



FASCÍCULO 1  
CONCEPTOS Y PRINCIPIOS  
BÁSICOS DE LA ESTÁTICA

César P. Mora Covarrubias  
Pedro Reyes Ginori

DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS  
DEPARTAMENTO DE MECÁNICA

1987





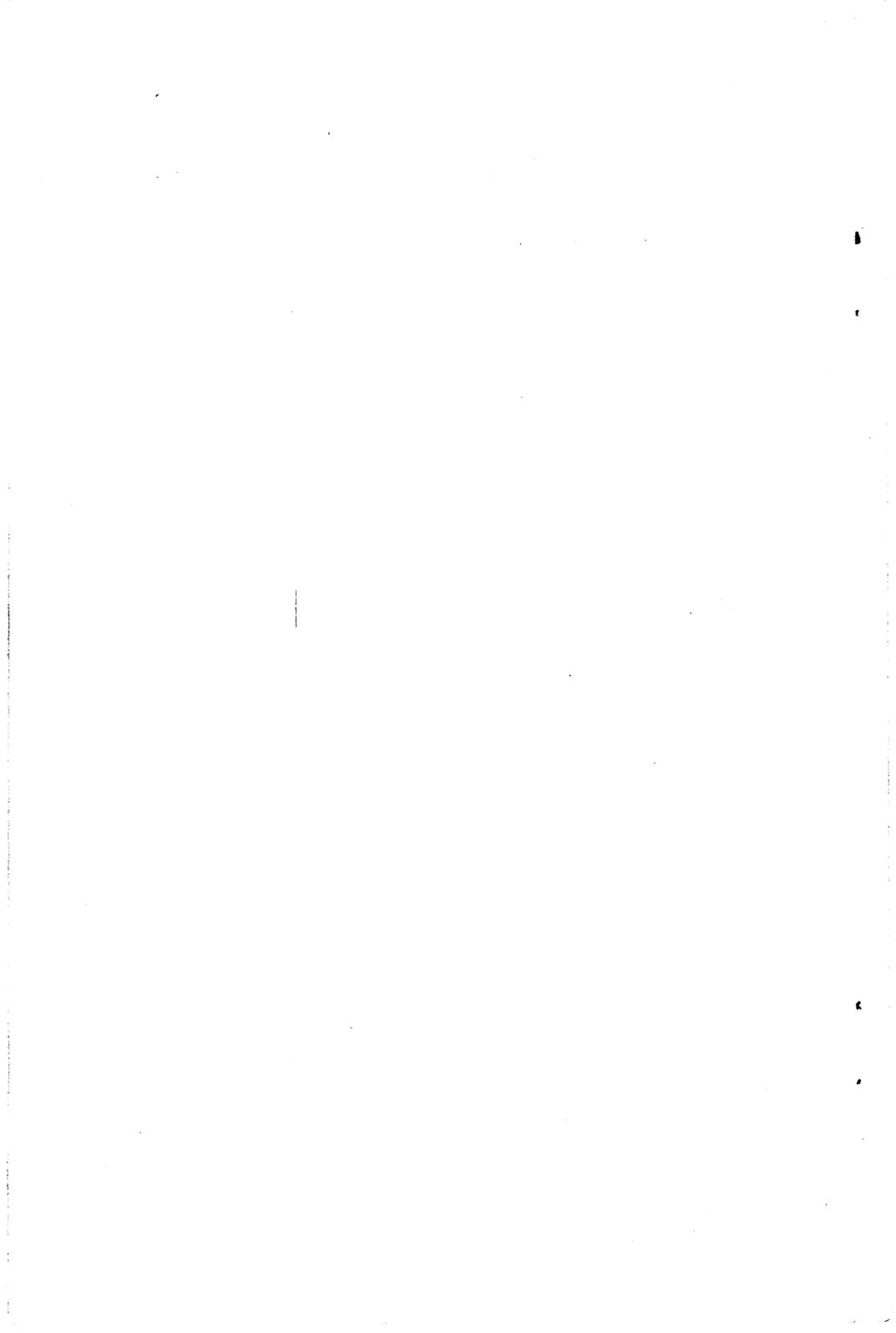
140 + 510  
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO  
FACULTAD DE INGENIERIA

FASCICULO 1  
**CONCEPTOS Y  
PRINCIPIOS BASICOS  
DE LA ESTATICA**

**CESAR P. MORA COVARRUBIAS  
PEDRO REYES GINORI**

**DIVISION DE CIENCIAS BASICAS  
DEPARTAMENTO DE MECANICA**

FI/DCB/87



## PROLOGO

El Departamento de Mecánica de la División de Ciencias Básicas, de la Facultad de Ingeniería, ha desarrollado una serie de fascículos que cubre íntegramente los temas comprendidos por las distintas asignaturas que imparte el propio Departamento. De esta manera se apoya la formación de los estudiantes, poniendo a su disposición, en publicaciones accesibles por sus especiales características bibliográficas, los contenidos detallados que se contemplan en los programas de las asignaturas aludidas, los cuales se presentan con un enfoque de carácter unitario.

Así, cada fascículo es un texto completo sobre el aspecto al cual se refiere el título, habiendo sido elaborado teniendo en cuenta las peculiaridades del posible lector, con el propósito de que constituya una opción documental útil para quienes se interesan en estudiar, sin que la presencia del profesor sea decisiva en el proceso de aprendizaje.

El presente fascículo ha sido dedicado a la parte introductoria de los cursos de Mecánica I y de Estática, la cual se refiere a los fundamentos de la Mecánica Clásica. Su finalidad es ofrecer una visión de conjunto de la Mecánica, así como plantear, con niveles apropiados de formalidad, los conceptos y las premisas de su estructura teórica, ya que éstos constituyen las bases de los distintos desarrollos, previstos para presentarse en los demás fascículos de la serie.

Por otra parte, la Mecánica ha sido una disciplina del mayor interés intelectual, a través de la historia cultural de Occidente; su desenvolvimiento tuvo lugar simultáneamente con el de dos ciencias de gran importancia: la Astronomía y la Matemática.

Así, en la parte inicial se presenta un resumen histórico de la Mecánica, con el propósito de subrayar aspectos importantes de su evolución.

A continuación se alude a los conceptos básicos, destacándose los de fuerza, cuerpo y movimiento, presentándose en seguida las leyes de Newton, incluso la de la gravitación universal, para disponer así de la base axiomática de la Mecánica Clásica.

Después, en el contexto de los efectos externos e internos que producen las fuerzas al aplicarse a los cuerpos, se clasifican éstas acorde con su índole y con su manera de manifestarse, señalándose, también, opciones para representarlas.

Los principios de la Estática se incluyen con explicaciones amplias. Así, en relación con el principio de Stevinus se plantean los problemas de composición y descomposición de fuerzas. El principio de equilibrio se aplica para sustentar el de transmisibilidad. Mediante el principio de superposición de causas y efectos se señala una amplia perspectiva para analizar los sistemas mecánicos.

El fascículo concluye con los conceptos de momento de una fuerza, respecto a un punto y a un eje, y de coordenadas vectoriales de una fuerza.

Conceptos éstos que permiten estructurar una simbolización sumamente útil de las fuerzas para que, después, se aborde el análisis de los sistemas de fuerzas, en cuanto a sus posibilidades de reducción.

Cabe señalar que los diferentes puntos desarrollados se ilustran mediante ejemplos, los cuales se elaboraron especialmente teniendo en cuenta a los aspectos conceptuales que han de reforzar.

Por último, se proporciona un conjunto de ejercicios para ser resuelto por el lector. Estos ejercicios se concibieron expresamente para este fascículo y obedecen a consideraciones de tipo didáctico.

También se ha incluido una lista de referencias bibliográficas, para que el lector recurra a fuentes de información complementaria.

Se aprovecha este espacio para agradecer los comentarios o sugerencias que se proporcionen para mejorar el contenido de futuras impresiones de este trabajo, o para corregir las posibles deficiencias de la presente.

# CONTENIDO

1. CONCEPTOS Y PRINCIPIOS BASICOS DE LA ESTÁTICA .....	1
1.1 RESUMEN HISTORICO DE LA MECANICA .....	1
1.2 CONCEPTOS BASICOS .....	4
1.3 LEYES DEL MOVIMIENTO Y LEY DE LA GRAVITACION UNIVERSAL DE NEWTON .....	10
1.3.1 <i>Leyes de Newton del movimiento</i> .....	11
1.3.2 <i>Ley de la gravitación universal</i> .....	14
1.4 EFECTOS EXTERNOS E INTERNOS QUE PRODUCEN LAS FUERZAS AL ACTUAR SOBRE LOS CUERPOS .....	23
1.4.1 <i>Efectos externos</i> .....	23
1.4.2 <i>Efectos internos</i> .....	23
1.5 CLASIFICACION DE FUERZAS .....	23
1.5.1 <i>Fuerzas a distancia</i> .....	23
1.5.2 <i>Fuerzas por contacto</i> .....	23
1.5.3 <i>Fuerzas activas</i> .....	24
1.5.4 <i>Fuerzas reactivas</i> .....	24
1.5.5 <i>Fuerzas distribuidas</i> .....	24
1.5.6 <i>Fuerzas externas</i> .....	24
1.5.7 <i>Fuerzas internas</i> .....	24
1.6 REPRESENTACION DE UNA FUERZA .....	28
1.6.1 <i>Representación gráfica de una fuerza</i> .....	29
1.6.2 <i>Representación analítica de una fuerza</i> .....	29
1.7 PRINCIPIOS FUNDAMENTALES DE LA ESTÁTICA .....	35
1.7.1 <i>Principio de Stevinus</i> .....	35
1.7.2 <i>Principio del equilibrio</i> .....	48
1.7.3 <i>Principio de transmisibilidad</i> .....	48
1.7.4 <i>Principio de superposición de causas y efectos</i> .....	49

1.8 MOMENTOS DE UNA FUERZA. COORDENADAS VECTORIALES DE UNA FUERZA . . . . .	49
1.8.1 <i>Momento de una fuerza respecto a un punto</i> . . . . .	50
1.8.2 <i>Coordenadas vectoriales de una fuerza</i> . . . . .	61
1.8.3 <i>Momento de una fuerza con respecto a un eje</i> . . . . .	68
1.9 EJERCICIOS PROPUESTOS . . . . .	75
1.10 BIBLIOGRAFIA . . . . .	78

# 1. CONCEPTOS Y PRINCIPIOS BASICOS DE LA ESTÁTICA

## 1.1 RESUMEN HISTORICO DE LA MECANICA

Desde los tiempos prehistóricos el hombre, obligado por sus necesidades de sobrevivencia, aplicó intuitivamente principios mecánicos, por ejemplo en el hacha y la lanza.

Pero el estudio de esos principios se inicia en la Grecia Clásica cuando Aristóteles (-384 a -322), al suponer que el estado natural de los cuerpos era el reposo, trató de explicarse la causa por la cual éstos se movían, aunque las conclusiones a las que llegó no fueran verdaderas. En cambio Arquímedes de Siracusa (-287 a -212) hizo aportaciones muy valiosas al desarrollo de la Mecánica en sus estudios del equilibrio de los cuerpos flotantes, así como al establecer la ley del paralelogramo de las fuerzas a partir del estudio de la palanca, en donde supuso que las fuerzas aplicadas en ella le producían el equilibrio; también aporta ideas sobre el concepto de centro de gravedad.

Siglos después Stevinus (1548 a 1642) y Galileo (1564 a 1642) se ocuparán nuevamente de estos problemas. El primero de estos científicos estableció *la generalización de la ley del paralelogramo*, mientras Galileo planteó que los cuerpos podían moverse de tres maneras distintas: uniformemente cuando estaban sobre la superficie de la Tierra, con aceleración constante cuando caían y en forma elíptica cuando se trataba de los astros. Retomó el estudio de la palanca, pero atribuyendo a las fuerzas una naturaleza diferente a la que le había considerado Arquímedes, pues supuso que provocaban un cambio en la velocidad; cuestión que Newton (1642-1727) identificaría más tarde con el efecto de aceleración, ya que para este genio el estado natural de los cuerpos es el *movimiento uniforme, modificable únicamente cuando interviene una fuerza*. Este razonamiento condujo a la ley fundamental de la Mecánica, conocida como la *segunda ley de Newton*.

De este modo Newton logró sintetizar y generalizar las ideas que sobre el mismo problema habían esbozado con diferentes enfoques René Descartes (1596 a 1690) al estudiar el concepto de impulso y Guillermo Leibniz (1646 a 1716) al analizar el de trabajo.

En efecto, Descartes consideraba a la fuerza como la acción en un tiempo determinado, mientras que para Leibniz era la acción escalar en una

distancia determinada y ambas difieren de la concepción de Newton, si bien son parte de la solución de su segunda ley. Esto fue muy claro para D'Alembert (1717 a 1783) quien así lo explicó y al conjugar estas teorías con la de la palanca de Arquímedes estableció el *principio del trabajo virtual*, contribuyendo a deducir las leyes de la Estática a partir de las de la Dinámica.

Con ideas análogas, Lagrange (1736 a 1813) inmoviliza el movimiento cuando plantea los problemas de la Dinámica como si fueran de la Estática, al introducir el concepto de fuerzas inerciales, mismas que no efectúan trabajo virtual y que al sumarse a las fuerzas vivas aplicadas al cuerpo lo equilibran.

Complementando el concepto medular de la Mecánica, o sea el de la fuerza y sus efectos, otros grandes investigadores contribuyeron a estructurar científicamente estos conocimientos. Así, Huyghens (1629 a 1695) llevó a cabo la determinación de  $g$ <sup>1</sup>, estudió la fuerza centrífuga, la aceleración centrípeta y obtuvo la relación entre el trabajo y la energía; Varignon (1654 a 1722) formuló al mismo tiempo que Newton la *ley del paralelogramo de las fuerzas*; Euler (1707 a 1783) planteó el concepto de momento de inercia y los Bernoulli: Juan (1667 a 1748), Jacobo (1654 a 1705) y Daniel (1700 a 1782) estudiaron, entre otras cosas, *la ley del péndulo compuesto*, *el principio de la conservación de la energía* y *la generalización de la segunda ley de Kepler*.

Ya en pleno siglo diecinueve Laplace (1749 a 1827) escribe su *Mecánica Celeste*, Gauss (1777 a 1855) enuncia su *teoría del equilibrio de los líquidos*, Poisson (1781 a 1842) desarrolla la *dinámica de los cuerpos elásticos* y Coriolis (1792 a 1843) *define el trabajo como la fuerza por la distancia que se desplaza el cuerpo*.

Este esquema de la Mecánica fue satisfactorio hasta el siglo diecinueve; sin embargo, tal concepción pertenecía a la Época de la Ilustración que había llegado a su fin con la Revolución Francesa, iniciándose la revolución científica consistente en un desarrollo tan grande de las ciencias que era necesario someterlas a subdivisiones a fin de no impedir su ulterior evolución.

La Mecánica, siendo la precursora de todas las ciencias, no podía ser la excepción, de modo que cuando Einstein (1878 a 1955), Heisenberg (1901 a 1976), Schrödinger (1887 a 1961) y Born (1882 a 1970) pusieron en tela de juicio sus leyes, nuevas perspectivas se abren para ella, siendo necesario denominarla "*Mecánica Clásica o Newtoniana*", ya que sobrevienen otros enfoques de la misma ciencia cuya estructura teórica se basa en leyes diferentes a las que formuló Newton.

En efecto, la validez de las leyes de la Mecánica Clásica se restringe al movimiento de los cuerpos que observamos cotidianamente, en los cua-

---

<sup>1</sup>  $g$  = aceleración de la gravedad terrestre.

les la masa es relativamente grande (considerada invariable) y su rapidez comparativamente pequeña.

Si los cuerpos en estudio se mueven con rapidezces próximas a la de la luz, los conceptos de masa, espacio y tiempo dejan de ser absolutos y, por lo tanto, las leyes de la Mecánica Clásica ya no se cumplen, debiéndose recurrir a los principios de la Mecánica Relativista, creada por Einstein en 1905.

Por otra parte, cuando se inició el estudio de las micropartículas pudo comprobarse que su movimiento tampoco se ajustaba a las leyes de la Mecánica Clásica, ya que en lugar de fuerzas intervienen estados cuánticos; esta hipótesis, emitida por Planck (1858 a 1947) al estudiar las propiedades de la radiación del *cuerpo negro*<sup>1</sup>, condujo a la idea de que las partículas son ondas.

En resumen, la Mecánica Cuántica se inicia desde la interpretación de la radiación del cuerpo negro de Planck hasta la teoría del átomo de Bohr (1885 a 1962), extendiéndose rápidamente, a principios de nuestro siglo, al fenómeno fotoeléctrico y luego a los sistemas atómicos.

De todo lo expuesto en la reseña histórica anterior pueden esbozarse las siguientes definiciones:

**MECANICA CLASICA** es la ciencia que, basada en las leyes de Newton, *estudia el movimiento de los cuerpos y las causas que lo producen, cuando las rapidezces son pequeñas comparadas con la de la luz.*

**MECANICA RELATIVISTA:** *Estudia el movimiento de los cuerpos que se desplazan con una rapidez próxima a la de la luz, teniendo en cuenta que nunca podrán igualarla y aceptando que la velocidad de la luz es invariante para cualquier observador.*

**MECANICA CUANTICA:** *Su campo de estudio es el movimiento de cuerpos sumamente pequeños (micropartículas) que se mueven a grandes velocidades.*



<sup>1</sup> El cuerpo negro es aquel que absorbe por entero las radiaciones electromagnéticas que inciden en él.

## 1.2 CONCEPTOS BASICOS

De las tres modalidades de la Mecánica aquí sólo se abordará a la Mecánica Clásica, en cuya definición se encuentran involucrados los conceptos de *fuerza*, *cuerpo* y *movimiento*.

¿Qué significan estos conceptos en el ámbito de la Mecánica Clásica?

**FUERZA:** *Es la acción mutua de un cuerpo sobre otro, ya sea por contacto o a distancia.*

**CUERPO:** *Es una porción de materia cuya principal característica es su masa y ésta, a su vez, se definirá como la capacidad que posee cada cuerpo de oponerse a modificar su estado de movimiento al ser solicitado por una fuerza.*

A la anterior definición suele denominársele *inercia*, por lo que puede afirmarse que *la masa de un cuerpo es una medida de su inercia*.

Teniendo en cuenta que la masa es invariable en cada uno de los cuerpos, hay que recordar que ellos se presentan en la naturaleza bajo la constitución de *sólidos* o bien de *fluidos*.

Aquí se limitará la atención al movimiento de los cuerpos sólidos.

Si a un cuerpo sólido se le mantiene confinado y al aplicársele una fuerza no se deforma, entonces es un *sólido rígido*, pero si ocurre lo contrario será un *sólido deformable*.

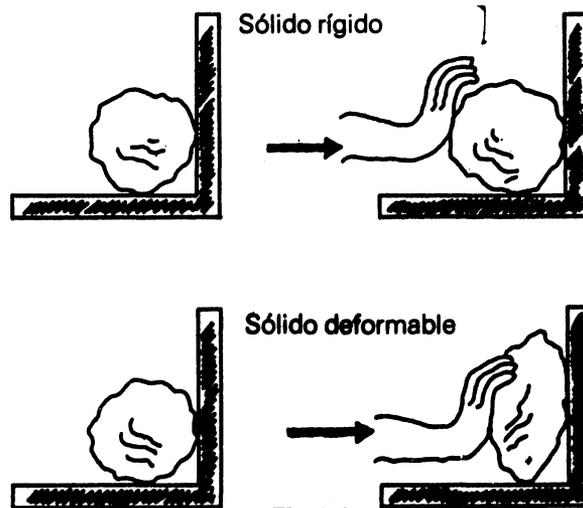


Fig 1.1

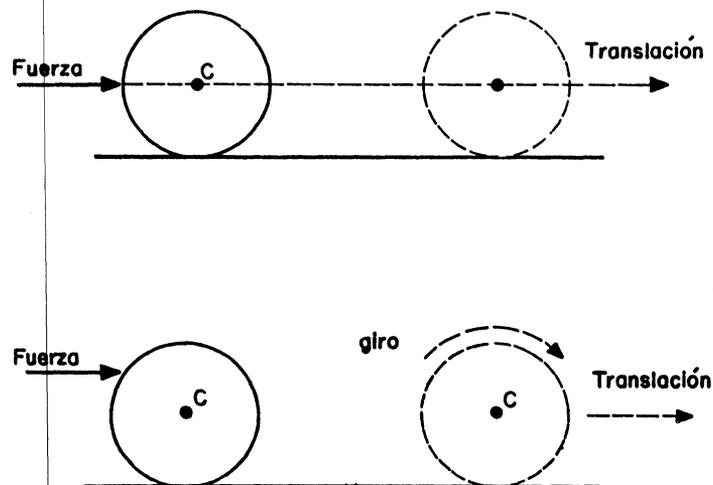
Debido a que las características mecánicas de los sólidos deformables se estudian en cursos más avanzados, se continuará el análisis enfocándose al sólido rígido; para ello se debe recordar que todos los cuerpos están formados de moléculas y, por consecuencia, todos sin excepción son deformables y las deformaciones que manifiestan son tan diversas que sería imposible analizarlas en su totalidad, de ahí que sólo se estudien aquellas que interesen en determinado análisis.

Cuando se toma sólo una parte de la realidad natural se está creando un *modelo*. En el caso anterior se trata de un modelo de cuerpo denominado *cuerpo deformable*.

En otras ocasiones la deformación de un sólido es imperceptible, siendo útil suponerlo indeformable o rígido por lo cual a este modelo se le denomina *cuerpo rígido*.

En los modelos de cuerpo definidos hasta aquí se considera importante no sólo su masa, sino también sus dimensiones.

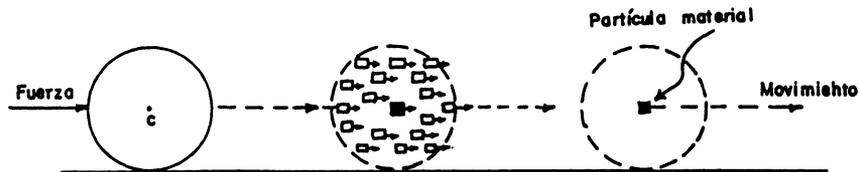
Ahora considérese un cuerpo rígido circular bidimensional, que puede desplazarse sobre una superficie lisa horizontal, tal como se observa en la figura 1.2. ¿Qué sucederá si se le aplica una fuerza horizontal? Es claro que se moverá: trasladándose únicamente si la fuerza se aplica en su centro; girando y trasladándose en caso contrario.



**Fig 1.2**

Así pues, el efecto mostrado por un cuerpo sometido a la acción de una fuerza puede ser el de modificación de su estado de movimiento y el de deformación y, como ya se declaró, corresponde a otros cursos el análisis de este último efecto.

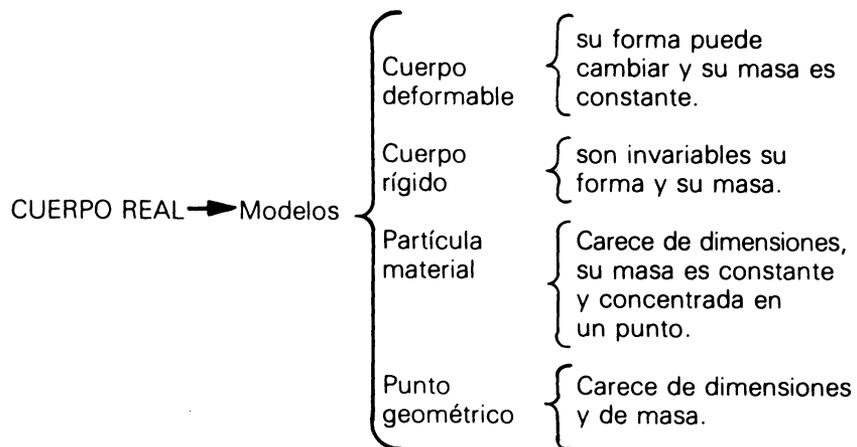
Si de las dos maneras de movimiento interesa estudiar solamente el desplazamiento, sin giro, es ventajoso suponer al cuerpo como si fuera una partícula, ya que todas las partículas que lo forman se mueven del mismo modo.



**Fig 1.3**

A esa partícula representativa de todo el cuerpo le atribuimos la totalidad de su masa, como si estuviera concentrada en un punto y por esta razón a este modelo de cuerpo se le denomina *partícula material* o *punto-masa*.

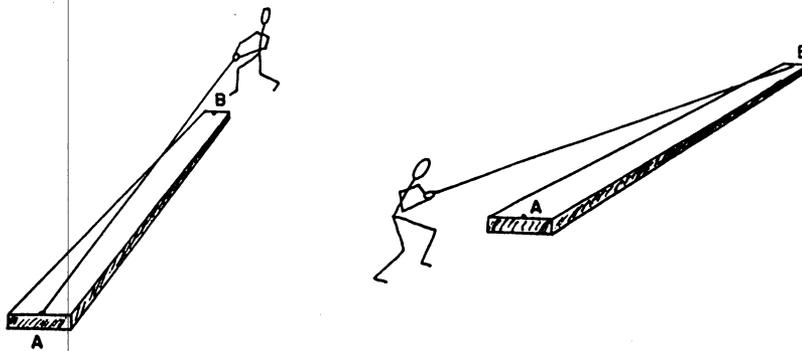
Y en el límite de la abstracción resulta de particular utilidad el modelo de cuerpo *punto geométrico*, en el cual no se considera relevante la masa ni las dimensiones del mismo en determinado análisis.



**MOVIMIENTO:** Por experiencia cotidiana se sabe que un cuerpo se encuentra en movimiento si después de hallarse en un lugar posteriormente ocupa otro, o sea que recorre cierta distancia y al hacerlo tarda determinado tiempo.

- Consecuentemente, el movimiento involucra los conceptos de longitud y tiempo que, como ya se mencionó, son cantidades invariables en la Mecánica Clásica.

• Cuando una cantidad no varía, cualquiera que sea el modo de medirla se denomina *cantidad escalar*; tal es el caso de la longitud, la masa y el tiempo. Por ejemplo, la longitud de cierta barra será la misma, ya sea que se mida de A hacia B o de B hacia A.

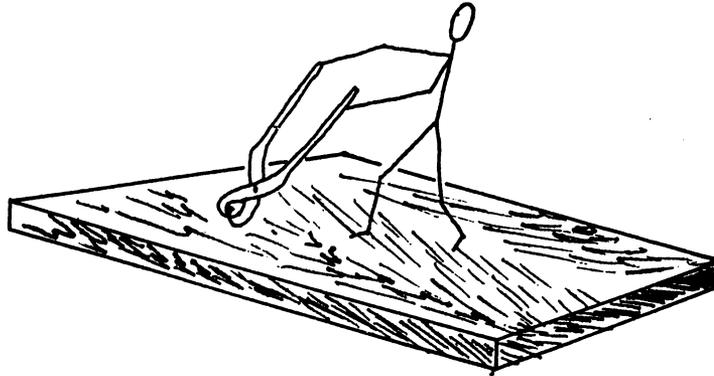


**Fig 1.4**

Una cantidad escalar es, en resumen, la que *puede definirse por completo al conocerse su magnitud*.

Existen otras clases de cantidades en las que no es suficiente saber su magnitud para comprender cabalmente su significado.

Por ejemplo, si se quiere extraer un clavo de un tablón de madera con unas pinzas, esto se logrará más fácilmente si la fuerza muscular se aplica jalándolo en la dirección que tenga dicho clavo, pero nunca se sacaría si se empujara en lugar de jalarlo.

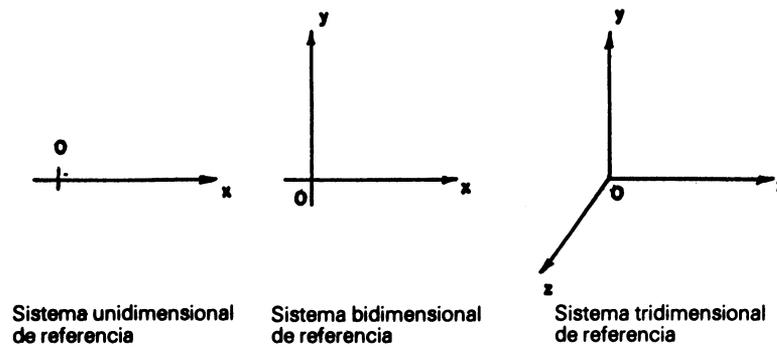


**Fig 1.5**

Este sencillo ejemplo demuestra que cuando se aplica una fuerza a un cuerpo *no basta con conocer su magnitud* para determinar el efecto que le causará; se requiere, además, *la dirección y el sentido* de tal fuerza. A este tipo de cantidades, como la fuerza, la velocidad, la aceleración, etc., se les conoce con el nombre de *cantidades vectoriales*.

Pero para conocer el significado del concepto *dirección* es necesario establecer previamente una referencia con respecto a la cual se mida. Así, por ejemplo, la dirección de los vientos se mide respecto a los puntos cardinales.

La dirección de una fuerza suele medirse con respecto a un sistema de referencia, consistente en una recta, dos rectas o tres perpendiculares entre sí, que se denominan *ejes de referencia*.

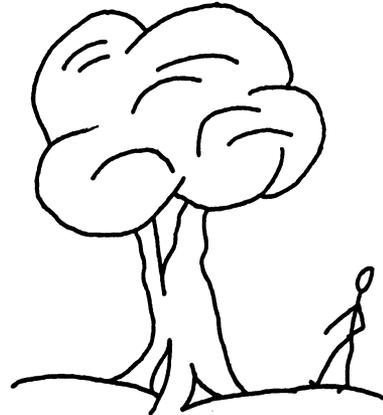


**Fig 1.6**

Estos sistemas reciben el nombre de "sistemas rectangulares" debido a que los ejes de referencia forman entre sí ángulos rectos y sirven de base para otros sistemas, como los de coordenadas cilíndricas y los de coordenadas polares, cuyo absoluto dominio es requisito previo para el estudio de los fenómenos mecánicos.

La anterior advertencia obedece a que además de las fuerzas, también el análisis del movimiento requiere de los sistemas de referencia.

Por ejemplo, es posible que un niño piense que un árbol jamás cambia de lugar en el espacio (no se considera el eventual movimiento de sus ramas), es decir, que se encuentra en reposo; pero esto no es cierto ya que se mueve junto con la Tierra sobre la cual está.



**Fig 1.7**

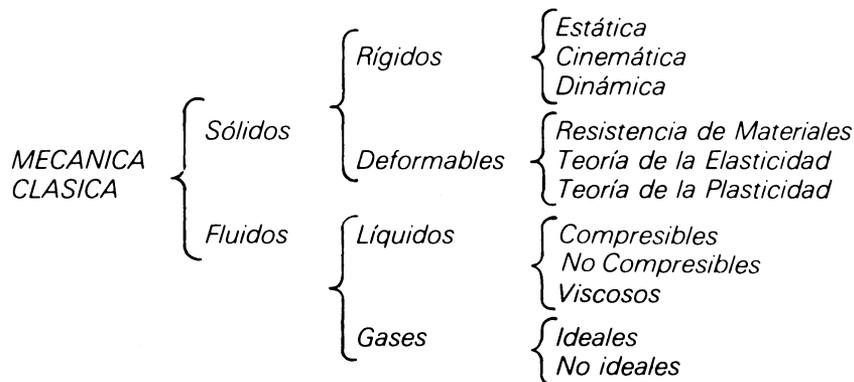
Sin embargo, al adoptar como sistema de referencia a la Tierra, entonces adquiere validez la percepción del niño.

Este razonamiento conduce a la conclusión de que en el Universo ningún cuerpo se encuentra en reposo, pues este estado es admisible únicamente con respecto a un sistema de referencia que se mueva de la misma manera que el cuerpo en estudio.

Asimismo, al ocuparse del caso más general de movimiento de un cuerpo, es necesario saber con respecto a qué se estudia su movimiento.

### 1.3 LEYES DEL MOVIMIENTO Y LEY DE LA GRAVITACION UNIVERSAL DE NEWTON

Como la Mecánica es la ciencia encargada del estudio del movimiento de los cuerpos es muy conveniente dividirla, atendiendo exclusivamente a sus diversos estados fácticos y a sus idealizaciones, como se indica en seguida:



Basta recordar una vez más que sólo se llevará a cabo en lo que sigue, el estudio de la Mecánica de los cuerpos sólidos rígidos.

Por otra parte, como se mencionó anteriormente la Mecánica Clásica, tal como se conoce hoy en día, fue resultado de todo un proceso ininterrumpido de formación, en el cual se fueron estableciendo de manera natural las diferentes modalidades de dicha ciencia.

Así por ejemplo, la Estática pertenece al más remoto periodo de la Mecánica, que comienza en la antigüedad griega, pasando por toda la pléyade de genios, hasta terminar en la época del surgimiento de la Mecánica moderna por obra de Galileo y sus contemporáneos mas jóvenes.

En efecto, al examinar en su totalidad el periodo del desarrollo de la Mecánica que abre Galileo, continúa Huyghens y cierra Newton, se observa que esta ciencia llega a su plenitud con la formación de la Cinemática y la Dinámica.

### 1.3.1 LEYES DE NEWTON DEL MOVIMIENTO

No es sino hasta la aparición, en 1686, de los "Philosophiae Naturalis Principia Mathematica" de Sir Isaac Newton, que la Mecánica establece sus cimientos a partir de las *leyes newtonianas del movimiento*, las cuales fueron enunciadas como axiomas, de la siguiente forma:

#### *PRIMERA LEY*

*Todo cuerpo persevera en su estado de reposo o de movimiento uniforme y en línea recta, salvo en cuanto muda su estado obligado por fuerzas exteriores.*

#### *LEY II*

*El cambio de movimiento es proporcional a la fuerza motriz imprimida y se efectúa según la línea recta en dirección de la cual se imprime dicha fuerza.*

#### *LEY III*

*A toda acción se opone siempre una reacción contraria e igual; es decir las acciones entre dos cuerpos son siempre iguales entre sí y dirigidas en sentido contrario.*

Estas leyes explican y correlacionan las fuerzas, consideradas como causas y los efectos, como el movimiento o la deformación, que se presentan en los cuerpos.

Una fuerza al actuar sobre un cuerpo trata de modificar su estado inicial de movimiento de traslación y/o de rotación.

Existen casos en los cuales al actuar fuerzas sobre los cuerpos les proporcionan equilibrio externo respecto a un sistema fijo. Este equilibrio bien puede manifestarse como movimiento nulo, llamado también "reposo", o como movimiento rectilíneo uniforme.

*De la primera ley, o ley de la inercia, se concluye que en un cuerpo en reposo o con movimiento rectilíneo con velocidad constante, la suma de todas las fuerzas que actúan sobre él es cero.*

La segunda ley es básicamente el cimiento de la Mecánica y suele expresarse matemáticamente como:

$$\frac{d(m \vec{v})}{dt} = \vec{F} \quad . . . . . \quad 1.1$$

en donde  $m\vec{v}$  se conoce como la cantidad de movimiento. En esta ecuación, al considerar a la masa  $m$  como un valor constante se tendrá:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} ; \text{ y como } \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}$$

$$m \vec{a} = \vec{F} \quad . . . . . \quad 1.2$$

En esta fórmula se resume la Segunda Ley

Si un cuerpo de masa  $m_1$  se somete a la acción de una fuerza  $\vec{F}_1$ , adquiere una aceleración  $a_1$  en la misma dirección de  $\vec{F}_1$  teniéndose que:

$\vec{F}_1 = m_1 \vec{a}_1$ , al despejar la masa:

$$m_1 = \frac{F_1}{a_1} \quad . . . . . \quad 1.3$$

Si ahora el mismo cuerpo se sujeta a una fuerza  $\vec{F}_2$  este se acelerará con una aceleración  $\vec{a}_2$ , teniéndose que:

$$m_1 = \frac{F_2}{a_2} \quad . . . . . \quad 1.4$$

Y como las expresiones 1.3 y 1.4 deben ser iguales.

$$m_1 = \frac{F_1}{a_1} = \frac{F_2}{a_2}$$

Por lo tanto esta ley establece la independencia de la masa del cuerpo respecto a la fuerza y el tiempo.

La tercera ley indica que las fuerzas siempre ocurren en pares. Si a una fuerza se le llama la acción y a otra la reacción, debe entenderse claramente que la acción y la reacción nunca pueden actuar sobre el mismo cuerpo. Por ejemplo, un hombre ejerciendo una fuerza  $F$  contra la pared, experimenta una fuerza igual y opuesta ejercida por la pared sobre él.

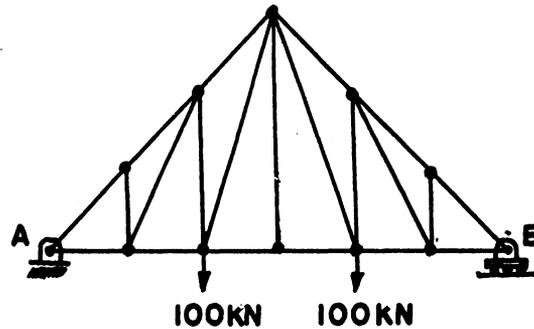
La primera y tercera leyes son aplicables a los cuerpos en equilibrio y fundamentan el campo de la Estática. Por otra parte en la primera y la segunda leyes las mediciones son realizadas con respecto a un sistema fijó de referencia.

Cabe resaltar que el estudio del movimiento variado, contenido en la segunda ley, conforma los campos de la Cinemática y Dinámica. Cuando se describe cómo se mueven los cuerpos se está haciendo un estudio cinemático de ellos, en tanto que si se habla del movimiento de los cuerpos tomando en cuenta las causas que lo producen se está haciendo un estudio dinámico de dichos cuerpos. Un caso particular de esto último es cuando los cuerpos están en reposo o bien con velocidad rectilínea constante, para cuyo estudio se tiene que hacer empleo de la Estática. Por tanto, al atender al tipo de movimiento de los cuerpos, la Mecánica se divide en:

MECANICA CLASICA		Estática
		Cinemática
		Dinámica

A fin de observar mejor las diferencias entre cada una de estas partes identifíquese a cuál de ellas pertenecen cada uno de los siguientes problemas.

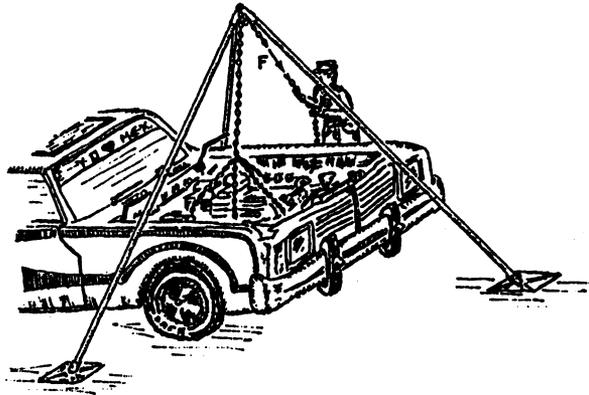
*Ejemplo 1.1* Se requiere determinar el valor de las fuerzas de tensión o de compresión a que están sometidas cada una de las barras de la armadura Pratt, utilizada para techo, mostrada en la figura 1.8.



**Fig 1.8**

*Solución:* Este problema pertenece a la Estática, pues para su resolución es necesario considerar a la armadura sin movimiento, esto es en equilibrio. Además no se requiere calcular velocidades ni aceleraciones.

*Ejemplo 1.2* Para desmontar el motor de un automóvil el mecánico utiliza una estructura formada por tres tubos y un polipasto, tal como se muestra en la figura. A fin de levantar el motor de peso  $W$  una determinada altura  $h$  en un cierto lapso de tiempo  $t$ , se requiere conocer la potencia promedio ejercida por el mecánico.



**Fig 1.9**

*Solución:* Para resolver este problema se requiere emplear la teoría que utiliza la Dinámica, ya que aquí se involucra el movimiento de un cuerpo debido a la acción de una fuerza. Esto es, la relación de causas con efectos.

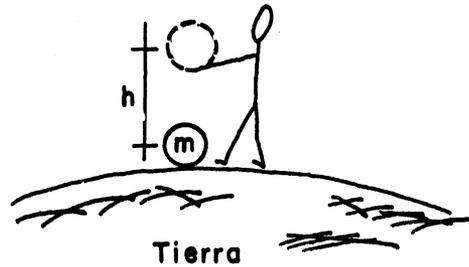
*Ejemplo 1.3* El Sistema de Transporte Colectivo (Metro) de la Ciudad de México registra una mayor afluencia de pasajeros durante el lapso comprendido de 6:30 a 10:00 h. Sabiendo el número de trenes disponibles, el número de estaciones y las distancias entre éstas, en cierta línea de transporte, se requiere determinar el mayor número de "corridos" que se pueden efectuar en dicho intervalo de tiempo.

*Solución:* Este problema corresponde a la Cinemática, pues para su resolución se necesita un estudio de desplazamientos, velocidades y aceleraciones exclusivamente, ya que con las características cinemáticas del movimiento tales como la aceleración, desaceleración y el tiempo de duración de éstas, que han de aplicarse a los trenes, se puede determinar el mayor número posible de "corridos" de éstos.

### 1.3.2 LEY DE LA GRAVITACION UNIVERSAL

Póngase atención al siguiente experimento:

Imagínese un cuerpo de masa  $m$  colocado en la superficie terrestre, tal como se muestra en la figura



**Fig 1.10**

Al intentar levantarlo lo primero que se siente es una resistencia u oposición al movimiento del cuerpo, el cual trata de permanecer en su posición original atraída por la Tierra.

Por otra parte piénsese que uno es lo bastante fuerte como para levantarlo cierta altura "h". Una vez hecho todo este esfuerzo suéltese; ¿qué pasa con el cuerpo? Inmediatamente se percibe que es atraído en forma acelerada a su posición original sobre la superficie terrestre. Esto nos induce a razonar que la Tierra nunca deja de atraer hacia ella a dicho cuerpo.

Lo anterior es válido para nuestro sistema planetario y en forma general para el Universo. Por ejemplo, la Tierra atrae a la Luna, a los planetas, al Sol, etc., y éstos a su vez la atraen hacia ellos.

**¿Qué produce y por qué se origina la atracción de los cuerpos?**

Newton se preguntó lo anterior y sólo pudo contestar la primera parte de la pregunta\* al enunciar *la Ley de la Gravitación Universal*, la cual, *rige la atracción de los cuerpos en el Universo*, de la siguiente forma:

*"Dos cuerpos son atraídos recíprocamente, uno hacia el otro, con una fuerza directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente al cuadrado de la distancia que separa dichos cuerpos"*.

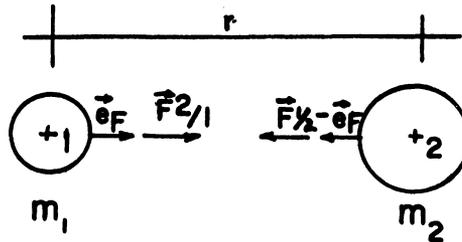
Utilizando vectores lo anterior suele expresarse matemáticamente como:

$$\vec{F}_g = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{e}_r \quad . . . . . \quad 1.5$$

\* La segunda ha quedado hasta la actualidad sin contestación.

donde:  $\vec{F}$  es la fuerza de atracción entre los cuerpos.  
 $G$  es la constante de Gravitación Universal y su valor es  $6.678 (10^{-11}) \text{ kg}^{-1} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$ .  
 $m_1$  y  $m_2$  son las masas de los cuerpos.  
 $r$  es la distancia que media del centro de un cuerpo al centro del otro.  
 $\vec{e}_f$  es un vector unitario el cual define la dirección de la fuerza de atracción.

Gráficamente se tendrá:



**Fig 1.11**

Se puede resaltar de estas fuerzas gravitacionales lo siguiente: dependen de la posición de los cuerpos en el espacio, existen debido a la atracción de las masas de los cuerpos\* y, por lo tanto, son exclusivamente fuerzas atractivas.

En lo que se refiere a su origen, estas fuerzas no son las únicas que existen dentro de los fenómenos que se presentan en la naturaleza, ya que también se presentan las fuerzas electromagnéticas y las fuerzas nucleares.

a) *Fuerzas electromagnéticas.* Son ejercidas por cuerpos cargados eléctricamente y pueden ser tanto de atracción como de repulsión. La ley de estas fuerzas fue descubierta por Coulomb:

$$\vec{F}_{1/2} = k \frac{q_1 q_2}{r_{1/2}^2} \vec{e}_{1/2} \quad \dots \dots \quad 1.6$$

donde :  $k = 8.99 (10^9) \frac{\text{N m}^2}{\text{C}^2}$

\* La comprobación de la Ley de la Gravitación Universal así como el cálculo de  $G$  fueron logrados por Henry Cavendish (1731-1810) en 1798 con su célebre balanza de torsión.

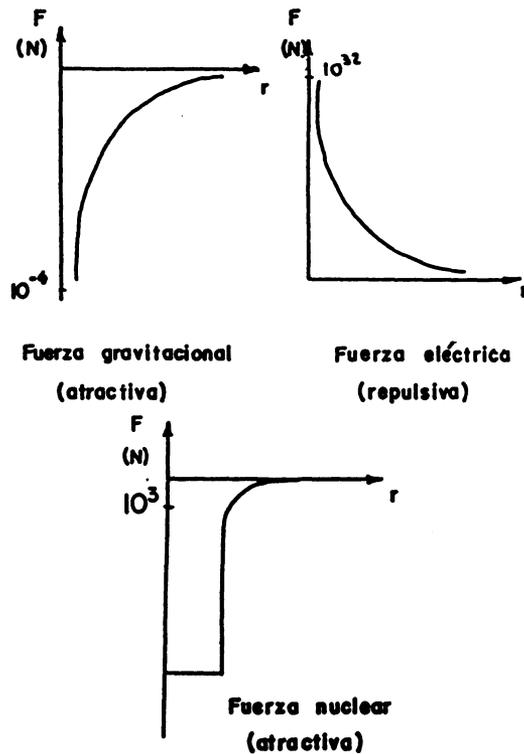
Dicha fórmula tiene una estructura idéntica a la de la Gravitación.

*b) Fuerzas Nucleares.* Son las fuerzas que actúan entre las partículas componentes del núcleo atómico. Se manifiestan como fuerzas de atracción muy intensas a distancias comprendidas entre  $1(10^{-11})$  y  $2(10^{-11})$  m y disminuyen al aumentar la separación entre las partículas. No se presentan de modo apreciable a separaciones mayores de  $2(10^{-11})$  m y probablemente a una distancia menor a  $1(10^{-11})$  m la atracción es sustituida por repulsión. Estas fuerzas no dependen de la carga eléctrica de las partículas y la desigualdad de masas y la existencia de carga eléctrica son circunstancias secundarias relativamente. Las fuerzas nucleares no dependen sólo de la distancia sino también de otros parámetros de la Mecánica Cuántica.

A efecto de observar la diferencia entre cada una de ellas se hará la comparación de las fuerzas que actúan entre dos protones situados a una distancia de  $10^{-11}$  m.

Tipos de Interacción	Fuerza Aproximada	Tipo de Fuerza
Gravitacional	1.86 $(10^{-32})$ N	atractiva
Coulombiana	2.31 $(10^{-2})$ N	repulsiva
Nuclear*	2 $(10^3)$ N	atractiva

\* Valor tomado del texto: "Física General y Experimental" de J. Goldenberg. Edit. Interamericana.



**Fig 1.12**

En las gráficas se observa que la interacción gravitatoria es la más débil de todas, a pesar de lo cual es la que mantiene el movimiento de la Tierra, enlaza el Sol y los planetas dentro del Sistema Solar y agrupa a las estrellas en las galaxias. Como dirían los astrónomos: "es la responsable del drama a gran escala del Universo".

Centrando la atención en la fuerza de atracción gravitatoria y regresando al problema con que abordamos este tema, se puede plantear lo siguiente. De todas las fuerzas de atracción que actúan sobre el cuerpo ¿cuál será la más significativa? Ya que el cuerpo está demasiado cerca de la Tierra y que la masa de ésta es muy grande se intuye que la atracción de la Tierra es la de mayor significación; dicha atracción es conocida también como peso.

*c) Peso: El peso de un cuerpo, en un cierto sistema de referencia, se define como la fuerza que aplicada al cuerpo, le proporcionaría una aceleración igual a la aceleración local de caída libre en ese sistema de referencia.*

Obsérvese que un mismo cuerpo colocado en distintas latitudes geográ-

ficas y en distintos lugares del espacio tendrá diferentes pesos, conservándose constante su masa.

En la Tierra, debido a que no es una esfera sino más bien un geode (cuya superficie se asemeja a un elipsoide) y al efecto de la fuerza centrífuga producida por la rotación del planeta, el peso de cualquier cuerpo aumenta del Ecuador hacia los polos; por esta razón en la Tierra suelen emplearse dos tipos de pesos: el absoluto y el relativo.

*Peso Absoluto:* Se define como aquél que tienen los cuerpos colocados sobre la superficie terrestre, a nivel del mar y a 45° de latitud norte.

*Peso Relativo:* Es aquél que tienen los cuerpos que se encuentran colocados en cualquier otra posición fuera de la indicada para el peso absoluto.

La aceleración que los cuerpos manifiestan debido a su peso absoluto es conocida como *aceleración estándar de la gravedad terrestre*. Si consideramos la masa de la Tierra, su radio en un punto a nivel del mar y 45° de latitud norte así como el efecto de rotación se tendrá que la gravedad estándar toma el valor de:

$g_0 = 9.806 \text{ m/s}^2$ , siendo útil, para la mayoría de los cálculos, tomar como valor de la gravedad estándar el de:  $g_0 = 9.81 \text{ m/s}^2$

Si  $W_A$  es el peso absoluto de un cuerpo de masa  $m$ , por la segunda ley de Newton se tendrá:

$$W_A = mg_0 \quad \dots \quad 1.7$$

y aplicando la Ley de Gravitación Universal:

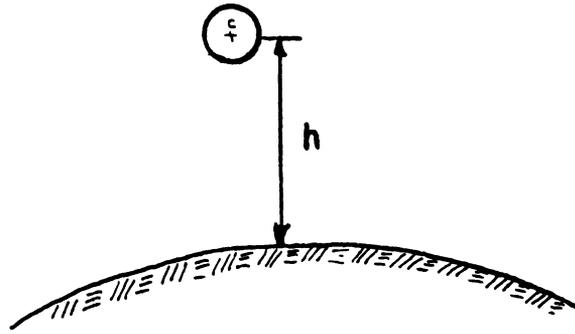
$$W_A = \frac{GmM_T}{(r_T)^2} \quad \dots \quad 1.8$$

con  $M_T = 5.98 (10^{24}) \text{ kg}$  (masa de la Tierra) y  $r_T = 6.371 (10^6) \text{ m}$  (radio medio de la Tierra).

Ya que el valor de  $g_0$  se cumple sólo en lugares específicos, para calcular la expresión de la gravedad relativa de un cuerpo ubicado a cualquier altura  $h$ , sobre la superficie (sin considerar el efecto de rotación), se procede de la siguiente forma:

$$W_r = mg_r \quad \dots \quad 1.9$$

$$W_r = \frac{GmM_T}{(r_T + h)^2} \quad \dots \quad 1.10$$



**Fig 1.13**

igualando 1.9 y 1.10.

$$g_r = \frac{G M_T}{(r_T + h)^2} \quad . . . \quad 1.11$$

igualando 1.7 y 1.8 y despejando  $M_T$ :

$$M_T = \frac{g_e r_T^2}{G} \quad . . . \quad 1.12$$

sustituyendo 1.12 en la 1.11

$$g_r = g_e \left( \frac{r_T}{r_T + h} \right)^2 \quad \text{con } (r_T + h) > 0 \quad . . . \quad 1.13$$

expresión que permite calcular la aceleración de la gravedad terrestre a cualquier altura h.

*Ejemplo 1.4* Ignorando la presencia de otros planetas y satélites, determinar la posición a que debe estar un cuerpo, de masa m, entre la Tierra y Venus a fin de que esté en equilibrio. Suponga que la distancia promedio entre la Tierra y Venus es  $d = 4.14 (10^{10})$  m y que sus masas son:  $m_T = 5.98 (10^{24})$  kg y  $m_V = 4.87 (10^{24})$  kg, respectivamente.

Solución: Gráficamente el problema queda de la forma siguiente:

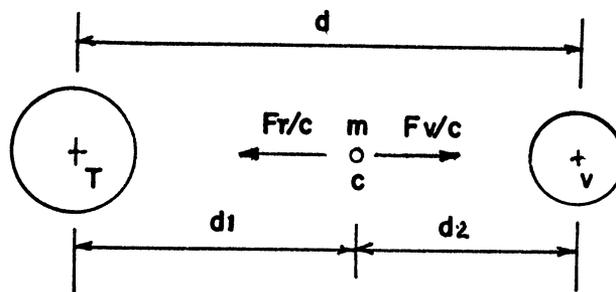


Fig 1.14

Sobre el cuerpo C de masa  $m$  actúan fuerzas que valen, según la ley de la Gravitación Universal lo siguiente:

$$F_{T/C} = \frac{G m m_T}{d_1^2} \quad \text{y} \quad F_{V/C} = \frac{G m m_V}{d_2^2}$$

ya que ambas fuerzas son iguales en magnitud, al igualar los segundos miembros:

$$\frac{m_T}{d_1^2} = \frac{m_V}{d_2^2}$$

$$\text{ordenando : } \left( \frac{m_T}{m_V} \right)^{1/2} = \frac{d_1}{d_2} \quad \dots \text{ a}$$

$$\text{como: } d_1 + d_2 = d$$

y  $d_1 = d - d_2$ , sustituyendo esto en (a):

$$\left( \frac{m_T}{m_V} \right)^{1/2} = \frac{d}{d_2} - 1 \quad \text{y haciendo operaciones:}$$

$$d_2 = \frac{d}{\left( \frac{m_T}{m_V} \right)^{1/2} + 1}, \quad \text{sustituyendo valores:}$$

$$d_2 = \frac{4.14 (10^{10}) \text{ m}}{\left( \frac{5.98 (10^{24}) \text{ kg}}{4.87 (10^{24}) \text{ kg}} \right)^{1/2} + 1} = 1.964 (10^{10}) \text{ m}$$

$$d_2 = 1.964 (10^{10}) \text{ m.}$$

$$d_1 = d - d_2 = 2.176 (10^{10}) \text{ m.}$$

*Ejemplo 1.5* Considerando una latitud de  $45^\circ$ , calcular el valor de la gravedad relativa  $g_r$  que se tendrá a las siguientes alturas:

- a) 1000 m
- b)  $1 \times 10^6$  m (valor promedio de la órbita de un satélite terrestre típico).
- c)  $3.8 \times 10^8$  m (valor promedio de la distancia entre la Tierra y la Luna).
- d) Además obtener el valor de la altura para la cual la gravedad terrestre es de  $0.5 g_s$ .

*Solución:* Aplicando la fórmula  $g_r = g_s \left( \frac{r_T}{r_T + h} \right)^2$  y considerando que el radio promedio de la Tierra es de  $r_T = 6.371 (10^6)$  m.

$$a) g_r = 9.81 \left( \frac{6.371 (10^6)}{6.371 (10^6) + 1 (10^3)} \right)^2 = 0.9997 g_s$$

$$\therefore g_r = 9.807 \text{ m/s}^2$$

$$b) g_r = 9.81 \left( \frac{6.371 (10^6)}{6.371 (10^6) + 1 (10^6)} \right)^2 = 0.747 g_s$$

$$\therefore g_r = 7.33 \text{ m/s}^2$$

$$c) g_r = 9.81 \left( \frac{6.371 (10^6)}{6.371 (10^6) + 3.8 (10^8)} \right)^2 = 2.72 (10^{-4}) g_s$$

$$\therefore g_r = 2.67 (10^{-3}) \text{ m/s}^2$$

$$d) g_r = \frac{g_s}{2} = g_s \left( \frac{r_T}{r_T + h} \right)^2, \text{ de donde:}$$

$$\frac{1}{2} = \left( \frac{r_T}{r_T + h} \right)^2, \text{ despejando h:}$$

$$h = \frac{r_T}{(1/2)^{1/2}} - r_T \text{ y sustituyendo valores:}$$

$$h = \frac{6.371 (10^6)}{(1/2)^{1/2}} - 6.371 (10^6)$$

$$h = 2.64 (10^6) \text{ m}$$

## 1.4 EFECTOS EXTERNOS E INTERNOS QUE PRODUCEN LAS FUERZAS AL ACTUAR SOBRE LOS CUERPOS

Como se mencionó al estudiar la segunda ley de Newton, si sobre un cuerpo actúan fuerzas le producen ciertos efectos, ya sea en su estado de movimiento (externamente) o bien en su forma (internamente). Dependiendo del modelo de cuerpo se pueden tener los siguientes casos:

### 1.4.1 EFECTOS EXTERNOS

Un cuerpo rígido, y también el deformable, podrá manifiestar:

- a) *Variación en su cantidad de movimiento, conocida como aceleración del cuerpo, si la suma de las fuerzas externas es diferente de cero.*
- b) *Equilibrio, si la suma de las fuerzas externas es igual a cero.*

### 1.4.2 EFECTOS INTERNOS.

*Para un cuerpo rígido se tendrá que, únicamente estará sometido a mayor compresión interna, mientras que el cuerpo deformable manifestará una alteración en su forma.*

## 1.5 CLASIFICACION DE FUERZAS

La fuerza se definió como la interacción de un cuerpo sobre otro y se mencionó que ésta podría ocurrir ya sea por contacto o a distancia, por lo que en una primera instancia, atendiendo a la forma en que se presentan, las fuerzas se clasifican como: fuerzas a distancia y fuerzas por contacto.

### 1.5.1 FUERZAS A DISTANCIA.

Fuerzas de largo alcance. Se generan sin la necesidad de que los cuerpos se toquen. Ejemplos típicos son los que se presentan en: campos gravitatorios, magnéticos, eléctricos, etc. Pueden ser de atracción o de repulsión.

### 1.5.2 FUERZAS POR CONTACTO.

*Surgen cuando los cuerpos se tocan.* Ejemplos de estas fuerzas son: las de fricción, tensión superficial, capilaridad, etc.

Por otra parte de acuerdo a la tercera ley de Newton las fuerzas pueden clasificarse en dos grupos: fuerzas activas y reactivas.

### 1.5.3 FUERZAS ACTIVAS

*Son aquéllas que tratan de alterar el estado inicial de movimiento de un cuerpo.*

### 1.5.4 FUERZAS REACTIVAS.

*Tratan de conservar el estado inicial de movimiento de un cuerpo. Se generan sólo como consecuencia de una fuerza activa.*

### 1.5.5 FUERZAS DISTRIBUIDAS.

Además de lo anterior, de acuerdo a su distribución las fuerzas pueden clasificarse como:

Fuerzas Distribuidas

*Discretamente. Cuando están aplicadas en un área despreciable al compararse con la totalidad del cuerpo. Suelen considerarse aplicadas en un punto.*

*Continuamente. Cuando se localizan aplicadas en un área que no es despreciable en comparación con la totalidad del cuerpo.*

Otra forma de clasificar a las fuerzas se da de acuerdo a como se apliquen éstas a un sistema determinado. Pudiendo ser: fuerzas externas e internas.

### 1.5.6 FUERZAS EXTERNAS.

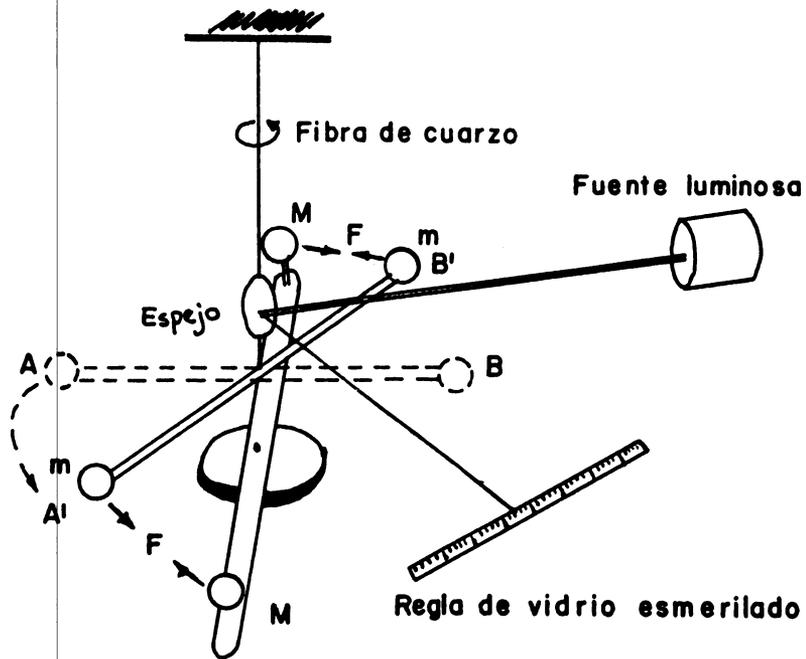
*Son aquéllas que no están dentro del sistema considerado.*

### 1.5.7 FUERZAS INTERNAS.

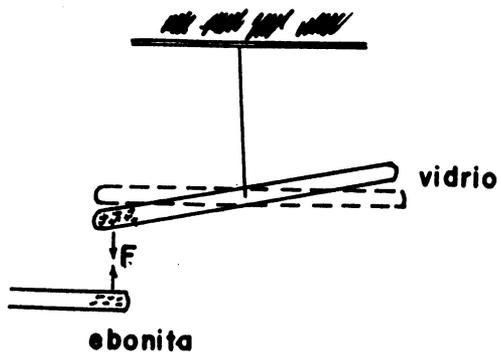
*Están contenidas dentro del sistema considerado.*

Por último, si las fuerzas actúan a lo largo de uno, dos o tres ejes determinados se clasifican como: fuerzas uniaxiales, biaxiales o triaxiales.

*Ejemplo 1.6* Las fuerzas a distancia pueden ejemplificarse como las que se generan en la balanza de torsión por efecto de la atracción de las masas; también las de atracción eléctrica que se manifiestan entre dos barras previamente frotadas.



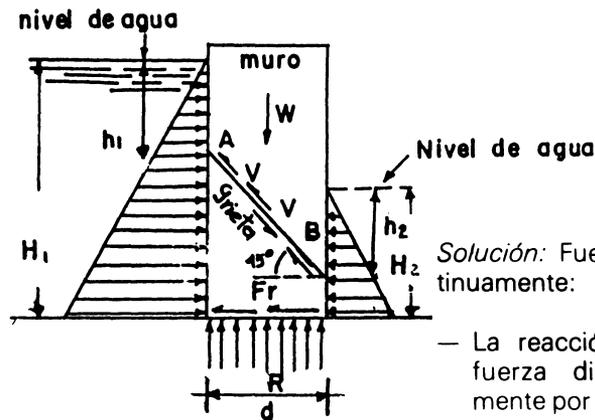
Balanza de Torsión de Cavendish



Fuerza de Atracción Eléctrica

Fig 1.15

**Ejemplo 1.7** Considérese el muro de contención, que se muestra en la figura 1.16, el cual está sujeto al efecto de las distintas fuerzas que ahí se indican. Clasifíquense dichas fuerzas, acorde con los planteamientos precedentes. Desprecie el efecto de las subpresiones.



**Fig 1.16**

*Solución:* Fuerzas distribuidas continuamente:

- La reacción del suelo es una fuerza distribuida constantemente por unidad de longitud.
- Las cargas hidrostáticas sobre el muro, de espesor unitario, son fuerzas con distribución triangular.

Fuerzas a distancia:

- El peso  $W$  del muro

Fuerzas por contacto:

- Cargas hidrostáticas sobre las paredes del muro ( $H_1$  y  $H_2$ )
- Reacción del suelo en la base del muro ( $R$ )
- Fricción en la base del muro ( $F_r$ ) y en la grieta.

Fuerzas activas:

- El peso  $W$  del muro
- Cargas hidrostáticas sobre las paredes del muro ( $H_1$  y  $H_2$ )

Fuerzas reactivas:

- Reacción del suelo en la base del muro ( $R$ )
- Fricción en la base del muro ( $F_r$ )
- Cortante ( $V$ ) a lo largo de la grieta  $AB$

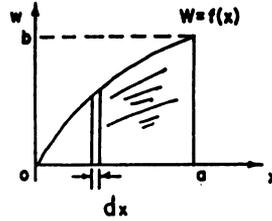
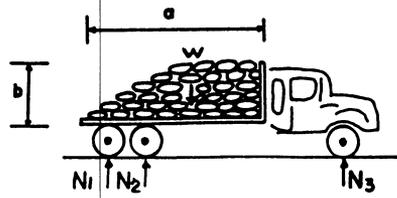
Fuerzas externas (respecto al muro):

- Fuerzas debidas al empuje del agua ( $H_1$  y  $H_2$ )
- Reacción del suelo ( $R$ )
- El peso  $W$  del bloque
- Fricción en la base del muro ( $F_r$ )

Fuerzas internas (respecto al muro):

- Fuerzas a lo largo de la grieta

Ejemplo 1.8 Identificar las fuerzas en los siguientes casos:



Las fuerzas de reacción del pavimento sobre las llantas (N) son fuerzas concentradas.

El peso total de la carga del camión (W) se encuentra distribuido como se muestra, donde W = peso por unidad de longitud.

$$W = \int_0^a f(x) dx$$

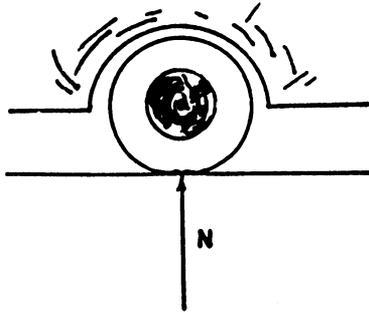


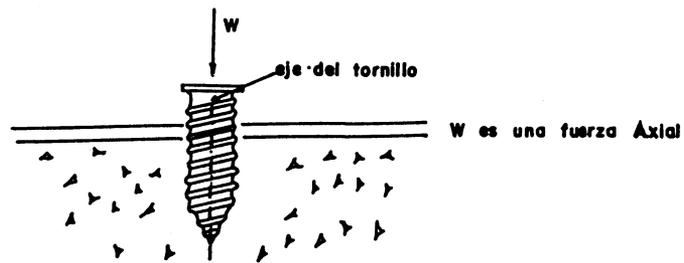
Fig 1.17

En el rodillo liso utilizado para compactar el pavimento se tiene:



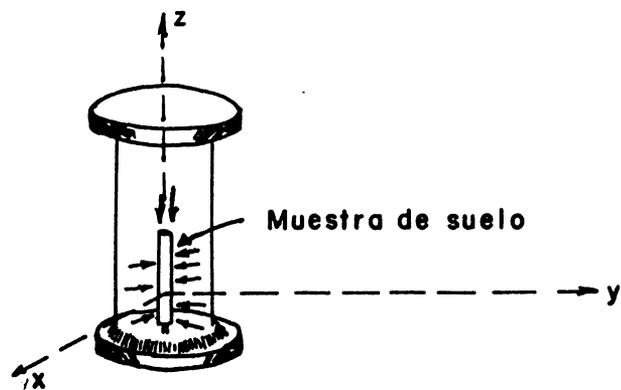
Fig 1.18

Sobre el tornillo actúa una carga concentrada  $W$ .



**Fig 1.19**

Para la muestra de suelo se tendrá:



**Cámara de presión triaxial**

**Fig 1.20**

La presión que se ejerce sobre el suelo es triaxial.

## **1.6 REPRESENTACION DE UNA FUERZA**

Como se mencionó las fuerzas cumplen las características intrínsecas a todo vector: magnitud, dirección y sentido. Por tanto a toda fuerza puede asociársele un vector representativo, el cual se puede expresar bien sea en forma gráfica o bien en forma analítica. En lo que sigue se utilizará el símbolo  $F$  para denotar el vector de la fuerza con una orienta-

ción determinada y  $F$  para expresar su módulo.

### 1.6.1 REPRESENTACION GRAFICA DE UNA FUERZA.

Cualquier fuerza puede ser representada como se muestra en la figura 1.21, donde su magnitud  $F$  se mide a una escala conveniente de  $A$  a  $B$ , su dirección se define con respecto a un sistema de referencia y su sentido está indicado mediante la flecha colocada al final del vector  $\vec{F}$ .

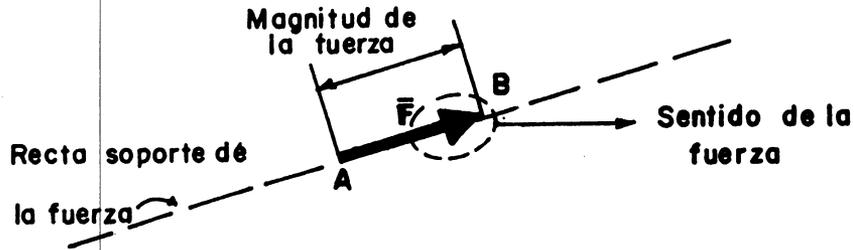


Fig 1.21

Por ser costumbre generalizada se asociará el término dirección al de sentido; esto es, un vector con cierta dirección tendrá implícitamente un sentido.

### 1.6.2 REPRESENTACION ANALITICA DE UNA FUERZA.

Por otra parte, dentro de los sistemas rectangulares de referencia, las fuerzas se expresan por medio de sus componentes rectangulares. Así en la figura 1.22 se observa una fuerza en el espacio y sus componentes rectangulares.

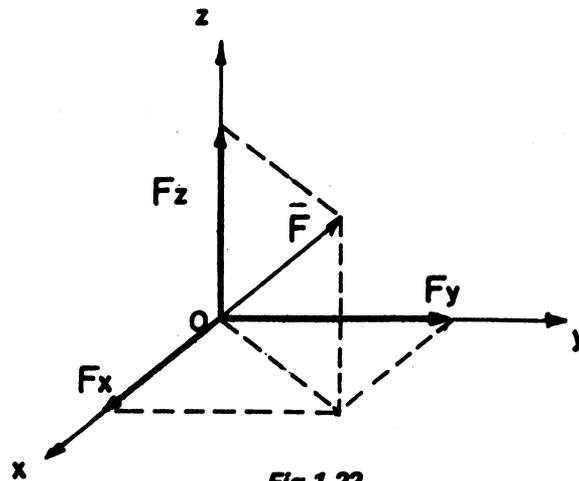


Fig 1.22

Conviene señalar que las anteriores representaciones son, como su nombre lo indica, modelos mediante los cuales se logra facilitar el manejo de las fuerzas.

a) Expresión vectorial de una fuerza. La fuerza mostrada en la figura 1.22 se representa vectorialmente como:

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k} \quad \dots \dots \quad 1.14$$

donde:  $\vec{F}$  es el vector representativo de la fuerza  $F_x$ ,  $F_y$ ,  $F_z$  son las componentes rectangulares de la fuerza.  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$ . Son vectores unitarios que definen las direcciones positivas de los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$ , respectivamente.

La expresión anterior se obtiene generalmente a partir del módulo de la fuerza  $|\vec{F}|$  y del vector unitario de la recta soporte de la fuerza. Si  $\vec{e}_F$  es un vector unitario orientado en forma colineal con la línea de acción de la fuerza y en sentido de ésta se tendrá:

$$\vec{F} = F \vec{e}_F \quad \dots \dots \quad 1.15$$

Al segundo miembro de la ecuación 1.15 se le conoce como expresión vectorial equipolente de la fuerza  $F$ . El término equipolencia permite asociar entre sí expresiones modulares diferentes, estructuralmente hablando. Así pues las expresiones del segundo miembro de las ecuaciones 1.14 y 1.15 son equipolentes entre sí debido a que están relacionadas directamente con el mismo vector  $\vec{F}$ .

A pesar de lo anterior se utilizará, como es costumbre, el término vector equipolente de una fuerza para designar a la expresión  $\vec{F}$ .

Es bueno recordar que a partir del vector  $\vec{F}$  se puede obtener el módulo de la fuerza el cual se calcula mediante la expresión  $|\vec{F}| = \sqrt{\vec{F} \cdot \vec{F}}$ .

El cálculo del vector unitario  $\vec{e}_F$  puede obtenerse mediante cualquiera de las siguientes formas:

*A partir de los cosenos directores de la recta orientada que contiene a la fuerza.*

Si  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  son los ángulos directores de la recta orientada  $\vec{L}$ , entonces  $\cos \alpha$ ,  $\cos \beta$  y  $\cos \gamma$  se llaman cosenos directores de  $\vec{L}$ .

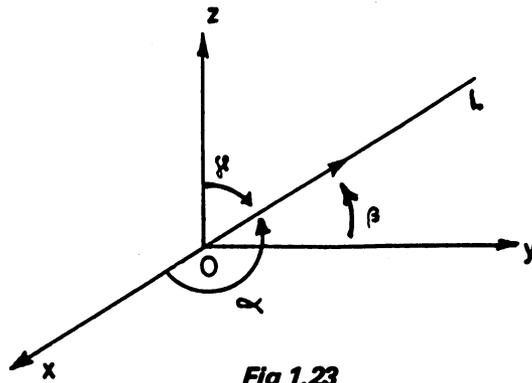


Fig 1.23

$$\vec{e}_L = \cos \alpha \vec{i} + \cos \beta \vec{j} + \cos \gamma \vec{k} \quad \dots \dots \dots 1.16$$

A partir de los números directores de la recta orientada  $\vec{L}$  que contiene a la fuerza.

Si  $P_1(x_1, y_1, z_1)$  y  $P_2(x_2, y_2, z_2)$  son dos puntos de  $\vec{L}$ , tal como se observa en la figura se tendrá que:

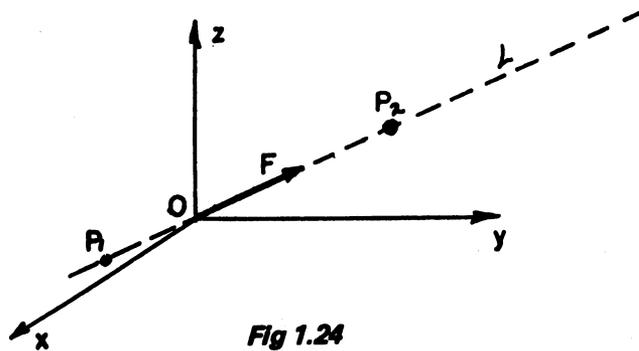


Fig 1.24

$$\boxed{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1}$$

constituyen un conjunto, dentro del número ilimitado de conjuntos que se pueden tener, de números directores para L; en base a lo anterior:

$$\vec{e}_L = \frac{\vec{P_1 P_2}}{|\vec{P_1 P_2}|} = \frac{(x_2 - x_1) \vec{i} + (y_2 - y_1) \vec{j} + (z_2 - z_1) \vec{k}}{\{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2\}^{0.5}} \quad \dots \dots 1.17$$

**Ejemplo 1.9** Sobre un poste que soporta un anuncio se ejerce, mediante un tensor, una fuerza de 3 kN tal como se muestra en la figura:

- a) Expresar vectorialmente dicha fuerza.  
 b) Indicar los ángulos directores de la fuerza.

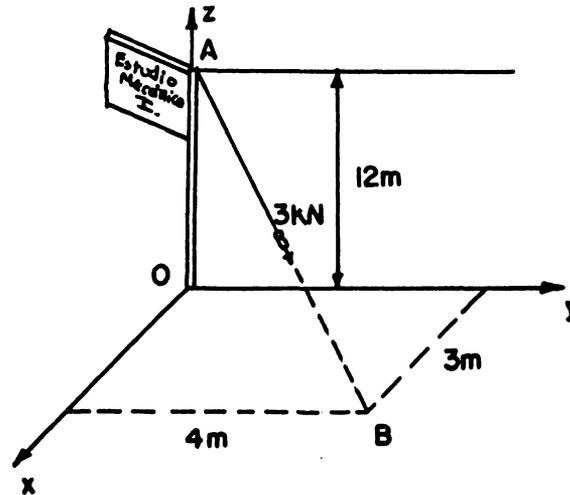


Fig 1.25

Solución:

- a) El vector equipolente de la fuerza se obtiene mediante la expresión:

$$\vec{F} = F \vec{e}_r$$

donde:  $F = 3 \text{ kN}$  y  $\vec{e}_r = \frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|}$

$$\vec{e}_r = \frac{(3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 0\mathbf{k}) - (0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 12\mathbf{k})}{\left[ (3\mathbf{i})^2 + (4\mathbf{j})^2 + (-12\mathbf{k})^2 \right]^{0.5}} \quad \text{y como } \mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = 1$$

$$\vec{e}_r = \frac{3\mathbf{i}}{13} + \frac{4\mathbf{j}}{13} - \frac{12\mathbf{k}}{13}$$

Por lo que :  $\vec{F} = 3\text{kN} \left( \frac{3}{13}\mathbf{i} + \frac{4}{13}\mathbf{j} - \frac{12}{13}\mathbf{k} \right)$

$$\boxed{\vec{F} = 0.69\mathbf{i} + 0.92\mathbf{j} - 2.77\mathbf{k} \text{ [kN]}}$$

b) La obtención de los ángulos directores es a partir de:

$$\alpha = \cos^{-1} \left( \frac{0.69}{3} \right), \quad \beta = \cos^{-1} \left( \frac{-0.92}{3} \right), \quad \gamma = \cos^{-1} \left( \frac{-2.77}{3} \right)$$

de donde:

$$\alpha = 76.70^\circ, \quad \beta = 72.14^\circ \text{ y } \gamma = 157.42^\circ$$

Comprobación:

a) El módulo de  $\vec{F}$  se obtiene de la siguiente forma:

$$F = |\vec{F}| = \sqrt{\vec{F} \cdot \vec{F}} = \sqrt{((0.69\mathbf{i} + 0.92\mathbf{j} - 2.77\mathbf{k}) \cdot (0.69\mathbf{i} + 0.92\mathbf{j} - 2.77\mathbf{k}))} = 3$$

$F = 3\text{ kN}$  que corresponde con el valor dado inicialmente.

b) Los ángulos directores deben satisfacer la identidad trigonométrica:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1,$$

$$\text{por lo que: } \cos^2(76.7^\circ) + \cos^2(72.14^\circ) + \cos^2(157.42^\circ) = 1$$

Los resultados obtenidos quedarían gráficamente de la siguiente manera:

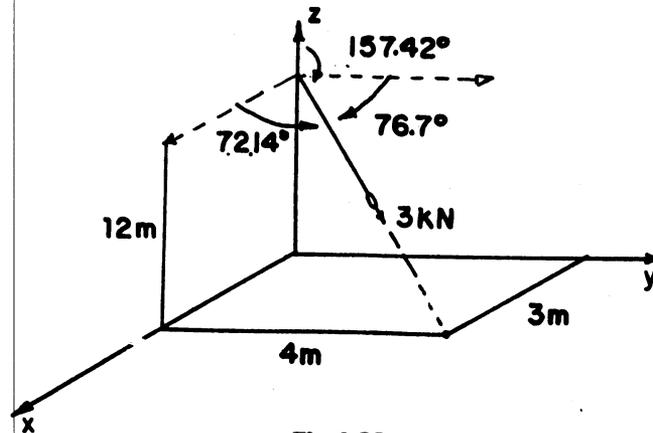


Fig 1.26

**Ejemplo 1.10.** Una fuerza  $\vec{F}$  cuya magnitud es  $10\sqrt{8/3}$  kN actúa en la dirección y sentido de una recta orientada con las siguientes características: el ángulo director  $\alpha = 60^\circ$  y dos de sus números directores son  $b = c = 1$ . Obtener el vector equipolente de la fuerza así como sus ángulos directores.

**Solución:** Primero se obtendrá el vector unitario de la fuerza para lo cual se aplica:

$$\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

como  $\alpha = 60^\circ$  y  $b = c = 1$ :

$$\cos 60^\circ = \frac{a}{\sqrt{a^2 + 1^2 + 1^2}}$$

$$0.5 \sqrt{a^2 + 2} = a$$

elevando al cuadrado:

$$\frac{1}{4} (a^2 + 2) = a^2$$

$$a^2 + 2 = 4a^2$$

$$3a^2 = 2$$

$$a = \pm \sqrt{2/3}$$

el valor del número director  $a$  es el positivo ya que  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$  quedando los números directores como:  $[\sqrt{2/3}, 1, 1]$ .

El vector unitario paralelo a la recta dirigida que definen estos números directores es:

$$\hat{e}_r = \frac{\sqrt{2/3} \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}}{\{(\sqrt{2/3})^2 + (1)^2 + (1)^2\}^{1/2}}$$

haciendo operaciones

$$\hat{e}_r = 0.5 \mathbf{i} + \sqrt{3/8} \mathbf{j} + \sqrt{3/8} \mathbf{k}$$

Y el vector equipolente de la fuerza se obtiene mediante:

$$\vec{F} = F \vec{e}_F$$

$$\vec{F} = (0.5 \mathbf{i} + \sqrt{3/8} \mathbf{j} + \sqrt{3/8} \mathbf{k}) 10 \sqrt{8/3}$$

$$\vec{F} = 8.16 \mathbf{i} + 10 \mathbf{j} + 10 \mathbf{k} \quad [\text{kN}]$$

El cálculo de los ángulos directores  $\beta$  y  $\gamma$  se puede hacer a partir de:

$$\cos \beta = \frac{F_y}{F} ; \quad \cos \gamma = \frac{F_z}{F}$$

por lo que

$$\beta = \cos^{-1} \frac{10}{10\sqrt{8/3}} \quad \text{y} \quad \gamma = \cos^{-1} \frac{10}{10\sqrt{8/3}}$$

y

$$\beta = \gamma = \cos^{-1} \sqrt{3/4}$$

$$\alpha = 60^\circ , \quad \beta = 52.24^\circ , \quad \gamma = 52.24^\circ$$

## 1.7 PRINCIPIOS FUNDAMENTALES DE LA ESTÁTICA

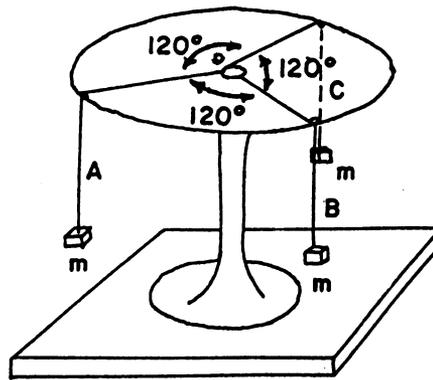
Al igual que toda ciencia, la Estática tiene sus cimientos en unos cuantos principios, mismos que son obtenidos de fenómenos físicos, razón por la cual carecen de demostración matemática. En esta parte se analizarán comentando la importancia de cada uno de ellos.

### 1.7.1. PRINCIPIO DE STEVINUS

La visualización física de este principio puede lograrse a partir del siguiente experimento:

Sea una mesa de fuerzas como la mostrada en la figura. Colóquense las tres poleas de modo que los cables que pasen por ellas guarden entre sí ángulos iguales a  $120^\circ$ . En los extremos de los cables A, B y C se colocan masas "m" iguales.

El arreglo así-formado es estable en relación al equilibrio externo; esto es, la argolla "D", donde se atan los tres cables A, B y C, está equilibrada debido a la acción simultánea de las tensiones  $T^A$ ,  $T^B$  y  $T^C$ .



Mesa de fuerzas

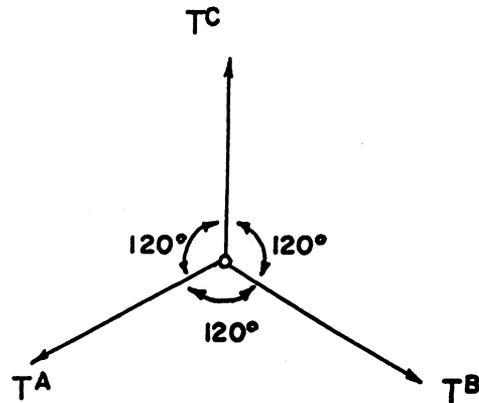


Diagrama de las fuerzas de la mesa

Fig 1.27

Debido a que  $T^A = T^B = T^C$  ..... 1.18  
 y por existir equilibrio de la figura 1.27 se tendrá:

$$\vec{T}^A + \vec{T}^B + \vec{T}^C = \vec{0} \quad \text{--- 1.19}$$

A partir de la ecuación (1.19) se puede tener lo siguiente:

$$\vec{T}^A + \vec{T}^B = -\vec{T}^C \quad \text{--- 1.20}$$

$$\vec{T}^A + \vec{T}^C = -\vec{T}^B \quad \text{--- 1.21}$$

$$\vec{T}^B + \vec{T}^C = -\vec{T}^A \quad \text{--- 1.22}$$

En los primeros miembros de las ecuaciones 1.20, 1.21 y 1.22 se indican sumas vectoriales de fuerzas. Para poder hacer dicha suma en

forma gráfica se debe aplicar la regla del paralelogramo que establece lo siguiente:

“Para obtener la suma  $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$  los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  se unen en sus orígenes formando los lados adyacentes de un paralelogramo construido como se indica en la figura 1.28. El vector resultante  $\vec{R}$  se obtiene trazando una flecha desde los orígenes de  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  a lo largo de la diagonal del paralelogramo hasta el vértice opuesto”

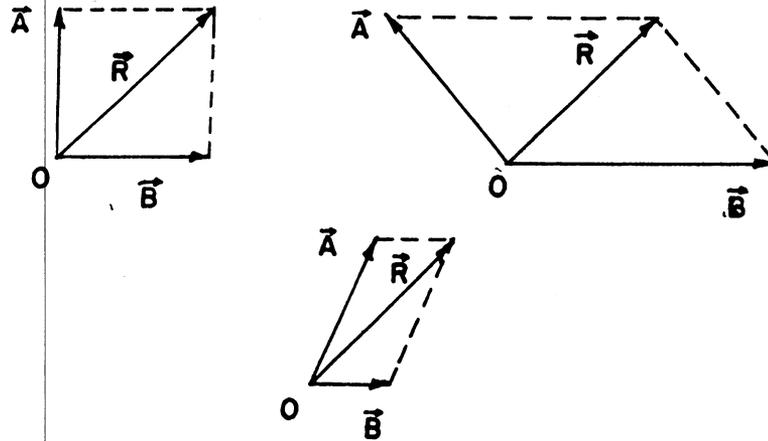


Fig 1.28

Es de observarse en la figura 1.28 que la misma fuerza resultante  $\vec{R}$  puede obtenerse de la suma de las fuerzas  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  no necesariamente únicas.

Aplicando la anterior regla a las ecuaciones 1.20, 1.21 y 1.22, éstas tendrían la siguiente representación gráfica.

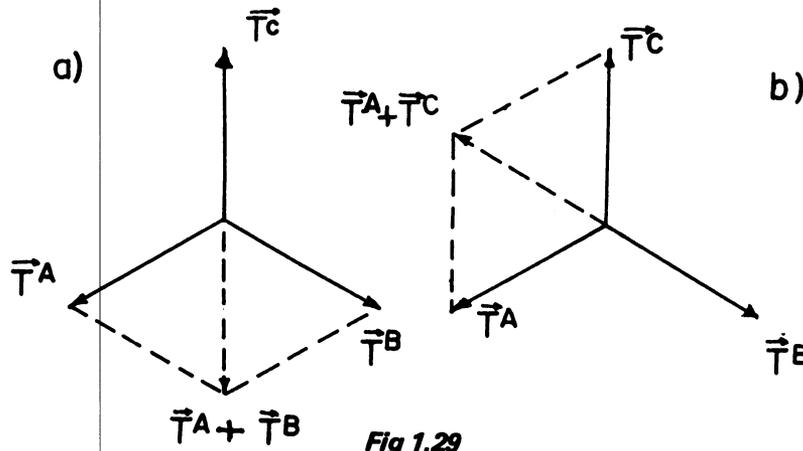
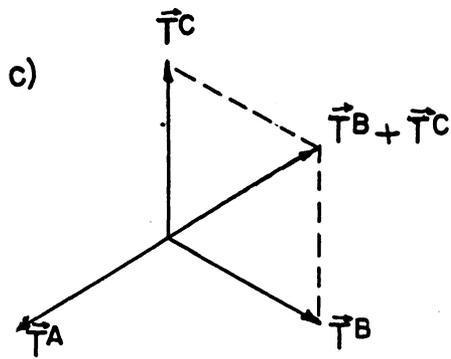


Fig 1.29

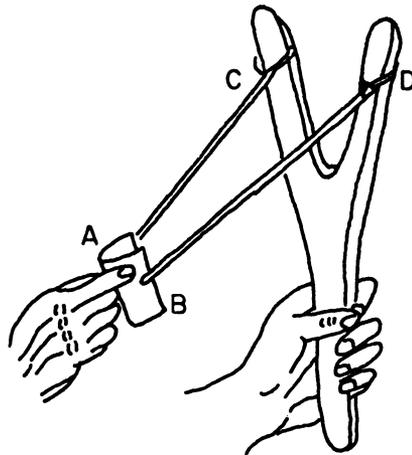


**Fig 1.29**

Obsérvese en las ecuaciones 1.20, 1.21 y 1.22 y figura 1.29, a, b y c, que al sumar matemática o gráficamente a dos cualesquiera de las fuerzas, la resultante de éstas contrarresta el efecto de la otra fuerza restante. En base a lo anterior es posible enunciar el Principio de Stevinus (Stevin 1548-1620).

*“Dos fuerzas aplicadas a un mismo punto material, le producen a éste el mismo efecto externo que el de una sola fuerza igual a la suma vectorial de las dos primeras”.*

Dicho Principio puede recordarse fácilmente si lo asociamos a un mecanismo tan conocido y simple como lo es el de la resortera (fig. 1.30).



**Fig 1.30**

En dicha figura las tensiones en los cables elásticos T<sub>AC</sub> y T<sub>BD</sub> que actúan en la piedra pueden representarse mediante el siguiente diagrama de fuerzas.

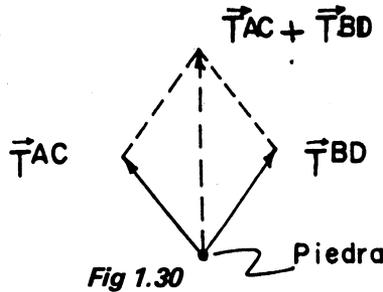


Fig 1.30

Al estar estirada la resorte, en el instante que se suelta la piedra\* se tendrá:

$$\sum_{i=1}^2 \vec{F}^i = \sum_{i=1}^2 m_i \vec{a}_i \quad \dots \dots \dots 1.23$$

o sea:  $\vec{T}_{AC} + \vec{T}_{BD} = m_p \vec{a}_{AC} + m_p \vec{a}_{BD} \dots \dots \dots 1.24$

siendo:  $m_p$  = masa de la piedra  
 $\vec{a}_{AC}$  ≐ aceleración de la piedra debido a T<sub>AC</sub>  
 $\vec{a}_{BD}$  ≐ aceleración de la piedra debido a T<sub>BD</sub>

Y debido a que el efecto es uno solo, se tendrá:

$$\vec{T}_{AC} + \vec{T}_{BD} = \vec{R} \quad \text{y} \quad \vec{a}_{AC} + \vec{a}_{BD} = \vec{a}_R$$

$$\vec{R} = m_p \vec{a}_R \dots \dots \dots 1.25$$

a) Composición de fuerzas. Haciendo extensivo lo observado en las ecuaciones 1.20, 1.21 y 1.22 a un conjunto de fuerzas concurrentes se puede señalar que:

*“El efecto externo que le produce un sistema de fuerzas, aplicado a una partícula material, no se altera si se sustituye dicho sistema por una fuerza resultante  $\vec{R}$ , igual a la suma vectorial de las n fuerzas. La fuerza resultante le producirá a la partícula una aceleración resultante  $\vec{a}_R$  igual a la suma vectorial de las aceleraciones producidas por cada una de las fuerzas. Donde  $\vec{R}$  y  $\vec{a}_R$  tienen la misma dirección y sentido”.*

Mediante esto último es posible obtener la resultante de un conjunto de fuerzas concurrentes, aplicando reiteradamente el principio de Stevinus. Por ejemplo si tenemos el sistema de fuerzas concurrentes mostrado en la figura 1.31 y queremos obtener la fuerza resultante general  $\vec{R}$  que produzca los mismos efectos externos que el sistema original, al aplicar Stevinus a las fuerzas  $F^1$  y  $F^2$  se tiene:

\* Considerando que en dicho instante es despreciable el peso de la piedra si se compara con las tensiones aplicadas a ella.

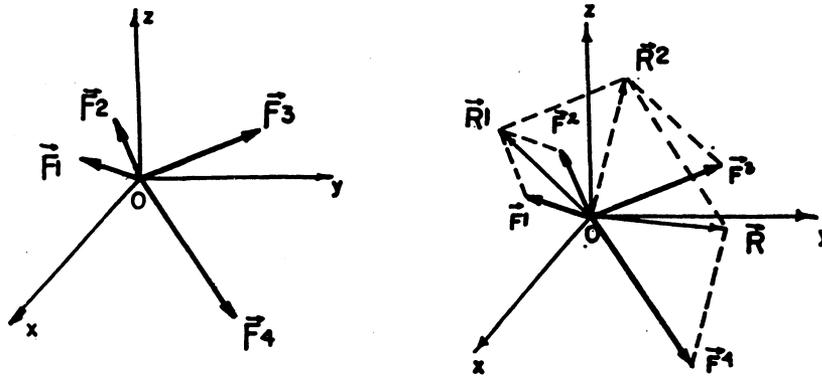


Fig 1.31

$$\vec{F}^1 + \vec{F}^2 = \vec{R}^1 \quad \dots \dots \dots 1.26$$

repetiendo lo mismo para  $R^1$  y  $F^3$

$$\vec{R}^1 + \vec{F}^3 = \vec{R}^2 \quad \dots \dots \dots 1.27$$

y por último para  $R^2$  y  $F^4$  :  $\vec{R}^2 + \vec{F}^4 = \vec{R} \quad \dots \dots \dots 1.28$

y mediante esta última expresión se obtiene la fuerza resultante general del sistema de fuerzas dado inicialmente.

Lo anterior se muestra gráficamente en la figura 1.31.

Por otro lado al manejar la ecuación

$$\vec{R}^2 + \vec{F}^4 = \vec{R}$$

y substituyendo en ésta el valor de  $\vec{R}^2$  indicado en la ecuación 1.27 se tendrá:

$$(\vec{R}^1 + \vec{F}^3) + \vec{F}^4 = \vec{R}$$

y en esta expresión substituyamos el valor de  $\vec{R}^1$  indicado en la ecuación 1.26.

$$[(\vec{F}^1 + \vec{F}^2) + \vec{F}^3] + \vec{F}^4 = \vec{R}$$

que puede quedar de la siguiente manera

$$\vec{F}^1 + \vec{F}^2 + \vec{F}^3 + \vec{F}^4 = \sum_{i=1}^4 \vec{F}^i = \vec{R} \quad \dots \dots \dots 1.29$$

en donde la ecuación 1.29 corresponde al principio de Stevinus.

*Ejemplo 1.11.* Obtener la fuerza resultante  $\vec{R}$  capaz de producir los mismos efectos externos que el sistema de fuerzas concurrentes formado por:

$$\vec{F}^1 = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k} \text{ [N]}$$

$$\vec{F}^2 = -3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k} \text{ [N]}$$

$$\vec{F}^3 = 3\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k} \text{ [N]}$$

Resolver el problema: (a) analíticamente y (b) gráficamente.

*Solución:* a) Para este problema se tiene:

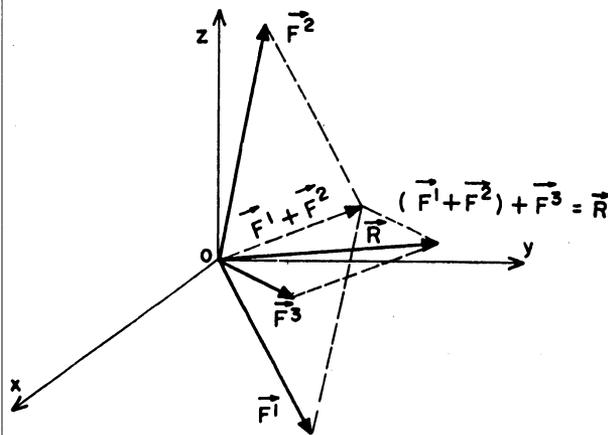
$$\vec{R} = \sum_{i=1}^3 \vec{F}^i = \vec{F}^1 + \vec{F}^2 + \vec{F}^3$$

$$\vec{R} = (2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}) + (-3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}) + (3\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k})$$

haciendo operaciones:

$$\vec{R} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k} \text{ [N]}$$

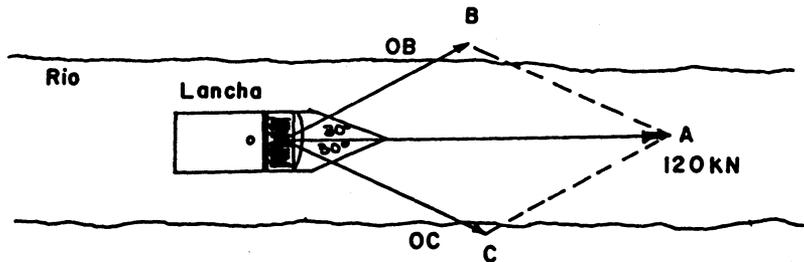
b) Gráficamente:



**Fig 1.32**

El procedimiento empleado para pasar de un sistema de fuerzas a una sola fuerza resultante general recibe comúnmente el nombre de *composición de fuerzas*. En tanto que el procedimiento inverso a éste, o sea, descomponer una fuerza en dos o tres fuerzas de direcciones conocidas, se conoce como *descomposición o resolución de fuerzas*.

b) *Descomposición de fuerzas*. En ocasiones resulta conveniente descomponer una fuerza en dos o tres fuerzas de direcciones conocidas. Piénsese en una lancha que requiere ser movida con una fuerza de 120 kN en la dirección definida por  $\vec{OA}$  (figura 1.33).

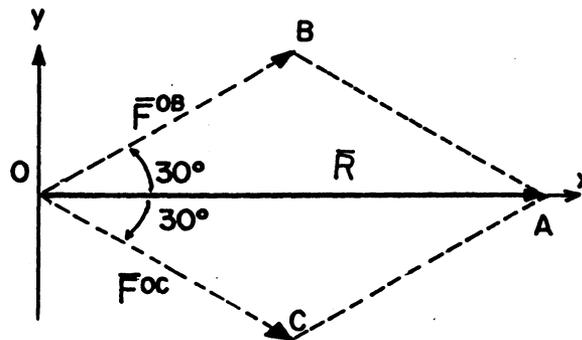


**Fig 1.33**

Debido a que no es factible proporcionar directamente dicha fuerza, ésta va a ser proporcionada por 2 caballos que transmiten fuerzas a través de las cuerdas dirigidas en las direcciones  $\vec{OB}$  y  $\vec{OC}$ ,

De acuerdo a la configuración mostrada, la fuerza de 120 kN debe ser descompuesta en dos fuerzas definidas por las direcciones  $\vec{OB}$  y  $\vec{OC}$ , teniéndose que respetar que la suma de estas dos fuerzas debe ser igual a la fuerza requerida.

Gráficamente se tendrá:



**Fig 1.34**

En dicha figura:

$$\vec{R} = \vec{F}^{OB} + \vec{F}^{OC}$$

o sea

$$120 \vec{i} = |\vec{F}^{OB}| \vec{e}_{OB} + |\vec{F}^{OC}| \vec{e}_{OC}$$

donde

$$\vec{e}_{OB} = \cos 30^\circ \vec{i} + \cos 60^\circ \vec{j}$$

$$\vec{e}_{OC} = \cos 30^\circ \vec{i} - \cos 60^\circ \vec{j}$$

sustituyendo:

$$120 \vec{i} = F^{OB} (\cos 30^\circ \vec{i} + \cos 60^\circ \vec{j}) + F^{OC} (\cos 30^\circ \vec{i} - \cos 60^\circ \vec{j})$$

igualando componentes:

$$i = i ; 120 = F^{OB} \cos 30^\circ + F^{OC} \cos 30^\circ \quad \dots a$$

$$j = j ; 0 = F^{OB} \cos 60^\circ - F^{OC} \cos 60^\circ \quad \dots b$$

$$\text{de (b) } F^{OB} = F^{OC} \quad \dots c$$

$$\text{(c) en (a) } 120 = F^{OC} (\cos 30^\circ + \cos 30^\circ)$$

$$\text{donde } F^{OC} = \frac{120}{2 \cos 30^\circ}$$

$$\text{y } F^{OC} = 69.3 \text{ kN}$$

$$F^{OB} = 69.3 \text{ kN}$$

Las dos fuerzas calculadas son las que deben proporcionar los caballos a la lancha a fin de que le transmita un movimiento a lo largo de OA con una fuerza de 120 kN.

Con bastante frecuencia se presenta el caso de descomponer una fuerza en tres componentes perpendiculares entre sí y paralelas a los ejes del sistema de referencia utilizado. Si una fuerza  $\vec{F}$  está contenida en el primer octante del sistema XYZ, entonces  $\vec{F}$  está dada por la suma vectorial de sus tres componentes rectangulares.

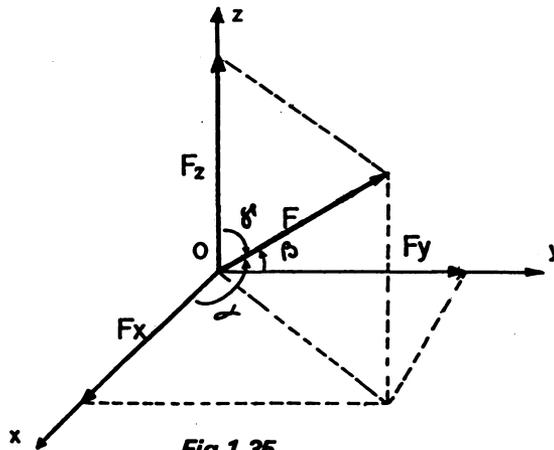


Fig 1.35

$$\vec{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k}$$

donde  $F_x = \vec{F} \cdot \mathbf{i} = |\vec{F}| \cos \alpha$

$$F_y = \vec{F} \cdot \mathbf{j} = |\vec{F}| \cos \beta$$

$$y \quad F_z = \vec{F} \cdot \mathbf{k} = |\vec{F}| \cos \gamma$$

El caso más general se presenta al tratar de descomponer una fuerza en tres direcciones cualesquiera. Por ejemplo al tratar de descomponer la fuerza  $F_{OA}$  en tres fuerzas componentes paralelas a las líneas OB, OC y OD mostradas en la siguiente figura

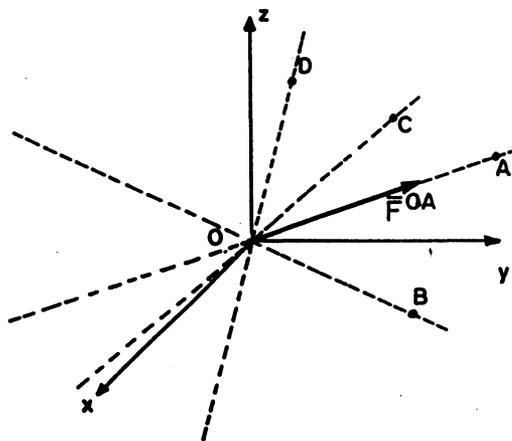


Fig 1.36

Para hacer dicha resolución deberá respetarse que:

$$\vec{F}^{OA} = \vec{F}^{OB} + \vec{F}^{OC} + \vec{F}^{OD}$$

Donde  $\vec{F}^{OB}$ ,  $\vec{F}^{OC}$  y  $\vec{F}^{OD}$  son las componentes vectoriales de  $\vec{F}^{OA}$  en las direcciones  $\vec{OB}$ ,  $\vec{OC}$  y  $\vec{OD}$  respectivamente. Para su cálculo se tiene que resolver simultáneamente el sistema de tres ecuaciones escalares siguientes:

$$i = i ; (F^{OA})_x = (F^{OB})_x + (F^{OC})_x + (F^{OD})_x \quad . . . \quad 1.30$$

$$j = j ; (F^{OA})_y = (F^{OB})_y + (F^{OC})_y + (F^{OD})_y \quad . . . \quad 1.31$$

$$k = k ; (F^{OA})_z = (F^{OB})_z + (F^{OC})_z + (F^{OD})_z \quad . . . \quad 1.32$$

Resolviendo 1.30, 1.31 y 1.32 se obtienen las magnitudes de las componentes de las fuerzas en las direcciones pedidas,  $F^{OB}$ ,  $F^{OC}$  y  $F^{OD}$ . Para expresar vectorialmente dichas componentes se procede a darles dirección;

$$\vec{F}^{OB} = F^{OB} \vec{e}_{OB}$$

$$\vec{F}^{OC} = F^{OC} \vec{e}_{OC}$$

$$\vec{F}^{OD} = F^{OD} \vec{e}_{OD}$$

Obsérvese que si por ejemplo  $\vec{F}^{OA}$  está contenida en el plano formado por  $OB$  y  $OC$ , sólo será posible descomponer la fuerza en componentes contenidas dentro de dicho plano. No existirán componentes de la fuerza localizadas fuera del plano que contiene a la fuerza.

*Ejemplo 1.12.* Descomponga la fuerza  $\vec{F}^{OA}$  mostrada en la figura, cuyo módulo es  $\sqrt{261}$  N y dirigida de acuerdo al segmento  $OA$ , en tres fuerzas paralelas a los segmentos  $OB$ ,  $OC$  y  $OD$  que se indican en la figura.

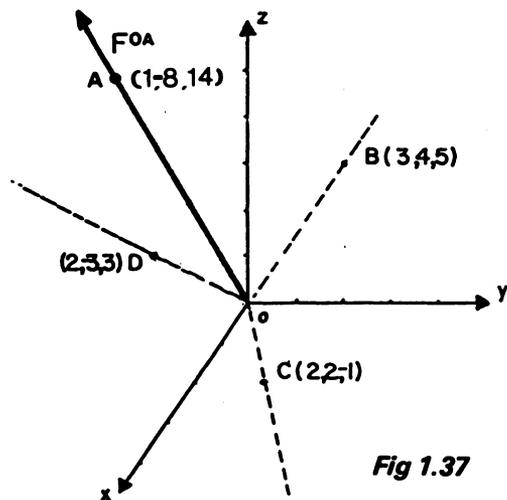


Fig 1.37

Solución: Primeramente se calculará el vector equipolente de  $F_{OA}$ , o sea

$$\vec{F}^{OA} = F^{OA} \vec{e}_{OA} \quad \text{donde} \quad \vec{e}_{OA} = \frac{\vec{OA}}{|\vec{OA}|} = \frac{1 - 8j + 14k}{\sqrt{261}}$$

por lo que;

$$\vec{F}^{OA} = \sqrt{261} \left( \frac{1 - 8j + 14k}{\sqrt{261}} \right) [N] = \sqrt{\frac{261}{261}} (1 - 8j + 14k) [N]$$

$$\boxed{\vec{F}^{OA} = 1 - 8j + 14k [N]}$$

Por tanto;  $\vec{F}^{OA} = \vec{F}^{OB} + \vec{F}^{OC} + \vec{F}^{OD} \dots \dots a$

donde,  $\vec{F}^{OB} = F^{OB} \vec{e}_{OB}$ ;  $\vec{F}^{OC} = F^{OC} \vec{e}_{OC}$ ;  $\vec{F}^{OD} = F^{OD} \vec{e}_{OD}$

$$y; \quad \vec{e}_{OB} = \frac{3i + 4j + 5k}{\sqrt{50}}; \quad \vec{e}_{OC} = \frac{2i + 2j - k}{3}; \quad \vec{e}_{OD} = \frac{2i - 3j + 3k}{\sqrt{22}}$$

teniéndose que,

$$\vec{F}^{OB} = F^{OB} \left( \frac{3i + 4j + 5k}{\sqrt{50}} \right) [N]$$

$$\vec{F}^{OC} = F^{OC} \left( \frac{2i + 2j - k}{3} \right) [N]$$

$$\vec{F}^{OD} = F^{OD} \left( \frac{2i - 3j + 3k}{\sqrt{22}} \right) [N]$$

expresando escalarmente la ecuación (a)

$$i = i; 1 = F^{OB} \left( \frac{3}{\sqrt{50}} \right) + F^{OC} \left( \frac{2}{3} \right) + F^{OD} \left( \frac{2}{\sqrt{22}} \right) \dots b$$

$$j = j; -8 = F^{OB} \left( \frac{4}{\sqrt{50}} \right) + F^{OC} \left( \frac{2}{3} \right) + F^{OD} \left( -\frac{3}{\sqrt{22}} \right) \dots c$$

$$k = k; 14 = F^{OB} \left( \frac{5}{\sqrt{50}} \right) + F^{OC} \left( -\frac{1}{3} \right) + F^{OD} \left( \frac{3}{\sqrt{22}} \right) \dots d$$

Resolviendo;  $c+d; 6 = F^{OB} \left( \frac{9}{\sqrt{50}} \right) + F^{OC} \left( -\frac{1}{3} \right) \dots e$

$$b - c; 9 = F^{OB} \left( -\frac{1}{\sqrt{50}} \right) + F^{OD} \left( \frac{5}{\sqrt{22}} \right)$$

despejando  $F^{OB}; F^{OB} = \left[ F^{OD} \left( \frac{5}{\sqrt{22}} \right) - 9 \right] \sqrt{50} \dots f$

$$f \text{ en } e; 6 = \left( \sqrt{50} \left[ F^{OD} \left( \frac{5}{\sqrt{22}} \right) - 9 \right] \right) \frac{9}{\sqrt{50}} + F^{OC} \left( -\frac{1}{3} \right)$$

despejando  $F^{OC}; F^{OC} = -\frac{135}{\sqrt{22}} F^{OD} + 261 \dots g$

$$f \text{ y } g \text{ en } d; 14 = \frac{5}{\sqrt{50}} \left( \left[ F^{OD} \left( \frac{5}{\sqrt{22}} \right) - 9 \right] \sqrt{50} \right) +$$

$$\left( -\frac{135}{\sqrt{22}} F^{OD} + 261 \right) \left( -\frac{1}{3} \right) + F^{OD} \left( \frac{3}{\sqrt{22}} \right)$$

resolviendo

$$h \text{ en } g; F^{OD} = 2\sqrt{22} \text{ [N]} \dots h$$

$$h \text{ en } f; F^{OC} = -9 \text{ [N]} \dots i$$

$$F^{OB} = \sqrt{50} \text{ [N]} \dots j$$

Las ecuaciones h, i y j proporcionan las componentes de la fuerza original en las direcciones  $\vec{OD}$ ,  $\vec{OC}$  y  $\vec{OB}$ . Notemos que el valor de  $F^{OC}$  tiene signo negativo, lo que indica que esta fuerza actúa en sentido contrario al supuesto originalmente. O sea  $F^{CO} = 9 \text{ N}$ .

Las componentes vectoriales de las fuerzas obtenidas son:

$$\vec{F}^{OB} = F^{OB} \vec{e}_{OB} = \sqrt{50} \left( \frac{-3i + 4j + 5k}{\sqrt{50}} \right) [N]$$

$$\vec{F}^{CO} = F^{CO} \vec{e}_{CO} = 9 \left( \frac{-2i - 2j + k}{3} \right) [N]$$

$$\vec{F}^{OD} = F^{OD} \vec{e}_{OD} = 2\sqrt{22} \left( \frac{-2i - 3j + 3k}{\sqrt{22}} \right) [N]$$

y 
$$\vec{F}^{OB} = 3i + 4j + 5k [N]$$

$$\vec{F}^{CO} = -6i - 6j + 3k [N]$$

$$\vec{F}^{OD} = 4i - 6j + 6k [N]$$

$$\vec{F}^{OA} = \vec{F}^{OB} + \vec{F}^{CO} + \vec{F}^{OD} = i - 8j + 14k [N] \quad \text{con lo que se}$$

demuestra la ecuación a .

### 1.7.2 PRINCIPIO DEL EQUILIBRIO

*“Al actuar simultáneamente dos fuerzas externas en un cuerpo rígido estas no le afectarán su estado mecánico inicial si dichas fuerzas están en equilibrio; siendo con condición necesaria y suficiente para que esto se presente que ambas fuerzas sean de igual magnitud, colineales y de sentidos opuestos”.*

El anterior principio fundamenta básicamente a la Estática, ya que ésta analiza primordialmente el equilibrio de los cuerpos solicitados por las fuerzas.

A partir de este principio es válido agregar a un cuerpo rígido, sujeto a fuerzas, sistemas de fuerzas equilibrados ya que al hacer esto no se altera el movimiento inicial que tiene el cuerpo.

### 1.7.3 PRINCIPIO DE TRANSMISIBILIDAD

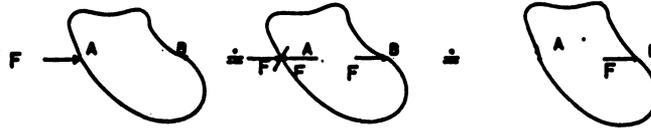
En el estudio de la Mecánica una de las grandes ventajas que propor-

ciona el manejo del modelo de cuerpo rígido reside en despreciar las deformaciones internas del cuerpo.

Estas son nulas con dicho modelo de cuerpo. Por lo tanto es válido enunciar lo siguiente:

*“Al actuar una fuerza en un cuerpo rígido, los efectos externos que le produce no cambian si ésta se desliza aplicándose en cualquier otro punto localizado a lo largo de su línea de acción”.*

Dicho principio de transmisibilidad está fundamentado a partir del principio de equilibrio. Ya que agregando sistemas equilibrados en el cuerpo podemos deslizar la fuerza original, tal como se muestra en la figura 1.38.



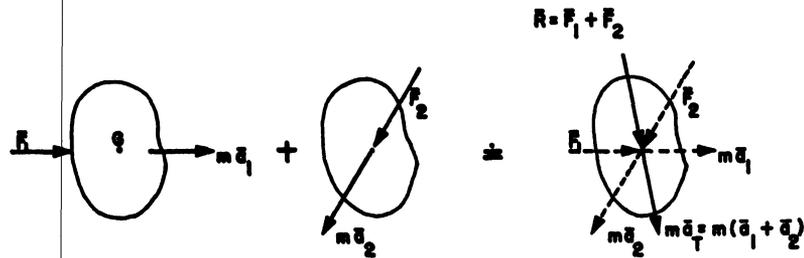
**Fig 1.38**

#### 1.7.4 PRINCIPIO DE SUPERPOSICION DE CAUSAS Y EFECTOS

En el diseño de elementos de máquinas o de estructuras es útil determinar los efectos que en forma aislada producen cada una de las fuerzas que actúan sobre ellos. Al superponer o sumar los efectos individuales, producidos por cada una de las fuerzas, se obtiene el efecto resultante final. Lo anterior fundamenta el principio de superposición de causas y efectos, que establece:

*“Si sobre un mismo cuerpo actúan en forma separada dos o más fuerzas, el efecto resultante que le producirán si actúan simultáneamente es igual a la suma de los efectos aislados”.*

Este principio puede observarse en la siguiente figura:



**Fig. 1.39**

### 1.8 MOMENTOS DE UNA FUERZA. COORDENADAS VECTORIALES DE UNA FUERZA

Cuando un cuerpo tiende a girar por el efecto de una fuerza, esta ten-

dencia puede manifestarse con respecto a un punto o bien en relación con un eje.

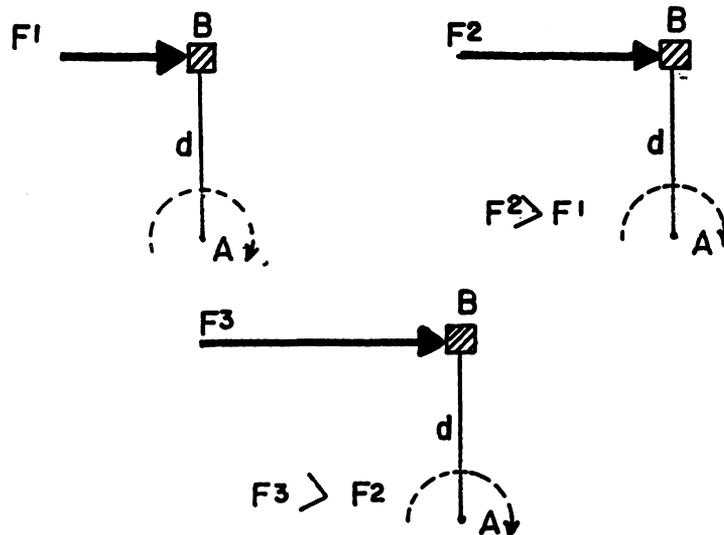
A la cuantificación de la tendencia señalada se le denomina *momento de la fuerza*, el cual *puede representarse escalar o vectorialmente*. En ambas representaciones se precisan la intensidad de dicha tendencia, la dirección alrededor de la cual se presenta, así como su sentido.

Como la tendencia a girar puede darse en uno u otro sentido es necesario diferenciarlos. En el caso bidimensional la diferenciación se realiza mediante un signo positivo o negativo, asignándose el primero cuando la tendencia a girar es en sentido contrario al del movimiento de las manecillas de un reloj; el signo negativo se emplea cuando dicha tendencia corresponde con el movimiento señalado.

### 1.8.1 MOMENTO DE UNA FUERZA CON RESPECTO A UN PUNTO

Supóngase que sobre una superficie lisa se encuentra un cuerpo B unido a una varilla rígida, sumamente delgada, sujeta por el extremo A a la superficie.

Si se aplican alternativamente las fuerzas  $F^1$ ,  $F^2$  y  $F^3$  de magnitudes diferentes, la tendencia a hacer girar al cuerpo será mayor cuando se aplique la fuerza de módulo más grande.



**Fig 1.40**

Ahora supóngase que la fuerza aplicada es la misma, que se hace variar la longitud "d" de la varilla; puede llegarse a la conclusión de que el momento de la fuerza será mayor cuando la longitud "d" llamada *brazo*, sea la más grande.

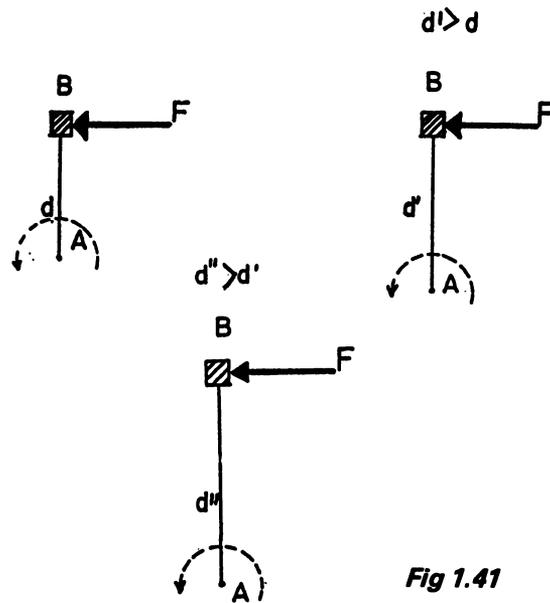


Fig 1.41

Del análisis anterior puede deducirse que el módulo del momento de una fuerza depende del tamaño de ésta y de su distancia "d" al centro del momentos A.

*Ejemplo 1.13.* Para aflojar una tuerca se aplica una fuerza de 500 N. Si se cuenta con dos llaves, una de 0.2 m y otra de 0.5 m calcular el momento de la fuerza cuando se usa una y otra llave, suponiendo que el tamaño de la tuerca es insignificante. ¿Con cuál de las dos llaves sería más fácil aflojar la tuerca?

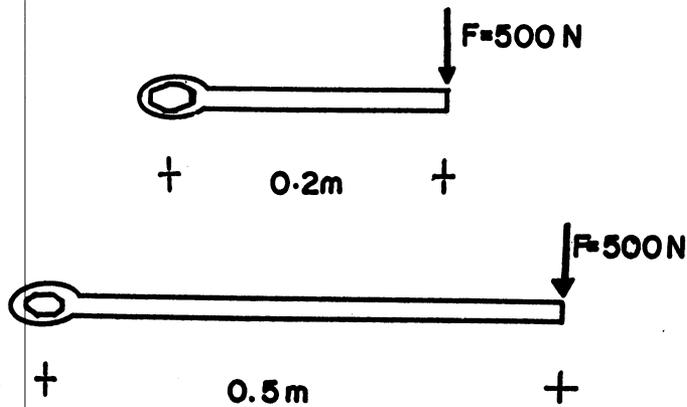


Fig 1.42

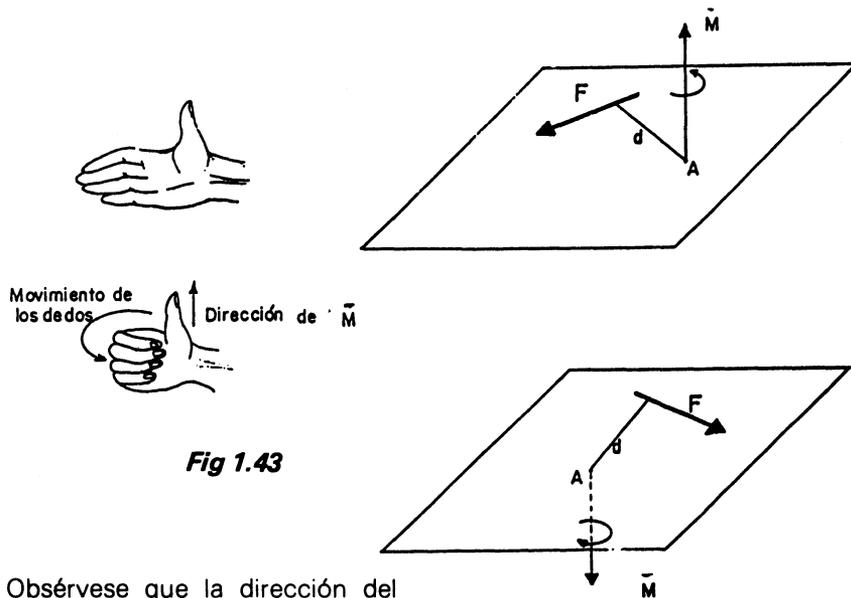
Solución: Usando la llave de 0.2 m;  $M = Fd = (500)(0.2)$   
 $M = 100 \text{ N}\cdot\text{m}$

Usando la llave de 0.5 m:  $M = Fd = (500)(0.5)$   
 $M = 250 \text{ N}\cdot\text{m}$

Experimentalmente puede comprobarse que usando la llave más larga será más fácil aflojar la tuerca, lo cual se corrobora con el resultado obtenido, puesto que con la misma fuerza el momento es mayor que cuando se usa la llave de menor longitud.

El sentido de la tendencia a girar nos la proporciona la convención aceptada de la "regla de la mano derecha":

*"inicialmente se ponen estirados los dedos de la mano derecha; contrayendo todos, excepto el pulgar, hasta formar el puño. El sentido de giro corresponde al que exhiben los dedos al contraerse, de manera tal que el dedo pulgar indica la dirección y el sentido del vector momento"*.



**Fig 1.43**

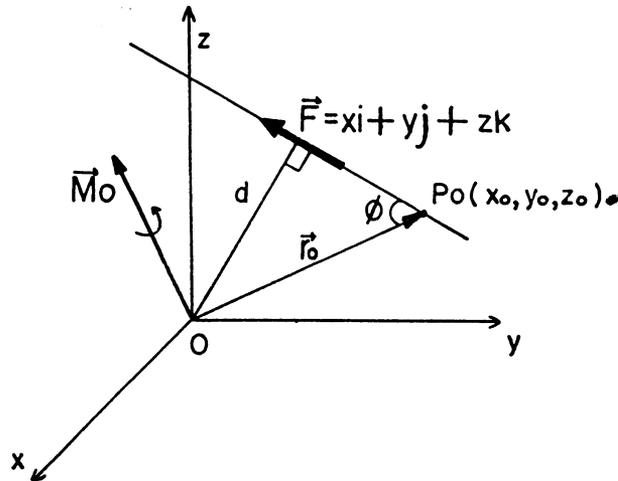
Obsérvese que la dirección del vector momento de la fuerza respecto a un punto es perpendicular al plano definido por la línea de acción de la fuerza y el centro de momentos.

Puesto que el momento de una fuerza, con respecto a un punto, depende tanto de la fuerza como de la distancia de ésta al centro de momentos, resulta muy práctico hacer coincidir el centro de momentos con el origen de un sistema de referencia, a partir del cual se localice un punto de la línea de acción de dicha fuerza, mediante su vector de posición  $\vec{r}_0$ .

Por todo lo expuesto puede aceptarse que el modelo matemático de este concepto mecánico es el producto vectorial de los vectores  $\vec{r}_0$  y  $\vec{F}$ :

$$\vec{M}_0 = \vec{r}_0 \times \vec{F}$$

. . . 1.33



**Fig 1.44**

En efecto, el producto cruz entre dos vectores da como resultado otro vector cuya dirección es perpendicular al plano que forman los soportes de los vectores factores. Tal dirección es precisamente la del vector momento de la fuerza.

Además:

$$|\vec{M}_O| = |\vec{r}_O| |\vec{F}| \operatorname{sen} \phi \quad \dots \dots \dots 1.34$$

Si se considera que  $d$  es la distancia entre el soporte de la fuerza y el origen, como se indica en la figura anterior, entonces:

$$\operatorname{sen} \phi = \frac{d}{|\vec{r}_O|} \quad \therefore \quad d = |\vec{r}_O| \operatorname{sen} \phi \quad \dots \dots \dots 1.35$$

Sustituyendo 1.35 en 1.34:

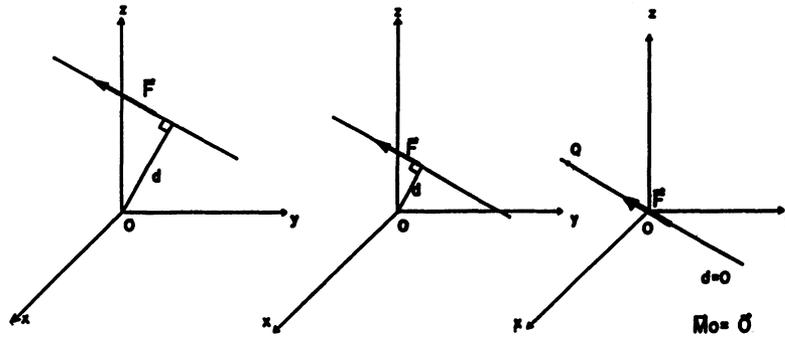
$$|\vec{M}| = |\vec{F}| d \quad \dots \dots \dots 1.36$$

lo cual corrobora el hecho de que la magnitud del momento de una fuerza depende del módulo de ésta y de su distancia al centro de momentos.

Si el centro de momentos que se elige es cada vez más cercano a la línea de acción de la fuerza, el brazo "d" irá disminuyendo y, por consecuencia, el momento disminuirá. Cuando el centro de momentos ocupe un punto cualquiera del soporte de la fuerza, entonces  $d = 0$ , por lo que la expresión 1.36 quedará:

$$|\vec{M}| = |\vec{F}| d = |\vec{F}| 0 \quad \therefore \quad |\vec{M}| = 0$$

Puede asegurarse que  $|\vec{F}| \neq 0$ , pues para hablar del momento de una fuerza es indispensable contar con una fuerza.



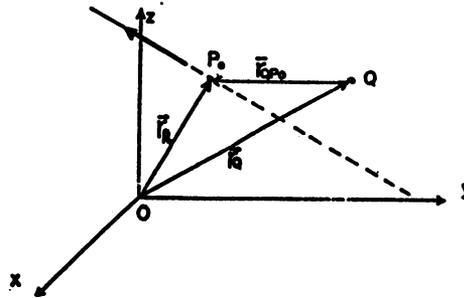
**Fig 1.45**

Al reflexionar en el análisis anterior se concluye que *la condición necesaria y suficiente para que el momento de una fuerza, con respecto a un punto, sea nulo es que la línea de acción de la fuerza contenga al centro de momentos.*

Aunque el centro de momentos que se eligió fue el origen del sistema de referencia, es claro que la condición anterior se cumplirá para cualquier punto Q respecto al cual se tomen momentos.

Pero si el punto Q no es uno de los del soporte de la fuerza, el momento respecto a él será diferente de cero y puede ser distinto del momento de la misma fuerza respecto al origen, en magnitud, dirección y sentido o por lo menos en una de estas características.

Se analizará un poco más este caso con apoyo en la siguiente figura. Obsérvese que así como el punto  $P_0$  queda definido por el vector de posición  $\vec{r}_{O P_0}$ , el punto Q lo estará por  $\vec{r}_{O Q}$  y como el momento respecto al origen es:



**Fig 1.46**

$$\vec{N}_0 = \vec{r}_{O P_0} \times \vec{F}_0$$

o sea el producto cruz entre el vector definido de "O" hacia  $P_0$  y  $\vec{F}_0$ , en forma análoga se obtendrá el momento de la fuerza respecto al punto Q.

Vale la pena insistir en que el vector que interviene en el momento de una fuerza con respecto a un punto, siempre va del centro de momentos a un punto del soporte de la fuerza.

$$\vec{N}_Q = \vec{Q P}_0 \times \vec{F}_0 \quad \dots \dots \dots 1.37$$

pero:  $\vec{Q P}_0 = \vec{r}_{O P_0} - \vec{r}_{O Q}$ , que podemos sustituir en  $\dots \dots \dots 1.37$

$$\vec{N}_Q = (\vec{r}_{O P_0} - \vec{r}_{O Q}) \times \vec{F}_0 = \vec{r}_{O P_0} \times \vec{F}_0 - \vec{r}_{O Q} \times \vec{F}_0$$

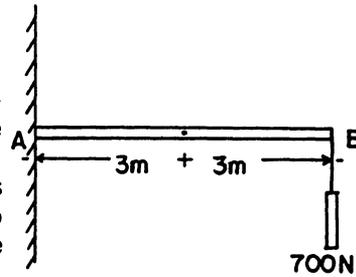
finalmente:  $\vec{N}_Q = \vec{N}_0 - \vec{r}_{O Q} \times \vec{F}_0 \quad \dots \dots \dots 1.38$

Expresión que se conoce con el nombre de *cambio del centro de momentos*.

Si bien el cálculo del momento de una fuerza con respecto a un punto Q cualquiera puede efectuarse aplicando indistintamente cualquiera de las expresiones 1.37 y 1.38, es interesante observar en la 1.38, que siempre quedará implicado el momento de la misma fuerza con respecto al origen del sistema de referencia.

Es natural que sea así, ya que para obtener el momento de la fuerza con respecto a cualquier punto diferente del origen del sistema de referencia es necesario conocer previamente la ubicación, respecto al mismo sistema, tanto del nuevo centro de momentos como de la fuerza y esto último es posible cuando al soporte de la fuerza se le puede definir un punto de su línea de acción, a partir del cual se establece el correspondiente vector de posición, necesario para el cálculo del momento de dicha fuerza respecto al origen del sistema de referencia.

*Ejemplo 1.14.* La viga mostrada en la figura pesa 200 N y por su extremo B se encuentra suspendido un bloque de 700 N. Calcule el momento de ambas fuerzas con respecto al punto A. Suponga el peso total de la viga concentrado a la mitad de su longitud.



**Fig 1.47**

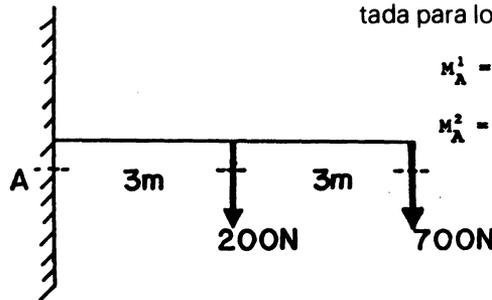
*Solución:* Con ayuda de un esquema se ubicarán las fuerzas que intervienen:

$$F^1 = 200 \text{ N} ; F^2 = 700 \text{ N}$$

Teniendo en cuenta la convención adoptada para los signos de los momentos:

$$M_A^1 = F^1 d^1 = - 200(3) = - 600 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_A^2 = F^2 d^2 = - 700(6) = - 4200 \text{ N}\cdot\text{m}$$

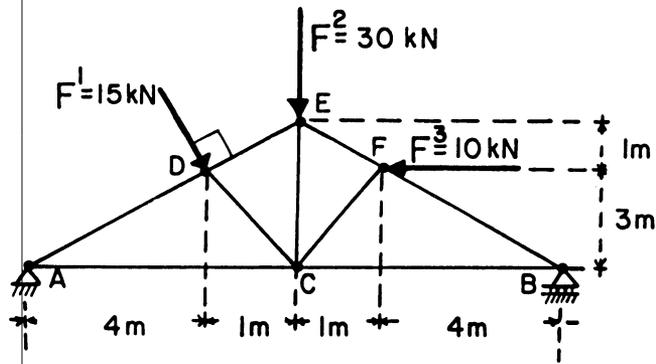


**Fig 1.48**

Ambos momentos son negativos, puesto que la tendencia del giro es en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj.

**Ejemplo 1.15.** Calcule los momentos de las cargas que actúan sobre la armadura de la figura.

- a) Respecto al apoyo A  
b) Respecto al pasador C



**Fig 1.49**

*Solución:*

a)  $M_A^1 = F^1 (AD)$

pero:  $AD = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \therefore M_A^1 = -15(5) \therefore M_A^1 = -75 \text{ kN}\cdot\text{m}$

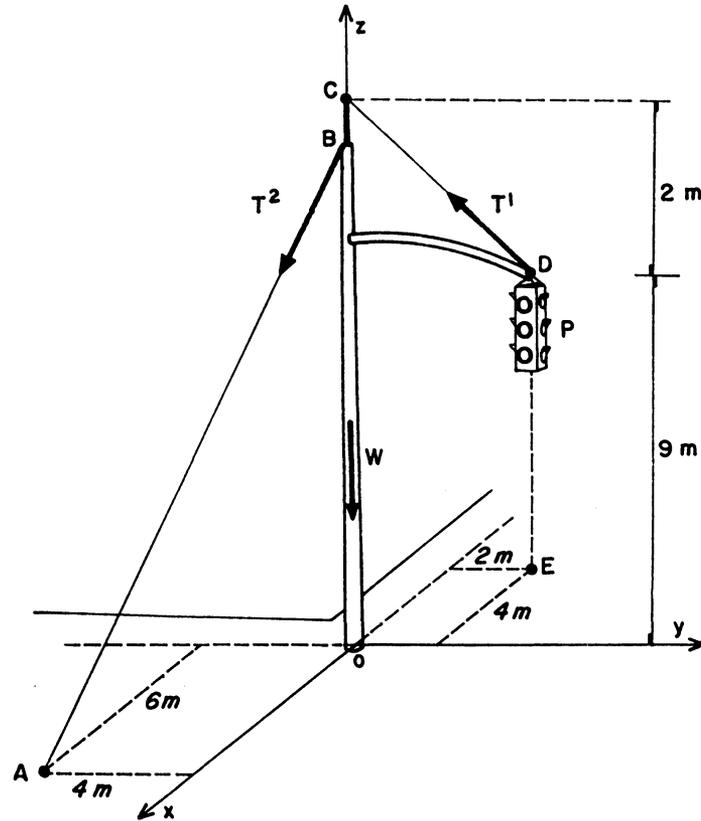
$M_A^2 = -F^2 (5) = -30(5) \therefore M_A^2 = -150 \text{ kN}\cdot\text{m}$

$M_A^3 = F^3 (3) = 10(3) \therefore M_A^3 = 30 \text{ kN}\cdot\text{m}$

b)  $M_C^1 = 0$  pues la línea de acción de la fuerza pasa por el pasador C.

$M_C^2 = 0$  , por la razón expuesta .

$M_C^3 = F^3 (1) = 10(1) \therefore M_C^3 = 10 \text{ kN}\cdot\text{m}$



**Fig 1.50**

*Ejemplo 1. 16.* El semáforo y el poste de la figura tienen un peso  $P = 150 \text{ N}$  y  $W = 3000 \text{ N}$  respectivamente; mientras que las tensiones en los cables son  $T^1 = 600 \text{ N}$  y  $T^2 = 1800 \text{ N}$ . Obtenga los momentos de las fuerzas, respecto al origen del sistema indicado y respecto al punto A. El diámetro del poste es despreciable.

Solución:

Primero obténgase los vectores equipolentes de las fuerzas:

$$\vec{W} = -3000 \text{ k [N]}; \vec{P} = -150 \text{ k [N]}$$

$$\vec{r}^1 = 600 \left( \frac{4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}}{4.9} \right) = 122.45(4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) = 489.8\mathbf{i} - 244.9\mathbf{j} + 244.9\mathbf{k} \text{ [N]}$$

$$\vec{r}^2 = 1800 \left( \frac{6\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 9\mathbf{k}}{11.53} \right) = 156.11(6\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 9\mathbf{k}) = 936.7\mathbf{i} - 624.5\mathbf{j} - 1405\mathbf{k} \text{ [N]}$$

Para calcular su momento respecto al origen se obtienen los vectores de posición:

$$\vec{r}^W = \vec{0}; \vec{r}^P = -4\mathbf{i} + 2\mathbf{j}; \vec{r}^1 = 11\mathbf{k}; \vec{r}^2 = 9\mathbf{k}$$

El momento de la fuerza W, con respecto al origen, es igual a cero, ya que la línea de acción de esta fuerza pasó por dicho punto.

$$\vec{M}_0^W = \vec{r}^W \times \vec{W} = \vec{0} \times (-3000\mathbf{k}) = \vec{0} \text{ [N}\cdot\text{m]}$$

$$\vec{M}_0^P = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -150 \end{vmatrix} = -300\mathbf{i} - 600\mathbf{j} \dots \vec{M}_0^P = -300\mathbf{i} - 600\mathbf{j} \text{ [N}\cdot\text{m]}$$

$$\vec{M}_0^1 = \vec{r}^1 \times \vec{F}^1 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 11 \\ 489.8 & -244.9 & 244.9 \end{vmatrix} = 122.45 \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 11 \\ 4 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 122.45(22\mathbf{i} + 44\mathbf{j})$$

$$\therefore \vec{M}_0^1 = 2693.9\mathbf{i} + 5387.8\mathbf{j} \text{ [N}\cdot\text{m]}$$

$$\vec{M}_0^2 = \vec{r}^2 \times \vec{F}^2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 9 \\ 936.7 & -624.5 & -1405 \end{vmatrix} = 156.11 \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 9 \\ 6 & -4 & -9 \end{vmatrix} = 156.11(36\mathbf{i} + 54\mathbf{j})$$

$$\therefore \vec{M}_0^2 = 5619.96\mathbf{i} + 8429.94\mathbf{j} \text{ [N}\cdot\text{m]}$$

Cálculo de los momentos respecto al punto A.

El momento de  $T^2$  es igual a cero, puesto que A es un punto de su línea de acción.

$$\therefore \vec{M}_A^2 = \vec{0}$$

Para calcular el momento de  $T^1$  se aplicará la fórmula del cambio de centro de momentos:

$$\vec{M}_A^1 = \vec{M}_O^1 - \vec{r}_A \times \vec{T}^1$$

$$\vec{r}_A \times \vec{T}^1 = 122.45 \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 6 & -4 & 0 \\ 4 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 122.45(-8 \mathbf{i} - 12 \mathbf{j} + 4 \mathbf{k})$$

$$\vec{r}_A \times \vec{T}^1 = -979.6 \mathbf{i} - 1469.4 \mathbf{j} + 489.8 \mathbf{k}$$

Sustituyendo en la fórmula, así como  $M_O^1$  obtenido con anterioridad

$$\vec{M}_A^1 = \vec{M}_O^1 - \vec{r}_A \times \vec{T}^1 = 2693.9 \mathbf{i} + 5387.8 \mathbf{j} - (-979.6 \mathbf{i} - 1469.4 \mathbf{j} + 489.8 \mathbf{k})$$

$$\therefore \vec{M}_A^1 = 3673.5 \mathbf{i} + 6857.2 \mathbf{j} - 489.8 \mathbf{k} \quad [\text{N}\cdot\text{m}]$$

En el cálculo de  $\vec{M}_A^P$  aplicaremos el procedimiento directo:

$$\vec{M}_A^P = \vec{AE} \times \vec{P} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -10 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -150 \end{vmatrix} = -900 \mathbf{i} - 1500 \mathbf{j}$$

$$\therefore \vec{M}_A^P = -900 \mathbf{i} - 1500 \mathbf{j} \quad [\text{N}\cdot\text{m}]$$

A modo de comprobación se aplicarán ambos procedimientos en la obtención de  $\vec{M}_A^W$ , teniendo en cuenta que  $\vec{M}_O^W = \vec{0}$

$$\vec{M}_A^W = \vec{M}_O^W - \vec{r}_A \times \vec{W} = \vec{0} - \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 6 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -3000 \end{vmatrix} = \vec{0} - (12000 \mathbf{i} + 18000 \mathbf{j})$$

$$\therefore \vec{M}_A^W = -12000 \mathbf{i} - 18000 \mathbf{j} \quad [\text{N}\cdot\text{m}]$$

$$\vec{M}_A^W = \vec{AO} \times \vec{W} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -6 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -3000 \end{vmatrix} = -12000 \mathbf{i} - 18000 \mathbf{j} \quad [\text{N}\cdot\text{m}]$$

Así pues, es indistinto seguir cualquiera de ambos procedimientos.

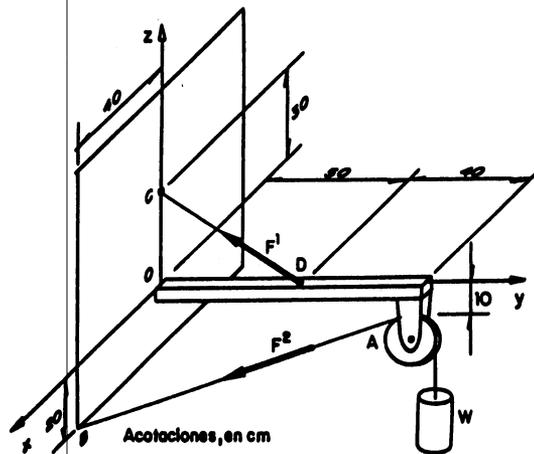
### 1.8.2 COORDENADAS VECTORIALES DE UNA FUERZA

En síntesis, mientras que el vector equipolente de una fuerza es un *vector libre*, el momento de la fuerza con respecto al origen es un *vector fijo*. El primero de estos conceptos nos informa acerca de la magnitud y dirección de la fuerza y el segundo nos indica su posición respecto a un sistema de referencia y como estos datos son los necesarios para conocer con precisión a una fuerza, se les da el nombre de *coordenadas vectoriales*, que pueden expresarse:

$$(\vec{F}, \vec{M}_O)$$

En forma análoga a lo que se aplica para los puntos en el espacio, esta correspondencia entre las coordenadas vectoriales de una fuerza y la fuerza misma; es decir, las características de una fuerza (magnitud, dirección, posición) quedan perfectamente definidas mediante sus coordenadas vectoriales; inversamente, a las coordenadas vectoriales  $(\vec{F}, \vec{M}_O)$  les corresponde sólo una fuerza cuya magnitud, dirección y posición puede obtenerse a partir de ellas.

**Ejemplo 1.17.** Las fuerzas de tensión  $F^1 = 10$  kN y  $F^2 = 3$  kN se generan debido al cilindro suspendido  $W = 15$  kN. Si se desprecian los pesos de la viga y la polea, así como el diámetro de ésta obtener las coordenadas vectoriales de esas tres fuerzas.



**Fig 1.51**

Solución:

Cálculo de las coordenadas vectoriales de  $\vec{F}^1$

$$\begin{aligned} \vec{F}^1 &= 10 \left( \frac{-50 \vec{j} + 30 \vec{k}}{58.3} \right) \\ \vec{F}^1 &= -8.57 \vec{j} + 5.14 \vec{k} \text{ [kN]} \end{aligned}$$

— Momento respecto al origen:

$$\vec{M}_O^1 = \vec{r}^1 \times \vec{F}^1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 30 \\ 0 & -8.57 & 5.14 \end{vmatrix} = 257.1 \vec{i} \text{ [kN} \cdot \text{cm]}$$

Las coordenadas vectoriales de  $\vec{F}^1$  son:

$$(-8.57 \vec{j} + 5.14 \vec{k}, 257.1 \vec{i}), \text{ [kN, kN} \cdot \text{cm]}$$

Cálculo de las coordenadas vectoriales de  $\vec{F}^2$ :

$$\vec{F}^2 = 3 \left( \frac{40 \vec{i} - 90 \vec{j} - 10 \vec{k}}{99} \right) = 1.21 \vec{i} - 2.7 \vec{j} - 0.3 \vec{k} \text{ [kN]}$$

$$\vec{M}_O^2 = \vec{r}^2 \times \vec{F}^2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 90 & -10 \\ 1.2 & -2.7 & -0.3 \end{vmatrix} = -54 \vec{i} - 12 \vec{j} - 108 \vec{k} \text{ [kN} \cdot \text{cm]}$$

Las coordenadas vectoriales de  $\vec{F}^2$  son:

$$(1.21 \vec{i} - 2.7 \vec{j} - 0.3 \vec{k}, -54 \vec{i} - 12 \vec{j} - 108 \vec{k}) \text{ [kN, kN} \cdot \text{cm]}$$

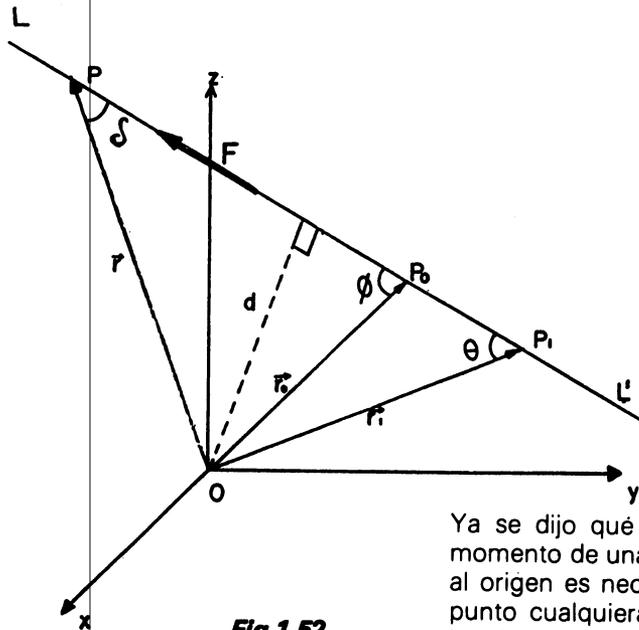
Cálculo de las coordenadas vectoriales de  $\vec{W}$ :

$$\vec{W} = -15 \vec{k} \text{ [kN]}$$

$$\vec{M}_O^W = \vec{r}^3 \times \vec{W} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 90 & -10 \\ 0 & 0 & -15 \end{vmatrix} = -1350 \vec{i} \text{ [kN} \cdot \text{cm]}$$

Las coordenadas vectoriales de  $\vec{W}$  son:

$$(-15 \vec{k}, -1350 \vec{i}) \text{ [kN, kN} \cdot \text{cm]}$$



**Fig 1.52**

Ya se dijo que para calcular el momento de una fuerza respecto al origen es necesario definir un punto cualquiera del soporte de la misma, o sea que el momento es independiente del punto elegido de la línea de acción. En efecto, de la figura obtenemos:

usando el punto  $P_0$

$$\vec{M}_0 = \vec{r}_0 \times \vec{F} \quad \dots \dots \dots 1.39$$

usando el punto  $P_1$

$$\vec{M}_0 = \vec{r}_1 \times \vec{F} \quad \dots \dots \dots 1.40$$

usando el punto  $P$

$$\vec{M}_0 = \vec{r} \times \vec{F} \quad \dots \dots \dots 1.41$$

Obteniendo el módulo de las tres expresiones anteriores:

$$\text{de 1.39; } |\vec{M}_0| = |\vec{F}| |\vec{r}_0| \text{ sen } \phi = |\vec{F}| d$$

$$\text{de 1.40; } |\vec{M}_0| = |\vec{F}| |\vec{r}_1| \text{ sen } \theta = |\vec{F}| d$$

$$\text{de 1.41; } |\vec{M}_0| = |\vec{F}| |\vec{r}| \text{ sen } \delta = |\vec{F}| d$$

Se ha comprobado que:

$$\vec{r}_0 \times \vec{F} = \vec{r}_1 \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}_0$$

como esto es verdad, entonces

$$\vec{r}_1 \times \vec{F} - \vec{r}_0 \times \vec{F} = \vec{0} \text{ ya que } \vec{r}_1 \times \vec{F} \text{ y } \vec{r}_0 \times \vec{F} \text{ son vectores paralelos}$$

Pero como:  $\vec{r}_1 \times \vec{F} - \vec{r}_0 \times \vec{F} = \vec{r}_1 - \vec{r}_0$

entonces:

$$(\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{F} = \vec{0} \quad \dots 1.42$$

Puede concluirse que todo punto, cuyo vector de posición sea  $\vec{r}$ , que satisfaga la ecuación 1.42 estará contenido en la recta L'L, por lo tanto 1.42 es la *ecuación vectorial del soporte de la fuerza*.

La ecuación 1.42 puede adoptar la forma:

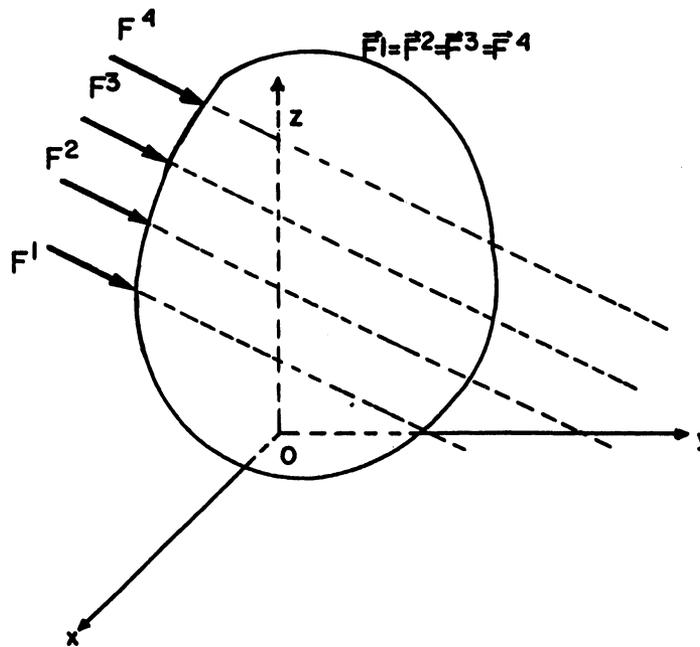
$$\vec{r} \times \vec{F} - \vec{r}_0 \times \vec{F} = \vec{0}; \quad \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r}_0 \times \vec{F}$$

$$\text{o sea: } \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}_0$$

Esta última expresión muestra nuevamente el vínculo entre el momento de la fuerza, con respecto al origen y la posición que su soporte tiene en el espacio.

Finalmente es conveniente reflexionar en la diferencia existente entre la información que se obtiene del vector equipolente de una fuerza y la que se adquiere de la ecuación vectorial de su soporte.

Vector equipolente:  $\vec{F} = F_x i + F_y j + F_z k$  proporciona la magnitud y la dirección de la fuerza, pero es posible la existencia de infinidad de fuerzas de la misma magnitud y dirección que estando aplicadas a un cuerpo le produzcan efectos externos diferentes:



**Fig 1.53**

Si se quieren saber con toda precisión los *efectos* de una fuerza específica se necesita determinar el lugar geométrico que ocupa; en otras palabras, debe plantearse la ecuación vectorial de su soporte.

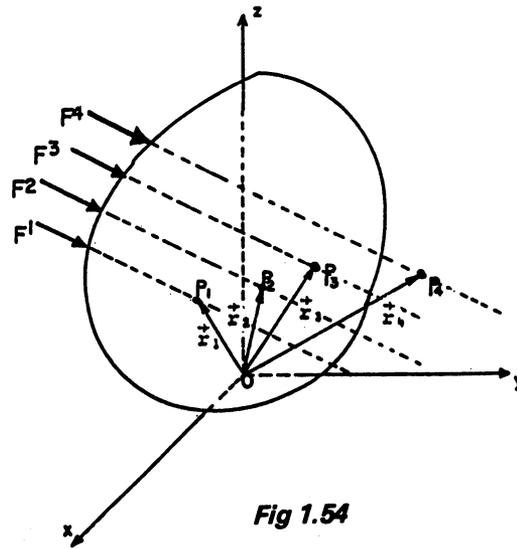


Fig 1.54

De la figura se concluye que, aunque:

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_2 = \vec{r}_3 = \vec{r}_4$$

$$\vec{r}_1 \times \vec{F}_1 \neq \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 \neq \vec{r}_3 \times \vec{F}_3 \neq \vec{r}_4 \times \vec{F}_4$$

$$\vec{r}_1 \times \vec{F}_2 \neq \vec{r}_2 \times \vec{F}_1 \neq \vec{r}_3 \times \vec{F}_1 \neq \vec{r}_4 \times \vec{F}_1$$

puesto que los puntos  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  y  $P_4$  corresponden a diferentes soportes; de aquí la importancia de la ecuación vectorial del soporte de la fuerza, pues la tendencia de ésta a hacer girar al cuerpo dependerá de la ubicación de dicho lugar geométrico.

**Ejemplo 1.18.** Dos fuerzas que actúan sobre un cuerpo están dadas por sus coordenadas vectoriales. Establecer la ecuación de su soporte y obtener uno de sus puntos.

a)  $\vec{F}^1: (64 \mathbf{i} - 77 \mathbf{j}, 539 \mathbf{i} + 448 \mathbf{j} - 385 \mathbf{k}) [ \text{N}, \text{N} \cdot \text{m} ]$

b)  $\vec{F}^2: (260 \mathbf{i} + 850 \mathbf{j} - 460 \mathbf{k}, -280 \mathbf{i} + 340 \mathbf{j} + 470 \mathbf{k}) [ \text{N}, \text{N} \cdot \text{m} ]$

Solución: La ecuación vectorial de la línea de acción es de la forma  $\vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}_0$ , donde  $\vec{r}$  es el vector de posición del punto P(x, y, z) de dicho soporte.

a) El vector de posición es:  $\vec{r}_1 = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

$$\vec{r}_1 \times \vec{F}^1 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ 64 & -77 & 0 \end{vmatrix} = \vec{M}_0^1$$

Desarrollando el determinante e igualándolo con  $\vec{M}_0^1$ :

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ 64 & -77 & 0 \end{vmatrix} = (77z)\mathbf{i} - (-64z)\mathbf{j} + (-77x - 64y)\mathbf{k} = 539\mathbf{i} + 448\mathbf{j} - 385\mathbf{k}$$

Al igualar los coeficientes de los vectores unitarios iguales:

$$\text{En } \mathbf{i} : 77z = 539 ; z = \frac{539}{77} ; z = 7$$

$$\text{En } \mathbf{j} : 64z = 448 ; z = \frac{448}{64} ; z = 7$$

$$\text{En } \mathbf{k} : -77x - 64y = -385$$

En la última ecuación, si  $y = 0$  :  $77x = 385$  ,  $x = 5$

Un punto del soporte de la fuerza  $F^1$  es P(5,0,7)[m] y su ecuación es:

$$\begin{cases} 77x + 64y = 385 \\ z = 7 \end{cases}$$

que es una recta paralela al plano xy.

b) El vector de posición es  $\vec{r}_2 = xi + yj + zk$

$$\vec{x}_2 \times \vec{F}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ 260 & 850 & -460 \end{vmatrix} = \vec{M}_0$$

Desarrollando el determinante e igualándolo con  $\vec{M}_0$ :

$$10 \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ 26 & 85 & -46 \end{vmatrix} = 10 [(-46y - 85z)i - (-46x - 26z)j + (85x - 26y)k] =$$

$$= -280i + 340j + 470k$$

Al igualar los coeficientes de los vectores unitarios iguales:

$$\left. \begin{aligned} 46y + 85z &= 28 ; & z &= \frac{-46y + 28}{85} \\ 46x + 26z &= 34 ; & z &= \frac{-46x + 34}{26} \end{aligned} \right\} \frac{-46y + 28}{85} = \frac{-46x + 34}{26} = z$$

$$85x - 25y = 47$$

De la última expresión se obtienen las ecuaciones simétricas del soporte:

$$\frac{x - \frac{34}{46}}{-\frac{26}{46}} = \frac{y - \frac{28}{46}}{-\frac{85}{46}} = \frac{z - 0}{1} ; \frac{x - \frac{17}{23}}{-0.5652} = \frac{y - \frac{14}{23}}{-1.8478} = \frac{z - 0}{1}$$

De donde se obtiene un punto de la línea de acción:  $P\left(\frac{17}{23}, \frac{14}{23}, 0\right)$  m

Los denominadores de la última expresión son los números directores de la recta y como deben ser proporcionales a los cosenos directores, implícitos en el vector unitario correspondiente a la fuerza  $F^2$ , puede comprobarse si el resultado es correcto o no.

Se sabe que

$$\vec{e}_2 = \frac{260i + 850j - 460k}{\sqrt{(260)^2 + (850)^2 + (460)^2}} = 0.2598i + 0.8493j - 0.4596k$$

Al multiplicar por el coeficiente de k todos los denominadores se verificarán los coeficientes de i y de j del vector  $\vec{e}_2$

### 1.8.3. MOMENTO DE UNA FUERZA CON RESPECTO A UN EJE.

Si el centro de momentos forma parte de un eje perpendicular al plano definido por la línea de acción de la fuerza y dicho centro de momentos, entonces el momento de la fuerza con respecto a ese punto es igual a su *momento con respecto al eje*; este momento no cambiará cualquiera que sea el punto que se elija del eje, pues la distancia "d" entre el soporte de la fuerza y el eje E' E no se modifica, como puede observarse en las figuras 1.55. A este eje se le denomina *eje de momentos*.

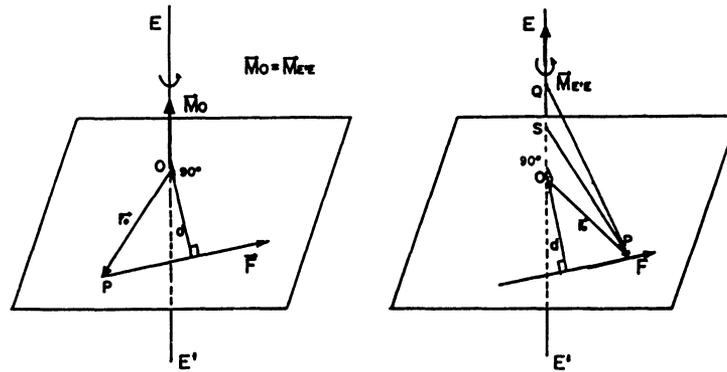


Fig 1.55

Lo anterior se cumple debido a que el momento de una fuerza con respecto a un eje es la proyección vectorial, sobre dicho eje, del momento de la misma fuerza con respecto a un punto cualquiera del eje de momentos.

En efecto, en la figura 1.55 se observa que  $\vec{M}_O$  y el eje E' E son paralelos (concidentes) y, por lo tanto,  $M_O$  se proyecta íntegramente sobre E' E.

$$\vec{M}_{E'E} = \text{Proy. Vec.}_{E'E} \vec{M}_O = (\vec{M}_O \cdot \vec{e}) \vec{e} \quad \dots 1.43$$

siendo  $\vec{e}$  el vector unitario que define la dirección de E' E

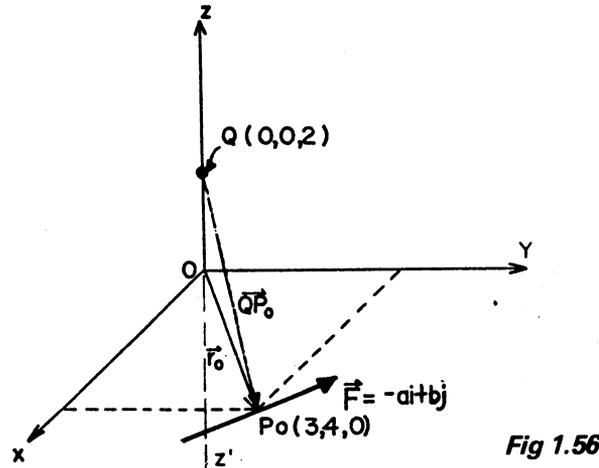
$$\vec{M}_{E'E} = (|\vec{M}_O| |\vec{e}| \cos 0^\circ) \vec{e} = |\vec{M}_O| \vec{e}$$

$$\text{ya que } |\vec{e}| = 1; \cos 0^\circ = 1$$

y como  $\vec{e}$  es de misma dirección de  $\vec{M}_O$ :

$$\vec{M}_{E'E} = \vec{M}_O$$

Para comprobar que este resultado no cambia si se toma otro punto del eje E' E se recurrirá al siguiente ejemplo.



Se ha sustituido al eje E' E por el Z' Z.

El momento de la fuerza F con respecto al eje Z' Z es igual al momento de la misma con respecto a O:

$$\vec{M}_{z',z} = \vec{M}_O = \vec{r}_O \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 4 & 0 \\ -a & b & 0 \end{vmatrix} = (3b + 4a) \mathbf{k}$$

En este caso no fue necesario efectuar la proyección porque los vectores  $\vec{r}_O$  y  $\vec{F}$  están en el plano xy.

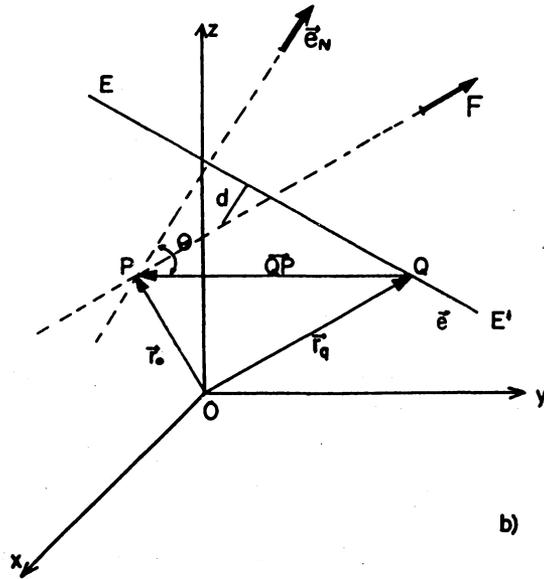
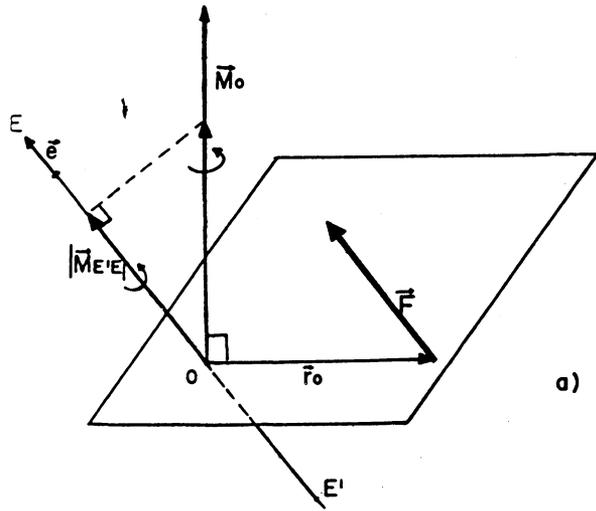
Ahora se obtiene el mismo momento  $M_{z',z}$ , pero adoptando el punto Q. Primero se calcula

$$\vec{M}_Q = \vec{QP}_0 \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 4 & -2 \\ -a & b & 0 \end{vmatrix} = 2b\mathbf{i} + 2a\mathbf{j} + (3b + 4a)\mathbf{k}$$

$$\vec{M}_{z',z} = (\vec{M}_Q \cdot \mathbf{k})\mathbf{k} = [ (2b\mathbf{i} + 2a\mathbf{j} + 3b\mathbf{k} + 4a\mathbf{k}) \cdot \mathbf{k} ]\mathbf{k} = (3b + 4a)\mathbf{k}$$

Así pues, el momento de una fuerza con respecto a un eje es independiente del punto del eje que se haga intervenir en su cálculo.

Si el eje, que pasa por el centro de momentos, y el plano definido por el soporte de la fuerza y dicho centro, no son perpendiculares, entonces la proyección del momento de la fuerza, con respecto al centro de momentos, sobre el eje considerado, es de magnitud menor respecto a la del momento referido, puesto que  $\vec{M}_O$  y E' E ya no son paralelos, como puede observarse en la figura 1.57 (a).



**Fig 1.57**

Las figuras 1.57(a) y 1.57(b) ilustran el caso más general de momento de una fuerza con respecto a un eje. En su cálculo deben encontrarse bien definidas las coordenadas vectoriales de la fuerza ( $\vec{F}$ ,  $\vec{M}_O$ ), así como la dirección y la posición del eje,  $\vec{e}$  y  $\vec{r}_Q$ , según quedó establecido con anterioridad.

$$\vec{M}_{E'E} = (\vec{M}_O \cdot \vec{e}) \vec{e}$$

Si se determina la distancia  $d$  entre  $F$  y  $E'E$  el momento puede obtenerse del modo siguiente:

$$|\vec{M}_{E'E}| = |\vec{F}|d \quad \dots \dots \dots 1.44$$

Para calcular  $d$  es necesario establecer la normal  $N$  común a  $F$  y  $E'$  para proyectar sobre ella el segmento  $\vec{QP}$  ( $P$  y  $Q$  son puntos conocidos).

Sabemos que:  $\vec{N} = \vec{e} \times \vec{F}$

y el vector unitario correspondiente es:  $\vec{e}_N = \frac{\vec{e} \times \vec{F}}{|\vec{e} \times \vec{F}|}$

entonces:  $d = |\text{Proy}_N \vec{QP}| = |\vec{e}_N \cdot \vec{QP}| = |\vec{e}_N| |\vec{QP}| \cos \theta$

donde  $\theta$  es el ángulo formado por  $\vec{e}_N$  y  $\vec{QP}$

Sustituyendo en 1.44:

$$|\vec{M}_{E,E}| = |\vec{F}| |\vec{e}_N| |\vec{QP}| \cos \theta \dots 1.45 ; 0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$$

Si  $\theta = 0^\circ$  necesariamente  $\vec{e}_N$  y  $\vec{QP}$  son paralelos y por consecuencia

$$|\vec{QP}| = d \quad \text{y} \quad \cos 0^\circ = 1$$

Sustituyendo en 1.45 y considerando que  $|\vec{e}_N| = 1$

$$|\vec{M}_{E,E}| = |\vec{F}| d$$

que constituye un *caso trivial del momento de una fuerza con respecto a un eje*, mismo que ocurre cuando  $\vec{e}$  y  $\vec{F}$  son ortogonales pero no se cortan

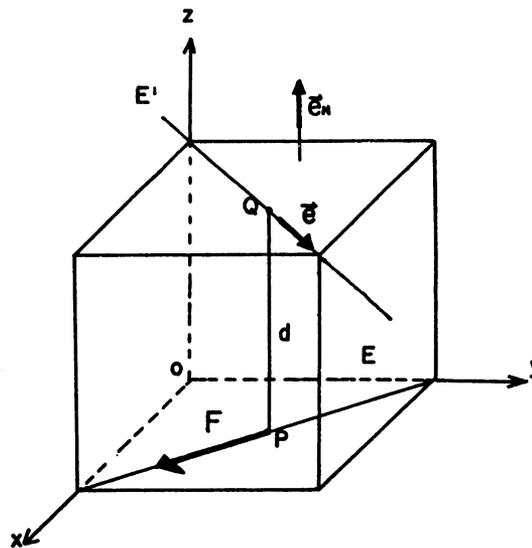


Fig 1.58

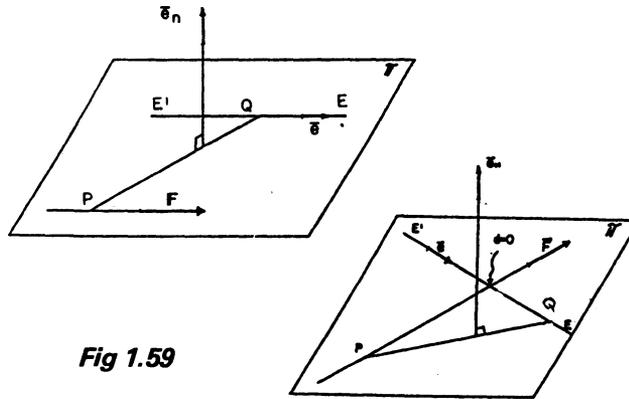
Pero si  $\theta = 90^\circ$  significa que  $\vec{e}_N$  y  $\vec{QP}$  son perpendiculares y, por consiguiente,  $\vec{e}$  y  $\vec{F}$  son paralelos o se cortan en un punto y en ambos casos son coplanos, como puede observarse en las siguientes figuras

Entonces  $\cos \theta = 0^\circ$  que sustituido en 1.45:

$$|\vec{M}_{E' \cdot E}| = 0$$

Puede afirmarse que *el momento de una fuerza con respecto a un eje será nulo, sólo cuando el soporte de la fuerza y el eje sean coplanares.*

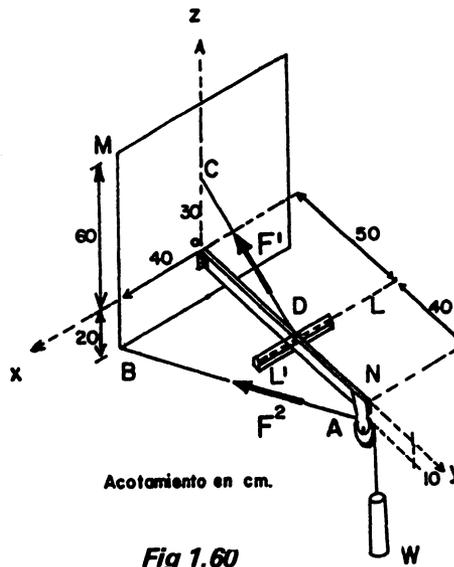
Por último, conviene reflexionar en que al cortarse  $\vec{F}$  y  $\vec{e}$  el valor de  $d$  es nulo.



**Fig 1.59**

*Ejemplo 1.19.* Las fuerzas de tensión  $F^1 = 10 \text{ kN}$  y  $F^2 = 3 \text{ kN}$  se generan debido al cilindro suspendido  $W = 15 \text{ kN}$ . Si se desprecian los pesos de la viga y la polea, así como el diámetro de ésta, obtener el momento de cada fuerza con respecto:

- al eje MN
- al eje L'L
- a los ejes del sistema de referencia y comparar estos resultados con los momentos de las fuerzas respectivas obtenidos en el ejemplo (1.17).  
¿Qué se concluye?



Acotamiento en cm.

**Fig 1.60**

Solución:

a) Aunque la fórmula general para obtener el momento de una fuerza con respecto a un eje es

$$\vec{M}_{E, E} = (\vec{M}_O \cdot \vec{e}) \vec{e}$$

antes de aplicarla es útil analizar cada una de las fuerzas, pues si se trata de casos triviales no es necesario su aplicación.

Fuerza F<sup>1</sup>: Como no corta al eje, ni es paralela y tampoco perpendicular a él, se aplica la fórmula, donde:

$$\vec{e}_{MN} = \frac{\vec{MN}}{|\vec{MN}|} = \frac{-40\mathbf{i} + 90\mathbf{j} - 60\mathbf{k}}{115.33} = -0.3468\mathbf{i} + 0.7804\mathbf{j} - 0.5203\mathbf{k}$$

$$\vec{F}^1 = 10 \frac{D\vec{C}}{|D\vec{C}|} = 10 \left( \frac{-50\mathbf{j} + 30\mathbf{k}}{58.31} \right) = -8.57\mathbf{j} + 5.14\mathbf{k} \text{ [kN]}$$

Como M<sub>O</sub> es el momento de la fuerza respecto a un punto cualquiera del eje, puede adoptarse el punto N(0, 90, 0)

$$\vec{M}_N^1 = \vec{N}\vec{D} \times \vec{F}^1 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & -40 & 0 \\ 0 & -8.57 & 5.14 \end{vmatrix} = -205.6\mathbf{i}$$

Sustituyendo en la fórmula:

$$\vec{M}_{MN}^1 = \vec{M}_N^1 \cdot \vec{e}_{MN} = [(-205.6\mathbf{i}) \cdot (-0.3468\mathbf{i} + 0.7804\mathbf{j} - 0.5203\mathbf{k})] = (0.3468\mathbf{i} + 0.7804\mathbf{j} - 0.5203\mathbf{k})$$

$$\vec{M}_{MN}^1 = 71.3(-0.3468\mathbf{i} + 0.7804\mathbf{j} - 0.5203\mathbf{k}) = -24.7\mathbf{i} + 55.6\mathbf{j} - 37.1\mathbf{k} \text{ [kN} \cdot \text{cm]}$$

Fuerza F<sup>2</sup>: las mismas consideraciones que para F<sup>1</sup>

$$\vec{F}^2 = \frac{3\vec{AB}}{|\vec{AB}|} = 3(0.404\mathbf{i} - 0.909\mathbf{j} - 0.101\mathbf{k}) = 1.212\mathbf{i} - 2.727\mathbf{j} - 0.303\mathbf{k}$$

$$\vec{M}_N^2 = \vec{N}\vec{A} \times \vec{F}^2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & -10 \\ 1.212 & -2.727 & -0.303 \end{vmatrix} = -27.27\mathbf{i} - 12.12\mathbf{j}$$

Sustituyendo en la fórmula:

$$\vec{M}_{MN}^2 = [(-27.27\mathbf{i} - 12.12\mathbf{j}) \cdot (-0.3468\mathbf{i} + 0.7804\mathbf{j} - 0.5203\mathbf{k})] (-0.3468\mathbf{i} + 0.7804\mathbf{j} - 0.5203\mathbf{k})$$

$$= (-0.0012)(-0.3468\mathbf{i} + 0.7804\mathbf{j} - 0.5203\mathbf{k}) = 0.0004\mathbf{i} - 0.0009\mathbf{j} - 0.0006\mathbf{k} \text{ [kN} \cdot \text{cm]}$$

Este resultado es razonable, puesto que el eje MN y la línea de acción de la fuerza F<sup>2</sup> casi se cortan.

Fuerza W: puesto que la polea tiene diámetro despreciable, el punto N se encuentra en la línea de acción de W y, por lo tanto, su momento con respecto al eje MN es nulo.

$$\vec{M}_{MN}^W = \vec{0}$$

b) El momento de  $F^1$  respecto al eje  $L^1L$  es nulo, puesto que su línea de acción corta a dicho eje:

$$\vec{M}_{L^1L} F^1 = \vec{0}$$

Para obtener el momento de  $F^2$  se aplica la fórmula, donde

$$\vec{e} = -1 \quad y \quad Q = D(0, 50, 0)$$

$$\vec{M}_Q = \vec{M}_D = D\vec{\lambda} \times \vec{F}^2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 40 & -10 \\ 1.212 & -2.727 & -0.303 \end{vmatrix} = -39.39 i - 12.12 j - 48.48 k$$

Sustituyendo en la fórmula:

$$\vec{M}_{L^1L} F^2 = [(-39.39 i - 12.12 j - 48.48 k) \cdot (-1)] (-1) = 39.39 (-1) = -39.39 i \quad [\text{kN} \cdot \text{cm}]$$

Como el soporte de la fuerza  $W$  es perpendicular a  $L^1L$ , el cálculo de su momento se efectúa teniendo en cuenta que se trata de un caso trivial, o sea:

$$\vec{M}_{L^1L} W = (Wd) \vec{e} = (15)(40)(-1) = -600 i \quad [\text{kN} \cdot \text{cm}]$$

c) Considerando  $F^1$ , sus momentos respecto a los ejes  $Y$  y  $Z$  son nulos, puesto que su soporte corta a dichos ejes. Como el origen es un punto común a todos los ejes coordenados, se indentificará como el punto  $Q$  de la fórmula:

$$\vec{M}_Q = \vec{QP}_O \times \vec{F} \dots\dots\dots 1.37'$$

Entonces:

$$\vec{M}_Q^1 = \vec{M}_O^1 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 30 \\ 0 & -8.57 & 5.14 \end{vmatrix} = 257.1 i$$

y como  $\vec{e} = i$ , sustituyendo en la fórmula:

$$\vec{M}_{x^1x} F^1 = [(257.1 i) \cdot (i)] (1) = 257.1 (1) = 257.1 i \quad [\text{kN} \cdot \text{cm}]$$

Momentos de  $F^2$ :

$$\vec{M}_Q^2 = \vec{M}_D^2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 40 & 0 & -20 \\ 1.212 & -2.727 & -0.303 \end{vmatrix} = -54.54 i - 12.12 j - 109.08 k$$

$$\vec{M}_{x^1x} F^2 = [(-54.54 i - 12.12 j - 109.08 k) \cdot i] (1) = -54.54 i \quad [\text{kN} \cdot \text{cm}]$$

$$\vec{M}_{y^1y} F^2 = [(-54.54 i - 12.12 j - 109.08 k) \cdot j] (j) = -12.12 j \quad [\text{kN} \cdot \text{cm}]$$

$$\vec{M}_{z^1z} F^2 = [(-54.54 i - 12.12 j - 109.08 k) \cdot k] (k) = -109.08 k \quad [\text{kN} \cdot \text{cm}]$$

Los momentos de  $W$  son nulos con respecto a los ejes  $Y$  y  $Z$  ya que su línea de acción corta al primero y es paralela al segundo; y como es perpendicular al eje  $X$  su momento constituye un caso trivial:

$$\vec{M}_{x,x} W = -(wd) \hat{i} = -(15)(90) \hat{i} = -1350 \hat{i}$$

Puede concluirse que la suma de los momentos con respecto a los ejes coordenados es igual al momento de la misma fuerza con respecto al origen de este sistema de referencia.

### 1.9 EJERCICIOS PROPUESTOS

- 1.- Expresar una definición de la mecánica.
- 2.- Definir la mecánica clásica.
- 3.- Definir la mecánica relativista.
- 4.- Definir la mecánica cuántica.
- 5.- ¿Cómo se genera una fuerza?
- 6.- ¿Qué se entiende por inercia?
- 7.- ¿Qué es un sólido y qué es un fluido?
- 8.- ¿Qué diferencia existe entre un sólido rígido y un sólido deformable?
- 9.- Explicar lo que es un modelo y definir los modelos de cuerpo que se utilizan en la mecánica clásica.
- 10.- Las fuerzas producen sobre los cuerpos dos tipos de efectos ¿cuáles son?
- 11.- ¿Qué modelo de cuerpo se utiliza cuando se analiza sólo el desplazamiento?
- 12.- Explicar cantidad escalar y proponer ejemplos.
- 13.- Explicar cantidad vectorial y proponer ejemplos.
- 14.- ¿A qué distancia de la Tierra debe estar un cuerpo en la dirección del Sol para que la atracción gravitacional de éste equilibre la de la Tierra? El Sol está a una distancia promedio de la Tierra de  $149.6(10^9)$  m y su masa es de  $3.33(10^5) M_T$ . No considerar los efectos de los demás planetas o satélites.
- 15.- Aplicando los conceptos teóricos expuestos, calcular el peso de la Tierra respecto a:
  - a) La Luna
  - b) Venus
  - c) Usted

Explicar el resultado.

- 16.- Obtener los valores de  $F_1$ ,  $F_2$  y  $F_3$  tales que se cumpla la relación

$$\vec{R} = \vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_C$$

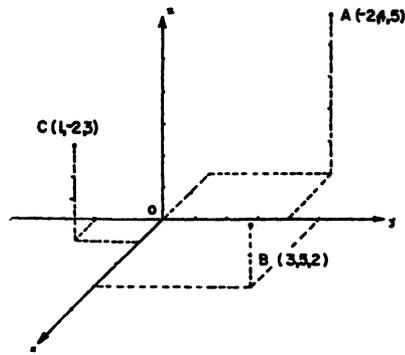
En donde  $\vec{R} = 7\hat{i} + 8\hat{j} - 9\hat{k} \quad [N]$

$$\vec{F}_A = F_1\hat{i} + 7\hat{j} - 10\hat{k} \quad [N]$$

$$\vec{F}_B = 10\hat{i} + F_2\hat{j} + 12\hat{k} \quad [N]$$

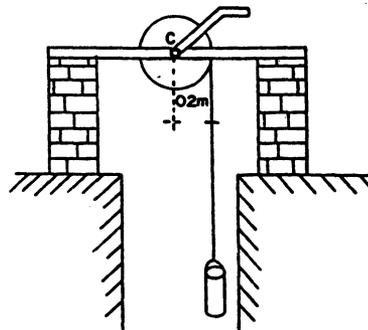
$$\vec{F}_C = 6\hat{i} + \hat{j} - F_3\hat{k} \quad [N]$$

- 17.- Descomponer la fuerza  $\vec{FR} = 10\vec{i} + 20\vec{j} + 30\vec{k}$  [N] en las direcciones definidas por las rectas OA, OB y OC mostradas en la figura



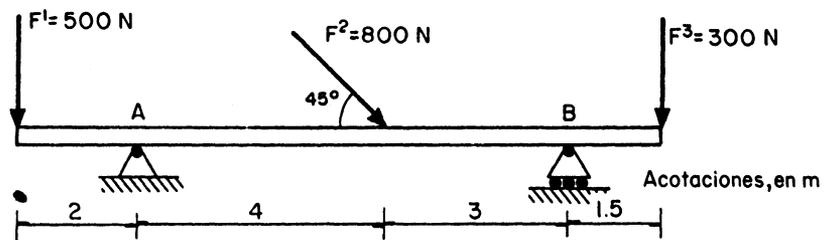
**Fig 1.61**

- 18.- El cubo de agua que se extrae del pozo mostrado en la figura pesa 450 N. Obtener su momento respecto al punto C.



**Fig 1.62**

- 19.- La viga que se ilustra en la figura se encuentra cargada como se muestra. Obtener los momentos de las fuerzas, con respecto a los apoyos.



**Fig 1.63**

20.- Dos fuerzas, cuyas coordenadas vectoriales son

$$\vec{F}^1 : (30 \mathbf{i} - 64 \mathbf{j} - 21 \mathbf{k}, 148 \mathbf{i} + 12 \mathbf{j} - 248 \mathbf{k})$$

$$\vec{F}^2 : (-15 \mathbf{i} - 43 \mathbf{j} + 50 \mathbf{k}, 150 \mathbf{i} + 250 \mathbf{j} + 260 \mathbf{k})$$

están dadas en newton y sus momentos en  $\text{N} \cdot \text{m}$ . Obtener, para cada una de ellas, su magnitud, dirección y posición.

21.- Las fuerzas de tensión  $F^1 = 20 \text{ kN}$  y  $F^2 = 15 \text{ kN}$  se generan debido al cilindro suspendido  $W = 18 \text{ kN}$ . Si se desprecian los pesos de la viga y la polea, así como el diámetro de ésta obtener las coordenadas vectoriales de esas tres fuerzas.

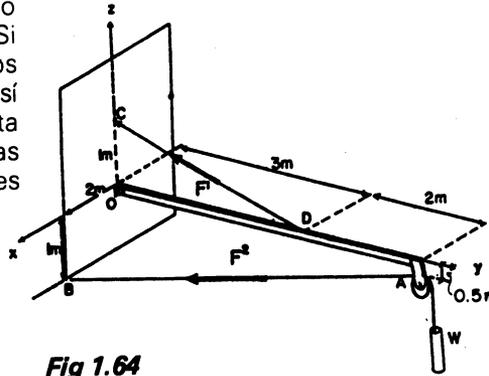


Fig 1.64

22.- Una fuerza de  $350 \text{ N}$  actúa sobre un cuerpo según la línea de acción que va de  $A(8, -3, 4)$  hacia  $B(10, -7, -2)$  medidos en metros. Calcular el momento de esta fuerza con respecto al origen del sistema de referencia involucrado, así como respecto al centro de masa del cuerpo, ubicado en el punto  $G(5, 3, 0)$ .

23.- Determinar el momento de la fuerza, que ejerce la mano mostrada en la figura, con respecto al eje alrededor del cual gira la hoja de la ventana.

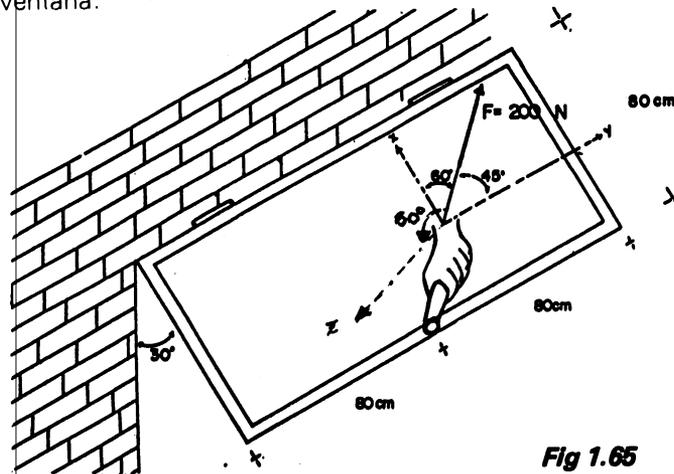


Fig 1.65

## 1.10 BIBLIOGRAFIA

1. F.P. Beer y E.R. Johnston, Jr., "Mecánica Vectorial para Ingenieros. Estática", Mc Graw-Hill, 1984.
2. E. Cortés et al, "Mecánica I", Facultad de Ingeniería. UNAM, 1983.
3. J. Goldenberg, "Física General y Experimental", Interamericana.
4. R.C. Hibbeler, "Mecánica para Ingenieros. Estática", CECSA, 1985.
5. R.H. March, "Física para Poetas", Siglo Veintiuno, 1983

*El apoyo gráfico y la impresión se realizaron  
en la Unidad de Difusión de  
la Facultad de Ingeniería*

**1987**

