}_{,k}^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{p}_{,k}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{B}_{,l} \\ & \mathbf{p}_{,l}^T \mathbf{M}_{,k}^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{p}^T \mathbf{M}_{,kl}^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{p}^T \mathbf{M}_{,k}^{-1} \mathbf{B}_{,l} \\ & \mathbf{p}_{,l}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{B}_{,k} + \mathbf{p}^T \mathbf{M}_{,l}^{-1} \mathbf{B}_{,k} + \mathbf{p}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{B}_{,kl}, \end{aligned} \quad (2.24)$$

en donde:

$$\mathbf{M}_{,kl}^{-1} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{M}_{,l}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{M}_{,k}\mathbf{M}^{-1} - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{M}_{,kl}\mathbf{M}^{-1} + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{M}_{,k}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{M}_{,l}\mathbf{M}^{-1}.$$

La suavidad de las funciones de expansión $\Phi(\mathbf{x})$ está determinada por las funciones base $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ y las funciones de peso w_j que se elijan (ver subsec. 2.2.1).

La fig. 2.3 muestra las funciones de expansión MLS en un dominio unidimensional $\Omega = [0, 1]$ con 11 nodos uniformemente distribuidos. La función de peso que se empleó tiene un parámetro de suavizado $d_{max} = 2.3 \cdot \Delta x = 0.23$ (ver subsec. 2.2.1). Las figs. 2.4 y 2.5 muestran las primeras y segundas derivadas de las funciones de expansión MLS, respectivamente. Con respecto a estas gráficas podemos hacer las siguientes observaciones:

1. La línea punteada en la fig. 2.3 es la sumatoria de las funciones de expansión $\sum_i \Phi_i(\mathbf{x})$ y esta es igual a 1 en todo el dominio. Cuando esto ocurre se dice que las funciones $\{\Phi_i\}$ forman una partición de unidad (*Partition Unity*, PU). Las primeras y las segundas derivadas de las funciones de expansión MLS, forman una partición de nulidad (*Partition of Nullities*, PNs), o sea, $\sum_i \Phi_{i,x}(\mathbf{x}) = \sum_i \Phi_{i,xx}(\mathbf{x}) = 0$. Esto es muy importante porque es una condición que debe cumplirse en cualquier punto \mathbf{x} en donde sean evaluadas.
2. Las funciones de expansión MLS son suaves y pueden ser consideradas como polinomios para propósitos de integración de la forma débil de la EDP a resolver. Sin embargo, también se aprecia que las segundas derivadas pierden esa característica, no siendo así para las primeras derivadas que siguen siendo suaves.
3. En cada nodo existe por lo menos una función de expansión MLS cuyo valor no es la unidad, por lo que se dice que estas funciones son no interpolantes o que no poseen la propiedad de la delta de Kronecker, como ocurre con las funciones de expansión utilizadas en el método de los elementos finitos. Esto hace que en ocasiones sea complicado el tratamiento las condiciones de frontera. En la sec. 2.28 se presenta una forma de evitar este problema.

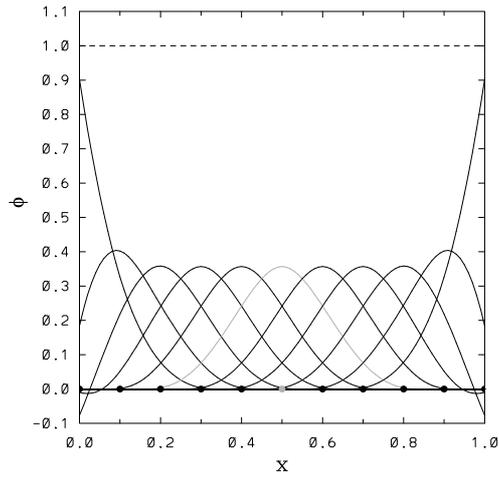


Figura 2.3: Funciones de interpolación basadas en el método de los mínimos cuadrados móviles

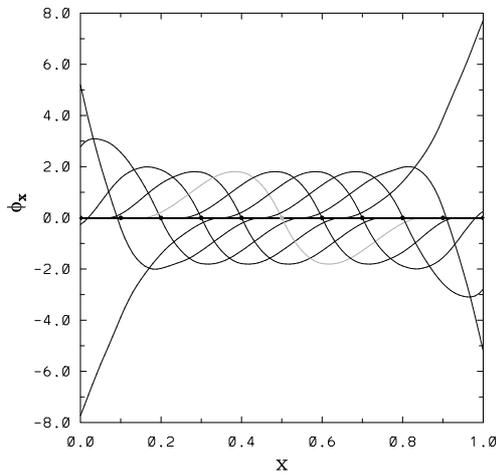


Figura 2.4: Primeras derivadas de las funciones de interpolación basadas en el método de los mínimos cuadrados móviles

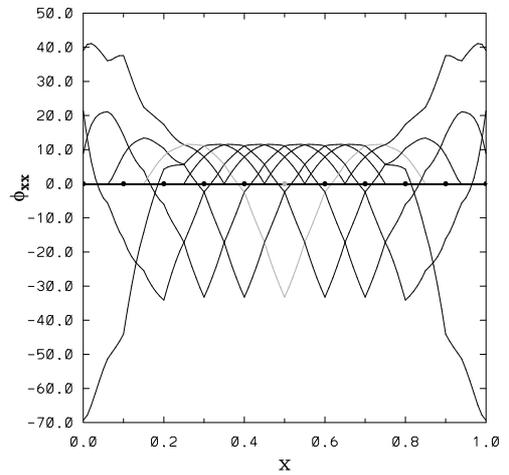


Figura 2.5: Segundas derivadas de las funciones de interpolación basadas en el método de los mínimos cuadrados móviles

2.2.1. Funciones de peso

La selección correcta de la función de peso tiene un papel muy importante en la implementación numérica del MLPG, entre otras cosas porque es esta quien le da el carácter local al método, como lo indica su propio nombre. Además, por medio de ella, podemos seleccionar la forma de los subdominios de integración de la forma débil y se emplea tanto para la construcción de las funciones de expansión Φ al igual que se emplea como función de peso Ψ en el proceso de residuos pesados para obtener el MLPG.

Existe una extensa lista de funciones de peso que se usan comúnmente en los métodos libres de malla (Liu, 2004). Primeramente se presenta la definición de la función de peso “spline” de cuarto orden en una dimensión y posteriormente la manera en que ésta función puede extenderse a casos n -dimensionales, que son las que se utilizan en este trabajo.

La función de peso “spline” de cuarto orden en una dimensión está dada por:

$$w_j(x) = \begin{cases} 1 - 6d^2 + 8d^3 - 3d^4 & d \leq 1 \\ 0 & d > 1 \end{cases} \quad (2.25)$$

en donde $d = \frac{\|x-x_j\|}{d_{max}}$ es la distancia que va del punto de interés x a la posición del nodo x_j , dividida por el parámetro de suavizado d_{max} . Este último es el que define el subdominio para el cual $w_j \neq 0$ y por ello las funciones de peso son llamadas funciones de soporte compacto. La fig. 2.6 muestra la curva correspondiente a la ec. (2.25).

Para obtener funciones de peso n -dimensionales podemos definir funciones del tipo $w(\|\mathbf{x}\|)$ en donde los dominios son de forma circular (2D) y esférica (3D) o bien definir un producto tensorial:

$$w_j(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n w_j(x_i) \quad (2.26)$$

del que resulta un dominio de forma rectangular (2D) o de un paralelepipedo (3D) que son los dominios utilizados en este trabajo (ver fig. 2.7 para los casos 2D). Es importante señalar que en el método MLPG cada nodo tiene una función de peso asociada, la cual determina la “influencia” o “peso” del nodo \mathbf{x}_i dentro de Ω . En este trabajo el subdominio asociado a cada nodo es designado por Ω_{Q_i} y su frontera por Γ_{Q_i} . En este subdominio es donde se fijan los puntos de cuadratura para integrar la forma débil de la EDP (subsec. 2.3.1).

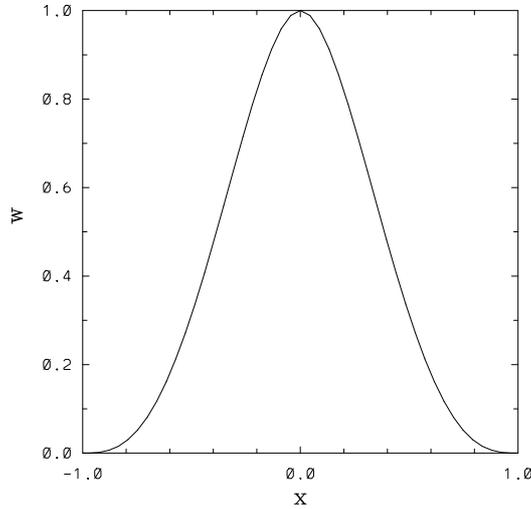


Figura 2.6: Función de peso “spline” de cuarto orden de soporte compacto

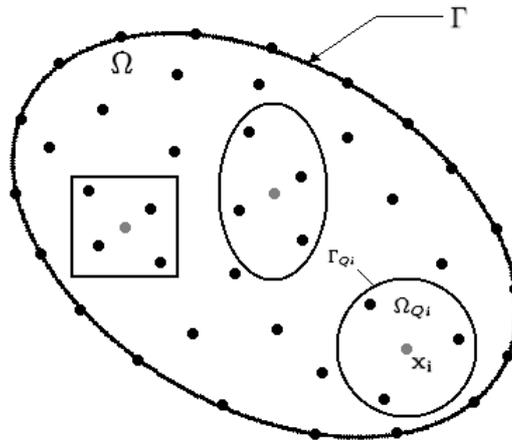


Figura 2.7: Formas que pueden tener los subdominios de las funciones de peso asociadas a cada nodo \mathbf{x}_i : rectangular, circular o elíptico (2D). El nodo de referencia \mathbf{x}_i se muestra en gris.

2.3. Aplicación del método local sin malla de Petrov-Galerkin: Ecuación de difusión de calor

En esta sección se presenta el procedimiento para aplicar el método MLPG para resolver la ecuación de difusión de calor en estado transitorio

en tres dimensiones, empleando coordenadas cartesianas. Este procedimiento es aplicable a cualquier ecuación diferencial parcial, sin embargo, esta ecuación nos permite mostrar cómo se lleva a cabo la discretización temporal, que podría aplicarse en trabajos posteriores para resolver numéricamente las ecuaciones de Navier-Stokes para flujos en estado transitorio. El procedimiento descrito a continuación es el que se aplicará para discretizar las ecuaciones de continuidad, de cantidad de movimiento y de la energía, para un flujo incompresible en estado estacionario bidimensional (ver capítulo 3)

Como se mencionó anteriormente el método MLPG puede formularse a partir del método de los residuos pesados, por lo tanto seguiremos con detalle los pasos mencionados en la sec. 2.1. La ecuación de difusión de calor en el sistema de coordenadas cartesianas rectangulares cuando las propiedades del material son constantes, puede escribirse como (Cervantes, 1999):

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_3^2} + \frac{\dot{Q}}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.27)$$

en donde $T \equiv T(x_1, x_2, x_3, t)$ es el campo de temperaturas (K); α es la diffusividad térmica (m^2/s); k es la conductividad térmica ($\text{W}/\text{m} \cdot \text{K}$); $\dot{Q} = \dot{Q}(x_1, x_2, x_3, t)$ es un término fuente (W/m^3) y t es el tiempo (s). Se tienen las siguientes condiciones de frontera:

$$T = \bar{T} \quad \text{en } \Gamma \quad \text{para } t > 0 \quad (2.28)$$

$$-k \nabla T \cdot \mathbf{n} = \bar{q} \quad \text{en } \Gamma \quad \text{para } t > 0 \quad (2.29)$$

donde Γ es una superficie en donde se especifica un campo de temperaturas \bar{T} o un flujo de calor por unidad de superficie \bar{q} y \mathbf{n} es el vector normal unitario a la superficie Γ . La condición inicial esta dada por:

$$T = T_0 \quad \text{para } t = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (2.30)$$

donde T_0 es el campo inicial de temperaturas y Ω es el dominio del problema.

2.3.1. La forma débil

A continuación se obtiene la forma débil de la ecuación de difusión de calor. Comenzamos proponiendo una aproximación al campo de temperaturas, $T \approx T^h = T^h(x_1, x_2, x_3, t)$ y la reemplazamos en la ec. (2.27), para obtener un error residual r dado por:

$$r = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T^h}{\partial t} - \left(\frac{\partial^2 T^h}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T^h}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 T^h}{\partial x_3^2} \right) - \frac{\dot{Q}}{k} \quad (2.31)$$

En el método MLPG se definen subdominios locales de cuadratura Ω_{Q_i} asociados a cada nodo que se encuentre completamente dentro del dominio Ω , es decir, no tomamos en cuenta los nodos que están en la frontera Γ . La integral del residual pesado, en cada uno de los subdominios de cuadratura es igualada a cero, esto es (WRM, sec. 2.1):

$$\int_{\Omega_{Q_i}} r \Psi_i d\Omega_{Q_i} = 0 \quad (2.32)$$

donde Ψ_i es una *función de prueba* (sec. 2.1) que sólo depende de las coordenadas espaciales y que es diferente de cero solamente dentro de Ω_{Q_i} . Sustituyendo la ec. (2.31) en la ec. (2.32), obtenemos:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\alpha} \int_{\Omega_{Q_i}} \frac{\partial T^h}{\partial t} \Psi_i d\Omega_{Q_i} \\ - \int_{\Omega_{Q_i}} \frac{\partial^2 T^h}{\partial x_1^2} \Psi_i d\Omega_{Q_i} - \int_{\Omega_{Q_i}} \frac{\partial^2 T^h}{\partial x_2^2} \Psi_i d\Omega_{Q_i} - \int_{\Omega_{Q_i}} \frac{\partial^2 T^h}{\partial x_3^2} \Psi_i d\Omega_{Q_i} \\ & - \int_{\Omega_{Q_i}} \frac{\dot{Q}}{k} \Psi_i d\Omega_{Q_i} = 0 \end{aligned}$$

A continuación integramos por partes el segundo término de la expresión anterior:

$$\int_{\Omega_{Q_i}} \frac{\partial^2 T^h}{\partial x_1^2} \Psi_i d\Omega_{Q_i} = \int_{\Omega_{Q_i}} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial T^h}{\partial x_1} \Psi_i \right) d\Omega_{Q_i} - \int_{\Omega_{Q_i}} \frac{\partial T^h}{\partial x_1} \frac{\partial \Psi_i}{\partial x_1} d\Omega_{Q_i}$$

y aplicamos el Teorema de Gauss:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial x_i} \lambda dV = \int_S \lambda n_i dS, \quad \text{donde } \lambda = \frac{\partial T^h}{\partial x_1} \Psi_i$$

al primer miembro del lado derecho de la igualdad para obtener:

$$\int_{\Omega_{Q_i}} \frac{\partial^2 T^h}{\partial x_1^2} \Psi_i d\Omega_{Q_i} = \int_{\Gamma_{Q_i}} \frac{\partial T^h}{\partial x_1} n_1 \Psi_i d\Gamma_{Q_i} - \int_{\Omega_{Q_i}} \frac{\partial T^h}{\partial x_1} \frac{\partial \Psi_i}{\partial x_1} d\Omega_{Q_i} \quad (2.33)$$

donde Γ_{Q_i} es la frontera del dominio local de cuadratura Ω_{Q_i} y n_1 es la componente en la dirección x_1 del vector normal unitario \mathbf{n} a la superficie Γ_{Q_i} . Aplicamos el mismo procedimiento al tercer y cuarto término para obtener la *forma débil de la ecuación de difusión de calor* :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_{Q_i}} \left(\frac{1}{\alpha} \frac{\partial T^h}{\partial t} \Psi_i + \frac{\partial T^h}{\partial x_1} \frac{\partial \Psi_i}{\partial x_1} + \frac{\partial T^h}{\partial x_2} \frac{\partial \Psi_i}{\partial x_2} + \frac{\partial T^h}{\partial x_3} \frac{\partial \Psi_i}{\partial x_3} - \frac{\dot{Q}}{k} \Psi_i \right) d\Omega_{Q_i} \\ & - \int_{\Gamma_{Q_i}} \left(\frac{\partial T^h}{\partial x_1} n_1 \Psi_i + \frac{\partial T^h}{\partial x_2} n_2 \Psi_i + \frac{\partial T^h}{\partial x_3} n_3 \Psi_i \right) d\Gamma_{Q_i} = 0 \quad (2.34) \end{aligned}$$

Esta expresión es válida para los nodos que se encuentran completamente dentro del dominio del problema Ω y como puede verse, el MLPG establece una ecuación para cada nodo. Los nodos que se encuentran sobre la frontera Γ tienen un tratamiento aparte (ver sec. 2.4). Las integrales se evalúan numéricamente utilizando cuadratura de Gauss-Lobato-Legendre (GLL).

En general, esta integración debe llevarse a cabo en regiones Ω_{Q_i} de forma arbitraria, por lo que es necesario transformarla a una región estándar Ω_{st} para facilitar la tarea. El procedimiento para llevar a cabo esta transformación se presenta en los apéndices B y C.

2.3.2. Discretización de la forma débil

Para la discretización de la forma débil de la ecuación de difusión, la función de aproximación T^h se expresa como la combinación lineal de las funciones de expansión Φ_j que son funciones únicamente de las coordenadas espaciales y de los valores nodales de las temperaturas a encontrar T_j las cuales dependerán únicamente del tiempo, esto es:

$$T^h(x_1, x_2, x_3, t) = \sum_{j=1}^n T_j(t) \Phi_j(x_1, x_2, x_3) \quad (2.35)$$

en donde n es el número de nodos vecinos a algún nodo dado i . De esta expresión vemos que podemos escribir las derivadas temporales como:

$$\frac{\partial T^h}{\partial t} = \sum_{j=1}^n \frac{dT_j}{dt} \Phi_j \quad (2.36)$$

y las derivadas espaciales:

$$\frac{\partial T^h}{\partial x_1} = \sum_{j=1}^n T_j \frac{\partial \Phi_j}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial T^h}{\partial x_2} = \sum_{j=1}^n T_j \frac{\partial \Phi_j}{\partial x_2} \quad \text{y} \quad \frac{\partial T^h}{\partial x_3} = \sum_{j=1}^n T_j \frac{\partial \Phi_j}{\partial x_3} \quad (2.37)$$

En este trabajo, la función de prueba asociada a cada nodo Ψ_i que se utiliza para la forma débil, es la misma función de peso w_i (ec. 2.25) que se utilizó para generar las funciones de expansión Φ vistas en la sección anterior, esto es:

$$\Psi_i = w_i = w_i(x_1, x_2, x_3) \quad (2.38)$$

Ahora sustituimos las ecs. (2.35)– (2.38) en la forma débil (2.34) para obtener:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_{Q_i}} \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{\alpha} \frac{dT_j}{dt} \Phi_j - \frac{\dot{Q}}{k} \right) w_i d\Omega_{Q_i} \\ & + \int_{\Omega_{Q_i}} \sum_{j=1}^n \left(T_j \frac{\partial \Phi_j}{\partial x_1} \frac{\partial w_i}{\partial x_1} + T_j \frac{\partial \Phi_j}{\partial x_2} \frac{\partial w_i}{\partial x_2} + T_j \frac{\partial \Phi_j}{\partial x_3} \frac{\partial w_i}{\partial x_3} \right) d\Omega_{Q_i} \\ & - \int_{\Gamma_{Q_i}} \sum_{j=1}^n \left(T_j \frac{\partial \Phi_j}{\partial x_1} n_1 w_i + T_j \frac{\partial \Phi_j}{\partial x_2} n_2 w_i + T_j \frac{\partial \Phi_j}{\partial x_3} n_3 w_i \right) d\Gamma_{Q_i} = 0 \quad (2.39) \end{aligned}$$

Colocando las sumatorias fuera de las integrales y reordenando términos podemos reescribir la expresion anterior en forma de un sistema de ecuaciones lineales, que es válido para todos los nodos que están completamente dentro del dominio Ω . El tratamiento de los nodos que se encuentran en la frontera se describe en la siguiente sección. La forma matricial de la ec. (2.39) es:

$$\mathbf{C}\dot{\mathbf{T}} + \mathbf{K}\mathbf{T} = \mathbf{f} \quad (2.40)$$

en donde las matrices y vectores se definen como sigue. La matriz \mathbf{K} llamada en la literatura *matriz de rigideces* contiene los términos que son coeficientes de las derivadas espaciales, sus elementos son:

$$\begin{aligned} K_{ij} = & \int_{\Omega_{Q_i}} \left[\frac{\partial \Phi_j}{\partial x_1} \frac{\partial w_i}{\partial x_1} + \frac{\partial \Phi_j}{\partial x_2} \frac{\partial w_i}{\partial x_2} + \frac{\partial \Phi_j}{\partial x_3} \frac{\partial w_i}{\partial x_3} \right] d\Omega_{Q_i} - \\ & \int_{\Gamma_{Q_i}} \left[\frac{\partial \Phi_j}{\partial x_1} n_1 w_i + \frac{\partial \Phi_j}{\partial x_2} n_2 w_i + \frac{\partial \Phi_j}{\partial x_3} n_3 w_i \right] d\Gamma_{Q_i} \quad (2.41) \end{aligned}$$

La *matriz de amortiguamiento* \mathbf{C} contiene los coeficientes de las derivadas temporales, sus elementos son:

$$C_{ij} = \frac{1}{\alpha} \int_{\Omega_{Q_i}} \Phi_j w_i d\Omega_{Q_i} \quad (2.42)$$

El *vector de cargas* \mathbf{f} contiene la integral del término fuente:

$$f_i = \frac{1}{k} \int_{\Omega_{Q_i}} \dot{Q} w_i d\Omega_{Q_i} \quad (2.43)$$

De igual forma, los vectores incógnita $\dot{\mathbf{T}}$ y \mathbf{T} están dados por:

$$\dot{T}_j = \frac{dT_j(t)}{dt}, \quad T_j = T_j(t) \quad (2.44)$$

respectivamente.

Para obtener el sistema lineal que habrá de resolverse es necesario llevar a cabo la discretización temporal de la forma débil.

2.3.3. Discretización temporal

La derivada con respecto al tiempo es discretizado usando el esquema de Crank-Nicholson, como se describe en (Sterk et al., 2005). En este esquema se supone que los valores nodales de las temperaturas T_j son una función lineal del tiempo. Si usamos la notación vectorial, la razón de cambio del campo de temperaturas entre dos instantes de tiempo (t) y ($t + \Delta t$), puede escribirse como:

$$\dot{\mathbf{T}} = \frac{d\mathbf{T}^{(t+\Delta t/2)}}{dt} = \frac{\mathbf{T}^{(t+\Delta t)} - \mathbf{T}^{(t)}}{\Delta t} \quad (2.45)$$

Si sustituimos la ec. (2.45) en la ec. (2.40) en el tiempo (t), tenemos:

$$\mathbf{C} \left[\frac{\mathbf{T}^{(t+\Delta t)} - \mathbf{T}^{(t)}}{\Delta t} \right] + \mathbf{K}\mathbf{T}^{(t)} = \mathbf{f} \quad (2.46)$$

y para el tiempo $t + \Delta t$:

$$\mathbf{C} \left[\frac{\mathbf{T}^{(t+\Delta t)} - \mathbf{T}^{(t)}}{\Delta t} \right] + \mathbf{K}\mathbf{T}^{(t+\Delta t)} = \mathbf{f} \quad (2.47)$$

Sumando las ecs. (2.46) y (2.47), y reordenando los términos, obtenemos el sistema final que habrá de resolverse para cada paso de tiempo:

$$\mathbf{A}\mathbf{T}^{(t+\Delta t)} = \mathbf{F}^{(t)} \quad (2.48)$$

donde $\mathbf{A} = 2\mathbf{C} + \Delta t\mathbf{K}$, and $\mathbf{F}^{(t)} = (2\mathbf{C} - \Delta t\mathbf{K})\mathbf{T}^{(t)} + 2\Delta t\mathbf{f}$.

Como se mencionó, este sistema es válido únicamente para los nodos que se encuentran completamente dentro del dominio del problema. A este sistema habrá que agregarle las ecuaciones de los nodos que están en la frontera. De esta forma \mathbf{A} tiene un tamaño de $(N \times N)$, \mathbf{T} de $(N \times 1)$ y \mathbf{F} de $(N \times 1)$, en donde N es el número total de nodos en que se ha discretizado el dominio.

2.4. Condiciones de frontera

El tratamiento de las condiciones de frontera es en ocasiones una de las tareas más complicadas en los métodos libres de malla y en general en los métodos numéricos. En el caso del MLPG se han propuesto varios métodos para satisfacerlas, estando dentro de los más comunes el método de los multiplicadores de Lagrange y el método penalty (Fries and Matthies, 2004).

En ambos, se tienen algunas dificultades para implementarlos, en el caso del primero se tiene la desventaja de que los multiplicadores de Lagrange son una incógnita adicional a las variables que necesitamos resolver y por tanto el tamaño del sistema matricial a resolver se incrementa.

En el caso del segundo método el tamaño de la matriz es el mismo que el número de incógnitas que deseamos encontrar, pero es necesario asignar un valor adecuado a un parametro α denominado término penalty. El problema es que pequeñas variaciones en el valor de α influyen en el condicionamiento de la matriz \mathbf{A} que habrá de invertirse (Liu, 2004).

En esta tesis, se emplea el *método de interpolación directa* propuesto por Liu (2004) que aprovecha el hecho de que el MLPG establece una ecuación para cada nodo, como se ha mencionado. De esta forma para algún nodo localizado en la frontera del dominio Γ , se pueden utilizar las funciones MLS para forzar las condiciones de frontera de Dirichlet, esto es:

$$T_i^h(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n \Phi_j(\mathbf{x})T_j = \bar{T}_i \quad (2.49)$$

en donde \bar{T}_i es un valor especificado del campo de temperatura en el nodo i ubicado sobre la superficie Γ . De igual manera se puede proceder cuando se especifica alguna condición de frontera de Neumann:

$$-k \sum_{j=1}^n \nabla \Phi_j(\mathbf{x})T_j \cdot \mathbf{n} = \bar{q}_i \quad (2.50)$$

en donde \bar{q}_i es un valor especificado del flujo de calor en el nodo i .

Como puede apreciarse, este método es directo, simple y las condiciones de frontera se satisfacen exactamente. Ambas ecs. (2.49) y (2.50) pueden agregarse directamente al sistema final (2.48).

2.5. Implementación numérica del método local sin malla de Petrov-Galerkin

El propósito de esta sección es presentar el procedimiento que se utilizó para desarrollar el código en el lenguaje fortran para resolver numéricamente la ecuación de difusión de calor en estado transitorio (3D) y que puede

utilizarse para resolver cualquier otra EDP. De hecho, este mismo procedimiento es el que se aplica para resolver las ecuaciones de Navier-Stokes (2D) para un flujo incompresible, y que se presentan en el siguiente capítulo.

La implementación numérica del MLPG puede llevarse a cabo de acuerdo al siguiente procedimiento:

1. Colocar cierto número de nodos N dentro del dominio físico Ω y sobre la frontera Γ . Se deben seleccionar las funciones base \mathbf{p}^T y la función de peso w_i para construir las funciones de expansión Φ .
2. Determinar el número de nodos vecinos n para cada uno de los nodos y de igual manera determinar los sub-dominios locales de integración Ω_{Q_i} para cada nodo.
3. Determinar el número de pasos de tiempo y el Δt del problema.
4. Hacer un ciclo sobre el número de pasos de tiempo
 - Hacer un ciclo sobre los nodos que estén completamente dentro de Ω .
 - a) Determinar el número de puntos de cuadratura \mathbf{x}_Q de GLL dentro del subdominio Ω_{Q_i} .
 - b) Hacer un ciclo sobre el número de puntos de cuadratura
 - Generar las funciones MLS para cada nodo dentro del subdominio Ω_{Q_i} evaluadas en el punto \mathbf{x}_Q .
 - Encontrar las derivadas de todas las funciones asociadas a cada nodo dentro de Ω_{Q_i} utilizando las transformaciones del apéndice B.
 - Evaluar numéricamente las integrales de volumen que aparecen en la forma débil utilizando las transformaciones de los apéndices B y C.
 - Formar la matriz \mathbf{A} y los vectores \mathbf{T} y \mathbf{F} .
 - c) Terminar el ciclo sobre los puntos dentro de Ω_{Q_i}
 - d) Determinar el número de puntos de cuadratura \mathbf{x}_Q de GLL sobre la frontera Γ_{Q_i}
 - e) Hacer un ciclo sobre el número de puntos de cuadratura
 - Generar las funciones MLS para cada nodo dentro del subdominio Ω_{Q_i} evaluadas en el punto \mathbf{x}_Q .

- Encontrar las derivadas de todas las funciones asociadas a cada nodo dentro de Ω_{Q_i} utilizando las transformaciones del apéndice B, además de los vectores normales unitarios a la superficie Γ_{Q_i} en cada punto \mathbf{x}_Q .
 - Evaluar numéricamente las integrales de superficie que aparecen en la forma débil utilizando las transformaciones de los apéndices B y C.
 - Sumar las contribuciones de estas integrales a la matriz \mathbf{A} .
- f)* Terminar el ciclo sobre los nodos que se encuentran en Γ_{Q_i} .
- Terminar el ciclo para los nodos que están completamente en el dominio Ω .
 - Hacer un ciclo para los nodos que se encuentran sobre la frontera Γ y generar sus ecuaciones para agregarlas a la matriz \mathbf{A} .
 - Resolver el sistema lineal $\mathbf{A}\mathbf{T} = \mathbf{F}$ para el tiempo t .
 - Ir al siguiente paso de tiempo haciendo $t = t + \Delta t$.
5. Terminar el ciclo sobre el número de pasos de tiempo.

Capítulo 3

El método local sin malla de Petrov-Galerkin para la solución de las ecuaciones de Navier-Stokes

En este capítulo se presentan las ecuaciones que rigen el comportamiento de un fluido incompresible en estado estacionario y se obtiene su forma débil. La forma débil de las ecuaciones de continuidad, de cantidad de movimiento (ecuaciones de Navier-Stokes) y de la energía se presentan para el caso bidimensional que son las que se resuelven en este trabajo. Posteriormente, se explica el algoritmo iterativo que se emplea para encontrar los campos de corrección de velocidades y corrección de presiones.

3.1. Las ecuaciones de Navier-Stokes

Las ecuaciones de la dinámica de un flujo incompresible en estado estacionario, cuando las propiedades del fluido se consideran constantes son (Currie, 2002):

- La ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (3.1)$$

- Las ecuaciones de cantidad de movimiento:

$$\rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho g_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (3.2)$$

- La ecuación de la energía:

$$\rho c_p u_i \frac{\partial T}{\partial x_i} - k \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_i} = 0 \quad (3.3)$$

en donde τ_{ij} es el tensor de esfuerzos cortantes dado por:

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.4)$$

u_i es el campo de velocidades (m/s), p es el campo de presiones (N/m²), T es el campo de temperaturas (K), ρ es la densidad del fluido (kg/m³), μ es la viscosidad dinámica (kg/m · s), k es la conductividad térmica (W/m · K), y c_p es el calor específico (J/kg · K).

Se suponen las siguientes condiciones de frontera:

- Condiciones de frontera de Dirichlet:

$$u_i = \bar{u}_i \quad \text{en } \Gamma_D \quad (3.5)$$

$$T = \bar{T} \quad \text{en } \Gamma_D \quad (3.6)$$

- o bien, condiciones de frontera de Neumann:

$$\nabla u_i \cdot \mathbf{n} = \bar{t}_i \quad \text{en } \Gamma_N \quad (3.7)$$

$$-k \nabla T \cdot \mathbf{n} = \bar{q} \quad \text{en } \Gamma_N \quad (3.8)$$

en donde \bar{u}_i , \bar{T} , \bar{t}_i y \bar{q} son dados y \mathbf{n} es el vector normal unitario a la superficie Γ_D . A continuación se presenta la forma débil de las ecuaciones (3.1)–(3.3). El procedimiento para obtenerlas es el mismo que se empleó para la ecuación de difusión de calor en la sec. 2.3. Las ecs. (3.1)–(3.3) son pesadas por funciones de prueba w y son integradas en subdominios locales Ω_Q . El procedimiento para obtenerlas se presenta con detalle en el apéndice D.

- Continuidad:

$$-\int_{\Omega_Q} u_j \frac{\partial w}{\partial x_j} d\Omega_Q + \int_{\Gamma_Q} u_j w n_j d\Gamma_Q = 0 \quad (3.9)$$

- Cantidad de movimiento:

$$\begin{aligned} & \rho \int_{\Omega_Q} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} w d\Omega_Q - \int_{\Omega_Q} p \frac{\partial w}{\partial x_i} d\Omega_Q + \int_{\Gamma_Q} p w n_i d\Gamma_Q \\ & - \rho \int_{\Omega_Q} g_i w d\Omega_Q + \int_{\Omega_Q} \tau_{ij} \frac{\partial w}{\partial x_j} d\Omega_Q - \int_{\Gamma_Q} \tau_{ij} w n_j d\Gamma_Q = 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

- Energía:

$$\begin{aligned} & \rho c_p \int_{\Omega_Q} u_j \frac{\partial T}{\partial x_j} w d\Omega_Q + k \int_{\Omega_Q} \frac{\partial T}{\partial x_j} \frac{\partial w}{\partial x_j} d\Omega_Q \\ & - k \int_{\Gamma_Q} \frac{\partial T}{\partial x_j} w n_j d\Gamma_Q = 0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

donde n_j son las componentes del vector normal unitario a la superficie Γ_Q .

Con el fin de simplificar la notación y evitar un uso excesivo de subíndices que pudiese llevar a una confusión se han omitido los subíndices que asocian los términos de las ecuaciones anteriores a cada nodo en el dominio del problema. También es importante señalar que es necesario expresar los campos de velocidades u_i y el de presiones p en términos de las funciones de expansión Φ para poder obtener el sistema lineal a resolver como se hizo con la ecuación de difusión de calor.

3.2. Corrección de presiones-velocidad

En esta tesis se trabaja con un fluido incompresible, en donde se tiene el problema de encontrar el campo de presiones que aparece en las ecuaciones de cantidad de movimiento, ya que no se tiene una ecuación explícita para ello y sin embargo debe hallarse para satisfacerlas junto a la ecuación de continuidad.

Para flujos bidimensionales, como los que aquí se presentan, esto quiere decir que debemos resolver un conjunto de tres ecuaciones (la de continuidad y las dos de cantidad de movimiento, una para cada dirección) con tres incógnitas: u_1 , u_2 y p , con el problema de que en la ecuación de continuidad no aparece la variable p . Para evitar este problema comúnmente se emplea una formulación de función de corriente-vorticidad en el que el término de presión desaparece de las ecuaciones de Navier-Stokes (Wu et al., 2005). Esta

formulación, llamada de variables derivadas, tiene el inconveniente de que no puede extenderse a flujos tridimensionales.

La otra forma de abordar el problema de encontrar el campo de presiones es utilizando variables primitivas. Patankar desarrolló un método iterativo que es ampliamente utilizado en la simulación de flujos incompresibles llamado método SIMPLE (semi implicit method for pressure linked equations). El método simple se emplea cuando las ecuaciones se resuelven con el método de volumen finito principalmente (Patankar, 1980).

Este método consiste básicamente en proponer valores iniciales para las velocidades y las presiones (u_1^*, u_2^*, p^*) que se “corrigen” mediante un proceso iterativo a nuevos valores (u_1, u_2, p) :

$$u_1 = u_1^* + u_1' \quad u_2 = u_2^* + u_2' \quad p = p^* + p'$$

donde las variables primas denotan las correcciones (White, 2005). Las ecuaciones anteriores se sustituyen en la ecuación de continuidad y en las de cantidad de movimiento para generar una ecuación de “corrección de presión” que expresa p' en términos de los valores propuestos del campo de velocidades (u_1^*, u_2^*) . Los detalles de este procedimiento se explican en (Patankar, 1980).

Para resolver el problema de encontrar el campo de presiones, en este trabajo se utiliza un algoritmo iterativo que resuelve simultáneamente la no linealidad de las ecuaciones de Navier-Stokes y calcula los campos de corrección de presiones y velocidades (Ávila and Pérez, 2008). Con este algoritmo se tiene la ventaja de conservar la información de la vecindad de cada uno de los nodos aprovechando la naturaleza de las funciones de expansión MLS, lo que incrementa la razón de convergencia.

Para mostrar como trabaja el procedimiento iterativo propuesto, a continuación se presentan de forma desarrollada la ecuación de continuidad y las ecuaciones de cantidad de movimiento en su forma débil para un fluido incompresible en estado estacionario bidimensional, haciendo uso del tensor de esfuerzos cortantes ec. (3.4) en la ec. (3.10).

Continuidad:

$$-\int_{\Omega_Q} \left(u_1 \frac{\partial w}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial w}{\partial x_2} \right) d\Omega_Q + \int_{\Gamma_Q} \left(u_1 n_1 + u_2 n_2 \right) w d\Gamma_Q = 0 \quad (3.12)$$

Cantidad de movimiento en x_1 :

$$\begin{aligned}
& \rho \int_{\Omega_Q} \left(u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) w d\Omega_Q \\
& - \int_{\Omega_Q} p \frac{\partial w}{\partial x_1} d\Omega_Q + \int_{\Gamma_Q} p w n_1 d\Gamma_Q - \rho \int_{\Omega_Q} g_1 w d\Omega_Q \\
& + \mu \int_{\Omega_Q} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \frac{\partial w}{\partial x_2} + 2 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial w}{\partial x_1} \right] d\Omega_Q \\
& - \mu \int_{\Gamma_Q} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) w n_2 + 2 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} w n_1 \right] d\Gamma_Q = 0 \quad (3.13)
\end{aligned}$$

Cantidad de movimiento en x_2 :

$$\begin{aligned}
& \rho \int_{\Omega_Q} \left(u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) w d\Omega_Q \\
& - \int_{\Omega_Q} p \frac{\partial w}{\partial x_2} d\Omega_Q + \int_{\Gamma_Q} p w n_2 d\Gamma_Q - \rho \int_{\Omega_Q} g_2 w d\Omega_Q \\
& + \mu \int_{\Omega_Q} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \frac{\partial w}{\partial x_1} + 2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \frac{\partial w}{\partial x_2} \right] d\Omega_Q \\
& - \mu \int_{\Gamma_Q} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) w n_1 + 2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} w n_2 \right] d\Gamma_Q = 0 \quad (3.14)
\end{aligned}$$

El proceso iterativo comienza como sigue:

Primer Paso. Proponemos un campo de velocidades u_i^* a fin de “linealizar” la ec. (3.13) y un campo de presiones p^* . Con ellos resolvemos la ecuación de cantidad de movimiento en la dirección x_1 , en donde nuestra incógnita es la componente u_1 del campo de velocidades:

$$\begin{aligned}
& \rho \int_{\Omega_Q} \left(u_1^* \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2^* \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) w d\Omega_Q \\
& - \int_{\Omega_Q} p^* \frac{\partial w}{\partial x_1} d\Omega_Q + \int_{\Gamma_Q} p^* w n_1 d\Gamma_Q - \rho \int_{\Omega_Q} g_1 w d\Omega_Q \\
& + \mu \int_{\Omega_Q} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2^*}{\partial x_1} \right) \frac{\partial w}{\partial x_2} + 2 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial w}{\partial x_1} \right] d\Omega_Q \\
& - \mu \int_{\Gamma_Q} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2^*}{\partial x_1} \right) w n_2 + 2 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} w n_1 \right] d\Gamma_Q = 0 \quad (3.15)
\end{aligned}$$

Segundo Paso. Una vez que se resuelve la ec. (3.15) se tiene una nueva componente u_1 del campo de velocidades, llamémosle u_1^{**} . Utilizamos esta componente para resolver la ecuación de cantidad de movimiento en la dirección x_2 (3.14), en donde ahora nuestra incógnita es u_2 :

$$\begin{aligned} & \rho \int_{\Omega_Q} \left(u_1^{**} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + u_2^* \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) w d\Omega_Q \\ & - \int_{\Omega_Q} p^* \frac{\partial w}{\partial x_2} d\Omega_Q + \int_{\Gamma_Q} p^* w n_2 d\Gamma_Q - \rho \int_{\Omega_Q} g_2 w d\Omega_Q \\ & + \mu \int_{\Omega_Q} \left[\left(\frac{\partial u_1^{**}}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \frac{\partial w}{\partial x_1} + 2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \frac{\partial w}{\partial x_2} \right] d\Omega_Q \\ & - \mu \int_{\Gamma_Q} \left[\left(\frac{\partial u_1^{**}}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) w n_1 + 2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} w n_2 \right] d\Gamma_Q = 0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

A la nueva componente u_2 que encontramos luego de resolver la ecuación anterior le llamamos u_2^{**} .

Tercer Paso. Sustituimos el campo de velocidades u_i^{**} encontrado anteriormente en la ecuación de continuidad (3.12) para obtener un residual de masa $\Delta \dot{m}$, ya que en general este campo no satisface a dicha ecuación exactamente:

$$- \int_{\Omega_Q} \left(u_1^{**} \frac{\partial w}{\partial x_1} + u_2^{**} \frac{\partial w}{\partial x_2} \right) d\Omega_Q + \int_{\Gamma_Q} \left(u_1^{**} n_1 + u_2^{**} n_2 \right) w d\Gamma_Q = \Delta \dot{m} \quad (3.17)$$

Cuarto Paso. Se proponen campos de corrección para las velocidades y las presiones:

$$u_1 = u_1^{**} + u_1' \quad u_2 = u_2^{**} + u_2' \quad p = p^* + p' \quad (3.18)$$

y se asume que con estas correcciones se satisface la ecuación de continuidad (3.12), por lo que tenemos:

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega_Q} \left((u_1^{**} + u_1') \frac{\partial w}{\partial x_1} + (u_2^{**} + u_2') \frac{\partial w}{\partial x_2} \right) d\Omega_Q \\ & + \int_{\Gamma_Q} \left((u_1^{**} + u_1') n_1 + (u_2^{**} + u_2') n_2 \right) w d\Gamma_Q = 0 \end{aligned} \quad (3.19)$$

y al restar la ec. (3.19) a la ec. (3.17), obtenemos el residual de masa en términos de las correcciones:

$$\int_{\Omega_Q} \left(u_1' \frac{\partial w}{\partial x_1} + u_2' \frac{\partial w}{\partial x_2} \right) d\Omega_Q - \int_{\Gamma_Q} \left(u_1' n_1 + u_2' n_2 \right) w d\Gamma_Q = \Delta \dot{m} \quad (3.20)$$

Quinto Paso. De manera similar, como se hizo con la ecuación de continuidad, se sustituye el campo u_1^{**} en la ecuación de cantidad de movimiento (3.15) e igualamos el residual a cero, obtenemos:

$$\begin{aligned}
& \rho \int_{\Omega_Q} \left(u_1^* \frac{\partial u_1^{**}}{\partial x_1} + u_2^* \frac{\partial u_1^{**}}{\partial x_2} \right) w d\Omega_Q \\
& - \int_{\Omega_Q} p^* \frac{\partial w}{\partial x_1} d\Omega_Q + \int_{\Gamma_Q} p^* w n_1 d\Gamma_Q - \rho \int_{\Omega_Q} g_1 w d\Omega_Q \\
& + \mu \int_{\Omega_Q} \left[\left(\frac{\partial u_1^{**}}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2^*}{\partial x_1} \right) \frac{\partial w}{\partial x_2} + 2 \frac{\partial u_1^{**}}{\partial x_1} \frac{\partial w}{\partial x_1} \right] d\Omega_Q \\
& - \mu \int_{\Gamma_Q} \left[\left(\frac{\partial u_1^{**}}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2^*}{\partial x_1} \right) w n_2 + 2 \frac{\partial u_1^{**}}{\partial x_1} w n_1 \right] d\Gamma_Q = 0 \quad (3.21)
\end{aligned}$$

Ahora proponemos las correcciones $u_1 = u_1^{**} + u_1'$ y $p = p^* + p'$ en la ec. de cantidad de movimiento en x_1 , resuelta en el primer paso del proceso iterativo (ec. 3.15) y obtenemos:

$$\begin{aligned}
& \rho \int_{\Omega_Q} \left(u_1^* \frac{\partial (u_1^{**} + u_1')}{\partial x_1} + u_2^* \frac{\partial (u_1^{**} + u_1')}{\partial x_2} \right) w d\Omega_Q \\
& - \int_{\Omega_Q} (p^* + p') \frac{\partial w}{\partial x_1} d\Omega_Q + \int_{\Gamma_Q} (p^* + p') w n_1 d\Gamma_Q - \rho \int_{\Omega_Q} g_1 w d\Omega_Q \\
& + \mu \int_{\Omega_Q} \left[\left(\frac{\partial (u_1^{**} + u_1')}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2^*}{\partial x_1} \right) \frac{\partial w}{\partial x_2} + 2 \frac{\partial (u_1^{**} + u_1')}{\partial x_1} \frac{\partial w}{\partial x_1} \right] d\Omega_Q \\
& - \mu \int_{\Gamma_Q} \left[\left(\frac{\partial (u_1^{**} + u_1')}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2^*}{\partial x_1} \right) w n_2 + 2 \frac{\partial (u_1^{**} + u_1')}{\partial x_1} w n_1 \right] d\Gamma_Q = 0 \quad (3.22)
\end{aligned}$$

Obteniendo la diferencia entre la ec. (3.22) y la ec. (3.21), se obtiene una ecuación para la corrección de velocidades u_1' y p' , que puede escribirse como:

$$\begin{aligned}
& -\rho \int_{\Omega_Q} \left(u_1^* \frac{\partial u_1'}{\partial x_1} + u_2^* \frac{\partial u_1'}{\partial x_2} \right) w d\Omega_Q \\
& + \int_{\Omega_Q} p' \frac{\partial w}{\partial x_1} d\Omega_Q - \int_{\Gamma_Q} p' w n_1 d\Gamma_Q \\
& - \mu \int_{\Omega_Q} \left[\frac{\partial u_1'}{\partial x_2} \frac{\partial w}{\partial x_2} + 2 \frac{\partial u_1'}{\partial x_1} \frac{\partial w}{\partial x_1} \right] d\Omega_Q \\
& + \mu \int_{\Gamma_Q} \left[\frac{\partial u_1'}{\partial x_2} w n_2 + 2 \frac{\partial u_1'}{\partial x_1} w n_1 \right] d\Gamma_Q = 0 \quad (3.23)
\end{aligned}$$

Si llevamos a cabo un procedimiento similar con la ecuación de cantidad de

movimiento en x_2 , obtenemos:

$$\begin{aligned}
 & -\rho \int_{\Omega_Q} \left(u_1^{*'} \frac{\partial u_2'}{\partial x_1} + u_2^{*'} \frac{\partial u_2'}{\partial x_2} \right) w d\Omega_Q \\
 & + \int_{\Omega_Q} p' \frac{\partial w}{\partial x_2} d\Omega_Q - \int_{\Gamma_Q} p' w n_2 d\Gamma_Q \\
 & -\mu \int_{\Omega_Q} \left[\frac{\partial u_2'}{\partial x_1} \frac{\partial w}{\partial x_1} + 2 \frac{\partial u_2'}{\partial x_2} \frac{\partial w}{\partial x_2} \right] d\Omega_Q \\
 & +\mu \int_{\Gamma_Q} \left[\frac{\partial u_2'}{\partial x_1} w n_1 + 2 \frac{\partial u_2'}{\partial x_2} w n_2 \right] d\Gamma_Q = 0 \tag{3.24}
 \end{aligned}$$

Sexto Paso. Las ecs. (3.20), (3.23) y (3.24) forman un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas u_1' , u_2' y p' para cada nodo, que debe resolverse para obtener las correcciones del campo de velocidad y del campo de presiones

Una vez resuelto el sistema, utilizamos las ecs. (3.18) para obtener un campo de velocidades u_i y de presiones p actualizados. Luego, se regresa al primer paso del proceso iterativo proponiendo éstos campos actualizados como campos propuestos, o sea, $u_i^* = u_i$ y $p^* = p$. Las iteraciones se detienen cuando se alcanza convergencia. Posteriormente es posible resolver la ecuación de la energía (ec. 3.11) con el campo de velocidades que se obtiene.

Capítulo 4

Resultados

En este capítulo se presentan los resultados obtenidos utilizando el método MLPG para la solución de la ecuación de difusión de calor y la solución de las ecuaciones de Navier-Stokes para el flujo de un fluido incompresible. Se presentan primeramente los resultados numéricos que se obtuvieron durante el proceso de validación del método MLPG con la solución de la ecuación de difusión de calor en una esfera hueca considerando tanto condiciones de frontera homogéneas como condiciones de frontera no homogéneas. Así mismo, se presenta el caso en el que la esfera esta compuesta de dos materiales, en el que para cada material se tiene un anulo esférico. Posteriormente se presentan los resultados para el flujo entre cilindros rotatorios concéntricos, el flujo que pasa alrededor de un cilindro infinito y el flujo alrededor de la geometría de un automóvil, todos considerando un fluido incompresible en estado estacionario, en dos dimensiones y con bajo número de Reynolds. Finalmente se presentan los resultados para la convección natural en el interior de una cavidad triangular con bajo número de Rayleigh.

4.1. Distribución de temperaturas en anulos esféricos

Como se menciona en la sec. 2.3, la implementación numérica y la validación del método MLPG se llevó a cabo resolviendo la ecuación de difusión de calor en estado transitorio y en tres dimensiones empleando coordenadas cartesianas a fin de conocer la distribución de temperaturas en una esfera hueca. Se han usado coordenadas cartesianas en lugar de coordenadas esféricas, que son

las que naturalmente se emplean en problemas con geometrías esféricas para evitar las singularidades que se presentan en los polos cuando se discretizan las ecuaciones diferenciales usando coordenadas esféricas. Estas singularidades son conocidas en la literatura especializada como el “problema del polo” (Ronchi et al., 1996).

Para evitar estas singularidades, en este trabajo se hace uso del algoritmo del cubo-esfera para generar la posición y la vecindad de los nodos en el interior de la esfera. Este algoritmo básicamente consiste en la descomposición de una esfera en seis regiones idénticas obtenidas por medio de la proyección de las caras de un cubo inscrito hacia la superficie de la esfera. De esta forma, inicialmente lo que se discretiza son las caras de un cubo, y luego las posiciones en este se mapean a la superficie de la esfera. La metodología se describe en detalle en el apéndice A.

Por otro lado, los problemas en geometrías esféricas tienen múltiples aplicaciones en ingeniería, por ejemplo, en la refrigeración de alimentos como frutas o carnes los cuales muchas veces se modelan como esferas (Virsedo and Pinazo, 1998). También se encuentran aplicaciones cuando se analiza la transferencia de calor en polímeros compuestos, los cuales son modelados como microesferas huecas y que se utilizan para la fabricación de materiales para aislamiento térmico (Liang and Li, 2007). Por el lado de la mecánica de los fluidos encontramos aplicaciones para el modelado de circulación oceánica y atmosférica (Adcroft et al., 2004).

Los problemas que se presentan en esta sección, son puramente de conducción de calor, y los casos considerados son tanto para condiciones de frontera homogéneas como para condiciones de frontera no homogéneas. El primer caso que se considera es el de la distribución de temperaturas en una esfera hueca. En la fig. 4.1 se observa un corte de dicha esfera en la que la superficie interna se encuentra a un radio r_1 y a una temperatura T_1 y la superficie externa a un radio r_2 , a una temperatura T_2 , para cuando $t > 0$. La condición inicial es $T = 0$ para todo el dominio en $t = 0$.

El modelo matemático correspondiente al problema anterior está dado por la ecuación de difusión de calor en estado transitorio (ver ec. 2.27) presentada en el capítulo 2 sin considerar el término fuente, o sea, $\dot{Q} = 0$. Cuando esta ecuación se formula en coordenadas esféricas, entonces es posible encontrar una solución analítica a este problema cuando las condiciones de frontera son

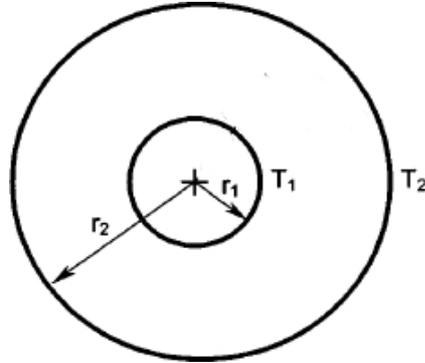


Figura 4.1: Sección de una esfera hueca.

homogéneas, dada por la expresión (Osizik, 1993):

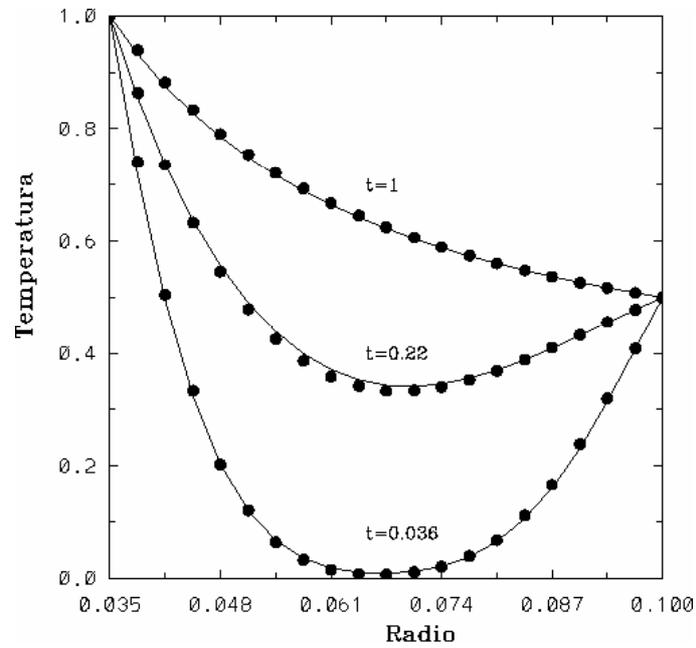
$$T(r, t) = \frac{r_1 T_1}{r} + \frac{(r_2 T_2 - r_1 T_1)(r - r_1)}{r(r_2 - r_1)} + \frac{2}{r\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_2 T_2 \cos n\pi - r_1 T_1}{n} \operatorname{sen} \frac{n\pi(r - r_1)}{r_2 - r_1} e^{-\alpha n^2 \pi^2 t / (r_2 - r_1)^2} \quad (4.1)$$

donde r es la coordenada radial.

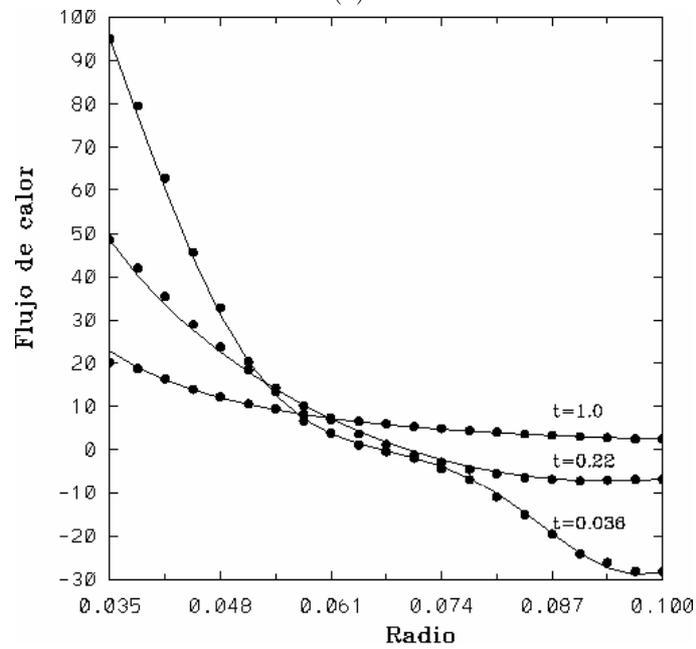
En la fig. 4.2a puede verse la distribución de temperaturas para cualquier dirección radial obtenidas con el método MLPG y las que se obtienen a partir de la ec. (4.1) para tres diferentes tiempos. En la fig. 4.2b se presenta la comparación de los flujos de calor. En ambas figuras la línea continua representa la solución analítica y los puntos la solución numérica dada por el método MLPG. Las condiciones de frontera que se utilizaron fueron $T_1 = 1.0$ en $r_1 = 0.035$ y $T_2 = 0.5$ en $r_1 = 0.1$. Para esta simulación, y las demás que se presentan en esta sección, se han utilizado 3256 nodos cuyas posiciones se generaron utilizando el algoritmo del cubo-esfera que se detalla en el apéndice A. Podemos ver que los resultados numéricos son, para propósitos prácticos, iguales a los dados por la solución analítica (ec. 4.1).

El código computacional que se desarrollo es capaz de trabajar con una esfera hueca compuesta de materiales diferentes, en el que para cada material se tendrá ahora un anulo esférico. Se llevó a cabo una simulación numérica empleando dos materiales. En la fig. 4.3 puede verse una sección transversal de dicha esfera. La interface entre los materiales se encuentra ubicada a un radio $r_i = r_1 + (r_1 + r_2)/2$ (Pérez and Ávila, 2007).

En dicha interface es necesario fijar determinado número de nodos sobre



(a)



(b)

Figura 4.2: Distribución de (a) temperaturas y (b) flujos de calor en la dirección radial. La línea continua es la solución analítica y los puntos representan los resultados numéricos obtenidos con el método MLPG

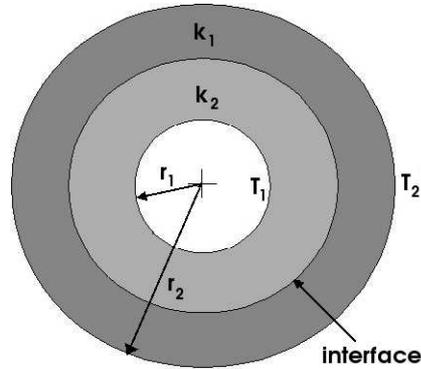


Figura 4.3: Sección de una esfera hueca compuesta de dos materiales, en el que cada material es un anulo esférico.

los que se hace un balance de flujos de calor del anulo interno hacia el exterior y del anulo interno hacia el centro de los anulos. Lo anterior se expresa matemáticamente como:

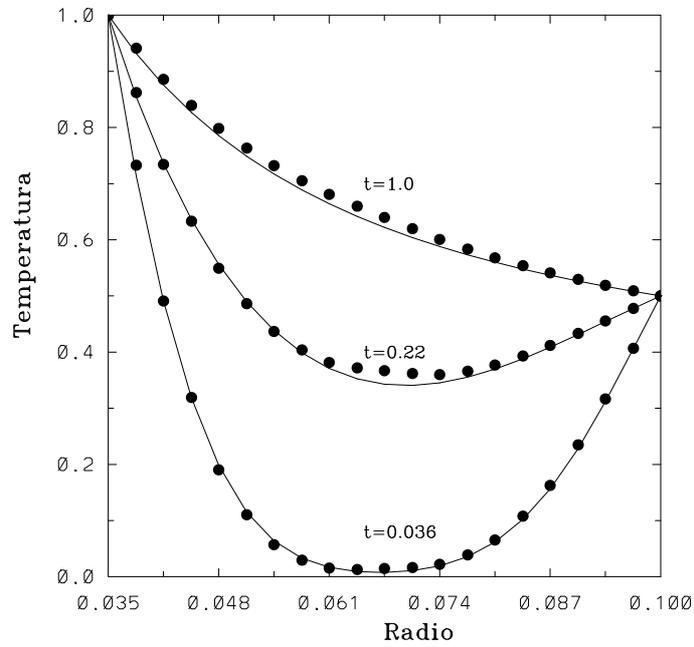
$$-k_1 \nabla T \cdot \mathbf{n} = -k_2 \nabla T \cdot \mathbf{n} \quad (4.2)$$

donde k_1 y k_2 son la conductividad térmica de los materiales del anulo interno y del anulo externo, respectivamente. La *condición de frontera de interface* anterior es muy fácil de implementar en el método MLPG, ya que este método establece una ecuación para cada nodo, como se vio anteriormente (ver subsecc. 2.3).

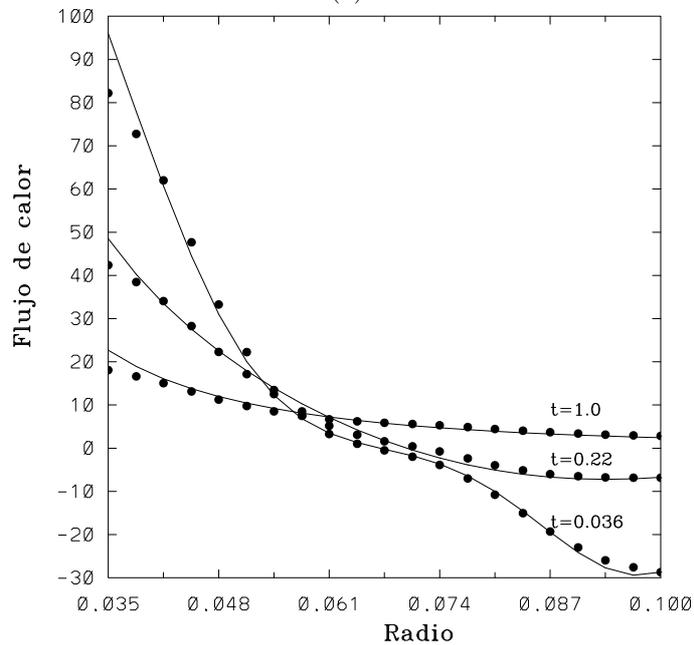
Con el fin de validar el adecuado planteamiento de la condición de frontera de interface, se hace una simulación en la que las conductividades térmicas son iguales, esto es, $k_1 = k_2$, pero imponiendo dicha condición a los nodos en la interface, con el fin de estar en posibilidad de comparar nuevamente los resultados numéricos con los dados por la solución analítica, ya que físicamente la esfera esta compuesta de un solo material.

Los resultados se muestran en la fig. 4.4 en donde puede verse nuevamente que los resultados que arroja el método MLPG son prácticamente iguales a los que se obtienen a partir de la solución analítica. Se muestran la distribución de temperaturas y los flujos de calor. Se observa un ligero salto en la parte central de las curvas de temperatura en los diferentes tiempos debido a la condición de interface que se esta imponiendo.

La fig. 4.5 muestra las temperaturas y los flujos de calor en la dirección radial para los anulos esféricos, en el que el anulo interno es de un material con

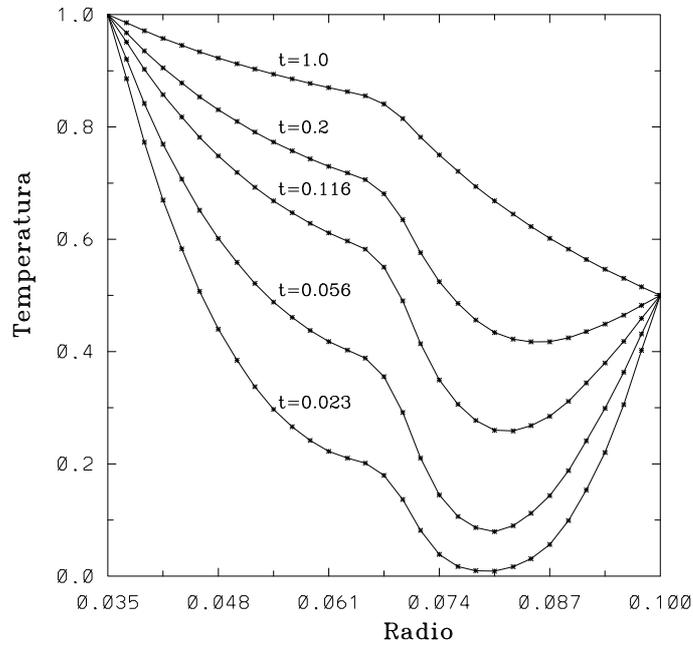


(a)

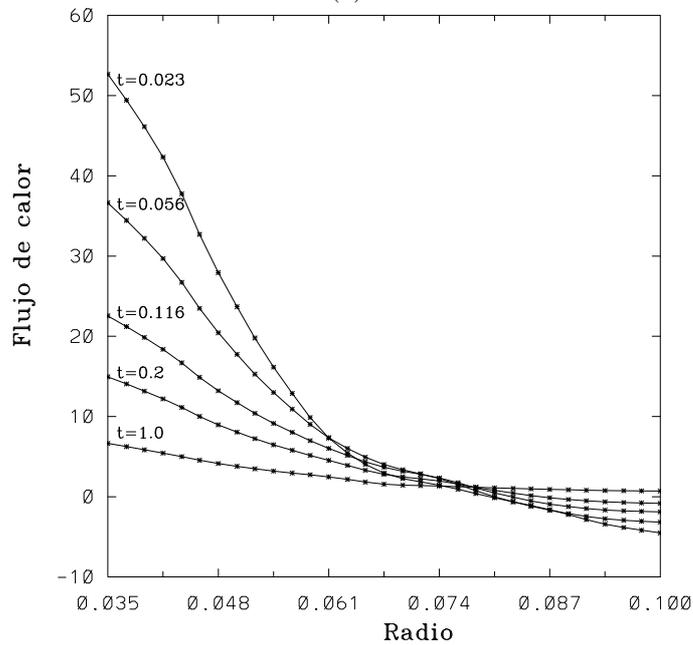


(b)

Figura 4.4: Distribución de (a) temperaturas y (b) flujos de calor en la dirección radial. La línea continua es la solución analítica y los puntos representan los resultados numéricos obtenidos con el método MLPG. Estos resultados difieren de los previos en que se ha impuesto una condición de interface en un radio ubicado a la mitad del radio interno y el externo.



(a)



(b)

Figura 4.5: Distribución de (a) temperaturas y (b) flujos de calor en la dirección radial. Los puntos son los resultados dados por el MLPG unidos por líneas. En este caso la esfera hueca está compuesta de dos materiales, en el que cada material es un anulo esférico

una conductividad diez veces mayor que el material del anulo externo ($k_1 = 10k_2$). En este caso no se dispone de una solución analítica para propósitos de comparación, sin embargo, puede verse que las temperaturas en los diferentes tiempos si corresponden a lo que físicamente se espera, ya que el calor se conduce más rápidamente en el anulo interno por tener una conductividad térmica mucho más alta que el anulo externo.

Los casos que se presentan enseguida son para mostrar la capacidad del la metodología que se esta proponiendo para tratar condiciones de frontera no homogéneas en problemas de conducción de calor con geometrías esféricas. La fig. 4.6 muestra la esfera hueca cuya condición inicial es una temperatura de $T_0 = 0.5$ para todo el dominio en $t = 0$ que corresponde al color verde. Para $t > 0$ la superficie interna de la esfera es “calentada” a una temperatura $T_1 = 1.0$ (color rojo) y la temperatura de la superficie externa se mantiene con la condición inicial, excepto en las regiones polares, las cuales se “enfrian” a una temperatura $T_{\text{polos}} = 0.0$ (color azul), con el fin de tener una condición de frontera no homogénea en la superficie externa.

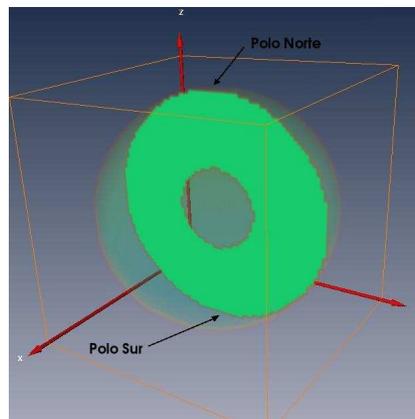


Figura 4.6: Esfera hueca en donde se muestra la ubicación de los polos.

La fig. 4.7 muestra un corte de la esfera que pasa por los polos con cuatro instantes de tiempo desde la condición inicial hasta que se alcanza el estado estacionario. En este caso la esfera hueca es de un solo material y ambas regiones polares, norte y sur, se enfrian a la misma temperatura. En la fig. 4.8 se tienen la misma condición inicial, solo que a diferencia del caso anterior, el polo sur es enfriado a una temperatura $T_{\text{polo sur}} = 0.25$, ligeramente menor a la temperatura a la que se enfria el polo norte, $T_{\text{polo norte}} = 0.25$.

La situación correspondiente a las figs. 4.9 y 4.10 es parecida a los dos casos que se muestran en las figs. 4.7 y 4.8, respectivamente, pero ahora

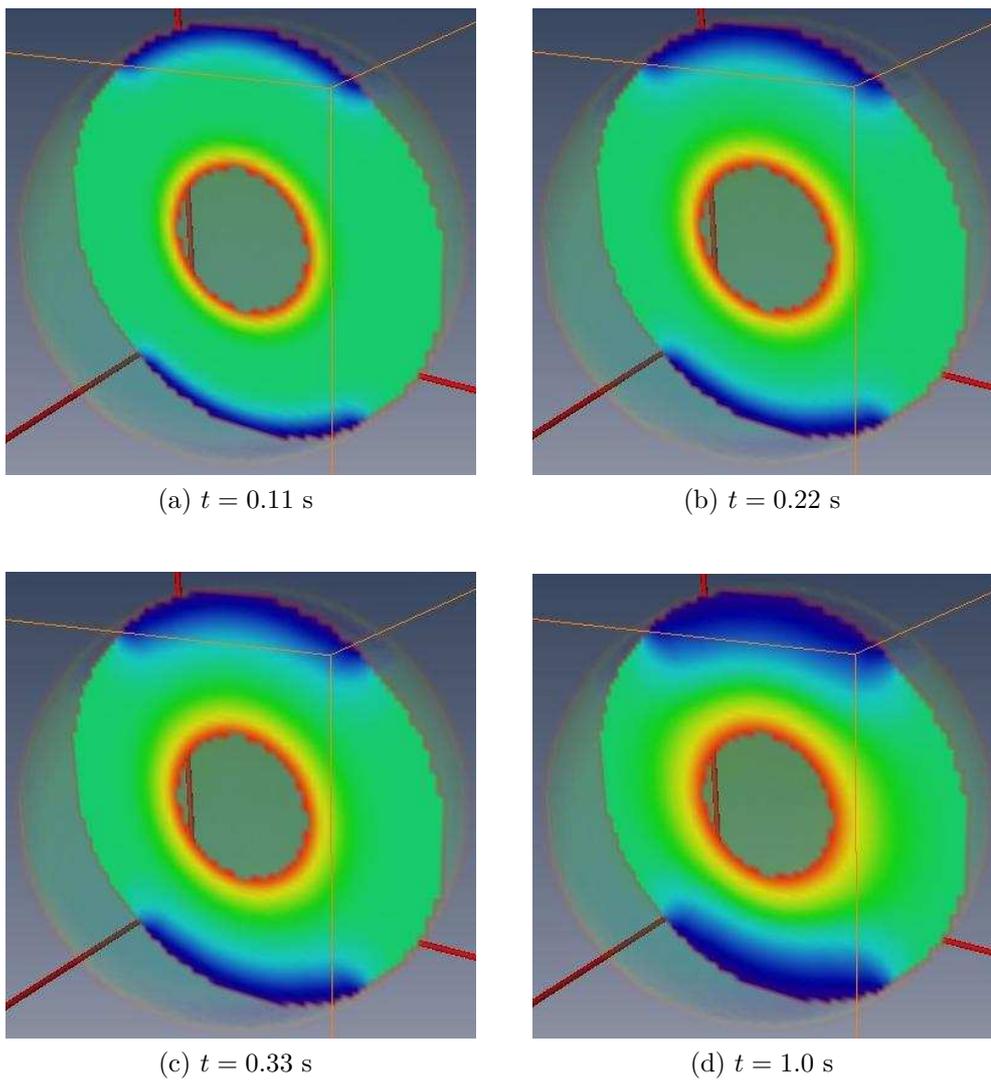


Figura 4.7: Distribución de temperaturas en una esfera hueca con condiciones de frontera no homogéneas y regiones polares enfriadas a la misma temperatura

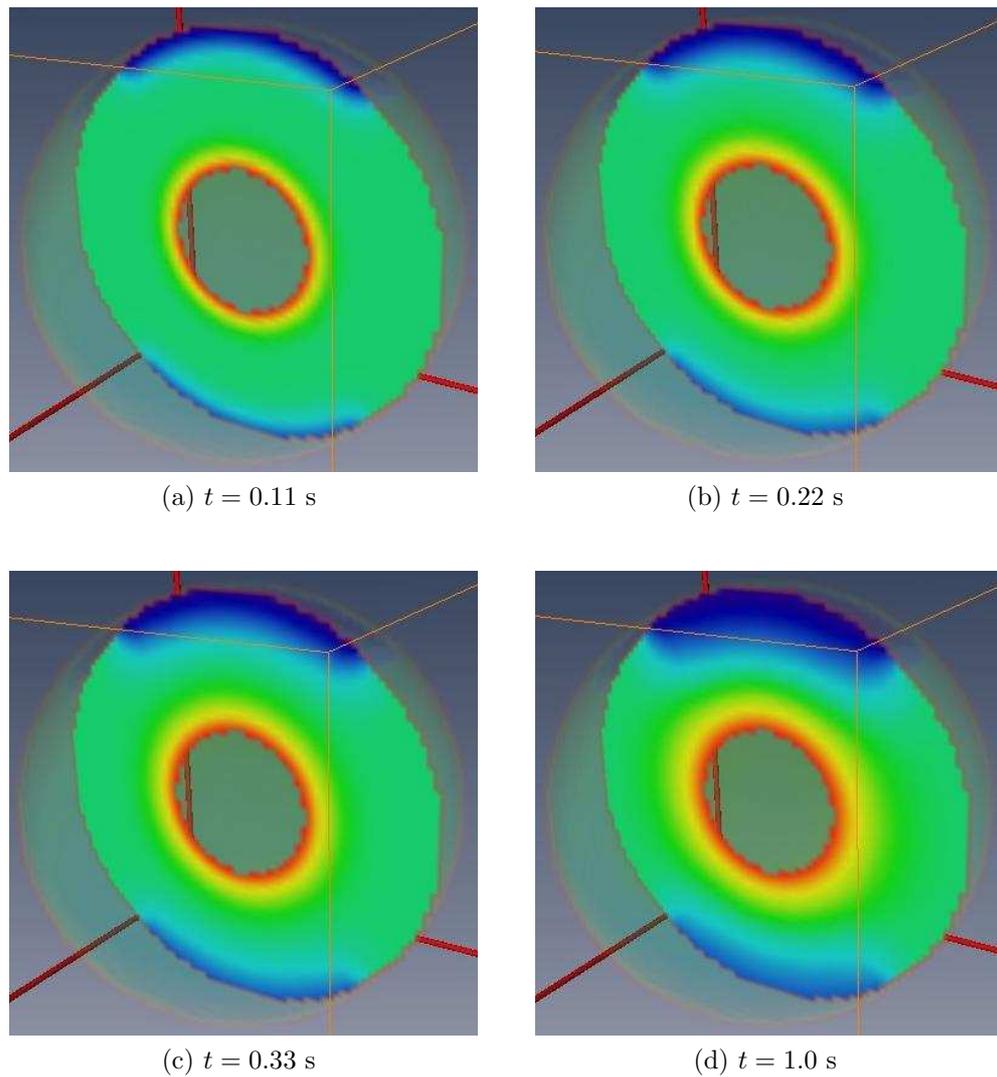


Figura 4.8: Distribución de temperaturas en una esfera hueca con condiciones de frontera no homogéneas y regiones polares enfriadas a temperaturas diferentes

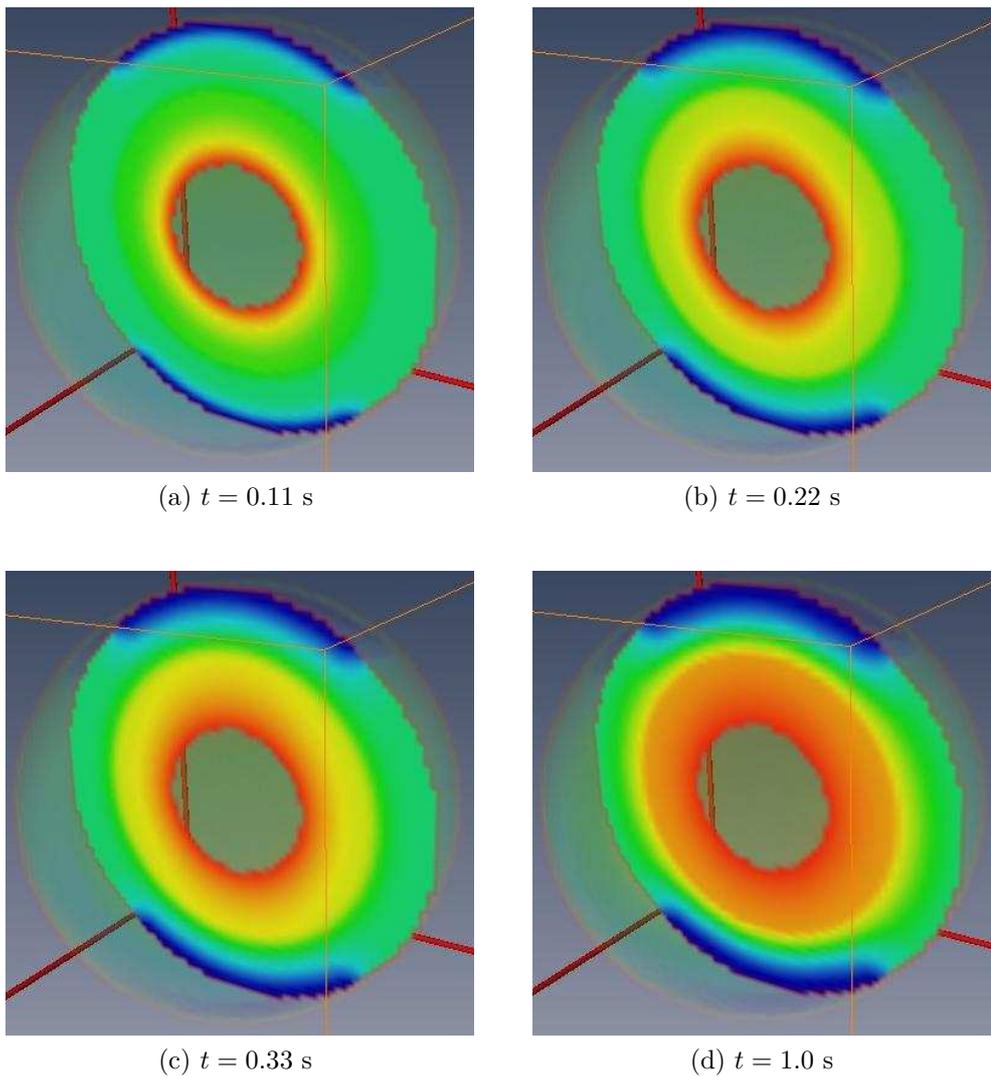


Figura 4.9: Distribución de temperaturas en anulos esféricos. El material del anulo interno tiene una conductividad diez veces mayor que el anulo externo. Las regiones polares son enfriadas a la misma temperatura

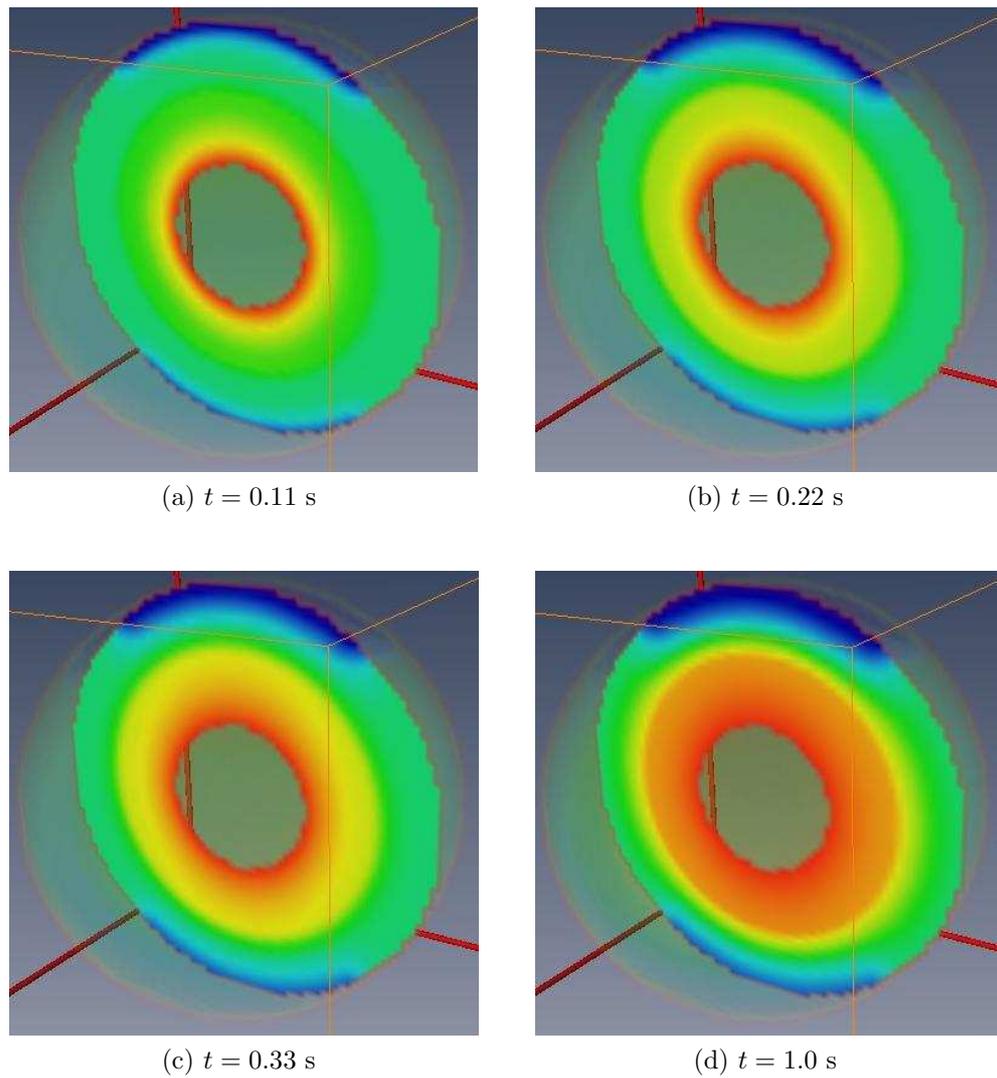


Figura 4.10: Distribución de temperaturas en anulos esféricos. El material del anulo interno tiene una conductividad diez veces mayor que el anulo externo. Las regiones polares son enfriadas a temperaturas diferentes

se considera a la esfera hueca compuesta por dos materiales, teniendo un anulo esférico para cada material. La conductividad térmica del anulo interno es diez veces mayor que la conductividad térmica del anulo externo. Las imágenes que se están presentando son fotografías de un video que se generó en 3d para su visualización en el Laboratorio de Visualización Ixtli de la Universidad Nacional Autónoma de México. Los datos y animaciones están disponibles para su uso en ese laboratorio con la ayuda del software Amira.

4.2. Flujo entre cilindros rotatorios concéntricos

En esta sección se presentan los resultados de la simulación numérica de un fluido incompresible confinado entre dos cilindros rotatorios concéntricos. El flujo se mantiene por la rotación de alguno de los cilindros, o de ambos. El cilindro interno tiene un radio r_1 que se mantiene a una velocidad angular ω_1 y el radio del cilindro externo es r_2 a una velocidad angular ω_2 , como se muestra en la fig. 4.11a.

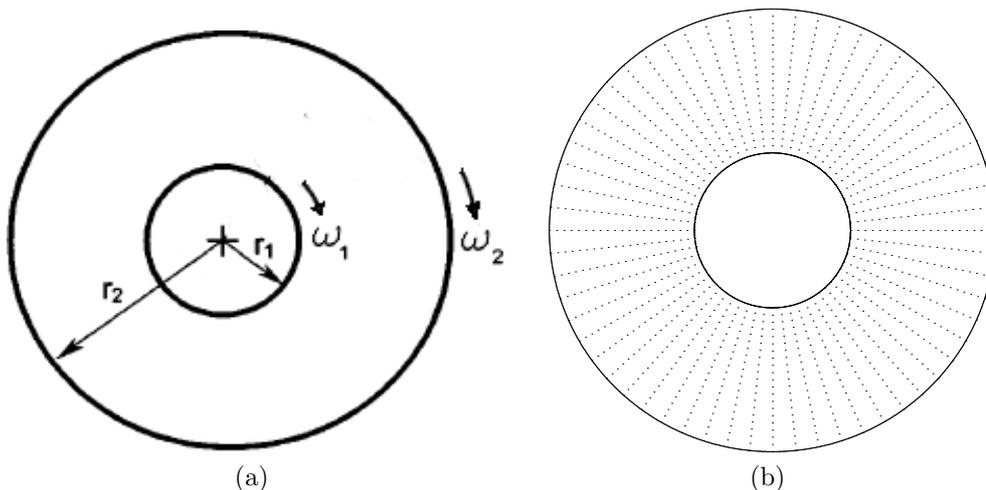
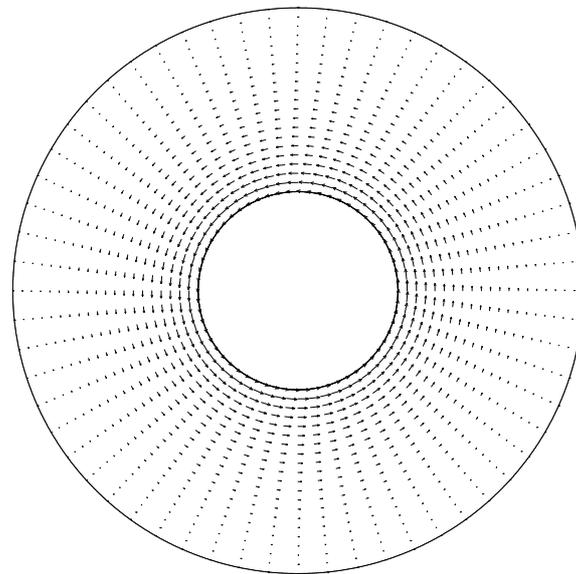
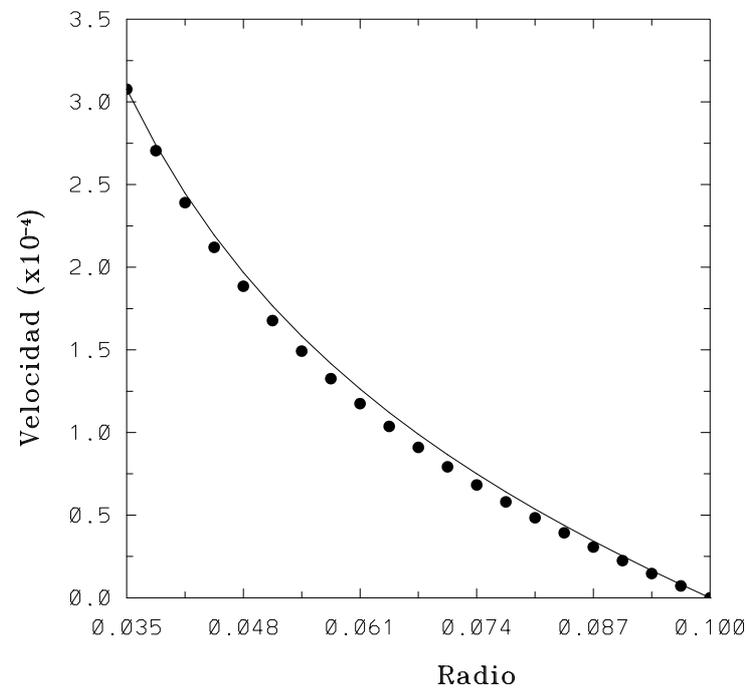


Figura 4.11: Flujo incompresible entre dos cilindros rotatorios concéntricos: (a) Geometría del problema y (b) distribución de nodos.

Es posible encontrar una solución analítica al campo de velocidades a este problema cuando se plantean en coordenadas polares (White, 2005). Por la geometría del problema la única componente del campo de velocidades



(a)



(b)

Figura 4.12: Solución para el flujo entre cilindros rotatorios: (a) Campo de velocidades obtenido numéricamente con el método MLPG y (b) comparación con la solución analítica disponible

diferentes de cero es la de la dirección angular u_θ la cual será función solamente de la coordenada radial r . Esta solución viene dada por la siguiente expresión:

$$u_\theta(r) = r_1\omega_1 \frac{r_2/r - r/r_2}{r_2/r_1 - r_1/r_2} + r_2\omega_2 \frac{r/r_1 - r_1/r}{r_2/r_1 - r_1/r_2} \quad (4.3)$$

La fig. 4.11b muestra la distribución uniforme de los nodos, en donde se han empleado 60 nodos en la dirección angular y 20 nodos en la dirección radial, para hacer un total de 1200 nodos.

Los radios tienen una razón de aspecto de $r_2/r_1 = 0.35$ y la velocidad angular del cilindro interno es $\omega_1 = 8.79 \times 10^{-3}$ rad/s en el sentido contrario a las manecillas del reloj, manteniendo el cilindro externo fijo. Para obtener el número de Reynolds, la longitud característica esta dada por la diferencia entre los radios:

$$\text{Re} = \frac{\rho\omega_1 r_1 (r_2 - r_1)}{\mu} = 20.0 \quad (4.4)$$

En la fig. 4.12a puede verse el campo de velocidades que se obtuvo con el método MLPG y en la fig. 4.12b la comparación de los resultados numéricos con la solución analítica dada por la ec. (4.3). Nuevamente puede observarse que los resultados que se obtienen empleando el método MLPG son una buena aproximación cuando se comparan con la solución analítica.

4.3. Flujo alrededor de un cilindro

En esta sección se presentan los resultados de la simulación numérica del flujo alrededor de un cilindro circular infinito sumergido en una corriente uniforme en dos dimensiones a bajo número de Reynolds. La geometría de este flujo tiene muchas aplicaciones en ingeniería y además es un problema ampliamente estudiado y documentado, por lo que se ha convertido en una referencia en la investigación de problemas de flujos incompresibles tanto en estado estacionario, como transitorio, así como para la validación de métodos numéricos que se encuentran en desarrollo, como los métodos libres de malla.

Existen muchas publicaciones para este tipo de flujo, en los que se presentan resultados teóricos, experimentales y numéricos, por lo que estamos en posibilidad de ver los alcances de la metodología que se esta proponiendo en este trabajo (Taneda, 1956), (Gerrard, 1978), (Zhang et al., 2005).

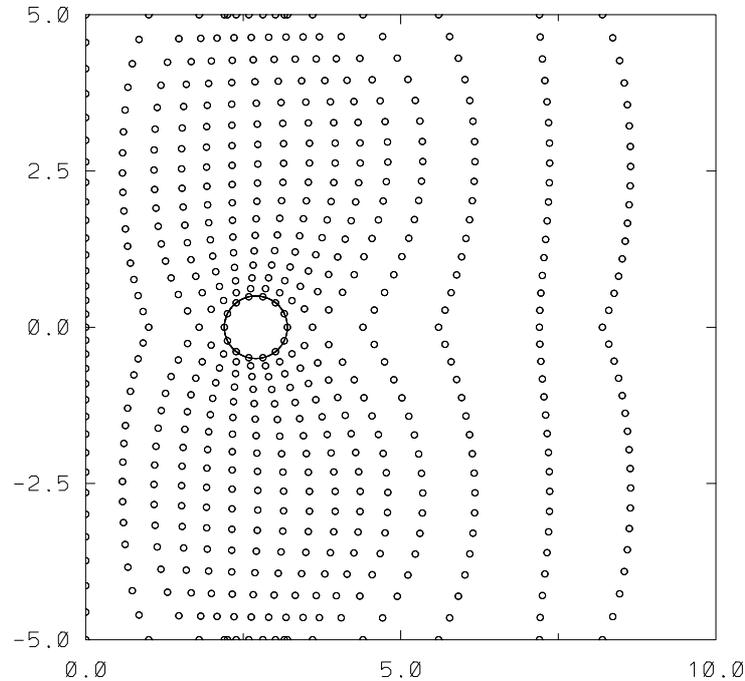


Figura 4.13: Distribución de nodos alrededor del cilindro

En la fig. 4.13 se muestra la distribución de los nodos alrededor del cilindro, en donde se utilizaron 657 nodos con una distribución no uniforme. La longitud característica para el número de Reynolds se toma del diámetro D del cilindro, esto es, $Re = \rho U_\infty D / \nu$, en donde U_∞ es la velocidad de la corriente uniforme que entra de izquierda a derecha de la figura. En la fig. 4.14 pueden verse las líneas de corriente que se obtuvieron a diferentes números de Reynolds detrás del cilindro.

Para este tipo de flujos, uno de los parámetros característicos más importantes es el coeficiente de arrastre C_D . El C_D puede expresarse como el resultado de las contribuciones de un coeficiente de *arrastre por fricción* y un coeficiente de *arrastre por presión*:

$$C_D = C_{D,\text{fric}} + C_{D,\text{pres}} \quad (4.5)$$

El $C_{D,\text{fric}}$ es causado por las fuerzas cortantes que actúan sobre la superficie del cilindro y el $C_{D,\text{pres}}$ por el gradiente de presiones entre la región de estancamiento de la parte frontal, de alta presión y la región de recirculación en la parte trasera, de bajas presiones. En este trabajo, se llevó a cabo únicamente el cálculo del $C_{D,\text{fric}}$, ya que es necesario mejorar el algoritmo de

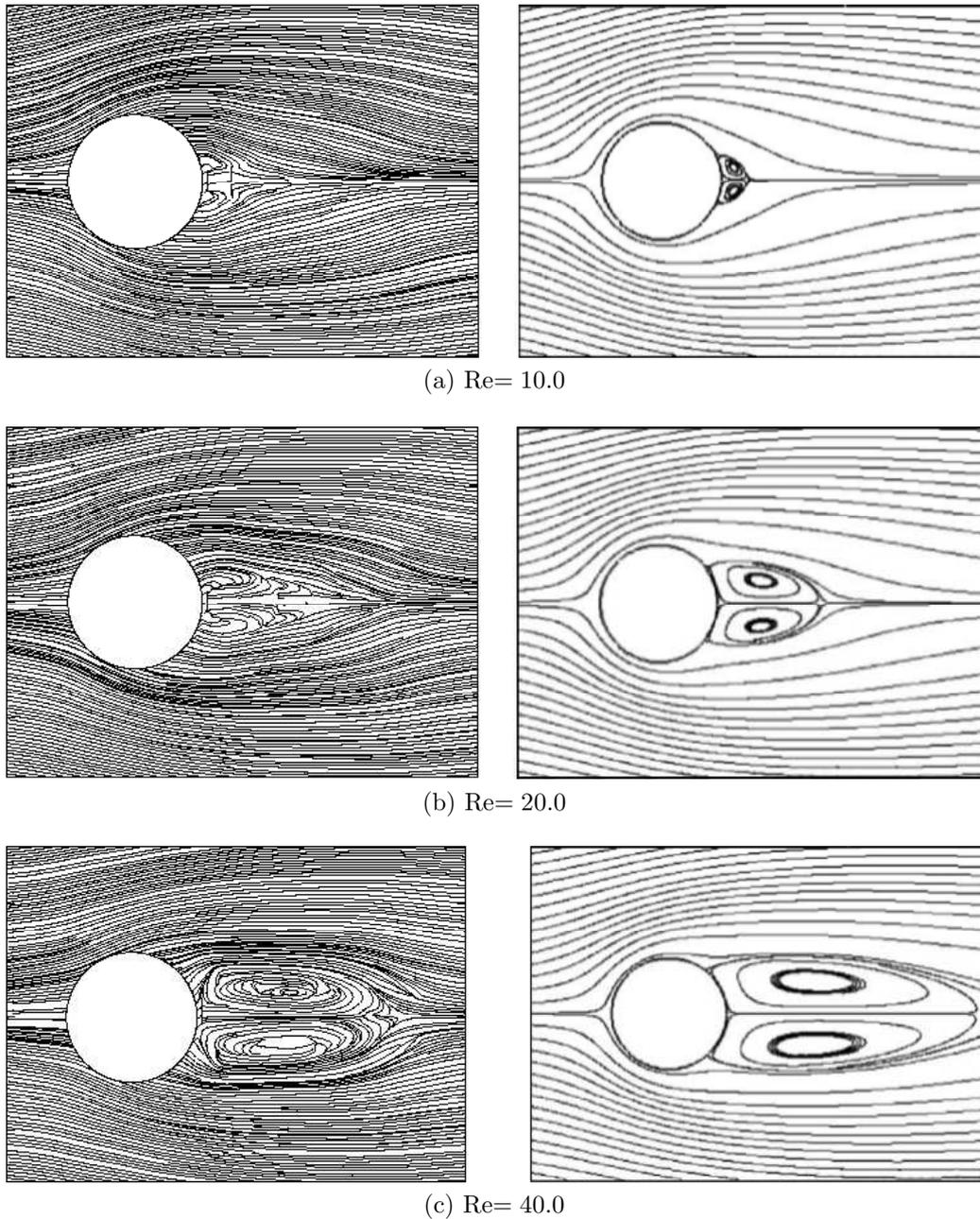


Figura 4.14: Detalles de las estelas detrás del cilindro a diferentes números de Reynolds. Las líneas de corriente de la izquierda corresponden a los obtenidos utilizando el método MLPG y las de la derecha a los reportados por Zhang, et al. (2005).

corrección de presiones-velocidad para que el código que se desarrolló proporcione el campo de presiones correcto (Ávila and Pérez, 2008).

Para obtener el coeficiente $C_{D,\text{fric}}$, primero se determina el vector de esfuerzos \mathbf{f}_s que actúa sobre un punto en la superficie del cilindro:

$$\mathbf{f}_s = \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} = \tau_{ij} \mathbf{i}_i \mathbf{i}_j \cdot n_k \mathbf{i}_k = \tau_{ij} n_j \mathbf{i}_i \quad (4.6)$$

en donde \mathbf{i}_i son los vectores unitarios base en el sistema de coordenadas cartesianas rectangulares, n_j son las componentes del vector unitario normal a la superficie del cilindro y τ_{ij} es el tensor de esfuerzos (ec. 3.4). De la ec. (4.6), podemos obtener la componente normal de la fuerza que actúa sobre la superficie S del cilindro:

$$f_{\text{norm}} = \int_S \mathbf{f}_s \cdot \mathbf{n} dS = \int_S \tau_{ij} n_j \mathbf{i}_i \cdot n_k \mathbf{i}_k dS = \int_S \tau_{ij} n_i n_j dS \quad (4.7)$$

y la componente tangencial:

$$f_{\text{tang}} = \int_S \mathbf{f}_s \cdot \mathbf{t} dS = \int_S \tau_{ij} n_j \mathbf{i}_i \cdot t_k \mathbf{i}_k dS = \int_S \tau_{ij} n_j t_i dS \quad (4.8)$$

donde \mathbf{t}_i son las componentes del vector tangencial unitario a la superficie del cilindro (vectores covariantes, ver apéndice C). Haciendo uso del tensor de esfuerzos (ec. 3.4) y desarrollando las ecuaciones (4.7)–(4.8), es posible escribir:

$$f_{\text{norm}} = 2\mu \int_S \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} n_1 n_1 + \mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) n_1 n_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} n_2 n_2 \right) dS \quad (4.9)$$

y

$$f_{\text{tang}} = \int_S \left(2\mu \frac{\partial u_1}{\partial x_1} n_1 t_1 + \mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) (n_2 t_1 + n_1 t_2) + 2\mu \frac{\partial u_2}{\partial x_2} n_2 t_2 \right) dS \quad (4.10)$$

en donde las derivadas de las velocidades pueden escribirse en términos de las funciones de interpolación MLS (ver sec. 2.2). De esta forma, podemos definir la fuerza de arrastre por fricción que actúa sobre el cilindro como la suma de $f_{\text{tang}} + f_{\text{norm}}$ multiplicada por L :

$$F_{D,\text{fric}} = (f_{\text{norm}} + f_{\text{tang}})L \quad (4.11)$$

en donde L es la longitud del cilindro. Finalmente podemos expresar el coeficiente de arrastre por fricción $C_{D,\text{fric}}$ en términos de $F_{D,\text{fric}}$ como:

$$C_{D,\text{fric}} = \frac{F_{D,\text{fric}}}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2 A} \quad (4.12)$$

en donde A es el área de la sección longitudinal del cilindro $A = DL$.

Los resultados obtenidos aplicando la ec. (4.12) se comparan con una expresión analítica reportada para bajos números de Reynolds (Khan et al., 2005):

$$C_{D,\text{fric}} = \frac{5.786}{\sqrt{\text{Re}}} \quad (4.13)$$

Los resultados se muestran en la tabla 4.1, para $\text{Re}=10, 20, 30$ y 40 y puede verse que la metodología que se propone es una buena aproximación, comparada con la expresión dada en la ec. (4.13), en donde los valores de los coeficientes son bastante cercanos.

| | Re=10 | Re=20 | Re=30 | Re=40 |
|--------------------|-------|-------|-------|-------|
| Khan et al. (2005) | 1.82 | 1.29 | 1.05 | 0.91 |
| MLPG | 2.55 | 1.54 | 1.1 | 0.89 |

Tabla 4.1: Comparación entre los valores del coeficientes de arrastre por fricción obtenidos con la expresión de Khan et al. (2005) y los obtenidos con el MLPG

4.4. Flujo alrededor de un automóvil

A continuación se presenta a manera de ejemplo y de forma cualitativa los resultados que arrojó el código computacional que se desarrolló, para el flujo incompresible alrededor de la geometría de un automóvil. Estos resultados se presentan a fin de mostrar el tipo de geometrías que en algún momento dado podrían manejarse con el programa. En la fig. 4.15 puede verse la distribución no uniforme de los 1491 nodos que se emplearon para la simulación.

La longitud característica para el número de Reynolds se basa en el largo de la geometría y la simulación que se presenta corresponde a $\text{Re}= 20$. La fig. 4.16 muestra los vectores de velocidad alrededor de la geometría, los cuales tienden a seguir el contorno del automóvil, con una pequeña zona de recirculación que puede observarse en la fig. 4.17, debido a la baja velocidad que se está manejando.

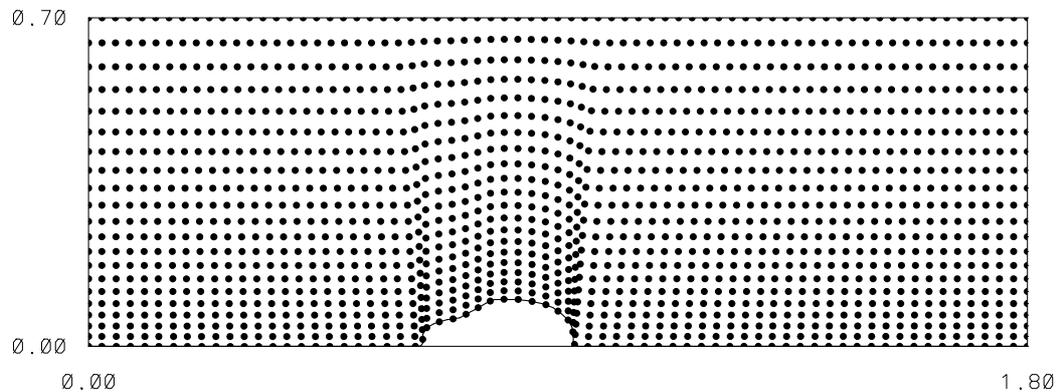


Figura 4.15: Distribución de nodos alrededor de la geometría de un automóvil.

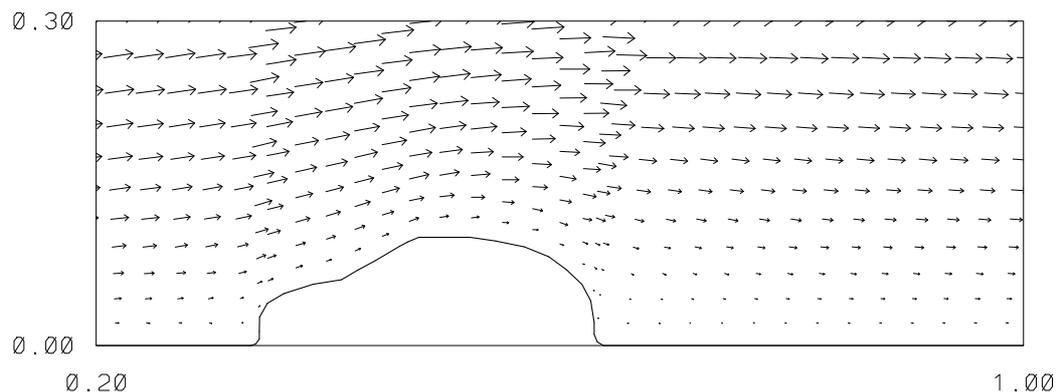


Figura 4.16: Campo de velocidades alrededor de la geometría de un automóvil.

4.5. Convección natural en una cavidad triangular

En esta sección se presentan los resultados de la simulación numérica de la convección natural de un fluido incompresible en el interior de una cavidad triangular. El tema de convección natural en cavidades es de mucha importancia puesto que tiene múltiples aplicaciones en ingeniería y existen muchas publicaciones que tratan el tema tanto desde el punto de vista teórico, numérico y experimental (Bejan, 1995).

Sin embargo, la mayoría de los estudios se han llevado a cabo para el estudio de la convección natural en cavidades rectangulares, cuando en la

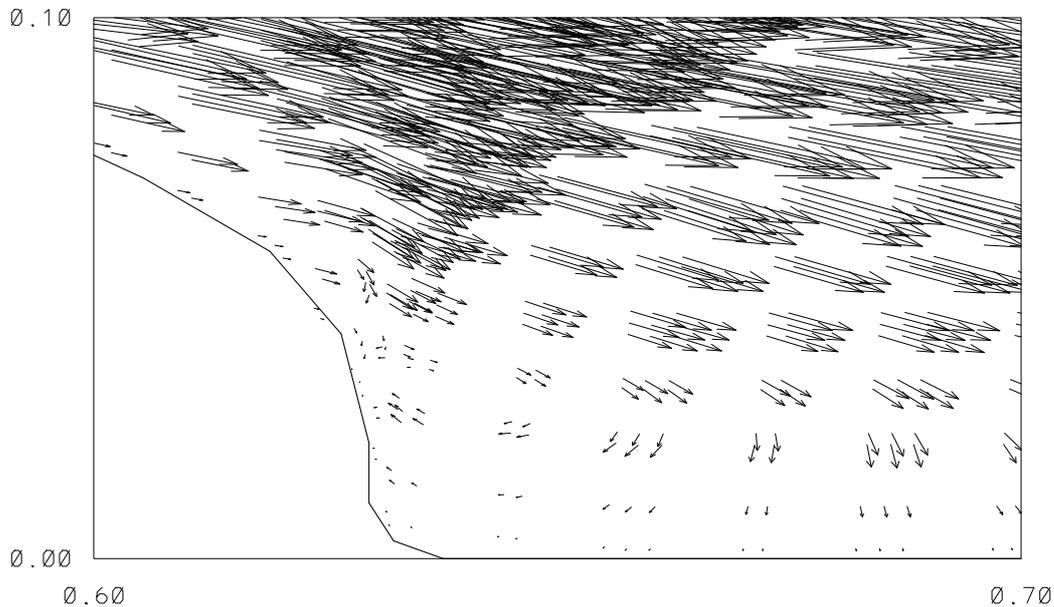


Figura 4.17: Detalle de los vectores de velocidad en la estela detrás del perfil del automóvil

práctica se encuentran cavidades con geometrías diversas, como trapezoidales o triangulares. Estas últimas, las cavidades triangulares, son algo difíciles de estudiar desde el punto de vista experimental y también desde el punto de vista numérico por la geometría misma.

Los primeros trabajos teóricos y experimentales para la convección natural en cavidades triangulares fueron llevados cabo hace relativamente poco tiempo. Flack (1980) lleva a cabo un estudio experimental de la transferencia de calor en cavidades triangulares para bajos números de Rayleigh, en donde el fondo de la cavidad se calienta o se enfría (Flack, 1980). Poulidakos y Bejan (1983) hacen un estudio experimental y teórico, considerando también bajos números de Rayleigh y varias condiciones de frontera. (Poulidakos and Bejan, 1983a), (Poulidakos and Bejan, 1983b).

Por la parte numérica se ha hecho una búsqueda detallada de los trabajos publicados para resolver el problema de flujo en cavidades triangulares. Las primeras publicaciones se centran en resolver el flujo en una cavidad triangular pero se considera que el flujo se mantiene por un esfuerzo cortante reportando resultados para números de Reynolds de hasta 500 (Ribbens and Watson, 1994). Li y Tang (1996) con el uso de transformaciones geométricas, obtienen resultados para números de Reynolds de hasta 1500. (Li and Tang,

1996). La característica de ambas publicaciones es que el método numérico que emplean es de diferencias finitas, junto a una formulación de función de corriente-vorticidad.

Con respecto a los métodos numéricos que se emplean para resolver los problemas de flujos en cavidades triangulares, puede decirse que se han utilizado pocos métodos alternos a los métodos numéricos tradicionales. Para el tema que nos interesa, el de la convección natural, se continúan empleando las mismas técnicas numéricas que se mencionaron en el párrafo anterior, con la excepción de algunos trabajos que emplean el método de los elementos finitos y algunos software comerciales (Haese and Teubner, 2002), (Kent et al., 2007), (Basak et al., 2007).

En este trabajo se propone el empleo del método MLPG como una alternativa para resolver problemas de convección natural en cavidades triangulares y lo que se pretende es comparar nuestros resultados con los que se reportan en la literatura empleando otros métodos numéricos. El modelo físico del problema que se resuelve se muestra en la figura 4.18, donde se considera una cavidad triangular con ángulo recto, cuyo fondo está aislado, con la pared vertical caliente y la pared inclinada fría.

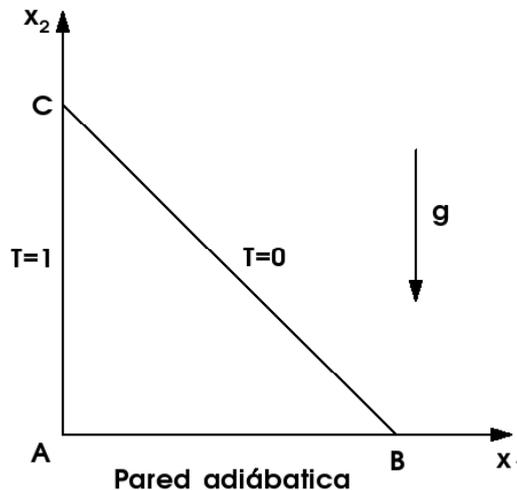


Figura 4.18: Diagrama para la convección natural en una cavidad triangular

Suponemos que las propiedades del fluido son constantes, excepto para el término fuerza de cuerpo que se encuentra en la ecuación de cantidad de movimiento en la dirección de x_2 (ver ec. 3.14). Esto es, que para la simulación del fluido incompresible se utiliza la *aproximación de Boussinesq*, por lo que

el término fuerza de cuerpo en dicha ecuación se convierte en $\rho g \beta \Delta T$, en donde ΔT es la diferencia de temperaturas entre la pared caliente y la pared fría y β es el coeficiente de expansión volumétrica a presión constante (1/K).

Las gráficas que se muestran son para bajos números de Rayleigh:

$$\text{Ra} = \frac{g \beta \Delta T L^3}{\alpha \nu} \quad (4.14)$$

y números de Prandtl de orden unidad:

$$\text{Pr} = \frac{\alpha}{\nu} \quad (4.15)$$

en donde L es la altura de la cavidad triangular.

La figura 4.19 muestra el campo de velocidades y las isocurvas de temperatura que se obtuvieron con el método MLPG para un número de Rayleigh de 1000 y un número de Prandtl de 0.7. Como el número de Rayleigh es muy bajo, en este caso, el proceso de transferencia de calor que domina es el de difusión.

En la fig. 4.20 se muestra el campo de velocidades y las isocurvas de temperatura correspondientes a $\text{Ra}=20000$ y $\text{Pr}=0.7$, en donde comienza aparecer la convección. Los resultados anteriores son prácticamente los mismos que los reportados recientemente por Basak et al. (2007) en donde las ecuaciones de gobierno se formulan en términos de la función de corriente-vorticidad y posteriormente estas se resuelven utilizando el método de los elementos finitos (Basak et al., 2007). En dicha publicación se hace un amplio estudio de los efectos de diferentes condiciones de frontera en la convección, lo cual está fuera de los objetivos de este trabajo. Sin embargo, es posible comparar cuantitativamente algunos de los resultados que se reportan con los que aquí se obtuvieron empleando el método MLPG. Estos se muestran en la fig. 4.21 en donde se grafica el número de Nusselt local a lo largo de las paredes vertical e inclinada.

El número de Nusselt nos permite medir la razón de transferencia de calor por convección y la transferencia de calor por conducción que ocurre en una superficie en donde se mueve un fluido:

$$\text{Nu} = \frac{hL}{k} \quad (4.16)$$

en donde h es el coeficiente de transferencia de calor por convección:

$$h = \frac{q_n}{\Delta T} = \frac{-k \nabla T \cdot \mathbf{n}}{\Delta T} \quad (4.17)$$

donde q_n es el flujo de calor normal a la superficie y \mathbf{n} es el vector unitario normal al plano de la superficie.

Sustituyendo la ec. (4.17) en la ec. (4.16) :

$$\text{Nu} = -\frac{L}{k} \frac{k}{\Delta T} \nabla T \cdot \mathbf{n} \quad (4.18)$$

La derivada de la temperatura con respecto a la normal se evalua con ayuda de las funciones de interpolación MLS (ver sec. 2.2):

$$\begin{aligned} \nabla T \cdot \mathbf{n} &= \frac{\partial T}{\partial x_j} n_j \\ &= \frac{\partial T}{\partial x_1} n_1 + \frac{\partial T}{\partial x_2} n_2 \\ &= \sum_{i=1}^9 \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_1} T_i n_1 + \sum_{i=1}^9 \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_2} T_i n_2 \end{aligned} \quad (4.19)$$

De esta forma, sustituyendo la ec. (4.19) en la ec. (4.18), se tiene que para la pared vertical en donde $[n_1, n_2] = [1, 0]$, el número de Nusselt local se puede expresar como:

$$\text{Nu}_v = -\frac{L}{\Delta T} \sum_{i=1}^9 \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_1} T_i \quad (4.20)$$

y para la pared inclinada, donde $[n_1, n_2] = [1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$, se tiene que:

$$\text{Nu}_i = -\frac{L}{\Delta T} \sum_{i=1}^9 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_1} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_2} \right) T_i \quad (4.21)$$

En la fig. 4.21 se muestran mediante líneas continuas las curvas correspondientes a las ecs. (4.20)–(4.21) para un número de Prandtl $\text{Pr} = 0.7$ y números de Rayleigh de $\text{Ra}=1000$ y $20,000$. Los puntos corresponden a los reportados por Basak, et al. (2007). De acuerdo a una correlación que los autores proponen en esta publicación, se puede encontrar que el número de Nusselt promedio en la pared vertical es de $\overline{\text{Nu}}_v = 6.1$ y el número de Nusselt promedio en la pared inclinada es de $\overline{\text{Nu}}_i = 4.3$, para $\text{Ra}=20,000$.

En este trabajo, el cálculo del número de Nusselt promedio en la pared vertical se obtiene como se muestra a continuación:

$$\overline{\text{Nu}}_v = \frac{1}{L} \int_0^L \text{Nu}_v dx_2 = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^{100} (\text{Nu}_v)_i (\Delta x_2)_i \quad (4.22)$$

en donde el número 100 corresponde al número de puntos en donde se evaluó el número de Nusselt local a lo largo de la pared vertical. Como las $(\Delta x_2)_i$ son iguales, entonces $L = 100\Delta x_2$, por lo tanto, la ec. (4.22) queda como:

$$\overline{\text{Nu}}_v = \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} (\text{Nu}_v)_i \quad (4.23)$$

de manera semejante puede encontrarse $\overline{\text{Nu}}_i$. En este trabajo, los números de Nusselt promedio que se obtuvieron empleando el método MLPG para los mismos valores de $\text{Pr} = 0.7$ y $\text{Ra} = 20,000$ fueron de son $\overline{\text{Nu}}_v = 5.3$ y $\overline{\text{Nu}}_i = 3.83$. La diferencia de nuestros resultados y los que presentan Basak et al. (2007) se debe a que se presentan grandes cambios de los números de Nusselt local en las esquinas derecha y superior, lo que influye mucho en el promedio. Es posible que estos autores también se hayan enfrentado al mismo problema al momento de reportar sus gráficas, hecho que se ve reflejado en las figuras 4.21a y 4.21b, puesto que las curvas que se presentan no abarcan las esquinas. Este problema debería considerarse en futuros trabajos que aborden el problema de convección natural en cavidades triangulares (Pérez and Ávila, 2008).

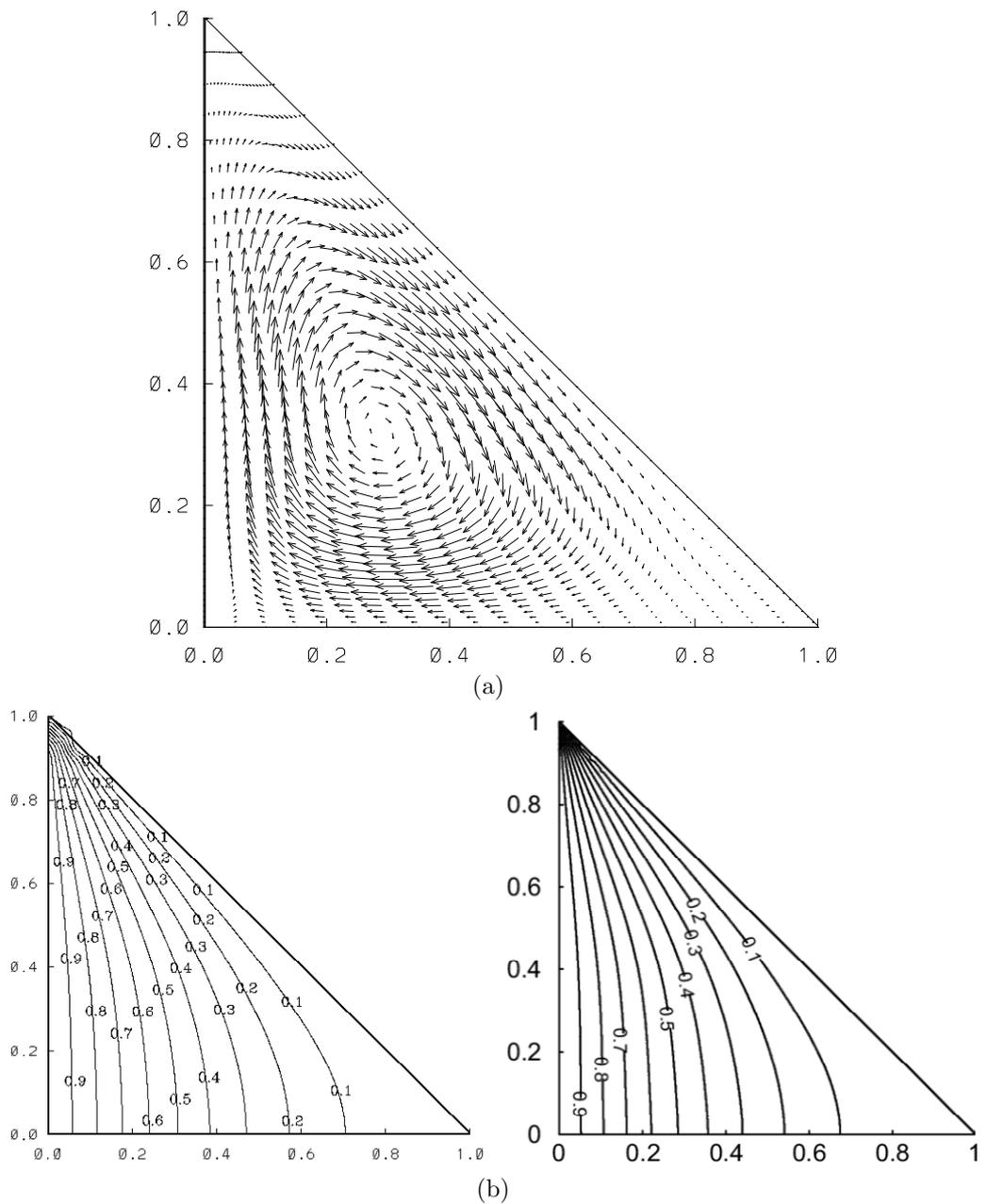


Figura 4.19: Convección natural en el interior de una cavidad triangular para $Ra= 1000$ y $Pr=0.7$: (a) Vectores de velocidad e (b) isoclinas de temperatura, en donde la gráfica de la izquierda se obtiene con el método MLPG y la gráfica de la derecha es la que reporta Basak, et al. (2007)

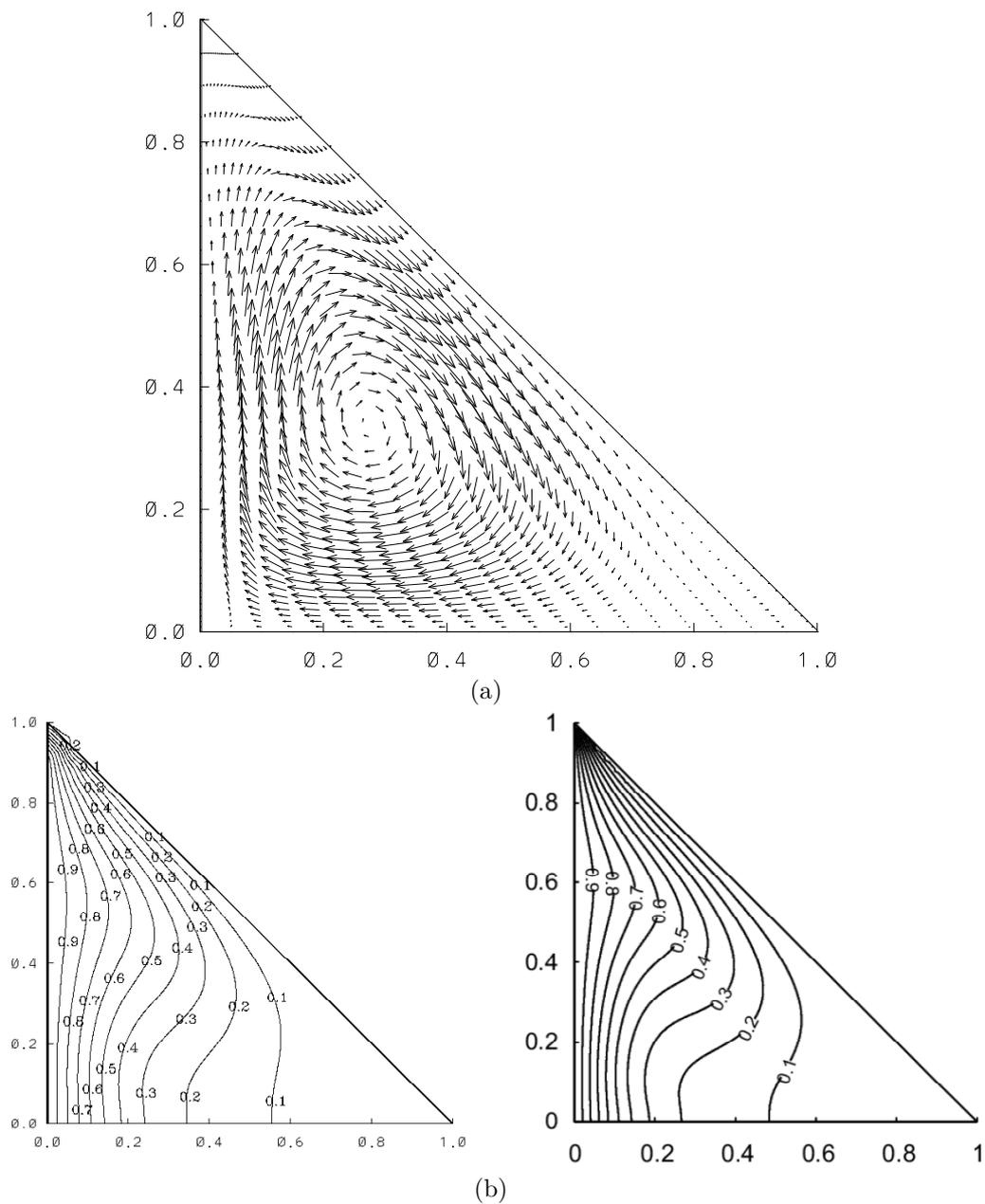


Figura 4.20: Convección natural en el interior de una cavidad triangular para $Ra=20000$ y $Pr=0.7$: (a) Vectores de velocidad e (b) isoclinas de temperatura, en donde la gráfica de la izquierda se obtiene con el método MLPG y la gráfica de la derecha es la que reporta Basak, et al. (2007)

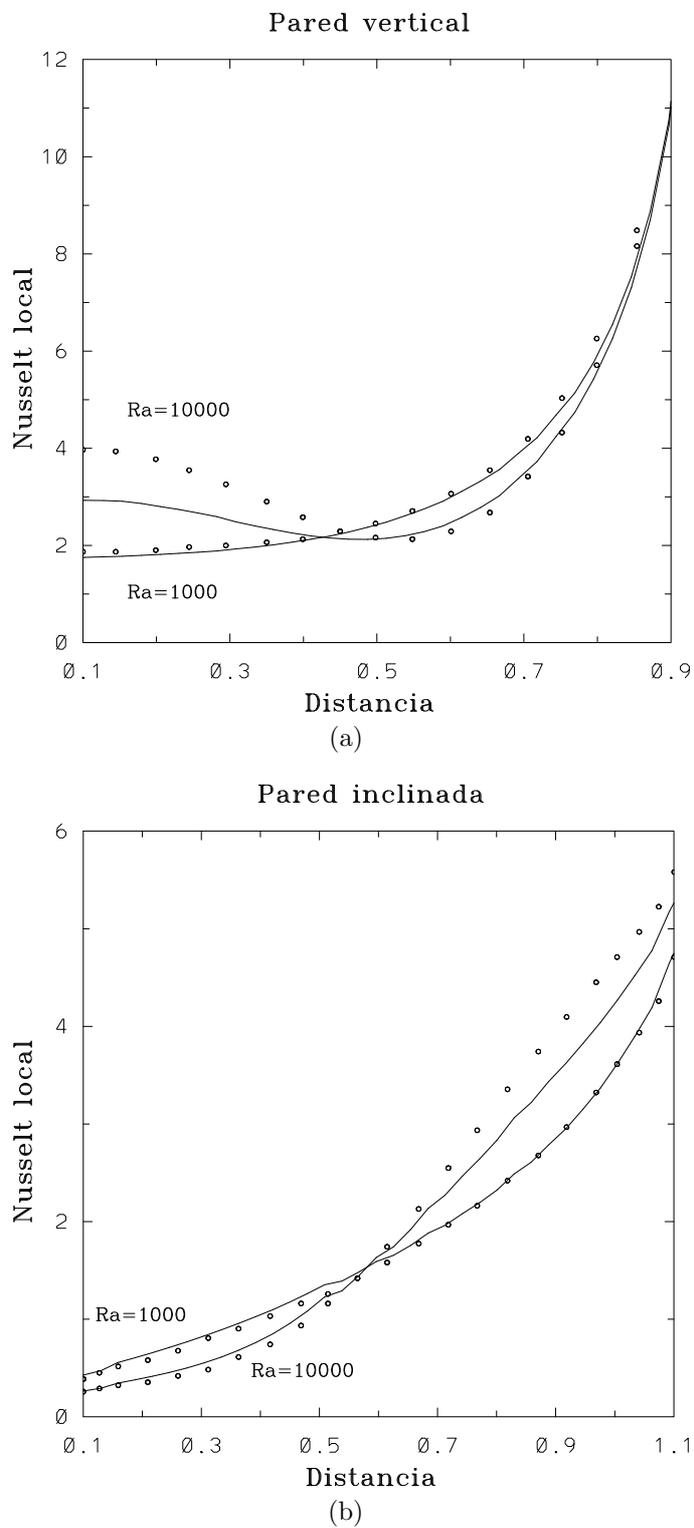


Figura 4.21: Variación del número de Nusselt local con la distancia en (a) la pared vertical y (b) en la pared inclinada para $Pr = 0.7$. La línea continua es el número de Nusselt local que se obtiene en este trabajo y los puntos corresponden a los reportados en (Basak et al., 2007).

Capítulo 5

Conclusiones

En este trabajo se ha presentado la teoría necesaria para la implementación numérica del MLPG para problemas de flujo incompresible. Para mostrar esta metodología, se utilizó la ecuación de difusión de calor en estado transitorio en tres dimensiones y se resolvieron algunos problemas de difusión pura. El problema físico fue el de conocer la distribución de temperaturas en una esfera hueca y esto nos sirvió, además, para validar el código computacional. En este caso se tiene la ventaja de haber utilizado un sistema de coordenadas cartesianas en lugar de las coordenadas esféricas que son las que comúnmente se emplean para problemas en geometrías esféricas.

Para poder trabajar con las coordenadas cartesianas, se utilizó el algoritmo del cubo-esfera para generar la posición y vecindad de los nodos dentro del dominio. Los resultados que se obtuvieron muestran que el empleo del algoritmo cubo-esfera, junto a la metodología del MLPG son capaces de dar buenos resultados cuando se quieren resolver problemas de difusión de calor en cuerpos con geometría esférica. Los resultados numéricos que se presentaron se aproximan bastante con las soluciones analíticas disponibles. El acoplamiento de estas dos metodologías nos da la posibilidad de atacar problemas de difusión de calor cuando se tienen condiciones de frontera no homogéneas, que es una cuestión complicada de abordar utilizando coordenadas esféricas, además de que el tratamiento de las condiciones de frontera es fácil y directo.

En los casos en que se simula un fluido incompresible los resultados que se presentaron fueron para bajos números de Reynolds y los campos de velocidad que se obtuvieron son bastante aproximados a los dados por la solución analítica, como fue el caso del flujo entre cilindros rotatorios concéntricos. Los coeficientes de arrastre por fricción para el flujo que pasa sobre un cilin-

dro que se obtuvieron con el MLPG, fueron comparados con una expresión previamente reportada y los resultados numéricos presentados son semejantes para propósitos prácticos. Los resultados que se presentaron para el caso de convección natural en una cavidad triangular nos permite ver otra de las ventajas de trabajar con los métodos libres de malla, sobre todo en el momento de tratar con las condiciones de frontera en geometrías complejas, como la triangular.

Por lo anterior podemos decir que algoritmo iterativo de corrección de presiones-velocidades que se presentó, funciona adecuadamente, al menos para el cálculo del campo de velocidades. Además ofrece varias ventajas ya que aprovecha la naturaleza de las funciones de interpolación MLS y no desprecia la información de la vecindad de cada nodo, por lo que rápidamente se alcanza convergencia. Este algoritmo iterativo tiene la ventaja de corregir simultáneamente el campo de velocidades y el de presiones. Sin embargo es necesario incluir en esta metodología, algún modelo que sea capaz de encontrar el campo de presiones correcto y de esta forma poder manejar números de Reynolds (de Rayleigh para convección) más altos.

El camino que queda por recorrer para presentar una teoría sólida sobre los métodos libres de malla todavía es largo. En la actualidad existen desacuerdos aún en la terminología que debe manejarse e incluso en el nombres de los métodos por la gran diversidad de métodos libres de malla que se han desarrollado. Sin embargo, las ventajas que ofrecen son evidentes ya que reducen el tiempo de cómputo al no generar el mallado computacional. Con respecto a las desventajas, la mayor es la gran cantidad de memoria que se requiere para invertir las matrices, que se espera se reduzcan en un futuro con los avances en los algoritmos numéricos para invertir las y con la ayuda del cómputo paralelo, ya que los métodos libres de malla son altamente paralelizables.

Resolver numéricamente las ecuaciones de la Dinámica de Fluidos no es una tarea fácil y se requiere más investigación sobre el empleo de los métodos libres de malla como método numérico en la solución de estas ecuaciones. Su futuro es prometedor ya que eliminan la dependencia del mallado y por lo tanto se tendrán ventajas al abordar problemas más complicados como los de flujo con fronteras móviles, flujo con superficie libre, cambio de fase, etc. que podrían incluso resolverse en tres dimensiones. El objetivo central de este trabajo fue el validar el método MLPG como herramienta para la simulación de flujos de fluidos utilizando variables primitivas para resolver las ecuaciones de la Dinámica de Fluidos, esperando que sirva como punto de partida para el estudio de problemas más complejos en el futuro.

Apéndice A

Algoritmo cubo-esfera

El algoritmo cubo-esfera es utilizado en este trabajo para generar las posiciones y la vecindad de los nodos dentro del dominio Ω . Este algoritmo se ha empleado como una poderosa herramienta para resolver EDPs en geometrías esféricas (Ronchi et al., 1996). Esto se debe a que al resolver algún problema numéricamente usando coordenadas esféricas se presentan complicaciones cuando se discretiza la superficie completa de la geometría, especialmente en los polos. Esta desventaja se conoce en la literatura como “el problema del polo”.

La idea principal de este algoritmo es la descomposición de una esfera en seis regiones idénticas obtenidas por medio de la proyección de las caras de un cubo inscrito hacia la superficie de la esfera, ver fig. A.1. Las caras laterales son las etiquetadas I-IV y las de arriba y abajo la V y VI respectivamente.

A continuación se presentan las relaciones que nos permiten transformar cualquier posición en la esfera hacia el cubo inscrito o viceversa, tal y como es desarrollado en (Nair et al., 2004). Considere un cubo con lados de longitud $2a$ inscrito en una esfera de radio $R = a\sqrt{3}$ de tal manera que los ocho vértices del cubo toquen la esfera. El cubo está orientado de tal manera que los ejes del sistema cartesiano (X, Y, Z) sean normales a sus caras (ver fig. A.2).

Las coordenadas cartesianas (x, y) son las correspondientes a la cara del cubo de tal manera que $x, y \in [-a, +a]$ y (λ, θ) son las coordenadas de

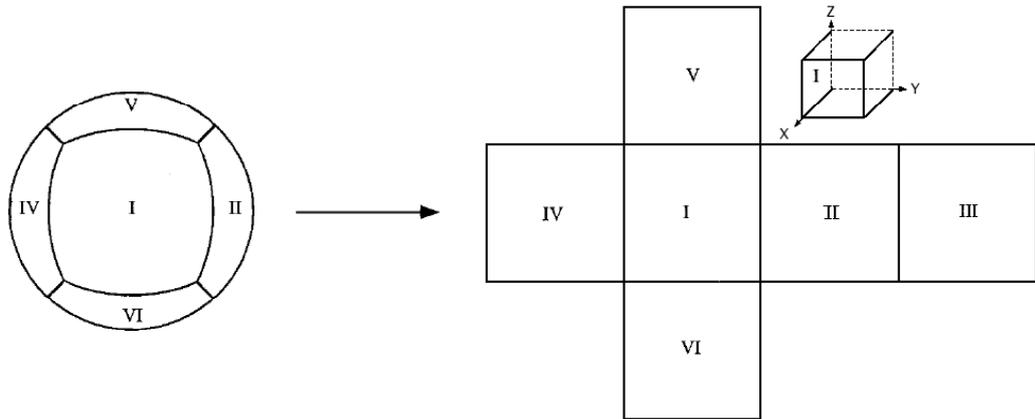


Figura A.1: Descomposición de una esfera en seis regiones, cada región se obtiene por la proyección de las caras de un cubo inscrito hacia la superficie de la esfera.

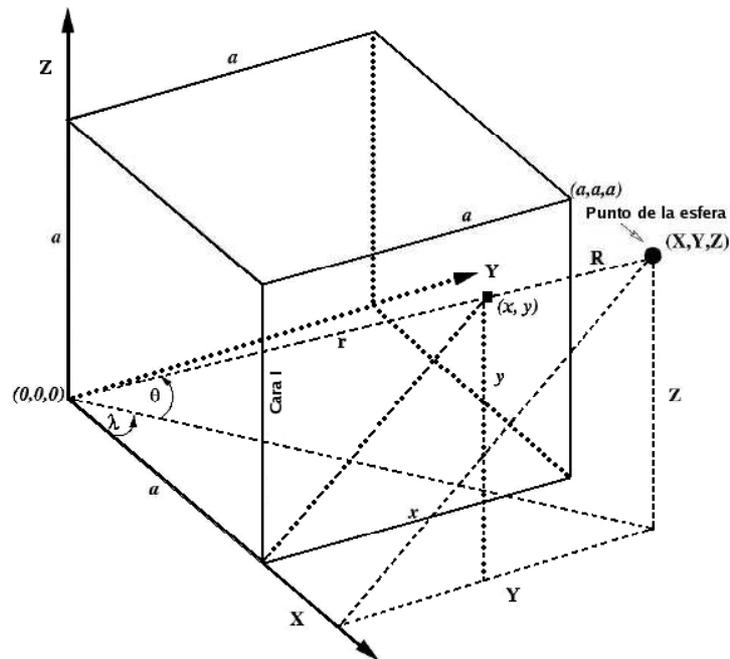


Figura A.2: Esquema para la transformación de posiciones de la esfera hacia el cubo o viceversa.

longitud y latitud respectivamente, en donde:

$$\begin{aligned}
 X &= R \cos \lambda \cos \theta \\
 Y &= R \sin \lambda \cos \theta \\
 Z &= R \sin \theta
 \end{aligned}
 \tag{A.1}$$

En la fig. A.2 se muestra solamente la cara I normal al eje X y el primer octante del cubo. Del esquema es posible obtener las siguientes relaciones trigonométricas:

$$\sin \theta = \frac{Z}{R} = Z, \quad \tan \lambda = \frac{x}{a} = \frac{Y}{X}, \quad \frac{Y}{Z} = \frac{x}{y},$$

$$r^2 = a^2 + x^2 + y^2 \quad (\text{A.2})$$

Relacionando las ecs. (A.1) con las ecs. (A.2) es posible escribir:

$$x = a \tan \lambda$$

$$y = a \tan \theta \sec \lambda \quad (\text{A.3})$$

Las ecs. (A.3) son llamadas *transformaciones gnómicas básicas* entre el cubo y su esfera circunscrita. Las leyes de transformación para las caras restantes se obtienen rotando la esfera y se presentan detalladamente en (Nair et al., 2004). En la siguiente tabla se presentan las ecuaciones que nos permiten relacionar las coordenadas cartesianas para las posiciones en la esfera (X, Y, Z) y las coordenadas cartesianas para las posiciones en la cara del cubo (x, y) , empleadas en este trabajo.

| Cara | Transformaciones básicas | Cubo-esfera | Esfera-cubo |
|------|--|--------------------------------------|---|
| I | $x = a \tan \lambda$ $y = a \tan \theta \sec \lambda$ | $(X, Y, Z) = \frac{R}{r}(a, x, y)$ | $(x, y) = a\left(\frac{Y}{X}, \frac{Z}{X}\right)$ |
| II | $x = -a \cot \lambda$ $y = a \tan \theta \csc \lambda$ | $(X, Y, Z) = \frac{R}{r}(-x, a, y)$ | $(x, y) = \left(\frac{-X}{Y}, \frac{Z}{Y}\right)$ |
| III | $x = a \tan \lambda$ $y = a \tan \theta \csc \lambda$ | $(X, Y, Z) = \frac{R}{r}(-a, -x, y)$ | $(x, y) = a\left(\frac{Y}{X}, \frac{-Z}{X}\right)$ |
| IV | $x = -a \cot \lambda$ $y = -a \tan \theta \csc \lambda$ | $(X, Y, Z) = \frac{R}{r}(x, -a, y)$ | $(x, y) = \left(\frac{-X}{Y}, \frac{-Z}{Y}\right)$ |
| V | $x = a \sin \lambda \cot \theta$ $y = -a \cos \lambda \cot \theta$ | $(X, Y, Z) = \frac{R}{r}(-y, x, a)$ | $(x, y) = a\left(\frac{Y}{Z}, \frac{-X}{Z}\right)$ |
| VI | $x = -a \sin \lambda \cot \theta$ $y = -a \cos \lambda \cot \theta$ | $(X, Y, Z) = \frac{R}{r}(y, x, -a)$ | $(x, y) = a\left(\frac{-Y}{Z}, \frac{-X}{Z}\right)$ |

Tabla A.1: Ecuaciones para la transformación de las seis caras del cubo

Apéndice B

Transformaciones de superficies curvas

Las derivadas e integrales de volumen que aparecen en la forma débil de la EDP a resolver deben calcularse en subdominios de forma arbitraria. Para ello es necesario transformar el subdominio local de cuadratura Ω_{Q_i} en términos de (x_1, x_2, x_3) en una región estandar Ω_{st} definida en términos de un nuevo sistema de coordenadas cartesianas (ξ_1, ξ_2, ξ_3) , por medio de un mapeo uno a uno:

$$x_1 = \chi_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad x_2 = \chi_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad x_3 = \chi_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \quad (\text{B.1})$$

En la región estandar Ω_{st} se llevan a cabo todas las operaciones: integración, generación de las funciones de expansión MLS, definición de las funciones de peso y derivación y luego se mapean a Ω_{Q_i} . La región estandar esta definida por un cubo de dimensiones $-1 \leq \xi_1, \xi_2, \xi_3 \leq 1$, en donde se colocan $n = 27$ nodos, como se muestra en la fig. B.1. Para las partículas que se encuentran completamente dentro del dominio físico Ω la denominada “partícula piloto” se encuentra ubicada justo en las coordenadas $(0, 0, 0)$, esto es, en el centro del cubo. Para los nodos que se encuentran en la frontera Γ se tiene el mismo arreglo y solamente cambia la ubicación de la partícula piloto moviéndose hacia alguno de los lados.

En este trabajo las funciones de mapeo χ_1, χ_2 y χ_3 se definen por medio de una representación isoparamétrica basada en las funciones de interpolación MLS, esto quiere decir que estas funciones son utilizadas para representar

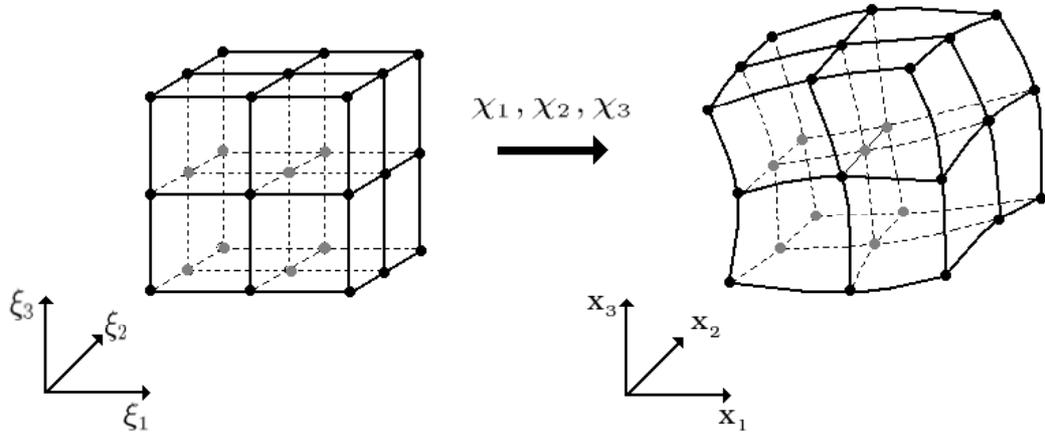


Figura B.1: Esquema que muestra el mapeo isoparamétrico. Todos los cálculos se efectúan en el sistema estándar (ξ_1, ξ_2, ξ_3) y luego se mapean a las coordenadas físicas (x_1, x_2, x_3) .

tanto a la geometría del problema (coordenadas) como a las variables desconocidas. Con esto en mente, podemos escribir:

$$u^h = \sum_{j=1}^n \Phi_j(\xi_1, \xi_2, \xi_3) u_j \quad (\text{B.2})$$

en donde u^h es la variable desconocida (temperaturas, presiones, velocidades, etc.) y u_j son los parámetros nodales de la variable. Para las coordenadas se tiene:

$$x_1 = \chi_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \sum_{j=1}^n \Phi_j(\xi_1, \xi_2, \xi_3) (x_1)_j \quad (\text{B.3})$$

$$x_2 = \chi_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \sum_{j=1}^n \Phi_j(\xi_1, \xi_2, \xi_3) (x_2)_j \quad (\text{B.4})$$

$$x_3 = \chi_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \sum_{j=1}^n \Phi_j(\xi_1, \xi_2, \xi_3) (x_3)_j \quad (\text{B.5})$$

Para evaluar las integrales de volumen sobre Ω_{Q_i} que aparecen en la forma débil se debe transformar este dominio a la región estándar Ω_{st} (Karniadakis and Sherwin, 1999):

$$\int_{\Omega_{Q_i}} u(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 = \int_{\Omega_{st}} u(\xi_1, \xi_2, \xi_3) |\mathbf{J}| d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \quad (\text{B.6})$$

en donde $|\mathbf{J}|$ es el determinante de la matriz de Jacobi, llamado *jacobiano de la transformación*. La matriz \mathbf{J} esta definida por:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \xi_3} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_3} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_3} \end{bmatrix} \quad (\text{B.7})$$

Cada uno de los términos de la matriz \mathbf{J} es evaluada usando el mapeo isoparamétrico definido anteriormente (ecs. B.3-B.5):

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial \Phi_j}{\partial \xi_l}(x_1)_j & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial \Phi_j}{\partial \xi_l}(x_2)_j & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial \Phi_j}{\partial \xi_l}(x_3)_j \\ \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial \Phi_j}{\partial \xi_l}(x_2)_j & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial \Phi_j}{\partial \xi_l}(x_2)_j & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial \Phi_j}{\partial \xi_l}(x_2)_j \\ \frac{\partial x_1}{\partial \xi_3} &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial \Phi_j}{\partial \xi_l}(x_3)_j & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_3} &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial \Phi_j}{\partial \xi_l}(x_3)_j & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_3} &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial \Phi_j}{\partial \xi_l}(x_3)_j \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Para encontrar las derivadas en el dominio de cuadratura local Ω_{Q_i} , usamos la regla de la cadena:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} &= \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \xi_3}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} &= \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \xi_3}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} &= \frac{\partial \xi_1}{\partial x_3} \frac{\partial}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_3} \frac{\partial}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \xi_3}{\partial x_3} \frac{\partial}{\partial \xi_3} \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

en donde las derivadas parciales de las coordenadas estandar (ξ_1, ξ_2, ξ_3) con respecto a las coordenadas físicas (x_1, x_2, x_3) estan dadas por:

$$\frac{\partial \xi_l}{\partial x_k} = \frac{1}{|\mathbf{J}|} \left(\frac{\partial x_{k+1}}{\partial \xi_{l+1}} \frac{\partial x_{k+2}}{\partial \xi_{l+2}} - \frac{\partial x_{k+1}}{\partial \xi_{l+2}} \frac{\partial x_{k+2}}{\partial \xi_{l+1}} \right) \quad (\text{B.10})$$

en donde los subíndices l y k son ciclicos, por ejemplo para l , $l+3$ es equivalente a l (Liseikin, 1999). La expansión de la expresión anterior nos lleva

al siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} &= \frac{1}{|\mathbf{J}|} \left(\frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} \frac{\partial x_3}{\partial \xi_3} - \frac{\partial x_2}{\partial \xi_3} \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} \right) & \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} &= -\frac{1}{|\mathbf{J}|} \left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} \frac{\partial x_3}{\partial \xi_3} - \frac{\partial x_1}{\partial \xi_3} \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} \right) \\
\frac{\partial \xi_1}{\partial x_3} &= \frac{1}{|\mathbf{J}|} \left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_3} - \frac{\partial x_1}{\partial \xi_3} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} \right) & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} &= -\frac{1}{|\mathbf{J}|} \left(\frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_3}{\partial \xi_3} - \frac{\partial x_2}{\partial \xi_3} \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} \right) \\
\frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} &= \frac{1}{|\mathbf{J}|} \left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_3}{\partial \xi_3} - \frac{\partial x_1}{\partial \xi_3} \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} \right) & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_3} &= -\frac{1}{|\mathbf{J}|} \left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_3} - \frac{\partial x_1}{\partial \xi_3} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} \right) \\
\frac{\partial \xi_3}{\partial x_1} &= \frac{1}{|\mathbf{J}|} \left(\frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} - \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} \right) & \frac{\partial \xi_3}{\partial x_2} &= -\frac{1}{|\mathbf{J}|} \left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} - \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} \right) \\
& & \frac{\partial \xi_3}{\partial x_3} &= \frac{1}{|\mathbf{J}|} \left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} - \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} \right)
\end{aligned}$$

Para propósitos de programación, la derivada de una función u puede escribirse en forma matricial de acuerdo a las ecs. (B.9) como:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial u}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial u}{\partial \xi_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \xi_3} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_3} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \mathbf{J} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u}{\partial x_3} \end{bmatrix} \quad (\text{B.11})$$

Se han presentado las ecuaciones básicas para las transformaciones de superficies curvas en tres dimensiones. Las transformaciones para el caso bi-dimensional son más sencillas que las presentadas y pueden obtenerse fácilmente. También se ha expuesto como se evalúan las derivadas y las integrales de volumen. El cálculo de las integrales de superficie que aparecen también aparecen en la forma débil de una EDP merecen un tratamiento aparte y por ello se presentan en el siguiente apéndice, sin embargo, allí se hará uso de muchas de los conceptos y expresiones que se han presentado en este apartado.

Apéndice C

Transformaciones de vectores e integrales de superficie

Para evaluar las integrales de superficie que aparecen en la forma débil de una EDP es necesario encontrar el vector normal unitario $\mathbf{n} = n_1\mathbf{i}_1 + n_2\mathbf{i}_2 + n_3\mathbf{i}_3$ a la superficie Γ_{Q_i} que encierra al subdominio local de cuadratura Ω_{Q_i} y la diferencial de superficie $d\Gamma_{Q_i}$. Cada uno de los puntos de cuadratura de GLL que se definen sobre la superficie Γ_{Q_i} de acuerdo al orden de integración, tiene un vector \mathbf{n} asociado.

Las componentes del vector \mathbf{n} estan dadas por los *vectores contravariantes* \mathbf{g}^i que son normales a las coordenadas curvas. Si hacemos uso de las funciones de mapeo introducidas en el apéndice B, tenemos:

$$\mathbf{g}^i = \frac{\partial \xi_i}{\partial x_1} \mathbf{i}_1 + \frac{\partial \xi_i}{\partial x_2} \mathbf{i}_2 + \frac{\partial \xi_i}{\partial x_3} \mathbf{i}_3 \quad (\text{C.1})$$

El desarrollo que se presenta a continuación es para expresar una diferencial de superficie $d\Gamma_{Q_i}$ en términos de las coordenadas estandar (ξ_1, ξ_2, ξ_3) . Como se mencionó en el apéndice B, el dominio de cuadratura local Ω_{Q_i} es una región en el espacio físico encerrada por seis superficies (ver fig. B.1).

En el sistema de coordenadas cartesianas del dominio físico, un cambio diferencial del vector de posición \mathbf{p} esta dado por:

$$d\mathbf{p} = dx_1\mathbf{i}_1 + dx_2\mathbf{i}_2 + dx_3\mathbf{i}_3 \quad (\text{C.2})$$

y la métrica del espacio ds^2 en términos de la expresión anterior es:

$$ds^2 = d\mathbf{p} \cdot d\mathbf{p} = dx_i dx_i \quad (\text{C.3})$$

en donde el subíndice i sigue las reglas de la sumatoria. Para las coordenadas estandar podemos escribir $d\mathbf{p}$ como:

$$d\mathbf{p} = d\xi_i \mathbf{g}_i \quad (\text{C.4})$$

en donde \mathbf{g}_i son los *vectores contravariantes* los cuales son tangentes a las superficies. De igual manera, la métrica del espacio ds^2 es:

$$ds^2 = d\mathbf{p} \cdot d\mathbf{p} = d\xi_i \mathbf{g}_i \cdot d\xi_j \mathbf{g}_j = g_{ij} d\xi_i d\xi_j \quad (\text{C.5})$$

De la ec. (C.4) se tiene:

$$\mathbf{g}_i = \frac{d\mathbf{p}}{d\xi_i} = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial \xi_i} = \frac{\partial x_j}{\partial \xi_i} \mathbf{i}_j \quad (\text{C.6})$$

entonces g_{ij} esta dado por:

$$g_{ij} = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j = \frac{\partial x_k}{\partial \xi_i} \mathbf{i}_k \cdot \frac{\partial x_l}{\partial \xi_j} \mathbf{i}_l = \frac{\partial x_k}{\partial \xi_i} \frac{\partial x_k}{\partial \xi_j} \quad (\text{C.7})$$

La matriz g_{ij} es llamada *tensor métrico covariante* del dominio físico a las coordenadas estandar. Este nos permite definir una métrica de la distancia ds con respecto a las coordenadas estandar:

$$ds = \sqrt{g_{ij} d\xi_i d\xi_j} \quad (\text{C.8})$$

Una diferencial de área $d\Gamma_{Q_i}$ en términos de las coordenadas estandar, en donde ξ_i es una constante, se obtiene por medio de:

$$d\Gamma_{Q_i} = |\mathbf{g}_j \times \mathbf{g}_k| d\xi_j d\xi_k \quad (\text{C.9})$$

donde los subíndices i, j y k son cíclicos. Sin embargo:

$$|\mathbf{g}_j \times \mathbf{g}_k|^2 = (\mathbf{g}_j \times \mathbf{g}_k) \cdot (\mathbf{g}_j \times \mathbf{g}_k)$$

usando la identidad vectorial:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$$

tenemos:

$$|\mathbf{g}_j \times \mathbf{g}_k|^2 = (\mathbf{g}_j \cdot \mathbf{g}_j)(\mathbf{g}_k \cdot \mathbf{g}_k) - (\mathbf{g}_j \cdot \mathbf{g}_k)(\mathbf{g}_k \cdot \mathbf{g}_j) = g_{jj}g_{kk} - g_{jk}^2$$

entonces podemos reescribir la ec. (C.9) como:

$$d\Gamma_{Qi} = \sqrt{g_{jj}g_{kk} - g_{jk}^2} d\xi_j d\xi_k \quad (\text{C.10})$$

en donde i, j y k son cíclicos. El elemento de superficie normal a cada dirección x_i en términos de las coordenadas estandar esta dado por:

$$d\Gamma_{Qi}^1 = \sqrt{g_{22}g_{33} - g_{23}^2} d\xi_2 d\xi_3 \quad (\text{C.11})$$

$$d\Gamma_{Qi}^2 = \sqrt{g_{33}g_{11} - g_{31}^2} d\xi_3 d\xi_1 \quad (\text{C.12})$$

$$d\Gamma_{Qi}^3 = \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} d\xi_1 d\xi_2 \quad (\text{C.13})$$

Apéndice D

Forma débil de las ecuaciones de Navier-Stokes

A continuación se presentan los desarrollos para obtener la forma débil de las ecuaciones de Navier-Stokes para el flujo de un fluido incompresible en estado estacionario bidimensional. En términos generales se seguirá el procedimiento que se utilizó con la ecuación de difusión de calor en la sección 2.3.

- Ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (\text{D.1})$$

- Ecuaciones de cantidad de movimiento:

$$\rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho g_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (\text{D.2})$$

- Ecuación de la energía:

$$\rho c_p u_i \frac{\partial T}{\partial x_i} - k \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_i} = 0 \quad (\text{D.3})$$

en donde τ_{ij} es el tensor de esfuerzos cortantes dado por:

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (\text{D.4})$$

u_i es el campo de velocidades (m/s), p es el campo de presiones (N/m²), T es el campo de temperaturas (K), ρ es la densidad del fluido (kg/m³), μ es la viscosidad dinámica (kg/m · s), k es la conductividad térmica (W/m · K), y c_p es el calor específico (J/kg · K).

D.1. Forma débil de la ecuación de continuidad

Primero se obtiene el residual pesado a partir de la ec. (D.1) y se iguala a cero (WRM, sec.2.1):

$$\int_{\Omega_Q} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} w d\Omega_Q = 0 \quad (D.5)$$

Posteriormente utilizando integración por partes es posible escribir la ec. (D.5) como:

$$\int_{\Omega_Q} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} w d\Omega_Q = \int_{\Omega_Q} \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j w) d\Omega_Q - \int_{\Omega_Q} u_j \frac{\partial w}{\partial x_j} d\Omega_Q, \quad (D.6)$$

Aplicando el teorema de Gauss:

$$\int_{\Omega_Q} \frac{\partial}{\partial x_j} \lambda d\Omega_Q = \int_{\Gamma_Q} \lambda n_j d\Gamma_Q \quad (D.7)$$

al primer miembro del lado derecho de la ec. (D.6), donde $\lambda = u_j w$, podemos escribir:

$$\int_{\Omega_Q} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} w d\Omega_Q = \int_{\Gamma_Q} u_j w n_j d\Gamma_Q - \int_{\Omega_Q} u_j \frac{\partial w}{\partial x_j} d\Omega_Q$$

donde n_j son las componentes del vector normal unitario a la superficie $d\Gamma_Q$. Finalmente la forma débil de la ecuación de continuidad está dada por:

$$\int_{\Omega_Q} u_j \frac{\partial w}{\partial x_j} d\Omega_Q - \int_{\Gamma_Q} u_j w n_j d\Gamma_Q = 0 \quad (D.8)$$

D.2. Forma débil de las ecuaciones de cantidad de movimiento

De la ec. (D.2) el residual pesado, está dado por:

$$\int_{\Omega_Q} \left(\rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \rho g_i - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \right) w d\Omega_Q = 0 \quad (D.9)$$

desarrollando:

$$\begin{aligned} \rho \int_{\Omega_Q} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} w d\Omega_Q + \int_{\Omega_Q} \frac{\partial p}{\partial x_i} w d\Omega_Q - \int_{\Omega_Q} \rho g_i w d\Omega_Q \\ - \int_{\Omega_Q} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} w d\Omega_Q = 0 \end{aligned} \quad (D.10)$$

Integrando por partes y posteriormente aplicando el teorema de Gauss (ec. D.7, donde $\lambda = p$) al término de las presiones de la ec. (D.10), se tiene:

$$\int_{\Omega_Q} \frac{\partial p}{\partial x_i} w d\Omega_Q = \int_{\Gamma_Q} p w n_i d\Gamma_Q - \int_{\Omega_Q} p \frac{\partial w}{\partial x_i} d\Omega_Q \quad (D.11)$$

Aplicando el mismo procedimiento al término que contiene el tensor de esfuerzos cortantes (donde $\lambda = \tau_{ij}$):

$$\int_{\Omega_Q} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} w d\Omega_Q = \int_{\Gamma_Q} \tau_{ij} w n_j d\Gamma_Q - \int_{\Omega_Q} \tau_{ij} \frac{\partial w}{\partial x_j} d\Omega_Q \quad (D.12)$$

Sustituyendo las ecs. (D.11)–(D.12) en (D.10), y reordenando términos, podemos escribir finalmente la forma débil de la ecuación de cantidad de movimiento:

$$\begin{aligned} & \rho \int_{\Omega_Q} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} w d\Omega_Q - \int_{\Omega_Q} p \frac{\partial w}{\partial x_i} d\Omega_Q + \int_{\Gamma_Q} p w n_i d\Gamma_Q \\ & - \rho \int_{\Omega_Q} g_i w d\Omega_Q + \int_{\Omega_Q} \tau_{ij} \frac{\partial w}{\partial x_j} d\Omega_Q - \int_{\Gamma_Q} \tau_{ij} w n_j d\Gamma_Q = 0 \end{aligned} \quad (D.13)$$

D.3. Forma débil de la ecuación de la energía

De la ec. (D.3), el residual pesado, está dado por:

$$\int_{\Omega_Q} \left(\rho c_p u_j \frac{\partial T}{\partial x_j} - k \frac{\partial^2 T}{\partial x_j \partial x_j} \right) w d\Omega_Q = 0 \quad (D.14)$$

desarrollando:

$$\rho c_p \int_{\Omega_Q} u_j \frac{\partial T}{\partial x_j} w d\Omega_Q - k \int_{\Omega_Q} \frac{\partial^2 T}{\partial x_j \partial x_j} w d\Omega_Q = 0 \quad (D.15)$$

Integrando por partes y posteriormente aplicando el teorema de Gauss (ec. D.7, donde $\lambda = \frac{\partial T}{\partial x_j} w$) al término de segundo orden de de la ec. (D.15) se tiene:

$$k \int_{\Omega_Q} \frac{\partial^2 T}{\partial x_j \partial x_j} w d\Omega_Q = k \int_{\Gamma_Q} \frac{\partial T}{\partial x_j} w n_j d\Gamma_Q - k \int_{\Omega_Q} \frac{\partial T}{\partial x_j} \frac{\partial w}{\partial x_j} d\Omega_Q \quad (D.16)$$

Sustituyendo la ec. (D.16) en la ec. (D.15), y reordenando términos, podemos escribir finalmente la forma débil de la ecuación de la energía:

$$\begin{aligned} \rho c_p \int_{\Omega_Q} u_j \frac{\partial T}{\partial x_j} w d\Omega_Q + k \int_{\Omega_Q} \frac{\partial T}{\partial x_j} \frac{\partial w}{\partial x_j} d\Omega_Q \\ - k \int_{\Gamma_Q} \frac{\partial T}{\partial x_j} w n_j d\Gamma_Q = 0 \end{aligned} \quad (\text{D.17})$$

Bibliografía

- Adcroft, A., Campin, J., Hill, C., and Marshall, J. (2004). Implementation of an Atmosphere-Ocean General Circulation Model on the Expanded Spherical Cube. *Monthly Weather Review*, 132:2845–2863.
- Ávila, R. and Pérez, A. (2008). A Pressure correction approach coupled with the MLPG method for the solution of the Navier-Stokes equations. In Griebel, M. and Schweitzer, M. A., editors, *Meshfree Methods for Partial Differential Equations IV*, Lecture Notes in Computational Science and Engineering. Springer.
- Basak, T., Roy, S., and Thirumalesha, C. (2007). Finite element analysis of natural convection in a triangular enclosure: Effect of various thermal boundary conditions. *Chemical Engineering Science*, 62:2623–2640.
- Bathe, K. and Wilson, E. (1976). *Numerical Methods in Finite Element Analysis*. Prentice Hall.
- Bejan, A. (1995). *Convection Heat Transfer*. Jhon Wiley & Sons, Inc., Second Edition.
- Belytschko, T., Krongauz, Y., Organ, D., Fleming, M., and Krysl, P. (1996). Meshless Methods: An Overview and Recent Developments. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 139:3–47.
- Cervantes, J. (1999). *Fundamentos de Transferencia de Calor*. Ediciones Científicas Universitarias.
- Currie, I. (2002). *Fundamental Mechanics of Fluids*. CRC Press, Third Edition.
- Flack, R. (1980). The Experimental Measurement of Natural Convection Heat Transfer in Triangular Enclosures Heated or Cooled from Below. *Journal of Heat Transfer*, 102:770–772.

- Fries, T. and Matthies, H. (2004). *Classification and Overview of Meshfree Methods*. Scientific Computing.
- Gerrard, G. (1978). The wakes of cylindrical bluff bodies at Low Reynolds Number. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 288:351–382.
- Haese, P. and Teubner, M. (2002). Heat exchange in an attic space. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 45:4925–4936.
- Karniadakis, G. and Sherwin, S. (1999). *Spectral/hp Element Methods for CFD*. Oxford University Press.
- Kent, E., Asmaz, E., and Ozerbay, S. (2007). Laminar natural convection in right triangular enclosures. *Heat Mass Transfer*, 44:487–200.
- Khan, W., Culham, J., and Yovanovich, M. (2005). Fluid Flow around and Heat Transfer from an Infinite Circular Cylinder. *Journal of Heat Transfer*, 127:785–791.
- Lancaster, P. and Salkauskas, K. (1981). Surfaces Generated by Moving Least Squares Methods. *Mathematics of Computation*, 37:141–158.
- Li, M. and Tang, T. (1996). Steady Viscous Flow in a Triangular Cavity by Efficient Numerical Techniques. *Computers Math. Applic.*, 31:55–65.
- Liang, J. and Li, F. (2007). Simulation of heat transfer in hollow-glass-bead-filled polypropylene composites by finite element method. *Polymer Testing*, 26:419–424.
- Lin, H. and Atluri, S. (2001). The Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Method for Solving Incompressible Navier-Stokes Equations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2:117–142.
- Liseikin, V. D. (1999). *Grid Generation Methods*. Springer.
- Liu, G. (2004). *Mesh Free Methods: Moving beyond the Finite Element Method*. CRC Press.
- Muñoz, J., González-Casanova, P., and Rodríguez, G. (2005). Métodos Libres de Malla para Ecuaciones Diferenciales Parciales Evolutivas. Technical Report CCC-05-001, Coordinación de Ciencias Computacionales INAOE, Puebla, México.

- Nair, R., Thomas, S., and Loft, R. (2004). A Discontinuous Galerkin Transport Scheme on the Cubed Sphere. *Monthly Weather Review*, 133:814–828.
- Osizik, M. (1993). *Heat Conduction*. Jhon Wiley & Sons.
- Patankar, S. (1980). *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. Taylor & Francis.
- Pérez, A. and Ávila, R. (2007). A MLPG method for the solution of the nonsteady, three-dimensional heat diffusion equation in a spherical annulus.
- Poulikakos, D. and Bejan, A. (1983a). Natural Convection Experiments in a Triangular Enclosure. *Journal of Heat Transfer*, 105:652–655.
- Poulikakos, D. and Bejan, A. (1983b). The fluid dynamics of an attic space. *J. Fluid Mech.*, 131:251–269.
- Pérez, A. and Ávila, R. (2008). Application of Meshless Local Petrov-Galerkin Method for the solution of Heat Diffusion and Natural Convection Problems. *En preparación*, 1:1–20.
- Ribbens, C. and Watson, L. T. (1994). Steady Viscous Flow in a Triangular Cavity. *Journal of Computational Physics*, 112:173–181.
- Ronchi, C., Iacono, R., and Paolucci, P. (1996). The “Cubed Sphere”: A New Method for the Solution of Partial Differential Equations in Spherical Geometry. *Journal of Computational Physics*, 124:93–114.
- Sterk, M., Robic, B., and Trobec, R. (2005). Mesh Free Method Applied to the Diffusion Equation. *Parallel Numerics*, 05:57–66.
- Taneda, S. (1956). Experimental Investigation of the Wakes behind Cylinders and plates at Low Reynolds Numbers. *Journal of the Physical Society of Japan*, 11:302–307.
- Virsedá, P. and Pinazo, J. (1998). Heat conduction in multilayer spherical products by transfer functions. *Int. J. Refrig.*, 21:285–294.
- White, F. M. (2005). *Viscous Fluid Flow*. McGraw-Hill, Inc., Third Edition.
- Wu, Y., Liu, G., and Gu, Y. T. (2005). Application of Meshless Local Petrov Galerkin (MLPG) Approach to Simulation of Incompressible Flow. *Numerical Heat Transfer, Part B*, 48:459–475.

- Zhang, X., Kwon, K., and Youn, S. (2005). The least-squares meshfree method for the steady incompressible viscous flow. *Journal of Computational Physics*, 206:182–207.

Lista de símbolos

Alfabeto Español

| | |
|--------------------------------|---|
| d_{max} | parámetro de suavizado [m] |
| h | coeficiente de transferencia de calor [W/m ² ·K] |
| k | conductividad térmica [W/m·K] |
| N | número total de nodos |
| \mathbf{n} | vector normal unitario [] |
| p | campo de presiones [N/m ²] |
| p' | corrección al campo de presiones [N/m ²] |
| \dot{Q} | fuelle de calor [W/m ²] |
| \bar{q} | flujo de calor por unidad de superficie [W/m ²] |
| \mathbf{T} | vector de temperaturas desconocidas [K] |
| \bar{T} | campo de temperaturas dado [K] |
| T | temperatura [K] |
| T_0 | campo de temperaturas en $t = 0$ [K] |
| t | tiempo [s] |
| $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ | campo de velocidades [m/s] |
| u'_1, u'_2, u'_3 | correcciones al campo de velocidades [m/s] |
| $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ | coordenadas espaciales [m] |

Símbolos Griegos

| | |
|-----------------------|---|
| α | difusividad térmica [m ² /s] |
| β | coeficiente de expansión volumétrica [1/K] |
| ρ | densidad del fluido [kg/m ³] |
| ν | viscosidad cinemática [m ² /s] |
| μ | viscosidad dinámica [N·s/m ²] |
| ξ_1, ξ_2, ξ_3 | coordenadas cartesianas en la región estandar [m] |

Superíndices

| | |
|-----|------------------------------------|
| ' | corrección de una variable |
| · | derivada temporal |
| h | aproximación de una función |
| T | transpuesta de una matriz o vector |

Subíndices

| | |
|---|---------------------------------------|
| i | nodo piloto, renglón de una matriz |
| j | nodos vecinos, columnas de una matriz |
| $(\)_{,k} = \partial(\)/\partial x_k$ | derivación espacial |

Números Adimensionales

| | |
|--------------------------|--|
| $\overline{\text{Nu}}_i$ | Número de Nusselt promedio en la pared inclinada |
| Nu_i | Número de Nusselt local en la pared inclinada |
| $\overline{\text{Nu}}_v$ | Número de Nusselt promedio en la pared vertical |
| Nu_v | Número de Nusselt local en la pared vertical |
| Pr | Número de Prandtl |
| Ra | Número de Rayleigh |
| Re | Número de Reynolds |

Abreviaturas

| | |
|------|-----------------------------------|
| DFC | Dinámica de Fluidos Computacional |
| EDP | Ecuación Diferencial Parcial |
| GLL | Gauss-Lobatto-Legendre |
| MDF | Método de las Diferencias Finitas |
| MEF | Método del Elemento Finito |
| MVF | Método del Volumen Finito |
| MLPG | Meshless Local Petrov-Galerkin |
| MLS | Moving Least Squares |
| WRM | Weighted Residual Method |

CURRICULUM VITAE

Apolinar Pérez López

e-mail: apolinar_perez@yahoo.com.mx

Fecha de nacimiento: 02/09/1983

Lugar de nacimiento: La Trinitaria, Chiapas, México

Estudios

- Maestro en Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México, 2008
Área de estudio: Ingeniería Mecánica (Termofluidos)
Tópico de tesis: Simulación numérica de flujo incompresible usando métodos libres de malla
- Ingeniero Mecánico, Instituto Tecnológico de Tuxtla Gutiérrez, 2004

Participación en conferencias

- Simposio “Los métodos numéricos y computacionales” en Ciudad de México, México. Mayo de 2008
- Simposio “Investigación y desarrollo tecnológico en la Facultad de Ingeniería de la UNAM” en Ciudad de México, México. Noviembre de 2007
- XIII Congreso de la División de Fluidos y Plasmas, Sociedad Mexicana de Física en Boca del Río, Veracruz, México. Octubre de 2007
- Meshfree Methods for Partial Differential Equations en Bonn, Alemania. Septiembre de 2007

Publicaciones

- Pérez A. and Ávila, R. (2008) A MLPG method for the solution of the nonsteady, three-dimensional heat diffusion equation in a spherical annulus (en preparación)
- Ávila, R. and Pérez, A. (2008). A pressure correction approach coupled with the MLPG method for the solution of the Navier-Stokes equations. In Griebel, M. and Schweitzer, M.A. editors, *Meshfree Methods for Partial Differential Equations IV*, Lecture Notes in Computational Science and Engineering, Springer (Aceptado).

México, D.F., mayo de 2008