

## Capítulo 3

# Análisis del sistema péndulo-carro-balancín

El sistema consta de un péndulo invertido colocado sobre un balancín, el cual se puede dividir en dos partes. La primera consta del balancín, en donde, se pretende que al mover el carro por medio del motor, el balancín llegue a su punto de equilibrio inestable en lazo abierto. La segunda parte del sistema es el péndulo invertido, el cual mediante el motor del carro, debe llegar a su punto de equilibrio inestable en lazo abierto, es decir, cuando la barra del péndulo se encuentra en posición vertical respecto a su base.

El sistema con el cual se trabaja es un sistema electromecánico subactuado, esto significa que posee menos entradas de control que grados de libertad. Únicamente se cuenta con un actuador (motor) y tres sensores (potenciómetros) que se encargan de medir la posición traslacional y las posiciones angulares. Además del sistema físico, para este trabajo son necesarios un sistema de cómputo que se encarga del control, y una tarjeta de adquisición que sirve para la lectura y escritura de datos.

### 3.1. Parámetros del sistema

La mayoría de los valores constantes del sistema se encuentran indicados en los manuales [16] [17], los cuales son utilizados para los modelos matemáticos. Existen otros valores que se determinan de forma experimental en la sección 3.2, en la tabla 3.1 se encuentra la lista de los valores obtenidos de los manuales

Otro parámetro que se utiliza es la aceleración gravitacional  $g$ , la cual depende de la altura en la que se realiza el experimento. Para este trabajo se considera  $g = 9.78 \frac{m}{s^2}$ .

## 24CAPÍTULO 3. ANÁLISIS DEL SISTEMA PÉNDULO-CARRO-BALANCÍN

masa del carro	$0.52Kg$
masa del balancín	$3.3Kg$
masa de la barra	$0.209Kg$
centro de gravedad de la barra	$0.32m$
inercia del balancín	$0.427Kg\,m^2$
altura de la base del balancín al riel	$0.14m$
altura de la base del balancín al punto de pivote	$0.06m$
resistencia en la armadura del motor	$2.6\Omega$
relación de transformación en la caja de engranes	$3.71\frac{N}{A}$
radio del engrane del motor	$0.00635m$
constante de par del motor	$0.00767\frac{Nm}{A}$

Cuadro 3.1: Valores nominales de los parámetros del sistema

### 3.2. Identificación de parámetros y caracterización del sistema

#### 3.2.1. Coeficiente de fricción estática y coeficiente de fricción viscosa

Para los modelos matemáticos, se desprecian todas las fuerzas de fricción, excepto la fricción viscosa entre el carro y el riel. Para obtener el coeficiente de fricción entre estos dos cuerpos, se descompone la fuerza  $mg$  de la figura 3.1, para después encontrar las ecuaciones que describen el comportamiento de las fuerzas en cada eje

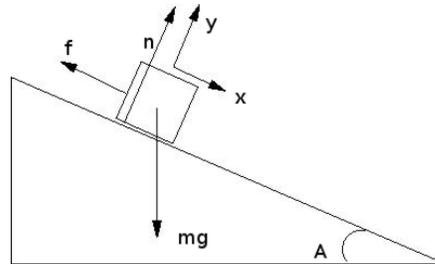


Figura 3.1: Plano inclinado con una masa  $m$

$$\Sigma_x = 0 = mg \sin A - f,$$

$$\Sigma_y = 0 = mg \cos A - n,$$

de donde se despeja a  $f$  y a  $n$  respectivamente,

$$f = mg \sin A,$$

### 3.2. IDENTIFICACIÓN DE PARÁMETROS Y CARACTERIZACIÓN DEL SISTEMA 25

$$n = mg \cos A.$$

Al relacionar las dos ecuaciones anteriores

$$f = \frac{n}{\cos A} \sin A = n \tan A,$$

al variar el ángulo de inclinación  $A$  hasta que la fuerza de fricción estática tome su valor máximo

$$\mu_s n = n \tan A,$$

$$\mu_s = \tan A.$$

Haciendo lo anterior se encuentra el coeficiente de fricción estática de un bloque sobre un plano inclinado; se puede aplicar por su similitud, al carro sobre el balancín. De esta manera, se inclina el balancín hasta que el carro comienza a moverse, considerando este punto como aquel en el que la fuerza de fricción estática alcanza su mayor valor. El resultado es útil para tener un mayor conocimiento de los efectos de la fricción en el sistema.

Las gráficas de los experimentos se muestran en la figuras 3.2 y 3.3, de las cuales se pueden obtener los coeficientes de fricción estática

$$\mu_{s1} = \tan(0.2249) = 0.23,$$

$$\mu_{s2} = \tan(0.2114) = 0.21,$$

$$\mu_{s3} = \tan(0.2244) = 0.23,$$

$$\mu_{s4} = \tan(0.2233) = 0.23,$$

Al obtener un promedio entre los cuatro experimentos

$$\frac{\mu_{s1} + \mu_{s2} + \mu_{s3} + \mu_{s4}}{4} = 0.225,$$

por lo que se tiene un coeficiente de fricción estática aproximado

$$\mu_s = 0.225.$$

Además de los resultados obtenidos, se consulta el experimento realizado en [11] para encontrar el coeficiente de fricción viscosa del sistema, dicho experimento consiste en utilizar un método de mínimos cuadrados resolviendo la ecuación

$$\hat{\Theta} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T Y$$

donde

$\hat{\Theta}$  es el vector que incluye el coeficiente de fricción viscosa

$\Phi$  es la matriz formada por el vector de  $n - 1$  muestras de velocidad y fuerza en el carro, en distintos instantes de tiempo

$Y$  es el vector de velocidades de  $n$  muestras en distintos instantes de tiempo

Los resultados experimentales de aplicar el método citado, arrojan un valor de  $b = 0.2 \frac{N \cdot \text{seg}}{m}$ , el cual es el utilizado para los modelos matemáticos realizados en esta tesis.

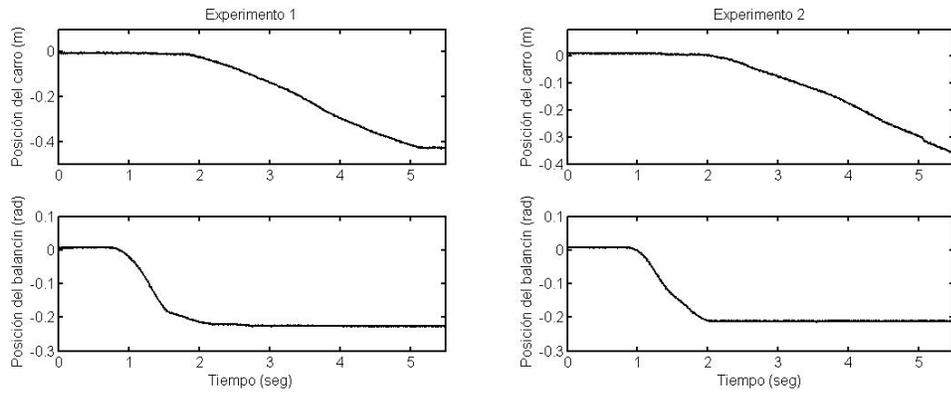


Figura 3.2: Experimentos 1 y 2 que tienen, respectivamente, coeficientes de fricción estática de 0.23 y 0.21

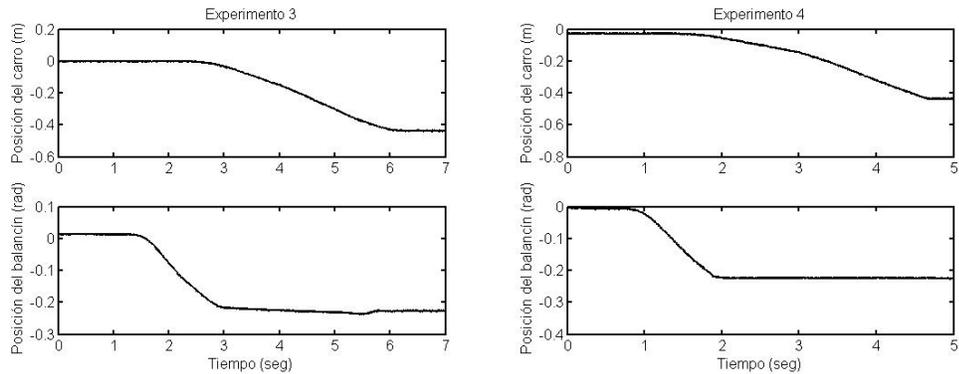


Figura 3.3: Experimentos 3 y 4 que tienen, respectivamente, coeficientes de fricción estática de 0.23 y 0.23

### 3.2.2. Acondicionamiento del motor

El motor utilizado es alimentado con corriente directa, su rango de operación debe de ser  $\pm 7.5V$ . Sin embargo, la tarjeta de adquisición que es la que alimenta al motor tiene un rango de escritura de 0 a 5V. Por otra parte la corriente que brinda no es suficiente para que el motor funcione. Por estas causas, mediante amplificadores operacionales se acondiciona la señal de la siguiente manera

1. Al voltaje enviado por la tarjeta se le restan 2.5V

### 3.2. IDENTIFICACIÓN DE PARÁMETROS Y CARACTERIZACIÓN DEL SISTEMA 27

2. Se triplica la señal obtenida de la diferencia
3. Se aumenta la corriente con un amplificador de potencia, en configuración de seguidor de voltaje.

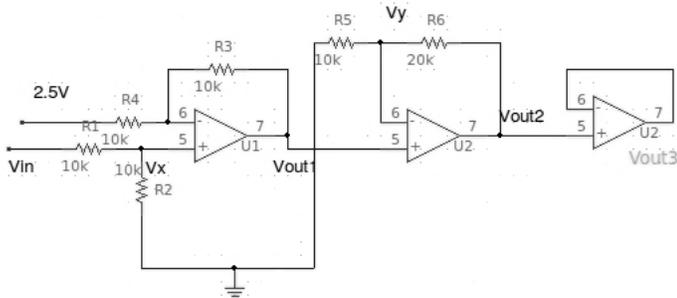


Figura 3.4: Esquema de la etapa de acondicionamiento del motor

La figura 3.4 muestra el diagrama de conexiones para el acondicionamiento del motor, la ganancia de voltaje se obtiene al hacer un análisis de corrientes

$$\frac{V_{in} - V_x}{R} = \frac{V_x}{R}, \quad (3.1)$$

$$\frac{2.5 - V_x}{R} = \frac{V_x - V_{out1}}{R}, \quad (3.2)$$

de la Ec. 3.1 se puede despejar  $V_x$

$$V_{in} - V_x = V_x,$$

$$V_{in} = 2V_x,$$

$$V_x = \frac{1}{2}V_{in},$$

al sustituir lo anterior en la Ec. 3.2

$$\frac{2.5 - \frac{1}{2}V_{in}}{R} = \frac{\frac{1}{2}V_{in} - V_{out1}}{R},$$

$$2.5 - V_{in} = -V_{out1},$$

$$V_{out1} = V_{in} - 2.5, \quad (3.3)$$

para el siguiente amplificador operacional

$$-\frac{V_y}{R} = \frac{V_y - V_{out2}}{2R}, \quad (3.4)$$

se observa que

$$V_y = V_{out1},$$

al sustituir lo anterior en la Ec. 3.4

$$\begin{aligned} -V_{out1} &= \frac{1}{2}(V_{out1} - V_{out2}), \\ \frac{1}{2}V_{out2} &= \frac{3}{2}V_{out1}, \\ V_{out2} &= 3V_{out1}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

finalmente al sustituir la Ec. 3.3 en la Ec. 3.5

$$V_{out2} = 3(V_{in} - 2.5).$$

Para el tercer amplificador, al ser un seguidor de voltaje, se tiene una relación

$$V_{out3} = V_{out2} = 3(V_{in} - 2.5).$$

El tercer amplificador incrementa la corriente sin modificar en forma alguna la señal de voltaje.

De esta forma, la tarjeta de adquisición escribe valores entre 0 y 5V, mientras que el motor es alimentado en un rango de  $\pm 7.5V$ .

### 3.2.3. Conversión par-voltaje

En los modelos de los sistemas de péndulo invertido y balancin, la variable de entrada es el par del motor, mientras que la tarjeta de adquisición, maneja voltajes; debido a lo anterior es necesario obtener una relación par-voltaje en el motor. Para el caso del modelo de péndulo-carro-balancín existe una relación que depende de la velocidad del carro y valores nominales [18, 22] que se encuentran en los manuales. Por su parte para modelar los sistemas por separado se define otra relación par-voltaje, que depende únicamente de estas variables; dicha relación se encuentra de forma experimental.

Para realizar el experimento se cuenta con un resorte de comportamiento casi lineal descrito en la siguiente tabla

Fuerza (N)	Elongación (mm)
1	5
2	9
3	15
4	20
5	24

### 3.2. IDENTIFICACIÓN DE PARÁMETROS Y CARACTERIZACIÓN DEL SISTEMA 29

De los datos se puede obtener una relación entre fuerza y elongación de  $1N$  cada  $5mm$ , sabiendo que en un resorte la fuerza es

$$F = kx,$$

se despeja la constante  $k$

$$k = \frac{F}{x} \Rightarrow k = \frac{1}{0.005},$$

$$k = 200 \frac{N}{m}.$$

El siguiente paso del experimento consiste en mantener fijo un extremo del resorte, mientras que el otro se engancha en el carro; después se le aplica un voltaje constante al motor y se observa la elongación del resorte. La siguiente tabla muestra los datos obtenidos

Voltaje (V)	Elongación (mm)	Fuerza (N)
0.5	26	5.2
1	15	3
1.5	11	2.2
2	2	0.4
3	3	0.6
3.5	9	1.8
4	1.2	2.4
4.5	2	4

Además de los datos anteriores, el motor tiene una zona muerta; es decir aunque se le aplique un voltaje distinto de cero, el par del motor no es el necesario para vencer la fricción estática del carro. Para determinar esta zona muerta, se le coloca la barra al carro (pues es la masa máxima a la que se enfrenta el motor) y se le aplican al motor voltajes cercanos a  $2.5V$ . El carro se mueve a la izquierda hasta que el valor de voltaje aplicado al motor es de  $2.16V$ , mientras que el movimiento hacia el lado derecho comienza en  $2.73V$ , entonces se considera el intervalo de zona muerta  $V \in [2.16, 2.73]$ .

Finalmente con los datos obtenidos se puede encontrar, mediante una regresión lineal, las relaciones voltaje-par del motor, las cuales se muestran en las figuras 3.5 y 3.6, y están descritas por las ecuaciones

- Para el intervalo en el que el motor gira en sentido antihorario

$$T = 3.04V - 6.5,$$

$$V = 0.3199T + 2.1136,$$

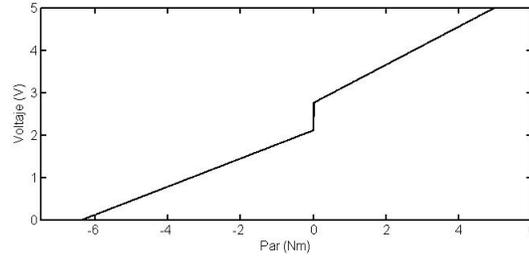


Figura 3.5: En la figura se muestra la relación par-voltaje del motor

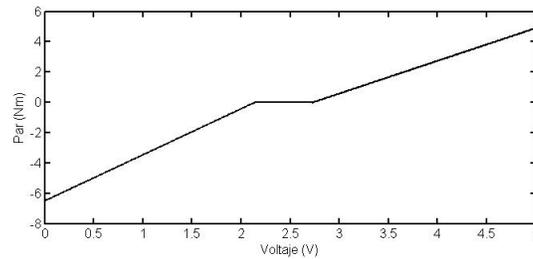


Figura 3.6: El la figura se muestra la relación voltaje-par del motor

- Para el intervalo en el que el motor gira en sentido horario

$$T = 2.16V - 5.9,$$

$$V = 0.45T + 2.76.$$

### 3.2.4. Filtros derivativos

En los modelos de los sistemas, es necesario tener conocimiento de las velocidades del carro, del péndulo o del balancín. Sin embargo, el sistema físico utilizado para este trabajo, no cuenta con sensores de velocidad. Una posible solución para este problema es derivar las señales de posición, las cuales se obtienen de los potenciómetros. No obstante, al hacer esto aumenta el ruido, teniendo como resultado una señales de velocidad ruidosas y poco precisas.

Para resolver el problema del ruido se implementan filtros derivativos pasabajas, de esta forma se deriva la señal de posición y se elimina ruido de la señal de velocidad. La frecuencia de corte de los filtros es de vital importancia, debido a que cuando se incrementa demasiado, la señal sufre un atraso que afecta las lecturas; mientras que al decrementarse puede dejar de eliminar el ruido necesario. Debido a lo anterior es importante elegir una frecuencia de corte, que elimine el suficiente ruido, sin atrasar demasiado la señal.

### 3.2. IDENTIFICACIÓN DE PARÁMETROS Y CARACTERIZACIÓN DEL SISTEMA 31

En esta tesis los filtros que se utilizan son digitales, y se incluyen en los programas de Simulink respectivos a cada controlador. La función de transferencia de estos filtros está dada por

$$G(S) = \frac{XS}{S + XS}, \quad (3.6)$$

en donde  $X$  es la frecuencia de corte del filtro en  $\frac{rad}{seg}$ .

Lo anterior se puede aproximar en tiempo discreto, con el llamado método bilineal o de Tustin, el cual es

$$S = \frac{2}{T_s} \frac{z - 1}{z + 1},$$

entonces, al aplicar el método de Tustin en la ecuación 3.6

$$G(z) = \frac{X \frac{2}{T_s} (z - 1)}{\frac{2}{T_s} (z - 1) + X(z + 1)},$$

$$G(z) = \frac{X \frac{2}{T_s} (z - 1)}{(\frac{2}{T_s} + X)z + (X - \frac{2}{T_s})},$$

al normalizar

$$numG(z) = \frac{X \frac{2}{T_s}}{X + \frac{2}{T_s}} (z - 1), \quad (3.7)$$

$$denG(z) = z + \frac{X - \frac{2}{T_s}}{X + \frac{2}{T_s}}, \quad (3.8)$$

en donde

$T_s$  es el tiempo de muestreo

$X$  es la frecuencia de corte del filtro derivativo pasabajas.

Los filtros derivativos utilizados en este trabajo, son iguales para todas las velocidades, teniendo una frecuencia de corte de  $55Hz$ . El tiempo de muestreo para los controladores lineales (LQR) es de  $8ms$ ; mientras que para los controles difusos es de  $10ms$ . Al sustituir los valores en las ecuaciones 3.7 y 3.8

$$\frac{45.0819z - 45.0819}{z - 0.6393}; T_s = 0.008,$$

$$\frac{43.1372z - 43.1372}{z - 0.5686}; T_s = 0.01.$$

### 3.3. Modelado matemático

Para el diseño de los controladores lineales es necesario el modelo de los sistemas, por lo cual es necesario modelar el balancín, el péndulo invertido y finalmente el sistema de péndulo-carro-balancín.

Para linealizar el modelo del balancín se considera que el ángulo  $\theta$ , formado por el riel y una línea paralela a la base del balancín, únicamente puede tomar valores pequeños por la configuración física del sistema. Debido a lo anterior se puede hacer una aproximación que tiene un resultado muy parecido a realizar la linealización por el método visto en 2.4.

Para el caso del modelo del péndulo invertido se puede hacer una aproximación similar a la del balancín, considerando que el ángulo  $\alpha$ , que se forma entre la vertical y la barra, únicamente puede tomar valores pequeños. El punto de equilibrio del sistema requiere que los ángulos mencionados sean cero, de esta manera se hacen las siguientes aproximaciones

$$\cos\alpha \approx 1,$$

$$\sin\alpha \approx \alpha,$$

$$\cos\theta \approx 1,$$

$$\sin\theta \approx \theta,$$

Las variables elevadas al cuadrado o productos entre variables son iguales a cero.

#### 3.3.1. Balancín

A partir de la figura 3.7 se definen las ecuaciones de las fuerzas que intervienen en el sistema

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + mh\ddot{\theta} - mx\dot{\theta}^2 - mg \sin \theta = f, \quad (3.9)$$

$$(J + mh^2 + 2mx\dot{\theta} + mx^2)\ddot{\theta} + mh\ddot{x} + bh\dot{x} - mgh \sin \theta - mgx \cos \theta - Msgc \sin \theta = 0, \quad (3.10)$$

al despejar a  $\ddot{x}$  en la Ec. 3.9

$$\ddot{x} = \frac{f}{m} - h\ddot{\theta} + x\dot{\theta}^2 + g \sin \theta - \frac{b\dot{x}}{m}, \quad (3.11)$$

obteniendo a  $\ddot{\theta}$  en la Ec. 3.10:

$$\ddot{\theta} = \frac{mgh \sin \theta + mgx \cos \theta + Msgc \sin \theta - mh\ddot{x} - bh\dot{x}}{J + mh^2 + 2mx\dot{\theta} + mx^2}, \quad (3.12)$$

sustituyendo la Ec. 3.11 en la Ec. 3.12:

$$\ddot{\theta} = \frac{mgx \cos \theta + Msgc \sin \theta - fh - mh\dot{\theta}^2}{J + 2mx\dot{\theta} + mx^2},$$

finalmente se sustituye  $\ddot{\theta}$  en la Ec. 3.11 para obtener  $\ddot{x}$

$$\ddot{x} = \frac{f}{m} + x\dot{\theta}^2 + g \sin \theta - \frac{b\dot{x}}{m} - \frac{hmgx \cos \theta + hMsgc \sin \theta - fh^2 - mh^2x\dot{\theta}^2}{J + 2mx\dot{\theta} + mx^2},$$

al linealizar y agrupar los términos

$$\ddot{\theta} = \frac{mgx + Msgc\theta - hf}{J},$$

$$\ddot{x} = \frac{(mh^2 + J)f}{Jm} - \frac{g(Mshc - J)\theta + mghx}{J} - \frac{b\dot{x}}{m},$$

representando al sistema en variables de estado

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{mgh}{J} & -\frac{g(Mshc - J)}{J} & -\frac{b}{m} & 0 \\ \frac{mg}{J} & \frac{Msgc}{J} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \theta \\ \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{mh^2 + J}{Jm} \\ -\frac{h}{J} \end{bmatrix} f,$$

donde

$x$  y  $\dot{x}$  son la posición y velocidad del carro respectivamente

$\theta$  y  $\dot{\theta}$  son la posición y velocidad angular del balancín respectivamente

$f$  es la fuerza aplicada al carro

$c$  es la distancia del punto de pivote del balancín al riel

$h$  es la distancia de la base del balancín al riel

$J$  es la inercia del balancín

$Ms$  es la masa del balancín más el riel

$m$  es la masa del carro

$g$  es la aceleración gravitacional

$b$  es el coeficiente de fricción viscosa entre el carro y el riel.

Al sustituir los valores se tiene como resultado las siguientes matrices

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1.6674 & 9.1451 & -0.3846 & 0 \\ 11.9101 & 4.5350 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \theta \\ \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.9690 \\ -0.3279 \end{bmatrix} f.$$

donde la matriz  $A$  tiene los valores característicos  $\lambda(A) = \{3.4447, -0.1234 + 3.0698i, -0.1234 - 3.0698i, -3.5825\}$ , de lo anterior es claro que el sistema en tiempo continuo es inestable.

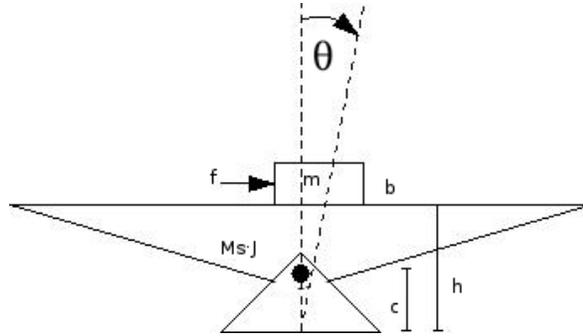


Figura 3.7: Balancín

Cuando se discretiza el sistema se tienen las nuevas matrices  $Ad$  y  $Bd$  para el tiempo discreto. Una vez utilizado el método de retenedor de orden cero (ZOH), el resultado es el sistema en tiempo discreto

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9999 & 0 & 0.008 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0.008 \\ -0.0133 & 0.0731 & 0.9969 & 0 \\ 0.0953 & 0.0363 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \theta \\ \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.0157 \\ -0.0026 \end{bmatrix} f,$$

en donde la matriz  $Ad$  tiene los valores característicos  $\lambda(Ad) = \{1.0279, 0.9987 + 0.0245i, 0.9987 - 0.0245i, 0.9717\}$ . Con estos valores característicos se sabe que el sistema es inestable, ya que al menos uno se encuentra fuera del círculo de radio unitario.

El siguiente paso es comprobar la controlabilidad del sistema linealizado, para lo cual se obtiene el rango de la matriz de controlabilidad

$$\text{rango}(q_{bal}) = 4,$$

con lo que se comprueba que el sistema linealizado es controlable.

Para el diseño de un control difuso es necesario hacer un análisis empírico del sistema. Se sabe que cuando el carro permanece a la izquierda del centro del riel (referencia), entonces el balancín tiende a caer hacia el lado izquierdo; lo mismo ocurre cuando el carro se encuentra a la derecha de la referencia. Por otra parte, entre más alejado se encuentre el carro del centro del riel, más rápido cae el balancín. En caso de que éste se encuentre inclinado, basta con mover el carro al lado contrario para hacer contrapeso y lograr que el balancín pueda equilibrarse.

En resumen el carro debe estar al lado contrario de la inclinación del balancín, cuando éste logre estar centrado, entonces el carro deberá mantenerse en el centro del riel para que el balancín no pierda el equilibrio.

### 3.3.2. Péndulo

Esta parte del sistema se modela mediante ecuaciones diferenciales, que representan a las fuerzas involucradas en la dinámica de la barra y del carro, obtenidas a partir de la figura 3.8

$$\frac{1}{3}mL^2\ddot{\alpha} = VL \sin \alpha - HL \cos \alpha, \quad (3.13)$$

$$V - mg = -mL(\ddot{\alpha} \sin \alpha + \dot{\alpha}^2 \cos \alpha), \quad (3.14)$$

$$H - m\ddot{x} = mL(\ddot{\alpha} \cos \alpha - \dot{\alpha}^2 \sin \alpha), \quad (3.15)$$

donde tanto  $H$  como  $V$  son fuerzas que se presentan en el punto de pivote; estas fuerzas son producto del movimiento del carro y son, respectivamente, la fuerza en el eje horizontal y la fuerza en el eje vertical.

La suma de fuerzas de interés, que actúan sobre el carro es

$$f = M\ddot{x} + b\dot{x} + H. \quad (3.16)$$

De la Ec. 3.15 se despeja a la fuerza  $H$  y al sustituirla en la Ec. 3.16

$$f = (M + m)\ddot{x} + mL(\ddot{\alpha} \cos \alpha - \dot{\alpha}^2 \sin \alpha) + b\dot{x}. \quad (3.17)$$

De la Ec. 3.17 se encuentra una relación entre  $\ddot{x}$  y  $\ddot{\alpha}$  descrita por

$$\ddot{x} = \frac{f + mL(\dot{\alpha}^2 \sin \alpha - \ddot{\alpha} \cos \alpha) - b\dot{x}}{M + m},$$

se despeja a la fuerza  $V$  de la Ec. 3.14, y ya conociendo a la fuerza  $H$ , se pueden sustituir estas dos fuerzas en la Ec. 3.13

$$\frac{1}{3}mL^2\ddot{\alpha} = (mg - mL(\ddot{\alpha} \sin \alpha + \dot{\alpha}^2 \cos \alpha))L \sin \alpha - (mL(\ddot{\alpha} \cos \alpha - \dot{\alpha}^2 \sin \alpha) + m\ddot{x})L \cos \alpha, \quad (3.18)$$

de la Ec. 3.18 se agrupan términos para finalmente encontrar otra relación entre  $\ddot{x}$  y  $\ddot{\alpha}$

$$\ddot{\alpha} = \frac{3}{4} \frac{g \sin \alpha}{L} - \frac{3}{4} \frac{\ddot{x} \cos \alpha}{L},$$

de las relaciones obtenidas entre  $\ddot{x}$  y  $\ddot{\alpha}$  es posible despejar ambas variables:

$$\ddot{x} = \frac{f - b\dot{x} + mL\dot{\alpha}^2 \sin \alpha - \frac{3}{4}mg \cos \alpha \sin \alpha}{(M + m) - \frac{3}{4}m \cos^2 \alpha},$$

$$\ddot{\alpha} = \frac{(M + m)g \sin \alpha - \cos \alpha (f + mL\dot{\alpha}^2 \sin \alpha - b\dot{x})}{\frac{4}{3}L(M + m) - Lm \cos^2 \alpha}.$$

36CAPÍTULO 3. ANÁLISIS DEL SISTEMA PÉNDULO-CARRO-BALANCÍN

Al linealizar y agrupar términos,

$$\ddot{x} = \frac{f - b\dot{x} - \frac{3}{4}mg\alpha}{(M+m) - \frac{3}{4}m},$$

$$\ddot{\alpha} = \frac{(M+m)g\alpha - f + b\dot{x}}{\frac{4}{3}L(M+m) - Lm}.$$

Si se representa al sistema en variables de estado

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\alpha} \\ \ddot{x} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{\frac{3}{4}mg}{(M+m) - \frac{3}{4}m} & -\frac{b}{(M+m) - \frac{3}{4}m} & 0 \\ 0 & \frac{(M+m)g}{\frac{4}{3}L(M+m) - Lm} & \frac{b}{\frac{4}{3}L(M+m) - Lm} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \alpha \\ \dot{x} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{(M+m) - \frac{3}{4}m} \\ -\frac{\frac{4}{3}L(M+m) - Lm}{\frac{4}{3}L(M+m) - Lm} \end{bmatrix} f,$$

donde

$x$  y  $\dot{x}$  son la posición y velocidad del carro, respectivamente

$\alpha$  y  $\dot{\alpha}$  son la posición y velocidad angular del péndulo, respectivamente

$f$  es la fuerza aplicada al carro

$L$  es la distancia del pivote al centro de masa de la barra

$m$  es la masa de la barra

$M$  es la masa del carro

$g$  es la aceleración gravitacional

$b$  es el coeficiente de fricción viscosa entre el carro y el riel.

Al sustituir los valores

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\alpha} \\ \ddot{x} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2.9213 & -0.3463 & 0 \\ 0 & 29.7687 & 0.8117 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \alpha \\ \dot{x} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.7316 \\ -4.0584 \end{bmatrix} f.$$

donde la matriz  $A$  tiene los valores característicos  $\lambda(A) = \{0, 5.4182, -5.4981, -0.2665\}$ , de lo anterior es claro que el sistema en tiempo continuo es inestable.

Al discretizar el sistema se obtienen las nuevas matrices  $Ad$  y  $Bd$  para el tiempo discreto. Una vez utilizado el método de retenedor de orden cero (ZOH), el sistema resultante en tiempo discreto es

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\alpha} \\ \ddot{x} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.008 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0.008 \\ 0 & -0.0233 & 0.9972 & 0 \\ 0 & 0.2381 & 0.0065 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \alpha \\ \dot{x} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.0138 \\ -0.0324 \end{bmatrix} f.$$

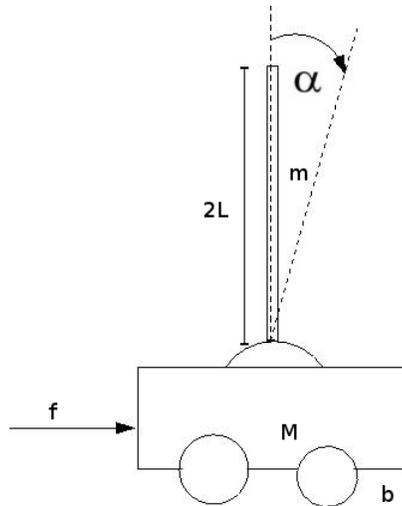


Figura 3.8: Péndulo invertido

Para comprobar la estabilidad del sistema se observan los valores propios de la matriz  $Ad$ , los cuales son  $\lambda(Ad) = \{1, 1.0443, 0.9570, 0.9979\}$ . A partir de estos valores característicos se determina que este sistema es inestable en lazo abierto, pues uno de los valores característicos está fuera del círculo de radio unitario.

De la misma forma que ocurre con el balancín, es importante comprobar la controlabilidad del sistema mediante el rango de la matriz de controlabilidad

$$\text{rango}(q_{bal}) = 4,$$

con lo que se comprueba que el sistema linealizado es controlable.

Al igual que ocurre con el balancín, es necesario hacer un análisis empírico del sistema. Cuando el péndulo se encuentra cayendo hay que compensar el movimiento, moviendo al carro rápidamente hacia el mismo lado hacia el cual cae aquél, de esta manera se evita que la barra caiga totalmente. No obstante, hacer que el carro converja a la referencia es un problema distinto al caso del balancín, pues se tiene como prioridad mantener en posición vertical a la barra, aún cuando esto signifique alejar al carro del centro del riel.

### 3.3.3. Sistema péndulo-carro-balancín

Al unir los dos sistemas ya modelados anteriormente, se obtiene el sistema de la figura 3.9, el cual tiene más estados y cuenta con una sola entrada al igual que los dos anteriores; además presenta fenómenos no lineales. El modelo

### 38CAPÍTULO 3. ANÁLISIS DEL SISTEMA PÉNDULO-CARRO-BALANCÍN

matemático se obtiene a partir de los modelos expuestos en [18, 22], haciendo las adecuaciones necesarias para una sola masa.

$$\begin{bmatrix} f \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix}}_M \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}}_C \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{bmatrix}}_D \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} - \underbrace{\begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix}}_G,$$

donde

$$\begin{aligned} m_{11} &= m_c + m_p & c_{23} &= \frac{c_{22}}{2} \\ m_{12} &= m_{21} = hm_{11} + m_p L \cos \alpha & c_{32} &= m_p L \dot{\theta} (h \sin \alpha + z \cos \alpha) \\ m_{13} &= m_{31} = m_p L \cos \alpha & d_{11} &= b \\ m_{22} &= m_p (h^2 + z^2 + L^2 + 2L(h \cos \alpha - z \sin \alpha)) + m_c (h^2 + z^2) + J & d_n &= 0 \forall n \neq 11 \\ m_{23} &= m_{32} = m_p L (L + h \cos \alpha - z \sin \alpha) & g_1 &= -g(m_c + m_p) \sin \theta \\ m_{33} &= m_p L^2 & g_2 &= -g(zm_c + m_p(z + L \sin(\theta + \alpha))) + m_s c \sin \theta \\ c_{11} &= c_{31} = c_{33} = 0 & g_3 &= -gm_c L \sin(\theta + \alpha) \\ c_{12} &= m_{12} & q_1 &= z \\ c_{13} &= m_{13} & q_2 &= \theta \\ c_{21} &= 2\dot{\theta}z(m_p + m_c) & q_3 &= \alpha \\ c_{22} &= -2Lm_p(\dot{\alpha}(h \sin \alpha + z \cos \alpha) + \dot{z} \sin \alpha) \end{aligned}$$

Para este modelo se describe la relación voltaje-par en el motor, mediante algunos valores nominales de éste, teniendo como resultado la relación

$$f = \frac{K_m K_g}{Rr} v - \frac{K_m^2 K_g^2}{Rr^2} \dot{z},$$

donde

$z$  y  $\dot{z}$  son la posición y velocidad del carro, respectivamente

$\theta$  y  $\dot{\theta}$  son la posición y velocidad angular del balancín, respectivamente

$\alpha$  y  $\dot{\alpha}$  son la posición y velocidad angular del péndulo, respectivamente

$L$  es la distancia del pivote al centro de masa de la barra

$m$  es la masa de la barra

$c$  es la distancia del punto de pivote del balancín al riel

$h$  es la distancia de la base del balancín al riel

$J$  es la inercia del balancín

$Ms$  es la masa del balancín más el riel

$m$  es la masa del carro

$g$  es la aceleración gravitacional

$b$  es el coeficiente de fricción viscosa entre el carro y el riel

$R$  es la resistencia en la armadura del motor

$Km$  es la constante del par del motor

$r$  es el radio del engrane del motor

$Kg$  es la relación de transformación en la caja de engranes del motor

$f$  es la fuerza aplicada al carro

$v$  es el voltaje aplicado al motor.

Para poder expresar el modelo en variables de estado es necesario despejar el vector  $\ddot{q}$ , lo cual resulta en la ecuación

$$\ddot{q} = -M^{-1}D\dot{q} - M^{-1}C\dot{q} - M^{-1}G + M^{-1}\tau. \quad (3.19)$$

El sistema en variables de estado tiene la forma

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \ddot{q} \end{bmatrix},$$

de la ecuación 3.19 se obtiene el sistema no lineal representado en variables de estado

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{z} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \\ f_1(z, \theta, \alpha, \dot{z}, \dot{\theta}, \dot{\alpha}, f) \\ f_2(z, \theta, \alpha, \dot{z}, \dot{\theta}, \dot{\alpha}, f) \\ f_3(z, \theta, \alpha, \dot{z}, \dot{\theta}, \dot{\alpha}, f) \end{bmatrix}.$$

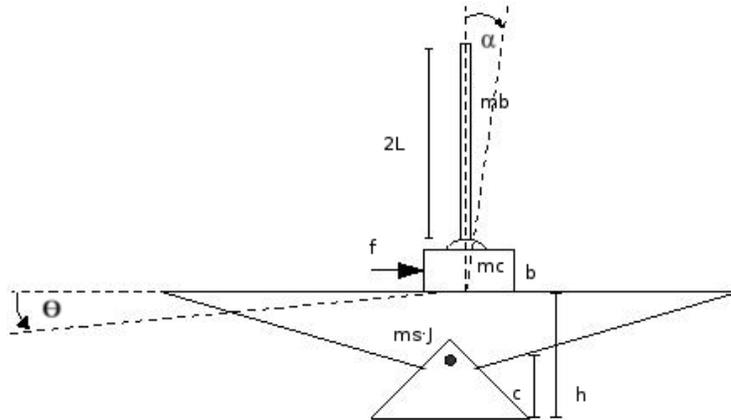


Figura 3.9: Sistema péndulo-carro-balancín

Una vez linealizado el sistema mediante los jacobianos, se sustituyen los valores y se obtiene el sistema lineal

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \\ \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2.4049 & 9.3893 & -5.1159 & -15.601 & -0.3517 & -0.1449 \\ 17.178 & 2.7904 & 5.6435 & 2.5979 & 0.0586 & 0.0241 \\ -17.178 & -2.7904 & 38.437 & 45.02 & 1.0148 & 0.4182 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \theta \\ \alpha \\ \dot{x} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3.3936 \\ -0.5651 \\ -9.7927 \end{bmatrix} v.$$

la matriz  $A$  tiene los valores propios  $\lambda(A) = \{-15.8796, 5.6590, 2.3267, -1.0578 + 2.4095i, -1.0578 - 2.4095i, -5.1148\}$ , por lo cual el sistema en tiempo continuo es inestable.

Al discretizar el sistema se obtienen las matrices  $Ad$  y  $Bd$  para el tiempo discreto. Una vez utilizado el método de retenedor de orden cero (ZOH), se tiene

como resultado el sistema en tiempo discreto.

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \\ \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.007 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0.008 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.001 & 0 & 0.008 \\ -0.0182 & 0.0706 & -0.0387 & 0.8824 & -0.0024 & -0.0012 \\ 0.1372 & 0.0231 & 0.0448 & 0.0201 & 1 & 0 \\ -0.1405 & -0.0093 & 0.3012 & 0.3388 & 0.0076 & 1.0044 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \theta \\ \alpha \\ \dot{x} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.0256 \\ -0.0043 \\ -0.0738 \end{bmatrix} v.$$

Para comprobar la estabilidad del sistema se observan los valores propios de la matriz  $Ad$ , los cuales son  $\lambda(Ad) = \{0.8807, 1.0463, 1.0188, 0.9914 + 0.0191i, 0.9914 - 0.0191i, 0.9599\}$ . De dichos valores propios, se determina que el sistema es inestable en lazo abierto, debido a que dos de sus polos se encuentran fuera del círculo de radio unitario.

Para determinar la controlabilidad de este sistema, se verifica el rango de la matriz de controlabilidad, teniendo como resultado

$$rango(\varrho_{completo}) = 6,$$

con lo que se comprueba que el sistema linealizado es controlable.

Al analizar este sistema, se observa un caso particular que limita en forma física a éste. Cuando el balancín tiene una inclinación mayor o igual a  $4^\circ$ , en sentido horario o antihorario, la barra del péndulo tiende a caer hacia el lado inclinado. Para compensar la caída de la barra, el carro se mueve hacia el mismo lado hacia el cual está inclinado el balancín, provocando que éste se incline aún más. Lo anterior ocurre hasta que el balancín no se puede inclinar más y el carro se topa con el fin del riel, haciendo que la barra del péndulo caiga.

Debido a lo anterior se debe evitar una inclinación pronunciada del balancín.

### 3.4. Tarjeta de Adquisición

La tarjeta utilizada para adquisición y escritura de datos es la USB-6009 de *National Instruments*, la cual es una tarjeta de bajo costo que tiene las siguientes características de interés

- 12 puertos digitales entrada/salida
- 8 puertos analógicos de entrada, los cuales equivalen a 8 canales de adquisición en *Single-Ended Mode* o 4 canales de adquisición en modo diferencial, entre cada puerto de entrada y la tierra interna de la tarjeta puede existir una diferencia de potencial máxima de  $\pm 10V$

### 42CAPÍTULO 3. ANÁLISIS DEL SISTEMA PÉNDULO-CARRO-BALANCÍN

- 2 puertos analógicos de salida con un rango de trabajo de  $\pm 5V$
- una referencia a  $5V$  y otra de  $2.5V$
- una tasa máxima de muestreo de 42 mil muestras/segundo, cuando se trabaja con más de un canal, esto equivale a un tiempo de muestreo de aproximadamente  $0.02ms$ , este tiempo depende del programa utilizado para la comunicación con la tarjeta,
- convertidores D/A de 12 bits y un convertidor A/D de 14 bits
- una precisión en las entradas analógicas de  $14.7V$  para el caso del *Single-Ended Mode* y de  $7.73V$  para el caso del modo diferencial manejando un rango de  $\pm 10V$  que es el utilizado
- una frecuencia de actualización de  $150Hz$  para las salidas analógicas (esta frecuencia depende del software), lo cual equivale a un tiempo de escritura de  $6.67ms$
- un ruido nominal en las entradas analógicas de  $0.73mVrms$  en el caso del *Single-Ended Mode* y de  $0.37mVrms$  para el modo diferencial.

De los datos anteriores se determina que el menor tiempo de muestreo es de aproximadamente  $7ms$  ya que se realizan las operaciones de lectura y escritura, además resulta conveniente utilizar el modo diferencial ya que presenta un menor ruido y una mayor precisión.

La interfaz que utiliza para este trabajo es *Simulink*, debido a que *LabView* (software de *National Instruments*) requiere de un tiempo de muestreo mayor para ejecutar las operaciones necesarias. Por su parte Visual Basic con el cual se trabajó en [11], brinda un mejor tiempo de muestreo, pero presenta la desventaja de no poder mostrar los datos adquiridos en tiempo real.