

Capítulo 4

Diseño de controladores

A lo largo de este capítulo, se diseñan los controladores para cada sistema. Además se muestran los resultados obtenidos a partir de simulaciones realizadas, con el fin de conocer el desempeño de cada controlador diseñado.

4.1. Diseño de controladores lineales

Los controladores se diseñan con base en los modelos en tiempo discreto obtenidos en las secciones 3.3.1, 3.3.2 y 3.3.3, respectivamente.

4.1.1. Balancín

Al diseñar el control lineal del balancín, se considera que el estado de mayor importancia es la posición de éste. El criterio para elegir las matrices Q y R , es el siguiente

- el gasto energético no debe ser demasiado alto, pues puede provocar oscilaciones al momento de implementar físicamente
- los estados deben converger en el origen
- el tiempo de asentamiento debe ser el menor posible
- el controlador debe ser capaz de estabilizar al sistema cuando las condiciones iniciales tengan valores físicamente posibles.

Tras varias simulaciones, se proponen las matrices que mejor cumplen con el criterio, que son

$$Q = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix},$$
$$R = 0.25,$$

con las cuales se tiene una matriz P que resuelve la ecuación algebraica de Ricatti en tiempo discreto

$$P = \begin{bmatrix} 0.7655 & 1.5093 & 0.0931 & 0.3951 \\ 1.5093 & 4.1311 & 0.1824 & 0.8697 \\ 0.0931 & 0.1824 & 0.0118 & 0.0481 \\ 0.3951 & 0.8697 & 0.0481 & 0.2176 \end{bmatrix} \times 10^5,$$

después de sustituir valores en la ecuación 2.3, se obtiene la matriz de ganancias

$$k = [160.1983 \quad 218.2106 \quad 22.4401 \quad 69.3094].$$

Con la matriz k se forma el sistema $(A - Bk)$, que tiene valores característicos $\lambda(A - Bk) = \{0.9581 + 0.0542i, 0.9581 - 0.0542i, 0.951 + 0.0134i, 0.951 - 0.0134i\}$. Al estar contenidos dentro del círculo de radio unitario, los valores propios son estables; con esto se asegura que el comportamiento del sistema realimentado es estable. Finalmente la señal de control está dada por

$$u = - [160.1983 \quad 218.2106 \quad 22.4401 \quad 69.3094] \begin{bmatrix} x \\ \theta \\ \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}.$$

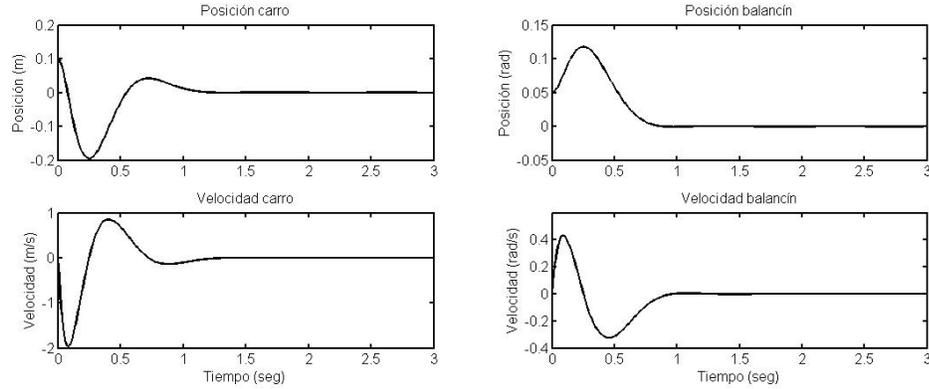


Figura 4.1: Estados del sistema masa-balancín (simulación)

Se realiza una simulación para comprobar que los estados convergen en el origen. Para la simulación se emplea el modelo no lineal, se eligen condiciones iniciales distintas de cero y se realimenta con la matriz de ganancias k . Las condiciones iniciales elegidas son

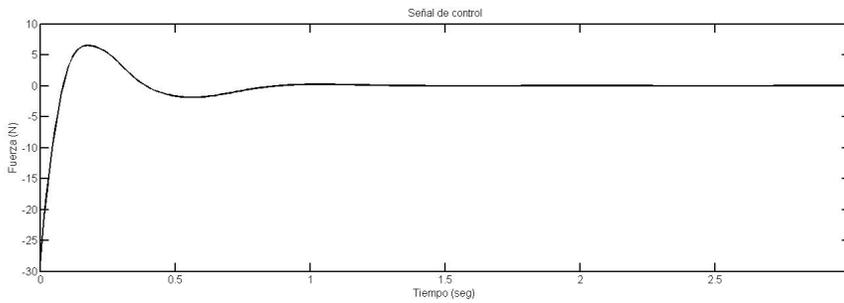


Figura 4.2: Señal de control para el sistema masa-blancín (simulación)

$$x_0 = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.05 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Los resultados de simulación se pueden observar en las figuras 4.1 y 4.2.

A partir de la simulación, se puede concluir que el controlador logra estabilizar al sistema sin sobrepasar sus límites físicos. Además, éste converge, aún cuando las condiciones iniciales son lejanas al punto de equilibrio, por lo que la región para la cual es válida la linealización es adecuada para la implementación física del controlador.

4.1.2. Péndulo

Para el caso del péndulo invertido, el punto de equilibrio es el origen. El estado de mayor interés es la posición de la barra del péndulo, por lo que en la matriz Q se le da un mayor peso a este estado. Siguiendo el mismo criterio que se utilizó para el blancín, se realizan varias simulaciones y se proponen las matrices que mejor cumplen con el criterio, siendo

$$Q = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix},$$

$$R = 0.25.$$

Con estas matrices se encuentra una solución a la ecuación algebraica de

Ricatti en tiempo discreto

$$P = \begin{bmatrix} 1.2526 & 1.1187 & 0.6163 & 0.2785 \\ 1.1187 & 3.2035 & 0.838 & 0.4379 \\ 0.6163 & 0.838 & 0.5003 & 0.2291 \\ 0.2785 & 0.4379 & 0.2291 & 0.1121 \end{bmatrix} \times 10^4,$$

después de sustituir valores en la ecuación 2.3 se obtiene una matriz de ganancias

$$k = [-17.2075 \quad -90.9856 \quad -17.4431 \quad -15.7617],$$

con la matriz k se forma el sistema $(A - Bk)$, el cual tiene como valores característicos, $\lambda(A - Bk) = \{0.8197, 0.9196, 0.9895 + 0.009i, 0.9895 - 0.009i\}$. Todos los valores propios del nuevo sistema, están ubicados dentro del radio de círculo unitario, por lo que el sistema se vuelve estable en lazo cerrado.

La señal de control es entonces

$$u = - \begin{bmatrix} -17.2075 & -90.9856 & -17.4431 & -15.7617 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \alpha \\ \dot{x} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix}.$$

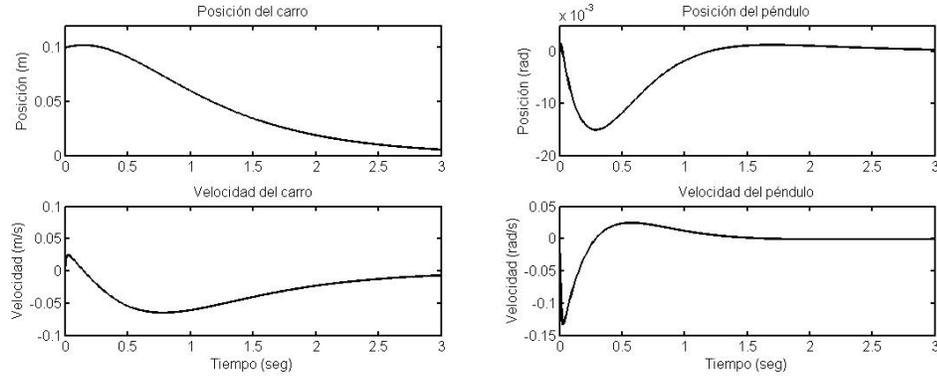


Figura 4.3: La figura muestra el comportamiento de los estados del sistema de péndulo invertido (simulación)

Se realiza una simulación empleando el modelo no lineal y con condiciones iniciales distintas de cero

$$x_0 = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.002 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

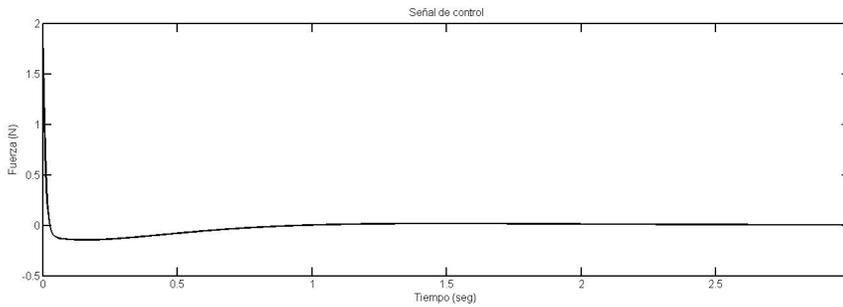


Figura 4.4: Señal de control para el péndulo invertido (simulación)

Los resultados de la simulación muestran que los estado convergen al punto deseado. Lo anterior se logra sin sobrepasar los límites físicos del sistema, además las condiciones iniciales propuestas son lejanas al punto de equilibrio, pudiéndose observar que la región en la cual es válida el modelo lineal, es adecuada para la implementación física del controlador diseñado.

Las figuras 4.3 y 4.4, muestran el resultado de cerrar el lazo de control, realimentando al sistema con la matriz de ganancias k .

Se puede concluir, que el controlador diseñado cumple con el objetivo de estabilizar al sistema; aún cuando éste se aleje del punto de equilibrio. Los estados no sobrepasan los límites físicos del sistema.

4.1.3. Sistema péndulo-carro-balancín

Para el caso del sistema de péndulo-carro-balancín las tres posiciones manejadas son de suma importancia. Si la barra del péndulo llega a desviarse $\pm 0.122rad$ respecto al eje vertical, el motor no tiene el par suficiente para levantarla de nuevo, por tanto a este estado es al que mayor peso se le otorga en la matriz Q . Cuando la masa está lejos del origen, provoca una inclinación en el balancín, dicha inclinación hace que la barra tienda a caer; cuando la barra tiende a caer hace que el carro cambie su posición para compensar la caída. Lo anterior provoca que las posiciones del carro y del balancín tengan pesos similares a las de la barra en la matriz Q .

Para este sistema se sigue utilizando el criterio de los diseños anteriores para la selección de las matrices; después de realizar varias simulaciones se proponen Q y R con los siguientes valores

$$Q = \begin{bmatrix} 700 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 600 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 300 \end{bmatrix},$$

$$R = 0.1,$$

con las cuales se tiene una matriz P que resuelve la ecuación algebraica de Ricatti en tiempo discreto

$$P = \begin{bmatrix} 9.9316 & 7.3674 & 4.6111 & 2.2585 & 2.5147 & 0.6478 \\ 7.3674 & 6.2569 & 3.592 & 1.7784 & 2.0146 & 0.5091 \\ 4.6111 & 3.592 & 2.527 & 1.1427 & 1.187 & 0.3349 \\ 2.2585 & 1.7784 & 1.1427 & 0.5713 & 0.5814 & 0.1674 \\ 2.5147 & 2.0146 & 1.187 & 0.5814 & 0.6815 & 0.165 \\ 0.6478 & 0.5091 & 0.3349 & 0.1674 & 0.165 & 0.0498 \end{bmatrix} \times 10^5,$$

después de sustituir valores en la ecuación 2.3 se obtiene una matriz de ganancias

$$k = [-346.483 \quad -309.2034 \quad -256.3999 \quad -105.42 \quad -95.5249 \quad 40.3441],$$

con la cual se forma un sistema $(A-Bk)$, el cual tiene como valores propios $\lambda(A-Bk) = \{0.2725, 0.9902+0.0319i, 0.9902-0.0319i, 0.955, 0.9275+0.0046i, 0.9275-0.0046i\}$, a partir de estos valores característicos se puede determinar que el sistema en lazo cerrado, realimentado con la matriz de ganancias k se vuelve estable.

La señal de control del sistema está dada por

$$u = - \begin{bmatrix} -346.483 & -309.2034 & -256.3999 & -105.42 & -95.5249 & 40.3441 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \theta \\ \alpha \\ \dot{x} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix}.$$

En las figuras 4.5 y 4.6 se muestra el resultado de una simulación del control previamente diseñado, para unas condiciones iniciales cercanas al punto de equilibrio, las cuales están dadas por

$$x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.02 \\ 0.03 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

en donde se puede observar, que los estados del sistema convergen al punto deseado, sin superar los límites físicos de aquél. Por lo que el sistema se vuelve estable en lazo cerrado, al realimentarse con la matriz de ganancias k . Sin embargo, para implementar el controlador en forma física, es necesario realizar simulaciones en donde las condiciones iniciales se encuentren más alejadas del punto de equilibrio. Debido a esto se eligen las siguientes condiciones iniciales

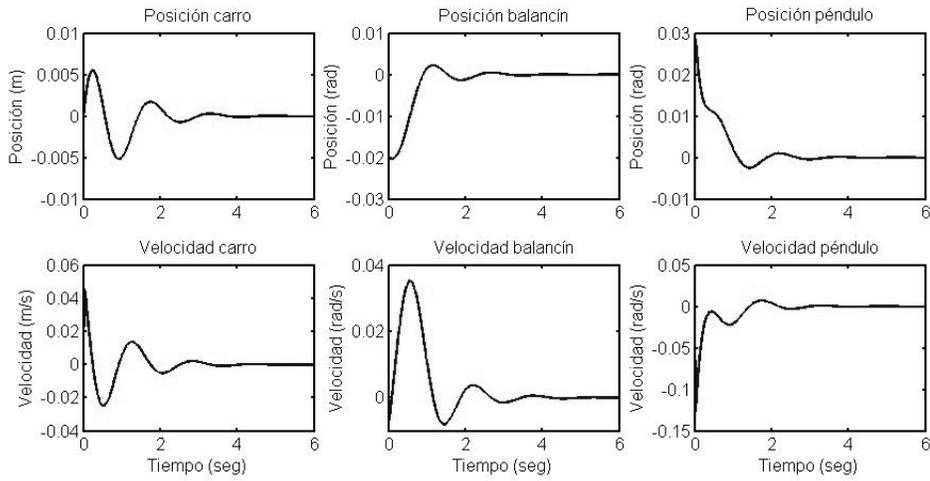


Figura 4.5: La figura muestra el comportamiento de los estados del sistema péndulo-carro-balancín (simulación)

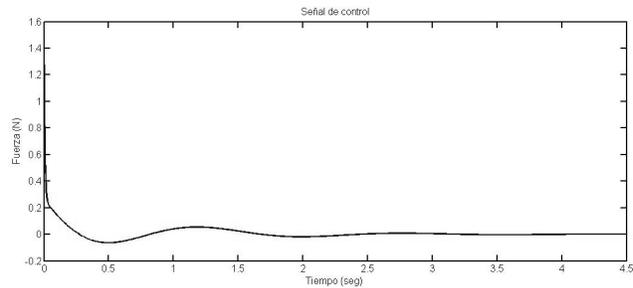


Figura 4.6: Señal de control para el sistema péndulo-carro-balancín (simulación)

$$x_0 = \begin{bmatrix} 0.08 \\ -0.02 \\ 0.03 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Se puede apreciar en la figura 4.7, que el sistema no logra estabilizarse dentro de los límites físicos de éste. Lo que significa que el modelo lineal, no es válido

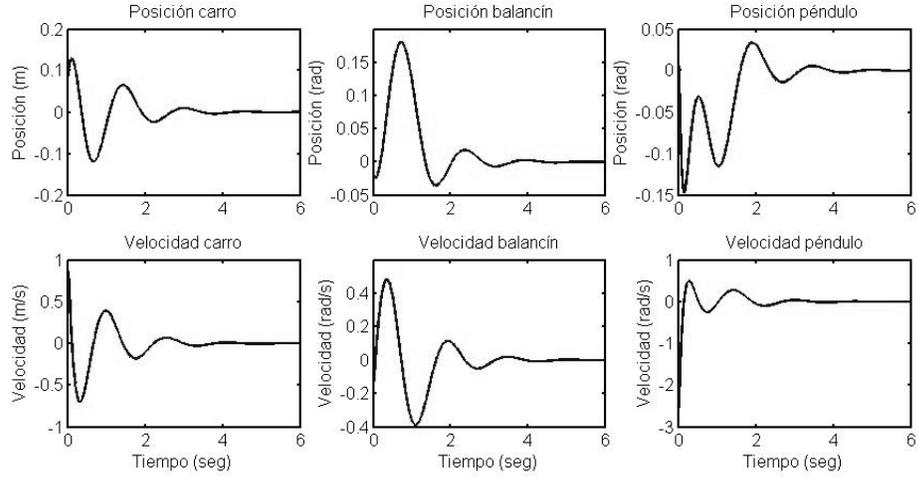


Figura 4.7: La figura muestra el comportamiento de los estados del sistema péndulo-carro-balancín con la masa lejos del punto de equilibrio. Simulación

para la toda la región en la que el sistema opera en forma física. De esta forma se concluye que el controlador diseñado, no es adecuado para implementarse de manera física.

4.2. Diseño de controladores no lineales

Los controladores se diseñan con base en el análisis realizado en las secciones 3.3.1, 3.3.2 y 3.3.3 respectivamente.

4.2.1. Control difuso para el balancín

El control difuso para el balancín, se basa en el análisis empírico realizado en la sección 3.3.1. Se consideran tres entradas, las cuales son la posición del carro, la posición del balancín y la velocidad de éste. Se elige un sistema de tipo Singleton debido a que la desfusión es simple y requiere menor tiempo de procesamiento, por su parte se eligen funciones de membresía triangulares y cuadradas ya que con estas se pueden evitar traslapes no deseados. Cada variable de entrada cuenta con cinco conjuntos difusos que la describen, esto con la finalidad de tener un control suave. Las etiquetas lingüísticas son

c centro

i, d ligeramente izquierda o derecha, respectivamente

mi, md muy a la izquierda o derecha, respectivamente.

Si se propone una regla para cada posible combinación de conjuntos difusos, se tiene un total de 125 reglas. No obstante, sintonizar todas esas reglas eleva la complejidad del problema. Debido a lo anterior se descartan situaciones que físicamente no son posibles, por ejemplo, cuando el balancín y el carro se ubican en un mismo lado, no es posible que la velocidad del balancín se dirija al lado contrario. Haciendo esa suposición, únicamente son necesarias 75 reglas. No obstante, con el fin de tener un controlador más suave se agregan casos generales en los que la velocidad del balancín tiene un sentido contrario a la posición del carro. De esta manera se forma un sistema de 83 reglas difusas; en donde para cada una se propone un valor de salida constante.

A diferencia de los controladores lineales previamente diseñados, la salida del controlador difuso, es una señal de voltaje y no de fuerza o par. Dicha señal de voltaje se encuentra dentro del rango de operación de la tarjeta de adquisición, y además considera la zona muerta del motor. De esta forma se evita tener que hacer modificaciones a la señal de salida del sistema difuso para implementarse en forma física.

La tabla 4.9 muestra las 83 reglas difusas que conforman al controlador, así como su respectivo valor de salida.

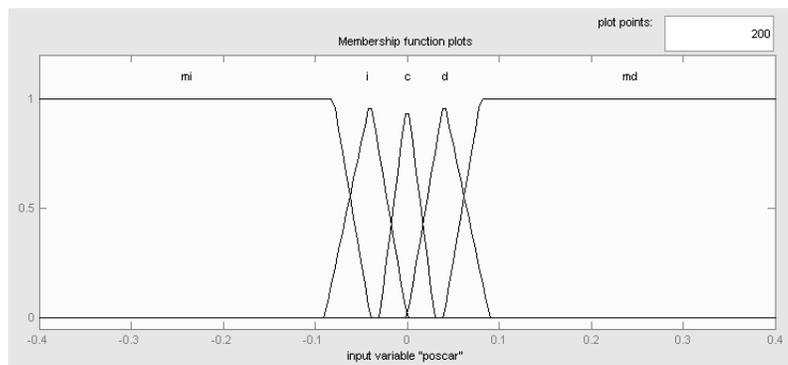


Figura 4.8: Conjunto difuso para la posición del carro

Pos. Carro	Pos. Bal.	Vel. Bal.	Salida	Pos. Carro	Pos. Bal.	Vel. Bal.	Salida
mi	-	d	3.25	e	e	d	1.75
mi	-	md	3	e	e	md	1
i	-	d	2.5	e	d	mi	3.25
i	-	md	2	e	d	i	3
mi	mi	m	5.25	e	d	e	1.25
mi	mi	i	5	e	d	d	1
mi	mi	e	4.5	e	d	md	0.75
mi	i	m	5	e	md	mi	3
mi	i	i	4.75	e	md	i	2.5
mi	i	e	4.5	e	md	e	1
mi	e	m	4.75	e	md	d	0.75
mi	e	i	4.5	e	md	md	0.5
mi	e	e	4.25	d	mi	e	3.85
mi	d	m	4.5	d	mi	d	2
mi	d	i	4.25	d	mi	md	1.5
mi	d	e	4	d	i	e	1.75
mi	md	m	4.25	d	i	d	1.5
mi	md	i	4	d	i	md	1
mi	md	e	2.5	d	e	e	1.5
i	mi	m	4.75	d	e	d	1.25
i	mi	i	4.5	d	e	md	0.75
i	mi	e	4.25	d	d	e	1.25
i	i	m	4.5	d	d	d	1
i	i	i	4	d	d	md	0.5
i	i	e	3.75	d	md	e	0.75
i	e	m	4.25	d	md	d	0.5
i	e	i	3.75	d	md	md	0.25
i	e	e	3.5	md	mi	e	2.5
i	d	m	4	md	mi	d	1
i	d	i	3.5	md	mi	md	0.75
i	d	e	3.25	md	i	e	1
i	md	m	3.5	md	i	d	0.75
i	md	i	3	md	i	md	0.5
i	md	e	1.15	md	e	e	0.75
e	mi	m	4.5	md	e	d	0.5
e	mi	i	4.25	md	e	md	0.25
e	mi	e	4	md	d	e	0.5
e	mi	d	2.5	md	d	d	0.25
e	mi	md	2	md	d	md	0
e	i	m	4.25	md	md	e	0.5
e	i	i	4	md	md	d	0
e	i	e	3.75	md	md	md	-0.25
e	i	d	2	d	-	mi	3
e	i	md	1.75	d	-	i	2.5
e	e	m	4	md	-	mi	2
e	e	i	3.25	md	-	i	1.75
e	e	e	2.5	-	-	-	-

Figura 4.9: Reglas difusas para el sistema de masa-balancín

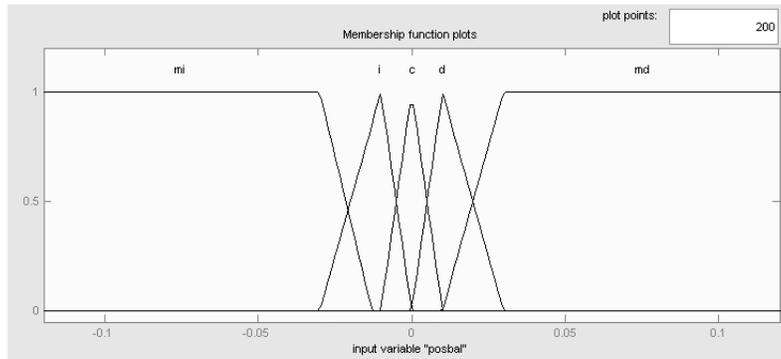


Figura 4.10: Conjunto difuso para la posición del balancín

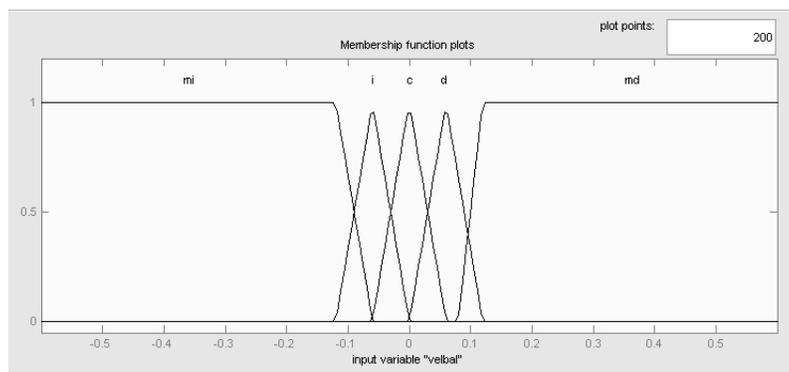


Figura 4.11: Conjunto difuso para la velocidad del balancín

Las figuras 4.8, 4.10 y 4.11 muestran los conjuntos difusos que conforman a cada variable de entrada. La distancia máxima del carrito al centro es de 40cm , la inclinación máxima del balancín es de 6.9° y la velocidad máxima de éste es de $0.9 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$; estos límites son importantes porque son los máximos valores que las variables de entrada pueden tomar, para que el controlador funcione de manera adecuada. Por lo que es conveniente saturar los valores de entrada en los límites ya mencionados.

Por su parte, las figuras 4.12 y 4.13 muestran las superficies formadas a partir de las reglas difusas. Estas superficies tienen pendiente negativa o nula en todo momento, por lo que su derivada también es negativa o nula; de lo que se puede determinar que el sistema en lazo cerrado es estable al realimentarse con el controlador difuso. En caso de que se desee un control más suave, se

debe incrementar el número de conjuntos difusos que forman a las variables de entrada, sin embargo esto provoca un mayor número de reglas difusas, haciendo más difícil sintonizar al sistema.

A diferencia de los controladores lineales, este controlador no puede presentar valores mayores a $5V$ o menores a $0V$, por lo que el gasto energético debe de ser menor. No obstante, es probable que la respuesta sea más lenta debido a la misma situación.

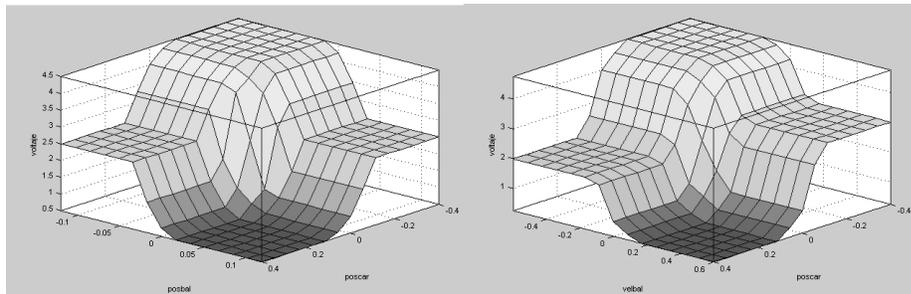


Figura 4.12: Superficies generadas por las variables de entrada del sistema masa-balancín

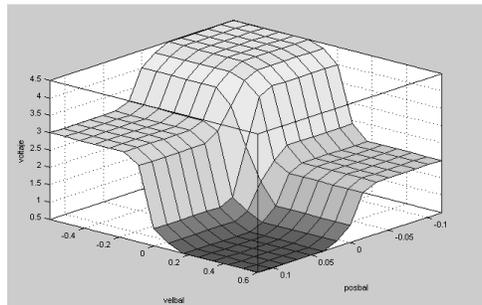


Figura 4.13: Superficie formada por las variables de entrada del sistema masa-balancín

4.2.2. Control difuso para el péndulo invertido

En los trabajos [10, 8, 11], se ataca el problema del péndulo invertido por medio de un sistema difuso; presentando variantes en el sistema o en la forma de emplear el control difuso. Los trabajos antes citados sirven de referencia, sin embargo el objetivo es atacar al problema de una manera diferente. Se propone realimentar al sistema con diferentes matrices de ganancia, obtenidas a partir de controladores LQR, y un controlador difuso que se encargue de la conmutación entre dichas matrices. De esta forma el controlador difuso, decide cual es la matriz más adecuada para los valores de los estados del sistema en ese instante. En la figura 4.14 se muestra el esquema del controlador propuesto.

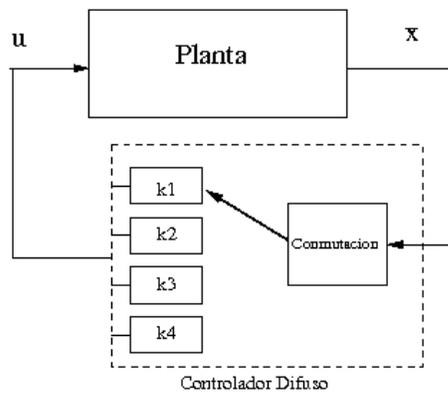


Figura 4.14: Esquema del controlador diseñado para el sistema de péndulo invertido

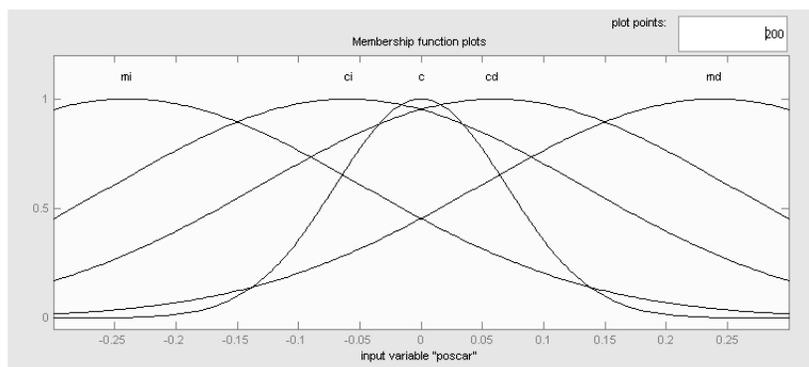


Figura 4.15: Conjuntos difusos para la posición del carro

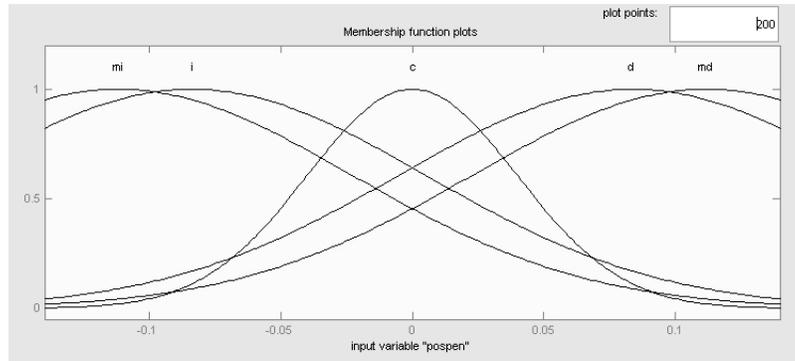


Figura 4.16: Conjuntos difusos para la posición del péndulo

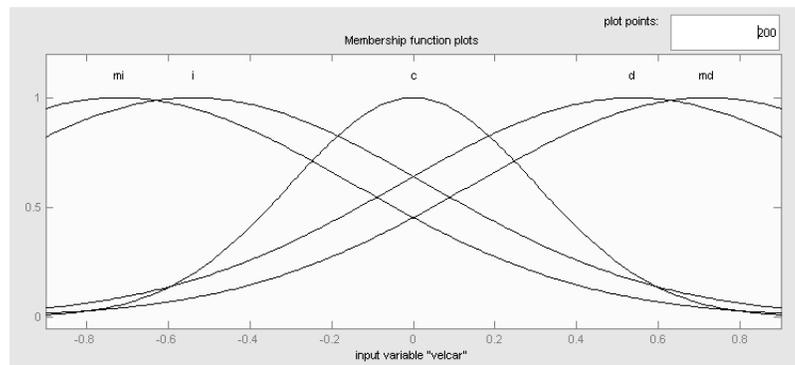


Figura 4.17: Conjuntos difusos para la velocidad del carro

Los estados del sistema se definen mediante conjuntos difusos, como se muestra en las figuras 4.15, 4.16, 4.17 y 4.18. En estas figuras se observan los intervalos de cada variable de entrada, así como las funciones de membresía que describen a cada conjunto, las cuales son del tipo gaussiano ya que los traslapes definirán en qué grado se activa cada matriz de ganancia. Las etiquetas lingüísticas son las mismas que las utilizadas para el balancín.

El siguiente paso es definir las situaciones diferentes en las que se puede encontrar operando el sistema, las cuales son:

- El carro se encuentra lejos, pero la barra está cerca de la posición vertical
- Tanto el carro como la barra se encuentran lejos del punto deseado
- El carro y el péndulo se encuentran cerca del punto deseado

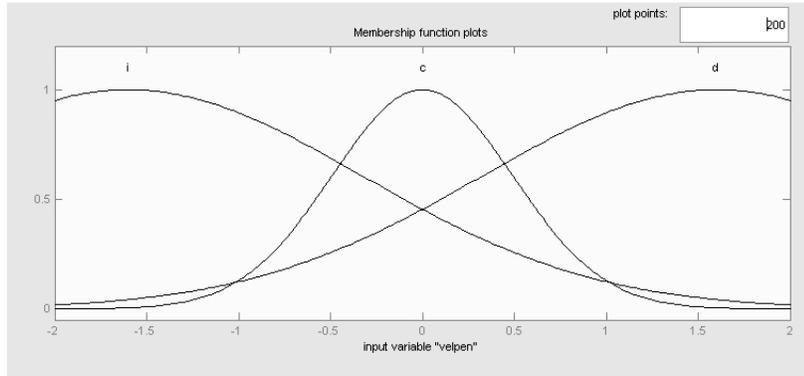


Figura 4.18: Conjuntos difusos para la velocidad del péndulo

- El péndulo se encuentra muy lejos de la posición vertical, en este caso no importa la posición del carro.

Para obtener las matrices de ganancia es necesario resolver la ecuación algebraica de Ricatti para tiempo discreto, variando los pesos de los estados en la matriz Q y siguiendo el criterio utilizado para los controladores lineales. Por su parte el gasto energético es igual para los cuatro casos siendo $R = 0.25$. Las matrices de ganancia k_i son

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 800 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 15000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix},$$

$$k_1 = [-45.6 \quad -250.7 \quad -47.9 \quad -32.1],$$

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 50 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix},$$

$$k_2 = [-12.1 \quad -105 \quad -15.8 \quad -15.5],$$

$$Q_3 = \begin{bmatrix} 15000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix},$$

$$k_3 = [-63.5 \quad -216.4 \quad -52.3 \quad -33.2],$$

$$Q_4 = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix},$$

$$k_4 = [-17.2 \quad -91 \quad -17.4 \quad -15.8].$$

El sistema difuso utilizado es de tipo Takagi-Sugeno, de esta forma las matrices de ganancia obtenidas expresan valores asignados a las reglas de correspondencia. Cuando se hace la desfusión el sistema hace un promedio ponderado, el cual indica en qué grado se activa cada una de las matrices de ganancia, dependiendo de las lecturas obtenidas de los estados del sistema.

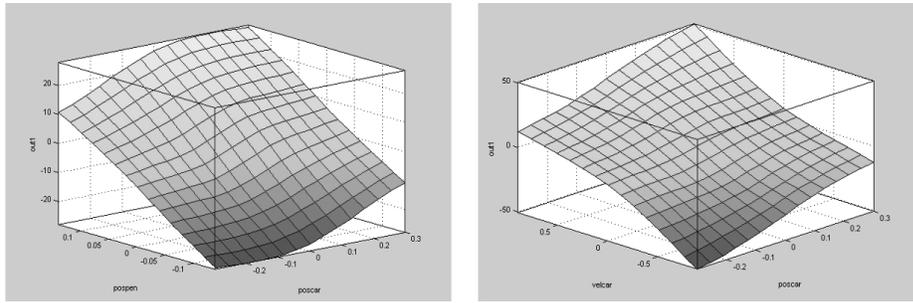


Figura 4.19: Superficies formadas por las variables de entrada del sistema

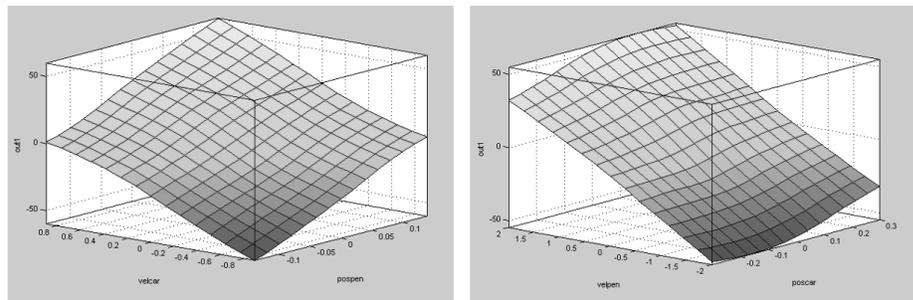


Figura 4.20: Superficies formadas por las variables de entrada del sistema

En las figuras 4.19, 4.20 y 4.21 se observan las superficies de control, las cuales poseen una pendiente negativa en todo momento y son claramente más suaves que las del balancín.

Por su parte en las figuras 4.22 y 4.23, muestran el comportamiento de los estados, así como la señal de control del sistema. Las condiciones iniciales elegidas para la simulación son las mismas que se eligieron para el diseño del controlador lineal; teniendo resultados muy similares en ambos casos. El sistema en lazo cerrado se vuelve estable, sin sobrepasar los límites físicos de los estados, por lo que es posible implementar este controlador de manera física.

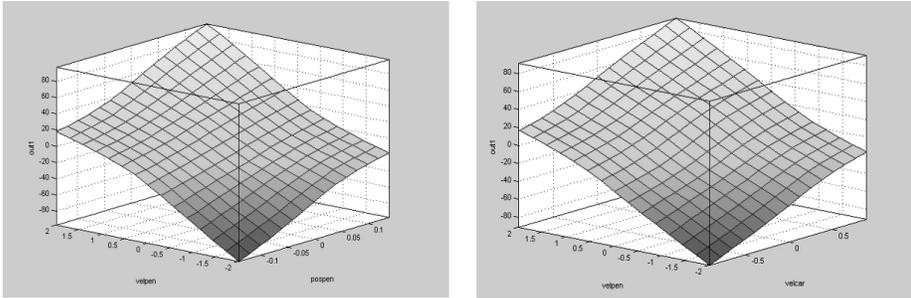


Figura 4.21: Superficies formadas por las variables de entrada del sistema

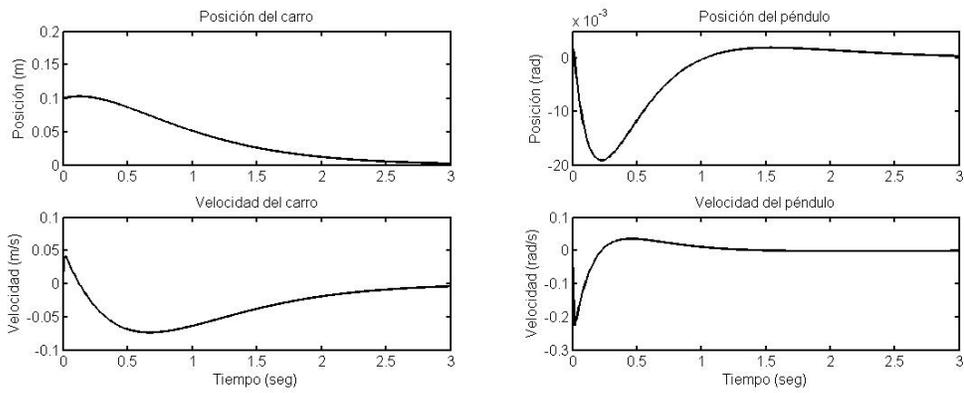


Figura 4.22: Comportamiento de los estados del sistema de péndulo invertido (simulación)

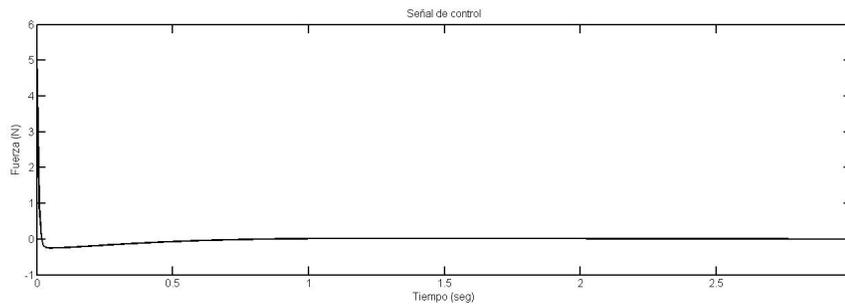


Figura 4.23: Señal de control para el péndulo invertido (simulación)

