Apéndice A

Anexos

A.1. Regresión lineal

Una regresión lineal, intenta ajustar datos dispersos al comportamiento de una recta. Existen varias maneras de hacerlo, el método que se utiliza para este trabajo es el de mínimos cuadrados.

Suponiendo la ecuación de una recta en la forma

$$y = mx + b,$$

y un error

$$\varepsilon = y - \hat{y},$$

se intenta aproximar la recta estimada como

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x.$$

De las ecuaciones anteriores, se hace un desarrollo para encontrar a $\hat{\beta}_0$ y $\hat{\beta}_1$

$$\Sigma\varepsilon^2 = \Sigma(y - \hat{y})^2, \Sigma\varepsilon^2 = \Sigma(y - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x)^2,$$

al obtener las derivadas parciales respecto a $\hat{\beta}_0$ y $\hat{\beta}_1$,

$$\frac{\Sigma\varepsilon^2}{\partial\hat{\beta}_0} = 2\Sigma(y - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x)(-1) = 0,$$

$$\Sigma(y - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x) = 0,$$

$$\Sigma y - n\hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 \Sigma x = 0,$$

$$\hat{\beta}_0 = \frac{\Sigma y}{n} - \hat{\beta}_1 \frac{\Sigma x}{n},$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}, \tag{A.1}$$

$$\frac{\Sigma\varepsilon^2}{\partial\hat{\beta}_1} = 2\Sigma(y - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x)(-x) = 0,$$

$$\Sigma(y - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x)(x) = 0,$$

$$\Sigma xy - \hat{\beta}_0 \Sigma x - \hat{\beta}_1 \Sigma x^2 = 0,$$

$$n\Sigma xy - \frac{\Sigma y - \hat{\beta}_1 \Sigma x}{n}\Sigma x - \hat{\beta}_1 \Sigma x^2 = 0,$$

$$n\Sigma xy - \Sigma y - \hat{\beta}_1 \Sigma x \Sigma x - n\hat{\beta}_1 \Sigma x^2 = 0,$$

$$n\Sigma xy - \Sigma x \Sigma y + \hat{\beta}_1 (\Sigma x)^2 - n\hat{\beta}_1 \Sigma x^2 = 0,$$

de donde se despeja $\hat{\beta}_1$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{n\Sigma xy - \Sigma x \Sigma y}{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)2}, \tag{A.2}$$

sustituyendo la ecuación A.2 en A.1

$$\hat{\beta}_0 = \frac{\Sigma y}{n} - \frac{n\Sigma xy - \Sigma x \Sigma y}{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)2}\frac{\Sigma x}{n},$$

desarrollando

$$\hat{\beta}_0 = \frac{\Sigma x^2 \Sigma y - \Sigma x \Sigma xy}{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2}. \tag{A.3}$$

Con las ecuaciones A.3 y A.2 se aproximan los valores dispersos al comportamiento de una recta, considerando que n es el número de datos con el que se trabaja.

A.2. Interpolación lineal y multilineal

Las tablas de datos, sirven para escenificar dependencias de datos entre variables. Son comúnmente utilizadas por que son sencillas de entender. Sin embargo, carecen de continuidad y eso puede llegar a limitarlas; por ejemplo, al buscar la relación entre dos variables de la tabla en algún valor que no exista en ésta, aparentemente resulta inservible. No obstante, mediante los métodos de interpolación se puede resolver este problema. El método que se utiliza para este trabajo es el de interpolación lineal y multilineal.

Las condiciones para poder aplicar este método a una tabla de datos, son tres:

Que todas la variables sean numéricas y pertenezcan al conjunto de los números reales

En el caso de existir más de una variable dominante, estas deben de ser independientes entre sí

Que la variable dependiente sea función de las variables dominantes.

Al suponer el caso más sencillo en el que únicamente se tiene una variable dominante x y una dependiente y, la tabla necesita tener al menos dos puntos, $P_0 = (X_0, Y_0)$ y $P_1 = (X_1, Y_1)$, si se desea conocer el valor de y para un valor de x entre X_0 y X_1, se puede utilizar el método de interpolación lineal; el cual consiste en aproximar el comportamiento de los datos a un línea recta. Lo cual se hace con la ecuación

$$y = A + Bx.$$

Considerando que se tienen dos puntos, se puede determinar B y A teniendo las ecuaciones

$$B = \frac{Y_1 - Y_0}{X_1 - X_0},$$

$$A = \frac{Y_0 X_1 - Y_1 X_0}{X_1 - X_0}.$$

De las tres ecuaciones anteriores se puede encontrar la siguiente relación

$$y = \frac{X_1 - x}{X_1 - X_0} Y_0 - \frac{x - X_0}{X_1 - X_0} Y_1,$$

donde se observa que cuando $x \to X_0$ entonces $y \to Y_0$ y si $x \to X_1$ entonces $y \to Y_1$. Por su parte cuando x está en un valor intermedio, entonces se calcula un valor aproximado de y, en caso de que la tabla contenga más de dos valores para cada variable, es posible seguir utlizando este método, únicamente cuidando que los puntos elegidos sean contiguos en la tabla.

Cuando existe más de una variable dominante se aplica el método de interpolación multilineal, el cual es bastante similar al lineal pero permite el uso de más varibles dominantes. Se tiene que encontrar la ecuación que describe la pendiente y la ordenada al origen de la recta formada entre cada uno de los puntos de cada variable dominante. Siendo expresado de la siguiente forma

$$\sharp\ rectas = 2^{\sharp\ variables\ dominantes}.$$

Por ejemplo para un sistema de tres variables dominantes y una dependiente se tiene

$$y = \alpha_{000} Y_{000} + \alpha_{001} Y_{001} + \alpha_{010} Y_{010} + \alpha_{011} Y_{011} + \alpha_{100} Y_{100} + \alpha_{101} Y_{101} + \alpha_{110} Y_{110} + \alpha_{111} Y_{111},$$

con

$Y_{i,j,k}$ es el valor de y correspondiente al punto (X_{1i}, X_{2j}, X_{3k}), donde i,j,k valen 1 o 0

$\alpha_{i,j,k} = \beta_{1i}\beta_{2j}\beta_{3k}$, donde i,j,k valen 1 o 0

$\beta_{m0} = \frac{X_{m1} - x_m}{X_{m1} - X_{m0}}$, donde m toma valores de 1, 2 o 3

$\beta_{m1} = 1 - \beta_0$, donde m toma valores de 1, 2 o 3.

A.3. Filtros analógicos

Las mediciones de los potenciómetros tienen demasiado ruido para proporcionar una medición correcta, por lo que es necesario filtrar la señal, para este propósito se utilizan filtros activos tipo *sallen key* [6]. Se eligen filtros analógicos debido a que al realizar pruebas con filtros digitales programados el resultado no es satisfactorio, ya que atrasan demasiado la señal o no eliminan la cantidad suficiente de ruido; la configuración utilizada se muestra en la figura A.1. Estos filtros son pasabajas y se utilizan para los tres potenciómetros, teniendo todos una frecuencia de corte de $f_c \approx 8.8Hz$. Sus componentes son dos resistencias de $180K\Omega$, dos capacitores de $0.1\mu F$ y un amplificador operacional (TL084).

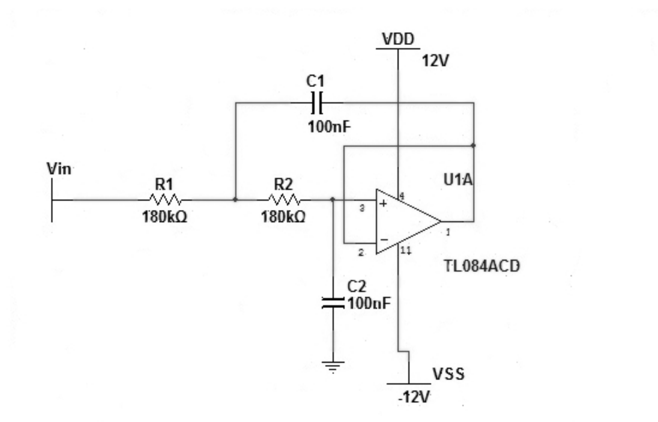

Figura A.1: Filtro activo pasabajas

La frecuencia de corte de estos filtros se determina a través de su función de transferencia. Se considera que las resistencias tienen el mismo valor, misma consideración que se hace para los capacitores, al realizar un análisis de corrientes se tiene

$$\frac{V_x - V_{out}}{R} = \frac{V_{out}}{Z_C}, \tag{A.4}$$

$$\frac{V_{in} - V_x}{R} - \frac{V_{out} - V_x}{Z_C} = \frac{V_x - V_{out}}{R}, \tag{A.5}$$

de la Ec. A.4 se despeja a V_x quedando

$$V_x = V_{out}\frac{Z_c + R}{Z_C},$$

al sustituir este valor de V_x en la Ec. A.5

$$\frac{V_{in}}{R} - 2V_{out}(\frac{Z_C + R}{RZ_C}) + \frac{V_{out}}{Z_C} - V_{out}(\frac{Z_C + R}{Z_C^2}) = -\frac{V_{out}}{R},$$

$$\frac{V_{in}}{R} = V_{out}(\frac{Z_C R + R^2 + 2Z_C^2 + 2Z_C R - Z_C - Z_C^2}{Z_C^2 R}),$$

$$G(S) = \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{Z_C^2}{R^2 + Z_C^2 + 2Z_C R},$$

en donde el término Z_C es la impedancia del capacitor. Sin embargo, esta impedancia también puede ser expresada como

$$Z_C = \frac{1}{SC},$$

al sutituir lo anterior en $G(S)$,

$$G(S) = \frac{\frac{1}{S^2C^2}}{R^2 + 2R\frac{1}{SC} + \frac{1}{S^2C^2}},$$

$$G(S) = \frac{\frac{1}{S^2C^2}}{\frac{S^2R^2C^2+2SRC+1}{S^2C^2}},$$

$$G(s) = \frac{1}{S^2R^2C^2 + 2SRC + 1},$$

al normalizar

$$G(S) = \frac{\frac{1}{R^2C^2}}{S^2 + \frac{2S}{RC} + \frac{1}{R^2C^2}},$$

lo cual se puede igualar con la forma general de una función de transferencia para un sistema de segundo orden, dada por

$$\frac{K_0\omega_n^2}{S^2 + 2\xi\omega_n S + \omega_n^2},$$

al igualar

$$\omega_n = \frac{1}{RC}.$$

Sin embargo, para el caso del filtro se sabe que

$$\omega_n = \omega_c,$$

$$\omega = 2\pi f,$$

entonces

$$f_c = \frac{1}{2\pi RC}.$$

En la figura A.2 se observa el resultado de filtrar la señal; mientras que en la figura A.3 se observa la señal de ruido que se elimina con el filtro.

Al derivar las señales de posición para obtener las velocidades, el ruido se incrementa. Debido a lo anterior es necesario que las señales de los potenciómetros tengan un ruido máximo de $\pm 6mV$. Por su parte los filtros analógicos implementados eliminan, hasta $\pm 4mV$ de ruido, con lo cual éste se reduce a $\pm 5mV$ en las señales obtenidas de los potenciómetros.

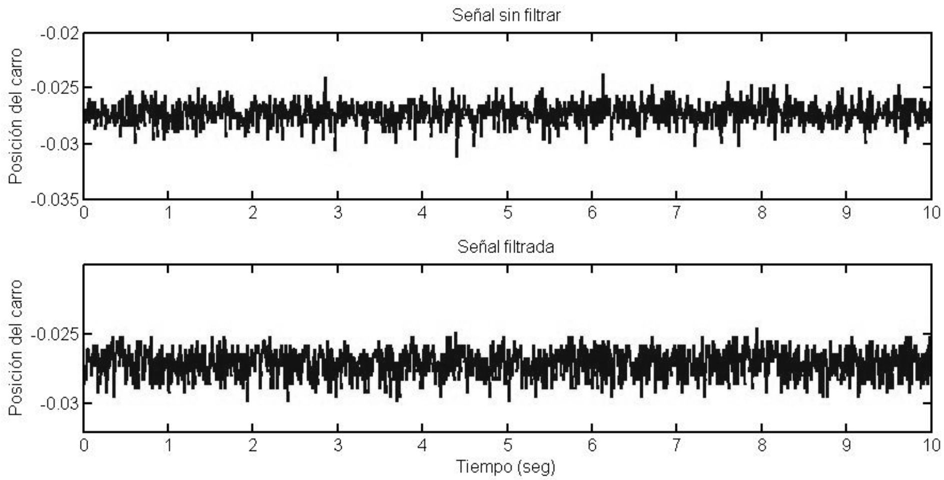

Figura A.2: Comparación entre la señal filtrada y la señal sin filtrar

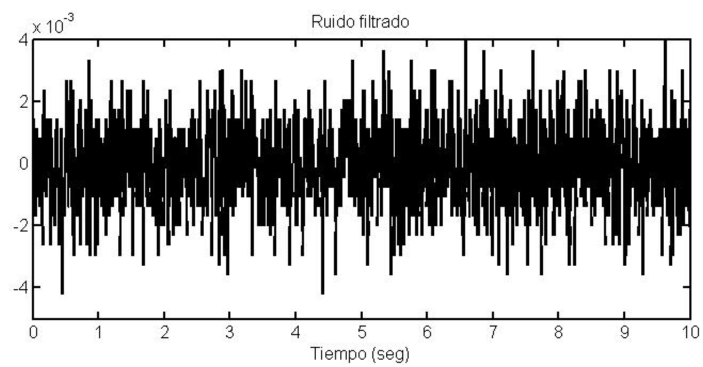

Figura A.3: Ruido eliminado por el filtro