

CAPÍTULO 7

Algoritmos

Para resolver las ecuaciones se requiere de realizar sistemáticamente una serie de cálculos para llegar al resultado final por cada punto de análisis, por ello es conveniente plantear algoritmos de solución que faciliten el manejo y aplicación de las ecuaciones. Los algoritmos son una serie de pasos específicos para obtener la solución de una cierta tarea y le da la oportunidad al ingeniero de enfocarse en el resultado y analizarlo.

Sección 7.1

Perfil del cimacio

El perfil de un cimacio se divide en dos tramos: aguas arriba y agua abajo de la cresta. El perfil aguas arriba de la cresta se obtiene mediante el método semigráfico explicado en el capítulo tres y la parte aguas abajo de la cresta se obtiene de la ecuación 2.1.

Algoritmo PC

1. Para el criterio WES es suficiente con definir la carga de diseño, H_0 y la inclinación del canal aguas abajo α , pero para el criterio USBR además es necesario

conocer la carga de velocidad h_a ; por tanto la geometría y el gasto de diseño.

- Los valores de las variables del criterio WES sólo están en función de la carga total de diseño y son: $k = 0,5$, $n = 1,85$, $x_c = 0,27H_0$, $y_c = 0,126H_0$, $R_1 = 0,5H_0$ y $R_2 = 0,2H_0$. Por otro lado al emplear el criterio del USBR se usa los cuadros 2.1 y 2.2 para obtener los valores de los mismos variables (k , n , x_c , y_c , R_1 , y R_2)
- Obtener la coordenada x_T del punto de tangencia P_T de la ecuación:

$$x_T = \frac{H_0}{\left[k \left(\frac{1}{\tan \alpha} \right) n \right]^{\frac{1}{n-1}}}$$

Una vez obtenido el valor de x_T se sustituye en la siguiente ecuación para obtener y_T

$$y_T = -kH_0 \left(\frac{x_T}{H_0} \right)^n$$

- Para obtener el punto B se deben resolver las ecuaciones siguientes simultáneamente.

$$(x - 0)^2 + (y - (-R_1))^2 = (R_1 - R_2)^2$$

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = R_2^2$$

La solución de las dos ecuaciones proporciona dos soluciones; la correcta es la coordenada que se ubica dentro del triángulo OCA , de la figura 2.3.

- Para obtener el punto P se deben resolver las ecuaciones siguientes simultáneamente

$$(x - 0)^2 + (y - (-R_1))^2 = (R_1 - R_2)^2$$

$$\frac{y - (-R_1)}{x - 0} = \frac{y_B - (-R_1)}{x_B - 0}$$

6. Para dibujar el perfil del cimacio se debe considerar lo siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{ll} y = -kH_0 \left(\frac{x}{H_0} \right)^n & 0 \leq x \leq x_T \\ y = \sqrt{R_1^2 - x^2} - R_1 & x_P \leq x \leq 0 \\ y = y_B + \sqrt{-x^2 + 2 x x_B - x_B^2 + R_2^2} & x_c \leq x \leq x_P \end{array} \right.$$

A continuación se muestra en la figura 7.1, una diagrama de flujo para obtener el perfil de un cimacio.

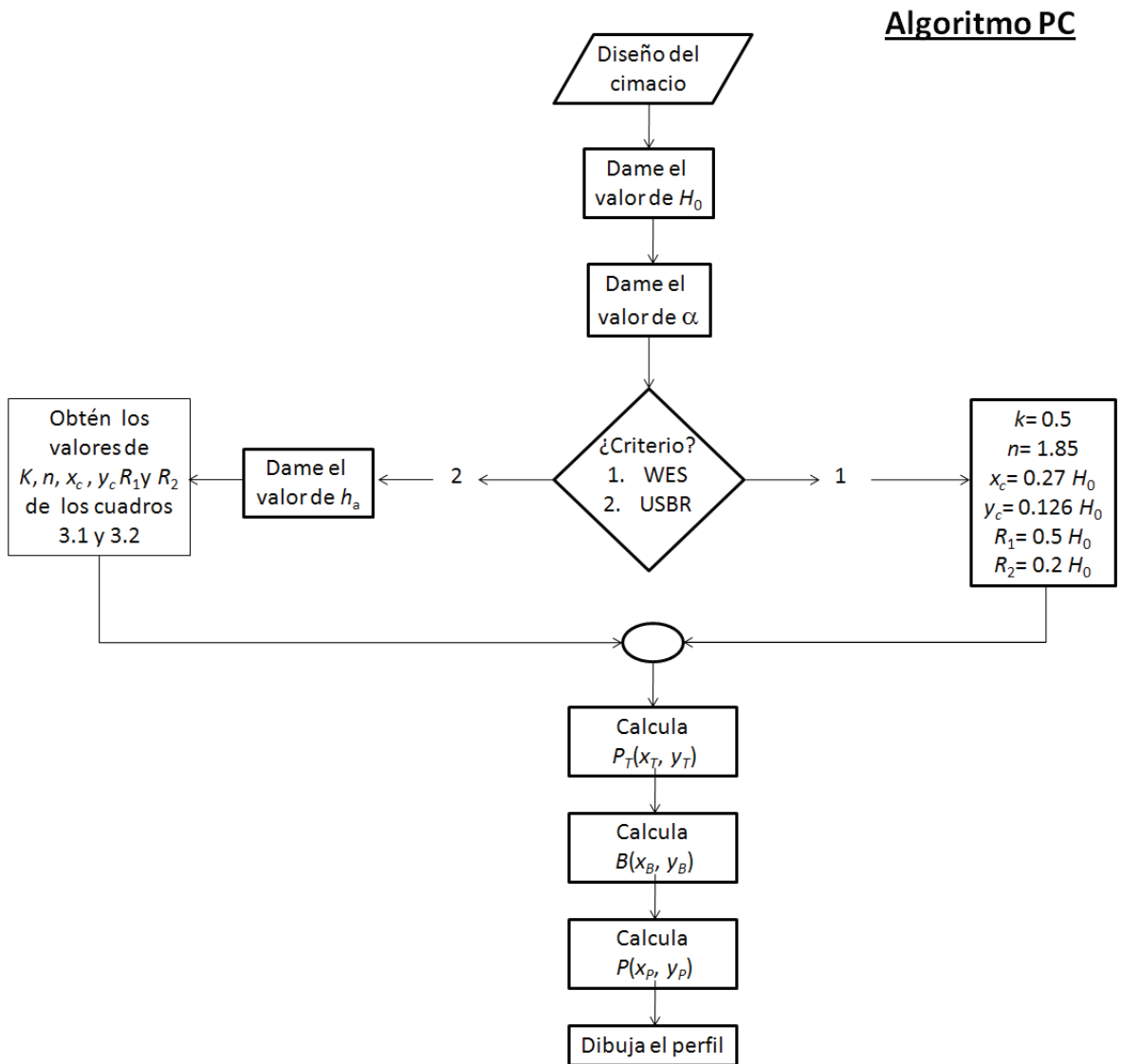


Figura 7.1: Diagrama de flujo del perfil de un cimacio

Régimen crítico

Una vez que la forma del cimacio ha sido diseñada y establecida es necesario conocer tanto la posición del tirante crítico como su magnitud, por lo que los siguientes subcapítulos presentarán la manera de obtener los mismos.

7.2.1. Localización del tirante crítico

La posición del régimen crítico siempre esta en la parte aguas abajo de la cresta de un cimacio, ya que cuando el agua llega a la cresta aún se encuentra en un régimen subcrítico pero cambia a régimen supercrítico antes del punto de tangencia. Por lo tanto, debe de existir un punto en donde el flujo pasa de subcrítico a supercrítico. La localización donde se presenta la condición crítica es de suma importancia para obtener la carga de presión, ya que, la carga de presión esta en función del régimen. El procedimiento es el mismo tanto para aguas arriba como para aguas abajo de la cresta.

Algoritmo TC

Este algoritmo procede el algoritmo *Algoritmo PC* por consiguiente empieza la numeración apartir del algoritmo anterior

7. Elegir la carga total de operación del cimacio H
8. Proponer $x_{critico}$, para la posición del tirante crítico
9. Obtener la posición $\frac{\zeta}{H_0}$ correspondiente a ese valor de x sobre el perfil del cimacio:

$$\frac{\zeta}{H_0} = -k \left(\frac{x}{H_0} \right)^n \quad (7.1)$$

10. Valuar la primera derivada de la ecuación del perfil del cimacio de cresta libre aguas abajo de la cresta con respecto a x ; también conocido como la tangente del ángulo θ

$$\tan \theta = \frac{d\zeta}{dx} = -\frac{k \left(\frac{x}{H_0}\right)^n n H_0}{x} \quad (7.2)$$

11. Obtener el coseno del ángulo θ

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{k^2 \left(\left(\frac{x}{H_0}\right)^n\right)^2 n^2 H_0^2}{x^2}}} \quad (7.3)$$

12. Evaluar la segunda derivada de la ecuación del perfil del cimacio de cresta libre con respecto a x

$$\frac{d^2\zeta}{dx^2} = -\frac{k H_0 \left(\frac{x}{H_0}\right)^n n(n-1)}{x^2} \quad (7.4)$$

13. Calcular la curvatura de la carga de diseño κH_0 del perfil para el punto de análisis mediante la ecuación 7.5

$$\kappa H_0 = -\frac{k \left(\frac{x}{H_0}\right)^n n(n-1) H_0^2}{x^2 \left[1 + \frac{k^2 \left(\left(\frac{x}{H_0}\right)^n\right)^2 n^2 H_0^2}{x^2}\right]^{\frac{3}{2}}} \quad (7.5)$$

14. Obtener $H_0^2 \frac{d\kappa}{dx}$

$$H_0^2 \frac{d\kappa}{dx} = \frac{knH_0^3(n-1)\left(\frac{x}{H_0}\right)^n \left[-nx^2+2k^2\left(\left(\frac{x}{H_0}\right)^n\right)^2 n^3 H_0^2+2x^2-k^2\left(\left(\frac{x}{H_0}\right)^n\right)^2 n^2 H_0^2\right]}{\sqrt{\frac{x^2+k^2\left(\frac{x}{H_0}\right)^{2n} n^2 H_0^2}{x^2}} \left[x^2+k^2\left(\left(\frac{x}{H_0}\right)^n\right)^2 n^2 H_0^2\right]^2 x} \quad (7.6)$$

15. Obtener χ_c de la ecuación 4.8 que es

$$\frac{\kappa H_0}{\cos \theta} \left(\frac{H}{H_0} - \frac{\zeta}{H_0}\right) = \chi_c - \frac{1}{2} \frac{(1 - \chi_c) \ln(1 - \chi_c)}{\ln(1 - \chi_c) + 1} \quad (7.7)$$

16. Resolver la ecuación 7.8

$$(1 - \chi_c) \frac{d\zeta}{dx} + \left[2 \left(\frac{H}{H_0} - \frac{\zeta}{H_0} \right) - 3 \frac{\cos \theta}{\kappa H_0} \chi_c \right] \frac{H_0^2 \frac{d\kappa}{dx}}{\kappa H_0} = 0 \quad (7.8)$$

Si es igual a cero, entonces la posición del régimen crítico sería ese punto, si es distinto de cero, se vuelve al paso 8 en donde se propone otro valor de x , hasta encontrar el valor de x que haga que la ecuación 7.8 sea igual a cero.

7.2.2. Valor del tirante crítico

17. Una vez conocido la posición del tirante se obtiene χ_{cc} de la siguiente ecuación en donde los valores de κH_0 y $\cos \theta$ son conocidos por haber localizado al tirante crítico:

$$\frac{\kappa H_0}{\cos \theta} (F \kappa H_0)^2 = -\frac{1}{2} \frac{[(1 - \chi_{cc}) \ln(1 - \chi_{cc})]^3}{\ln(1 - \chi_{cc}) + 1} \quad (7.9)$$

donde

$$F = \frac{q}{\sqrt{2g} H_0^{\frac{3}{2}}}$$

18. Obtener d_c

$$\chi_{cc} = \kappa d_c \quad (7.10)$$

donde

$$\kappa = -\frac{k \left(\frac{x}{H_0} \right)^n n(n-1) H_0}{x^2 \left[1 + \frac{k^2 \left(\left(\frac{x}{H_0} \right)^n \right)^2 n^2 H_0^2}{x^2} \right]^{\frac{3}{2}}}$$

A continuación se muestra un diagrama de flujo para el tirante crítico; figura 7.2

Algoritmo TC

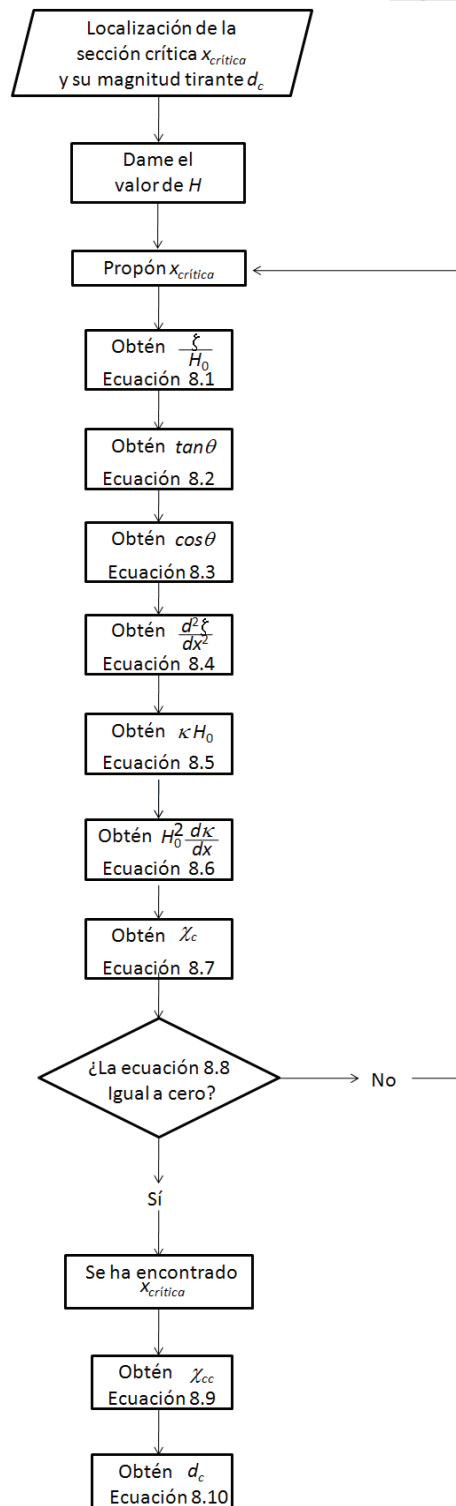


Figura 7.2: Diagrama de flujo para localizar y obtener el tirante crítico

Sección 7.3

Cálculos preliminares para el perfil de la superficie libre del agua y la distribución de presión sobre el cimacio

Antes de obtener el perfil de la superficie libre del agua y la distribución de la presión sobre el cimacio se deben calcular algunas características del flujo que al vez son dependientes del la localización y valor del tirante crítico.

Igual como los algoritmos anteriores este algoritmo sigue la numeración del último algoritmo (*Algoritmo TC*) porque es indispensable llevar acabo los algoritmos anteriores para poder terminar esté. Debido a que el perfil del cimacio responde a distintas curvas que lo definen y que se han identificado en el capítulo tres, es necesario hacer dichos cálculos preliminares de acuerdo con los intervalos siguientes:

$$x_c \leq x \leq x_P$$

$$x_P \leq x \leq 0$$

$$0 \leq x \leq x_T$$

es decir, hay un un análisis distinto para cada intervalo dependiendo en que tramo del cimacio se quiere obtener el perfil de la superficie libre del agua y la distribución de presión sobre el cimacio; razon por la numeración siguiente.

Algoritmo SU y PR

Igual como los algoritmos anteriores este algoritmo sigue la última numeración porque es indispensable llevar acabo los algoritmos anteriores para poder terminar al algortimo que se presenta a continuación:

19. Proponer x , del cual se desea conocer el perfil del superficie libre y la carga de presión.

7.3.1. Intervalo de $x_c \leq x \leq x_P$

Ese intervalo corresponde al arco A_4 de la figura 2.3

Las variables x_B, y_B es la coordenada del punto B del método semigráfico y R_2 el radio de curvatura, ambos explicados en el capítulo tres

20. Obtener la posición $\frac{\zeta}{H_0}$ correspondiente a ese valor de x sobre el perfil del cimacio:

$$\frac{\zeta}{H_0} = \frac{y_B + \sqrt{-x^2 + 2xx_B - x_B^2 + R_2^2}}{H_0} \quad (7.11)$$

21. Valuar la primera derivada de la ecuación del perfil del cimacio de cresta libre aguas abajo de la cresta con respecto a x ; también conocido como la tangente del ángulo θ

$$\tan \theta = \frac{d\zeta}{dx} = \frac{x - x_B}{\sqrt{-x^2 + 2xx_B - x_B^2 + R_2^2}} \quad (7.12)$$

22. Obtener el coseno del ángulo θ

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{(x-x_B)^2}{-x^2 + 2xx_B - x_B^2 + R_2^2}}} \quad (7.13)$$

23. Obtener el seno del ángulo θ

$$\sin \theta = \frac{x - x_B}{\left(\sqrt{-x^2 + 2xx_B - x_B^2 + R_2^2}\right) \sqrt{-\frac{R_2^2}{x^2 - 2xx_B + x_B^2 - R_2^2}}} \quad (7.14)$$

24. Calcular la curvatura por la carga de diseño κH_0 del perfil para el punto de análisis. Por ser un tramo de círculo, la curvatura κ es $\kappa = \frac{1}{r}$ donde r es el radio

del círculo.

$$\kappa H_0 = \frac{H_0}{R_2} \quad (7.15)$$

7.3.2. Intervalo de $x_P \leq x \leq 0$

Ese intervalo corresponde al arco A_3 de la figura 2.3 donde R_1 es el radio de curvatura de ese tramo de círculo A_3 .

20. Obtener la posición $\frac{\zeta}{H_0}$ correspondiente a ese valor de x sobre el perfil del cimacio

$$\frac{\zeta}{H_0} = \frac{\sqrt{R_1^2 - x^2} - R_1}{H_0} \quad (7.16)$$

21. Obtener la primera derivada de la ecuación del perfil del cimacio de cresta libre aguas abajo de la cresta con respecto a x ; también conocido como la tangente del ángulo θ

$$\tan \theta = \frac{d\zeta}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{R_1^2 - x^2}} \quad (7.17)$$

22. Obtener el coseno del ángulo θ

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{x^2}{R_1^2 - x^2}}} \quad (7.18)$$

23. Obtener el seno del ángulo θ

$$\sin \theta = \frac{x}{\sqrt{R_1^2 - x^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{R_1^2 - x^2}}} \quad (7.19)$$

24. Calcular la curvatura κ por la carga de diseño κH_0 del perfil para el punto de análisis. Por ser un tramo del arco A_3 la curvatura $\kappa = \frac{1}{r}$ donde r es el radio

del círculo.

$$\kappa H_0 = \frac{H_0}{R_1} \quad (7.20)$$

7.3.3. Intervalo de $0 \leq x \leq x_T$

20. Obtener la posición $\frac{\zeta}{H_0}$ correspondiente a ese valor de x sobre el perfil del cimacio:

$$\frac{\zeta}{H_0} = -k \left(\frac{x}{H_0} \right)^n \quad (7.21)$$

21. Valuar la primera derivada de la ecuación del perfil del cimacio de cresta libre aguas abajo de la cresta con respecto a x ; también conocido como la tangente del ángulo θ

$$\tan \theta = \frac{d\zeta}{dx} = -\frac{k \left(\frac{x}{H_0} \right)^n n H_0}{x} \quad (7.22)$$

22. Obtener el coseno del ángulo θ

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{k^2 \left(\left(\frac{x}{H_0} \right)^n \right)^2 n^2 H_0^2}{x^2}}} \quad (7.23)$$

23. Obtener el seno del ángulo θ

$$\sin \theta = \frac{k \left(\frac{x}{H_0} \right)^n n H_0}{x \sqrt{1 + \frac{k^2 \left(\left(\frac{x}{H_0} \right)^n \right)^2 n^2 H_0^2}{x^2}}} \quad (7.24)$$

24. Obtener la curvatura κ y la curvatura multiplicada por la carga de diseño κH_0 del perfil para el punto de análisis; en ese intervalo el perfil del cimacio se define mediante la ecuación 7.21 por lo que la curvatura es diferente en cada punto, por consiguiente al emplear la ecuación 3.3, κH_0 se obtiene mediante la ecuación

siguiente

$$\kappa H_0 = - \frac{k \left(\frac{x}{H_0} \right)^n n(n-1) H_0^2}{x^2 \left[1 + \frac{k^2 \left(\left(\frac{x}{H_0} \right)^n \right)^2 n^2 H_0^2}{x^2} \right]^{\frac{3}{2}}} \quad (7.25)$$

Sección 7.4

Perfil de la superficie libre del agua y distribución de la carga de presión

Para la carga de presión sobre un cimacio de cresta libre hasta ahora siempre se calculaban por medio de gráficas y procedimientos empíricos y ahora se puede obtener al terminar el análisis en esta sección.

25. Obtener el valor de χ mediante la solución de la ecuación 3.23 que se mantiene y es

$$\left[\frac{H}{H_d} - \frac{\zeta}{H_d} \right] = \frac{\cos \theta}{\kappa H_d} \chi + \left[\frac{F \kappa H_d}{(1 - \chi) \ln(1 - \chi)} \right]^2 \quad (7.26)$$

La ecuación tiene dos soluciones una en régimen subcrítico y la otra en régimen supercrítico. Se recuerda que F se obtiene mediante la ecuación 3.6 y es:

$$F = \frac{q}{\sqrt{2g} H_0^{\frac{3}{2}}}$$

donde

$$q = \frac{Q}{L_e}$$

En la figura 7.3 se presenta un ejemplo de la representación gráficamente de la ecuación 7.26; sobre la cual se indica la solución que se debe de elegir.

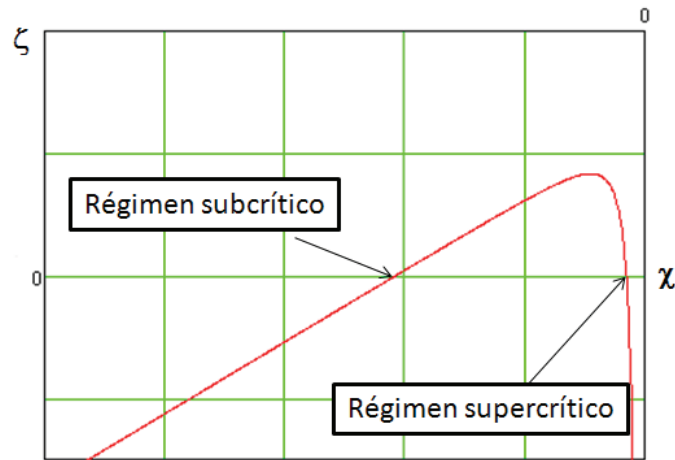


Figura 7.3: Solución de la ecuación 6.7

26. Obtener el tirante d mediante la ecuación siguiente

$$\chi = \kappa d \quad (7.27)$$

27. Calcular la relación adimensional entre la carga de presión y la carga total de diseño $\frac{P}{g\rho H_0}$, que actúa en el punto de análisis mediante la ecuación 6.6 que mantiene igual y es:

$$\frac{P}{g\rho H_0} = \left[\frac{H}{H_0} - \frac{\zeta}{H_0} \right] - \left[\frac{F\kappa H_0}{\ln(1-\chi)} \right]^2 \quad (7.28)$$

28. Para obtener la presión actuante en el punto de análisis, se multiplica el resultado del paso anterior por la carga de diseño, H_0 .

La figura 7.4 muestra el diagrama de flujo para obtener el perfil de la superficie libre del agua y la carga de presión en el fondo de un cimacio para cualquier punto de análisis.

Algoritmo SU y PR

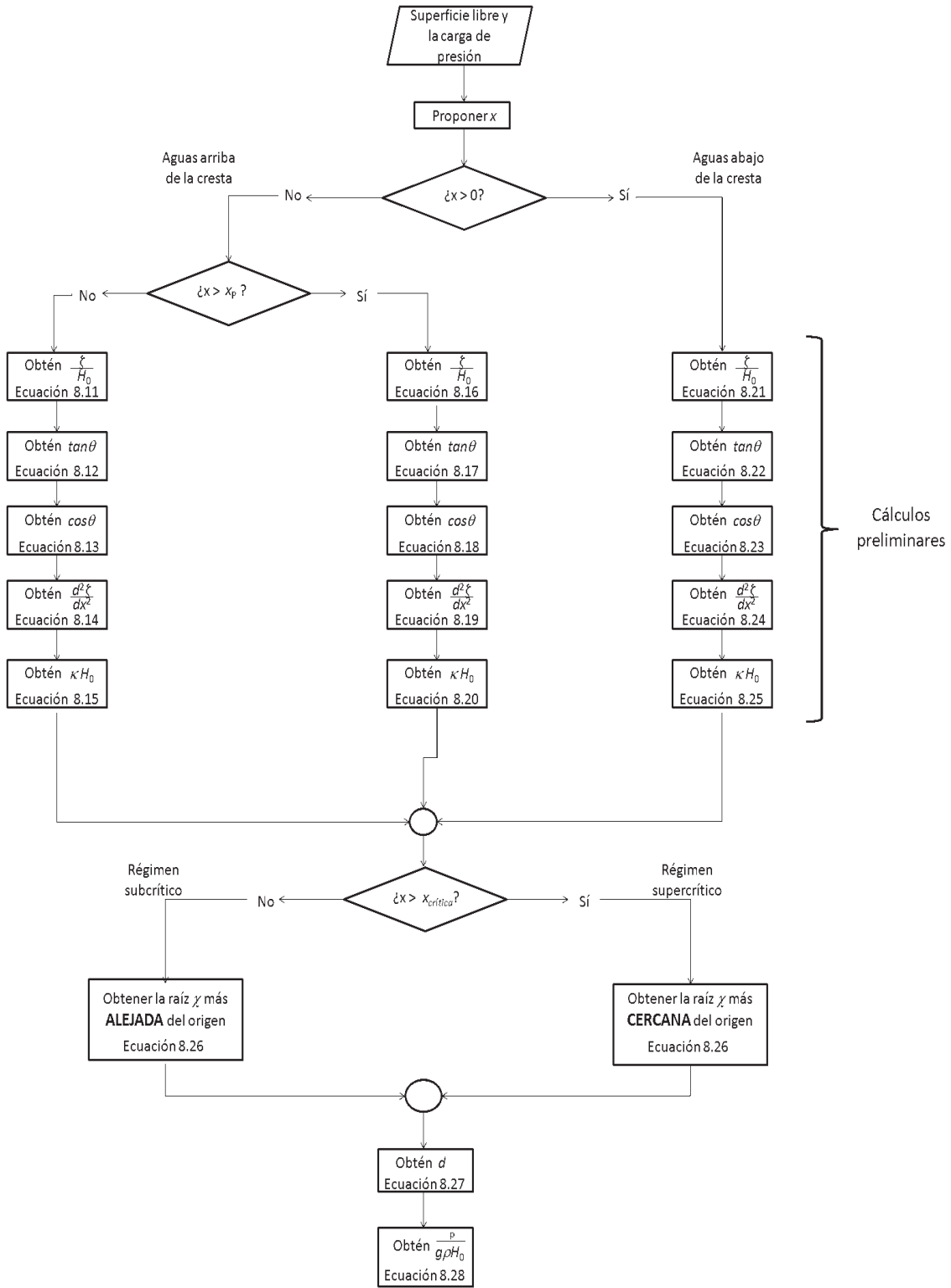


Figura 7.4: Diagrama de flujo para obtener el perfil de la superficie libre del agua y la carga de presión

Comentarios

Para resolver el algoritmo para la obtención de la presión sobre cualquier punto del perfil del cimacio, es importante observar en que intervalo se encuentra el punto de análisis; $x_c \leq x \leq x_P$ o $x_P \leq x \leq 0$ o $0 \leq x \leq x_T$, porque el intervalo determina tanto el perfil del cimacio como en qué régimen se encuentra el flujo. Obtener los valores preliminares del flujo en el punto de análisis tienen gran importancia en la elección correcta de la carga de presión en el mismo. La solución de la ecuación 6.7 tiene dos soluciones, χ , la solución correcta depende en que régimen del flujo se encuentra el punto de análisis. Por lo mismo se recomienda graficar las ecuaciones para así poder diferenciar entre las dos soluciones. En efecto el régimen subcrítico corresponde a todo x aguas arriba del punto crítico y es la solución más alejada del origen y la parte aguas abajo del punto crítico se encuentra el flujo en régimen supercrítico y la solución es la cercana al origen.

También el parámetro adimensional, F , se puede obtener mediante la ecuación 3.6 o por la ecuación 3.8 en donde la segunda está en función del coeficiente de gasto C ; por lo que, en caso de tener el coeficiente de gasto se puede utilizar esa ecuación para obtener el parámetro adimensional, F .

La localización del régimen crítico es un proceso de prueba y error; sólo con la experiencia se obtendrá la respuesta rápida donde se localiza el punto. El cuadro 7.1 muestra la posición aproximada de ese régimen para distintos cargas de operación.

		Régimen Crítico
		$x_{critico}$
Carga de operación, $\frac{H}{H_0}$	0,50	$0,06H_0$
	1,00	$0,09H_0$
	1,33	$0,12H_0$

Cuadro 7.1: Valores aproximados de la posición del régimen crítico para tres condiciones de operación sobre un cimacio

Una aplicación sencilla de los algoritmos de este capítulo es la posibilidad de poder programarlo en una hoja de cálculo o en un software que resuelva y grafique las ecuaciones, como así Mathcad y MATLAB. Se presenta el algoritmo completo, figura 7.5 desarrollado en el programa MATLAB. El apéndice B del presente trabajo desarrolla el algoritmo completo en el programa MATLAB, comprobando así la enorme ventaja de tener al algoritmo programado.

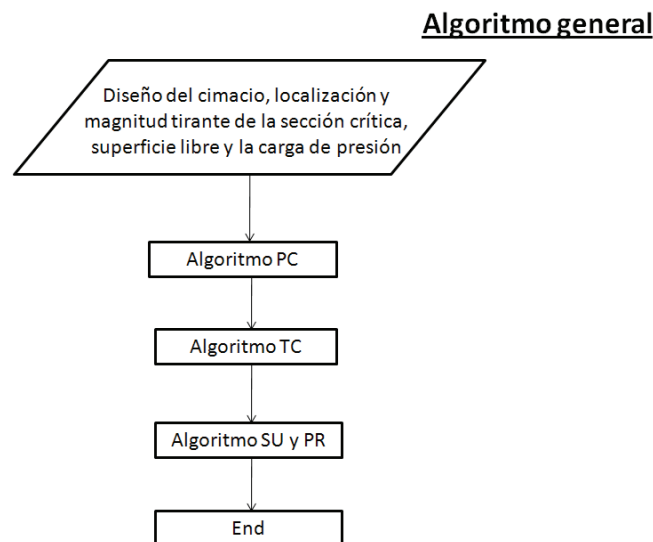


Figura 7.5: Diagrama de flujo completo