UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
FACULTAD DE INGENIERIA

APUNTES DE DIBUJO

ARTURO V. AGUILAR CUEVAS
ALFONSO GUTIERREZ ARIZA
JOAQUIN GUTIERREZ GUERRA
DANIEL SERRANO MOTHELET.

DIVISION DE CIENCIAS BASICAS
DEPARTAMENTO DE METODOLOGIA Y LENGUAJES

FI/DCB/84-080

APUNTES DE
DIBUJO

PROLOGO

En las diferentes ramas de la Ingeniería la transmisión de ideas relacionadas con la solución de problemas, trae consigo la necesidad de disponer de un lenguaje de interpretación única, mediante el cual se comuniquen dichas ideas a quienes participen en la materialización de la solución dada. El dibujo es el instrumento con que cuentan los profesionales de la Ingeniería para transmitir e interpretar ideas a través de un lenguaje gráfico normalizado.

Los planes de estudio de las carreras que ofrece la Facultad de Ingeniería, incluyen un curso de dibujo que tiene como objetivo capacitar al estudiante en la teoría y las técnicas que le faciliten la comunicación gráfica de todo problema relacionado con la ingeniería, desde su planteamiento hasta su solución.

El contenido temático de la obra abarca tres capítulos de los cuatro que integran el programa vigente de la asignatura. En ellos se dan a conocer el equipo de dibujo y su utilidad, las escalas y construcciones geométricas; se exponen los elementos fundamentales de la teoría de la geometría descriptiva, así como sus aplicaciones y finalmente se desarrolla el tema de proyecciones.

Es importante que el alumno no se limite únicamente al estudio de estos apuntes, por lo que se recomienda consultar la bibliografía que se encuentra al final de la obra, a fin de que profundice y amplíe los temas del contenido.

Invitamos a profesores y alumnos a que nos hagan llegar a la Coordinación de la materia, todas aquellas observaciones y sugerencias que consideren convenientes para mejorar las futuras ediciones.

Deseamos expresar nuestro agradecimiento al Ing. Yukihiro Minami Koyama por su participación en los temas de Escalas y Acotaciones, asimismo al Ing. Carlos A. Guevara de León por su colaboración en la introducción de Construcciones geométricas y Geometría descriptiva, a las licenciadas Irma Hinojosa Félix y María Cuairán Ruidíaz por la adaptación pedagógica, a David Gallegos Casillas y José Luis E. García Muñoz, por la revisión de este trabajo, así como a los dibujantes Alfredo Arenas González y Alfonso Sánchez Guzmán por el apoyo gráfico de éste.

PROF. ARTURO V. AGUILAR CUEVAS

PROF. ALFONSO GUTIÉRREZ ARIZA

ING. JOAQUÍN GUTIÉRREZ GUERRA

ING. DANIEL SERRANO MOTHELET

INDICE

CAPITULO I

INTRODUCCION AL DIBUJO DE INGENIERIA

CAPITULO II

FUNDAMENTOS DE LA GEOMETRIA DESCRIPTIVA

CAPITULO III

PROYECCIONES

CAPITULO 1 INTRODUCCION AL DIBUJO DE INGENIERIA

I.1 GENERALIDADES

Hasta nuestros días la comunicación siempre ha planteado interesantes problemas en el desarrollo de los procesos históricos.

Desde el origen de la humanidad, el hombre ha tenido necesidad de transmitir a sus semejantes experiencias, conocimientos, creencias, temores, emociones y sentimientos. Tal vez, su primera forma de comunicación fue a base de señas, sonidos guturales y voces inarticuladas hasta que logró desarrollar el lenguaje.

No obstante, el hombre ha tenido siempre una fuerte necesidad de transcender, de permanecer a pesar de su muerte, esto lo obligó a dejar en forma más o menos perdurable aquellas expresiones, sentimientos, emociones y experiencias que lo impresionaron.

Primeramente utilizó la pictografía, es decir la representación de su realidad a través de imágenes. Así, plasmó en pieles, en muros, en piedra y posteriormente en tela o papel sus pensamientos a base de dibujos que representaban animales, plantas, montañas, ríos, fenómenos naturales o a otros hombres. Una muestra de lo anterior, se tiene en las pinturas rupestres de épocas perdidas en el tiempo.

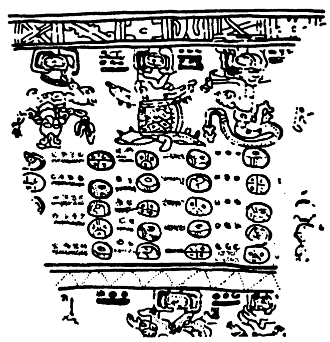


FIGURA I.1

Esta forma de comunicación progresó cuando la pictografía fue sustituida por signos ideográficos, o sea por jeroglíficos o por figuras que representaban objetos o ideas.

Si se analizan las escrituras más antiguas, se podrá observar que parten de dibujos, como los jeroglíficos egipcios y los ideogramas de las lenguas orientales.

FIGURA I.2

Posteriormente se introdujo el sistema fonético, en el que cada signo representaba cada uno de los sonidos en que se descomponía la palabra. Cuando el hombre logró utilizarlo en forma regular, inventó la escritura y entró en la historia. La escritura por medio de letras significa el último grado de esta evolución.

El primer alfabeto fonético fue sistematizado por los fenicios; los griegos lo perfeccionaron y lo difundieron y, con algunas variantes, es el alfabeto que utilizan, en nuestros días, casi todos los pueblos.

El desarrollo de la escritura ha permitido al hombre comunicarse con sus semejantes y transmitir sus ideas a través de la distancia y del tiempo.

Sin embargo, existen algunos objetos e ideas que son difíciles de transmitir a través de palabras, ya sea en el lenguaje oral o en el escrito. Es aquí cuando la representación pictórica de ciertos objetos, ideas o procesos sigue siendo válida.

Las representaciones gráficas de ideas han seguido tres caminos: uno es el *lenguaje escrito*, los otros son el *dibujo artístico* y el *dibujo técnico*. Por medio de estos últimos, el hombre expresa todo aquello que le sería imposible o poco práctico expresar a través de la palabra.

El dibujo artístico tiene un fin estético y responde a las diversas escuelas y corrientes que han existido en la historia del arte. Existen variadas técnicas y materiales para su realización, y es el artista quien decide la manera en que representa su mensaje estético.

En cambio, en el dibujo técnico se sigue una serie de reglas y normas, para lo cual se utilizan instrumentos y materiales que varían con el desarrollo tecnológico; éstos son pocos y ampliamente conocidos, de manera que se incorporan y norman rápidamente.

Debido a estas normas, el dibujo realizado con fines prácticos o tecnológicos se convierte en un lenguaje, ya que es relativamente sencillo conocer y aprender dichas normas e interpretar, por encima de las barreras idiomáticas, las ideas e instrucciones contenidas en un dibujo técnico.

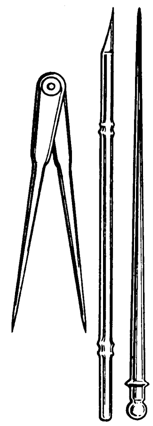


FIGURA I.3 INSTRUMENTOS QUE FUERON UTILIZADOS EN EL SIGLO XVIII

Un profesional de la ingeniería debe manejar diversos lenguajes como las expresiones matemáticas y los códigos de computación. El lenguaje gráfico resulta de primordial importancia, ya que el ingeniero debe describir objetos físicos tridimensionales que van desde piezas de relojería hasta inmensos edificios y grandes embarcaciones que muy difícilmente serían comprendidos en otros lenguajes. Asimismo, el dibujo técnico nos permite concebir, transmitir e interpretar ideas relacionadas con objetos, dispositivos, máquinas, construcciones y procesos que, a su vez, están encaminadas a la solución de problemas técnicos.

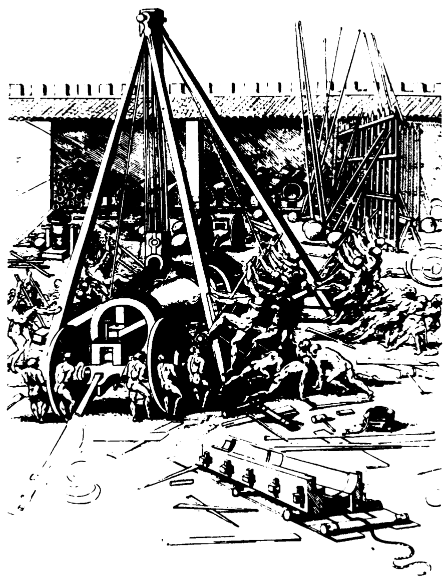


FIGURA I.4 UN ARSENAL POR LEONARDO DA VINCI

Existen diferentes métodos y formas de llevar a cabo un dibujo técnico que corresponda a necesidades y usos específicos.

El ingeniero de diseño utiliza el dibujo de croquis en el desarrollo de sus ideas iniciales. Algunos de sus dibujos tendrán que ser desechados y otros le permitirán concretar sus ideas.

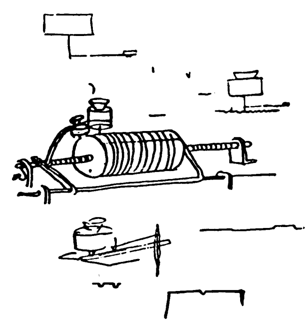


FIGURA I.5 EL FONOGRAFO DE EDISON

Una vez formuladas las ideas, se especifican tanto dimensional como funcionalmente. Aquí es donde el ingeniero debe proveer los croquis e instrucciones al dibujante que realizará en forma ordenada y con las técnicas adecuadas los planos de los objetos preconcebidos.

Los planos deberán ser estudiados, analizados y aprobados por profesionales cuya función sea la de supervisar técnica, económica y constructivamente un diseño.

Finalmente, estos planos serán interpretados y ejecutados por técnicos y obreros que se encargarán de su manufactura, ensamble, construcción, operación y mantenimiento.

Aunque el dibujo técnico está normalizado, como se ha mencionado, es conveniente aclarar que, debido al avance de las diferentes áreas de la ingeniería, en la actualidad es necesaria una preparación específica dentro del dibujo de la especialidad que se practique.

Puede decirse que los principios fundamentales del dibujo son los mismos, pero cada especialidad cuenta con un conjunto de símbolos que permiten hacer más comprensible, y por lo tanto más fácil su análisis e interpretación. A pesar de esto, un ingeniero deberá reconocer a qué área o especialidad pertenece un dibujo o plano con sólo observarlo.

Será necesario por ejemplo, que un ingeniero mecánico reconozca en un dibujo de su especialidad, una gran variedad de materiales (hierro, aceros, cromo, bronce, aluminio, etc.), una gran cantidad de procesos de fabricación (troquelado, maquinado, soldado, forjado, extruido, vaciado, inyectado, etc.), y muchas áreas de aplicación (estructuras, tuberías, recipientes, motores, maquinaria, procesos cerrados, fabricación, manejo de materiales, térmica y otras).

Todo lo anterior obliga a pensar en que esta disciplina del lenguaje gráfico técnico, debe ser ampliada durante el desarrollo de la carrera y de la vida profesional, de acuerdo con el campo de actividad y especialidad de cada ingeniero, con la seguridad de que esto redundará en una mayor facilidad de concepción, transmisión y ejecución de soluciones a los problemas de la ingeniería.

I.2 EL DIBUJO EN LA INGENIERIA

Dentro del acervo de conocimientos que un profesional de la ingeniería debe poseer para un adecuado desarrollo profesional, están sin duda los relativos a las matemáticas, la física, la química, etc. El dibujo constituye un tratado especial de estos conocimientos y desarrolla habilidades para interpretar y transmitir ideas, lo que lo transforma en uno de los *lenguajes principales de la ingeniería*.

Este lenguaje se expresa mediante representaciones gráficas de formas y tamaños de objetos físicos.

En ocasiones, el ingeniero realizará sus dibujos (croquis) a mano para que sirvan de guía a los dibujantes que los elaborarán en forma definitiva. Otras veces, según el grado de complejidad, puede realizar dibujos precisos con instrumentos para que los dibujantes los continúen hasta su terminación. Lo anterior no significa que un ingeniero nunca desarrollará completamente un dibujo, porque en ciertos casos, la delicadeza del trabajo lo requerirá. De cualquier manera, el ingeniero siempre deberá de revisar y aprobar los dibujos finales ejecutados por otras personas.

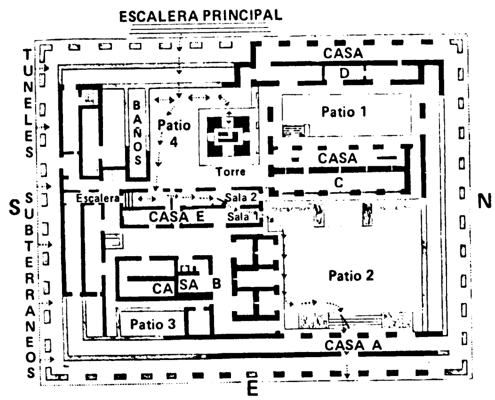


FIGURA I.6

Generalmente, el ingeniero presenta en sus estudios: diseños, especificaciones de construcción, control y mantenimiento, y puede valerse de: documentos escritos integrados con un lenguaje propio del área, memorias de cálculo que justifican analíticamente el desarrollo de un proyecto, y un conjunto de trabajos gráficos.

Los ingenieros, a través de sus estudios, desarrollan la facultad de *pensar gráficamente*, lo que constituye una ventaja en la creación del medio físico para alcanzar un fin tecnológico.

Por su especialidad, el dibujo de ingeniería se clasifica, en diversos tipos que se aplican a las diferentes áreas de esta disciplina. El dibujo de mecánica en las industrias de maquinaria y el dibujo estructural en las industrias de la construcción.

I.3 SIMBOLOGIA

Por definición simbología es el conocimiento de los símbolos, y *símbolo* es una imagen o figura que representa un concepto.

El manejo de símbolos lleva forzosamente a un proceso de comunicación donde el *emisor*, que es el elemento con el que nace este proceso, cifra un mensaje que desea transmitir mediante una *señal*.

Se define como *mensaje* a la selección ordenada de símbolos que persiguen comunicar una idea, y *señal* es todo elemento que se origina para la transmisión de mensajes, exclusivamente.

El *receptor*, o sea el destinatario del mensaje que envía el emisor, recibe la señal y la descifra, asignándole un solo mensaje de los muchos de que puede disponer. Para que el proceso de comunicación sea correcto es necesario que el receptor asigne a la señal el mismo mensaje del emisor.

Otro elemento de este proceso es el *canal*, que es el medio que utiliza el emisor para hacer llegar al receptor el mensaje.

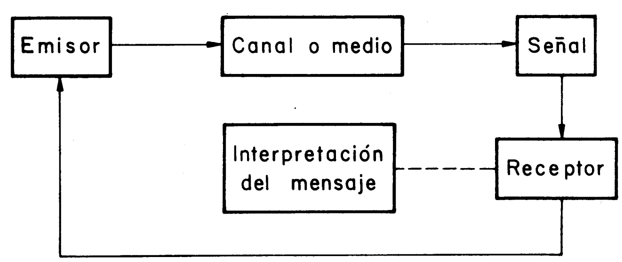


FIGURA I.7 PROCESO DE COMUNICACION

Con base en las reflexiones anteriores, se asegura que esas condiciones son aplicables para cualquier sistema de comunicación, sea éste auditivo, visual o táctil.

Durante la actividad práctica de la comunicación se descubre la existencia de dos conjuntos fundamentales que se interrelacionan: el de *señales* y el de *mensajes*.

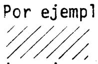
A la coordinación de estos dos conjuntos se le llama *código*.

Así pues, existe un código de señales de tráfico, el cual es la coordinación de señales que transmiten mensajes a los automovilistas.

FIGURA I.8

Cabe señalar aquí la importancia que tiene la interpretación correcta del mensaje pues existe la posibilidad de que una señal puede transmitir un gran número de mensajes distintos.

Los lenguajes simbólicos se pueden clasificar en el técnico y el artístico; el primero es el que interesa al ingeniero, porque es un elemento necesario que le permitirá interpretar los mensajes señalados en los planos de construcción o taller y el segundo también es de interés, pero su campo de aplicación es visual y no requiere un estudio previo para su interpretación.

Por ejemplo, si en un plano apareciera un corte con un rayado, como el mostrado  dependiendo a qué área de la ingeniería corresponda dicho plano, el ingeniero tendrá que saber si se trata de una arcilla o de un metal, otro ejemplo sería, si cualquier persona, ingeniero o no, viera el signo mostrado en la figura  , puesto que de inmediato lo asociaría con peligro.

Este último caso sirve para reforzar la gran ventaja de usar símbolos gráficos, pues si en su lugar se escribe la palabra PELIGRO, se corre el riesgo de no ser interpretado por cualquier persona, bien porque no entiende el idioma en que está escrito o bien porque no sabe leer.

Se considera de interés para el ingeniero, que conozca algunas representaciones típicas de este vasto campo de la simbología visual, pues en algún momento dado tendrá necesidad de usarlo o de interpretarlo.

LAS SEÑALES

Cuando se transita por una carretera es frecuente ver señales de este tipo. Se sabe que están clasificadas en informativas, preventivas y restrictivas.

FIGURA I.9

LOS PICTOGRAMAS

Cuando se asiste a un centro comercial, es fácil distinguir entre uno y otro departamento, debido a que se usan dibujos que generalmente se asemejan a la forma real del objeto y su interpretación es clara y efectiva.

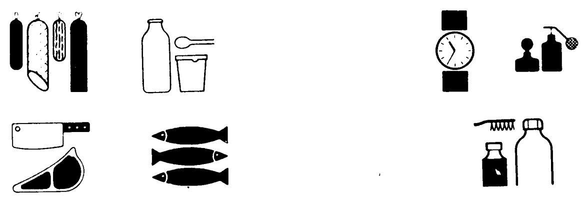


FIGURA I.10

LOS GRAFISMOS

Los grafismos son dibujos un tanto abstractos que generalmente esconden algo. En el campo del diseño gráfico se estudia con profundidad la esencia y la síntesis del simbolismo que encierra un grafismo.

FIGURA I.11

LOGOTIPOS

La mayoría de las empresas usan logotipos para distinguirse de otras, éstos son generalmente dibujados con letras especiales y con caracteres propios. En algunos casos además del logotipo se usan escudos, emblemas, monogramas y grafismos para que se facilite su uso o aplicación.

FIGURA I.12

1.3.1 LA SIMBOLOGIA USADA EN INGENIERIA

Nuevamente la necesidad de transmitir e interpretar a través del símbolo, real o convencional lleva al ingeniero a crear el lenguaje que le permita, por una parte, ahorrar tiempo y, por la otra, obtener claridad y simplicidad; asimismo que le sirva de enlace con otras disciplinas.

En el lenguaje gráfico se han creado símbolos con la intención de que su presencia en un dibujo tenga una sola interpretación y es así como nace el *alfabeto de líneas*, universalmente aceptado. Su combinación acertada, siguiendo ciertas normas, permitirá formar figuras, volúmenes o cuerpos y, a su vez, permitirá estudiar estos elementos desde el punto de vista técnico. De esta manera, la interpretación simbólica bien puede ser *real o convencional*.

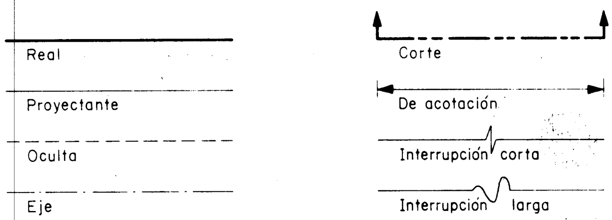


FIGURA I.13 SIMBOLOGIA DE LINEAS

Para comprender más ampliamente lo anterior se muestra el siguiente ejemplo: si se representa un cubo mediante una proyección perspectiva y se le compara con una isométrica se concluye que la imagen perspectiva muestra una deformación, ya que el cubo se ha ilustrado tal como aparece a nuestra vista, el efecto de estereoscopía es manifiesto, no así con el cubo isométrico, que se muestra sin deformación. Luego entonces, el simbolismo es *real* en la perspectiva y *convencional* en el isométrico.

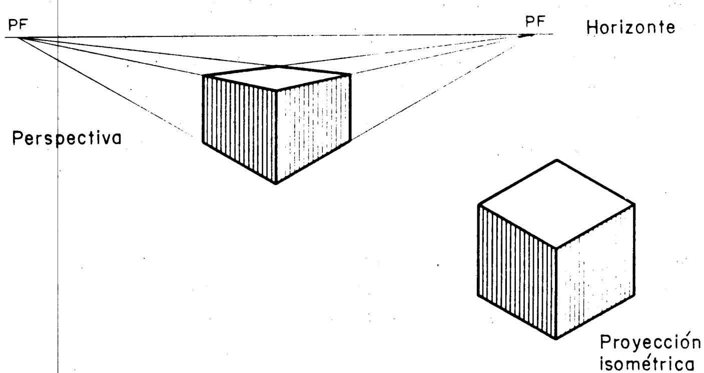
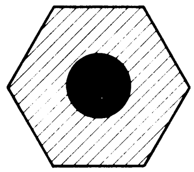
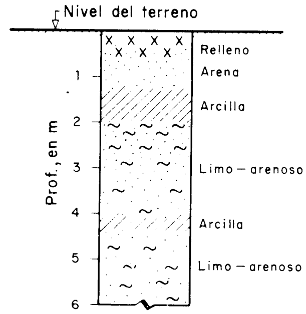


FIGURA I.14

Las convenciones varían de acuerdo al área específica de actividad. Por ejemplo, en el lenguaje de líneas, se utiliza un rayado que sirve para mostrar una superficie que se ha cortado, pero en un corte estratigráfico ese mismo rayado representa la presencia de arcilla en un suelo, y si se requiere representar la sección de una pieza mecánica hecha de hierro, el símbolo que se usa puede ser el mismo.



Sección transversal de un lápiz



Corte estratigráfico

FIGURA I.15

De estos ejemplos podemos considerar que un mismo símbolo puede representar cosas distintas; se usa *convencionalmente* en áreas distintas de la ingeniería.

Muchas personas, instituciones gubernamentales o de investigación han hecho esfuerzos, bastante serios, para estandarizar los símbolos de cada área y sus resultados se han difundido a través de manuales, o bien en forma de apéndices en los libros que tratan la materia en cuestión; pero aun así no siempre se respetan. De un país a otro hay representaciones diferentes para un mismo elemento, e inclusive hay ocasiones en que de una dependencia a otra, las diferencias son notables.

Debe saberse cuándo es correcto el uso de un símbolo en un área de trabajo determinada, ya que los lenguajes simbólicos son de suma importancia como un apoyo al trabajo de los profesionales, sobre todo al de los ingenieros.

Por consiguiente el ingeniero debe documentarse sobre la simbología que va a usar, para después aplicarla y sólo en el caso de no existir un símbolo, podrá crear o usar uno que satisfaga esa carencia, pero sin olvidar mencionarlo, tanto en el texto como en los dibujos o donde sea aplicado.

I.4 INSTRUMENTOS Y MATERIALES UTILIZADOS

Los instrumentos usados en una sala de dibujo o diseño deben ser de la más alta precisión para obtener los mejores resultados.

Es recomendable que la persona que se inicia en el campo de la ingeniería adquiera por norma instrumentos de la mejor calidad; esto le permitirá obtener mejores resultados y mayor precisión en sus trazos.

LAPICES PARA DIBUJAR

El grado de blandura o dureza de los lápices está determinado por las letras B o H respectivamente, y por un número que indica el grado de blandura o dureza según sea mayor ese número.

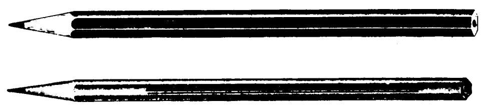


FIGURA I.16

PORTAMINAS

El portaminas permite utilizar minas de diferentes graduaciones (que son las mismas de los lápices).

El afilado de la mina se puede realizar por medios mecánicos o manuales.

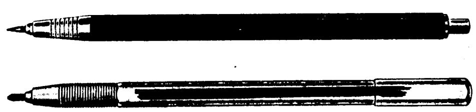


FIGURA I.17

ESCUADRAS

Las escuadras para dibujar deben ser transparentes, sin graduaciones, ni perforaciones. Existen dos tipos:

uno formado por ángulos de 30° y 60° y otro con los dos ángulos de 45° .

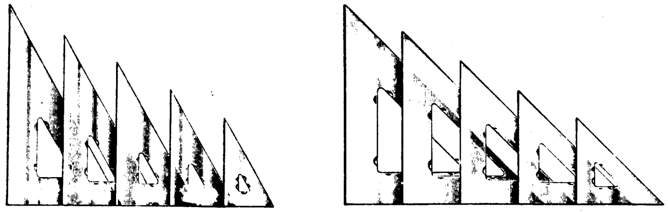


FIGURA I.18

REGLAS TE

La relación entre las longitudes de la cabeza y la regla deben ser proporcionales 2.5:1 ó 3:1 respectivamente; es decir que la longitud de la regla debe ser 2.5 ó 3 veces la longitud de la cabeza; esto permite más apoyo y por consecuencia más precisión en el trazo.

Las de mayor longitud se usan para trazar márgenes en los planos.

La de cabeza móvil permite hacer trazos de diferente inclinación; es más vérsatil, no así la de cabeza fija.

Las hay de diferentes materiales y tamaños, y tampoco deben tener graduaciones.

Las más recomendables son las de bordes de lucita.

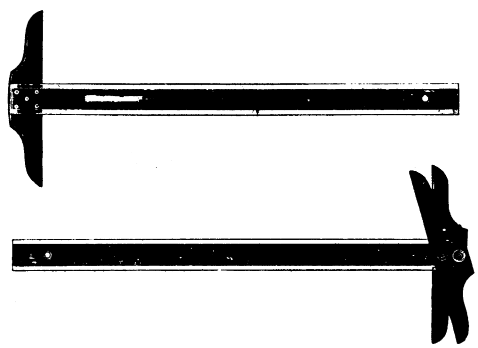


FIGURA I.19

REGLAS PARA MEDIR

Existen de muchos tipos y materiales. Las hay de dos y cuatro biseles con diferentes escalas, puede decirse que son *semi-profesionales*.

Las triescalares o escalímetros son más precisas; la disposición de las escalas suele presentarse alternadamente.

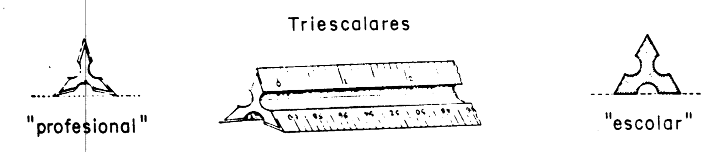


FIGURA I.20

TRANSPORTADORES

Existen dos tipos de transportadores, uno para trazar porcentajes con respecto a un círculo, otro para trazar aberturas o magnitudes de ángulos, en grados sexagesimales.

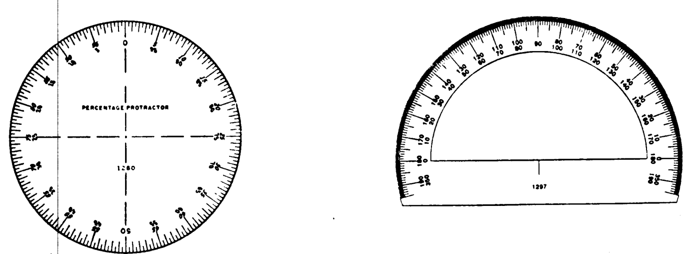


FIGURA I.21

COMPASES DE PRECISION

La precisión de estos instrumentos radica en un mecanismo alojado en la cabeza del compás, el cual permite que la equidistancia entre la punta y el lápiz con respecto al eje de la cabeza sea constante; así se trazarán circunferencias *perfectas* y no *ovaladas*. Dentro de este tipo se encuentran los compases marcadores, que tienen dos puntas metálicas o de aguja.

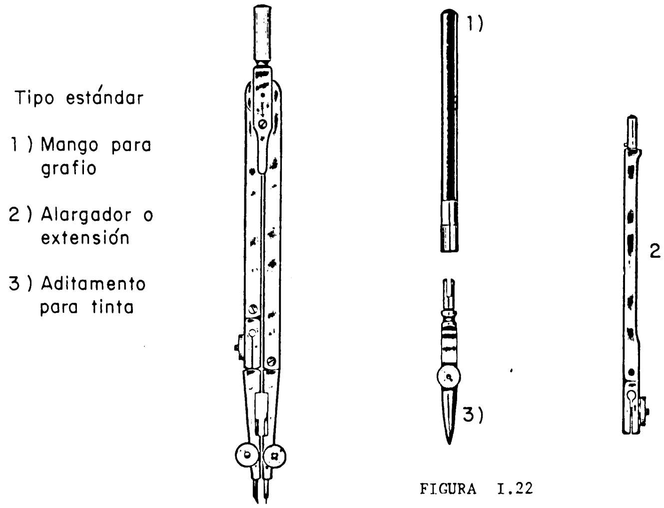


FIGURA I.22

BALUSTRES

Este tipo de compás llamado de *tornillo* también es de precisión. Se le considera dependiendo del tipo, es decir que tenga el tornillo al centro y entre las ramas o exterior a una de ellas.

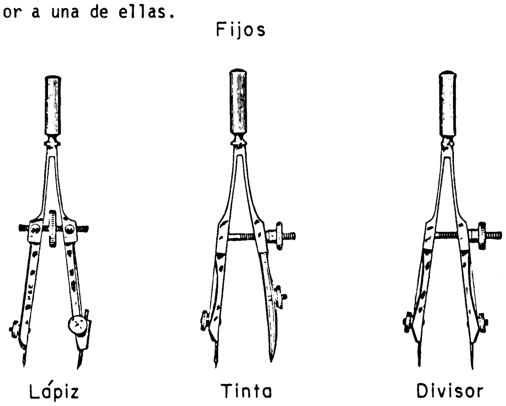


FIGURA I.23

COMPASES ESPECIALES

Compás de proporciones. Este compás es uno de los instrumentos más útiles en la sala de dibujo, su uso se restringe a pasar información de una escala a otra proporcionalmente. El tornillo central permite seleccionar de la escala graduada la proporción requerida, se aprieta ese tornillo y se abren las ramas verificando que la abertura menor sea proporcional a la abertura mayor.

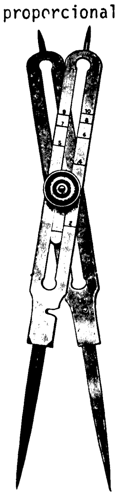


FIGURA I.24

COMPAS DE BOMBA HABILITADA

El diseño o mecanismo de este compás permite trazar circunferencias con radios pequeños, de 1 a 10 mm aproximadamente.

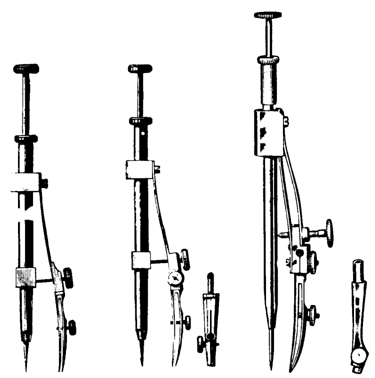


FIGURA I.25

COMPAS DE VARA O REGLA CON AJUSTE PARTICULAR (HABILITADO)

Este compás se utiliza para trazar circunferencias con radios mayores de 50 cm. Tiene un tornillo de ajuste que permite tener mayor presición en la medida del radio.

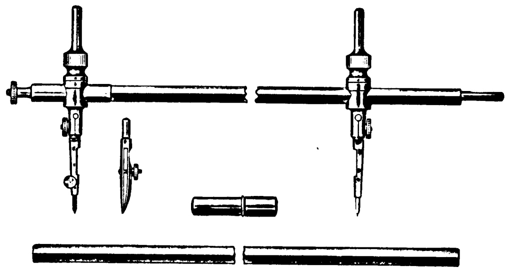


FIGURA I.26

ACCESORIOS

Por necesidades de presentación o para evitar que se deslice el compás cuando se trabaje en superficie dura se usa un centro de lucita, la cual está montada en un marco metálico del que salen tres puntas de acero muy finas, que por un lado, no dejan perforaciones en el papel y por otro, se adhieren a cualquier superficie facilitando entonces el uso del compás.

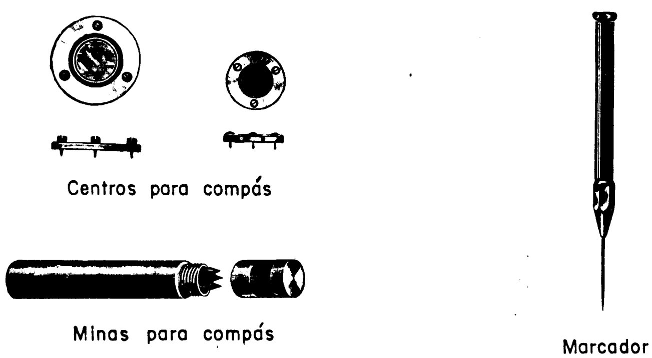


FIGURA I.27

Es recomendable tener una dotación de minas de diferentes graduaciones que permita tanto hacer trazos suaves como *remarcar* las líneas reales o visibles.

GRAFIOS

Se les conoce como tiralíneas y su función es entintar trazos rectos finos o gruesos según se requiera, lo cual se logra apretando o aflojando el tornillo. Existe un grafio para hacer trazos con plantillas de curvas irregulares y su mecanismo de giro permite seguir el contorno de la plantilla o del curvígrafo. También hay un grafio doble que permite entintar líneas paralelas e incluso pueden hacerse de diferentes grosores. Ahora bien, los grafios de tijera son mejores que el estándar, pues permite limpiarlos y afinarlos con más facilidad.

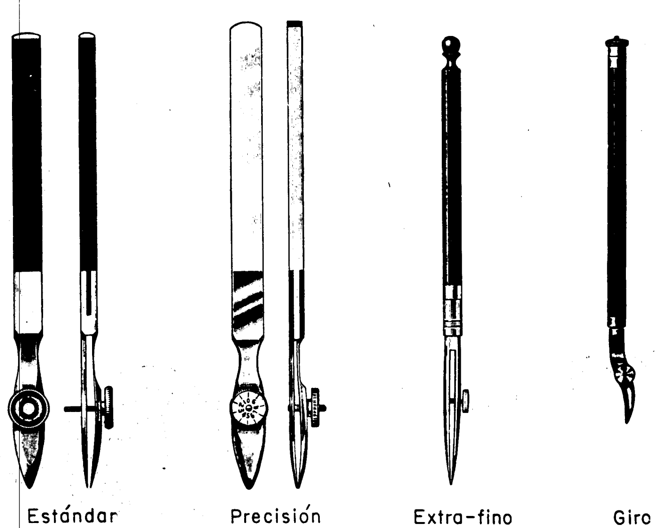


FIGURA I.28

El sustituto actual de los grafios es la llamada pluma-técnica o estilógrafo.

PLANTILLAS

Las plantillas se usan para trazar curvas no circulares. La variedad u opciones es grande, teniendo un buen número de plantillas se podrá trazar cualquier curva.

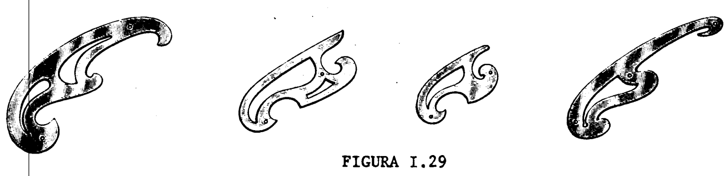


FIGURA I.29

CURVIGRAFO DE ALTA FLEXIBILIDAD

Los curvígrafos son un poco más limitados que las plantillas, ya que con ellos no se pueden trazar curvas muy cerradas. Su uso es más bien para curvas que tengan una tendencia casi recta.

FIGURA I.30

AFILAMINAS DE LIJA

Existen dos tipos, uno *manual* y otro *mecánico*. El primero consiste en un pedazo de lija fina, generalmente montado en una pequeña tabla.

El segundo es un afilador mecánico que está provisto de un pequeño depósito con un aditamento que permite introducir la mina para fijar la longitud de la conicidad.

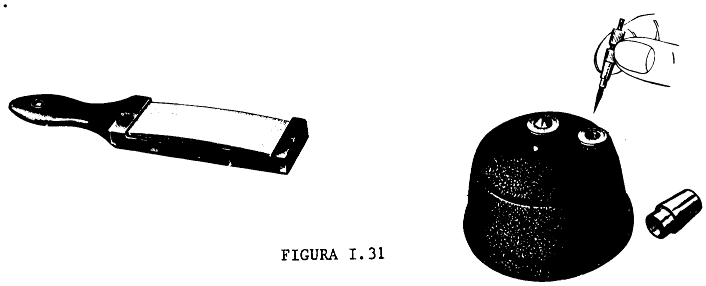


FIGURA I.31

BORRADOR ELECTRICO

Este borrador, un tanto sofisticado, requiere de ciertos cuidados para su uso, por ejemplo no debe de presionarse demasiado la goma sobre el papel, pues gira a una velocidad tal que éste podría quemarse.

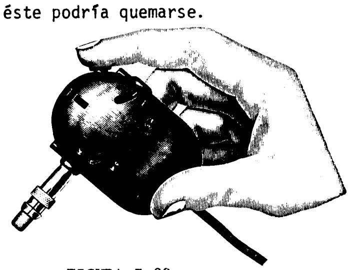


FIGURA I.32

PROTECTOR PARA BORRAR

Es recomendable el uso de un protector, pues por sus orificios permite sólo borrar lo necesario, además, impide que el papel se maltrate en las zonas adyacentes al trazo que se borra.

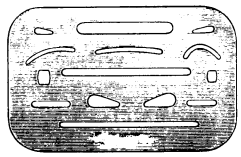


FIGURA I.33

LEROY

Existen varios instrumentos para rotular planos: el *varigraf*, las *plantillas* y el *leroy*, este último es el más práctico.

El leroy consta de varias reglillas que tienen grabadas las letras del alfabeto, números y algunos signos de puntuación. En la parte inferior de la reglilla hay un canal por donde se desliza el trazador, a este último se le conoce como *alacrán o cangrejo* y tiene un aditamento para sujetar el cono que contiene la tinta y también una aguja o guía que es la que se desliza por las letras grabadas en el cuerpo de la reglilla.

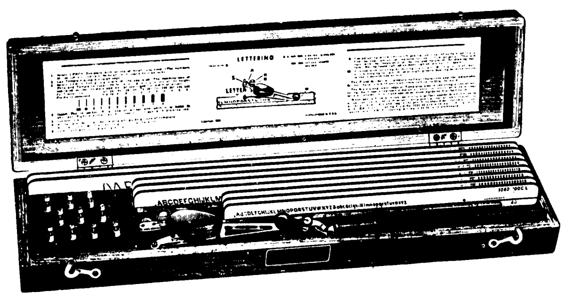


FIGURA I.34

Existe una gran variedad de reglillas con distintos tipos y tamaños de letras, signos matemáticos, geológicos, eléctricos, electrónicos, cartográficos, etcétera.

ACCESORIOS LEROY

Los estuches *leroy* vienen con varios accesorios: trazador de lápiz, manguillo, alargador y portaconos.

El trazador de lápiz se sustituye por el cono cuando se requiera un trabajo con rótulos a tinta.

El portaconos se inserta en el manguillo y se puede usar para hacer trazos a tinta con plantillas para curvas irregulares o curvígrafo.

El alargador es un accesorio que se adapta en el *alacrán* y dependiendo de la posición en que se sujete permite trazar con la misma reglilla, letras alargadas, circulares o anchas.

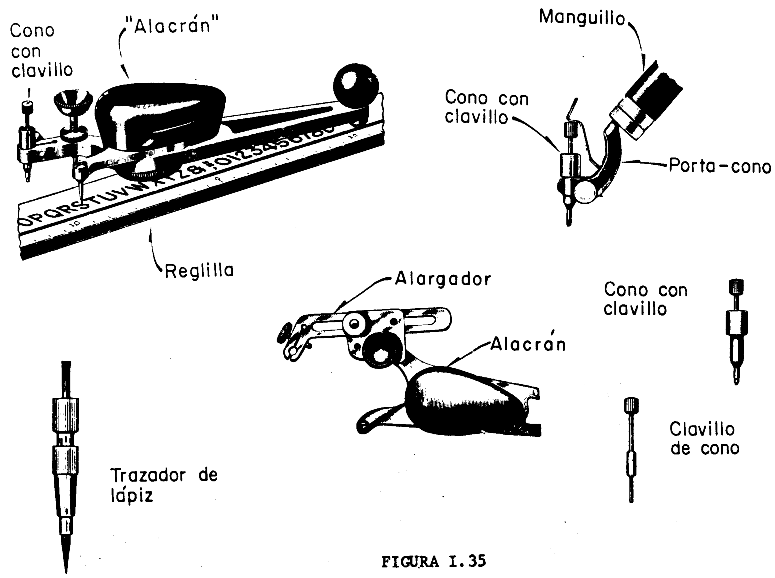


FIGURA I.35

LIMPIADORES

El papel para dibujar tiene una finísima película grasosa que de no eliminarse impide que la tinta se adhiera firmemente al papel.

Existe un cojín que contiene talco, para frotarlo sobre la superficie del papel, eliminando así la capa-grasa y cualquier otra impureza.

De no conseguirse el cojín puede adquirirse el talco en bote y espolvorearlo sobre el papel para frotarlo con un paño limpio.

Otro auxiliar en la limpieza es el cepillo de cerdas largas, pues permite eliminar talco o residuos de goma de borrar, para evitar que se retiren con la mano.

Existe un estuche con dos frascos que contienen un líquido para la limpieza de los conos, así como una cestilla y una pera, esta última sirve para inyectar aire dentro del cono y así asegurarse que no ha quedado líquido y que esté completamente seco su interior.

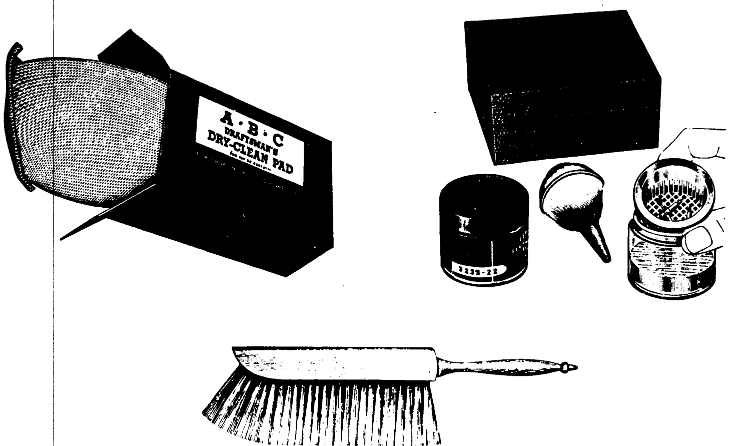


FIGURA I.36

MAQUINAS UNIVERSALES

Esta máquina es una combinación de regla T, escuadras y transportador.

Las hay de dos tipos, para tablero horizontal o tablero vertical, esta última tiene un contrapeso que permite mantenerla en equilibrio.

Tienen dos escalas, una horizontal y otra vertical que pueden o no tener graduaciones y están colocadas perpendicularmente entre sí.

Esta máquina tiene un mecanismo que le permite girar a cualquier posición con un limbo graduado hasta completar los 360° del círculo y un vernier que permite hacer lecturas en minutos de grado.

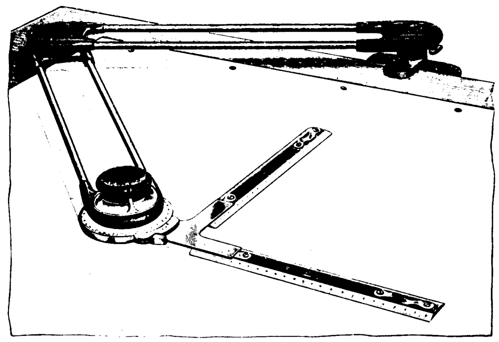


FIGURA I.37

PLANIMETROS POLARES

Los hay de dos tipos, de polo fijo o polo móvil, este último tiene graduaciones en la barra que permite de una forma directa trabajar a *escala*.

El uso de estos instrumentos se aplica al cálculo de superficies irregulares.

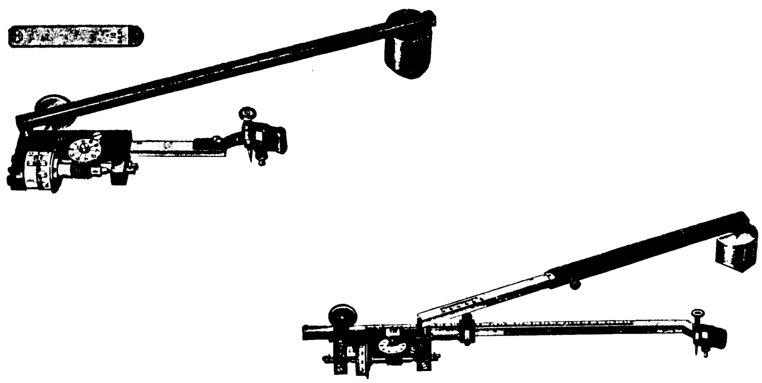


FIGURA I.38

PANTOGRAFO SUSPENDIDO

Este instrumento de alta precisión y sensibilidad se usa para ampliar o reducir planos con la ventaja de pasar de una escala a otra, en los campos de la topografía y cartografía. El uso de este instrumento ahorra tiempo en el trazo.

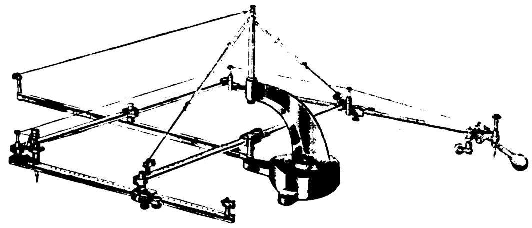


FIGURA I.39

I.5 ESCALAS

Dentro del desarrollo profesional de un ingeniero, es muy común el empleo de diversas clases de modelos: matemáticos, físicos, gráficos, etc. Cuando se utiliza alguno de estos dos últimos, es necesaria la aplicación del concepto *escala*.

Por ejemplo, si se desea realizar una prueba sísmica sobre una construcción sería sumamente costoso realizarla sobre un modelo con las dimensiones reales; en cambio realizándola sobre un modelo reducido a *escala*, el costo de la prueba será razonable y se obtendrán resultados aceptables.

Si la finalidad del modelo es la transmisión de la idea del objeto para poderlo fabricar adecuadamente, se recurrirá al dibujo de proyecciones, el cual se realiza, en papel de tamaño limitado, por lo que casi siempre se tendrán que reducir proporcionalmente las longitudes del objeto; o bien si éste es muy pequeño, como lo es una pieza de un mecanismo de precisión, se aumentarán sus dimensiones para poder percibir con mayor facilidad los detalles inherentes a su reproducción. En ambos casos, se está aplicando el concepto de escala.

I.5.1 ESCALA NUMERICA

El dibujo de proyecciones se utiliza para representar gráficamente a un objeto. Como las dimensiones del objeto y del dibujo se miden en unidades de longitud, al efectuar la relación entre ellas se eliminan las unidades, por ser homogéneas; esto origina una *escala adimensional o numérica*. De lo anterior, se desprende la siguiente definición:

Escala numérica es la relación constante que existe entre la longitud dibujada y la longitud real correspondiente a la parte del objeto que se representa.

Existen tres tipos de *escala numérica*: escala de reducción, escala natural y escala de ampliación.

A) Escala de reducción.

Se aplica cuando las dimensiones del objeto son grandes y conviene reducirlas en el dibujo o modelo. Convencionalmente se representan como:

$$\text{escala } 1{:}x \quad \text{o} \quad \text{escala } \frac{1}{x},$$

donde X es un número entero positivo. Su interpretación es la siguiente:

A cada unidad dibujada corresponden X unidades reales, es decir, lo real sufre una reducción de X veces en el dibujo. Este tipo de escala se utiliza comúnmente en dibujo estructural, arquitectónico, topográfico y en otras áreas de la ingeniería.

Ejemplo 1

Determinar la longitud de un tramo de recta que mide 53 mm en un mapa que está trazado a escala 1:20,000.

Se resuelve mediante una simple regla de tres; se relaciona la longitud dibujada con su correspondiente, y la real con la real. O sea:

(una unidad dibujada es a 20,000 unidades reales como 53 mm dibujados son a X mm reales). Por lo tanto:

$$X = 20{,}000 \times 53\,\text{mm} \;;\quad X = 1{,}060{,}000\,\text{mm}$$

$$X = 1{,}060\,\text{m}$$

Solución:

La longitud del tramo de recta es de : 1,060 m.

Ejemplo 2

Si se quiere dibujar a escala 1:200 un terreno que mide 50 m x 32 m, ¿qué dimensiones deberá tener el dibujo?

Aplicando la regla de tres:

$$1{:}200 :: X_1{:}50\text{m} \quad \text{ó} \quad \frac{1}{200} = \frac{X_1}{50\text{m}}$$

por lo tanto:

$$x_1 = \frac{50\,m}{200}\ ;\quad x_1 = 0.25\,m\ ;\quad x_1 = 25\,cm$$

y para 32 m:

$$1{:}200 :: x_2{:}32\,m \quad ó \quad \frac{1}{200} = \frac{x_2}{32\,m}$$

de donde:

$$x_2 = \frac{32\,m}{200}\ ;\quad x_2 = 0.16\,m\ ;\quad x_2 = 16\,cm$$

Solución:

Las medidas dibujadas del terreno son: 25 cm x 16 cm.

Obsérvese que la escala se aplica a longitudes y no a superficies.

Ejemplo 3

En un dibujo, una dimensión que mide 38 mm está acotado como 47.5 m. ¿A qué escala está realizado el dibujo?

Aplicando la definición de escala se tiene:

escala 38 mm : 47.5 m

para expresarla de manera *convencional*, dividimos los dos términos entre el menor, es decir entre 38 mm y realizando la transformación de unidades se tiene:

$$\text{escala: } \frac{38\ mm}{38\ mm} : \frac{47.5\ m}{38\ mm}\ ;\quad \frac{47.5\ \cancel{m}}{38\ mm} \times \frac{1{,}000\ m\cancel{m}}{1\ \cancel{m}} = \frac{47{,}500}{38} = 1{,}250$$

Solución:

El dibujo está realizado a escala 1:1,250

B) Escala natural

Cuando un objeto real tiene determinadas dimensiones, las cuales pueden representarse en el dibujo sin alterarse, decimos que dicho objeto está dibujado a escala natural. Su representación es la siguiente:

escala 1:1 o escala $\frac{1}{1}$

Se utiliza preferentemente en dibujo mecánico.

C) Escala de ampliación.

Se utiliza cuando las dimensiones del objeto son pequeñas y es conveniente ampliarlas en el dibujo para representar los objetos de manera detallada. Su representación convencional es la siguiente:

escala Z:1 o escala $\frac{Z}{1}$

donde Z es un número entero positivo, que indica el número de veces que se amplían las dimensiones reales en el dibujo. Su interpretación es la siguiente:

Z unidades dibujadas corresponden a una unidad real. Este tipo de escala se utiliza en dibujo mecánico de precisión y de observaciones microscópicas.

Es importante señalar la siguiente premisa:

Obsérvese que en cualquiera de los tres tipos de escala, *el numerador representa a la magnitud dibujada, mientras que el denominador representa a la magnitud real, o sea que la escala es* E = MD/MR

Ejemplo 4

Determinar la longitud a que debe dibujarse un tornillo de relojería de 1,230 µm de largo por 1,500 µm de diámetro, si se quiere amplificarlo 50 veces.

Escala 50:1

por lo tanto:

$$50:1 :: x_1 : 1{,}230\ \mu m \quad ó \quad \frac{50}{1} = \frac{x_1}{1{,}230\ \mu m}$$

$$x_1 = 50 \times 1{,}230\ \mu m \ ; \quad x_1 = 61{,}500\ \mu m \ ; \quad x_1 = 61.5\ mm$$

$$50:1 :: x_2 : 1{,}500\ \mu m \quad ó \quad \frac{50}{1} = \frac{x_2}{1{,}500\ \mu m}$$

$x_2 = 50 \times 1,500\ \mu m$; $x_2 = 75,000\ \mu m$; $x_2 = 75$ mm

Solución:

Las dimensiones del tornillo en el dibujo son:

61.5 mm de largo por 75 mm de diámetro.

Ejemplo 5

En el dibujo de una observación microscópica electrónica, se percibe un objeto circular de 2 mm de diámetro, el cual en realidad mide 3,200 Å (Å = Angstrom; 1Å = 10^{-10} m). ¿A qué escala está realizado dicho dibujo?

Procediendo de manera similar al ejemplo 3:

escala 2 mm : 3,200 Å ; dividiendo ambos términos entre el menor, es decir entre 3,200 Å :

$$\text{escala } \frac{2\,\text{mm}}{3,200\,\text{Å}} : \frac{3,200\,\text{Å}}{3,200\,\text{Å}}$$

$$\frac{2\,\text{mm}}{3,200\,\text{Å}} \times \frac{1\,\text{Å}}{10^{-10}\,\text{m}} \times \frac{1\,\text{m}}{1,000\,\text{m}} = \frac{2}{3,200 \times 10^{-7}} = \frac{2 \times 10^7}{3,200} ; \frac{2 \times 10^7}{3,200} = 6,250$$

Solución:

El dibujo está realizado a *escala* 6,250:1

I.5.2 ESCALA ANALITICA

En la solución de problemas de ingeniería, muchas veces es necesario recurrir a gráficas, diagramas o a resoluciones gráficas; las cuales se construyen de tal manera, que cierta longitud, sobre alguno de los ejes representa una magnitud definida, ya sea de presión, volumen, fuerza, velocidad, etcétera.

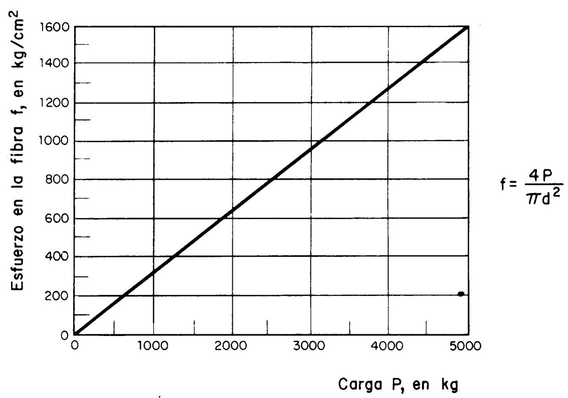


FIGURA I.40

En esta gráfica se puede apreciar, que cada 1 cm del eje horizontal (X'X) equivale a 500 kg, y cada 1 cm del eje vertical a 200 $\frac{kg}{cm^2}$.

Entonces, las escalas *analíticas* utilizadas sobre los ejes horizontal y vertical serán respectivamente:

$Escala_h$ 1 cm = 500 kg ó 1 : 500 $\frac{kg}{cm}$ es decir, escala horizontal es 1 a 500 kg por cm. Escala vertical es 1 a 200 $\frac{kg}{cm^2}$ por cm. $Escala_v$ 1 cm = 200 $\frac{kg}{cm^2}$ ó 1 : 200 $\frac{kg}{cm^2\ cm}$

NOTA: Se prefiere la representación de la escala analítica mediante la igualdad de la unidad de longitud con la magnitud que representa.

Entonces, para el caso de las gráficas lineales, se puede llegar a la siguiente definición:

Escala analítica es la relación que existe entre la unidad de longitud y la magnitud real que representa. Esta relación debe ser constante para un mismo eje en toda la gráfica.

Esta misma definición se aplica al efectuar la resolución gráfica de problemas.

Ejemplo 6

Se tienen cuatro fuerzas que actúan sobre un mismo punto en un plano. Determinar la resultante si:

$$F_1 = (60\text{ kg}, 15°),\quad F_2 = (80\text{ kg}, 30°),$$

$$F_3 = (150\text{ kg}, -90°),\quad F_4 = (120\text{ kg}, 75°).$$

Utilizando una escala 1 cm = 20 kg, se resuelve gráficamente mediante el polígono de fuerzas.

Para calcular la magnitud de la fuerza resultante:

$$\frac{1\text{ cm}}{20\text{ kg}} = \frac{7.95\text{ cm}}{|F_R|}$$

$$|F_R| = \frac{7.95\ \cancel{\text{cm}} \times 20\text{ kg}}{1\ \cancel{\text{cm}}} \qquad |F_R| = 159\text{ kg}$$

$$\tan\theta = \frac{1.35\ \cancel{\text{cm}}}{10\ \cancel{\text{cm}}}\ ;\quad \tan\theta = 0.135$$

$$\theta = \text{ang tan } 0.135\ ;\quad \theta = 7°41'18''$$

Solución: $F_R = (159\text{ kg}, 7°41'18'')$

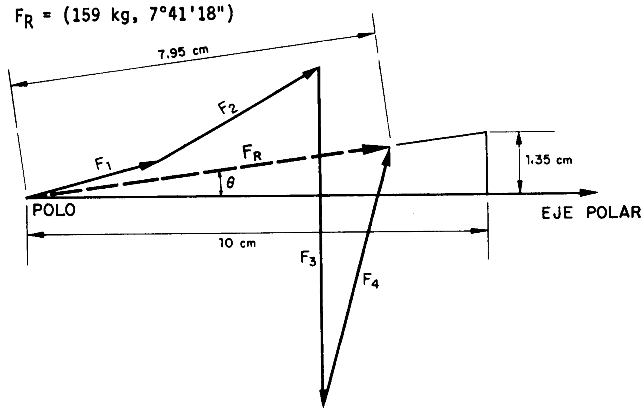


FIGURA I.41

Ejemplo 7

Si en una gráfica, la escala utilizada sobre el eje horizontal es 1 cm = 150°C, ¿cuántos grados centígrados estarán representados por 7 cm?

Puesto que la relación es constante, el problema se resuelve mediante una simple regla de tres.

Si:

1 cm representa 150°C; 7 cm deben representar X:

$$\frac{1\ \text{cm}}{150°\text{C}} = \frac{7\ \text{cm}}{X}\text{ , de donde:}\quad X = \frac{7\ \cancel{\text{cm}} \times 150°\text{C}}{1\ \cancel{\text{cm}}}\ ;\quad X = 1{,}050°\text{C}$$

Solución:

7 cm representan 1,050°C.

Ejemplo 8

Si en la gráfica de vapor de agua, un intervalo de 5.6 cm representa 0.7 $\frac{\text{cal}}{\text{g°K}}$ de entropía, y 12.5 cm representa 400 $\frac{\text{cal}}{\text{g}}$ de entalpía, ¿qué escalas se utilizan en ella?

Aplicando la definición de la *escala analítica*, se procede de la siguiente manera:

para la entropía:

$$5.6\ \text{cm} = 0.7\ \frac{\text{cal}}{\text{g°K}}$$

dividiendo ambos miembros de la igualdad entre 5.6:

$$\frac{5.6\ \text{cm}}{5.6} = \frac{0.7}{5.6}\,\frac{\text{cal}}{\text{g°K}}$$

escala para la entalpía:

$$1\ \text{cm} = 0.125\ \frac{\text{cal}}{\text{g°K}}$$

procediendo de la misma manera para la entalpía:

$$12.5 \text{ cm} = 400 \frac{\text{cal}}{\text{g}}$$

dividiendo ambos miembros entre 12.5:

$$\frac{12.5 \text{ cm}}{12.5} = \frac{400}{12.5} \frac{\text{cal}}{\text{g}}$$

escala para la entalpía:

$$1 \text{ cm} = 32 \frac{\text{cal}}{\text{g}}$$

I.5.3 ESCALA GRAFICA

En el dibujo de proyecciones como son los planos topográficos, arquitectónicos, mapas, etc., es necesario indicar la escala a la que están dibujados, ya sea la numérica o la gráfica o de preferencia ambas por norma oficial.

La utilidad que tiene cada una de estas escalas es:

Numérica.- Ofrece una mayor rapidez en la interpretación.

Gráfica.- Verifica la precisión y conserva proporcionalmente la reducción o ampliación que sufre el dibujo cuando se obtienen copias del original.

La *escala gráfica* es la representación mediante un dibujo de una escala numérica o analítica. Este dibujo no es más que un segmento de recta subdividido en cierto número de partes en las que se señala la magnitud real que representan, con respecto a un origen (0) predeterminado.

Por ejemplo a escala 1 cm = 50 kg.

Podemos determinar fácilmente que el vector F_A representa una fuerza de 250 kg, al compararlo con la escala gráfica proporcionada.

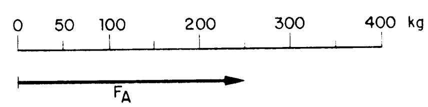


FIGURA I.42

En la práctica es necesario que la escala gráfica tenga una representación adecuada, de manera que su utilización no presente dificultad. Esta representación es la siguiente:

Se pueden observar los tres elementos principales de una escala gráfica:

a) *El pie* es un segmento de recta que representa una unidad real o bien su múltiplo o submúltiplo decimal (vgr. 10m, 100 mg, 1,000 km, 1 $\frac{kg}{cm^2}$).

b) *El talón* es un pie dividido en diez partes iguales (o en cinco, si el pie es pequeño), el cual se coloca a la izquierda del origen (0).

c) *La unidad* es un elemento muy importante que tienen los números indicados sobre la escala, ya que sin ella no queda definida la escala gráfica. La escala numérica es diferente para cada caso, no es lo mismo una longitud dibujada de 10 m reales, que la misma longitud esté representada por 10 mm.

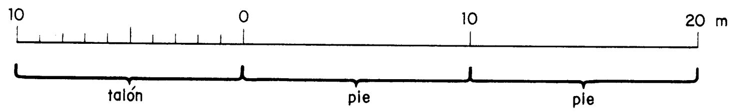


FIGURA I.43

El procedimiento para la construcción de una escala gráfica de reducción correspondiente a una escala numérica es:

1. Se dibuja un segmento de recta de 10 cm para la representación de la escala gráfica, por ser submúltiplo decimal del metro y por norma oficial.

2. Se divide el segmento según la relación de la escala numérica, teniendo en cuenta que este segmento de recta de 10 cm representa 10 cm reales a escala 1:1 y 20 cm a escala 1:2.

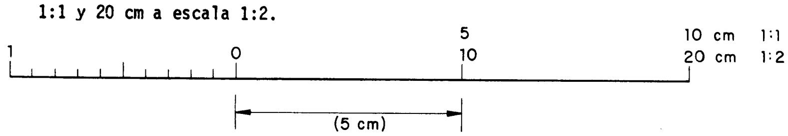


FIGURA I.44

Ahora bien a escala 1:3 dicho segmento representará 30 cm reales.

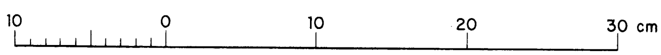


FIGURA I.45

Y así sucesivamente, a escala 1:N, la enésima parte del segmento de 10 cm representará los 10 cm reales.

Sin embargo, como el denominador llega a ser en ocasiones muy grande, no es conveniente, ni a veces posible dividir en demasiadas partes el segmento de 10 cm. Se recomienda que el número de partes en que se divida dicho segmento sea menor de quince. Entonces, se dividirá el segmento de recta de 10 cm en el número de partes indicado por el denominador, o en un submúltiplo decimal del denominador, de manera que se divida cuando más en quince partes, y a cada división resultante (el pie de la escala gráfica) representará 10 cm reales ó 10 cm multiplicados por el factor decimal en que se dividió el denominador para obtener el número de partes a dividir.

3. Se dibuja el talón de la escala gráfica, dibujando un pie al lado izquierdo del origen y dividiéndolo en diez (o cinco) partes.

4. Por último, se indica la unidad de la escala gráfica.

Ejemplo 9

Dibujar la escala gráfica correspondiente a la escala numérica 1:12.

Solución:

Se traza un segmento de recta de 10 cm.

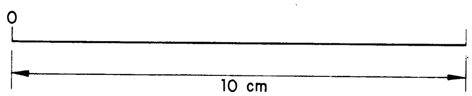


FIGURA 1.46

Se divide en doce partes por método gráfico, ya que 10 cm entre 12 no da una cantidad exacta.

Cada división o pie representará 10 cm reales.

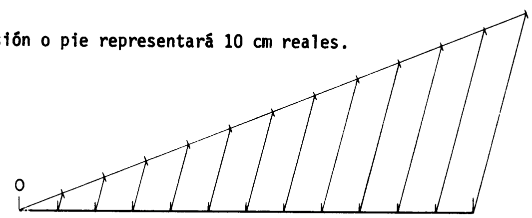
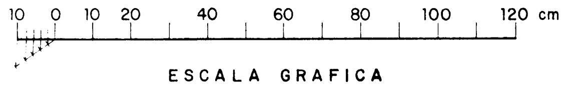


FIGURA I.47

Se dibuja el talón y se indica el valor real de cada segmento así como la unidad de medida.

El talón está dividido en cinco partes por ser el pie relativamente pequeño.



ESCALA GRAFICA

FIGURA I.48

Ejemplo 10

Dibujar la escala gráfica correspondiente a la numérica 1:4,000.

Se divide un segmento de 10 cm en cuatro partes iguales. Por lo tanto, cada parte será de 2.5 cm.

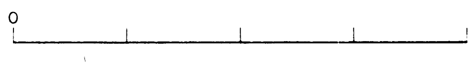


FIGURA I.49

Cada pie tendrá la siguiente longitud real: denominador = 4,000 número de divisiones realizadas = 4; factor = $\frac{4,000}{4}$

por lo tanto:

factor = 1,000;

entonces:

pie = 10 cm x 1,000; pie = 10,000 cm

o sea:

pie = 100 m

ESCALA GRAFICA

FIGURA I.50

Ejemplo 11

Dibujar la escala gráfica correspondiente a la numérica 1:630,000.

Se divide un segmento de recta de 10 cm en 6.3 partes por el método gráfico. Para ello se da un valor de 20 mm por parte sobre la recta auxiliar. Entonces 0.3 de parte será 6 mm.

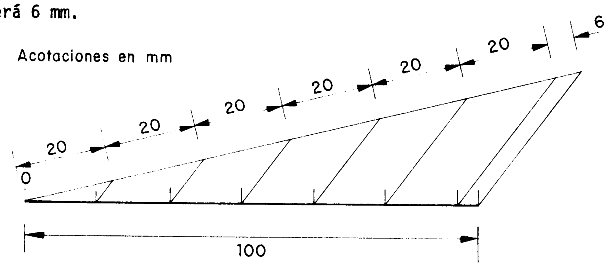


FIGURA I.51

El factor será:

$$\text{factor} = \frac{630{,}000}{6.3} = 100{,}000$$

la longitud real de un pie será:

$$\text{pie} = 10 \text{ cm} \times 100{,}000$$

de donde:

$$\text{pie} = 1.000{,}000 \text{ cm}$$

entonces:

$$\text{pie} = 10{,}000 \text{ m} \qquad \text{pie} = 10 \text{ km}$$

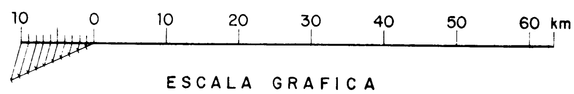


FIGURA I.52

Una manera muy fácil de comprobar el valor del pie de la escala gráfica es simplemente comparándolo con la igualdad que proporciona técnicamente la escala numérica. Por ejemplo, en el caso anterior la escala 1:630,000 cm, significa que cada centímetro dibujado representa 630,000 cm, o sea 6.3 km.

Es posible construir una escala gráfica de una manera más sencilla. Si se considera nuevamente la escala 1:630,000, se puede dibujar un segmento de recta subdividido en porciones de un centímetro, cada una de las cuales representará una longitud de 6.3 km reales, como se infirió.

La desventaja de este tipo de escala gráfica es que cuando se quiere utilizarla para determinar el valor de la longitud real de un segmento de recta en un dibujo o plano trazado a escala, sólo se podrá obtener un resultado aproximado y con cierta dificultad. Por ejemplo, suponiendo que el segmento de recta $\overline{AB}$ está dibujado a escala 1:630,000, no se podría precisar su longitud real con la segunda escala gráfica; sin embargo, con la escala convencional, fácilmente se puede concluir que el segmento mide 33 km reales.

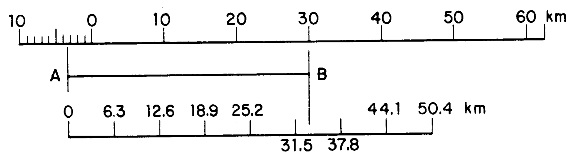


FIGURA I.53

Esta es la razón por la cual se recomienda el uso del primer tipo de escala gráfica.

El procedimiento para la obtención de una escala gráfica de ampliación correspondiente a una escala numérica es:

1. Al igual que en la escala gráfica de reducción se dibuja un segmento de recta de 10 cm.

2. Se divide el segmento según la relación de la escala, teniendo en cuenta que a cada Z unidades dibujadas corresponde una unidad real, siendo la escala Z:1. En la práctica se hacen las siguientes consideraciones:

   El pie de la escala gráfica medirá Z mm si $10 < Z < 100$, lo cual representará 1 mm real; si $Z < 10$ el pie representará 1 cm real y medirá en la escala gráfica Z cm; y por último si $Z > 100$ el pie medirá un submúltiplo decimal de Z, el cual deberá estar en un rango entre 10 y 100, donde dicho pie representará 1 mm dividido entre el factor decimal requerido para determinar su medida.

3. El talón se dibuja del lado izquierdo del origen y finalmente se indica la unidad de la escala gráfica.

Ejemplo 12

Dibujar la escala gráfica correspondiente a la numérica 5:1.

Cada 5 cm dibujados representarán 1 cm real.

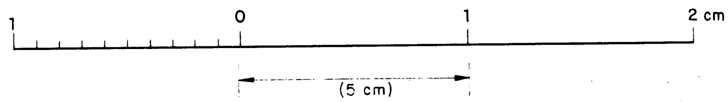


FIGURA I.54

Ejemplo 13

Dibujar la escala gráfica correspondiente a la numérica 35:1.

Cada 35 mm dibujados representarán 1 mm real.

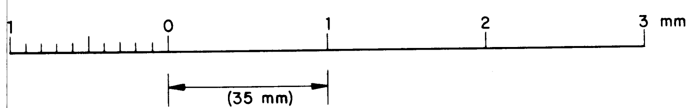


FIGURA I.55

Ejemplo 14

Dibujar la escala gráfica correspondiente a la numérica 6,000:1.

El pie medirá 60 mm, ya que el factor = $\frac{6,000}{60}$, factor = 100.

Por lo tanto, cada pie representará $\frac{1}{100}$ mm reales, o sea 10 mm.

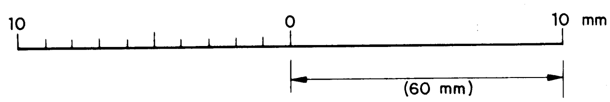


FIGURA I.56

I.5.4 USO DEL ESCALIMETRO

El escalímetro es un instrumento de dibujo que tiene seis escalas gráficas diferentes, trazadas para su utilización directa.

Los escalímetros más comunes son aquellos que cuentan con seis escalas y son un subconjunto de las siguientes: 1:100, 1:125, 1:150, 1:200, 1:250, 1:300, 1:400, 1:500, 1:750 y sus múltiplos y submúltiplos decimales. Por ejemplo las escalas 1:20 ó 1:1,250.

En algunos escalímetros, estas escalas pueden estar indicadas como sigue: 0.01 en lugar de 1:100, 0.008 por 1:125 , 0.005 es 1:200, 0.004, etcétera.

Existen otros escalímetros con el sistema inglés de medición, pero su uso no lo trataremos en estos párrafos.

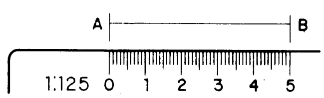
Con este instrumento se puede trabajar rápidamente para realizar dibujos a escala, en el caso de que dicha escala se encuentre en el escalímetro, o bien un múltiplo decimal de aquélla, sin necesidad de realizar operaciones complicadas.

Por norma oficial las cantidades que aparecen sobre las escalas del escalímetro están en metros, de no ser así, deben traer indicadas las unidades.

Ejemplo 15

En un dibujo realizado a escala 1:125, se quiere medir un segmento de recta $\overline{AB}$.

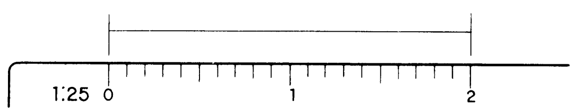
Entonces, la medida real del segmento será de 4.5 metros. (Véase figura I.57)



Cuando la escala que se quiere utilizar sea múltiplo o submúltiplo decimal de alguna que tenga el escalímetro, la medida requerida será la misma que aparezca en él, agregándole tantos ceros a la derecha como ceros de más tenga el denominador de la escala del dibujo con respecto a la escala del escalímetro, o corriendo el punto decimal tantos lugares como se requiera conforme a la relación citada entre los denominadores de las escalas.

Ejemplo 16

Se desea trazar un segmento de recta que mide 200 m a escala 1:2,500 utilizando el escalímetro la escala 1:25. (Véase figura I.58).



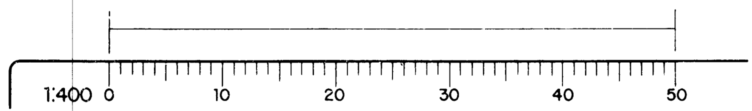
Como la medida a escala 1:25 es 2 m.

A escala 1:2,500 será 200 m (2 m con dos ceros más a la derecha).

Si la escala requerida fuera 1:250,000, la medida sería de 20,000 m o sea 2 m con cuatro ceros más a la derecha.

Ejemplo 17

Dibujar un segmento de recta de 50 cm a escala 1:4. Si se cuenta con la escala 1:400 en el escalímetro. (Véase figura I.59).



Como la medida a escala 1:400 es 50 m.

A escala 1:4 será .50 m, o sea 0.50 m = 50 cm (50 m con el punto decimal corrido a la izquierda dos lugares).

Si la escala fuera 1:40, el segmento de recta presentado anteriormente mediría en la realidad 5 m.

Cuando se requiera medir varios segmentos de recta colineales y sucesivos (adyacentes uno al otro), todos estos segmentos deberán determinarse en una sola colocación del escalímetro, añadiendo la longitud sucesiva a la precedente. No se deben medir las distancias individualmente, ya que al ir moviendo el escalímetro para cada segmento, los errores se van acumulando y resulta un mayor error de medición al final del proceso.

Ejemplo 18

Medir sobre una recta segmentos de 30 mm, 27 mm, 15 mm, 22 mm y 8 mm.

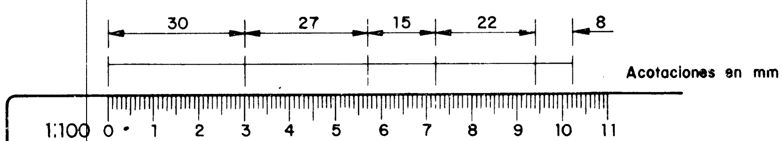


FIGURA I.60

I.6 ACOTACIONES

El dibujo de proyecciones se utiliza en la ingeniería para representar modelos gráficos. Este dibujo deberá contener la información necesaria para poder reproducir fielmente el objeto que representa.

La información que debe poseer el dibujo de proyecciones es la descripción completa, tanto de la forma, como de las dimensiones, materiales y procesos de fabricación.

La información que requiere un objeto para su fiel reproducción es lo que se conoce con el nombre de *acotación*.

Para la correcta acotación de un dibujo de proyecciones es necesario conocer una serie de reglas, normas y convenciones que se aplican, con el objeto de lograr mayor claridad y rapidez de interpretación del dibujo. A continuación se muestran las técnicas de acotación más relevantes.

I.6.1 NUMEROS Y LETREROS

Para que un dibujo de ingeniería tenga una presentación adecuada, será de capital importancia el trazo correcto de números y letras, los cuales deberán ser perfectamente legibles y trazados con un solo estilo.

Para el trazo de números y letras, se recomienda la utilización de instrumentos de rotulado, como el leroy o las plantillas de letras, y en caso de realizar el rotulado a mano libre, el estilo gótico vertical.

Los números y letras empleados en la acotación deben ser de tamaño constante. Para dibujos relativamente grandes (que ocupen un espacio mayor a una hoja carta), se recomienda que sean de 4 mm de altura, y para los demás casos de 3 mm.

I.6.2 LINEAS EMPLEADAS

Las principales líneas empleadas en la acotación de un dibujo de proyecciones son: *la línea de acotación, la línea de extensión o línea de límite de acotación y la línea de eje o de centro*. Todas ellas deberán ser obscuras y delgadas con un grosor entre 0.1 y 0.2 mm.

La *línea de acotación* debe ser paralela a la dirección de la dimensión que acota y puede ser continua, en cuyo caso el dato de la dimensión se coloca generalmente, 1 mm arriba de dicha línea o con un espacio en el centro de ella, en donde se colocan las cifras de dimensión.

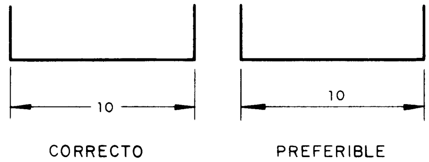


FIGURA I.61

Generalmente en ambos extremos de la línea de acotación se deben dibujar cabezas de flecha, las cuales son triangulares (llenas) con 3 mm de largo por 1 mm de ancho (en sentido de la línea). Se debe evitar el trazo de cabezas de flecha diferentes a las antes mencionadas. (Véase figura I.62).

La línea de acotación continua es preferible con el dato numérico arriba de ella, porque ofrece mayor facilidad de trazo.

La línea de extensión es continua y perpendicular a la línea de acotación. Como su nombre lo indica, sirve como extensión de los contornos del dibujo que se desea acotar. La línea de extensión no debe de tocar el contorno del dibujo, por lo que entre éste y el extremo próximo de la línea debe haber una separación de 2 mm. La línea de extensión debe rebasar la línea de acotación, y no debe interrumpirse entre las de acotación.

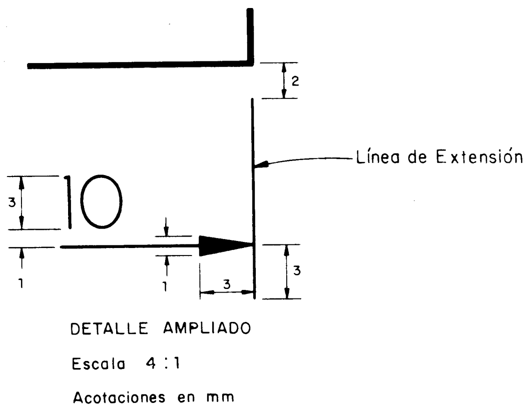


FIGURA I.62

Las cabezas de flecha de las líneas de acotación deben terminar justo en la línea de extensión y no deben sobrepasarla, ni terminar antes de ella.

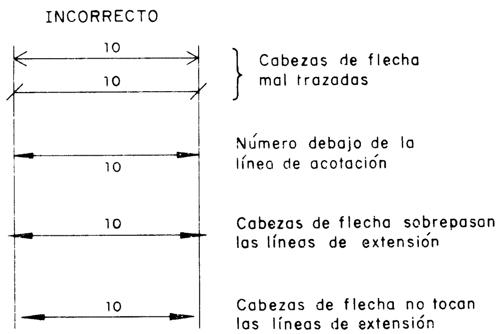


FIGURA I.63

La línea de eje es una línea discontinua formada por segmentos de recta de 20 a 40 mm de largo, alternados con otros más cortos de 3 mm, dejando un espacio entre ellas de unos 2 mm. Esta línea siempre debe terminar con los segmentos de recta largos. Se utiliza principalmente para la localización de centros y ejes de contornos cilíndricos.

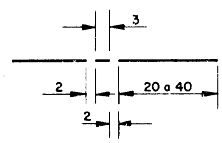


FIGURA I.64

El centro de un contorno cilíndrico se debe realizar en la proyección en que aparezca como circunferencia o arco de circunferencia, mediante dos líneas de eje perpendiculares entre sí, cuya intersección sea precisamente el centro, de tal manera que coincidan en él los segmentos cortos.

La línea de eje no debe interrumpirse cuando atraviesa las líneas de contorno (líneas principales o de perfil oculto) del dibujo. Debe sobrepasar 3 mm de las líneas del contorno cilíndrico, a menos de que se utilice para acotar la localización del centro, en cuyo caso será tan largo como se requiera, haciendo la función de línea de extensión.

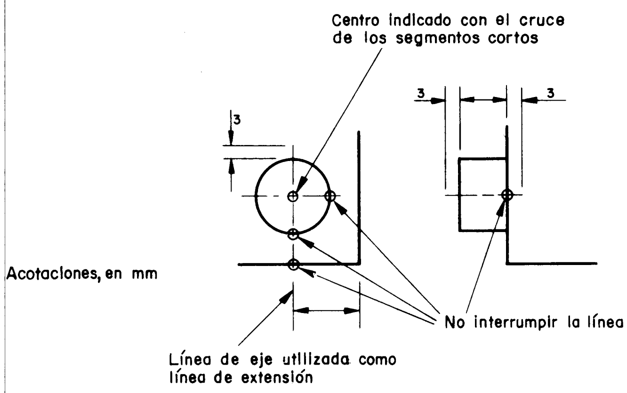


FIGURA I.65

I.6.3 COLOCACION DE LOS NUMEROS DE ACOTACION

Existen dos sistemas de colocación de los números de acotación: el sistema *unidireccional* y el sistema *alineado*.

En el sistema *unidireccional*, los números se colocan de tal manera, que todos ellos se puedan leer en una sola dirección (sin variar la posición de la lectura). Los números que se colocan en las líneas de acotación que tienen la dirección de lectura, deben colocarse arriba de ellas. En los demás casos los números deben rotularse en la parte externa de la línea de acotación, con respecto al dibujo.

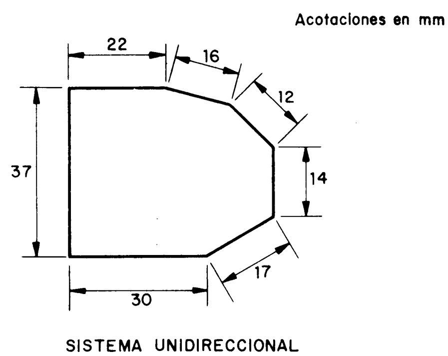
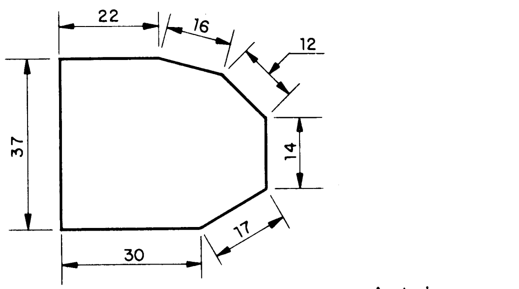


FIGURA I.66

En el sistema *alineado*, los números se colocan siempre arriba de la línea de acotación y en dirección de ésta. En líneas de acotación perpendiculares a la dirección normal de lectura, los números deben rotularse de tal manera que sean leídos desde la derecha. Para el caso en que la línea de acotación sea oblicua hacia la izquierda (el extremo izquierdo más alto que el derecho) y cuya inclinación exceda a los 45° con respecto a la horizontal, se debe emplear una línea de acotación auxiliar sobre la que se coloca el dato en dirección horizontal.



SISTEMA ALINEADO

FIGURA I.67

No se deben mezclar los dos sistemas en un mismo dibujo. Por su sencillez de aplicación se prefiere el sistema *unidireccional*.

I.6.4 PRINCIPALES REGLAS, NORMAS Y CONVENCIONES APLICADAS EN LA ACOTACION

Para comprender la aplicación de las principales reglas, normas y convenciones ya expuestas en párrafos anteriores, a continuación se presentan aquellas que tienen mayor importancia y se ejemplifican con un dibujo de proyecciones de una pieza mecánica (*retén angular*) conjuntamente con su explicación.

1. Los números que se requieren en la acotación del dibujo de un objeto, deben representar las longitudes *reales* de dicho objeto.

Si una casa tiene 10 m de largo, entonces aparece acotada la dimensión correspondiente en el dibujo con 10 m, aunque en él mida 200 mm o cualquier otra longitud dibujada.

Se recomienda que las unidades de los números de acotación sean en kilómetros para dibujo cartográfico y topográfico, metros para el arquitectónico y estructural, y en milímetros para el dibujo mecánico.

2. Se debe rotular claramente la unidad que tienen las acotaciones que están en el dibujo, así como indicar la escala a la que está trazado, o en caso de que esté dibujado fuera de escala escribir claramente la palabra *croquis*.

   En la mayoría de los casos, ambos letreros se colocan juntos en la parte inferior del dibujo.

3. Tratar de utilizar líneas de extensión siempre que sea posible, evitando usar las líneas de contorno del dibujo como límite de acotación. (Véase figura I.68).

4. Evitar utilizar líneas de contorno, de perfil oculto, de eje o de extensión como líneas de acotación. Asimismo tratar de realizar las acotaciones fuera del área del dibujo.

5. En la acotación de ángulos, la línea de acotación debe ser un arco de circunferencia con centro en el vértice del ángulo. Su valor numérico se coloca en la parte externa y también en la parte media del arco de circunferencia. Al usar la línea de extensión en este caso, se debe evitar, cuando sea posible el uso de la línea de contorno como límite de acotación.

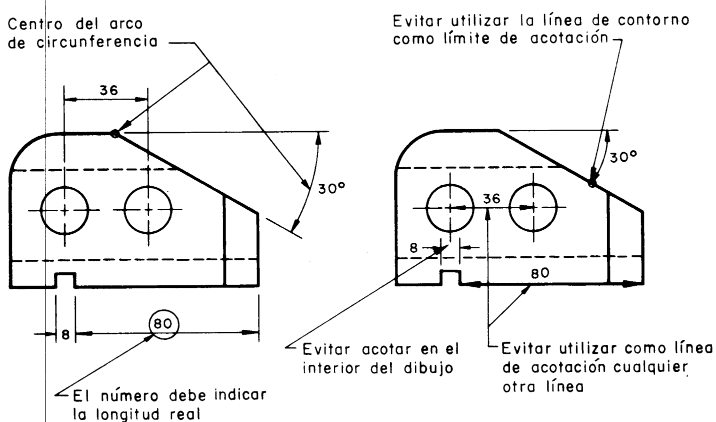


FIGURA I.68

6. Las líneas de acotación deben trazarse a 10 mm del último contorno del dibujo, cuando el valor de la dimensión se encuentra entre ambos. Si se traza una línea de acotación a continuación de otra, el espacio mínimo debe ser de 7 mm. (Véase figura I.69).

7. Cuando sea necesario acotar varias dimensiones en el mismo lado, las dimensiones más cortas deben quedar acotadas más cerca del último contorno del dibujo, con esto se evita el cruzamiento de las líneas de acotación con las líneas de extensión.

8. La líneas de extensión pueden cruzarse entre sí o con líneas de eje, en cuyo caso no debe haber interrupción de alguna de ellas. Se debe procurar que suceda lo menos posible.

9. En el caso que existieran líneas de acotación de dimensiones complementarias en una misma dirección y no se superpongan, todas ellas deberán quedar alineadas.

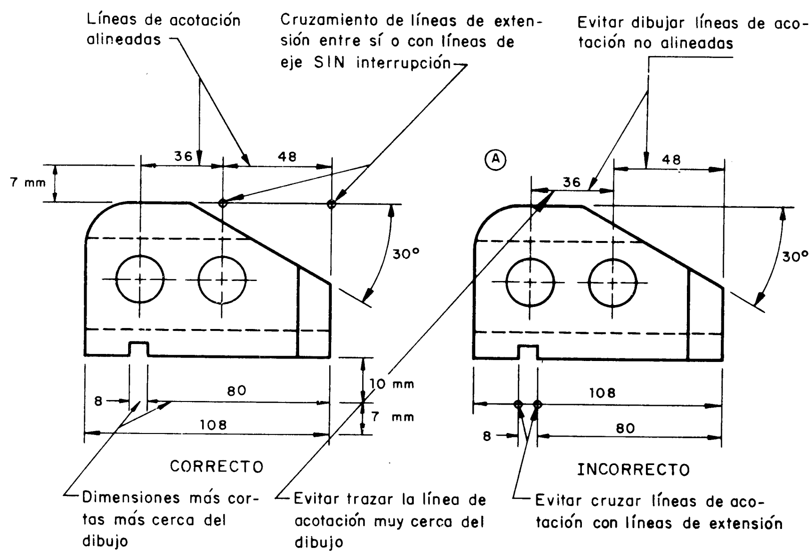


FIGURA I.69

10. La acotación de contornos cilíndricos debe realizarse en la proyección en que aparezca como arco de circunferencia, mediante una línea radial que pase por el centro, indicando *siempre* el valor del radio de dicho contorno y rotulando su valor numérico seguido de la letra R (que simboliza radio). En general, es conveniente indicar su centro mediante dos líneas cortas entrecruzadas perpendicularmente de unos 3 mm de longitud cada una. (Ver figura I.70).

11. En el caso de perforaciones o taladros, se acota también en la proyección en que aparece como circunferencia, mediante una línea radial o diametral, indicando su valor numérico del diámetro seguido de la letra D. También es común indicarlo mediante el letrero *taladro* (si la perforación se obtiene mediante esta operación) junto con el valor del diámetro con o sin la letra D, ya que se presupone que el tamaño de las perforaciones se define por convención mediante su diámetro.

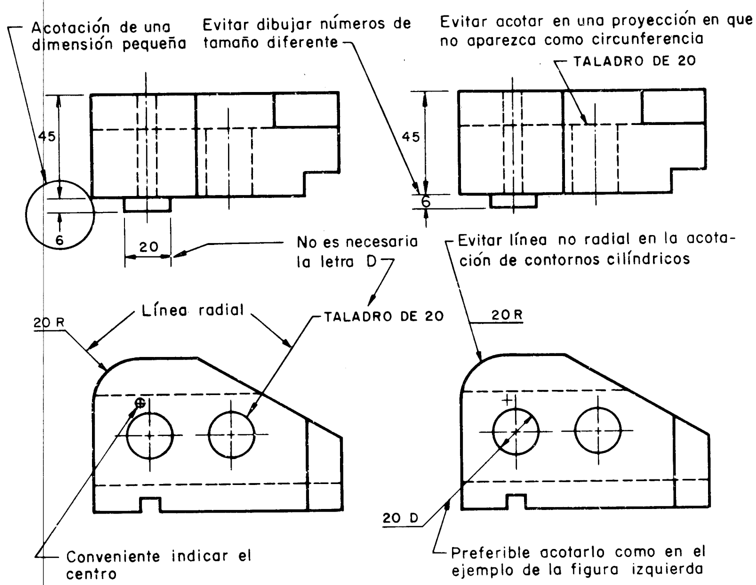


FIGURA I.70

12. Los contornos cilíndricos completos (partes de la pieza que tienen forma de cilindros circulares rectos) se acotan preferentemente en la proyección en donde aparecen sus dos dimensiones, es decir, su diámetro y su altura en el mismo dibujo. Se coloca la letra D cuando no se observa con claridad la forma cilíndrica del contorno . (Véase figura I.71).

13. Cuando la dimensión es muy pequeña, se trazan dos líneas de acotación, una a cada lado de la línea de extensión que la limita, con las cabezas de flecha apuntando hacia el interior del espacio acotado. Su valor numérico puede colocarse ya sea dentro de dicho espacio o a un lado de cualquiera de las dos líneas de acotación. Si el espacio es tan pequeño que no se puede colocar el número dentro de él y si este espacio por acotar está a continuación de uno mayor, se permite el uso de la línea de acotación de éste para acotar al primero.

14. Cuando las líneas de extensión crucen líneas de contorno, éstas deben ser continuas y no interrumpirse. Si se presenta el caso anterior, evitar que se utilice varias veces.

15. Evitar, siempre que sea posible, acotar con referencia a líneas de perfil oculto. El contorno que aparece oculto en una de las proyecciones debe ser visible en la otra, en la cual se debe realizar la acotación correspondiente.

16. Evitar las acotaciones duplicadas o innecesarias en el dibujo de proyecciones. Una misma dimensión siempre aparecerá en dos proyecciones diferentes: la altura del objeto aparecerá tanto en la proyección frontal como en la de perfil, por lo que será suficiente acotarla en una sola de ellas.

    En el caso que se tengan dimensiones parciales complementarias (*acotación en cadena*) se debe omitir una de las dimensiones parciales, acotando también la dimensión total.

17. Cuando exista una recta oblicua en un dibujo, ésta quedará completamente definida por medio de dos dimensiones, o una dimensión y el ángulo formado por dicha recta.

18. Si existen arcos de circunferencia tangentes a las líneas de contorno en una proyección determinada, también las acotaciones de éstas, pueden resultar innecesarias.

En el caso en que los contornos estén definidos, así como el radio de enlace de dichos contornos, resulta innecesaria la localización del centro del arco de circunferencia.

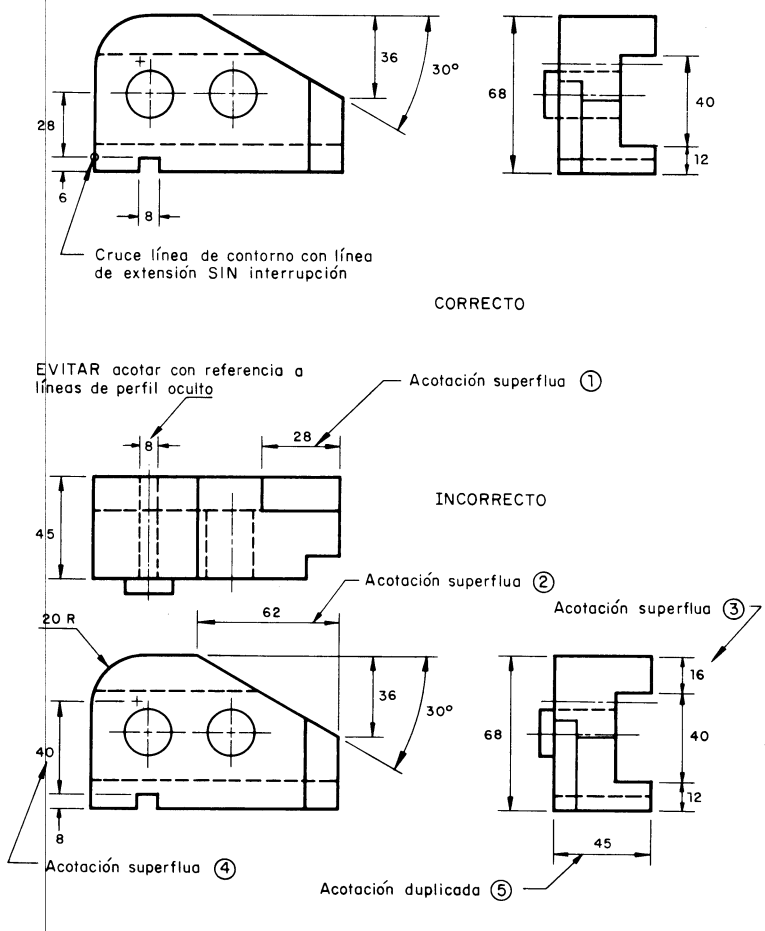


FIGURA I.71

La figura I.71 muestra además las diversas formas de uso incorrecto de las líneas de acotación, las cuales están numeradas y se mencionan a continuación.

Las acotaciones son innecesarias porque:

1 La dimensión indicada tiene relación directa con la intersección de la recta oblicua con la línea de perfil oculto, la cual limita en la proyección frontal.

2 La dimensión 62 está en función del ángulo de 30° y el otro cateto de 36, del triángulo rectángulo formado con ellas.

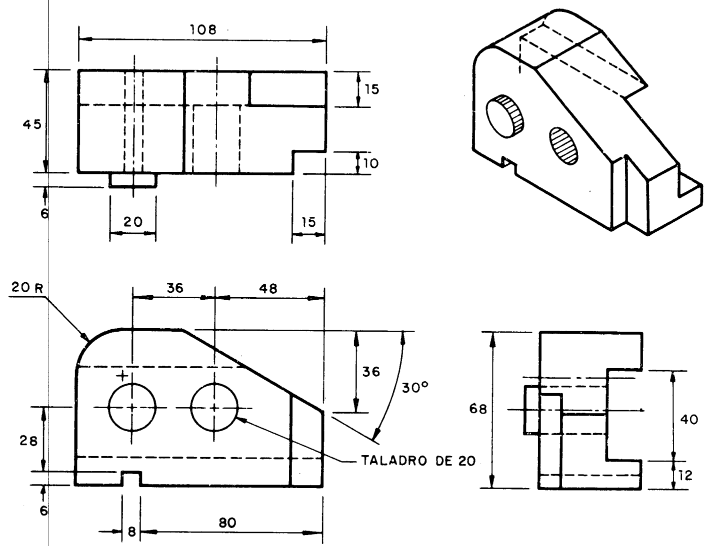
$$62 = \frac{36}{\tan 30°}$$

3 Teniendo la dimensión total de 68 y las dimensiones parciales 40 y 12, 16 resulta ser complemento de las anteriores.

4 El arco de circunferencia de 20 de radio es tangente a la línea de contorno superior, por lo que el centro está localizado forzosamente a una distancia igual a la dimensión total de 68 menos el valor 20 de radio del arco de circunferencia, medido desde la parte inferior de la pieza mecánica.

5 Está duplicada, ya que aparece en la proyección horizontal, así como en la proyección de perfil.

A continuación se presenta la montea y la proyección isométrica de un retén angular, para ilustrar la aplicación de las reglas, normas y convenciones de la acotación. (Véase figura I.72).



RETEN ANGULAR

Acotaciones, en mm

FIGURA I.72

Además de los conceptos tratados en estas líneas, existe una cantidad mayor de reglas, normas y convenciones, así como otro tipo de prácticas que se deben tomar en cuenta para la acotación de los dibujos de proyecciones. Algunas de éstas son por ejemplo: las indicaciones de acabado, las tolerancias, dimensionamiento de algunos tipos de maquinado estándar, etcétera.

Todos estos conceptos mencionados deberán ser tratados en cursos posteriores de dibujo, debido a que son conceptos especializados de ciertas áreas de la ingeniería.

I.7 CONSTRUCCIONES GEOMETRICAS

Euclides, profesor de matemáticas en Alejandría, escribió un tratado de geometría en el año 300 a.C.

La geometría plana o geometría euclidiana es la ciencia que estudia las figuras planas, es decir las figuras cuyas partes están en un mismo plano.

Los principios de la geometría euclidiana son aplicados constantemente en el dibujo de ingeniería, por lo tanto todo ingeniero debe estar familiarizado con ellos para poder aplicarlos a las soluciones de los problemas que se le presentan.

La interpretación estricta de la geometría plana permite, con sólo el empleo de un compás y una regla, realizar *construcciones geométricas* y con éstas, siguiendo la teoría matemática, se podrá dar solución a ciertos problemas. Empero, en el dibujo de ingeniería son usados continuamente la regla T, las escuadras, el escalímetro, etc., para hacer las construcciones con mayor rapidez.

Para resolver problemas geométricos se emplean los siguientes métodos:

Método Sintético

En problemas muy simples, la resolución es fácil mediante la aplicación de una o más proposiciones geométricas conocidas como aplicación inmediata de una o más proposiciones geométricas conocidas. Entonces se ejecuta la construcción indicada por tales proposiciones, y luego en caso de ser necesario, por medio de las mismas se demuestra la validez de la construcción.

Método Analítico

Este método supone al problema resuelto e infiere las consecuencias que se deducen de las condiciones expuestas. A continuación se observa si es posible construir una figura que satisfaga estas consecuencias, consideradas ahora como condiciones del problema.

Método de las intersecciones de lugares geométricos

Este método es útil cuando se desea determinar un punto que está sujeto a dos condiciones. La primera se satisface por los puntos de un lugar geométrico, y la segunda por los puntos de otro lugar geométrico. La intersección de estos lugares geométricos determina el punto buscado.

Para comprender más ampliamente en qué consiste este último método, se dan a continuación una serie de *definiciones, ejemplos y ejercicios.*

Lugar geométrico.

Se llama lugar geométrico a la línea o superficie formada por todos los puntos que satisfacen una misma condición preestablecida.

Por ejemplo, cualquier punto de la circunferencia mostrada en la figura I.73, satisface la condición de tener una equidistancia R a partir del centro O y cualquier otro fuera de ella no la satisface.

En otras palabras, si un punto de un plano está sujeto a la condición única de hallarse a una distancia dada R de un punto fijo O del plano, deberá encontrarse en la circunferencia que tiene por centro al punto O y por radio R.

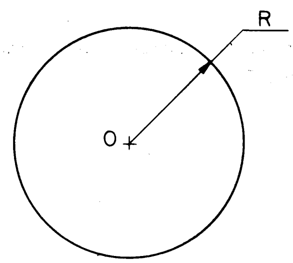


FIGURA I.73

Los elementos y características de los lugares geométricos más conocidos son:

Recta Paralela

Es el lugar geométrico de todos los puntos que equidistan de una recta dada S.

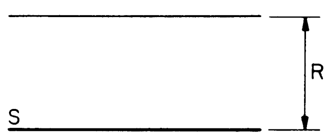


FIGURA I.74

Obsérvese que dicha paralela también es el lugar geométrico de todos los centros de las circunferencias tangentes a la recta S y con radio igual a R. (Véase figura I.75).

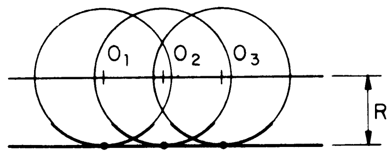


FIGURA I.75

Recta Perpendicular a otra

Es el lugar geométrico de todos los centros de las circunferencias tangentes a una recta dada M, en el punto T.

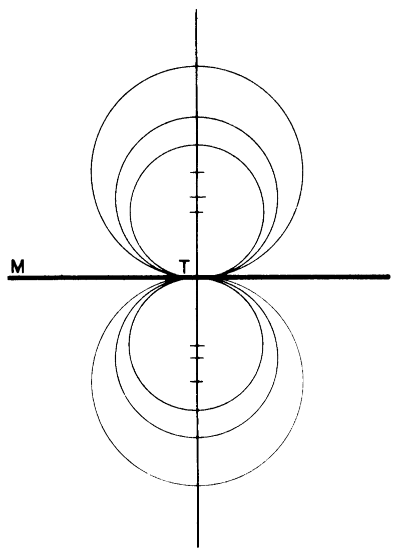


FIGURA I.76

Mediatriz

Es el lugar geométrico de todos los puntos que equidistan de otros dos fijos.

Obsérvese que dicha recta divide al segmento $\overline{AB}$ en dos partes iguales y además que es perpendicular a éste. (Véase figura I.77).

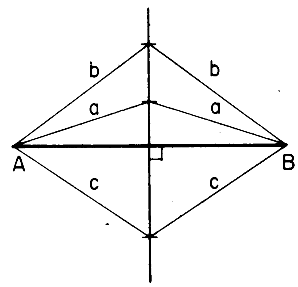


FIGURA I.77

Bisectriz

Es el lugar geométrico de todos los puntos que equidistan de los lados de un ángulo.

Obsérvese que dicha bisectriz divide al ángulo en dos partes iguales y que también es el lugar geométrico de todos los centros de las circunferencias tangentes a los lados del ángulo.

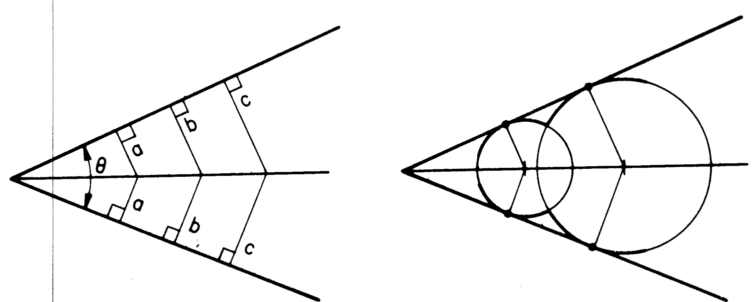


FIGURA I.78

Paralela Media

Es el lugar geométrico de todos los puntos que equidistan de dos rectas paralelas. (Véase figura I.79).

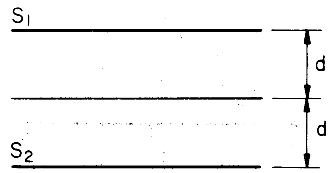


FIGURA I.79

Circunferencia

Es el lugar geométrico de todos los puntos de un plano que equidistan de otro fijo llamado centro.

Obsérvese que la mediatriz de cualquier cuerda de la circunferencia siempre pasa por el centro de ésta.

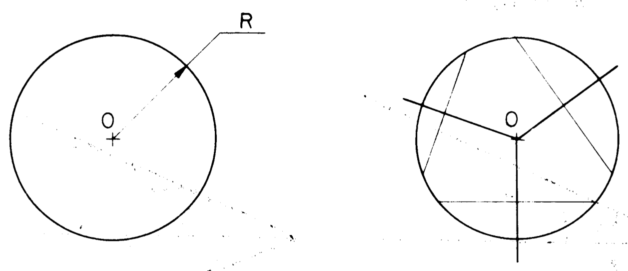


FIGURA I.80

Circunferencia exterior e interior

Si se trazan dos circunferencias concéntricas (mismo centro) de radio R_1 y R_2, la *circunferencia exterior* será el lugar geométrico de todos los centros de las circunferencias de radio (R_2 - R_1), tangentes exteriormente a la circunferencia interior.

De igual forma, podemos decir que la *circunferencia interior* es el lugar geométrico de todos los centros de las circunferencias de radio (R_2 - R_1) tangentes interiormente a la circunferencia exterior. (Véase figura I.81).

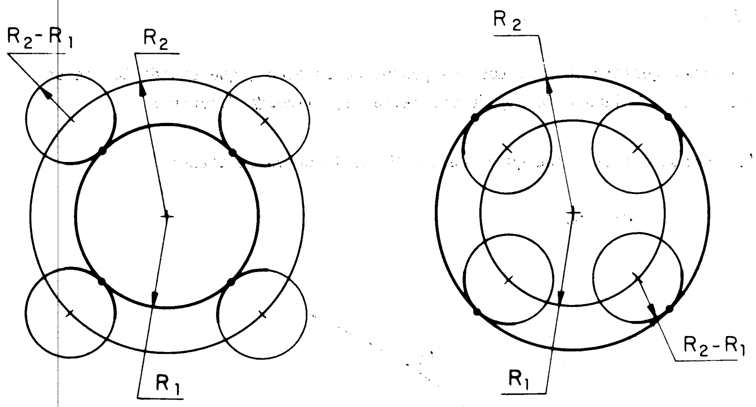


FIGURA I.81

Elipse

Es el lugar geométrico de todos los puntos de un plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos llamados focos, siempre es una cantidad constante, que se representa por 2a . (Véase figura I.82).

Así, para cualquier punto M de la curva, se tiene:

$$\overline{MF} + \overline{MF'} = 2a$$

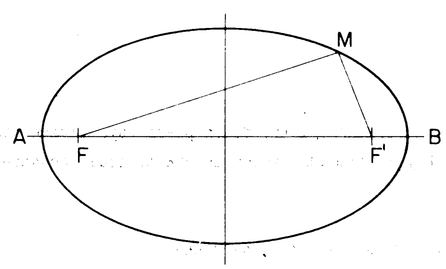


FIGURA I.82

Parábola

Es el lugar geométrico de todos los puntos de un plano, que equidistan de un punto fijo F llamado foco y de una recta fija llamada directriz.

Así, tenemos que para cualquier punto M de la curva se tiene:

$$\overline{MF} = \overline{MD}$$

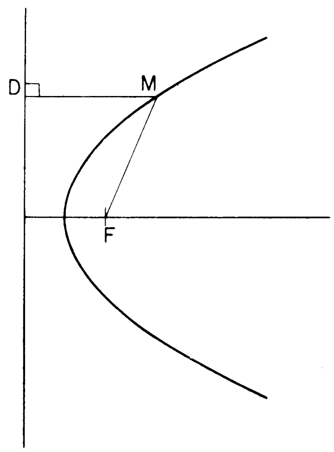


FIGURA I.83

Hipérbola

Es el lugar geométrico de todos los puntos de un plano cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos F y F' llamados focos es una cantidad constante que se representa por 2a.

Así, para cualquier punto M de la curva, se tiene:

$$\overline{MF'} - \overline{MF} = 2a$$

(Véase figura I.84).

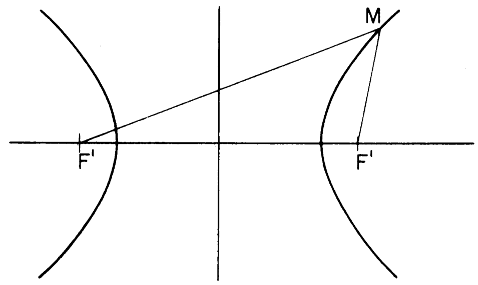


FIGURA I.84

I.7.1 CASOS DE INTERSECCIONES GEOMETRICAS

Como se vio anteriormente, el método de las intersecciones de lugares geométricos se utiliza cuando se pretende determinar un punto sujeto a dos condiciones, una de las cuales es satisfecha por los puntos de un lugar geométrico y la otra por los de otro lugar geométrico. La intersección de estos lugares determina el punto buscado. A continuación se presentan los casos más relevantes de intersecciones de lugares geométricos, así como la simbología o notación utilizada en cada uno de los casos.

S = recta

R = radio

LG = lugar geométrico

PC = principio de curva

PT = punto tangente o punto de terminación de tangente

Ae = arco de enlace

ILG = intersección de lugares geométricos

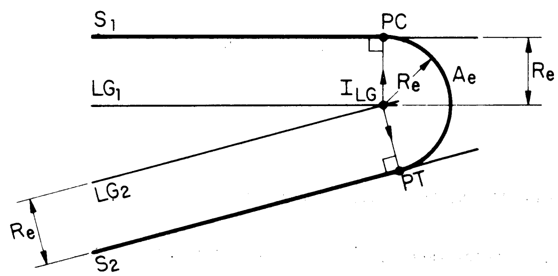
O = centro de circunferencia

Caso 1

Enlazar dos rectas no paralelas con un arco de circunferencia, conocido el radio de enlace.

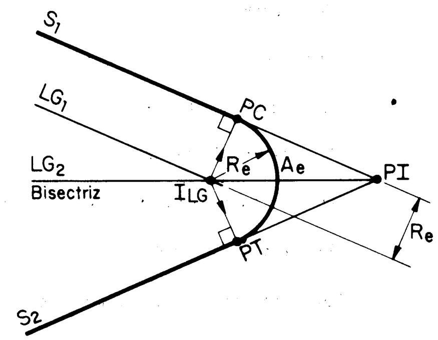
Caso 1.a

Datos:	Determinar:
S_1	I_{LG}
S_2	PC
R	PT
	A_e



Caso 1.b

Datos:	Determinar:
S_1	I_{LG}
S_2	PC
R	PT
	A_e

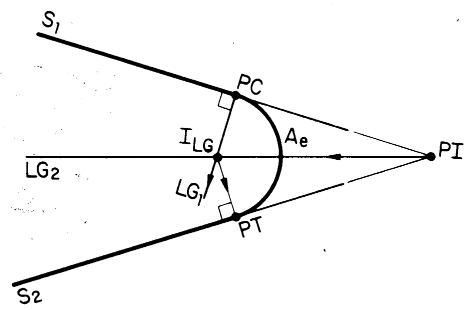


Caso 2

Enlazar dos rectas no paralelas con un arco de circunferencia, conocido el punto de tangencia en una de las rectas.

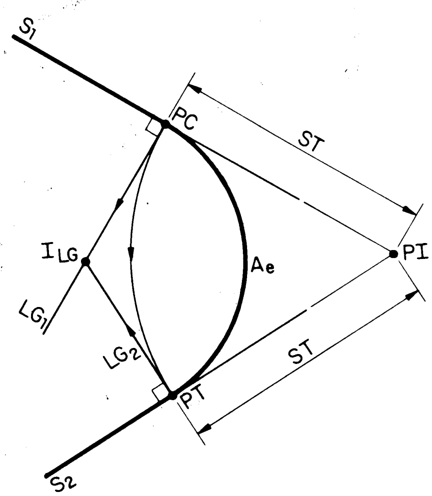
Caso 2.a

Datos:	Determinar:
S_1	I_{LG}
S_2	PT
PC	A_e



Caso 2.b

Datos:	Determinar:
S_1	I_{LG}
S_2	PT
PC	A_e

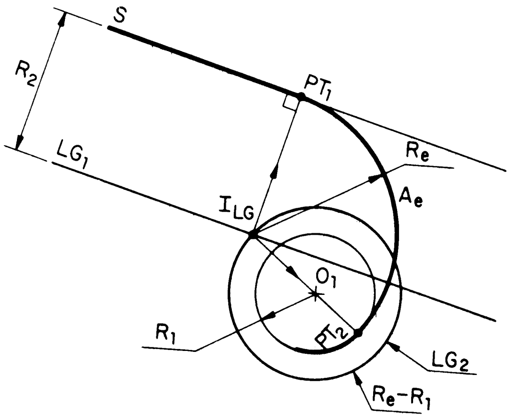


Caso 3

Enlazar una circunferencia y una recta con un arco de circunferencia, conocido el radio de enlace.

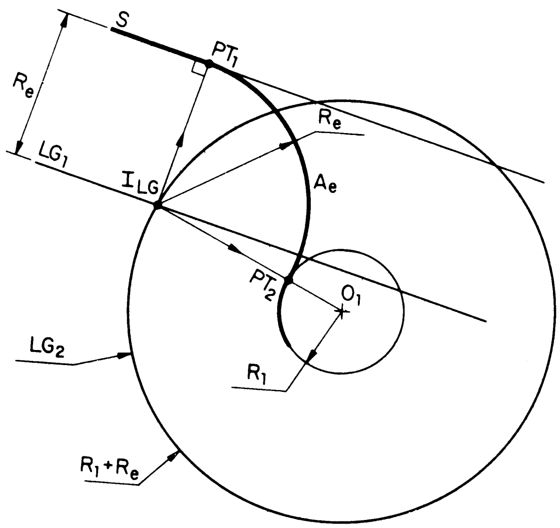
Caso 3.a

Datos:	Determinar:
S	I_{LG}
O_1	PT_1
R_1	PT_2
R_2	A_e



Caso 3.b

Datos:	Determinar:
S	I_{LG}
O_1	PT_1
R_1	PT_2
R_2	A_e

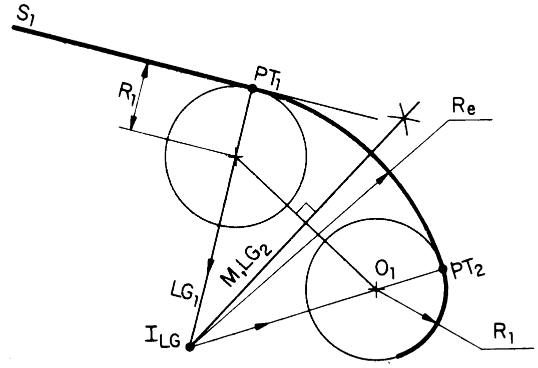


Caso 4

Enlazar una circunferencia y una recta con un arco de circunferencia, conocido el punto de tangencia en la recta.

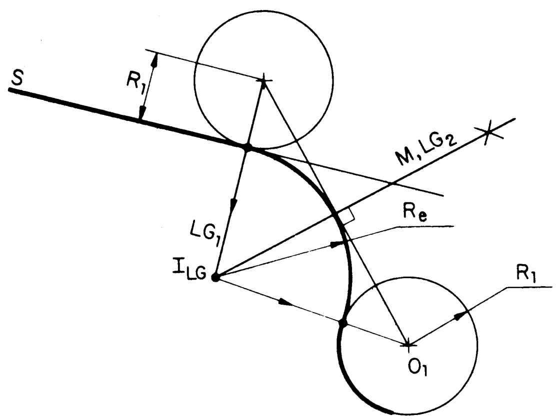
Caso 4.a

Datos:	Determinar:
S	PT_2
PT_1	R_e
O_1	A_e
R_1	



Caso 4.b

Datos:	Determinar:
S	I_{LG}
PT_1	PT_2
O_1	R_e
R_1	A_e

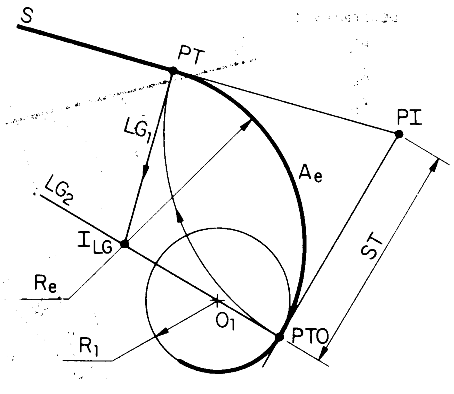


Caso 5

Enlazar una circunferencia y una recta con un arco de circunferencia, conocido el punto de tangencia en la circunferencia.

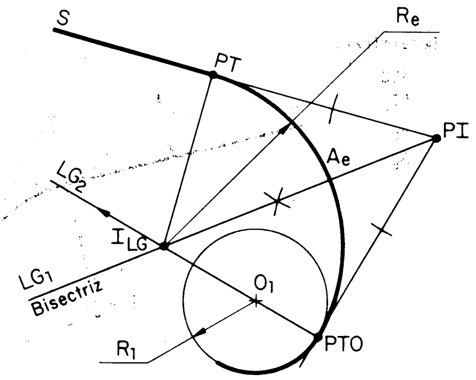
Caso 5.a

Datos:	Determinar:
S	I_{LG}
O_1	PT_2
R_1	R_e
PT_1	A_e



Caso 5.b

Datos:	Determinar:
S	I_{LG}
O_1	PT
R_1	R_e
PT_1	A_e

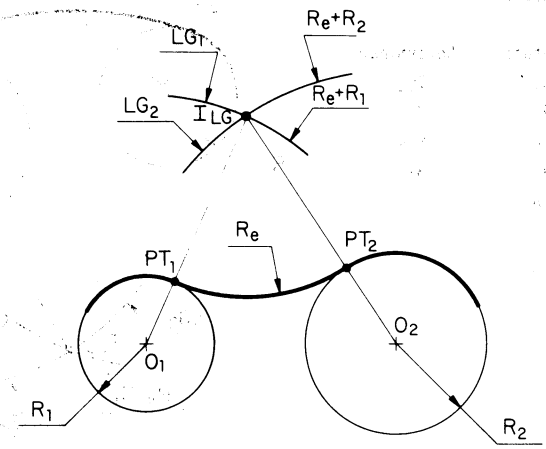


Caso 6

Enlazar dos circunferencias con un arco de circunferencia, conocido el radio de enlace.

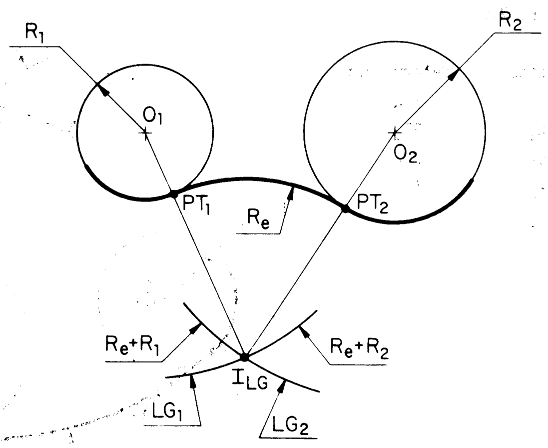
Caso 6.a

Datos:	Determinar:
O_1	I_{LG}
R_1	PT_1
O_2	PT_2
R_2	A_e
R_e	



Caso 6.b

Datos:	Determinar:
O_1	I_{LG}
R_1	PT_1
O_2	PT_2
R_2	A_e
R_e	

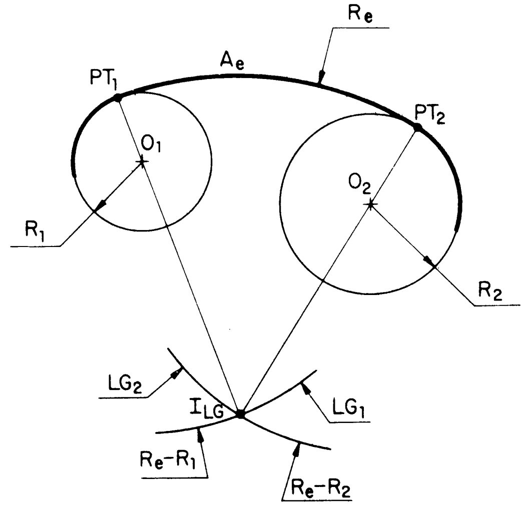


Caso 7

Enlazar dos circunferencias con un arco de circunferencia, conocido el radio de enlace.

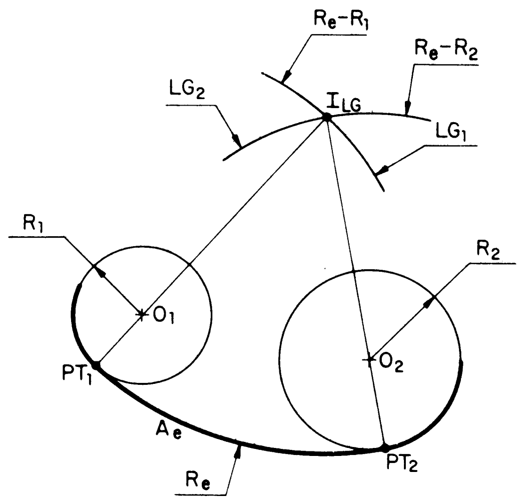
Caso 7.a

Datos:	Determinar:
O_1	I_{LG}
R_1	PT_1
O_2	PT_2
R_2	A_e
R_e	



Caso 7.b

Datos:	Determinar:
O_1	I_{LG}
R_1	PT_1
O_2	PT_2
R_2	A_e
R_e	

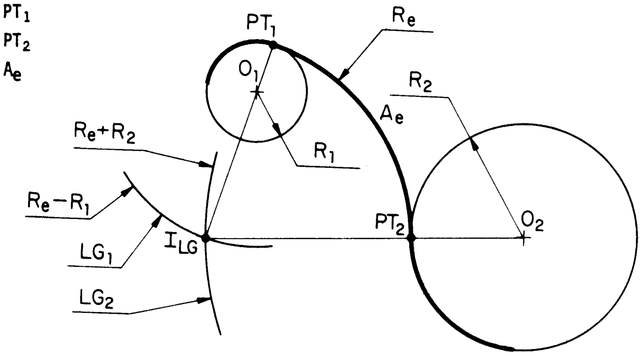


Caso 8

Enlazar dos circunferencias con un arco de circunferencia, conocido el radio de enlace.

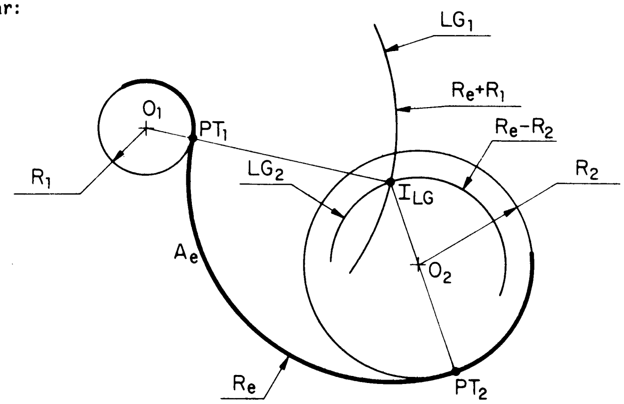
Caso 8.a

Datos:	Determinar:
O_1	I_{LG}
R_1	PT_1
O_2	PT_2
R_2	A_e
R_e	



Caso 8.b

Datos:	Determinar:
O_1	I_{LG}
R_1	PT_1
O_2	PT_2
R_2	A_e
R_e	

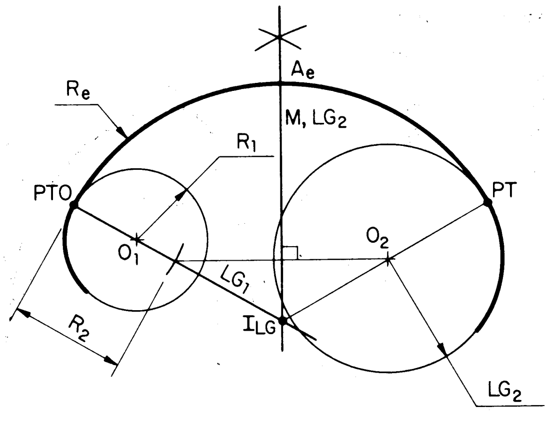


Caso 9

Enlazar dos circunferencias con un arco de circunferencia, conocido un punto de tangencia.

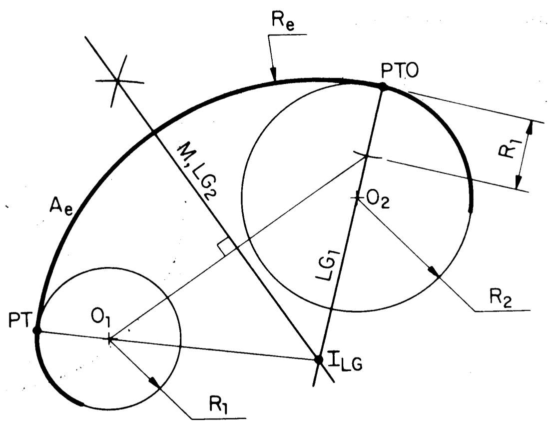
Caso 9.a

Datos:	Determinar:
O_1	I_{LG}
R_1	PT_2
O_2	R_e
R_2	A_e
PT_1	



Caso 9.b

Datos:	Determinar:
O_1	I_{LG}
R_1	PT_1
O_2	R_e
R_2	A_e
PT_2	

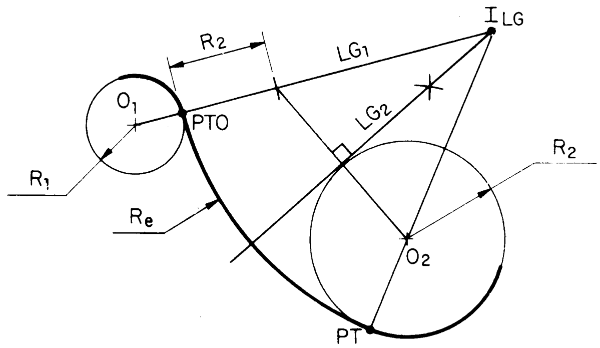


Caso 10

Enlazar dos circunferencias con un arco de circunferencia, conocido un punto de tangencia.

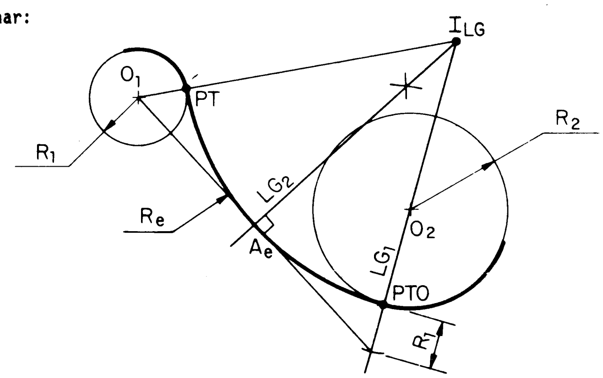
Caso 10.a

Datos:	Determinar:
O_1	I_{LG}
R_1	PT_2
O_2	A_e
R_2	
PT_1	



Caso 10.b

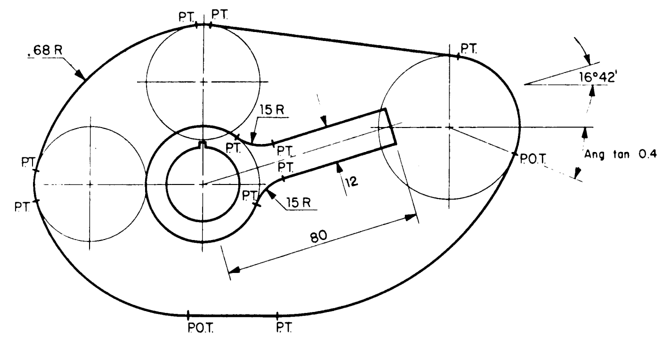
Datos:	Determinar:
O_1	I_{LG}
R_1	PT_1
O_2	A_e
R_2	
PT_2	



I.7.2 APLICACIONES

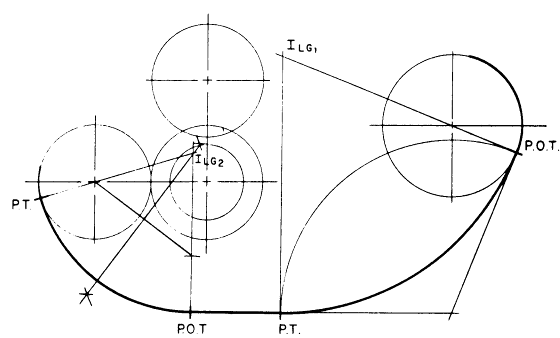
Se presentan a continuación algunos ejemplos de aplicación ya resueltos, en los que se han dejado los trazos auxiliares que sirvieron para la resolución de dichos problemas.

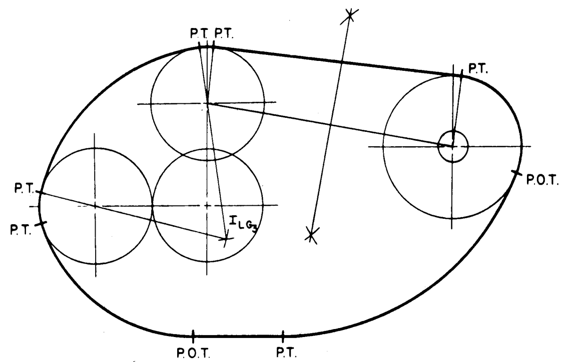
Dibujar a escala natural la *placa guía* mostrada en el croquis.

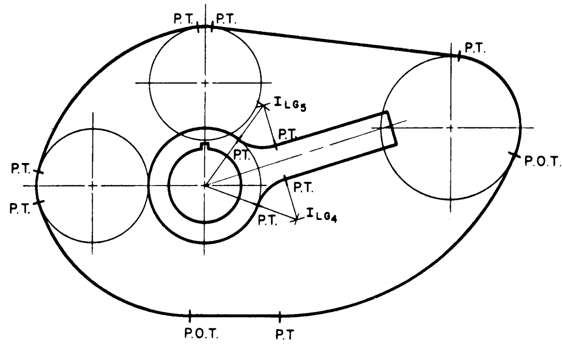


CROQUIS
Acotaciones, en mm

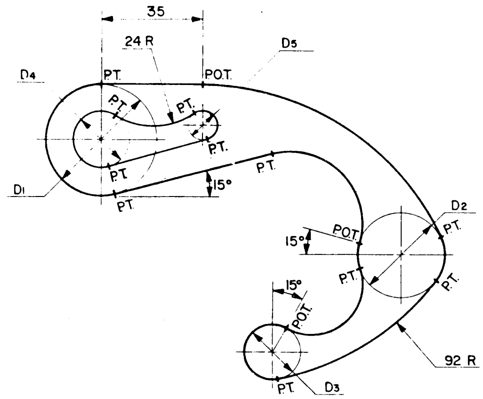
tan 16°42' = 0.3



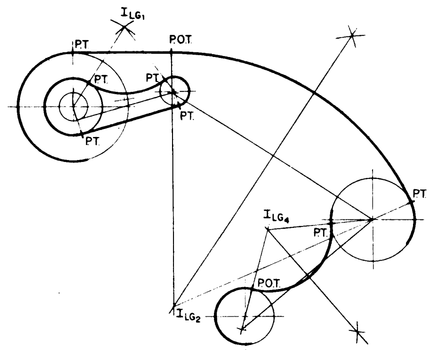

P.T. P.T.
P.T.
P.O.T.
P.T.
P.T.
I_{LG_3}
P.O.T.
P.T.

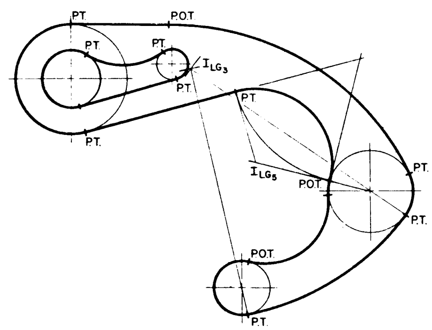

P.T. P.T.
P.T.
I_{LG_5}
P.T.
P.T.
P.O.T.
P.T.
P.T.
P.T.
P.T.
I_{LG_4}
P.O.T.
P.T

74
Dibujar con instrumentos y a escala natural, la pieza que se muestra en el croquis.

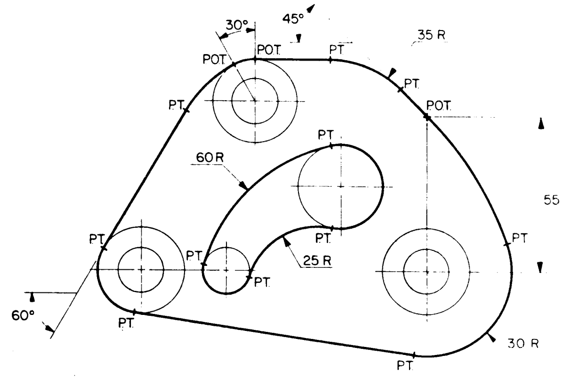


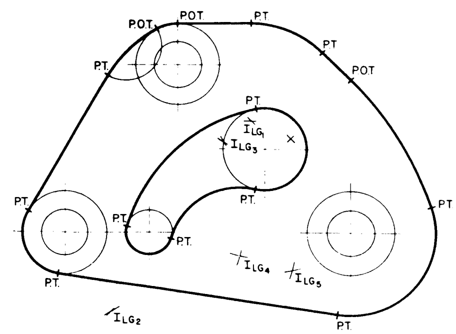
CROQUIS
Acotaciones, en mm





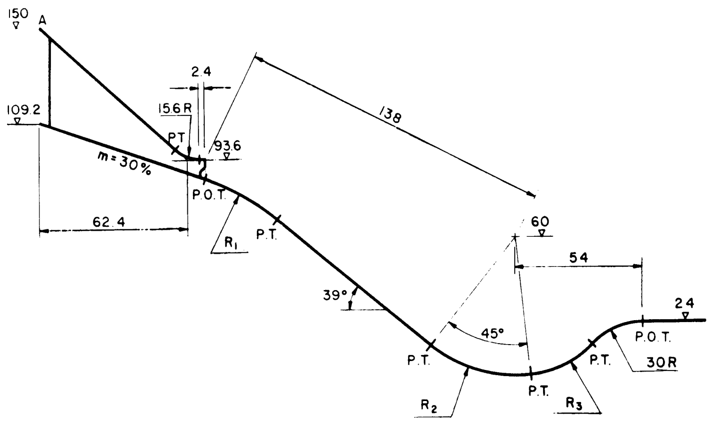
Dibujar a escala natural la *leva* que se muestra en el croquis.

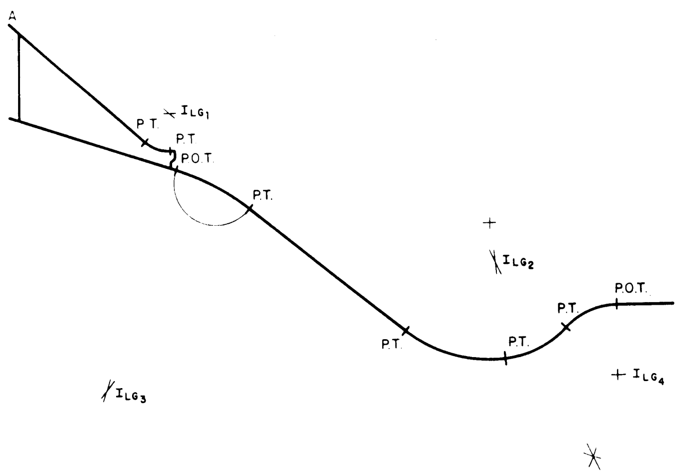




76

Dibujar a escala 1:1,200, el perfil de la instalación para el evento de salto especial (esquinórdico) mostrado en el croquis, a partir del punto A.





CAPITULO 2 FUNDAMENTOS DE LA GEOMETRIA DESCRIPTIVA

II.1 ORIGEN Y CONCEPTO DE LA GEOMETRIA DESCRIPTIVA

La geometría descriptiva surgió debido a las exigencias prácticas del hombre de representar gráficamente los objetos que lo rodeaban y los creados por él.

A fines del siglo XVIII, los métodos para representar los objetos tenían ya una historia de muchos siglos. Sin embargo, no se había elaborado aún un método para representar los cuerpos volumétricos sobre el plano.

Con el desarrollo de la industria, la división del trabajo maduró históricamente la tarea de hacer una generalización científica del material conocido hasta el momento y elaborar una teoría única de representación gráfica.

Esta tarea fue realizada por Gaspard Monge (1746-1818) quien publicó en 1799, su Geometría Descriptiva.

Durante sus estudios militares en Francia, Monge utilizó métodos gráficos para la solución de problemas relacionados con las fortificaciones y armamentos.

Estos métodos desplazaron a los procesos matemáticos tradicionales, debido a que las soluciones eran obtenidas con mayor rapidez y con un grado de exactitud aceptable.

Por todo lo anterior, Gaspard Monge es considerado como el *padre de la geometría descriptiva*.

Finalmente, se puede decir que la geometría descriptiva es la parte de las matemáticas que tiene por objeto la representación gráfica y racional de figuras tridimensionales en el plano y, además, que permite resolver los problemas geométricos relacionados con la forma, posición y magnitud de las figuras.

El tipo de problemas que se solucionan por medio de la geometría descriptiva, generalmente presentan gran dificultad para darles solución por métodos matemáticos.

II.2 CONCEPTO DE PROYECCION Y SUS ELEMENTOS

Para representar una figura del espacio en el plano, es necesario emplear el concepto de proyección.

Proyección es la representación gráfica de objetos en un plano, la cual puede ser de tipo cónica o cilíndrica como se verá más adelante.

Los elementos que dan origen a las proyecciones son:

- Foco de proyecciones (observador, polo o foco luminoso)
- Objeto o figura por representar
- Plano de proyección
- Recta o rayo proyectante (rayo luminoso, rayo visual)

Ahora bien, si se tiene un punto del espacio A y se quiere proyectarlo sobre el plano P, se procederá de la siguiente manera:

Se hace pasar una recta a partir del foco de proyecciones F por el punto A, hasta intersectar en el punto a al plano de proyección P, siendo este último la proyección del punto A del espacio sobre el plano P.

A la línea recta que pasa por los puntos A y F se le llama *recta o rayo proyectante*. (Véase figura II.1).

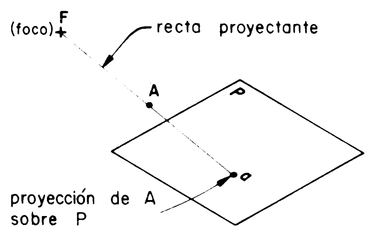


FIGURA II.1

Generalmente, para proyectar una superficie S cualquiera sobre el plano P de proyección, será necesario proyectar cada uno de los puntos de dicha superficie sobre el plano P, los cuales al unirse, darán lugar a la proyección S de la superficie en estudio. (Véase figura II.2).

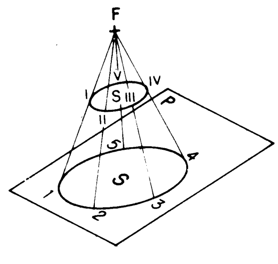


FIGURA II.2

Si se considera que en lugar del punto abstracto F, se tiene un foco luminoso, el cual emana rayos luminosos que pasan por el punto A del espacio, al incidir éstos sobre el plano P se tendrá la proyección del punto A sobre dicho plano.

En este caso el resultado es la sombra del punto A sobre el plano P, aunque con todo rigor, sigue siendo la proyección de A sobre dicho plano. (Véase figura II.3).

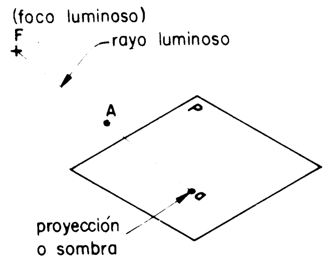


FIGURA II.3

Ahora, si se considera que en lugar del foco se encuentra un observador cuyos rayos o líneas visuales pasan a través del punto A e inciden sobre el plano P, se genera en esta situación una imagen de A sobre dicho plano. (Véase figura II.4).

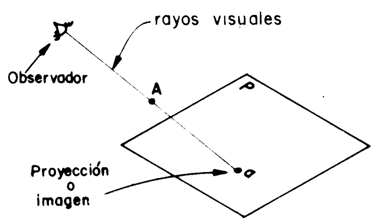


FIGURA II.4

Una variante de este tipo de proyección es considerar el plano de proyección colocado entre el observador y el objeto, siendo denominada vista o proyección dibujada. (Véase figura II.5).

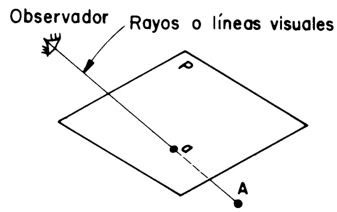


FIGURA II.5

De lo anterior se puede concluir que el concepto de proyección no cambia sea cual fuere el elemento utilizado para emanar rayos proyectantes, debido a que se llega a una misma representación de los objetos en el plano.

En términos generales, proyección de un elemento geométrico sobre un plano es la intersección en una superficie, llamada plano de proyección de todas las líneas proyectantes que emanan de un punto fijo en el espacio y que pasan por dicho elemento.

II.2.1 PROYECCION CONICA Y PROYECCION CILINDRICA

Dependiendo de la distancia a la que se considera colocado el foco respecto al plano de proyección, se tendrán básicamente dos tipos de proyecciones:

a) La proyección cónica
b) La proyección cilíndrica

a) PROYECCION CONICA

Este tipo de proyección tiene lugar al considerar que el foco se encuentra a una distancia finita del plano de proyección.

Una de las características de este tipo de proyección es que los rayos proyectantes divergen del foco. (Véase figura II.6).

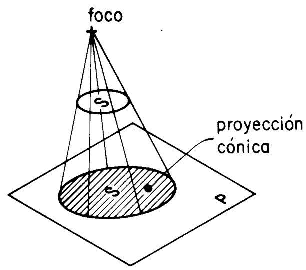


FIGURA II.6

Cuando se considera que el plano de proyección está colocado entre el objeto y el foco, se da lugar a la proyección denominada *perspectiva*. (Véase figura II.7).

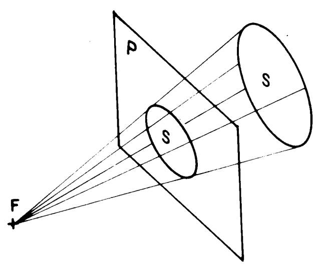


FIGURA II.7

Representar objetos por medio de las proyecciones cónicas da una idea más clara de la forma como se verían realmente dichos objetos, pero se distorsionan los ángulos y las distancias ya que no aparecen en su magnitud real, lo cual impide cubrir los requisitos de exactitud que requiere el dibujo técnico. Este tipo de proyecciones es empleado generalmente por los arquitectos y dibujantes comerciales. (Véase figura II.8).

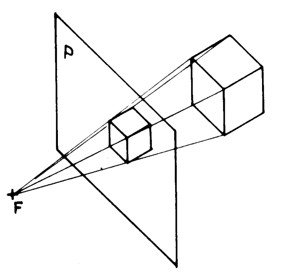


FIGURA II.8

b) PROYECCION CILINDRICA

Este tipo de proyección tiene lugar al considerar que el foco está colocado a una distancia infinita del plano de proyección.

Una de las características de este tipo de proyección es que las líneas proyectantes son paralelas entre sí, por lo que los ángulos formados con cada una de las líneas proyectantes y el plano de proyección tienen la misma magnitud. (Véase figura II.9).

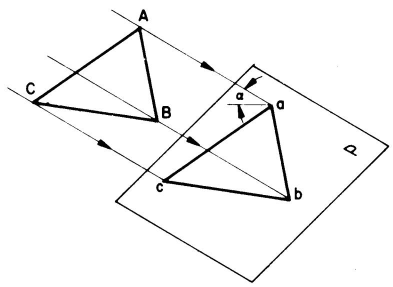


FIGURA II.9

Cuando el ángulo que se forma con las líneas proyectantes y el plano de proyección es igual a 90°, se da lugar a las proyecciones *cilíndricas ortogonales* y cuando es diferente de 90°, se tienen las proyecciones *cilíndricas oblicuas*, en éstas es necesario conocer el ángulo para poder representar en el plano los objetos del espacio. (Véase figura II.10).

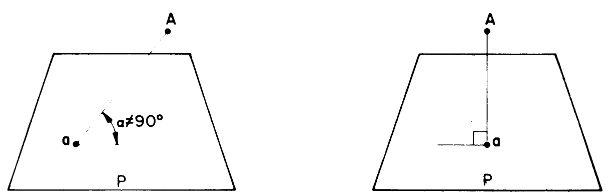


FIGURA II.10

En la figura II.11 se puede observar que al proyectar la línea curva ABCD sobre el plano P, las rectas proyectantes en conjunto forman una superficie cilíndrica, por ello a este tipo de representaciones se les denomina *proyecciones cilíndricas*.

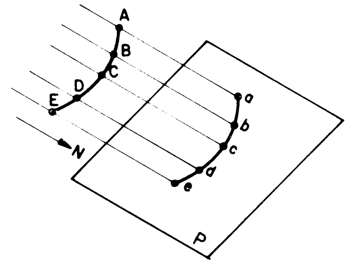


FIGURA II.11

Lo expuesto anteriormente respecto a la clasificación de las proyecciones, queda resumido en la siguiente tabla:

	TIPO DE PROYECCION		POSICION DEL FOCO	RECTAS PROYECTANTES	INCIDENCIA SOBRE EL PLANO
PROYECCIONES	CILINDRICA	ORTOGONAL	EN EL INFINITO	PARALELAS	ORTOGONAL
		OBLICUA	EN EL INFINITO	PARALELAS	OBLICUA
	CONICA		DISTANCIA FINITA	DIVERGENTES	OBLICUA

TABLA II.1

PROYECCION CILINDRICA ORTOGONAL

Los métodos empleados dentro de la geometría descriptiva están basados en la *teoría de las proyecciones cilíndricas ortogonales*, la cual como ya se indicó, tiene lugar al considerar el foco a una distancia infinita, por lo que las rectas proyectantes son paralelas entre sí e inciden perpendicularmente sobre el plano de proyección.

Generalmente, la proyección ortogonal de un punto A sobre un plano P se obtiene haciendo pasar por dicho punto una recta proyectante perpendicular al plano P. La intersección de esta recta con el plano genera la proyección ortogonal a del punto en estudio.

Una de las partes de la geometría descriptiva es la representación gráfica de cualquier punto A del espacio en el plano H (véase figura II.12), así como la determinación de la posición del punto A en el espacio a partir de su representación.

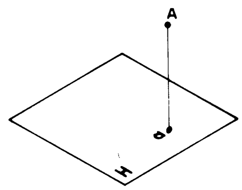


FIGURA II.12

Conocer la proyección de un punto sobre un solo plano, no da la posibilidad de solucionar lo anterior. En la figura II.13 se observa que el punto A puede estar situado en cualquier lugar de la perpendicular levantada desde la proyección a; por lo tanto, no es posible determinar exactamente la posición del punto A en el espacio con respecto al plano H.

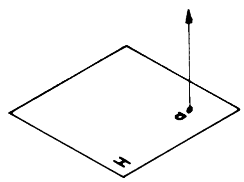


FIGURA II.13

Este problema fue solucionado por Gaspard Monge, quien propuso un método muy simple que consiste en obtener la proyección cilíndrica ortogonal del mismo punto sobre dos planos perpendiculares entre sí. Dichos planos se colocan en la siguiente forma:

Uno de ellos se sitúa horizontalmente y se le llama *plano horizontal*; el otro, perpendicular al primero, se le conoce como *plano frontal*. Ambos planos se intersectan en una línea recta llamada *línea de tierra*. (Véase figura II.14).

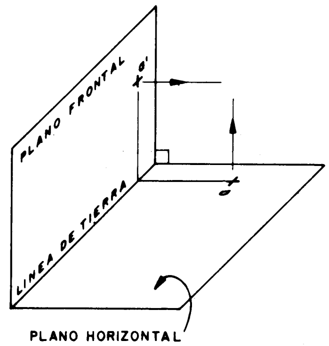


FIGURA II.14

Los planos de proyección (frontal y horizontal) se consideran de tamaño infinito y por lo tanto al ser prolongados en cualquier dirección, generan un sistema como el mostrado en la figura II.15.

A la parte del plano frontal situada arriba de la línea de tierra, se le conoce como *plano frontal superior* (P.F.S.), y a la que queda abajo, *plano frontal inferior* (P.F.I.). De manera semejante, a la porción del plano horizontal situada delante de la línea de tierra se le llama *plano horizontal anterior* (P.H.A.), y a la situada atrás, *plano horizontal posterior* (P.H.P.). Lo anterior se ilustra en la figura II.15.

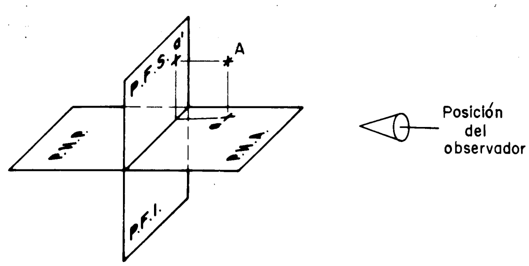


FIGURA II.15

Conforme a la geometría descriptiva, dos planos que se intersectan entre sí originan un ángulo llamado *diedro* y en el caso de que ese ángulo sea de 90° se le designa con el nombre de *cuadrante*. Por lo tanto, los planos de proyección frontal y horizontal al cortarse forman cuatro cuadrantes los cuales son: primer, segundo, tercer y cuarto cuadrantes. (Véase figura II.16).

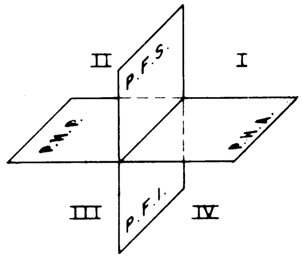


FIGURA II.16

Este sistema de planos forma el marco de referencia empleado en la geometría descriptiva para la representación por medio de proyecciones de puntos del espacio.

Otros aspectos que deberán de considerarse, son los siguientes:

Las proyecciones llevarán el mismo nombre de los planos sobre los que se realizarán dichas proyecciones.

Es necesario conocer la proyección horizontal y frontal para que la representación gráfica de un objeto del espacio quede completa.

El foco para las proyecciones horizontales se encuentra a una distancia infinita por encima del plano horizontal, por lo que las rectas proyectantes llegarán de arriba hacia abajo y en forma paralela y, para las proyecciones frontales, el foco está a una distancia infinita frente al plano frontal, por lo que las rectas proyectantes llegarán de derecha a izquierda y en forma paralela. (Véase figura II.17).

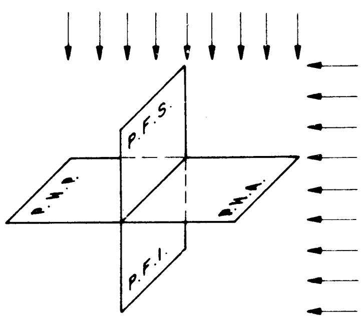


FIGURA II.17

II.2.2 PROYECCION MONOEDRICA

Esta proyección se utiliza cuando se quiere representar un punto del espacio en un solo plano de proyección.

Supóngase un plano horizontal P en el espacio y un punto A fuera de él. La proyección ortogonal de este punto A en el plano P es el punto a.

Ahora, si se utiliza un sistema de ejes cartesianos, se puede ubicar al punto A del espacio a partir de un origen, requiriéndose para el efecto tres medidas: una sobre el eje "X" otra sobre el eje "Y" y una más que va desde el plano P, perpendicularmente a éste, hasta el punto real A. A esta terna de valores se les llama distancia, alejamiento y cota y se denominan siempre en este orden.

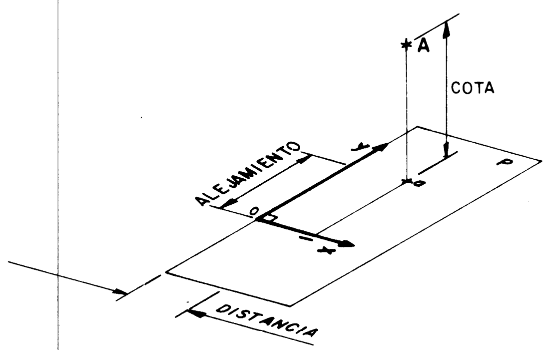


FIGURA II.18

La *distancia* 01 es la medida que hay de la proyección ortogonal m del punto del espacio M al eje Y.

El *alejamiento* al es la medida que hay de la proyección ortogonal m del punto del espacio M al eje X.

La tercera coordenada, la *cota,* es la medida que hay del punto del espacio A al plano de proyección P. Esta coordenada queda confundida con la proyección ortogonal a, por lo que se indica numéricamente junto a ésta. En este caso se representa en la figura II.19 con la letra z.

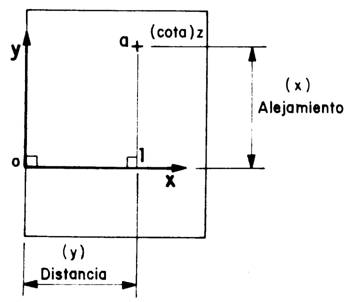


FIGURA II.19

Para ilustrar lo anterior, en la figura II.20 se tiene la representación en un plano (proyección monoédrica) del punto del espacio M(40, 40, 40), siendo las unidades milímetros.

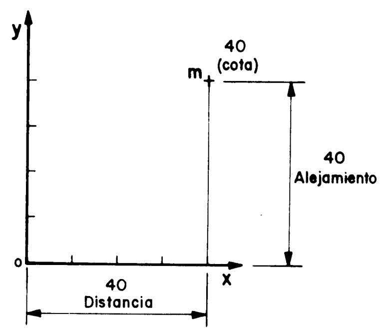


FIGURA II.20

Los signos *positivos o negativos* para la distancia y el alejamiento son los mismos que se consideran para las coordenadas del sistema de ejes cartesianos.

El signo de la cota depende de la siguiente consideración: son positivos, los puntos ubicados arriba del plano de proyección horizontal; y negativos, los puntos que se localizan abajo de dicho plano.

Sin embargo, ya que se tiene la opción de escoger la posición de los ejes X y Y para resolver problemas de ingeniería con este procedimiento, se consideran las distancias y alejamientos positivos, para lo cual se elige la posición del eje X en el extremo máximo inferior del plano y el eje Y en el extremo máximo izquierdo del mismo.

Este procedimiento fue utilizado hasta antes de que Gaspard Monge introdujera el sistema de la doble proyección ortogonal, que dio origen a la actual geometría descriptiva.

II.2.3 PROYECCION DIEDRICA

Este tipo de proyección se utiliza para representar un punto del espacio mediante sus proyecciones en dos planos, por lo que es necesario conocer la posición de dichos planos.

La nomenclatura empleada para el estudio de las proyecciones es la siguiente: Con letras mayúsculas los puntos del espacio (M).

Minúsculas para proyecciones horizontales (m).

Minúsculas primas para proyecciones frontales (m').

Cuando sea necesario el uso de un plano auxiliar perpendicular a los planos principales de proyección, a éste se le denominará de *perfil* y a las proyecciones de puntos del espacio sobre este mismo plano se les representará con letras minúsculas biprimas. (Véase figura II.21).

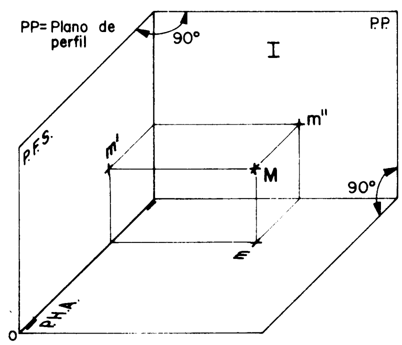


FIGURA II.21

En la figura II.22 se presentan los dos planos de proyección y el punto M del espacio colocado en el primer cuadrante con sus respectivas proyecciones ortogonales, siendo m la proyección en el plano horizontal anterior y m' la proyección en el plano frontal superior.

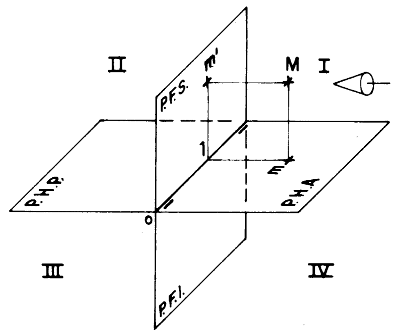


FIGURA II.22

Si se utilizan proyecciones ortogonales, m'1 y m1 serán rectas perpendiculares a la línea de tierra.

Eliminando el punto M del espacio y tomando la línea de tierra como eje, se gira 90° el plano horizontal como se indica en la figura II.23, de tal manera que se superponga con el plano frontal, quedando los planos finalmente como se muestran en la figura II.24.

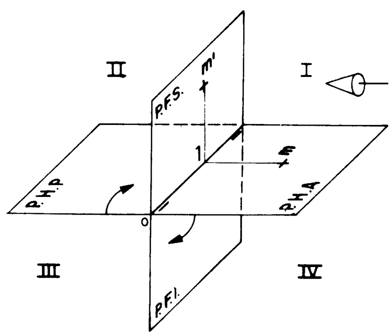


FIGURA II.23

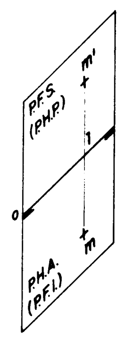


FIGURA II.24

Como se puede observar, arriba de la línea de tierra queda el plano frontal superior y atrás de él, adosado el plano horizontal posterior y abajo de la línea de tierra, el plano horizontal anterior y atrás de él, el plano frontal inferior.

Girando los planos hasta hacerlos coplanares con el plano del papel, éstos quedarán como se muestran en la figura II.25.

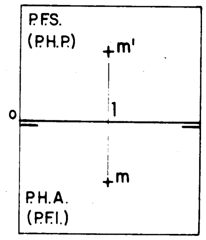


FIGURA II.25

Eliminando los límites de los planos, se tendrá la representación gráfica de las proyecciones. (Véase figura II.26). A esta representación de puntos del espacio por medio de sus proyecciones, se le llamará *montea*.

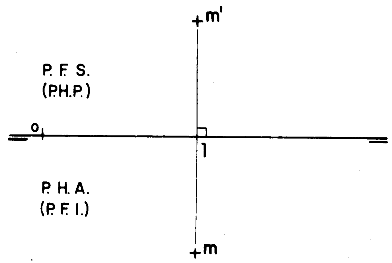


FIGURA II.26

En la posición de las proyecciones del punto M del espacio, se observa que la proyección horizontal y la frontal del punto son homólogas, es decir, que se encuentran en la misma referencia perpendicular a la línea de tierra. (Esto es válido para las proyecciones de puntos del espacio sin importar en qué cuadrante del espacio se encuentren).

La palabra *montea*, para la representación de proyecciones en un plano, fue introducida en México por el Arquitecto Adrián Giombini, por lo que únicamente se encuentra en libros de dibujo técnico y de geometría descriptiva de autores mexicanos. En su origen esta palabra se refería a la estereotomía de las dovelas de los arcos, dibujadas a escala natural.

En la montea no se puede hablar de puntos sino de proyecciones, ni se tienen dos puntos sino que existen dos proyecciones de un solo punto del espacio; por lo que a este sistema se le denomina proyecciones diédricas. (Véase figura II.27).

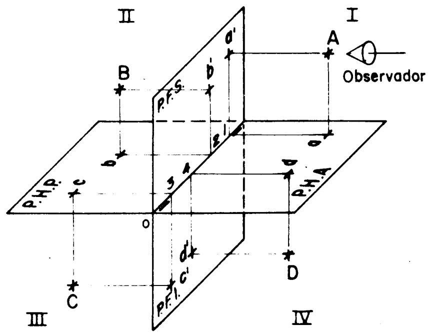


FIGURA II.27

Ahora bien, si se transforma el sistema espacial a la montea, en el plano se tendrá la representación de los puntos del espacio en los diferentes cuadrantes, como se ilustra en la figura II.28.

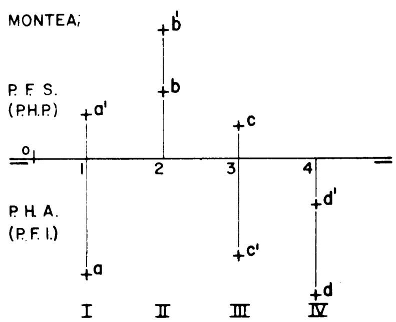


FIGURA II.28

POSICION DE LAS PROYECCIONES EN CADA UNO DE LOS CUADRANTES

Primer cuadrante: Proyección frontal arriba de la línea de tierra y la horizontal abajo.

Segundo cuadrante: Las dos proyecciones arriba de la línea de tierra.

Tercer cuadrante: La proyección frontal abajo de la línea de tierra y la horizontal arriba. Lo contrario del primer cuadrante.

Cuarto cuadrante: Las dos proyecciones abajo de la línea de tierra. Lo contrario del segundo cuadrante.

SIGNOS DE LAS COORDENADAS DE LAS PROYECCIONES DE LOS PUNTOS DEL ESPACIO

Distancia: Esta coordenada como se mide sobre la línea de tierra, siempre será positiva, ya que el origen para medirla se tomará en el extremo máximo izquierdo de la línea de tierra.

Alejamiento: Todos los puntos que estén del lado del observador como son los del primer y cuarto cuadrantes, tendrán signos positivos y los puntos que se encuentren atrás del plano frontal respecto del observador como son los del tercer y segundo cuadrantes, tendrán siempre signos negativos.

Cotas: Todos los puntos que se encuentren arriba del plano horizontal como son los del primer y segundo cuadrantes, tendrán signos positivos y los que se encuentren abajo del plano horizontal como los del tercer y cuarto cuadrantes, tendrán signos negativos.

Resumiendo lo anterior, se presenta la siguiente tabla de convención de signos para las diferentes posiciones de los puntos en el espacio.

TABLA DE SIGNOS

Cuadrante / Coordenada	I	II	III	IV
Distancia	+	+	+	+
Alejamiento	+	−	−	+
Cota	+	+	−	−

Los *alejamientos*, cuando son positivos, se miden hacia abajo de la línea de tierra y cuando son negativos se miden hacia arriba.

Las cotas, cuando son positivas, se miden hacia arriba de la línea de tierra y cuando son negativas, hacia abajo.

En la figura II.29 se presentan en montea las posiciones de puntos para los diferentes cuadrantes.

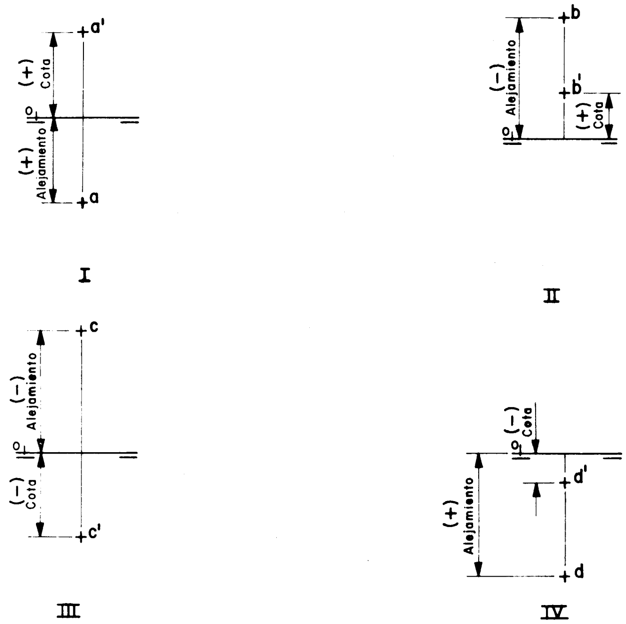


FIGURA II.29

En las figuras II.30 y II.31 se muestran algunos casos de puntos contenidos en los planos principales de proyección.

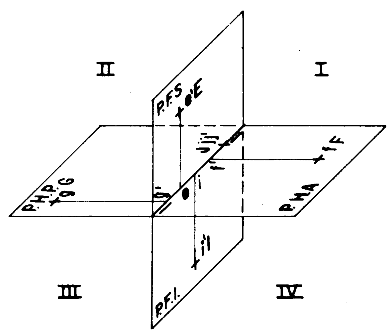


FIGURA II.30

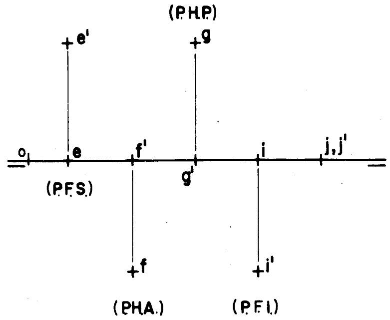


FIGURA II.31

Cuando estos puntos están contenidos en el plano frontal tendrán un alejamiento igual a cero, como los puntos I y E. Cuando los puntos están contenidos en el plano horizontal tendrán una cota igual a cero, como los puntos F y G.

Puede haber puntos que al mismo tiempo estén contenidos en el plano frontal y en el plano horizontal, cuando esto sucede los puntos quedan sobre la línea de tierra como el punto J, ya que su cota y su alejamiento son iguales a cero.

Ejemplo 1

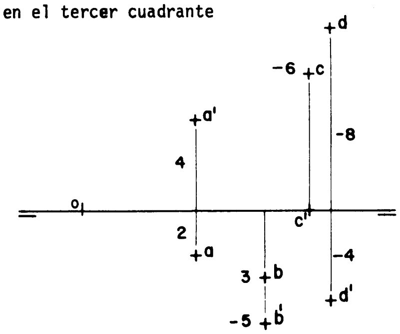
Dadas las coordenadas numéricas de los puntos A, B, C y D, representarlos en una montea. Las unidades están en centímetros y la escala utilizada es 1:2.

A(5, 2, 4) punto en el primer cuadrante

B(8, 3, -5) punto en el cuarto cuadrante

C(10,-6,0) punto contenido en el plano horizontal posterior

D(11,-8,-4) punto en el tercer cuadrante



II.2.4 PROYECCION TRIEDRICA

Es aquélla en la que se hace uso de tres planos de proyección: uno horizontal, otro frontal y el último de perfil, formando con ellos un ángulo triedro; sobre este conjunto de planos se pueden proyectar los elementos del espacio, dando origen a la proyección triédrica. (Véase figura II.32).

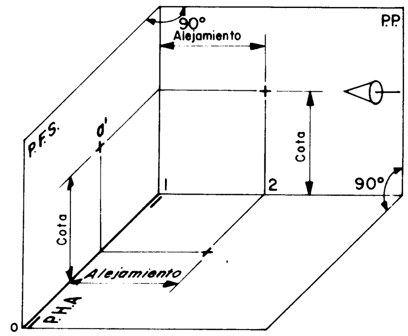


FIGURA II.32

USO DEL PLANO DE PERFIL PARA EL PRIMER CUADRANTE

Anteriormente se giró el plano horizontal de proyección hasta colocarlo en posición coplanar con el frontal de proyección; ahora se hará lo mismo con el plano de perfil, girándolo 90° hasta que sea coplanar con el frontal de proyección. (Véanse figuras II.33 y II.34).

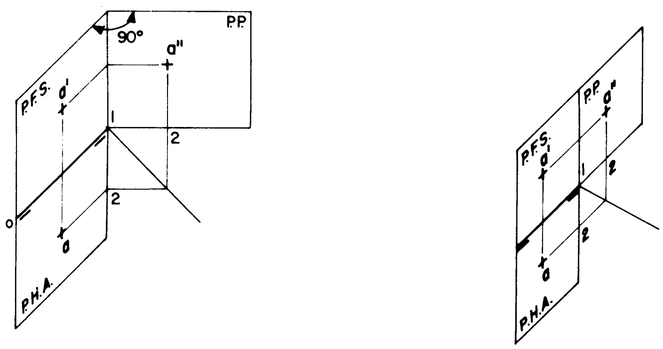


FIGURA II.33

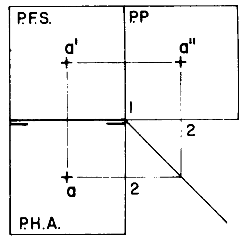


FIGURA II.34

Eliminando los límites de los planos, se tiene finalmente lo que es la montea con una triple proyección ortogonal. (Véase figura II.35).

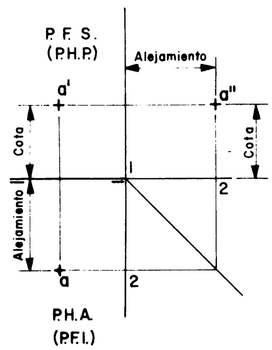


FIGURA II.35

La dimensión |12| representa el alejamiento, por lo que si se hace un giro con el compás tomando como centro el punto 1 o usando escuadras de 45°, se puede transportar el alejamiento del punto A del plano horizontal al plano de perfil.

Como se puede observar, tanto el plano frontal como el plano de perfil marcan en sus proyecciones las cotas de los puntos del espacio, por lo que siempre estarán juntos uno al lado del otro.

Cuando se trabaja en el tercer cuadrante, el plano de perfil se gira en sentido contrario a como se hizo en el primer cuadrante y así, la posición de la montea queda como se muestra en la figura II.36.

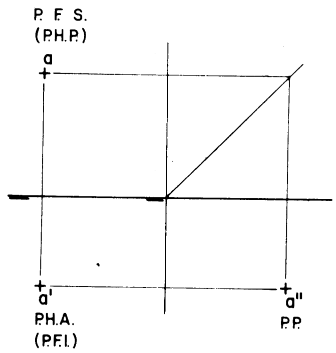


FIGURA II.36

II.3 LA RECTA

Una recta queda definida por una sucesión de puntos en una misma dirección, por lo que al proyectarla sobre un plano, será necesario determinar las proyecciones de los puntos que la conforman, con lo cual quedaría también definida su posición.

II.3.1 POSICION DE LA RECTA CON RESPECTO A LOS PLANOS PRINCIPALES DE PROYECCION

De acuerdo a los preceptos de la geometría plana, un punto no define la posición de una recta, ya que por él pueden pasar un número infinito de rectas. Por lo cual se necesitan dos puntos en el espacio para que una recta quede definida en su posición.

Si se conocen dos puntos del espacio, al unirlos se tendrá la posición de una recta, como se puede observar en la figura II.37, en la cual se han unido los puntos A y B del espacio.

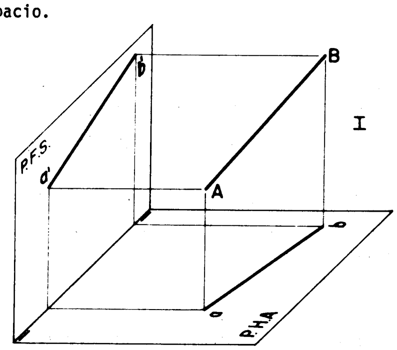


FIGURA II.37

Si se unen las proyecciones horizontales a y b de los puntos del espacio A y B, se tendrá la representación de la recta en el plano horizontal, siendo lo mismo para las proyecciones frontales, por lo que la montea quedaría dibujada como se muestra en la figura II.38.

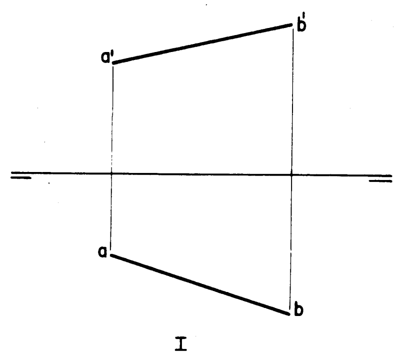


FIGURA II.38

De lo anterior se concluye que cuando se conoce la posición de dos puntos del espacio, se puede determinar si la recta que los une está en un solo cuadrante o va de uno a otro cuadrante. (Véase figura II.39).

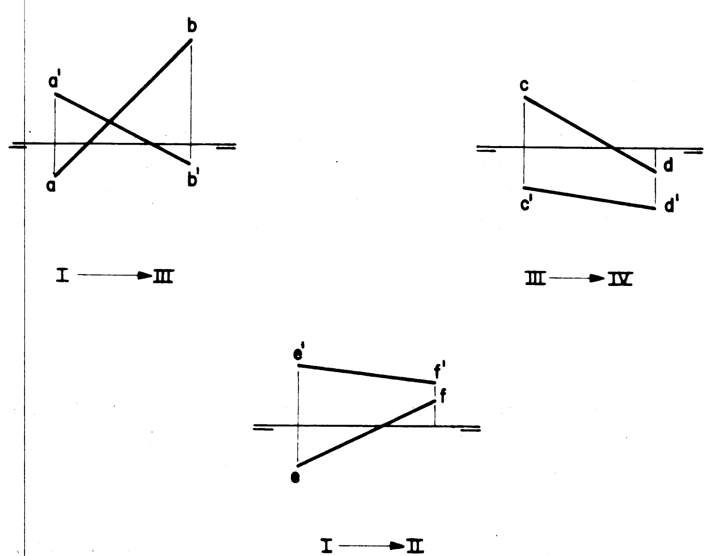
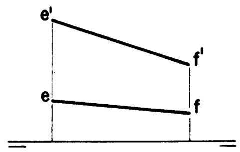
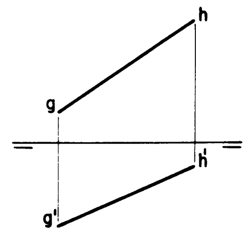


FIGURA II.39

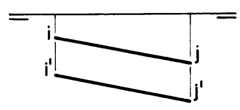
A continuación se presentan ejemplos de rectas localizadas en el segundo, tercero y cuarto cuadrantes.



II



III



IV

II.3.2 CLASIFICACION DE LAS RECTAS SEGUN SU POSICION CON RESPECTO A LOS PLANOS PRINCIPALES DE PROYECCION

Hasta ahora se ha estudiado la representación de las rectas en la montea por medio de sus proyecciones; sin embargo, es necesario resaltar que según sea su posición en el espacio respecto a los planos principales de proyección, las rectas tendrán determinadas características y de acuerdo a éstas, tomarán su nombre genérico, por lo que se hace la siguiente clasificación.

RECTAS HORIZONTALES

Son aquellas que en el espacio tienen una posición paralela al plano horizontal de proyección, por lo que todos sus puntos tienen la misma cota, lo cual se puede observar en montea, ya que este tipo de rectas tiene su proyección frontal paralela a la línea de tierra.

Para ilustrar lo anterior, en la figura II.40 se presentan las monteas de rectas paralelas al plano horizontal en los diferentes cuadrantes.

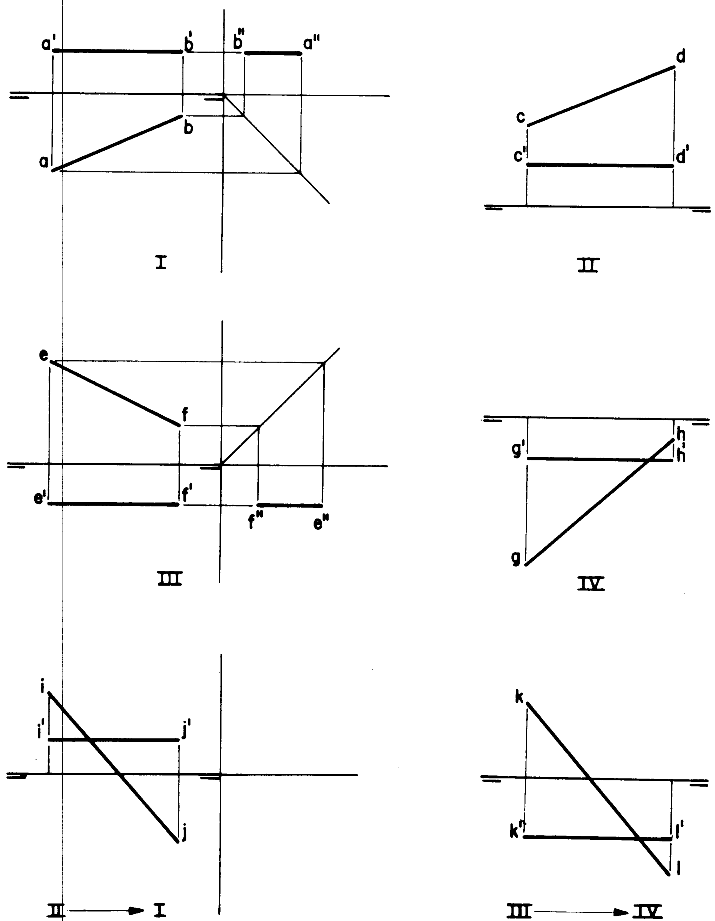


FIGURA II.40

RECTAS FRONTALES

Son aquellas que en el espacio están en una posición paralela al plano frontal de proyección. En la montea, las rectas frontales tienen su proyección horizontal paralela a la línea de tierra, ya que conservan en todos sus puntos el mismo alejamiento. A continuación se presentarán ejemplos de monteas de rectas frontales localizadas en el primer y tercer cuadrantes. (Véase figura II.41).

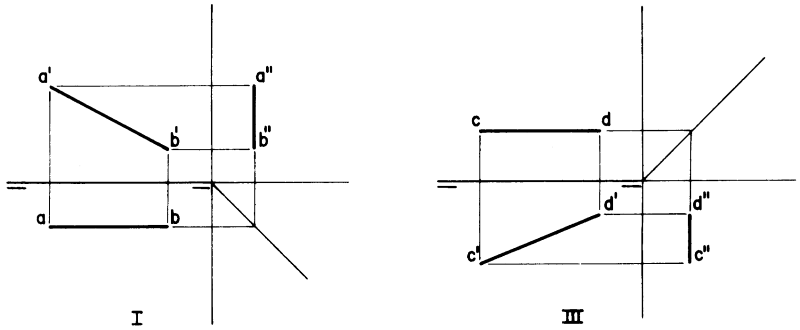


FIGURA II.41

En el segundo y cuarto cuadrantes no se dibujaron las monteas, ya que en el ejem plo de la recta horizontal se vio que las características de las rectas no cambian, sea cual fuere el lugar del espacio en donde se encuentren.

RECTAS VERTICALES

Reciben este nombre las rectas que son perpendiculares al plano horizontal de proyección, obviamente estas rectas serán paralelas a los otros planos de proyección (frontal y de perfil).

En la figura II.42 se muestran las monteas de rectas verticales en el primer y tercer cuadrantes.

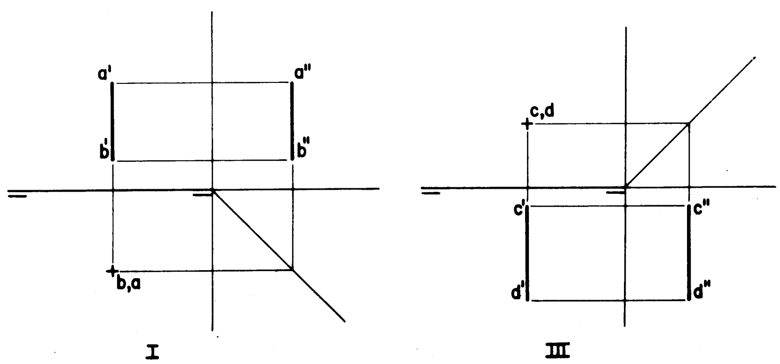


FIGURA II.42

RECTAS DE PUNTA

Se les llama así a las rectas que son perpendiculares al plano frontal de proyección y que son paralelas al plano horizontal de proyección.

En la figura II.43 se muestran las monteas de estas rectas en el primer y tercer cuadrantes.

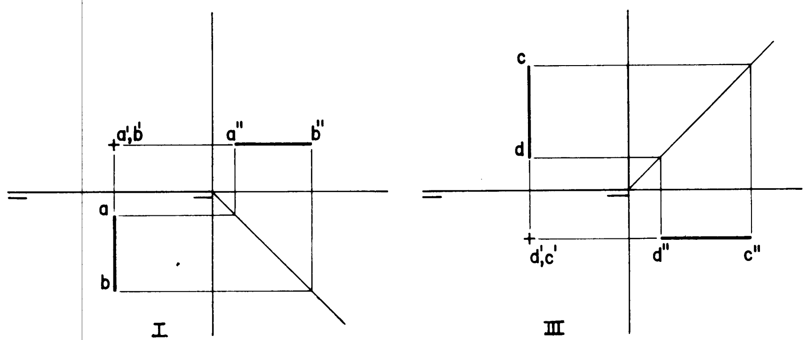


FIGURA II.43

RECTAS FRONTO-HORIZONTALES

Reciben este nombre las rectas que son paralelas a la línea de tierra y paralelas, al mismo tiempo, a los dos planos principales de proyección.

En la figura II.44 se presentan las monteas de rectas fronto-horizontales, una en el primer cuadrante y otra en el tercer cuadrante.

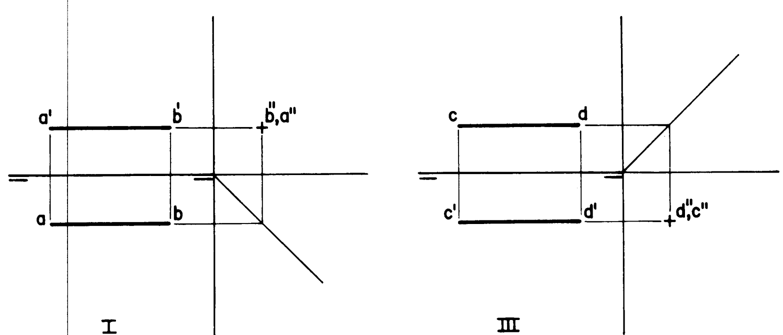


FIGURA II.44

RECTAS DE PERFIL

Reciben este nombre las rectas que son oblicuas con respecto a los planos frontal y horizontal de proyección y que son paralelas al plano de perfil. En la montea se aprecia que las proyecciones frontal y horizontal son perpendiculares a la línea de tierra.

En la figura II.45 se muestran las monteas de rectas de perfil en el primer y tercer cuadrantes.

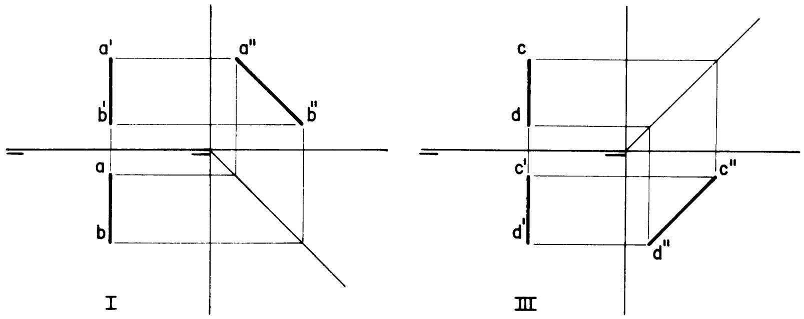


FIGURA II.45

RECTA OBLICUA

Esta recta del espacio no guarda relación de paralelismo ni de perpendicularidad con los planos principales de proyección.

En la figura II.46 se presentan las monteas de rectas oblicuas en el primer y tercer cuadrantes.

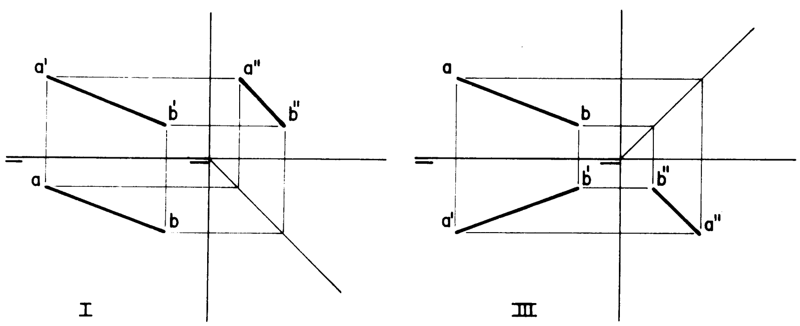


FIGURA II.46

II.3.3 MAGNITUD REAL DE LAS RECTAS DEL ESPACIO

En la figura II.47 se ilustra un sistema de ejes cartesianos, en el cual se tiene representada la recta $\overline{AB}$ y sus proyecciones ortogonales ab y a'b' sobre estos ejes.

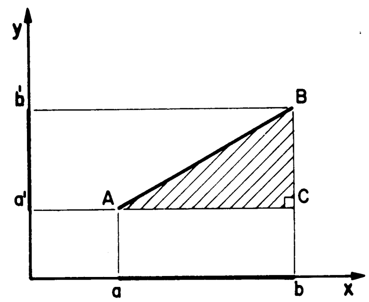


FIGURA II.47

En dicha figura se observa que se forma el triángulo rectángulo A B C, del cual por el teorema de Pitágoras se tiene que:

$$\overline{AB^2} = \overline{AC^2} + \overline{CB^2}$$

donde: $\overline{AC} = \overline{ab}$ (proyección de AB en el eje de las X)

$\overline{BC} = \overline{a'b'}$ (proyección de $\overline{BC}$ en el eje de las Y)

por lo tanto: $\overline{AB} = \sqrt{\overline{ab^2} + \overline{a'b'^2}}$

cuando $\overline{AB}$ es paralela a uno de los ejes, por ejemplo al de las X. (Véase figura II.48).

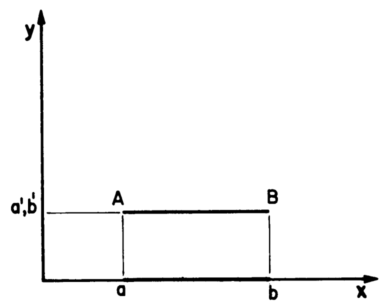


FIGURA II.48

se tiene que:

$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{ab}^2 + 0}$$

por lo tanto:

$$\overline{AB} = \overline{ab}$$

De lo anterior, se puede afirmar que toda recta paralela a un eje o a un plano, en su proyección sobre dicho eje o plano, aparecerá en magnitud real. Además, se podrá medir directamente en montea el mínimo ángulo que dicha recta forma con el otro plano de proyección. (Véase figura II.49).

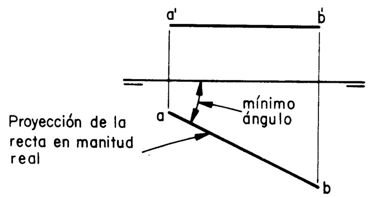


FIGURA II.49

RECTA HORIZONTAL

Esta recta por ser paralela al plano horizontal, en su proyección sobre éste, aparece en magnitud real y muestra el mínimo ángulo que forma con el plano frontal de proyección. (Véase figura II.50).

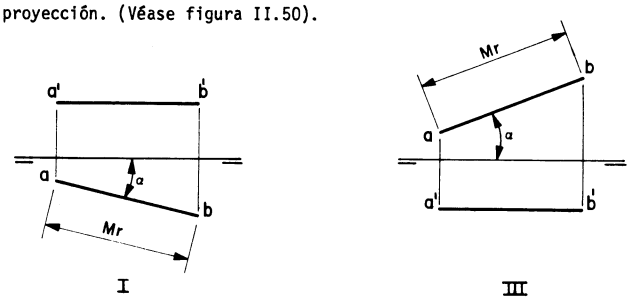


FIGURA II.50

RECTA FRONTAL

Esta recta es paralela al plano frontal de proyección, por lo que muestra su magnitud real en la proyección realizada sobre este plano, y además, en montea se puede leer directamente el mínimo ángulo que la recta forma con el plano horizontal de proyección. (Véase figura II.51).

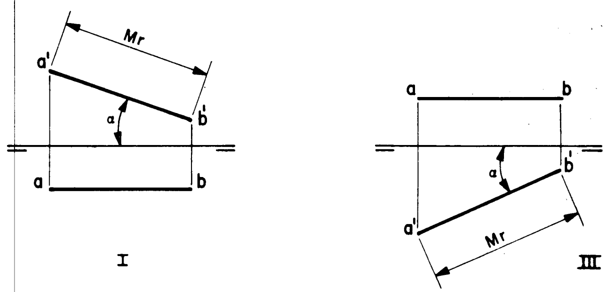


FIGURA II.51

RECTA VERTICAL

Esta recta por ser paralela al plano frontal, aparecerá en su proyección sobre éste en magnitud real. (Véase figura II.52).

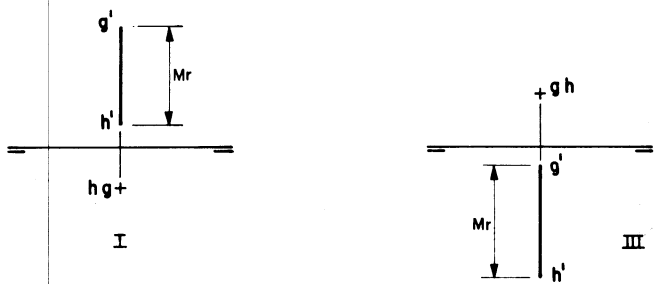


FIGURA II.52

RECTA DE PUNTA

Esta recta por ser paralela al plano horizontal, muestra en la proyección horizontal su magnitud real. (Véase figura II.53).

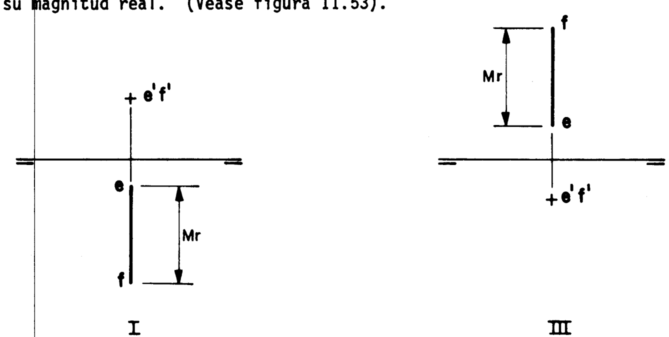


FIGURA II.53

RECTA FRONTO-HORIZONTAL

Esta recta, en cualesquiera de sus proyecciones, muestra la magnitud real del espacio, ya que es paralela al mismo tiempo a los dos planos de proyección. (Véase figura II.54).

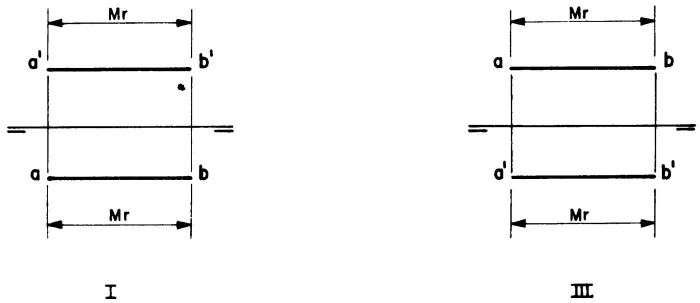


FIGURA II.54

RECTA DE PERFIL

Esta recta por ser paralela al plano de perfil, muestra su magnitud real del espacio en la proyección realizada sobre dicho plano y además, se aprecia el mínimo ángulo que la recta forma con los planos frontal y horizontal de proyección, siendo:

α = ángulo que la recta forma con el plano frontal

β = ángulo que la recta forma con el plano horizontal

y $\alpha + \beta = 90°$

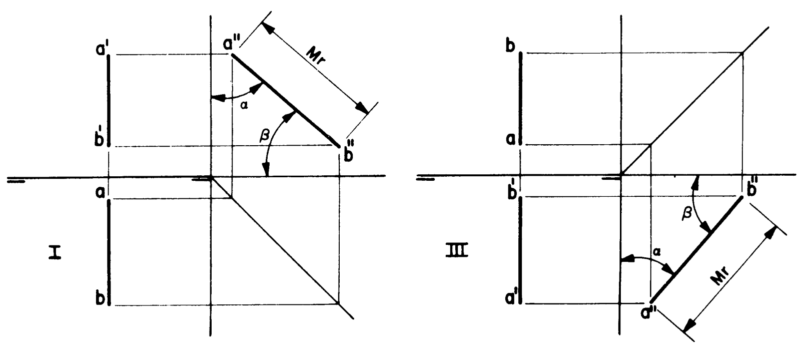


FIGURA II.55

RECTA OBLICUA

Como esta recta no guarda ninguna relación de paralelismo ni de perpendicularidad con los planos de proyección, no es posible conocer directamente a partir de sus proyecciones la magnitud real de ella.

Para determinar la magnitud real de rectas oblicuas se pueden aplicar los siguientes métodos:

1. Cambio de planos
2. Giros o rotaciones
3. Diagramas de magnitudes reales (procedimiento usado en el sistema de los planos acotados)
4. Abatimientos

Los dos primeros métodos son los que se estudiarán a continuación.

CAMBIO DE PLANOS Y GIROS O ROTACIONES

Para determinar las magnitudes reales de los elementos del espacio, es necesario utilizar los conceptos de la geometría descriptiva, los cuales se aplican dentro de los métodos de cambio de planos y de giros.

METODO DE CAMBIO DE PLANOS

El procedimiento de cambio de planos consiste en mantener el objeto fijo en el espacio, y sustituir alternadamente los planos de proyección por otros de tipo auxiliar, sobre los cuales se obtendrán nuevas proyecciones de los objetos hasta lograr las posiciones relativas deseadas.

Durante este procedimiento, los planos auxiliares no deben ser paralelos a los de proyección, pero sí perpendiculares a alguno de ellos, por lo que en montea la línea de tierra cambiará de posición tantas veces como se cambien los planos de proyección.

Como regla general para realizar el cambio del plano horizontal se utilizan planos auxiliares de canto, y para realizar el cambio del plano frontal se utilizan planos auxiliares de tipo vertical, los que se definirán más adelante.

a) CAMBIO DE PLANO HORIZONTAL

Para ilustrar la manera de realizar el cambio de plano horizontal P.H., en la figura II.56 se tiene el punto A del espacio y sus proyecciones horizontal y frontal, en donde haciendo uso de un plano auxiliar de canto C se forma con el plano frontal un nuevo diedro sobre el cual se obtienen las proyecciones del punto A. Como se puede observar, en el nuevo diedro el alejamiento y la proyección frontal del punto A son los mismos que se tenían en el diedro original. Sin embargo, la cota depende de qué tan lejos del objeto se coloque el plano auxiliar (no obstante, se obtiene una misma proyección invariablemente de la cota que se elija).

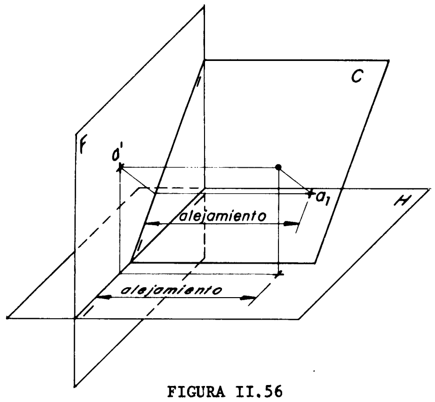


FIGURA II.56

En la montea el cambio de plano se realiza colocando la nueva línea de tierra en la posición que convenga y después se determina la nueva proyección horizontal a_1, llevando desde la proyección frontal a' una proyectante perpendicular a la nueva línea de tierra y trazando sobre dicha proyectante el alejamiento correspondiente al punto A. (Véase figura II.57).

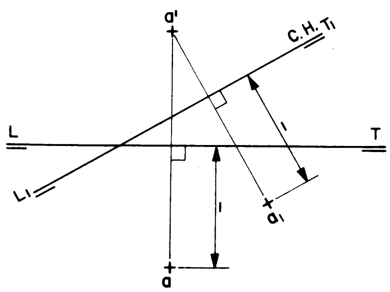


FIGURA II.57

En resumen, al efectuar un cambio de plano horizontal se forma un nuevo diedro, en el cual se conservan tanto la proyección frontal como el alejamiento del punto.

Cuando se realiza un cambio de plano horizontal, es recomendable colocar guiones en los extremos de la nueva línea de tierra del lado de la nueva proyección horizontal, y además, indicar que se hizo un cambio de plano horizontal por medio de las letras C y H.

b) CAMBIO DE PLANO FRONTAL

En este caso se sustituye el frontal de proyección P.F. por un plano de tipo vertical V, que por ser perpendicular al horizontal, forma con él un diedro, en el que la nueva línea de tierra será la intersección del plano V con el plano horizontal H.

Para ilustrar la manera de realizar el cambio de plano frontal P.F., en la figura II.58 se tiene el punto B del espacio, cuyas proyecciones son inicialmente b y b'; al hacer uso del plano auxiliar V, el punto B del espacio queda representado en el nuevo diedro con la misma proyección horizontal b y la nueva proyección frontal b_1' realizada sobre dicho plano auxiliar. Como se puede observar, en el nuevo diedro la cota y la proyección horizontal del punto B son las mismas que se tenían en el diedro original. Sin embargo, el alejamiento depende de qué tan lejos del objeto se coloque el plano auxiliar (no obstante, se obtiene una misma proyección independiente de la cota que se elija).

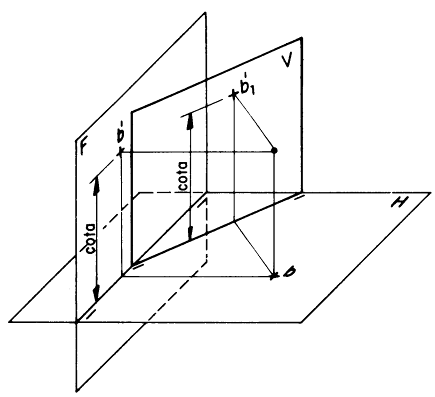


FIGURA II.58

En la montea el cambio de plano se realiza colocando la nueva línea de tierra en la posición que convenga y después se determina la nueva proyección frontal b_1', llevando desde la proyección horizontal b una proyectante perpendicular a la nueva línea de tierra y trazando sobre dicha proyectante la cota correspondiente del punto B. (Véase figura II.59).

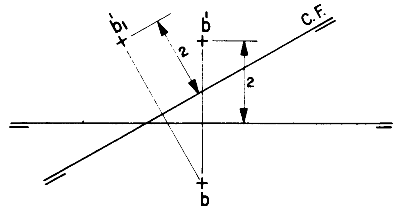


FIGURA II.59

En resumen, al efectuar un cambio de plano frontal se forma un nuevo diedro, en el cual se conservan tanto la proyección horizontal como la cota del punto.

Cuando se realiza un cambio de plano frontal, es recomendable colocar guiones en los extremos de la nueva línea de tierra del lado de la proyección horizontal, y además, indicar que se hizo un cambio de plano frontal por medio de las letras C y F.

Ahora bien, si en lugar de un punto, se tuviera una recta cualquiera, el procedimiento descrito se aplicará a cada uno de los puntos que la definen.

CAMBIOS DE PLANOS PARA SITUAR RECTAS EN POSICIONES ESPECIALES

Cuando la recta en estudio se tenga que llevar a una posición especial, los cambios de planos se ejecutarán alternadamente hasta llegar a dicha posición.

a) Transformación de una recta oblicua en una recta horizontal.

Para llevar a cabo esta transformación, se realiza un cambio de plano horizontal, colocando la nueva línea de tierra paralela a la proyección frontal a'b'.

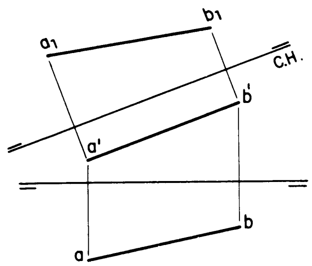


FIGURA II.60

Después se obtiene la nueva proyección horizontal a_1b_1, llevando desde las proyecciones frontales a' y b', proyectantes perpendiculares a la segunda línea de tierra y marcando sobre éstas los mismos alejamientos que tenía la proyección horizontal anterior. Como puede observarse, la nueva montea es la de una recta horizontal, en la cual se indicó el cambio de plano horizontal por medio de las letras C y H. Finalmente se orienta la montea colocando los guiones del lado de la nueva proyección horizontal.

b) Transformación de una recta oblicua en una recta frontal. (Véase figura II.61).

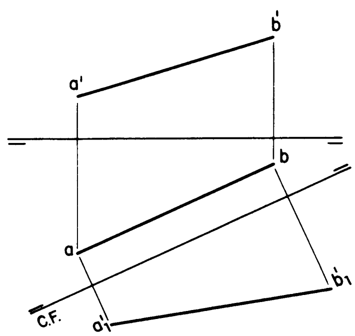


FIGURA II.61

Para realizar esta transformación, se efectúa un cambio de plano frontal, colocando la nueva línea de tierra paralela a la proyección horizontal ab de la recta dada.

Después se obtiene la nueva proyección frontal, llevando desde las proyecciones horizontales a y b proyectantes perpendiculares a la nueva línea de tierra y marcando sobre éstas las mismas cotas que tenía la proyección frontal anterior. Como puede observarse, la nueva montea es la de una recta horizontal, en la cual se indicó el cambio de plano frontal por medio de las letras C y F. Finalmente se orienta la montea colocando los guiones del lado de la proyección horizontal.

c) Transformación de una recta oblicua en una recta de punta. (Véase figura II.62).

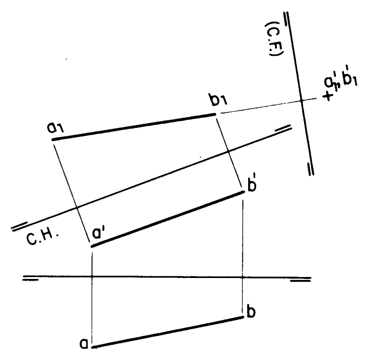


FIGURA II.62

Procediendo de igual manera que en el caso a, la recta es transformada en una recta horizontal y después en la nueva montea se hace un cambio de plano frontal, colocando la nueva línea de tierra perpendicular a la proyección horizontal a_1b_1.

Finalmente, se obtienen las nuevas proyecciones frontales, las cuales quedan representadas por una sola proyección, puesto que se tiene una sola recta proyectante y la recta $\overline{AB}$ en este último cambio de plano tiene una misma cota para todos los puntos que la definen. Como se puede observar esta última montea es la de una recta de punta, por lo que el problema queda resuelto.

d) Transformación de una recta oblicua en una recta vertical. (Véase figura II.63).

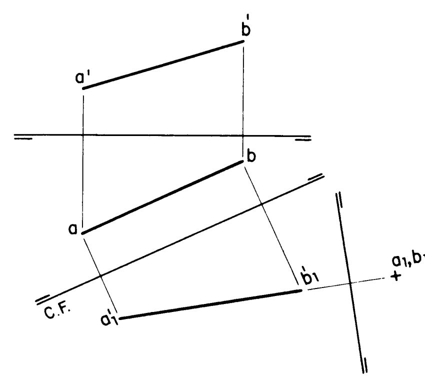


FIGURA II.63

Como primer paso, la recta se transforma en una recta frontal procediendo de igual manera que en el caso b, después en la montea obtenida se hace un cambio de plano horizontal con la línea de tierra perpendicular a la proyección frontal a_1' y b_1'.

Finalmente se determinan las nuevas *proyecciones horizontales* a_1 y b_1, las cuales quedan representadas por una sola proyección, ya que sólo se tiene una proyectante para la recta e igual alejamiento para los puntos que la determinan.

METODO DE GIROS O ROTACIONES

El giro es otro procedimiento para obtener la magnitud real de una recta del espacio, cuando ésta es oblicua.

Este procedimiento consiste en girar la recta del espacio hasta dejarla paralela a algunos de los planos de proyección.

Este giro se realiza tomando dicha recta como la generatriz de un cono recto de revolución en el que un extremo de la recta está fijo (vértice del cono) y el otro extremo gira equidistante del fijo formando la base del cono, la cual para fines prácticos se hace coplanar a uno de los planos de proyección.

Para ilustrar lo anterior, en la figura II.64 se tiene la recta $\overline{EF}$ del espacio, en la que el punto F gira alrededor del punto E, pasando por diferentes posiciones como son F_1, F_2, F_3 etc., y forma así la base del cono.

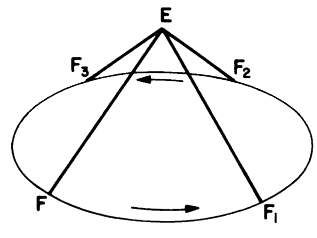


FIGURA II.64

Ahora bien, si el plano de la base del cono se coloca perpendicular al plano frontal la montea quedará como se muestra en la figura II.65, donde se puede observar que, en la proyección frontal el punto F se desliza en línea recta aparente y en la proyección horizontal dicho punto gira alrededor del E, según la circunferencia indicada.

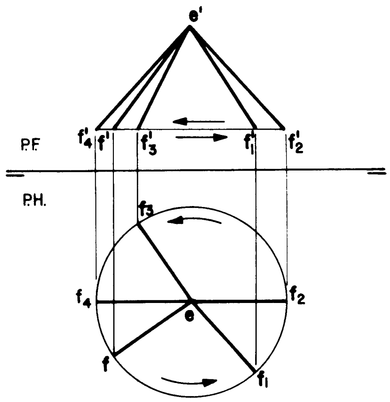


FIGURA II.65

En este giro hay dos posiciones en las que la recta queda paralela a la línea de tierra, o sea, al plano frontal. Estas posiciones son EF_4 y EF_5 que son las que muestran la magnitud real de la recta.

Conociendo lo anterior, por medio de los giros se puede colocar una recta paralela al plano frontal o al plano horizontal, según convenga.

A continuación se ilustran dos casos para obtener la magnitud real de una recta oblicua transformándola en una recta horizontal y en una recta frontal.

CASO A

En la figura II.66 se tiene la recta oblicua $\overline{GH}$ del espacio conocida por sus proyecciones, la cual se coloca en posición horizontal por medio de un giro tomando como fijo el punto G. En la montea este giro se detiene una vez que la proyección frontal de la recta $\overline{GH}$ queda paralela a la línea de tierra, característica que define a las rectas horizontales. (Véase figura II.67).

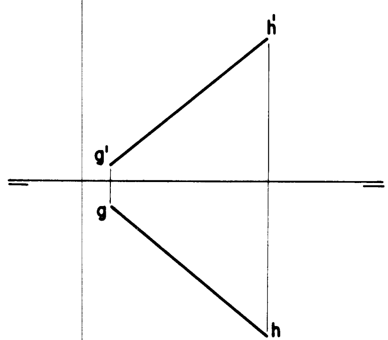


FIGURA II.66

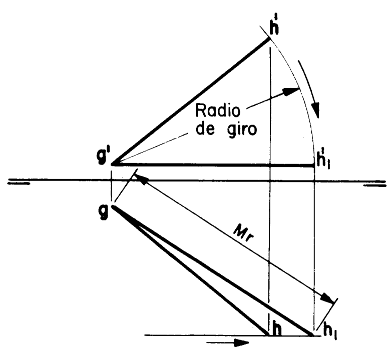


FIGURA II.67

Como se puede observar, la proyección horizontal h se desplaza horizontalmente y en su intersección con la referencia de h_1' se obtiene la nueva proyección h_1 del punto H, que al unirla con el punto fijo G, queda definida la nueva proyección de la recta girada. Esta nueva proyección es la de una recta del espacio paralela al plano horizontal, por lo que aparece en magnitud real.

CASO B

La figura II.68 muestra en montea la recta oblicua $\overline{IJ}$, la cual se transforma en una recta frontal por medio de un giro tomando como fijo el punto I. En la montea este giro se detiene una vez que la proyección horizontal de la recta es paralela a la línea de tierra, característica que define a las rectas frontales.

Una vez realizado lo anterior, se determina la nueva proyección frontal del punto J, la cual queda definida por el cruce de la referencia de j_1 con la línea de desplazamiento aparente de j'. (Véase figura II.69).

Finalmente se une la proyección frontal del punto I con la del punto J, quedando así definida la nueva proyección frontal de la recta $\overline{IJ}$, proyección que muestra la magnitud real de la recta del espacio.

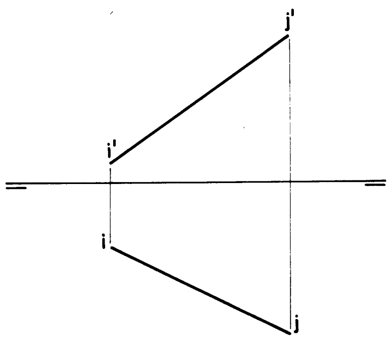


FIGURA II.68

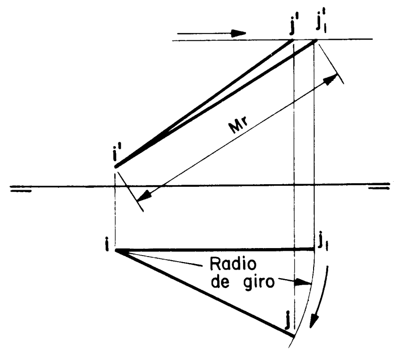


FIGURA II.69

Como se vio anteriormente, cuando se convierte una recta oblicua en una recta horizontal o frontal, además de conocer la magnitud real de la recta, se puede conocer también el ángulo que ésta forma, ya sea con el plano frontal o con el horizontal.

II.3.4 TRAZAS DE RECTAS

Se llaman trazas de una recta a los puntos de intersección de ésta con los planos principales de proyección, por lo que toda recta, cualquiera que sea su posición en el espacio, tendrá como máximo dos trazas, una frontal y una horizontal.

Para ilustrar lo anterior, se tiene en la figura II.70 la recta $\overline{AB}$ del espacio, al prolongarla indefinidamente hasta intersectar el plano horizontal y frontal, define el punto H *traza horizontal* y al punto F *traza frontal*.

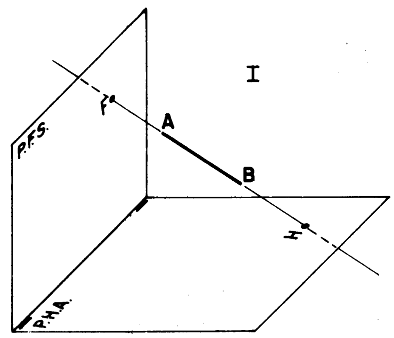


FIGURA II.70

Toda recta sea cual fuere su posición en el espacio, únicamente tendrá como máximo dos trazas: una frontal y una horizontal.

Analizando algunos tipos de rectas se tendrá que:

Las rectas fronto-horizontales no tienen trazas, ya que este tipo de rectas son paralelas a los dos planos principales de proyección.

Las rectas horizontales y las de punta tendrán únicamente traza frontal.

Las rectas frontales y las verticales tendrán únicamente traza horizontal.

Las rectas de perfil y las oblicuas tendrán traza horizontal y frontal.

Por lo anterior, se dice que toda traza frontal es un punto de la recta que por estar contenido en el plano frontal, tiene un alejamiento igual a cero y toda traza horizontal es un punto de la recta contenido en el plano horizontal, por lo cual es un punto de cota cero.

Toda recta que se encuentre en un cuadrante, si intersecta a los planos del mismo cuadrante, dará lugar a las *trazas reales*; pero si al prolongar la recta hacia el infinito pasa a otro cuadrante e intersecta al plano coplanar correspondiente, dará lugar a las *trazas virtuales*. Por ejemplo en la figura II.70, las trazas F y H son trazas reales y en la figura II.71, H es una traza real y F es una traza virtual.

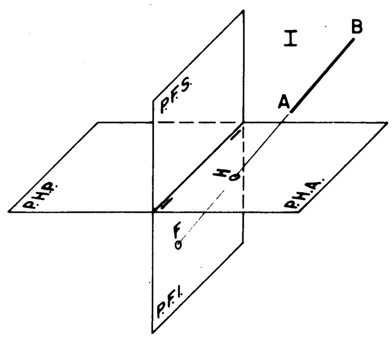


FIGURA II.71

Para ilustrar la manera de obtener las trazas de una recta en montea, en la figura II.72 se tienen las proyecciones de la recta del espacio $\overline{AB}$ y se quieren determinar sus trazas.

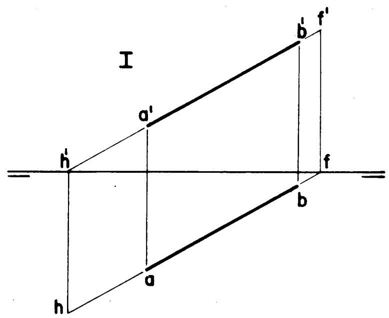


FIGURA II.72

Como se sabe, en una montea las proyecciones frontales indican las cotas de los puntos y las proyecciones horizontales indican los alejamientos; por lo que prolongando la proyección frontal de la recta $\overline{AB}$ hasta intersectar a la línea de tierra, se obtiene un punto de la recta de cota cero que nos representa la proyección frontal de la traza horizontal h'.

Ahora bien, para determinar la proyección horizontal de la traza frontal f bastará con prolongar la proyección horizontal de la recta $\overline{AB}$ hasta intersectarla con la línea de tierra para obtener un punto de alejamiento cero de la recta, que será su traza frontal.

Sin embargo, en el caso de una recta frontal, debido a que ésta es paralela al plano frontal no lo intersecta, por lo que este tipo de rectas únicamente tienen traza horizontal, y es de tipo real. (Véase figura II.73).

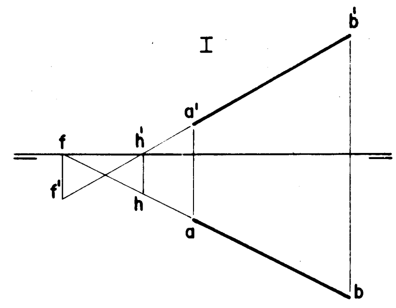


FIGURA II.73

En la figura II.74 está representada una recta del espacio ubicada en el primer cuadrante, tiene su traza horizontal sobre el plano horizontal anterior, por lo que la traza es real, ya que esta porción de plano pertenece también al primer cuadrante.

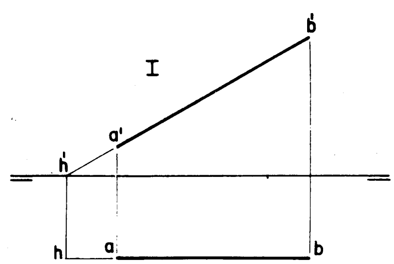


FIGURA II.74

Ahora bien, para determinar la traza frontal, fue necesario pasar la recta a través del plano horizontal y continuarla hasta intersectar el plano frontal inferior, el cual, por no pertenecer al primer cuadrante, da lugar a que la traza frontal sea de tipo virtual. (Estas trazas sólo se utilizan como auxiliares para dar solución a problemas tales como obtención de sombras o intersecciones de elementos del espacio).

II.3.5 ANGULO MINIMO QUE FORMA UNA RECTA CON LOS PLANOS DE PROYECCION

Como se vio anteriormente, toda recta paralela a un plano de proyección, muestra en montea su magnitud real y el mínimo ángulo que forma con el otro plano de proyección.

En el caso de una recta horizontal, el mínimo ángulo que ésta forma con el plano frontal puede medirse directamente en la proyección horizontal. Esto se observa en la representación del espacio de la figura II.75, la cual contiene la recta $\overline{AB}$ del espacio y sus respectivas proyecciones; en dicha figura se puede observar que si se toma la traza frontal F, es posible medir directamente en la proyección horizontal el mínimo ángulo que la recta forma con el plano frontal de proyección.

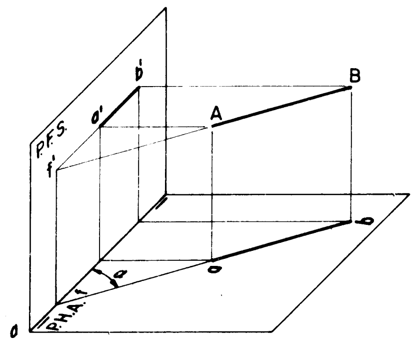


FIGURA II.75

Como se puede observar en la montea de la recta horizontal $\overline{AB}$ presentada en la figura II.76, si se toma como referencia la línea de tierra y se determina el án gulo que ésta forma con la proyección horizontal, se obtiene el mínimo ángulo que la recta forma con el plano frontal de proyección.

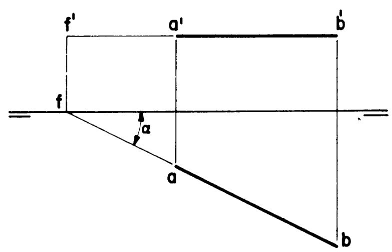


FIGURA II.76

En la figura II.77 se tiene la montea de la recta frontal $\overline{CD}$, la cual por ser paralela al plano frontal, en su proyección sobre este plano se puede leer directamente el mínimo ángulo β que forma dicha recta con el plano horizontal de proyección.

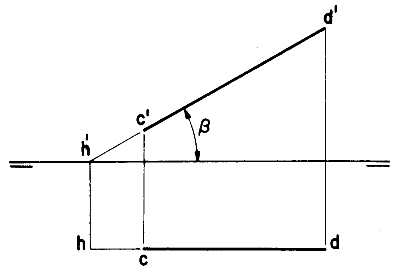


FIGURA II.77

En el caso de una recta de perfil, los ángulos que forma dicha recta con los planos principales de proyección son complementarios; o sea que $\alpha + \beta = 90°$.

Para conocer el mínimo ángulo que una recta de perfil forma con alguno de los planos de proyección, se utiliza la proyección de perfil, en la cual se obtiene directamente el mínimo ángulo que la recta forma, tanto con el plano horizontal como con el plano frontal. (Véase figura II.78).

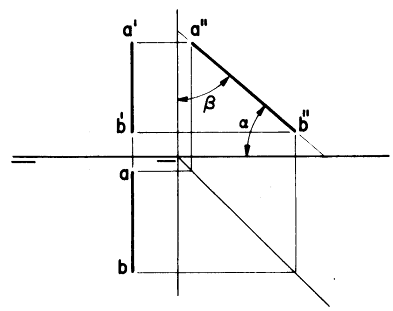


FIGURA II.78

En el caso de una recta oblicua, para conocer el mínimo ángulo que ésta forma con el plano frontal, se debe transformar la recta en una de tipo horizontal, y si se quiere conocer el ángulo que la recta forma con el plano horizontal, se tiene que transformar la recta en una de tipo frontal. Cabe aclarar que el mínimo ángulo que una recta oblicua forma con el plano horizontal, no es complementario del que forma con el plano frontal.

En la figura II.79 se tiene la representación en montea de una recta oblicua $\overline{AB}$ y se quiere determinar el mínimo ángulo que ésta forma, tanto con el plano frontal como con el horizontal.

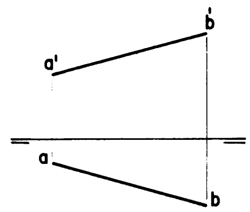


FIGURA II.79

Para obtener el mínimo ángulo que forma la recta $\overline{AB}$ con el plano frontal (ángulo α) se transforma la recta en una de tipo horizontal, lo cual se hace mediante un giro, tomando el punto B como fijo. (Véase figura II.80).

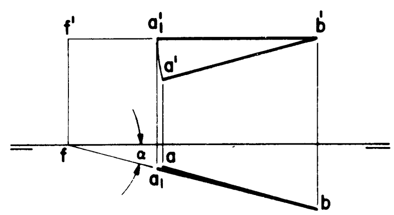


FIGURA II.80

Ahora bien, para conocer el mínimo ángulo que forma la recta $\overline{AB}$ con el plano horizontal (ángulo β) se transforma dicha recta en una de tipo frontal, aplicando el método de cambio de planos. (Véase figura II.81).

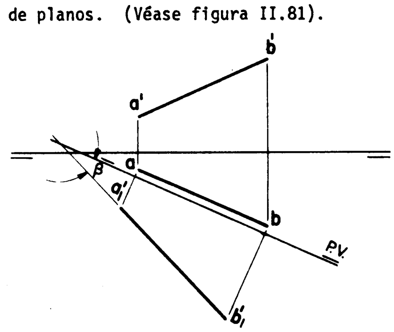


FIGURA II.81

En conclusión, para determinar el mínimo ángulo que una recta forma con cualquiera de los planos de proyección, se puede hacer uso indistintamente del método de giros o del método de cambio de planos.

II.3.6 RECTAS QUE SE INTERSECTAN O QUE SE CRUZAN EN EL ESPACIO

Para determinar si dos rectas del espacio se intersectan, es necesario saber si éstas tienen un punto común, por ello es primordial saber cuándo un punto del espacio está contenido en una recta.

En la montea se tendrá que un punto estará contenido en una recta si las proyecciones de éste están sobre las proyecciones de la recta.

Para ilustrar el párrafo anterior, en la figura II.82 se tiene la representación en el espacio de los diferentes casos de puntos que están o no contenidos en una recta y, en la figura II.83 su respectiva montea.

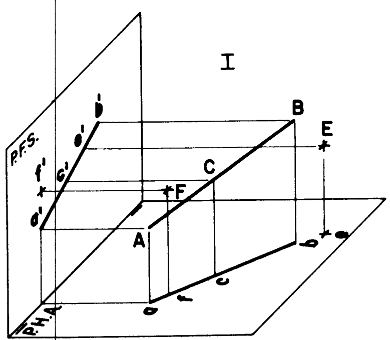


FIGURA II.82

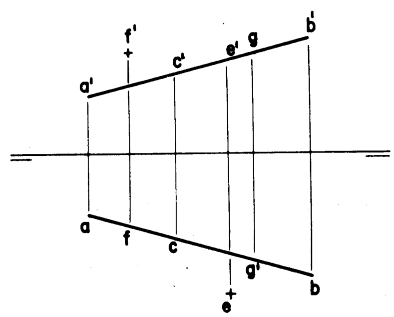


FIGURA II.83

Como se puede observar, el punto C está contenido en la recta $\overline{AB}$, ya que sus proyecciones están sobre las proyecciones de la recta.

Los puntos E y F no están contenidos en la recta $\overline{AB}$, dado que una de sus proyecciones no está sobre las proyecciones de la recta.

El punto G no está contenido en la recta $\overline{AB}$, aunque aparentemente sus proyecciones están sobre las proyecciones de la recta, pues el punto y la recta están en diferentes cuadrantes.

Como conclusión de lo anterior se puede decir que: dos rectas se intersectan cuando tienen un punto común en sus proyeccciones y dos rectas se cruzan cuando no hay punto común entre ellas.

En la figura II.84 se ilustra la montea de dos rectas del espacio que se cortan. Obsérvese que el punto 1 es común a las dos rectas, ya que en la proyección frontal y en la horizontal es única su proyección, por lo que pertenece a las rectas $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$.

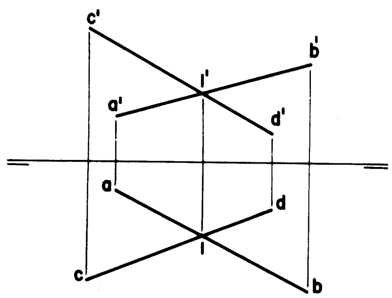


FIGURA II.84

En la figura II.85 se ilustra la montea de dos rectas que se cruzan en el espacio. Si se analizan sus proyecciones frontales y horizontales, se puede observar que el punto 1 está contenido en la recta $\overline{EF}$ y el punto 2 en la recta $\overline{GH}$, por lo tanto, no son puntos comunes a las rectas. Lo anterior comprueba que estas rectas se cruzan en el espacio, ya que no tienen un punto en común.

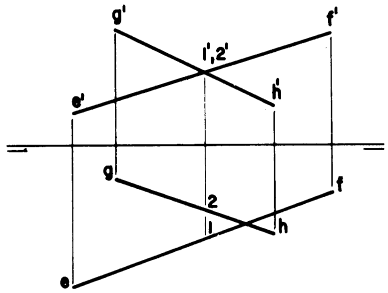


FIGURA II.85

RECTAS QUE SE CRUZAN Y SU MINIMA DISTANCIA

Dos rectas del espacio se cruzan cuando están contenidas en planos diferentes y la mínima distancia entre ellas se determinará con la perpendicular común a dichas rectas.

Para resolver este problema en la montea, el procedimiento consiste en hacer los cambios de planos necesarios hasta que una de las rectas quede transformada en una recta de punta o en una recta vertical.

El cambio sucesivo de los planos se realizará al mismo tiempo para las dos rectas, hasta que una de ellas quede transformada en una recta vertical o en una de punta, no importando la posición que adquiera la otra.

Ahora bien, en la proyección horizontal de la montea formada con el último cambio de plano, se podrá medir directamente la distancia mínima entre las dos rectas; esta medición se realizará sobre la perpendicular a la recta que pasa por el punto (proyección de la recta vertical o de punta según la transformación de que haya sido objeto la recta).

Para ilustrar lo anterior, se procederá a determinar la mínima distancia entre las rectas $\overline{AB}$ y $\overline{EF}$ mostradas en la montea de la figura II.86. Para ello se efectúa el siguiente procedimiento: se coloca un plano auxiliar paralelo a la proyección horizontal de la recta $\overline{EF}$, con lo que dicha recta quedará transformada en una de tipo frontal. (Véase figura II.87).

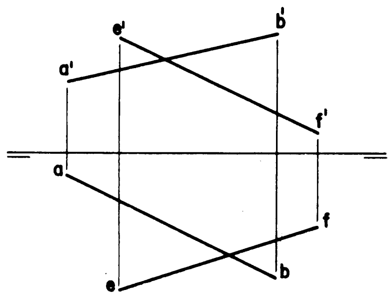


FIGURA II.86

Posteriormente se coloca otro plano auxiliar, perpendicular a la nueva proyección frontal de la recta $\overline{EF}$, con lo que dicha recta queda transformada en una de tipo vertical.

Finalmente, obtenida la última proyección horizontal, puede medirse en ella la mínima distancia entre las dos rectas, la cual está indicada en la figura II.87 con la letra d, que corresponde a la perpendicular a la recta a_1b_1 que va desde el punto que define la proyección de la recta e_1f_1.

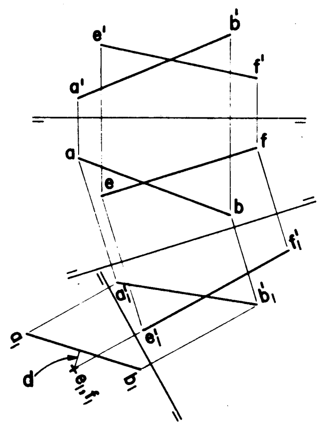


FIGURA II.87

RECTAS QUE SE INTERSECTAN Y ANGULO QUE FORMAN ENTRE SI

Para resolver este problema es necesario colocar las dos rectas paralelas a uno de los planos de proyección, esto se puede realizar mediante un triple cambio de planos.

La solución de este problema puede realizarse en dos formas:

a) Transformando las dos rectas en rectas paralelas al plano frontal, obteniéndose de esta manera una de las siguientes combinaciones:

   Recta frontal con recta frontal
   Recta vertical con recta frontal
   Recta fronto-horizontal con recta frontal
   Recta fronto-horizontal con recta vertical

b) Transformando las dos rectas en rectas paralelas al plano horizontal, obteniéndose una de las siguientes combinaciones:

   Recta horizontal con recta horizontal
   Recta de punta con recta horizontal
   Recta fronto-horizontal con recta horizontal
   Recta fronto-horizontal con recta de punta

En la figura II.88 se muestran las proyecciones de dos rectas $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ que se cortan en el espacio teniendo como punto común, el punto "O".

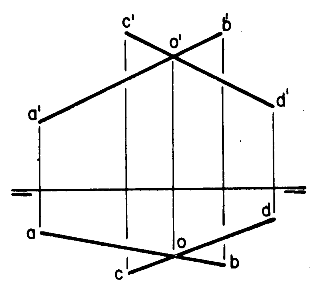


FIGURA II.88

Como se puede observar en el esquema de la figura II.89 al transformarse las dos rectas en rectas paralelas a uno de los planos de proyección, en este caso al plano frontal, el ángulo que forman entre sí dichas rectas se puede obtener directamente de las proyecciones.

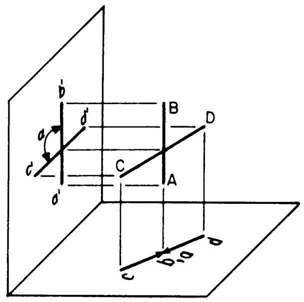


FIGURA II.89

En la figura II.90 se muestra la solución, en la cual las rectas $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ se transformaron, una en recta de tipo frontal y la otra en una de tipo vertical respectivamente.

La solución se realizó de la siguiente manera:

Las rectas $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ se llevan a una posición de paralelismo con el plano frontal de proyección (también puede ser con el plano horizontal).

a) La recta $\overline{CD}$ con un plano auxiliar frontal a través de un cambio de planos, se pone en posición de una recta frontal.

b) Con un segundo cambio de planos, usando un plano auxiliar horizontal, se coloca la recta $\overline{CD}$ en posición de una recta vertical.

c) Con el uso de un plano auxiliar frontal, se realiza un tercer cambio de planos, colocando la recta $\overline{AB}$ en posición de una recta frontal.

Al hacer estos tres cambios de planos, al final, la recta $\overline{AB}$ queda en posición de una frontal y la recta $\overline{CD}$ en posición de una vertical, como estas dos rectas son paralelas al plano frontal, en las proyecciones sobre dicho plano se puede medir el ángulo que forman entre sí dichas rectas. Se puede observar en la figura II.89 que los ángulos α y β son suplementarios ($\alpha + \beta = 180°$).

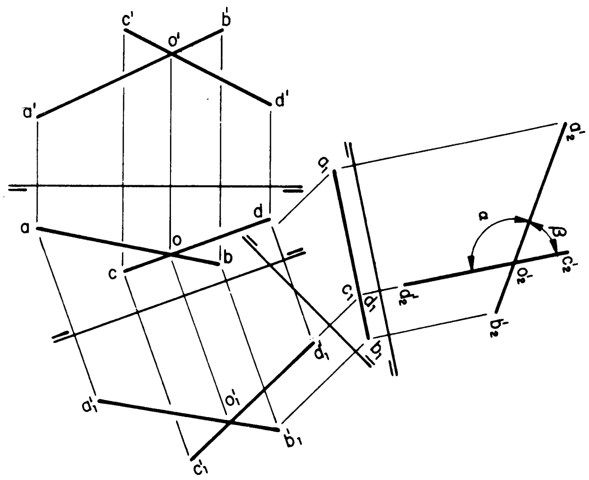


FIGURA II.90

II.4 EL PLANO

Dentro de los conceptos de la geometría descriptiva se encuentra el que un plano puede estar definido con un número infinito de rectas paralelas entre sí, las cuales al intersectar a los planos principales de proyección forman rectas de intersección, a las que se les denomina trazas.

Las trazas de un plano son las rectas de intersección de éste con los planos principales de proyección, por lo cual se podrán tener como máximo dos de ellas, una frontal y otra horizontal.

Para ilustrar lo anterior, en la figura II.91 se tiene un plano P del espacio en una posición oblicua que intersecta a los planos principales de proyección. La intersección con el plano frontal de proyección está representada por la recta p', a la cual se le denominará traza frontal, y la intersección con el plano horizontal de proyección está representada por la recta p, a la cual se le denominará traza horizontal.

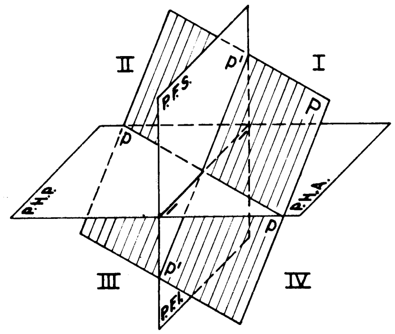


FIGURA II.91

En la figura se puede observar que las dos trazas son concurrentes en un punto sobre la línea de tierra, puesto que éste es el punto de intersección entre los tres planos.

En la montea los planos se representan por sus trazas, en la figura II.92 se tiene el plano P en los diferentes cuadrantes.

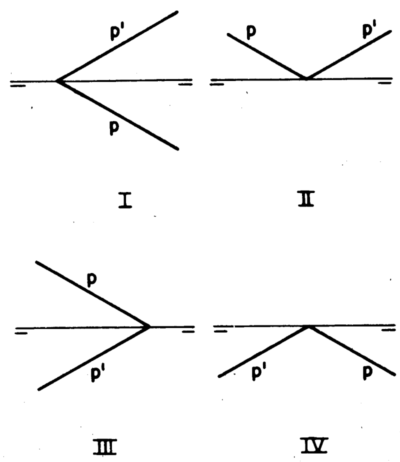


FIGURA II.92

Conocidas las trazas de un plano P en cualquier cuadrante, se puede representar dicho plano en otro cuadrante prolongando la traza respectiva, por ejemplo, dadas las trazas en el primer cuadrante del plano Q (véase figura II.93), si se quiere transportar este plano al tercer cuadrante es necesario prolongar las trazas hasta tenerlo como se muestra en la figura II.94.

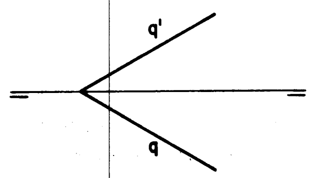


FIGURA II.93

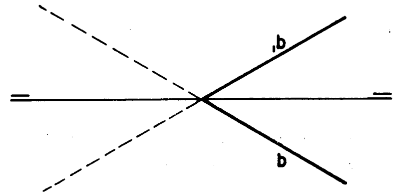


FIGURA II.94

Nótese que las trazas de un plano son rectas del plano contenidas en los planos de proyección.

Ahora bien, si una recta está contenida en un plano oblicuo, las trazas de dicha recta coincidirán con las trazas del plano que la contiene.

Para ilustrar lo anterior, en la figura II.95 se tiene un plano P en el primer cuadrante y una recta $\overline{AB}$ contenida en dicho plano. Si se prolonga la recta para obtener sus trazas, se observa que su traza frontal f' coincide con la traza frontal p' del plano P y la traza horizontal de la recta h coincide con la traza horizontal p del plano P. Esto es debido a que las rectas $\overline{AB}$, $\overline{CB}$ y las trazas del plano están contenidas en este mismo plano.

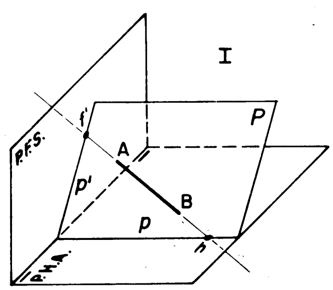


FIGURA II.95

Resumiendo, la traza frontal f' será punto de concurrencia entre la recta $\overline{AB}$ y la traza p' (traza frontal del plano), y la traza horizontal h será punto de concurrencia de la recta $\overline{AB}$ con la traza p (traza horizontal del plano).

II.4.1 ELEMENTOS QUE DEFINEN UN PLANO

Como se vio anteriormente, un plano queda definido por medio de sus trazas, pero también puede quedar representado por otros elementos como son los siguientes:

a) Tres puntos del espacio A, B y C que no estén en línea recta, definen un plano y por consecuencia, su posición. (Véase figura II.96).

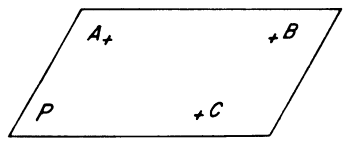


FIGURA II.96

b) Una recta $\overline{AB}$ y un punto C fuera de la recta, definen un plano. (Véase figura II.97).

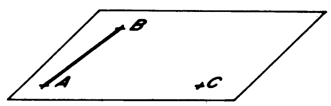


FIGURA II.97

c) Dos rectas $\overline{AB}$ y $\overline{CB}$ del espacio que se intersectan, definen un plano. (Véase figura II.98).

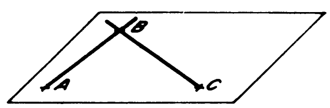


FIGURA II.98

d) Una recta que se desplaza paralelamente a sí misma en el espacio, da lugar a una superficie, por lo tanto se dice que dos rectas paralelas definen un plano. (Véase figura II.99).

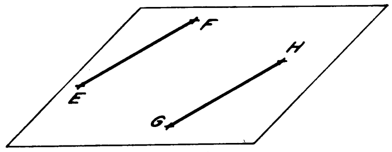


FIGURA II.99

Como se puede observar, todos los casos de elementos que definen un plano pueden enmarcarse dentro del inciso a.

Con base en los enunciados anteriores, se ejemplificará la manera de obtener las trazas de los planos definidos por las diferentes posiciones de los elementos del espacio.

CASO A

Para determinar las trazas del plano P definido por los puntos A, B y C mostrados en la figura II.100, se procede de la siguiente manera: se une el punto A con el B y posteriormente el punto C con el punto B, formando de esta manera dos rectas que son la $\overline{AB}$ y la $\overline{CB}$. (Véase figura II.101).

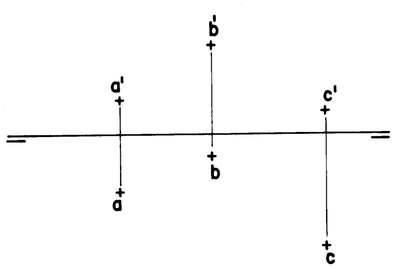
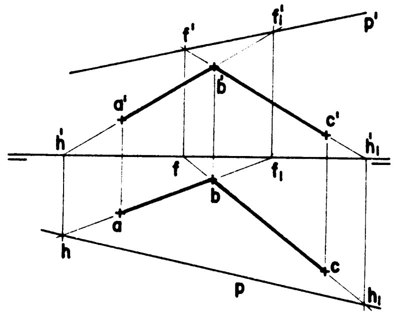


FIGURA II.100

Después se obtienen las trazas horizontales y frontales de las rectas, con el fin de conocer los puntos de las trazas del plano P.

Finalmente se determina la traza frontal p' uniendo las dos trazas frontales de las rectas y, procediendo de manera similar se determina la traza horizontal p, con lo cual queda resuelto el problema.



CASO B

FIGURA II.101

Para determinar las trazas del plano Q definido por la recta $\overline{MN}$ y el punto G (véase figura II.102), se procede de la misma forma que en el caso anterior, ya que al unir el punto G con el punto N se obtiene la posición de dos rectas, la $\overline{MN}$ y la $\overline{GN}$, de las cuales al obtener sus trazas, se tendrá la posición de las trazas del plano Q como se observa en la figura II.103.

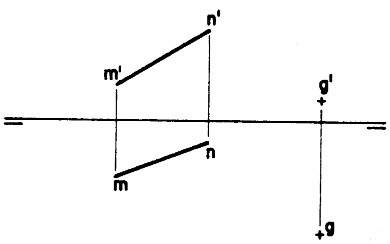


FIGURA II.102

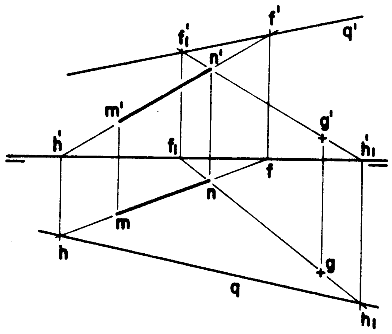


FIGURA II.103

CASO C

Para obtener las trazas del plano T dado por dos rectas del espacio $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ que tienen un punto en común, se procede igual que en los casos anteriores; se obtienen las trazas de las rectas y con ellas las trazas del plano T. (Véase figura II.104).

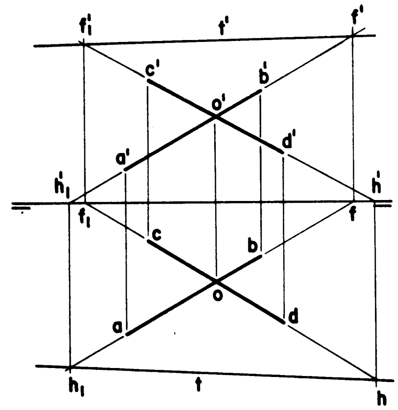


FIGURA II.104

CASO D

Para obtener las trazas de un plano U definido por las rectas paralelas $\overline{IJ}$ y $\overline{KL}$ del espacio, se procede de manera semejante a los casos anteriores; se obtienen las trazas de las rectas y con ellas las trazas del plano U. (Véase figura II.105).

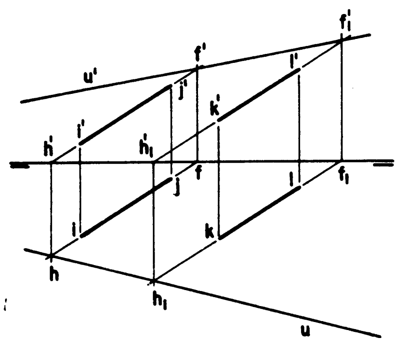


FIGURA II.105

II.4.2 POSICION DE UN PLANO CON RESPECTO A LOS PLANOS PRINCIPALES DE PROYECCION

Las diferentes posiciones que tienen los planos del espacio con respecto a los planos principales de proyección, dan lugar a que los planos reciban determinados nombres genéricos, los cuales son:

Plano horizontal: Es todo aquel plano paralelo al plano horizontal de proyección, siendo por ello perpendicular al frontal y al de perfil de proyección.

Debido a lo anterior, este tipo de plano sólo tendrá traza frontal. (Véanse figuras II.106 y II.107).

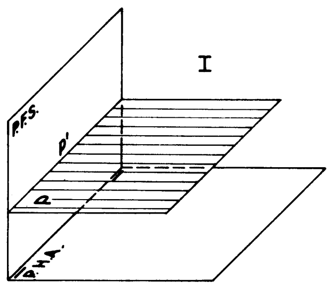


FIGURA II.106

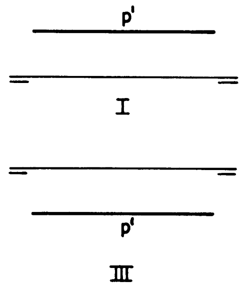


FIGURA II.107

Plano frontal: Este tipo de plano es paralelo al plano frontal de proyección y a la vez es perpendicular tanto al plano horizontal como al de perfil, por lo que sólo tiene traza horizontal. (Véanse figuras II.108 y II.109).

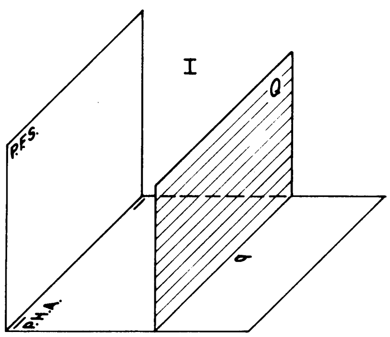


FIGURA II.108

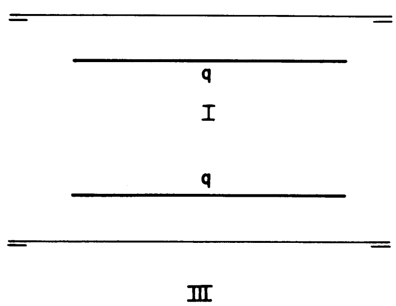


FIGURA II.109

Plano vertical: Con este nombre se denomina a todo plano perpendicular al plano horizontal de proyección, por lo que la traza frontal es perpendicular a la línea de tierra y la traza horizontal forma con la línea de tierra el ángulo β que este plano forma con el plano frontal de proyección. (Véase figura II.110).

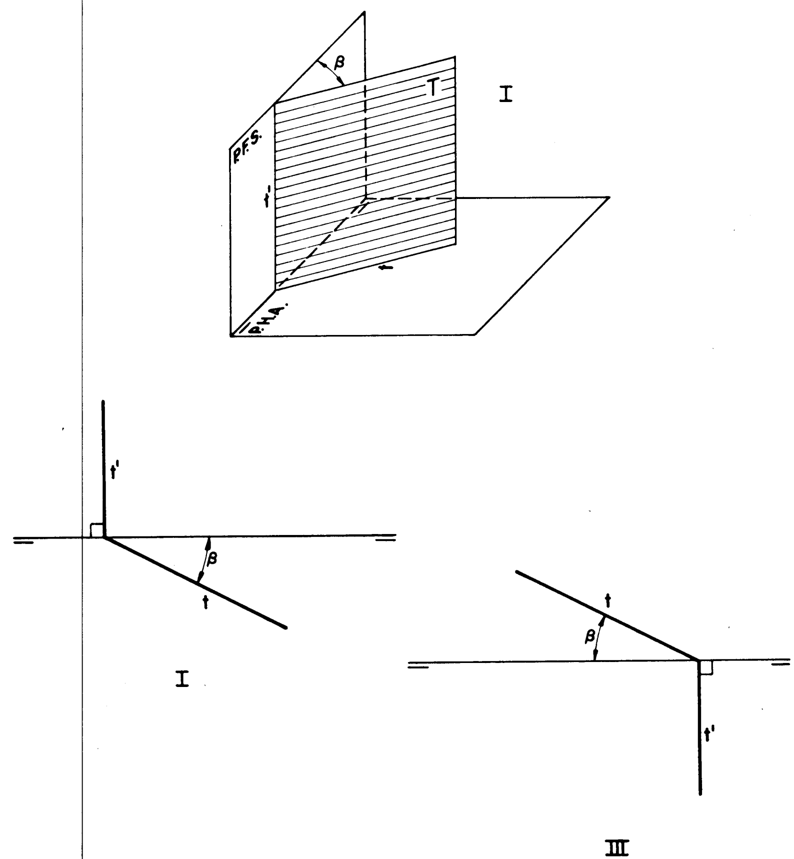


FIGURA II.110

Plano de canto: Este tipo de plano es perpendicular al plano frontal de proyección, por lo que su traza horizontal es perpendicular a la línea de tierra y su traza frontal forma con dicha línea el ángulo α que este plano forma con el plano horizontal de proyección. (Véanse figuras II.111 y II.112).

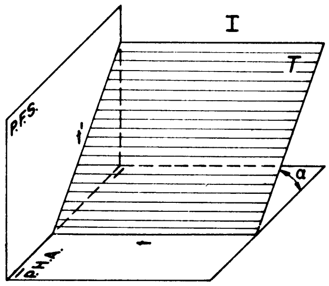


FIGURA II.111

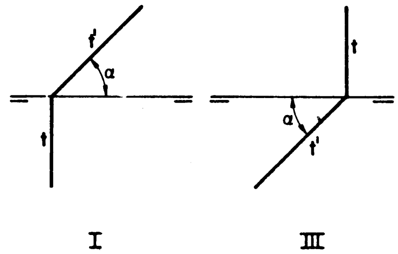


FIGURA II.112

Plano paralelo a la línea de tierra: Se le da este nombre a todo plano del espacio que es perpendicular al plano de perfil y paralelo a la línea de tierra.

Este tipo de plano tiene traza frontal y horizontal, ambas son paralelas a la línea de tierra. (Véanse figuras II.113 y II.114).

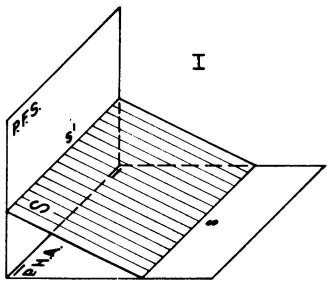


FIGURA II.113

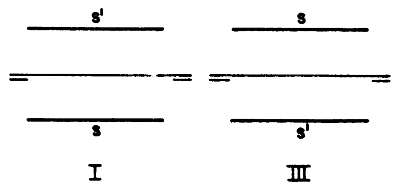


FIGURA II.114

Plano de perfil: Es aquel plano perpendicular a los dos planos principales de proyección y paralelo al plano de perfil. En montea sus trazas están representadas por dos rectas perpendiculares a la línea de tierra. (Véanse figuras II.115 y II.116).

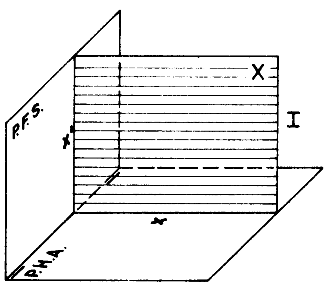


FIGURA II.115

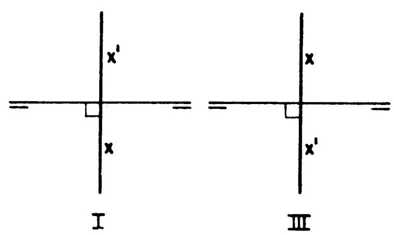


FIGURA II.116

Plano que pasa por la línea de tierra: Es todo plano que contiene a la línea de tierra, por lo que en montea sus trazas quedan confundidas con dicha línea.

Para definir la posición de estos planos en el espacio es necesario un dato auxiliar, ya sea un punto del espacio contenido en el plano o el ángulo que forma éste con alguno de los planos de proyección. (Véanse figuras II.117 y II.118).

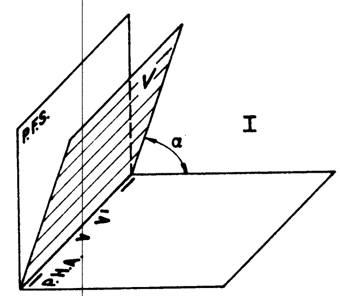


FIGURA II.117

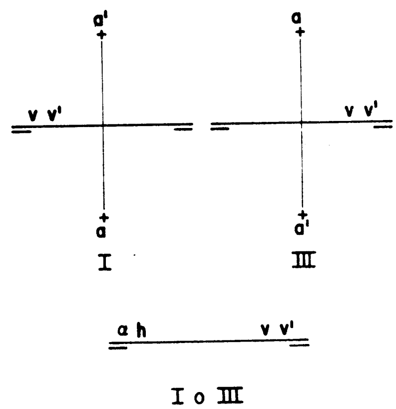


FIGURA II.118

Cuando el ángulo es de 45°, el plano recibe el nombre de bisector, si bisecta al primero y segundo cuadrantes recibe el nombre de primer bisector y si éste bisecta al segundo y cuarto cuadrantes, se le denomina segundo bisector (véase figura II.119). Una de las características de estos planos es que el alejamiento y la cota de cualquier punto contenido en ellos, tiene el mismo valor numérico.

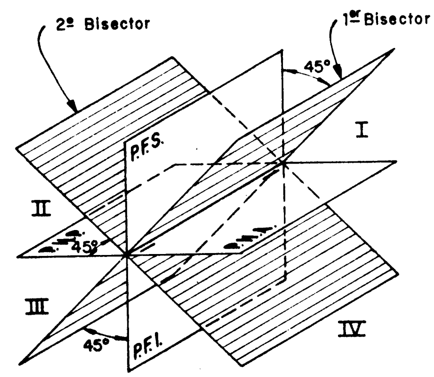


FIGURA II.119

Para determinar el ángulo que forman los planos que pasan por la línea de tierra con los planos de proyección, se hace uso de la proyección de perfil, puesto que en esta proyección se pueden determinar directamente dichos ángulos; esto se debe a que estos planos son perpendiculares al de perfil.

Plano oblicuo o plano cualquiera: Se le da este nombre a todo plano que no guarda ninguna relación de paralelismo o perpendicularidad con los planos principales de proyección. (Véase figura II.120).

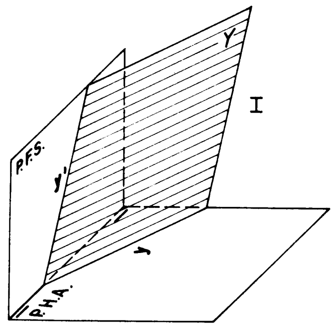


FIGURA II.120

Como se puede observar en la figura II.121, estos planos no muestran, en montea, los ángulos reales que forman con los planos de proyección.

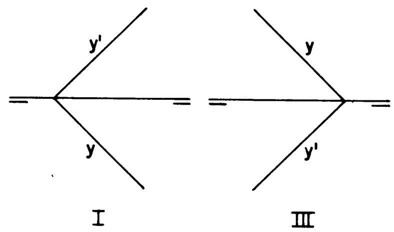


FIGURA II.121

Cabe hacer notar que el ángulo que forma un plano oblicuo con el plano horizontal no es complementario del ángulo que forma con el plano frontal de proyección.

Como anteriormente se vio, las trazas de una recta contenida en un plano coinciden en las trazas de éste, por lo tanto, haciendo un análisis de las trazas, se pueden determinar los tipos de rectas que contiene cada tipo de plano.

En la figura II.122 se tiene la representación de un plano horizontal P , en donde se puede observar que este tipo de plano contiene rectas horizontales, de punta y fronto-horizontales, debido a que las trazas o las proyecciones frontales de estas rectas coinciden con las trazas frontales del plano.

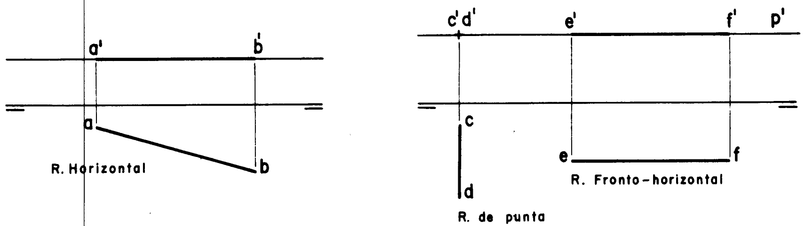


FIGURA II.122

En el siguiente cuadro se muestran los tipos de recta que pueden estar contenidos en los planos.

TIPO DE RECTA / TIPO DE PLANO	HORIZONTAL	FRONTAL	VERTICAL	DE PUNTA	DE PERFIL	FRONTO-HORIZONTAL	OBLICUA
HORIZONTAL	SI	NO	NO	SI	NO	SI	NO
FRONTAL	NO	SI	SI	NO	NO	SI	NO
VERTICAL	SI	NO	SI	NO	NO	NO	SI
DE CANTO	NO	SI	NO	SI	NO	NO	SI
PARALELO A LA L.T.	NO	NO	NO	NO	SI	SI	SI
QUE PASA POR LA L.T.	NO	NO	NO	NO	SI	SI	SI
DE PERFIL	NO	NO	SI	SI	SI	NO	NO
OBLICUO	SI	SI	NO	NO	SI	NO	SI

A continuación se presentan algunos casos de puntos que están o no contenidos en los diferentes tipos de planos, para que con ellos se pueda estudiar el caso de la recta contenida en el plano.

1. El punto A está contenido en el plano horizontal P y el punto B no lo está. (Véase figura II.123).

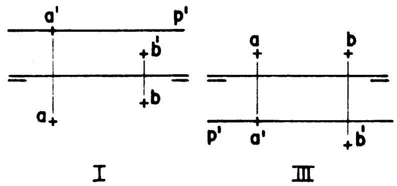


FIGURA II.123

2. El punto C está contenido en el plano frontal Q y el punto D no lo está. (Véase figura II.124).

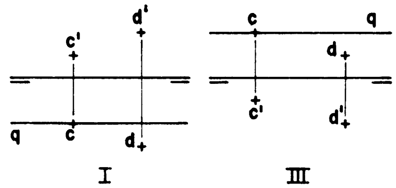


FIGURA II.124

3. El punto E está contenido en el plano vertical R y el punto F no lo está. (Véase figura II.125).

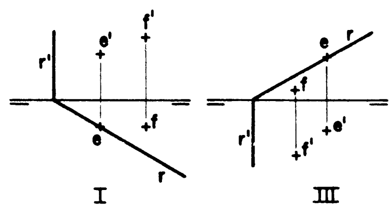


FIGURA II.125

4. El punto G está contenido en el plano de canto L y el punto H no lo está. (Véase figura II.126).

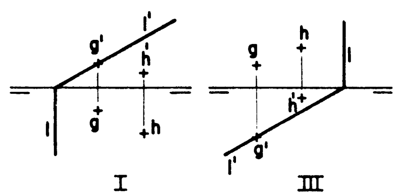


FIGURA II.126

5. El punto I está contenido en el plano de perfil M y el punto J no lo está. (Véase figura II.127).

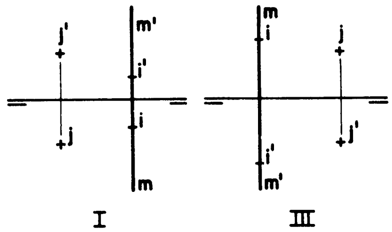


FIGURA II.127

6. El punto K está contenido en el plano N paralelo a la línea de tierra. El punto L no está contenido en el plano N paralelo a la línea de tierra. (Véase figura II.128).

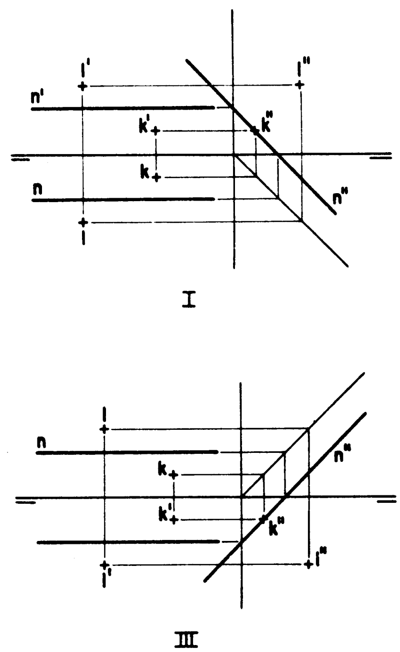


FIGURA II.128

7. El punto A está contenido en el plano S que pasa por la línea de tierra. El punto B no está contenido en el plano S que pasa por la línea de tierra. (Véase figura II.129).

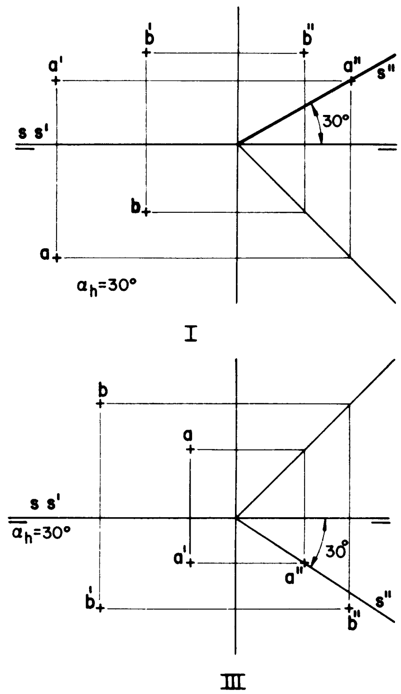


FIGURA II.129

Ahora bien, cuando se quiere determinar si un punto está contenido en un plano del tipo oblicuo, es necesario realizar un cambio de planos, dado que en este caso no es posible en la montea original solucionar este problema; esto se debe a que dicho plano no es perpendicular a ninguno de los planos de proyección.

En otras palabras, se tendrá que hacer uso de un plano auxiliar para transformar el plano oblicuo en un plano vertical o uno de canto en cuya posición pueda verse si el punto está contenido en el plano oblicuo.

Para ilustrar lo anterior, se tiene el plano oblicuo del espacio P y se quiere saber si los puntos del espacio A y B están contenidos en dicho plano. (Véase figura II.130).

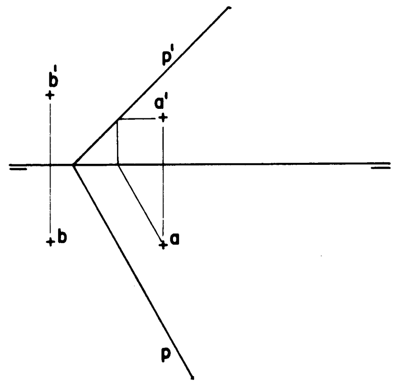


FIGURA II.130

Para resolver este problema es necesario colocar perpendicular a la traza horizontal p un plano auxiliar de tipo vertical (véase figura II.131), para posteriormente determinar la nueva posición de la traza frontal de la siguiente manera: se obtiene la nueva proyección frontal del punto 1, la cual al unirse con el punto definido por el cruce de la nueva línea de tierra y la traza horizontal definen la nueva traza frontal p_1'. Finalmente se obtienen las nuevas proyecciones frontales de los puntos A y B, de las cuales, la proyección a_1' queda sobre la traza p_1' y la b_1' no queda sobre dicha traza, por lo que el punto A está contenido en el plano P y el B no lo está.

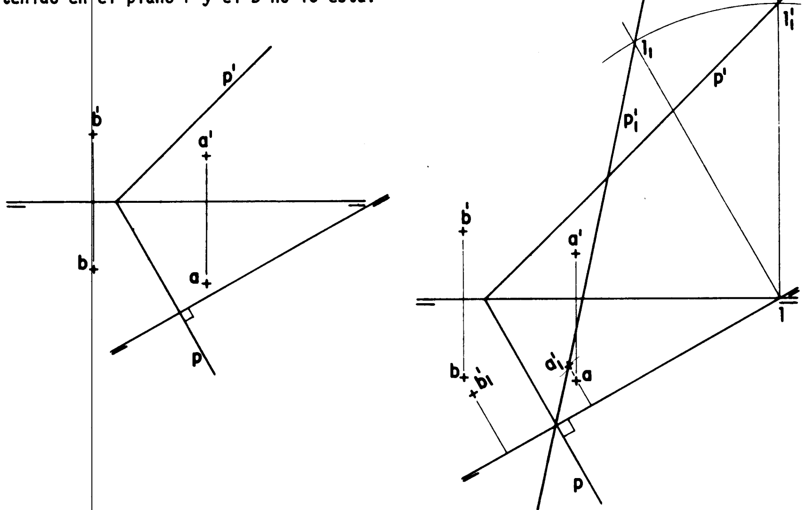


FIGURA II.131

De los casos anteriores se puede concluir que:

De una manera directa se puede determinar si un punto está contenido en un plano perpendicular a alguno de los planos de proyección; si es perpendicular al frontal de proyección, la proyección frontal del punto coincidirá con la traza frontal del plano y si es perpendicular al horizontal de proyección, la proyección horizontal del punto coincidirá con la traza horizontal del plano.

Cuando los planos no son perpendiculares a los planos principales de proyección, pero sí al plano de perfil, en las proyecciones contenidas en este último, se puede observar si un punto pertenece a ese plano.

II.4.3 MAGNITUDES REALES DE PLANOS

Si se quieren determinar las propiedades geométricas de los planos se pueden aplicar los métodos de cambio de planos o el de giros, este último complementado por el procedimiento de triangulación.

A) METODO DE GIROS

Este método se aplica cuando los planos del espacio son polígonos irregulares, no paralelos a los planos de proyección y con un número de lados mayor de tres.

Este método se auxilia del procedimiento de la triangulación para facilitar el trazo en magnitud real de los planos, dicho procedimiento consiste en dividir el polígono en triángulos por medio de diagonales; por lo tanto el número de triángulos a formar será el número de lados del polígono menos dos.

$$\text{Número de triángulos} = n - 2$$

y las diagonales a trazar serán tantas como lados tenga el polígono menos tres.

$$\text{Número de diagonales} = n - 3$$

donde, n es el número de lados del polígono.

Para ilustrar lo anterior, en la figura II.132 se tiene un polígono irregular y se desea determinar su magnitud real. Este problema se resuelve de la siguiente manera: se trazan las diagonales para dividir el polígono en triángulos como se muestran en la figura. Estas diagonales pueden ser la $\overline{AC}$ y la $\overline{AD}$, con lo cual queda dividida la figura en los triangulos ABC y ACD. (Véase figura II.133).

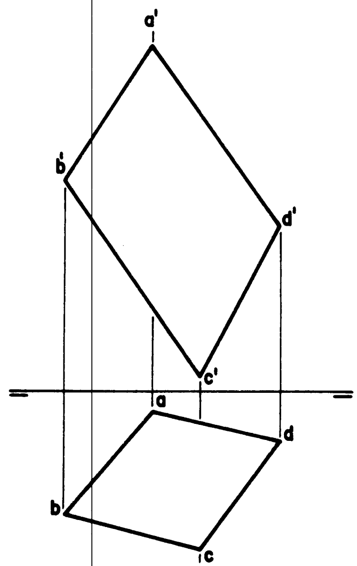


FIGURA II.132

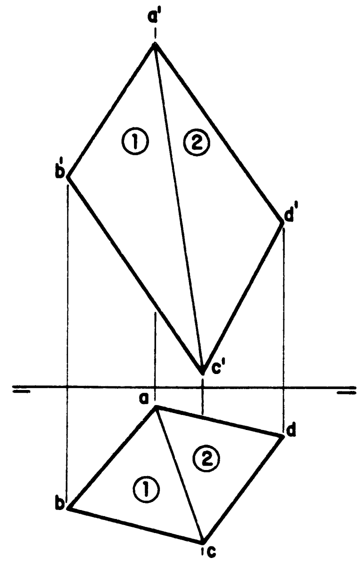


FIGURA II.133

Se obtiene la magnitud real de los lados del polígono y de las diagonales trazadas por medio del método de giros. (Véase figura II.134).

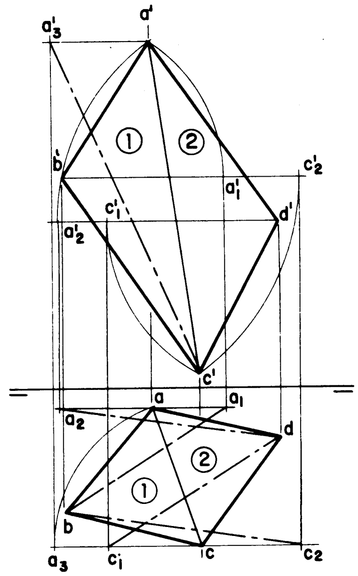


FIGURA II.134

Obtenidas las magnitudes reales se puede construir el polígono, empezando por el triángulo ABC (véase figura II.135), en seguida de éste, se traza el triángulo ACD con la diagonal $\overline{AC}$ común al primer triángulo, quedando así construido el cuadrilátero en magnitud real. (Véase figura II.136).

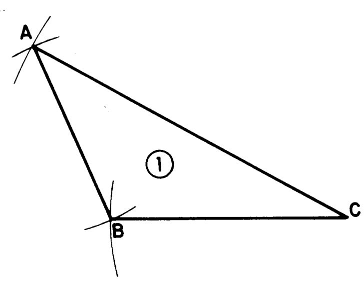


FIGURA II.135

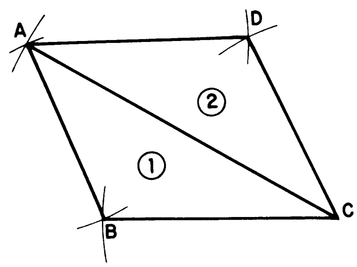


FIGURA II.136

B) METODO DE CAMBIO DE PLANOS

Este método tiene como finalidad colocar un plano auxiliar paralelo al plano en estudio, para con ello poder obtener directamente, en la nueva montea, las magnitudes reales.

Para ilustrar lo anterior, se tienen en la figura II.137 las proyecciones de un plano de cuatro lados, el cual se quiere dibujar en magnitud real.

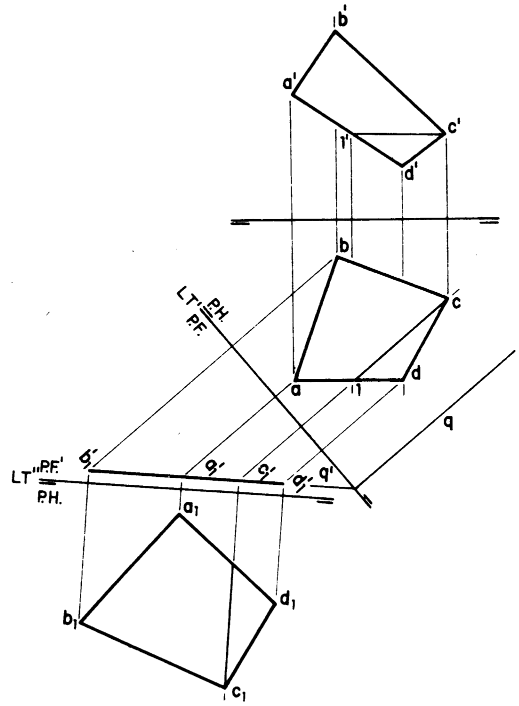


FIGURA II.137

Este problema se resolverá realizando un doble cambio de planos, lo cual se explica a continuación.

Se realiza un cambio de plano frontal, de tal manera que la nueva línea de tierra LT' quede perpendicular a la proyección horizontal de una recta del tipo horizontal H contenida en el plano del cuadrilátero, por lo que éste quedará transformado en uno de canto.

Después se obtienen las nuevas proyecciones del cuadrilátero a_1', b_1', d_1' y c_1', las cuales deben quedar en línea recta (traza del plano), debido a las características que tienen los planos de canto.

Finalmente, se realiza un cambio de plano horizontal en el cual la nueva línea de tierra será paralela a la última proyección frontal del plano ABCD y se obtienen las nuevas proyecciones horizontales a_1, b_1, c_1 y d_1, con lo cual queda resuelto el problema.

II.4.4 INTERSECCION DE RECTAS CON PLANOS Y VISIBILIDAD

Para resolver el problema de intersección de una recta con un plano del espacio, es necesario saber obtener previamente la intersección de dos planos, la cual es una línea recta común a éstos, por lo que si se conocen dos puntos comunes a los dos planos, al unirlos se obtendrá su recta de intersección.

Para ilustrar lo anterior, se tienen en la figura II.138 los planos P y Q del espacio y en la figura II.139, su representación en montea. En esta última se puede observar que los puntos 1 y 2 son comunes a los dos planos; además como el punto 1 es la intersección de las dos trazas frontales, tiene un alejamiento igual a cero y como el punto 2 es intersección de las trazas horizontales, tiene una cota igual a cero. Por lo tanto, uniendo estos puntos se obtiene la recta de intersección de los planos P y Q.

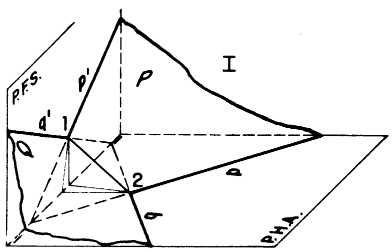


FIGURA II.138

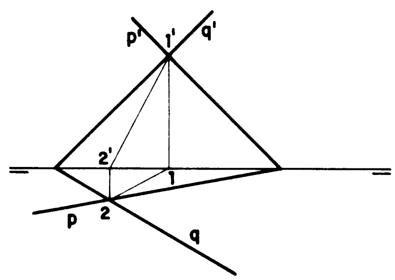


FIGURA II.139

Analizando ahora el problema en montea, se pueden obtener las proyecciones de la intersección de los dos planos P y Q, como se indica a continuación.

Se unen las proyecciones frontales de los puntos 1 y 2 y se obtiene la *proyección frontal de la intersección* y de manera similar se obtiene la proyección horizontal de dicha intersección.

La figura II.140 muestra en montea los planos horizontal P y vertical Q, de donde se obtiene directamente su intersección, puesto que la proyección horizontal de ésta queda confundida con la traza horizontal del plano Q. Esto ocurre siempre que se tienen en un problema tanto planos horizontales como verticales.

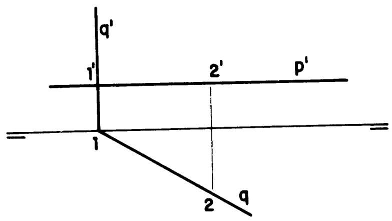


FIGURA II.140

En la figura II.141 se tiene la intersección de dos planos de canto. En este caso, únicamente se conoce un punto común a los dos planos que es el punto donde se cortan las dos trazas frontales, pero se sabe que la dirección de la intersección es una recta de punta, por lo que se puede trazar dicha recta R en la montea, quedando así resuelto el problema.

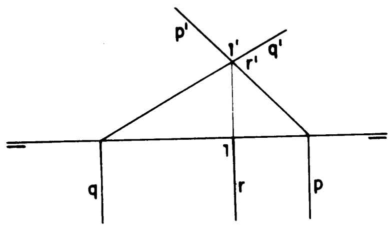


FIGURA II.141

En la figura II.142 se tiene la intersección de un plano paralelo a la línea de tierra con un plano que pasa por la misma. Esta intersección es una recta fronto-horizontal; y por ser los planos perpendiculares al plano de perfil, en dicha proyección se puede observar la intersección, la cual está representada por la recta R.

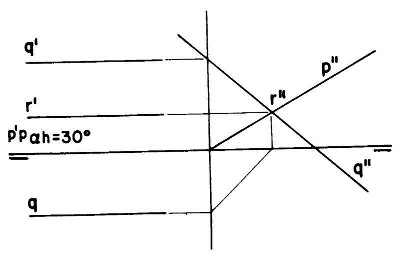


FIGURA II.142

En los siguientes ejemplos se ilustrará la forma de determinar la intersección de una recta R con un plano P del espacio.

Ahora bien, para obtener el punto de intersección entre la recta R y el plano P (véase figura II.143), se procede de la siguiente manera:

Haciendo pasar un plano Q que contenga a la recta R se obtiene la recta $\overline{1\ 2}$ de intersección entre los planos P y Q. Después se determina el punto común a la recta $\overline{1\ 2}$ y a la recta R que será el punto I, el cual es la intersección de la recta R con el plano P y es común a las dos rectas. (Véase figura II.144).

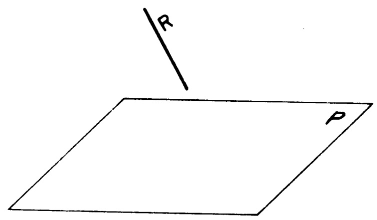


FIGURA II.143

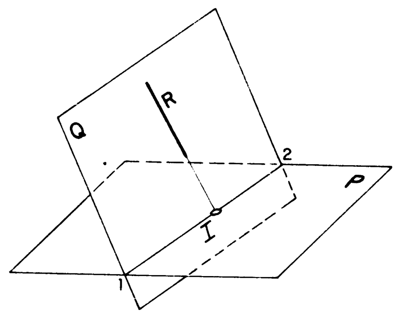


FIGURA II.144

Para ilustrar lo anterior, se obtendrá en montea la intersección de una recta R del espacio con un plano P. (Véase figura II.145).

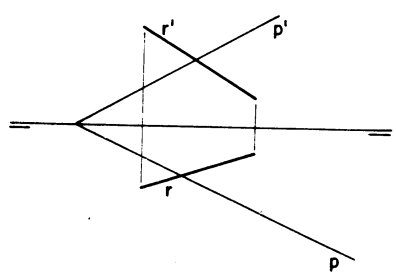


FIGURA II.145

Se hace pasar un plano Q que contenga a la recta R. Del número infinito de planos que pueden pasar por una recta, se escoge uno de fácil trazo en la montea, como puede ser uno del tipo vertical o uno de canto, en este caso se hace uso de un plano Q de canto que contenga a la recta R; para que la recta esté contenida en el plano Q, la proyección frontal de dicha recta debe estar confundida con la traza frontal del plano, por lo que con prolongar la proyección frontal de la recta R, se tendrá la traza frontal del plano y la traza horizontal tendrá que ser perpendicular a la línea de tierra. (Véase figura II.146).

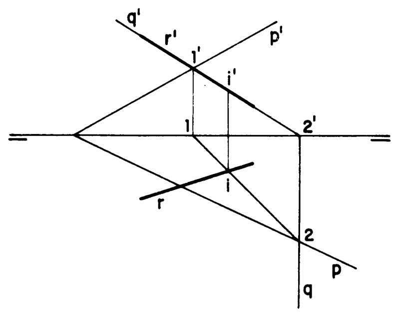


FIGURA II.146

Una vez representado el plano Q en montea, se procede a encontrar la recta de intersección $\overline{1\ 2}$ entre el plano Q y el plano P. En seguida se obtiene el punto I que es el punto de corte entre la recta $\overline{1\ 2}$ y la recta R, el cual representa el punto de intersección de la recta R con el plano P.

En la montea se puede observar que el punto I es común a la recta $\overline{1\ 2}$ y a la recta R, ya que la proyección horizontal i se encuentra al mismo tiempo en las dos proyecciones de las rectas, así también su proyección frontal i' se encuentra en la proyección frontal de la recta R' y de la recta $\overline{1'\ 2'}$, siendo por ello un punto común a la recta del espacio R y al plano del espacio P.

Otro problema será obtener la intersección de la recta R con el plano definido en el espacio por dos rectas que se cortan.

A manera de ejemplo, se ilustra el procedimiento para determinar la intersección entre el plano definido por las rectas L y M, que tienen el punto O común a ellas, y la recta R del espacio. (Véase figura II.147).

Después se obtiene la recta $\overline{1\ 2}$ que es la intersección del plano Q con el plano definido por las dos rectas L y M, lo cual es lo mismo que obtener una recta común a los dos planos, ya que la recta $\overline{1\ 2}$ está contenida en el plano Q, por tener su proyección frontal sobre la traza frontal de éste y además por pertenecer al plano definido por las rectas, puesto que dicha intersección tiene los puntos 1 y 2 sobre las rectas L y M.

Finalmente, se obtiene la intersección I del plano definido en la proyección horizontal por el cruce de la recta $\overline{1\ 2}$ y la recta R, con lo cual queda resuelto el problema.

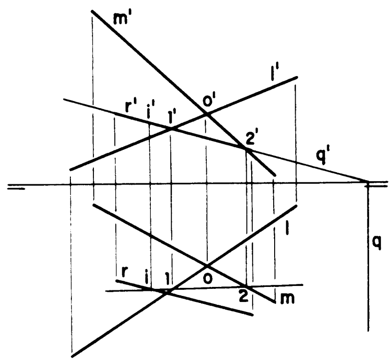


FIGURA II.147

Ahora se estudiará cómo determinar la intersección de la recta R con el plano triangular ABC. (Véase figura II.148).

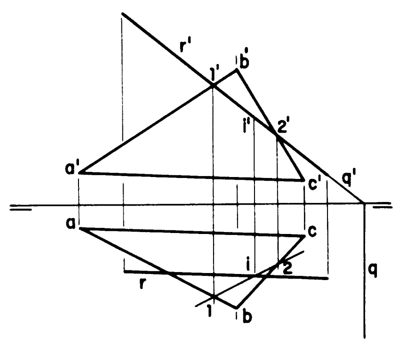


FIGURA II.148

Este problema se resuelve de la misma forma que el anterior. Lo primero es hacer pasar un plano Q que contenga a la recta R (en este caso un plano de canto). Después se obtiene la recta $\overline{1\ 2}$ de intersección entre los dos planos y finalmente el punto I de intersección entre la recta R y el plano ABC, el cual estará definido por el cruce de la recta $\overline{1\ 2}$ con la recta R.

VISIBILIDAD DE UN PLANO CON UNA RECTA

Existe *visibilidad* cuando los elementos del espacio frente al observador no tienen antepuesto otro elemento del espacio. Para cada caso es necesario definir si se está trabajando en el primer o segundo cuadrante, pues existen diferentes consideraciones para la visibilidad dependiendo en cuál de estos cuadrantes se tengan las proyecciones.

En el primer cuadrante:

Para la visibilidad en el plano horizontal de proyección, la posición del observador se considerará arriba de él y para la visibilidad en el plano frontal de proyección se considerará a la derecha, según se muestra en la figura II.149.

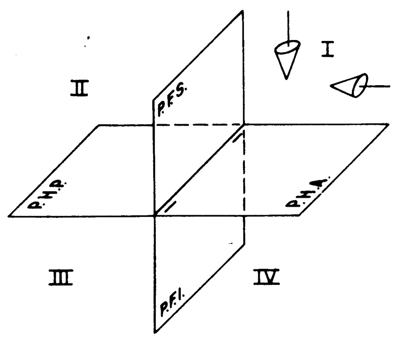


FIGURA II.149

Como se puede observar en la figura II.150, la recta vertical $\overline{AB}$ tiene su punto A por encima del B, por lo que en la proyección horizontal de la recta, el punto A es visible y el B es oculto. De aquí se concluye que para las proyecciones horizontales del primer cuadrante, los puntos de mayor cota son visibles sobre las de menor cota.

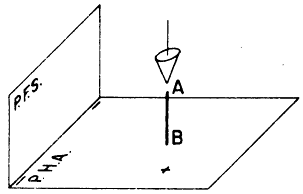


FIGURA II.150

Ahora bien, si se observa la recta $\overline{CD}$ de la figura II.151 se puede ver que el punto D queda enfrente del C, por lo que en la proyección frontal el punto D será visible y el C oculto. De esto se concluye que para las proyecciones frontales del primer cuadrante, los puntos de mayor alejamiento son visibles sobre los de menor alejamiento.

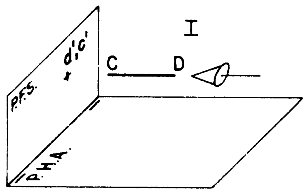


FIGURA II.151

En el tercer cuadrante:

Se sigue con la misma convención de la posición del observador que se utilizó para el primer cuadrante. En la figura II.152 se tiene una recta de punta $\overline{EF}$ y de acuerdo a la posición del observador, el punto F tapa al punto E, por lo que la proyección de F en el plano frontal (f') sería visible y la del punto E (e') sería oculta. De esto se deduce que en el tercer cuadrante, los puntos de menor alejamiento son visibles sobre los de mayor alejamiento.

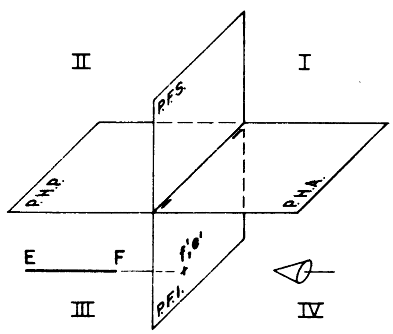


FIGURA II.152

En la figura II.153 se tiene una recta vertical $\overline{HI}$ y de acuerdo a la posición del observador, el punto H tapa al punto I, por lo que h sería visible y la proyección i sería oculta. De esto se puede deducir que en el tercer cuadrante para las proyecciones horizontales, los puntos de menor cota son visibles sobre los de mayor cota. Por ello se tiene que para el tercer cuadrante, la visibilidad considerada para los puntos es la opuesta a la del primer cuadrante.

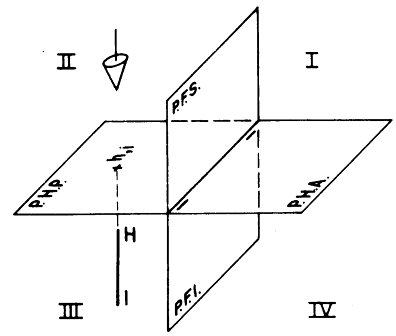


FIGURA II.153

Para ilustrar lo anterior se resolverá el siguiente ejemplo:

En la figura II.154 se tiene en montea el plano triangular ABC y la recta R; se quiere obtener la intersección y la visibilidad de éstos.

Lo primero es obtener el punto de intersección I del plano triangular ABC con la recta R, lo cual se realiza por medio del procedimiento descrito anteriormente. Conocido este punto, se procede a determinar para cada proyección la visibilidad de los elementos, de la siguiente manera:

Para indicar la visibilidad en la proyección frontal, se analiza el cruce de la recta $\overline{AB}$ con la recta R y con auxilio de las proyecciones 1' y 3' se puede observar que el punto 3 tiene mayor alejamiento que el 1, por lo cual la recta R está antes de la $\overline{AB}$ hasta llegar al punto I donde atraviesa el plano ABC y a partir de ahí es oculta.

Ahora, para indicar la visibilidad en la proyección horizontal se analiza el cruce de las rectas R y $\overline{AC}$ y con auxilio de las proyecciones 4 y 5 se observa que el punto 4 tiene mayor cota que el 5, por lo que la recta R será visible hasta llegar al punto I donde continúa por abajo del plano triangular.

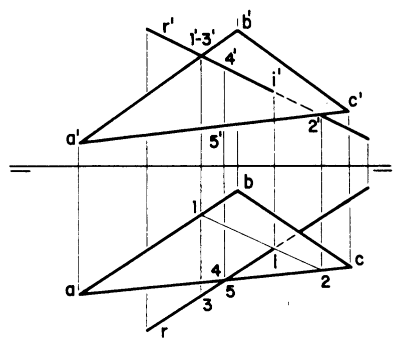


FIGURA II.154

Una variante de este problema es analizar el tercer cuadrante, pues como las consideraciones son las contrarias de las del primer cuadrante, la visibilidad quedaría como se indica en la figura II.155.

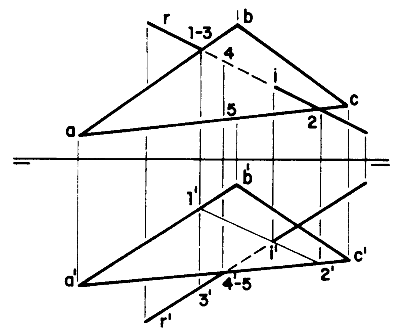


FIGURA II.155

La visibilidad de dos planos se determina haciendo las mismas consideraciones que para la recta con el plano, el problema se resuelve al obtener dos puntos de intersección de rectas contenidas en el primer plano con el segundo y como estos dos puntos son comunes a los dos planos, al unirlos queda definida la recta de intersección de los planos considerados.

Lo anterior se ilustra en la figura II.156 donde se tienen los triángulos ABC y EFG conocidos por sus proyecciones para los cuales se desea obtener su intersección y su visibilidad.

Utilizando el mismo procedimiento del ejemplo anterior, se obtiene el punto de intersección I de la recta $\overline{EF}$ con el triángulo ABC, después se determina otro punto común a los dos planos que esté contenido en otra recta del plano triangular EFG, en este caso la recta $\overline{EG}$, obteniéndose el punto de intersección I_1 con el plano ABC; después se unen los puntos I e I_1, quedando con ello definida la intersección entre los planos triangulares.

Finalmente, se indica la visibilidad en montea procediendo de manera similar que para el plano y la recta. En este caso la visibilidad de la recta $\overline{EF}$ en la proyección horizontal se determina con auxilio de las cotas de los puntos 1 y 2, en la proyección frontal, con auxilio de los alejamientos de los puntos 3 y 4, quedando así resuelto el problema.

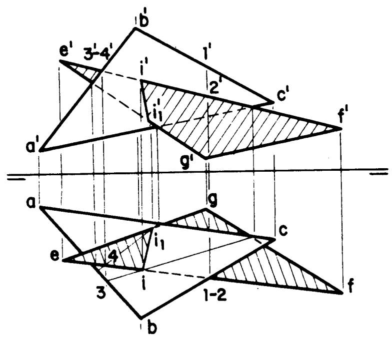


FIGURA II.156

Una variante de este problema sería resolverlo en el tercer cuadrante, puesto que quedaría invertida la visibilidad como se puede observar en la figura II.157.

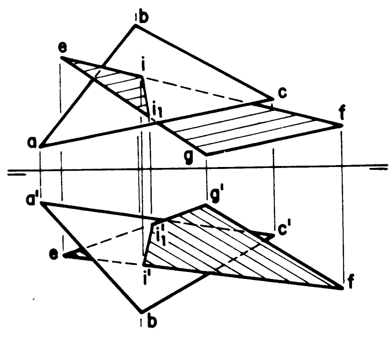


FIGURA II.157

II.5 PARALELISMO

Dos elementos del espacio son paralelos cuando no se cruzan ni se cortan, o sea que el ángulo que forman entre sí es nulo.

Cuando se tiene una recta y un plano del espacio, para determinar si estos elementos son paralelos bastará trazar una recta contenida en el plano con el mismo sentido de la primera, y si ésta es paralela a la recta del espacio, entonces la recta y el plano del espacio lo serán también.

En montea es fácil determinar si dos rectas del espacio son paralelas, ya que cuando esto sucede, sus proyecciones horizontales y sus proyecciones frontales lo son también. En la figura II.158 se tiene la montea de dos rectas $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ que son paralelas en el espacio, ya que sus proyecciones son paralelas también.

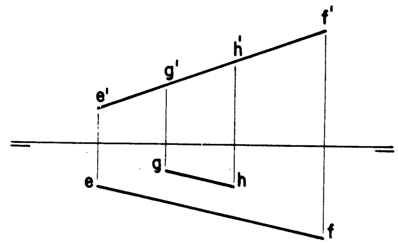


FIGURA II.158

En la figura II.159 se tiene otro ejemplo de rectas paralelas entre sí, esto se observa directamente, puesto que en ambas proyecciones se cumple el paralelismo.

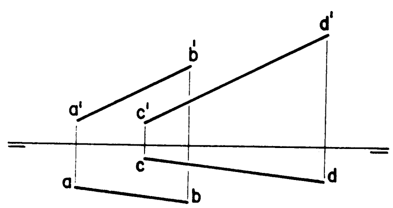


FIGURA II.159

En la figura II.160 se tiene en montea el plano triangular ABC y la recta R de los cuales se quiere determinar si son paralelos entre sí.

Para resolver este problema, se traza la recta $\overline{1\ 2}$ que está contenida en el plano triangular haciendo coincidir las proyecciones frontales de la recta R y la trazada; como las dos proyecciones horizontales de las rectas antes mencionadas son paralelas, entonces las dos rectas son paralelas en el espacio, por lo tanto el plano triangular ABC y la recta R del espacio lo serán también.

Si esta condición no se cumple, no habrá paralelismo entre ambos elementos.

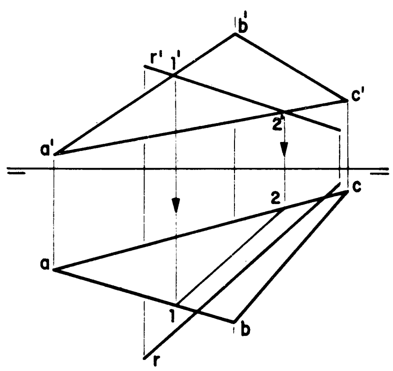


FIGURA II.160

II.6 PERPENDICULARIDAD

Dos elementos del espacio son perpendiculares entre sí (se crucen o se corten), cuando éstos forman un ángulo recto.

Esta perpendicularidad se observa en algunos casos directamente en las proyecciones, según sea la posición de los elementos en el espacio respecto de los planos de proyección.

La perpendicularidad se puede presentar:

1. Entre rectas
2. Entre rectas y planos
3. Entre planos

Algunos elementos del espacio, por su posición, presentan una perpendicularidad obligada y otros sólo pueden tener perpendicularidad ocasional. Esto se presenta en los tres casos mencionados.

A continuación se presentan algunos casos de perpendicularidad entre rectas, entre rectas y planos y, finalmente, entre planos.

CASOS DE PERPENDICULARIDAD OBLIGADA ENTRE RECTAS

a) Recta horizontal con recta vertical.

Esta perpendicularidad se observa directamente en la proyección frontal.

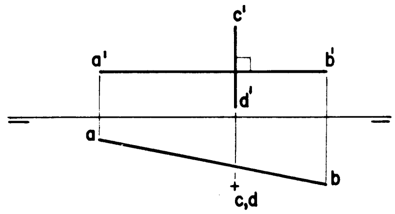


FIGURA II.161

b) Recta de punta con recta fronto-horizontal.

Esta perpendicularidad se observa en la proyección horizontal directamente.

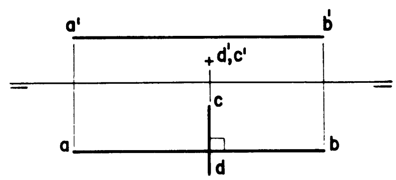


FIGURA II.162

c) Recta vertical y de punta.

En la proyección de perfil se observa directamente la perpendicularidad.

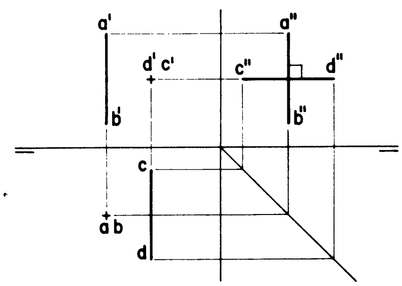


FIGURA II.163

d) Recta de perfil y fronto-horizontal.

Esta perpendicularidad se observa directamente, tanto en la proyección horizontal como en la frontal.

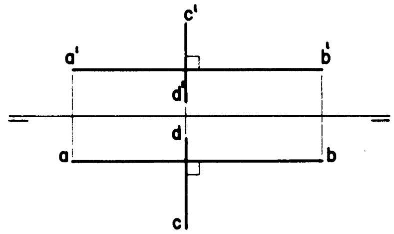


FIGURA II.164

e) Recta de punta con una frontal.

Esta perpendicularidad se observa directamente en la proyección horizontal.

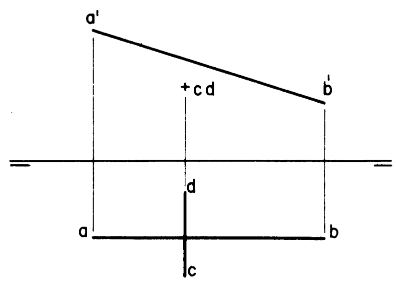


FIGURA II.165

f) Recta vertical con recta fronto-horizontal.

Esta perpendicularidad se observa directamente en la proyección frontal.

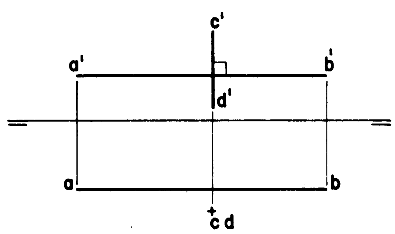


FIGURA II.166

CASOS DE PERPENDICULARIDAD OCASIONAL ENTRE RECTAS

a) Una recta frontal con otra frontal.

Esta perpendicularidad, cuando existe, se manifiesta directamente en la pro yección frontal.

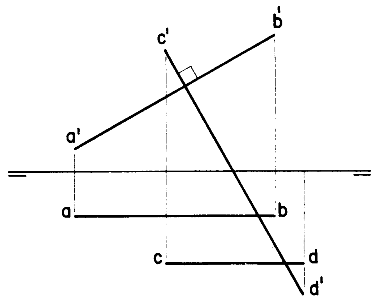


FIGURA II.167

b) Una recta frontal con una oblicua.

Esta perpendicularidad se observa en la proyección frontal.

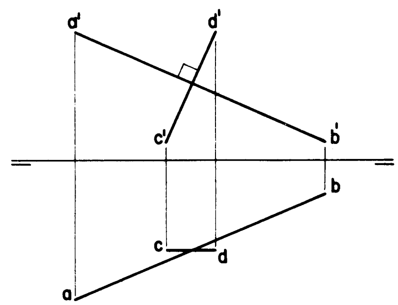


FIGURA II.168

c) Una recta de perfil y una oblicua.

En este caso es necesario obtener previamente la proyección de perfil para poder apreciar si existe perpendicularidad entre estos elementos.

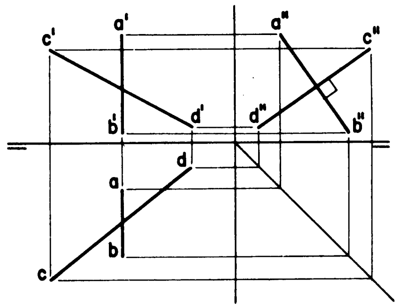


FIGURA II.169

d) Una recta oblicua y una horizontal.

Esta perpendicularidad se observa directamente en la proyección horizontal.

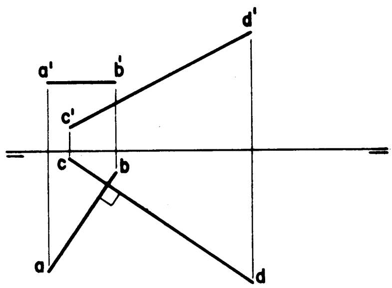


FIGURA II.170

e) Dos rectas del tipo horizontal.

Esta perpendicularidad se observa en la proyección horizontal.

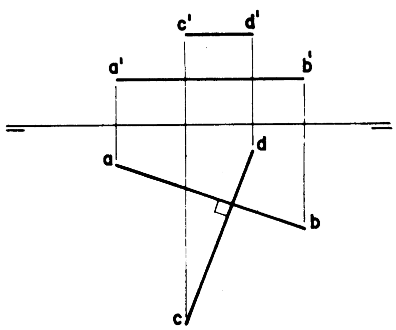


FIGURA II.171

f) Dos rectas de perfil.

En este caso se obtiene la proyección de perfil para determinar si las dos rectas son perpendiculares entre sí.

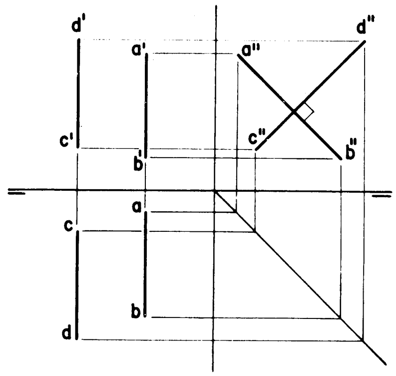


FIGURA II.172

g) Un caso particular de la perpendicularidad ocasional es el de dos rectas oblicuas que se cortan, pues en determinadas posiciones forman un ángulo recto entre sí; para ver si esto sucede, se tiene que aplicar el procedimiento ya visto de la obtención del ángulo que forman dos rectas. (Véase figura II.173).

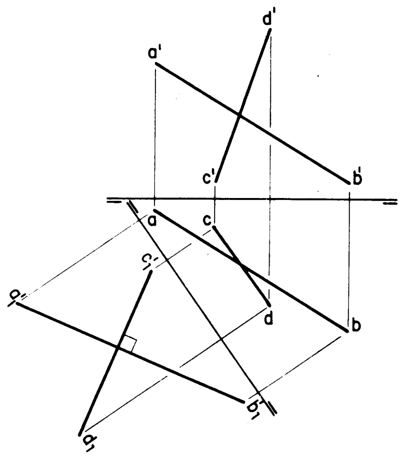


FIGURA II.173

CASOS DE PERPENDICULARIDAD OBLIGADA ENTRE RECTAS Y PLANOS

a) Un plano horizontal y una recta vertical.

Esta perpendicularidad se observa directamente en la proyección frontal.

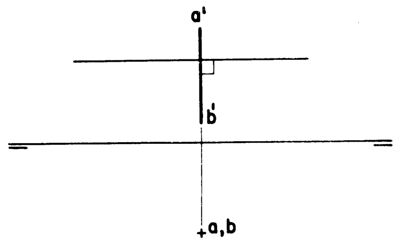


FIGURA II.174

b) Un plano frontal y una recta de punta.

Esta perpendicularidad se observa directamente en la proyección horizontal.

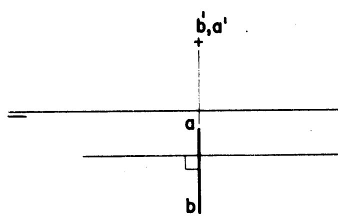


FIGURA II.175

c) Una recta fronto-horizontal con un plano de perfil.

Esta perpendicularidad se observa en la proyección horizontal y frontal.

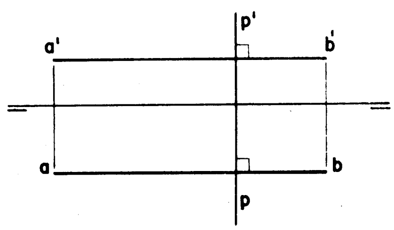


FIGURA II.176

CASOS DE PERPENDICULARIDAD OCASIONAL ENTRE RECTAS Y PLANOS

a) Un plano de canto y una recta frontal.

Estos elementos no siempre son perpendiculares; cuando esto sucede, se aprecia directamente en la proyección horizontal y en la frontal al mismo tiempo.

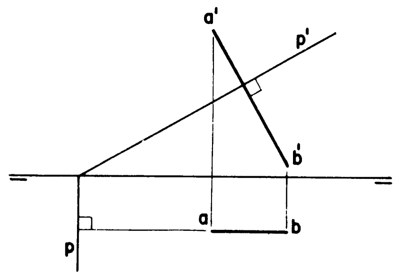


FIGURA II.177

b) Un plano vertical con una recta horizontal.

Cuando ocasionalmente estos elementos sean perpendiculares, la perpendicularidad se observará en las dos proyecciones.

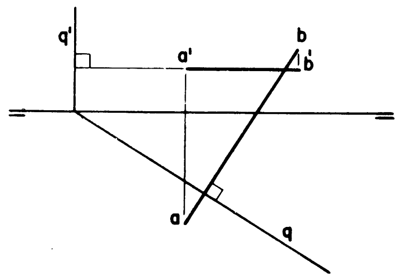


FIGURA II.178

c) Un plano paralelo a la línea de tierra y una recta de perfil.

En este caso la perpendicularidad es ocasional y se observa en la proyección de perfil, la cual se debe obtener previamente para comprobarlo, puesto que en algunas ocasiones se presenta en las proyecciones horizontal y frontal aparente perpendicularidad entre estos elementos.

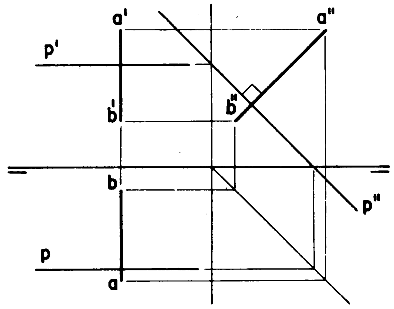


FIGURA II.179

d) Recta de perfil con un plano que pasa por la línea de tierra.

Esta perpendicularidad es ocasional y se puede verificar haciendo uso de la proyección de perfil.

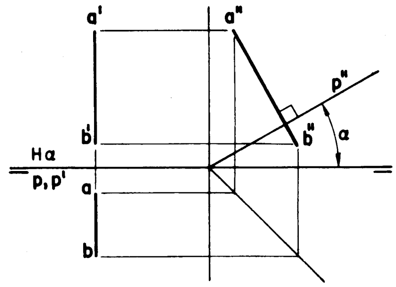


FIGURA II.180

Para que una recta sea perpendicular a un plano, ésta tiene que ser perpendicular al mismo tiempo cuando menos a dos rectas contenidas en dicho plano.

Cuando exista perpendicularidad entre una recta oblicua y una horizontal, dicha perpendicularidad se observará en la proyección horizontal, y cuando se presenta perpendicularidad entre una recta frontal y una oblicua, ésta se acusa en la proyección frontal. De acuerdo con esto puede analizarse la perpendicularidad entre una recta oblicua y un plano oblicuo, como se ilustra a continuación.

En la figura II.181 se tiene un plano oblicuo P y una recta oblicua R cuyas proyecciones son perpendiculares a las trazas del plano, y se quiere determinar si existe perpendicularidad entre el plano P y la recta R, para lo cual se procede de la siguiente manera:

Se traza una recta horizontal H y una frontal F contenidas en el plano P, las cuales se ilustran en la figura II.182, en la cual se observa que la recta R es perpendicular a la recta H y a la recta F, por lo que la recta R será perpendicular a dicho plano P. De acuerdo a esto se puede saber cuándo una recta oblicua es perpendicular a un plano oblicuo conocido por sus trazas, dado que la perpendicularidad se acusa directamente en la montea, tanto en la proyección frontal como en la horizontal, puesto que las proyecciones de la recta deben ser perpendiculares a las trazas del plano para que exista perpendicularidad.

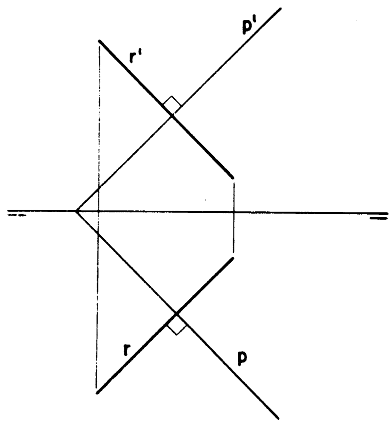


FIGURA II.181

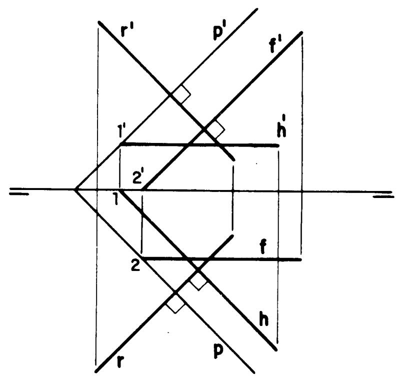


FIGURA II.182

CASOS DE PERPENDICULARIDAD OBLIGADA ENTRE PLANOS

a) Un plano horizontal y uno frontal.

Esta perpendicularidad se observa en la proyección de perfil directamente.

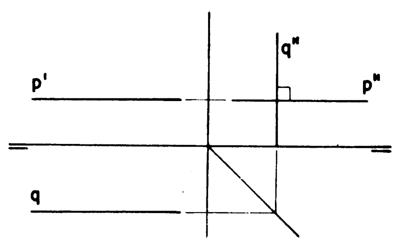


FIGURA II.183

b) Un plano horizontal con uno de perfil.

Esta perpendicularidad se observa directamente en la proyección frontal.

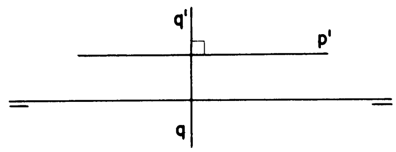


FIGURA II.184

c) Un plano frontal con un plano de perfil.

En este caso la perpendicularidad se observa en la proyección horizontal.

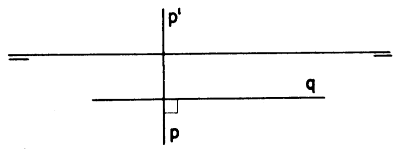


FIGURA II.185

d) Un plano de perfil con un plano paralelo a la línea de tierra.

Esta perpendicularidad se observa directamente en las proyecciones frontal y horizontal.

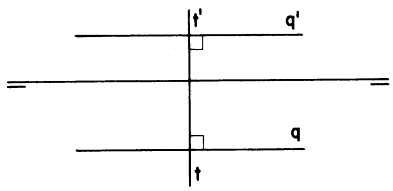


FIGURA II.186

e) Un plano de canto con uno frontal.

Esta perpendicularidad se observa directamente en la proyección horizontal.

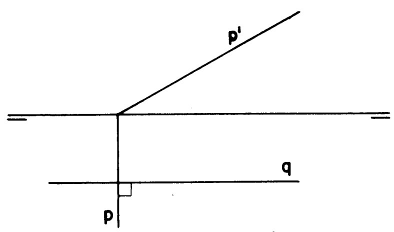


FIGURA II.187

f) Un plano vertical con uno horizontal.

Esta perpendicularidad se observa directamente en la proyección frontal.

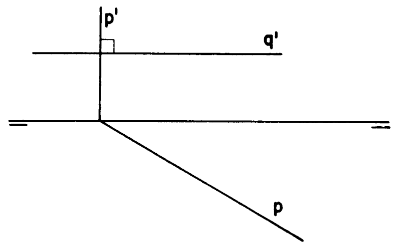


FIGURA II.188

CASOS DE PERPENDICULARIDAD OCASIONAL ENTRE PLANOS

a) Un plano paralelo a la línea de tierra con un plano que pasa por la línea de tierra.

Esta perpendicularidad se observa en la proyección de perfil.

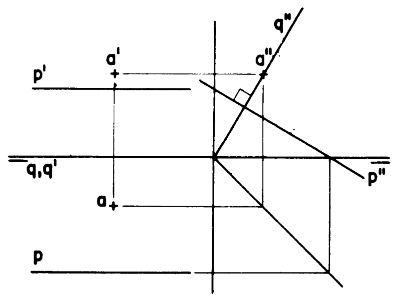


FIGURA II.189

b) Dos planos de canto.

Esta perpendicularidad se observa en la proyección frontal.

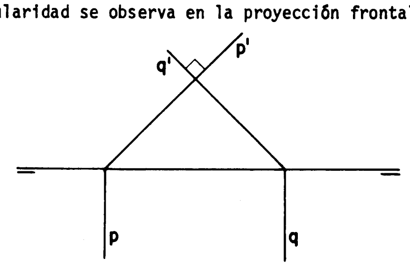


FIGURA II.190

c) Dos planos verticales.

Esta perpendicularidad se manifiesta directamente en la proyección horizontal.

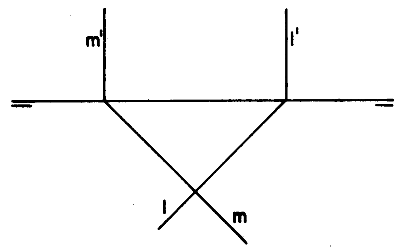


FIGURA II.191

d) Dos planos paralelos a la línea de tierra.

Esta perpendicularidad se observa en la proyección de perfil.

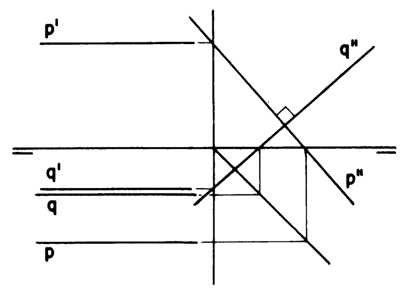


FIGURA II.192

e) Dos planos que pasan por la línea de tierra.

Esta perpendicularidad se manifiesta en la proyección de perfil.

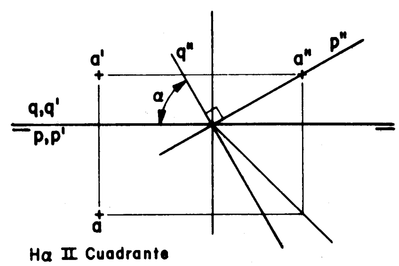


FIGURA II.193

Un caso de planos perpendiculares entre sí y que pasan por la línea de tierra, es el del primer bisector con el segundo bisector.

Dos planos oblicuos, en determinadas ocasiones, pueden ser perpendiculares entre sí y para comprobar si esto ocurre se procede a obtener el ángulo que forman dichos planos.

II.7 ANGULO MINIMO ENTRE RECTAS Y PLANOS

Para determinar el ángulo que forma una recta dada con un plano del espacio, se procede de la siguiente manera:

En la figura II.194 se tiene una recta R y un plano P; por un punto cualquiera A de la recta R se traza una perpendicular al plano P obteniendo así su proyección a sobre el plano, después se obtiene el punto de intersección de la recta con el plano, con lo cual queda trazado el triángulo rectángulo A a 1, de donde $\alpha + \beta = 90°$.

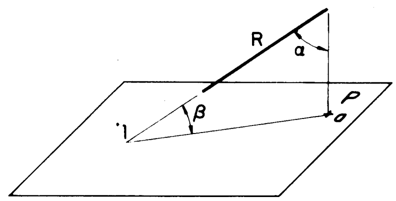


FIGURA II.194

En este caso β es el ángulo que forma la recta R con el plano P que en determinado momento es el que interesa conocer; sin embargo como α y β son ángulos complementarios, el problema se reduce a obtener el ángulo que la recta forma con una perpendicular al plano y que tenga un punto común con la recta R, en este caso, dicho punto es A; una vez conocido el ángulo α se puede obtener el ángulo β, puesto que $\beta = 90° - \alpha$.

Para ilustrar lo anterior, en la figura II.195 se tiene un plano ABC y la recta R, de los cuales se quiere obtener el ángulo que forman entre sí.

A partir del punto E que pertenece a la recta R se traza una recta perpendicular al plano definido por los puntos A, B y C, para lo cual es necesario trazar una recta horizontal $\overline{C2}$ y una frontal $\overline{A1}$ contenidas en el plano triangular y obtener una recta perpendicular a ambas, que a su vez corte a la recta R en el punto cualquiera E. En la montea la perpendicularidad se observa sobre la proyección a' 1' y sobre la c 2.

Sobre la perpendicular al plano ABC se toma un punto, en este caso el F, y otro contenido en la recta R, el G; uniendo los puntos G, E y F se forma el triángulo EFG, cuyo ángulo del vértice E es el que interesa conocer; por lo que mediante un doble cambio de planos se coloca el triángulo paralelo a uno de los planos de proyección, habiendo realizado lo anterior, se mide directamente el ángulo real α que forman las rectas $\overline{EG}$ y $\overline{EF}$, como el ángulo que forman la recta R del espacio con el plano ABC es el complemento de α, se determinará con $\beta = 90° - \alpha$, quedando así resuelto el problema. (Véase figura II.196).

Los puntos A, B y C que definen el plano, al unirse se pueden considerar como un plano geométrico triangular.

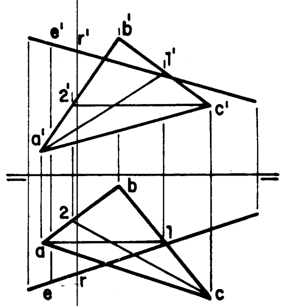


FIGURA II.195

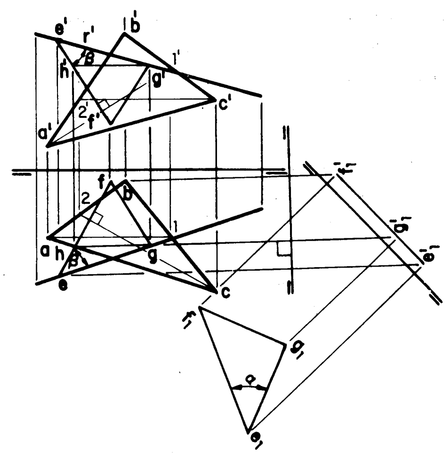


FIGURA II.196

II.8 INTERSECCION DE DOS PLANOS Y ANGULOS QUE FORMAN ENTRE SI

El procedimiento para obtener la intersección de dos planos mediante el uso de planos cortantes auxiliares, se describe a continuación.

En la figura II.197 se muestran los planos ABC y DEF definidos por tres puntos del espacio, de los cuales se quiere obtener su intersección y el ángulo que forman entre sí, para lo cual se procede de la siguiente manera:

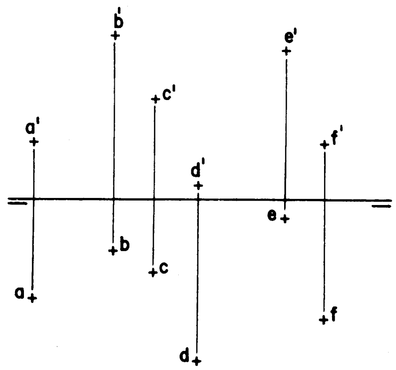


FIGURA II.197

Se unen los puntos correspondientes a cada plano, con lo cual se obtienen los planos definidos por los triángulos ABC y DEF. Después se obtienen dos puntos comunes a ambos planos, con los cuales quedará definida la recta de intersección entre dichos planos.

La intersección de dos planos es una recta común a ambos, por lo que si se conocen dos puntos comunes a los dos planos, al unirlos se obtendrá la recta de intersección entre los dos planos del espacio.

En la figura II.198 se muestra la forma como se unieron los puntos para obtener los dos triángulos.

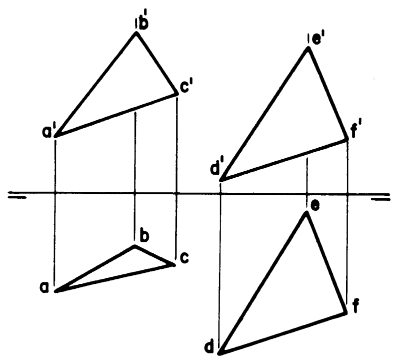


FIGURA II.198

Después se traza un plano cortante auxiliar del tipo horizontal H que corte a los dos triángulos en la proyección frontal, según los puntos 1, 2, 3 y 4, como se ilustra en la figura II.199. En seguida, se unen los puntos 1 y 2 quedando así trazada la recta $\overline{1\ 2}$, la cual está contenida tanto en el plano H como en el triangular ABC, esto es debido a que los puntos 1 y 2 están sobre los lados del triángulo y además pertenecen al plano H, ya que tienen la misma cota que éste.

Lo mismo sucede con la recta $\overline{3\ 4}$ que es común al plano triangular DEF y al plano H.

Como las rectas $\overline{1\ 2}$ y $\overline{3\ 4}$ están contenidas en el plano H al prolongarse se intersectan en un punto común a los dos planos triangulares, punto que es denominado con la letra I.

Se repite la operación con otro plano auxiliar horizontal H_1 y se obtienen las rectas $\overline{5\ 6}$ y $\overline{7\ 8}$, comunes a los triángulos y al plano H_1, con las cuales se determina el punto J, común a dichos planos triangulares.

Ya conocidos los puntos I y J comunes a los dos planos, se unen para obtener la recta de intersección $\overline{IJ}$ entre los planos triangulares.

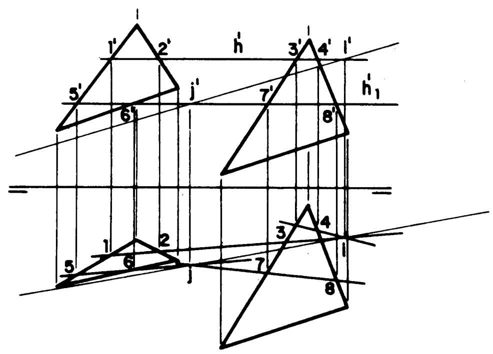


FIGURA II.199

El problema anterior también se puede resolver trazando planos cortantes auxiliares de tipo frontal, procediendo de manera semejante.

Con el mismo procedimiento se puede obtener la intersección de dos planos limitados, como son los triángulos ABC y EFG mostrados en la figura II.200, para lo cual se procede de la siguiente manera.

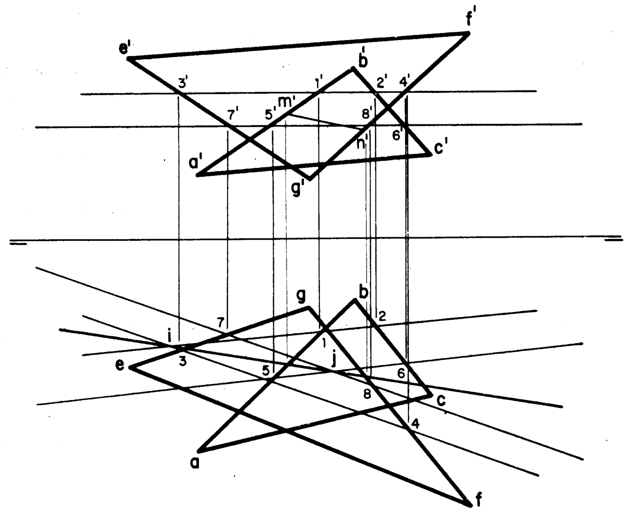


FIGURA II.200

Con ayuda de los planos cortantes auxiliares H y H_1 del tipo horizontal, se determina la recta $\overline{IJ}$, a partir de la cual se obtiene la recta de intersección $\overline{MN}$ entre los planos triangulares.

Finalmente, con el procedimiento respectivo se indica la visibilidad, quedando los trazos como se muestran en la figura II.201.

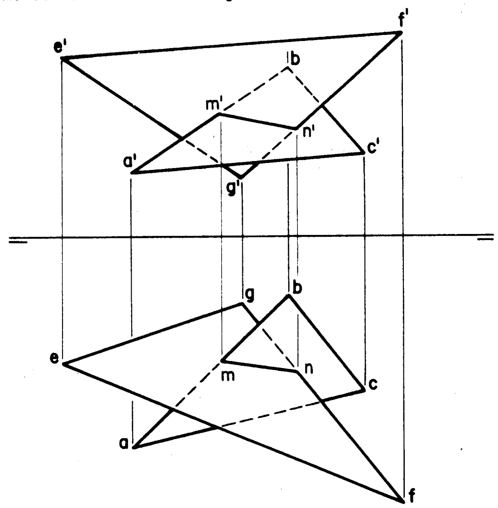


FIGURA II.201

II.9 GENERACION DE SUPERFICIES E INTERSECCIONES Y DESARROLLOS

En este tema se estudiarán las secciones de corte que son las intersecciones, así como el desarrollo de cuerpos geométricos del espacio, para lo cual es necesario conocer los elementos que dan origen a dichos cuerpos.

II.9.1 CONCEPTO DE GENERATRIZ

Una superficie es generada por el movimiento de una línea que se desplaza en el espacio paralelamente a sí misma, apoyada en otras dos líneas que pueden ser *rectas o curvas*.

A la línea que se desplaza se le conoce con el nombre de *generatriz*, y al elemento sobre el cual ésta se apoya se le llama *directriz*.

SUPERFICIES DE GENERACION CILINDRICA

Cuando las directrices son rectas paralelas entre sí o que se cortan, se generan planos que dan origen a figuras geométricas como los prismas. Cuando las directrices son curvas, se generan superficies cilíndricas como los cilindros.

SUPERFICIES DE GENERACION CONICA

Si una de las directrices rectas se reduce a un punto, se generan planos que dan origen a figuras geométricas como las pirámides.

Y si una de las directrices curvas se reduce a un punto, se generan superficies cónicas como los conos.

En la figura II.202 se tiene un ejemplo de la generación de una superficie cilíndrica con una recta generatriz, apoyada en las rectas R y L paralelas entre sí; cuando la generatriz se desplaza paralela a sí misma hasta la posición 3 4 se genera la superficie cilíndrica limitada, representada en la montea por el plano 1 2 3 4.

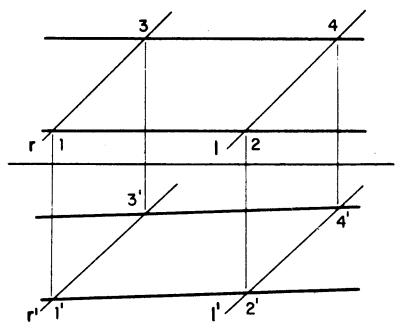


FIGURA II.202

En la figura II.203 se tienen las líneas curvas (directrices) D y E y la recta generatriz $\overline{1\ 2}$, la cual apoyada en las citadas directrices, se traslada paralela a sí misma, hasta llegar a la posición 3 4, quedando así generada la superficie cilíndrica limitada en la montea por los puntos 1, 2, 3 y 4.

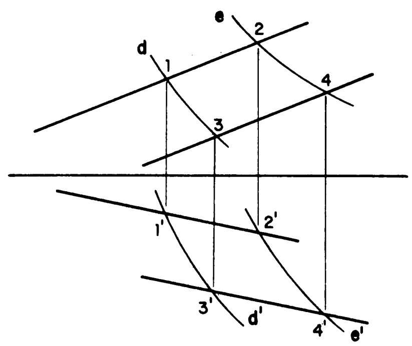


FIGURA II.203

En la figura II.204 se tienen el punto A y la recta directriz R, en los cuales se apoya la generatriz L, desplazándose hasta ocupar la posición de la recta S, quedando así generada la superficie triangular limitada en la montea por los puntos A, 1 y 2.

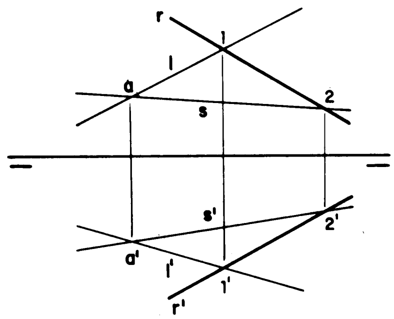


FIGURA II.204

En la figura II.205 se tienen en montea el punto C y la línea curva D que serán las directrices en que se apoya la recta generatriz F, para desplazarse hasta la posición de la recta G, generándose la superficie cónica 1 C 2, siempre y cuando el punto C esté fuera del plano definido por la línea curva.

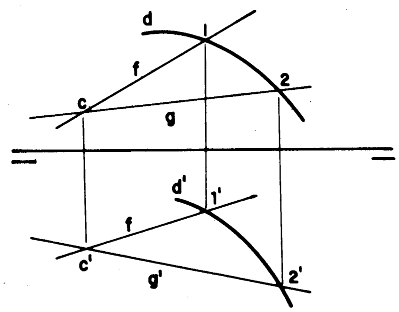


FIGURA II.205

II.9.2 INTERSECCION DE SUPERFICIES CON SOLIDOS

La determinación de la intersección de superficies con sólidos, se puede hacer por medio del método de planos auxiliares o con auxilio de las generatrices.

En la figura II.206 se tiene un prisma de base FHJI cortado por un plano P del espacio. Como se puede observar, la posición del plano secante es perpendicular al plano de perfil, por lo que se puede encontrar la intersección con el prisma directamente haciendo uso de sus generatrices, pues en las proyecciones de perfil se acusa directamente la intersección de la arista (generatriz) $\overline{EF}$ en el punto D y también la de los puntos C, B y A, los cuales al unirse en la proyección frontal definen la intersección. En este caso la proyección horizontal no es necesaria, ya que por ser las aristas (generatrices) perpendiculares al plano horizontal de proyección la intersección se confunde con la sección del prisma.

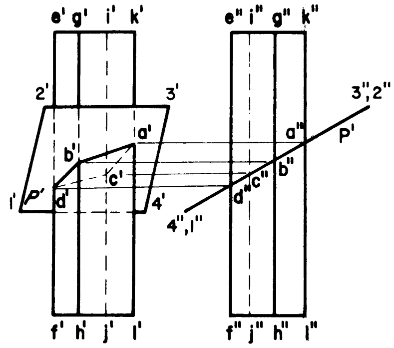


FIGURA II.206

Cuando el plano secante no es perpendicular a ninguno de los planos de proyección, se hace uso de un plano auxiliar para obtener la intersección, el cual debe ser perpendicular al plano secante que corta el prisma.

Para ilustrar lo anterior, se determinará la intersección del plano ABCD y el prisma representados por sus proyecciones en la figura II.207.

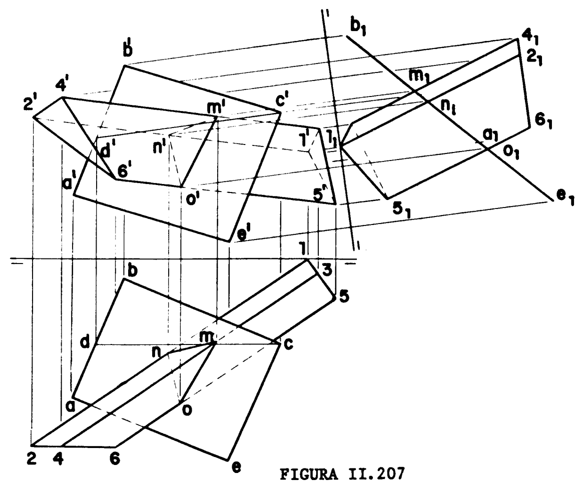


FIGURA II.207

Como en este caso el plano secante no es perpendicular a ninguno de los planos de proyección, se hace uso de un plano auxiliar perpendicular al plano secante, por lo que es necesario trazar la recta frontal $\overline{CD}$ y colocar la nueva línea de tierra perpendicular a su proyección frontal c'd'.

Después se obtienen las proyecciones horizontales en la nueva montea, sobre las que se pueden determinar los puntos de intersección de las generatrices del prisma con el plano (puntos M, N y O), las cuales se proyectan sobre la montea original para así obtener el triángulo MNO que es la intersección entre el prisma y el plano secante.

El problema anterior también se puede resolver mediante el uso de planos cortantes, como se indica a continuación:

Primero se hace pasar un plano de canto que contenga a la arista $\overline{1\ 2}$ del prisma triangular, con lo que se obtiene la recta $\overline{9\ 10}$ del plano ABCE, la cual al igual que la recta $\overline{1\ 2}$ está contenida en el plano de canto, por lo tanto, al cortarse dichas rectas en el punto M dan lugar a un punto común de la arista $\overline{1\ 2}$ y al plano ABCE.

Después se hace pasar otro plano de canto que contenga a la arista $\overline{3\ 4}$ y de manera semejante se obtiene el punto de intersección N.

Finalmente con otro plano de canto que contenga a la arista $\overline{5\ 6}$ se obtiene el punto O de intersección entre el plano ABCE y el prisma.

Una vez obtenidos los puntos de intersección M, N y O se unen, con lo que se obtiene el triángulo MNO, que corresponde a la intersección que soluciona el problema. (Véase figura II.208).

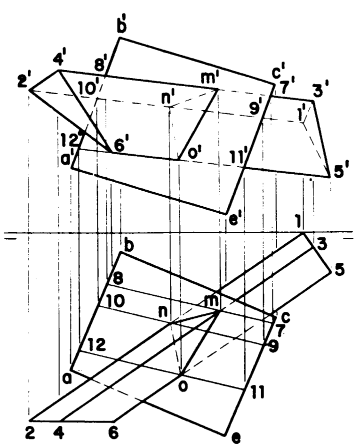


FIGURA II.208

II.9.3 INTERSECCION ENTRE SOLIDOS

Para ilustrar la manera de obtener la sección de corte entre sólidos, se presentan dos procedimientos; uno de ellos aplicable cuando las generatrices de los sólidos son perpendiculares entre sí y el otro cuando no lo son.

En la figura II.209 se tienen dos cilindros en una posición tal, que sus generatrices son perpendiculares entre sí y se quiere obtener la curva de intersección entre los dos cilindros, por medio del procedimiento de la intersección de generatrices.

PROCEDIMIENTO

Se determina la proyección frontal de la generatriz del cilindro vertical que corta a la generatriz $\overline{CD}$ del cilindro horizontal en el punto 4, el cual es un punto de la curva de intersección y, de manera similar, se obtiene una serie de puntos que al unirse definen la curva de intersección que resuelve el problema.

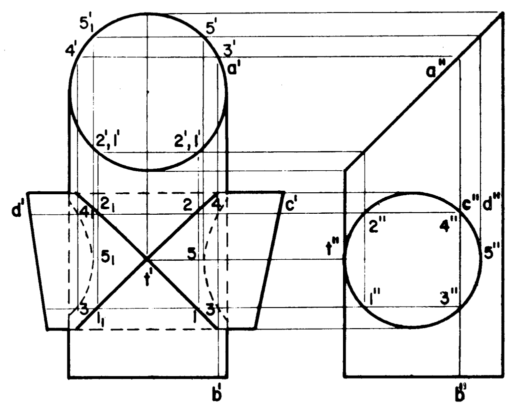


FIGURA II.209

En la figura II.210 se tienen dos prismas de sección triangular, de los cuales se quiere obtener su intersección.

Para resolver este problema se hace uso de dos planos auxiliares, con el fin de colocar una de las generatrices perpendicular a alguno de los planos de proyección.

Se coloca el primer plano auxiliar de tal forma, que la nueva línea de tierra quede paralela a las proyecciones frontales de las aristas $\overline{DA}$, $\overline{CF}$ y $\overline{BE}$ y se obtienen las nuevas proyecciones horizontales.

Después, se coloca el segundo plano auxiliar perpendicular a las aristas $\overline{DA}$, $\overline{CF}$ y $\overline{BE}$ y se obtienen las nuevas proyecciones frontales.

Una vez obtenidas las nuevas proyecciones se trazan las generatrices l, m, n, q, r y s, cuyas nuevas proyecciones frontales contengan a las proyecciones de los puntos A, B, C, D, E y F. De estas generatrices se determinan sus respectivas proyecciones y con ellas los puntos de intersección 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 y 15 que al ser unidos definen las secciones de corte 13 14 15 y 8 9 10 11 12 13; con lo cual el problema queda resuelto.

Finalmente se obtiene la visibilidad con el procedimiento explicado anteriormente.

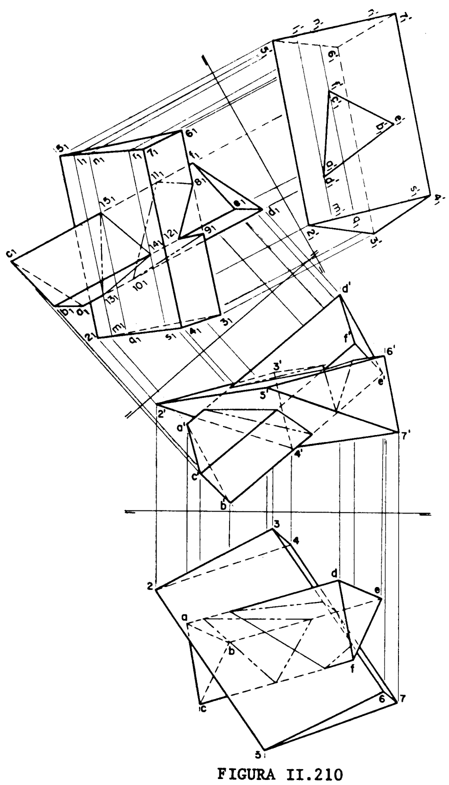


FIGURA II.210

En la figura II.211 se tienen dos cilindros de base paralela al plano horizontal de proyección, cuyas generatrices son rectas oblicuas y se quiere determinar la curva de intersección entre ellos, para lo cual se procede de la siguiente manera:

Por un punto cualquiera Q se hacen pasar rectas paralelas a las proyecciones de las generatrices de ambos cilindros hasta cortar al plano horizontal en los puntos 1 y 4; después se obtienen las proyecciones horizontales de estos puntos y se unen para obtener la recta $\overline{EF}$, que será la traza horizontal del plano del espacio paralelo a las generatrices de los cilindros.

Posteriormente en la proyección horizontal se hacen pasar rectas paralelas a la traza $\overline{EF}$, a partir de los puntos de intersección entre éstas y las circunferencias de las bases rectas de los cilindros, se trazan las directrices; estas últimas al cortarse definen puntos de las curvas de intersección.

Finalmente se unen los puntos obtenidos en el paso anterior y se marca la visibilidad según corresponda.

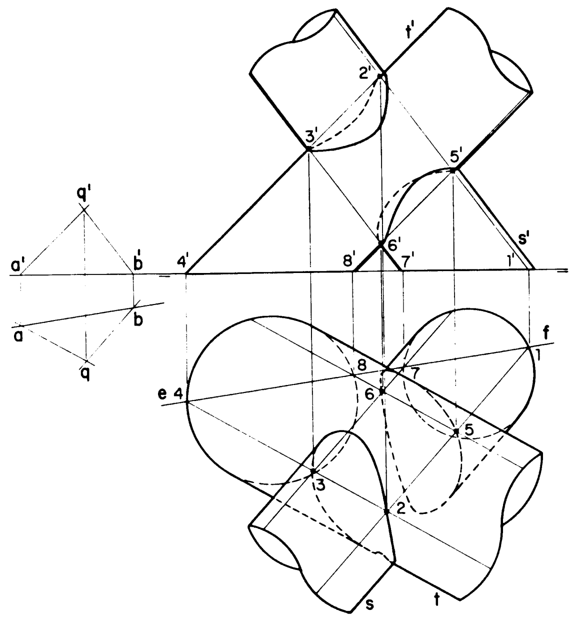


FIGURA II.211

En la figura II.212 se tienen una esfera de centro O y un plano secante definido por los puntos A, B y C, de los cuales se quiere determinar la sección de corte.

Para obtener la curva de intersección, primero se transforma el plano definido por los puntos A, B y C en un plano de tipo vertical; antes se unen los puntos A, B y C, con lo que se define el plano triangular ABC. Posteriormente se traza la recta frontal $\overline{A\,1}$ contenida en el plano ABC y perpendicular a esta recta, una nueva línea de tierra.

En seguida se obtienen las nuevas proyecciones horizontales en las cuales el plano queda confundido en una recta, o sea que se transforma en un plano vertical y la esfera queda representada en la nueva proyección con su mismo diámetro.

En la última proyección se observa que el plano vertical corta a la esfera según la recta $\overline{3\,2}$, y además que la sección de corte es una circunferencia.

Una vez realizado lo anterior, se proyectan los puntos 2 y 3 sobre el diámetro $\overline{EF}$, obteniéndose así las proyecciones $2'$ y $3'$.

Obsérvese que en la proyección frontal la sección de corte aparece como una elipse, cuyo eje menor es la proyección $2'\,3'$; esto se debe a que esta sección no es paralela al plano frontal.

Ahora bien, para obtener el eje mayor se traza en la nueva proyección horizontal a partir del punto O una perpendicular al plano definido por los puntos A, B y C, con lo cual se obtiene el punto 4 que corresponde al centro de la elipse.

El semieje mayor tendrá la medida de la proyección $4''\,2''$, que trazada sobre la recta perpendicular a la proyección frontal $e'f'$ dará la proyección $2_1'\,3_1'$, la cual será eje mayor.

Conocidos los ejes de la elipse, se traza la proyección frontal de la intersección de la esfera y el plano secante ABC.

Ahora bien, el punto de tangencia de la esfera con la elipse (en sus proyecciones) se obtiene trazando en la proyección del plano auxiliar, el ecuador $\overline{EF}$ paralelo a la línea de tierra que corta al plano ABC en el punto G y al otro extremo en el punto H; llevando estos puntos a las otras dos proyecciones, se obtienen los puntos de tangencia buscados.

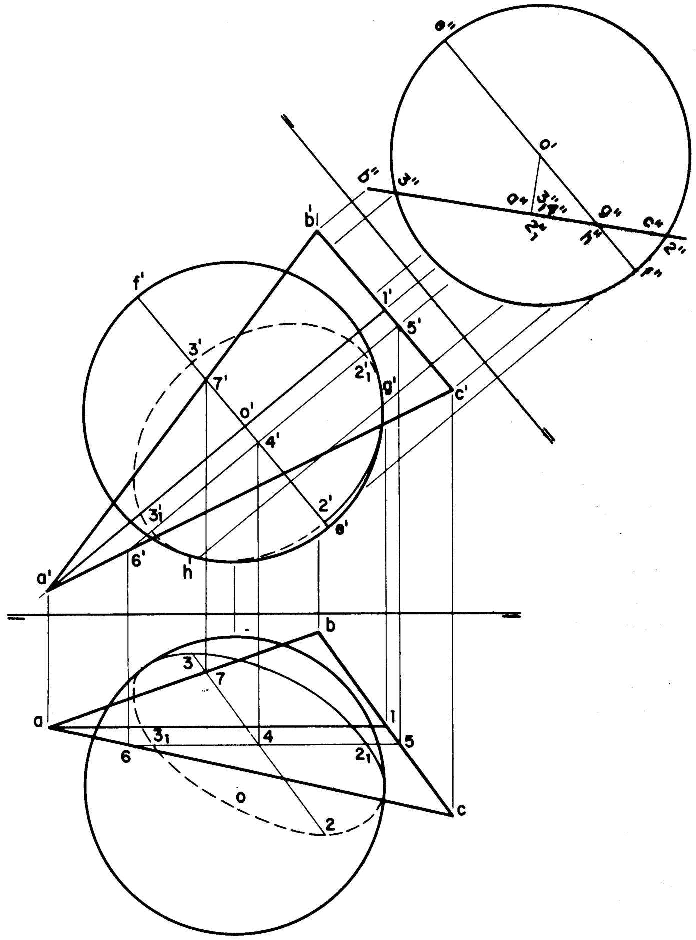


FIGURA II.212

II.9.4 DESARROLLO DE CUERPOS GEOMETRICOS Y PIEZAS DE TRANSICION, FORMADAS POR SUPERFICIES LAMINARES.

Un desarrollo es la colocación en un solo plano de todas las superficies que forman un sólido del espacio, por lo tanto, éstas siempre estarán en magnitud real.

Debido a que las superficies sólo tienen dos dimensiones pueden ser generadas por una línea del espacio que se mueve de acuerdo a ciertas leyes, siendo esta línea la generatriz y las leyes que rigen el movimiento las directrices.

Las superficies se pueden clasificar en:

a) Irregulares

b) Regladas

c) De revolución

d) De generación determinada

Las superficies irregulares son aquellas en que su generación no se sujeta a leyes geométricas determinadas; entre ellas se consideran las superficies topográficas.

Este tipo de superficies se estudia en lás proyecciones monoédricas, ya que por su condición, no se puede estudiar en proyecciones diédricas. Sin embargo, se pueden obtener proyecciones verticales haciendo tantos cortes como sean necesarios.

Las superficies regladas se subdividen en desarrollables y no desarrollables; además de acuerdo a su generación, pueden ser cilíndricas o cónicas.

En el siguiente cuadro se presenta la clasificación de las superficies desarrollables.

- SUPERFICIES
  - CONICAS
    - PIRAMIDE
    - CONO (Cerrado o abierto)
  - CILINDRICAS
    - CILINDRO (Cerrado o abierto)
    - PRISMA

Una superficie es desarrollable cuando dos de sus generatrices infinitamente próximas definen la posición de un plano, y esto únicamente sucede cuando las generatrices son paralelas o bien cuando son concurrentes en un punto.

Esto se puede observar en la figura II.213, ya que cuando los puntos A y B están infinitamente próximos, su distancia es diferencial, por lo tanto:

$$tg\alpha = y'/x'$$

$$tg\alpha = dy'/dx'$$

y en estas condiciones la cuerda $\overline{AB}$ y la tangente en A se confunden; esto sucede en un cilindro, por lo que su desarrollo se hace por medio de una sucesión de planos definidos por generatrices infinitamente cercanas.

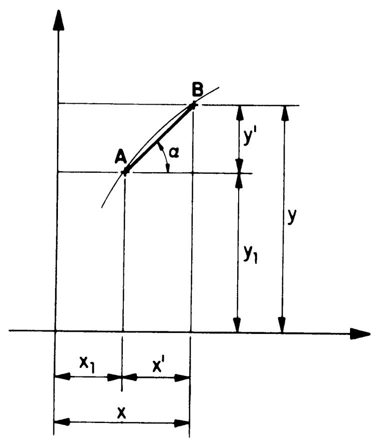


FIGURA II.213

En general, el desarrollo de un cilindro es un rectángulo, excepto cuando la altura de su generatriz sea igual al perímetro del círculo, en cuyo caso será un cuadrado.

Para obtener el desarrollo de un cilindro es necesario obtener primero la longitud lineal de la circunferencia, lo cual se puede hacer gráficamente o a partir de la fórmula matemática del perímetro del círculo.

$$p = 3.14\ d$$

$$p = 3d + 0.14\ d$$

y además como 0.14 es prácticamente 1/7, se obtiene la siguiente expresión:

$$p = 3d + 1/7\ d$$

Para ilustrar lo anterior en la figura II.214 se tienen las proyecciones de un cilindro, donde h representa la longitud de su generatriz y d el diámetro de su sección.

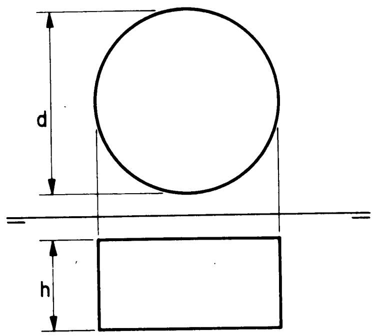


FIGURA II.214

Para realizar el desarrollo de este cilindro, se obtiene el rectángulo de altura h que tiene por base la recta $\overline{AB}$, cuya magnitud se obtuvo aplicando la expresión simplificada del perímetro. Después se trazan dos circunferencias de diámetro d, tangentes tanto a la base inferior como a la superior del cilindro, con lo cual queda resuelto el problema. (Véase figura II.215).

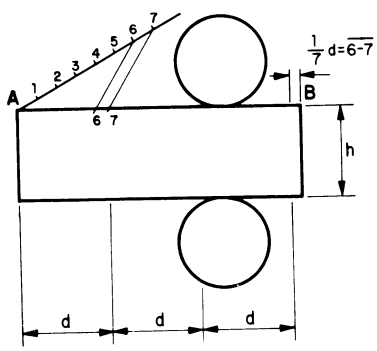


FIGURA II.215

DESARROLLO DE UN CILINDRO TRUNCADO

En la figura II.216 se tienen las proyecciones de un cilindro truncado por un plano de canto, con una generatriz máxima h y una mínima h_1. Para el desarrollo de este cilindro se procede de la siguiente manera:

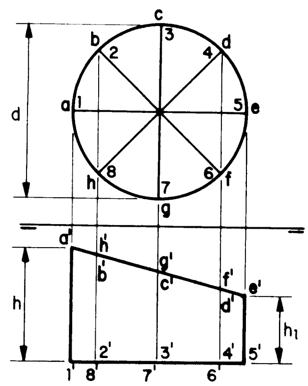


FIGURA II.216

El desarrollo se hace como si el cilindro no estuviera truncado con una generatriz h, obteniéndose el rectángulo ABCD, como se muestra en la figura II.217. En la parte inferior del rectángulo 1 A A 1 se coloca tangente la circunferencia de radio $\overline{0\ a}$ que corresponde a la base del cilindro.

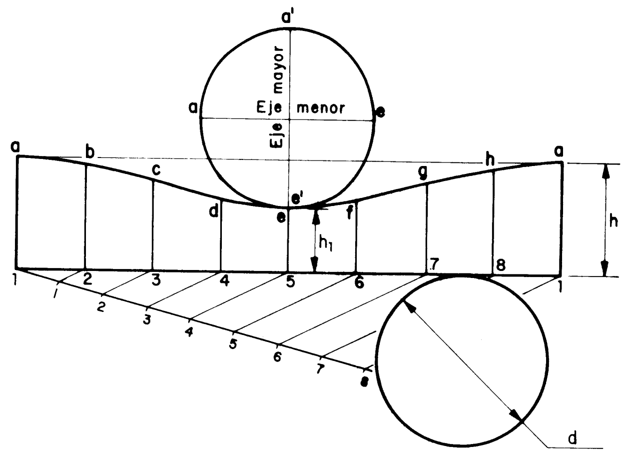


FIGURA II.217

Posteriormente se divide la circunferencia de la proyección horizontal en partes iguales (entre más divisiones se hagan, más puntos se tendrán de la curva del desarrollo y más exacto será éste); para este caso se divide en ocho partes, indicando en cada una de las divisiones las correspondientes alturas de las generatrices, las cuales son: $\overline{b2}$, $\overline{c3}$, $\overline{d4}$, $\overline{e5}$, $\overline{f6}$, $\overline{g7}$ y $\overline{h8}$.

En el rectángulo del desarrollo, la base $\overline{aa}$ es dividida también en ocho partes; se trazan en cada una de las divisiones las correspondientes alturas de las generatrices, y se unen sus extremos con segmentos curvos, obteniéndose la curva a b c d e f g h a.

La sección de corte del cilindro es una elipse de eje mayor a' e' y eje menor igual al diámetro de la sección recta del cilindro. Esta sección de corte al trazarse tangente a la línea curva obtenida anteriormente, complementa el desarrollo.

DESARROLLO DE UN PRISMA DE SECCION HEXAGONAL

En la figura II.218 se tiene en montea la representación de un prisma de sección hexagonal. Su desarrollo se obtiene colocando el perímetro de la base del prisma, según las letras A, B, C, D, E, F y A como se muestra en la figura II.219, en la cual se tiene el rectángulo de altura h que es la altura del prisma.

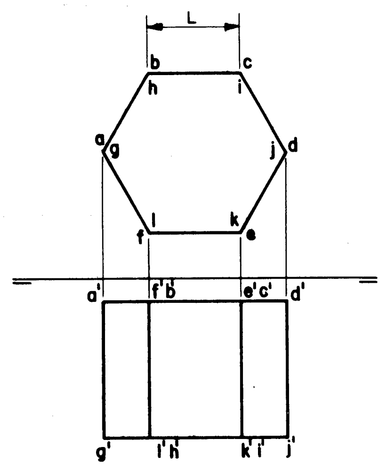


FIGURA II.218

Cada rectángulo del desarrollo tendrá como base el lado L del hexágono y altura h, siendo seis caras rectangulares en total y todas unidas por las aristas, de tal manera que haciendo el doblez correspondiente en cada arista se puede reconstruir el sólido en el espacio.

Finalmente en la parte superior e inferior sobre cualquier lado del prisma desarrollado, se colocan los hexágonos que representan la base superior y la base inferior, quedando en esta forma trazado el desarrollo.

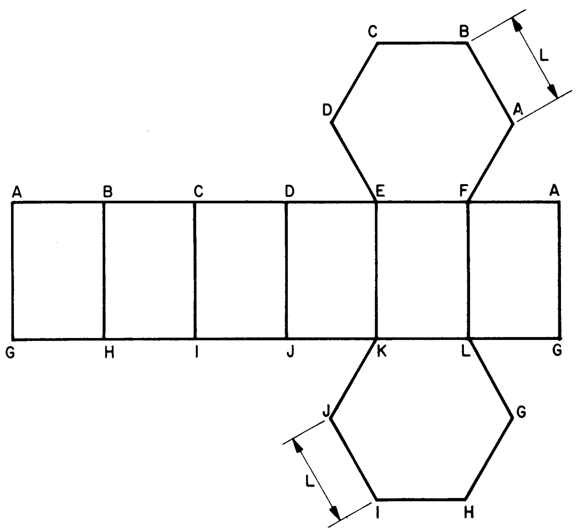


FIGURA II.219

DESARROLLO DE UN PRISMA IRREGULAR DE SECCIONES OBLICUAS

En la figura II.220 se ilustra las proyecciones de un prisma irregular de secciones oblicuas al eje longitudinal.

El desarrollo se hace como si el prisma no estuviera cortado, es decir, que fuera de secciones rectas con una arista igual a la mayor del prisma, en este caso la arista $\overline{AH}$. Como el prisma tiene secciones irregulares no paralelas, es necesario obtener su proyección en un plano auxiliar perpendicular a sus aristas, para con ello determinar la magnitud real de la sección E_1 F_1 G_1 H_1; con estas magnitudes se traza el desarrollo del prisma.

Después para obtener la verdadera posición y magnitud de la arista $\overline{DE}$, se procede de la siguiente manera: a partir del punto 1 se obtiene la magnitud real de $\overline{1\,D}$ y se indica sobre la arista $\overline{1\,E_1}$ del desarrollo, con lo cual se determina la posición del punto D. Posteriormente se obtiene la magnitud real de la recta $\overline{D\,E}$ y se traza en el desarrollo a partir del punto D. Para definir las aristas faltantes se procede de manera semejante.

Las secciones ABDC y EFHG se trazan en magnitud real sobre el desarrollo mediante una triangulación, auxiliándose de las diagonales $\overline{FG}$ y $\overline{BC}$ respectivamente.

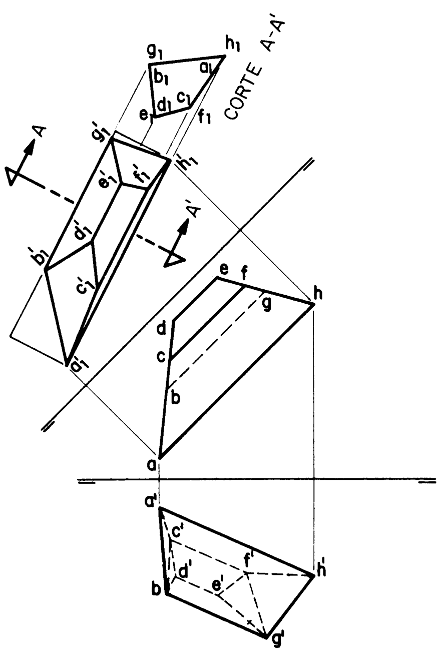


FIGURA II.220

Las magnitudes reales de las aristas de ambos cuadriláteros están representadas en el desarrollo por las rectas $\overline{EG}$, $\overline{GH}$, $\overline{HF}$ y $\overline{FE}$ para una sección y $\overline{BD}$, $\overline{BA}$, $\overline{AC}$, $\overline{CD}$ para la otra, como se muestra en la figura II.221.

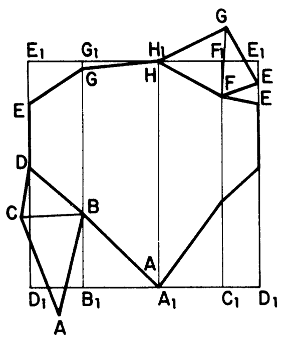


FIGURA II.221

Los desarrollos presentados anteriormente se han obtenido por el procedimiento de *líneas paralelas*. A continuación se resolverán algunos ejemplos por el procedimiento llamado de *líneas radiales*.

DESARROLLO DE UNA PIRAMIDE

En la figura II.222 se tiene la representación en montea de una pirámide de base rectangular y se quiere obtener su desarrollo, para lo cual existen dos formas:

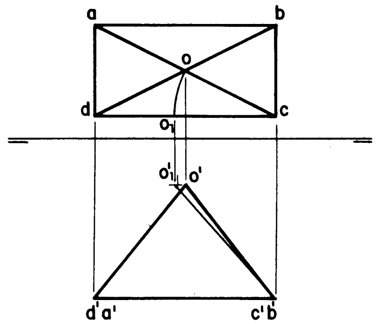


FIGURA II.222

Para la primera es necesario obtener la magnitud real de la arista que converge al vértice O; tomando esta medida como radio se traza el arco $\overline{EF}$ y se marca sobre éste un punto cualquiera A y, a partir de él se trazan las cuerdas $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{DA}$ que corresponden a los lados de la base rectangular de la pirámide. Después se unen los extremos de las cuerdas con el punto O, quedando así el desarrollo de las caras laterales de la pirámide.

Finalmente en uno de los lados, en este caso el $\overline{CD}$, se traza el rectángulo C D A B que corresponde a la base de la pirámide. (Véase figura II.223).

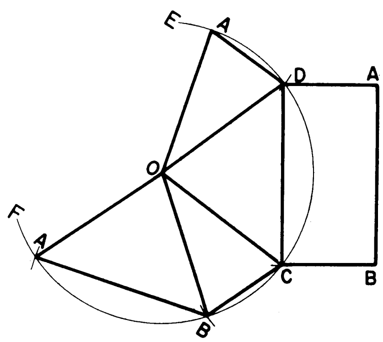


FIGURA II.223

Para la segunda, se obtiene el desarrollo trazando sobre los lados de la base los triángulos que conforman la pirámide, con lo cual queda completo el desarrollo. Estos triángulos deberán estar en magnitud real. (Véase figura II.224).

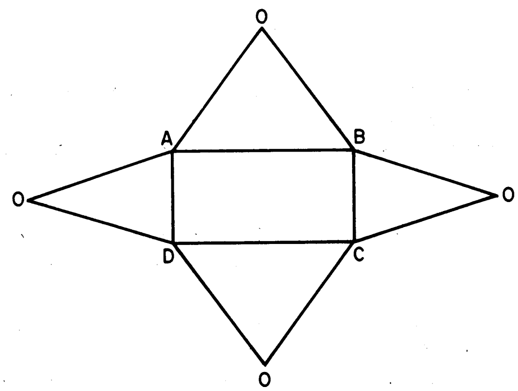


FIGURA II.224

DESARROLLO DE UN CONO RECTO

En la figura II.225 se presentan las proyecciones de un cono recto, del cual se quiere trazar su desarrollo haciendo uso del procedimiento de las *líneas radiales*.

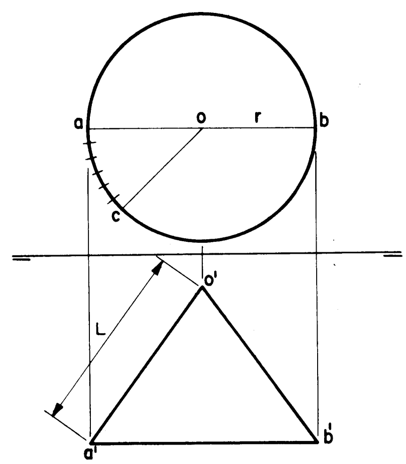


FIGURA II.225

Para realizar el desarrollo se toma como radio la generatriz L del cono y se traza el arco $\widehat{MN}$, después se marca el ángulo α que forman las líneas $\overline{O'A}$ mostradas en la figura II.226. Dicho ángulo se calcula con la fórmula siguiente:

$$\alpha = 360° \, r/L$$

en donde r es el radio de la base del cono y L la longitud de su generatriz. Después apoyándose en cualquier punto se traza, tangente al arco, la circunferencia de radio r que es la base del cono, quedando en esta forma terminado el desarrollo.

Ahora bien, si no se quiere aplicar la fórmula para obtener el ángulo α del sector circular del desarrollo, se puede proceder de la siguiente manera:

Se divide la circunferencia de la base del cono en partes iguales, entre más pequeñas las divisiones más exacto el desarrollo, lo ideal es tomar divisiones de tal manera que la cuerda quede confundida con el arco; para este caso se divide en ocho partes iguales. Después el arco $\widehat{AC}$ es dividido en pequeños segmentos, los cuales son marcados sobre el arco $\widehat{MN}$ quedando así representada una octava parte del perímetro de la base del cono, la cual es trazada ocho veces, una a continuación de la otra, sobre el arco $\widehat{MN}$, hasta obtener la longitud total del desarrollo de la circunferencia base del cono. (Véase figura II.226).

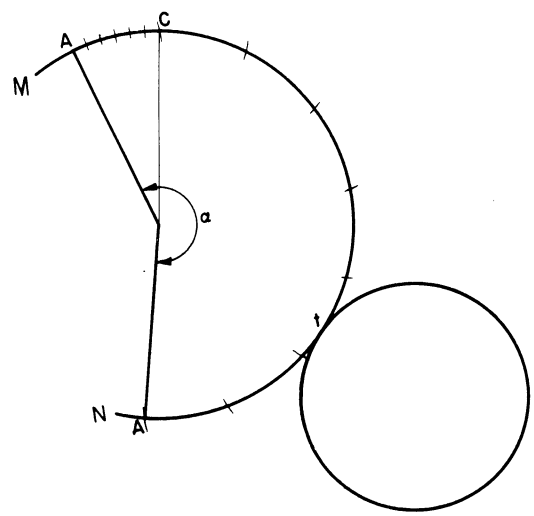


FIGURA II.226

DESARROLLO DE UN CONO TRUNCADO

La figura II.227 muestra un cono truncado, del cual se obtendrá su desarrollo mediante los siguientes pasos:

Primero se divide la circunferencia de la base del cono en ocho partes iguales y se trazan las generatrices correspondientes a cada división. Después el arco $\widehat{A-A}$ del desarrollo es dividido en ocho partes iguales, sobre las cuales se trazan las generatrices según corresponda.

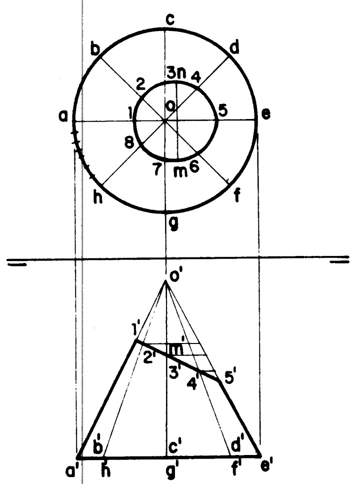


FIGURA II.227

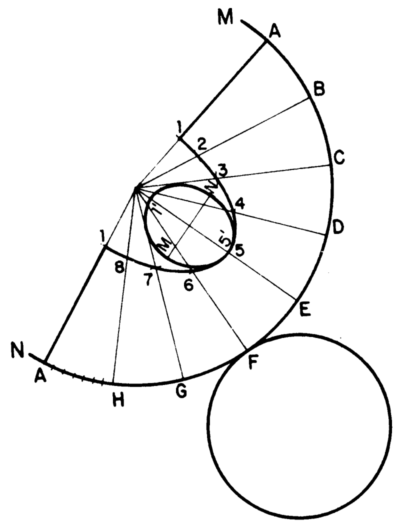


FIGURA II.228

Posteriormente las magnitudes reales de las generatrices cortadas son marcadas sobre las correspondientes del desarrollo, y al unir sus extremos se define la curva 1 8 7 6 5 4 3 2 1. (Véase figura II.228).

Finalmente se traza la sección de corte del cilindro, la cual es una elipse cuyo eje mayor tiene igual magnitud a la proyección 1' 5' y su eje menor tiene la misma longitud de la proyección m n, localizada en la parte media de la proyección 1' 5'. Quedando así terminado el desarrollo del cono truncado.

DESARROLLO DE UN CONO OBLICUO

La figura II.229 muestra en montea la representación de un cono oblicuo, del cual se obtendrá su desarrollo por el procedimiento de líneas radiales.

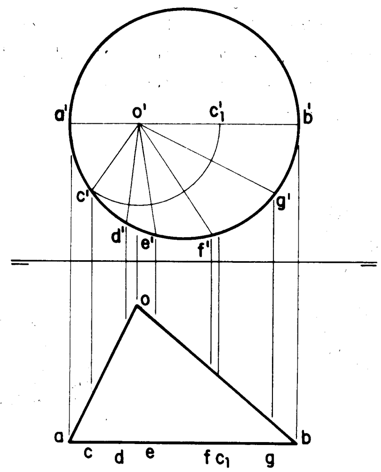


FIGURA II.229

Para obtener este desarrollo, primero se divide la proyección horizontal de la base del cono en pequeñas cuerdas y a partir de sus extremos son trazadas rectas hasta el punto O, formándose así triángulos de los que se determina su magnitud real. Por ejemplo, al tomar la cuerda f' e' se definen las proyecciones del triángulo EFO, el cual al ser trazado en el desarrollo con sus respectivas magnitudes reales, queda como se muestra en la figura II.230.

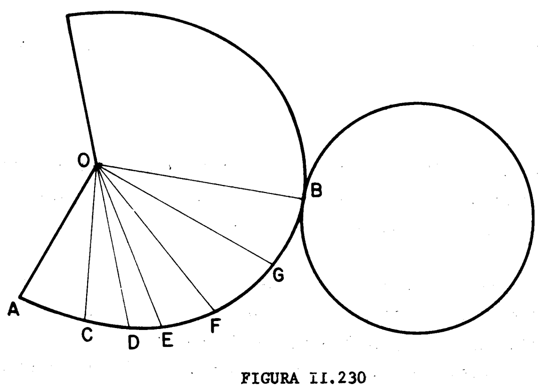


FIGURA II.230

Después procediendo de igual manera, se construyen los demás triángulos definidos en la base del cono hasta completar los 360°, y finalmente se traza la circunferencia base del cono.

DESARROLLO DE UNA PIEZA DE UN DUCTO PARA AIRE ACONDICIONADO

La figura II.231 muestra la representación en montea de una pieza de un ducto para aire acondicionado y se quiere obtener su desarrollo; por lo tanto será necesario determinar las magnitudes reales de los planos que la integran y colocarlos uno a continuación de otro, con lo que estará completo el desarrollo.

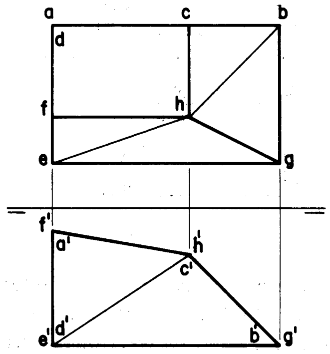


FIGURA II.231

Para armar los cuadriláteros en el desarrollo, éstos se dividen en dos triángulos por medio de sus diagonales (véase figura II.232). Lo anterior se hace en el caso de polígonos irregulares de los que son conocidos sus lados, pero no sus ángulos, pues al intentar trazarlos en el desarrollo habría un número infinito de soluciones, lo cual no sucede con los triángulos, ya que estos últimos son figuras indeformables.

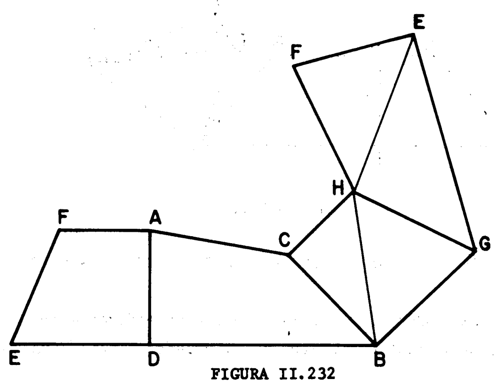


FIGURA II.232

DESARROLLO DE UNA PIEZA DE TRANSICION DE UN DUCTO PARA AIRE ACONDICIONADO

La figura II.233 muestra las proyecciones de una pieza de transición de un ducto para aire acondicionado, del cual se obtendrá su desarrollo de igual forma que el anterior, salvo en las partes curvas que hay que triangular.

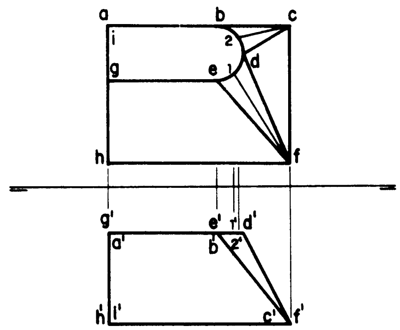


FIGURA II.233

En este caso se dividieron las secciones curvas en dos partes cada una, quedando definidos los triángulos 1 E F, 1 D F, 2 D C y 2 B C, de los cuales se determinaron sus magnitudes reales para obtener su desarrollo. Se debe tener en cuenta que entre más divisiones tengan las curvas, más exacto será el desarrollo. (Véase figura II.234).

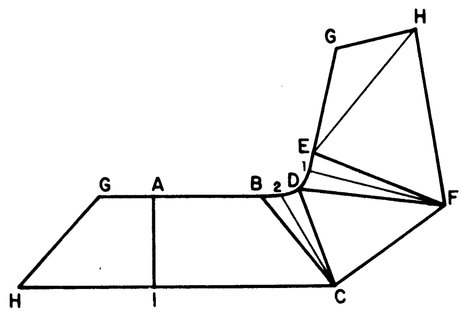


FIGURA II.234

DESARROLLO DE UNA ESFERA MEDIANTE EL PROCEDIMIENTO DE HUSOS ESFERICOS

Los husos esféricos son superficies de la esfera comprendidas entre dos meridianos, los cuales tienen su máxima amplitud en el ecuador y su mínima en los polos.

Ahora bien, si se toman dos meridianos infinitamente próximos, la superficie definida entre ellos podrá considerarse como superficie cilíndrica, y su desarrollo se obtendrá de la siguiente manera:

La figura II.235 muestra las proyecciones de una esfera dividida en doce partes iguales, en este caso para obtener su desarrollo, primero se traza un rectángulo de base igual al perímetro de la sección del ecuador y cuya altura sea la mitad de esta base.

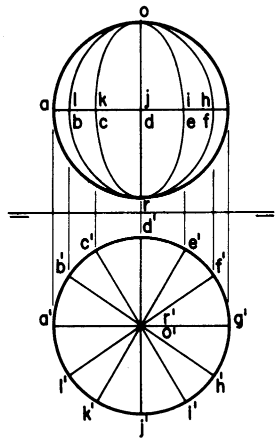


FIGURA II.235

Después sobre la parte media de la altura se hace pasar la recta $\overline{AA'}$ que corresponde al ecuador de la esfera, la cual es dividida en doce partes iguales, quedando así definidos doce rectángulos que contendrán a los husos esféricos.

Finalmente se trazan los arcos de circunferencia que integran los husos esféricos, los cuales deben tener su centro sobre la recta $\overline{AA'}$. (Véase figura II.236).

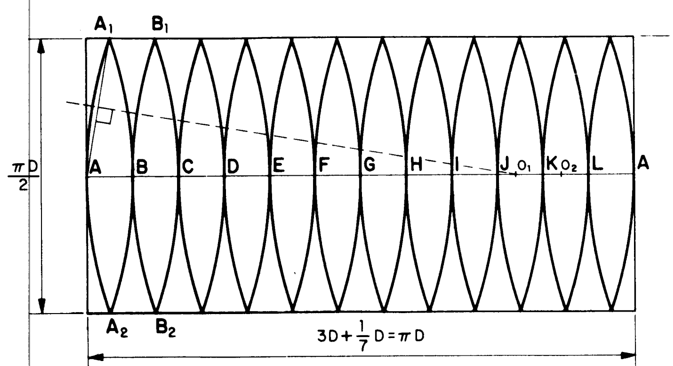


FIGURA II.236

CAPITULO 3 PROYECCIONES

III.1 PROYECCIONES BIDIMENSIONALES

III.1.1 GENERALIDADES

A través del concepto de proyección, los sistemas de proyección monoédrico, diédrico y triédrico deben dar una visión clara, única y precisa del objeto representado a todas aquellas personas habituadas en el manejo de información técnica.

Proyección es la intersección de una línea proyectante que contiene a un punto del espacio, con un plano llamado de proyección.

Siendo el concepto de proyección único en el mundo técnico, existen dos sistemas: el europeo y el americano, los cuales se basan en los mismos fundamentos, manejando diferentes características y concepción, obteniéndose los mismos resultados.

A los europeos se les debe la creación del concepto de proyección referido a planos de proyección perpendiculares entre sí (horizontal, frontal y un tercero, perpendicular a los dos primeros), dividiendo el espacio en cuatro regiones o cuadrantes. Cuando se utiliza el primer cuadrante para el estudio de todos los cuerpos del espacio, se da origen a lo que se conoce como *sistema europeo*, y cuando se utiliza el tercer cuadrante se da origen a lo que se conoce como sistema americano.

El sistema de proyecciones consiste en representar cada uno de los puntos contenidos en el objeto en tres planos de proyección (perpendiculares entre sí), de tal manera que estén limitados por tres líneas de intersección (perpendiculares entre sí), una vertical y dos horizontales.

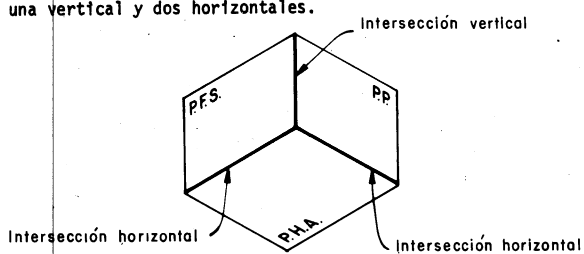


FIGURA III.1 PLANOS DE PROYECCION PARA EL SISTEMA EUROPEO

La intersección horizontal se conoce como línea de tierra, ya que intersecta a los planos de proyección frontal y horizontal.

Si se abaten estos tres planos de proyección hasta que estén contenidos en uno solo (superficie de dibujo), las líneas de intersección limitan los espacios entre cada una de las proyecciones, es decir, separan la proyección frontal de la proyección horizontal y de la proyección de perfil.

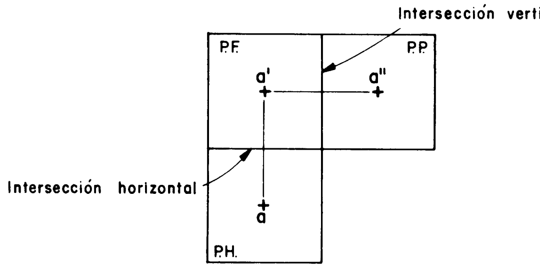


FIGURA III.2 ABATIMIENTO DE LOS PLANOS EN EL SISTEMA EUROPEO

La característica principal que presenta el sistema europeo es que al lado derecho de la proyección frontal, se dibuja el perfil izquierdo del objeto.

Los americanos recibieron la influencia técnica europea y utilizaron, en lugar de tres planos proyectantes, seis planos de proyección que resultan de imaginar una caja de cristal envolvente a la pieza en estudio, tan grande como se quiera, pero de un tamaño tan pequeño que coincida con las medidas máximas del objeto (ancho, altura y profundidad).

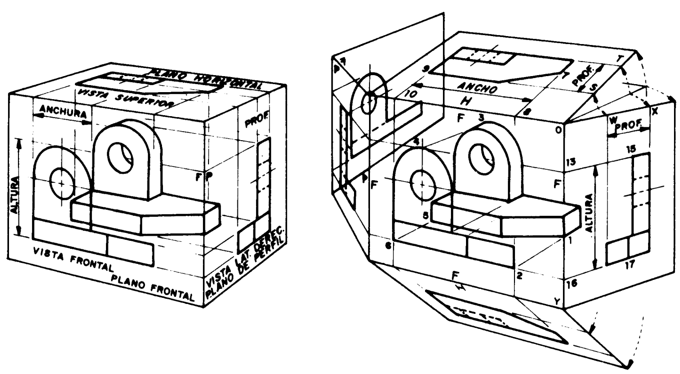


FIGURA III.3 PLANOS DE PROYECCION ENVOLVENTES PARA EL SISTEMA AMERICANO

Al abatir estos seis planos de proyección hasta convertirlos en planos coplanares (superficie de dibujo), se obtienen las posiciones relativas de cada uno de los planos, quedando de la siguiente manera:

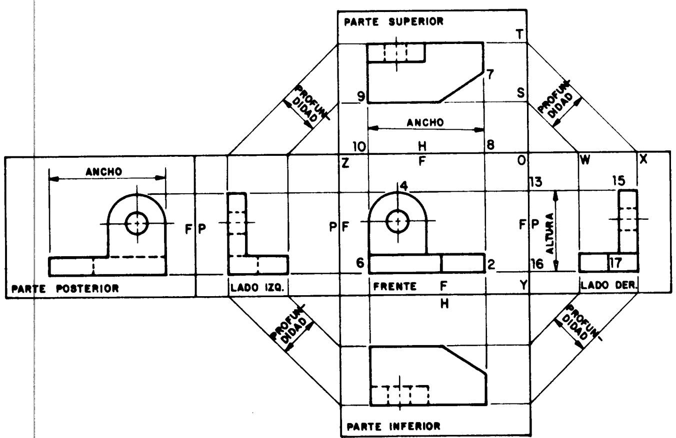


FIGURA III.4 ABATIMIENTO DE LOS PLANOS DE PROYECCION EN EL SISTEMA AMERICANO

Debido al orden en que intervienen los elementos que dan origen a la proyección (observador, plano de proyección, objeto) los planos de proyección ocultan al objeto en estudio, para evitar este efecto se consideran a los planos de proyección transparentes, a fin de que las proyecciones del objeto se puedan dibujar visibles, es por esto que el sistema americano denomina como *vista* a lo que hasta aquí se ha llamado *proyección*.

De las seis vistas posibles de la envolvente se puede escoger cualquiera de ellas como principal y llamarle *vista frontal*, y conviene seleccionar la más adecuada en cuanto a la posición relativa del objeto y a partir de éstas quedarán los espacios para dibujar las vistas inmediatas a ella (argumento que se ha adoptado como base del sistema, al asegurar que así se logra un dibujo más real), es decir, la cara correspondiente de la figura se dibuja siempre del mismo lado, escogiendo de las cuatro combinaciones de vistas posibles aquellas que mejor describan la forma del objeto, sin dejar por ello de dibujar en el sistema americano.

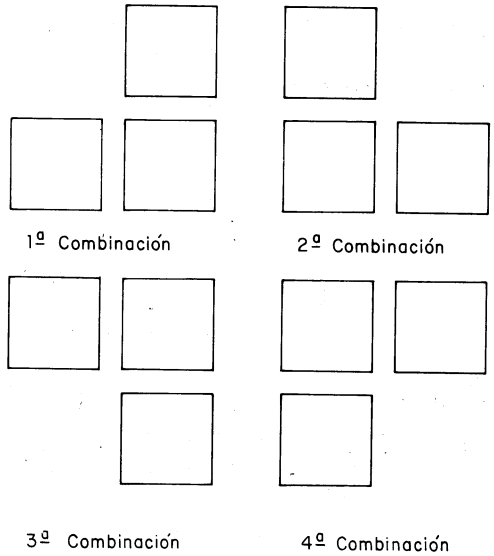


FIGURA III.5 SELECCION DE VISTAS EN EL SISTEMA AMERICANO

Cada una de las vistas en la montea describe la forma particular del objeto parcialmente a partir de una dirección visual determinada, y el conjunto de las tres vistas muestra al objeto totalmente.

Nota: **En estos apuntes se estudiarán los problemas del espacio en una de las cuatro ternas, siendo ésta la que se utiliza ccn mayor frecuencia en los libros de texto y que se conoce como montea del tercer cuadrante o sistema americano.**

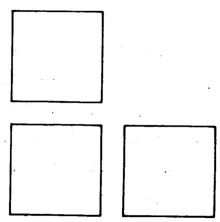


FIGURA III.6 MONTEA DEL TERCER CUADRANTE

Cada una de las vistas de la montea muestra al objeto en dos dimensiones, es por esto que se les conoce como *proyecciones o vistas bidimensionales*.

El empleo de una sola vista recibe el nombre de *proyección monoédrica*, la combinación de dos será *diédrica* y la utilización de tres se llamará *triédrica*.

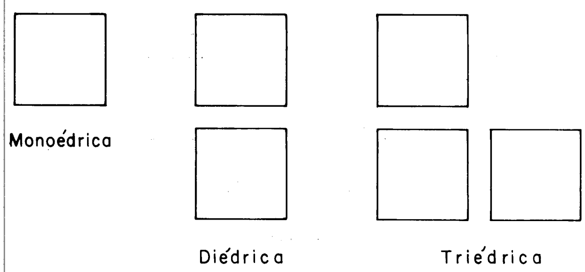


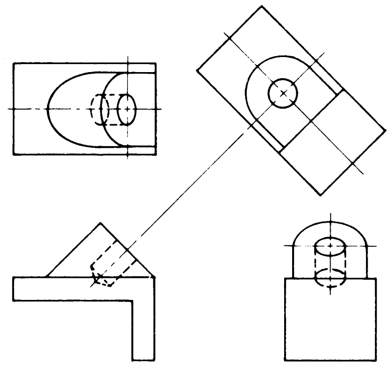
FIGURA III.7 TIPOS DE PROYECCION

En la proyección monoédrica sólo se pueden observar gráficamente dos dimensiones: el ancho y la profundidad del objeto y se requiere de un dato adicional para conocer la tercera dimensión (altura o cota), así la información quedará completa.

En el caso de la proyección diédrica, la combinación de dos vistas proporciona la información completa, ya que se puede ver la altura, el ancho y la profundidad del objeto, siempre y cuando la elección de la montea sea la más adecuada y describa perfectamente al objeto en estudio.

La proyección triédrica se emplea cuando el objeto en estudio presenta accidentes como: perforaciones, biseles y chaflanes, y se requiere de más de dos proyecciones para describirlo totalmente; con ello se evitan confusiones e interpretaciones erróneas.

En el caso de piezas más complejas, la solución se tendrá mediante cortes especiales a base de planos auxiliares.



VISTA AUXILIAR DE PROFUNDIDAD

FIGURA III.8

III.1.2 PROYECCION MONOEDRICA

La proyección monoédrica se utiliza en la solución de problemas del dibujo geomé trico de precisión donde sólo se requiera dibujar dos dimensiones; es decir dibu jar sobre una sola superficie, ya sea a partir del origen que nos proporciona el cruce de dos ejes rectangulares (x, y) o a partir de un origen sobre un eje, un ángulo y una medida, en donde la geometría plana tiene un amplio campo de aplica ción así como en la solución de problemas de construcciones geométricas, teniendo como base los fundamentos de la geometría euclidiana.

Los elementos que se manejan en la proyección monoédrica son:

i) Punto: Lugar en el espacio que no tiene forma ni dimensión y que queda definido sobre una superficie, como la intersección de dos líneas perpendiculares entre sí.

ii) Línea: Sucesión indefinida de puntos en una misma dirección.

iii) Segmento: Fracción de una línea conocidos sus extremos o distancia mínima entre dos puntos.

iv) Circunferencia: Lugar geométrico de todos los puntos que equidistan de un punto fijo llamado centro.

Estos cuatro elementos manejados bajo las condiciones geométricas de paralelismo, perpendicularidad, oblicuidad, tangencia, además del concepto de intersección y el de enlace, permiten representar en un plano cualquier figura geométrica por compleja que sea y dependiendo de sus características se determinarán soluciones únicas y precisas.

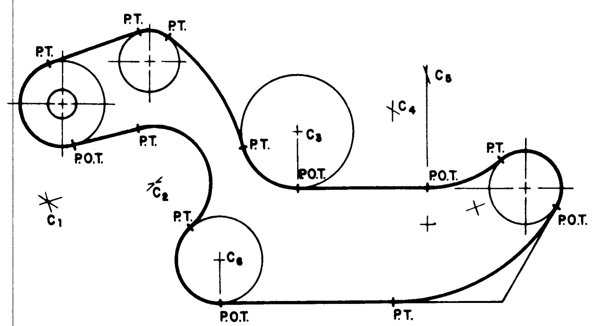


FIGURA III.9 PIEZA MECANICA

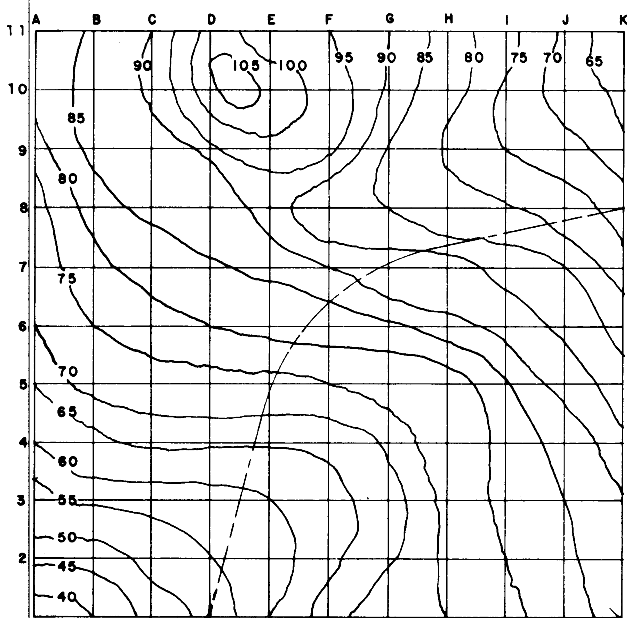


FIGURA III.10 PLANO TOPOGRAFICO

Otro ejemplo clásico dentro de la proyección monoédrica son los planos acotados, en donde sólo se utilizan proyecciones horizontales y números o cotas en los extremos de cada elemento proyectado; a partir de estos datos se pueden determinar valores como magnitud real, pendiente y posición de los segmentos.

Lo anterior se puede ilustrar con un segmento de recta, el cual tiene las siguientes características:

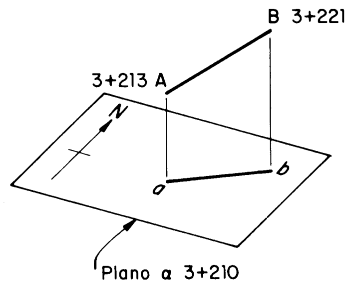


FIGURA III.11 ILUSTRACION DE UN PLANO ACOTADO

donde:

$\overline{AB}$ = segmento real

$\overline{ab}$ = proyección del segmento real en el plano α

$\overline{Aa}$ = línea proyectante de A

$\overline{Bb}$ = línea proyectante de B

ABba = plano proyectante

El segmento $\overline{AB}$ se quiere proyectar sobre un plano (α), el cual tiene una elevación de 3 + 210 m; a su vez, los puntos A y B tienen una elevación de 3 + 213 m y de 3 + 221 m respectivamente. La proyección del segmento $\overline{AB}$ aparecerá en el plano (α) como el segmento $\overline{ab}$ y en cada uno de sus extremos estará anotada su respectiva elevación.

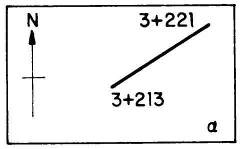


FIGURA III.12 PROYECCION MONOEDRICA A BASE DE PLANOS ACOTADOS

De la representación anterior se puede determinar fácilmente: la pendiente, la magnitud real y la posición de la recta. La pendiente se puede calcular dividiendo la diferencia de cotas entre la longitud de la proyección; la longitud real se puede calcular por el teorema de Pitágoras:

$$\overline{AB} = \sqrt{(\text{Diferencia de cotas})^2 + (\overline{ab})^2}$$

y la posición de la recta se puede determinar calculando el rumbo (ángulo menor de 90° que existe con respecto al eje norte).

III.1.3 PROYECCION DIEDRICA

Para el estudio de cuerpos y problemas geométricos en cuanto a forma, posición y dimensión, la geometría descriptiva tiene un amplio campo de aplicación, ya que a través de elementos como: aristas y planos, además de las características de paralelismo, perpendicularidad y oblicuidad entre sí, así como magnitudes reales de rectas y planos, ángulo aparente y ángulo verdadero, se podrán obtener soluciones únicas y precisas a los problemas planteados en sólo dos planos de proyección.

La proyección diédrica se puede utilizar en la representación de figuras, cuando éstas no resulten muy complicadas, es decir bastará con emplear sólo dos vistas de ellas para describir perfectamente la forma del objeto, siempre y cuando la elección de las vistas sea la más adecuada.

Por ejemplo, en la representación de una forma cilíndrica, generalmente sólo se necesitan dos vistas, siendo una de ellas la más informativa, por lo que el empleo de una tercera vista resultaría repetitivo.

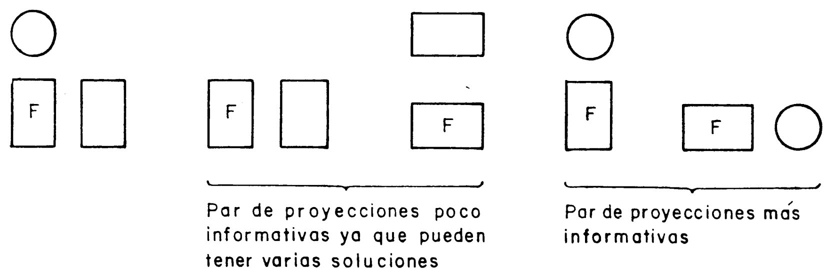


FIGURA III.13. MONTEA DE UN CILINDRO PARA SU ESTUDIO

III.1.4 PROYECCION TRIEDRICA

Si el problema en estudio presenta complejidad, se recomienda estudiarlo, proyectándolo a tres planos de proyección; es decir obteniendo la montea de tres vistas donde se podrán analizar las caras, cortes y perforaciones sin mayor dificultad, siempre y cuando estos elementos guarden paralelismo y perpendicularidad con los planos de proyección; si no es así, se tendrá que considerar su oblicuidad, y para su estudio se emplearán métodos auxiliares como: giros, abatimientos o cambios de plano que facilitarán su representación.

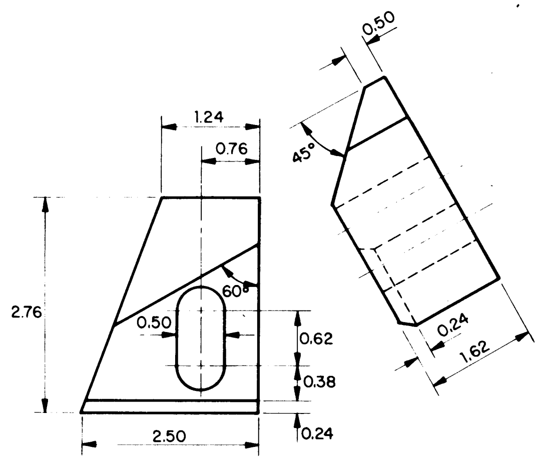


FIGURA III.14 PROYECCION AUXILIAR

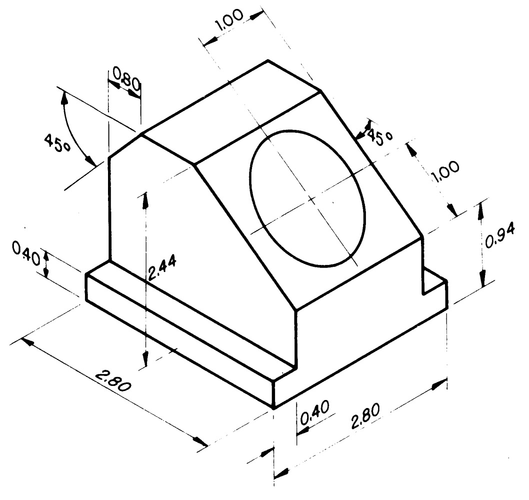


FIGURA III.15 PROYECCION OBLICUA

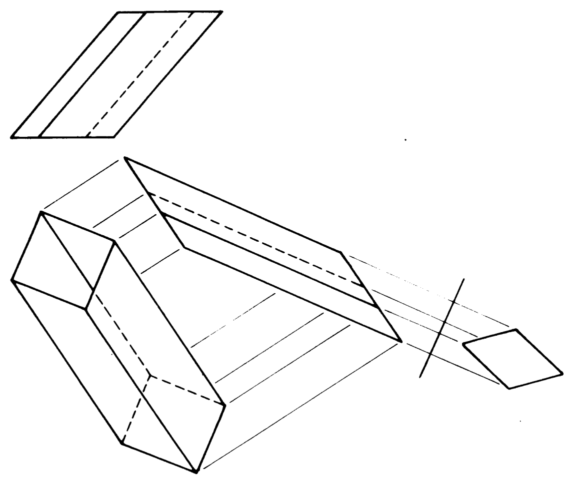


FIGURA III.16 CAMBIO DE PLANOS

III.2 PROYECCIONES TRIDIMENSIONALES

III.2.1 GENERALIDADES

La información que se maneja en fábricas, talleres y en general en la construcción, se basa en planos que están representados bidimensionalmente.

Las personas que manejan dicha información, están habituadas a imaginar el objeto tridimensionalmente con sólo leer los planos; pero no siempre se da esta condición, por lo tanto se hace necesario dibujar el objeto en tres dimensiones para que todas las personas - no sólo los especialistas - puedan observar cómo es el objeto en la realidad o cómo quedaría si fuera el caso de construirlo o maquinarlo.

A las representaciones tridimensionales suele llamárseles *dibujo ilustrativo* y existen tres formas de lograrlo: mediante *la perspectiva*, *la proyección oblicua* y *la axonometría* (que es otro método convencional de representación), cada una de ellas con sus modalidades, características y variantes dentro de los elementos que las definen.

III.2.2 PERSPECTIVA

La perspectiva es la más real de las representaciones tridimensionales, puesto que tiene como característica principal mostrar el objeto casi como aparece a nuestra vista con la deformación propia de la profundidad.

La perspectiva está enmarcada dentro de las proyecciones cónicas, ya que todos los rayos que proyectan al objeto salen divergentes del centro de proyección, que en este caso se llamará *punto de fuga* (p.f.)

Por ejemplo, en la representación de un cubo en el caso (a) se ilustra en perspectiva con un punto de fuga, en (b) con dos puntos y en (c) con tres.

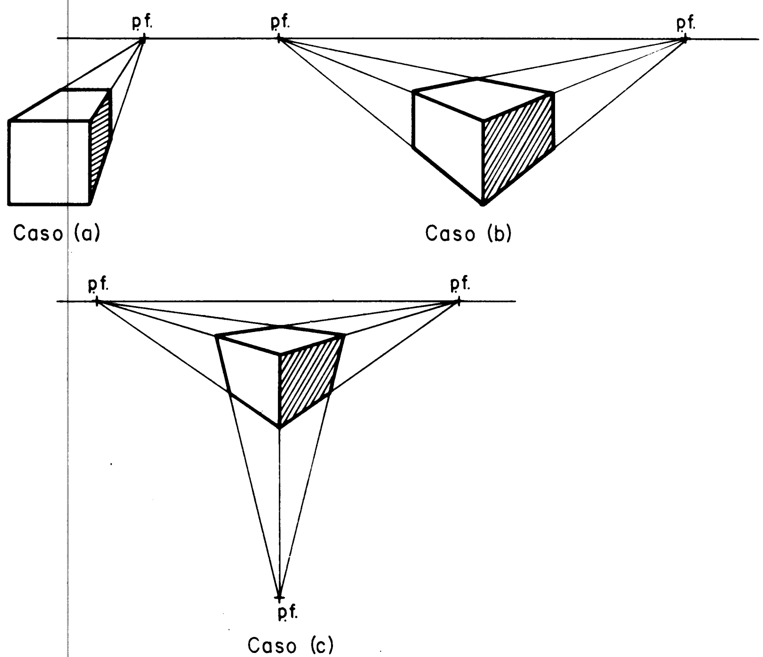


FIGURA III.17

Debe aclararse que las representaciones tridimensionales anteriores, están contenidas en un solo plano de proyección, al que se le llama *plano del cuadro*.

En el campo de la ingeniería, son más importantes las representaciones en proyección oblicua y en axonometría, pues su construcción ya normalizada es más simple y el efecto visual es tan claro como en la perspectiva.

III.2.3 PROYECCION OBLICUA

Los fundamentos de la proyección oblicua pertenecen al campo de las proyecciones cilíndricas, es decir, sus líneas proyectantes son paralelas y su incidencia en el plano de proyección no es perpendicular a éste, de ahí el nombre de proyección oblicua.

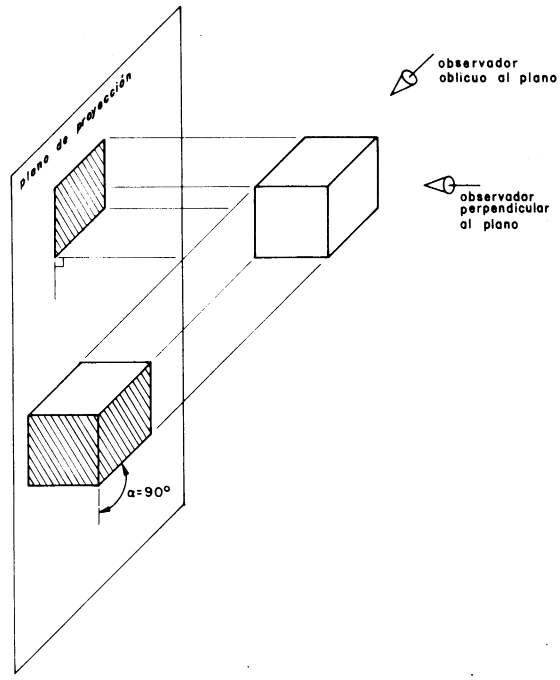


FIGURA III.18 POSICION DEL OBSERVADOR PARA LA PROYECCION OBLICUA

La proyección oblicua puede tener un infinito número de posiciones con respecto al plano de proyección, pero sólo dos son las más usuales, las llamadas *caballera* y de *gabinete*.

Las características que definen a la proyección oblicua son:

a) La cara principal es paralela al plano de proyección.

b) Las líneas visuales son paralelas.

c) La incidencia de las líneas de proyección con el plano son oblicuas.

La siguiente ilustración muestra las diferentes posiciones de un cubo en proyección oblicua.

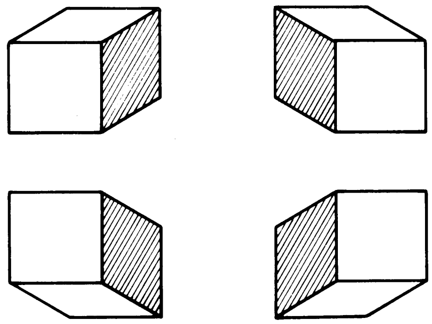


FIGURA III.19

Obsérvese que la figura no presenta deformación alguna, ya que las dimensiones representadas son las reglas; la cara principal muestra su verdadera forma y tamaño, no así las caras superior y lateral; las aristas principales que definen el ancho y la altura forman un ángulo de 90° entre sí y la arista de la profundidad forma un ángulo de 45° con respecto a la horizontal, esto da como resultado la *proyección oblicua caballera*.

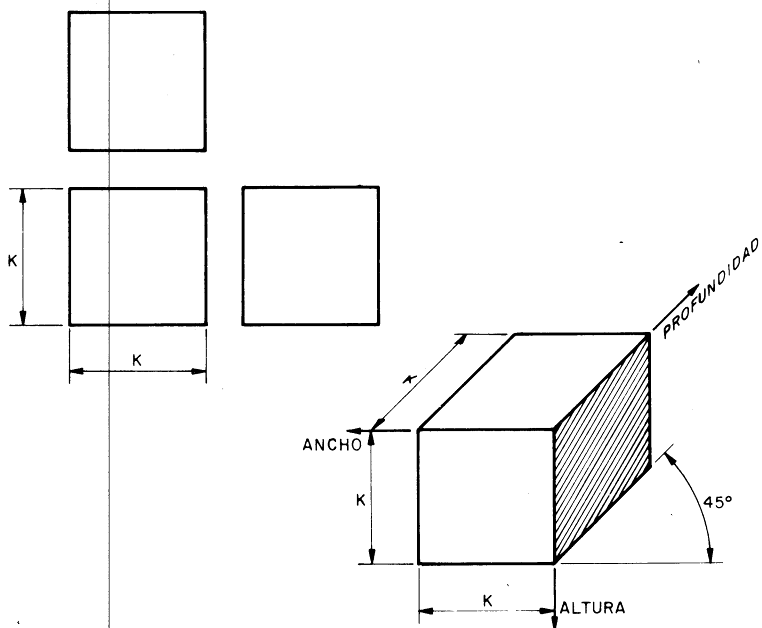


FIGURA III.20 MONTEA Y PROYECCION OBLICUA CABALLERA DEL CUBO

Conservando las características anteriores, pero reduciendo a la mitad la longitud de las aristas de profundidad, se obtendrá la *proyección oblicua de gabinete.*

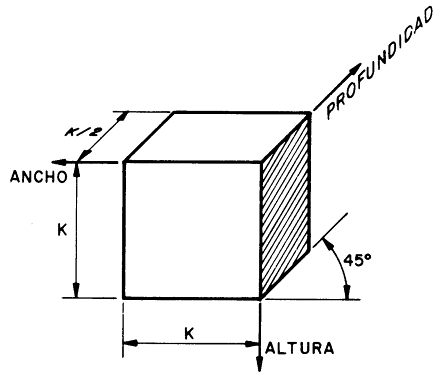


FIGURA III.21 PROYECCION OBLICUA DE GABINETE

III.2.4 AXONOMETRIA

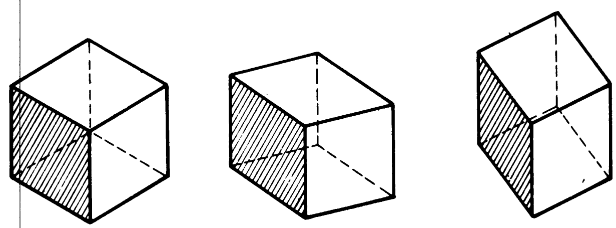
Los fundamentos de la *axonometría* son más complejos que los de la *proyección oblicua*, ya que los primeros se basan en un sistema de tres ejes con una equidistancia entre sí perfectamente definida donde se muestran la altura, el ancho y la profundidad del objeto; conviene aclarar que del número infinito de posiciones posibles del objeto en el espacio, sólo tres son las más convenientes sin que haya distorsión por efecto de escorzo, es decir, acortamiento al representar la figura.

Estas tres posiciones dan origen a las proyecciones isométrica, dimétrica y trimétrica, y a su vez, a las diferentes equidistancias entre sus ejes.

Las dimensiones medidas sobre estos ejes no muestran su verdadera longitud, ya que por el efecto de la proyección aparecen acortadas y por consecuencia las caras del objeto no muestran su magnitud real.

La axonometría requiere de un solo plano de proyección (como en el caso de la proyección oblicua), en el cual las líneas proyectantes inciden en él perpendicularmente, además de que el objeto aparece de tal manera que se pueden observar tres de sus caras.

En la siguiente ilustración se muestran los diferentes casos de la axonometría.



(a) ISOMETRICO (b) DIMETRICO (c) TRIMETRICO

FIGURA III.22

Para distinguir los diferentes casos es necesario observar detenidamente cada una de las figuras e imaginar su posición en el espacio.

Puede observarse que la figura (a) aparece girada de tal forma que una de las diagonales mayores del cubo es perpendicular al plano de proyección, de manera que el observador sólo la verá como un punto. Esta posición da origen a la *proyección isométrica*.

PROYECCION ISOMETRICA

La proyección isométrica es la más importante de la axonometría, ya que reúne características bien definidas y es de fácil construcción para los fines prácticos que persigue el ingeniero.

Las posiciones iniciales en el plano son como se indican en la siguiente figura:

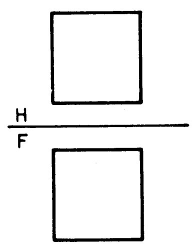


FIGURA III.23

El cubo muestra sus caras horizontal y frontal, paralelas a sus respectivos planos de proyección y en esta posición todas las dimensiones del cubo son reales.

En la figura siguiente se ha girado el cubo en la proyección horizontal un ángulo de 45°.

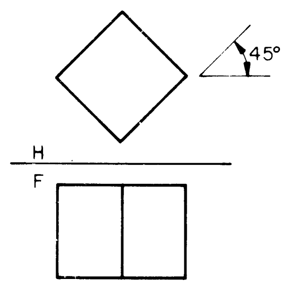


FIGURA III.24

Obsérvese que la vista frontal cambia y las dimensiones reales sólo se conservan en la proyección horizontal y en las rectas verticales de la proyección frontal.

Como se mencionó anteriormente, es necesario que una de las diagonales mayores del cubo sea perpendicular al plano frontal (de tal manera que el observador la vea como un punto y así pueda apreciar la verdadera proyección isométrica), al hacer esto se obliga a que el cubo se levante del plano horizontal y se provoque un giro de 35°16' en el plano de perfil.

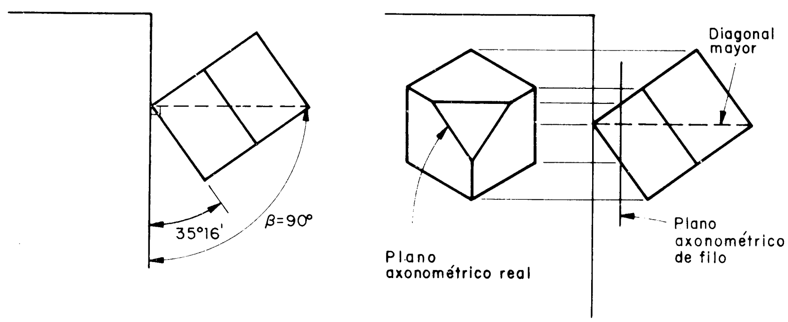


FIGURA III.25

De la observación detallada de la figura anterior se puede obtener la siguiente información:

- Cuando el cubo se levanta del plano horizontal se forma un ángulo de 36°16'.
- Las aristas no muestran su longitud real ya que por el efecto de la proyección aparecen acortadas.
- Las caras que conforman al cubo son planos oblicuos.
- Las rectas verticales que se observan en el figura son en realidad rectas de perfil.
- El plano axonométrico es un plano perpendicular a la diagonal, de tal manera que al cortar a los ejes se forma un triángulo equilátero.

Las aristas que muestran el ancho, la altura y la profundidad del objeto, dan origen a tres semirrectas, las cuales entre sí forman ángulos de 120°, por lo que se les llama *ejes isométricos*.

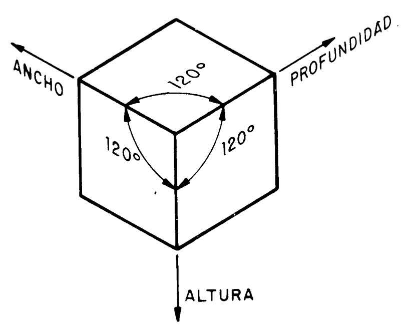


FIGURA III.26

Las tres aristas que dan origen a los ejes isométricos sufren idéntica reducción, y por tener esta propiedad, a esta proyección se le denomina *isométrica*.

DIBUJO ISOMETRICO

Para dibujar una *proyección isométrica* es necesario afectar las medidas del objeto por un factor de reducción, por lo que su construcción resulta laboriosa.

Es así como surge el dibujo isométrico, que consiste en aprovechar todas las características que da la proyección isométrica con la salvedad de llevar las medidas reales del objeto sobre cada eje, es decir sin reducción alguna; esto es más práctico y el efecto visual es el mismo, sólo que la imagen aparece un poco más grande, por lo que no afecta el resultado final.

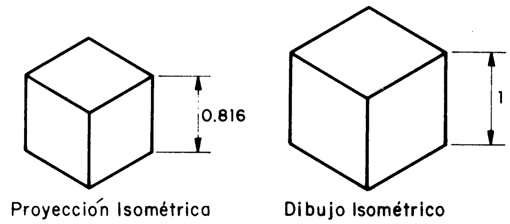


FIGURA III.27

PROYECCION DIMETRICA

La *proyección dimétrica* tiene los mismos fundamentos que la *proyección isométrica* salvo una diferencia, la diagonal del cubo debe observarse como una recta y no como un punto. El ángulo α puede ser cualquiera, distinto del de la proyección isométrica.

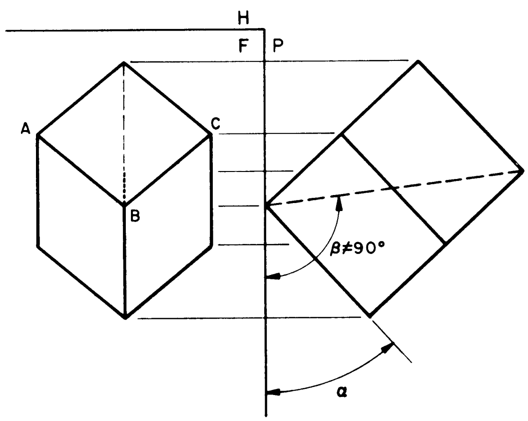


FIGURA III.28 PROYECCION DIMETRICA

De la figura anterior puede observarse que las aristas $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ han sufrido una reducción en igual proporción, causada por el efecto de la proyección, no así la arista $\overline{BD}$. Estas aristas dan origen a los llamados ejes dimétricos.

Ahora bien, dado que podemos levantar el cubo lo necesario sin perder la relación de dos medidas iguales y la otra distinta, es claro que los ángulos entre ejes tienen que guardar la misma proporción con respecto a las aristas.

Buscando que tanto la apariencia visual sea agradable como la construcción de esta proyección sea práctica, es necesario elegir con cuidado las relaciones de proporción antes señaladas, por lo que se han escogido dos, las cuales tienen las siguientes características:

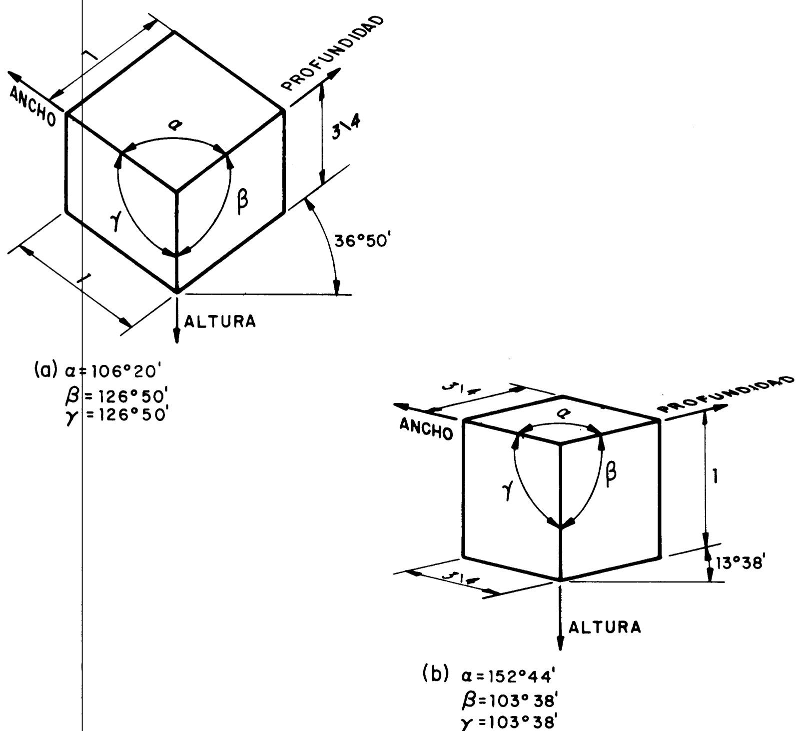


FIGURA III.29 RELACION DE MEDIDAS EN LA PROYECCION DIMETRICA

En el caso (a) el ancho y la profundidad guardan la proporción mayor, no así en el caso (b) con respecto a las longitudes de las aristas.

Al normalizar la *proyección dimétrica* para que dé origen al dibujo dimétrico, se tendrá que cambiar el valor del ángulo que forma la arista de la profundidad con respecto a la horizontal de referencia en ambos casos, como se indica a continuación.

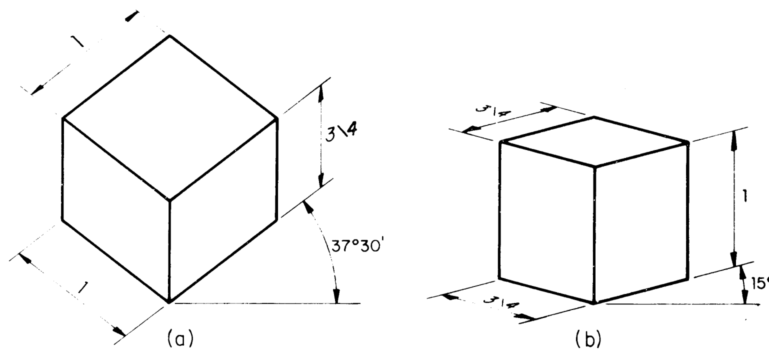


FIGURA III.30

En el caso (a) el valor del ángulo se cambió a 37°30', este valor surgió a raíz de que se encontró que el ángulo de 45° distorsionaba al objeto, como sucede en el caso de la proyección oblicua caballera y si se usaba un ángulo de 30° se caía en el caso de la proyección isométrica, por lo que se decidió sacar el promedio de ambos valores.

El resultado de este *promedio visual* es agradable y conserva la relación 1:1:3/4.

El caso (b) es semejante. Se llegó al valor de 15° al tratar de que el plano superior del cubo reduciera su extensión, para que así el efecto visual fuera más agradable. Un ángulo de 37°30' permite ver el plano superior con mayor extensión; si el valor del ángulo se reduce a 30°, la visión de ese plano será igual a la de las caras laterales, por lo que un ángulo de 15° permitirá apreciar el plano superior bastante reducido, conservándose la relación $\frac{3}{4}:\frac{3}{4}:1$. Si esto no fuera suficiente, entonces hay que analizar las propiedades de la proyección trimétrica para encontrar una posición especial, distinta de las dos anteriores.

Tomando como base la posición inicial, como se hizo en el caso de la *proyección isométrica*, se observa que el cubo muestra sus caras horizontal y frontal paralelas a sus respectivos planos.

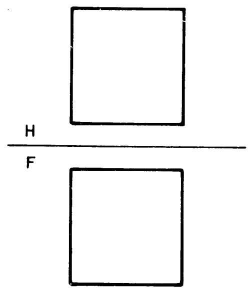


FIGURA III.31

Si en seguida se gira el cubo un ángulo de 30° en su posición horizontal, quedará de la siguiente manera:

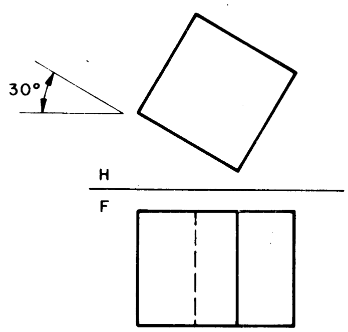


FIGURA III.32

Se observa un cambio en la vista frontal, además de que las dimensiones reales sólo se conservan en la proyección horizontal y en las rectas verticales de la proyección frontal.

Si la proyección frontal se gira, de tal manera que la cara superior del cubo tenga una inclinación de 34° con respecto a la horizontal, se obtiene la visión final.

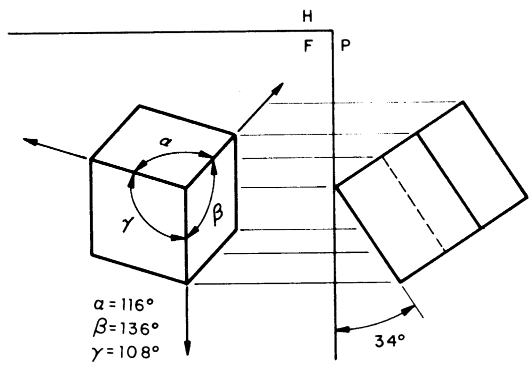


FIGURA III.33 POSICION FINAL DEL CUBO PARA LA PROYECCION TRIMETRICA

Puede apreciarse que las relaciones entre las aristas y entre los ángulos son diferentes para cada uno de ellos, con esto se logra el acortamiento desigual en los tres ejes, originándose la *proyección trimétrica*.

Haber escogido un ángulo de 30° para el giro y 34° para la inclinación, conduce a hacer práctico el uso de esta proyección cuando es necesario trazar elipses en cada una de las caras del cubo, pues con el uso de plantillas para tal fin y con los ángulos de 35° para el plano superior, 45° para el plano frontal y 30° para el plano de perfil, se logrará un trazo aceptable; de lo contrario cuando se usen otras posiciones, el primer problema que deberá analizarse es cómo dibujar las elipses. Debe aclararse que estas elipses son círculos del objeto, que representan volúmenes salientes o perforaciones.

La proyección trimétrica produce un efecto visual más agradable qué las otras proyecciones axonométricas, ya que permite escoger con gran libertad la orientación del objeto.

III.2.5 CONSTRUCCION DE UN DIBUJO ISOMETRICO

En la práctica del dibujo técnico, se ha encontrado que de las proyecciones tridimensionales, el *dibujo isométrico* es el más práctico, rápido y sencillo de realizar, además de que tiene la ventaja de que se acota con facilidad.

Tomando como base la información mostrada en las proyecciones diédricas, se desea construir un dibujo isométrico.

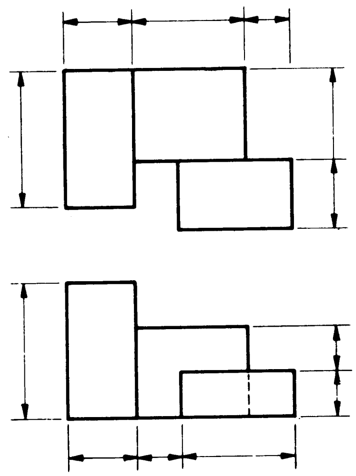


FIGURA III.34 PROYECCIONES DIEDRICAS

Primeramente hay que analizar algunos elementos, tales como las dimensiones, verificando en qué unidades están expresadas (mm, cm, m, km), con la finalidad de tener una idea del tamaño y volumen del objeto.

El análisis de la forma permite identificar a los distintos elementos geométricos que conforman el objeto, tales como: caras triangulares, cuadrangulares o de cualquier otra forma, y si éstas forman caras de prismas, pirámides u otros cuerpos geométricos, así como su interrelación.

Para facilitar la interpretación, hay que considerar otros elementos tales como líneas ocultas, las cuales deben tomarse en cuenta ya que indican los accidentes interiores, facilitando la descripción de la pieza.

Tomando en cuenta lo anterior se procede a calcular las máximas dimensiones del objeto (ancho, altura y profundidad) y a partir de ellas se construye la envolvente que contendrá al objeto.

Con base en la posición o arreglo de las vistas en la montea, se determina la ubicación del observador, esto es muy importante ya que de ello dependerá la orientación del objeto a construir.

La posición de los ejes isométricos deberá definirse dependiendo de las características del objeto y de lo que se quiera observar de él, siempre y cuando se conserve la equidistancia de 120° entre cada uno de ellos.

Por ejemplo, cuando el objeto se caracteriza por tener un lado mayor con respecto a las otras dimensiones, es recomendable utilizar el arreglo (c) o (d).

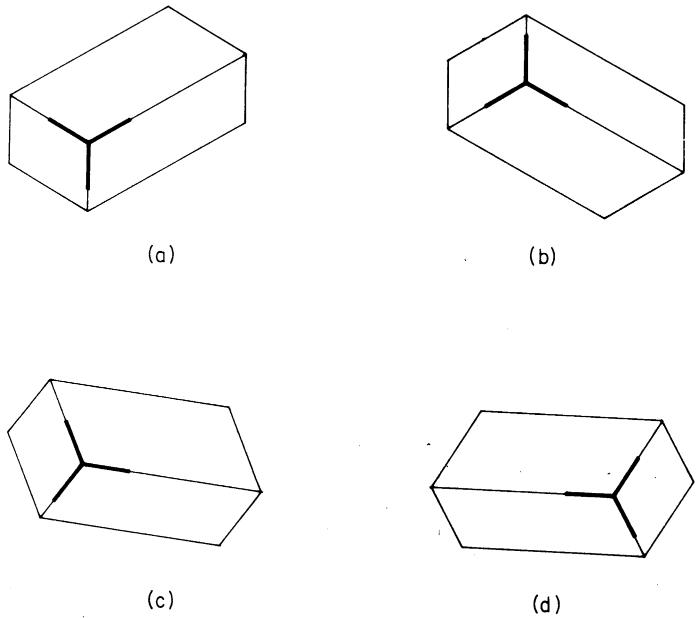


FIGURA III.35

Los requisitos indispensables para la construcción de un dibujo isométrico pueden resumirse de la siguiente manera:

1° Interpretación de las vistas o montea.

2° Identificación de las unidades de medida en las acotaciones.

3° Estudio de la forma.

4° Definición y análisis de las relaciones existentes entre los elementos geométricos involucrados.

5° Ubicación de la posición relativa de las caras o superficies adyacentes.

6° Interpretación de los accidentes internos, mostrados por líneas ocultas.

7° Obtención de las máximas dimensiones del objeto.

8° Determinación de la posición de los ejes isométricos y el observador.

9° Decisión del camino o método a seguir en la construcción del dibujo isométrico.

Con estas características se procederá a la construcción del dibujo isométrico, el cual se puede dividir en dos casos:

1. Usando la *envolvente de referencia* construida a partir de las máximas dimensiones del objeto y suponiéndolo confinado en ella.

2. Utilizando como referencia el plano horizontal, ubicando a partir de éste a los elementos geométricos que conforman el objeto.

Cuando ya se tiene práctica en la elaboración de dibujos isométricos, basta con observar la montea para definir mentalmente la forma del objeto.

La práctica va indicando que no hay un método definido para la elaboración de un dibujo isométrico, ya que las técnicas se van mezclando de una u otra manera conforme se vaya necesitando.

Si en la elaboración del dibujo isométrico se utiliza la envolvente, es conveniente que ésta sea transparente para facilitar la ubicación de los elementos internos.

El siguiente paso es definir los niveles entre elementos que conformen el objeto, tomando como base la información que nos proporciona la vista frontal de la montea.

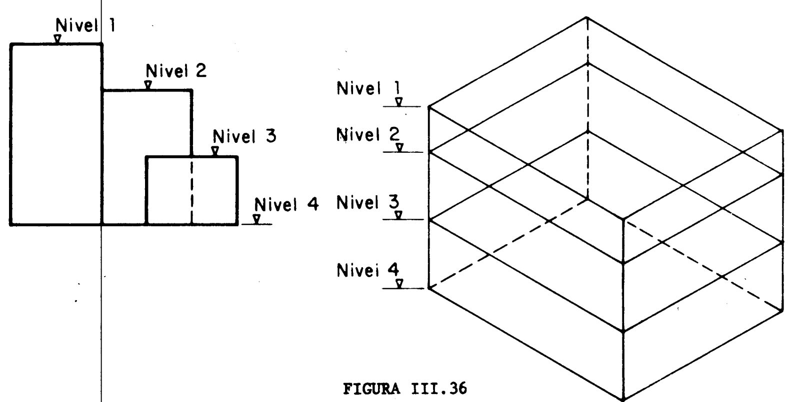
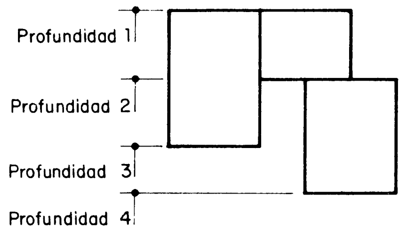


FIGURA III.36

O si se prefiere iniciar la construcción del dibujo isométrico definiendo los diferentes planos de profundidad en el objeto, tomando la información en la vista horizontal de la montea.



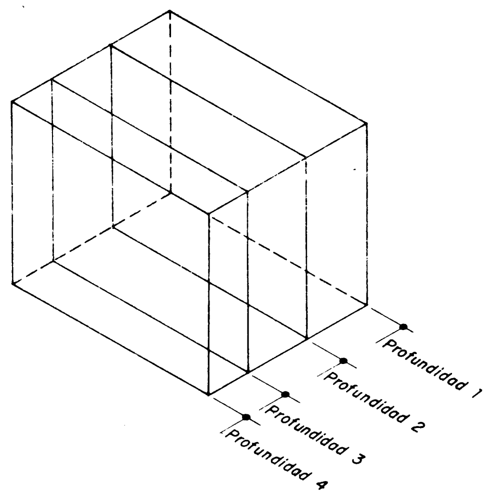


FIGURA III.37

De la combinación de ambos pasos resulta una malla, en la que se puede ir ubicando cada elemento previamente definido en las vistas de la montea mediante números o letras.

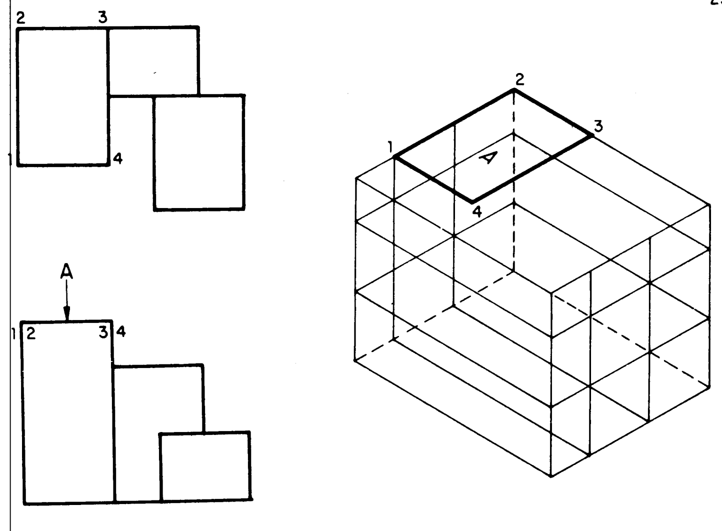


FIGURA III.38

En la figura anterior puede verse que el plano marcado con la letra A es horizontal y está definido por los vértices 1, 2, 3 y 4; se ubica en el nivel 1 y sus límites de profundidad van de la 1 a la 3. A partir de este sencillo análisis, es posible ubicar en la malla todos los planos que conformen al objeto.

El plano A forma parte de un cuerpo, el cual es necesario complementar haciendo uso de la información que proporcionan las vistas de la montea.

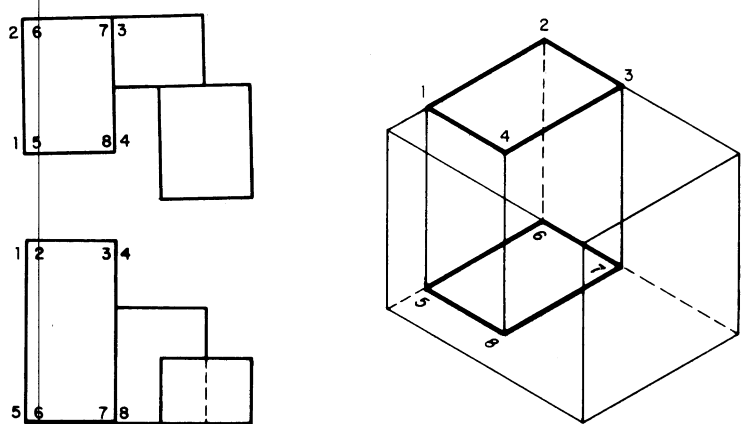


FIGURA III.39

Puede verse que el plano A es paralelo a un plano localizado en el nivel 4, definido por los vértices 5, 6, 7 y 8. En este caso, a cada vértice del plano A le corresponde uno en el plano del nivel 4; al vértice 1 le corresponde el vértice 5, al vértice 2 le corresponde el 6 y así sucesivamente. Al unir todos los vértices quedará definido el cuerpo, que en este caso será un prisma.

Procediendo de igual manera se localizarán todos los elementos de la figura, quedando de la siguiente manera:

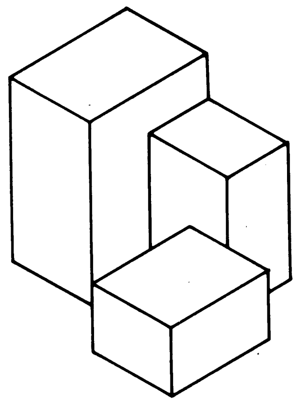
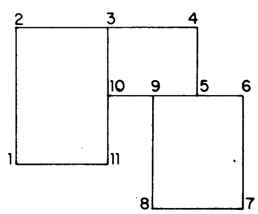


FIGURA III.40 DIBUJO ISOMETRICO COMPLETO

Por otra parte, si la construcción del dibujo isométrico se realiza sin envolvente, se utilizará como referencia la proyección horizontal, donde se localizará e identificarán cada uno de los elementos que conforman el objeto.



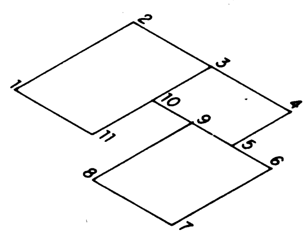


FIGURA III.41 LOCALIZACION DE LOS ELEMENTOS EN EL PLANO HORIZONTAL PARA REALIZAR UN DIBUJO ISOMETRICO

Como en el caso anterior, a cada vértice localizado en el plano horizontal le corresponderá otro colinealmente, pero en otro nivel; bastará localizar las alturas de los vértices respectivos para que al unirlos definan la figura.

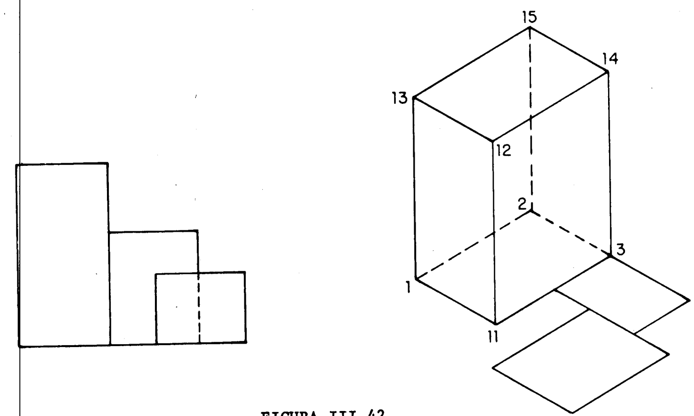


FIGURA III.42

Como se puede observar, en la elaboración de dibujos isométricos la base consiste en ubicar la posición espacial de cada punto, localizándolo mediante coordenadas, tomando como referencia la envolvente o el plano horizontal.

Debe aclararse que el objeto en estudio tiene la particularidad de que sus elementos son paralelos o perpendiculares a los planos de proyección principales, es decir están contenidos en *planos isométricos*, y debido a estas características se dice que se trata de *elementos isométricos*.

Es importante aclarar que un objeto puede tener, además de *elementos isométricos*, *elementos no isométricos*. El ejemplo que sigue muestra rectas no isométricas así como un plano no isométrico.

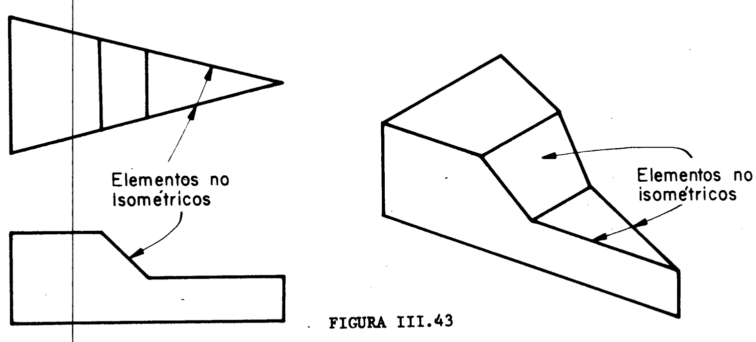


FIGURA III.43

Cuando se trabaje con este tipo de elementos, hay que tomar en cuenta que en el dibujo isométrico las aristas y los ángulos no aparecen en su verdadera magnitud y para determinarla es necesario hacer uso de proyecciones auxiliares en la montea, pues debe aclararse que los dibujos isométricos son ilustrativos y no se debe tomar medidas en ellos.

Otro problema que se presenta en la elaboración de dibujos isométricos es el de trazar curvas irregulares. Para ello es necesario dibujar una malla o cuadrícula en la proyección o proyecciones de la montea que muestren a la curva en su forma real, y determinar mediante puntos las intersecciones de la curva con la malla.

El siguiente paso será dibujar la malla en vista isométrica y transportar las intersecciones que darán origen a la curva; tomando la información de las vistas de la montea y uniendo todos los puntos, se logrará la configuración de la curva.

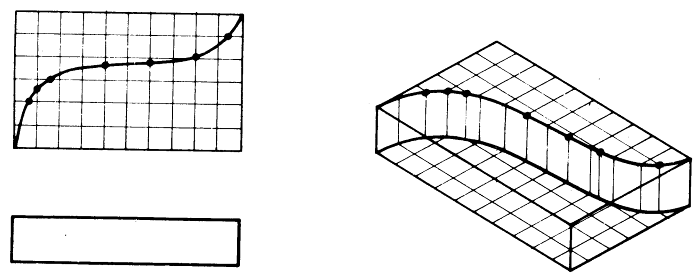


FIGURA III.44 DIBUJO ISOMETRICO REALIZADO MEDIANTE UNA MALLA O CUADRICULA

Una vez trazada la curva en el plano superior, bastará con transportar cada uno de los puntos hasta el nivel del plano inferior, para que al unirlos se complete la figura.

Cuando el objeto tenga perforaciones, ya sea para tornillos o pasadores, será necesario dibujar en isométrico esas circunferencias, las cuales aparecerán como elipses.

Dibujar elipses es muy laborioso y poco práctico; sin embargo existen métodos para dibujarlas de manera aproximada, por medio de arcos enlazados, los cuales dan un efecto visual bastante satisfactorio para efecto ilustrativo.

Estas elipses pueden trazarse por el método de los cuatro centros, es decir, la elipse se traza a partir de cuatro arcos de circunferencia.

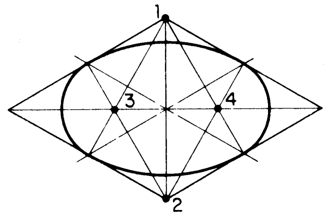


FIGURA III.45

La figura muestra que hay dos centros dentro de la elipse y otros dos fuera de ella; los primeros sirven para trazar las curvas de menor radio y los exteriores para las curvas mayores.

Ahora bien, para determinar la posición de esos centros es necesario observar, primeramente, que la circunferencia está inscrita en un cuadrado de la siguiente manera:

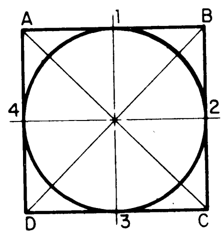


FIGURA III.46

Una vez localizado el centro de la circunferencia se procederá a trazar el cuadrado en vista isométrica, con sus respectivas diagonales y paralelas.

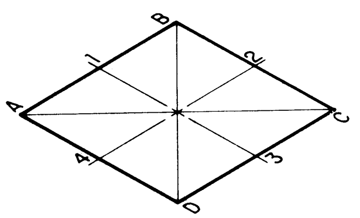


FIGURA III.47

Puede verse que la diagonal $\overline{AC}$ es mayor que la $\overline{BD}$; debido a esto la diagonal $\overline{AC}$ será la dirección del eje mayor de la elipse y el lugar geométrico que contenga a los centros interiores (estos centros equivalen a los focos de la elipse). Los centros exteriores estarán definidos por los puntos extremos de la diagonal menor, en este caso $\overline{BD}$ y los puntos de tangencia se definirán por los puntos medios de cada una de las rectas ($\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{DA}$) denotados con los puntos 1, 2, 3 y 4.

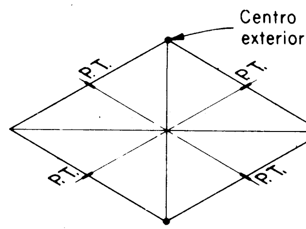


FIGURA III.48

Para localizar los centros interiores bastará con trazar rectas a partir de los puntos B y D, con sus respectivos puntos de tangencia opuestos a cada uno de ellos, y a partir de las intersecciones de estas rectas con el eje mayor de la elipse (diagonal $\overline{AC}$), se definirán los centros interiores buscados.

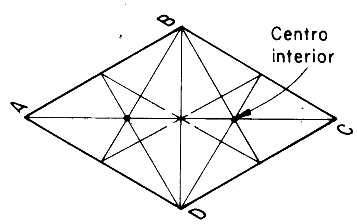


FIGURA III.49

La elipse puede trazarse con compás, haciendo centro en los puntos señalados hasta los puntos de tangencia, los cuales indicarán el cambio de curvatura.

En la práctica el problema de trazar una circunferencia en posición isométrica, se reduce a:

- Reconocer cuál es la diagonal menor, para fijar los centros exteriores.

- Ubicar la posición de los puntos de tangencia.

- Localizar la posición de los centros interiores.

Siguiendo esta metodología, es posible trazar circunferencias en diferentes posiciones, como se muestra en la siguiente figura:

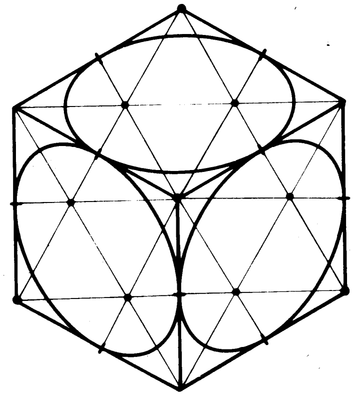


FIGURA III.50

Además del método antes visto se puede utilizar el de *Orth* o el de *la elipse alternada,* los cuales se describen a continuación:

METODO DE ORTH

Primeramente es necesario conocer el radio de la circunferencia que se va a dibujar, así como el cuadrado que la contiene con sus respectivos puntos de tangencia; en seguida se procederá a dibujar el cuadrado en vista isométrica, donde se localizará la diagonal mayor del cuadrado cuyos puntos extremos serán los centros de dos arcos de circunferencia, en donde el radio será igual al de la circunferencia que se quiere trazar.

Las intersecciones de estos arcos con la diagonal mayor, darán la posición de los centros interiores de la elipse.

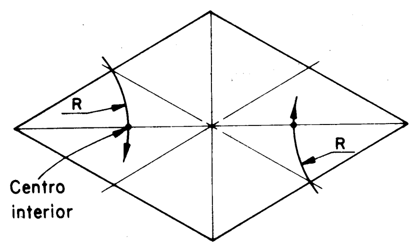


FIGURA III.51

Ya localizados los centros interiores, se hará pasar por cada uno de ellos dos rectas que tendrán una inclinación de 60° con respecto a la diagonal mayor, y de la intersección de éstas con la prolongación de la diagonal menor, surgirá la posición de los centros exteriores de la elipse.

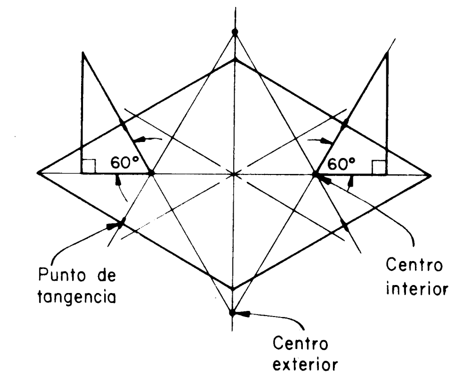


FIGURA III.52

Una vez localizados los centros interiores y exteriores de la elipse, se procederá a trazar los arcos de circunferencia hasta los nuevos puntos de tangencia, los cuales indicarán un cambio en la curvatura.

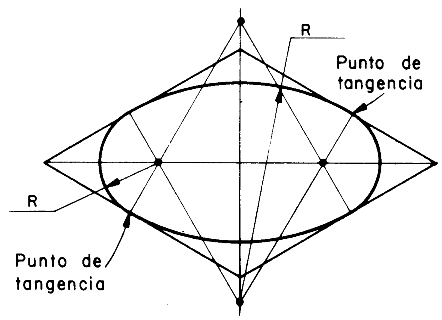


FIGURA III.53

METODO DE LA ELIPSE ALTERNADA

Es necesario observar, primeramente, que la circunferencia real está trazada a partir del origen que nos proporciona el cruce de dos ejes.

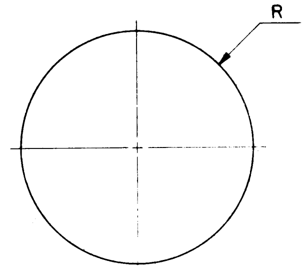


FIGURA III.54

Una vez localizado el centro de la circunferencia se procederá a trazar los ejes en vista isométrica, para posteriormente dibujar en ellos la circunferencia real.

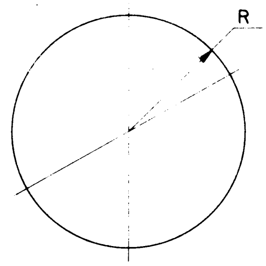


FIGURA III.55

De la intersección de la circunferencia con los ejes en vista isométrica, surgirá la posición de los puntos de tangencia, denotados con las letras A, B, C y D.

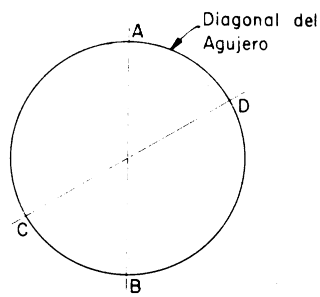


FIGURA III.56

A partir de los puntos C y D se trazarán rectas horizontales, y de la intersección de éstas con la circunferencia se tendrá la posición de los puntos C' y D', que en este caso serán los centros exteriores de la elipse.

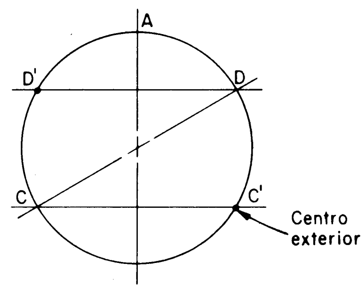


FIGURA III.57

Una vez localizados los centros exteriores de la elipse, se hará pasar por cada uno de ellos una recta cuya inclinación será de 60° con respecto a la horizontal, y de la intersección de éstas con las rectas horizontales trazadas a partir de los puntos C y D, surgirá la posición de los centros interiores de la elipse.

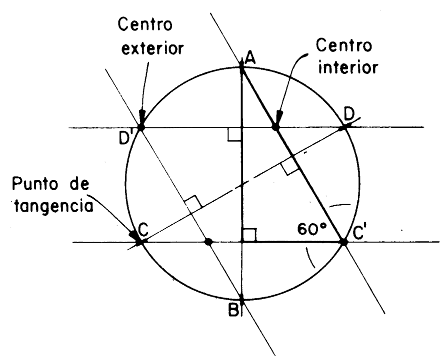


FIGURA III.58

Conociendo la posición de los centros interiores y exteriores, se procederá a trazar la elipse mediante arcos de circunferencia hasta los puntos de tangencia, los cuales indicarán un cambio de curvatura.

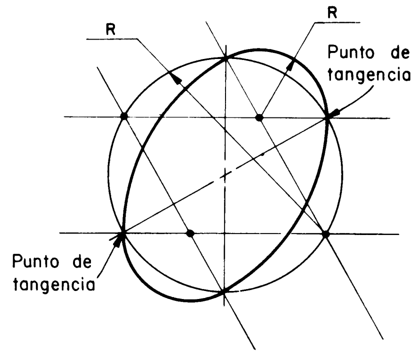


FIGURA III.59

De lo anterior se concluye que dibujar circunferencias en posición isométrica da por resultado la construcción de elipses, ya que es la visión que se aprecia.

Ahora bien, para dibujar elipses verdaderas en vista isométrica, se utilizará el método de la malla o cuadrícula empleado anteriormente para el trazo de curvas irregulares.

BIBLIOGRAFIA

French T. y Vierck Ch.
DIBUJO DE INGENIERIA
Mc. Graw Hill
México, 1981.

Alexander S. Levans
ANALISIS GRAFICO
Centro Regional de Ayuda Técnica
México, 1973

Spencer H. y Dygdon J. Th.
DIBUJO TECNICO BASICO
Ed. CECSA
México, 1973

Luzadder, Warren J.
FUNDAMENTOS DE DIBUJO EN INGENIERIA
Ed. CECSA
México, 1977

Giesecke F., Mitchell A., Spencer H.C., Hill I.,
Loving R.
DIBUJO PARA INGENIERIA
Ed. Interamericana
México, 1978

Miguel de la Torre Carbó
GEOMETRIA DESCRIPTIVA
Ed. UNAM.
México, 1983

Jorge Betancourt Cuevas
ELEMENTOS DE LA GEOMETRIA DESCRIPTIVA
Ed. Arte y Técnica
México, 1969

Barnett Rich, Ph. D.
GEOMETRIA PLANA
Mc. Graw Hill
México, 1970

Estos apuntes se terminaron de imprimir en el mes de mayo de 1984, en los Talle res de la Facultad de Ingeniería de la U.N.A.M. La edición consta de 5,000 ejemplares.