



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

---

**PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN  
INGENIERÍA**

**FACULTAD DE INGENIERÍA**

**UNA NUEVA LEY DE FRICCIÓN CINÉTICA PARA BLOQUES  
RÍGIDOS Y SU APLICACIÓN A PROBLEMAS GEOSÍSMICOS**

**T E S I S**

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

**DOCTOR EN INGENIERÍA**

INGENIERÍA CIVIL – GEOTECNIA

P R E S E N T A

**BOGART CAMILLE MÉNDEZ URQUÍDEZ**



TUTOR:

DR. MIGUEL PEDRO ROMO ORGANISTA

CIUDAD UNIVERSITARIA, AGOSTO 2009

JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dr. Reséndiz Núñez Daniel

Secretario: Dr. Flores Berrones Raúl

Vocal: Dr. Romo Organista Miguel Pedro

1er. Suplente: Dr. Ovando Shelley Efraín

2do. Suplente: Dr. Rivera Constantino Rigoberto

Lugar donde se realizó la tesis:

INSTITUTO DE INGENIERÍA, UNAM

**TUTOR DE TESIS:**

---

DR. MIGUEL PEDRO ROMO ORGANISTA

A Iris mi esposa y mi hijo Manuel. El esfuerzo fue de los tres.

**Expreso mi agradecimiento a las instituciones que apoyaron esta investigación:**

Instituto de Ingeniería, UNAM

Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, CONACYT

**Agradezco también:**

Al Dr. Romo, por compartir sin reparos su experiencia, conocimientos y trabajo, siempre educando en silencio con su proceder

Al Dr. Eduardo Botero, de quien no sólo aprendí, sino que además me brindó su amistad

A los doctores Daniel Reséndiz, Raúl Flores, Efraín Ovando y Rigoberto Rivera, quienes se tomaron el tiempo de examinar mi trabajo y enriquecerlo con su experiencia

# Contenido

Resumen	vi
Abstract	vii
<b>1 Planteamiento y antecedentes de la investigación</b>	<b>1</b>
1.1 Introducción	1
1.2 Antecedentes	2
1.3 Objetivos de la investigación	9
1.4 Alcances del trabajo	10
1.5 Aportaciones	10
1.6 Organización del documento de tesis	11
<b>2 Análisis teórico del coeficiente de fricción</b>	<b>13</b>
2.1 Caso estático	13
2.2 Caso dinámico, plano horizontal	17
2.3 Caso dinámico, plano inclinado	25
<b>3 Análisis experimental en mesa vibradora del coeficiente de fricción</b>	<b>27</b>
3.1 Equipo utilizado y tipos de ensayos	27
3.2 Interfaz madera – madera	29
3.3 Interfaz geotextil – madera	37
3.4 Interfaz concreto – concreto	42
<b>4 Modelo de fricción propuesto</b>	<b>45</b>
4.1 Modelo propuesto	45
4.2 Verificación experimental	48
4.3 Validación en 3DEC	50
4.4 Validación en FLAC3D	56
<b>5 Aplicaciones del modelo propuesto</b>	<b>59</b>
5.1 Criterio para estimar el tipo de deslizamiento en una interfaz friccionante	59
5.2 Método de Newmark modificado	63
5.3 Método desacoplado para el análisis dinámico de estructuras deslizantes	69
5.4 Aplicación al análisis de presas de concreto fracturadas	75
5.5 Recomendaciones para la aplicación práctica del modelo de fricción propuesto	78
<b>6 Conclusiones</b>	<b>81</b>
<b>Referencias</b>	<b>83</b>

## Resumen

Se llevó a cabo una investigación teórica, numérica y experimental sobre el fenómeno de la fricción cinética en interfaces formadas entre un plano de deslizamiento y un bloque rígido. El problema de fricción se trata en forma sobresimplificada en la ingeniería. Por otro lado, las disciplinas especializadas en el tema, como la tribología y la ciencia de las superficies, proponen modelos extremadamente complejos para su aplicación práctica en la ingeniería. Esta brecha entre ambas disciplinas motivó la investigación realizada, donde el objetivo fundamental fue proponer un modelo de fricción a la vez simple y confiable para su aplicación a la ingeniería. El análisis teórico del coeficiente de fricción cinética mostró que las ecuaciones utilizadas hasta el momento en la ingeniería, son incorrectas. Se derivaron nuevas ecuaciones para calcular la variación del coeficiente de fricción en interfaces formadas por un bloque rígido deslizando sobre un plano de apoyo, y se realizaron ensayos experimentales de mesa vibradora para analizar esta variación desde un punto de vista fenomenológico. Se llevaron a cabo experimentos con interfaces madera – madera, geotextil – madera y concreto – concreto. Con base en las mediciones experimentales y las predicciones de las ecuaciones teóricas desarrolladas, se propuso un modelo de fricción que reproduce satisfactoriamente el comportamiento observado en el laboratorio. El modelo fue concebido para lograr una aproximación lineal al problema de la fricción, el cual es no lineal por naturaleza, ya que depende de la tasa de cambio de la velocidad relativa. La aproximación se logra mediante un parámetro experimental. El modelo y las ecuaciones teóricas desarrolladas, demuestran que el coeficiente de fricción cinético depende de la tasa de cambio de la velocidad relativa, y no de su valor instantáneo, como se ha supuesto hasta el momento en las investigaciones relacionadas. El modelo de fricción propuesto se implementó, a través de sub rutinas, en programas comerciales de análisis numérico (3DEC, FLAC3D) para validarlo contra los resultados experimentales, demostrando así que reproduce adecuadamente el fenómeno de fricción, a diferencia de los modelos tradicionales como el de Coulomb y el de fricción constante, los cuales sólo son adecuados para condiciones de velocidad o aceleración constante. Una vez validado, se obtuvo un criterio que permite estimar el tipo de deslizamiento que se presentará en una interfaz: continuo o intermitente. Posteriormente, se utilizó el modelo para modificar el método de Newmark, utilizado para calcular desplazamientos permanentes inducidos sísmicamente, mejorando así su capacidad y versatilidad de análisis. Se desarrolló también un método desacoplado para el análisis de la respuesta estructural de estructuras flexibles deslizantes, como por ejemplo edificios aislados sísmicamente con disipadores friccionantes. El método arroja resultados adecuados para fines de análisis, y es sencillo de aplicar. Se presenta también un ejemplo de aplicación para el caso de presas de concreto fracturadas. El ejemplo muestra la versatilidad del modelo para análisis numérico. Muestra también que el usar leyes de fricción convencionales no garantiza obtener resultados conservadores. Finalmente se dan lineamientos prácticos para aplicar el modelo de fricción en la ausencia de resultados experimentales que permitan evaluar el parámetro experimental del modelo planteado.

## Abstract

The kinetic friction phenomenon developed between a rigid block and its sliding plane was investigated theoretically, numerically and experimentally. The friction problem is usually oversimplified in engineering practice. On the other hand, tribology and surface science develop friction models that are too complex for engineering purposes. This research was motivated by the gap between both approaches, and its main objective was to develop a friction model which is both simple and reliable for engineering applications. The research started by performing a theoretical analysis of the friction phenomenon, which shows that the kinetic friction equations used up to date in engineering, are not correct. Conceptually correct equations were thus derived to compute the friction variation between rigid blocks, and shaking table experiments were carried out to analyze friction from a phenomenological perspective. Experiments were undertaken for wood – wood, geotextil – wood and concrete – concrete interfaces. A model was proposed based on laboratory measurements, and on the theoretical friction variation, which satisfactorily reproduces experimental observations. The model was conceived as a linear approximation of the intrinsically non-linear friction phenomenon, since it depends on the rate of change of interface velocity. The model implicitly accounts for this non-linearity through an experimental parameter. Both the friction model and the theoretical friction equations developed show that the kinetic friction coefficient depends on the rate of change of interface velocity, and not on the instantaneous velocity, as traditionally considered in related research. The proposed friction model was coded and implemented as a sub-routine into commercial numerical analysis software (3DEC, FLAC3D), so as to validate it against experimental measurements. The comparisons showed that the model captures the effect of the rate of change of velocity on the friction phenomenon, as opposed to traditional models like Coulomb's friction law, and constant friction law, which are adequate only under constant velocity or acceleration conditions. Once the model was validated, a criterion is proposed to estimate the type of interface displacement: continuous or stick – slip motion. Afterwards, the friction model was used to modify Newmark's rigid block method, improving its versatility and reducing its over – conservative results. Also, a method was developed for the analysis of flexible sliding structures, *i.e.*, seismically isolated buildings on a sliding base. The method is easy to use while providing reliable results. An application of the model was developed for the seismic analysis of a fractured concrete – dam, which illustrates that traditional friction laws do not lead to conservative results. Finally, practical recommendations are advanced to use the friction model when laboratory results are not available to define the experimental parameter of the friction model.

# 1 Planteamiento y antecedentes de la investigación

## 1.1 Introducción

Dada su importancia práctica en aplicaciones de ingeniería, el fenómeno de la fricción se ha estudiado exhaustivamente en diversas disciplinas como la ingeniería mecánica, con miras de modelar el funcionamiento de maquinaria sujeta a fuerzas de fricción, en la tribología para controlar y optimizar el desgaste entre materiales en contacto, y también en la ingeniería sísmica para cuantificar desplazamientos relativos entre cuerpos deslizando uno sobre otro, como en el caso de taludes sometidos a fuerzas dinámicas, estructuras aisladas sísmicamente, equipo sensitivo dentro de edificios en zonas de terremotos, entre otros. Los resultados producidos del estudio de la fricción en cada disciplina han sido muy particulares y enfocados al problema específico que se quiere resolver. Por ejemplo, en la ingeniería mecánica existen modelos de fricción dependiendo del tipo de maquinaria y/o equipo que se analice, como el caso de la fricción en los dientes de los engranes (He *et. al.*, 2008), la fricción en una válvula de control (García, 2008), por citar algunas de las muchas aplicaciones específicas. Por otro lado, en la tribología se han hecho infinidad de estudios sobre fricción cuyo objetivo ha sido analizar las causas que originan la fuerza de fricción que se genera en el contacto entre dos materiales para comprender el fenómeno y poder así llegar a controlarlo. Estos estudios se realizan desde el punto de vista microscópico e incluso atómico (Hirano y Shinjo, 1990; Kopidakis *et. al.*, 1993; Krim 2002; Hirano, 2003), por lo que su aplicación a la práctica de la ingeniería civil es complicada y de poca utilidad práctica, aunque llegan a utilizarse en el diseño de máquinas y mecanismos específicos muy especializados (Glavatskih *et Höglund*, 2008). La tribología estudia también la fricción entre pares de materiales particulares para aplicaciones diversas, y la tendencia moderna es hacia la *Tribotrónica* (Glavatskih *et Höglund*, 2008), una integración entre la tribología y la electrónica cuyo propósito es controlar por medio de la electrónica las pérdidas en un sistema tribológico (fricción, desgaste, vibración, etc.) para incrementar considerablemente su desempeño, eficiencia y confiabilidad y por lo tanto las de la maquinaria completa de la que forma parte (*op. cit.*).

En cuanto a la ingeniería sísmica, los problemas que involucran fricción se han tratado convencionalmente mediante el uso de la ley de fricción de Coulomb, aunque recientemente han surgido otros enfoques (*e.g.*, Constantinou *et. al.* 1990). El tratamiento que se le da al tema de la fricción en la ingeniería sísmica es notoriamente más sencillo que el que se tiene en la tribología o incluso en la ingeniería mecánica, y en consecuencia no existe una conexión franca entre estas disciplinas. Sin embargo, la aplicación del enfoque simplista aceptado ampliamente en la práctica de la ingeniería plantea algunas interrogantes: ¿Siempre se está del lado de la seguridad al utilizar un coeficiente de fricción constante? ¿Es necesario modelar la transición gradual entre la fricción estática y la cinética?. Éstas y otras preguntas se analizan en esta investigación desde el punto de vista experimental y se obtienen respuestas para el caso específico de un bloque rígido deslizando sobre una superficie. Éste es un problema clásico en la ingeniería y se estudia desde hace tiempo (*e.g.*, Newmark, 1963, 1965) bajo diferentes enfoques y aplicaciones (*e.g.*, Ling, 2001). El problema aún está vigente ya que el modelo de bloque rígido encuentra múltiples aplicaciones en la ingeniería civil, sobre todo en aquéllas enfocadas al cálculo de desplazamientos inducidos por sismo en estructuras rígidas (*e.g.*, Ling, 2001; Ftima y Léger, 2006), e incluso flexibles (*e.g.*, Wartman, 2003).

En esta investigación se aborda el problema del modelo de bloque rígido desde el punto de vista del estudio de la fricción cinética y se plantea un modelo continuo de fricción variable que busca ser intermedio entre los modelos elaborados y minuciosos planteados en la tribología, y los modelos simplistas empleados en la ingeniería práctica.

## *1.2 Antecedentes*

Desde que Da Vinci comenzó con el estudio de la fricción, se han publicado innumerables investigaciones sobre el tema. A pesar de que Da Vinci fue el primero en obtener conclusiones sobre el estudio de la fricción (Persson, 1998), fue Amontons quien publicó en 1699 una investigación con conclusiones muy similares a las de Da Vinci, por lo que a éstas se les conoce como las leyes de Amontons (1699). Estas leyes indican que el coeficiente de fricción es independiente del área de contacto aparente, y que la fuerza de fricción es proporcional al peso. Sin embargo, la definición del coeficiente de fricción como el cociente entre la fuerza de fricción y la fuerza normal se atribuye a Da Vinci (Persson, 1998). No fue sino hasta 1785 que se estableció el concepto de fuerza de fricción límite, la cual causa el desplazamiento de un cuerpo con fricción en su base. Esta definición se atribuye a Coulomb, quien publicó sus experimentos de fricción en 1785 (Persson, 1998), dando origen a la conocida ley de fricción de Coulomb que establece un coeficiente de fricción estático y uno cinético. Es muy importante señalar que los experimentos de fricción cinética de Coulomb se realizaron bajo condiciones de tasa de velocidad de deslizamiento constante. Coulomb definió al coeficiente de fricción cinética como el cociente entre la fuerza horizontal requerida para mantener a un cuerpo en movimiento contra la fuerza normal en la interfaz de deslizamiento. Consideró también que el cambio entre uno y otro coeficiente se daba en forma instantánea. Al respecto de este punto, Stevens publicó en 1899 los resultados de algunos experimentos que realizó con diversas superficies de deslizamiento, donde encontró evidencia de que existe deformación tangencial en una interfaz antes de que comience el deslizamiento, la cual se recupera cuando se retira la carga, por lo que Stevens la llamó deformación elástica. Stevens encontró que esta deformación era proporcional a la fuerza aplicada, independientemente de si la superficie es rugosa o suave y sin importar si los materiales en contacto son similares o distintos entre sí.

Además de los descubrimientos de Stevens sobre deformación elástica en los contactos, existe también un enfoque que parte de la teoría de la plasticidad. Al respecto Bowden y Tabor (1943) formularon hipótesis para explicar y cuantificar el valor del coeficiente de fricción estático en los metales. Bowden y Tabor sugieren que la fuerza de fricción en superficies metálicas se compone de dos partes: la rotura por cortante de las uniones metálicas en la superficie de contacto, y una fuerza de “arado” que surge al desplazar el metal más blando sobre el más rígido.

De acuerdo con lo anterior, Bowden y Tabor partieron de la observación de que el área real de contacto entre dos materiales generalmente es una pequeña fracción del área nominal o aparente de contacto. Esto significa que el área real de contacto es la suma de todas las pequeñas áreas de contacto de cada aspereza de los materiales en cuestión. Debido a que la fuerza normal es la misma independientemente del área de contacto, el esfuerzo en los puntos de contacto se incrementa grandemente al repartirse la fuerza normal en un área mucho muy pequeña, por lo que los puntos de contacto se deforman plásticamente al alcanzar el material más blando su esfuerzo de fluencia y generar así una adhesión muy fuerte. A esta adhesión

Bowden y Tabor le llamaron “soldadura en frío”. En esta teoría se hace la hipótesis de que los puntos de contacto se deforman plásticamente. A pesar de que esta teoría de fricción se desarrolló para superficies metálicas, ha sido extrapolada a otros materiales como la arena (Alberro, 1992), en donde se ajusta razonablemente para arenas sueltas y con planos de debilidad, y para roca (Scholtz, 2002), en donde los resultados experimentales indican que el coeficiente de fricción es mucho mayor que el calculado mediante la teoría de Bowden y Tabor.

Siguiendo la línea de Stevens sobre la deformación elástica en las interfaces friccionantes, Rabinowicz publicó en 1951 los resultados de una investigación que realizó sobre la transición entre el coeficiente de fricción estático y cinético, mejorando así la ley de fricción de Coulomb. En esa publicación Rabinowicz presentó experimentos de bloque rígido sobre un plano inclinado que consistían en aplicar una fuerza súbitamente al bloque a través de un impacto. Al plantear las ecuaciones de transferencia de momento en el impacto, y las ecuaciones que describen el movimiento del bloque, Rabinowicz planteó expresiones analíticas para calcular la distancia en la que el coeficiente de fricción estático prevalece antes del deslizamiento del bloque (deformación elástica en la interfaz). A esta distancia Rabinowicz la llamó distancia crítica. En su investigación, Rabinowicz obtuvo curvas fricción – desplazamiento para algunas superficies metálicas, demostrando que existe una transición entre el coeficiente estático y cinético de la ley de Coulomb, además de que existe deformación elástica antes de que se presente francamente el deslizamiento. Los experimentos de Rabinowicz fueron estáticos en el sentido de que sólo consideraban la curva fricción – desplazamiento hasta el momento en que se presentaba el deslizamiento, suponiendo que en ese instante el valor del coeficiente de fricción era constante e igual al valor cinético.

Cabe señalar que los experimentos de Stevens y Rabinowicz se enfocaron a cuantificar la deformación elástica tangencial en un contacto, a diferencia del trabajo de Hertz (1881), quien consideró la deformación elástica normal. Partiendo del trabajo de Hertz, Archard (1957) examinó si la hipótesis de deformación elástica en un contacto concordaba con la ley de Amontons (1699) que establece que la fuerza de fricción es proporcional al peso (fuerza normal). Para ello, Archard realizó experimentos con especímenes de perspex (acrílico) y especímenes metálicos, así como también con superficies suaves y corrugadas. Archard encontró que la hipótesis de deformación elástica en los contactos concuerda adecuadamente con la ley de Amontons para los materiales que ensayó, al igual que para los diferentes acabados de las interfaces. Encontró una excepción cuando la carga está altamente concentrada.

Las investigaciones sobre el origen de la fuerza de fricción han continuado y se han publicado innumerables trabajos al respecto. Krim (2002) presenta una síntesis de los posibles orígenes atómicos de la fricción desde el punto de vista de la ciencia de superficie o nanotribología. Desde ese punto de vista, se ha publicado también una teoría de super – lubricidad (Hirano y Shinjo, 1990; Hirano, 2003), según la cual la fricción se desvanece en una interfaz bajo ciertas condiciones que deben presentarse en el movimiento de los átomos, y la condición de *recurrencia energética* (*op. cit.*). A partir de su descubrimiento se han publicado experimentos que aportan evidencia del estado de desvanecimiento de la fuerza de fricción (*e.g.* Martin *et. al.*, 1993; Dienwiebel *et. al.*, 2004 ). El fenómeno de fricción cero se había sugerido anteriormente por Caquot (1967), aunque por razones distintas y de origen macroscópico.

Caquot sugirió que una capa de vapor en la superficie de deslizamiento de una masa rocosa podría llevar al desvanecimiento de la fuerza de fricción.

Recientemente se propuso un modelo constitutivo para describir el fenómeno de la fricción incorporando el concepto de superficie de sub-carga (Hashiguchi *et. al.*, 2005), dentro del marco teórico de la plasticidad poco convencional, es decir, aquella en donde se excluye la posibilidad de que el interior de una superficie de fluencia sea enteramente elástica (*op. cit.*). Este modelo es capaz de calcular tanto la parte elástica de la curva fricción – desplazamiento, así como la parte plástica y la correspondiente transición entre ambas. El modelo no es sencillo de aplicar debido a los parámetros de entrada que requiere.

En tribología, al coeficiente de fricción de una interfaz deslizante se le llama dinámico o cinético. Ambos términos se usan como sinónimos para referirse al coeficiente de fricción en condiciones de movimiento en una interfaz. Por homogeneidad, en esta tesis se utilizó el término cinético para referirse al coeficiente de fricción en condiciones de movimiento, y este calificativo no debe interpretarse desde el punto de vista de la dinámica, que se divide en cinética, la cual estudia la relación entre el movimiento y sus causas, y cinemática, que analiza los distintos tipos de movimientos sin observar las causas que los originan.

Además del enfoque de la tribología, existen otras aproximaciones para el estudio de la fricción. En el caso de la ingeniería civil, el enfoque ha sido en gran medida experimental y se ha orientado principalmente a desarrollar soluciones para los problemas de dinámica que involucran fricción. En la sección siguiente se hablará sobre los aportes al tema de la fricción que se han desarrollado en la ingeniería civil.

### *1.2.1 Estudios sobre fricción en ingeniería civil*

Los estudios y desarrollos de la ingeniería civil sobre el tema de la fricción han sido esencialmente experimentales. Se han utilizado principalmente dos tipos de pruebas: (1) aplicando carga a una superficie de deslizamiento a través de un actuador o pistón, y (2) generando deslizamiento en una interfaz en experimentos de mesa vibradora.

El primer enfoque tiene el inconveniente de que la fricción en la interfaz de deslizamiento depende del aparato con el que se aplique la carga. Específicamente de su rigidez y amortiguamiento, así como también de la velocidad de deslizamiento aplicada (Tolstoi, 1967; Cambou, 1974; Persson, 1998). Entre las investigaciones más importantes hechas en la ingeniería civil realizadas con este enfoque, se encuentra la de Mokha *et. al.* (1990). En su estudio, Mokha *et. al.* hicieron variar la velocidad de deslizamiento aplicada a una interfaz formada de acero inoxidable y teflón, sometida a distintos valores de esfuerzo normal. La figura 1-1(a) muestra un esquema de su experimento y la figura 1-1(b) presenta una posible idealización del experimento, donde el resorte de rigidez  $K$  representa al actuador empleado en el ensaye para aplicar la velocidad  $V$  de deslizamiento,  $m$  es la masa de un bloque rígido hipotético que representa a la placa de acero que desliza bajo un esfuerzo normal dado. Es evidente en la figura 1-1(b) que los resultados que se obtengan de este experimento dependerán no sólo de la velocidad de deslizamiento aplicada, sino también de la rigidez del aparato con que se aplica esa velocidad, ya que la fuerza de fricción en la interfaz dependerá de la elongación del resorte, lo cual puede llevar a que se presenten deslizamientos intermitentes (stick-slip motion) si el coeficiente de fricción estático es notoriamente mayor al

cinético y la curva velocidad – fricción de esta interfaz tiene pendiente negativa (Rabinowicz, 1958). Este tipo de experimentos introduce la variable del resorte al fenómeno de la fricción, por lo que la interpretación de resultados resulta complicada.

Los experimentos de Mokha *et. al.* consistieron en aplicar señales senoidales y de onda cuadrada de velocidad a la placa de acero, mientras se medía la fuerza lateral (de fricción) durante el deslizamiento y la fuerza normal aplicada para así obtener un coeficiente de fricción cinético bajo condiciones de esfuerzo normal dado y velocidad máxima aplicada en forma variable o constante, para las ondas senoidales o cuadradas, respectivamente.

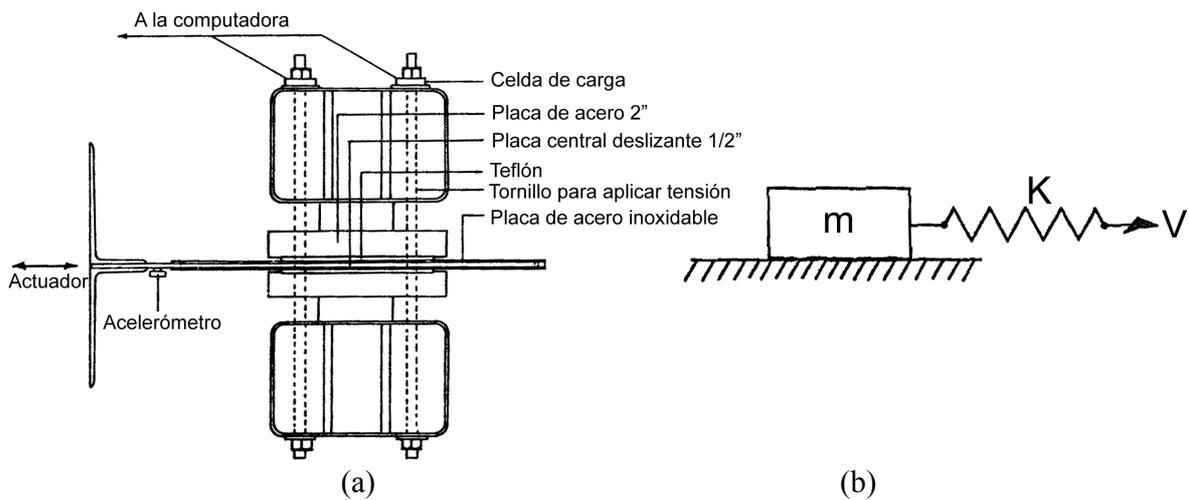


Figura 1-1. (a) Montaje experimental de Mokha *et. al.* (modificado de Mokha *et. al.*, 1990) y (b) posible idealización del experimento

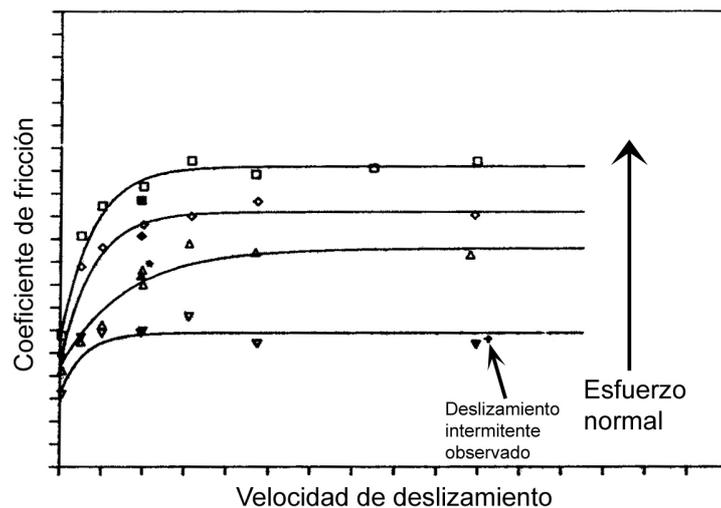


Figura 1-2. Esquema de curvas velocidad – fricción obtenidas por Mokha *et. al.* (modificado de Mokha *et. al.*, 1990)

Los ensayos se realizaron haciendo variar la velocidad máxima aplicada bajo un esfuerzo normal dado. Durante cada prueba se obtenía el valor de la fuerza de fricción asociada con la velocidad máxima aplicada y de esta forma se construyeron curvas velocidad – fricción para distintos valores del esfuerzo normal. La figura 1-2 presenta un bosquejo de las curvas obtenidas por Mokha *et. al.* (1990), en donde cada curva corresponde a un nivel constante de esfuerzo normal. Cada punto de esas curvas es un ensaye distinto para una velocidad dada. Esto significa que las curvas no son continuas, sino que son una colección discreta de puntos. Por lo tanto, la tendencia así trazada es incierta ya que en realidad se desconoce la trayectoria seguida por el fenómeno entre cada uno de los pares de puntos graficados.

De acuerdo con Mokha *et. al.*, (1990), la aceleración tiene mínima influencia en el coeficiente de fricción. Este hecho es contrario a lo que han propuesto y/o encontrado otros investigadores (*e.g.*, Hunt *et. al.*, 1965; Constantinou *et. al.*, 1987; Yegian y Lahlaf, 1992; Méndez, 2004, Chaudhuri y Hutchinson, 2005; Méndez *et. al.*, 2009) y pudiera atribuirse al hecho de que Mokha *et. al.* sólo utilizan la velocidad máxima para sus cálculos, y ésta ocurre justo cuando la aceleración es cero, por lo que no es posible evaluar su influencia utilizando esa metodología.

A partir de los resultados obtenidos por Mokha *et. al.* (1990), Constantinou *et. al.* (1990) proponen un modelo de fricción que depende de la velocidad de deslizamiento (despreciando su variación en el tiempo), el esfuerzo normal en la interfaz y los coeficientes de fricción correspondientes a una velocidad de deslizamiento muy alta y a una muy baja. La ecuación 1-1 muestra la forma matemática del modelo propuesto por Constantinou *et. al.* (1990)

$$\mu = \mu_{m\acute{a}x} - D\mu \exp(-a|\dot{U}|) \quad (1-1)$$

$\mu_{m\acute{a}x}$  es el coeficiente de fricción correspondiente a una velocidad de deslizamiento muy alta (después de volverse constante, de acuerdo con la figura 1-2),  $D\mu$  es la diferencia entre  $\mu_{m\acute{a}x}$  y el valor de  $\mu$  correspondiente a una velocidad de deslizamiento muy baja. El valor de  $a$  es una constante que depende de la presión y la condición en la interfaz. Estos valores están dados en la referencia de Constantinou *et. al.* (1990).

El modelo de fricción reproduce la forma de las curvas mostradas en la figura 1-2, partiendo del valor estático hasta llegar a un valor mayor y constante a partir de cierta velocidad. Este modelo de fricción se formuló específicamente para la interfaz teflón-acero inoxidable con la finalidad de aplicarlo al análisis dinámico de estructuras aisladas sísmicamente a través de disipadores de energía friccionantes. El modelo ha sido bien recibido por los ingenieros y se usa actualmente como una alternativa a la ley de fricción de Coulomb en el análisis de estructuras con aisladores de base friccionantes.

En cuanto al segundo enfoque experimental empleado en la ingeniería civil para el estudio de la fricción, que consiste en realizar ensayos en mesa vibradora, las investigaciones son más numerosas. Por ejemplo, Constantinou *et. al.* (1987) realizaron experimentos con un bloque rígido deslizando sobre una interfaz de teflón – acero inoxidable sometido a señales armónicas generadas por una mesa vibradora. En este tipo de experimentos, en donde el bloque rígido es libre de deslizar por efecto de una aceleración aplicada en su base, no tiene el inconveniente

del enfoque anterior en donde los resultados dependen de la rigidez del aparato que aplica la fuerza motriz. Además, la interpretación de resultados es mucho más sencilla y es posible aislar mejor al fenómeno de la fricción, ya que son pocas las variables que intervienen en el experimento. A pesar de todo ello, los resultados experimentales no se han interpretado adecuadamente, según veremos en seguida.

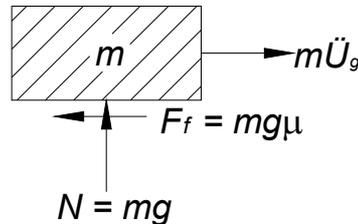


Figura 1-3. Diagrama de cuerpo libre de un bloque rígido en equilibrio límite bajo la acción de una aceleración horizontal

Los experimentos de Constantinou *et. al.* (1987) consistieron en excitar un bloque rígido apoyado directamente sobre la superficie de deslizamiento. Durante la excitación se midieron las aceleraciones de entrada (directamente sobre el plano de deslizamiento) y salida (directamente sobre el bloque rígido deslizando). A partir de un análisis inverso es posible determinar el coeficiente de fricción en la interfaz. El procedimiento seguido por Constantinou *et. al.* es el siguiente: Considere el bloque rígido de la figura 1-3, sometido a una aceleración horizontal en su base, donde  $\ddot{U}_g$  es la aceleración horizontal de la excitación actuando sobre el bloque,  $\mu$  es el coeficiente de fricción en la interfaz de deslizamiento,  $g$  es la aceleración de la gravedad,  $F_f$  y  $N$  son la fuerza de fricción y normal, respectivamente.

Cuando el bloque no desliza con respecto a la base, se transfiere el 100% de la energía de la excitación a través de la interfaz. En el momento en que el cuerpo se encuentra en el equilibrio límite, es decir, con un factor de seguridad de uno contra el deslizamiento, las fuerzas actuantes en la interfaz son iguales:  $m\ddot{U}_g = mg\mu$

$$\text{Despejando el coeficiente de fricción encontramos que } \mu = \frac{\ddot{U}_g}{g} \quad (1-2)$$

La hipótesis de la ecuación 1-2 es que la aceleración del bloque,  $\ddot{U}$ , es igual a la aceleración del plano sobre el que descansa,  $\ddot{U}_g$ , es decir, no hay deslizamiento relativo. Por lo tanto, una vez que se presenta desplazamiento relativo en la interfaz, la ecuación 1-2 ya no es válida, sino que la aceleración del bloque es menor que la aceleración de la excitación, debido a la disipación de energía a través del deslizamiento en la interfaz. Sin embargo, Constantinou *et. al.* despreciaron este hecho y plantearon la hipótesis de que el coeficiente de fricción cinético de la interfaz de deslizamiento de su experimento era igual a la aceleración máxima del bloque normalizada contra el valor de la aceleración gravitacional:

$$\mu = \frac{\ddot{U}_{m\acute{a}x}}{g} \quad (1-3)$$

Esta hipótesis es cuestionable porque no considera la variación del coeficiente de fricción, los efectos inerciales producto del deslizamiento del bloque, la variación de la velocidad de deslizamiento, y además no es congruente con el análisis de equilibrio límite de fuerzas en la interfaz de deslizamiento.

A pesar de los inconvenientes mencionados, la ecuación 1-3 se ha seguido utilizando. Por ejemplo, Yegian y Lahlaf (1992) llevaron a cabo experimentos en mesa vibradora con un bloque rígido de concreto deslizando sobre una interfaz de geomembrana – geotextil excitado bajo diferentes magnitudes de aceleración. Los coeficientes de fricción que reportan fueron calculados con la ecuación 1-3. Los resultados de Yegian y Lahlaf indican que el coeficiente de fricción de la interfaz que utilizaron depende de la aceleración de la excitación, al contrario a lo sugerido por Mokha *et. al.* (1990). Yegian y Lahlaf encontraron también que la aceleración máxima del bloque rígido durante el deslizamiento es mayor que la aceleración de fluencia (Newmark, 1963, 1965), es decir, la aceleración con la que el bloque comienza a deslizar. Esto implica que el bloque sigue adquiriendo aceleración después de que comienza a deslizar, lo que sería contrario a las leyes de Newton si  $\mu$  es constante. Yegian y Lahlaf trataron de explicar este fenómeno planteando la hipótesis de que el coeficiente de fricción se incrementa y por ello aumenta la aceleración de respuesta del bloque. Esta interpretación se hizo con base en la ecuación 1-3, por lo que es cuestionable. En el desarrollo de esta investigación se mostrará que el porcentaje de aceleración de un bloque rígido más allá de la aceleración de fluencia depende de la variación del coeficiente de fricción de cada interfaz de deslizamiento, y se expondrá una explicación plausible del fenómeno considerando la tasa de cambio de la velocidad de la excitación.

En la misma línea de Yegian y Lahlaf, Wartman *et. al.* (2003) realizaron experimentos en mesa vibradora con bloques rígidos y columnas de suelo arcilloso deslizando sobre una interfaz geomembrana-geotextil. Wartman, al igual que Yegian y Lahlaf, encontró que la aceleración máxima del bloque rígido aumentaba más allá del valor de fluencia y atribuyó este incremento a la variación del coeficiente de fricción cinético con la velocidad de deslizamiento, e intentó cuantificar esa dependencia. Para ello realizó análisis numéricos en donde ajustó el valor del coeficiente de fricción para empatar los resultados numéricos con los del laboratorio. De esta forma Wartman construyó una gráfica del ángulo de fricción cinética contra la velocidad de deslizamiento medida en las pruebas de laboratorio, y estimó la relación entre ambas variables. Esta aproximación empleada por Wartman es similar a la seguida por Mokha *et. al.* (1990) y Constantinou *et. al.* (1990), excepto que en este caso no se presentan mediciones del coeficiente de fricción cinético, sino que se infiere a partir de análisis numéricos. Wartman consideró también una velocidad de deslizamiento constante, lo cual es una condición difícil de obtener durante un evento sísmico.

Continuando con sus investigaciones sobre geotextiles, Yegian y Kadakal (2004) publicaron resultados experimentales de ensayos en mesa vibradora con un bloque rígido deslizando sobre una interfaz de geotextil – UHMWPE (polietileno de ultra alto peso molecular), con fines de aplicación al aislamiento sísmico de la base. Yegian y Kadakal estudiaron la dependencia del coeficiente de fricción de esta interfaz con la velocidad de deslizamiento, calculando nuevamente el coeficiente de fricción con la ecuación 1-3. En esta ocasión encontraron de nuevo (al igual que Wartman en 2003) que la aceleración máxima del bloque rígido era mayor

al valor de fluencia. Yegian y Kadakal (2004) atribuyeron este fenómeno al deslizamiento intermitente.

Una investigación que reconoce la variación del coeficiente de fricción cinético es la de Chaudhuri y Hutchinson (2005), quienes se alejaron del uso de la ecuación 1-3 y plantearon expresiones para obtener la variación del coeficiente de fricción cinético en función de la tasa de cambio de la velocidad de deslizamiento. Chaudhuri y Hutchinson encontraron que el coeficiente de fricción tiene variaciones suaves y graduales, a diferencia de la hipótesis de la ley de fricción de Coulomb. Encontraron también que el coeficiente de fricción cinética puede tomar valores mayores al estático. Sin embargo, la finalidad del estudio fue investigar la aplicabilidad de la ley de fricción de Coulomb a problemas de bloques rígidos sometidos a carga dinámica. Encontraron que, para las interfaces analizadas en su trabajo, la ley de Coulomb es suficientemente aproximada sólo cuando la velocidad de deslizamiento es mayor a un cierto valor. A pesar de ello, la finalidad del estudio fue obtener coeficientes de fricción medios para utilizar la ley de Coulomb, en los casos aplicables, y simplificar así los cálculos de desplazamientos inducidos por sismo en equipo sensible, no estructural de edificios (Chaudhuri y Hutchinson, 2005). Cabe mencionar que el trabajo de Chaudhuri y Hutchinson se desarrolló para el caso de bloques rígidos deslizando sobre un plano inclinado por efecto de la gravedad, y para bloques rígidos deslizando sobre un plano horizontal bajo el efecto de arrastre de una cuerda. Ambas condiciones son de aceleración constante, por lo que puede considerarse como un problema estático. Este problema sería dinámico si la aceleración de la excitación fuera variable en el tiempo. Al respecto Méndez *et. al.* (2008) presentaron expresiones para obtener la variación del coeficiente de fricción cinético de interfaces deslizantes sometidas a aceleraciones variables a través de ensayos de mesa vibradora. Este tema se abordará con detalle en capítulos posteriores.

Con el afán de caracterizar en forma simplificada los coeficientes de fricción estático y cinético para bloques rígidos con diversas interfaces, Kafali *et. al.* (2007) llevaron a cabo un programa experimental muy amplio en donde ensayaron interfaces de baja, media y alta fricción. Los ensayos se llevaron a cabo en mesa vibradora y se utilizó el enfoque de la ley de fricción de Coulomb para interpretar los resultados, empleando la ecuación 1-3 para calcular los coeficientes de fricción cinética.

Aunque la mayoría de los investigadores que estudian el coeficiente de fricción desde la ingeniería civil reconoce que éste es variable, el deseo y la necesidad de simplificar el problema es muy grande, por lo que se sigue utilizando el enfoque de la ecuación 1-3 para analizar los problemas que involucran fricción. Es por ello que se requiere plantear un modelo de fricción que tome en cuenta la variación del mismo y que a la vez no sea demasiado complicado de utilizar en forma práctica. Es por ello que en esta investigación se aborda la problemática para proponer posibles soluciones al respecto.

### *1.3 Objetivos de la investigación*

El objetivo general de la investigación es proponer un modelo continuo de fricción variable, aplicable a bloques rígidos, que simplifique los modelos minuciosos planteados por la tribología, y mejore los modelos simplistas empleados en la ingeniería práctica.

Los objetivos particulares del trabajo de tesis son validar el modelo propuesto a través de simulaciones numéricas y experimentos en mesa vibradora (Botero, 2004), y mostrar algunas de sus aplicaciones a problemas geosísmicos. Entre las aplicaciones presentadas se incluye el mejoramiento del método de Newmark (1963, 1965) para estabilidad de taludes y un método propuesto para el análisis desacoplado de estructuras flexibles que deslizan con respecto a su base.

#### *1.4 Alcances del trabajo*

El modelo planteado en esta investigación se obtuvo a partir de experimentos con bloques rígidos. Sin embargo, el modelo puede aplicarse a interfaces de fricción formadas por cuerpos flexibles, siempre que sea razonable despreciar el efecto de la flexibilidad en la variación de la fricción de la interfaz.

El modelo se aplicó a interfaces madera-madera, madera-geotextil y concreto-concreto. Sin embargo, el modelo podrá aplicarse a otros materiales siempre y cuando se calibre con experimentos como los realizados en esta investigación. Al final de la investigación se dan algunos lineamientos prácticos para extrapolar el uso del modelo a otros materiales.

El modelo propuesto asume un coeficiente de fricción estático constante, aunque si se tiene un modelo de comportamiento para esta variable podría acoplarse al modelo de fricción propuesto.

#### *1.5 Aportaciones*

Se aportó evidencia experimental de que existe una transición gradual entre el coeficiente de fricción estático y el cinético (Méndez y Romo, 2005; Méndez y Romo, 2006; Méndez *et. al.*, 2009). Se plantearon ecuaciones que estiman la variación del coeficiente de fricción a partir de las aceleraciones de entrada y salida en experimentos de bloque rígido (Méndez *et. al.*, 2007). Se demostró que las ecuaciones propuestas anteriormente en la literatura técnica relacionada son incorrectas para estimar el coeficiente de fricción cinético en una interfaz deslizante.

Se demostró que la aceleración de respuesta de un bloque rígido deslizando sobre un plano inclinado (ya sea bajo la acción de su propio peso o por la acción de una aceleración externa) varía en forma lineal con el coeficiente de fricción.

Se propuso un modelo de fricción variable (Méndez *et. al.*, 2009) que está en un punto intermedio entre los modelos elaborados y minuciosos planteados en la tribología, y los modelos simplistas empleados en la ingeniería práctica. El modelo es una aproximación lineal del problema de fricción, y utiliza el coeficiente de fricción estático de una interfaz, así como un parámetro experimental que proporciona la variación del coeficiente de fricción cinético en función de la tasa de cambio de la velocidad de excitación. El modelo fue validado a través de experimentos en mesa vibradora y simulaciones numéricas.

Con base en el análisis teórico del coeficiente de fricción desarrollado en esta tesis, se propuso un criterio para estimar si el deslizamiento en una interfaz será continuo o intermitente. Esto es de gran importancia en el cálculo de desplazamientos inducidos sísmicamente, ya que determina la respuesta dinámica de la estructura, y ayuda a tomar decisiones de análisis y diseño.

De acuerdo con el modelo de fricción propuesto, se planteó una modificación al método de Newmark para el cálculo de desplazamientos permanentes inducidos por sismo en bloques rígidos. La modificación mejora notablemente las predicciones del método de Newmark, como se observó en las comprobaciones experimentales relacionadas.

Con base en el modelo de fricción propuesto, se desarrolló un método de análisis desacoplado para estructuras flexibles que deslizan respecto a su base. Los resultados experimentales demuestran que el método es capaz de predecir adecuadamente la respuesta dinámica de una estructura flexible.

Se implementó una subrutina al código comercial 3DEC y otra al programa FLAC3D para incorporar el modelo propuesto en las simulaciones numéricas realizadas con estos programas. Se proporciona como ejemplo el análisis dinámico de una presa de concreto fracturada considerando fricción variable, presión hidrodinámica y masa de cimentación flexible (Méndez *et. al.*, 2008).

Se demostró que la ley de fricción de Coulomb, y la ley de fricción que considera al coeficiente cinético igual al estático, pueden llevar a resultados erróneos en los cálculos de desplazamientos permanentes inducidos sísmicamente (Méndez *et. al.*, 2009).

#### *1.6 Organización del documento de tesis*

La tesis se desarrolla en cinco capítulos más conclusiones y referencias. El capítulo 1 presenta el planteamiento, objetivos, alcances y aportaciones de la investigación. En el capítulo dos se realizan análisis teóricos del coeficiente de fricción, desde el punto de vista de la mecánica clásica. Los análisis se llevan a cabo para el caso de un bloque deslizando sobre un plano inclinado por acción de la gravedad, caso estático, y por efecto de una fuerza dinámica aplicada al plano de deslizamiento, caso dinámico.

El capítulo tres contiene los resultados de los experimentos realizados en mesa vibradora para analizar la variación del coeficiente de fricción desde un punto de vista experimental. Los ensayos se realizaron para interfaces madera-madera, geotextil-madera (Méndez *et. al.*, 2009) y concreto-concreto (Botero *et. al.*, 2007). Con base en estos resultados y en los análisis teóricos obtenidos en el capítulo dos, en el capítulo tres se propone un modelo de fricción variable que se valida en el capítulo cuatro a través de simulaciones numéricas realizadas en las plataformas comerciales de los códigos 3DEC (Itasca, 1998) y FLAC3D (Itasca, 2005), contrastadas contra los resultados experimentales. La validación se lleva a cabo para los tres tipos de interfaces ensayadas y se compara contra los resultados obtenidos empleando la ley de fricción de Coulomb, así como contra el caso en que se supone al coeficiente de fricción estático igual al cinético. Esta simplificación se utiliza comúnmente en problemas de ingeniería sísmica, aunque no necesariamente lleva a resultados conservadores, al igual que la ley de Coulomb, como se ilustra en el capítulo cuatro.

Una vez planteado y validado el modelo de fricción, en el capítulo cinco se plantean algunas aplicaciones a problemas geosísmicos. La primera consiste en el desarrollo de un criterio que permita estimar el tipo de deslizamiento en una interfaz: continuo o intermitente. Posteriormente se propone una modificación al método de Newmark (1963, 1965) que mejora

sus capacidades de predicción al calcular la aceleración máxima que se desarrolla en el bloque rígido tomando en cuenta la variación de la fricción en la interfaz. Los resultados se comprueban mediante ensayos en mesa vibradora.

La tercera aplicación consiste en el desarrollo de un método de análisis desacoplado para estructuras flexibles que deslizan a través de su base, como podrían ser edificios aislados sísmicamente, contenidos de edificios y taludes, entre otros. El método consiste en emplear las ecuaciones de fricción propuestas para calcular la cantidad de energía que se transfiere a través de la superficie de deslizamiento para luego utilizarla como señal de entrada para realizar un análisis dinámico convencional. Los resultados se comprueban mediante ensayos en mesa vibradora.

La cuarta aplicación presentada consiste en el análisis dinámico de una presa de concreto fracturada. La modelación se realizó en FLAC3D y para ello se implementó en el código comercial el modelo de fricción propuesto. En el análisis se supone una fractura en la presa de tal forma que se tiene un bloque de concreto que puede deslizar respecto de su base. Los desplazamientos resultan mayores que los obtenidos considerando la ley de fricción de Coulomb. En los cálculos se consideró presión hidrodinámica a través del método de Weestergard (1933) y se tuvo en cuenta la flexibilidad de la cimentación.

Al final del capítulo cinco se presentan algunos lineamientos prácticos para aplicar el modelo de fricción variable en la ausencia de ensayos experimentales.

Por último, en el capítulo seis se presentan algunas conclusiones que pueden obtenerse de los resultados de la investigación.

## 2 Análisis teórico del coeficiente de fricción

En este capítulo se presentan ecuaciones que permiten obtener la variación del coeficiente de fricción cinético cuando se conoce el movimiento de un bloque rígido. Las ecuaciones se obtienen para tres casos distintos: (1) cuando se tiene un bloque rígido deslizando sobre un plano inclinado bajo la acción de la gravedad, caso estático, y (2) para un bloque rígido deslizando sobre un plano horizontal bajo la acción de una carga cíclica actuando en su base, caso dinámico con plano horizontal, y (3) para un bloque rígido deslizando sobre un plano inclinado bajo la acción conjunta de la aceleración de la gravedad y una carga cíclica actuando en su base, caso dinámico con plano inclinado. El calificativo de estático y dinámico para cada caso se asignó en referencia a las condiciones de carga consideradas.

Para el caso estático, las ecuaciones de fricción se plantearon de tres formas distintas: (1) a partir de hipótesis hechas en referencia al movimiento del bloque (variación lineal del coeficiente de fricción), (2) a partir de la segunda ley de Newton (equilibrio dinámico de fuerzas), y (3) a partir del teorema del trabajo y la energía. Estos procedimientos se emplearon también en el caso dinámico con plano horizontal, además de un cuarto método que se basa en la mecánica analítica. El caso dinámico con plano inclinado se analiza a través de la mecánica vectorial, ya que los otros casos demuestran que se obtienen resultados equivalentes utilizando éste o cualquier otro procedimiento.

### 2.1 Caso estático

El problema analizado en esta sección se ilustra en la figura 2-1. Se trata de un bloque rígido de masa  $m$ , deslizando sobre un plano inclinado  $\theta$  grados respecto de la horizontal, bajo la acción de la aceleración gravitacional,  $g$ . Se considera que el ángulo  $\theta$  es mayor al ángulo de fricción estática,  $\phi_s$ , en la interfaz bloque – plano. En seguida se presentan los tres enfoques utilizados para analizar el coeficiente de fricción,  $\mu$ , a partir del desplazamiento,  $U$ , velocidad,  $\dot{U}$ , y aceleración  $\ddot{U}$  del bloque en dirección del plano de deslizamiento.

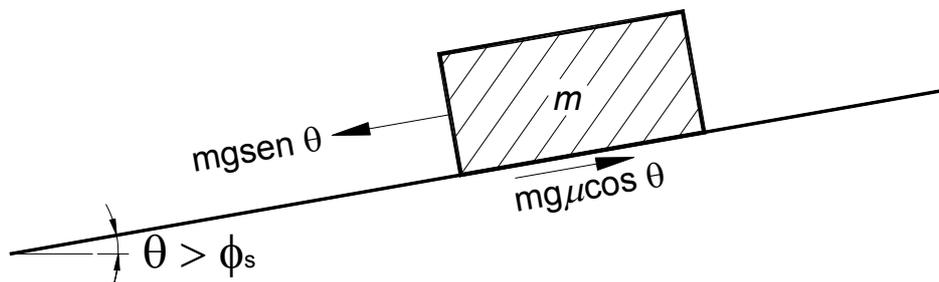


Figura 2-1. Bloque rígido deslizando sobre un plano inclinado

#### 2.1.1 Variación lineal del coeficiente de fricción

Para obtener una expresión de variación del coeficiente de fricción en la interfaz del problema mostrado en la figura 2-1, se analizó la aceleración del bloque en dirección del

plano inclinado, teniendo en cuenta que si ésta es cero, entonces el coeficiente de fricción toma el valor estático,  $\mu_s$  más un coeficiente de fricción extra,  $\mu_e$ , necesario para impedir el deslizamiento del bloque (Méndez y Romo, 2005; Méndez *et. al.*, 2009). Por otro lado, si el coeficiente de fricción fuera igual a cero, entonces la aceleración del bloque en dirección del deslizamiento estaría dada por el componente de la aceleración gravitacional en esa dirección:  $g \sen \theta$ . La variación entre estas dos condiciones extremas se asume lineal, como se ilustra en la figura 2-2.

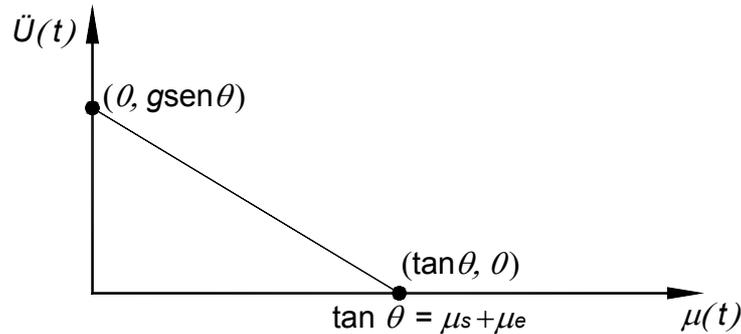


Figura 2-2. Hipótesis de variación del coeficiente de fricción

De acuerdo con la geometría analítica, la ecuación que describe al lugar geométrico de la figura 2-2 está dada por el siguiente determinante

$$\begin{vmatrix} \mu(t) & \ddot{U}(t) & 1 \\ \tan \theta & 0 & 1 \\ 0 & g \sen \theta & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando y resolviendo para  $\mu(t)$  y sustituyendo  $\tan \theta = \mu_s + \mu_e$  encontramos la variación temporal del coeficiente de fricción para el problema de la figura 2-1:

$$\mu(t) = (\mu_s + \mu_e) \left( 1 - \frac{\ddot{U}(t)}{g \sen \theta} \right) - \mu_e \quad (2-1)$$

De acuerdo con la ecuación (2-1), cuando el bloque está fijo al plano de deslizamiento, el coeficiente de fricción toma el valor estático (más el valor dado por la condición inicial  $\mu_e$ ), mientras que si existe deslizamiento relativo en la interfaz bloque-plano, el coeficiente de fricción cinético se obtiene al restar al coeficiente estático una fracción del mismo.

La ecuación 2-1 implica una variación gradual del coeficiente de fricción, a diferencia de lo que predice la ley de fricción de Coulomb. Se observa también que la ecuación 2-1 indica que el coeficiente de fricción depende de la tasa de cambio de la velocidad de deslizamiento, y no sólo de la velocidad, como se asume comúnmente.

Dado que la ecuación 2-1 involucra la aceleración del bloque, es posible obtener su ecuación de movimiento al resolver para  $\ddot{U}(t)$

$$\ddot{U}(t) = \left[ 1 - \frac{\mu(t) + \mu_e}{\mu_s + \mu_e} \right] g \sin \theta \quad (2-2)$$

### 2.1.2 Equilibrio dinámico de fuerzas

En esta sección se obtiene la variación del coeficiente de fricción a partir del análisis de fuerzas en la interfaz de deslizamiento. De acuerdo con la figura 2-1, la fuerza motriz está dada por la componente del peso del bloque en dirección del deslizamiento:  $mg \sin \theta$ . La fuerza de fricción se opone al movimiento:  $mg \mu \cos \theta$ . Aplicando la segunda ley de Newton al bloque en movimiento se tiene

$$m\ddot{U} = mg \sin \theta - mg \mu \cos \theta$$

Resolviendo para  $\mu$ :

$$\mu(t) = \tan \theta - \frac{\ddot{U}(t)}{g \cos \theta} \quad (2-3)$$

Al analizar la ecuación 2-3, se observa que ésta predice que el coeficiente de fricción aumenta con la inclinación del plano de deslizamiento. Esto implica que cuando la inclinación del plano se acerca a la vertical, el coeficiente de fricción tiende a infinito. Esta condición es contraria a la física del problema. A pesar de ello, es común que la ecuación 2-3 se utilice para determinar el coeficiente de fricción cinético en la práctica de la ingeniería (e.g., Chaudhuri y Hutchinson, 2005; Kafali *et. al.*, 2007). Para poder utilizar la ecuación 2-3 de forma correcta, es necesario incluir la condición inicial,  $\mu_e$ , considerada en la ecuación 2-1, ya que la tangente del ángulo de inclinación del plano se compone de la suma de  $\mu_e$  con  $\mu_s$ :  $\tan \theta = \mu_s + \mu_e$ . Reescribiendo 2-3:

$$\mu(t) = \tan \theta - \mu_e - \frac{\ddot{U}(t)}{g \cos \theta}$$

Pero  $\tan \theta = \mu_s + \mu_e$ , entonces 2-3 puede escribirse como

$$\mu(t) = \mu_s - \frac{\ddot{U}(t)}{g \cos \theta} \quad (2-3B)$$

Por otro lado, desarrollando la ecuación 2-1 se tiene que es equivalente a 2-3B:

$$\mu(t) = (\mu_s + \mu_e) \left( 1 - \frac{\ddot{U}(t)}{g \sin \theta} \right) - \mu_e = \mu_s + \mu_e - (\mu_s + \mu_e) \left( \frac{\ddot{U}(t)}{g \sin \theta} \right) - \mu_e$$

$$\mu(t) = \mu_s - \mu_s \left( \frac{\ddot{U}(t)}{g \operatorname{sen} \theta} \right) - \mu_e \left( \frac{\ddot{U}(t)}{g \operatorname{sen} \theta} \right)$$

$$\mu(t) = \mu_s - (\mu_s + \mu_e) \left( \frac{\ddot{U}(t)}{g \operatorname{sen} \theta} \right) = \mu_s - \tan \theta \left( \frac{\ddot{U}(t)}{g \operatorname{sen} \theta} \right) = \mu_s - \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta} \left( \frac{\ddot{U}(t)}{g \operatorname{sen} \theta} \right)$$

$$\mu(t) = \mu_s - \frac{\ddot{U}(t)}{g \cos \theta}$$

Esto demuestra que en realidad las ecuaciones 2-1 y 2-3 son equivalentes. Por lo tanto, la hipótesis de linealidad asumida en la variación de la aceleración mostrada en la figura 2-2, es acertada. La confirmación de esta hipótesis es relevante, ya que simplifica el análisis del problema. Es importante señalar que este hecho no se había develado anteriormente en la literatura técnica relacionada, por lo que representa una contribución original al tema.

Contrario a la ecuación 2-3, la ecuación 2-3B se apega a la física del problema ya que predice que el coeficiente de fricción cinético disminuye al aumentar la inclinación del plano, es decir, el coeficiente disminuye al aumentar la aceleración del bloque.

De aquí en adelante sólo se utilizará la ecuación 2-3B, dado que es la más sencilla, para obtener la variación del coeficiente de fricción en el caso estático.

### 2.1.3 Teorema del trabajo y la energía

En esta sección se utiliza el teorema del trabajo y la energía que establece que el trabajo neto,  $W_{neto}$ , realizado sobre un cuerpo es igual al cambio en la energía cinética del mismo:

$$W_{neto} = \frac{1}{2} m \dot{U}_f^2 - \frac{1}{2} m \dot{U}_i^2 \quad (2-4)$$

Donde  $\dot{U}_f$  y  $\dot{U}_i$  son las velocidades final e inicial del bloque, respectivamente, en el intervalo de tiempo analizado.

De acuerdo con el esquema de la figura 2-3, el trabajo neto realizado sobre el bloque en un intervalo de tiempo,  $\Delta t$ , está dado por

$$W_{neto} = mg \operatorname{sen} \theta \cdot \Delta U - mg \mu \cos \theta \cdot \Delta U$$

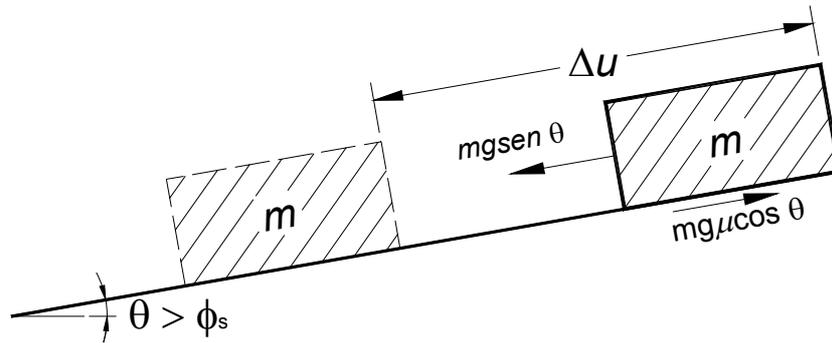


Figura 2-3. Esquema de un bloque rígido deslizando sobre un plano inclinado

Sustituyendo  $W_{neto}$  en la ecuación 2-4 se tiene

$$mg \operatorname{sen} \theta \cdot \Delta U - mg\mu \cos \theta \cdot \Delta U = \frac{1}{2} m \dot{U}_f^2 - \frac{1}{2} m \dot{U}_i^2$$

Resolviendo para  $\mu$ :

$$\mu(t) = \tan \theta - \frac{\dot{U}_f^2(t) - \dot{U}_i^2(t)}{2g \cos \theta \cdot \Delta U} \quad (2-5)$$

Al igual que las ecuaciones 2-1 y 2-3, la ecuación 2-5 tiene la forma 2-6:

$$\mu(t) = \mu_s - \Delta\mu(t) \quad (2-6)$$

Donde se tiene una parte estática,  $\mu_s$ , y una parte dinámica,  $\Delta\mu(t)$ .

Al igual que en la ecuación 2-3, en la ecuación 2-5 se tiene que  $\tan \theta = \mu_s + \mu_e$ , por lo que se debe restar a  $\tan \theta$  el valor de la condición inicial  $\mu_e$ . Esto lleva a escribir a 2-5 como

$$\mu(t) = \mu_s - \frac{\dot{U}_f^2(t) - \dot{U}_i^2(t)}{2g \cos \theta \cdot \Delta U} \quad (2-7)$$

La ecuación 2-7 permite calcular el coeficiente de fricción para condiciones estáticas y dinámicas, es decir, cuando  $\Delta\mu(t) = 0$  y  $\Delta\mu(t) \neq 0$ , respectivamente.

En el capítulo tres se mostrará experimentalmente que todas las ecuaciones propuestas para el caso estático son equivalentes.

## 2.2 Caso dinámico, plano horizontal

Para este caso se plantea primero la variación del coeficiente de fricción en el siguiente orden: a partir del equilibrio dinámico de fuerzas, utilizando la mecánica analítica, de acuerdo con el teorema del trabajo y la energía y finalmente conforme la variación lineal del coeficiente de fricción.

### 2.2.1 Equilibrio dinámico de fuerzas

Cuando se tratan problemas de ingeniería que involucran fricción en condiciones dinámicas, se utiliza comúnmente la ley de fricción de Coulomb para los cálculos numéricos. Este modelo de fricción caracteriza una interfaz de deslizamiento mediante dos valores constantes: coeficientes de fricción estática,  $\mu_s$ , y cinética,  $\mu_d$ . Comúnmente, en la práctica de la ingeniería ambos coeficientes se estiman a partir del equilibrio límite en la interfaz, lo que es adecuado para el caso estático, pero no para el dinámico ya que las fuerzas de inercia influyen significativamente en la variación del coeficiente de fricción (Méndez, 2004; Chaudhuri y Hutchinson, 2005; Méndez *et. al.*, 2009). Así mismo, el coeficiente cinético de la ley de Coulomb se obtiene para condiciones de velocidad constante, y se supone que el cambio de  $\mu_s$  a  $\mu_d$  es abrupto. Sin embargo, desde hace mucho tiempo se sabe que existe un cambio gradual entre ambos coeficientes (Rabinowicz, 1951) y que el coeficiente de fricción cinética varía con la tasa de cambio de la velocidad de deslizamiento (Hunt *et. al.*, 1965).

Es común que para determinar el coeficiente de fricción cinético se lleven a cabo experimentos en donde se mide la fuerza lateral que produce el movimiento de un cuerpo a velocidad constante (*e.g.*, Mokha *et. al.*, 1990). Este procedimiento estima un coeficiente de fricción promedio que puede estar influenciado por la rigidez del artefacto con el que se mide la fuerza ejercida (Tolstoi, 1967; Cambou, 1974). Para librar estas dificultades, algunos investigadores (*e.g.*, Constantinou *et. al.*, 1987; Yegian y Lahlaf, 1992; Yegian y Kadakal, 2004) han realizado experimentos en mesa vibradora donde miden las aceleraciones de respuesta de un bloque rígido deslizando respecto del plano donde descansa. En este tipo de experimentos se logra aislar adecuadamente el fenómeno de fricción cinética en una interfaz. Sin embargo, tradicionalmente los resultados se han interpretado utilizando un enfoque de equilibrio límite para estimar el coeficiente de fricción cinético. Este es un enfoque incorrecto ya que se desprecian las fuerzas de inercia producidas por el deslizamiento del bloque. Para ilustrar lo anterior, considere el bloque rígido de masa  $m$  mostrado en la figura 2-4.

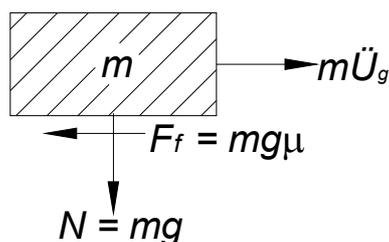


Figura 2-4. Diagrama de cuerpo libre de un bloque rígido en equilibrio límite bajo la acción de una aceleración horizontal

$\ddot{U}_g$  es la aceleración horizontal de la excitación actuando sobre el bloque,  $\mu$  es el coeficiente de fricción en la interfaz de deslizamiento,  $g$  es la aceleración de la gravedad,  $F_f$  y  $N$  son la fuerza de fricción y normal, respectivamente. Cuando el bloque no desliza relativo a la base se transfiere el 100% de la energía de la excitación a través de la interfaz. Justo en el momento en que el cuerpo se encuentra en el equilibrio límite, es decir, con un factor de seguridad de uno contra el deslizamiento, las fuerzas actuantes en la interfaz son iguales:

$$m\ddot{U}_g = mg\mu$$

Despejando el coeficiente de fricción encontramos que  $\mu = \frac{\ddot{U}_g}{g}$ .

A la aceleración horizontal que produce un factor de seguridad igual a uno contra el deslizamiento se le llama aceleración de fluencia,  $\ddot{U}_y$  (Newmark, 1963, 1965), y el coeficiente de fricción en estas condiciones es el coeficiente estático,  $\mu_s$ :

$$\mu_s = \frac{\ddot{U}_y}{g} \quad (2-8)$$

La ecuación 2-8 implica que la aceleración del bloque,  $\ddot{U}$ , es igual a la aceleración del plano sobre el que descansa,  $\ddot{U}_g$ , es decir, no hay deslizamiento relativo. Por lo tanto, esta ecuación ya no es válida una vez que se presenta desplazamiento relativo en la interfaz, dado que no se cumple la condición  $\ddot{U} = \ddot{U}_g$ , sino que la aceleración del bloque es menor que la aceleración de la excitación, debido a la disipación de energía debido al deslizamiento en la interfaz. Bajo estas condiciones, es necesario plantear un equilibrio dinámico en el sistema en lugar de un equilibrio límite:

$$\sum ma = \sum F$$

Aplicando la segunda ley de Newton al bloque en movimiento de la figura 2-4 se obtiene:

$$m\ddot{U} = m\ddot{U}_g - mg\mu$$

Resolviendo para el coeficiente de fricción:

$$\mu(t) = \frac{\ddot{U}_g(t) - \ddot{U}(t)}{g} \quad (2-9)$$

La ecuación 2-9 calcula el coeficiente de fricción en el tiempo  $t$  en función de la aceleración de la excitación y la respuesta dinámica del bloque, es decir, a partir de la aceleración relativa,  $\ddot{U}_{rel}(t) = \ddot{U}_g(t) - \ddot{U}(t)$ , en la interfaz. Al analizar detenidamente esta ecuación se observa que predice un coeficiente de fricción nulo cuando  $\ddot{U}_g = \ddot{U}$ , es decir, para el caso de cero desplazamiento relativo. Sin embargo, de acuerdo con la ecuación 2-8, obtenida a partir de análisis de equilibrio límite, cuando el desplazamiento relativo es cero, el coeficiente de fricción no es nulo sino que toma el valor estático. De acuerdo con esto, y atendiendo a la forma general del coeficiente de fricción encontrada en la sección anterior (ecuación 2-6), se concluye que la ecuación 2-9 es en realidad la parte dinámica de la variación del coeficiente de fricción, es decir,

$$\Delta\mu(t) = \frac{\ddot{U}_g(t) - \ddot{U}(t)}{g} \quad (2-10)$$

Uniendo la parte estática (ecuación 2-8) y la parte dinámica (ecuación 2-10) del coeficiente de fricción, se obtiene la variación del coeficiente de fricción cinética para el caso de la figura 2-4. La ecuación 2-11 calcula el coeficiente de fricción estático cuando la aceleración relativa es cero, y el coeficiente de fricción cinético cuando se presenta el deslizamiento relativo en la interfaz ( $\ddot{U}_{rel} \neq 0$ ).

$$\mu(t) = \mu_s - \frac{\|\ddot{U}_g(t)\| - \|\ddot{U}(t)\|}{g} \quad (2-11)$$

En la ecuación 2-11 se utiliza la magnitud de las aceleraciones para eliminar el sentido de éstas y simplificar el problema. Esto implica que la ecuación es válida para el caso unidimensional y que no discrimina la variación del coeficiente de fricción en un sentido y en otro.

### 2.2.2 Mecánica analítica

A diferencia de la mecánica vectorial (Newtoniana), empleada anteriormente para estimar la variación del coeficiente de fricción, la mecánica analítica describe el movimiento de un cuerpo a partir de su energía cinética,  $T$  (que reemplaza al *momento* de la mecánica vectorial), y su energía potencial,  $V$  (que reemplaza a la *fuerza* de la mecánica vectorial) (Lanczos, 1970). Ambas cantidades son escalares, por lo que parece confuso que puedan describir el movimiento de un cuerpo, teniendo este las características de dirección y sentido por naturaleza. Sin embargo, esto es posible debido al principio de la mínima acción del cálculo variacional. Enseguida se describe en forma breve y cualitativa este principio (modificado de Lanczos, 1970).

Considere una partícula que se encuentra en un punto  $P_1$  en el tiempo  $t_1$ , con una velocidad  $\dot{U}$  conocida. Supongamos que se conoce un punto,  $P_2$ , donde la partícula estará después de un cierto tiempo. Ahora conectemos los puntos  $P_1$  y  $P_2$  a través de una ruta tentativa cualquiera. Esta ruta elegida no necesariamente coincide con la ruta que la partícula seguirá realmente de forma natural. Sin embargo, es posible corregir gradualmente la ruta propuesta hasta llegar a la ruta real del movimiento. Para hacer este tanteo, permitamos que la partícula se mueva a lo largo de la ruta tentativa, respetando el principio de conservación de energía. De acuerdo con este principio, la suma de la energía cinética y potencial es constante durante todo el movimiento, y en nuestro caso será igual a la cantidad  $E$  presente en el tiempo  $t_1$ . Esta restricción asigna una velocidad en específico a cada punto de la ruta tentativa y por lo tanto determina el movimiento de la partícula. De acuerdo con el principio de conservación de energía, es posible elegir una ruta tentativa cualquiera, pero una vez establecida, la conservación de la energía determina el movimiento en forma única (Lanczos, 1970). Bajo estas consideraciones es posible calcular el tiempo en el cual la partícula pasará por un punto arbitrario de la ruta ficticia, y por lo tanto también es posible calcular la integral (respecto del tiempo) de la diferencia entre la energía cinética y

potencial a lo largo de la ruta completa desde  $P_1$  hasta  $P_2$ . Esta integral tiene unidades de energía por tiempo y se le llama “acción” Cada ruta tentativa propuesta tiene un valor de acción definido entre los puntos  $P_1$  y  $P_2$ . Este valor varía evidentemente entre una ruta y otra. Sin embargo, para cada par de puntos  $P_1$  y  $P_2$ , existe una ruta que minimiza el valor de la acción. De acuerdo con el principio de la mínima acción, la ruta que minimiza la acción entre dos puntos  $P_1$  y  $P_2$  es la ruta que la naturaleza ha elegido para la partícula en movimiento (Lanczos, 1970). Una vez que se encuentra la ruta que minimiza la acción, ajustes menores (variaciones) a ésta no modifican significativamente a la acción. Técnicamente se dice entonces que la acción es estacionaria (Neuenschwander, 2006).

Una vez tratado someramente el principio de la mecánica analítica, se procede a analizar el problema de la figura 2-4 para obtener los coeficientes estático y cinético.

### Coeficiente de fricción estático

De acuerdo con la figura 2-4, la energía cinética *absoluta* del bloque en movimiento está dada por

$$T = \frac{1}{2}m\dot{U}^2$$

Por otro lado, su energía potencial es cero, ya que el bloque se mantiene deslizando siempre sobre un mismo plano y no está conectado a ningún elemento externo (resorte, amortiguador, ect.).

$$V = 0$$

El lagrangiano,  $L$ , del sistema está dado por la diferencia de energías:

$$L = T - V \Rightarrow L = \frac{1}{2}m\dot{U}^2$$

La ecuación de Euler-Lagrange para un sistema conservativo está dada por

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{U}} \right) - \frac{\partial L}{\partial U} = 0 \quad (2-12)$$

Sin embargo, para el problema de la figura 2-4 la ecuación 2-12 se modifica para considerar a la fuerza de fricción, la cual es no conservativa:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{U}} \right) - \frac{\partial L}{\partial U} = Q \quad (2-13)$$

En la ecuación 2-13,  $Q$  es la fuerza no conservativa total actuando en el sistema considerado. Para el caso del problema del bloque rígido mostrado en la figura 2-4, se

considera que la única fuerza que disipa energía es la fuerza de fricción, por lo que  $Q$  está dada por

$$Q = mg\mu \quad (2-14)$$

Aplicando las ecuaciones 2-13 y 2-14 al problema del bloque rígido se tiene,

$$\frac{d}{dt}(m\dot{U}) = mg\mu \Rightarrow m\ddot{U} = mg\mu$$

Resolviendo para  $\mu$ :

$$\mu = \frac{\ddot{U}}{g}$$

El resultado es el mismo que el obtenido en la sección anterior a través de la mecánica vectorial.

#### Coeficiente de fricción cinético

De acuerdo con la figura 2-4, la energía cinética *relativa* del bloque en movimiento respecto de su base está dada por

$$T = \frac{1}{2}m\dot{U}_{rel}^2$$

Por otro lado, su energía potencial es cero, ya que el bloque se mantiene deslizando siempre sobre un mismo plano y no está conectado a ningún elemento externo (resorte, amortiguador, ect.).

$$V = 0$$

El lagrangiano,  $L$ , del sistema está dado por la diferencia de energías:

$$L = T - V \Rightarrow L = \frac{1}{2}m\dot{U}_{rel}^2$$

Aplicando las ecuaciones 2-13 y 2-14 al problema del bloque rígido se tiene,

$$\frac{d}{dt}(m\dot{U}) = mg\mu \Rightarrow m\ddot{U}_{rel} = mg\mu$$

Resolviendo para  $\mu$ :

$$\mu = \frac{\ddot{U}_{rel}}{g}$$

Donde  $\ddot{U}_{rel} = \ddot{U}_g - \ddot{U}$ , por lo que se tiene

$$\mu = \frac{\ddot{U}_g - \ddot{U}}{g}$$

Al igual que en la sección anterior, el resultado obtenido es solamente la parte dinámica del coeficiente de fricción, por lo que el resultado final es igual a la ecuación 2-11:

$$\mu(t) = \mu_s - \frac{\|\ddot{U}_g(t)\| - \|\ddot{U}(t)\|}{g}$$

### 2.2.3 Teorema del trabajo y la energía

Para la aplicación del principio del trabajo y de la energía se consideró que la fuerza de fricción es la única responsable de la disipación de energía durante el deslizamiento del bloque. Considere el bloque rígido (figura 2-5) de masa  $m$  deslizando en un instante de tiempo,  $\Delta t$ , con una aceleración  $\ddot{U}$  distinta a la aceleración de la excitación,  $\ddot{U}_g$ , donde  $\Delta U$  es el cambio en el deslizamiento relativo del bloque en el intervalo de tiempo  $\Delta t$ .

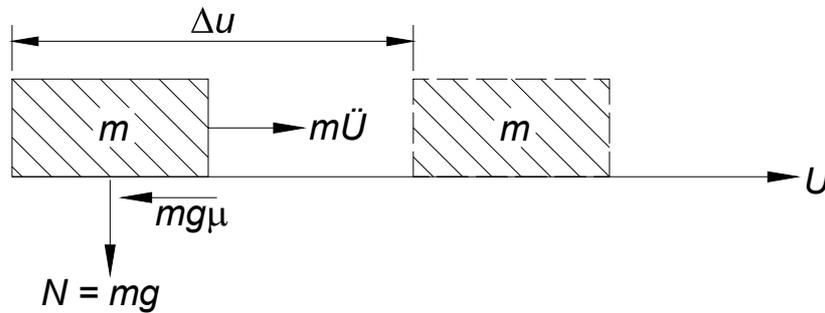


Figura 2-5. Bloque rígido deslizando sobre un plano horizontal

La fuerza motriz está dada por la aceleración del bloque como  $m\ddot{U}$ , y produce un trabajo positivo sobre el bloque, mientras que la fuerza de fricción,  $mg\mu$  que se opone al movimiento disipa energía. Esta disipación se representa a través de un trabajo negativo sobre el bloque. Bajo estas consideraciones, el trabajo neto realizado sobre el bloque está dado por

$$W_{neto} = (m\ddot{U})(\Delta U) - (mg\mu)(\Delta U) = (\ddot{U} - g\mu)(m\Delta U)$$

Aplicando el principio del trabajo y la energía (ecuación 2-4) se tiene

$$(\ddot{U} - g\mu)(m\Delta U) = \frac{1}{2}m(\dot{U}_{rel}^2)_f - \frac{1}{2}m(\dot{U}_{rel}^2)_i$$

Resolviendo para el coeficiente de fricción encontramos

$$\mu = \frac{\ddot{U}}{g} - \frac{(\dot{U}_{rel}^2)_f - (\dot{U}_{rel}^2)_i}{2g\Delta U} \quad (2-15)$$

La ecuación 2-15 expresa la variación del coeficiente de fricción en términos del desplazamiento y velocidad del bloque, así como de la aceleración de la excitación.

Al igual que para el caso estático (sección 2.1), se toma  $\mu_s$  en lugar de  $\ddot{U} / g$ . Al hacer este cambio se está despreciando la variación del coeficiente de fricción estático antes del deslizamiento. Esto es, la fuerza de fricción va creciendo proporcionalmente con la fuerza de inercia hasta llegar al valor de  $\ddot{U}_y$ . Cuando se hace el cambio de  $\ddot{U}$  por  $\ddot{U}_y$  se toma sólo el valor superior de la fuerza de fricción antes del deslizamiento. Tomando el valor absoluto del incremento del desplazamiento se reescribe la ecuación 2-15 como:

$$\mu = \mu_s - \frac{(\dot{U}_{rel}^2)_f - (\dot{U}_{rel}^2)_i}{2g|\Delta U|} \quad (2-15B)$$

#### 2.2.4 Variación lineal del coeficiente de fricción

Al igual que para el caso estático, se planteó la hipótesis de que el coeficiente de fricción varía linealmente entre dos límites conocidos. Se sabe que la aceleración relativa entre el bloque de la figura 2-4 y el plano de deslizamiento será cero si el coeficiente toma el valor estático. Por otro lado, de acuerdo con los resultados del equilibrio dinámico de fuerzas, se tiene que la ecuación 2-11 predice que existe un valor de la aceleración relativa que lleva a cero el coeficiente de fricción. Igualando a cero la ecuación 2-11 se encuentra que este valor está dado por  $g\mu_s$ . Plasmando estas condiciones en forma gráfica se obtiene la curva mostrada en la figura 2-6. De acuerdo con esa figura, la ecuación del lugar geométrico mostrado está dada por

$$\begin{vmatrix} \mu(t) & \ddot{U}_{rel}(t) & 1 \\ \mu_s & 0 & 1 \\ 0 & g\mu_s & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando y resolviendo para  $\mu(t)$  encontramos

$$\mu(t) = \mu_s - \frac{\ddot{U}_{rel}(t)}{g}$$

El resultado es igual al obtenido en las secciones anteriores.

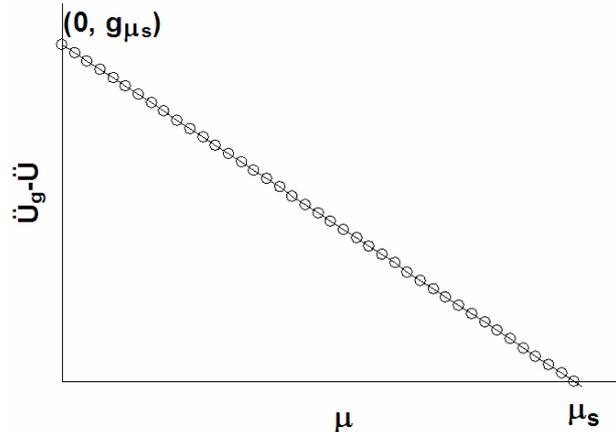


Figura 2-6. Hipótesis de variación del coeficiente de fricción

### 2.3 Caso dinámico, plano inclinado

Los casos analizados anteriormente demuestran que se obtienen resultados equivalentes con cualquier procedimiento que se utilice. Por lo tanto, el caso dinámico con plano inclinado se analizará solamente bajo el enfoque de la dinámica vectorial.

El modelo de bloque rígido deslizando sobre un plano inclinado bajo la acción de una carga cíclica, es ampliamente utilizado en la geotecnia sísmica. En este modelo el desplazamiento relativo del bloque respecto del plano que lo soporta se debe a la acción de la carga cíclica. Es decir, se considera que el bloque es estable bajo condiciones estáticas, lo que implica que se cumple la condición  $\tan \phi_s > \tan \theta$ , donde  $\phi_s$  es el ángulo de fricción estática de la interfaz bloque – plano, y  $\theta$  es el ángulo de inclinación del plano de deslizamiento. En estas condiciones, la fuerza cortante resistente *disponible* para soportar los esfuerzos inducidos cíclicamente está dada por la diferencia  $N \tan \phi_s - N \tan \theta$ , donde  $N$  es la fuerza normal en la interfaz, la cual depende de la aceleración de la excitación:

$$N = m[g \cos \theta + |\ddot{U}_g| \sin(\theta) \operatorname{sgn} \ddot{U}_g] \quad (2-16)$$

donde  $\operatorname{sgn}$  es la función signo:  $\operatorname{sgn} = \begin{cases} \ddot{U}_g(t) \leq 0 & , & -1 \\ \ddot{U}_g(t) = 0 & , & 0 \\ \ddot{U}_g(t) > 0 & , & 1 \end{cases}$

De acuerdo con lo anterior, la parte estática de la variación del coeficiente de fricción en la ecuación 2-6 está dada por  $\tan \phi_s - \tan \theta$

Por otro lado, la parte dinámica de la forma 2-6 se obtiene a partir del diagrama de cuerpo libre mostrado en la figura 2-7:

$$\Sigma ma = \Sigma F$$

$$m\ddot{U} \cos \theta = m\ddot{U}_g \cos \theta - mg \sin \theta - N\mu$$

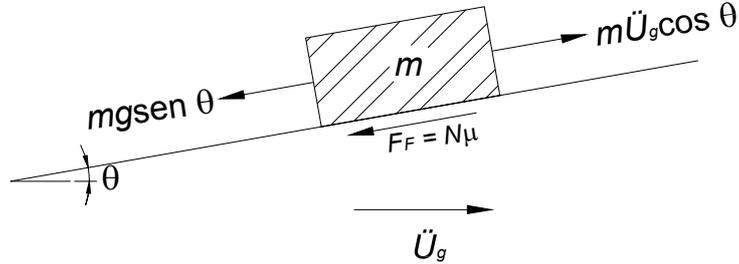


Figura 2-7. Diagrama de cuerpo libre del caso dinámico con plano inclinado

Resolviendo para  $\mu$  e incorporando la ecuación 2-16:

$$\mu = \Delta\mu(t) = \frac{\left(\|\ddot{U}_g\| - \|\ddot{U}\|\right) \cos \theta - g \sin \theta}{g \cos \theta + |\ddot{U}_g| \sin(\theta) \operatorname{sgn} \ddot{U}_g}$$

Incorporando la parte estática se obtiene la variación del coeficiente de fricción para el caso considerado

$$\mu(t) = (\tan \phi_s - \tan \theta) - \frac{\left(\|\ddot{U}_g\| - \|\ddot{U}\|\right) \cos \theta - g \sin \theta}{g \cos \theta + |\ddot{U}_g| \sin(\theta) \operatorname{sgn} \ddot{U}_g} \quad (2-17)$$

La ecuación 2-17 es válida únicamente para los casos en donde el bloque es estable en condiciones estáticas, es decir, cuando el deslizamiento relativo en la interfaz se origina por causa de la carga cíclica aplicada.

Finalmente, es importante notar que la ecuación 2-17 se degrada al caso estático (ecuación 2-11) cuando el ángulo de inclinación del plano es  $\theta$ :

$$\mu(t) = (\tan \phi_s - \tan \theta) - \frac{\left(\|\ddot{U}_g\| - \|\ddot{U}\|\right) \cos \theta - g \sin \theta}{g \cos \theta + |\ddot{U}_g| \sin(\theta) \operatorname{sgn} \ddot{U}_g}$$

$$\mu(t) = \tan \phi_s - \frac{\|\ddot{U}_g\| - \|\ddot{U}\|}{g}$$

### 3 Análisis experimental en mesa vibradora del coeficiente de fricción

Se realizaron experimentos en la mesa vibradora neumática (Botero, 2004) del Laboratorio de Geotecnia del Instituto de Ingeniería, UNAM (IIUNAM), para estudiar la variación del coeficiente de fricción de diversas superficies de deslizamiento. Los experimentos fueron estáticos y dinámicos. El primer caso consistió en dejar deslizar libremente un bloque rígido sobre un plano inclinado por efecto de la aceleración de la gravedad, mientras que en los experimentos dinámicos se indujo el deslizamiento relativo de un bloque rígido, respecto del plano horizontal o inclinado que lo soporta, aplicando una aceleración horizontal por medio de la mesa vibradora. Las interfaces estudiadas fueron: madera – madera (Méndez, 2004; Méndez y Romo, 2005, 2006; Méndez *et. al.*, 2009), geotextil – madera (*op. cit.*) y concreto – concreto (Botero *et. al.*, 2006, 2007; Méndez *et. al.*, 2008).

#### 3.1 Equipo utilizado

Los ensayos se realizaron en la mesa vibradora de pistón neumático del Instituto de Ingeniería, UNAM (Botero, 2004), mostrada en la figura 3-1. El equipo se controla a través de una computadora, la cual también adquiere y procesa las señales de los acelerómetros y del sensor de desplazamiento lineal (LVDT). Los detalles del equipo pueden consultarse en el trabajo de Botero (2004).

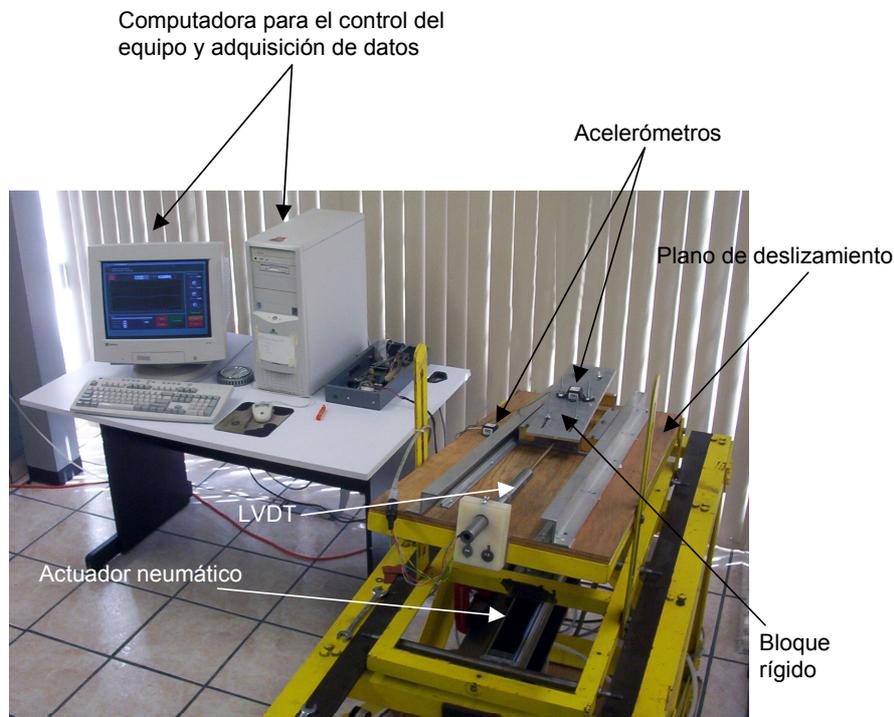


Figura 3-1. Mesa neumática del laboratorio de Geotecnia, IIUNAM (Botero, 2004)

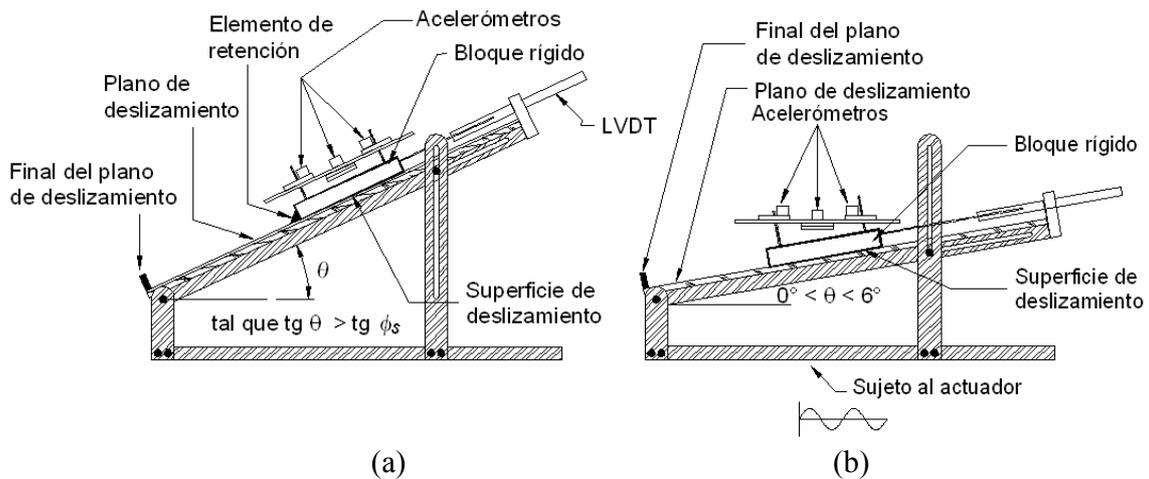


Figura 3-2. Configuración del equipo para los ensayos estáticos (a) y dinámicos (b)

El plano de deslizamiento de la mesa vibradora puede inclinarse con respecto a la horizontal, como se observa en la figura 3-2. Tanto para los ensayos estáticos y dinámicos, se utilizó un bloque rígido de aluminio con medidas  $15 \times 25 \times 3.5 \text{ cm}^3$ . La base del bloque puede intercambiarse por diversos materiales.

Para las pruebas estáticas se instrumentó el bloque rígido con tres acelerómetros y un LVDT, y se dejó deslizar libremente sobre un plano inclinado bajo la acción de la gravedad. La inclinación del plano de deslizamiento fue mayor que el ángulo de fricción estática para asegurar el deslizamiento del bloque cuesta abajo del plano. Antes de iniciar las pruebas se colocó un elemento mecánico en la frontera delantera del bloque para impedir su deslizamiento. Una vez iniciado el registro de los sensores se cambió la condición de frontera instantáneamente para permitir el desplazamiento del bloque a lo largo del plano, y durante el trayecto se monitorearon sus aceleraciones y desplazamientos. Los ensayos estáticos permitieron medir la transición entre condiciones estáticas y dinámicas.

Las pruebas dinámicas se realizaron para distintas inclinaciones del plano de deslizamiento, incluyendo el caso horizontal. Durante estos ensayos se aplicó una excitación a la base del plano de deslizamiento por medio de la mesa vibradora. De esta forma se indujo el desplazamiento relativo del bloque respecto del plano y se monitorearon sus aceleraciones y desplazamientos durante la ejecución de las pruebas. Se verificó que las aceleraciones medidas no estuvieran contaminadas con señales espurias. Esto se llevó a cabo comparando los registros de aceleración capturados con los instrumentos, contra la aceleración obtenida a partir del desplazamiento del pistón neumático (por derivación numérica). De igual forma, los desplazamientos calculados al integrar los acelerogramas se compararon contra los desplazamientos relativos medidos con el LVDT. Esto proporcionó información redundante que permitió corroborar la confiabilidad del sistema utilizado. La excitación aplicada se monitoreó directamente en el plano de deslizamiento para conocer exactamente la señal de entrada al sistema bloque – plano.

Los ensayos dinámicos permitieron corroborar la transición del coeficiente de fricción entre condiciones estáticas y dinámicas.

### *3.2 Interfaz madera – madera*

Dada su estabilidad y facilidad de trabajo en un principio se eligió trabajar con madera para comprender el fenómeno de fricción, para luego emplear materiales más comunes en la práctica ingenieril, como el geotextil y el concreto.

Dado que la madera es sensible a las condiciones ambientales, sobre todo a la humedad, se verificó la reproducibilidad de los ensayos al conservar (en la medida de lo posible) condiciones ambientales similares en todas las pruebas. Para este propósito se hicieron los ensayos en un rango de temperatura y humedad relativamente constante. De acuerdo con Bowden y Tabor (1964), el contenido de humedad que produce los mayores efectos en el comportamiento friccionante de la madera, está por debajo del 40%. Un contenido de humedad arriba de este porcentaje al parecer tiene poco efecto en el comportamiento de la madera. El contenido de humedad de los artículos de madera ordinarios en condiciones atmosféricas promedio está comprendido entre el 10 y el 20%. Este porcentaje de humedad, de acuerdo con Borden y Tabor (1964), está dentro del rango en donde se altera más significativamente el comportamiento friccionante de la madera. Es por ello que todos los ensayos con madera se realizaron a una humedad relativa aproximadamente constante, alrededor del 60 %.

#### *3.2.1 Ensayes estáticos*

Como se mencionó anteriormente, los ensayos fueron reproducibles. Es por ello que solamente se presentan los resultados de una de las pruebas para mostrar el comportamiento observado. Los resultados se presentan en términos de aceleración, velocidad y desplazamientos monitoreados durante la prueba.

En la figura 3-3a se observa que la aceleración del bloque en forma gradual, lo cual se atribuye al efecto de la fricción en la interfaz bloque – plano, ya que si ésta fuera cero, el cambio de la aceleración sería instantáneo. Esta variación al inicio del ensaye se ve reflejada en la parte inicial de la curva de velocidad (figura 3-3b). La figura 3-4a muestra el detalle de este cambio, el cual es imperceptible en la curva de desplazamiento mostrada en la figura 3-4b. Se observa también que la aceleración del bloque se vuelve casi constante durante el deslizamiento, conforme a la ley de fricción de Coulomb. De hecho la discrepancia principal de los resultados experimentales con la ley de fricción de Coulomb es la transición entre el reposo y el movimiento, ya que Coulomb asume un cambio instantáneo. En este tipo de experimentos en donde la tasa de cambio de la velocidad de deslizamiento es constante, el coeficiente de fricción también debiera serlo (no lo es del todo debido a las imperfecciones del material), de acuerdo con Coulomb, excepto al comienzo del deslizamiento. Para demostrar lo anterior, se obtuvo la variación del coeficiente de fricción a partir de estos resultados experimentales utilizando las ecuaciones 2-1 y 2-7, según se observa en la figura 3-5. La primera curva se obtuvo a partir de la hipótesis de variación lineal del coeficiente de fricción con la aceleración, y la segunda a partir del principio del trabajo y la energía. De acuerdo con la figura 3-5, el coeficiente de fricción se vuelve, para fines prácticos, relativamente constante, excepto al comienzo del deslizamiento. Esto puede atribuirse a que en esta etapa las uniones de los contactos en la

interfaz aún no se rompen y por lo tanto se oponen al deslizamiento. Cuando las uniones se rompen predomina la fuerza de inercia en el deslizamiento, y dado que la aceleración es constante, el cambio en la fuerza resistente es pequeño. Por otro lado, las variaciones de la fricción obtenidas con ambas ecuaciones (2-1 y 2-7) son prácticamente idénticas, excepto por el comienzo de las curvas. Esto se debe a que la curva de la ecuación 2-1 utiliza las mediciones del acelerómetro para calcular a  $\mu$ , mientras que la curva de la ecuación 2-7 emplea las mediciones del LVDT, el cual tiene menor resolución que los acelerómetros y es por esto que aparentemente el coeficiente de fricción no cambia al comienzo del deslizamiento, pero en realidad esto se debe a que el LVDT no alcanza a registrar desplazamiento en esta zona. Esto es evidente al observar la figura 3-6(a) donde se muestra una comparación entre la curva calculada con el acelerómetro y la medida con el LVDT. Se observa que globalmente ambas son prácticamente iguales. Sin embargo, al analizar en detalle el comienzo de las curvas, se aprecia en la figura 3-6b cómo el LVDT comienza a registrar desplazamiento en un tiempo mayor que el acelerómetro, debido a la mayor sensibilidad de este último respecto del primero. De cualquier forma, el hecho de que la variación del coeficiente de fricción sea prácticamente la misma, obtenida de dos formas distintas, valida nuevamente la hipótesis de variación lineal del coeficiente de fricción con la aceleración, y demuestra el cambio gradual que existe en el coeficiente de fricción de condiciones estáticas a dinámicas.

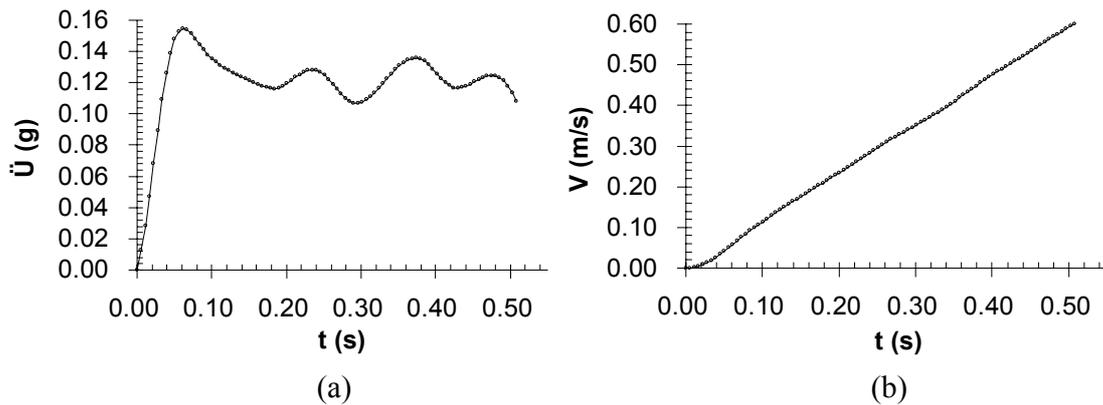


Figura 3-3. Aceleraciones (a) y velocidades (b) horizontales a lo largo de la prueba

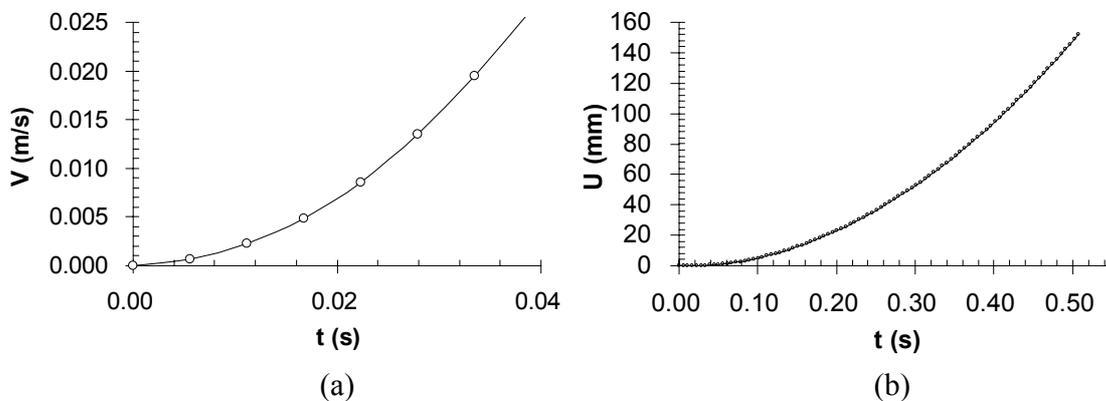


Figura 3-4. Detalle del cambio de la velocidad horizontal al inicio de la prueba (a) y desplazamientos horizontales medidos (b)

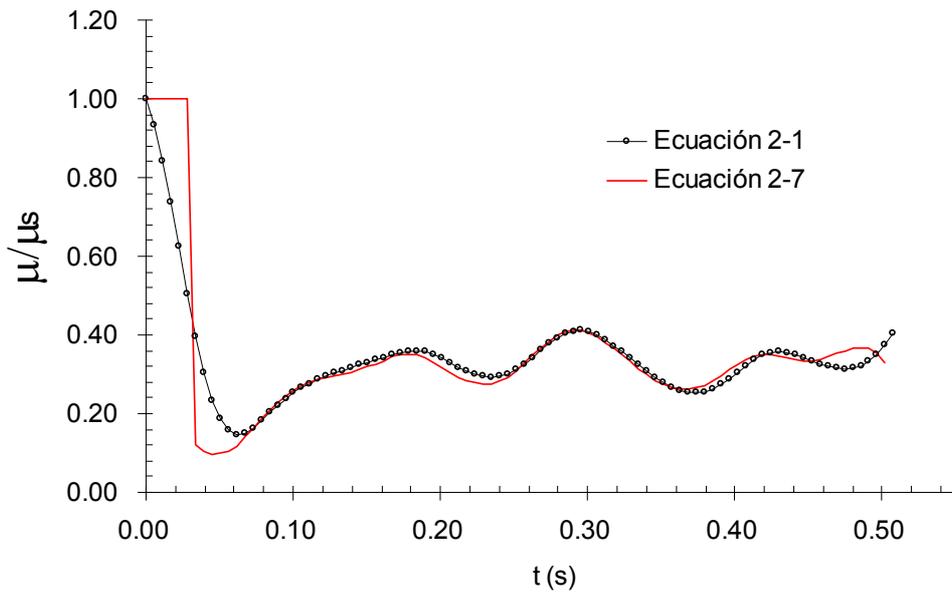


Figura 3-5. Variación del coeficiente de fricción durante el deslizamiento

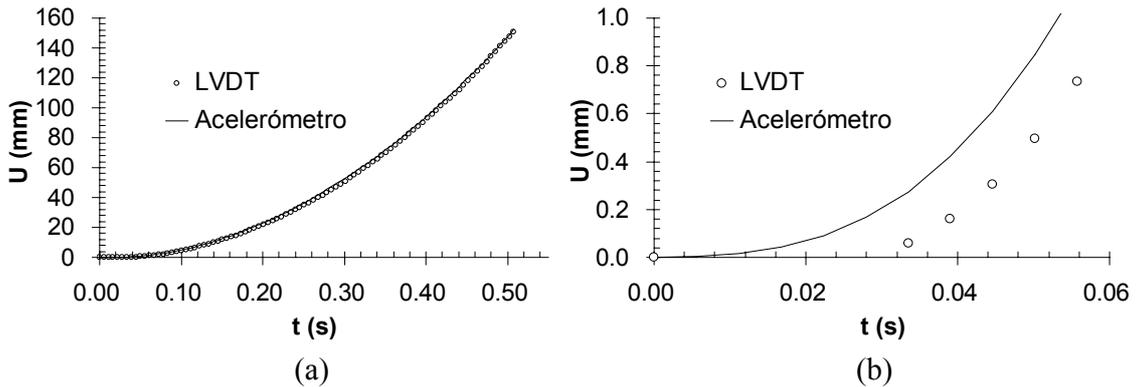


Figura 3-6. (a) Comparación entre el acelerómetro y el LVDT en términos de desplazamiento, (b) detalle del principio de las curvas

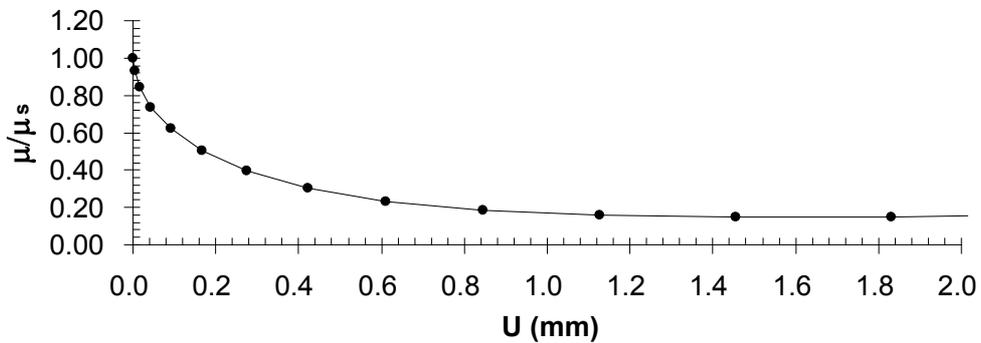


Figura 3-7. Variación del coeficiente de fricción con el desplazamiento (calculado con 2-1)

En la figura 3-7 se muestra la variación del coeficiente de fricción con el desplazamiento (calculado a partir de la integración de los registros de aceleración). En esta figura se observa claramente la transición que existe entre el reposo y el deslizamiento. Para el caso de la interfaz madera – madera, la longitud de transición (Méndez y Romo, 2005) entre ambas condiciones es de aproximadamente 1.13 mm. Esta longitud varía dependiendo de los materiales en contacto, y de acuerdo con Rabinowicz (1951), ésta será menor cuanto más rígido sea el material de la interfaz de deslizamiento.

### 3.2.2 Ensayes dinámicos con plano horizontal

La figura 3-8(a) muestra la aceleración de respuesta del bloque rígido sobre la interfaz madera – madera en algunos de los ensayos realizados. Se observa que los resultados son muy similares, por lo que para el análisis del deslizamiento se utiliza un ensaye representativo, presentado en la figura 3-8(b). La señal de entrada empleada fue armónica con amplitud de 6 cm y frecuencia de 2 Hz. Las frecuencias mayores a 10 Hz fueron filtradas de los registros de los acelerómetros. De igual forma, estas señales se corrigieron por línea base. Los detalles del procesamiento pueden consultarse en el trabajo de Méndez (2004).

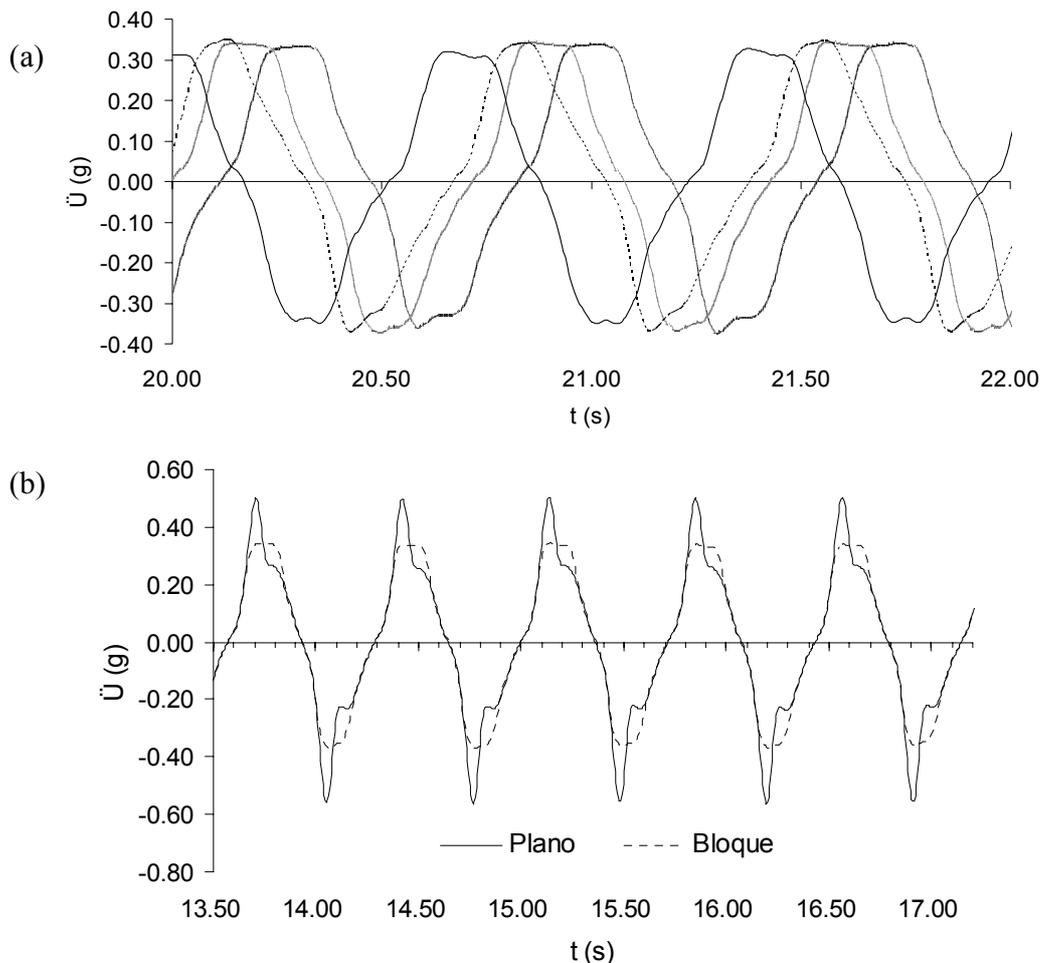


Figura 3-8. (a) Aceleración del bloque rígido en diversos ensayos, (b) ensaye representativo en la interfaz madera – madera

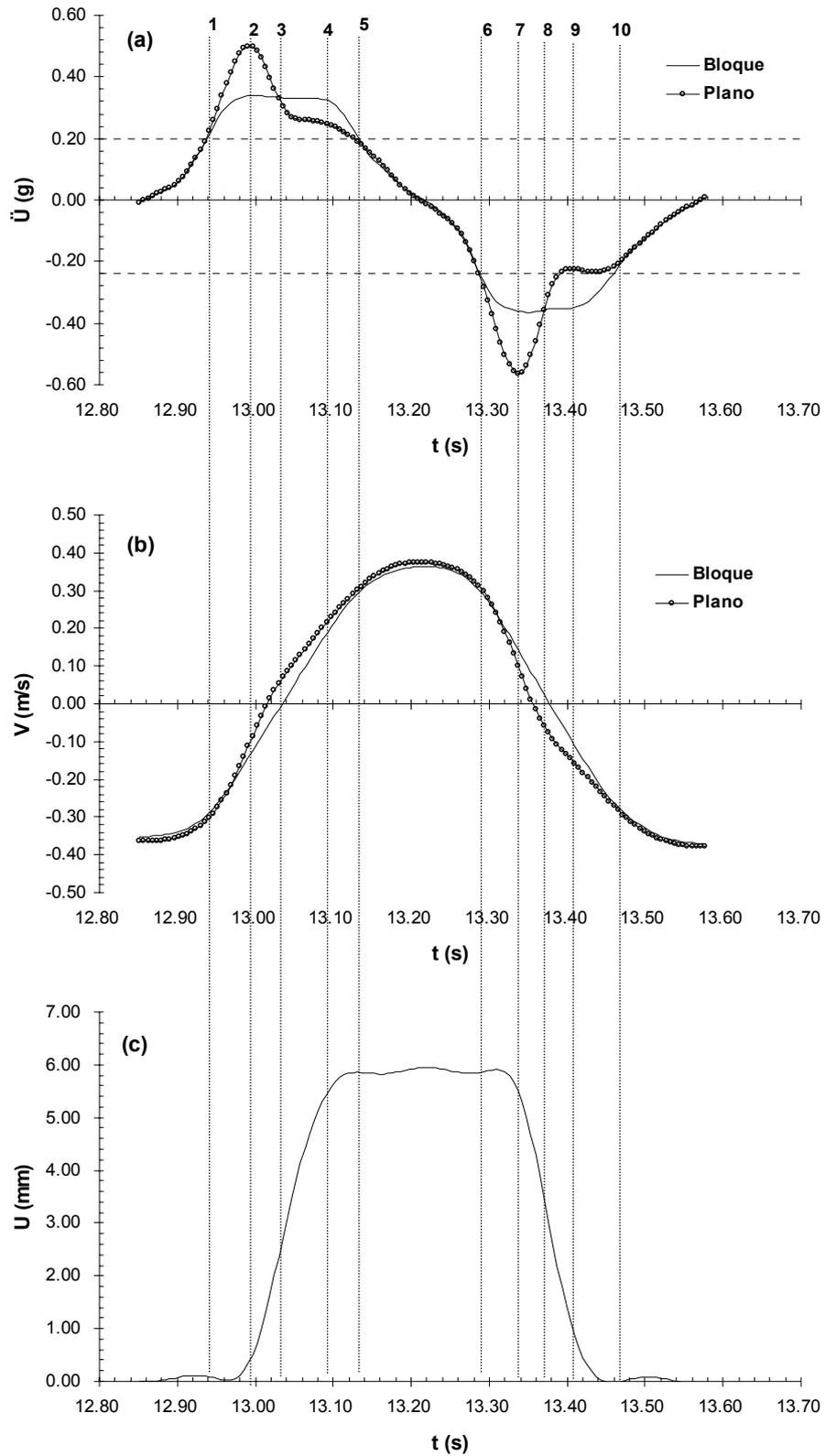


Figura 3-9. Respuesta del bloque rígido durante un ciclo de deslizamiento relativo

Dado que la figura 3-8(b) muestra los resultados típicos de un ensaye dinámico con plano horizontal, en la figura 3-9 se muestra sólo un ciclo (promedio) del mismo para analizar el comportamiento dinámico del bloque rígido en términos de aceleración, velocidad y desplazamiento. En la figura 3-9 se marcaron diez puntos en el ciclo de deslizamiento para analizar el comportamiento del bloque. El punto 1 indica el momento en que comienza el deslizamiento relativo. Consecuentemente, las aceleraciones del bloque y del plano de deslizamiento comienzan a separarse debido a que se ha alcanzado la resistencia estática en la interfaz de deslizamiento, es decir, la aceleración de fluencia (Newmark, 1963, 1965) para el caso horizontal (ecuación 2-8).

Esto provoca a su vez que se produzcan velocidades relativas, como se observa en la figura 3-9(b) donde las curvas de velocidad del bloque y el plano se separan, y que el LVDT registre deslizamiento relativo en la interfaz madera – madera. Una vez iniciado el deslizamiento se aprecia claramente en la figura 3-9(a) que la aceleración del bloque aumenta, en lugar de permanecer constante e igual al valor de fluencia como se asume comúnmente en los problemas de deslizamiento (Newmark, 1963, 1965). Al igual que para el caso estático, esta variación de la aceleración se atribuye al cambio gradual del coeficiente de fricción. Para el caso dinámico se tiene que mientras el coeficiente de fricción disminuye paulatinamente a partir del punto 1, la transferencia de energía a través de la interfaz continua, lo que permite que la aceleración del bloque siga aumentando (Méndez, 2004; Méndez y Romo, 2006; Méndez y Romo, 2009). Se observa también que la aceleración del bloque llega a su máximo en el punto 2. Después permanece constante hasta el punto 4, siendo ésta mayor a la aceleración del plano a partir del punto 3. Este comportamiento se repite en la parte negativa de la curva, del punto 6 al 10. Las aceleraciones negativas se traducen en velocidades relativas negativas, como se observa en la figura 3-9(b), donde la velocidad del bloque es mayor que la del plano, a pesar de que el comportamiento del bloque es exactamente igual que en el sentido positivo de las aceleraciones. De acuerdo con Botero (2004), el fenómeno en donde la aceleración del bloque es mayor que la del plano se debe al efecto del deslizamiento, ya que éste induce una aceleración *extra*, llamada aceleración cinética (*op. cit.*). Conforme la evidencia experimental recabada en esta tesis para superficies horizontales, la aceleración inducida por el deslizamiento (aceleración cinética) puede lograr que la aceleración de respuesta del bloque permanezca constante durante el deslizamiento, como en la interfaz madera – madera (figura 3-9a), o que aumente como en la interfaz geotextil – madera, mostrada en la sección 3.3. El efecto que produce el deslizamiento en la aceleración de respuesta del bloque depende del material de la interfaz.

Finalmente, en el ciclo de deslizamiento se observa que la aceleración del bloque comienza a decrecer hasta que se iguala con la del plano de deslizamiento en el punto 5. Este comportamiento se atribuye a la variación de la fricción en la interfaz de deslizamiento. Para ilustrar esta discusión se presenta en la figura 3-10 la variación del coeficiente de fricción durante el ciclo de deslizamiento de la figura 3-9. Las variaciones del coeficiente de fricción se calcularon empleando las ecuaciones 2-11 y 2-15B. Se observa que los resultados obtenidos con ambas ecuaciones son equivalentes para fines prácticos. Las diferencias observadas se deben, al igual que para el caso estático, a la disparidad de resolución entre los sensores utilizados (LVDT y acelerómetros).

Los puntos marcados en la figura 3-10 corresponden con los de la figura 3-9. Se observa que el coeficiente de fricción disminuye del valor estático en el punto 1 hasta un mínimo en el punto 2, tal y como se esperaba, de acuerdo con la discusión del párrafo anterior. Los valores negativos del coeficiente de fricción que se encuentran en la figura 3-10 carecen de significado físico. En realidad estos valores oscilan alrededor del cero. De acuerdo con la ecuación 2-11, esto sucede cuando la aceleración relativa en la interfaz es mayor o igual al valor  $g\mu_s$ . Físicamente esto podría compararse con el caso de la mesa servida. Cuando se retira el mantel lo suficientemente rápido, la vajilla no se mueve ya que el coeficiente de fricción disminuye drásticamente. Hirano y Shinjo (1990) y Hirano en 2003, proponen una explicación a nivel atómico para este fenómeno al cual llamaron *super lubricidad*.

Después de que el coeficiente de fricción llega a su mínimo (punto 2), comienza a aumentar de nuevo hasta llegar a un máximo en el punto 4 para después tomar el valor estático de nuevo en el punto 5, que de acuerdo con las mediciones experimentales es donde sucede el acoplamiento entre el bloque y el plano de deslizamiento.

Los resultados de la figura 3-10 indican que el coeficiente de fricción cinética puede ser mayor al estático. Nótese que esto sucede cuando la excitación cambia de sentido (a partir del punto 2 en las figuras 3-9(a) y 3-10). Este fenómeno ha sido observado por otros investigadores (e.g. Rajagopalan, 2001), quienes han encontrado que el coeficiente de fricción cinética es mayor al estático para superficies metálicas sometidas a deslizamientos con cambios de sentido, como en los experimentos realizados en esta investigación con madera.

El hecho de que el coeficiente de fricción no sólo no sea constante, sino que además el valor cinético pueda ser mayor al estático trae implicaciones importantes en los problemas dinámicos donde interviene la fricción. En el capítulo siguiente se abordará este punto.

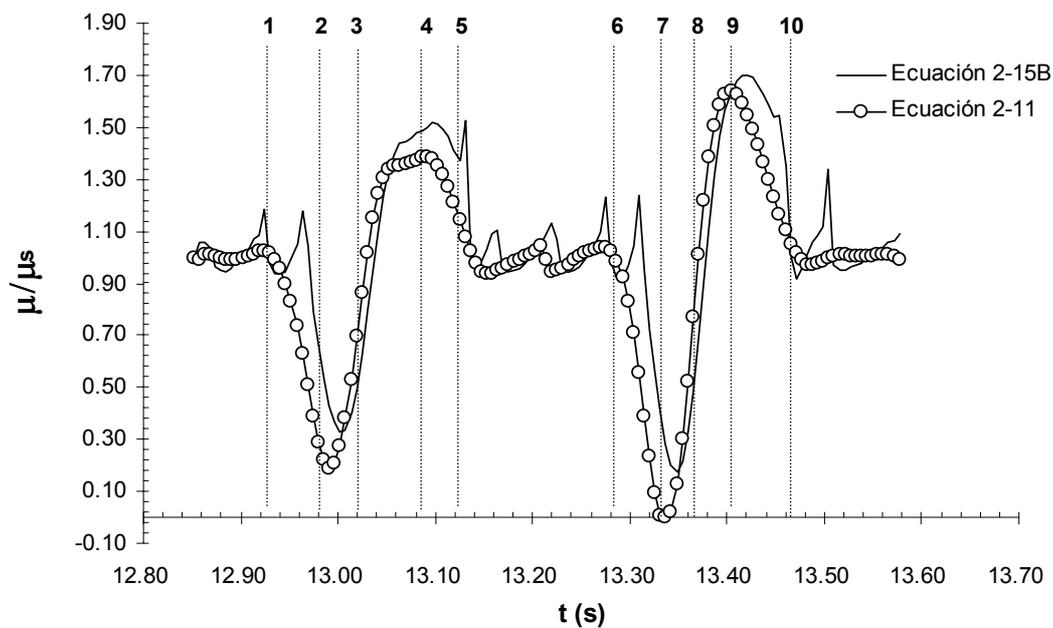


Figura 3-10. Variación del coeficiente de fricción en un ciclo de deslizamiento

### 3.2.3 Ensayes dinámicos con plano inclinado

En el caso dinámico con plano inclinado, el desplazamiento relativo del bloque rígido es inducido por la acción de la aceleración aplicada en la base del plano de deslizamiento, usando la mesa vibradora. En este tipo de ensayos el bloque rígido es estable sobre el plano para condiciones estáticas. Es decir, el ángulo de inclinación del plano de deslizamiento,  $\theta$ , es menor que el ángulo de fricción de la interfaz bloque – plano,  $\phi_s$ .

Se presentan resultados de un ensayo realizado con una inclinación de  $5^\circ$  respecto de la horizontal. Esta inclinación representa el 20% de la resistencia estática de la interfaz bloque – plano. La figura 3-11 muestra las aceleraciones del bloque y el plano de deslizamiento para tres ciclos consecutivos de deslizamiento relativo. La línea punteada indica la aceleración de fluencia. Se observa que la aceleración de fluencia cambió ligeramente durante el deslizamiento, debido a la rugosidad variable de la madera a lo largo del deslizamiento. A partir de estos registros de aceleración, se obtuvo la variación del coeficiente de fricción cinético empleando la ecuación 2-17. Los resultados se muestran en la figura 3-12 para los tres ciclos de deslizamiento presentados en la figura 3-11. Se observa que los resultados son similares a los obtenidos para el caso horizontal, aunque para el caso inclinado se aprecia que se reduce la duración de la fase acoplada del deslizamiento (parte horizontal de la curva de fricción), ya que el bloque desliza cuesta arriba ligeramente, como se observa en los acelerogramas de la figura 3-11.

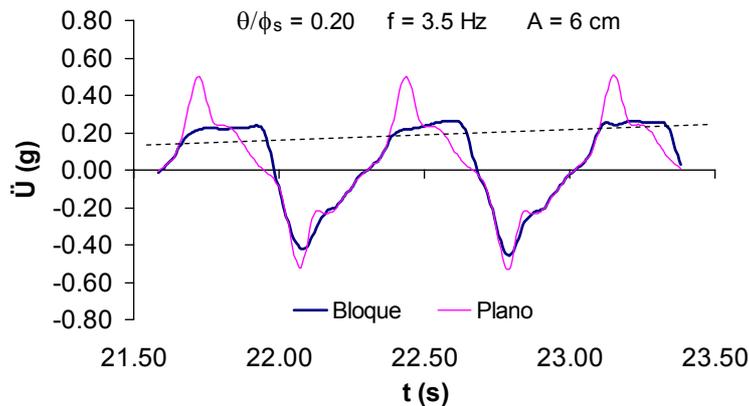


Figura 3-11. Aceleraciones del bloque y el plano de deslizamiento

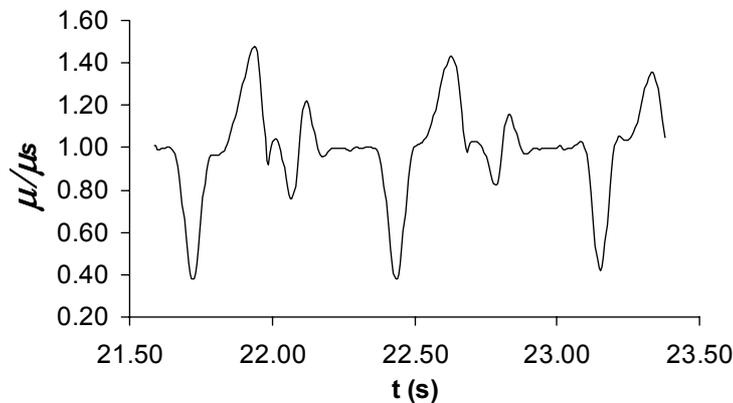


Figura 3-12. Variación del coeficiente de fricción calculado con la ecuación 2-17

### 3.3 Interfaz geotextil – madera

En esta interfaz se realizaron pruebas estáticas y dinámicas para observar la variación del coeficiente de fricción cinética a lo largo del tiempo.

#### 3.3.1 Ensayes estáticos

Al igual que para la interfaz madera – madera, los resultados para el contacto geotextil – madera se presentan en términos de aceleración, velocidad y desplazamientos monitoreados durante la prueba. La figura 3-13(a) muestra que la aceleración del bloque deslizando sobre la interfaz tiene variaciones a lo largo del recorrido sobre el plano inclinado, evidenciando así el cambio en el coeficiente de fricción. Lo mismo ocurre con las velocidades de deslizamiento (figura 3-13(b)), donde al comienzo del movimiento se observa un cambio gradual en la pendiente de la curva de velocidades. Este cambio se observa claramente en la figura 3-14(a), donde se muestra la variación de la velocidad al comienzo del deslizamiento. La variación del deslizamiento durante el tiempo se presenta en la figura 3-14(b), donde también se muestra un ajuste parabólico casi perfecto. Esto indica que los pequeños cambios en la pendiente de la curva velocidad – tiempo son mínimos y tienen muy poca influencia en el desplazamiento, el cual sería perfectamente parabólico (coeficiente de correlación,  $R^2$ , igual a 1.0) si la pendiente de la curva de velocidad fuera constante a lo largo de todo el deslizamiento del bloque. Esto indica que para el caso estático, la ley de fricción de Coulomb es lo suficientemente aproximada para modelar el fenómeno de deslizamiento. Sin embargo, esto no es así para el caso dinámico, como se verá más adelante. Por otro lado, puede que la ley de fricción de Coulomb sea adecuada para este problema, pero no así la ecuación 2-3 (ver capítulo dos), obtenida de una aplicación incorrecta de la mecánica clásica. Esto conduce a que los coeficientes de fricción obtenidos con esa ecuación sean mucho mayores al valor que realmente existe en la interfaz de deslizamiento.

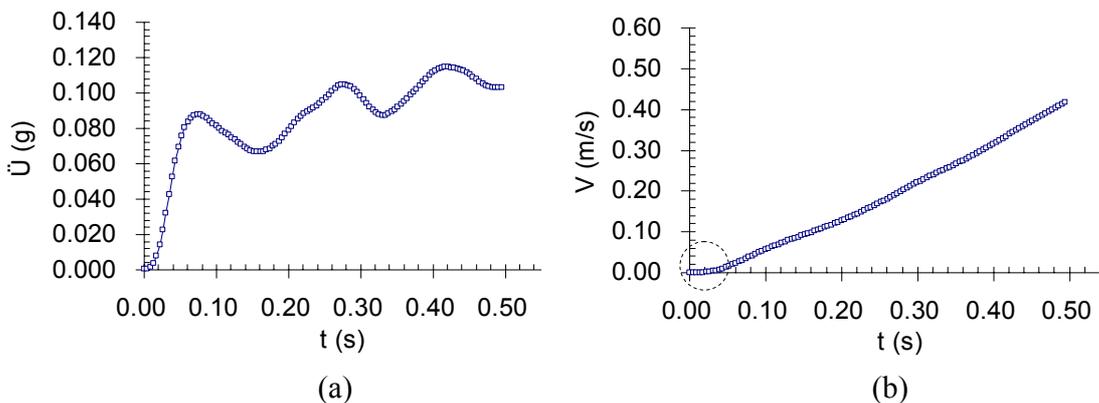


Figura 3-13. Aceleraciones (a) y velocidades (b) horizontales a lo largo de la prueba

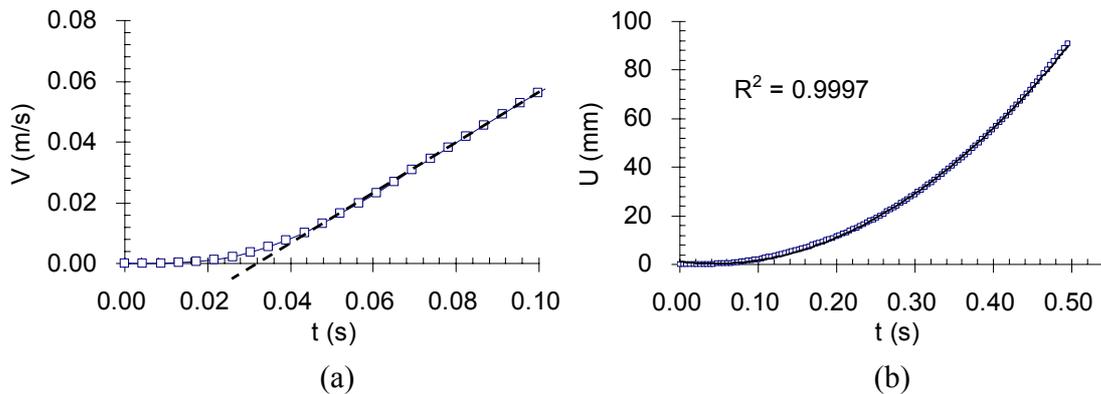


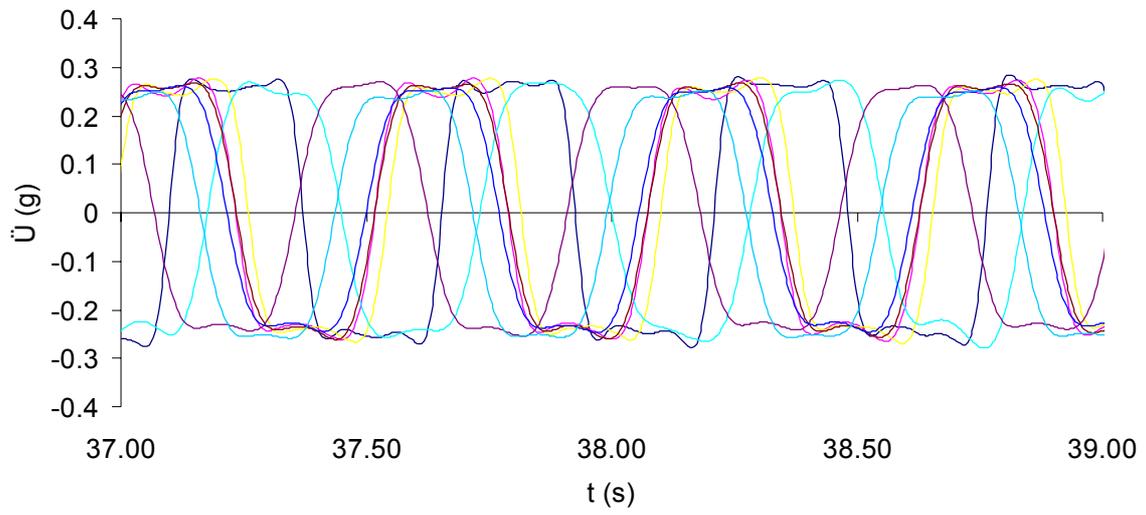
Figura 3-14. Detalle del cambio de la velocidad horizontal al inicio de la prueba (a) y desplazamientos horizontales medidos

### 3.3.2 Ensayes dinámicos con plano horizontal

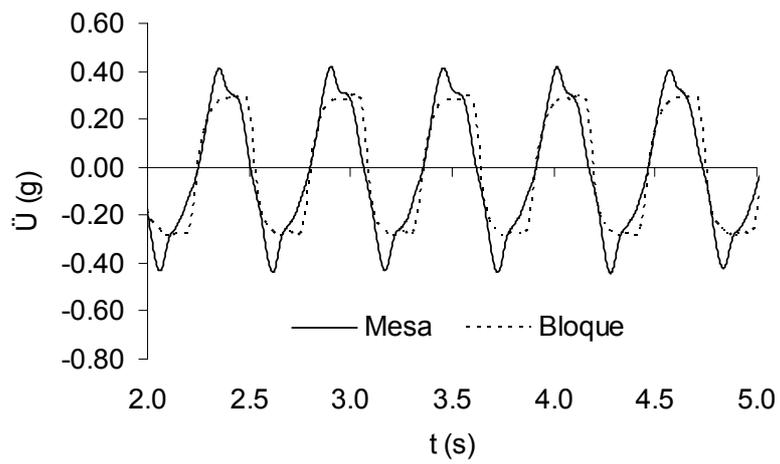
La respuesta dinámica del bloque rígido deslizando sobre la interfaz geotextil – madera, es cualitativamente igual que para la interfaz madera – madera, según se observa en la figura 3-15(a) donde se muestran las aceleraciones de respuesta del bloque deslizando registradas en algunos de los experimentos realizados. Se observa en esa figura que la respuesta es muy parecida entre los ensayos, por lo que para el análisis del deslizamiento, al igual que para la interfaz madera – madera, se usó un ensayo típico, mostrado en la figura 3-15(b). De los resultados de la figura 3-15(b) se tomó un ciclo (promedio) de deslizamiento, mostrado en la figura 3-16, y se analizó en términos de aceleraciones, velocidades y desplazamientos.

En la figura 3-16 se observa que en la interfaz geotextil – madera se presentan los mismos cinco puntos de referencia que para el caso madera – madera: el punto 1 donde comienza el deslizamiento relativo, el punto 2 donde se alcanza un máximo en la aceleración del bloque, el punto 3 donde la aceleración del bloque comienza a ser mayor que la del plano sobre el que desliza, el punto 4 donde comienza a decrecer la aceleración del bloque para acoplarse al plano de deslizamiento en el punto 5. Estos cinco puntos se ven reflejados en las velocidades y desplazamientos mostrados en las figuras 3-16 (b) y (c), respectivamente, donde se aprecia claramente que la fase de acoplamiento es muy corta, comparada con la interfaz madera – madera. Esto indica la tendencia de esta interfaz, bajo la excitación aplicada, a deslizar en forma continua, punto que se tratará más adelante en el capítulo 5. Se observa también que a partir del punto 2 de la figura 3-16(a), la tasa de aumento de la aceleración del bloque disminuye notoriamente, pero mantiene una ligera tendencia a seguir aumentando. Esto se atribuye al efecto que produce la aceleración cinética en la interfaz geotextil – madera, como se mencionó anteriormente.

La variación del coeficiente de fricción para esta interfaz se presenta en la figura 3-17. Se observa nuevamente que los resultados obtenidos con las ecuaciones correspondientes al principio del trabajo y la energía (ecuación 2-15B) y a la mecánica clásica (ecuación 2-11) arrojan resultados similares. La diferencia es más marcada cuando los desplazamientos relativos son muy pequeños (cerca del acoplamiento bloque – plano), debido a que el incremento de desplazamiento relativo aparece como denominador en la ecuación 2-15B.



(a)



(b)

Figura 3-15. (a) Aceleración del bloque rígido en diversos ensayos, (b) ensaye representativo en la interfaz geotextil – madera

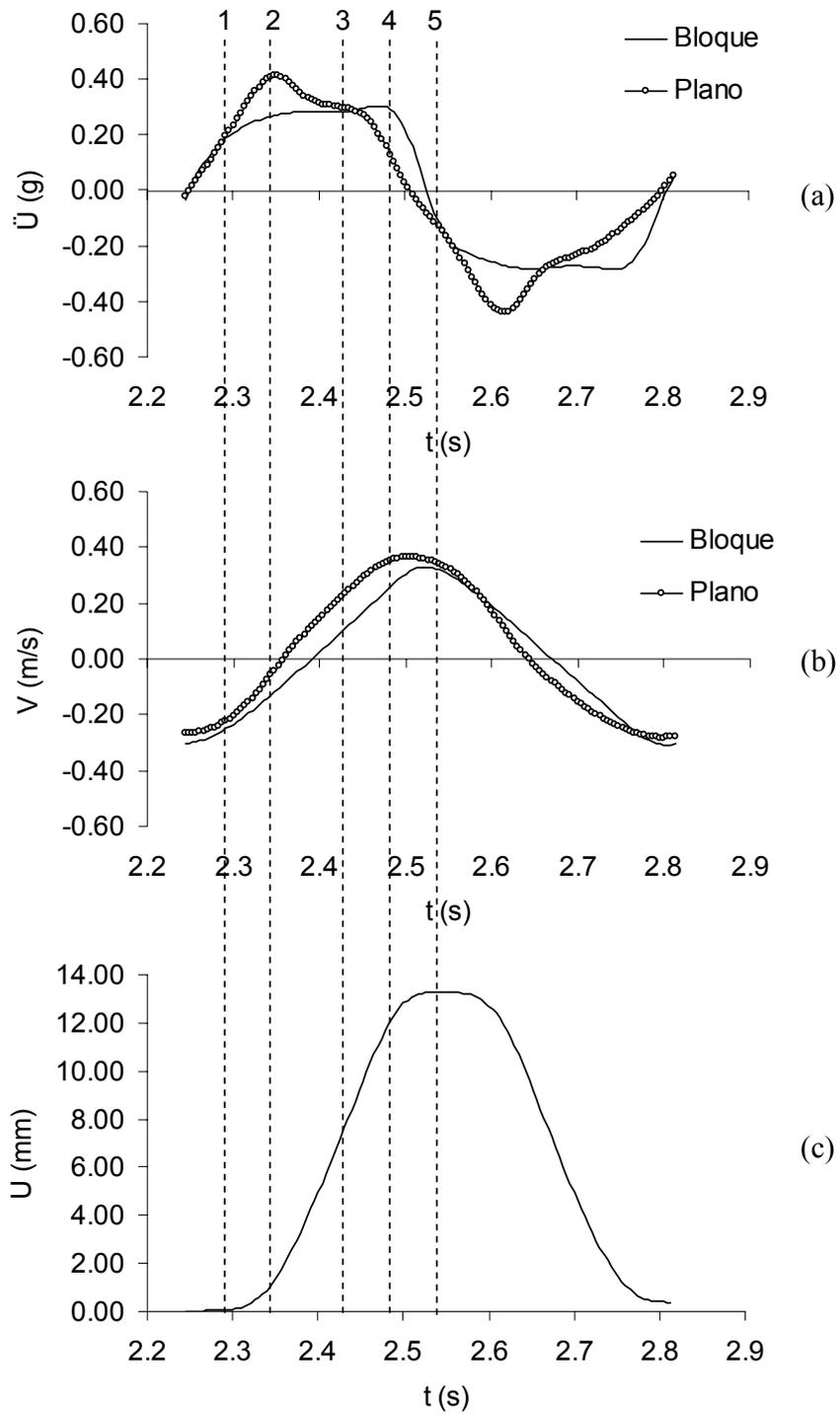


Figura 3-16. Respuesta del bloque rígido durante un ciclo de deslizamiento relativo

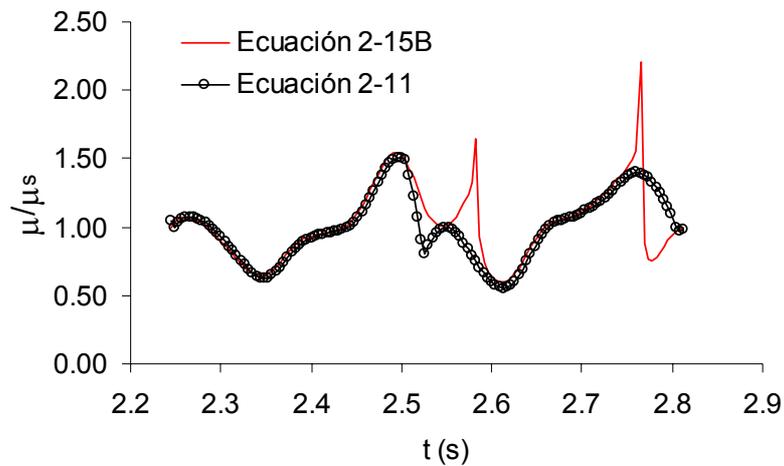


Figura 3-17. Variación del coeficiente de fricción en un ciclo de deslizamiento

### 3.3.3 Ensayes dinámicos con plano inclinado

El bloque rígido deslizando sobre una interfaz geotextil – madera presentó un movimiento continuo, sin fase de acoplamiento con el plano de deslizamiento, según se observa en la figura 3-18 donde se presentan las aceleraciones respectivas. La línea punteada en la figura 3-18 corresponde a la aceleración de fluencia, estimada como 0.08 g, conforme con los registros experimentales. A diferencia de la interfaz madera – madera, la aceleración de fluencia en el caso de la figura 3-18 permaneció constante debido a que en el deslizamiento fue continuo, y en realidad una vez alcanzado este valor, el bloque ya no se acopló de nuevo al plano durante la ensaye experimental.

El coeficiente de fricción estimado para estas condiciones se muestra en la figura 3-19, donde se aprecian valores negativos. Como se mencionó anteriormente, los valores negativos carecen de significado físico. Estos valores se presentan cuando la aceleración de la excitación es muy alta y produce grandes valores de aceleración relativa en la interfaz, desplomando así al coeficiente de fricción hacia valores cercanos a cero.

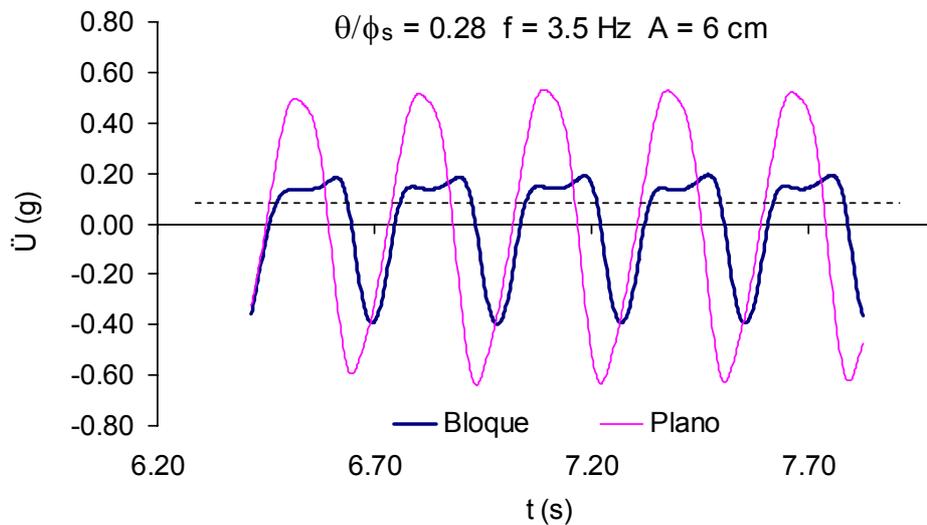


Figura 3-18. Aceleraciones del bloque y el plano de deslizamiento

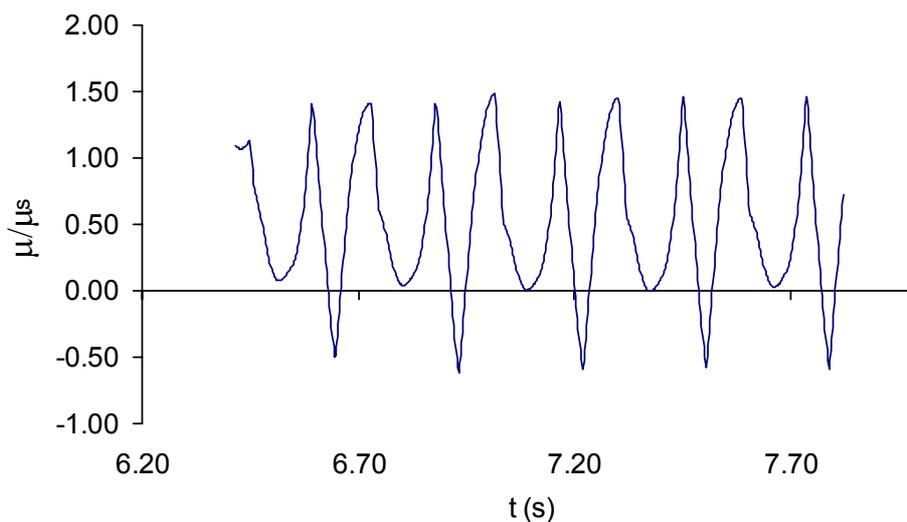


Figura 3-19. Variación del coeficiente de fricción calculado con la ecuación 2-17

### 3.4 Interfaz concreto – concreto

Se llevaron a cabo ensayos en interfaces concreto – concreto para estudiar la variación del coeficiente de fricción en interfaces que se degradan con mayor facilidad respecto de las estudiadas hasta el momento: madera – madera y geotextil – madera. Los experimentos se realizaron en forma similar a las otras interfaces, utilizando un bloque rígido de concreto deslizando sobre otro bloque de concreto fijo a la mesa vibradora (Botero *et. al.*, 2006, 2007), como se muestra en la figura 3-20. El bloque inferior tiene dimensiones 0.25 m x 0.07 m x 0.07 m (largo, alto y ancho), y el bloque superior 0.12 m x 0.07 m x 0.07 m. Sólo se realizaron pruebas dinámicas con plano horizontal.

En la figura 3-21(a) se presentan las aceleraciones de respuesta del bloque deslizante para algunos de los experimentos realizados. Se observa que los resultados son muy similares

entre sí, por lo que para analizar los coeficientes de fricción se tomó uno de ellos, cuyos resultados se ilustran en la figura 3-21(b). Se observa en esa figura que al igual que para las interfaces madera – madera y geotextil – madera, la aceleración del bloque sigue en aumento una vez que comienza el deslizamiento. Esto indica la variación del coeficiente de fricción durante el deslizamiento. Sin embargo, a diferencia de las interfaces anteriores, la aceleración de respuesta del bloque de concreto va oscilando durante el deslizamiento, posiblemente debido a las protuberancias macroscópicas propias de la superficie de concreto. Estas mismas protuberancias se irán desgastando si la excitación se aplica con una duración suficiente. Esto a su vez modificará la rugosidad de la superficie de deslizamiento y por lo tanto la respuesta del bloque debido al cambio que implica en los coeficientes de fricción. Para el caso del ensaye de la figura 3-21(b), los coeficientes de fricción calculados con la ecuación 2-11 se muestran en la figura 3-22. Se observa que para el caso de la interfaz concreto – concreto, el coeficiente de fricción cinética es predominantemente mayor al valor estático, a diferencia de la interfaz madera – madera, por ejemplo, en donde se tiene que el coeficiente cinético es predominantemente menor al valor estático. Esta diferencia pudiera atribuirse a la diferencia en rugosidades entre una y otra superficie.

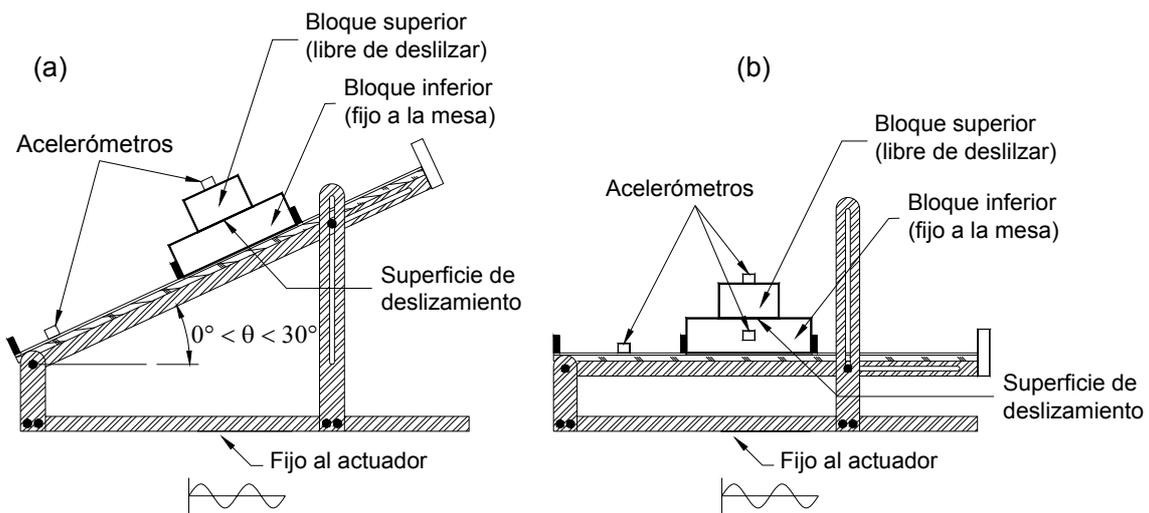


Figura 3-20. Configuración experimental para la interfaz concreto – concreto para determinar el coeficiente de fricción estático (a) y cinético (b)

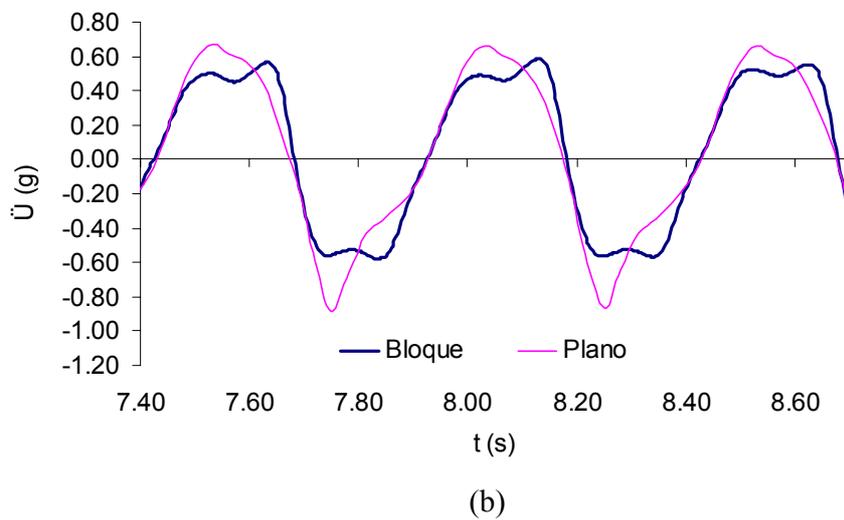
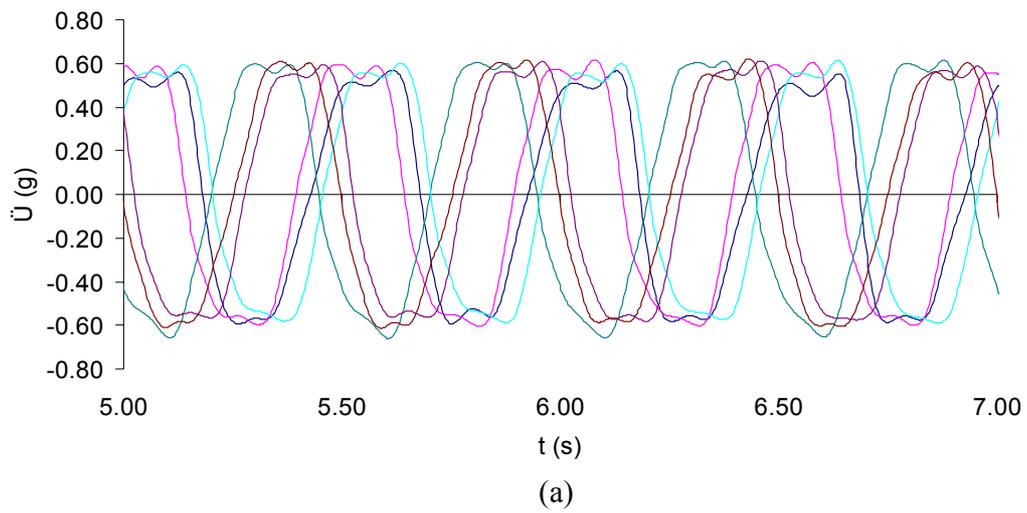


Figura 3-21. Resultados típicos de ensayos en interfaz concreto - concreto

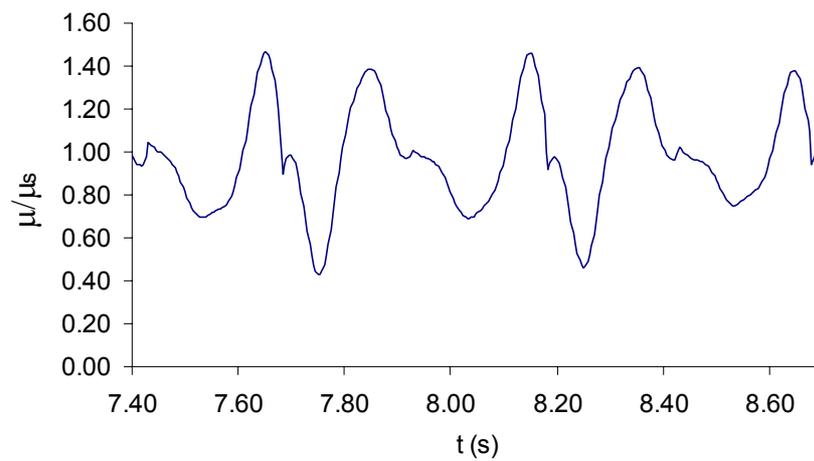


Figura 3-22. Variación del coeficiente de fricción calculado con la ecuación 2-11

## 4 Modelo de fricción propuesto

### 4.1 Modelo propuesto

El modelo de fricción que se propone en esta investigación es aplicable a los problemas de ingeniería en donde se tenga un cuerpo deslizando libremente sobre otro. Algunos ejemplos de esta situación serían el caso de un talud de roca deslizando sobre una superficie de falla bajo la acción de una carga cíclica, un edificio aislado sísmicamente que desliza respecto de su base (cimentación) por medio de interfaces friccionantes, contenido no estructural (por ejemplo equipo sensible) de edificios deslizando sobre un plano bajo la acción de un sismo, puentes aislados sísmicamente deslizando respecto de sus soportes, etc. Basados en este enfoque de un cuerpo deslizando sobre otro, algunos investigadores en ingeniería han llevado a cabo experimentos para estudiar la variación de la fricción cinética con la velocidad de deslizamiento para diversas interfaces (*e.g.*, Constantinou *et. al.*, 1987; Yegian y Lahlaf, 1992; Wartman *et. al.*, 2003). El propósito de la mayoría de los experimentos de fricción en ingeniería es caracterizar una interfaz en particular para emplear la ley de fricción de Coulomb. Sin embargo, reconociendo las limitantes que plantea dicha ley, algunos investigadores han propuesto modelos de fricción alternativos que buscan mejorar algún aspecto específico de ella. Por ejemplo, Andreaus y Casini (2001) proponen modificarla para incluir una transición gradual entre el coeficiente de fricción estática y cinética, a través de una función exponencial:

$$\mu = \mu_k + (\mu_s - \mu_k)e^{-\delta|\dot{U}_{rel}|} \quad (4-1)$$

donde  $\dot{U}_{rel}$  es la velocidad relativa en la interfaz de deslizamiento y  $\delta$  es la tasa de decremento de la fricción con la velocidad relativa.

La variación que produce la ecuación (4-1) se ilustra esquemáticamente en la figura 4-1, donde se aprecia que se asume una relación decreciente del coeficiente de fricción con la velocidad relativa. En la figura 4-1 se observa también que el coeficiente cinético llega a un valor límite y no se modifica sin importar cuán alta sea la velocidad relativa, conforme a la ley de Coulomb, aunque no necesariamente de acuerdo con la física del problema. Con este modelo de fricción, Andreaus y Casini (2001) resolvieron el problema de la discontinuidad intrínseca de la ley de Coulomb entre ambos coeficientes.

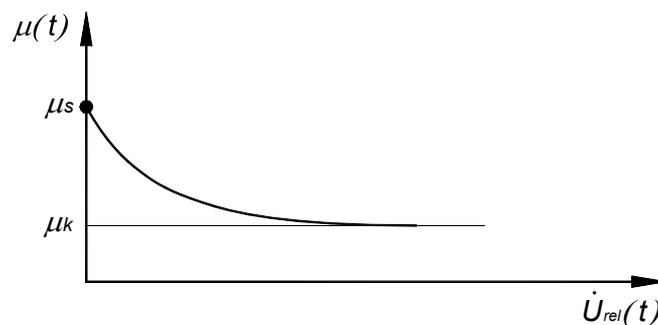


Figura 4-1. Esquema de la ley de fricción propuesta por Andreaus y Casini (2001)

Existen pocos modelos de fricción desarrollados en ingeniería aplicables al problema de cuerpos deslizantes. Comúnmente, los problemas relacionados con fricción se tratan con dos enfoques: 1) emplear la teoría de la plasticidad para modelar la fricción estática (Chang *et. al.*, 1990) ó 2) utilizar la ley de fricción de Coulomb para los casos estáticos y dinámicos, lo cual implica la hipótesis de un comportamiento rígido – plástico perfecto. Para librar ambos inconvenientes, Chang *et. al.* (1990) plantearon un modelo de fricción basado en la teoría de la viscoplasticidad para tomar en cuenta el efecto de la velocidad de deslizamiento. Ellos enfocaron su modelo al caso específico de una interfaz de teflón – acero inoxidable, proponiendo un coeficiente quasi-estático (velocidad de deslizamiento diferente de cero de muy bajo valor) en lugar de uno estático, debido a que en la formulación analítica de su modelo, el efecto de la velocidad de deslizamiento en el coeficiente de fricción se describe en forma análoga al efecto de la tasa de cambio de la deformación en la teoría de la viscoplasticidad (Chang *et. al.*, 1990). En cuanto al coeficiente de fricción cinético, lo plantearon como un factor de amplificación respecto del coeficiente cuasi-estático, en función de la velocidad de deslizamiento. Los resultados analíticos de Chang *et. al.* (1990) se ajustaron muy bien a sus mediciones experimentales. Sin embargo, el modelo no ha sido muy popular en la práctica de la ingeniería, debido a su complejidad de aplicación. En cambio, Constantinou *et. al.* (1990) proponen un modelo de fricción cinética obtenido bajo un enfoque experimental, en donde presentan valores de los parámetros que involucra el modelo para el caso de una interfaz teflón – acero inoxidable, en función del tipo de teflón, presión en la interfaz de deslizamiento, orientación del deslizamiento (longitudinal o transversal al teflón), tasa de decaimiento, entre otras. El modelo está representado por la ecuación (4-2):

$$\mu_k = \mu_{m\acute{a}x} - (\mu_{m\acute{a}x} - \mu_{m\acute{i}n})e^{-a|\dot{U}_{rel}|} \quad (4-2)$$

nde  $\mu_{m\acute{a}x}$  es el coeficiente de fricción máximo que se presenta a grandes velocidades de deslizamiento (una vez que el coeficiente de fricción se ha estabilizado),  $\mu_{m\acute{i}n}$  es el coeficiente de fricción mínimo que se obtiene a bajas velocidades de deslizamiento. La figura 4-2 ilustra esquemáticamente la variación que produce la ecuación 4-2.

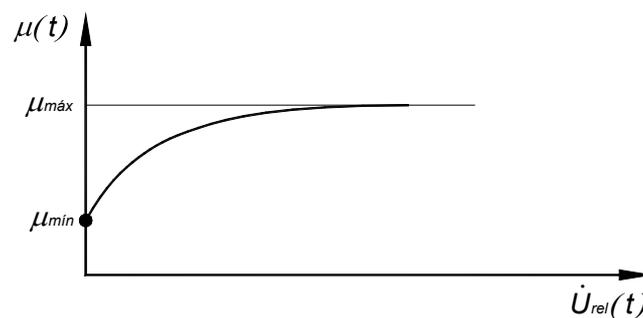


Figura 4-2. Esquema de la ley de fricción propuesta por Constantinou *et. al.* (1990)

En la figura 4-2 se observa que a diferencia del modelo de Andraeus y Casini (2001), el coeficiente de fricción cinética aumenta con la velocidad de deslizamiento en el modelo de Constantinou *et. al.* (1990), mostrando así que ambos comportamientos son posibles, dependiendo de las condiciones particulares de cada interfaz de deslizamiento (Rabinowicz,

1995). Sin embargo, existe la teoría (Tolstoi, 1967) de que la pendiente de la curva velocidad – fricción no es una característica intrínseca del material de la interfaz, sino una propiedad del sistema dinámico en estudio que depende del amortiguamiento normal a la superficie de deslizamiento. De cualquier forma, una interfaz deslizante puede presentar pendientes velocidad – fricción tanto positivas como negativas, según se observa en la figura 4-2B, donde se presentan los resultados de ensayos de fricción en metales (tomado de Rabinowicz, 1995). Los resultados mostrados en la figura 4-2B confirma el hecho de que ambos comportamientos son posibles, aunque las causas que lo originan no se discutirán ya que están fuera del alcance de esta investigación. Para abundar al respecto pueden consultarse los trabajos de Tolstoi (1967) y Rabinowicz (1995).

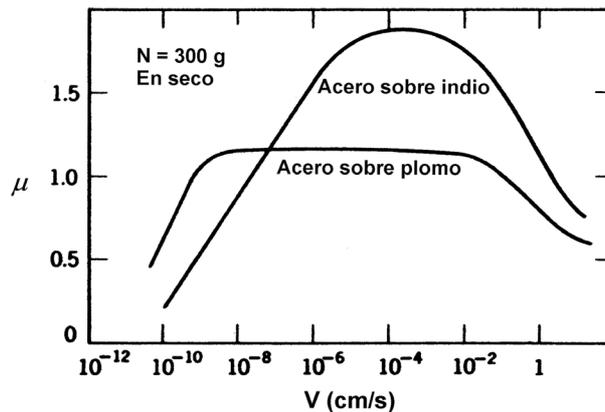


Figura 4-2B. Curvas velocidad – fricción en metales (modificado de Rabinowicz, 1995)

Por otro lado, a pesar de que los modelos de Chang *et. al.* (1990) y Constantinou *et. al.* (1990) fueron desarrollados para la misma interfaz, y que el modelo de Chang tiene una base teórica sólida, el modelo de Constantinou *et. al.* (*op. cit.*) ha sido el más utilizado, debido a que es más sencillo de aplicar. Sin embargo, tanto el modelo de Andreaus y Casini (2001), como los de Chang *et. al.* (1990) y Constantinou *et. al.* (1990), expresan el coeficiente de fricción cinética en función de la velocidad instantánea (relativa) de deslizamiento. Al respecto Hunt *et. al.* (1965), sugieren que el coeficiente de fricción depende de la tasa de cambio de la velocidad, más que del valor instantáneo de ésta. Este hecho se confirmó teóricamente a través de las ecuaciones planteadas en el capítulo 2 de esta tesis, y se confirmó experimentalmente en el capítulo 3. Además, en un problema real, no se conoce la velocidad relativa durante un deslizamiento, sino más bien la aceleración de la excitación, la cual influye en el coeficiente de fricción cinético, de acuerdo con los resultados de Constantinou *et. al.* (1987) para una interfaz acero inoxidable – teflón, y los resultados de Méndez y Romo (2006) para una interfaz madera – madera.

Por otra parte, debe considerarse también que la condición de velocidad de deslizamiento constante difícilmente se obtendrá durante un evento sísmico en una interfaz friccionante. Es por ello que se propone modificar los modelos ya existentes (Andreaus y Casini y Constantinou *et. al.*) para que sean capaces de considerar la tasa de cambio de la velocidad, ya que de acuerdo con la teoría y los experimentos presentados en los capítulos 2 y 3, respectivamente, es la que domina el problema de la fricción cinética. Se propone conservar a la función exponencial como base matemática del modelo, ya que las deficiencias de los

modelos anteriores no radican en la función exponencial propiamente, sino en las restricciones algebraicas impuestas, ya que se usa solamente como un factor de peso para asignar valores entre dos límites preestablecidos (ver ecuaciones 4-1 y 4-2). En cambio, en el modelo de fricción propuesto en esta tesis se plantea utilizar a la función exponencial como un sumando en lugar de un factor, de tal manera que sea esa función la que controle la variación de la fricción cinética a partir del valor del coeficiente de fricción estático. A diferencia de los modelos ya existentes, la propuesta matemática desarrollada en esta tesis busca involucrar las no – linealidades inherentes al fenómeno de fricción en una forma indirecta, para facilitar el análisis de respuesta dinámica estructural. Las consideraciones son las siguientes:

- El coeficiente cinético depende del valor estático (condición inicial)
- El coeficiente cinético depende de la tasa de cambio de la velocidad de la excitación
- El coeficiente cinético depende de la tasa de decaimiento de la fricción de la interfaz de deslizamiento

Así, al hacer depender al coeficiente de fricción de la tasa de cambio de la velocidad de la excitación en lugar de la velocidad relativa, se obtiene una aproximación lineal al problema no lineal de la fricción cinética, ya que ésta no dependerá explícitamente del desplazamiento en la interfaz de deslizamiento.

De acuerdo con los resultados analíticos presentados en el capítulo 2, se sabe que el coeficiente de fricción cinético posee la forma

$$\mu(t) = \mu_s - \Delta\mu(t)$$

De acuerdo con esto y con las consideraciones anteriores, se propone la siguiente ecuación para la variación del coeficiente de fricción (Méndez *et. al.*, 2009):

$$\mu(t) = \mu_s - \exp\left(-\frac{\lambda}{g}\left|\frac{d}{dt}\dot{U}_g(t)\right|\right)^{-1} \quad (4-3)$$

donde  $\dot{U}_g(t)$  es la velocidad de la excitación del sistema y  $\lambda$  es una constante experimental que depende del material de la interfaz y las características de la excitación (frecuencia, amplitud, etc.).

En la ecuación (4-3), el efecto del deslizamiento relativo en la interfaz sobre el coeficiente de fricción cinética se toma en cuenta en forma aproximada mediante la constante de decaimiento,  $\lambda$ . De esta forma se evita la no – linealidad que se obtiene con otros modelos de fricción que dependen explícitamente de la velocidad relativa en la interfaz (*e.g.*, Andreaus y Casini, 2001; Constantinou *et. al.*, 1990).

#### 4.2 Verificación experimental

En esta sección se comparan las estimaciones experimentales del coeficiente de fricción (ecuación 2-17, capítulo 2) contra las predicciones del modelo propuesto (ecuación 4-3). El

valor del parámetro experimental  $\lambda$  de la ecuación 4-3 se obtiene minimizando el área bajo la curva error absoluto vs tiempo. La forma más sencilla de obtener a  $\lambda$  es hacerlo numéricamente, por lo que se desarrolló una rutina en FORTRAN que calcula su valor, el cual resultó igual a 2.00 para la interfaz geotextil – madera y 1.37 y 1.45 para la interfaz madera – madera. Esta última tuvo un exponente variable debido a la alteración espacial de la rugosidad de la superficie de madera. Sin embargo, la variación del exponente es pequeña, por lo que puede considerarse constante sin mayores implicaciones, como se verá en la sección 4.3.2.

El bloque sobre la interfaz geotextil – madera pudo deslizar tanto en sentido cuesta abajo como en sentido cuesta arriba del plano de deslizamiento, mientras que sobre la interfaz madera – madera deslizó principalmente en sentido cuesta abajo, mostrando sólo un ligero deslizamiento en el sentido cuesta arriba del plano, como puede apreciarse en la figura 3-11 por la diferencia en las aceleraciones bloque – plano (capítulo 3).

En la figura 4-3 se muestra la comparación entre los coeficientes de fricción medidos y calculados. Se observa que el modelo de fricción reproduce en forma general el comportamiento observado en los experimentos, aunque no logra reproducir los coeficientes de fricción mayores al estático.

Por otro lado, en la figura 4-3 se observa que las estimaciones experimentales del coeficiente de fricción se acercan al valor estático en el sentido cuesta arriba del deslizamiento. Esto se debe a que esas estimaciones se hicieron con la ecuación 2-17, la cual considera la aceleración relativa entre el bloque y el plano, y ésta es pequeña en el sentido cuesta arriba ya que la aceleración que se requiere para lograr que el bloque deslice cuesta arriba es mayor que la necesaria para que deslice cuesta abajo (debido a la aceleración del campo gravitacional). Sin embargo, en vista de que la ecuación 4-3 no considera la aceleración relativa, sino sólo la aceleración de la excitación, no se hace la diferencia entre el sentido cuesta arriba y el sentido cuesta abajo, por lo que se predicen coeficientes de fricción menores que los reales en el sentido cuesta arriba. Evidentemente, esta situación no se presenta cuando el plano de deslizamiento es horizontal.

En el caso de un análisis dinámico para calcular deslizamientos a lo largo de un plano inclinado, los coeficientes bajos en sentido cuesta arriba se compensan con los coeficientes mayores al estático en el sentido cuesta abajo, como se mostrará en la sección 4.3.2. Otra alternativa sería simplemente restringir los deslizamientos cuesta arriba, tal y como se hace convencionalmente (Newmark, 1963; 1965).

Es posible lograr que la ecuación 4-3 reproduzca coeficientes de fricción mayores al estático. Para ello se modifican los parámetros  $\mu_s$  y  $\lambda$  para obtener la ecuación siguiente:

$$\mu(t) = \left( \mu_s + \frac{\Delta\mu}{2} \right) - \exp \left( - \frac{\lambda'}{g} \left| \frac{d}{dt} \dot{U}_g(t) \right| \right)^{-1} \quad (4-4)$$

donde  $\Delta\mu$  es la diferencia entre el coeficiente de fricción máximo y el valor estático, como se muestra en la figura 4-4, y  $\lambda'$  es el nuevo valor del coeficiente  $\lambda$ , ajustado con el mismo criterio usado para el valor original. La figura 4-4 ilustra el efecto de las modificaciones a las ecuaciones de fricción.

Se opta por emplear sólo la mitad de  $\Delta\mu$  en lugar del valor completo, para evitar una excesiva disipación de energía en los cálculos numéricos en donde se emplee el modelo de fricción propuesto, y obtener de esta forma resultados conservadores. Se observa en la figura 4-4 que las modificaciones planteadas para la ecuación 4-3 son adecuadas para reproducir la variación del coeficiente de fricción conforme a los resultados experimentales.

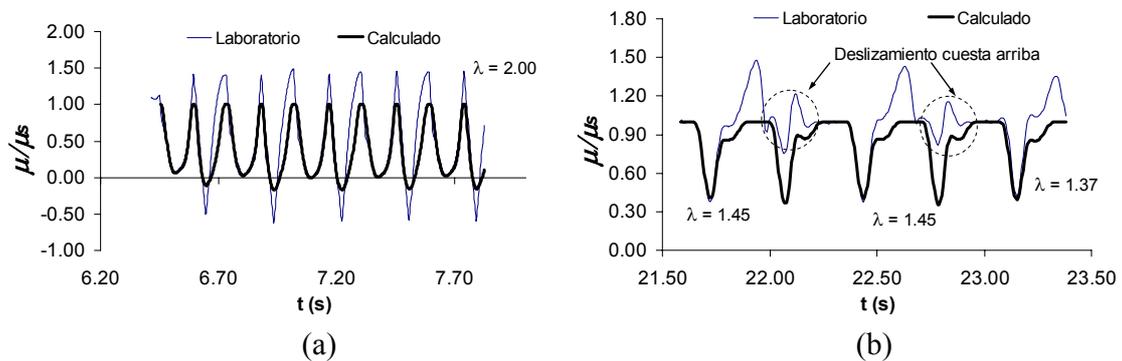


Figura 4-3. Coeficientes de fricción medidos y calculados para las interfaces (a) geotextil – madera y (b) madera – madera

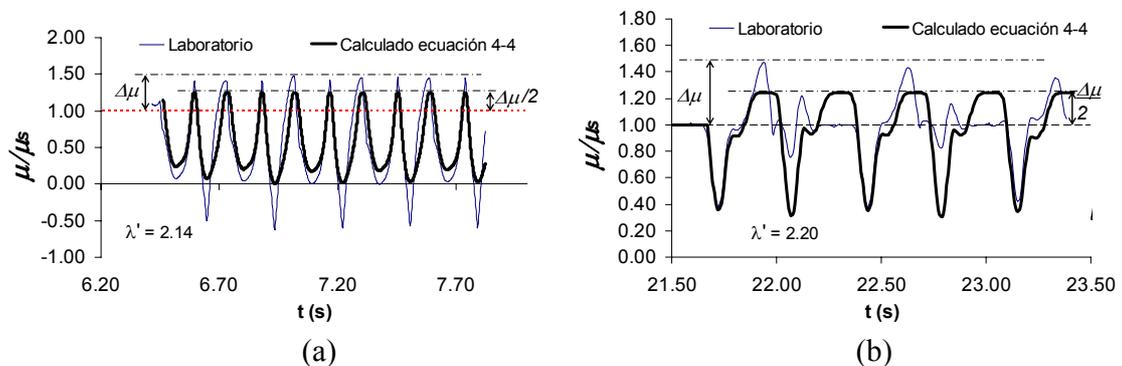


Figura 4-4. Coeficientes de fricción medidos y calculados con la ecuación 4-4 para las interfaces (a) geotextil – madera y (b) madera – madera

### 4.3 Validación en 3DEC

Los ensayos experimentales en mesa vibradora se simularon numéricamente con el código comercial 3DEC (Itasca, 1998), el cual es un programa numérico tridimensional que se basa en el método del elemento discreto (Cundall, 1971) para modelar medios discontinuos, mismos que se representan como un arreglo de bloques discretos. Las discontinuidades se tratan como condiciones de frontera entre bloques, los cuales pueden rotar libremente bajo la acción de las cargas impuestas, mientras que las discontinuidades pueden presentar

grandes desplazamientos debido a que el programa cuenta con una lógica de contactos que detecta en forma automática la creación y/o destrucción de los mismos (Cundall, 1988). Cada bloque puede comportarse como rígido o deformable. Los bloques deformables se subdividen en elementos de diferencias finitas de deformación constante (tetraedros), los cuales pueden responder con un comportamiento esfuerzo-deformación lineal o no lineal. La interacción entre los bloques se formula mediante relaciones esfuerzo – desplazamiento (lineal o no lineal) usando rigideces normal,  $K_n$ , y cortante,  $K_s$ , en cada uno de los contactos.

Las capacidades de 3DEC pueden extenderse mediante el lenguaje de programación integrado FISH. Este lenguaje permite al usuario definir nuevas funciones y variables en 3DEC, que se integran como parte del código y pueden utilizarse directamente en los cálculos. Se aprovechó esta característica de 3DEC para programar una subrutina en FISH que modele el coeficiente de fricción cinético de acuerdo con la ecuación 4-4. En la siguiente sección se describe someramente la forma en que el código utilizado modela el contacto entre bloques.

#### 4.3.1 Simulación numérica de las juntas en 3DEC

La interacción bloques – contactos en 3DEC se lleva a cabo considerando a las fuerzas resultantes de los contactos como fuerzas actuantes sobre los bloques en interacción. Los contactos se dividen en sub-contactos que llevan un registro de las fuerzas de interfaz entre los bloques, además de las condiciones de deslizamiento y separación. A cada sub-contacto se le asigna un área, lo que permite aplicar las relaciones constitutivas de las juntas, formuladas en términos de esfuerzos y desplazamientos. El desplazamiento relativo en cada sub-contacto se calcula como la diferencia en desplazamiento entre los sub-contactos en cada cara de los bloques en interacción. Los contactos se crean automáticamente conforme a la lógica de contactos provista en el código, la cual consiste en medir la distancia que existe entre las caras de los bloques respecto de un plano común (ficticio) que biseca la distancia entre bloques. Si esta distancia es menor que una cierta tolerancia, se crea automáticamente un contacto entre bloques, y se destruye o no se crea si la distancia es mayor. Este criterio sólo funciona para bloques convexos con caras planas (Itasca, 1998).

Las caras triangulares de los tetraedros (elementos de la malla de diferencias finitas) localizados en la superficie de los bloques en contacto, contienen un cierto número de nodos superficiales con tres grados de libertad. Por cada uno de estos nodos se forma un sub-contacto, cuya velocidad de desplazamiento se calcula mediante interpolación lineal ponderada de las velocidades de los tres vértices de la cara triangular asociada (Itasca, 1998).

La velocidad relativa en un sub-contacto,  $V_i$ , localizado entre dos bloques A y B, se calcula como la diferencia entre la velocidad del sub-contacto perteneciente al bloque A,  $V_i^A$ , y la velocidad del sub-contacto perteneciente al bloque B,  $V_i^B$ , según se observa en la ecuación 4-5.

$$V_i = V_i^A - V_i^B \quad (4-5)$$

Este valor se utiliza para calcular el incremento de desplazamiento relativo en cada sub-contacto,  $\Delta U_i$ :

$$\Delta U_i = V_i \Delta t \quad (4-6)$$

donde  $\Delta t$  es el paso de tiempo empleado en el análisis para la malla de diferencias finitas de cada problema.

El incremento de desplazamiento en los sub-contactos puede descomponerse en un componente normal,  $\Delta U_i^n$ , y otro tangencial,  $\Delta U_i^s$ , sobre el plano común entre bloques. Los incrementos de desplazamiento normal y tangencial de cada contacto se emplean para calcular los incrementos elásticos de las fuerzas normal y cortante a través de las rigideces del contacto. El incremento elástico en la fuerza normal es

$$\Delta F_i^n = -K_n \Delta U_i^n A_c \quad (4-7)$$

donde  $A_c$  es el área del sub-contacto.

El incremento elástico en la fuerza cortante es

$$\Delta F_i^s = -K_s \Delta U_i^s A_c \quad (4-8)$$

Con los incrementos en las fuerzas normal y cortante se actualizan los vectores de fuerza en cada subcontacto:

$$F_{i+1}^n = F_i^n + \Delta F_i^n \quad (4-9)$$

$$F_{i+1}^s = F_i^s + \Delta F_i^s \quad (4-10)$$

Estas fuerzas se ajustan de acuerdo con la ley constitutiva de los contactos, y se suman a las fuerzas existentes en cada uno de los tres nodos de las caras triangulares asociadas al sub-contacto, en forma ponderada, para representar la acción del bloque A sobre el bloque B.

El modelo constitutivo básico de junta incorporado en 3DEC es una generalización de la ley de fricción de Coulomb, como se ilustra en la figura 4-5. Se observa en esta figura que el comportamiento en el rango elástico está gobernado por la rigidez al corte de la interfaz (ecuación 4-8), y se incursiona en el rango plástico cuando se llega al esfuerzo cortante de falla de acuerdo con el criterio Mohr – Coulomb:

$$\tau_{falla} = C + \sigma \tan \phi \quad (4-11)$$

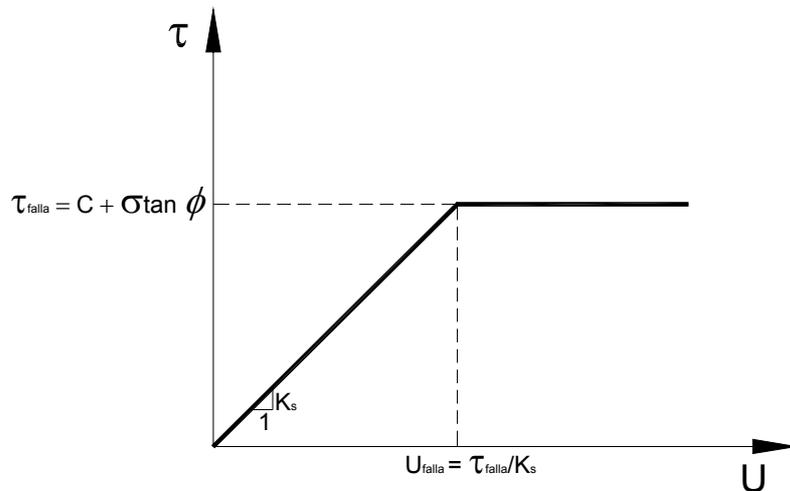


Figura 4-5. Esquema de comportamiento tipo Mohr – Coulomb en 3DEC

El modelo considera resistencia a la tensión y dilatación. Para una junta intacta (sin separación o deslizamiento previos), el esfuerzo normal de tensión se limita al valor de la resistencia a tensión,  $T$ , de la junta, mientras que el esfuerzo cortante máximo está dado por 4-11.

En el umbral de la falla, ya sea a tensión o a cortante, la resistencia a la tensión,  $T$  y la cohesión,  $C$  se llevan a cero. Este desplome instantáneo de la resistencia se utiliza en 3DEC para simular en forma aproximada el deterioro de la junta debido al desplazamiento. El valor de cero en  $C$  y  $T$  se mantiene una vez que el contacto ha deslizado, sin importar si este deja de hacerlo. Es posible modelar con mayor detalle la degradación por cortante en las juntas, ya que 3DEC cuenta con el modelo de fluencia continua (Cundall y Hart, 1984). Además, a través de FISH es posible implementar otros modelos constitutivos.

El modelo de comportamiento descrito en esta sección se utilizó para las simulaciones numéricas de los ensayos experimentales realizados en mesa vibradora para validar el modelo de fricción propuesto.

#### 4.3.2 Simulación numérica de los ensayos experimentales

Los ensayos experimentales se reprodujeron numéricamente simulando el plano de deslizamiento inclinado y el bloque deslizante, para las interfaces madera – madera y geotextil – madera. Los resultados de los experimentos correspondientes se encuentran en el capítulo 3.

Sólo se modelan los casos de fricción cinética sobre planos inclinados, ya que es la situación más general y de mayor interés para la aplicación del modelo de fricción a la geosísmica. El caso horizontal se aborda en la sección siguiente para la interfaz concreto – concreto. La figura 4-6 muestra la configuración de los modelos numéricos implementados en 3DEC para las interfaces consideradas.

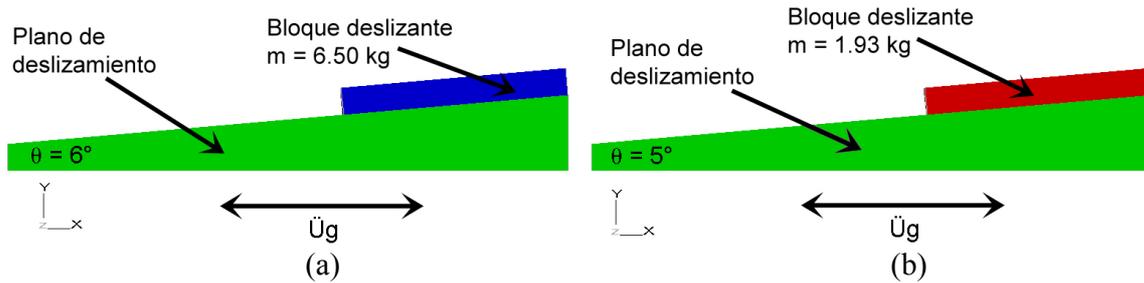


Figura 4-6. Modelos numéricos implementados en 3DEC para la interfaz (a) geotextil – madera y (b) madera – madera

Además de realizar simulaciones numéricas con el modelo de fricción propuesto, se llevaron a cabo análisis empleando la ley de fricción de Coulomb y el modelo que considera  $\mu_s = \mu_k$  (ecuación 1-3), usado ampliamente en la ingeniería práctica. Esto con el fin de averiguar qué tan adecuadamente modelan el fenómeno de fricción cada una de las leyes empleadas en el problema de un bloque rígido deslizando libremente sobre un plano inclinado. Para modelar el problema en el software elegido (3DEC), fue necesario determinar las rigideces normal y tangencial de la interfaz de deslizamiento. Para ello, se realizaron experimentos de deslizamiento que permitieron definir el valor de ambos parámetros. Los experimentos fueron similares a los presentados en el capítulo 3 para el caso estático, donde a un bloque rígido se le permitió deslizar libremente sobre un plano inclinado bajo la acción de la gravedad. Se realizó un experimento para cada una de las interfaces consideradas. La figura 4-7 muestra los resultados.

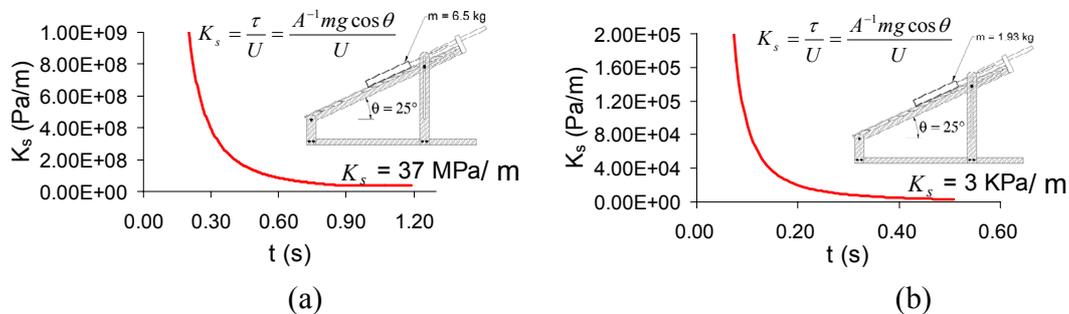


Figura 4-7. Pruebas estáticas para determinar las rigideces de los contactos (a) geotextil – madera y (b) madera – madera

En la figura 4-7  $\tau$  es el esfuerzo cortante en la interfaz,  $U$  el desplazamiento tangencial en la interfaz,  $A$  es el área de contacto y  $m$  la masa del bloque deslizando. Se observa en la figura 4-7 que la rigidez al corte en las interfaces varía con el desplazamiento, aunque tiende a estabilizarse al final de la prueba. El valor adoptado para las rigideces al corte es el correspondiente a la parte horizontal de las curvas experimentales, siendo éste 37 MPa/m para la interfaz geotextil – madera y 3 KPa/m para el caso madera – madera. Dado que no se conocía el valor de las rigideces normales de las interfaces, éstas se estimaron a partir de un análisis inverso de los ensayos de laboratorio simulados numéricamente, empleando los coeficientes de fricción estimados en laboratorio. La figura 4-8 muestra los resultados.

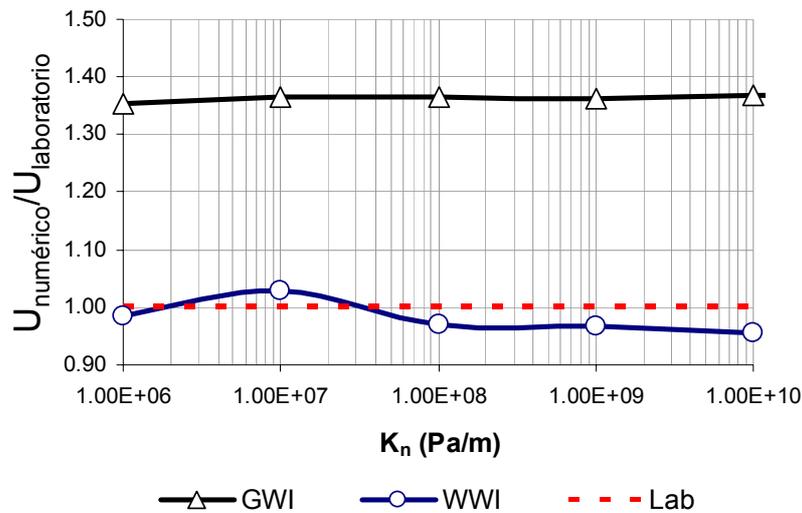


Figura 4-8. Desplazamientos relativos normalizados para diferentes valores de  $K_n$

Tabla 4-1. Parámetros empleados en las simulaciones numéricas

	Modelo propuesto		Ley de Coulomb		$\mu_k = \mu_s$	
	Madera - madera	Geotextil - madera	Geotextil - madera	Madera - madera	Geotextil - madera	Madera - madera
$\phi_s$	24.40°	21.279°	21.279°	24.4°	21.279°	24.40°
$\phi_k$	28% $\mu_s$ - 124% $\mu_s$ calculado con la ecuación 4-4	0.7% $\mu_s$ - 124% $\mu_s$ calculado con la ecuación 4-4	14.24° calculado con la ecuación 1-3	15.18° calculado con la ecuación 1-3	21.279°	24.40°
$\Delta\mu/2$	0.1735	0.0294	-	-	-	-
$K_n$	100 Mpa/m	100 Mpa/m	100 Mpa/m	100 Mpa/m	100 Mpa/m	100 Mpa/m
$K_s$	37 Mpa/m	3 Kpa/m	37 Mpa/m	3 Kpa/m	37 Mpa/m	3 Kpa/m
$\lambda'$	2.14	2.20	-	-	-	-
Masa	6.50 kg	1.93 kg	6.50 kg	1.93 kg	6.50 kg	1.93 kg

En la figura 4-8 se presenta el valor de  $K_n$  contra los desplazamientos relativos calculados, normalizados con los desplazamientos medidos al final de los ensayos experimentales. Se observa que  $K_n$  tiene poca influencia en los resultados obtenidos. El valor adoptado fue de 100 MPa/m para ambas interfaces.

Los valores empleados en cada uno de los casos analizados numéricamente se presentan en la tabla 4-1. Los ángulos de fricción cinética utilizados en la ley de fricción de Coulomb se obtuvieron a partir de la ecuación 1-3, comúnmente empleada en la práctica de la ingeniería sísmica para determinar  $\mu_k$ .

Los resultados de las simulaciones para cada una de las interfaces se presentan en la figura 4-9. Se observa que los resultados numéricos obtenidos empleando la hipótesis  $\mu_k = \mu_s$  arrojan resultados 3 y 4 veces menores respecto de las mediciones experimentales para las interfaces geotextil – madera y madera – madera, respectivamente. Por otro lado, al utilizar la ecuación 1-3 para calcular  $\mu_k$  y usarlo en la ley de fricción de Coulomb, los resultados

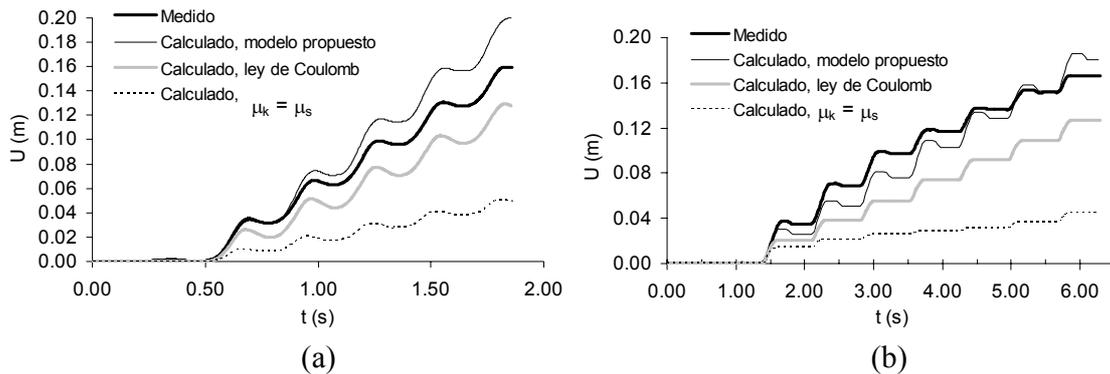


Figura 4-9. Desplazamientos medidos y calculados para las interfaces (a) geotextil – madera y (b) madera – madera

obtenidos son entre 25 y 30 % menores que las mediciones para las interfaces geotextil – madera y madera – madera, respectivamente.

Al utilizar el modelo propuesto para considerar la variación de la fricción durante todo el evento dinámico, se obtienen resultados más apegados a las mediciones experimentales, los cuales son 25 y 10 % mayores que éstas para las interfaces geotextil – madera y madera – madera, respectivamente. Estos resultados muestran que el modelo propuesto representa adecuadamente la física del problema de fricción entre bloques rígidos, y sugiere que la ecuación 1-3 es inadecuada para este propósito, debido a las sobre simplificaciones que implica (ver capítulos 1 y 2). Cabe recordar, que de acuerdo con lo mencionado en la sección 4.2, los coeficientes de fricción calculados en sentido cuesta arriba con la ecuación 4-4 son menores a las estimaciones experimentales. Es por ello que en la figura 4-9(b) se observa un deslizamiento cuesta arriba mayor al registrado en el experimento. Esto puede corregirse al restringir el desplazamiento en el sentido cuesta arriba, como se hace comúnmente en este tipo de análisis (Newmark, 1963; 1965), y como se hizo para los cálculos realizados con la ley de fricción de Coulomb, mostrados en la figura 4-9(b). A pesar de esta condición aplicada en el análisis con Coulomb, los desplazamientos calculados son inferiores a las mediciones experimentales. Esto muestra que esa ley de fricción no es apropiada para todos los problemas que involucren fricción cinética.

#### 4.4 Validación en FLAC3D

El modelo de fricción propuesto se implementó en FLAC3D (Itasca, 2005) para analizar su validez en una interfaz concreto – concreto, cuyos resultados experimentales se encuentran en el capítulo 3. El objetivo de implementar el modelo de fricción propuesto en un programa distinto a 3DEC (Itasca, 1998) es mostrar que su capacidad de representar el fenómeno de fricción cinética, se mantiene independientemente de la plataforma numérica que se utilice. Lo anterior se mostrará nuevamente en el capítulo 5, donde se presentan aplicaciones del modelo propuesto empleando programas desarrollados en FORTRAN.

El código comercial FLAC3D (Itasca, 2005) simula medios continuos mediante el método de diferencias finitas. El modelo de fricción se incluyó en el programa numérico a través de una rutina FISH, al igual que en el caso de 3DEC (Itasca, 1998). FLAC3D puede simular discontinuidades a través de elementos interfaz que se comportan en forma similar a la

descrita en la sección 4.3.1, aunque a diferencia de 3DEC, FLAC3D no cuenta con una lógica de contactos. El caso modelado en FLAC3D se muestra en la figura 4-10(a), donde se observa un bloque de concreto deslizando libremente sobre otro, conforme a la configuración experimental empleada para la interfaz concreto – concreto (figura 3-20, capítulo 3). Los parámetros de la ecuación 4-4 utilizados en las simulaciones numéricas son:  $\lambda' = 1.90$ ,  $\Delta\mu/2 = 0.2308$ ,  $\mu_s = 0.5692$ . El coeficiente de fricción estática se obtuvo de ensayos experimentales de plano inclinado tradicionales,  $\lambda'$  y  $\Delta\mu/2$  se obtuvieron conforme a los criterios descritos en la sección 4.2. En la figura 4-10(b) se presenta la comparación entre los coeficientes de fricción estimados del laboratorio contra los calculados con el modelo propuesto (ecuación 4-4). Según se observa en esta figura, para el caso de deslizamiento sobre un plano horizontal, no se presenta la diferencia en magnitud de los coeficientes calculados en uno y otro sentido del deslizamiento, como se observó para los casos inclinados de las secciones anteriores (figura 4-4)

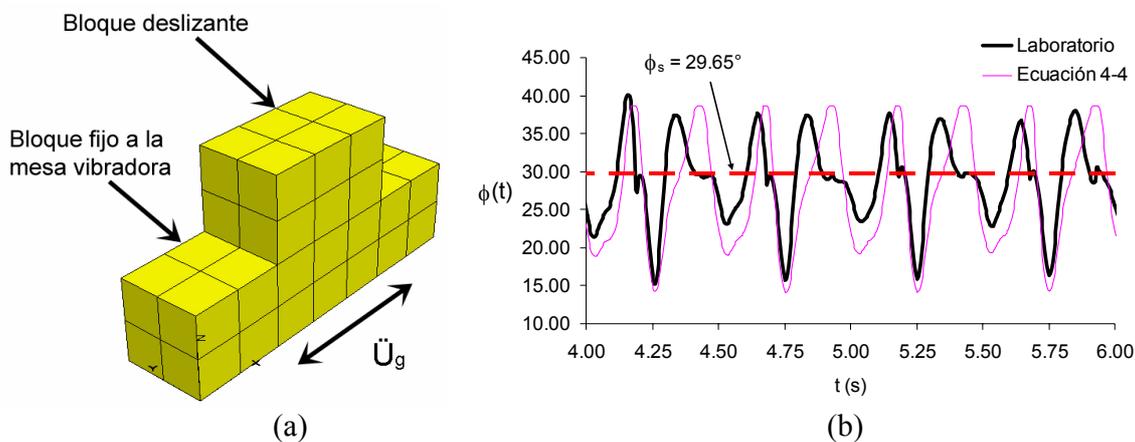


Figura 4-10. (a) Modelo numérico en FLAC3D del ensaye en la interfaz concreto – concreto, (b) comparación de coeficientes de fricción medido y calculado

En la figura 4-10(b) se observa que el modelo reproduce en forma general la variación del ángulo de fricción, aunque no tan apegado como en las interfaces madera – madera y geotextil – madera. Esto puede deberse a que el concreto es un material que se degrada con mayor facilidad respecto de las otras interfaces consideradas, por lo que las hipótesis del modelo de fricción propuesto no se cumplen completamente. Sin embargo, los resultados de la simulación numérica (figura 4-11) muestran que el modelo propuesto arroja resultados más apegados a las mediciones experimentales, respecto de los cálculos realizados considerando la ley de fricción de Coulomb y el caso de un solo coeficiente. La tabla 4-2 contiene los parámetros empleados en las simulaciones numéricas. El ángulo de fricción cinética empleado en la ley de Coulomb se obtuvo en forma convencional con la ecuación 1-3. El valor de  $K_s$  utilizado en los análisis fue 2 GPa/m, conforme a lo esperado para una interfaz concreto – concreto (Itasca, 1998). El valor de  $K_n$  se tomó igual al de  $K_s$ .

La figura 4-11 muestra los resultados de las simulaciones en FLAC3D. Según se observa en esta figura, los desplazamientos medidos son 290% mayores que los calculados considerando un solo coeficiente de fricción, y 250% mayores al usar la ley de fricción de Coulomb. El desplazamiento calculado en ambos casos (Coulomb y  $\mu_k = \mu_s$ ) es parecido,

aunque según se observa en la figura 4-11, el bloque de concreto presenta deslizamientos más amplios al usar Coulomb que al usar  $\mu_k = \mu_s$ . Por otro lado, al emplear el modelo propuesto para considerar la variación del coeficiente de fricción, se calculan desplazamientos 145% mayores que las mediciones experimentales. Esto indica que el modelo de fricción planteado no reproduce del todo el fenómeno para la interfaz concreto – concreto, aunque los resultados que arroja son conservadores, a diferencia de los modelos de fricción empleados comúnmente en los problemas que involucran fricción. De cualquier forma, los resultados muestran que los cálculos teóricos se acercan más a la realidad conforme se va incluyendo la variación de la fricción en los modelos: el resultado más alejado de las mediciones es el caso de fricción constante ( $\mu_k = \mu_s$ ). Luego, el caso de la ley de fricción de Coulomb, que considera una variación discontinua de la fricción ( $\mu_s, \mu_k$ ), se acerca un poco más a las mediciones respecto del caso previo, y finalmente el modelo propuesto que considera una variación completa de la fricción a lo largo de todo el deslizamiento arroja valores conservadores respecto de las mediciones.

Tabla 4-2. Parámetros empleados en las simulaciones numéricas

	Modelo propuesto	Ley de Coulomb	$\mu_k = \mu_s$
$\phi_s$	29.65°	29.65°	29.65°
$\phi_k$	46% $\mu_s$ - 130% $\mu_s$ calculado con la ecuación 4-4	22.00° calculado con la ecuación 1-3	29.65°
$\Delta\mu/2$	0.2308	-	-
$K_n$	2 Gpa/m	2 Gpa/m	2 Gpa/m
$K_s$	2 Gpa/m	2 Gpa/m	2 Gpa/m
$\lambda'$	1.90	-	-
Masa	1.557 kg	1.557 kg	1.557 kg

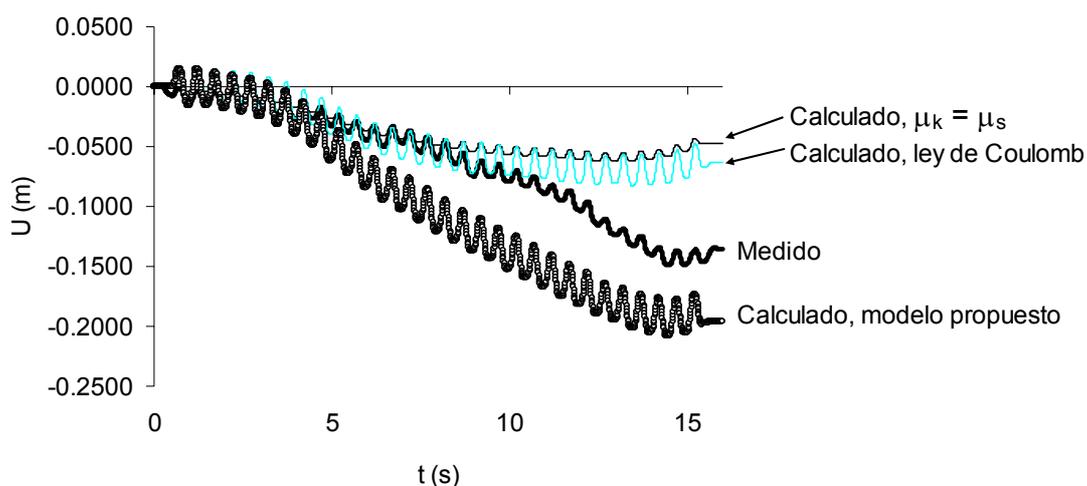


Figura 4-11. Desplazamientos medidos y calculados para la interfaz concreto – concreto

## 5 Aplicaciones del modelo propuesto

Una vez validado el modelo de fricción propuesto, se desarrolla un criterio que permite predecir si el deslizamiento en una interfaz friccionante será continuo o intermitente, bajo una aceleración armónica. El criterio se basa en la variación teórica del coeficiente de fricción (ecuación 2-17), obtenida en el capítulo 2. Posteriormente se desarrollan dos procedimientos para el análisis dinámico de estructuras deslizantes. Se presenta además un ejemplo de aplicación que ilustra el potencial de aplicación del modelo de fricción planteado, y finalmente se dan algunas recomendaciones para la aplicación práctica del modelo a problemas de ingeniería.

El primer procedimiento desarrollado se trata de una modificación al método de Newmark (1963, 1965), ampliamente utilizado en la práctica de la ingeniería para estimar la estabilidad sísmica por desempeño de taludes y terraplenes. La modificación consiste en incluir el modelo de fricción propuesto para tomar en cuenta aspectos relevantes del comportamiento dinámico de un bloque rígido deslizando, como por ejemplo la aceleración en exceso del valor de fluencia, y mejorar de esta forma la capacidad de predicción del método. El segundo procedimiento planteado es un método desacoplado para el análisis dinámico de estructuras flexibles deslizantes. El método se basa en utilizar el modelo de fricción propuesto para calcular la respuesta de la base de la estructura, y una vez obtenida utilizarla como entrada para un análisis dinámico de ésta. El método es sencillo de aplicar y arroja resultados confiables, según lo demuestran las comparaciones realizadas contra ensayos de laboratorio en mesa vibradora.

Se muestra también un caso hipotético de una cortina de concreto fracturada, sujeta a la acción de un sismo. En este caso el objetivo es ilustrar la aplicación del modelo de fricción a problemas de análisis numérico, y comparar los resultados con los modelos convencionales para hacer notar que su uso no es necesariamente una posición conservadora, ya que el modelar la variación de la fricción durante un evento sísmico conduce a mayores desplazamientos respecto de los enfoques tradicionales.

Finalmente, se dan algunos lineamientos para la aplicación práctica del modelo de fricción desarrollado, donde el coeficiente  $\lambda$  de la ley de fricción se establece a partir del tipo de deslizamiento de la interfaz y de la excitación actuante.

### *5.1 Criterio para estimar el tipo de deslizamiento en una interfaz friccionante*

De acuerdo con los resultados de los ensayos experimentales presentados en el capítulo 3, una interfaz friccionante puede responder en deslizamiento intermitente (stick – slip), como el caso de la interfaz madera – madera y concreto – concreto, o en deslizamiento continuo, como la interfaz geotextil – madera. El deslizamiento continuo también se ha observado en interfaces acero inoxidable – teflón, de acuerdo con los resultados de Constantinou *et. al.* (1987).

Conforme a la variación teórica del coeficiente de fricción para el caso inclinado (ecuación 2-17), el deslizamiento continuo se presenta cuando  $\mu$  llega a ser cero:

$$\mu(t) = (\tan \phi_s - \tan \theta) - \frac{(\|\ddot{U}_g\| - \|\ddot{U}\|) \cos \theta - g \sin \theta}{g \cos \theta + |\ddot{U}_g| \sin(\theta) \operatorname{sgn} \ddot{U}_g} = 0$$

Tomando en cuenta que  $\frac{N}{m \cos \theta} = g + \|\ddot{U}_g(t)\| \tan \theta \operatorname{sgn} \ddot{U}_g(t)$ , la ecuación anterior puede escribirse como

$$(\tan \phi_s - \tan \theta) - \frac{(\|\ddot{U}_g\| - \|\ddot{U}\|) \cos \theta - g \sin \theta}{Nm^{-1}} = 0$$

De la ecuación anterior es posible despejar la aceleración de la excitación,  $\ddot{U}_g$ , que lleva a cero el coeficiente de fricción:

$$\ddot{U}_g = \ddot{U} + g \tan \theta + \frac{N}{m \cos \theta} (\mu_s - \tan \theta)$$

Al despreciar el deslizamiento en sentido cuesta arriba del plano, el término  $\frac{N}{m \cos \theta}$  se reescribe como  $g + \ddot{U}_g \tan \theta$ . Por otro lado, considerando que durante el deslizamiento la aceleración del bloque se aproxima al valor de fluencia, es posible simplificar la ecuación anterior haciendo  $\ddot{U} = \ddot{U}_y$ :

$$(\ddot{U}_g)_{lim} = \frac{\ddot{U}_y + g\mu_s}{1 - \tan \theta (\mu_s - \tan \theta)} \quad (5-1)$$

La ecuación 5-1 permite calcular un valor aproximado de la aceleración de la excitación que lleva el coeficiente de fricción a cero, y por lo tanto a un deslizamiento continuo, bajo una excitación armónica. Si la señal de aceleración no es armónica, entonces el deslizamiento tendrá tendencia a ser continuo, dependiendo de la duración del pulso de aceleración de magnitud  $(\ddot{U}_g)_{lim}$ .

La ecuación 5-1 es función de la aceleración de fluencia, del coeficiente de fricción estática y del ángulo de inclinación del plano de deslizamiento. En el caso horizontal,  $\theta = 0$ , la ecuación 5-1 se simplifica:

$$(\ddot{U}_g)_{lim} = \ddot{U}_y + g\mu_s \quad (5-2)$$

Entonces, de acuerdo con lo anterior, una interfaz friccionante tendrá un deslizamiento intermitente si se cumple la condición

$$(\ddot{U}_g)_{lim} > (\ddot{U}_g)_{m\acute{a}x}$$

El deslizamiento será continuo si se cumple

$$(\ddot{U}_g)_{lim} < (\ddot{U}_g)_{m\acute{a}x}$$

donde  $(\ddot{U}_g)_{m\acute{a}x}$  es la aceleración máxima de la excitación.

Para verificar las predicciones del criterio anterior, se compararon los valores de  $(\ddot{U}_g)_{lim}$  contra los resultados experimentales para las interfaces madera – madera, geotextil – madera y concreto – concreto, así como para una interfaz geotextil – geomembrana ensayada por Yegian y Lahlaf (1992) y una interfaz acero inoxidable – teflón ensayada por Constantinou *et. al.* (1987). La tabla 5-1 muestra los resultados de la comparación.

Tabla 5-1. Parámetros empleados en las ecuaciones 5-1 y 5-2 para estimar el tipo de deslizamiento en algunas interfaces

Interfaz	Fuente	$\ddot{U}_y$ (m/s <sup>2</sup> )	$\theta$	$\mu_s$	$(\ddot{U}_g)_{lim}$ (m/s <sup>2</sup> )	$(\ddot{U}_g)_{m\acute{a}x}$ (m/s <sup>2</sup> )	Deslizamiento
Madera - madera	Laboratorio	1.45	5.00	0.39	5.41	4.91	intermitente
Geotextil - madera	Laboratorio	0.08	6.00	0.45	4.70	4.91	continuo
Concreto - concreto	Laboratorio	3.92	0.00	0.57	9.51	7.36	intermitente
Geotextil - geomembrana	Yegian and Lahlaf, 1992	1.81	0.00	0.189	3.67	3.92	continuo
Acero inoxidable - teflón	Constantinou <i>et. al.</i> , 1987	0.78	0.00	0.080	1.57	0.81	intermitente

Según se aprecia en la tabla 5-1, el criterio propuesto predice que de las interfaces ensayadas en esta investigación, sólo la interfaz geotextil – madera tendrá un deslizamiento continuo, y las otras dos responderán en forma intermitente. Estos resultados concuerdan con las observaciones experimentales (capítulo 3), donde efectivamente sólo la interfaz geotextil – madera mostró un comportamiento de deslizamiento continuo. Sin embargo, las predicciones para la interfaz geotextil – geomembrana ensayada por Yegian y Lahlaf (1992) dicen que el comportamiento será tipo continuo, cuando en realidad fue intermitente. Según se observa en la tabla 5-1, la diferencia entre  $(\ddot{U}_g)_{lim}$  y  $(\ddot{U}_g)_{m\acute{a}x}$  es pequeña, por lo que en realidad el deslizamiento se encuentra en el límite entre continuo e intermitente. Para esta interfaz en particular, la divergencia entre la predicción y la realidad se encuentra en el hecho de que en las ecuaciones 5-1 y 5-2 se hizo la simplificación de que la aceleración de respuesta del bloque es igual a la aceleración de fluencia, aunque de acuerdo con evidencia experimental presentada en esta tesis y también por algunos otros autores (*e.g.*, Constantinou *et. al.*, 1987; Yegian y Lahlaf, 1992; Yegian y Kadakal, 2004), esto no es así. Para mostrar que la diferencia entre el diagnóstico del tipo de deslizamiento contra la realidad se debe a esta causa, se utilizó la aceleración real de respuesta del bloque del experimento de Yegian y Lahlaf (1992), 2.26 m/s<sup>2</sup>, en lugar del valor de  $\ddot{U}_y$ . El

resultado es  $(\ddot{U}_g)_{lim} = 4.11 \text{ m/s}^2 > (\ddot{U}_g)_{m\acute{a}x} = 3.92 \text{ m/s}^2$ , por lo que el tipo de deslizamiento es intermitente y no continuo.

Para el caso de la interfaz acero inoxidable – teflón, se predice un comportamiento intermitente, aunque de acuerdo con Constantinou *et. al.* (1987), el deslizamiento fue continuo sin importar cuán pequeña fuera la aceleración de la excitación. En esta interfaz, aún corrigiendo el valor de la aceleración de respuesta del bloque como en el caso de la interfaz geotextil – geomembrana, la aceleración de la excitación requerida para lograr un deslizamiento continuo es 80% mayor que la aplicada por Constantinou *et. al.*, por lo que para esta interfaz, el criterio de deslizamiento no arroja resultados acordes con la realidad. Esto pudiera atribuirse a varias causas, entre ellas errores en la estimación del coeficiente de fricción estática, ya que al ser tan bajo es difícil de evaluar y por lo tanto induce errores en las estimaciones del tipo de deslizamiento. Otra posibilidad es que se presenten fuerzas adicionales a las consideradas en la derivación de las ecuaciones 5-1 y 5-2, como por ejemplo fuerzas de origen electromagnético que se generen debido al roce del teflón con el acero, lo cual puede producir estática en la interfaz y generar comportamientos erráticos.

De acuerdo con las comparaciones entre la teoría y los resultados experimentales, el criterio propuesto parece ser adecuado para estimar el tipo de deslizamiento (intermitente o continuo) en una interfaz deslizante (formada por materiales electromagnéticamente inertes) sujeta a una aceleración en particular. Se deben realizar más experimentos con diversos tipos de materiales para establecer con mayor precisión los límites del criterio propuesto. Por otra parte, existe un antecedente sobre un criterio que predice si el deslizamiento en una interfaz será continuo o intermitente (Younis y Tadjbakhsh, 1984). Sin embargo, éste se aplica solo para excitaciones armónicas definidas en términos de velocidad y de la forma  $\dot{U}_g = v_0 \cos \omega t$ . El criterio establece que el deslizamiento de una interfaz sujeta a una excitación armónica tipo coseno, será continuo si su coeficiente de fricción es menor que un coeficiente crítico,  $\mu_{cr}$ , dado por

$$\mu_{cr} = \frac{2v_0\omega}{g\sqrt{4 + \pi^2}} \approx 0.53703 \frac{v_0\omega}{g}$$

Este valor se obtuvo considerando la ecuación de movimiento de un par de bloques rígidos moviéndose uno encima del otro, considerando una interfaz sujeta a la ley de fricción de Coulomb.

Los experimentos realizados por Constantinou *et. al.* (1987) se llevaron a cabo con señales armónicas tipo coseno, por lo que pudieron probar si el criterio de Younis y Tadjbakhsh (1984) predecía un deslizamiento continuo como el observado en el laboratorio para la interfaz acero inoxidable – teflón. Los cálculos con la ecuación de Younis y Tadjbakhsh predecían un deslizamiento intermitente, al igual que el criterio propuesto en esta tesis. Las causas de la discrepancia pueden deberse a la naturaleza constante del coeficiente de fricción asumido por Younis y Tadjbakhsh (conforme a la ley de fricción de Coulomb), además de las razones expuestas anteriormente sobre los efectos electrostáticos en los materiales de la interfaz.

### 5.2 Método de Newmark modificado

El método de Newmark (1963, 1965) se ha utilizado ampliamente en la ingeniería práctica para evaluar el desempeño de taludes y terraplenes sujetos a sismos. Sin embargo, desde su publicación en los sesentas, se ha señalado que el método plantea hipótesis simplificadoras que hacen dudosa su aplicación a muchos problemas de ingeniería reales. Es por ello que se han realizado numerosos estudios enfocados a mejorar el método para que pueda utilizarse con mayor confiabilidad en problemas geo-sísmicos. La mayoría de estos estudios se han orientado a aspectos relacionados con la flexibilidad del cuerpo deslizante (*e.g.*, Seed y Martin, 1966; Kramer, 1997), el comportamiento intermitente del deslizamiento (*e.g.*, Rathje y Bray, 2000; Botero y Romo, 2003), el comportamiento no lineal del cuerpo deslizante (*op. cit.*), etc. Algunos otros se han avocado a estudiar detalladamente el coeficiente de fricción en la interfaz para utilizar la ley de fricción de Coulomb en sus análisis (*e.g.*, Chaudhuri y Hutchinson, 2005; Kafali *et. al.*, 2007). También se han realizado investigaciones para determinar con precisión la aceleración de fluencia en materiales granulares (Seed y Goodman, 1964), para incluir el deterioro del ángulo de fricción estática con el desplazamiento (Goodman y Seed, 1966), la influencia de la aceleración transversal al movimiento del bloque (Elms, 2000), de la aceleración vertical (Elms, 2000; Ling, 2001), entre muchas otras modificaciones al método.

A pesar de todas las modificaciones y mejoras planteadas para hacer el método de Newmark más versátil, aún es posible mejorarlo al analizar detenidamente el fenómeno dinámico que se desarrolla en la interfaz de deslizamiento bloque – plano. Para ello se emplea el modelo de fricción propuesto, de tal forma que permita mejorar la hipótesis de comportamiento rígido – plástico perfecto que asume el método original. En esencia, las hipótesis del método de Newmark (1963; 1965) son las siguientes:

- a) El material en la interfaz de deslizamiento se comporta en forma rígida – plástica
- b) El deslizamiento ocurre sobre una superficie definida
- c) La degradación de la resistencia del material de la interfaz debido al deslizamiento no es significativa (implica aceleración de fluencia constante)

En esta tesis, la modificación propuesta al método de Newmark se enfoca en la hipótesis del inciso (a). Esta hipótesis acompaña la suposición de que la aceleración de respuesta del bloque deslizante sea igual a la aceleración de fluencia durante todo el episodio de deslizamiento. Sin embargo, de acuerdo con la evidencia experimental presentada en el capítulo 3, esta suposición no es correcta (al menos no en todos los materiales, como los estudiados aquí). Otros investigadores han aportado evidencia experimental en el mismo sentido (Constantinou *et. al.*, 1987; Yegian y Lahlaf, 1992; Yegian y Kadakal, 2004), para materiales distintos a los estudiados en este trabajo. Conforme con la evidencia experimental, la aceleración de respuesta del bloque deslizante tiende a aumentar una vez comenzado el deslizamiento, en lugar de permanecer constante como se supone comúnmente durante la aplicación del Método de Newmark. De acuerdo con el análisis teórico del coeficiente de fricción, mostrado en el capítulo 2 (sección 2.2), esto se debe a la variación paulatina del coeficiente de fricción. La diferencia entre la aceleración de fluencia y la aceleración real del bloque deslizante es determinante para el cálculo de los desplazamientos permanentes, como se mostrará más adelante.

Se incluye una segunda modificación al Método de Newmark, en lo que respecta a la disipación de la velocidad relativa en la interfaz. Originalmente el método utiliza el coeficiente de fluencia ( $K_y = \ddot{U}_y / g$ ) para ese fin. La modificación planteada propone utilizar un coeficiente de atenuación distinto,  $K_d$ , obtenido con base en la aceleración máxima del bloque, calculada de acuerdo con el modelo de fricción propuesto:

$$K_d = \ddot{U}_{m\acute{a}x} / g.$$

Cabe mencionar que el método original de Newmark no considera la posibilidad de un deslizamiento del tipo continuo, como el observado en la interfaz geotextil – madera. Esto se debe probablemente, a que el método fue formulado originalmente para usarse en geomateriales, en donde es difícil que se presente un deslizamiento de este tipo. Sin embargo, el método puede aplicarse a otro tipo de interfaces, en donde el deslizamiento continuo pudiera presentarse, dependiendo el tipo de material. El tipo de deslizamiento puede determinarse con el criterio propuesto en la sección anterior. Si éste es del tipo continuo, el coeficiente de atenuación,  $K_d$ , se asume igual al coeficiente de fricción estática, y no igual a  $K_y$  (propuesta original del método), ni tampoco a  $\ddot{U}_{m\acute{a}x} / g$ . Esto se debe a que en un deslizamiento continuo, la aceleración de fluencia es muy baja, al igual que la aceleración máxima del bloque, y usar un coeficiente de atenuación con base en esos valores lleva a desplazamientos excesivos, como se muestra más adelante con resultados experimentales y numéricos.

Además de las modificaciones planteadas, se incluirá la propuesta de Goodman y Seed (1966) para modificar la aceleración de fluencia conforme al deslizamiento. Esto se hace en forma sencilla al tomar los valores de  $\ddot{U}_y$  en cada ciclo de deslizamiento directamente de las mediciones experimentales. Los resultados muestran que para lograr cálculos más apegados a los registros de laboratorio, no basta con incluir la variación de  $\ddot{U}_y$  durante la excitación, sino que además se deben considerar las modificaciones propuestas al método de Newmark, ya que mejoran sustancialmente las predicciones.

### 5.2.1 Implementación de las modificaciones

De acuerdo con el método de Newmark, la aceleración del bloque en movimiento durante un episodio de deslizamiento es igual a la aceleración de fluencia,  $\ddot{U}_y$  (Newmark, 1963, 1965), como se muestra en la figura 5-1. En esta figura se muestran también las aceleraciones de la excitación,  $\ddot{U}_g$ , y de respuesta,  $\ddot{U}$ , registradas experimentalmente durante uno de los ensayos realizados en la interfaz madera – madera sobre un plano de deslizamiento horizontal. Se presentan los resultados del plano horizontal sólo con fines ilustrativos, ya que la diferencia entre la aceleración de fluencia y la máxima registrada es muy notoria. Esta diferencia es menor en los casos inclinados, aunque lo suficiente como para influir significativamente en los desplazamientos al final de la excitación, según se mostrará más adelante.

Se observa en la figura 5-1, que una vez comenzado el deslizamiento en  $t_1$ , la aceleración del bloque sigue aumentando hasta alcanzar un máximo en  $t_2$ , donde permanece prácticamente constante. En  $t_3$  la aceleración del bloque y la excitación son iguales. Sin embargo, el deslizamiento no cesa y la aceleración del bloque permanece relativamente sin cambio alguno hasta llegar a  $t_4$ , donde comienza a decrecer hasta acoplarse a la aceleración

de la excitación en  $t_5$ . La zona sombreada antes de  $t_3$ , zona A, corresponde al inicio del deslizamiento, y es donde se logra la aceleración máxima. La zona B, donde la aceleración del bloque sobrepasa la de la excitación, se le llamará (en este trabajo) zona cinética, conforme a la aceleración cinética planteada por Botero (2004).

Las modificaciones planteadas para el método de Newmark se enfocan en ambas zonas. Para la zona A se calcula  $\ddot{U}_{m\acute{a}x}$ , y la zona B se simula atenuando la velocidad relativa desde  $t_3$  hasta  $t_5$ , pero considerando un coeficiente de atenuación distinto a  $K_y$ .

Para calcular la aceleración del bloque, se despeja  $\ddot{U}(t)$  de la ecuación 2-17:

$$\ddot{U}(t) = \left[ \|\ddot{U}_g(t)\| - \frac{N}{m \cos \theta} (\mu_s - \mu(t) - \tan \theta) - g \tan \theta \right] \text{sgn} \ddot{U}_g(t) \quad (5-3)$$

Recordando que,

$$\frac{N}{m \cos \theta} = g + \|\ddot{U}_g(t)\| \tan \theta \text{sgn} \ddot{U}_g(t) \quad (5-4)$$

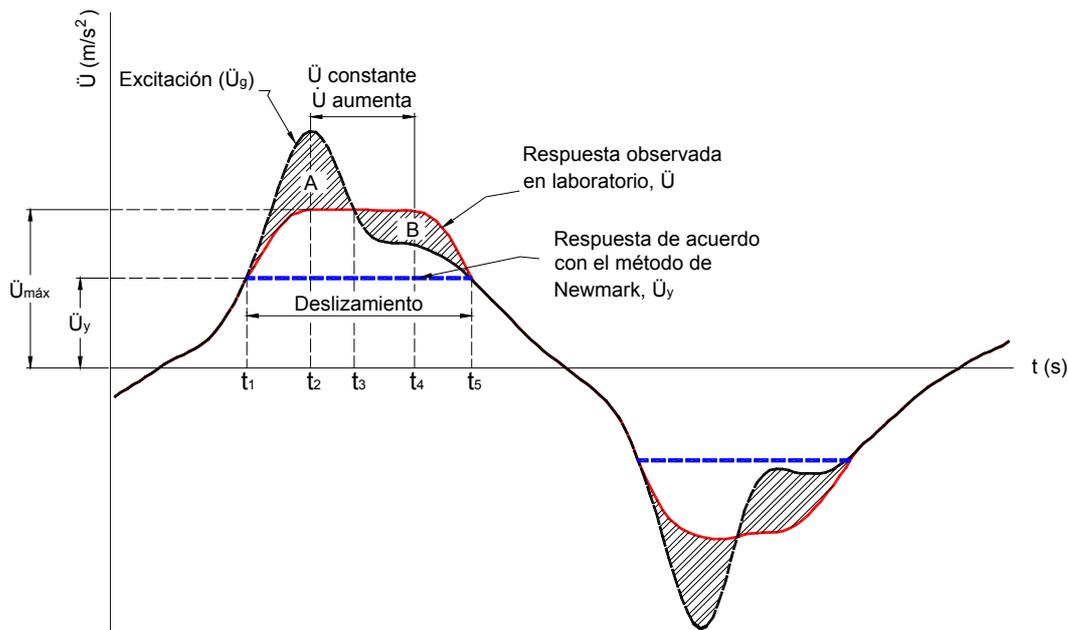


Figura 5-1. Ciclo de deslizamiento ilustrativo del comportamiento observado en el laboratorio, junto con la respuesta asumida conforme al método de Newmark

La ecuación 5-3 es útil para calcular la aceleración de respuesta del bloque durante toda la duración de la excitación, tanto en sentido cuesta abajo,  $\ddot{U}_g > 0$ , como en sentido cuesta arriba,  $\ddot{U}_g < 0$ . Sin embargo, el método de Newmark sólo considera el deslizamiento del bloque en sentido cuesta abajo, por lo que la ecuación 5-3 debe modificarse para calcular la aceleración del bloque en ese sentido y solamente en el tramo de  $t_1$  a  $t_3$ :

$$\begin{aligned} \ddot{U}_N(t) &= \ddot{U}_g(t) - \ddot{U}_g(t) \cdot H[\ddot{U}_g(t) - \ddot{U}_y] \\ &+ \left[ \ddot{U}_g(t) - \frac{N}{m \cos \theta} (\mu_y - \mu(t) - \tan \theta) - g \tan \theta \right] \cdot H[\ddot{U}_g(t) - \ddot{U}_y] \end{aligned} \quad (5-5)$$

$\ddot{U}_N(t)$  es la aceleración de respuesta del bloque para utilizar en el método de Newmark modificado y  $\mu(t)$  se calcula con el modelo propuesto, conforme a la ecuación 4-3 modificada:

$$\mu(t) = \mu_s - \exp\left(-\frac{\lambda}{g} \left| \frac{d}{dt} \dot{U}_g(t) \right| \right)^{-1} \cdot H[\ddot{U}_g(t) - \ddot{U}_y] \quad (5-6)$$

El parámetro  $\lambda$  se evalúa con los mismos criterios mencionados en el capítulo 4. En las ecuaciones 5-5 y 5-6,  $H$  es la función escalón unitario:

$$H = \begin{cases} \ddot{U}_g(t) - \ddot{U}_y \leq 0 & , \quad 0 \\ \ddot{U}_g(t) - \ddot{U}_y > 0 & , \quad 1 \end{cases}$$

Debido a que la aceleración del bloque sólo se calcula en el tramo de  $t_1$  a  $t_3$ , no es necesario emplear la ecuación 4-4, ya que sólo interesa calcular el inicio del deslizamiento, para lo cual la ecuación 4-3 es suficiente, en su forma modificada como se presenta en la ecuación 5-6.

Respecto de la atenuación de la velocidad relativa entre el bloque y el plano de deslizamiento, lo cual se lleva a cabo a partir de  $t_3$  hasta llegar a  $\dot{U}_{rel} = 0$ , el método de Newmark original considera lo siguiente:

$$\left( \dot{U}_{rel} \right)_i = \left( \dot{U}_{rel} \right)_{i-1} - gK_y \Delta t \quad (5-7)$$

La modificación propuesta en este aspecto para deslizamientos intermitentes (enfoque original del método de Newmark) propone utilizar un coeficiente de atenuación obtenido a partir de la aceleración máxima del bloque:  $K_d = \ddot{U}_{m\acute{a}x} / g$ . De acuerdo con esto, la ecuación 5-7 se reescribe como

$$\left( \dot{U}_{rel} \right)_i = \left( \dot{U}_{rel} \right)_{i-1} - gK_d \Delta t \quad (5-8)$$

Para deslizamientos continuos, el coeficiente de atenuación se propone igual al coeficiente de fricción estático. Este tipo de deslizamiento no fue considerado inicialmente en el método de Newmark, pero puede analizarse haciendo la hipótesis  $K_d = \mu_s$ .

En resumen, el procedimiento del método de Newmark modificado es el que se enuncia enseguida.

1. Estimar el tipo de deslizamiento con la ecuación 5-1
2. Calcular la aceleración de fluencia
3. Aplicar las ecuaciones 5-5 y 5-6 para calcular la aceleración de respuesta del bloque en el tramo  $t_1 - t_3$  en cada ciclo de deslizamiento
4. Calcular la aceleración relativa utilizando las aceleraciones calculadas en el inciso anterior, en el tramo  $t_1 - t_3$  en cada ciclo de deslizamiento
5. Integrar las aceleraciones relativas para calcular las velocidades relativas en el tramo  $t_1 - t_3$  en cada ciclo de deslizamiento
6. Estimar el coeficiente de atenuación de la velocidad relativa,  $K_d$ , para cada ciclo de deslizamiento, conforme el tipo de deslizamiento esperado
7. Atenuar la velocidad relativa máxima, obtenida en el inciso anterior, conforme a la ecuación 5-8
8. Una vez calculada la historia completa de velocidades relativas, integrarla para obtener los desplazamientos relativos

### 5.2.2 Resultados

Se presentan resultados obtenidos con el método de Newmark modificado, conforme a lo expuesto en la sección anterior. Los casos analizados corresponden a las interfaces madera – madera y geotextil – madera, para deslizamiento intermitente y continuo, respectivamente. La tabla 5-2 contiene los detalles de los análisis realizados para la interfaz madera – madera con el método modificado. Se observa que la aceleración de fluencia varió en cada ciclo de deslizamiento. El valor se obtuvo directamente de las observaciones experimentales. El coeficiente del modelo de fricción propuesto,  $\lambda$ , también varió para cada ciclo de deslizamiento, y se obtuvo conforme al criterio expuesto en el capítulo 4. Con base en estos parámetros se utilizó la ecuación 5-6 para obtener las series de coeficientes de fricción durante cada ciclo de deslizamiento, y posteriormente utilizarlas en la ecuación 5-5 para calcular la aceleración máxima y el coeficiente de atenuación para la velocidad relativa.

Tabla 5-2. Parámetros empleados en los análisis de la interfaz madera – madera con el método modificado

Ciclo	$K_y$	$\ddot{U}_y$ ( $m/s^2$ )	$\lambda$	$\ddot{U}_{m\acute{a}x}$ ( $m/s^2$ )	$K_d$
1	0.16	1.57	1.53	2.19	0.22
2	0.12	1.22	1.56	2.10	0.21
3	0.16	1.57	1.56	2.10	0.21
4	0.22	2.15	1.45	2.38	0.24
5	0.20	1.93	1.45	2.38	0.24
6	0.22	2.16	1.37	2.57	0.26
7	0.22	2.16	1.48	2.31	0.24

Para el caso de la interfaz geotextil – madera, el deslizamiento fue continuo y los parámetros empleados permanecieron constantes durante la duración de toda la prueba:  $\ddot{U}_y = 0.08 \text{ m/s}^2$ ,  $\lambda = 2.00$ ,  $K_d = \mu_s = 0.389$ .

Los resultados obtenidos con el método modificado para ambas interfaces se compararon contra las predicciones del método original, y a su vez contra las mediciones experimentales. Los cálculos realizados con el método original también consideraron la variación de la aceleración de fluencia, como se ilustra en la tabla 5-3 donde se encuentran los parámetros empleados en los cálculos con el método original para la interfaz madera – madera. Por otra parte, los parámetros utilizados para la interfaz geotextil – madera fueron:  $\ddot{U}_y = 0.08 \text{ m/s}^2$ ,  $\lambda = -$  (no aplica),  $K_d = \mu_s = 0.389$ .

El método de Newmark modificado se programó en FORTRAN para realizar los cálculos correspondientes a cada caso. El método tradicional también se implementó en el programa realizado.

La figura 5-2 presenta los resultados de los cálculos numéricos. Según se observa en esa figura, las modificaciones al método de Newmark mejoran sustancialmente su desempeño, lo cual es indicativo de la importancia de considerar la variación del coeficiente de fricción en los cálculos numéricos. Para la interfaz madera – madera, el método original calcula desplazamientos de más del 200% respecto de las mediciones, mientras que los desplazamientos calculados con el método modificado son 27% mayores a los resultados de laboratorio. La diferencia entre ambos métodos es ostensible. En cuanto a la interfaz geotextil – madera, el método original calcula desplazamientos 200% mayores a los registrados, mientras que con el método modificado los resultados son 26% mayores. Curiosamente la diferencia entre ambos métodos es la misma para cada interfaz.

Tabla 5-3. Parámetros empleados en los análisis de la interfaz madera – madera con el método original

Ciclo	$K_y$	$\ddot{U}_y$ ( $\text{m/s}^2$ )	$\lambda$	$\ddot{U}_{\text{máx}}$ ( $\text{m/s}^2$ )	$K_d$
1	0.16	1.57	-	1.57	0.16
2	0.12	1.22	-	1.22	0.12
3	0.16	1.57	-	1.57	0.16
4	0.22	2.15	-	2.15	0.22
5	0.20	1.93	-	1.93	0.20
6	0.22	2.16	-	2.16	0.22
7	0.22	2.16	-	2.16	0.22

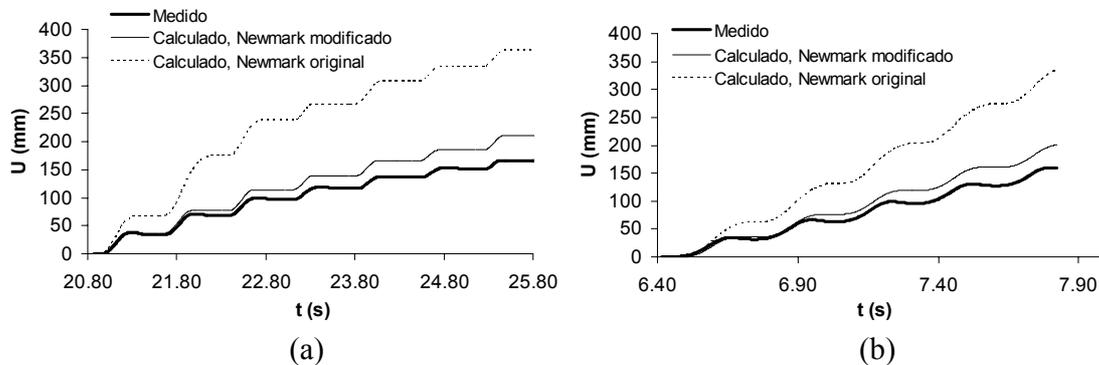


Figura 5-2. Desplazamientos medidos y calculados para las interfaces (a) madera – madera y (b) geotextil – madera

Los resultados muestran que el método de Newmark puede ser suficientemente aproximado para estimar desplazamientos permanentes inducidos sísmicamente. Sin embargo, se sabe que el método de Newmark sólo arroja resultados conservadores cuando la frecuencia predominante de la excitación,  $f_g$ , es mayor que la frecuencia natural de la masa deslizante,  $f_{masa}$  (Wartman *et. al.*, 2003) en un cierto porcentaje:

$$\frac{f_g}{f_{masa}} > 1.3 \quad (5-9)$$

De acuerdo con Wartman *et. al.* (2003), si la relación  $f_g / f_{masa}$  está en el rango 0.2 – 1.3, el método de Newmark no es adecuado para calcular los desplazamientos inducidos. En este rango Wartman propone utilizar un método desacoplado o acoplado, dependiendo de la importancia del proyecto en análisis.

### 5.3 Método desacoplado para el análisis dinámico de estructuras deslizantes

El método que se propone en esta sección se desarrolló pensando en una aplicación a la ingeniería sísmica, específicamente para estructuras aisladas sísmicamente, ya que en los últimos años este tema ha atraído la atención de investigadores en ingeniería sísmica alrededor del mundo. Esta técnica pretende disminuir la demanda estructural durante un evento sísmico, al disipar parte de la energía del terremoto antes de que alcance a la estructura. Para este fin se han propuesto y desarrollado múltiples sistemas de aislamiento que permitan transmitir energía en forma controlada a las estructuras, aunque en general se dividen en dos tipos: los que disipan energía por deformación, y los que lo hacen a través de fricción. Ambos tipos se colocan generalmente entre la base del edificio y su superestructura, logrando así desacoplar al edificio de su cimentación. En el caso de los disipadores friccionantes, la transmisión de energía hacia la estructura se limita mediante el deslizamiento relativo entre ésta y su cimentación. Este tipo de aislamiento se ha investigado bastante, debido a que es relativamente simple de implementar, además de los beneficios atractivos que ofrece, siendo el principal de estos su efectividad en un amplio margen de frecuencias de la excitación (Jangid, 2000). El otro beneficio particularmente atractivo es el hecho de que es posible limitar en forma controlada la aceleración máxima que se transfiere a la estructura, la cual se ha tomado tradicionalmente igual al valor del coeficiente de fricción cinético (*e.g.*, Yegian y Lahlaf, 1992; Jangid, 2000; Yegian y Kadakal, 2004). Sin embargo, los resultados presentados en esta tesis muestran que esto no es necesariamente cierto para todas las interfaces, por lo que de adoptar esa hipótesis pudiera llevar a subestimar la demanda estructural durante un evento sísmico (Méndez y Romo, 2006; Botero *et. al.*, 2006). Wartman *et. al.* (2003) comentan este punto en su artículo, aunque ellos atribuyen el fenómeno (aceleraciones mayores a la de fluencia) a fuerzas inerciales producidas por el deslizamiento intermitente de la masa de suelo empleada en sus estudios. Sin embargo, el fenómeno se presenta aún cuando se trata de un bloque rígido deslizando, lo cual sugiere que la causa es en realidad la variación de la fricción en la interfaz de deslizamiento. Este aspecto puede tomarse en cuenta mediante el modelo de fricción propuesto, como se mostrará más adelante.

El análisis de estructuras deslizantes puede realizarse en forma acoplada o desacoplada. El primer caso es un problema de interacción, donde el análisis dinámico y el de deslizamiento

se realizan en forma simultánea, considerando así el efecto del deslizamiento en la respuesta de la estructura. Sobre este enfoque se han desarrollado diversos métodos como el de Kramer y Smith (1997), Jangid (2000), Rahje y Bray (2000), Botero (2004), entre otros. El segundo caso se trata de análisis desacoplados, donde el análisis dinámico y el de deslizamiento se llevan a cabo por separado. Estos métodos se han desarrollado principalmente en el marco de la dinámica de suelos, para el análisis dinámico de taludes y terraplenes. Algunos ejemplos son el método de Makdisi y Seed (1978), Lin y Whitman (1983), entre otros. En el caso de la dinámica estructural, los métodos desacoplados han tenido poco desarrollo, debido a que en los métodos desacoplados desarrollados en la dinámica de suelos, la respuesta dinámica de la estructura o masa de suelo, se calcula suponiendo que ésta se encuentra fija y no puede deslizar respecto a su base. Con la respuesta calculada se obtiene un coeficiente de fluencia ponderado que se utiliza en un análisis tipo Newmark convencional. Con un procedimiento así, el énfasis de los cálculos está en los deslizamientos, debido a que en la dinámica de suelos los deslizamientos se utilizan para evaluar la estabilidad sísmica de una estructura geotécnica con base en su desempeño. Sin embargo, en la dinámica estructural se desea estimar las solicitaciones dinámicas en la estructura, más que los desplazamientos relativos en la base. Es por ello que en esta disciplina se utilizan esencialmente métodos acoplados que permiten obtener las demandas estructurales debido al efecto del deslizamiento relativo en la base. Sin embargo, es posible desarrollar un método desacoplado que permita obtener la demanda estructural a partir de los deslizamientos relativos en la base, calculados con base en las características friccionantes de la interfaz. En esta sección se presenta este método y se compararan los resultados numéricos contra mediciones experimentales de un modelo de tres grados de libertad que puede deslizar respecto de su base (Botero, 2004).

### 5.3.1 Procedimiento de análisis

La metodología consiste en idealizar la estructura deslizante a través de un modelo discreto de masas concentradas. El modelo no se asume empotrado a la cimentación, sino montado sobre una base que puede deslizar, como se ilustra en la figura 5-3, la cual coincide con la configuración experimental ensayada por Botero (2004), cuyos resultados se utilizaron para verificar el método propuesto.

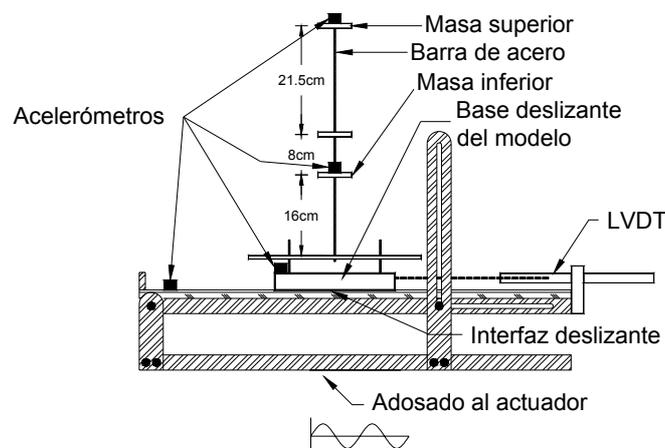


Figura 5-3. Configuración experimental (resultados tomados de Botero, 2004)

Se asume que la estructura responde únicamente en deslizamiento. Con base en esta hipótesis, la cual es razonable para el tipo de estructuras que se aíslan sísmicamente por fricción, se calculan los coeficientes de fricción en la interfaz de deslizamiento (con la ecuación 2-11), a partir de las mediciones experimentales, tomando ventaja del hecho de que la aceleración registrada en la base de la estructura ya incluye los efectos inerciales inducidos por las masas superiores durante la aplicación de la excitación. Una vez calculados los coeficientes de fricción, es posible estimar la aceleración de respuesta de la base de la estructura, utilizando una versión particularizada para el caso horizontal,  $\theta = 0$ , de la ecuación 5-3:

$$\ddot{U}(t) = [\|\ddot{U}_g(t)\| - g[\mu_s - \mu(t)]] \text{sgn} \ddot{U}_g(t) \quad (5-10)$$

La variación del coeficiente de fricción que aparece en la ecuación 5-10 se obtiene a partir de la ecuación 5-6 adaptada para el caso horizontal:

$$\mu(t) = \mu_s - \exp\left(-\frac{\lambda}{g} \left| \frac{d}{dt} \dot{U}_g(t) \right| \right)^{-1} \cdot H[\|\ddot{U}_g(t)\| - \ddot{U}_y] \quad (5-11)$$

La aceleración calculada en la base de la estructura, se utiliza como entrada para un análisis dinámico convencional, suponiendo a la estructura fija en su base. De esta forma se estiman las demandas estructurales en forma desacoplada, debidas al deslizamiento de la base. Cabe señalar que las aceleraciones de la base calculadas con la ecuación 5-10 inducen altas frecuencias a la estructura, debido al deslizamiento intermitente de ésta. Se sugiere filtrar las altas frecuencias de la respuesta en la base para aminorar este efecto en los análisis numéricos que se lleven a cabo. En la siguiente sección se aborda con más detalle esta cuestión.

En resumen el método es el siguiente:

1. Estimar los coeficientes de fricción de la interfaz de deslizamiento a partir de las mediciones experimentales de aceleración en la base de la estructura deslizante, conforme a la ecuación 5-11
2. Calcular la aceleración de respuesta de la base de la estructura, utilizando la ecuación 5-10, y filtrar las altas frecuencias de esta señal
3. Realizar un análisis dinámico de la superestructura usando como entrada la aceleración calculada con la ecuación 5-10

### 5.3.2 Resultados

El procedimiento descrito en la sección anterior se aplicó al prototipo experimental de la figura 5-3. Los coeficientes de fricción estimados en la etapa experimental (Botero, 2004) se muestran en la figura 5-4 junto con los calculados con la ecuación 5-11. El coeficiente de fricción estática de la interfaz fue 0.17, y el parámetro  $\lambda$  fue 1.2.

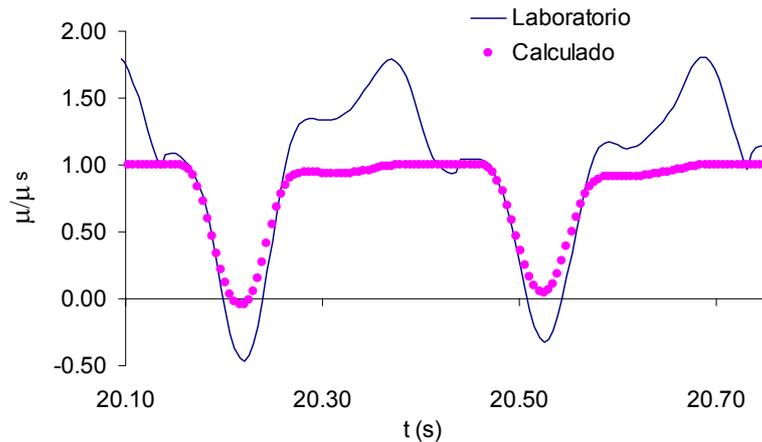


Figura 5-4. Coeficientes de fricción medidos y calculados con la ecuación 5-11

Se observa en la figura 5-4 que los coeficientes de fricción calculados no reproducen los valores mayores al estático. Sin embargo, de acuerdo con el método de Newmark modificado que se expuso en la sección 5.2, lo importante es reproducir los coeficientes de fricción que provocan un aumento en la aceleración del bloque más allá de la de fluencia.

Una vez calculados los coeficientes de fricción, se utiliza la ecuación 5-10 para obtener la aceleración de respuesta de la base del modelo. Los cálculos se realizaron con el programa de FORTRAN desarrollado para aplicar el método de Newmark modificado expuesto en la sección anterior. Los resultados se muestran en la figura 5-5, junto con los espectros de amplitudes de Fourier para las señales medidas y calculadas en la base del modelo.

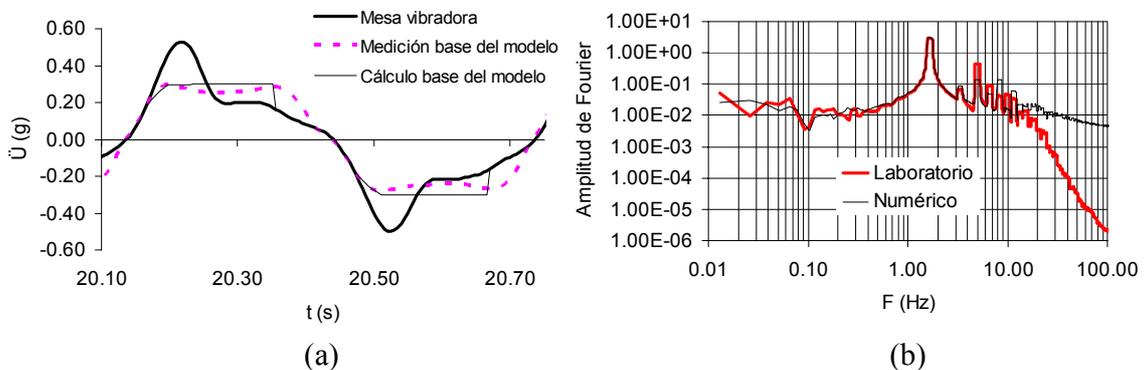


Figura 5-5. (a) Aceleraciones en la base del modelo y (b) sus espectros de Fourier

En la figura 5-5(a) se observa que la aceleración de la base del modelo calculada con el método de Newmark modificado se acerca bastante a la registrada en el laboratorio, aunque tiene algunos quiebres abruptos que inducen altas frecuencias, como se observa en el espectro de Fourier correspondiente en la figura 5-5(b). Para disminuir este efecto se filtraron las frecuencias mayores a 10 Hz de la señal de aceleración calculada. La frecuencia de corte se determinó con base en el desempeño de la mesa vibradora utilizada (Botero, 2004), y considerando la frecuencia de la excitación (1.67 Hz). Los resultados se muestran en la figura 5-6.

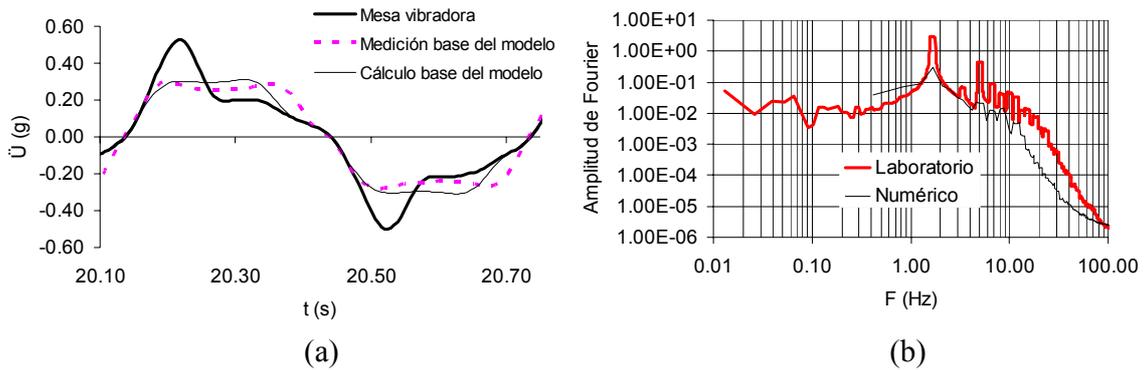


Figura 5-6. (a) Aceleraciones en la base del modelo y (b) sus espectros de Fourier

Se observa en la figura 5-6(a) que las aceleraciones calculadas son más apegadas a las mediciones experimentales, y que la señal está en general más suavizada después de aplicado el filtro. Esto se ve reflejado en la figura 5-6(b), donde el espectro de Fourier de la señal calculada ya filtrada tiene un menor contenido de altas frecuencias. Se nota también en la figura 5-6(b) que el efecto del filtrado redujo en general el contenido de frecuencias de la señal, aunque las mayores amplitudes de Fourier se encuentran en un rango amplio comprendido entre 1 y 10 Hz, aproximadamente. Se considera que este rango es adecuado para los análisis y para no generar ruido en los resultados numéricos. La relación entre la frecuencia de la excitación y la de la estructura (18 Hz) es 0.09.

Con la señal de aceleración obtenida para la base de la estructura, se realizó un análisis modal tradicional para calcular la respuesta del prototipo experimental, asumiendo un 5% de relación de amortiguamiento. El análisis se llevó a cabo con un programa de FORTRAN realizado especialmente para el problema, donde se resuelven las ecuaciones de movimiento con el método numérico de Newmark. En la figura 5-7 los resultados se presentan para la masa superior en términos de desplazamientos absolutos, y desplazamientos relativos en la base del modelo.

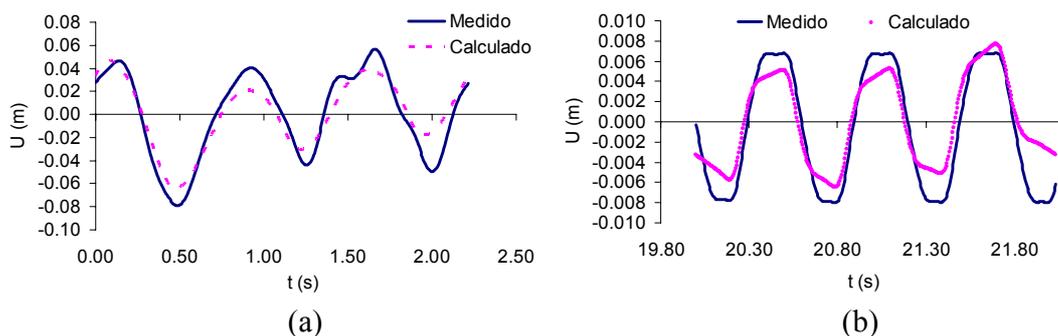


Figura 5-7. (a) Desplazamientos absolutos en la masa superior, (b) desplazamientos relativos en la base

Se observa en la figura 5-7(a) que los desplazamientos calculados en la masa superior se acercan bastante a las mediciones experimentales, aunque se encuentran ligeramente por debajo. Esto se debe seguramente a las diferencias en la aceleración de la base calculadas con el método de Newmark simplificado, sobre todo por la mayor duración de la fase

cinética (zona B, figura 5-1) en las mediciones respecto de los cálculos. En cuanto a los desplazamientos relativos en la base del modelo, se observa que los cálculos se aproximan a las mediciones, aunque se observa una tendencia a acumular desplazamiento en los cálculos, a diferencia de los registros experimentales. Esto se debe a que el método de Newmark modificado es conservador cuando la relación de frecuencias (0.09 para el caso estudiado) está fuera del rango 0.2 – 1.3 sugerido por Wartman. Sin embargo, se considera que los resultados son satisfactorios, considerando que se trata de un método desacoplado.

La descripción anterior corresponde al caso ideal, en donde se tienen resultados experimentales para estimar los coeficientes de fricción en la interfaz. Sin embargo, en la práctica cotidiana de la ingeniería, difícilmente se tendrá este escenario. Aún así es posible adaptar el método a las necesidades de la práctica. Para ello se sugiere un procedimiento ligeramente distinto al desarrollado en los párrafos anteriores. La diferencia estiba en la aplicación del método simplificado de Newmark:

1. Se estima la relación de frecuencias  $f_{sismo} / f_{estructura}$
2. Si la relación  $f_{sismo} / f_{estructura}$  está fuera del rango 0.2 – 1.3, entonces es posible desprestigiar la flexibilidad de la estructura en el cálculo de los desplazamientos inducidos sísmicamente. Es decir, es posible aplicar el método de Newmark simplificado
3. Se estima el coeficiente de fricción estático
4. Con base en el coeficiente de fricción estático y la señal de aceleración de entrada, se estima el tipo de deslizamiento que se presentará en la interfaz (continuo o intermitente), conforme al criterio de la sección 5.1
5. Se calcula un valor aproximado del parámetro  $\lambda$  del modelo de fricción propuesto, de acuerdo con el criterio siguiente:
  - Si el deslizamiento es continuo, entonces se propone un  $\lambda$  tal que lleve a cero al coeficiente de fricción con la excitación de entrada
  - Si el deslizamiento es intermitente, el valor de  $\lambda$  será tal que lleve al coeficiente de fricción al valor mínimo dado por

$$\mu = \frac{\mu_s}{FS} \left[ \frac{(\ddot{U}_g)_{m\acute{a}x}}{(\ddot{U}_g)_{lim}} \right] \quad (5-12)$$

donde  $(\ddot{U}_g)_{m\acute{a}x}$  es la aceleración máxima de la excitación,  $(\ddot{U}_g)_{lim}$  es la aceleración límite que lleva a cero el coeficiente de fricción, calculada con la ecuación 5-1, y  $FS$  es un factor de seguridad que considera las incertidumbres inherentes al fenómeno del tipo de deslizamiento (continuo o intermitente). De acuerdo con los resultados de los ensayos experimentales, el valor de  $FS$  oscila entre 2 y 2.5, para los materiales ensayados en esta tesis. Se estima que un valor entre 2 y 3 sea adecuado para otros materiales, a reserva de realizar las pruebas correspondientes.

6. Una vez obtenido un valor estimado de  $\lambda$ , se utilizan las ecuaciones 5-10 y 5-11 para calcular la aceleración de respuesta de la base de la estructura, y posteriormente

utilizarla para el análisis de respuesta dinámica, como se hizo en el ejemplo mostrado anteriormente

La propuesta simplificada sólo necesita 3 parámetros: el coeficiente de fricción estática, la aceleración de fluencia y la aceleración de la excitación. El método es sencillo, pero para evaluar su eficacia se requiere una investigación más detallada que la aquí presentada, lo cual no es uno de los objetivos de esta tesis. La investigación se llevará a cabo a corto plazo para determinar la utilidad práctica del método propuesto.

#### 5.4 Aplicación al análisis de cortinas de concreto fracturadas

En esta sección se presenta un ejemplo de aplicación enfocado al análisis de una cortina hipotética de concreto fracturada. El análisis se lleva a cabo para tres leyes de fricción distintas: fricción constante, *i.e.*,  $\phi_d = \phi_s$ , ley de Coulomb y fricción variable obtenida con el modelo propuesto. La finalidad del ejemplo es mostrar la versatilidad del modelo de fricción cuando se implementa en programas de análisis numérico, así como mostrar también que las leyes de fricción tradicionales no arrojan resultados necesariamente conservadores. Los análisis se realizaron en FLAC3D (Itasca, 2005), bajo las siguientes consideraciones (Méndez *et. al.*, 2008):

- El sistema cortina-embalse-cimentación se asume elástico lineal
- Se consideran condiciones de deformación plana
- La relación de amortiguamiento crítico del sistema se toma igual al 5%
- La presión hidrodinámica se simuló mediante masas adheridas, de acuerdo con Weestergard (1933). Es decir, se asume un embalse incompresible. Se implementó una rutina en FISH para calcular y asignar las masas adheridas
- La cimentación es más deformable que la cortina
- Se considera sub-presión en la grieta, simulada mediante condiciones de frontera
- La cortina no desliza respecto de su cimentación
- La interfaz del bloque deslizante se simuló con elementos interfaz
- El paramento aguas arriba de la cortina es vertical
- No se analizó la influencia de la malla en los resultados, ya que otros autores han demostrado que este parámetro tiene poca influencia en los resultados generales (Pekau y Yuzhu, 2004)
- Se considera sólo una grieta horizontal en los análisis

La figura 5-8 muestra la geometría del ejemplo considerado. La profundidad de la masa de cimentación se tomó igual a dos veces la altura de la cortina, y su ancho fue más de once veces mayor que el ancho de la cortina en su base. La cortina se colocó lo suficientemente alejada de las fronteras para evitar efectos de campo cercano. La masa de cimentación se discretizó en 75 elementos, y la cortina en 50 elementos, todos de deformación constante, conforme a la metodología empleada por FLAC3D (Itasca, 2005).

Las propiedades de los materiales considerados en el análisis se encuentran en la tabla 5-4, y la tabla 5-5 muestra los parámetros empleados en la interfaz concreto – concreto para los casos considerados. Los parámetros del modelo de fricción variable se obtuvieron con base

en los resultados experimentales de la interfaz concreto – concreto presentados en el capítulo 3.

La figura 5-9 ilustra las leyes de fricción consideradas. El valor del coeficiente de fricción cinético en la ley de Coulomb se tomó con base en los coeficientes de fricción mínimos calculados con el modelo de fricción propuesto.

En la figura 5-10(a) se muestra el espectro de respuesta de la señal de la excitación empleada en los análisis. La señal se colocó en la base del modelo, por lo que al llegar a la base del bloque deslizando, la señal incluye el efecto de amplificación. La señal utilizada como excitación es un sismo sintético con alto contenido de frecuencias y magnitud importante (Méndez *et. al.*, 2008), para lograr desplazamientos importantes en el bloque deslizando y de esta forma apreciar con facilidad la influencia de la fricción en los cálculos numéricos. La figura 5-10(b) presenta las aceleraciones calculadas en la base del bloque deslizando.

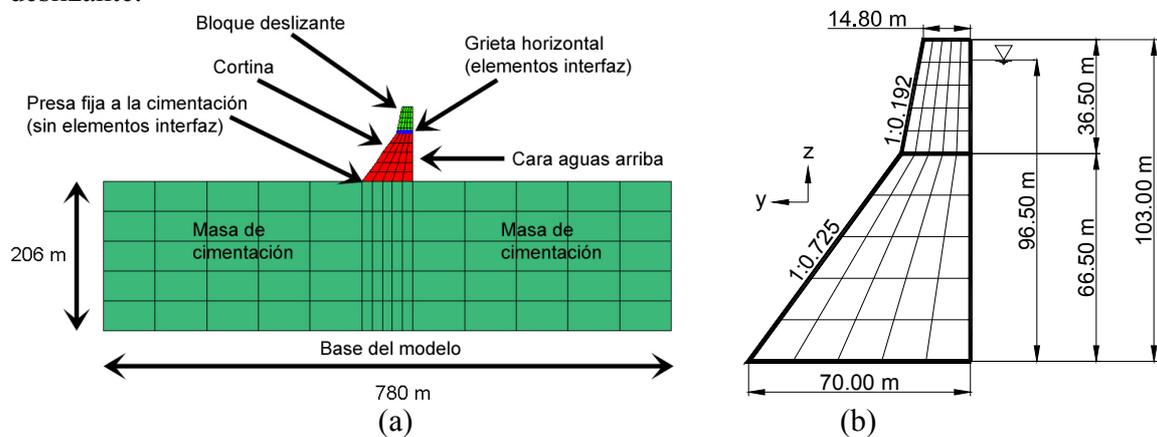


Figura 5-8. (a) Geometría del modelo numérico, y (b) detalles de la cortina analizada

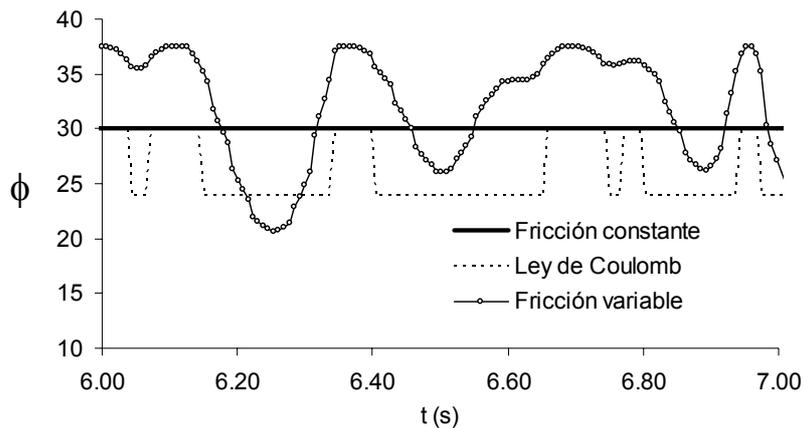


Figura 5-9. Leyes de fricción consideradas en los análisis

Tabla 5-4. Propiedades de los materiales empleados en el análisis

Material	E (GPa)	$\nu$	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	G (GPa)	K (GPa)	V <sub>s</sub> (m/s)	V <sub>p</sub> (m/s)
Concreto	26.00	0.20	2400	10.83	14.44	2125	3469
Cimentación	16.87	0.30	2700	6.49	14.06	1550	2900

Tabla 5-5. Parámetros empleados en las leyes de fricción consideradas

	Modelo propuesto	Ley de Coulomb	$\mu_k = \mu_s$
$\phi_s$	29.65°	29.65°	29.65°
$\phi_k$	46% $\mu_s$ - 130% $\mu_s$ calculado con la ecuación 4-4	24.00°	29.65°
$\Delta\mu/2$	0.1902	-	-
$K_n$	2 Gpa/m	2 Gpa/m	2 Gpa/m
$K_s$	2 Gpa/m	2 Gpa/m	2 Gpa/m
$\lambda'$	0.55	-	-

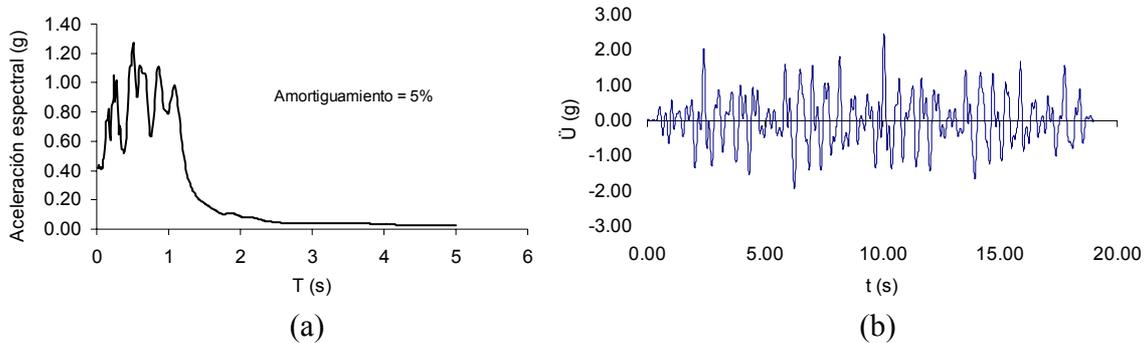


Figura 5-10. (a) Espectro de respuesta de la señal de la excitación, (b) aceleraciones calculadas en la base del bloque deslizante

#### 5.4.1 Resultados

Con base en las consideraciones anteriores, se llevaron a cabo los análisis numéricos. Los resultados se presentan en la figura 5-11 en términos de los desplazamientos del bloque deslizante respecto de la cortina. Los resultados se muestran para cada uno de los casos de fricción analizados. Los cálculos muestran que el considerar a la fricción variable se obtienen los mayores desplazamientos, lo que indica que las leyes de fricción convencionales no necesariamente producen resultados conservadores. El desplazamiento calculado con la ley de fricción constante es 39% menor que el obtenido con fricción variable, mientras que el caso con la ley de fricción de Coulomb es 47% menor. La pequeña diferencia se debe a que al tener episodios con fricción cinética en el caso Coulomb, el bloque gana desplazamiento en el sentido opuesto y se genera un desfase con el caso de fricción constante.

El ejemplo de aplicación presentado es sólo una muestra de las posibilidades de aplicación del modelo de fricción, ya que es muy sencillo de implementar en los cálculos numéricos, puesto que no induce no – linealidades al no depender explícitamente de la respuesta de la estructura misma.

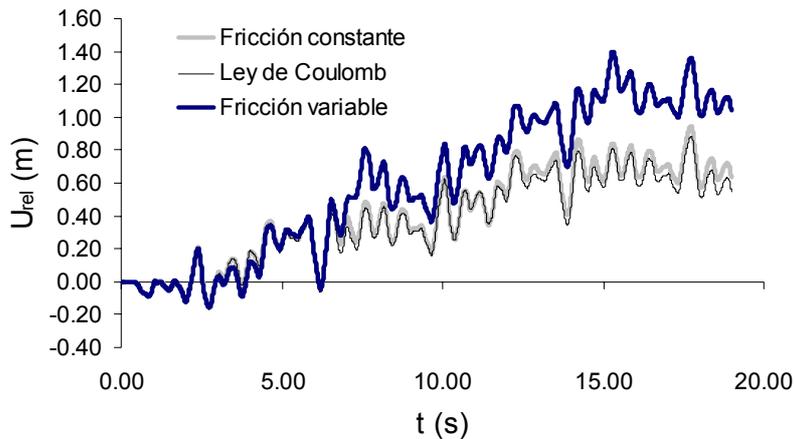


Figura 5-11. Desplazamientos permanentes calculados para los casos analizados

### 5.5 Recomendaciones para la aplicación práctica del modelo de fricción propuesto

En esta sección se dan algunas sugerencias prácticas para aplicar el modelo de fricción propuesto. Las recomendaciones surgen en vista de que difícilmente se tendrá la posibilidad de realizar ensayos de mesa vibradora para estimar el parámetro  $\lambda$  de la ley planteada.

Cuando no es posible estimar el parámetro  $\lambda$  de ensayos de laboratorio, existen dos posibilidades. La primera es utilizar la ecuación 2-17 para calcular la variación del coeficiente de fricción, en lugar del modelo propuesto. La ecuación 2-17 conduce a los valores “exactos” del coeficiente de fricción para un interfaz y excitación particulares, al considerar explícitamente la dependencia de la fricción con la respuesta de la estructura. Sin embargo, esta opción aumenta el nivel de complejidad en los cálculos, ya que se aborda directamente un problema no lineal. Esta opción puede ser la deseada si se trata de análisis de proyectos importantes, o si la capacidad de análisis y/o cómputo no es impedimento.

Por otro lado, si se desea trabajar con una aproximación lineal al fenómeno de fricción, es posible utilizar el modelo propuesto, mismo que ha mostrado ser suficientemente aproximado como para reproducir el fenómeno adecuadamente, según lo demuestran los cálculos presentados en los capítulos 4 y 5. En este caso, la segunda posibilidad que se tiene cuando no hay ensayos de laboratorio, es estimar el valor de  $\lambda$  con la metodología planteada en la sección 5.3.2, la cual se repite enseguida con fines de referencia:

1. Con base en el coeficiente de fricción estático y la señal de aceleración de entrada, se estima el tipo de deslizamiento que se presentará en la interfaz (continuo o intermitente), conforme al criterio de la sección 5.1:

$$\text{Sí } (\ddot{U}_g)_{lim} > (\ddot{U}_g)_{m\acute{a}x} \Rightarrow \text{Intermitente}$$

$$\text{Sí } (\ddot{U}_g)_{lim} < (\ddot{U}_g)_{m\acute{a}x} \Rightarrow \text{Continuo}$$

donde  $(\ddot{U}_g)_{lim}$  está dada por la ecuación 5-1: 
$$(\ddot{U}_g)_{lim} = \frac{\ddot{U}_y + g\mu_s}{1 - \tan\theta(\mu_s - \tan\theta)}$$

2. Si el deslizamiento es continuo, entonces se propone un  $\lambda$  tal que lleve a cero al coeficiente de fricción con la excitación de entrada
3. Si el deslizamiento es intermitente, el valor de  $\lambda$  será tal que lleve al coeficiente de fricción al valor mínimo dado por la ecuación 5-12: 
$$\mu = \frac{\mu_s}{FS} \left[ \frac{(\ddot{U}_g)_{m\acute{a}x}}{(\ddot{U}_g)_{lim}} \right]$$

donde  $(\ddot{U}_g)_{m\acute{a}x}$  es la aceleración máxima de la excitación y  $FS$  es un factor de seguridad que considera las incertidumbres inherentes al fenómeno del tipo de deslizamiento (continuo o intermitente). De acuerdo con los resultados de los ensayos experimentales, el valor de  $FS$  oscila entre 2 y 2.5, para los materiales ensayados en esta tesis. Se estima que un valor entre 2 y 3 sea adecuado para otros materiales, a reserva de realizar las pruebas correspondientes. Al respecto se tiene proyectado continuar con las investigaciones de fricción para establecer rangos adecuados de  $FS$ , y para averiguar la influencia de algunas variables como la frecuencia de la excitación, su amplitud y esfuerzo normal, en el parámetro  $\lambda$ . Para ello se diseñó y construyó una mesa vibradora uniaxial de pistón hidráulico, utilizando materiales compuestos (Méndez *et. al.*, 2007a) en la elaboración de su plataforma de trabajo para ganar peso en los modelos que se podrán ensayar, de hasta 800 kg, sujetos a aceleraciones de hasta 1 g (Méndez *et. al.*, 2009a).

## 6 Conclusiones

Con base en el análisis teórico y experimental del coeficiente de fricción en interfaces deslizantes entre bloques rígidos, es posible escribir algunas de las conclusiones más sobresalientes de la investigación.

1. El fenómeno de fricción es un tema que, a pesar de su importancia práctica en la ingeniería, se le ha tratado en forma excesivamente simplificada. Este enfoque ha llevado a planteamientos erróneos sobre el fenómeno dinámico, lo cual quedó evidenciado en los análisis teóricos desarrollados en esta investigación.
2. Los modelos de fricción cinética empleados tradicionalmente en la ingeniería, son muy sencillos. Por otro lado, los que propone la tribología y ciencia de superficie, son demasiado complicados para fines ingenieriles. Esta brecha justificó una investigación cuya finalidad fue la de proponer un puente entre ambas disciplinas, manteniendo siempre el sentido práctico en los resultados.
3. Los modelos de fricción tradicionales como la ley de fricción de Coulomb y el modelo de fricción constante, sólo son útiles para condiciones de velocidad constante, o para una tasa de cambio de velocidad constante.
4. El problema de fricción es no lineal por naturaleza. Sin embargo, es suficiente trabajar con una aproximación lineal al fenómeno, para fines de ingeniería. El modelo propuesto logra la aproximación requerida.
5. El modelo propuesto se ajusta mejor a interfaces que no sufran una degradación excesiva, ya que este aspecto no se consideró en el planteamiento teórico. En esos casos el modelo resultó ser menos aproximado, como en la interfaz concreto – concreto, aunque lo suficiente como para obtener resultados conservadores. Si se incluye la variación del coeficiente estático para una interfaz en particular, el modelo arrojará resultados aún más apegados a la física del problema.
6. Se encontró que con base en la teoría expuesta sobre la variación de la fricción cinética, fue posible proponer un criterio que estima el tipo de deslizamiento en una interfaz. Esto es de gran importancia ya que permite conocer a priori una aproximación a la respuesta de una estructura deslizante, y con base en ello tomar decisiones de análisis y diseño. Sin embargo, se observó que el criterio no se ajustó a una interfaz acero inoxidable – teflón. Esto se atribuyó a la presencia de fuerzas electromagnéticas en la interfaz de deslizamiento, las cuales no se consideraron en la derivación del criterio propuesto.
7. El análisis teórico del coeficiente de fricción permitió también obtener la respuesta dinámica de un bloque rígido. Al incluir en este cálculo el modelo de fricción propuesto, fue posible tomar en cuenta el aumento de la aceleración de respuesta del bloque debida a la variación paulatina del coeficiente de fricción, aspecto relevante en

el cálculo de desplazamientos permanentes en bloques rígidos, que no había sido posible tenerlo en cuenta hasta ahora, a pesar de que diversos investigadores habían observado y registrado el fenómeno, atribuyéndolo a múltiples causas posibles.

8. El modelo propuesto sirvió de base para desarrollar algunas modificaciones al método de Newmark para análisis de desplazamientos inducidos sísmicamente. Las modificaciones planteadas incluyen la variación de la fricción al comienzo del deslizamiento, y propone un coeficiente de atenuación de la velocidad relativa con base en la aceleración máxima calculada en función también de la variación de la fricción. Las modificaciones mejoran sustancialmente la capacidad de predicción del método, y junto con el criterio de deslizamiento propuesto, le dan mayor versatilidad al mismo ya que en su forma original, el método de Newmark no considera bloques sujetos a deslizamientos continuos.
9. Se observó que el enfoque de la dinámica de suelos no pone énfasis en calcular la respuesta dinámica de una estructura deslizante, sino más bien en estimar sus desplazamientos permanentes. Es por ello que con las bases teóricas expuestas en la tesis, se desarrolló un método desacoplado de análisis dinámico para estructuras deslizantes. Los resultados obtenidos son satisfactorios desde el punto de vista ingenieril.
10. El modelo propuesto es muy versátil, y como prueba de ello se implementó en un ejemplo de aplicación en el análisis dinámico de cortinas de concreto fracturadas. Del análisis se concluyó además que el considerar leyes de fricción tradicionales, no garantiza obtener resultados conservadores, por lo que se debe tener cuidado con su uso.
11. Debido a que en la práctica cotidiana de la ingeniería, no siempre se cuenta con resultados experimentales que permitan aplicar el modelo propuesto, se dieron algunos lineamientos prácticos para guiar su aplicación con base en tres parámetros relativamente sencillos de obtener: coeficiente de fricción estática, aceleración de fluencia y señal de excitación. Deberá realizarse más investigación para averiguar cómo comparan los resultados obtenidos con este criterio simplificado, contra los obtenidos de ensayos experimentales.

## Referencias

- Alberro J. (1992). La licuación en arenas, Volumen Raúl J. Marsal, Sociedad Mexicana de Mecánica de suelos, México.
- Amontons G. (1699). De la résistance causée dans les machines, Mémoires de l'Académie Royale des Sciences (Paris), 206-222
- Andreus U y Casini P. (2001). Dynamics of friction oscillators excited by a moving base and/or driving force, *Journal of Sound and Vibration*, 245(4), 685-699
- Archard J F. (1957). Elastic deformation and the laws of friction, *Proc. Roy. Soc., A* 243 (1957) 190–205
- Botero E. (2004), Modelo bidimensional no lineal para el análisis del comportamiento dinámico de estructuras térreas. Tesis Doctoral. División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de Mexico. Diciembre 2004.
- Botero E. y Romo M P. (2003). Seismic Analysis of Slope Stability, *Geofísica Internacional*, vol. 42 Num. 2, 219-225
- Botero E, Méndez B C y Romo M P. (2006). Dynamic performance of concrete sliding interfaces, 4th International Conference on Earthquake Engineering, October 12-13, 2006 – Taipei, Taiwan, paper id 149
- Botero E, Méndez B C, Zapata J C y Romo M P. (2007). Influence of wear on friction variation in concrete sliding interfaces, 5th International Conference on Seismology and Earthquake Engineering (SEE5), Tehran, Iran, 2007, paper id 147
- Bowden F.P., y Tabor, D. (1943). The Ploughing and Adhesion of Sliding Metals. *Journal of Applied Physics*, 14, 80.
- Bowden F.P., y Tabor, D. (1964). The friction and lubrication of solids, Oxford, Clarendon Press
- Cambou B (1974). Etude du frottement entre matériaux rocheux, Publication E11 of the Institute of Engineering, UNAM, pp. 92
- Caquot M A, (1967). Sur un mode de glissement des massifs rocheux, *C.R. Acad. Sc. Paris*, 264, Série A, 151-153
- Chang K C, Hwang J S, Lee G C, (1990). Analytical model for sliding behavior of teflon – stainless steel interfaces, *Journal of Engineering Mechanics*, 116(12): 2749-2763

- Chaudhuri R, Hutchinson T C, (2005). Characterizing frictional behavior for use in predicting the seismic response of unattached equipment, *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 25, 591-604
- Constantinou M C, Caccese J, Harris H G, (1987). Frictional characteristics of Teflon-steel interfaces under dynamic conditions, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 15, 751-759
- Constantinou M C, Mokha A, Reinhorn A, (1990). Teflon bearings in base isolation. II: modeling. *Journal of Structural Engineering*; 116(2): 455-474.
- Cundall P A, (1971). A computer model for simulating progressive large scale movements in blocky rock systems, *Proceedings of the Symposium of the International Society for Rock Mechanics (Nancy, France)*, vol. 1, paper II-8
- Cundall P A, (1988). Formulation of a three-dimensional distinct element model – part I: a scheme to detect and represent contacts in a system composed of many polyhedral blocks, *International Journal of Rock Mechanics, Mining Sciences & Geomechanical Abstracts*, 25, 107-116
- Cundall P A y Hart R D, (1984), “Analysis of block test no. 1 inelastic rock mass behaviour: Phase 2 - A characterization of joint behaviour (final report)”, Itasta Consulting Group Report, Rockwell Hanford Operations, Subcontrac SA-957.
- Dienwiebel M, Verhoeven G S, Pradeep N, Frenken J W M, Heimberg J A, Zandbergen H W, (2004). Superlubricity of graphite. *Physical Review Letters*, 92(12)
- Elms D G, (2000). Refinements to the newmark sliding block model. *Proceedings of the 12<sup>th</sup> World Conference on Earthquake Engineering*, New Zealand
- Ftima M B, Léger P, (2006). Seismic stability of cracked concrete dams using rigid block models, *Computers & Structures*, 84(28), 1802-1814
- Garcia Claudio, (2008). Comparison of friction models applied to a control valve, *Control Engineering Practice*, 16(10), 1231-1243
- Glavatskih S, Höglund E, (2008). Tribotronics-Towards active tribology, *Tribology International*, 41(9-10), 934-939
- Goodman R E, Seed H B, (1966). Earthquake-induced displacements in sand embankments, *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE*, 92(2), 125-146
- Hashiguchi K, Ozaki S, Okayasu T, (2005). Unconventional friction theory based on the subloading surface concept. *International Journal of Solids and Structures*, 42(5-6), 1705-1727

- He Song, Cho Sungmin, Singh Rajendra, (2008). Prediction of dynamic friction forces in spur gears using alternate sliding friction formulations, *Journal of Sound and Vibration*, 309(3-5), 843-851
- Hertz H R, (1881). Pressure between two spherical bodies in contact, *Jour. Math. (Crelle's Jour.)*, vol. 92.
- Hirano M, Shinjo K, (1990). Atomistic locking and friction, *Physical Review B*, 41(17), 11837-11851
- Hirano M, (2003). Superlubricity: a state of vanishing friction, *Wear*, 254(10), 932-940
- Hunt, J.B., Torbe, I. Y Spencer, G.C. (1965). The phase plane analysis of sliding motion, *Wear*, 8: 455
- Itasca (1998). 3DEC, Version 2.0. Minneapolis, MI: ITASCA Consulting Group
- Itasca (2005). FLAC3D, Version 3.0. Minneapolis, MI: ITASCA Consulting Group
- Jangid, R S, (2000). Response of sliding structures to bi-directional excitation, *Journal of Sound and Vibration*, 243(5), 929-944
- Kafali C, Fathali S, Grigoriu M, Whittaker A S, (2007). Static and kinetic coefficients of friction for rigid blocks. MCEER Technical Report MCEER-07-0001
- Kopidakis G, Soukoulis C. M., Economou E. N., (1993). Electron-phonon interactions and recurrence phenomena in one-dimensional systems, *Physical Review B*, 49(10), 7036-7039
- Kramer S L y Smith M W. (1997). Modified Newmark model for seismic displacements of compliant slopes. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 123(7), 635-644
- Krim J, (2002). Surface science and the atomic-scale origins of friction: what once was old is new again, *Surface Science*, 500(1-3), 741-758
- Lanczos C, (1970). *The variational principles of mechanics*, University of Toronto press, pp 418
- Lin J S y Whitman R V, (1983). Decoupling approximation to the evaluation of earthquake induced plastic slip in earth dams. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 11, 667-678
- Ling H I, (2001). Recent applications of sliding block theory to geotechnical design, *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 21(3): 189-197

- Makdisi F I y Seed H B, (1978). Simplified procedure for estimating dam and embankment earthquake-induced deformations, *Journal of Geotechnical Engineering*, ASCE 104(GT7), 849-867
- Martin J M, Donnet C, Le Mogne Th, Epicier Th, (1993). Superlubricity of molybdenum disulfide. *Physical Review B*, 48(14).
- Méndez B C, (2004), Investigación experimental de la fricción dinámica en una interfaz madera sobre madera, tesis de maestría, Universidad Nacional Autónoma de México.
- Méndez B C y Romo M P, (2005). Transition from the static to the kinetic coefficient of friction, *Proceedings of the 11th international conference of IACMAG*, Turin, Italy.
- Méndez B C, Romo M P, (2006). Experiments on frictional behavior of a sliding block. *Serie Investigación y Desarrollo del Instituto de Ingeniería*, UNAM, México, DF 2006: 39 pp, ISBN 970-32-3251-5, ISSN 970-32-0196-2 (SID/647).
- Méndez B C, Botero E, Romo M P. (2006). Frictional approach to seismic analysis of flexible sliding-structures, *First European Conference on Earthquake Engineering and Seismology*, September 3-8, 2006 – Geneva, Switzerland, paper id 682
- Méndez B C, Botero E, Zapata J C, Romo M P. (2007). Shaking table determination of sliding–friction time histories at interfaces, *XIII Pan-American Conference on Soil Mechanics and Geotechnical Engineering*. Margarita, Venezuela, 2007
- Méndez B C, González Blandón C M, Flores Castrellón O, Botero E, Romo M P (2007a). Comportamiento estático y dinámico de vigas de materiales compuestos actualizaciones del equipo, informe presentado al Instituto Mexicano de Tecnología del Agua
- Méndez B C, Botero E, Romo M P. (2008). Influence of concrete interface friction on the seismic performance of fractured concrete dams, *The 12th International Conference of International Association for Computer Methods and Advances in Geomechanics (IACMAG)* 1-6 October, 2008 Goa, India, paper id 860
- Méndez B C, Botero E., Romo M.P. (2009). A new friction law for sliding rigid blocks under cyclic loading, *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 29(5), 874-882
- Méndez, B C, Botero, E., Romo, M.P. (2009a). A shaking table pad made of Kevlar fiber-reinforced polymers, *17th International Conference on Soil Mechanics & Geotechnical Engineering*, Alexandria, Egypt 5-9 October 2009 (por celebrarse)
- Mokha A, Constantinou M C, Reinhorn A, (1990). Teflon bearings in base isolation. I: testing, *Journal of Structural Engineering*, 116(2), 438-453
- Neuenschwander D E, Taylor E F, Tuleja S, (2006). Action: forcing energy to predict motion, *The Physics Teacher*, Vol. 44, March

- Newmark N M, (1963). Earthquake effects on dams and embankments. ASCE Structural Engineering Conference, San Francisco, California, USA.
- Newmark N M, (1965). Effects of earthquakes on dams and embankments. *Geotechnique*, vol. 15, issue 2, 139-160
- Persson B N J, (1998). *Sliding friction: physical principles and applications*, Berlin, Springer
- Rabinowicz E, (1951). The nature of static and kinetic coefficients of friction. *Journal of Applied Physics*, 22(11), 1373-1379.
- Rabinowicz E, (1958). The intrinsic variables affecting the stick-slip process, *Proc. Phys. Soc. London*, 71, 668-675
- Rabinowicz E, (1995). *Friction and wear of materials*, New York, John Wiley and Sons
- Rajagopalan S y Prakash V, (2001). An experimental method to study high speed sliding characteristics during forward and reverse slip, *Wear*, vol. 249, issue 8, 687-701
- Rathje E M y Bray J D, (2000). Nonlinear coupled seismic sliding analysis of earth structures, *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering* 126(11), 1002-1014
- Scholtz, C H, (2002). *The mechanics of earthquakes and faulting*, Cambridge, Cambridge University Press
- Seed H B, Goodman R E, (1964). Earthquake stability of slopes of cohesionless soils, *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE*, 90(6), 43-73
- Seed H B y Martin G R, (1966). The seismic coefficient in earth dam design. *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE*, 92(SM3); 25-58
- Stevens J S, (1899). Some experiments in molecular contact. *Physical Review (Series I)*, 8, 49-53.
- Tolstoi, D M (1967). Significance of the normal degree of freedom and natural normal vibrations in contact friction, *Wear*, vol. 10, issue 3, 199-213
- Wartman J, Bray J D, Seed RB, (2003). Inclined plane studies of the Newmark sliding block procedure. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*; 129: 673-684.
- Westergaard H.M. (1933). Water pressures on dams during earthquakes, *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, Vol. 98, pp. 418-433

- Yegian M K, Lahlaf A M, (1992). Dynamic interface shear strength properties of geomembranes and geotextiles, *Journal of Geotechnical Engineering*, 118(5), 760-779
- Yegian M K, Kadakal A M, (2004). Foundation isolation for seismic protection using a smooth synthetic liner, *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 130(11), 1121-1130
- Younis C J, Tadjbakhsh I G, (1984). Response of sliding rigid structure to base excitation, *Journal of Engineering Mechanics*, 110(3), 417-432