



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

---

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN  
INGENIERÍA

ESTABILIZACIÓN DE SISTEMAS HAMILTONIANOS  
LINEALES MEDIANTE IDA-PBC POR  
RETROALIMENTACIÓN DE SALIDA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRO EN INGENIERÍA

INGENIERÍA ELÉCTRICA - CAMPO CONTROL

P R E S E N T A:

ING. RODOLFO DAMIÁN MARTÍNEZ MAGLIOCCA

TUTOR:

DR. GERARDO RENÉ ESPINOSA PÉREZ

MÉXICO, D.F. 2010

JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dr. Moreno Pérez Jaime Alberto  
Secretario: Dr. Alvarez Icaza Longoría Luis Agustín  
Vocal: Dr. Espinosa Pérez Gerardo René  
1er. Suplente: Dr. Maya Ortiz Paul Rolando  
2o. Suplente: Dr. Arteaga Pérez Marco

La tesis se realizó en México D. F.

TUTOR DE TESIS:

---

Dr. Gerardo René Espinosa Pérez

# Agradecimientos

Después de reflexionar un poco sobre la odisea que fue esta el hacer esta tesis, me doy cuenta que hay muchas personas a las que les debo un gracias por apoyarme y ayudarme a seguir adelante. En primer lugar a mis padres por siempre estar ahí y darme su amor y confianza de manera incondicional. A mis hermanos Josué y Claudia por escucharme y ayudarme cuando los he necesitado y por hacerme sentir que soy importante para ellos como ellos lo son para mí. A mi tutor el Dr. Gerardo Espinosa por tener la paciencia de trabajar conmigo y por ser no solo mi tutor, sino también mi amigo y saber como darme ánimos aún en los peores momentos.

También quiero agradecerle a mi grandes amigos de la facultad Luis, Pablo, Ricardo, Vicente, Marco, Andrés y Fernando, por darme ánimos aunque tal vez no siempre de la mejor manera, pero aún así están ahí. A mis compañeros de maestría Ricardo, William, Aldo, Ulises y Miguel por compartir conmigo las cosas buenas y malas de esta maestría así como también muchas desveladas.

Tengo que agradecer también de una forma muy especial a Janet y Lilia por darme ese apoyo y aliento que necesite para terminar. Y por último a Geraldine y Ian a quienes siempre recordaré con mucho cariño.

*"Los obstáculos son esas cosas espantosas  
que ves cuando apartas los ojos de tu meta"*  
Henry Ford

Estabilización de Sistemas Hamiltonianos  
Lineales mediante IDA-PBC por  
Retroalimentación de salida

Ing. Rodolfo Damián Martínez Magliocca

2 de Agosto 2010



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Motivación . . . . .	1
1.2. Estado del Arte . . . . .	2
1.2.1. Sobre el control basado en pasividad . . . . .	2
1.2.2. Sobre el control por retroalimentación de salida . . . . .	3
1.2.3. Sobre las desigualdades matriciales lineales . . . . .	4
1.3. Formulación del Problema . . . . .	5
1.4. Contribuciones . . . . .	5
1.5. Organización de la Tesis . . . . .	5
<b>2. Marco Teórico</b>	<b>7</b>
2.1. Control Basado en Pasividad . . . . .	7
2.1.1. Control mediante el moldeo de energía . . . . .	7
2.1.2. Control Basado en Pasividad Clásico . . . . .	8
2.1.3. IDA-PBC . . . . .	12
2.1.4. SIDA-PBC . . . . .	20
2.2. Control por Retroalimentación de Salida . . . . .	24
2.3. Desigualdades Matriciales Lineales . . . . .	26
<b>3. Estabilización por retroalimentación de PCHS lineales utilizando LMIs</b>	<b>31</b>
3.1. Sistemas Hamiltonianos Lineales . . . . .	31
3.2. Estabilización por IDA-PBC . . . . .	33
3.2.1. Estabilización mediante LMIs . . . . .	35
3.3. Caso de estudio: Sistema masa-resorte . . . . .	42
<b>4. Estabilización por OF de PCHS lineales utilizando LMIs</b>	<b>49</b>
4.1. Problema de Estabilización . . . . .	49

4.1.1. Problema W y Problema P . . . . .	51
4.2. Estabilización por IDA-PBC utilizando el Problema W . . . . .	53
4.2.1. Ejemplos . . . . .	56
4.3. Estabilización por IDA-PBC por retroalimentación de salida . . . . .	60
4.3.1. Ejemplos . . . . .	63
<b>5. Conclusiones</b>	<b>71</b>

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Motivación

Actualmente en el universo de la teoría en control nos encontramos con una vasta cantidad de métodos que nos permiten generar controladores para prácticamente cualquier sistema físico y de esa forma lograr que maquinaria, motores, circuitos eléctricos, plantas térmicas, sistemas hidráulicos, e incluso sistemas biológicos, solo por nombrar algunos, respondan de la forma que nosotros deseemos. Así también, existen métodos que nos permiten mejorar los controladores ya existentes y adecuarlos a las diferentes necesidades que podamos requerir en un momento dado. Y nuevos métodos como estos surgen a lo largo del mundo frecuentemente, haciendo que la teoría en control se vuelva en una empresa interminable en la que siempre se buscan nuevos métodos para controlar y nuevas formas de mejorar, simplificar o explotar aún más el alcance de los métodos ya existentes.

La motivación de este trabajo recae precisamente en el lograr un mayor alcance de un método ya existente que es el control basado en pasividad, definido en inglés como passivity based control (PBC), en la que es una de sus ramas principales, la asignación de interconexión y amortiguamiento simultánea; mejor conocida por sus siglas en inglés como SIDA (Simultaneous Interconnection and Damping Assignment). La metodología del PBC-SIDA y su variante anterior PBC-IDA, han demostrado en la práctica que al utilizarlas es posible alcanzar los estándares actuales de eficiencia, como son respuestas rápidas y precisas, así como un manejo adecuado de la relación de la energía que entra y sale del sistema; además de que su principal ventaja es

la posibilidad de moldear la energía total del sistema, lo cual es especialmente útil en sistemas subactuados y por último, permite aprovechar las bondades de la interconexión de los sistemas pasivos. Algunas de las plantas en las que se a comprobado su efectividad son: sistemas mecánicos [9], [16], máquinas eléctricas [24], convertidores de potencia [6], [15], entre otros.

En gran parte de estas aplicaciones se pudo observar que es posible diseñar los controladores utilizando solo los estados medibles de la planta, es decir, utilizando controladores por retroalimentación de salida (Output Feedback Controllers - OFC). La ventaja más significativa en estos controladores es que su construcción e implementación es menos costosa y más sencilla.

Con esto podemos decir que la motivación de este trabajo de tesis es el realizar un estudio sobre la estructura en particular con la que debe contar una planta para poder aplicar el SIDA-PBC utilizando solo los estados disponibles para medición y para esto recurriremos al uso de desigualdades matriciales lineales (LMIs).

## 1.2. Estado del Arte

### 1.2.1. Sobre el control basado en pasividad

El control basado en pasividad (PBC) es una metodología de diseño para controlar sistemas físicos, siendo más conocidas sus aplicaciones mecánicas. Se puede decir que es el resultado de una extensión de la técnica de moldeo de energía más inyección de amortiguamiento, utilizada para resolver problemas de regulación en sistemas por retroalimentación de estado. Esto fue presentado por Takegaki y Arimoto en el año de 1981 [29]. Después, en 1994 en [26] se propone el uso de controladores dinámicos, conectados con la planta mediante interconexiones que conservan la potencia, para modelar la energía potencial de una clase de sistemas subactuados. Sin embargo para lograr la estabilización de varios sistemas físicos es necesario modificar la función de energía total (Energía Potencial mas Energía Cinética). Las aplicaciones se limitaban únicamente a los sistemas mecánicos, y es en el año 1998 en [27] cuando se extiende su aplicación a una amplia clase de sistemas descritos mediante las ecuaciones de Euler-Lagrange, teniendo un especial énfasis en los sistemas eléctricos y electromecánicos.

En la metodología del control basado en pasividad clásico, como se verá más adelante, se selecciona una función de energía y después se diseña un con-

trolador que fuerza la desigualdad de disipación. El hacer esto destruye la estructura Euler-Lagrange para el sistema en lazo cerrado haciendo que la nueva función de almacenamiento carezca de un significado físico, haciendo más difícil el análisis posterior del sistema controlado. Lo anterior es generalmente resultado del tener que llevar a cabo una inversión del sistema a lo largo de las trayectorias de referencia.

Años más adelante, se desarrolló un método en el que no se fija la función de almacenamiento de lazo cerrado, pero en vez de eso se selecciona la estructura deseada del sistema en lazo cerrado [22], [25], [8]; denominado como control basado en pasividad por interconexión y asignación de amortiguamiento. Esta metodología está formulada para sistemas Hamiltonianos controlados por puerto, que es una clase que contiene estrictamente los sistemas de Euler-Lagrange, como se indicó anteriormente, la función de energía en lazo cerrado se obtiene como resultado de una elección, en ocasiones totalmente libre, de las interconexiones en el sistema, así como también del amortiguamiento. Si bien esta metodología tiene su principal desventaja en el hecho de que para obtener la función de energía es necesario resolver un sistema de ecuaciones diferenciales parciales, también es cierto que es posible elegir cuidadosamente las matrices de interconexión y amortiguamiento invocando consideraciones físicas del sistema; que hacen esta tarea mucho más sencilla.

### 1.2.2. Sobre el control por retroalimentación de salida

El control por retroalimentación de salida es uno de los temas básicos en la teoría de control y existe una gran cantidad de técnicas que se han desarrollado a lo largo de los años. En los sistemas no lineales estas técnicas dependen básicamente de la estructura particular del sistema. Sin embargo para los sistemas lineales invariantes en el tiempo, que es el caso de estudio de esta tesis, las condiciones se encuentran bien establecidas desde la década de los 70's con varios resultados interesantes como en [5], [17] y [18]. Las condiciones de necesidad y suficiencia también se encuentran bien establecidas como puede observarse en [13] y [10], en donde en la mayoría de los casos se consideran los eigenvalores y las eigenestructuras para llevar a cabo métodos de asignación de polos. El enfoque en este trabajo en cuanto al control por retroalimentación de salida se basará en darle un enfoque equivalente a resolver un conjunto de desigualdades matriciales bilineales, las cuales son no convexas en general y es difícil el trabajar con ellas, por lo que se busca

el transferirlas a un conjunto de desigualdades matriciales lineales, las cuales se pueden resolver fácilmente por medios computacionales.

### 1.2.3. Sobre las desigualdades matriciales lineales

La historia de las desigualdades matriciales lineales se remonta a 1890 cuando Lyapunov publica lo que hoy en día se conoce como la teoría de Lyapunov, en donde aparece la desigualdad de Lyapunov  $P > 0, A^T P + P A < 0$ , en donde la existencia de la matriz  $P$  asegura que un sistema de la forma  $\dot{x}(t) = Ax(t)$  es estable. Esta es la primera desigualdad matricial lineal (LMI) que se utiliza para analizar la estabilidad de los sistemas dinámicos. Otro momento importante se da cerca del año 1940 cuando Lur'e, Postnikov y otros matemáticos en la antigua Unión Soviética aplican los métodos de Lyapunov para resolver problemas específicos de ingeniería, principalmente el problema de estabilidad de un sistema de control con actuadores no lineales; las LMIs que resultaron de estas aplicaciones se resolvieron analíticamente y a mano, esto limitó su aplicación a sistemas pequeños (segundo y tercer orden).

Después por el año de 1960, Yakubovich, Popov, Kalman y otros investigadores consiguen reducir el problema de Lur'e a un simple criterio gráfico utilizando lo que ahora se conoce como el lema de positividad real (PR); con esta contribución se muestra cómo es posible resolver ciertas LMIs por métodos gráficos. Sin embargo la importancia de las LMIs en la teoría de control toma su lugar especial hasta que Yakubovich presenta [32], [34] y [33], en donde muestra cómo solucionar problemas de control utilizando específicamente desigualdades matriciales lineales. Para la década siguiente (1970's) se encontró que además de poder resolver las LMIs que aparecen en el lema PR por métodos gráficos, también era posible resolver la ecuación algebraica de Riccati en forma de LMI. Esto aparece en [31], en donde también Willems hace la observación de que el verdadero potencial de las LMIs se encuentra en utilizar algoritmos computacionales. Más adelante en [20], Pyaniiskii y Skorodinski hacen un gran avance cuando consiguen reducir el problema original de Lur'e en un problema de optimización convexo que involucra LMIs, el cual solucionaron utilizando algoritmos elipsoidales.

Actualmente la aplicación de LMIs se extiende a varias aplicaciones en la teoría de control como en los problemas de robustez y la generación de controladores y observadores, además de que existen varias herramientas computacionales que permiten resolver estos problemas; como se observa en [1] existen además diferentes métodos numéricos empleados para su solución.

### 1.3. Formulación del Problema

Considere un sistema lineal en donde solo una parte de los estados es medible mediante la salida del sistema. Suponiendo conocidos los parámetros y aplicando la metodología de diseño de controladores basada en pasividad y por asignación de interconexión y amortiguamiento, apoyado en el recurso computacional de las desigualdades matriciales lineales, establecer condiciones bajo las cuales sea posible diseñar una ley de control estática por retroalimentación para estabilizar al sistema.

### 1.4. Contribuciones

Este trabajo tiene su principal contribución en presentar dos métodos para estabilizar sistemas lineales invariantes en el tiempo utilizando retroalimentación de salida y apoyándose en una poderosa herramienta matemática como lo son las desigualdades matriciales lineales y basándose en la metodología del control basado en pasividad por medio de la asignación de interconexión y amortiguamiento simultánea. Para uno de estos métodos se lleva a cabo una reestructuración del problema de control por retroalimentación estática de salida, para utilizarlo en el control basado en pasividad. En cuanto al otro método, se obtiene una extensión del problema de control basado en pasividad para sistemas lineales por medio de desigualdades lineales para sistemas en los que únicamente se cuenta con la información proveniente de la salida para llevar a cabo el control.

En ambos métodos se obtiene una representación Hamiltoniana del sistema en lazo cerrado, teniendo así la ventaja de identificar rápidamente los términos de interconexión y amortiguamiento, así como también de la energía almacenada en el sistema.

### 1.5. Organización de la Tesis

En el segundo capítulo de este trabajo se presenta un breve marco teórico de los elementos utilizados. En primer lugar se realiza una descripción de las características principales del control basado en pasividad, haciendo un resumen de las metodologías de IDA-PBC y de SIDA-PBC. Después se hace un revisión rápida sobre los controladores por retroalimentación se salida presentando los fundamentos matemáticos necesarios para los capítulos

posteriores; y por último se presenta una explicación sobre las desigualdades matriciales lineales mostrando su construcción simple e ideas principales.

En el capítulo tres se presenta una metodología para estabilizar sistemas Hamiltonianos por medio del SIDA-PBC utilizando desigualdades matriciales lineales, mostrando las proposiciones para llevarlo a cabo, así como también las pruebas de las mismas. En la última parte del capítulo se presenta un ejemplo así como sus respectivas simulaciones.

El capítulo cuatro corresponde a la contribución de este trabajo. En la primera parte se muestra una metodología alterna, en la que se modifica un método para obtener controladores por retroalimentación de salida, conocido como problema-W. Se utilizan desigualdades matriciales lineales para resolver el problema de estabilización por IDA-PBC. En la siguiente parte se expone una modificación a la metodología que aparece en el capítulo tres para poder resolver el problema de estabilización de los sistemas Hamiltonianos, pero haciendo que el controlador quede únicamente en función de los estados disponibles para medición. Por último se presentan ejemplos para cada uno de estos métodos, así como también un ejemplo comparativo entre el método presentado en el capítulo tres y los otros dos métodos mostrados en el capítulo cuatro.

En el capítulo cinco se presentan las conclusiones de este trabajo.

# Capítulo 2

## Marco Teórico

### 2.1. Control Basado en Pasividad

El control basado en pasividad (PBC) es una metodología de diseño para el control de sistemas no lineales. En la mayoría de los problemas el PBC proporciona un procedimiento natural para modelar la energía, preservando en lazo cerrado la estructura Euler-Lagrange del sistema. Esta es una de las técnicas de control para sistemas subactuados que tiene un gran interés para la ingeniería, debido en primer lugar a sus múltiples aplicaciones y también porque permite el uso de la intuición física al momento de trabajar con el sistema, pues podemos identificar cuáles elementos tienen un efecto disipativo y cuáles inyectan energía al sistema. En esta metodología se propone el uso de controladores dinámicos, conectados a la planta que a través de interconexiones preservan la propiedad de pasividad.

#### 2.1.1. Control mediante el moldeo de energía

Como se indicó con anterioridad al hacer control basado en pasividad se busca incorporar principios energéticos en el diseño de los controladores, haciendo que tanto la planta como el controlador se vean como transformadores de energía interconectados. Si el sistema a controlar tiene una estructura física y satisface los balances de energía, entonces podemos decir que el problema se reduce a asignar una nueva función de energía.

En primer lugar definiremos la relación directa entre un sistema pasivo y la energía:

**Definición 1.** Un mapeo de  $u \mapsto y$  es pasivo si existe una función de estado  $H(x)$  acotada por abajo, y una función no negativa  $d(t) \geq 0$  tal que:

$$\underbrace{\int_0^t u^T(s)y(s)ds}_{E_s} = \underbrace{H(x(t)) - H(x(0))}_{E_a} + \underbrace{d(t)}_{E_d}. \quad (2.1)$$

Donde

- $E_s$ : Energía suministrada al sistema.
- $E_a$ : Energía almacenada.
- $E_d$ : Energía disipada.

□

En el sistema pasivo (2.1), si la función  $H(x)$  tiene un mínimo en  $x_*$ ,  $d(t) > 0$ , y haciendo  $u = 0$ , entonces el valor de  $H(x)$  disminuirá en el tiempo y el sistema llegará al punto  $x_*$  de manera asintótica. La velocidad de convergencia puede incrementarse si se extrae energía del sistema haciendo  $u = -K_d y$  donde  $K_d = K_d^T > 0$ .

La idea principal del PBC es usar una retroalimentación de la forma  $u(t) = \beta(x(t))$ , donde  $\beta(x(t))$  es una función que depende de los estados. Así el sistema en lazo cerrado es nuevamente un sistema pasivo con una nueva función de energía  $H_d(x)$ , y con un mínimo global en un punto deseado. Una forma gráfica de ver esto aparece en la Figura 2.1.

A lo largo de su historia el PBC se ha dividido en dos ramas, de las cuales se hace una breve descripción.

### 2.1.2. Control Basado en Pasividad Clásico

Esta rama del PBC tiene un enfoque muy similar al que tiene el diseño de controladores por medio de argumentos de Lyapunov, es decir, se busca una función de energía del sistema en lazo cerrado que cumpla con las restricciones para la estabilidad y después se obtiene un control que garantice esa función.

Lo anterior por lo general se desarrolla utilizando las ecuaciones de Euler-Lagrange.

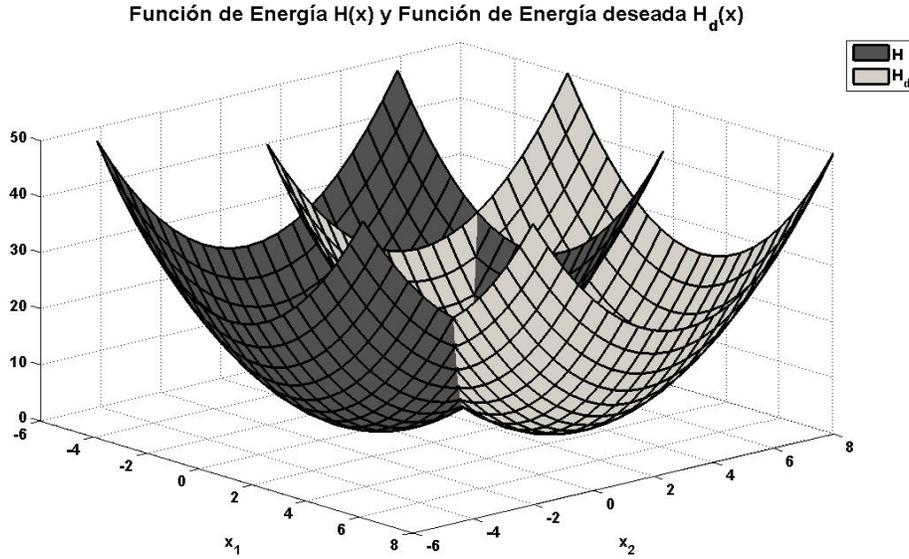


Figura 2.1: Función de energía de un sistema y su modificación por PBC

### Ecuaciones Euler-Lagrange

Las ecuaciones de Euler-Lagrange fueron originalmente usadas para describir la dinámica de sistemas mecánicos. Estas ecuaciones pueden verse como un equivalente de la segunda ley de Newton, pero presenta la ventaja de que su formulación es independiente de las coordenadas a utilizar, además de que pueden utilizarse para describir la dinámica de muchos otros sistemas físicos, como en el caso de los sistemas eléctricos.

La dinámica de un sistema con  $n$  grados de libertad puede ser descrita por la ecuación de Euler-Lagrange como:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial q} = Q, \quad (2.2)$$

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - V(q), \quad (2.3)$$

en donde

- $q, \dot{q}$  : Vector de coordenadas generalizadas y sus respectivas derivadas.
- $\mathcal{L}$  : Función de *Lagrange*.

- $T(q, \dot{q})$  : Energía cinética del sistema.
- $V(q)$  : Energía potencial del sistema.
- $Q$  : Fuerzas externas.

Una revisión sobre la mecánica Lagrangiana puede encontrarse en [14] y [3].

Si se consideran también las fuerzas de disipación en el sistema, estas siempre aparecen de la forma  $-\frac{\partial F(\dot{q})}{\partial \dot{q}}$ , donde  $F(\dot{q})$  es llamada la función de disipación de Rayleigh, la cual debe satisfacer:

$$\dot{q}^T \frac{\partial F(\dot{q})}{\partial \dot{q}} \geq 0. \quad (2.4)$$

Con esta acción, la ecuación de Euler-Lagrange queda como

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial q} + \frac{\partial F(\dot{q})}{\partial \dot{q}} = Q. \quad (2.5)$$

Si se toma en cuenta que la suma de la energía cinética y la energía potencial como la energía almacenada del sistema, es decir,  $H(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) + V(q)$ ; obteniendo así que

$$\frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial H(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}}. \quad (2.6)$$

Al integrar la ecuación (2.5) después de sustituir (2.6) se obtiene

$$\int_0^s \dot{q} Q dt = H[q(s), \dot{q}(s)] - H[q(0), \dot{q}(0)] + \int_0^s \dot{q}^T \frac{\partial F(\dot{q})}{\partial \dot{q}} dt. \quad (2.7)$$

La ecuación (2.7) tiene la misma estructura que la Definición (1), lo que permite concluir que el mapeo de  $Q \mapsto \dot{q}$  es pasivo.

## Metodología

Para establecer la metodología del PBC-clásico [27] que la función de la energía cinética tiene una forma cuadrática

$$T(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T D(q) \dot{q}, \quad (2.8)$$

donde  $D(q) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es llamada matriz de inercia general y es simétrica y positiva definida,  $D(q) = D^T(q) > 0$ . De manera similar, se considera que la función de disipación está dada por  $F(\dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^T R \dot{q}$ , con  $R = R^T \geq 0$  como la matriz de disipación. Entonces la ecuación (2.5) puede escribirse de la forma

$$D(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + R\dot{q} + \frac{\partial V(q)}{\partial q} = Q, \quad (2.9)$$

en donde la matriz  $C$  es tal que  $\dot{D}(q) - 2C(q, \dot{q})$  es una matriz antisimétrica, para todo valor de  $q$  y  $\dot{q}$ .

Ahora, si se define el error  $e = q - q_d$  como la diferencia en el comportamiento real y el deseado de las coordenadas generalizadas, entonces el sistema (2.9) puede reescribirse como

$$D(q)\ddot{e} + C(q, \dot{q})\dot{e} + R\dot{e} = \Phi, \quad (2.10)$$

dónde

$$\Phi = Q - \left\{ D(q)\ddot{q}_d + C(q, \dot{q})\dot{q}_d + R\dot{q}_d + \frac{\partial V(q)}{\partial q} \right\}. \quad (2.11)$$

Si se define la función de energía de lazo cerrado como

$$H_d = \frac{1}{2}\dot{e}^T D(q)\dot{e}, \quad (2.12)$$

al derivar con respecto al tiempo esta función de energía adquiere la forma

$$\dot{H}_d = -\dot{e}^T R \dot{e} + \dot{e}^T \Phi. \quad (2.13)$$

Si se considera a  $\Phi$  como entrada y  $\dot{e}$  como salida, entonces el sistema en lazo cerrado es estrictamente pasivo a la salida; y al hacer  $\Phi = -K\dot{e}$  con  $K = K^T > 0$  se tiene que

$$\dot{H}_d = -\dot{e}^T (R + K) \dot{e}. \quad (2.14)$$

demostrándose que el mínimo de  $H_e$ , es decir  $\dot{e} = 0$ , es asintóticamente estable.

En este punto es importante notar que el problema fundamental para aplicar de manera exitosa la metodología descrita, radica en el hecho de encontrar una entrada de control tal que la igualdad  $\Phi = -K\dot{e}$  se satisfaga. Es claro que para los renglones en los que se cuenta con una entrada de

control, este objetivo puede satisfacerse de manera trivial. Sin embargo, para aquellos en donde este tipo de variables no es disponible, el problema se convierte en tratar de satisfacer las restricciones (igualadas a cero) que se presentan. En este caso, el problema puede ser planteado como una especie de inversión del sistema, ya que se propone el comportamiento deseado y lo que se busca es la entrada de control correspondiente a esta salida.

### 2.1.3. IDA-PBC

El control basado en pasividad por asignación de interconexión y amortiguamiento (IDA-PBC) es otra rama del control basado en pasividad, la cual está enfocada en los sistemas Hamiltonianos controlados por puerto. Estos sistemas tiene la característica de estar formados únicamente por ecuaciones diferenciales de primer orden; las cuales se pueden obtener a través de las ecuaciones de Euler-Lagrange. En esta metodología no es necesario llevar a cabo una inversión del sistema para obtener la estructura deseada para el sistema en lazo cerrado, pero presenta la desventaja de que es necesario resolver un sistema de ecuaciones diferenciales parciales, lo cual establece la principal dificultad para su aplicación.

### Sistemas Hamiltonianos controlados por puerto (PCHS)

Los sistemas *Euler-Lagrange* admiten una descripción alternativa conocida como ecuaciones canónicas de Hamilton, en donde se tiene un conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden; y las variables de estado son las coordenadas y los momentos generalizados. Para obtener estas ecuaciones se define la función de Hamilton a partir de la transformada de *Legendre* de la función de Lagrange

$$H := \sum \dot{p}_j q_i - \mathcal{L} \quad (2.15)$$

donde las variables  $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  se denominan como los momentos conjugados y se definen como

$$p_k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}. \quad (2.16)$$

Al igual que las ecuaciones de Euler-Lagrange, las ecuaciones Hamiltonianas son de gran utilidad para describir la dinámica de sistemas físicos, ya que también pertenecen a los métodos de modelado basados en conceptos

energéticos, es decir en ambos se explota la dependencia de los estados con la función de energía o co-energía para caracterizar la dinámica de sus diferentes elementos. Una observación importante es que las variables de puerto que corresponden a la entrada y salida del sistema, son variables conjugadas; por lo que su producto tiene unidades de potencia.

Un sistema Hamiltoniano controlado por puerto tiene la siguiente forma:

$$\Sigma := \begin{cases} \dot{x} = (J(x) - R(x)) \frac{\partial H(x)}{\partial x} + g(x)u, \\ y = g^T(x) \frac{\partial H(x)}{\partial x}, \end{cases} \quad (2.17)$$

donde

- $x \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estados.
- $u, y \in \mathbb{R}^m$  son las variables de puerto.
- $H(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es la función de Hamilton, la cual representa la energía almacenada del sistema.
- $J(x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la matriz de interconexión. Representa la conexión interna entre todos los elementos del sistema y define su estructura.
- $R(x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la matriz de disipación. Representa las pérdidas del sistema.
- $g(x) \in \mathbb{R}^{n \times m}$  es la matriz de interconexión entre el sistema y el mundo exterior.

Una de las propiedades más importantes de los sistemas Hamiltonianos controlados por puerto es el poder determinar la estabilidad del sistema mediante las características de las matrices de interconexión y disipación, como se observa en la siguiente proposición.

**Proposición 1.** *Si el sistema (2.17) cumple con las siguientes condiciones:*

- *La función Hamiltoniana  $H(x)$  se encuentra acotada por debajo por una constante ( $H(x) > c$ ), y tiene un mínimo en  $x^*$ , es decir,  $\frac{\partial H(x^*)}{\partial x} = 0$ .*
- *La matriz de interconexión es anti-simétrica  $J(x) = -J^T(x)$ .*
- *La matriz de disipación es semi-positiva definida  $R(x) = R^T(x) \geq 0$ .*

y además, si el conjunto invariante más grande contenido en

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid \left(\frac{\partial H(x)}{\partial x}\right)^T R(x) \frac{\partial H(x)}{\partial x} = 0\}, \quad (2.18)$$

es solo el punto de equilibrio  $x^*$ ; entonces este punto de equilibrio (i.e.  $u = 0$ ), es asintóticamente estable.

□

*Demostración.* Considerando a la función Hamiltoniana como función candidata de Lyapunov, su derivada respecto al tiempo es:

$$\dot{H}(x) = \left(\frac{\partial H(x)}{\partial x}\right)^T \dot{x} \quad (2.19)$$

y evaluándola a lo largo de las trayectorias del sistema toma la forma

$$\dot{H}(x) = \left(\frac{\partial H(x)}{\partial x}\right)^T [J(x) - R(x)] \frac{\partial H(x)}{\partial x} + \left(\frac{\partial H(x)}{\partial x}\right)^T g(x)u \quad (2.20)$$

Aprovechando la propiedad de antisimetría de la matriz de interconexión  $J(x)$  tenemos que  $\left(\frac{\partial H(x)}{\partial x}\right)^T J(x) \frac{\partial H(x)}{\partial x} = 0$  y recordando que la salida del sistema es de la forma

$$y = g^T(x) \frac{\partial H(x)}{\partial x} \quad (2.21)$$

entonces la ecuación (2.20) se puede reescribir como

$$\dot{H}(x) = - \left(\frac{\partial H(x)}{\partial x}\right)^T R(x) \frac{\partial H(x)}{\partial x} + y^T u. \quad (2.22)$$

Dado que  $R(x) = R^T(x) \geq 0$  y considerando que no hay acción de control para este caso, es decir  $u = 0$ ; deducimos que

$$\dot{H}(x) \leq 0 \quad (2.23)$$

Con esto se tiene que la función Hamiltoniana es una función de Lyapunov, además utilizando el principio de invariancia de LaSalle, si el conjunto invariante más grande contenido en (2.18) es solo el punto de equilibrio  $x^*$  entonces este punto es asintóticamente estable. □

**Observación 1.** Además de las propiedades de estabilidad de los sistemas Hamiltonianos, también es posible comprobar sus propiedades como sistemas pasivos. Para ello se considera la ecuación (2.22), integrando en un intervalo de  $(0, T)$  se tiene

$$H(x(T)) - H(x(0)) = - \int_0^T \left( \frac{\partial H(x)}{\partial x} \right)^T R(x) \frac{\partial H(x)}{\partial x} ds + \int_0^T (y^T u) ds. \quad (2.24)$$

El primer elemento del lado derecho de la ecuación (2.24) corresponde a la energía disipada del sistema y podemos definirla como  $d(t)$ . Acomodando los términos se obtiene

$$\int_0^t u^T(s) y(s) ds = H(x(t)) - H(x(0)) + d(t) \quad (2.25)$$

que es exactamente la ecuación (2.1), con lo que podemos decir que el sistema Hamiltoniano es pasivo de  $u \mapsto y$ .

## Metodología

Considere un sistema de la forma

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (2.26)$$

El objetivo principal en esta metodología es encontrar una ley de control  $u = \beta(x)$  para lograr que el sistema en lazo cerrado tenga un comportamiento deseado de la forma

$$\dot{x} = [J_d(x) - R_d(x)] \frac{\partial H_d(x)}{\partial x}, \quad (2.27)$$

donde  $J_d = -J_d^T$  es la matriz de interconexión deseada,  $R_d = R_d^T \geq 0$  es la matriz de disipación deseada y  $H_d$  es la función Hamiltoniana deseada, la cual tiene un mínimo en el punto  $x^*$ , que corresponde con el punto de equilibrio a estabilizar.

Para obtener el resultado deseado, primero se parte de descomponer la señal de control en dos términos

$$u = u_{me} + u_{ia}, \quad (2.28)$$

donde el término  $u_{me}$  (moldeo de energía) está encargado de modificar la función de energía del sistema, mientras que el término  $u_{ia}$  (inyección de amortiguamiento) agrega amortiguamiento, o visto desde otro punto de vista, añade disipación al sistema.

Ahora bien igualando al sistema (2.26) con su estructura deseada (2.27), se obtiene la ecuación fundamental a resolver para llevar a cabo el método de IDA-PBC,

$$f(x) + g(x)u = [J_d(x) - R_d(x)] \frac{\partial H_d(x)}{\partial x} \quad (2.29)$$

En esta última ecuación, si se asume que  $g(x)$  es de rango completo, entonces es posible construir una función  $g^\perp(x) \in \mathbb{R}^{(n-m) \times n}$  como el aniquilador izquierdo de  $g(x)$ , es decir tal que  $g^\perp(x)g(x) = 0$ . Entonces premultiplicando ambos lados de (2.29) por el aniquilador, se obtiene lo que se conoce como la *ecuación de matching*

$$g^\perp f(x) = g^\perp [J_d(x) - R_d(x)] \frac{\partial H_d(x)}{\partial x} \quad (2.30)$$

**Observación 2.** *Un aspecto importante de la ecuación (2.30) es que describe la dinámica subactuada del sistema, lo que se puede interpretar como la dinámica natural del sistema, es decir, el conjunto de restricciones físicas que deben ser satisfechas para poder resolver el problema de control.*

□

**Observación 3.** *Como se verá adelante, la ecuación (2.30) establece la principal complicación para aplicar de una manera exitosa la metodología. De esta forma, se han dedicado numerosos esfuerzos a tratar de sistematizar la forma de encontrar una solución, dada en términos de las matrices  $J_d(x)$  y  $R_d(x)$  y de la función de energía de lazo cerrado  $H_d(x)$ , que satisfagan las restricciones impuestas.*

□

Para determinar la ley de control encargada de moldear la energía del sistema, primero se considera que esta variable depende de los estados del sistema, es decir,  $u_{me} = \beta(x)$  y nuevamente se iguala al sistema con la estructura deseada en lazo cerrado y se premultiplica la ecuación por  $g^T(x)$ . Bajo estas condiciones se obtiene que

$$g^T(x)f(x) + g^T(x)g(x)\beta(x) = g^T(x) [J_d(x) - R_d(x)] \frac{\partial H_d(x)}{\partial x}. \quad (2.31)$$

Si  $g(x)$  es linealmente independiente por columnas, entonces el producto  $g^T(x)g(x)$  es invertible, permitiendo así el obtener la señal de control de la forma

$$u_{me} = \beta(x) = (g^T(x)g(x))^{-1}g^T(x) \left\{ [J_d(x) - R_d(x)] \frac{\partial H_d(x)}{\partial x} - f(x) \right\}. \quad (2.32)$$

Como se observa en [12] al aplicar la ley de control, el sistema en lazo cerrado queda de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= [J_d(x) - R_d(x)] \frac{\partial H_d(x)}{\partial x} + g(x)u_{ia}, \\ y &= g^T(x) \frac{\partial H_d(x)}{\partial x}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

El sistema (2.33) sigue conservando su estructura Hamiltoniana y sin la presencia de la señal de inyección de amortiguamiento ( $u_{ia} = 0$ ), el sistema tiene todas las propiedades que aparecen en la Proposición 1, por lo que  $x^*$  es un punto de equilibrio asintóticamente estable.

Con el fin de mejorar las propiedades de convergencia del sistema en lazo cerrado generado, es posible incluir una segunda etapa en el diseño de la ley de control la cual tiene como objetivo inyectar amortiguamiento al sistema, conservando sus propiedades estructurales. Para esto, se puede utilizar la salida pasiva de la siguiente manera

$$\begin{aligned} u_{ia} &= -K_{ia}y, \\ K_{ia} &= K_{ia}^T > 0. \end{aligned} \quad (2.34)$$

lo cual da como resultado que la nueva matriz de disipación tenga la siguiente estructura

$$\bar{R}_d(x) = R_d(x) + g(x)K_{ia}g^T(x)$$

Aunque la metodología IDA–PBC presenta la ventaja de plantear de una manera sistemática los pasos que se deben seguir para obtener un determinada ley de control, su principal limitación radica en el hecho de tener que resolver la ecuación de Matching, como se había observado anteriormente.

Este problema se presenta dado que esta ecuación establece un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales no lineales con incógnita dada por la función de energía de lazo cerrado  $H_d(x)$  y contando con grados de libertad dados por las matrices  $J_d(x)$  y  $R_d(x)$ . Dada su importancia fundamental, estudios profundos se han dedicado al tema y de manera afortunada actualmente se cuentan con algunas líneas generales que se pueden seguir para resolverla. Como se presenta en [19], varias técnicas han sido propuestas para este propósito, siendo las principales las que aparecen a continuación:

- **IDA No parametrizado**, se diseña una estructura para las matrices deseadas de interconexión y amortiguamiento,  $(J_d$  y  $R_d)$  y al resolver la ecuación de matching se obtiene la función Hamiltoniana deseada  $(H_d(x))$ . Esto genera una ecuación diferencial parcial en  $H_d(x)$ . Este método puede observarse en [25].
- **IDA Algebraico**, se diseña la función Hamiltoniana deseada  $(H_d(x))$ , por ejemplo como una función cuadrática en términos del error; y entonces se resuelven las matrices  $J_d$  y  $R_d$  mediante ecuaciones algebraicas. Este método puede apreciarse en [11].
- **IDA Parametrizado**, mediante un conocimiento previo de la estructura de la función Hamiltoniana deseada, se dan ciertas restricciones en  $J_d$  y  $R_d$ , todo esto con la finalidad de obtener una ecuación diferencial parcial que sea más fácil de resolver. Este método es aplicable a muchos sistemas mecánicos subactuados como se observa en [23].
- **IDA Algebraico-Parametrizado**, la ecuación diferencial parcial es evaluada en algún subespacio en el que la solución sea más fácil de obtener, para después encontrar las matrices  $J_d$  y  $R_d$  para asegurar una solución válida a la ecuación de matching. Este método tiene su principal ejemplo en [21].

### Ejemplo 2.1

Consideremos el siguiente sistema no lineal de dos dimensiones

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + \xi x_2^2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 x_2 + u. \end{aligned} \tag{2.35}$$

donde  $\xi > 0$ . Este sistema puede ser expresado en forma de PCHS con

$$J = \begin{bmatrix} 0 & x_2 \\ -x_2 & 0 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad g = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

con una función de almacenamiento de energía

$$H(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}\xi x_2^2$$

El objetivo para este sistema es regular el estado  $x_2$  a un valor deseado  $x_{2d}$ . Donde los puntos de equilibrio del sistema correspondientes son

$$x_1^* = \xi x_{2d}^2 \quad u^* = \xi x_{2d}^3.$$

Aplicando el método de IDA-PCB por la forma algebraica, se define la forma de  $H_d$  y se le puede dar cierta estructura a las matrices  $J_d$  y  $R_d$ .

$$H_d = \frac{1}{2}(x_1 - x_1^*)^2 + \frac{1}{2\gamma}(x_2 - x_{2d})^2$$

$$J_d = \begin{bmatrix} 0 & \alpha(x) \\ -\alpha(x) & 0 \end{bmatrix}, \quad R_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix},$$

donde  $\alpha(x_1, x_2)$  es una función a determinar y  $\gamma > 0$ ,  $r > 0$  son parámetros ajustables.

La ecuación de matching queda entonces como:

$$-x_1 + \xi x_{2d}^2 = -(x_1 - x_1^*) + \frac{\alpha}{\gamma}(x_2 - x_{2d})$$

$$-x_1 x_2 + u = -\alpha(x_1 - x_1^*) - \frac{r}{\gamma}(x_2 - x_{2d}).$$

De aquí solo queda despejar  $\alpha(x)$  y la ley de control retroalimentada

$$\alpha(x_1, x_2) = \frac{\gamma}{(x_2 - x_{2d})}(\xi x_2^2 - x_1^*) = \gamma \xi (x_2 + x_{2d})$$

$$u = x_1 x_2 - \gamma \xi (x_1 - x_1^*)(x_2 + x_{2d}) - \frac{r}{\gamma}(x_2 - x_{2d}).$$

Para las simulaciones fijamos el valor  $\xi = 0.5$ , y  $x_{2d} = 2$  y condiciones iniciales del sistema ( $x_1 = 0, x_2 = -2$ ). En la Figura 2.2 aparecen los resultados de la simulación para diferentes valores de  $\gamma$ ; en las gráficas se observa que los cambios de los parámetros ajustables modifican la forma en que responde el sistema, principalmente el valor de  $\gamma$  debido a que influye directamente

en la función de Hamilton del sistema en lazo cerrado. Y en la Figura 2.3 se aprecia cómo la función de energía almacenada se ve afectada al modificar el valor de  $\gamma$ .

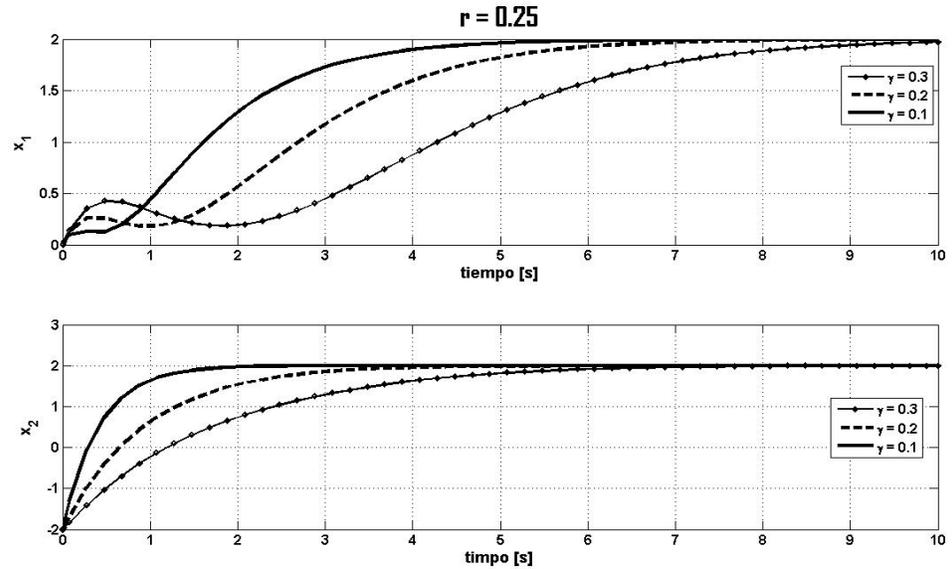


Figura 2.2: Resultados de simulación para diferentes valores de  $\gamma$

#### 2.1.4. SIDA-PBC

En el método de IDA-PBC se divide la ley de control en dos partes (2.28), una encargada del moldeo de energía y otra en la que aparecen los términos que le adicionan amortiguamiento al sistema. Cabe aclarar que el método presentado es uno de muchos otros posibles, tal y como se muestra en [22]. Sin embargo, el dividir de esta forma la acción de control trae consigo la desventaja de que el conjunto de sistemas que se pueden estabilizar con IDA-PBC se reduce, esto puede apreciarse en [12], en donde se comprueba como un sistema electromecánico en particular, no puede ser estabilizado por esta metodología. Para conseguir un conjunto de sistemas más grandes a estabilizar, se desarrolló una variante al método y se le denominó como SIDA-PBC (Simultaneous Interconnection and Damping Assignment Passivity Based Control).

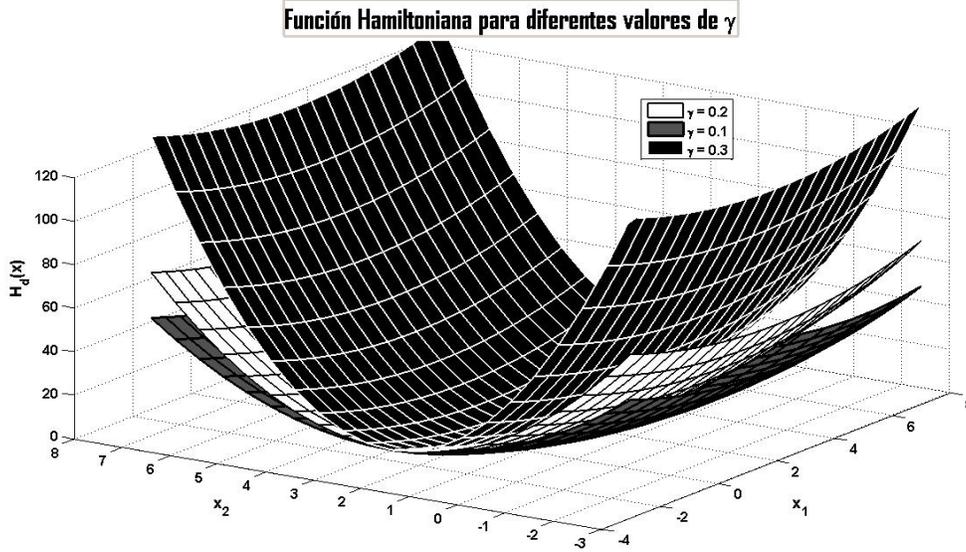


Figura 2.3: Función de energía para diferentes valores de  $\gamma$

### Metodología

Un paso fundamental para conseguir el objetivo de control en el IDA-PBC es resolver lo que se denominó como la ecuación de matching

$$g^\perp f(x) = g^\perp [J_d(x) - R_d(x)] \frac{\partial H_d(x)}{\partial x}. \quad (2.36)$$

Con esta misma motivación, en vez de descomponer el control en el moldeo de energía y la inyección de amortiguamiento se propone trabajar con ambas señales de manera *simultánea*. Entonces para este caso la ecuación que iguala al sistema con su forma deseada toma la siguiente forma

$$f(x) + g(x)u = F_d(x) \frac{\partial H_d(x)}{\partial x}, \quad (2.37)$$

de esta manera se reemplazan las restricciones

$$J_d(x) = -J_d^T(x), \quad R_d(x) = R_d^T(x) \geq 0, \quad (2.38)$$

por una restricción más débil

$$F_d(x) + F_d^T(x) \leq 0, \quad (2.39)$$

y la señal de control (nuevamente dependiente de los estados del sistema) queda definida como

$$u = \beta(x) = (g^T(x)g(x))^{-1}g^T(x) \left\{ F_d(x) \frac{\partial H_d(x)}{\partial x} - f(x) \right\}. \quad (2.40)$$

**Observación 4.** *El hecho de que la metodología SIDA es más general que la IDA se desprende de notar que el conjunto de matrices antisimétricas está estrictamente contenido dentro del conjunto de matrices cuya parte simétrica es negativa semidefinida. Esto se demuestra al considerar que una matriz antisimétrica cualquiera  $F$  debe cumplir que*

$$F + F^T = 0 \quad (2.41)$$

*es decir, es necesario que los elementos de la diagonal principal sean cero. Por otro lado, para el conjunto de matrices cuya parte simétrica es negativa semidefinida se debe cumplir que*

$$F + F^T \leq 0 \quad (2.42)$$

*y para cumplir esto es posible que la matriz tenga elementos diferentes a cero en su diagonal principal, con esto es posible deducir que este conjunto es mayor que el de las matrices antisimétricas. Entonces el conjunto de funciones  $\{f(x), g(x)\}$  que puede resolver (2.36) bajo las restricciones (2.38), es estrictamente menor al conjunto que resuelve a (2.37) con la restricción (2.39).*

□

**Observación 5.** *En la metodología SIDA-PBC, también se conserva una estructura Hamiltoniana para el sistema en lazo cerrado de la forma (2.27), ya que las matrices  $J_d(x)$  y  $R_d(x)$  pueden obtenerse como*

$$J_d(x) = \frac{1}{2}[F_d(x) - F_d^T(x)], \quad (2.43)$$

$$R_d(x) = \frac{1}{2}[F_d(x) + F_d^T(x)]. \quad (2.44)$$

□

**Ejemplo 2.2**

Consideramos el sistema (2.35) el cual puede escribirse de la forma  $\dot{x} = f(x) + g(x)u$  con

$$f(x) = \begin{bmatrix} -x_1 + \xi x_2^2 \\ -x_1 x_2 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (2.45)$$

Dividiendo la matriz  $F_d$  como

$$F_d = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix},$$

entonces la ley de control queda de siguiente manera

$$u = F_{21} \frac{\partial H_d}{\partial x_1} + F_{22} \frac{\partial H_d}{\partial x_2} + x_1 x_2.$$

Donde  $F_{21}$  y  $F_{22}$  son parámetros libres que satisfacen la restricción (2.39). Al igual que en el caso anterior se escoge a la función de almacenamiento de energía en forma de una cuadrática.

$$H_d = \frac{1}{2}(x_1 - x_1^*)^2 + \frac{\xi}{2}(x_2 - x_{2d})^2,$$

lo que implica que  $\frac{\partial H_d}{\partial x_1} = x_1 - x_1^*$ ; y  $\frac{\partial H_d}{\partial x_2} = \xi(x_2 - x_{2d})$ .

Fijando a  $F_{21} = -x_2$  y  $F_{22} = -\frac{k}{\xi}$ , haciendo que la ley de control quede como

$$u = x_1^* x_2 - k(x_2 - x_{2d}).$$

Por otro lado  $F_{11}$  y  $F_{12}$  aún son parámetros libres que deben satisfacer la ecuación de *matching* para la dinámica de  $x_1$ ,

$$-x_1 + \xi x_2^2 = F_{11}(x_1 - x_1^*) + F_{12}\xi(x_2 - x_{2d}).$$

Para simplificar los cálculos se fija  $F_{11} = -1$ , dejando a  $F_{12} = x_2 + x_{2d}$ . Finalmente para probar la estabilidad hay que cumplir con la restricción (2.39);

$$F_d + F_d^T = \begin{bmatrix} -2 & x_{2d} \\ x_{2d} & -\frac{k}{\xi} \end{bmatrix} \leq 0,$$

y aplicando la desigualdad de Schur se tiene que

$$k \geq \frac{1}{4}\xi x_{2d}^2 = \frac{1}{4}x_1^*.$$

El valor de  $\xi = 0.5$ , como en el ejemplo anterior, y también se busca estabilizar a  $x_{2d} = 2$ , con las condiciones iniciales en  $(x_1 = 0, x_2 = -2)$ . En la Figura 2.4, aparecen los resultados de la simulación utilizando diferentes valores para  $k$ , y se aprecia que el sistema se estabiliza en el punto deseado.

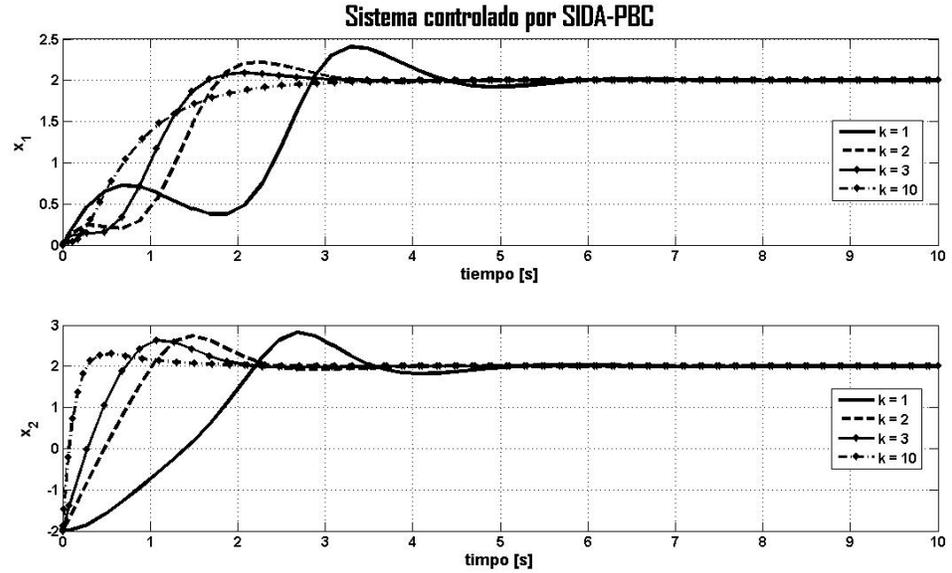


Figura 2.4: Simulación SIDA-PBC para diferentes valores de  $k$

## 2.2. Control por Retroalimentación de Salida

El control por retroalimentación de salida (output feedback - OF) es uno de los problemas básicos en diseño de control por retroalimentación, este problema involucra en su forma más simple una planta lineal invariante en el tiempo descrita de la forma:

$$\Sigma := \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (2.46)$$

En donde la entrada al sistema se define como:

$$u(t) = Ky(t) + v(t) \quad (2.47)$$

El sistema en lazo cerrado es

$$\dot{x} = (A + BKC)x(t) + Bv(t) \equiv A_c + Bv(t) \quad (2.48)$$

Entonces el problema de retroalimentación de salida está en torno a seleccionar el valor de la matriz de ganancia de retroalimentación  $K$  de forma que cumpla con las propiedades de lazo cerrado que se deseen, por ejemplo la estabilidad del sistema.

El problema de OF es importante por si mismo, pero además porque muchos otros problemas pueden reducirse a una variación del mismo. Es también de mucha relevancia cuando se busca utilizar controladores más simples en cuanto a costo y realización.

En el caso de tener un compensador dinámico de salida de orden menor o igual al del sistema ( $q \leq n$ ) es posible llevarlo al caso de OF de la siguiente manera. Suponemos que el compensador dinámico está dado en el espacio de estados como:

$$\dot{x}_f = A_f x_f(t) + B_f y(t), \quad (2.49)$$

$$u(t) = C_f x_f(t) + D_f y(t) + v(t). \quad (2.50)$$

Entonces se obtiene un sistema aumentado cuando  $u_f = \dot{x}_f$  y  $y_f(t) = x_f(t)$ .

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{x}_f(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_f(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & B \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_f(t) \\ u(t) \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} y_f(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_f(t) \end{bmatrix}.$$

Así la ley de retroalimentación es ahora estática y está dada por:

$$\begin{bmatrix} u_f(t) \\ u(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_f & B_f \\ C_f & D_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_f(t) \\ y(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} v(t), \quad (2.51)$$

o en una descripción más compacta

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t) &= \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{B}\tilde{u}(t) \\ \tilde{y}(t) &= \tilde{C}\tilde{x}(t), \tilde{u}(t) = \tilde{K}\tilde{y}(t) + \tilde{v}(t), \end{aligned} \quad (2.52)$$

donde

$$\begin{aligned}\tilde{x} &= \begin{bmatrix} x \\ x_f \end{bmatrix}, \quad \tilde{u} = \begin{bmatrix} u_f \\ u \end{bmatrix}, \\ \tilde{y} &= \begin{bmatrix} y_f \\ y \end{bmatrix}, \quad \tilde{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ v \end{bmatrix}, \\ \tilde{A} &= \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 & B \\ I & 0 \end{bmatrix}, \\ \tilde{C} &= \begin{bmatrix} 0 & I \\ C & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{K} = \begin{bmatrix} A_f & B_f \\ C_f & D_f \end{bmatrix}.\end{aligned}\tag{2.53}$$

Una restricción importante en el diseño de sistemas de control es que el compensador dinámico de orden agregado sea  $q < n$ . Sin embargo, varias técnicas de control moderno diseñan controladores de orden igual o superior al de la planta. Estas estructuras son difíciles o en ocasiones imposibles de implementar debido a limitaciones por costo o hardware.

### 2.3. Desigualdades Matriciales Lineales

Una amplia variedad de problemas en sistemas en la teoría de control pueden ser expresados en forma de problemas convexos que involucran desigualdades matriciales lineales (LMIs). Para algunos casos especiales, estos tienen soluciones analíticas pero en general pueden resolverse de una manera muy eficiente por métodos numéricos. En la mayoría de los casos, las LMIs representan la desigualdad de Lyapunov o la desigualdad algebraica de Riccati. Ciertamente el uso de recursos computacionales para resolver estas desigualdades permite el ahorrar mucho tiempo además que da la facilidad de atender varias de estas desigualdades de manera simultánea.

Una desigualdad matricial lineal (LMI) tiene la forma

$$F(x) \triangleq F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i > 0,\tag{2.54}$$

donde  $x \in \mathbb{R}^m$  y  $F_i = F_i^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $i = 0, \dots, m$ , son matrices simétricas dadas. El símbolo de desigualdad en (2.54), indica que  $F(x)$  es positiva definida. La LMI (2.54) es equivalente a un conjunto de  $n$  desigualdades polinomiales en  $x$ ; también es una restricción convexa sobre  $x$ , por ejemplo

el conjunto  $x \mid F(x) > 0$  es convexo. Esta desigualdad se le denomina como LMI estricta. Una LMI no estricta tiene la forma

$$F(x) \geq 0. \quad (2.55)$$

Una ventaja significativa es que varias LMIs  $F^{(1)}(x) > 0, \dots, F^{(p)}(x) > 0$  pueden expresarse en forma de una sola LMI como  $\text{diag}(F^{(1)}(x), \dots, F^{(p)}(x)) > 0$ . Por otro lado, cuando las matrices  $F_i$  son diagonales,  $F(x) > 0$  es un conjunto de desigualdades lineales. Es posible volver desigualdades no lineales (convexas) en LMIs, utilizando el complemento de Schur como se ve a continuación. La LMI

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S^T(x) & R(x) \end{bmatrix} > 0, \quad (2.56)$$

donde  $Q(x) = Q^T(x)$ ,  $R(x) = R^T(x)$ , y  $S(x)$  son afines en  $x$  de rango completo, esto es equivalente a

$$R(x) > 0 \quad Q(x) - S(x)R^{-1}(x)S^T(x) . \quad (2.57)$$

Entonces el conjunto de desigualdades no lineales (2.57) puede representarse como la LMI (2.56). Por ejemplo la restricción matricial para la norma  $\|Z(x)\| < 1$  donde  $Z(x) \in \mathbb{R}^{p \times q}$  puede ser representada por la LMI

$$\begin{bmatrix} I & Z(x) \\ Z^T(x) & I \end{bmatrix} > 0,$$

dado que  $\|Z(x)\| < 1$  es equivalente a  $I - ZZ^T > 0$ .

Usualmente en varios de los problemas las variables a determinar son matrices, por ejemplo en la desigualdad de Lyapunov

$$A^T P + PA < 0, \quad (2.58)$$

donde  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  está dada y  $P = P^T$  es la variable a determinar. En este caso la LMI no se escribe de la forma explícita  $F(x) > 0$ , para establecer que  $P$  es la variable.

Hay una amplia cantidad de problemas que pueden ponerse en términos de LMIs, a continuación se presentan solo algunos de los más comunes.

### Problema LMI

El problema más común en una LMI, es que dada una  $F(x) > 0$ , es necesario encontrar una  $x^{fact}$  (*fact* es por la palabra *factible*), tal que  $F(x^{fact}) > 0$  o el determinar que no es posible cumplir con la LMI. Este problema también implica el encontrar una matriz positiva semidefinida diferente de cero  $G$  tal que  $\text{Tr}(GF_i) = 0$  para  $i = 1, \dots, m$  y  $\text{Tr}(GF_0) \leq 0$ . Para referirse a este problema en la literatura se le encuentra como LMIP, por linear matrix inequality problem.

Un ejemplo sencillo sería el considerar un conjunto de desigualdades de Lyapunov simultáneas, es decir, se tienen  $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $i = 1, \dots, L$  y se necesita encontrar  $P$  que satisfaga la LMI

$$P > 0 \quad A_i^T P + P A_i < 0 \quad i = 1, \dots, L,$$

o el determinar que  $P$  no existe. El determinar que  $P$  existe es equivalente a encontrar  $Q_0, \dots, Q_l$ , todas diferentes de cero tales que

$$Q_0 \geq 0, \dots, Q_l \geq 0, \quad Q_0 = \sum_{i=1}^L (Q_i A_i^T + A_i Q_i).$$

Lo cual es otro LMIP.

### Problema de Eigenvalores

El problema de eigenvalores (EVP), consiste en minimizar el máximo valor de una matriz que depende de una variable, la cual está sujeta a una LMI de restricción o se busca determinar que la restricción no es posible. Por ejemplo, se desea minimizar el valor del eigenvalor  $\lambda$  y se tienen las restricciones

$$\lambda I - A(x) > 0, \quad B(x) > 0,$$

donde  $A(x)$  y  $B(x)$  son matrices simétricas que dependen de la variable a optimizar  $x$ . Este es un problema de optimización convexo.

### Problema de Eigenvalores Generalizados

El problema de eigenvalores generalizados (GEVP), consiste en minimizar el máximo eigenvalor generalizado para un par de matrices que dependen de la variable afín y están sujetas a una LMI de restricción. La forma general del GEVP es minimizar  $\lambda$  que está sujeta a

$$\lambda B(x) - A(x) > 0, \quad B(x) > 0 \quad C(x) > 0,$$

donde A, B y C son matrices simétricas afines a la variable x.

### Problema convexo

Una variación de los problemas anteriores muy particular se le denomina simplemente como problema convexo (CP), el cual se plantea como el minimizar  $\log \det A^{-1}(x)$  con las restricciones de  $A(x) > 0$ , y  $B(x) > 0$ ; donde A y B son matrices simétricas afines a x.

Un ejemplo de CP sería el minimizar al  $\log \det P^{-1}$  con las restricciones de

$$P > 0, \quad v_i^T P v_i \leq 1, \quad i = 1, \dots, L$$

donde  $v_i \in \mathbb{R}^n$  es un vector dado y  $P = P^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la variable.



# Capítulo 3

## Estabilización por retroalimentación de PCHS lineales utilizando LMIs

Este método de estabilización para sistemas lineales es presentado por Arjan van der Schaft en [28]. En este trabajo se obtienen los controladores a través de la asignación de interconexión y amortiguamiento, después de resolver un conjunto de desigualdades matriciales lineales. Se trabaja con dos conjuntos de LMIs. En el primer conjunto las matrices de interconexión y amortiguamiento no aparecen explícitamente lo que las vuelve más difícil de manipular, mientras que en el segundo conjunto estas matrices pueden obtenerse de manera explícita.

La característica a resaltar de este método es que la interconexión y amortiguamiento del sistema, la función de energía de lazo cerrado y como la ley de retroalimentación pueden ser obtenidas directamente al resolver estas desigualdades matriciales lineales. Para esto existen poderosos algoritmos matemáticos y varios paquetes de software, lo que hace del método una posibilidad atractiva, realizable y eficiente para resolver este problema de estabilización.

### 3.1. Sistemas Hamiltonianos Lineales

Como se vió anteriormente los sistemas Hamiltonianos de puerto controlado (PCH) tienen una estructura bien definida. De aquí en adelante nos

limitaremos a utilizar su representación lineal dada de la siguiente forma:

$$\dot{x} = (J - R) \frac{\partial H}{\partial x} + Bu = (J - R)Qx + Bu, \quad (3.1)$$

$$y = B^T(x) \frac{\partial H}{\partial x}(x) = B^T Qx, \quad (3.2)$$

donde  $J = -J^T$ ,  $R = R^T$  y  $B$  son matrices constantes, mientras que  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz simétrica que define al Hamiltoniano del sistema. El Hamiltoniano está dado por  $H(x) = \frac{1}{2}x^T Qx$ . Como se observó anteriormente, cuando el Hamiltoniano de un sistema PCH se encuentra acotado por abajo, el sistema es pasivo. En este caso basta con que  $Q$  sea positiva semi-definida para que el sistema (3.1)-(3.2) sea pasivo. En sí, el que el sistema PCH lineal sea estable o asintóticamente estable depende de que las matrices  $R$  y  $Q$  tengan ciertas propiedades definidas. Esto puede apreciarse en el siguiente teorema mostrado en [28].

**Teorema 1.** *La ecuación en espacio de estados de un sistema lineal estable (o asintóticamente estable),  $\dot{x} = Ax + Bu$ , puede ser reescrita en forma de PCH como en (3.1), mediante una matriz  $Q$  que sea positiva definida y una matriz positiva semi-definida (o positiva definida, respectivamente)  $R$ .*

□

*Demostración.* A partir de considerar que el sistema es estable, sabemos que existe una función de Lyapunov de la forma  $V(x) = \frac{1}{2}x^T Qx$ , con  $Q = Q^T > 0$ , al derivar la función anterior  $\dot{V}(x) = \frac{1}{2}x^T (A^T Q + QA)x$  la cual es no-positiva dado que  $A^T Q + QA \leq 0$ . Definiendo a  $J = \frac{1}{2}(AQ^{-1} - Q^{-1}A^T)$  y  $R = -\frac{1}{2}(AQ^{-1} + Q^{-1}A^T)$ , entonces la ecuación en espacio de estados puede reescribirse como

$$\dot{x} = Ax + Bu = (J - R)Qx + Bu,$$

como  $A^T Q + QA \leq 0$  esto implica que  $R \geq 0$ . Para el caso de estabilidad asintótica la derivada de la función de Lyapunov debe ser estrictamente negativa, esto a su vez implica que  $A^T Q + QA < 0$ , haciendo que  $R > 0$

□

Además de la forma del sistema lineal para poder seguir adelante consideraremos las siguientes suposiciones. En primer lugar asumimos que **todos**

los estados del sistema están disponibles para medición, es decir, todos los estados se encuentran disponibles para ser utilizados en el control por retroalimentación. De esta forma se tiene la libertad de modificar la estructura de interconexión interna del sistema, así como también la estructura de energía interna y los efectos resistivos, todo esto mediante los canales de entrada del sistema PCH.

La siguiente suposición es que la matriz  $B$  debe ser de rango completo por columna, con lo que se entiende que el número de entradas es estrictamente menor a la dimensión de los estados del sistema ( $m < n$ ). De no ser de rango completo, se puede simplemente reducir el número de entradas. Esta suposición tiene su razón de ser en el hecho de que si  $m$  es igual a  $n$  el problema se vuelve claramente trivial y los términos de interconexión, amortiguamiento y la función de energía del sistema deseado pueden obtenerse mediante operaciones algebraicas.

## 3.2. Estabilización por IDA-PBC

La metodología del IDA-PBC puede ser resumida rápidamente para su aplicación en un sistema en su forma Hamiltoniana como (2.17), en la siguiente proposición mostrada en [28].

**Proposición 2.** *Dado el sistema (2.17), con  $J(x) = -J^T(x)$  y  $R(x) = R^T(x)$  y un punto de equilibrio a estabilizar  $x_*$ . Si es posible encontrar las matrices de  $n \times n$   $J_d(x)$  y  $R_d(x)$ , las funciones  $H_d(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  y  $\beta(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  tales que*

1.  $[J_d(x) - R_d(x)] \frac{\partial H_d(x)}{\partial x} = [J(x) - R(x)] \frac{\partial H(x)}{\partial x} + g(x)\beta(x)$ ,
2.  $J_d(x) = -J_d^T(x)$  y  $R_d(x) = R_d^T(x) \geq 0$ ,
3.  $\frac{\partial H_d(x_*)}{\partial x} = 0$ ;  $\frac{\partial^2 H_d(x_*)}{\partial x^2} > 0$ ,

entonces el sistema (2.17) en lazo cerrado con  $u = \beta(x) + v$ , será un sistema PCH de la forma:

$$\dot{x} = (J_d(x) - R_d(x)) \frac{\partial H_d(x)}{\partial x} + g(x)v, \quad (3.3)$$

$$y = g^T(x) \frac{\partial H_d(x)}{\partial x}. \quad (3.4)$$

Además el sistema será estable si  $v = 0$  y asintóticamente estable si el conjunto invariante más grande contenido en  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \left(\frac{\partial H(x)}{\partial x}\right)^T R(x) \frac{\partial H(x)}{\partial x} = 0\}$ , es el punto de equilibrio  $x_*$

□

Para un sistema PCH lineal como (3.1)-(3.2), esta misma metodología se aplica conforme al siguiente corolario.

**Corolario 1.** Dadas las matrices  $J = -J^T$ ,  $R = R^T$ ,  $Q = Q^T$ ,  $B$  y un punto de equilibrio a estabilizar  $x_* = 0$ . Si existen  $J_d \in \mathbb{R}^{(n \times n)}$ ,  $R_d \in \mathbb{R}^{(n \times n)}$ ,  $Q_d \in \mathbb{R}^{(n \times n)}$  y  $F \in \mathbb{R}^{(m \times n)}$ ; tales que:

1.  $[J_d - R_d]Q_d = [J - R]Q + BF$ ,
2.  $J_d = -J_d^T$ ; y  $R_d = R_d^T \geq 0$ ,
3.  $Q_d = Q_d^T > 0$ ,

Entonces el sistema lineal anterior en lazo cerrado con  $u = Fx + v$  quedará de la forma:

$$\dot{x} = [J_d - R_d]Q_d x + Bv \quad (3.5)$$

$$y' = B^T Q_d x. \quad (3.6)$$

Además, el sistema en lazo cerrado será estable con respecto  $x_* = 0$  si  $v = 0$  y cualquier trayectoria del sistema converge al conjunto invariante más grande contenido en  $U = \{x \mid x^T Q_d R_d Q_d x = 0\}$

□

Un punto a resaltar es que si se tiene el caso de que  $R_d > 0$  entonces el sistema en lazo cerrado será asintóticamente estable. Sin embargo, en el caso de que  $R_d$  sea positiva semidefinida, aún es posible asegurar la estabilidad asintótica sí el conjunto invariante más grande contenido en  $U$  es solo el origen.

### 3.2.1. Estabilización mediante LMIs

En esta parte se presenta la manera obtener las matrices  $J_d, R_d, Q_d, F$  que satisfagan las condiciones pedidas por el corolario (1) anterior, a través de resolver un conjunto de desigualdades matriciales lineales como se muestra en [28].

**Proposición 3.** *Definimos a  $B_\perp$  como una matriz de  $(n - m) \times n$  de rango completo por renglón que aniquila a  $B$ , tal que  $B_\perp B = 0$ . También definimos al producto  $B_\perp(J - R)Q$  como  $E_\perp$ . Existen las matrices  $J_d, R_d, Q_d, F$  que satisfacen todas las condiciones en el Corolario 1, sí y solo sí es posible encontrar una solución  $X = X^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  para las siguientes **LMI**'s:*

$$X > 0, \quad (3.7)$$

$$-[E_\perp X B_\perp^T + B_\perp X E_\perp^T] \geq 0. \quad (3.8)$$

Dada  $X$ , la matriz  $S_d$  se obtiene de la siguiente igualdad:

$$S_d = \begin{bmatrix} B_\perp \\ B^T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} E_\perp X \\ -B^T X E_\perp^T (B_\perp B_\perp^T)^{-1} B_\perp \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Entonces las matrices  $J_d, R_d, Q_d, F$  que satisfacen todas las condiciones en el Corolario 1 pueden escribirse como:

$$J_d = \frac{1}{2}(S_d - S_d^T), \quad (3.10)$$

$$R_d = -\frac{1}{2}(S_d + S_d^T), \quad (3.11)$$

$$Q_d = X^{-1}, \quad (3.12)$$

$$F = (B^T B)^{-1} B^T (S_d X^{-1} - (J - R)Q). \quad (3.13)$$

□

*Demostración.* Para iniciar definimos  $S_d \triangleq J_d - R_d$  con esto las condiciones del Corolario 1 pueden reescribirse como:

$$Q_d = Q_d^T > 0, \quad (3.14)$$

$$2R_d = (R_d + R_d^T) = -(S_d + S_d^T) \geq 0, \quad (3.15)$$

$$S_d Q_d = (J - R)Q + BF \quad (3.16)$$

Con esto solo es necesario probar que existen las matrices  $Q_d$ ,  $S_d$  y  $F$  que satisfacen las ecuaciones (3.14) - (3.16) sí y solo sí existe la matriz  $X = X^T$  tal que satisface las desigualdades matriciales (3.7)-(3.8).

Para probar la parte de necesidad suponemos que existen  $Q_d$ ,  $S_d$  y  $F$  que satisfacen las ecuaciones (3.14) - (3.16), definimos  $X \triangleq Q_d^{-1}$ , con esto  $X = X^T > 0$ ; ahora posmultiplicando ambos lados de la ecuación (3.16) por  $X$  se obtiene:

$$S_d = (J - R)QX + BFX \quad (3.17)$$

Sustituyendo esta ecuación en (3.15), se obtiene

$$-[(J - R)QX + BFX + XQ(J - R)^T + XF^T B^T] \geq 0. \quad (3.18)$$

Al premultiplicar esta última desigualdad por la matriz de rango completo por renglón  $B_\perp$  y posmultiplicando por  $B_\perp^T$  se obtiene

$$-[B_\perp(J - R)QXB_\perp^T + B_\perp XQ(J - R)^T B_\perp^T] \geq 0. \quad (3.19)$$

Esta desigualdad es claramente la misma que en (3.8), de esta forma se puede concluir que existe  $X = X^T$  tal que satisface las desigualdades matriciales (3.7)-(3.8).

Para probar la parte de suficiencia suponemos que existe la matriz  $X = X^T$  que satisface (3.7)-(3.8) y debe comprobarse que existen las matrices  $Q_d$ ,  $S_d$  y  $F$  que satisfacen las ecuaciones (3.14)-(3.16). Igual que en la parte anterior, se parte de definir  $X^{-1} \triangleq Q_d$ , obteniendo así que  $Q_d = Q_d^T > 0$ , esta es la ecuación (3.14). Ahora utilizando a  $S_d$  como aparece en la ecuación (3.9), se puede obtener la siguiente ecuación

$$-\begin{bmatrix} B_\perp \\ B^T \end{bmatrix} [S_d + S_d^T] \begin{bmatrix} B_\perp \\ B^T \end{bmatrix}^T = -\begin{bmatrix} E_\perp X B_\perp^T + B_\perp X E_\perp^T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

Dado que  $-(E_\perp X B_\perp^T + B_\perp X E_\perp^T) \geq 0$ , por consiguiente

$$-\begin{bmatrix} B_\perp \\ B^T \end{bmatrix} [S_d + S_d^T] \begin{bmatrix} B_\perp \\ B^T \end{bmatrix}^T \geq 0. \quad (3.21)$$

Para continuar se hace la observación de que las matrices  $B$  y  $B_{\perp}^T$  son ambas de rango completo por columna, por los que las matrices  $B^T B$  y  $B_{\perp} B_{\perp}^T$  son también de rango completo y por consiguiente son invertibles. De igual forma la matriz

$$\begin{bmatrix} B_{\perp} \\ B^T \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

También es invertible y su inversa esta dada por

$$\begin{bmatrix} B_{\perp}^T & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{\perp} B_{\perp}^T & 0 \\ 0 & B^T B \end{bmatrix}^{-1} \quad (3.23)$$

Tomando en cuenta la desigualdad (3.21) y el que la matriz (3.22) es invertible es posible deducir que  $-(S_d + S_d^T) \geq 0$ . Así la ecuación (3.15) se cumple. Por último solo falta el que la ecuación (3.16) se cumpla escogiendo una  $F$  adecuada. Para este propósito elegimos una matriz  $F$  como aparece en la ecuación (3.13). Desglosando esta ecuación y utilizando los resultados anteriores de esta parte de la prueba se observa que

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} B_{\perp} \\ B^T \end{bmatrix} [S_d Q_d - (J - R)Q - BF] &= \begin{bmatrix} B_{\perp} S_d Q_d - B_{\perp} (J - R)Q \\ B^T S_d Q_d - B^T (J - R)Q - B^T BF \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} E_{\perp} X Q_d - B_{\perp} (J - R)Q \\ B^T S_d Q_d - B^T (J - R)Q - B^T BF \end{bmatrix} = 0 \end{aligned} \quad (3.24)$$

Dado que la matriz (3.22) es invertible, de la ecuación anterior es posible obtener que  $S_d Q_d - (J - R)Q - BF = 0$  que corresponde a la ecuación (3.16), complementando con esto la prueba de suficiencia.  $\square$

**Observación 6.** Una manera para cumplir con la estabilidad asintótica para el sistema en lazo cerrado se obtiene fácilmente al volver a la desigualdad (3.8) en una desigualdad estricta, es decir  $-[E_{\perp} X B_{\perp}^T + B_{\perp} X E_{\perp}^T] > 0$ . Y modificando ligeramente la igualdad (3.9) de la siguiente forma:

$$S_d = \begin{bmatrix} B_{\perp} \\ B^T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} E_{\perp} X \\ -B^T X E_{\perp}^T (B_{\perp} B_{\perp}^T)^{-1} B_{\perp} - \gamma B^T \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

Donde  $\gamma$  es una constante positiva. Con esto se asegura que  $R_d = -\frac{1}{2}(S_d + S_d^T) > 0$  lo que implica que el sistema es asintóticamente estable.

□

Otra condición necesaria y suficiente para la existencia de las LMIs (3.7)-(3.9) está establecida en la siguiente proposición tomada de [28].

**Proposición 4.** *El conjunto de LMIs (3.7)-(3.9) tiene solución si y solo si el sistema  $((J - R)Q, B)$  es (débilmente) estabilizable; esto es, que la parte no controlable de  $((J - R)Q, B)$  es estable.*

□

*Demostración.* La parte de necesidad es relativamente obvia, ya que si  $((J - R)Q, B)$  no es al menos débilmente estabilizable, entonces las matrices  $J_d$ ,  $R_d$ ,  $Q_d$  y  $F$  que satisfacen las condiciones del Corolario 1 no pueden existir, y en acto seguido, las desigualdades matriciales (3.7)-(3.9) no tienen solución. Esto último es debido a que, como se observó en la prueba anterior, si estas desigualdades tienen solución, entonces  $J_d$ ,  $R_d$ ,  $Q_d$  y  $F$  existen; por lo que se presentaría una contradicción.

En cuanto a la parte de suficiencia, si nos basamos en que  $((J - R)Q, B)$  es (débilmente) estabilizable, entonces existe la matriz  $F$  que permite obtener una matriz de lazo cerrado  $\tilde{A} = (J - R)Q + BF$  que es estable. Utilizando como base el Teorema 1 se puede asegurar la existencia de  $J_d$ ,  $R_d$ ,  $Q_d$ , que cumplen con sus respectivas restricciones así como también con  $\tilde{A} = (J_d - R_d)Q_d$ . Ahora de forma análoga a la prueba que se hizo para la proposición (3), definiendo a  $S_d = (J_d - R_d)$ , que cumple con  $-(S_d + S_d^T) \geq 0$ , dándonos con esto la igualdad  $\tilde{A} = S_d Q_d = (J - R)Q + BF$ . Apoyándonos nuevamente en la prueba de la Proposición 3 esto implica la existencia de  $Q_d$  y  $S_d$ , las cuales a su vez satisfacen a (3.14)-(3.16), significando esto que el conjunto de LMIs (3.7)-(3.8) tiene solución, concluyendo así esta prueba. □

Entonces por el método presentado anteriormente es posible estabilizar sistemas Hamiltonianos lineales mediante la asignación de interconexión y amortiguamiento al solucionar el conjunto de LMIs. Sin embargo, esto tiene un inconveniente en el hecho de que las matrices de interconexión y amortiguamiento deseadas son calculadas de forma indirecta al resolver las desigualdades matriciales. Es decir, estas matrices no aparecen explícitamente, lo que hace sumamente difícil darles algún tipo de estructura deseada. Pero no debemos olvidar que esta metodología da una gran facilidad para manipular la forma que tiene la matriz de energía.

Para tener una forma de imponerles a  $J_d$  y  $R_d$  alguna estructura deseada primero debemos mostrar el siguiente lema.

**Lema 1.** *Si el sistema  $((J - R)Q, B)$  es controlable en el dominio de Laplace con  $s = 0$ , entonces  $E_\perp = B_\perp(J - R)Q \in \mathbb{R}^{(n-m) \times n}$  es de rango completo por renglón.*

□

*Demostración.* Partiendo del hecho de que el sistema  $((J - R)Q, B)$  es controlable en  $s = 0$ , entonces la prueba de rango de controlabilidad nos dice que

$$\text{rank} \left( \begin{bmatrix} B & sI - (J - R)Q \end{bmatrix} \right) \Big|_{s=0} = n \quad (3.26)$$

En la prueba de la Proposición 3 se indicó que la matriz  $\begin{bmatrix} B_\perp & B^T \end{bmatrix}^T$  es invertible, por lo que al premultiplicar a  $\begin{bmatrix} B & sI - (J - R)Q \end{bmatrix}$  por esta matriz su rango no cambia y queda

$$\text{rank} \left( \begin{bmatrix} 0 & B_\perp(J - R)Q \\ B^T B & B^T(J - R)Q \end{bmatrix} \right) = n \quad (3.27)$$

Dado que  $B^T B$  es una matriz invertible de  $m \times m$ , entonces el rango de  $B_\perp(J - R)Q$  debe ser de  $n - m$  y ya que  $E_\perp = B_\perp(J - R)Q$  concluimos que  $E_\perp$  es de rango completo por renglón. □

Ahora, utilizando en parte el lema anterior formularemos un conjunto de LMIs que nos permitan tener a  $S_d$  de forma explícita.

**Proposición 5.** *Suponiendo que el sistema  $((J - R)Q, B)$  es controlable en  $s = 0$ . Definiendo a  $B_\perp$  como una matriz de  $(n - m) \times n$  de rango completo por renglón que aniquila a  $B$ , tal que  $B_\perp B = 0$  y también definiendo al producto  $B_\perp(J - R)Q$  como  $E_\perp$ . Además hacemos a  $E \in \mathbb{R}^{n \times m}$  una matriz de rango completo por columna que aniquila a  $E_\perp$  por la derecha, esto es  $E_\perp E = 0$ . Entonces existen las matrices  $J_d, R_d, Q_d$  y  $F$  que satisfacen todas las condiciones del corolario (1) sí y solo sí podemos encontrar una solución  $S_d \in \mathbb{R}^{n \times n}$  para las siguientes LMIs:*

$$\begin{bmatrix} B_\perp S_d E_\perp^T + E_\perp S_d^T B_\perp^T \end{bmatrix} > 0, \quad (3.28)$$

$$- [S_d + S_d^T] \geq 0, \quad (3.29)$$

Junto con la restricción lineal

$$B_{\perp}S_dE_{\perp}^T - E_{\perp}S_d^TB_{\perp}^T = 0 \quad (3.30)$$

Una vez calculada  $S_d$ , las matrices  $J_d$ ,  $R_d$ ,  $Q_d$  y  $F$  que satisfacen todas las condiciones del Corolario 1, pueden ser obtenidas mediante las siguientes ecuaciones:

$$J_d = \frac{1}{2}(S_d - S_d^T), \quad (3.31)$$

$$R_d = -\frac{1}{2}(S_d + S_d^T), \quad (3.32)$$

$$Q_d = X^{-1}, \quad (3.33)$$

$$F = (B^TB)^{-1}B^T(S_dX^{-1} - (J - R)Q), \quad (3.34)$$

donde  $X$  es

$$X = \frac{1}{2} \left( \begin{bmatrix} E_{\perp} \\ E^T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} B_{\perp}S_d \\ Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{\perp}S_d \\ Z \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} E_{\perp} \\ E^T \end{bmatrix}^{-T} \right), \quad (3.35)$$

con

$$Z = [E_{\perp}^T(E_{\perp}E_{\perp}^T)^{-1}(B_{\perp}S_dE) + \gamma E]^T. \quad (3.36)$$

En este caso  $\gamma$  es una constante positiva, la cual debe ser lo suficientemente grande para asegurar que  $X$  sea positiva definida.

□

*Demostración.* Para empezar se considera que el sistema es controlable en  $s = 0$ , entonces utilizando el Lema 1, sabemos que  $E_{\perp} \in \mathbb{R}^{(n-m) \times m}$  es una matriz de rango completo por renglón; lo que implica que  $\begin{bmatrix} E_{\perp} & E^T \end{bmatrix}^T$  es no singular. Siguiendo un camino similar al utilizado en la prueba de la proposición (3) mostraremos que la existencia de las matrices  $Q_d$ ,  $J_d$ ,  $R_d$  y  $F$  que satisfacen a (3.14)-(3.16) sí y solo sí existe  $S_d$  que satisface (3.28)-(3.30). Para probar la parte de necesidad primero suponemos que existen  $Q_d$ ,  $J_d$ ,  $R_d$  y  $F$  que satisfacen (3.14)-(3.16), recordando que  $S_d \triangleq J_d - R_d$ ; de esta

forma automáticamente la LMI (3.29) se satisface. Ahora al premultiplicar la ecuación (3.16) por  $B_\perp$  obtenemos

$$B_\perp S_d Q_d = B_\perp (J - R) Q = E_\perp. \quad (3.37)$$

Dado que  $E_\perp$  es de rango completo por renglón y  $Q_d > 0$ , se entiende que  $B_\perp S_d$  también es de rango completo por renglón. Además como  $Q_d$  es positiva definida, tenemos que  $Q_d + Q_d^T > 0$ , lo que implica que  $B_\perp S_d (Q_d + Q_d^T) S_d^T B_\perp^T > 0$  ó de otra forma

$$B_\perp S_d E_\perp^T + E_\perp S_d^T B_\perp^T > 0. \quad (3.38)$$

De esta forma se satisface la desigualdad matricial (3.28). Por último falta demostrar que la ecuación (3.30). Conociendo que  $Q_d$  es simétrica tenemos que

$$0 = B_\perp S_d (Q_d - Q_d^T) S_d^T B_\perp^T = B_\perp S_d E_\perp^T - E_\perp S_d^T B_\perp^T. \quad (3.39)$$

Con esto la restricción lineal (3.30) se satisface.

Para continuar con la parte de suficiencia, suponemos que existe  $S_d$  que satisface (3.28)-(3.30). Entonces la ecuación (3.15) se mantiene. Después definimos  $Z$  y  $X$  como en las ecuaciones (3.35) y (3.36); pre y posmultiplicando a  $X$  por  $\begin{bmatrix} E_\perp & E^T \end{bmatrix}^T$  y  $\begin{bmatrix} E_\perp & E^T \end{bmatrix}$  respectivamente tenemos

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} E_\perp \\ E^T \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} E_\perp \\ E^T \end{bmatrix}^T &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} B_\perp S_d E_\perp^T + E_\perp S_d^T B_\perp^T & B_\perp S_d E_\perp + E_\perp Z^T \\ E^T S_d^T B_\perp^T + Z E_\perp^T & Z E + E^T Z^T \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} E_\perp \\ E^T \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} E_\perp \\ E^T \end{bmatrix}^T &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} B_\perp S_d E_\perp^T + E_\perp S_d^T B_\perp^T & 2B_\perp S_d E \\ 2E^T S_d^T B_\perp^T & 2\gamma E^T E \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Utilizando el complemento de Schur sabemos que la matriz (3.40) es positiva definida sí y solo sí se satisfacen las siguientes desigualdades

$$B_\perp S_d E_\perp^T + E_\perp S_d^T B_\perp^T > 0, \quad (3.41)$$

$$2\gamma E^T E - (2B_\perp S_d E)(B_\perp S_d E_\perp^T + E_\perp S_d^T B_\perp^T)^{-1}(2E^T S_d^T B_\perp^T) > 0. \quad (3.42)$$

La primera desigualdad sabemos que se mantiene ya que es la misma desigualdad (3.28). En la segunda desigualdad como el producto de  $E^T E$  da una matriz de rango completo, basta con utilizar un valor de  $\gamma$  lo suficientemente grande para que la desigualdad se cumpla. Este resultado también implica que  $X > 0$ . Y usando a  $X^{-1}$  como  $Q_d$ , implica también que  $Q_d = Q_d^T > 0$ .

El siguiente paso, es mostrar que la ecuación (3.16) se satisface. Para esto escogemos una  $F$  como aparece en la ecuación (3.34) y observamos que

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} B_\perp \\ B^T \end{bmatrix} (S_d - (J - R)QX - BFX) \begin{bmatrix} E_\perp \\ E^T \end{bmatrix}^T &= \begin{bmatrix} B_\perp S_d - E_\perp X \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_\perp \\ E^T \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} B_\perp S_d E_\perp^T - E_\perp X E_\perp^T & B_\perp S_d E - E_\perp X E \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(B_\perp S_d E_\perp^T - E_\perp S_d^T B_\perp^T) & \frac{1}{2}(B_\perp S_d E_\perp - E_\perp Z^T) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0, \end{aligned} \quad (3.43)$$

Esta última igualdad se cumple dada la condición de la ecuación (3.30) y dado que sabemos que  $\begin{bmatrix} B_\perp & B^T \end{bmatrix}$  y  $\begin{bmatrix} E_\perp & E^T \end{bmatrix}$  son invertibles, es posible concluir que  $S_d - (J - R)QX - BFX = 0$ . Posmultiplicando esta ecuación por  $X^{-1} = Q_d$ , se obtiene  $S_d Q_d - (J - R)Q - BF = 0$  lo cual es claramente la ecuación (3.16). Cumpliendo así con la prueba de suficiencia.  $\square$

### 3.3. Caso de estudio: Sistema masa-resorte

Considerando un sistema de tres masas y dos resortes conectados en serie, siendo una de las constantes del resorte negativa; dándole así al sistema una naturaleza inestable. El movimiento del sistema está gobernado por el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales en forma de un sistema PCH :

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I_3 \\ -I_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial q}(q, p) \\ \frac{\partial H}{\partial p}(q, p) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ B_p \end{bmatrix} u \quad (3.44)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & B_p^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial q}(q, p) \\ \frac{\partial H}{\partial p}(q, p) \end{bmatrix}. \quad (3.45)$$

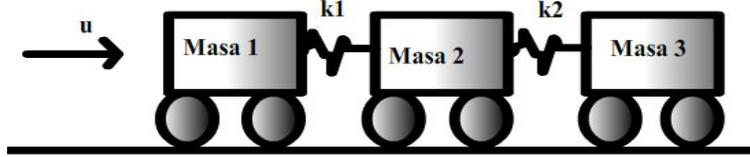


Figura 3.1: Sistema masa resorte

Donde  $q = (q_1, q_2, q_3)^T$  es el vector de coordenadas generalizadas, el cual corresponde a las posiciones de la Masa I, Masa II y Masa III, respectivamente;  $p = (p_1, p_2, p_3)$  es el vector de momentos generalizados; y  $I_3$  es una matriz identidad de  $3 \times 3$ . Como se observa en la Figura 3.1, asumimos que en el sistema actúa una fuerza directamente sobre la Masa I, por lo que la entrada  $u$  es un escalar. Por su parte la salida del sistema  $y$  también es un escalar y representa la velocidad en la Masa I, siendo  $B_p = [1 \ 0 \ 0]^T$ . El Hamiltoniano del sistema está dado por la siguiente ecuación

$$H(q, p) = \frac{1}{2} \left[ \frac{p_1^2}{m_1} + \frac{p_2^2}{m_2} + \frac{p_3^2}{m_3} + k_1(q_1 - q_2)^2 + k_2(q_2 - q_3)^2 \right], \quad (3.46)$$

con  $m_1$ ,  $m_2$ , y  $m_3$  como el valor de las Masas I, II y III respectivamente; y  $k_1$  y  $k_2$  como el valor de los Resortes I y II. Asumimos que el valor de todas las masas así como también el valor de  $k_1$  es positivo, pero el valor de  $k_2$  es negativo.

Asignamos los valores de  $m_1 = 1, m_2 = 2, m_3 = 3, k_1 = 1, k_2 = -2$ . Al realizar una simulación con condiciones iniciales diferentes a 0 obtenemos los siguientes comportamientos inestables, tanto para las posiciones como para sus respectivas velocidades.

En principio utilizando la Proposición 3 y definiendo una matriz  $B_\perp$  de  $5 \times 6$ :

$$B_\perp = \begin{bmatrix} I_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_2 \end{bmatrix}. \quad (3.47)$$

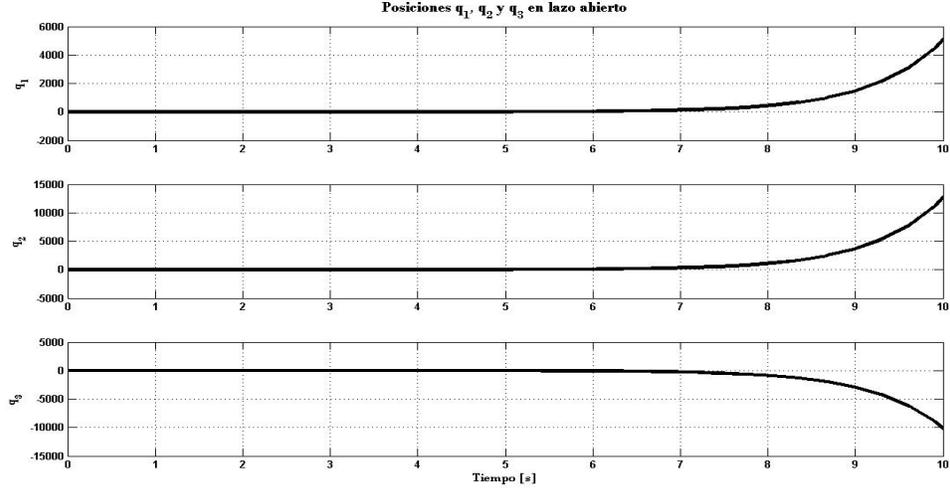


Figura 3.2: Posiciones del sistema

El siguiente paso entonces es el resolver las LMIs (3.7)-(3.8), para lo cual nos apoyamos en una librería descargable de internet para MATLAB llamada *yalmip* [1], la cual permite la solución de problemas de optimización tanto convexos como no convexos, y de nuestro particular interés es el que permite definir de una forma simple desigualdades matriciales y utiliza algoritmos más rápidos y simples que el toolbox convencional de *MATLAB*. Sin embargo, al realizar el proceso computacional, nos encontramos con el problema de que los eigenvalores obtenidos para  $X$  son demasiado grandes, lo cual repercute en que la matriz  $Q_d$  esté muy cerca de ser singular. Para prevenir esto es posible modificar ligeramente las desigualdades (3.7)-(3.8) utilizando unas ligeras restricciones en el calculo de  $X$ :

$$0.01 \times I_6 < X < 50 \times I_6. \quad (3.48)$$

También se hace un ajuste similar en la siguiente desigualdad matricial:

$$0.001 \times I_5 < -[E_{\perp} X B_{\perp}^T + B_{\perp} X E_{\perp}^T] < 10 \times I_5 \quad (3.49)$$

Con esto se obtienen los siguiente resultados:

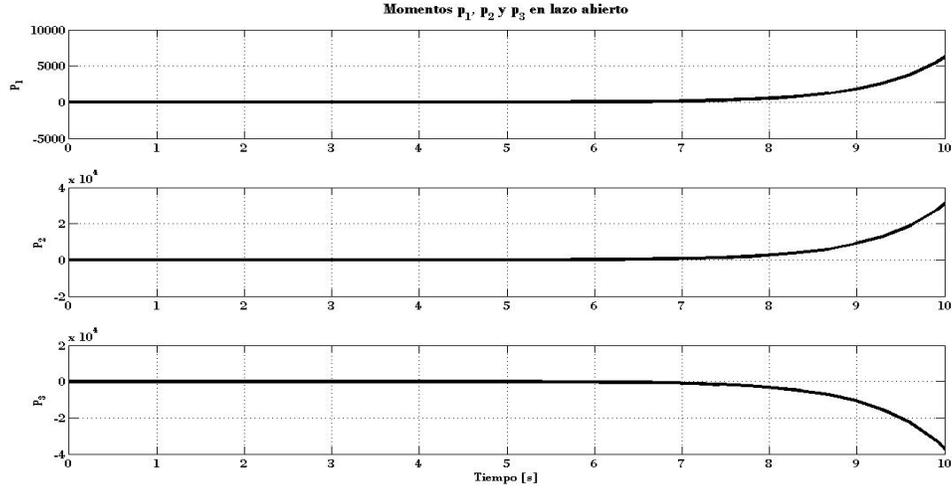


Figura 3.3: Velocidades del sistema

$$J_d = \begin{bmatrix} 0 & 0.3490 & 3.7148 & 547.0397 & -141.3025 & -82.6774 \\ -0.3490 & 0 & 0.3052 & -70.6257 & 94.6946 & 74.3497 \\ -3.7148 & -0.3052 & 0 & -27.5715 & 49.6786 & 40.8556 \\ -547.0397 & 70.6257 & 27.5715 & 0 & 9.3208 & -6.4134 \\ 141.3025 & -94.6946 & -49.6786 & -9.3208 & 0 & -5.7005 \\ 82.6774 & -74.3497 & -40.8556 & 6.4134 & 5.7005 & 0 \end{bmatrix},$$

$$R_d = \begin{bmatrix} 2.4862 & -0.0722 & 0.0868 & 0 & -0.0511 & 0.0373 \\ -0.0722 & 1.9004 & 0.7524 & 0 & -0.2821 & 0.3491 \\ 0.0868 & 0.7524 & 1.4982 & 0 & 0.3449 & -0.4374 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0511 & -0.2821 & 0.3449 & 0 & 2.5655 & -0.1121 \\ 0.0373 & 0.3491 & -0.4374 & 0 & -0.1121 & 2.6438 \end{bmatrix},$$

$$Q_d = \begin{bmatrix} 0.0528 & 0.2179 & -0.2786 & 0.0081 & 0.0688 & -0.0765 \\ 0.2179 & 0.9925 & -1.2598 & 0.0387 & 0.3382 & -0.3784 \\ -0.2786 & -1.2598 & 1.6079 & -0.0493 & -0.4309 & 0.4823 \\ 0.0081 & 0.0387 & -0.0493 & 0.0044 & 0.0228 & -0.0244 \\ 0.0688 & 0.3382 & -0.4309 & 0.0228 & 0.2285 & -0.2584 \\ -0.0765 & -0.3784 & 0.4823 & -0.0244 & -0.2584 & 0.3013 \end{bmatrix},$$

$$F = \begin{bmatrix} -19.0326 & -79.2491 & 100.6402 & -2.7045 & -21.8611 & 24.0635 \end{bmatrix}.$$

Con estos valores al llevar acabo la simulación observamos como el sistema se estabiliza satisfactoriamente.

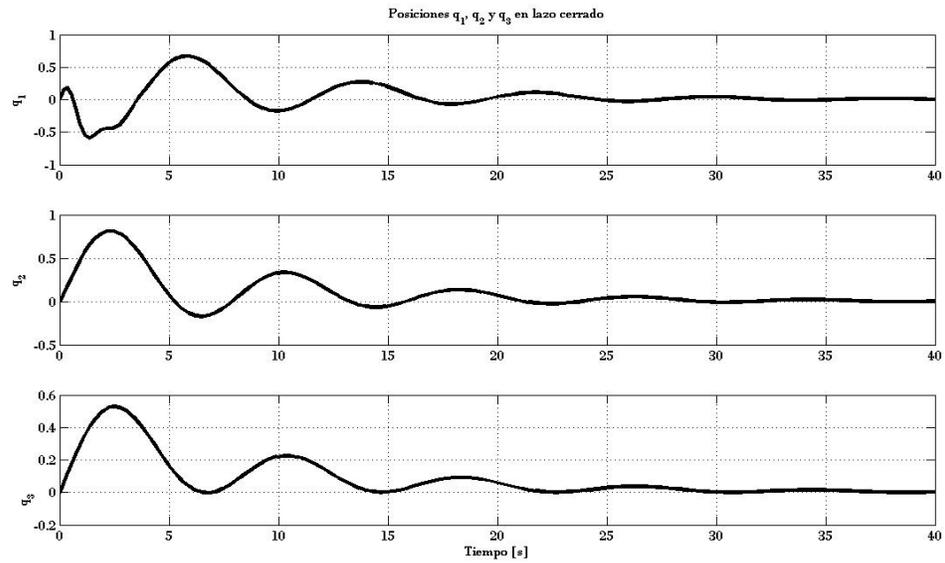


Figura 3.4: Posiciones controladas del sistema

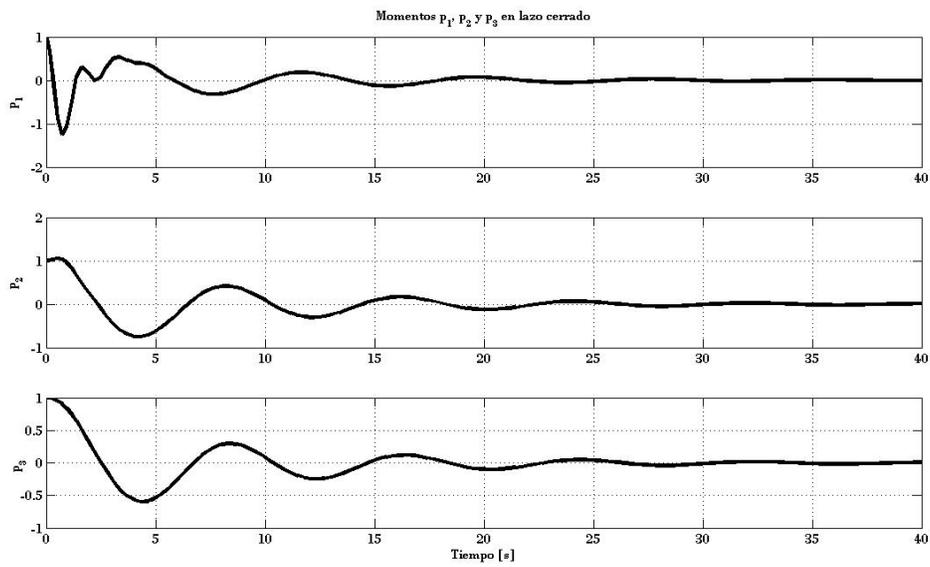


Figura 3.5: Velocidades controladas del sistema



# Capítulo 4

## Estabilización por OF de PCHS lineales utilizando LMIs

En este capítulo se presenta la principal aportación de este trabajo, la cual consiste en presentar formas alternativas para resolver el problema de estabilización de sistemas Hamiltonianos lineales controlados por puerto mediante desigualdades matriciales lineales, presentado por Arjan van der Schaft en [28]. Al igual que en ese trabajo, se utiliza el poderoso recurso de las desigualdades matriciales lineales, pero el principal enfoque en esta parte es el utilizar solo aquellos estados que sean medibles, trabajando estos como las salidas del mismo sistema, es decir, trabajando con la idea de retroalimentación de salida.

En la primera parte de este capítulo se presenta una forma del problema de estabilización de sistemas lineales que da lugar a presentar dos definiciones conocidas como *Problema-W* y *Problema-P* como aparecen en [7], para después modificar uno de ellos con las condiciones deseadas en el problema del IDA-PBC.

En la siguiente parte se utiliza la metodología presentada en [28] para modificarla con la finalidad de utilizar solo los estados disponibles para la medición en la señal de control.

### 4.1. Problema de Estabilización

Para iniciar se revisa rápidamente el que se busca al estabilizar un sistema lineal y la forma en que se utilizará la señal de control, dependiente de la

salida del sistema. Considerando un sistema lineal continuo e invariante en el tiempo representado por las siguientes ecuaciones

$$\Sigma := \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (4.1)$$

donde  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$  y  $y \in \mathbb{R}^p$ . Es bien sabido que el sistema anterior puede estabilizarse mediante la retroalimentación de estado sí y solo sí existen las matrices  $P > 0$  y  $F$  de dimensiones adecuadas, tales que

$$P(A - BF) + (A - BF)^T P < 0 \quad (4.2)$$

Para este caso la entrada de control sería de la forma  $u = -Fx$ . Esto genera un sistema en lazo cerrado

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_c x(t), \\ y &= Cx(t), \end{aligned} \quad (4.3)$$

el cual es estable dado que la nueva matriz de lazo cerrado  $A_c = A - BF$  es Hurwitz.

Ahora considerando que la estructura que deseamos es la del caso de retroalimentación estática de salida, para ello se hace que la ley de control tenga la siguiente estructura

$$u = -F_o y, \quad (4.4)$$

o de forma equivalente

$$u = -F_o Cx. \quad (4.5)$$

Utilizando esta representación de la señal de control en la desigualdad (4.2) obtenemos

$$P(A - BF_o C) + (A - BF_o C)^T P < 0. \quad (4.6)$$

Entonces si existen  $P > 0$  y  $F_o$  de dimensiones adecuadas y satisfacen la desigualdad (4.6), el sistema en lazo cerrado

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_{co} x(t), \\ y &= Cx(t), \end{aligned} \quad (4.7)$$

con  $A_{co} = A - BF_o C$ , es estable.

### 4.1.1. Problema W y Problema P

El problema de estabilización para sistemas lineales utilizando retroalimentación de salida, se trata de encontrar a  $P$  y  $F_o$  que satisfagan a (4.6), para conseguir estas matrices replanteamos el problema de la siguiente forma; definimos  $W \triangleq P^{-1}$ , premultiplicando y posmultiplicando la desigualdad (4.6) por  $W$  se tiene

$$(A - BF_oC)W + W(A - BF_oC)^T < 0 \quad W > 0, \quad (4.8)$$

ahora partimos la matriz de ganancias de control de la forma  $F_o = NM^{-1}$  y se sustituye en la desigualdad (4.8)

$$(A - BNM^{-1}C)W + W(A - BNM^{-1}C)^T < 0. \quad (4.9)$$

Recordando los términos

$$AW + WA^T - BNM^{-1}CW - W(BNM^{-1}C)^T < 0. \quad (4.10)$$

Al considerar que  $C = M^{-1}CW$  nos queda una desigualdad en términos de  $W$  y  $C$ .

$$AW + WA^T - BNC - C^T N^T B^T < 0. \quad (4.11)$$

Con esto se puede definir el Problema-W.

**Definición 2** (Problema-W). *Dado el sistema (4.1) con  $C$  de rango completo por renglón, si existen las matrices  $W$ ,  $M$ ,  $N$  tales que*

$$\begin{cases} AW + WA^T - BNC - C^T N^T B^T < 0, \\ W > 0, \\ MC = CW. \end{cases} \quad (4.12)$$

□

Dos aspectos muy importantes a considerar sobre el Problema-W son, en primer lugar que es un problema convexo, por consiguiente es posible resolverlo con algoritmos eficientes como se aprecia en [4], y además si tiene solución entonces el problema de retroalimentación de salida en (4.8) el cual es no convexo también tiene solución.

**Teorema 2.** Sean  $W$ ,  $M$ ,  $N$  soluciones al Problema-W, entonces la retroalimentación de la forma:

$$u = -NM^{-1}y = -F_o y \quad (4.13)$$

Estabiliza al sistema (4.1).

□

Para la definición del Problema-P se parte de la desigualdad (4.6), se procede de forma similar, pero con las consideraciones de que la matriz de ganancias de control se divide como  $F_o = M^{-1}N$  y que  $B = PBM^{-1}$ .

**Definición 3** (Problema-P). Dado el sistema (4.1), con  $B$  de rango completo por columna, el Problema-P consiste en encontrar las matrices  $P$ ,  $M$ , y  $N$  tales que

$$\begin{cases} PA + A^T P - BNC - C^T N^T B^T < 0, \\ P > 0, \\ BM = PB. \end{cases} \quad (4.14)$$

□

**Corolario 2.** Sean  $P$ ,  $M$  y  $N$  soluciones del Problema-P. Entonces la retroalimentación de la forma

$$u = -M^{-1}Ny = -F_o y, \quad (4.15)$$

estabiliza al sistema (4.1).

□

Para que el Problema-P o el Problema-W tengan solución es una condición suficiente para que el problema de estabilización por retroalimentación de salida también tenga solución; se puede decir que **el Problema-P y el Problema-W son viables si existe una retroalimentación de salida que estabilice al sistema (4.1).**

## 4.2. Estabilización por IDA-PBC utilizando el Problema W

Consideramos el siguiente sistema lineal e invariante en el tiempo en su forma Hamiltoniana

$$\Sigma := \begin{cases} \dot{x}(t) = [J - R]Qx(t) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t). \end{cases} \quad (4.16)$$

La ley de control se define de forma que utilice la salida del sistema, es decir

$$u = -F_o y = -F_o Cx. \quad (4.17)$$

Mediante esta ley de control se busca que el sistema en lazo cerrado sea estable en un punto de equilibrio deseado  $x^* = 0$  y también que cumpla con la siguiente igualdad

$$\dot{x} = [J - R]Qx - BF_o Cx = [J_d - R_d]Q_d x. \quad (4.18)$$

El comportamiento deseado del sistema en lazo cerrado es un sistema Hamiltoniano por lo que

- $J_d \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $J_d = -J_d^T$ ,
- $R_d \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $R_d = R_d^T > 0$ ,
- y  $Q_d \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Q_d = Q_d^T > 0$ .

Si el sistema en lazo cerrado es estable entonces, siguiendo la misma idea de la desigualdad (4.2), existe  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tal que  $P > 0$ , y que satisface las siguientes desigualdades equivalentes

$$P[(J - R)Q - BF_o C] + [(J - R)Q - BF_o C]^T P < 0, \quad (4.19)$$

$$P[J_d - R_d]Q_d + Q_d[J_d - R_d]^T P < 0. \quad (4.20)$$

Nuevamente definimos a  $W = P^{-1}$ , premultiplicando y posmultiplicando la desigualdad (4.20) por  $W$  se tiene

$$[J_d - R_d]Q_d W + W Q_d [J_d - R_d]^T < 0, \quad (4.21)$$

**Proposición 6.** *Al suponer que  $W = Q_d^{-1}$  entonces la desigualdad (4.21) se mantiene.*

*Demostración.* Al hacer que  $Q_d = W^{-1}$  entonces  $Q_d > 0$ , sustituyendo esto en la desigualdad (4.21) tenemos que

$$[J_d - R_d] + [J_d - R_d]^T < 0,$$

$$[J_d - J_d^T] - [R_d + R_d^T] < 0.$$

Recordando que  $J_d - J_d^T = 0$  y que  $R_d = R_d^T > 0$  entonces

$$-2R_d < 0.$$

□

Con la Proposición 6 es posible modificar el Problema-W para utilizar la metodología de IDA-PBC.

**Proposición 7.** *Considere el sistema (4.16), existen las matrices  $J_d$ ,  $R_d$ ,  $Q_d$ ,  $F_o$  que satisfacen las siguientes condiciones*

1.  $[J_d - R_d]Q_d = [J - R]Q - BF_oC$ ,
2.  $J_d = -J_d^T$ ,  $R_d = R_d^T > 0$ ,
3.  $Q_d = Q_d^T > 0$ .

*Si y solo si es posible encontrar las matrices  $W$ ,  $M$  y  $N$  de dimensiones adecuadas tales que*

$$\begin{cases} [J - R]QW + WQ[J - R]^T - BNC - C^T N^T B^T < 0, \\ W > 0, \\ MC = CW. \end{cases} \quad (4.22)$$

*Con lo anterior es posible definir*

$$S_d = [J - R]QW - BNC, \quad (4.23)$$

$$J_d = \frac{1}{2}(S_d - S_d^T) \quad (4.24)$$

#### 4.2. ESTABILIZACIÓN POR IDA-PBC UTILIZANDO EL PROBLEMA W55

$$R_d = \frac{1}{2}(S_d - S_d^T) \quad (4.25)$$

$$Q_d = W^{-1} \quad (4.26)$$

$$F_o = NM^{-1} \quad (4.27)$$

*Demostración.* Primero se define a  $S_d$  de la siguiente manera

$$S_d \triangleq J_d - R_d. \quad (4.28)$$

Mediante esto las condiciones a cumplir por las matrices  $J_d$ ,  $R_d$ ,  $Q_d$ ,  $F_o$  que aparecen enumeradas en la Proposición 7 pueden reescribirse de la siguiente manera

$$S_d Q_d = [J - R]Q - BF_o C, \quad (4.29)$$

$$2R_d = (R_d + R_d^T) = -(S_d + S_d^T) > 0, \quad (4.30)$$

$$Q_d = Q_d^T > 0. \quad (4.31)$$

Consideramos la definición de  $F_o = NM^{-1}$  y la sustituimos en (4.29)

$$S_d Q_d = [J - R]Q - BNM^{-1}C,$$

posmultiplicamos ambos lados de la igualdad por  $W = Q^{-1}$

$$S_d = ([J - R]Q - BNM^{-1}C)W,$$

$$S_d = [J - R]QW + BNM^{-1}CW,$$

por último usamos la condición del Problema-W,  $CW = MC$  y nos queda

$$S_d = [J - R]QW - BNC. \quad (4.32)$$

Las ecuaciones (4.23) y (4.32) son la misma, con esto se cumplen todas las condiciones de la Proposición 7.  $\square$

Con este resultado se observa que es posible resolver el problema de estabilización de un sistema lineal utilizando la metodología del control basado en pasividad por asignación de interconexión y amortiguamiento, de una manera alterna. Siendo una clara ventaja que el proceso puede realizarse rápidamente de forma computacional gracias al uso de las desigualdades matriciales lineales; además de qué en este método el controlador queda en función de la salida del sistema, lo cual es sumamente útil cuando se lleva a cabo implementaciones físicas.

**Observación 7.** *Un aspecto a considerar con el método presentado, es que se encuentra ligado a que el Problema-W tenga solución; para ello es necesario pero no suficiente la existencia de un controlador por retroalimentación de salida que estabilice al sistema. Una condición clara para la existencia de este controlador es que aquellos estados no controlables del sistema, deben ser estables; como se aprecia en [30] y [2].*

□

### 4.2.1. Ejemplos

#### Ejemplo 4.1

Considere el siguiente sistema lineal  $\dot{x} = Ax + Bu$ ,  $y = Cx$  donde:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Los eigenvalores de la matriz A son  $(0, 0, 3, -1)$  por lo que el sistema por si mismo es inestable. Se busca estabilizarlo con respecto al origen, mediante una señal de control de la forma  $u = -F_o y$ . Utilizando la Proposición 7 se obtienen las matrices M, W, N, mediante las desigualdades matriciales aplicando librerías de MATLAB de *yalmip*. Y a su vez se computan las matrices  $S_d, J_d, R_d, Q_d, F_o$ .

$$J_d = \begin{bmatrix} 0 & 9.3911 & -29.2221 & -21.8204 \\ -9.3911 & 0 & -22.5607 & -54.1598 \\ 29.2221 & 22.5607 & 0 & -8.5670 \\ 21.8204 & 54.1598 & 8.5670 & 0 \end{bmatrix},$$

$$R_d = \begin{bmatrix} 21.8309 & -0.2779 & -6.1446 & 4.9966 \\ -0.2779 & 7.1666 & -1.7243 & 1.8461 \\ -6.1446 & -1.7243 & 6.8820 & -4.1415 \\ 4.9966 & 1.8461 & -4.1415 & 7.9878 \end{bmatrix},$$

#### 4.2. ESTABILIZACIÓN POR IDA-PBC UTILIZANDO EL PROBLEMA W57

$$Q_d = \begin{bmatrix} 0.1251 & -0.0386 & 0.1034 & 0.1748 \\ -0.0386 & 0.0502 & -0.0096 & -0.0185 \\ 0.1034 & -0.0096 & 0.2044 & 0.2294 \\ 0.1748 & -0.0185 & 0.2294 & 0.4867 \end{bmatrix},$$

$$F_o = \begin{bmatrix} -8.1300 & -11.1713 \\ -11.5770 & -16.7502 \end{bmatrix}.$$

En la Figura 4.1 se muestra la respuesta del sistema en lazo abierto, aquí se observa que la salida del sistema no es estable lo cual corresponde con dos de los estados.

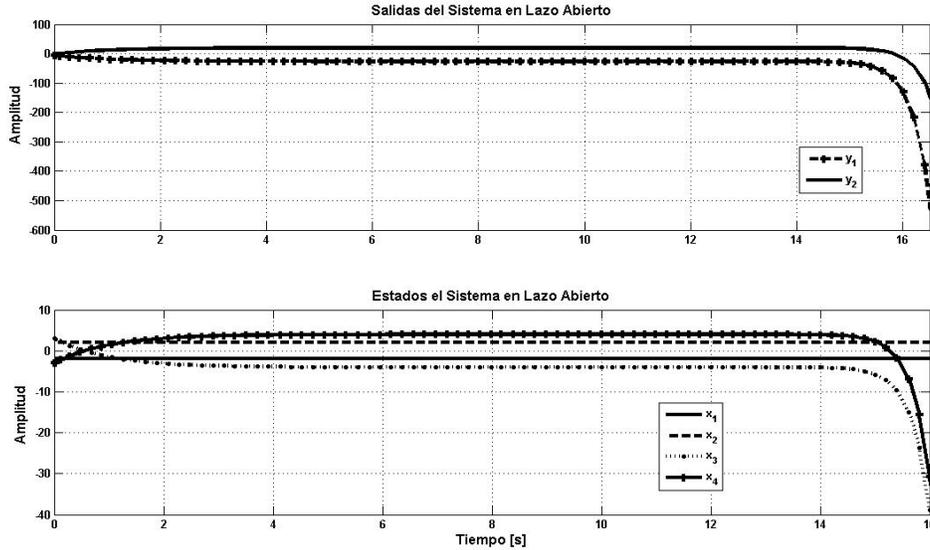


Figura 4.1: Respuesta del sistema en lazo abierto

En la Figura 4.2 se muestra la respuesta del sistema ya con el controlador, se aprecia que en este caso tanto las salidas como los estados del sistema son estables.

En la Figura 4.3 aparece la respuesta del sistema  $\dot{x} = [J_d - R_d]Q_dx$ , la cual es igual a la del sistema en lazo cerrado.

#### Ejemplo 4.2

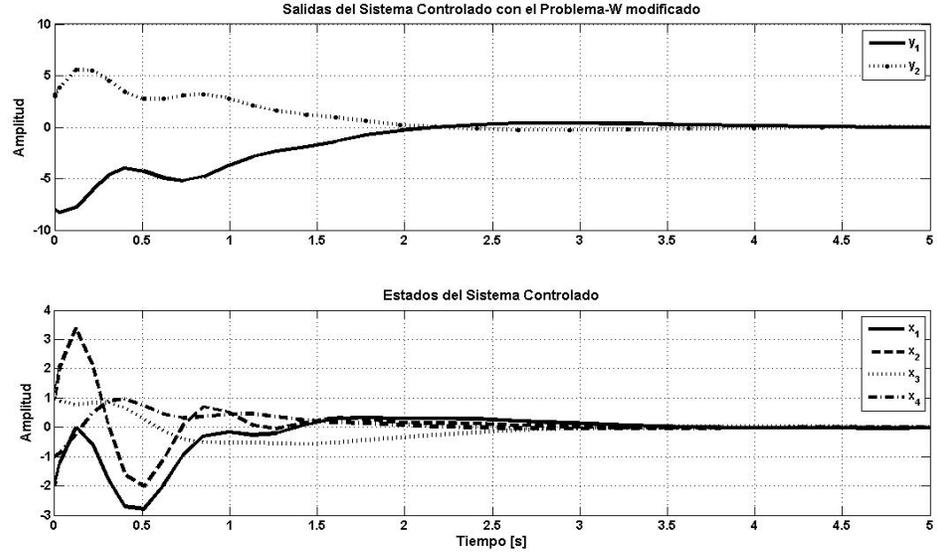


Figura 4.2: Respuesta del sistema controlado

Considere un sistema de cuarto orden de la forma  $\dot{x} = Ax + Bu$ ,  $y = Cx$  donde:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Los eigenvalores del sistema son  $(-3, -1, 3, 4)$ , los modos inestables de este sistema son controlables, mientras que aquellos que son no controlables son estables, con lo cual es posible utilizar el método del Problema-W modificado que aparece en la Proposición 7. Resolviendo el conjunto de desigualdades matriciales se obtiene

$$J_d = \begin{bmatrix} 0 & 347.5843 & 14.5929 & 10.3822 \\ -347.5843 & 0 & 29.1858 & 20.7644 \\ -14.5929 & -29.1858 & 0 & -18.2878 \\ -10.3822 & -20.7644 & 18.2878 & 0 \end{bmatrix},$$

## 4.2. ESTABILIZACIÓN POR IDA-PBC UTILIZANDO EL PROBLEMA W59

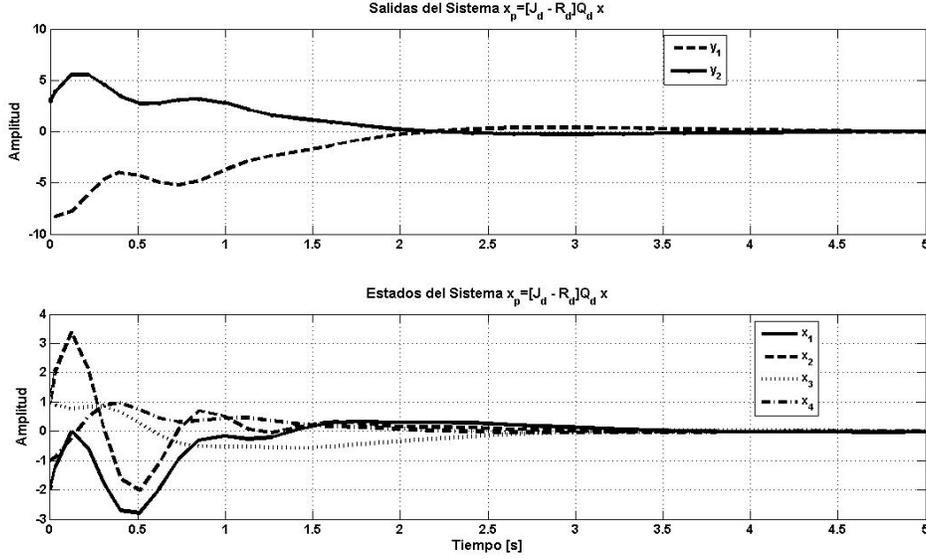


Figura 4.3: Respuesta del sistema  $\dot{x} = [J_d - R_d]Q_d x$

$$R_d = \begin{bmatrix} 678.1397 & -110.2623 & -14.5929 & -10.3822 \\ -110.2623 & 584.9063 & -29.1858 & -20.7644 \\ -14.5929 & -29.1858 & 216.7014 & 214.6701 \\ -10.3822 & -20.7644 & 214.6701 & 216.6934 \end{bmatrix},$$

$$Q_d = \begin{bmatrix} 0.0035 & -0.0014 & 0 & 0 \\ -0.0014 & 0.0023 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.1803 & -1.6590 \\ 0 & 0 & -1.6590 & 2.3800 \end{bmatrix},$$

$$F_o = [ 127.7040 \quad -193.9328 ].$$

En las simulaciones se fijan las condiciones iniciales de los estados en  $(x_{1i} = 1, x_{2i} = -1, x_{3i} = 2, x_{4i} = -2)$ , esperando estabilizar el sistema en el origen. En la Figura 4.4 se muestra la respuesta del sistema en lazo abierto

En la Figura 4.5 se muestra la respuesta del sistema en lazo cerrado, como comparación en la Figura 4.6 aparece la respuesta del mismo sistema pero controlado con el conjunto de LMIs (3.7)-(3.8) de la Proposición 3, con una matriz de ganancia de control

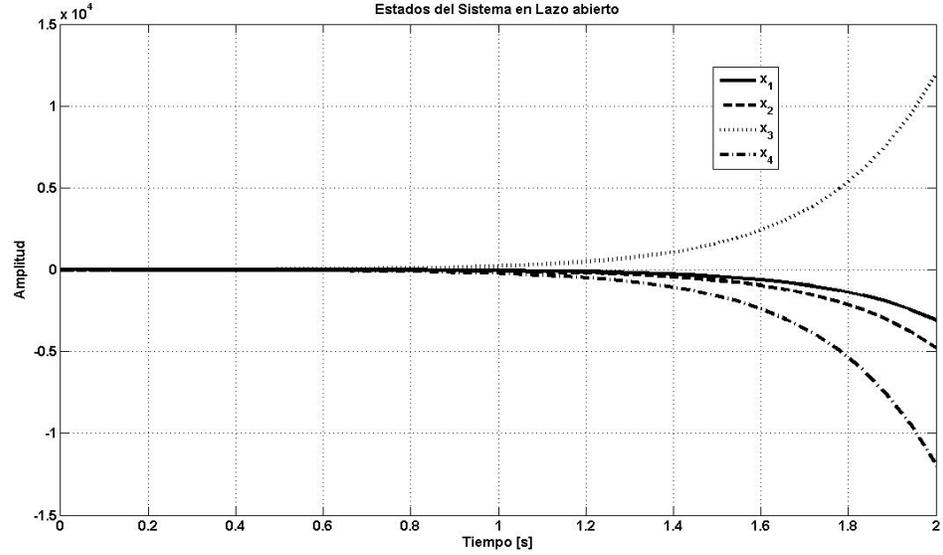


Figura 4.4: Respuesta del sistema en lazo abierto

$$F = \begin{bmatrix} 2.0298 & 5.2332 & 87.3533 & -105.5603 \end{bmatrix}.$$

En la gráfica se aprecia como el sistema se estabiliza en menor tiempo utilizando el control por retroalimentación de salida, así como también presenta un valor de pico menor en la respuesta transitoria.

### 4.3. Estabilización por IDA-PBC por retroalimentación de salida

Considere un sistema lineal en su forma Hamiltoniana

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = [J - R]Qx(t) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t). \end{cases} \quad (4.33)$$

nuevamente se busca estabilizar el sistema utilizando una señal de control de la forma  $u = -F_o y = -F_o Cx$ ; y que el sistema en lazo cerrado tenga una estructura de la forma

### 4.3. ESTABILIZACIÓN POR IDA-PBC POR RETROALIMENTACIÓN DE SALIDA 61

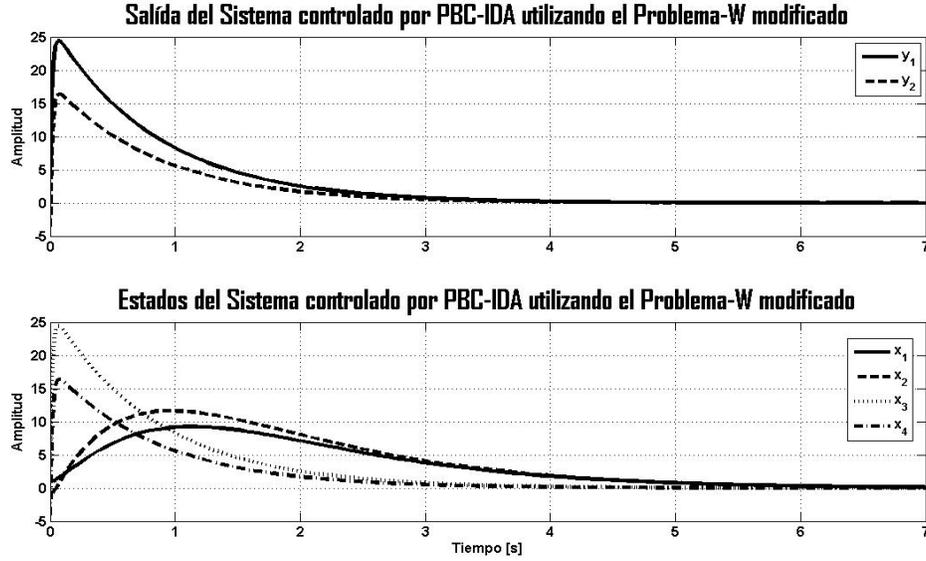


Figura 4.5: Respuesta del sistema en lazo cerrado con el Problema W modificado (Proposición 7)

$$\dot{x}(t) = [J_d - R_d]Q_d. \quad (4.34)$$

Para lograr este objetivo, utilizamos la definición de  $B_\perp$ , las matrices  $J_d$ ,  $R_d$ ,  $Q_d$ ,  $F$  que satisfacen todas las condiciones en el Corolario 1, así como el conjunto de desigualdades matriciales lineales

$$X > 0, \quad (4.35)$$

$$-[E_\perp X B_\perp^T + B_\perp X E_\perp^T] \geq 0, \quad (4.36)$$

de la Proposición 3 que aparece en el capítulo anterior.

Definiendo a  $S_d \triangleq J_d - R_d$ , entonces la estructura deseada del sistema y el sistema en lazo cerrado deben cumplir con la siguiente igualdad

$$S_d Q_d = (J - R)Q + B F_o C, \quad (4.37)$$

reacomodando los términos tenemos que

$$B F_o C = S_d Q_d - (J - R)Q, \quad (4.38)$$

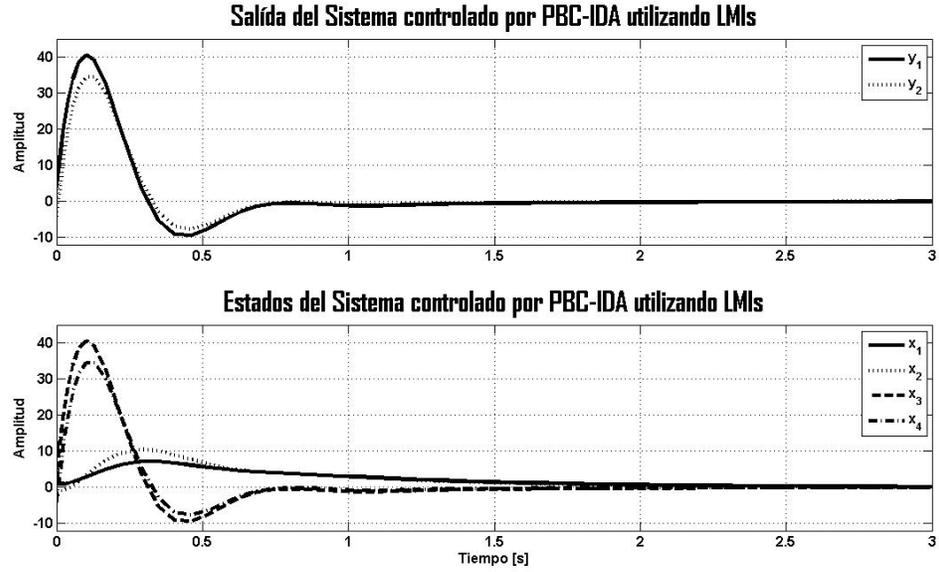


Figura 4.6: Respuesta del sistema en lazo cerrado con LMIs (Proposición 3)

premultiplicando ambos lados de la igualdad por  $B^T$

$$B^T B F_o C = B^T S_d Q_d - (J - R)Q, \quad (4.39)$$

como la matriz  $B$  es de rango completo por columna, la matriz  $B^T B$  es invertible haciendo

$$F_o C = (B^T B)^{-1} B^T S_d Q_d - (J - R)Q, \quad (4.40)$$

ahora posmultiplicando por  $C^T$

$$F_o C C^T = (B^T B)^{-1} B^T S_d Q_d - (J - R)Q C^T. \quad (4.41)$$

Si la matriz  $C$  es de rango completo por renglón, el producto  $C C^T$  es invertible, dejando así la matriz de ganancias de control de la forma

$$F_o = (B^T B)^{-1} B^T S_d Q_d - (J - R)Q C^T (C C^T)^{-1}. \quad (4.42)$$

### 4.3.1. Ejemplos

#### Ejemplo 4.3

Considere un sistema de cuarto orden la forma  $\dot{x} = Ax + Bu$ ,  $y = Cx$  donde:

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Los eigenvalores del sistema son  $(-5, -1, 3, 4)$ , por lo que en lazo abierto el sistema es inestable como se aprecia en la Figura 4.7; en este caso el rango de  $B$  es de uno, entonces  $B_{\perp}$  debe ser una matriz de  $3 \times 4$ , de rango completo por renglón, por simplicidad se toma la forma

$$B_{\perp} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

el siguiente paso del problema es el resolver mediante software las desigualdades matriciales lineales (4.35)-(4.36), para después obtener las matrices correspondientes al sistema deseado y también la señal de control mediante la ecuación (4.42).

$$J_d = \begin{bmatrix} 0 & 1.1724 & 0 & 0 \\ -1.1724 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -35.9863 \\ 0 & 0 & 35.9863 & 0 \end{bmatrix},$$

$$R_d = \begin{bmatrix} 3.2961 & -0.1558 & 0 & 0 \\ -0.1558 & 3.2055 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4873 & -0.4873 \\ 0 & 0 & 136.1518 & 136.3829 \end{bmatrix},$$

$$Q_d = \begin{bmatrix} 1.345 & -0.4266 & 0 & 0 \\ -0.4266 & 0.4472 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4606 & -0.572 \\ 0 & 0 & -0.572 & 0.7466 \end{bmatrix},$$

$$F_o = [ 17.0797 \quad -25.2255 ].$$

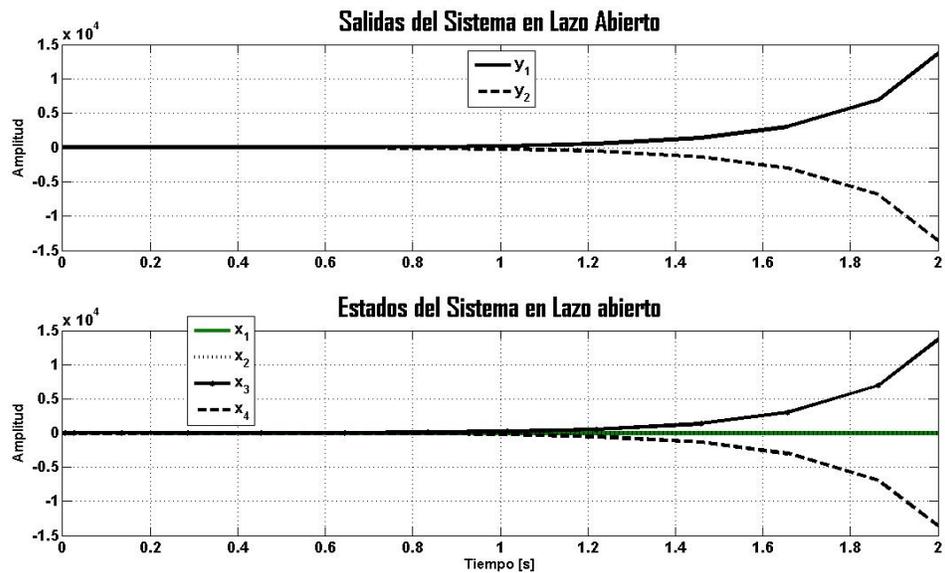


Figura 4.7: Respuesta del sistema en lazo abierto

En la Figura 4.8 aparece la respuesta del sistema en lazo cerrado, donde se observa como el sistema se estabiliza en el origen consiguiendo el objetivo de control.

Y en la Figura 4.9 se muestra la respuesta del mismo sistema pero controlado mediante la Proposición 7, con

$$F_o = [ 33.7367 \quad -48.0779 ].$$

#### Ejemplo 4.4

Considere un sistema de quinto orden la forma  $\dot{x} = Ax + Bu$ ,  $y = Cx$ ; se desea estabilizar el sistema en el origen con una señal de control de la forma  $u = F_o y$ . Para este sistema

### 4.3. ESTABILIZACIÓN POR IDA-PBC POR RETROALIMENTACIÓN DE SALIDA 65

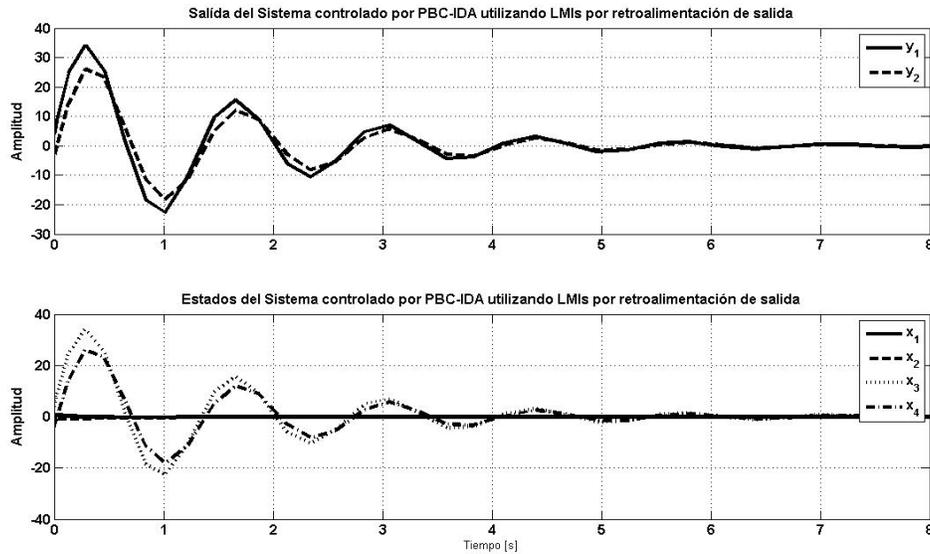


Figura 4.8: Respuesta del sistema en lazo cerrado con la ecuación (4.42)

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Como se observa en la Figura 4.10, el sistema en lazo abierto es inestable debido a que tiene eigenvalores positivos en 2 y 7. Al igual que en el caso anterior es necesario definir una matriz  $B_{\perp}$  de rango completo por renglón y de  $4 \times 5$ . Para facilitar los cálculos se define

$$B_{\perp} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

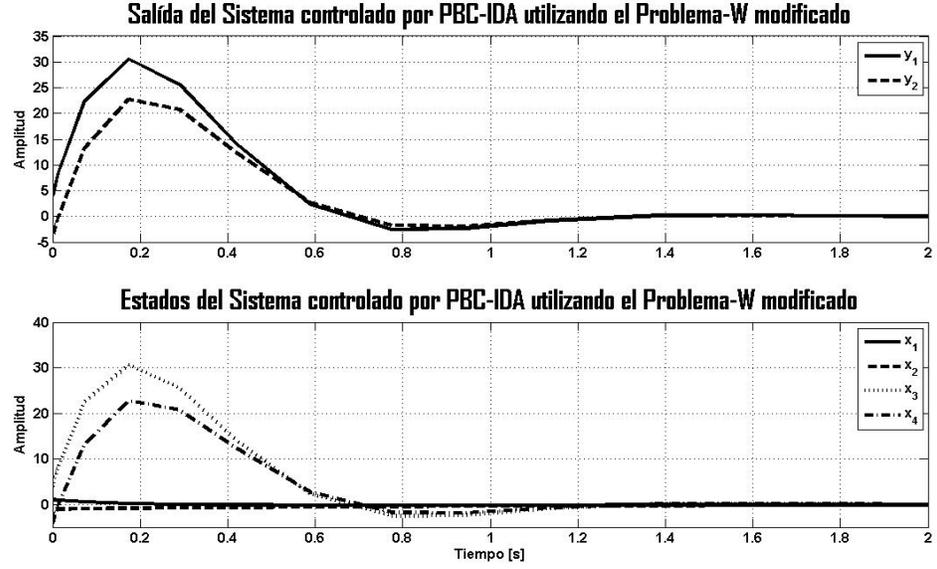


Figura 4.9: Respuesta del sistema en lazo cerrado (Proposición 7)

con la simulación se obtiene las matrices  $J_d$ ,  $R_d$ ,  $Q_d$  y la matriz de entradas de control  $F_o$  mediante la ecuación (4.42)

$$J_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 16.2883 & 11.1927 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -16.2883 & 0 & 0 & 0 & -8.7027 \\ -11.1927 & 0 & 0 & 8.7027 & 0 \end{bmatrix},$$

$$R_d = \begin{bmatrix} 2.6189 & 0 & 0 & -0.0488 & 0.0488 \\ 0 & 3.3103 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3.3884 & 0 & 0 \\ -0.0488 & 0 & 0 & 0.3939 & -0.3939 \\ 0.0488 & 0 & 0 & -0.3939 & 0.3939 \end{bmatrix},$$

$$Q_d = \begin{bmatrix} 0.2925 & 0 & 0 & -0.0589 & -0.1141 \\ 0 & 1.8125 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.1805 & 0 & 0 \\ -0.0589 & 0 & 0 & 1.4278 & -1.9275 \\ -0.1141 & 0 & 0 & -1.9275 & 2.8886 \end{bmatrix},$$

### 4.3. ESTABILIZACIÓN POR IDA-PBC POR RETROALIMENTACIÓN DE SALIDA67

$$F_o = \begin{bmatrix} 14.4095 & -24.3892 \end{bmatrix}.$$

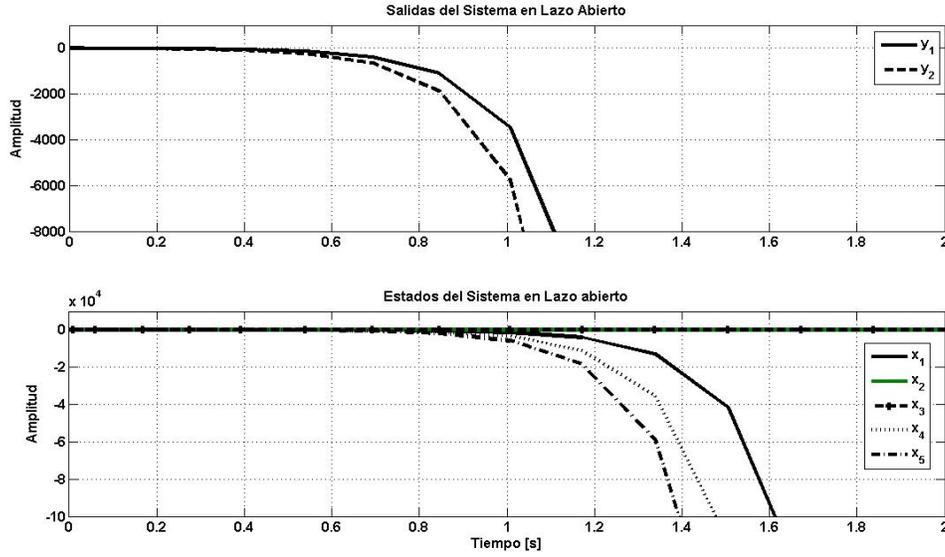


Figura 4.10: Respuesta del sistema en lazo abierto

Con esta entrada de control el sistema se estabiliza en el origen tal y como se aprecia en la Figura 4.11. A forma de comparación en la Figura 4.12, aparece la respuesta del mismo sistema en lazo cerrado pero utilizando retroalimentación de estados por el método visto en el Capítulo 3 en la Proposición 3, dando una matriz de señales de control de la forma

$$F = \begin{bmatrix} -3.7796 & 0 & 0 & 14.4095 & -24.3892 \end{bmatrix}.$$

No es de sorprender el que la respuesta en esta figura sea mejor dado que la metodología es muy similar con la muy importante diferencia de que la entrada de control depende únicamente de la salida del sistema. Sin embargo, hay que considerar que el resultado obtenido para ambos casos no es único y esta comparación es posible debido a la similitud de valores entre  $F$  y  $F_o$ .

Por último en la Figura 4.13 aparecen las salidas de este sistema para cada uno de los diferentes métodos que se han presentado en este trabajo. En esta gráfica puede observarse como la respuesta con el método del Problema-W

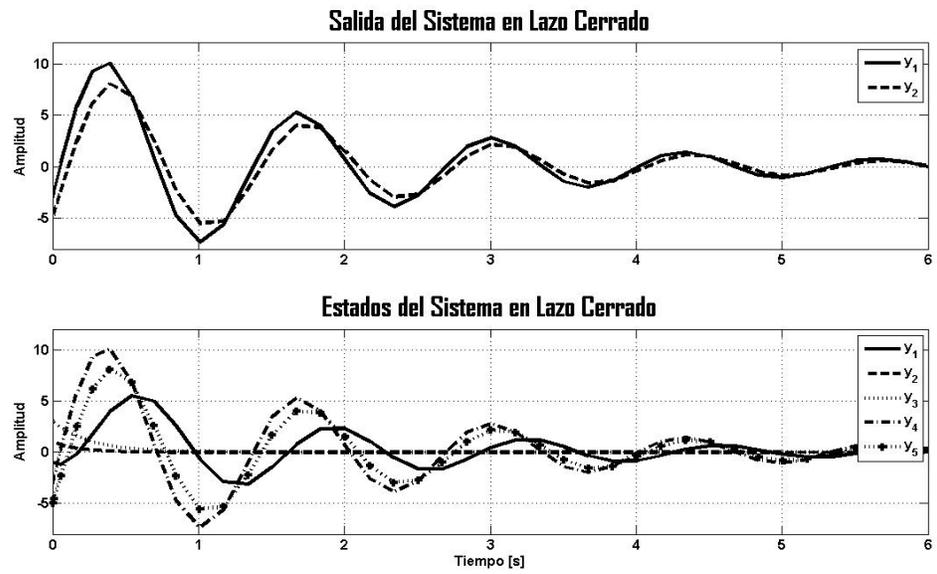


Figura 4.11: Respuesta del sistema en lazo cerrado

modificado tiene un tiempo de estabilización claramente menor a los otros dos métodos así como también un valor de pico menor.

### 4.3. ESTABILIZACIÓN POR IDA-PBC POR RETROALIMENTACIÓN DE SALIDA 69

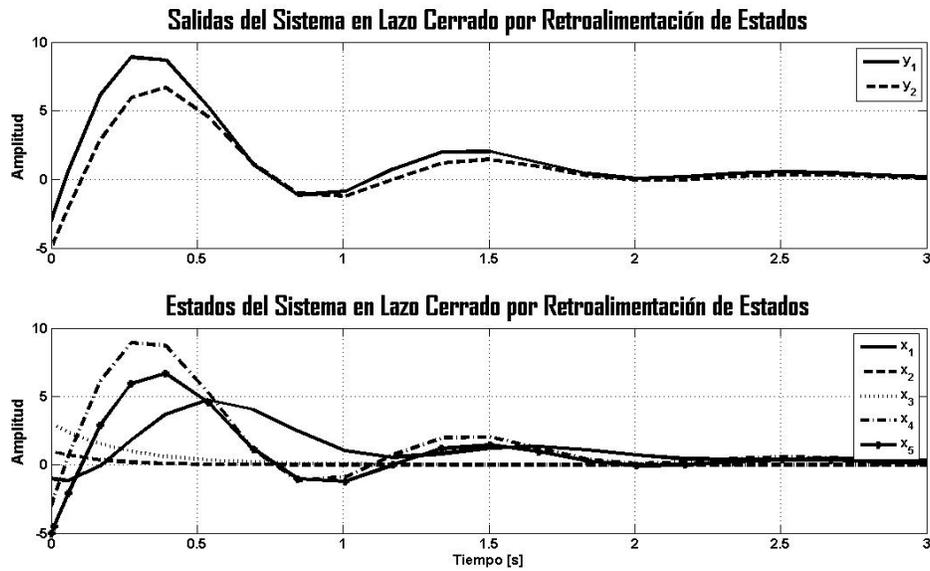


Figura 4.12: Respuesta del sistema en lazo cerrado por retroalimentación de estados

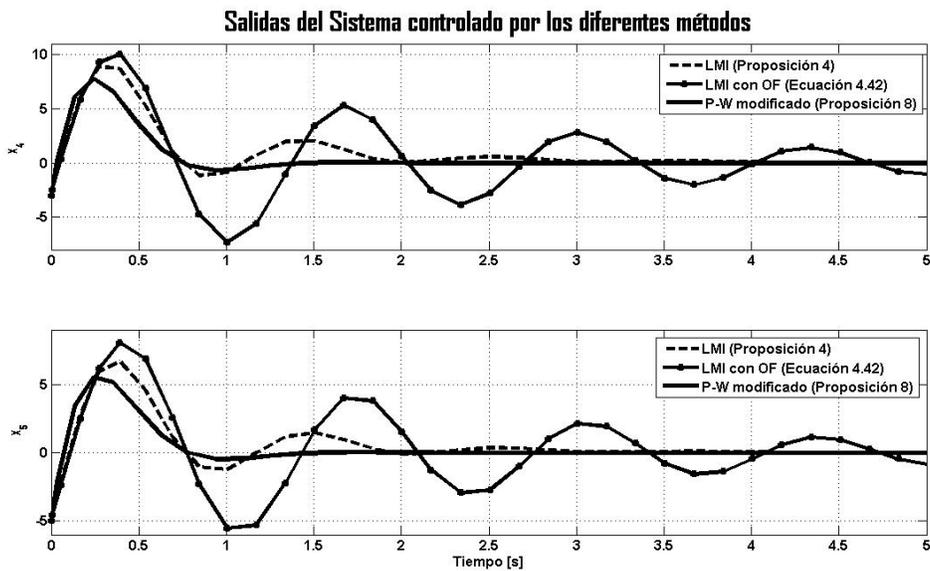


Figura 4.13: Salidas del sistema para los diferentes métodos presentados



# Capítulo 5

## Conclusiones

En este trabajo se presentaron dos métodos por medio de los cuales es posible estabilizar sistemas lineales invariantes en el tiempo por retroalimentación estática de salida, apoyados en el control basado en pasividad mediante la asignación de interconexión y amortiguamiento simultánea. En ambos métodos se utilizó las desigualdades matriciales lineales dada la facilidad de resolverlas por medios computacionales.

En el método de estabilización por IDA-PBC, utilizando retroalimentación de salida se obtuvo una modificación a la ley de control presentada en [28] utilizando solo los estados disponibles para medición, mediante la salida del sistema. Los resultados de las simulaciones con este método nos permiten apreciar que los sistemas alcanzaron el objetivo de estabilización, sin embargo, su respuesta presenta una diferencia en cuanto al método por retroalimentación de estados, manifestándose en tiempos de asentamiento y valores superiores. Esto no es de sorprender debido a que se obtiene una ley de control muy similar, pero su acción se ve disminuida al utilizar solo las salidas del sistema. Cabe aclarar que esta observación es válida debido a que los valores entre ambas señales de control son muy similares, ya que se ajustaron las restricciones en el cálculo de las desigualdades matriciales con este objetivo.

Al igual que en el método por retroalimentación de estados es posible obtener un grupo de matrices que representan al sistema en lazo cerrado en su representación Hamiltoniana, teniendo así una estructura en la que son fácilmente identificables los términos de interconexión y amortiguamiento.

En el método del Problema-W modificado se estableció que para llevarse a cabo era necesario que los estados no controlables del sistema fueran estables, así también una manera fácil de conocer si este método es aplicable o

no, es mediante el conjunto de desigualdades matriciales lineales que se presentan. Sí las LMIs son realizables, entonces el sistema puede estabilizarse por esta metodología en caso contrario el control no es posible.

Las simulaciones referentes al Problema-W modificado presentan mejores respuestas en comparación con el método anteriormente descrito e incluso mejores que en método de IDA-PBC con LMIs por retroalimentación de estados; manifestándose esto en una estabilización del sistema en menor tiempo y también valores de pico claramente menores. Sin embargo, es necesario aclarar que ninguna de las soluciones encontradas por los métodos mostrados no es única, por lo que un trabajo a futuro puede comprender el generar métodos para obtener LMIs óptimas, así como también criterios de comparación. Al igual que en el método anterior se obtiene una representación en forma Hamiltoniana del sistema en lazo cerrado permitiendo tener una visión libre de los términos de interconexión y de amortiguamiento, así como también de la energía almacenada en el sistema.

Los métodos presentados son de fácil programación y los resultados pueden obtenerse por medio de los algoritmos comunes utilizados para resolver comúnmente las desigualdades matriciales lineales.

Un paso a seguir es trabajar con los algoritmos ya establecidos para lograr además de la estabilización del sistema, el conseguir una libre asignación de términos en las matrices de interconexión y amortiguamiento para el sistema en lazo cerrado y conseguir así control sobre el comportamiento deseado del sistema.

# Bibliografía

- [1] <http://users.isy.liu.se/johanl/yalmip/>.
- [2] A. T. Alexandridis. Design of output feedback controllers and output observers. *IEE Proc. Control Theory Appl.*, 146(1), 1999.
- [3] Israel Saeta Pérez Pablo M.Garcá Corzo y Enrique Maciá Barber Alvaro Hacar González, Fabio Revuelta Peña. *Mecánica Lagrangiana, Teoría y práctica*, volume <http://alqua.org/libredoc/>. Alqua, 2009.
- [4] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, volume 15 of *Studies in Applied Mathematics*. SIAM, Philadelphia, PA, 1994.
- [5] Pearson J.B. Brash, F.M. Pole placement using dynamic compensators. *IEEE Trans. Autom. Control*, 15(3), 1970.
- [6] Enric Fossas Carles Batlle, Arnau Dòria-Cerezo. Ida-pbc controller for a bidirectional power flow full-bridge rectifier. *44th IEEE Conference of Decision and Control*, pages 422–426, 2005.
- [7] Alexandre Trofino César A. R. Crusius. Sufficient lmi conditions for output feedback control problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(5):1053–1057, 1999.
- [8] Arjan Van der Schaft. *L<sub>2</sub>-Gain and Passivity Techniques in Nonlinear Control*. Springer-Verlag, 2000.
- [9] A. J. Van der Schaft F. Gómez-Estern. Physical damping in ida-pbc controlled underactuated mechanical systems. *EU-TMR Network NACO2*, 2004.

- [10] Kautsky J. Kolka G.K. Fletcher, L.R. and N.K Nichols. Some necessary and sufficient conditions for eigenstructure assignment. *Int. J. Control*, 42, 1985.
- [11] K. Fujimoto and T. Sugie. Canonical transformations and stabilization of generalized hamiltonian systems. *Systems and Control Letters*, 43(2):217–227, 2001.
- [12] Arnau Dória Cerezo Romeo Ortega Gerardo Espinosa Pérez, Carles Batlle. Simultaneous interconnection and damping assignment passivity-based control: Two practical examples. *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, 366:157–169, 2007.
- [13] C. Giannakopoulos and N. Karkanias. Pole assignment of strictly proper and proper linear systems by constant output feedback. *Int. J. Control*, pages 543–565, 1985.
- [14] H. Goldstein. *Classical Mechanics*. Addison Wesley, 1980.
- [15] Gonzalo Sandoval Rodríguez y Gerardo Espinosa Pérez Iván Martínez Pérez. Control por asignación de interconexión y amortiguamiento de un convertidor bidireccional monofásico. *Congreso Nacional de Control Automático AMCA*, 2007.
- [16] Alessandro Astolfi José Angel Acosta, Rome Ortega. Interconnection and damping assignment passivity-based control of mechanical systems with underactuation degree one. *American Control Conference*, 4:3029–3034, 2004.
- [17] H. Kimura. Pole assignment by gain output feedback. *IEEE Trans. Autom. Control*, pages 509–516, 1975.
- [18] H. Kimura. A further result on the problem of pole assignment by output feedback. *IEEE Trans. Autom. Control*, pages 543–565, 1977.
- [19] R. Ortega and E. Garcia-Canseco. Interconnection and damping assignment passivity-based control: A survey. *European Journal of Control*, 10(5):432–450, 2004.
- [20] E. S. Pyatnitskii and V. I. Skorodinskii. Numerical methods of lyapunov function construction and their application to the absolute stability problem. *Syst. Control Letters*, 2(2):130–135, 1982.

- [21] A. Astolfi Y. Sun R. Ortega, M. Galaz and T. Shen. Transient stabilization of multimachine power systems with nontrivial transfer conductances. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 50(1):60–75, 2005.
- [22] B. Maschke R. Ortega, A. van der Schaft and G. Escobar. Interconnection and damping assignment passivity-based control of port-controlled hamiltonian systems. *Automatica*, 38(4):585–596, 2002.
- [23] F. Gómez-Estern R. Ortega, M.W. Spong and G. Blankenstein. Stabilization of a class of underactuated mechanical systems via interconnection and damping assignment. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 47:1218–1233, 2002.
- [24] G. Espinosa Pérez R. Ortega. Passivity-based control with simultaneous energy-shaping and damping injection: The induction motor case study. *16th IFAC World Congress, Prague*, 2005.
- [25] I. Mareels R. Ortega, A. van der Schaft and B. Maschke. Putting energy back in control. *IEEE Control Systems Magazine*, 21(2):18–33, 2001.
- [26] Kelly y L. Praly R. Ortega, A. Loria. On passivity-based output feedback global stabilization of euler-lagrangian systems. *Int. J. Robust and Nonlinear Control, Special issue on Control of mechanical system*, 5(4):313–325, 1994.
- [27] P. J. Nicklasson y H. Sira-Ramirez R. Ortega, A. Loria. *Passivity-based Control of Euler-Lagrange Systems*,. Springer, 1998.
- [28] Gjerrit Meinsma Stephen Prajna, Arjan van der Schaft. An lmi approach to stabilization of linear port-controlled hamiltonian systems. *Systems and Control Letters*, 45:371–385, 2002.
- [29] M. Takegaki and S. Arimoto. A new feedback method for dynamic control of manipulators. *ASME J. Dyn. Syst. Meas. Contr.*, 103:119–125, 1981.
- [30] P. Dorato V. L. Syrmos, T. Abdallah and K. Grigoriadis. Static output feedback - a survey. *Automatica*, 33(2):125–137, 1997.
- [31] J. C. Willems. Least squares stationary optimal control and the algebraic riccati equation. *IEEE Trans. Aut. Control*, 16(6):621–634, 1971.

- [32] V. A. Yakubovich. The solution of certain matrix inequalities in automatic control theory. *Soviet Math. Dokl.*, 3:620–623, 1962.
- [33] V. A. Yakubovich. The method of matrix inequalities in the stability theory of nonlinear control systems, i, ii, iii. *Automation and Remote Control*, 4(25-26):905–917, 577–592, 753–763, 1967.
- [34] V. A. Yakubovich. Solution of certain matrix inequalities encountered in non-linear control theory. *Soviet Math. Dokl.*, 1964:652–656, 5.