



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA

FACULTAD DE INGENIERÍA

DIMENSIONES ÓPTIMAS DE UN MANIPULADOR 3RRR EN BASE A
LA MENOR ENERGÍA.

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

MAESTRO EN INGENIERÍA

INGENIERÍA MECÁNICA- MECÁNICA APLICADA

P R E S E N T A :

YAHVÉ ABDUL LEDEZMA RUBIO



TUTOR:

DR. ÁNGEL ALFONSO ROJAS SALGADO.

2010

JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dr. González Villela Víctor Javier

Secretario: Dr. Ramírez Reivich Alejandro Cuauhtémoc

Vocal: Dr. Rojas Salgado Ángel Alfonso

1er. Suplente: Dr. Espinosa Bautista Adrián

2do. Suplente: M. I. Peñuelas Rivas Ulises Martin

Lugar o lugares donde se realizó la tesis:

MÉXICO D. F.

TUTOR DE TESIS:

DR. ÁNGEL ALFONSO ROJAS SALGADO

FIRMA

I.- Agradecimientos.

Gracias a mi familia, por el apoyo que me brindó desde la más tierna infancia, que me dio ese espíritu para conocer y crecer en este mundo cambiante. Gracias a mi madre, por guiarme en el camino de la vida. Gracias a mi padre, por las lecturas y tiempos que vivimos juntos.

Gracias a mis profesores, no sólo los de la carrera, sino aquellos que encausaron mi camino en los distintos niveles escolares. Gracias a cada uno de ellos adquirí los conocimientos de las aulas, y parte de aquellos conocimientos de la vida que me han formado al día de hoy.

Gracias a mis amigos, a los de día a día, a los que están en tierras lejanas y les veo una vez al año. A todos aquellos que puedo considerar amigos, no sólo por pasar horas de desvelo, horas en el salón de clase, sino por todas las experiencias y tiempos que pudimos y podremos vivir juntos.

Gracias a la UNAM, En especial a la Facultad de ingeniería, por brindarme esa oportunidad de ampliar mis conocimientos, de vivir experiencias buenas y malas, de ser el lugar en el que pude crecer a lo largo del tiempo.

Este trabajo no es solo el término de un ciclo de estudio, sino el resultado de las acciones de muchas personas. Gracias a todos ustedes que han estado conmigo en este camino de estudio y crecimiento.

En especial gracias a al Dr. Ángel Alfonso Rojas Salgado, por el apoyo que me brindó en la realización de este trabajo bajo su supervisión. Gracias también a DGAPA y su programa PAPIIT, por los recursos brindados para realizar esta investigación.

“Gracias a ti, por acompañarme en este camino”

ÍNDICE

	Página
Agradecimientos	4
1 Introducción.	9
La naturaleza y la energía.	10
1.2 Justificación.	10
1.3 Objetivo general.	12
1.4 Objetivos particulares.	12
1.5 Descripción del trabajo escrito.	12
2. Marco teórico.	14
2.1 Antecedentes matemáticos	14
2.1.1 Álgebra vectorial.	15
2.1.2 Base canónica y bases ortonormales.	17
2.1.3 Transformación lineal.	17
2.1.4 Antecedentes de cálculo de una y múltiples variables.	19
2.2 Sistemas termodinámicos.	21
2.2.1 Campo de estudio de la termodinámica.	21
2.2.2 Sistemas termodinámicos y sus fronteras.	22
2.2.3 Propiedades y estados termodinámicos.	23
2.2.4 Trabajo.	24
2.2.5 Energía y la primera ley de la termodinámica.	25
2.2.6 Características de la energía y el trabajo.	25
2.3 Cinemática de un cuerpo rígido.	27
2.3.1 Cinemática de la partícula.	27
2.3.2 Marcos de referencia absolutos y relativos.	30
2.3.3 Cinemática del cuerpo rígido.	31
2.4 Dinámica de un cuerpo rígido.	39
2.4.1 Cantidad de movimiento de un sistema de partículas.	39
2.4.2 Cantidad de movimiento en un cuerpo rígido.	40
2.4.3 Energía cinética de un cuerpo rígido.	43
2.5 Clasificación de los sistemas mecánicos robóticos.	44
2.5.1 Antecedentes de los robots.	44
2.5.2 Eslabones, articulaciones y grados de libertad.	45
2.5.3 Sistemas de lazo abierto y cerrado.	48
2.5.4 Clasificación de los robots.	48
2.6 Principios de optimización.	49
2.6.1 Función objetivo.	50
2.6.2 Variables.	50
2.6.3 Mínimos absolutos y mínimos locales.	51
2.6.4 Funciones objetivo de variable vectorial.	51
2.6.5 Regiones y restricciones.	52
2.6.6 Convergencia.	54

2.6.7 Métodos de optimación.	56
2.6.7.1 Método de malla.	57
2.6.7.2 Método del gradiente o de Cauchy.	58
2.6.7.3 Método de Simplex.	59
2.6.7.4 Métodos heurísticos.	60
2.6.8 Condiciones especiales en la optimación.	61
3. Modelo teórico.	62
3.1 Modelo termodinámico de un manipulador <u>3RRR</u> .	62
3.1.1 Consideraciones del modelo.	65
3.1.2 Energía mecánica.	65
3.2 Modelo cinemático de un manipulador paralelo.	67
3.3 Ecuaciones de energía del sistema.	72
3.4 Ecuación objetivo del sistema.	73
3.5 Restricciones del modelo.	74
3.6 Análisis de trayectoria, las singularidades.	77
3.7 Modos de operación.	79
4. Simulaciones y resultados.	81
4.1 Resultados en trayectoria con energía constante.	81
4.2 Resultados con energía potencial variable.	84
4.3 Resultados con energía cinética variable.	87
4.4 Simulaciones en un manipulador serial plano <u>RRR</u> .	90
4.5 Simulación de modelo <u>3RRR</u> .	93
4.5.1 Trébol de 4 hojas.	93
4.5.2 Trayectoria 8.	98
5. Conclusiones y perspectivas.	101
5.1 Alcances del estudio.	102
5.2 Limitaciones de cómputo.	102
5.3 Perspectivas del estudio a futuro.	103
5.4 Resumen de la metodología ocupada.	104
Bibliografía	105
Artículos generados a partir de este trabajo.	107
Glosario.	108
Índice de figuras.	109

“Todo lo que te viniere a la mano para hacer, hazlo con *todas* tus fuerzas; porque en el sepulcro, a donde tú vas, no hay obra, ni industria, ni ciencia, ni sabiduría.”

Eclesiastés 9:10

1 Introducción.

El ahorro de energía es cada vez más importante dentro de cada una de las actividades del ser humano, ya sea por su costo económico, ambiental o social. Este trabajo de investigación se encamina a proponer y comprobar un nuevo enfoque en el diseño de sistemas mecánicos, tomando en cuenta la energía necesaria para moverlos. El método propuesto ha sido aplicado a cadenas cinemáticas abiertas con resultados alentadores. En este caso, se presentan las aplicaciones para cadenas cinemáticas cerradas, más en específico, para manipuladores robóticos paralelos.

El análisis que se realiza parte de las siguientes proposiciones:

La trayectoria de trabajo que debe de realizar el manipulador está definida para cada tarea en específico, y no se puede modificar.

Los parámetros de diseño que se pueden modificar son las longitudes de los eslabones.

La función a optimizar es la energía mecánica se requiere para poner en movimiento al manipulador

Estas proposiciones se basan en el hecho de que en muchas ocasiones, las tareas a realizar no se pueden modificar, ya sea por el tipo de proceso que realizan o que hayan sido optimizadas. Por otro lado, la propuesta de diseño es que se pueda modificar las dimensiones de los eslabones, para que en cada tarea asignada, ocupe la menor energía posible para realizar dicho trabajo.

La metodología propuesta contiene los siguientes pasos, ya probados en cadenas cinemáticas abiertas, ahora aplicados a cadenas cinemáticas cerradas. Los pasos a seguir son:

Describir el modelo termodinámico

Describir el modelo mecánico

Analizar el sistema cinemático y obtener la ecuación de energía.

Analizar la región factible del movimiento, a partir de las zonas que se encuentran fuera de una singularidad, ya sea serial o paralela, del modelo.

Optimizar la función energía.

Al final, los valores óptimos de el manipulador permitirán que este se mueva con la menor energía posible, canalizando la energía que de introduce al sistema a la realización del la tarea por realizar. El análisis se resume a como ocupar la energía del sistema de forma eficiente, cambiando el diseño del mismo para poder conseguir este objetivo.

La naturaleza y la energía.

La energía es vital para los procesos de la vida. El organismo que mejor este adaptado a su medio y tenga un mejor uso de su energía disponible, será aquel que prevalezca. Pero en pocas ocasiones tomamos en cuenta el valor de ese uso eficiente de la energía. Un ejemplo de qué tan determinante puede ser el uso eficiente de la energía se aprecia en las teorías acerca de la evolución del ser humano. Una teoría reciente indica que el Homo Sapiens, del cual desciende el hombre moderno, superó al Homo Nendertensis por tener un mejor diseño para caminar. A pesar de que el último tenía una mayor masa muscular, un cerebro de mayor volumen, una mejor adaptación al frío de las eras glaciales, la mayor eficiencia para moverse, y así competir por los recursos naturales que tenía el Homo Sapiens fue el factor decisivo en la evolución.

Este mismo factor está presente dentro de las actividades humanas, no como el uso de energía, sino en el costo que esta representa para cierta actividad. Aquello que consuma una menor energía, o lo haga de una forma más eficiente, tendrá una mayor ganancia. También en la parte ambiental, aquello que ocupa energía de una forma más eficiente, producirá menos emisiones, menor contaminación por unidad producida.

Por las implicaciones económicas, sociales y ambientales, el uso eficiente de la energía es un factor fundamental que se tiene que tomar en cuenta al momento de diseñar algún proceso. Desde las actividades humanas más simples, hasta el complejo industrial más complejo el uso eficiente de la energía será factor determinante para continuar con el desarrollo sustentable de la humanidad.

Justificación.

El ahorro de energía representa uno de los grandes retos de la actualidad, tanto por su importancia ecológica como económica. El impacto ambiental de la generación de energía por medios no renovables (petróleo, gas natural) y las consecuencias de los gases de invernadero en el cambio climático dan una gran relevancia a cualquier esfuerzo por el ahorro de energía. Por otro lado, el impacto económico viene de la mano, ya sea directamente en el costo de producción de energía, así como en los costos por daños colaterales a la infraestructura y la población causados por los desordenes ambientales desatados por el uso de combustibles “no limpios”. Estos últimos introdujeron a la atmosfera más de 6800 millones de toneladas de carbono al medio ambiente en el 2003. En la siguiente grafica se observa la preponderancia de la generación de energía eléctrica y la industria dentro de esta descarga al medio ambiente, con sus consecuentes efectos [1].

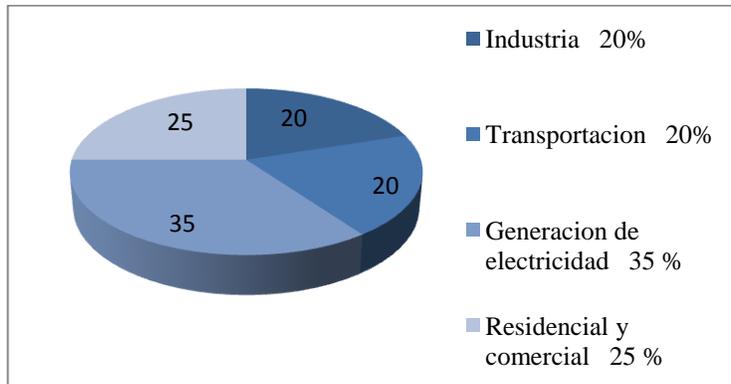


Fig. 1.1 Porcentajes de producción de emisiones de carbono.

Las líneas de trabajo actuales en el ahorro de energía se encaminan en varias ramas. En una de ellas se toma como premisa la generación de energía renovable o limpia, para así mitigar los efectos ambientales del uso de combustibles fósiles. Otra rama se orienta en el incremento en eficiencia, ya sea por el cambio de equipos obsoletos o de baja eficiencia por otros con tecnología reciente. Otra rama mas es la enfocada al cambio de conductas para fomentar el ahorro de energía, concientizando a la población.

De estas medidas, la menos onerosa y de rápida implementación es el cambio de conductas, pero es una de las de menor impacto por los cambios conductuales que se piden a la población. Las otras dos medidas permiten un mayor ahorro de energía, pero son de un mayor costo, como el cambio de equipos, o remplazo de combustibles. En general, se requiere un enfoque integral en el que se tomen en cuenta todos los posibles caminos para el uso eficiente y racional de la energía.

Como ejemplo de las actuales políticas de ahorro de energía se pueden encontrar los programas propuestos por CONAE, los cuales se orientan a la mejora de normas en equipos que proporcionen mejores eficiencias, cambio o mejora de equipos obsoletos y el cambio en conductas del uso de la energía. Casos específicos son aquellos en los que el uso eficiente de lámparas no incandescentes y aparatos electrodomésticos con normatividades vigentes, logren un ahorro del 35% en el consumo de energía dentro del hogar. Otro ejemplo es el ahorro propuesto en los nuevos equipos de aire acondicionado, que llega a un 25 % según la norma actual (NOM-011-ENER-2006). Un último ejemplo, orientado al cambio de conductas esta dado por el cambio en formas de manejo de vehículos de transporte de pasajeros o carga, en los cuales el cambio en la forma de manejo logran un ahorro del 6.99% de combustible a comparación de un manejo normal.

La importancia del ahorro de energía radica en que debemos de mejorar la forma de producirla, como consumirla y como usarla, ya sea por los equipos de generación o por la forma en la que ocupamos esta energía, para mitigar los efectos colaterales que ocasionan su uso irracional. En la

actualidad, dentro del campo de los manipuladores robóticos se pueden observar avances en los actuadores, siendo de mayor eficiencia, así como en la planeación de las trayectorias a realizar. Siendo así, el presente trabajo explora otra rama más, en la que el diseño de manipulador o un mecanismo va a depender del mejor uso de energía para una tarea asignada.

1.3 Objetivo general.

Al final del presente trabajo se busca llegar al siguiente objetivo:

Encontrar las dimensiones óptimas de diseño para un manipulador 3RRR a partir del menor estado energético del mismo.

Las dimensiones de diseño se refieren a las longitudes y formas que debe de tener el manipulador para con ellas ir modificando los valores de inercia que estén involucrados. Las ecuaciones de energía del manipulador quedaran en función de estas dimensiones de diseño, y se buscara la combinación de dimensiones que logren un mínimo en el estado energético al ir realizando la tarea requerida.

1.4 Objetivos particulares.

Para el desarrollo de este trabajo se requiere ir cumpliendo con diferentes etapas, en las cuales se pueden identificar los siguientes objetivos particulares:

Definir el estado energético y los flujos de energía que afectan al manipulador.

Describir la cinemática y dinámica del manipulador.

Relacionar las dimensiones de diseño del manipulador con la función de energía.

Definir las restricciones del sistema, ya sea directamente por la geometría que adopta o por el análisis del Jacobiano asociado a su movimiento.

Encontrar un método para poder optimizar la función objetivo de energía del manipulador.

El cumplimiento de estos objetivos particulares se logra por medio de la relación entre los conocimientos básicos de mecánica clásica y termodinámica, por medio de los que se pretende modelar el sistema. Al final, englobando todos ellos cimentan el objetivo general para su aplicación.

1.5 Descripción del trabajo escrito.

Para cumplir con los objetivos generales y particulares, el desarrollo del presente trabajo integra el conocimiento necesario para el análisis planteado, con la siguiente división de capítulos.

En el capítulo 2 se da una introducción a los conocimientos básicos generales que se aplican dentro del modelo, que van desde la termodinámica, la mecánica clásica, la descripción de los

manipuladores y robots hasta los conceptos básicos y una breve introducción a la optimización de sistemas.

En el capítulo 3 se explora la relación de los conocimientos anteriores en la descripción de un conjunto de manipuladores, creando una serie de modelos teóricos para su análisis. Desde un modelo base previamente analizado, un manipulador RRR, hasta la descripción del modelo en análisis actual, el manipulador 3RRR, se muestran cuáles son las particularidades de cada uno de los modelos matemáticos propuestos.

El capítulo 4 presentan los modelos RR, RRR y un manipulador 3RRR, como sistemas idealizados y las simulaciones realizadas con ellos. El análisis abarca desde la definición del modelo dinámico de cada manipulador hasta la definición de sus restricciones, como son las singularidades del sistema. Se obtienen los resultados para diferentes procesos, ya sean estos de energía constante o variable, y se observa cómo afectan al manipulador.

En el capítulo 5 se analizan los resultados a la par de las conclusiones a las que llega este trabajo.

Este texto se desarrolla con las bases de la termodinámica y la mecánica clásica, por el tipo de sistemas que se pretenden analizar, ya que quedan bien descritos con estas teorías.

“Sabemos muy poco, y sin embargo es sorprendente que sepamos tanto, y es todavía más sorprendente que tan poco conocimiento nos dé tanto poder.”

Bertrand Russell

2 Marco teórico.

La generación del conocimiento del hombre es un problema filosófico estudiado desde la época clásica. Ya sea desde la forma en que adquirimos conocimiento por medio de la clasificación de las cosas, hasta el tratar de llegar a teorías generales que engloben lo que ocurre en un área del conocimiento, la descripción final del todo. De ésta forma tratamos de encontrar un orden, una forma sistemática de resolver nuestros problemas, sino la más sencilla, si aquella que nos exima de caer en errores de apreciación, que permita adentrarnos en el conocimiento de las causas, de los efectos. De ésta forma llegamos al método científico, que trata de proporcionarnos las herramientas para el análisis de las cosas, desde las más simples hasta las más complejas [3].

El desarrollo de nuevas ideas parte de aquello que conocemos, pero por sí sólo, es un método falible. Es así pues las preconcepciones que existan acerca de un campo del conocimiento pueden ser erróneas, como en los tiempos en los que era una verdad absoluta que el mundo era plano. Pero la crítica racional que podamos realizar a las ideas, propias o de otros, es lo que nos permite llegar a una verdad mas solida del comportamiento de las cosas. Realzando un balance entre lo que ya conocemos y dejando la puerta abierta para encontrar cosas nuevas. De esta forma estimo que las mejores herramientas para desarrollar un nuevo saber son los conocimientos sólidos y el pensamiento crítico que podamos aplicar a ellos.

En este tenor, el marco teórico que fundamenta los razonamientos que se presentan es de vital importancia. Por ello, a lo largo de este capítulo se presentan parte de los conocimientos previos para el análisis del modelo propuesto. En él se desarrolla desde los conceptos básicos de la matemática a ocupar, hasta los conocimientos de cada área en particular que se encuentra involucrada. Estos brevarios sólo muestran aquellas partes que se ocuparan más adelante, sin adentrarse a profundidad en los alcances de cada una de ellas, pero si preparando el campo para saber hasta dónde se pretende llegar en el presente estudio.

2.1 Antecedentes matemáticos

Se atribuye a Gauss la siguiente cita: “Para poder decir que conocemos algo, lo tenemos que poder expresar en números”. De esta forma, para poder hablar de los números de nuestro interés, es necesario plantear cuáles son las herramientas matemáticas que vamos a utilizar y cuáles son las reglas que les rigen. En esta sección se realiza una introducción a la nomenclatura y algebra que se va a ocupar en el desarrollo de este texto. Éste no es un estudio a profundidad de esta estructura matemática, sino solamente un brevario de aquellas herramientas que ocuparemos para posteriormente poder hablar en números del ahorro de energía.

2.1.1 Álgebra vectorial.

Las propiedades de los conjuntos de números reales \mathbf{R}^2 y \mathbf{R}^3 bajo ciertas operaciones, nos hace llegar intuitivamente a la idea de que existen conjuntos que presentan un orden bajo ciertas características. Vamos a trabajar con estos conjuntos, bajo el concepto de que son espacios vectoriales. En el caso particular de \mathbf{R}^2 y \mathbf{R}^3 , que tienen como vectores a diadas y triadas de números reales y como escalares a los mismos números reales. Como espacios vectoriales, estos presentan las siguientes características [4]:

“Un espacio vectorial es un conjunto de objetos denominados vectores V , que junto con el conjunto E de elementos conocidos como escalares y con dos operaciones conmutativas $+$ (suma) y \cdot (producto por un escalar) definidas de la siguiente forma

$$+: V \otimes V \rightarrow V$$

$$(x, y) \rightarrow x + y; x, y \in V$$

y

$$\cdot : E \otimes V \rightarrow V$$

$$(\lambda, x) \rightarrow \lambda \cdot x; \lambda \in E, \lambda x \in V$$

con elementos neutros $\mathbf{0}$ y 1 respectivamente, que cumplen con los siguientes axiomas:

Conjunto cerrado a la suma. Si $x \in V$ y $y \in V$, $x + y \in V$,

Ley asociativa. Para todo $x, y, z \in V$ $(x + y) + z = x + (y + z)$,

Neutro aditivo. Existe un vector $\mathbf{0} \in V$ tal que para todo $x \in V$ tal que $x + \mathbf{0} = \mathbf{0} + x = x$.

Inverso aditivo. Para todo vector x existe un vector $-x$ tal que $x + (-x) = \mathbf{0}$.

Ley conmutativa. Si $x, y \in V$, entonces $x + y = y + x$.

Conjunto cerrado al producto. Si $x \in V$ y $\alpha \in E$, entonces $\alpha x \in V$

Primer ley distributiva. Si $x, y \in V$ y $\alpha \in E$, entonces $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.

Segunda ley distributiva. Si $x \in V$ y $\alpha, \beta \in E$, entonces $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$.

Ley asociativa de la multiplicación escalar. Si $x \in V$ y $\alpha, \beta \in E$, entonces $\alpha(\beta x) = \alpha\beta x$.

Neutro multiplicativo. Para todo $x \in V$, $1x = x$.

“

Tenemos que para los conjuntos de \mathbf{R}^2 y \mathbf{R}^3 como vectores y con \mathbf{R} como escalar, se tiene un espacio vectorial con suma estándar y multiplicación por un escalar estándar.

Aparte de estas operaciones, es necesario dentro de estos conjuntos definimos otras tres operaciones, que son el producto interno o producto punto, la norma y el producto cruz, que posteriormente serán de utilidad.

El producto interno entre dos vectores quedará definido de la siguiente forma:

“Sean \mathbf{x} y \mathbf{y} dos vectores con componentes (x_1, x_2, \dots, x_n) y (y_1, y_2, \dots, y_n) , la operación producto interno queda definida de la siguiente forma:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot (y_1, y_2, \dots, y_n) = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$$

“

Por norma de un vector tenemos la siguiente definición.

“Sea \mathbf{x} un vector con componentes (x_1, x_2, \dots, x_n) , la norma del mismo es:

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

siendo el resultado un número real, que es la medida del vector”

Con estos dos conceptos podemos definir el coseno del ángulo entre dos vectores, que es la razón del producto punto de los vectores entre la norma de los mismos, expresado en la siguiente ecuación:

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{|\mathbf{x}||\mathbf{y}|}$$

Para el producto cruz se tiene que es un producto que genera un vector perpendicular a otros dos vectores en \mathbf{R}^3 . Este se encuentra definido por la base canónica del sistema, representada por los vectores unitarios $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}$. La operación entre dos vectores sería definida de la siguiente forma:

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y)\hat{\mathbf{i}} - (a_x b_z - a_z b_x)\hat{\mathbf{j}} + (a_x b_y - a_y b_x)\hat{\mathbf{k}}$$

Este producto también puede ser interpretado de la siguiente forma:

$$\text{sen } \theta = \frac{\mathbf{x} \times \mathbf{y}}{|\mathbf{x}||\mathbf{y}|}$$

2.1.2 Base canónica y bases ortonormales.

A los vectores $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}$, se les conoce como base canónica del espacio tridimensional \mathbf{R}^3 . Esto es porque es un conjunto linealmente independiente, y además genera a todo el espacio vectorial \mathbf{R}^3 .

La base de un espacio vectorial no es necesariamente única, como se pensaría que es la base canónica del espacio tridimensional. Puede existir otro conjunto de vectores linealmente independientes que también generen al mismo espacio. Así, por ejemplo, cualquier punto del espacio bidimensional puede ser representado por una combinación lineal de los vectores (1,0) y (0,1), pero también por los vectores linealmente independientes (1,3) y (-1,2). Aunque darán diferente combinación lineal, pueden representar al mismo punto del espacio, y buscando la igualdad entre ellos, se puede encontrar una matriz A que transforme de un sistema de coordenadas a otro:

$$\mathbf{x}_b = A\mathbf{x}_a$$

De los diferentes conjuntos de vectores que pueden ser base, nos interesamos por aquellos que cumplan con las siguientes características:

Los vectores generadores son ortogonales, es decir, el producto interno entre cualquiera de ellos con es el vector cero.

Su norma es 1.

Estos conjuntos son de importancia, como se verá más adelante, pues permiten una descripción sencilla del espacio, ya sea en \mathbf{R}^2 o \mathbf{R}^3 .

El conjunto de vectores de la base canónica cumple con los puntos que se buscan deseables en una base, ya que:

$$\hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{j}} = 0, \hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 0, \hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 0$$

$$|\hat{\mathbf{i}}| = |\hat{\mathbf{j}}| = |\hat{\mathbf{k}}| = 1$$

A estos conjuntos se les conoce como vectores ortonormales. Estos agrupan la característica de que son una base, que son ortogonales entre sí pues el producto interno entre cualquiera de ellos distinto es cero, y tienen norma de 1.

2.1.3 Transformación lineal.

Así como las funciones permiten relacionar ordenadas con abscisas en el espacio de \mathbb{R}^2 , una idea general de estas relaciones se puede ver a través de las transformaciones lineales, que pueden relacionar de los espacios vectoriales entre sí de manera funcional. Para las transformaciones lineales se tiene la definición:

“Sean V y W espacios vectoriales. Una transformación lineal de T de V en W es una función que asigna a cada vector $\mathbf{v} \in V$ un único vector $T\mathbf{v} \in W$, y que satisface las siguientes condiciones:

$$T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T\mathbf{u} + T\mathbf{v}$$

$$T(\alpha\mathbf{v}) = \alpha T\mathbf{v}$$

”

Las transformaciones lineales pueden estar representadas por medio de una matriz de transformación, la cual trae inmersa la representación de los vectores de una base en un espacio vectorial a otro espacio vectorial. Este concepto nos ayuda a encontrar una matriz que represente al mismo vector dentro de dos espacios vectoriales diferentes, y para el caso particular de que sea el mismo espacio vectorial, entre dos bases distintas.

Un ejemplo que se ampliará adelante es la transformación lineal entre bases ortonormales de \mathbb{R}^3 . En este caso, definamos un sistema base XYZ , con ejes perpendiculares y con una base ortonormal $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$. Junto a este sistema y con un origen coincidente coloquemos otro sistema coordenado xyz , con ejes perpendiculares y una base ortonormal $\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}$. Ambos sistemas se encuentran orientados de manera distinta como se observa en la figura 2.1.

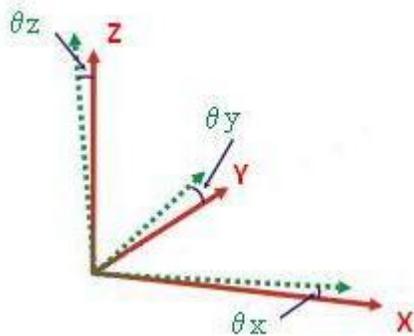


Fig. 2.1 Sistemas coordenados con distinta orientación.

En estos sistemas coordenados podemos tener un vector \mathbf{a} , que tiene representación en una y otra base. Pero también podemos encontrar la relación entre estas representaciones en diferentes bases de la siguiente forma:

$$(\mathbf{a})_{Base\ 1} = A_T(\mathbf{a})_{Base\ 2}$$

Al ser invertible esta matriz, se puede encontrar una matriz que lleve de regreso al vector entre los sistemas de la siguiente forma:

$$(\mathbf{a})_{Base\ 2} = A_T^{-1}(\mathbf{a})_{Base\ 1}$$

Entonces podemos encontrar una única matriz que permita pasar de un sistema coordenado al otro. Pero para conservar la medida entre ellos es necesario del concepto de isometría, en el cual no sólo se conserva la forma, como en un isomorfismo, sino además de conserva la medida, al pasar la operación de producto interno entre los espacios vectoriales de la siguiente forma

$$Tx \cdot Ty = x \cdot y$$

De esta forma, con una transformación lineal isométrica e isomórfica, podemos conocer la orientación entre diferentes sistemas coordenados, además de poder conservar la medida entre ellos.

2.1.4 Antecedentes de cálculo de una y múltiples variables.

En el análisis de funciones de una sola variable, nos interesa el conocer el comportamiento de la función para poder describirla. Así, por medio del cálculo diferencial podemos encontrar la pendiente para todo momento, por medio de la derivada, los puntos extremos de la función, igualando esta derivada a cero, y conocer si se trata de un máximo, un mínimo o un punto de inflexión, conociendo el comportamiento de la segunda derivada de la función.

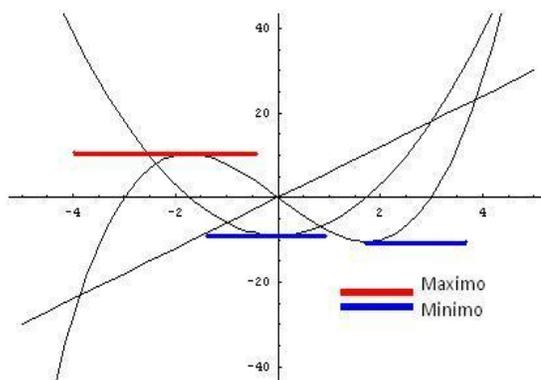


Fig. 2.2 Máximos y mínimos locales en una función.

De esta forma, queda descrito el comportamiento de la función y los puntos de interés, como lo son los mínimos.

De la misma forma, en el cálculo de múltiple variable es posible encontrar los puntos extremos de una función conocida y definida, si se puede analizar el comportamiento de las derivadas de esta función. La forma en representar estas derivadas es por medio de un arreglo matricial en el que podemos conocer las derivadas parciales de la función con respecto a cada una de las variables de la siguiente forma:

$$\nabla f = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right]$$

Conocido como el gradiente de una función escalar de variable vectorial, también se le conoce como Jacobiano. Este elemento nos permite encontrar el comportamiento de las derivadas parciales de la función f para todo momento. El punto de interés será entonces cuando las derivadas parciales valgan cero, ya que ello indicará un punto extremo. También será necesario el conocer el comportamiento de la segunda derivada, pero en este caso en forma de derivadas parciales con respecto a cada una de las variables. A este elemento se le conoce como Hessiano, y es el que permita identificar si se trata de un punto máximo, mínimo o un punto de inflexión dentro de la función escalar de variable vectorial.

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

Pero para que ambos elementos puedan ser de ayuda, la función debe de ser evaluable en todo punto, siendo diferenciable parcialmente para todas sus variables y continua para todo punto. Si no se cumple esto o, para sistemas complejos, este procedimiento puede llevar a estructuras complejas de difícil resolución. Así, una función escalar de variable vectorial puede ser analizada, y encontrar los puntos de máximos y mínimos locales o absolutos.

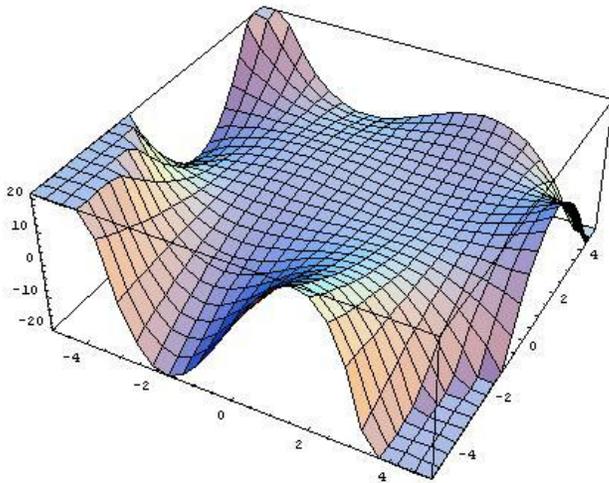


Fig. 2.3 Función escalar de variable vectorial.

2.2 Sistemas termodinámicos.

Este estudio propone el diseño de un manipulador por medio de un estado energético bajo. Pero para poder definir a que energía nos estamos refiriendo, de dónde proviene y hacia dónde se dirige, es necesario el conocer ciertos conceptos de termodinámica. Esta rama de la física es muy recurrida en los análisis químicos, en los procesos de transformación de energía y de transferencia de calor. En este caso, aplicando varios de los conceptos de la termodinámica a los sistemas mecánicos en estudio, se pretende describir cual es el sistema en estudio y cómo es que se plantea el ahorro de energía.

2.2.1 Campo de estudio de la termodinámica.

La termodinámica se ocupa de las transformaciones de la energía y de la relación entre las propiedades físicas de las sustancias o elementos involucrados dentro de estas transformaciones. Con ello se plantea un amplio campo de acción, desde sistemas de combustión hasta sistemas de generación de energía por medios eólicos y celdas de energía.

Existen dos visiones para el estudio de la termodinámica. En la primera se toma una visión macroscópica de los sistemas, mientras que en la segunda se realiza el estudio estadístico del comportamiento de las partículas individuales del sistema. El primer caso se conoce como termodinámica clásica, siendo que no requiere una hipótesis detallada de la forma en que están constituidos los sistemas, y sobrevive en general aun cuando cambien las descripciones microscópicas de dichos elementos. Por el otro lado, se tiene a la termodinámica estadística, la cual se encarga del comportamiento de cada elemento de la sustancia en estudio, tomando las características estadísticas de todos los elementos. Existen también los acercamientos por medio de la teoría cinética de la materia, para ello se requiere la descripción de las interacciones entre

todas las partículas a partir de la mecánica newtoniana. De todos estos enfoques, aquel que ocuparemos es el de la mecánica clásica, tomando en cuenta sólo la parte macroscópica, no interesando el comportamiento microscópico de los elementos de estudio.

Puntos fundamentales de la termodinámica clásica se basan en 5 leyes que rigen estas interacciones. Los primeros dos postulados se enfocan a la energía dentro del sistema, la primera ley de la termodinámica se encarga del balance de energía y su conservación, la segunda ley se enfoca a la calidad de la energía dentro del sistema. Los otros dos postulados se encargan de las relaciones entre las propiedades termodinámicas de los sistemas, como el postulado de estado, la ley cero y la tercera ley de la termodinámica. En este caso, al no estar estudiando las propiedades de las sustancias, sólo nos enfocaremos a la energía y sus características.

Un concepto importante es el de eficiencia. Un acercamiento intuitivo dice que la eficiencia será la razón entre energía que obtengo del sistema y la que tengo que introducir al mismo.

$$\eta = \frac{\textit{Trabajo obtenido}}{\textit{Energía proporcionada}}$$

Este concepto de eficiencia será útil, al definir los sistemas involucrados y los flujos de energía dentro del sistema mecánico que estudiamos.

2.2.2 Sistemas termodinámicos y sus fronteras.

El primer punto es definir al sistema que estudiaremos. Un sistema es un espacio tridimensional que se encuentra acotado por superficies que llamaremos fronteras. Estas fronteras, reales o imaginarias son arbitrarias, y dependen de lo que queramos analizar. A partir de dichas fronteras se pueden identificar dos regiones. La primera, dentro de las fronteras, se conoce como sistema, mientras que la segunda, fuera del sistema, se le conoce como alrededores. En particular, los alrededores son aquella vecindad inmediata que interactúa con el sistema.

Las fronteras se pueden clasificar de la siguiente forma: permiten el paso de energía y materia, y aquellas que sólo permiten el paso de energía, mas no de materia. El primer caso determina un sistema abierto, ya que puede cambiar materia con los alrededores, mientras que el segundo caso determina un sistema cerrado, con sólo el intercambio de energía a través de las fronteras. Un caso especial de estas fronteras es la frontera adiabática, que corresponde a un sistema cerrado, y además, no permite el flujo de calor entre el sistema y los alrededores, sino únicamente del paso de trabajo. A los sistemas cerrados se les conoce como masa de control, pues no varía la misma, y a los sistemas abiertos se les conoce como volumen de control. En la figura siguiente se puede apreciar este tipo de sistemas.

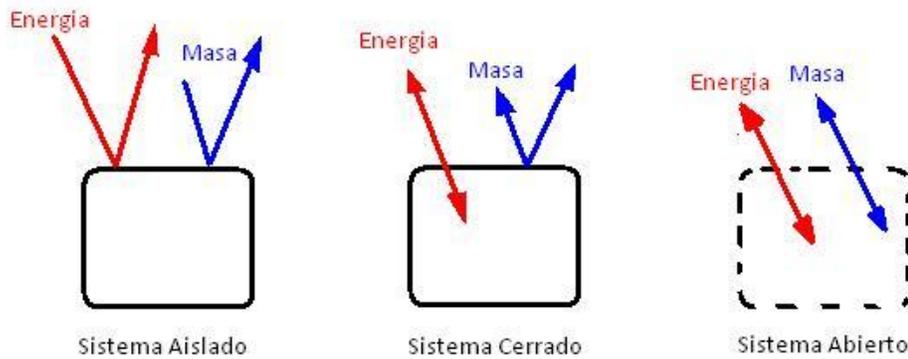


Fig. 2.4 Sistemas aislado, cerrado y abierto.

2.2.3 Propiedades y estados termodinámicos.

Una propiedad es una característica del sistema que puede cuantificarse por medios directos o indirectos y es característica del sistema. Esta propiedad tiene un valor único para cada condición del sistema y describe características en particular del mismo. Ejemplo de estas propiedades están la presión, el volumen específico, la energía de Gibbs o la energía cinética que posee el sistema. Dentro de las propiedades podemos identificar dos tipos, las extensivas, que están relacionadas directamente con la cantidad de materia existente dentro del sistema, y las intensivas, independientes de la cantidad de materia. Ejemplo de propiedades extensivas se tienen al peso, el volumen o la energía cinética, mientras que ejemplos de las propiedades intensivas se tienen a la presión, la temperatura y la densidad.

Ahora, con un conjunto de propiedades podemos caracterizar un estado del sistema, siempre y cuando estas propiedades se encuentren en equilibrio dentro del sistema. Este estado en equilibrio implica que hay balance entre fuerzas, composiciones químicas o térmicas, sin presentar cambios macroscópicos observables en las propiedades. El equilibrio termodinámico será entonces sinónimo de que el sistema se encuentra en un estado en el que no existen cambios espontáneos y finitos hacia algún otro estado sin que ocurran cambios en los alrededores del sistema. Este equilibrio se verá reflejado en el que no existan cambios de temperatura (equilibrio térmico), presiones o fuerzas (equilibrio mecánico), cambios netos en la composición química dentro del sistema (equilibrio químico), o cambios en el estado de agregación de los componentes (equilibrio de fase).

A los cambios entre un estado termodinámico y otro se les conoce como proceso, y en ellos ocurrirá algún cambio en las propiedades del sistema. Este proceso se encuentra definido por una trayectoria, a cual se refiere a la descripción en el cambio de las propiedades, a través de los que

pasa el sistema de un estado de equilibrio a otro. Para describir el proceso es necesario el conocer el estado inicial, el estado final, la trayectoria y las interacciones a través de la frontera.

2.2.4 Trabajo.

De los cursos de mecánica clásica se extrae que el trabajo W es la acción de una fuerza F y un desplazamiento s , cuando estos se realizan en la misma dirección. Vectorialmente esto se expresa de la siguiente forma.

$$\delta W = F ds = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

Para obtener el trabajo total realizado por una fuerza, es necesario realizar la integración de este término, por lo que se requiere una relación funcional entre la fuerza y el desplazamiento. Para los procesos termodinámicos se tiene una definición amplia de trabajo, como la interacción entre el sistema y sus alrededores de forma que el único efecto externo de dicha interacción pudiera haber sido la elevación de un peso (fuerza) una cierta distancia (desplazamiento). La amplitud de esta definición se debe a las diferentes formas de trabajo que pueden estar involucradas dentro del proceso. Un ejemplo de ellas es que el trabajo que puede efectuar un sistema sobre un peso puede ser realizado por medio de un pistón que desplace el peso una cierta distancia, o por medio de una flecha, que remolque un cable que eleve un peso esa misma distancia.

El siguiente punto es identificar el sentido del trabajo. Si un trabajo entra a un sistema, éste será positivo, mientras que si sale del sistema, éste será negativo para el sistema. En la figura siguiente, al momento de que el motor mueve al peso dentro del sistema se está introduciendo trabajo al mismo, mientras que en la segunda figura, el peso mueve al generador, el sistema está brindando trabajo a los alrededores, y por lo tanto, saliendo del sistema.

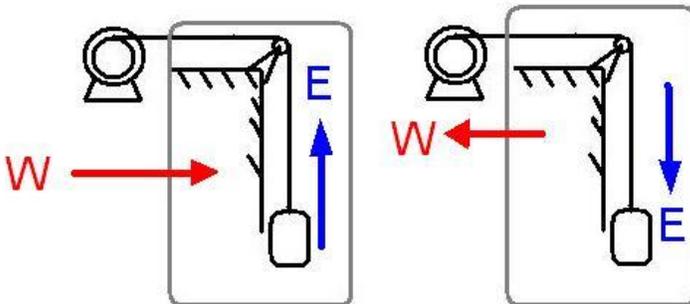


Fig. 2.5 Flujo de trabajo al sistema y desde el sistema.

Puntos importantes dentro del trabajo son su razón de cambio con respecto al tiempo, que conocemos como potencia y la definición de proceso adiabático, que es aquel en el que las

interacciones que ocurren entre el sistema y los alrededores son únicamente en la forma de trabajo, sin ocurrir transferencia de calor.

$$\frac{dW}{dt} = \dot{W} = \text{Potencia}$$

2.2.5 Energía y la primera ley de la termodinámica.

Este postulado nos dice que al modificar adiabáticamente a un sistema cerrado, la cantidad total de trabajo asociada a dicho cambio sólo dependerá del estado inicial y final del proceso, sin importar la trayectoria del proceso. Este cambio que ocurre sólo dependió del estado inicial y final del proceso se puede clasificar como una propiedad a la que llamamos energía.

Se puede expresar la primera ley de la termodinámica de la siguiente forma:

$$W_{ad} = E_{fin} - E_{ini} = \Delta E$$

Implica que el trabajo adiabático sólo depende del cambio en la propiedad llamada energía, y estará definida para cada estado, sin importar la trayectoria del proceso que lleve de un estado a otro.

Existen también interacciones de tipo térmico, ocasionadas por la diferencia en temperaturas entre el sistema y los alrededores. A esta interacción se le conoce como calor. Evaluando ahora al mismo sistema cerrado, se observa que el cambio de energía no sólo depende el trabajo adiabático, sino también del calor que hay en el sistema, este calor queda cuantificado de la siguiente forma:

$$Q = E_2 - E_1 - W$$

$$Q + W = E_2 - E_1$$

De esta relación se observa que el calor que se introduce en el sistema aumenta la cantidad de energía del mismo, así como el trabajo que se introduce al sistema.

Aunque la energía es independiente de la trayectoria por la que se llegue entre dos estados, no sucede lo mismo con el calor y el trabajo. Ambos dependen de la trayectoria del proceso que se realice. Para encontrar el valor de ellos se requiere evaluar las diferenciales inexactas que les describen, para obtener su valor total.

2.2.6 Características de la energía y el trabajo.

El trabajo como la energía total del sistema cerrado proviene de la combinación de múltiples fuentes, cada una definida dependiendo de qué es lo que ocasione dicho estado. Una primera distinción que se puede hacer con ellas es identificar si son intrínsecas o extrínsecas. El trabajo o energía intrínseca tiene dependencia con la naturaleza del medio o sustancia que se encuentra

dentro del sistema, mientras que si se trata de una cantidad extrínseca, ésta es independiente de qué sustancia está contenida en el sistema. De esta forma, la ecuación que define los equilibrios en un sistema cerrado queda de la siguiente forma:

$$\delta Q + \delta W^{ext} + \delta W^{int} = dE^{ext} + dE^{int}$$

Todos los tipos de energía se pueden clasificar como formas de energía cinética (EC), por el movimiento del cuerpo, o en energía potencial (EP), resultado de la posición relativa que tiene éste con otros cuerpos. La energía cinética lleva envueltos tres términos, dos extrínsecos y uno intrínseco. El primero es la energía cinética lineal, que relaciona la masa y la velocidad lineal del cuerpo. El segundo término es la energía cinética rotacional, relacionando la inercia del cuerpo y su velocidad angular. El tercer término se refiere al movimiento de las partículas que componente al sistema, relativo al centro de masa del sistema. Esto se expresa de la siguiente forma:

$$E_{EC\ Total} = E_{EC\ Lineal}^{ext} + E_{EC\ Rotacional}^{ext} + E_{EC}^{int}$$

$$E_{EC\ Total} = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} + E_{EC}^{int}$$

En esta ecuación, m se refiere a masa contenida en el sistema, I su momento de inercia, v a la magnitud de la velocidad lineal y ω a la magnitud de la velocidad angular. DE esta forma, queda descrita la energía cinética total del sistema.

La energía potencial engloba a cuatro elementos potenciales. El primero es con respecto al campo gravitacional local, el segundo corresponde a la energía potencial electrostática, el tercero a la energía potencial magnetostática y el cuarto corresponde a la interacción entre las partículas del medio contenido dentro del sistema. Se tiene que, mientras que las primeras tres son medibles y extrínsecas, la cuarta forma de energía potencial es intrínseca y no se puede medir directamente. La forma en la que se expresan estas energías potenciales es la siguiente:

$$E_{EP\ Total} = E_{EP\ Gravitacional}^{ext} + E_{EP\ Electr}^{ext} + E_{EP\ Magnet}^{ext} + E_{EP}^{int}$$

$$E_{EP\ Total} = mg\Delta z + \frac{V\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{V\mu_0 H^2}{2} + E_{EP}^{int}$$

En donde g es la aceleración gravitacional local, ϵ_0 es la permitividad eléctrica, μ_0 es la susceptibilidad magnética, V el volumen del sistema, m su masa, E El campo eléctrico y H el campo magnético.

De esta forma, si pretendemos describir completamente la energía de un sistema, y simplificando los términos de energía potencial a EP y energía cinética a EC, la ecuación correspondiente será:

$$\begin{aligned} \delta Q + \delta W^{ext} + \delta W^{int} \\ = dEP_{Grav} + dEP_{Electr} + dEP_{Magnet} + dEP_{intr} + dEC_{Lin} + dEC_{Rot} + dEC_{intr} \end{aligned}$$

Sin embargo, las energías intrínsecas no se pueden obtener directamente, pero se pueden agrupar en un término conocido como energía interna, que es una propiedad del sistema y el cual se expresa de la siguiente forma:

$$U = E_{EP}^{int} + E_{EC}^{int}$$

Volviendo a desarrollar la ecuación, se tiene entonces:

$$\begin{aligned} \delta Q + \delta W^{ext} + \delta W^{int} \\ = dU + dEP_{Grav} + dEP_{Electr} + dEP_{Magnet} + dEP_{intr} + dEC_{Lin} + dEC_{Rot} \\ + dEC_{intr} \end{aligned}$$

Esta última ecuación engloba a todas las energías que se encuentran dentro del sistema cerrado, y representa el principio de conservación de energía para un sistema cerrado.

En el caso de la termodinámica clásica los valores de energía y trabajo extrínsecos son despreciados, pues se considera que no presentan cambios relevantes en los procesos estudiados. En cambio, para el presente estudio los valores que se desprecian son los valores intrínsecos, ya que no estamos analizando la composición del sistema, sino a cantidades independientes de la naturaleza o sustancia del sistema. Con ello, la ecuación de energía que vamos a ocupar puede reducirse a la siguiente expresión:

$$\delta W^{ext} = dEP_{Grav} + dEP_{Electr} + dEP_{Magnet} + dEC_{Lin} + dEC_{Rot}$$

2.3 Cinemática de un cuerpo rígido.

La cinemática es la rama de la mecánica encargada del movimiento de los cuerpos, sin importar sus causas que lo originen. Siendo así, esta sección analizará la forma en que se describen los cuerpos en el espacio, haciendo referencia a cualidades tales como posición, desplazamiento, velocidad, aceleración y movimiento angular. Estas descripciones son la base de estudio de la mecánica clásica, y por medio de ellas se puede desarrollar un modelo del movimiento de los cuerpos en el espacio.

2.3.1 Cinemática de la partícula.

Una partícula es una idealización de la realidad, en la que suponemos que la distribución de masa de un cuerpo se encuentra restringida a un sólo punto en el espacio y que este determina las características de comportamiento del mismo. En esta idealización no importa la orientación precisa del cuerpo dentro del espacio, ya que la diferencia entre las magnitudes de la partícula y el desplazamiento que realiza es muy grande. Un ejemplo de ello es el comportamiento de un

coche a lo largo de una carretera, en el cual el vehículo puede ser considerado como partícula, si se analiza el movimiento que realiza a lo largo de varios kilómetros de la carretera.

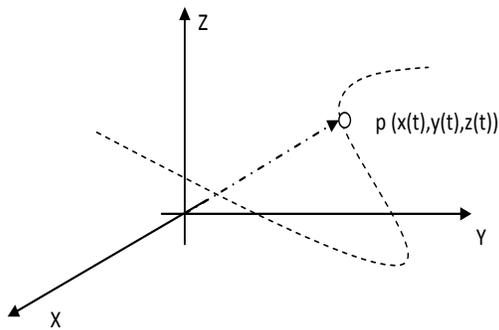


Fig. 2.6 Trayectoria espacial de una partícula

Para describir el movimiento de la partícula, es necesario el definir los siguientes conceptos:

Posición: Es la ubicación geométrica de un punto en el espacio, con respecto de un marco de referencia. Esta puede ser una posición absoluta o relativa, dependiendo a que marco de referencia se está haciendo alusión al describir la posición deseada.

Trayectoria: Es la sucesión de puntos que va ocupando una partícula o conjunto de partículas a lo largo del tiempo, pudiendo cambiar o no con respecto al marco de referencia.

Desplazamiento: Es el cambio entre dos posiciones, relativas al mismo marco de referencia.

Velocidad promedio. Es la razón de cambio de la posición con respecto de un periodo de tiempo. Esta puede ser velocidad promedio, cuando se toma un lapso finito de tiempo, o puede ser instantánea, cuando se toma un tiempo infinitesimal. En general, se llama velocidad a la velocidad instantánea. Esta velocidad también puede ser absoluta o relativa, dependiendo del marco de referencia al cual se mida.

Aceleración: Es la razón de cambio de la velocidad con respecto del tiempo. Si el periodo de tiempo es finito, se puede considerar una aceleración promedio, y si es en un infinitesimal de tiempo, se le considera instantánea.

Para describir los puntos en el espacio que ocupa una partícula, se ocupa el concepto de vector, el cual da los datos de cuál es la posición que este punto ocupa en el espacio con respecto a un marco de referencia. Al estar trabajando con un espacio tridimensional, se requiere de tres valores ordenados para determinar cuál es la ubicación del punto, y estos están referidos dentro de los valores que se le asigna al vector. Para este caso se ocupa un sistema cartesiano de tres dimensiones. También existen otros sistemas de referencia que se ocupan para el espacio tridimensional, que son los sistemas cilíndricos y esféricos, pudiendo pasar de uno de ellos al otro sin dificultad.

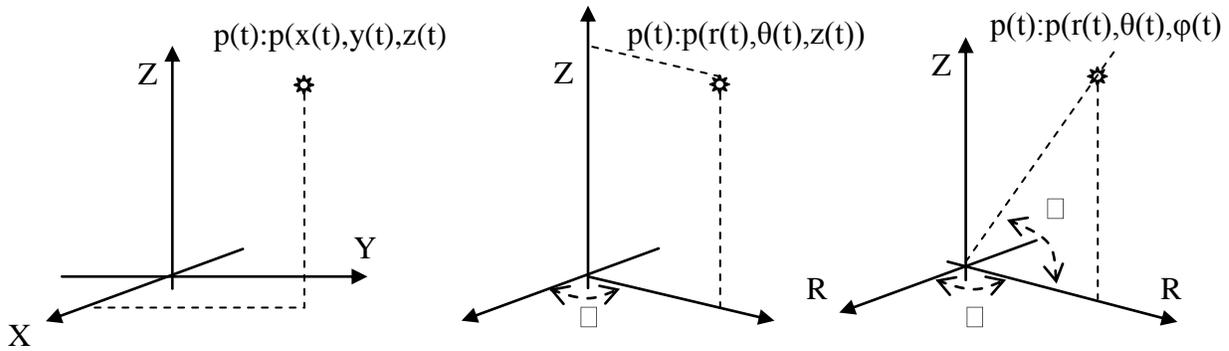


Fig. 2.7 Representación del mismo punto en sistema cartesiano, cilíndrico y esférico.

La posición de una partícula en el espacio puede estar expresada de una forma funcional, la cual describa el comportamiento de la partícula con respecto a un marco de referencia. En general se ocupa como variable independiente al tiempo, ya que se requiere el análisis de lo que pasa con la posición velocidad y aceleración, todas ellas con respecto del tiempo. De esta forma, en una representación cartesiana del espacio tridimensional se tiene que un punto p está representado por sus coordenadas

$$p: (x(t), y(t), z(t))$$

Cada una de estas coordenadas queda expresada en función del parámetro tiempo, y se puede obtener la relación de su cambio con respecto al parámetro para obtener más información del modelo.

A cada partícula o punto se le puede asignar un vector, que contiene la información de las coordenadas en cada dimensión, obteniendo entonces la siguiente representación:

$$\hat{p} = [x(t), y(t), z(t)]^T$$

Ahora, con esta representación podemos aplicar los conceptos de cálculo vectorial para obtener la velocidad y aceleración que sufre la partícula. Para la velocidad se busca la relación de cambio entre la posición con respecto a un lapso de tiempo cuando dicho lapso tiende a cero. Se obtiene que:

$$v_{Prom} = \frac{\Delta p}{\Delta t}$$

$$\hat{v} = \frac{d\hat{p}}{dt} = \frac{d}{dt} [x(t), y(t), z(t)]^T$$

$$\hat{v} = \left[\frac{dx(t)}{dt}, \frac{dy(t)}{dt}, \frac{dz(t)}{dt} \right]^T = [v_x(t), v_y(t), v_z(t)]^T$$

De la misma forma, para la aceleración se obtiene la segunda derivada con respecto del tiempo de la posición, obteniendo lo siguiente:

$$\hat{a} = \frac{d\hat{v}}{dt} = \frac{d^2\hat{p}}{dt^2}$$

$$\hat{a} = \frac{d\hat{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\frac{dv_x(t)}{dt}, \frac{dv_y(t)}{dt}, \frac{dv_z(t)}{dt} \right]^T$$

$$\hat{a} = \left[\frac{d^2x(t)}{dt^2}, \frac{d^2y(t)}{dt^2}, \frac{d^2z(t)}{dt^2} \right]^T = [ax(t), ay(t), az(t)]^T$$

De esta forma, si conocemos la relación funcional de la posición con respecto del tiempo, podemos conocer a la velocidad y la aceleración instantáneas de ese punto en particular. De la misma forma, si conocemos el comportamiento de las aceleraciones y velocidades, así como las condiciones de de frontera que rigen el movimiento, podemos encontrar la posición que desarrolla la partícula.

2.3.2 Marcos de referencia absolutos y relativos.

Bajo la mecánica clásica se tiene el concepto de marco de referencia absoluto, a partir del cual se puede realizar la medición de las cosas. Este marco de referencia privilegiado es aquel que consideramos inercial, que no se mueve en absoluto, el que podemos ocupar como base para describir el movimiento. Para algunos casos se trata de la tierra, en otros casos de la superficie de la misma, y para otros, solamente de una sección de un objeto que “no se mueve”.

También existen los marcos de referencia relativos, que son aquellos que se van moviendo con un objeto con respecto de otro, el movimiento que se obtiene es relativo al marco de referencia y no se considera absoluto, pues este marco de referencia no se puede considerar absoluto. Éste se puede encontrar montado dentro de un automóvil, en la luna o en la sección en movimiento de un torno.

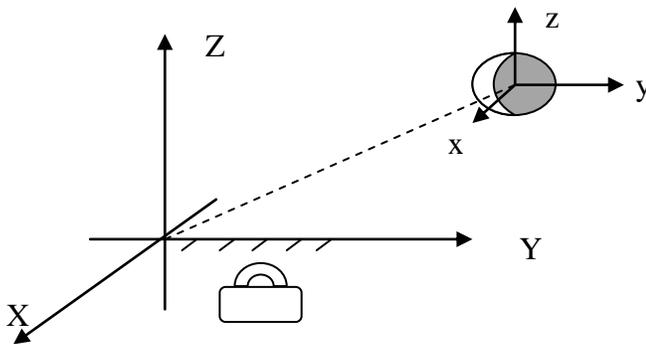


Fig. 2.8 Sistema de referencia absoluto (XYZ) y relativo (xyz).

De esta forma, encontramos que existen movimientos relativos a los marcos de referencia y estos sólo pueden ser considerados absolutos si están descritos en el marco de referencia inercial. A partir de estos conceptos, si se busca obtener la descripción absoluta de los movimientos de las partículas, es necesario que estén descritos en el marco de referencia absoluto, por lo que es necesario también el tener una herramienta que nos permita pasar de una descripción a otra.

Cabe notar que todos estos conceptos están basados en la descripción de la mecánica clásica del movimiento. Los marcos de referencia absolutos no existen dentro de la descripción que realiza la mecánica relativista, ya que no se puede considerar a un marco de referencia en especial como absoluto, pues cualquier marco de referencia es relativo a otro. Con esto, las aplicaciones de la mecánica newtoniana sólo se restringen a velocidades bajas con respecto a la velocidad de la luz, que aunque limitadas, son de amplia aplicación dentro de la actual tecnología.

La importancia de los marcos de referencia relativos se verá con mayor claridad al abordar la cinemática de los cuerpos rígidos y las transformaciones entre estos marcos de referencia.

2.3.3 Cinemática del cuerpo rígido.

Un cuerpo rígido es aquel que no permite los desplazamientos relativos entre las partículas que lo componen, siendo que no se puede deformar. Esta es una abstracción de la realidad que permite el modelar objetos ya no sólo como un objeto puntual, sino con las características espaciales que le constituyen. En el cuerpo rígido se supone una distribución conocida de sus partes. Esto ocasiona que además de la posición, velocidad y aceleración se tengan que tomar en cuenta la orientación y los cambios en ella para poder describir al sistema.

Para la orientación del cuerpo, fijemos un marco de referencia que se mueva con él. Este marco indicará las posiciones de cada una de las partículas del cuerpo rígido, y al estar fijo a él, estas posiciones relativas a este marco de referencia no cambiarán a lo largo del tiempo. Al mover ahora el cuerpo rígido en un marco de referencia absoluto, su movimiento estará descrito por el movimiento del marco de referencia relativo que le acompaña.

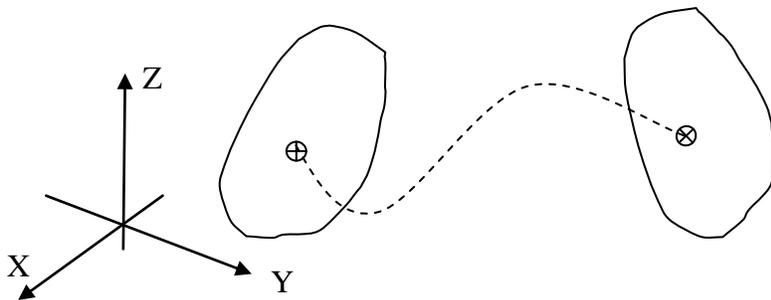


Fig. 2.9 Movimiento espacial de un cuerpo rígido.

De los diferentes movimientos que puede realizar un cuerpo rígido se pueden definir los siguientes patrones:

Traslación plana. En este movimiento, todas las partículas del cuerpo rígido se desplazan en planos paralelos, sin que en ningún momento cambie la orientación del cuerpo. Este análisis sólo necesita dos dimensiones para analizar el movimiento, ya que sólo se realiza éste en los planos paralelos en los que se desplazan las partículas.

Rotación con un eje fijo. En este movimiento, todas las partículas del cuerpo rígido rotan alrededor de un eje definido, de esta forma la trayectoria de todas las partículas se encuentran en planos paralelos, en trayectorias circulares concéntricas. Al generar movimiento también en planos paralelos, para el análisis de este movimiento sólo se requiere en análisis en uno de los planos paralelos para describir el movimiento de las partículas.

Movimiento plano general. Es una combinación de la traslación y la rotación, pero cada una de las partículas permanece en planos paralelos durante toda la trayectoria, por lo cual se simplifica el análisis a su comportamiento sólo en dos dimensiones, las de los planos paralelos en los que se realiza movimiento.

Traslación espacial. En este caso, el cuerpo rígido se desplaza en las tres dimensiones del espacio, sin cambiar de orientación.

Rotación alrededor de un punto fijo. En este caso el cuerpo rígido rota alrededor de un punto del espacio, sin que se pueda definir un eje fijo de rotación. Esto cambia la orientación en todo momento, pero sin que el punto fijo sufra cambios en su descripción absoluta.

Movimiento espacial general. En este movimiento se involucra tanto la traslación espacial, como la rotación alrededor de un punto fijo, y puede ser representado sumando los efectos de estos dos movimientos y generando el movimiento general en el espacio.

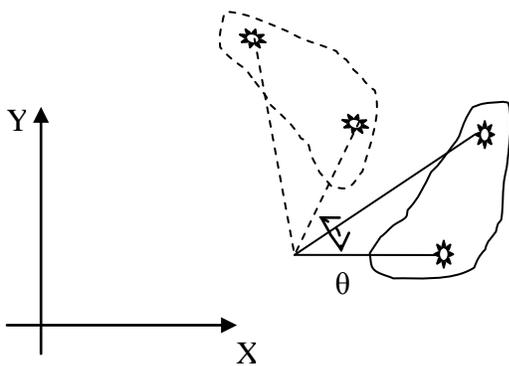


Fig. 2.10 Rotación plana.

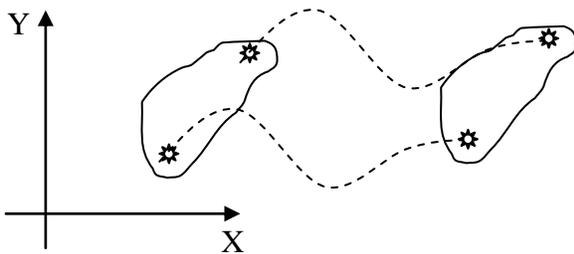


Fig. 2.11 Traslación plana.

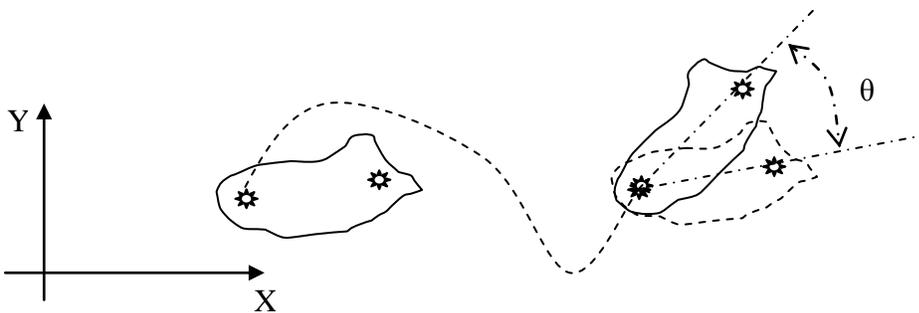


Fig. 2.12 Movimiento plano general

Para el análisis del movimiento espacial general, lo dividiremos en cuatro problemas, cada uno de mayor complejidad al anterior, que son: el análisis de la traslación espacial de un punto del cuerpo, la rotación que realiza el cuerpo alrededor de un punto fijo y la medición de un vector variable desde un sistema en rotación y la combinación de estos movimientos para dar el movimiento espacial, ya sea absoluto o con marcos de referencia relativos. Para ello, lo primero será asignar un marco de referencia fijo al cuerpo rígido, para identificar la dirección en la cual

se encuentra orientado. A partir de estas orientaciones se puede encontrar si ésta cambia con el tiempo o permanece constante. Para el primer acercamiento se ocupan sistemas de ejes paralelos, en los que la orientación del sistema de referencia del cuerpo rígido es paralela y corresponde a los mismos ejes del sistema de referencia absoluto. Los marcos de referencia pueden tener distintas orientaciones, pero para hacer validas las observaciones realizadas en uno de ellos y referirlas a otro sistema, será necesario el realizar una transformación lineal que oriente de forma paralela a los ejes y pueda proyectar lo que ocurre en el marco de referencia local al marco de referencia absoluto. Otra de las observaciones pertinentes consiste en que el marco de referencia del cuerpo rígido se encuentra fijo dentro del mismo cuerpo.

La traslación espacial de un cuerpo rígido implica que la orientación del marco de referencia fijo al cuerpo al inicio, final y a lo largo de toda la trayectoria es la misma, siendo que sólo se tiene que conocer el comportamiento de uno de los puntos del cuerpo, ya que todos los demás seguirán de forma paralela la misma trayectoria. La selección del punto que represente el movimiento depende de las condiciones a analizar, o de que conozcamos el comportamiento de algún punto en particular. Para simplificar el análisis se ocupa también que el marco de referencia absoluto y el marco relativo del cuerpo rígido sean paralelos. De esta forma, para llegar hasta el punto p se pueden seguir dos rutas; la primera es desde el marco de referencia absoluto XYZ por medio del vector \hat{p}_{XYZ} obteniendo desde aquí las posiciones, velocidades y aceleraciones absolutas directamente, y el segundo por medio de la suma de vectores \overline{OA} y \hat{p}_{xyz} . Se tiene entonces la igualdad

$$\hat{p}_{XYZ} = \overline{OA} + \hat{p}_{xyz}$$

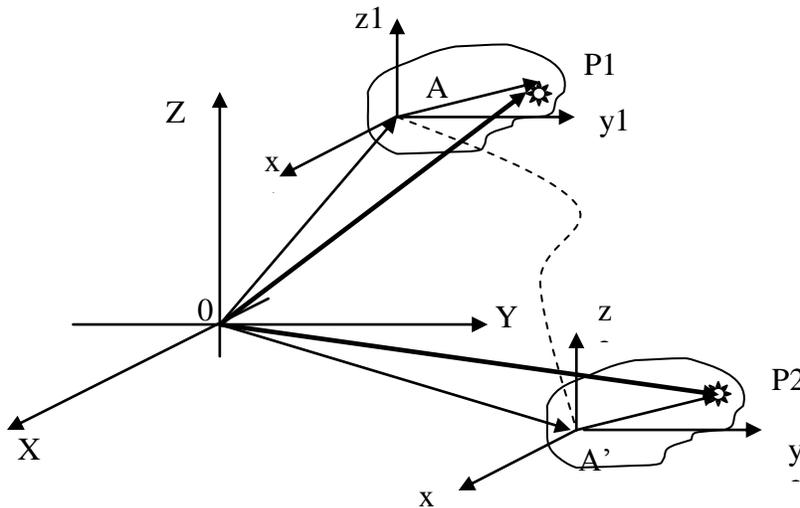


Fig. 2.13 Traslación espacial de un cuerpo rígido

Al derivar con respecto del tiempo se tiene directamente

$$\widehat{v}_{p_{XYZ}} = \frac{d\widehat{p}_{XYZ}}{dt} = \frac{d\overline{OA}}{dt} + \frac{d\widehat{p}_{xyz}}{dt}$$

Para este caso, al ser un cuerpo rígido, el vector que define el punto p en el sistema relativo no cambia ni en orientación ni en magnitud, por lo que su derivada es cero, de lo que tenemos:

$$\widehat{v}_{p_{XYZ}} = \frac{d\widehat{p}_{XYZ}}{dt} = \frac{d\overline{OA}}{dt} = \widehat{v}_{A_{XYZ}}$$

De forma similar para la aceleración se tiene;

$$\widehat{a}_{p_{XYZ}} = \frac{d\widehat{v}_{p_{XYZ}}}{dt} = \frac{d^2\overline{OA}}{dt^2} = \widehat{a}_{A_{XYZ}}$$

De esta forma, al conocer el comportamiento de uno de los puntos del cuerpo rígido, se conoce el movimiento de todos los demás puntos que lo componen. La selección del punto de origen del sistema relativo dependerá de las condiciones del problema a resolver, siendo éste el más conveniente para cada caso.

La rotación de un cuerpo rígido plantea un problema distinto, ya que lo que varía no es sólo la posición de cada punto, sino la orientación del cuerpo en su conjunto. Para entender qué es lo que sucede, se elige un punto arbitrario p del cuerpo. A este cuerpo se hace girar arbitrariamente alrededor de un punto de origen O con lo que se crea un eje instantáneo de rotación $\overline{OO'}$. El punto p queda a una distancia de este eje, determinado por el ángulo que forma con los planos perpendiculares al eje y su vector deposición a partir del punto de O . Al girar el cuerpo un poco, se ocasiona que el punto se desplace junto con el cuerpo.

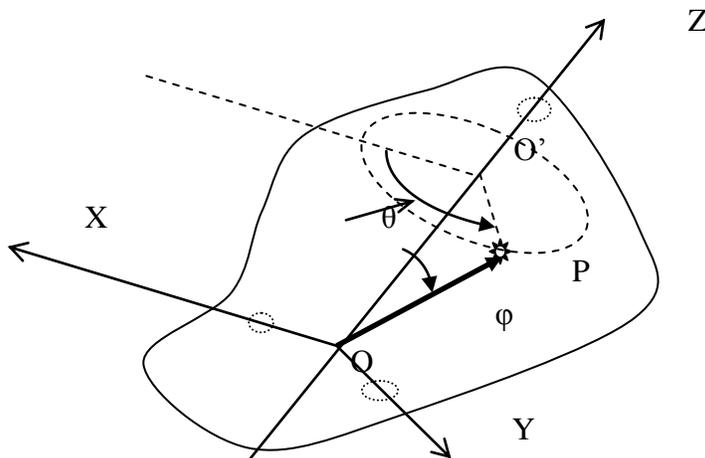


Fig. 2.14 Cuerpo rígido en rotación alrededor de un eje fijo

La velocidad de este punto está dado por el diferencial del Angulo de giro que realiza el cuerpo, siendo que

$$ds = r d\theta$$

$$ds = \text{sen}\varphi \overline{Op} d\theta$$

$$\frac{ds}{dt} = \text{sen}\varphi \overline{Op} \frac{d\theta}{dt}$$

Para la medición de la posición angular, definamos un vector perpendicular al plano en el que se realiza el cambio angular, el cual mide la magnitud de cambio angular con respecto del tiempo. A este vector le denominamos velocidad angular, con lo que tenemos

$$|\hat{\omega}| = \frac{d\theta}{dt}$$

$$\hat{v} = \hat{\omega} \times \overline{Op}$$

Para analizar el movimiento de un cuerpo rígido se puede separa éste en dos movimientos, primero, el desplazamiento del cuerpo en un traslación, tomando como punto de análisis el origen de giro del cuerpo, y sumando los efectos del giro sobre este punto. De esta forma obtenemos que:

$$\hat{v} = \hat{v}_t + \hat{v}_r$$

$$\hat{v} = \hat{v}_A + \hat{\omega} \times \overline{Ap}$$

Al derivar este término, obtenemos los componentes de la aceleración del cuerpo rígido, siendo estos:

$$\hat{a} = \hat{a}_A + \hat{\alpha} \times \overline{r_{B/A}} + \hat{\omega} \times (\hat{\omega} \times \overline{r_{B/A}})$$

En donde todos los términos se encuentran expresados en el marco de referencia absoluto, y refieren que el movimiento general de un cuerpo rígido puede ser dividido en dos, una traslación general de un punto del cuerpo rígido y una rotación alrededor de este punto.

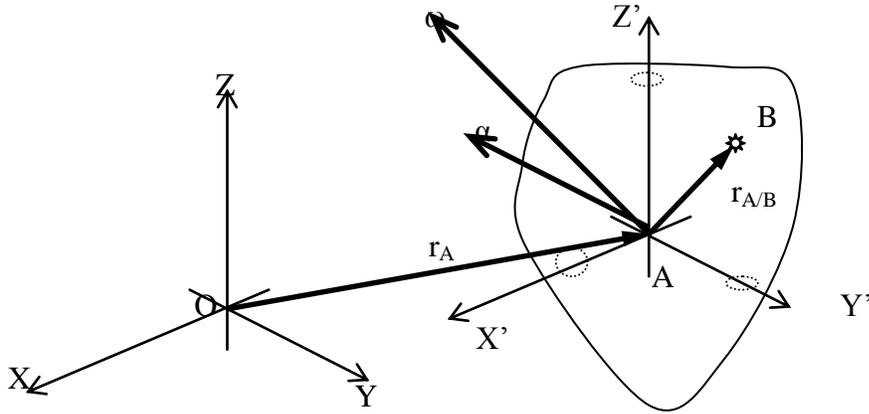


Fig. 2.15 Movimiento general de un cuerpo rígido en el espacio.

Ahora, para describir el movimiento que ocurre si tenemos un vector que cambia no sólo orientación, sino también en magnitud, seguimos el siguiente razonamiento. El vector de posición puede estar referido al sistema de referencia fijo siendo una medición absoluta \hat{p} o puede estar referido a un sistema en rotación alrededor de un punto del espacio \hat{p}_m . Para estos vectores, se puede plantear la siguiente igualdad.

$$\hat{p} = \hat{p}_{mov}$$

$$\hat{p} = |\overline{O'p_m}| \hat{e}_{mov}$$

Al obtener la razón de cambio con respecto del tiempo, obtenemos que dichos vectores se comporten de la siguiente forma.

$$\frac{d\hat{p}}{dt} = \hat{e}_{mov} \frac{d}{dt} |\overline{O'p_m}| + |\overline{O'p_m}| \frac{d}{dt} \hat{e}_{mov}$$

$$\frac{d\hat{p}}{dt} = \left(\frac{d}{dt} |\overline{O'p_m}| \right)_{mov} + \hat{p} \times \hat{\omega}$$

El primer término se refiere al cambio del vector dentro del sistema móvil, mientras que el segundo término expresa el cambio de orientación del sistema móvil con respecto del sistema fijo. De esta forma, para cualquier vector representado en un sistema móvil, se puede conocer su cambio con respecto del tiempo dividiendo el problema en dos partes, cómo cambia el vector en el sistema móvil y cómo cambia el sistema móvil con el punto coincidente a ese vector.

Con estas herramientas, podemos obtener las relaciones entre los vectores de posición de un sistema de referencia fijo y uno móvil, que dan las siguientes ecuaciones:

$$\hat{p} = \hat{p}_{mov}$$

$$\hat{v} = \frac{d\hat{p}}{dt} = \omega \times \hat{p}_{mov} + \frac{d}{dt}\hat{p}_{mov}$$

$$\hat{v} = \frac{d\hat{p}}{dt} = \hat{v}_{P'} + \hat{v}_{P/M}$$

Esta ecuación explica que la velocidad absoluta del punto \hat{p} en el marco de referencia fijo es igual a la velocidad de un punto \hat{p}' del sistema de referencia móvil coincidente con el punto \hat{p} más la velocidad del punto \hat{p} relativa al sistema de referencia en movimiento.

Por su parte, al derivar la ecuación anterior obtenemos:

$$\hat{a} = \frac{d^2}{dt^2}\hat{p} = \hat{\alpha} \times \hat{p} + \hat{\omega} \times (\hat{\omega} \times \hat{p}_{mov}) + 2\hat{\omega} \times \frac{d}{dt}\hat{p}_{mov} + \frac{d^2}{dt^2}\hat{p}_{mov}$$

$$\hat{a} = \frac{d^2}{dt^2}\hat{p} = a_{P'} + a_{P/M} + a_C$$

Esta ecuación expresa que la aceleración del punto \hat{p} en el marco de referencia fijo es igual a la aceleración de un punto \hat{p}' del sistema móvil que coincide con el punto \hat{p} más la aceleración relativa de P al sistema de referencia móvil más la aceleración complementaria o de Coriolis.

Estas ecuaciones son útiles para movimientos entre sistemas de referencia relativos y fijos, con un del sistema fijo que no se mueve. Para extender la idea a sistemas de mayor complejidad, se ocupa el concepto de que un movimiento general en tres dimensiones es también la combinación de una traslación y de una rotación. De esta forma, se traslada el punto alrededor del cual se realiza la rotación del sistema, dando como resultado el poder conocer el movimiento espacial general de una partícula o un cuerpo rígido en sistemas de referencia concatenados.

$$\hat{p} = \overline{OA} + \hat{p}_{mov}$$

$$\hat{v} = \frac{d\hat{p}}{dt} = \hat{v}_A + \omega \times \hat{p}_{mov} + \frac{d}{dt}\hat{p}_{mov}$$

$$\hat{a} = \frac{d^2}{dt^2}\hat{p} = \hat{a}_A + \hat{\alpha} \times \hat{p} + \hat{\omega} \times (\hat{\omega} \times \hat{p}_{mov}) + 2\omega \times \frac{d}{dt}\hat{p}_{mov} + \frac{d^2}{dt^2}\hat{p}_{mov}$$

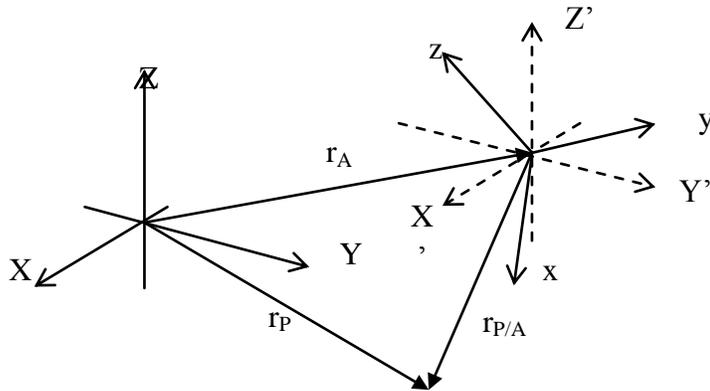


Fig. 2.16 Sistema de referencia en movimiento espacial general

2.4 Dinámica de un cuerpo rígido.

Al referirnos a la dinámica de un cuerpo rígido sólo tomaremos en cuenta las cantidades de movimiento que tiene un cuerpo rígido al ser considerado como un conjunto de partículas en movimiento. Las cantidades de movimiento lineal y angular serán de importancia, ya que éstas determinan la energía mecánica cinética que posee el cuerpo rígido para cierto instante, por lo que es necesario el conocer cómo es que se definen estas cantidades de movimiento.

2.4.1 Cantidad de movimiento de un sistema de partículas.

La cantidad de movimiento lineal de una partícula es su masa multiplicada por la velocidad lineal de ésta. Al sumar la cantidad de movimiento de un conjunto de partículas, podemos obtener la cantidad de movimiento lineal de todas ellas:

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^n m_i \hat{v}_i$$

Para el movimiento angular alrededor de un punto O de un sistema de partículas se tiene que es:

$$\mathbf{H}_O = \sum_{i=1}^n (\hat{r}_i \times m_i \hat{v}_i)$$

En donde r_i es la distancia entre el punto O y la partícula i .

Un punto importante dentro del estudio de la cinética es el centro de masa (G), que en el caso de un sistema de partículas esta dado como el punto geométrico en el cual se concentra toda la masa de las partículas considerando la posición de cada una de ellas

$$\bar{r} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \hat{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

Siendo \bar{r} el vector de posición de G.

Con esta ecuación podemos considerar la siguiente igualdad

$$m\bar{r} = \sum_{i=1}^n m_i \hat{r}_i$$

Derivando con respecto del tiempo tenemos que:

$$m\bar{v} = \sum_{i=1}^n m_i \hat{v}_i$$

Siendo así, la cantidad de movimiento lineal de un sistema de partículas esta dado por la velocidad del centro de masa del sistema y su masa total.

$$\mathbf{L} = m\bar{v} = \sum_{i=1}^n m_i \hat{v}_i$$

Realizando el mismo análisis para la cantidad de movimiento angular alrededor del centro de masa del cuerpo, se tiene que:

$$\mathbf{H}_G = \sum_{i=1}^n (\hat{r}_{Gi}' \times m_i \hat{v}_i)$$

Con ello podemos calcular la cantidad de movimiento lineal y angular de un sistema de partículas.

2.4.2 Cantidad de movimiento en un cuerpo rígido.

En el cuerpo rígido la restricción es que las partículas que lo componen no sufren desplazamientos relativos entre sí, es decir, conserva su forma. Al aplicar los conceptos de cantidad de movimiento lineal y angular tenemos que, el lugar de tomar un número finito de partículas, este se vuelve infinito, y que las masas asociadas a cada partícula se vuelven infinitesimales, con lo que la ecuación de cantidad de movimiento lineal queda ahora de la siguiente forma:

$$\mathbf{L} = \int \hat{v} dm = m\bar{v}$$

Esto es, que la cantidad de movimiento lineal de un cuerpo rígido está dada por el total de la masa y la velocidad del centro de masa del cuerpo rígido, de forma similar a lo que ocurre con el sistema de partículas. Ahora, considerando la derivada de la cantidad de movimiento con respecto del tiempo se tiene que:

$$\dot{\mathbf{L}} = \frac{d}{dt} m\bar{\mathbf{v}} = m \frac{d}{dt} \bar{\mathbf{v}} + \bar{\mathbf{v}} \frac{d}{dt} m$$

Al estar considerando cuerpos rígidos sin cambio de masa apreciable, se tiene que:

$$\frac{d}{dt} m\bar{\mathbf{v}} = \dot{\mathbf{L}} = m\bar{\mathbf{a}} = \sum \mathbf{F}$$

Lo cual es la segunda ley de Newton, y dice “El cambio en la cantidad de movimiento lineal es proporcional a la sumatoria de las fuerzas externas aplicadas y en la misma dirección”

Ahora, para la cantidad de movimiento angular se tiene que esta se puede expresar de la siguiente forma:

$$\mathbf{H}_G = \sum_{i=1}^n (\widehat{r}_{Gi}' \times \widehat{v}_i \Delta m_i)$$

Como r'_{Gi} y \widehat{v}_i están referidas al sistema centroidal se tiene que:

$$\widehat{v}_i = \widehat{\omega} \times \widehat{r}_{Gi}'$$

$$\mathbf{H}_G = \sum_{i=1}^n (\widehat{r}_{Gi}' \times (\widehat{\omega} \times \widehat{r}_{Gi}') \Delta m_i)$$

Esto es, la cantidad de movimiento angular es resultado de un triple producto vectorial, que se puede expresar de forma matricial de la siguiente forma:

$$\mathbf{H}_G = \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \mathbf{I}_G \boldsymbol{\omega}$$

Esta matriz representa la distribución geométrica de la masa dentro del cuerpo rígido, sin ser necesariamente homogénea. Cada uno de los factores de la diagonal principal representa las distancias a los ejes centroidales de cada una de las partículas consideradas dentro del cuerpo rígido, y se les denomina momentos de inercia centroidales, los otros factores representan los productos de inercia de masa centroidales, y quedan expresados de la siguiente forma:

$$I_{xx} = \int (y^2 + z^2) dm$$

$$I_{yy} = \int (x^2 + z^2) dm$$

$$I_{zz} = \int (x^2 + y^2) dm$$

$$I_{xy} = I_{yx} = \int xy dm$$

$$I_{xy} = I_{zy} = \int yz dm$$

$$I_{xz} = I_{zx} = \int xz dm$$

I_G se le denomina como tensor de inercia del cuerpo con respecto a su centro de masa G. Este tensor representa la distribución de la masa para un sistema de referencia dado un punto del cuerpo. La complejidad del tensor de inercia dependerá de la elección de los ejes apropiados para poder simplificar parte de los productos de inercia. En general, los productos de inercia están presentes, pero existe una orientación preferencial que los elimina, llamándose a esta orientación los ejes principales de inercia. Estos se encuentran asociados a las simetrías que puede presentar un cuerpo. El problema de encontrar las inercias asociadas a un cuerpo rígido para poder encontrar la cantidad de movimiento angular que éste tiene se puede atacar desde dos perspectivas. En la primera, se obtiene el tensor de inercia asociado al los ejes paralelos al sistema de referencia fijo y se trabaja con el directamente, mientras que el segundo acercamiento utiliza los ejes principales de inercia del cuerpo rígido, y posteriormente por medio de transformaciones los traslada al sistema fijo para su análisis. En este punto se debe de ser cuidadoso, pues no con una simple matriz de rotación (Q) se puede transformar al tensor de inercia entre un marco de referencia y otro, pues se origina en un triple producto vectorial.

$$\widehat{r}_{Gl}{}^T \times (\widehat{\omega} \times \widehat{r}_{Gl}')^T$$

Hay que premultiplicar y postmultiplicar dicho tensor de inercia para poder obtener su representación en otro sistema de referencia.

$$I_{XYZ} = Q^T I_{xyz} Q$$

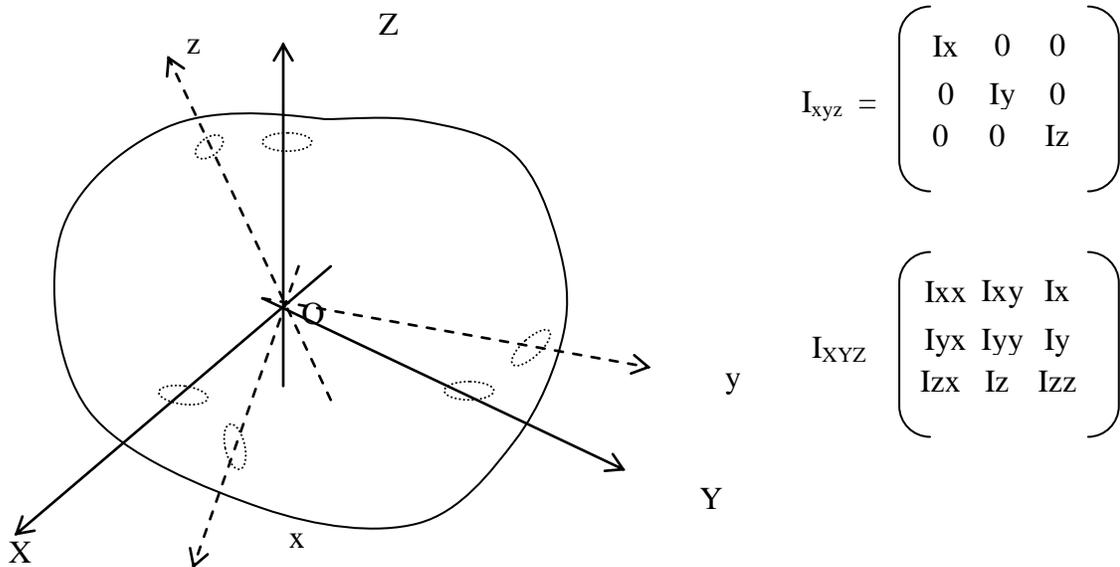


Fig. 2.17 Sistemas de referencia con diferentes orientaciones y tensores de inercia.

2.4.3 Energía cinética de un cuerpo rígido.

Para encontrar la energía cinética de un cuerpo rígido, se utiliza el siguiente planteamiento. La energía cinética del cuerpo está representada por la energía cinética lineal asociada a su centro de masa y su total de masa, así como por la energía cinética de cada una de las partículas alrededor de este punto. (Esto es sólo en el plano)

$$Ec = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i m + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \Delta m \hat{v}_i^2$$

Desarrollando el segundo término se tiene que:

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \Delta m \hat{v}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n |\hat{\omega} \times \hat{r}_i|^2 \Delta m$$

Al desarrollar, se tiene que, en el espacio

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \Delta m \hat{v}_i^2 = \frac{1}{2} (I_{xx} \omega_x^2 + I_{yy} \omega_y^2 + I_{zz} \omega_z^2 - 2I_{xy} \omega_x \omega_y - 2I_{yz} \omega_y \omega_z - 2I_{xz} \omega_x \omega_z)$$

La simplificación del modelo se da cuando se seleccionan sistemas de referencia adecuados para reducir el análisis requerido. Por ejemplo si se selecciona un cuerpo que esté en movimiento plano (como es el caso de los manipuladores descritos) el análisis se reduce a encontrar la velocidad lineal de cada uno de los centros de masa de los eslabones y sólo se requiere su comportamiento de inercia centroidal con respecto a un eje perpendicular al plano de movimiento. Entonces, la ecuación de energía del sistema se simplifica drásticamente. Con esto, podemos obtener la energía cinética general para aun cuerpo rígido en movimiento espacial general.

2.5 Clasificación de los sistemas mecánicos robóticos.

El presente trabajo analiza el desempeño de un manipulador robótico y la forma en la que se puede hacer más eficiente una tarea determinada. Por ello, es necesario entonces conocer cuáles son los manipuladores robóticos, cuales sus antecedentes y sus clasificaciones, para poder conocer su desempeño y cuál de estos sistemas son adecuados.

2.5.1 Antecedentes de los robots.

La palabra Robot proviene del eslavo “Robota”, que significa esclavo. En un principio representaba a los adelantos mecánicos antropomorfos que desarrollaran tareas tales que eliminarán el trabajo físico por parte del ser humano. Pero la versión antropomórfica dista de los actuales robots, que más bien pueden ser definidos como al conjunto de sistemas mecánicos, electrónicos y de programación encaminados a realizar una serie de tareas definidas y con la capacidad de adaptación a dichas tareas.

Después de la década de los 40 del siglo pasado se inicia el desarrollo de nuestro actual concepto de robot, empezando con manipuladores que podían desarrollar tareas peligrosas para el ser humano, pero con la dirección inmediata de un operador para su control. Al avanzar la tecnología se inicia con la retroalimentación de información desde el robot y con la programación para que éste desarrolle tareas por sí mismo. Para la década de los 50 la retroalimentación y la integración de microcontrolador para realizar las tareas específicas permiten ampliar la gama de aplicaciones de los robots.

Para la década de los 60 se tiene un mayor desarrollo en los sistemas de retroalimentación de los robots, como es la integración de sistemas táctiles y sistemas de visión para su mejor desempeño y campos de aplicación. Ya para la década de los 70 series de robots como los modelos PUMA tienen aplicaciones industriales amplias, al tener de ventaja el poder desarrollar tareas repetitivas con alta precisión y ser flexibles en cuanto a las tareas a desarrollar, punto muy importante dentro de la industria. Uno de los principales consumidores y patrocinadores de los robots son la industria automotriz, que hasta la fecha sigue consumiendo gran cantidad de robots para sus plantas de ensamblaje.

La década de los 80 marca la expansión de las aplicaciones robóticas al buscar robots de mayor flexibilidad, más aplicaciones y reducir el costo de implementar dichos sistemas. Ya no sólo son

los grandes robots industriales, que pueden cargar grandes pesos, sino que aparecen los robots de mayor precisión, para ensamblaje de circuitos electrónicos, para el valor preponderante no es la fuerza, sino la velocidad y precisión de la tarea. Para los 90 la integración de sistemas de inteligencia integrada a los robots son los que van marcando la pauta, para lograr una mayor independencia en medios que estén continuamente cambiando. Actualmente, el desarrollo no sólo de robots industriales, sino también de robots antropomórficos primero con fines experimentales y después con fines lúdicos son los que van marcando la vanguardia. El desarrollo de sistemas expertos de inteligencia artificial aplicados a los robots ya no sólo en el área industrial, el desarrollo de sistemas de alta velocidad y gran precisión, y la aplicación en distintas aéreas de la manufactura son los motores que van permitiendo que los robots sean ampliamente aplicados en todo el mundo.

2.5.2 Eslabones, articulaciones y grados de libertad.

Para el análisis de los sistemas mecánicos que conforman un robot se analiza primero cómo está conformado y cómo es que se mueve dicho sistema. El primer concepto es el de eslabón, que así se le denomina a cada cuerpo que realiza un movimiento dentro del sistema. Los eslabones pueden clasificarse en función de cuantos son los eslabones con los que interactúa para realizar una tarea, siendo así que un eslabón binario interactúa con otros dos eslabones, y uno ternario interactúa con tres.

La forma de interactuar entre eslabones es por medio de las articulaciones. La articulación es la superficie que se encuentra entre un eslabón y otro, y se clasifica por el tipo de movimiento que permite y los grados de libertad que posee. Como grado de libertad se entiende a los movimientos que permite realizar cada articulación, en función de los desplazamientos lineales o rotaciones posibles en ejes coordenados ortogonales. La siguiente lista relaciona cuáles son los tipos de articulaciones y sus características:

Articulación prismática (P): Esta permite el movimiento lineal entre eslabones, sólo en un sólo eje, deslizando un eslabón sobre el otro. Sólo permite un movimiento, un grado de libertad.

Articulación rotacional (R): Esta permite el giro con un sólo eje de rotación, dejando sólo rotar a un elemento sobre otro. Ejemplo de estas articulaciones son los correspondientes a un rodamiento. Este también sólo permite un movimiento, el de rotación, dando un sólo grado de libertad.

Articulación cilíndrica (C): Esta permite tanto la rotación como el deslizamiento, ambos a lo largo de un eje coincidente, dejando dos posibles variables o dos grados de libertad.

Articulación helicoidal (H). Similar a la relación entre un tronillo y una turca, este tipo de articulación permite transformar el movimiento rotacional a un movimiento lineal y viceversa, siendo entonces que sólo permite un grado de libertad dentro de ella.

Articulación esférica (S). En esta articulación se permite el giro del eslabón en cualquiera de los ejes rotacionales por lo que presenta entonces tres grados de libertad, tras movimientos rotacionales por realizar.

Articulación plana (F). Esta permite el deslizamiento de un eslabón sobre de otro, en dos direcciones ortogonales y una rotacional. Es de tres grados de libertad, pues permite dos desplazamientos longitudinales a lo largo de un plano y un giro.

Articulación entre engranes. Esta articulación permite el deslizamiento entre superficies y permite el transformar un movimiento rotacional en otro similar. Se le considera como una articulación de dos grados de libertad. Se le considera como una articulación de par superior.

Articulación en leva. Similar al caso de un engrane, esta articulación permite el deslizamiento combinado con una rotación, por lo que también se considera de dos grados de libertad y también una articulación de par superior.

En la siguiente tabla se resumen los tipos de articulaciones y su representación esquemática. En esta tabla aparece el nombre del par cinemático, una simbología para su representación gráfica, el símbolo literal con el cual se representa. También se introducen cuántos son los grados de libertad o movimientos independientes que puede realizar, así como el concepto de clase de par cinemático, el cual se refiere a cuántas son las restricciones de movimiento que presenta dicha articulación. Debe notarse que, la suma de los grados de libertad y la clase de par cinemático es 6, todos los movimientos posibles en el espacio (3 lineales y 3 rotacionales) sin ninguna restricción.

Nombre del par	Símbolo del par	Símbolo gráfico del par	Grados de libertad	Clase del par cinemático
Prismático	P		1 (longitudinal)	5
Rotacional	R		1 (rotacional)	5
Cilíndrico	C		2	4
Helicoidal	H		1	5
Esférico	S		3	3
Plano	F		3	3
General	G		5	1
Arbitrario	A		i	6-i

Las articulaciones general y arbitraria se refieren a articulaciones que no pueden ser clasificadas dentro de alguno de los otros casos, y de las cuales sólo se conoce sus grados de libertad.

Pero hay que aclarar que es un grado de libertad para cada articulación. Por grado de libertad entiéndase que son las variables que se tienen que definir para poder tener una solución cerrada al momento de estar moviendo un sistema mecánico. Por ejemplo, si se trata de un sistema con un grado de libertad, sólo es necesario el controlar una de las variables para que todos los otros

elementos queden definidos. Como caso especial, cuando únicamente se trata de un grado de libertad, se llama a estos sistemas mecánicos como mecanismos.

Para calcular los grados de libertad de un sistema mecánico se recurre a la fórmula propuesta por Grüber y Kutzbach, en la que se consideran el número de eslabones y sus interacciones o articulaciones. La fórmula es la siguiente:

$$GL = \lambda(n - j - 1) + \sum f_i$$

en donde los grados de libertad (GL) están en función del número de eslabones del sistema incluyendo al eslabón fijo (n), el número de articulaciones que componen al mecanismo (j), considerando articulaciones binarias, los grados de libertad del espacio en análisis, ya sean 3 para un sistema plano o 6 para un sistema espacio (λ) y los grados de libertad permitidos por cada una de las articulaciones (f_i) [9].

Con ello, podemos obtener que tipo de sistema tenemos:

Grados de libertad	Clasificación	Ejemplo
$1 < n$	Cadena cinemática	Robot
1	Mecanismo	Mecanismo de 4 barras
0	Estructura	Triángulo
$n < 0$	Estructura sobreesforzada	--

En general la fórmula descrita funciona, pero existen casos en los que son necesarias más herramientas para poder determinar los grados de libertad del sistema mecánico, y se les denomina sistemas sobrerestringidos.

Con esta notación, es más fácil el identificar de que tipo de mecanismo o cadena cinemática estamos hablando. Por ejemplo, un sistema RR se compone de dos articulaciones con un grado de libertad rotacional, mientras que un sistema PRP se trata de tres articulaciones que en orden son prismática, rotacional y prismática. Bajo este esquema también se puede hacer la anotación de cuál es la articulación que dirige el movimiento, por medio de subrayarla. De esta forma se puede identificar que dentro de un arreglo RPR, que consiste en tres articulaciones, la articulación prismática intermedia corresponde a la articulación activa del sistema.

En este trabajo se manejan sistemas RR, RRR y 3RRR. Los dos primeros caracterizan a cadenas cinemáticas seriales, en las cuales cada articulación rotacional tiene su propio actuador, convirtiéndola en una articulación activa, mientras que en el último, se trata de una cadena cinemática mixta, ya que es la combinación de tres sistemas seriales RRR, en los que únicamente la primer articulación es una articulación activa, es decir, que índice el movimiento.

2.5.3 Sistemas de lazo abierto y cerrado.

Los sistemas mecánicos también se pueden clasificar por el tipo de lazo que presentan. A un lazo lo consideraremos cuando todos los eslabones de un sistema queden siempre unidos a otros dos eslabones, cuando menos.

El primer caso es el lazo abierto, en la cual se tiene una cadena de eslabones que no cierra ningún lazo, es decir, uno de los eslabones queda únicamente sujeto a un sólo eslabón, dejando libre el otro extremo del eslabón. Otro caso es en el que todos los eslabones se unen formando un o varios lazos, consideradas como de lazo cerrado. Aquí todos los eslabones están unidos a uno o más de un eslabón. También existe la posibilidad de que en una parte del acomodo mecánico se considere de lazo cerrado, mientras que en otra se considere de lazo abierto, a los cuales se les llama de lazo mixto.

Un ejemplo claro de este tipo de clasificación puede ser un manipulador robótico serial, en el cual cada eslabón está unido a otros dos, excepto el último, con lo que se hace un sistema de lazo abierto. Por el otro lado tenemos al mecanismo de cuatro barras, en el que todos los elementos se encuentran unidos a otros dos eslabones, formando un sólo lazo.

2.5.4 Clasificación de los robots.

Existen distintas formas para clasificar un sistema robótico, y a continuación se mencionan algunas de ellas:

Por grados de libertad: Para poder realizar un movimiento en el espacio tridimensional son necesarios 6 grados de libertad, 3 rotacionales y 3 longitudinales. A aquellos sistemas con 6 grados de libertad se les conoce como robots de propósito general, se les llama redundantes cuando tienen más de 6 grados de libertad y se les llama deficientes, cuando tienen menos grados de libertad.

Por estructura cinemática. Se pueden clasificar por medio de la estructura de lazo que presenten. Si se trata de una estructura de lazo abierto, se les llama robots seriales, si se trata de una estructura de lazo cerrado, se les conoce como robots paralelos, mientras que si se encuentran ambas características, se les conoce como robots híbridos.

Por el tipo de motor ocupado. Se pueden tener accionamientos de tipo eléctrico, neumático o hidráulico. La selección de qué tipo de accionamiento sea el que se ocupe en un robot dependerá de las aplicaciones, fuerzas requeridas o suministros de energía disponibles.

Por área de trabajo. Si el movimiento que desarrolla el robot es en varias coordenadas rectangulares, se le denomina cartesiano. Otra opción es cuando el sistema ocupa dos coordenadas longitudinales (radio y altura) y una angular, al cual se le conoce como cilíndrico. Otro más es aquel que ocupa dos coordenadas angulares y una última prismática, y se le conoce como esférico.

También se pueden clasificar a los robots por medio de su tipo de movimiento (plano, espacial), sus características geométricas o la similitud con formas que puede tener el robot (robot paralelo diamante) u otra característica de interés.

En este trabajo se inicia el estudio con manipuladores seriales, de dos y tres eslabones y grados de libertad, en movimiento plano, sin definir cuál es la fuente de energía que ocupa para desarrollar la tarea prescrita.

2.6 Principios de optimación.

El problema de la optimación surge a partir de los sistemas de múltiples variables en los que la descripción del sistema llega a tener tal grado de complejidad, que el análisis del cálculo de múltiple variable lleva a ecuaciones de mayor complejidad que no permiten ser resueltas por métodos analíticos de una forma sencilla. Ejemplo de ello sería un proceso de producción, en el cual se involucran múltiples variables como costo de insumos, materia prima, costo de operación y amortización de la maquinaria y del cual queremos saber cómo se comporta el costo total del producto. Otro ejemplo sería dentro de una planta de generación de energía en el cual la eficiencia del proceso no sólo esté en función de calidades de vapor o entalpías en los puntos de extracciones de vapor, sino en el comportamiento de otros equipos, como flujos en intercambiadores de calor, o eficiencias por la configuración de una turbina. Al tratar de describir de forma más precisa un sistema, encontramos que este se hace de una mayor complejidad, hasta el punto tal que no es práctico el tratar analíticamente a las funciones que se van obteniendo del proceso.

Para ello, y con la llegada de los procesadores numéricos, se propone la idea de no tener que resolver analíticamente toda la función, sino optar por un método numérico que oriente el lugar donde puede encontrarse el punto óptimo, ya sea un máximo, un mínimo, un punto de inflexión o un punto de equilibrio dentro del proceso. Por medio de estas técnicas de optimación se logra que no sólo no se tenga que realizar el análisis complejo de la función, sino las reducciones en tiempo de análisis al no tener que evaluar toda la función sino únicamente puntos. A continuación se presentan los puntos fundamentales en los que se basa la optimación, y se desarrolla cada uno de ellos de acuerdo al planteamiento presentado por Adby y Dempster [10] acerca de la optimación.

2.6.1 Función objetivo.

Para lograr una optimación, primero es necesario identificar qué es lo que queremos mejorar. En algunos casos será el costo de producción de un artículo, la eficiencia de un equipo o el trabajo de que realiza una persona dentro de su jornada laboral. Para ello se requiere de una relación que represente aquello que queremos mejorar y que se encuentre relacionada con los parámetros a variar dentro de esta optimación. A esta relación se le conoce como función objetivo.

Los puntos que se buscan dentro de la función objetivo son en general los máximos o mínimos. Para simplificar el trabajo, se busca que la función objetivo quede expresada de tal forma que se busque siempre el mínimo. Así, si se está buscando un máximo de una función, la función objetivo se multiplica por la unidad negativa, buscando ahora un mínimo.

Para definir la función objetivo es necesario conocer cuáles son las variables o parámetros que van a estar involucradas en el proceso de optimización. En general se trata de procesos iterativos, que a partir de una serie de coordenadas de las variables, genera un nuevo juego de puntos para evaluar la función. Así, se obtiene un vector de parámetros que en forma matricial quedan expresados de la siguiente manera:

$$\mathbf{x}^T = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$$

para cada punto de la función objetivo se va a obtener un valor E_i , y por medio del método seleccionado, se genera un siguiente valor E_{i+1} por medio de la variación

$$\Delta \mathbf{x}^T = \{\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n\}$$

Dependiendo del método seleccionado será como se encuentre el valor de las variaciones en el vector de parámetros, para ir acercando a la función objetivo a su valor mínimo.

Se puede entonces definir a la función objetivo en función de los parámetros de la siguiente manera:

$$\text{Funcion Objetivo} = f(\mathbf{x}^T)$$

2.6.2 Variables.

Las variables o parámetros son aquellas características que podemos cambiar dentro del modelo y afectan a la función objetivo. Se les puede clasificar como variables dependientes o de estado y variables independientes o de control, desde el punto de vista del control moderno. Para el caso de la optimización, se consideran como variables a aquellas cosas que se puede modificar en valor y que perturban el desempeño del sistema.

Estas variables no son necesariamente funciones continuas, pueden presentar únicamente valores discretos o presentar restricciones dentro de su rango. Pero se requiere explorar todos aquellos valores que alteren el sistema para poder optimizarlo.

2.6.3 Mínimos absolutos y mínimos locales.

Cuando analizamos el comportamiento de una función de una sola variable, recurrimos a buscar su pendiente, sus máximos y mínimos y sus puntos de inflexión. En los puntos máximos y mínimos encontramos que dependiendo del rango de la función y del comportamiento de la vecindad de puntos se puede clasificar a estos como valores extremos absolutos o locales. Por valores extremos absolutos se entiende a aquellos que tienen mayor valor de máximo o mínimo

dentro del rango, mientras que los valores máximos y mínimos locales sólo lo son con respecto a su vecindad de puntos.

En las aplicaciones de optimación no siempre se dispone de una función derivable o suave a la que se puedan aplicar las reglas del cálculo vectorial para encontrar los puntos de interés. Es necesario recurrir a sistemas numéricos que den información dentro de una cierta vecindad para encontrar las características acerca de los máximos y mínimos locales. Este tipo de problemas muchas veces tropiezan en el punto de que sólo proporcionan información restringida a una región, sin que sea necesariamente un máximo o mínimo absoluto.

2.6.4 Funciones objetivo de variable vectorial.

En el caso general la función objetivo está definida no sólo por un parámetro, sino por n parámetros simultáneamente. Ya que no es posible el aplicar el concepto de derivada del cálculo de una sola variable, se recurre al cálculo vectorial, y a las derivadas parciales.

En este caso es necesario el desarrollar el gradiente de esta función, el cual va a estar definido por:

$$\mathbf{g}^T = \nabla f = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right]$$

A éste se le conoce también como Jacobiano de la función f . También es necesario el definir la matriz Hessiana, la cual ordena las segundas derivadas de la función de la siguiente forma:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

Con estos dos conceptos, es posible el desarrollar como varía la función f de variable vectorial, ya que por su desarrollo en serie de Taylor se tendrá:

$$f(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \mathbf{g}^T \Delta \mathbf{x} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{x}^T \mathbf{H} \Delta \mathbf{x} + \dots$$

Este desarrollo será útil cuando la función objetivo sea conocida, y las derivadas parciales de ésta con respecto a los parámetros puedan ser obtenidas fácilmente. En el caso general, la complejidad de las funciones objetivo y la imposibilidad de cálculo de las derivadas requiere métodos que no dependan de dichas derivadas parciales.

2.6.5 Regiones y restricciones.

Otro de los problemas que enfrentan los métodos de optimación es que las variables en ocasiones sólo puedan encontrarse dentro de un rango. La temperatura de un proceso puede estar restringida por la maquinaria que lo produce, o la cantidad de unidades producidas por día puede estar controlada por alguna legislación. Imaginemos una función objetivo de costo de producción, en la que el rango de unidades producidas sólo puede ser positivo. Restricciones más generales se pueden encontrar por relaciones entre los parámetros o ecuaciones simultáneas que describan el sistema. Unas de las más comunes serán las desigualdades, que expresan la frontera a partir de la cual se encuentra la región de estudio. Las restricciones dentro de las variables del sistema, determinan la región en la cual se puede realizar su proceso.

Esto ocasiona que la búsqueda del punto óptimo de la función objetivo se restrinja a una región definida por los rangos de las variables y las relaciones que puedan tener entre ellas. La búsqueda del punto óptimo dentro de la región restringida implica el problema de que el método de optimación tome en cuenta dichas fronteras, siendo que algún punto extremo se encuentre fuera de la región de estudio. Se pueden entonces identificar dos regiones, una región factible, y una no factible. El método numérico de optimación deberá tomar en cuenta que el punto evaluado este dentro de la región factible, y que los puntos generados por el queden dentro de esta misma región.

Se puede observar las características de estas regiones factibles (Figs. 2.19 y 2.20) en donde se tienen las desigualdades que el modelo debe cumplir y las regiones que ellas producen, al combinar dichas restricciones. Las funciones r_n representan la frontera de las desigualdades o reglas que debe de cumplir el sistema. De esta forma se determina cuál es el área que cumple con dichas restricciones y en dónde se debe de realizar la búsqueda del punto óptimo. En el caso de sistemas de una sola variable, se determina sólo el rango en el cual puede ser factible la solución, en sistemas de dos variables, se determina el área en la cual puede estar la solución, así como para sistemas de 3 variables, se determina el volumen en el cual se puede encontrar dicha solución. Hay que tener cuidado en el modelado del sistema, ya que puede arrojar que no se pueda encontrar ningún punto factible, al ser un conjunto vacío la región factible.

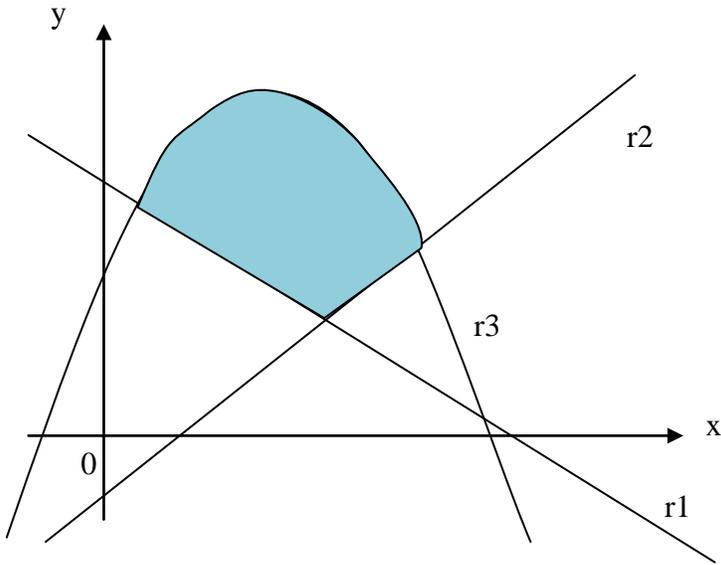


Fig. 2.18 Región factible en \mathbb{R}^2

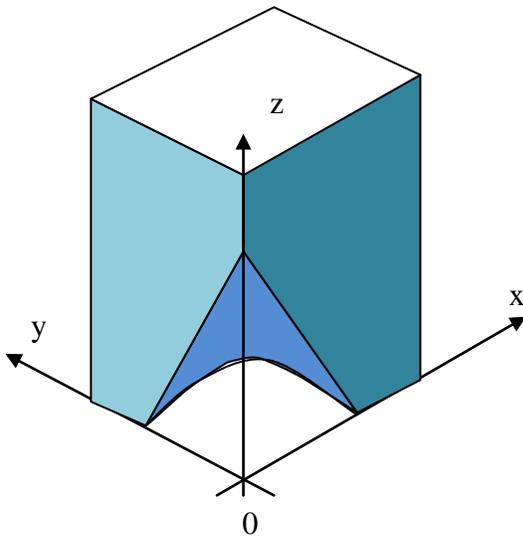


Fig. 2.19 Región factible en \mathbb{R}^3

2.6.6 Convergencia.

Como convergencia se entiende a propiedad de ciertas sucesiones numéricas para tender a un valor límite. Si la sucesión no tiene convergencia, dicho valor no existe. Para el caso de la optimización se ocupa el mismo concepto, sólo ahora haciendo referencia a que un algoritmo matemático genera una serie de valores, y al final de dicho algoritmo se encuentra un valor óptimo. Un buen algoritmo requiere de pocos cálculos para legar al punto óptimo, pero no siempre será así.

Para evaluar la convergencia de un método, se evalúa un paso n y un paso $n + 1$ del algoritmo y se saca la diferencia entre ellos. Si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - a_{n+1}}{a_n} = 0$$

se puede asegurar que el método converge, y toma el valor de a_{n+1} .

Como ejemplo, para encontrar la raíz de un número, se puede recurrir al método de Newton, el cual se basa en la relación entre la derivada de una función evaluada en un punto y una recta tangente a la función, que pase por el mismo punto. Para saber si el método converge, habrá que tomar la sucesión de valores que toma dicho algoritmo y evaluar hacia dónde se dirige.

Este método evalúa para un punto inicial a la función y su derivada, y por medio de ellos predice cuál será el siguiente punto en el cual debe de ser evaluada la función. El algoritmo está descrito de la siguiente forma:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

La representación gráfica de este método (Fig. 2.18) para encontrar la raíz de una función se emplea dicho método, buscando el punto donde:

$$y = f(x)$$

$$x \text{ para } y = 0$$

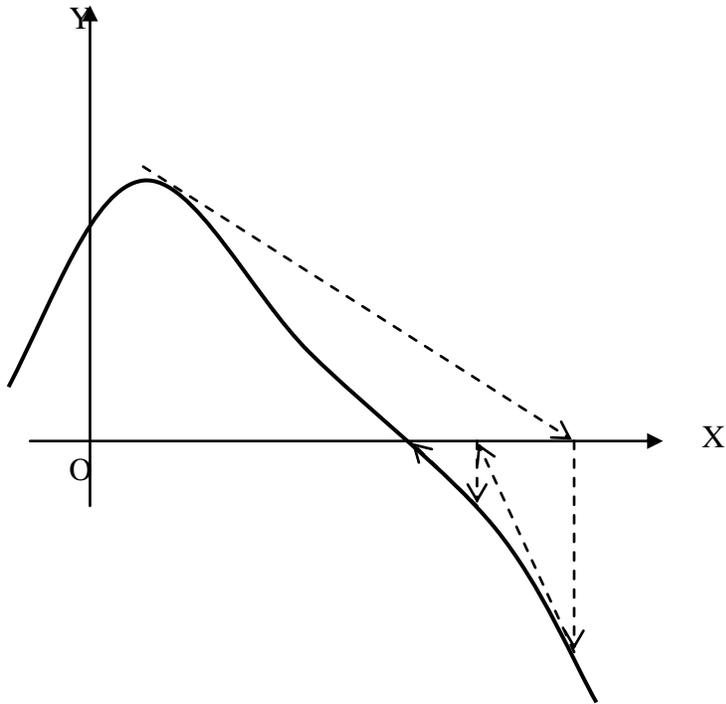


Fig. 2.20 Forma gráfica del método de Newton

Como se aprecia, este método depende de los puntos iniciales que se proporcionen y las características de la función, o si es derivable en todo punto, para poder obtener un resultado correcto. Pero puede ser el caso que el límite deseado no se pueda obtener (Fig. 2.21) el punto deseado, aunque este si exista, y sólo se llega a conocer la vecindad próxima del punto deseado.

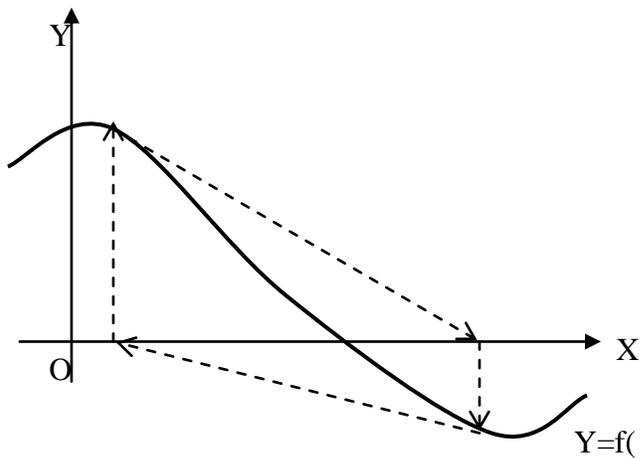


Fig. 2.21 Error en el método de Newton.

Otros de los casos que llegan a ocurrir es cuando en cada evaluación del punto óptimo, el método ocupado converge a diferentes valores en las variables, pero el mismo valor en la función

objetivo. En este caso, puede tratarse de que no sea sólo un punto el cual sea la solución del sistema, sino una función, por lo cual, todos los puntos que se encuentren definidos dentro de esa función serán puntos óptimos.

Otro caso que se puede encontrar para la falta de convergencia es debido a que en muchas ocasiones estos métodos dependen del punto inicial de evaluación para proponer cual será la solución, y el tipo de solución que dan es solamente un punto óptimo local (Fig. 2.3), en cuyo caso, puede ser que se encuentren diferentes valores límites al momento de evaluar la convergencia del método.

Uno de los factores decisivos para la elección de un método de optimación es la velocidad de convergencia. En cada método se requiere de un número definido de operaciones a realizar para generar el punto siguiente a ser evaluado y cada uno de los puntos generados sirve como base para encontrar el siguiente punto. Al final del algoritmo, se requirieron hacer n operaciones por paso y generar m puntos para llegar al punto óptimo. Si son muchas las operaciones por paso o muchos los pasos que se tienen que realizar, el método tardara en converger al punto de interés. Por el contrario, si se ocupan pocas operaciones o se requieren encontrar pocos puntos intermedios, este método llegará rápidamente al punto deseado. Este último tendrá una mayor velocidad de convergencia. El extremo contrario es cuando por ser muy amplios los cambios en las variables entre un paso y el siguiente, para generar menos puntos intermedios, es muy probable que el método no converja ya que puede estar pasando por los puntos óptimos sin tomarles en cuenta. De ésta forma, el equilibrio entre una buena velocidad de convergencia y la generación de pocos puntos pero que puedan mapear bien la región factible, será lo deseado para el método de optimación que se elija.

2.6.7 Métodos de optimación.

Los diferentes métodos de optimación recurren a características geométricas o algoritmos repetibles para tratar de llegar a un punto óptimo de una función objetivo. La eficacia de cada uno depende de su velocidad de convergencia y de las características de la función objetivo.

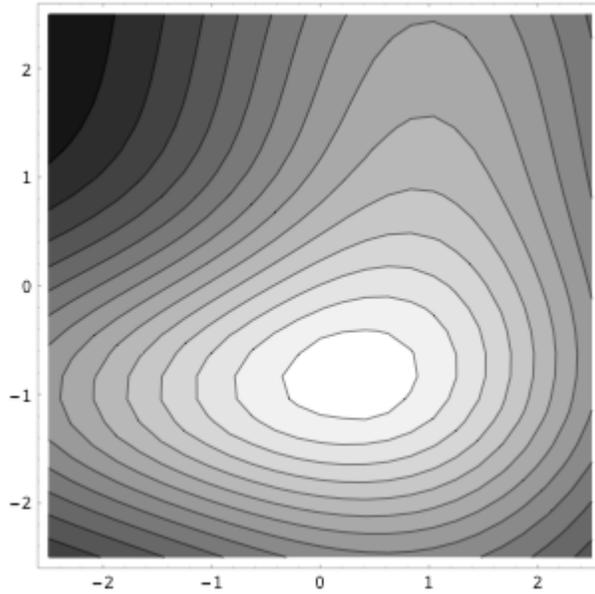


Fig. 2.22 Función objetivo.

2.6.7.1 Método de malla.

Es el más simple de todos, aunque presenta una velocidad de convergencia baja. En este caso se forma una malla que abarque toda la región factible, dando espacios de similar magnitud entre las diferencias en cada una de las variables. Con esto se genera una malla que evalúa n^m puntos siendo n el número de pasos que se tome por cada variable y m el número de variables involucradas. Para cada uno de esos puntos se evalúa la función objetivo y se toma el menor de los valores obtenidos, para generar una malla alrededor de dicho punto, considerando diferencias menores entre las variaciones de cada variable. En este método se tendrá una velocidad de convergencia baja, ya que es necesario generar n^m puntos, evaluar la función objetivo para cada uno de ellos y encontrar el valor mínimo para encontrar el siguiente punto.

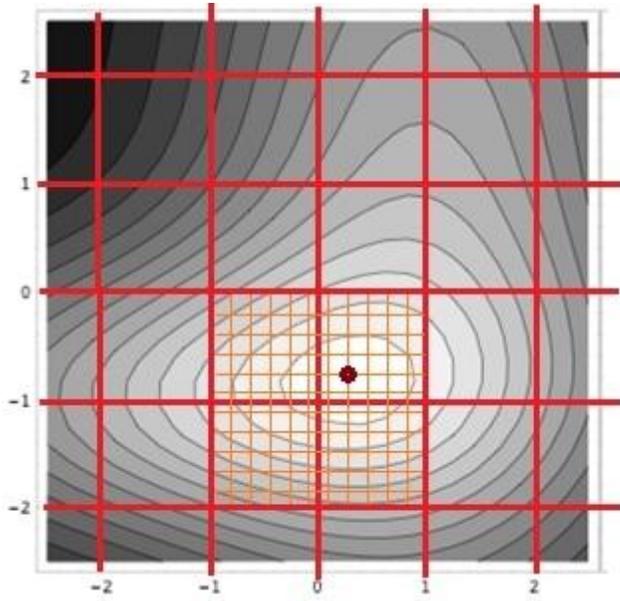


Fig. 2.23 Método de Malla.

2.6.7.2 Método del gradiente o de Cauchy.

En este método es necesario conocer el comportamiento del gradiente de la función objetivo. Se da un punto inicial y se comienza a avanzar en dirección de gradiente, hasta obtener un punto mínimo en dicha dirección. Este punto se vuelve a evaluar de la misma forma, con su gradiente asociado y busca el siguiente mínimo. De mayor velocidad de convergencia, pues por cada punto, genera un solo punto para volver a evaluar, tiene el defecto que se necesita conocer el gradiente de la función para poder evaluar al sistema.

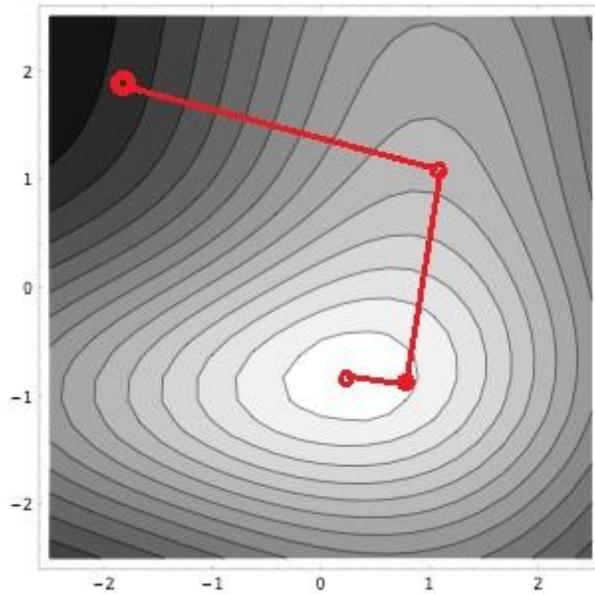


Fig. 2.24 Método de Gradiente.

2.6.7.3 Método de Simplex.

En este método, para n variable, se generan $n + 1$ puntos aleatoriamente y se calculan los valores de la función objetivo. El punto de mayor valor se elimina y se realiza una proyección escalada del mismo con respecto al subespacio vectorial conformado por los otros puntos para generar un nuevo conjunto de $n + 1$ puntos a evaluar. Esto se realiza hasta que los valores entre los diferentes puntos quedan por debajo de una tolerancia y se encuentran dentro de la vecindad inmediata del punto óptimo deseado. Este método presenta la ventaja de requerir pocos cálculos por cada paso, pero plantea el problema de generar un conjunto de puntos n linealmente independientes y su espacio vectorial asociado, para poder realizar la proyección del punto que se elimina. La proyección de este último punto es escalada, ya que se trata de que en cada paso quede a una menor distancia del punto que se busca. Sin tener los datos del gradiente de la función, localiza la dirección en la que debe avanzar para encontrar el punto mínimo.

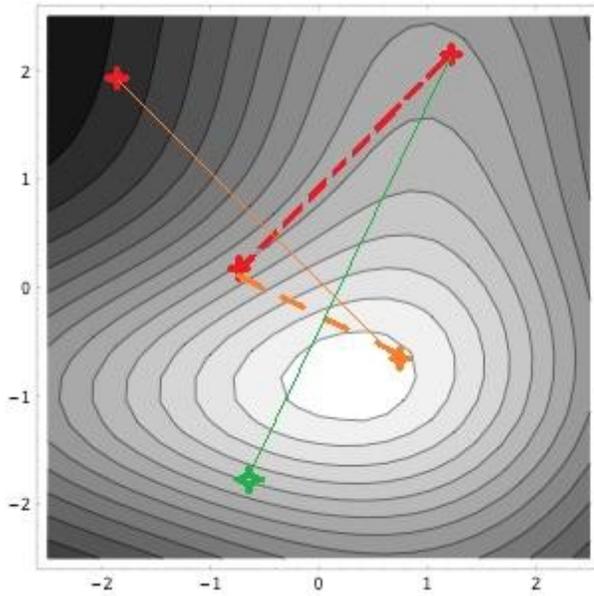


Fig. 2.25 Método Simplex.

2.6.7.4 Métodos heurísticos.

Los métodos heurísticos son técnicas para resolver problemas de manera de prueba y error, es decir, utiliza generación de números aleatorios, criterios de decisión, y criterios de paro para encontrar la solución óptima de un problema específico. Dentro de estos métodos destacan los algoritmos genéticos.

Los algoritmos genéticos se basan en la idea de generar “individuos” o “genes” que represente a las variables de la función objetivo, por medio de una codificación (por ejemplo, binaria) y proponer varios genes buscando cuales son los más cercanos a un punto óptimo. Con una población inicial se evalúa la función objetivo y se seleccionan a los mejores individuos para combinar sus genes y encontrar una generación posterior de individuos. Otra forma de modificar los individuos es por medio de mutaciones, las cuales modifican aleatoriamente la información dentro de los genes de cada individuo. Con ello, a pesar de tener que analizar varios puntos probables, en cada una de las generaciones posteriores se obtienen mejores características y una mayor probabilidad de llegar al punto óptimo.

1000101001010100	10010001100010101
1010010001010101	10100100101010101
1010110110101101	01001110101101010
0101010110110101	01010101001110110
0011000101000100	01011001001010010
0101101010101010	01110100100100101
1100010110110101	10110110010010010
0010101101101101	01001100100110101

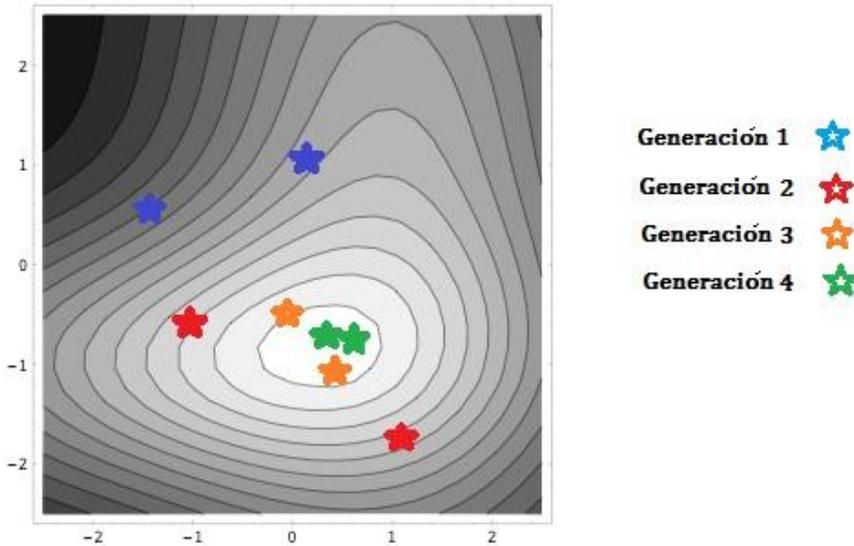


Fig. 2.26 Algoritmos genéticos.

2.6.8 Condiciones especiales en la optimación.

En ciertos casos, no se presentan condiciones especiales a los modelos de optimación, y aplicando algunos de los modelos descritos, permiten encontrar puntos óptimos o regiones factibles en donde se encuentre la solución buscada, ejemplos de estos casos especiales son:

Sistemas de ecuaciones lineales – no lineales. En estos casos sólo se busca la región factible para la solución de un problema que implica diferentes restricciones de un sistema.

Optimación si restricciones. Sin importar las fronteras del sistema, se busca cuales son los máximos o mínimos y cuáles son los valores de las variables involucradas.

Optimación multiobjetivo. Este caso puede ser descrito como una función vectorial de variable vectorial. No sólo se busca un solo valor en la función objetivo, sino varios valores relacionados a partir de las variables, y se puede encontrar el punto óptimo para cada uno de los valores objetivo o para su conjunto.

"Todo el pensamiento moderno es permeado por la idea de pensar lo imposible."

Michel Foucault

3. Modelo teórico.

Como modelo teórico se entiende a aquella representación de la realidad, que trata de analizar. Las herramientas con las que se cuentan son los conocimientos de física y matemáticas, y todo lo que se hace es interpretar esa realidad por medio de sus medidas, relaciones y restricciones. De ahí surge el modelo teórico, una mera abstracción de la realidad, que sirve para realizar en la mente todos los cambios, cálculos y modificaciones necesarias, antes de regresar al dominio de la realidad. En pocas palabras, es la forma que se le da al universo, para tratarlo de entender.

La importancia de este modelo teórico radica en que de él se puede obtener las propiedades que caracterizan el movimiento que se trata de realizar, y por medio de la matemática aplicada a dicho modelo, nos permite mejorarlo.

3.1 Modelo termodinámico de un manipulador 3RRR.

Todo sistema termodinámico debe de estar identificado por sus fronteras, ya que estas determinan las interacciones que presenta el sistema con sus alrededores. La adecuada selección de dichas fronteras permitirá un análisis de mayor o menor complejidad, así como la obtención de la información que se quiere. Para nuestro caso, se identifica cual es el sistema, el tipo de frontera y en los alrededores que se considera.

Para ello, primero se identifica cual es el sistema de estudio y cuales sus fronteras. De inicio no importa el tipo, modelo o número de eslabones. El manipulador cuenta con una base, por donde se suministra la energía para cada uno de los motores del mismo y da la inercia necesaria para que el sistema robótico este firmemente asegurado. Por otro lado, el manipulador está conformado por varios eslabones, unidos entre ellos sin tener una restricción para el tipo de articulación empleada. Por último se toma en cuenta el objeto o tarea a realizar, la cual se considera que está previamente identificada y no se puede modificar.

Para este caso en específico, el modelo ocupado es un manipulador 3RRR plano este tipo de manipuladores consiste en tres cadenas cinemáticas con tres articulaciones rotacionales, de las cuales la primera es la articulación motriz (Fig 3.1).

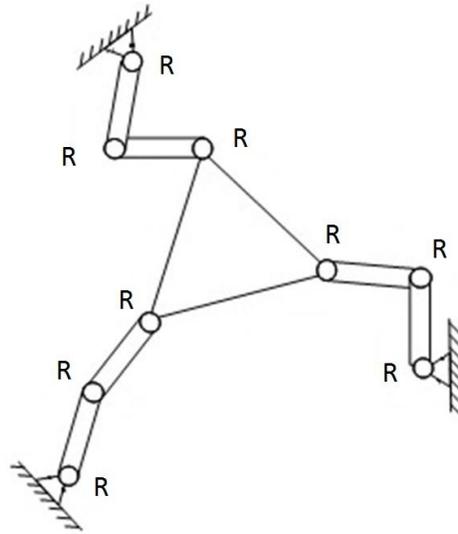


Fig. 3.1 Esquema del manipulador

El sistema que se define está dado por los eslabones del manipulador, dejando fuera de las fronteras del sistema al objeto a mover y a su base. El tipo de fronteras a seleccionar no necesitan permitir el paso de masa, sino solamente el flujo de energía, ya sea entre el brazo y su base, el brazo y el objeto a mover o el brazo y los alrededores en general (Fig 3.2).

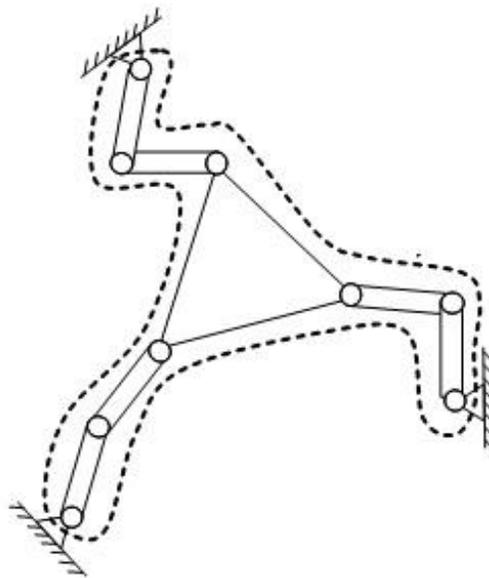


Fig. 3.2 Fronteras del sistema

Como a través de las fronteras solo puede haber flujo de energía, es necesario identificar a que corresponde cada uno de ellos. El primer flujo es aquel que va de la base inercial al manipulador, siendo este el que engloba el total de energía que se introduce al sistema. El segundo flujo que se puede identificar es la energía que sale del manipulador para realizar la tarea descrita, siendo está una cantidad de energía menor a la que se introduce, y esto se da por dos causas. La primer causa, parte de la energía se disipa en forma de calor en actuadores o articulaciones, ocasionando un flujo de calor al medio ambiente, mientras que la segunda es que parte de la energía que se introduce al sistema se destina a mover al manipulador mismo (Fig. 3.3).

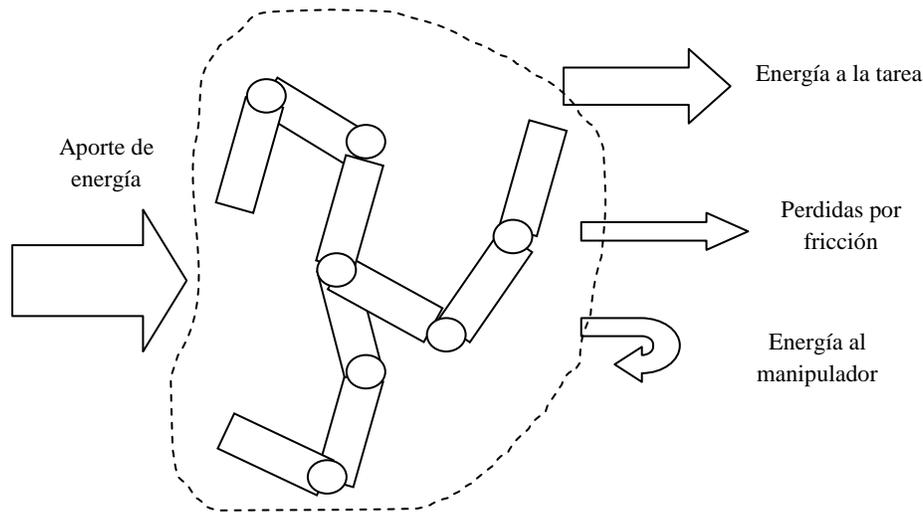


Fig. 3.3 Flujos de energía a través de las fronteras

En la realidad, al sistema ingresa energía a través de sus actuadores. Generalmente se trata de energía eléctrica, pero puede tener actuadores de tipo hidráulico o neumático o de otro tipo, por lo que solo se identifica el flujo de energía sin importar el tipo de actuador que realiza este trabajo. En los actuadores se modifica la energía introducida al sistema en energía cinética, encargada de realizar el movimiento del manipulador, y una parte de la energía introducida se disipa en forma de calor ya sea por fricción en las articulaciones o por fricción y calentamiento en los actuadores. Del total de energía cinética obtenida se divide en dos partes, una al objeto a mover o la tarea a realizar, y otra parte se ocupara para mover el mismo manipulador.

La energía ocupada en la tarea a realizar no se puede cambiar a menos de que se modifique la tarea misma o a trayectoria descrita. Por otro lado, el calor disipado en los actuadores y su consecuente pérdida de energía solo se puede disminuir por medio de mejores actuadores. En ambos campos existen diversos trabajos encaminados a hacer trayectorias más eficientes, así como a mejorar la eficiencia de los actuadores y reducir las pérdidas de energía en las articulaciones por medio de la disminución en la fricción o buena lubricación. Un ejemplo de una baja fricción lo proveen las articulaciones de los seres vivos, en las que se presenta un

coeficiente de fricción entre las superficies de $\mu = 0.004$, con lo que las pérdidas de energía son mínimas. Por lo que respecta al tipo de actuadores, los motores eléctricos llevan mucha ventaja, ya que logran eficiencias mayores del 90% dependiendo del tipo de motor y servicio que realicen.

Bajo este punto de vista, solo queda una parte de energía que aun se puede optimizar a partir del diseño del manipulador. Esta es aquella que ocupa el mismo manipulador para realizar su tarea. Si se reduce este último flujo de energía se tendrá que la mayor parte de la energía cinética obtenida ira a realizar la tarea descrita, siendo este el caso de mayor eficiencia global del modelo. Algo análogo sería mover la mano sin transportar ningún objeto.

3.1.1 Consideraciones del modelo.

Para este modelado, se consideran sistemas ideales, en los que las pérdidas por fricción en las articulaciones son mínimas, llegando a ser despreciables, y el comportamiento de los eslabones es el de un cuerpo rígido, evitando así la acumulación de energía potencial elástica dentro de los mismos. También se considera que no se puede modificar la tarea a realizar, estando ésta predeterminada sin importar si es o no la de mayor eficiencia. Otra de las consideraciones es que los actuadores ni las articulaciones tienen perdidas en forma de calor. Esto implica que solo se toma en cuenta para el análisis la energía mecánica del manipulador.

La energía requerida por el manipulador para moverse quedara en función de la geometría del propio manipulador y de su trayectoria De ésta forma, el trabajo a desarrollar es buscar la configuración geométrica que asegure tener siempre la menor energía en toda la tarea a realizar. Con ello se tendrá que la mayor parte de la energía introducida al sistema se dedicara a la tarea a realizar. Para un sistema más detallado, que considere fricciones y pérdidas, estas estarán relacionadas con las velocidades relativas en las articulaciones, así como la potencia que se requiere para realizar dichos movimiento, quedando estas ecuaciones también en función de las variables de diseño.

3.1.2 Energía mecánica.

Para encontrar la energía mecánica de cada elemento del manipulador, se toman en cuenta las energías potenciales y cinéticas que presenta cada elemento. Por ello, es necesario modelar los eslabones, relaciones con los actuadores y todo aquello que pueda tener un movimiento involucrado dentro del manipulador. Para simplificar el análisis, solo se toma en cuenta a los eslabones del manipulador, tomando como parte de ellos las características de los actuadores u otros elementos conectados.

Un primer acercamiento sería encontrar una función objetivo que describa este comportamiento, De esta forma, se asigna a la energía requerida por el manipulador para moverse como “Función objetivo”. Esta función está determinada por la energía de cada uno de sus eslabones, y a su vez, esta ecuación queda en función de las dimensiones del eslabón y su movimiento. Las

propiedades inerciales (masa, momento de inercia) así como la cinemática que se desprende de la trayectoria que se pretende realizar están relacionadas con los parámetros que se modificaran del manipulador.

El modelo que se ocupa para describir cada uno de los eslabones del los brazos del manipulador, consiste en una barra de sección uniforme, en la que su masa y momento de inercia están en función de la longitud de la barra. (Fig. 3.4).

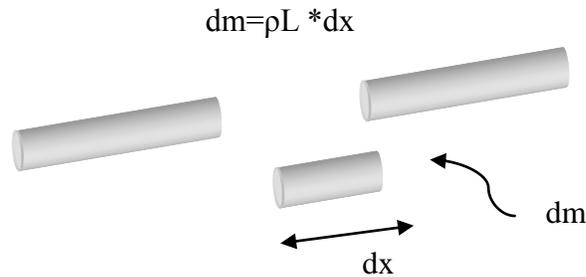


Fig. 3.4 Elemento diferencial del eslabón

Para obtener el momento de inercia se modela al eslabón como una barra sólida (Fig. 3.5). En algunos otros estudios sugieren que la geometría idónea será una sección tubular de pared delgada, de sección uniforme o no, que presenta la ventaja de que con la misma masa se obtiene una menor deflexión [4], o el cambio en el tipo de materiales a ocupar, como fibra de carbono, y eslabones modelados por medio de elemento finito [5], en los cuales disminuye la masa y la inercia relacionadas a cada elemento, con su consiguiente disminución en energía requerida. Así se tendrá que para cada eslabón del manipulador se generan ecuaciones de las propiedades inerciales en función de las longitudes de los eslabones.

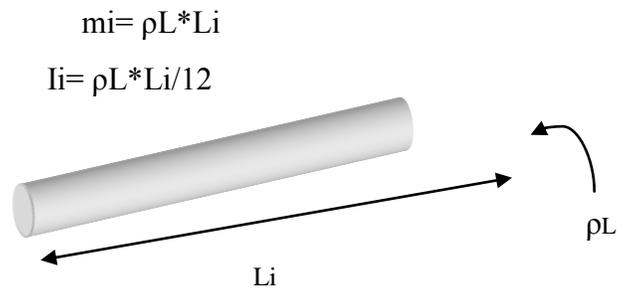


Fig. 3.5 Masa y momento de inercia.

Se tomo una barra sólida como modelo inicial por la sencillez del cálculo de sus propiedades inerciales. De la misma forma, si se opta por otra topología para cada una de los eslabones, esta se podrá incluir dentro del cálculo, solo tomando en cuenta cuales son las variables de diseño. Para este primer acercamiento, solamente se dejan como variables de diseño a las longitudes de los eslabones.

Para el elemento central, en donde se unen las tres cadenas cinemáticas, el modelo a considerar es una placa triangular de sección transversal constante. Para dejar este eslabón dependiendo de una sola dimensión, se considera que es un triángulo equilátero, en el que cada esquina está colocada cada una de las articulaciones, todas ellas a distancia similar del centro del triángulo. De esta forma, cada eslabón tiene una dimensión que define sus características.

Este tipo de manipulador puede ser clasificado de paralelo simétrico, ya que satisface las siguientes condiciones:

- El número de brazos es igual al número de grados de libertad de la plataforma móvil.
- El tipo y número de articulaciones en cada uno de los brazos se encuentran arreglados en un patrón similar.
- El número y ubicación de la articulación motriz es el mismo en todos los brazos.

3.2 Modelo cinemático de un manipulador paralelo.

Después de obtener las propiedades inerciales, es necesario conocer las propiedades cinemáticas asociadas a la trayectoria. Para ello se necesita conocer la velocidad lineal de los centros de masa y las velocidades angulares absolutas de cada eslabón. Estas dependerán de la trayectoria de trabajo, y de las longitudes de los eslabones. El primer acercamiento para un manipulador serial se da a través de un sistema con movimiento plano, para reducir el número de ecuaciones involucradas, pero de la misma forma, puede analizarse para un sistema que desarrolle un movimiento tridimensional. Los casos analizados a continuación corresponden a un manipulador de dos barras con articulaciones RR en movimiento plano general y a un manipulador serial de tres eslabones con articulaciones RRR, también en movimiento plano, ya que es el modelo que define a cada uno de los brazos del manipulador.

El primer acercamiento utiliza el modelo de un manipulador plano RR, como el representado en la siguiente figura (Fig. 3. 6). En este modelo, las variables que se pretenden encontrar son las longitudes de los eslabones y los ángulos correspondientes de cada eslabón a cada instante.

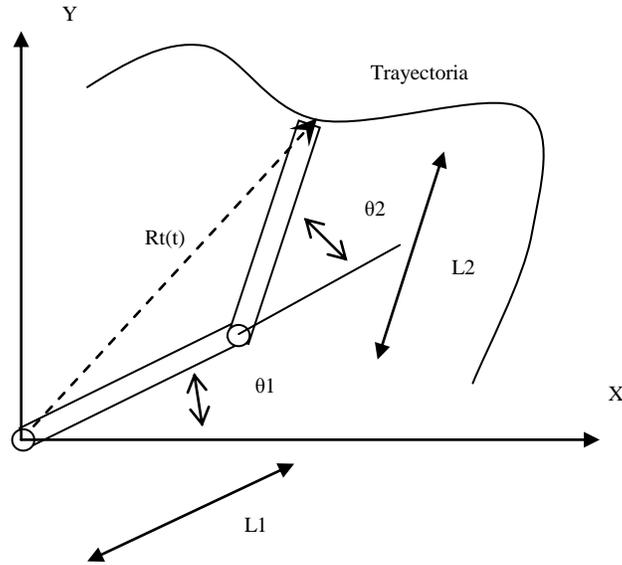


Fig. 3.6 Manipulador RR y trayectoria

La trayectoria es una función del tiempo con

$$R(t) = \{Xt(t), Yt(t)\}$$

Para las proyecciones en cada eje coordenado se tiene:

$$Xt(t) = L1 * \cos(\theta1) + L2 \cos(\theta1 + \theta2)$$

$$Yt(t) = L1 * \sen(\theta1) + L2 \sen(\theta1 + \theta2)$$

Si se aplica la cinemática inversa desde alguna posición inicial, es necesario utilizar un método iterativo para encontrar la siguiente posición, y se corre el peligro de que llegue a puntos singulares en los que pueda perder la siguiente posición cuando llegue a una posición extrema. En lugar de ello se recurre al planteamiento geométrico en el que el manipulador siempre permanece en una configuración, ya sea brazo arriba o brazo abajo, obteniendo las siguientes relaciones entre ángulos (Figs. 3.7 y 3.8).

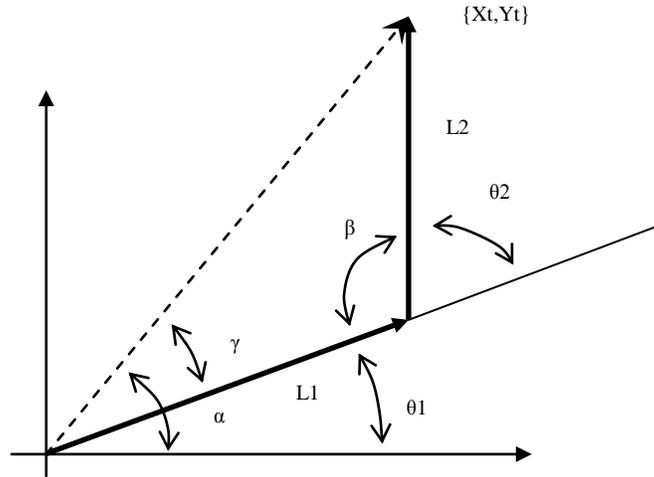


Fig. 3.7 Configuración brazo abajo

Para ambas configuraciones se tienen las siguientes relaciones angulares:

$$Rt = \sqrt{Xt^2 + Yt^2}$$

$$\alpha = ATan \left[\frac{Yt}{Xt} \right]$$

$$\gamma = ACos \left[\frac{L1^2 - L2^2 + Rt^2}{2 L1 Rt} \right]$$

$$\beta = ACos \left[\frac{L1^2 + L2^2 - Rt^2}{2 L1 L2} \right]$$

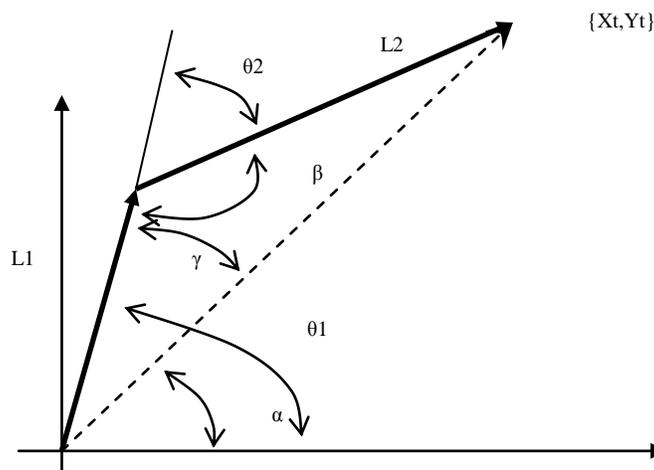


Fig. 3.8 Configuración brazo arriba

Con estos ángulos se obtienen las siguientes configuraciones: (A) brazo abajo, (B) brazo arriba.

$$\theta_{1A} = \alpha - \gamma$$

$$\theta_{2A} = \pi - \beta$$

$$\theta_{1A} = \alpha + \gamma$$

$$\theta_{2A} = -\pi + \beta$$

Quedan definidos los ángulos del manipulador en función de la longitud de eslabones y la trayectoria.

$$\theta_1 = f_1[t, L_1, L_2]$$

$$\theta_{21} = f_2[t, L_1, L_2]$$

$$\theta_2 = \theta_{21} + \theta_1 = f_3[t, L_1, L_2]$$

$$\omega_1 = \frac{d}{dt} \theta_1$$

$$\omega_2 = \frac{d}{dt} \theta_2$$

Con las velocidades angulares y las posiciones de los centros de masa de cada eslabón es posible conocer las velocidades lineales y de este modo su energía cinética total, que queda en función de la trayectoria y las longitudes de los eslabones. Para la energía potencial se ocupa un vector que va desde una altura de referencia hasta el centro de masa de cada eslabón.

Para el caso del manipulador RRR en movimiento plano, se tiene que agregar al último eslabón como incógnita, pero se resume en el mismo análisis anterior. Para este caso, el punto de trabajo requiere también de que se defina una orientación del eslabón final, con lo que se tiene como datos el punto de trabajo y la orientación necesaria para este punto de trabajo. Este modelo genera una recta dentro de la cual debe de encontrarse el punto de articulación del eslabón intermedio con el eslabón final (Fig. 3.9)

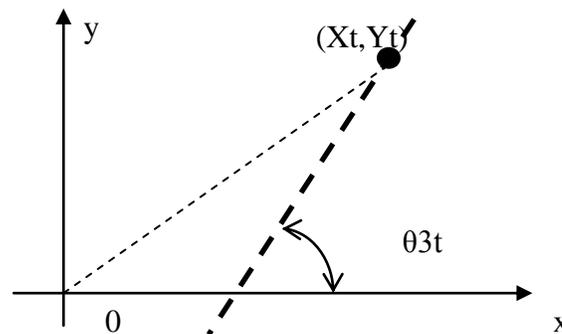


Fig. 3.9 Línea de soluciones del tercer eslabón

Al definir la recta anterior, se restringe la posible solución a un sistema que incluya la longitud del tercer eslabón con el problema de un manipulador de dos barras, ya que es una combinación de ambos casos. De esta forma, con los datos de posición y orientación se obtienen las siguientes relaciones.

$$R(t) = \{Xt(t), Yt(t)\}$$

$$\theta_3 = f_1[t]$$

$$\theta_{21} = f_2[t, L_1, L_2, L_3]$$

$$\theta_2 = \theta_{21} + \theta_1 = f_3[t, L_1, L_2, L_3]$$

$$\theta_1 = f_4[t, L_1, L_2, L_3]$$

$$\omega_1 = \frac{d}{dx} \theta_1$$

$$\omega_2 = \frac{d}{dx} \theta_2$$

$$\omega_3 = \frac{d}{dx} \theta_3$$

Esto significa que, las velocidades angulares, así como las velocidades lineales de los centros de masa de cada uno de los eslabones, queda en función de la trayectoria de trabajo, y de la orientación del último eslabón, estas expresadas en el tiempo, permitiendo realizar un análisis similar al de un sistema con solo dos barras (Fig. 3.10).

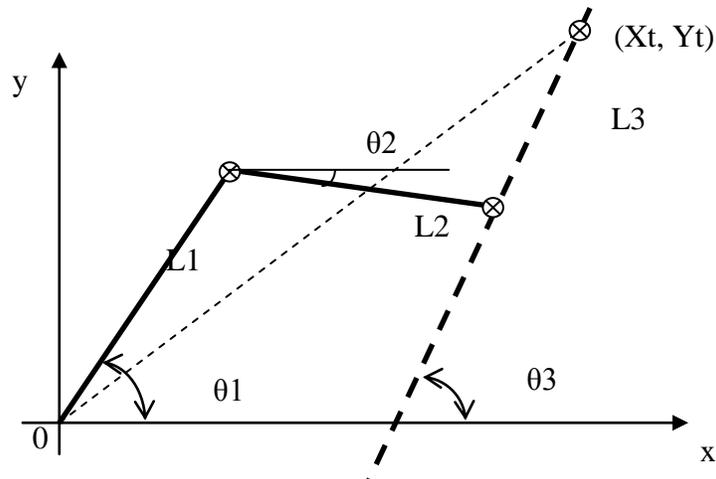


Fig. 3.10 Modelo geométrico de 3 eslabones RRR.

En el sistema $3\underline{R}RR$, se debe considerar que el punto de trabajo es el centro de la placa triangular. Además del punto de trabajo, también debe de estar definido un ángulo de trabajo, es decir, en que orientación se encuentra esta placa terminal. Con esta descripción, cada uno de los brazos del manipulador paralelo tiene un comportamiento similar al de un sistema serial RRR, pero en este caso, al ser tres brazos, se convierte en un sistema $3\underline{R}RR$

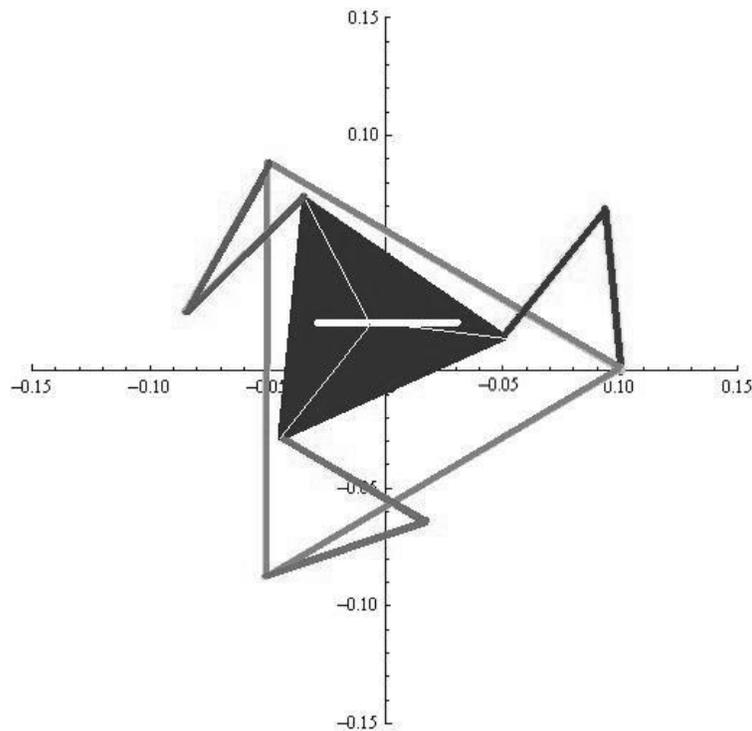


Fig. 3.11. Modelo $3\underline{R}RR$

3.3 Ecuaciones de energía del sistema.

Con el producto punto del vector de posición del centro de masa de cada uno de los eslabones y el campo gravitacional multiplicado por la masa del eslabón se obtiene el valor de la energía potencial, tomando en consideración que la altura de referencia no ocasione valores negativos de energía para el movimiento en análisis.

$$E_{Clineal_i} = \frac{m_i v_i^2}{2}$$

$$E_{Angular_i} = \frac{I_i \omega_i^2}{2}$$

$$E_{Pot_i} = m_i g h_i$$

$$E_{estabon\ i} = E_{Clineal_{est\ i}} + E_{Angular_{est\ i}} + E_{Pot_{est\ i}}$$

$$E_{tot} = \sum E_{eslb\ i}$$

De esta forma, la propiedad de energía del sistema queda definida. Dicha función esta definida por las longitudes de los eslabones y la trayectoria a realizar, quedando de la siguiente forma para el caso de dos eslabones:

$$E_{tot} = f[Xt, Yt, L1, L2]$$

Con esta ecuación con 4 variables, se determina 2, que son la trayectoria (Xt, Yt), para dejar solo variables las longitudes y explorar cuales de ellas nos dan el menor monto de energía, siendo la función objetivo en este proceso de optimización.

Para el caso de tres eslabones, la función se amplía a la siguiente expresión:

$$E_{tot} = f[Xt, Yt, \theta3, L1, L2, L3]$$

En este caso se tienen 6 variables, de las cuales se tiene como dato la trayectoria (Xt, Yt) y la orientación del último eslabón ($\theta3$), con lo que quedan 3 variables independientes, que corresponden a las longitudes de los eslabones.

Para el caso del manipulador paralelo, aumenta el número de variables del sistema que es necesario conocer todas las longitudes de cada uno de los eslabones quedando de la siguiente forma:

$$E_{tot} = f[Xt, Yt, \theta3, L11, L21, L31, L12, L22, L32, L13, L23, L33]$$

En este caso, se tienen 12 variables, de las cuales se dan como dato 3 ($Xt, Yt, \theta3$), pero todavía quedan 9 de ellas por definir. Esto sería un modelo en el que cada una de las cadenas seriales que conforman al manipulador paralelo puede tener diferentes longitudes, lo cual da un gran margen de diseño.

Para simplificar el modelo, se recurre que sea simétrico, siendo entonces que cada uno de los brazos tenga la misma magnitud en sus eslabones correspondientes, con lo que se reduce el número de variables del sistema y por consiguiente, el modelo que se tiene que evaluar a:

$$E_{tot} = f[Xt, Yt, \theta3, L11, L22, L33]$$

3.4 Ecuación objetivo del sistema.

El parámetro que nos determina cual es la mejor configuración para un manipulador es la energía mecánica del sistema. Pero esta cantidad es variable y dependiente del tiempo. Al ser sus variables dependientes del tiempo únicamente en el caso particular en el que no se introduce energía al sistema se puede asegurar que la energía del mismo permanece constante (primer ley de la termodinámica) pero, para el caso de análisis actual, el valor de la energía del sistema se va

a estar modificando punto a punto de la trayectoria que describe. Entonces no es suficiente con conocer la energía para cada instante de la trayectoria, sino un total de energía involucrada en el movimiento.

Para obtener este global de energía del modelo, se realiza un muestreo a tiempos iguales de la cantidad de energía del sistema, sumando todos estos estados energéticos y obteniendo un total de energía asociado a la trayectoria a realizar. Al estar tomando estados energéticos a lo largo del tiempo, se puede definir flujos de energía, hacia el sistema y desde el sistema. Cuando se tiene un flujo de energía al sistema, los actuadores están promoviendo el movimiento del sistema, mientras que cuando el flujo de energía es negativo, se puede interpretar que los actuadores están frenando el movimiento. Se podría interpretar que es el campo gravitacional el que reduce la velocidad del sistema, pero al estar considerando la energía cinética y potencial dentro de la función objetivo, ya está siendo evaluada dentro del sistema.

El punto de diseño óptimo será aquel en el que el global de energía que tiene el manipulador sea el mínimo, ya que esto indicara que el sistema permanece en el menor estado energético para dicho movimiento o trayectoria. Se tiene entonces que, para un lapso de tiempo entre t_0 y t_f (tiempos iniciales y finales) se elige un muestreo homogéneo dividiendo este intervalo en n partes, y tomando la energía en cada uno de los intervalos de tiempo.

$$\Delta t = \frac{t_f}{n}; n \in \mathbb{N}$$

$$E_{Global} = \sum_{t=0}^{t=n\Delta t} E_{Tot}(t)$$

$$E_{Global} = \sum_{t=0}^{t=n\Delta t} E_{tot} = f[Xt(t), Yt(t), \theta_3(t), L11, L22, L33]$$

En esta última ecuación se asegura que se está considerando la energía del sistema, para todo instante, representando a toda la trayectoria y orientaciones solicitadas, solo en función de los parámetros de diseño, que en este caso son las longitudes de los eslabones. Con ello se obtiene la función objetivo a evaluar para cada caso.

3.5 Restricciones del modelo.

Para evaluar la función global de energía del modelo es necesario el determinar cuáles son las restricciones dentro de las que se encuentra la región factible del punto óptimo buscado. En un principio, sería necesario conocer cuáles son los puntos en los que el sistema entra en singularidades, es decir, puntos en los cuales el movimiento no será posible. Esto se interpreta como que para posiciones extremas, en las que se desarticula el sistema, es requerida una energía infinita. Para el caso de un manipulador de dos eslabones RR, la función de energía global está

definida para todos los puntos (L1, L2), pero no todos ellos cumplen con las restricciones geométricas posibles para poder generar dicha trayectoria. Las limitaciones se encuentran pues, en la suma de las longitudes de los eslabones, las cuales se definen por las longitudes máximas y mínimas del manipulador.

$$R_{Max} \leq L1 + L2 \rightarrow L2 \geq R_{Max} - L1$$

$$R_{min} \geq L1 - L2 \rightarrow L2 \geq L1 - R_{min}$$

$$R_{min} \geq L2 - L1 \rightarrow L2 \leq R_{min} + L1$$

Para el caso de dos barras, Paredis y Koshla muestran que las longitudes deben de cumplir con las siguientes características: la suma de las longitudes de los eslabones debe de ser mayor o igual al radio máximo de trabajo y la longitud del segundo eslabón debe de ser mayor o igual a la diferencia entre el radio de trabajo y la longitud del primer eslabón (Fig. 3.12). Para esto, es necesario entonces el conocer el radio de trabajo y los máximos y mínimos de la trayectoria, con lo cual quedarían definidos las restricciones geométricas que se busca.

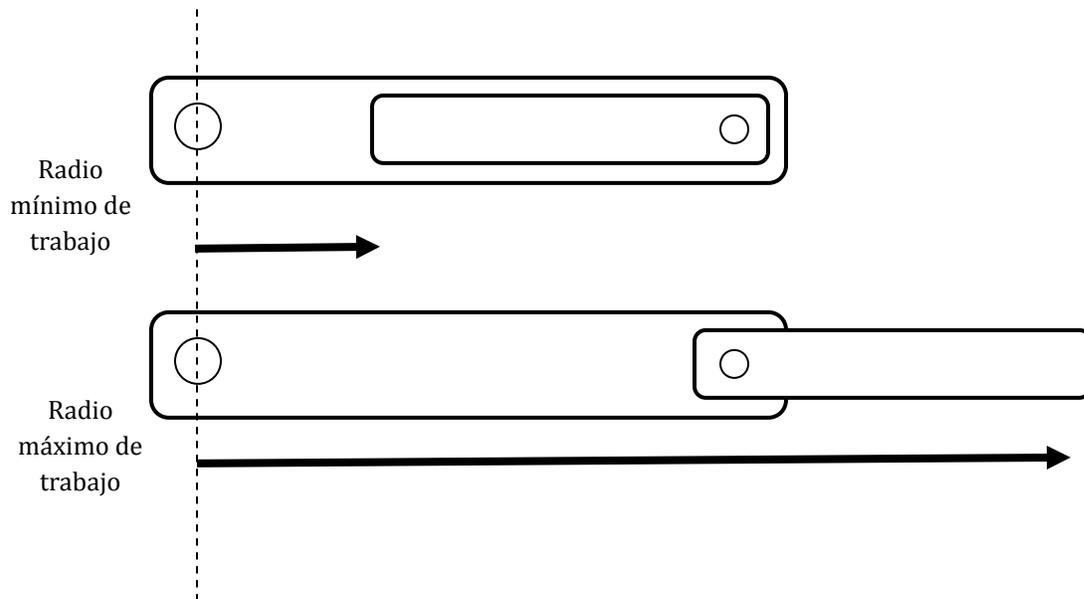


Fig 3.12. Restricciones geométricas del modelo

En un primer caso con un radio de trabajo constante unitario, se obtendrían los siguientes graficas y restricciones geométricas (Fig. 3.13).

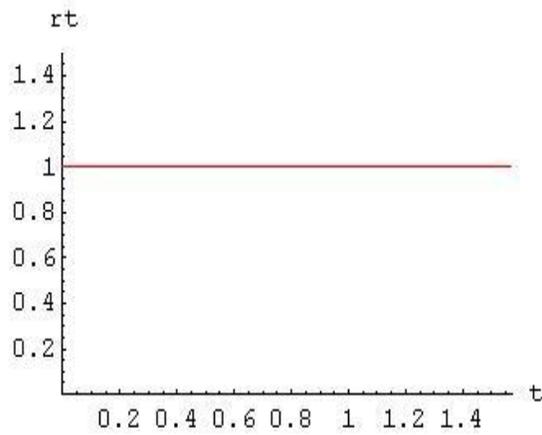


Fig. 3.13 Radio de trabajo en el tiempo.

Las restricciones que dan el radio de trabajo máximo y mínimo generan la siguiente área factible, en la que se debe de encontrar el valor mínimo de energía total (Fig. 3.14).

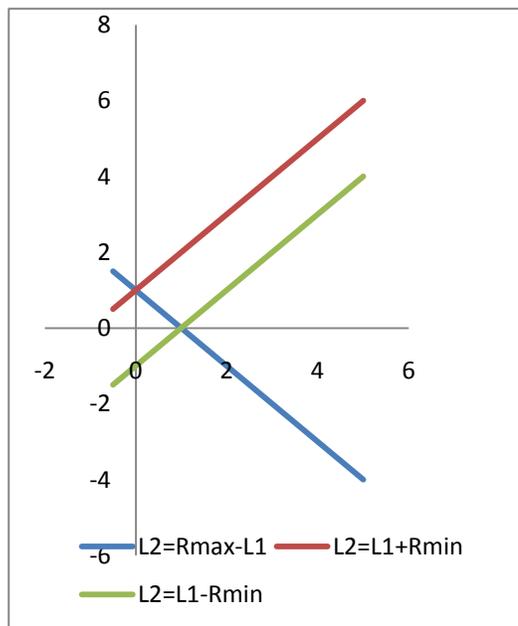


Fig. 3.14 Región de restricciones geométricas.

3.6 Análisis de trayectoria, las singularidades.

La trayectoria va a ser dato, tratándose en este caso no solo de la posición del punto de trabajo, sino también de la orientación del elemento terminal. Así, para todo tiempo se debe de tener una trayectoria definida en las variables $(Xt, Yt, \varphi t)$. Se aplica cinemática inversa, para definir cuáles son las posibles soluciones que resuelven dicho punto de trabajo. En general, las trayectorias que puede cumplir un manipulador 3RRR se encuentran dentro de un triángulo equilátero, limitado por los ejes de apoyo donde se encuentra la primer articulación de cada uno de los brazos. Dentro de esta área de trabajo, dependiendo de la combinación de ángulos y longitudes de eslabón, se puede encontrar orbitas que nos llevan a singularidades [2, 3]. Estas singularidades pueden ser de Tipo I o seriales, Tipo 2 o paralelas y Tipo 3 cuando se presentan ambas singularidades simultáneamente. Para conocer dichas singularidades, se tiene que conocer cuál es el comportamiento de los Jacobianos asociados al manipulador [19].

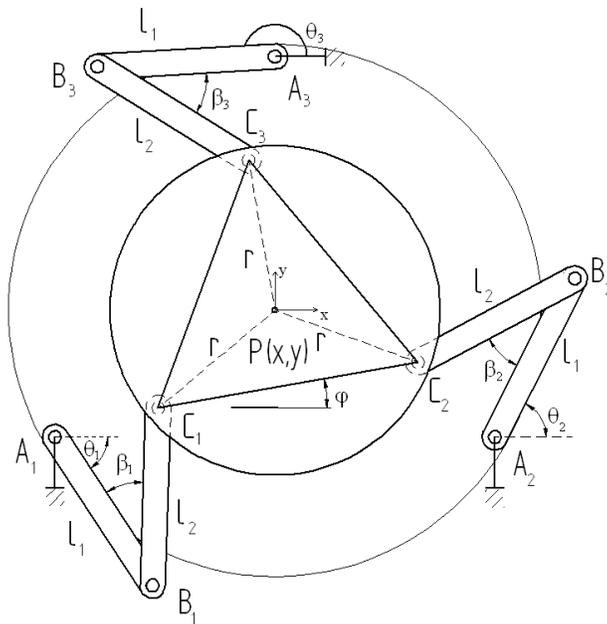


Fig. 3.15 Modelado 3RRR.

La cinemática del manipulador 3RRR se desarrolla de la siguiente forma. Se puede determinar la posición de cada uno de los brazos del manipulador, por medio de un modelo similar al ocupado en el modelo RRR. La posición de un punto P de la trayectoria será, para cada uno de los brazos:

$$p_i = \overline{l_{1i}} + \overline{l_{2i}} + \overline{r_i} + \overline{OA_i} = (x, y)$$

En la cual

$$\bar{l}_{1i} = l_1(\cos\theta, \text{sen}\theta)$$

$$\bar{l}_{2i} = l_2(\cos\beta, \text{sen}\beta)$$

$$\bar{r}_i = r(\cos(\varphi + k), \text{sen}(\varphi + k))$$

Al derivar la ecuación con respecto al tiempo

$$\dot{p} = \dot{\bar{l}}_{1i} + \dot{\bar{l}}_{2i} + \dot{\bar{r}}_i$$

$$\dot{p} = \dot{\theta}E\bar{l}_{1i} + \dot{\beta}E\bar{l}_{2i} + \dot{\varphi}E\bar{r}_i$$

Donde

$$E = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

es la matriz antimétrica.

Multiplicando \dot{p} por \bar{l}_{2i}^T se tiene

$$\bar{l}_{2i}^T \dot{p} = \dot{\theta} \bar{l}_{2i}^T E \bar{l}_{1i} + \dot{\beta} \bar{l}_{2i}^T E \bar{l}_{2i} + \dot{\varphi} \bar{l}_{2i}^T E \bar{r}_i$$

$$\bar{l}_{2i}^T \dot{p} = \dot{\theta} (\bar{l}_{2i}^T E \bar{l}_{1i}) + \dot{\varphi} (\bar{l}_{2i}^T E \bar{r}_i)$$

Realizando las ecuaciones simultaneas para cada una de las piernas i-ésimas, se tiene que

$$\begin{bmatrix} \bar{l}_{21}^T & \bar{l}_{21}^T E \bar{r}_1 \\ \bar{l}_{22}^T & \bar{l}_{22}^T E \bar{r}_2 \\ \bar{l}_{23}^T & \bar{l}_{23}^T E \bar{r}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p} \\ -\dot{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{l}_{21}^T E \bar{l}_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{l}_{22}^T E \bar{l}_{12} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{l}_{23}^T E \bar{l}_{13} \end{bmatrix} [\dot{\theta}]$$

la cual puede representarse como

$$J_{\theta} t = J_{\varphi} \dot{\theta}$$

en la que t es el vector definido como

$$t^T = [\dot{X}t, \dot{Y}t, \dot{\varphi}t]$$

$$\dot{\theta}^T = [\dot{\theta}_{11}, \dot{\theta}_{12}, \dot{\theta}_{13}]$$

En donde $\dot{X}t, \dot{Y}t, \dot{\varphi}t$ son las razones de cambio de la trayectoria con respecto del tiempo y $\dot{\theta}_{11}, \dot{\theta}_{12}, \dot{\theta}_{13}$ son las velocidades angulares de los eslabones primarios de los brazos del manipulador, mismas que se consideran como las articulaciones activas del sistema. Aquí es donde claramente se puede encontrar el modelo entre las variables de entrada (las velocidades de

los actuadores en las articulaciones activas) y las salidas del sistema (la posición y ángulo de la placa final). La relación que se encuentre entre ellas será la que determine las condiciones de las singularidades. Cuando el determinante de las matrices Jacobianas paralela y serial (J_θ, J_q) es cero, el sistema se encuentra en algún tipo de singularidad.

En la realidad, cuando el sistema se encuentra en una singularidad serial, es el caso cuando los eslabones alcanzan su máxima extensión, y llegan a la posición de bloqueo. En dicha posición, la energía requerida para cambiar de estado se vuelve infinita, ya que se trataría que el sistema se alargara para llegar a una posición deseada, desensamblando el modelo. Por otro lado, cuando se cae en una singularidad paralela, la trayectoria deseada no puede controlarse por que los ángulos en los eslabones secundarios son los mismos, generando un aumento en los grados de libertad, o las líneas de definidas por los eslabones secundarios del modelo coinciden en un punto, reduciendo los grados de libertad del modelo y bloqueándolo. El primer caso, se evita, al momento de que se busca las condiciones de mínima energía, y se evalúa la matriz Jacobiana serial (J_q). La segunda condición no está determinada directamente por la energía del sistema, por lo que es necesario evaluar el Jacobiano paralelo (J_θ), para poder asegurarse de que se modela correctamente el movimiento y el control sobre el mismo.

3.7 Modos de operación.

Por la forma en que están definidos cada uno de los brazos del sistema $3\overline{R}RR$, al momento de realizar la cinemática inversa se encuentran dos posibles configuraciones que resuelven el sistema. Al momento de combinar 3 brazos seriales en un sistema paralelo, se generan 2^3 modos de operación, dependiendo de cuál es la configuración de cada brazo (Fig. 3.15).

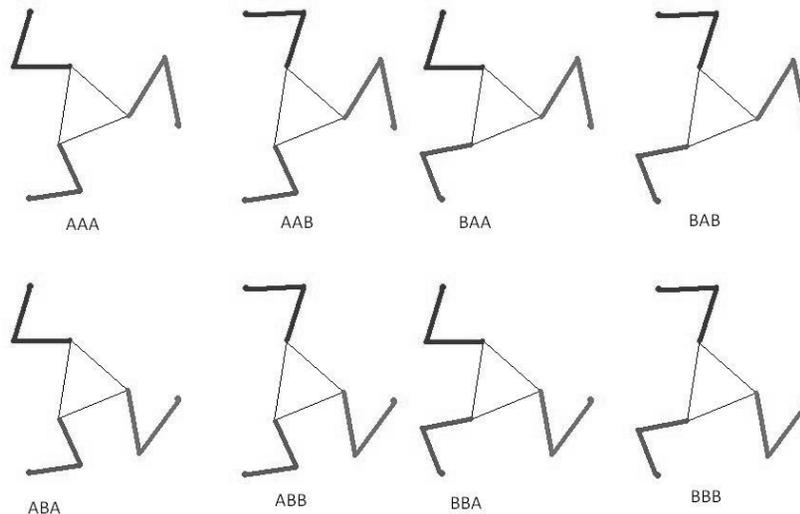


Fig. 3.16 $3\overline{R}RR$ Modos de operación.

Cada modo de operación está relacionado con la configuración geométrica de cada uno de los brazos, definiendo como en configuración A a un sistema brazo abajo y B a un sistema brazo arriba. Esto puede ocasionar una diferencia en la energía de cada sistema, si el manipulador trabaja en un plano vertical, por la diferencia entre las alturas de cada uno de sus elementos y su influencia dentro de la energía potencial del mismo. Por ello, al momento de evaluar una trayectoria deseada, será necesario el evaluar cada uno de los modos de operación para poder comparar entre ellos.

“Cuando las leyes de la matemática se refieren a la realidad, no son ciertas; cuando son ciertas, no se refieren a la realidad.”

Albert Einstein

4. Simulaciones y resultados.

Por medio del modelo teórico se obtiene la energía mecánica del sistema, calculando la misma para cada uno de los elementos, a lo largo de toda la trayectoria. Se plantean trayectorias de trabajo y se realiza la búsqueda de los puntos óptimos para el sistema correspondiente, a las longitudes del manipulador plano simétrico 3RRR. Para realizar dicha búsqueda, se plantea un procedimiento de diseño, que parte desde la definición de la trayectoria y se obtiene el punto óptimo. Este procedimiento se aplica a distintas trayectorias, avanzando mediante las simulaciones a un sistema solución óptimo.

El procedimiento seguido se puede enumerar en los siguientes pasos:

- Obtener la función de trayectoria de trabajo
- Determinar la región factible mediante las matrices Jacobianas del sistema, a lo largo de toda la trayectoria.
- Determinar la función de energía global del manipulador en función de los parámetros de diseño.
- Buscar el punto óptimo para la función objetivo de energía global del manipulador.

La función de la trayectoria a realizar debe de estar dada en función del tiempo, para con ello tener la información correspondiente a como es el movimiento que se pretende realizar. Por medio de esta ecuación de trayectoria, se generan las matrices Jacobianas del movimiento, para cada una de las posiciones que va adoptando el sistema, quedando en función de las longitudes de diseño. De esta forma se determina la región factible de diseño, cuando dichas matrices no conducen a posiciones singulares. Con la región factible de trabajo y la ecuación de energía global, dichos datos se introducen en un método de optimización para determinar el punto de mínima energía y las dimensiones óptimas de diseño para ese manipulador.

Este procedimiento se aplicará para cada uno de los casos que a continuación se describen.

4.1 Resultados en trayectoria con energía constante.

El primer acercamiento hacia este método inicia con una trayectoria que genere una energía cinética constante. Esta trayectoria está dada por una circunferencia de valor unitario alrededor del origen, con velocidad tangencial constante, lo cual ocasiona una energía cinética también constante. Considerando que el campo gravitacional es perpendicular a ambos eslabones, se obtiene que la energía potencial también permanece constante. Los brazos del manipulador únicamente pueden moverse en el plano XY de la trayectoria. Con estas características el

manipulador debe de dar un cuarto de vuelta, con energía potencial nula y energía cinética constante (Fig. 4.1). De esta forma, la trayectoria a seguir es

$$R_t = [\text{Cos}(t), \text{Sen}(t)], \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

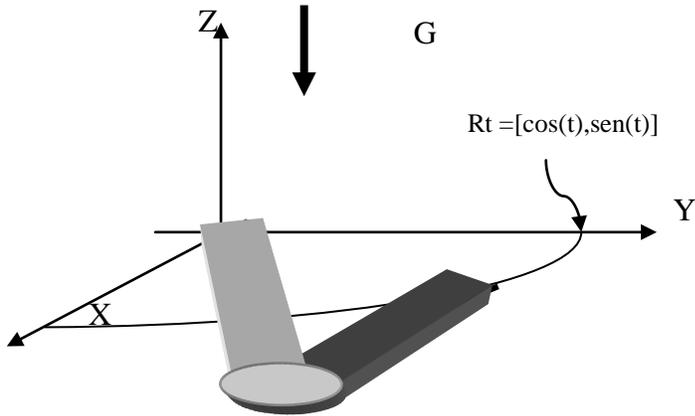


Fig. 4.1 Manipulador en trayectoria circular

Para este caso, el radio de trabajo permanece constante, por lo que el valor máximo y mínimo corresponde al mismo valor, pues se trata de un círculo unitario (Fig. 4.2).

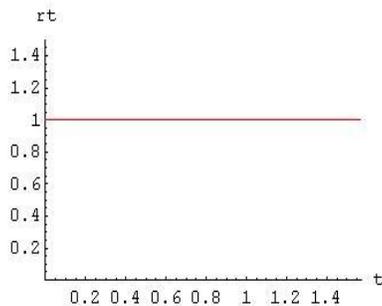


Fig. 4.2. Radio de trabajo.

Con este radio de trabajo, se puede definir la región factible de la función energía (Fig. 4.3), donde cada una de las funciones representa una de las fronteras del sistema, y en su conjunto, dónde se cumple los criterios propuestos, que es el área factible.

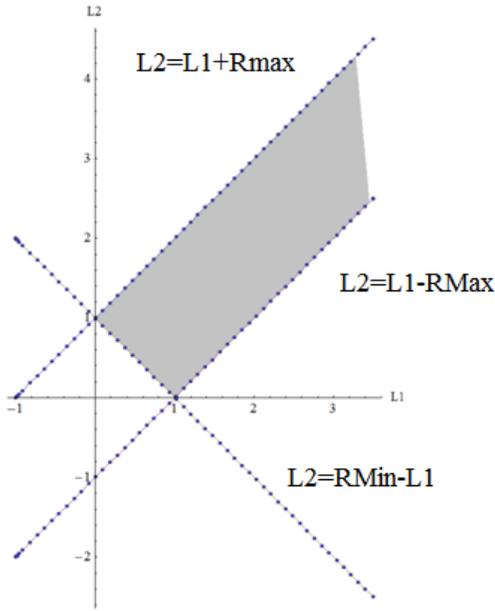


Fig. 4.3 Región de restricciones geométricas.

Las funciones de energía cinética y potencial permanecen constantes a lo largo de toda la trayectoria, quedando la función de energía total solo en función de las longitudes de los eslabones involucrados. Este planteamiento arroja el siguiente resultado grafico de la energía total (Fig. 4.4).

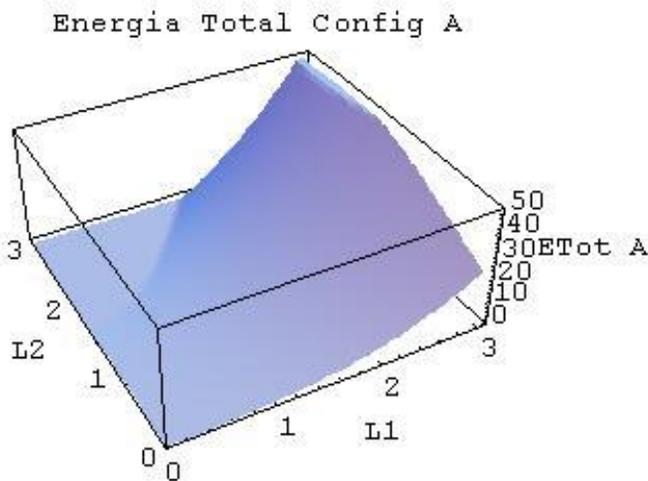


Fig. 4.4 Energía cinética y potencial constante.

Al combinar la función de energía total y la región factible con el método de optimización del programa de computación ocupado (Mathematica Ver. 6), arroja los siguientes resultados.

$$L1 = 1 \text{ [m]} \text{ o } L2=1\text{[m]}$$

$$ETot = 1.16667 \text{ [J]}$$

Este resultado indica que, para el movimiento circular se plantea, solo es necesario un eslabón, de radio unitario, ya que este será el que pueda desarrollar la trayectoria con el menor monto de energía. Las otras combinaciones de longitudes de eslabones dan como resultado una mayor energía. Al explorar otras combinaciones, se encuentra el siguiente ejemplo. Para el caso de que las longitudes de los brazos del manipulador fueran del mismo tamaño ($L1=L2$) se tendría el siguiente resultado

$$L1 = 0.5 \text{ [m]}$$

$$L2 = 0.5 \text{ [m]}$$

$$ETot = 1.38542 \text{ [J]}$$

Esto demuestra que la mejor combinación para resolver este movimiento, se logra por medio de un eslabón único de longitud unitaria.

4.2 Resultados con energía potencial variable.

El siguiente paso en estas simulaciones es el colocar el sistema ante una energía potencial variable, lo cual se logra por medio de colocar ahora al manipulador realizando el mismo movimiento, ahora con el campo gravitacional en el mismo plano del movimiento (Fig. 4.5). En este caso se toma como altura de referencia una distancia de 2 unidades de longitud por debajo del origen del manipulador, para a partir de ese punto cuantificar la energía potencial. La trayectoria será similar al caso anterior; con un recorrido semicircular de un cuarto de vuelta de radio unitario.

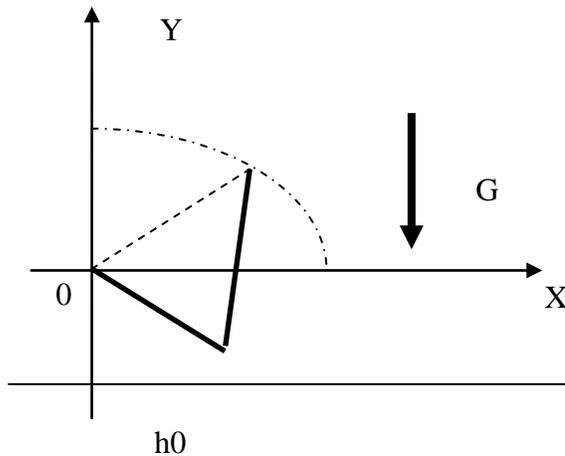


Fig. 4.5 Trayectoria circular con energía potencial variable.

Siguiendo el mismo procedimiento, se obtiene el radio de trabajo, su máximo y mínimo. Como se trata del mismo movimiento, ya que la trayectoria no ha cambiado, se obtienen los mismos radios de trabajo y la misma región factible.

Ahora, para el cálculo de la energía del sistema, se tiene que la energía cinética permanece constante, mientras que la energía potencial va cambiando, ya que es variable con el tiempo. Se ocupa entonces el barrido de energías para toda la trayectoria, con $n = 100$ muestras, para obtener la energía global del sistema. También se presenta que para este caso, se pueden encontrar dos combinaciones en la configuración geométrica, ya sea brazo abajo (Configuración A) o brazo arriba (Configuración B), con lo que es necesario el calcular las energías globales para cada una de estas posibilidades y encontrar cuál de ellas es la que cumple con la menor energía con respecto a la otra. Para este caso, la energía potencial es la que plantea un mayor uso de energía en el manipulador, ya que este requiere el desplazar su propio peso desde un potencial menor a uno mayor.

Al obtener la energía promedio se tienen los siguientes resultados gráficos (Figs. 4.6 y 4.7). Los resultados que arroja el método de optimización nos indica que la combinación de longitudes es la misma, ya sea la configuración brazo abajo o brazo arriba, solo modificándose en valor la energía global que requiere el sistema.

$$L1 = 0.555213 \text{ [m]}$$

$$L2 = 0.471418 \text{ [m]}$$

$$ETotA = 160.584 \text{ [J]}$$

$$ETotB = 167.52 \text{ [J]}$$

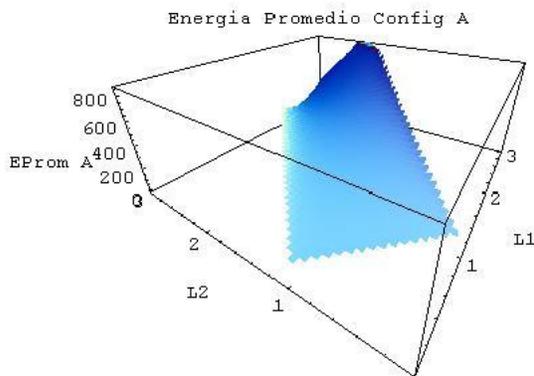


Fig. 4.6 Energía en configuración brazo abajo.

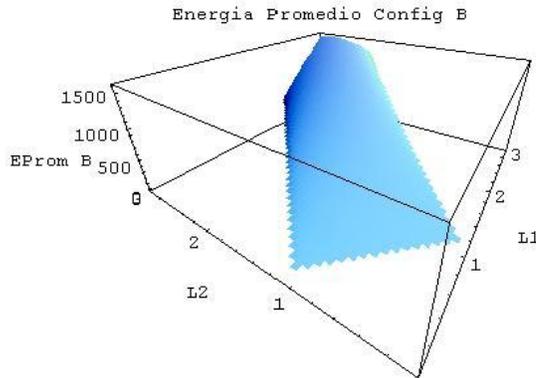


Fig. 4.7 Energía en configuración brazo arriba

Esto es, la configuración brazo abajo requiere una cantidad menor de energía para realizar el movimiento solicitado, ya que la energía potencial que tiene el modelo es menor. Se debe notar que las longitudes de los eslabones no son iguales y su suma no es la unidad, pero se puede asegurar que esta combinación de longitudes es la que menor energía global requiere (Fig. 4.8).

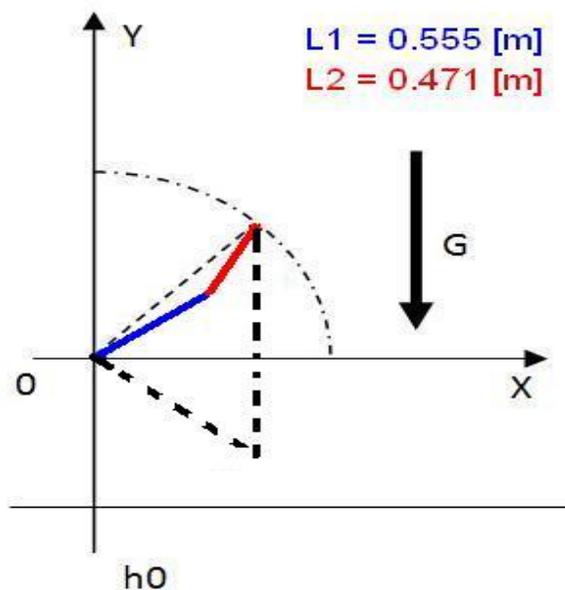


Fig. 4.8 Solución al sistema con energía potencial variable.

4.3 Resultados con energía cinética variable.

El siguiente paso dentro de la simulación es ahora considerar una trayectoria más compleja que engloben cambios en la energía cinética. Las ecuaciones de energía global que se generan son complejas, ya que vienen implícitos los cambios con respecto del tiempo de dicha energía y todas ellas en función de las longitudes de diseño. Para variar la energía cinética, se modifica la trayectoria a una sinusoidal (Fig. 4.9), y se hace que el campo gravitacional quede perpendicular al plano de trabajo, con lo que se eliminan los efectos de la energía potencial.

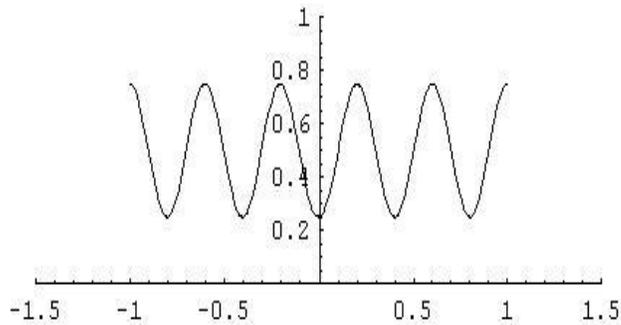


Fig. 4.9 Trayectoria sinusoidal sugerida.

Regresando al procedimiento sugerido anteriormente, se obtiene el radio de trabajo (Fig. 4.10), los máximos y mínimos absolutos del radio de trabajo, e identificando la región factible limitada por las restricciones geométricas. Con radio máximo de 1.25 y radio mínimo de 0.25. Esto nos da la región de la (Fig. 4.11).

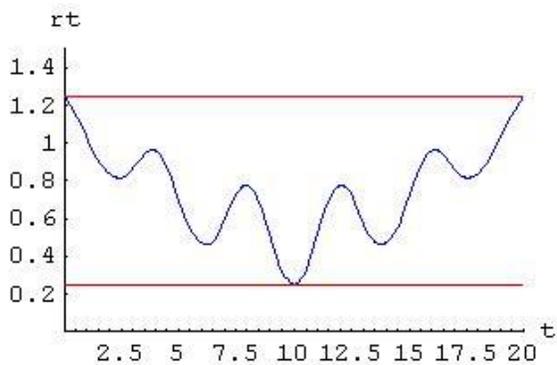


Fig. 4.10 Radio de trabajo, máximo y mínimo.

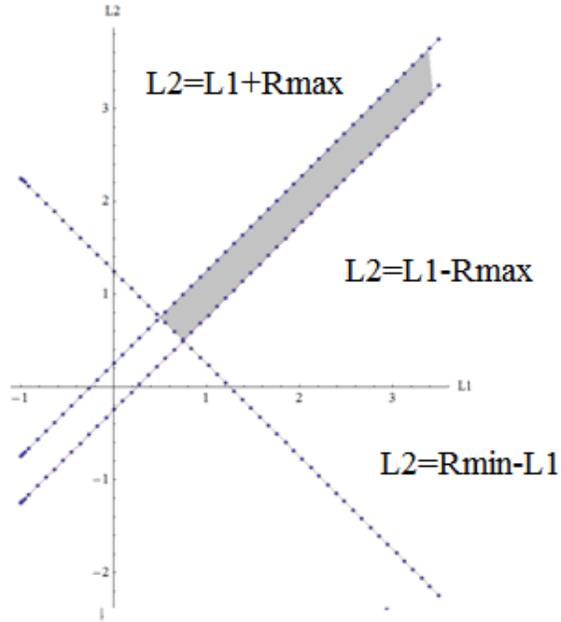


Fig. 4.11 Región de restricciones geométricas 2.

Al calcular la energía promedio del brazo para realizar esta tarea más compleja, se tiene que el tiempo de cómputo se eleva, debido que las ecuaciones que describen el movimiento son más complejas. Se realiza un muestreo a tiempos regulares ($n=100$), con lo que se obtiene una energía global para cada combinación de longitudes de diseño. Igual que en los casos anteriores, se busca el valor mínimo de dicha energía, dentro de la región de restricciones geométricas y como se ve en la siguiente ilustración (Fig. 4.12). En estas figuras se observa que los puntos en los cuales el manipulador se acerca a una singularidad, la energía global tiende a infinito, con lo que dichos puntos quedan automáticamente eliminados de la búsqueda del punto óptimo.

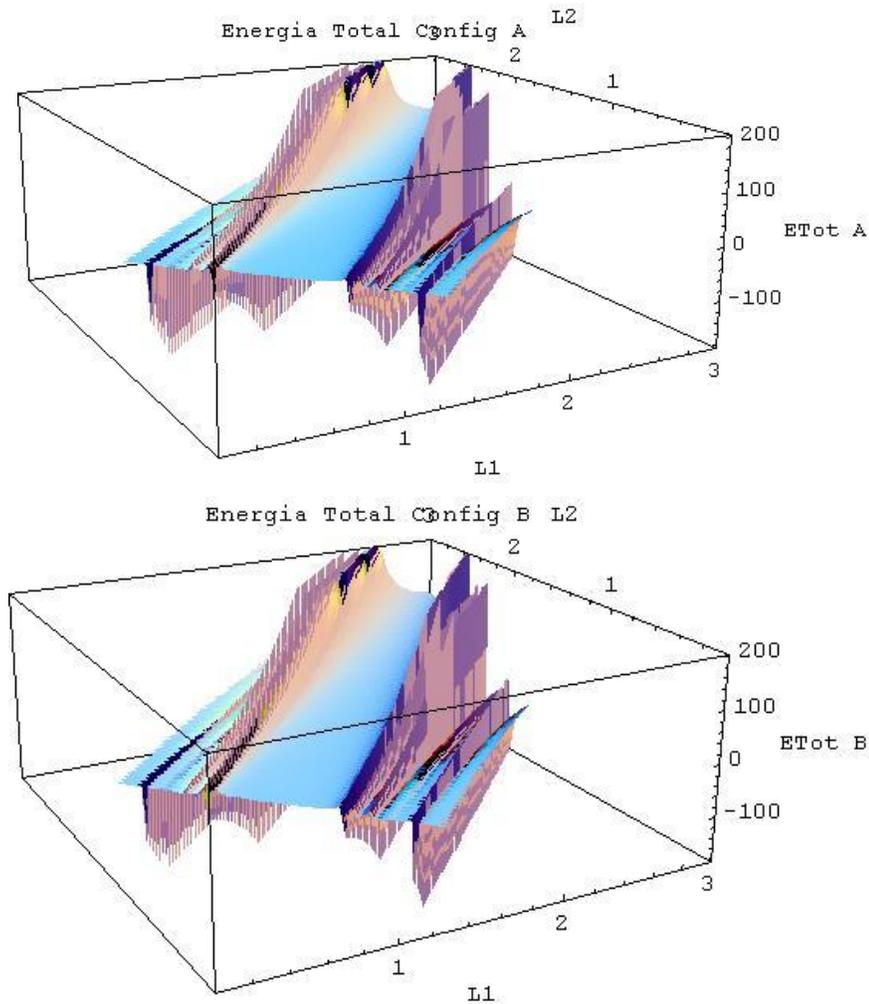


Fig. 4.12. Energía en configuración brazo arriba (Superior) y brazo abajo (Inferior).

Los valores mínimos obtenidos son los siguientes, para cada una de las configuraciones:

$$L1 = 1.25475 \text{ [m]}$$

$$L2 = 1.04932 \text{ [m]}$$

$$E_{\text{Global A}} = 8.94419 \text{ [J]}$$

$$E_{\text{Global B}} = 8.90884 \text{ [J]}$$

Con esto se obtiene que las longitudes vuelvan a ser las mismas para ambas configuraciones, pero que la configuración brazo abajo es la que permitirá una menor energía para realizar el trabajo (Fig. 4.13).

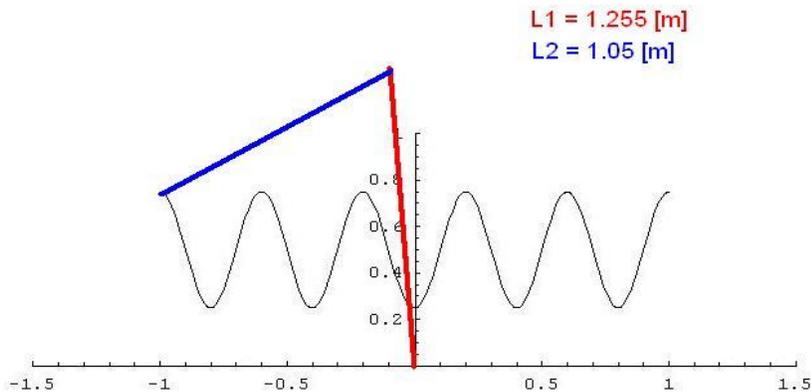


Fig. 4.13 Resultado de energía cinética variable

4.4 Simulaciones en un manipulador serial plano RRR.

Hasta el momento se ha hecho la simulación de manipuladores planos RR, ya que las graficas que genera la energía global pueden ser interpretadas en el espacio tridimensional, al ser dos las variables de diseño (L1, L2), y ser una función escalar a optimar. Al introducir más variables de diseño, como ocurre con un manipulador RRR serial plano, se pierde la opción de visualizar los resultados de la energía, pero el método propuesto tiene la misma validez, ya que se busca el punto optimo de una función escalar de variable vectorial, en este caso con tres variables de diseño (L1, L2 y L3).

De esta forma, siguiendo el mismo procedimiento, se requiere de la función de trayectoria de trabajo que se pretenden seguir. Además, se requiere la orientación del último eslabón, todo en función del tiempo. De esta forma, se proponen para esta simulación las siguientes ecuaciones de la trayectoria y orientación.

$$X_t = \text{Cos}(t)$$

$$Y_t = \text{Sen}(t)$$

$$\theta_{3t} = 2t$$

$$0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

Con estas ecuaciones, se obtienen ahora los valores del radio de trabajo máximo y mínimo. Para este caso, se vuelve a tratar una circunferencia de radio unitario y velocidad constante, pero la orientación del tercer eslabón altera las características de comportamiento del manipulador. Con los radios de trabajo máximos y mínimos se plantean las ecuaciones de restricción, que en este caso plantean desigualdades que deben de cumplir las longitudes de los eslabones, para satisfacer el movimiento.

$$L1 \geq 0$$

$$L2 \geq 0$$

$$L3 \geq 0$$

$$R_{\text{Max}} \leq L1 + L2 + L3$$

$$R_{\text{min}} \leq -L1 + L2 + L3$$

$$R_{\text{min}} \leq L1 - L2 + L3$$

$$R_{\text{min}} \leq L1 + L2 - L3$$

Con estas restricciones se consideran todas las configuraciones que puede tener el manipulador plano, así como que las longitudes de los eslabones deben de ser reales positivos, para que la solución tenga un sentido físico real.

Para el cálculo de la energía global del sistema, se tiene que la energía cinética queda en función de las velocidades angulares y lineales de los eslabones, las cuales se encuentran en función de L1, L2 y L3. Por su parte, la energía potencial se ve representada por medio de la fuerza de gravedad, que es coplanar con el movimiento y en dirección negativa del eje y. Con la ecuación de energía global y las restricciones por las desigualdades se puede utilizar el método de optimización. Este arroja resultados para las variables L1, L2 y L3, con el punto de mínima energía.

Para esta trayectoria, el método establece que el punto óptimo de energía es el mismo para la configuración brazo arriba y brazo abajo, con las siguientes longitudes:

$$L1 = 0.769679 \text{ [m]}$$

$$L2 = 0.835033 \text{ [m]}$$

$$L3 = 0.691782 \text{ [m]}$$

Por lo que se refiere a la energía global, la configuración brazo abajo (A) tiene una menor energía que la configuración brazo arriba (B) como se puede ver en los siguientes resultados.

$$E_{\text{Global A}} = 1487.78 \text{ [J]}$$

$$E_{\text{Global B}} = 1855.75 \text{ [J]}$$

Por lo que la configuración idónea es con las longitudes descritas, en la posición de brazo abajo. Con esta configuración se puede encontrar la menor energía para el movimiento que se observa en las siguientes ilustraciones (Fig.4.14)

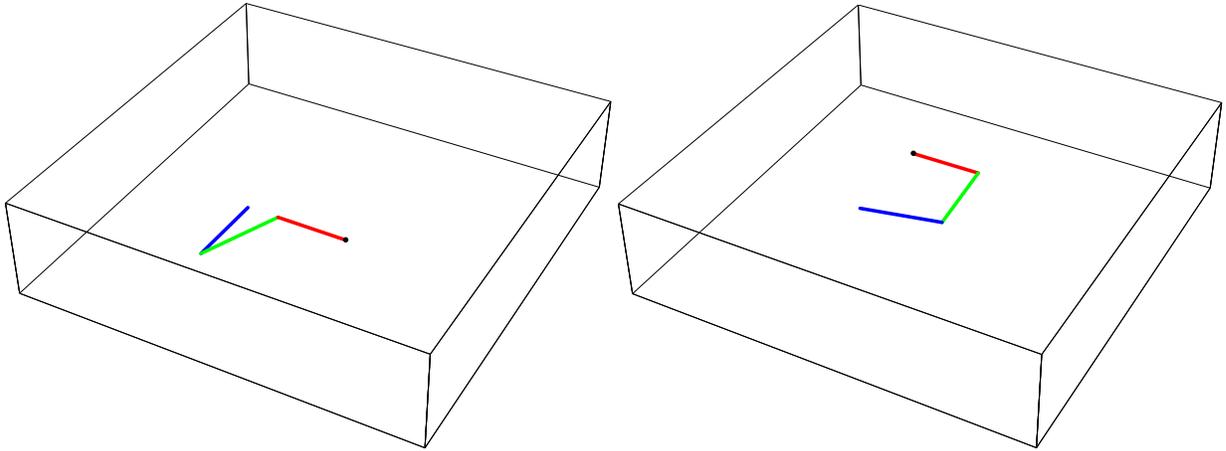


Fig. 4.14 Posición inicial y final del movimiento del manipulador plano RRR.

En este caso, la representación gráfica del área factible corresponde a un volumen de trabajo, es decir, es en tres dimensiones. Los límites de este volumen son las funciones derivadas de la longitud máxima y mínima que pueden alcanzar los eslabones en conjunto. Por lo que corresponde a la energía, ahora es una función escalar de variable vectorial, siendo que para cada punto dentro del volumen de trabajo (área sombreada Fig. 4.15) se le asigna un valor de energía (Fig. 4.16).

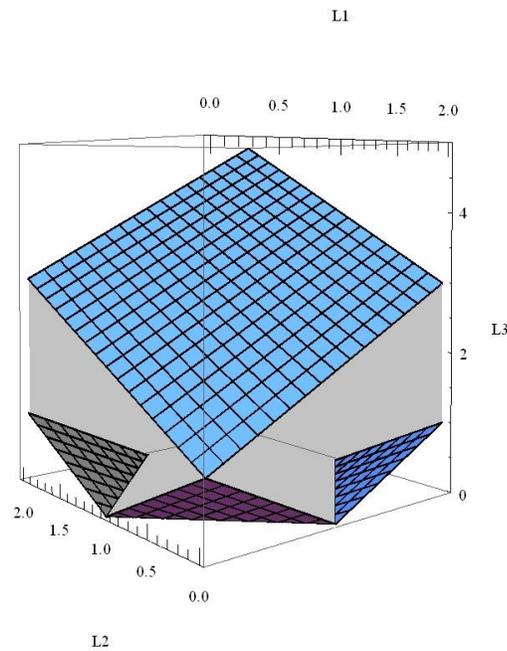


Fig. 4.15 Volumen factible en tres dimensiones.

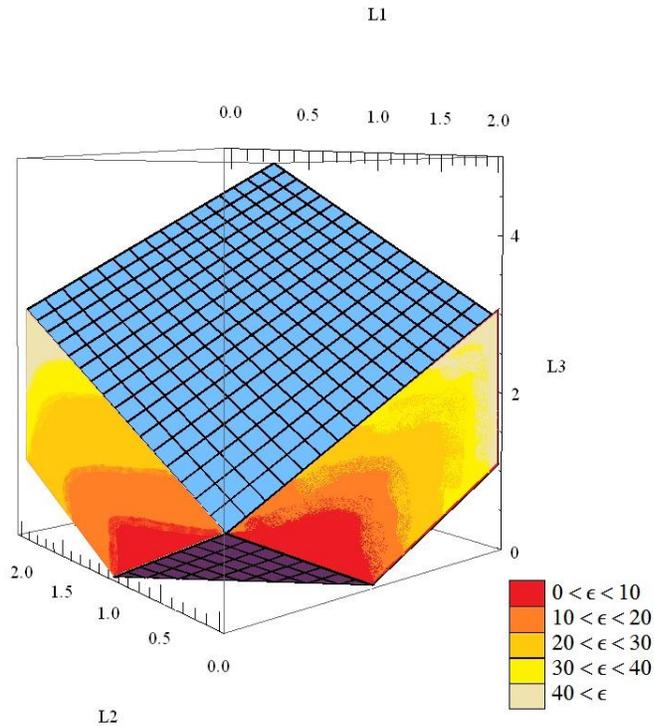


Fig. 4.16 Valores de energía dentro del volumen factible.

4.5 Simulación de modelo 3RRR.

Para el caso del manipulador paralelo plano 3RRR, se considera aplicar el algoritmo completo, realizando en esta ocasión el cómputo de las matrices Jacobianas serial y paralela, para definir la región factible. Hay que notar que, el criterio que se ocupa para determinar la región factible depende de varias unidades el comportamiento de las matrices Jacobianas que determinan el movimiento, las gráficas de volumen factible y energía, no se pueden apreciar fácilmente en tres dimensiones. Para determinar su forma, habría que imaginar un volumen en el que van cambiando los valores de energía, además de que se van formando huecos (topología de queso Gruyere) por las singularidades paralelas que presenta el modelo (Fig. 4.17).

4.5.1 Trébol de 4 hojas.

La primer trayectoria considerada es un trébol de 4 hojas, con las siguientes ecuaciones paramétricas.

$$x_t = 0.3 \sin(2t) * \sin(4t)$$

$$y_t = 0.3 \sin(2t) * \sin(4t)$$

$$\varphi_t = \sin(4\pi t)$$

Con estas ecuaciones, se genera el punto de trabajo, que se encuentra a la mitad del eslabón terciario, que une los tres brazos del manipulador.

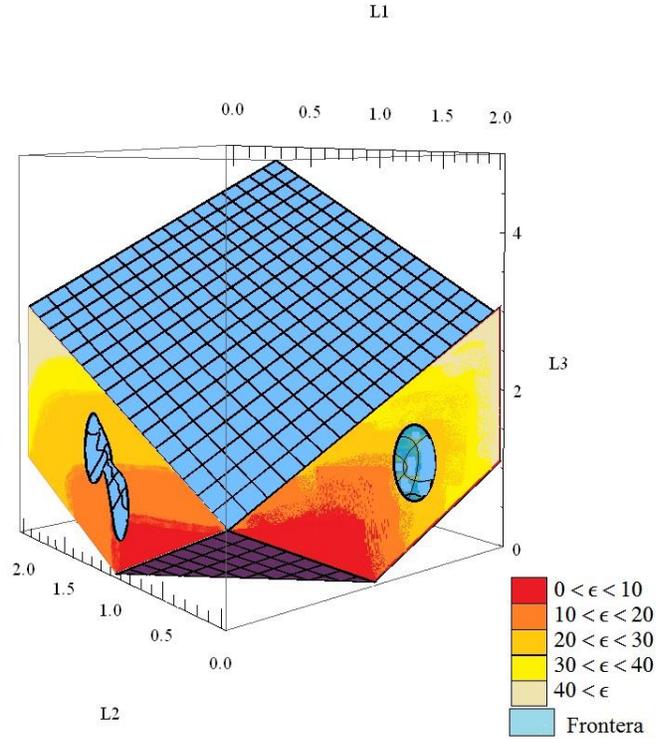


Fig. 4.17 Gráfica de energía, con singularidades paralelas.

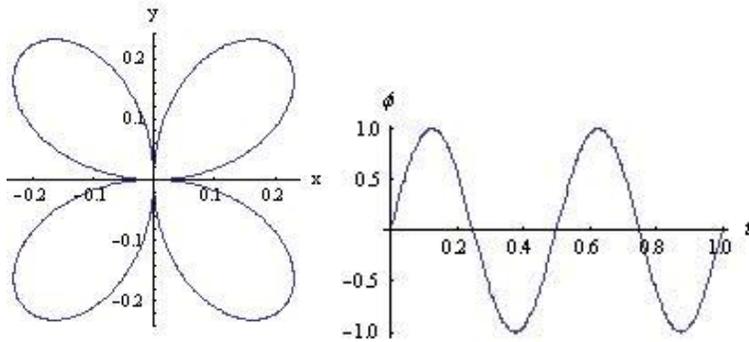


Fig. 4.18 Trayectoria de trabajo y orientación de la placa.

Para este caso, se considera que el campo gravitacional es perpendicular al plano de movimiento, para eliminar los efectos de la energía potencial y solo analizar los efectos de la energía cinética

del modelo. Proponiendo las dimensiones iniciales, para tener un punto de comparación, se realiza la primer prueba, obteniendo los siguientes resultados (Fig. 4.19).

$$l_1 = 1.0 \text{ [m]}$$

$$l_2 = 1.0 \text{ [m]}$$

$$l_3 = 0.4 \text{ [m]}$$

$$E_{\text{Tot}_{\text{BAA}}} = 6855.77 \text{ [J]}$$

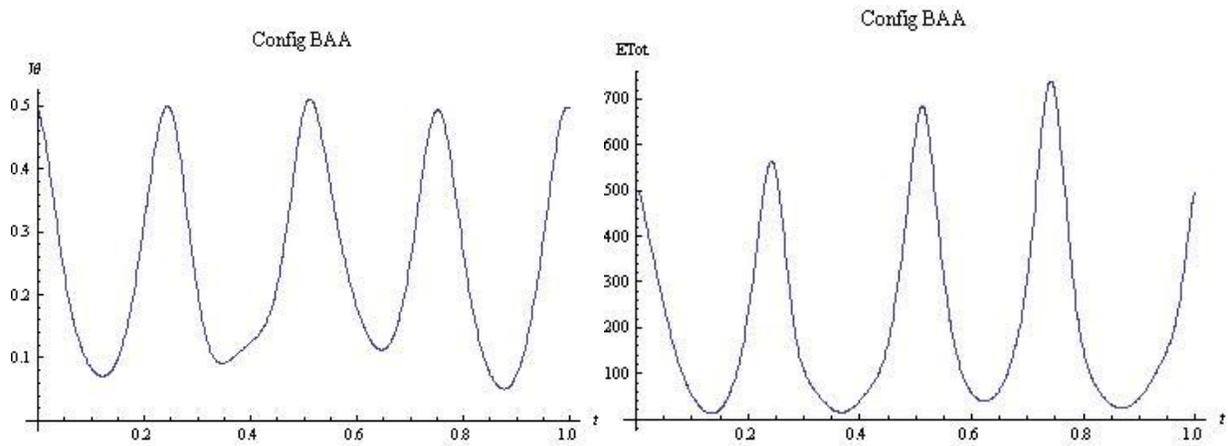


Fig.4.19 Energía y Jacobiano paralelo del modelo para la configuración inicial BAA.

Con las condiciones iniciales, el modelo que presenta menos energía es la configuración BAA, y se tiene que la placa central realiza el siguiente movimiento (Fig. 4.20).

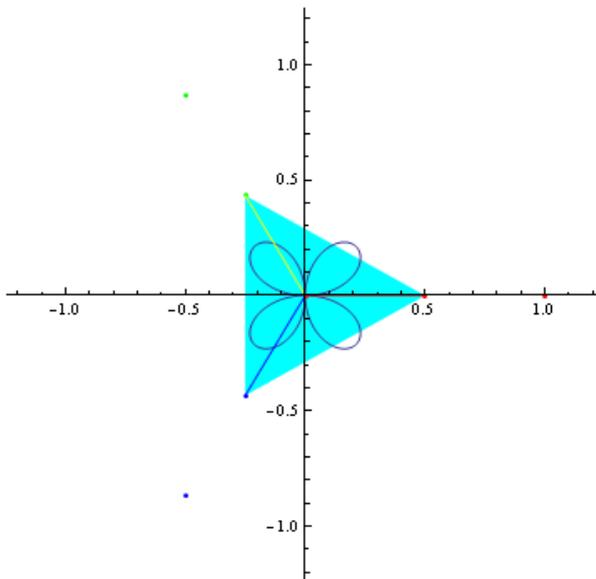


Fig.4.20 Placa central, configuración inicial.

A partir del modelo inicial, el modelo se optimiza, encontrando puntos que poseen menor energía (función objetivo) aunque no todos cumplen con estar dentro de la región factible, ya sea por tener una singularidad paralela (Fig. 4.21) o serial (Fig.4.22) en donde para el primer caso, se pierde el control del movimiento por cambiar el numero de grados de libertad, o en el segundo caso, se llega a una posición en la que el manipulador se bloquea y requiere energía infinita en alguna de sus posiciones.

$$l1 = 0.519 \text{ [m]}$$

$$l2 = 0.489 \text{ [m]}$$

$$l3 = 0.197 \text{ [m]}$$

$$E_{Tot_{ABB}} = 2249.23 \text{ [J]}$$

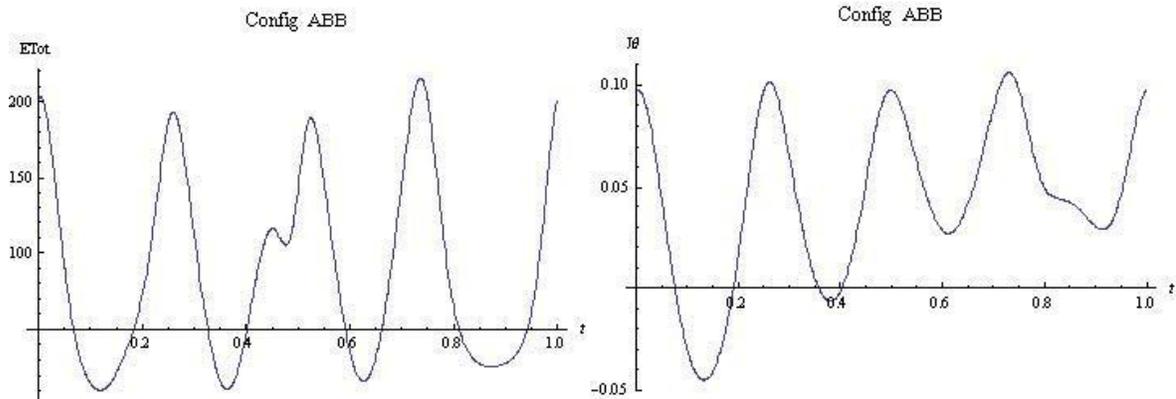


Fig. 4.21 Energía y Jacobiano paralelo en singularidad paralela.

En e caso de la singularidad serial se tiene:

$$l1 = 0.565 \text{ [m]}$$

$$l2 = 0.547 \text{ [m]}$$

$$l3 = 0.2 \text{ [m]}$$

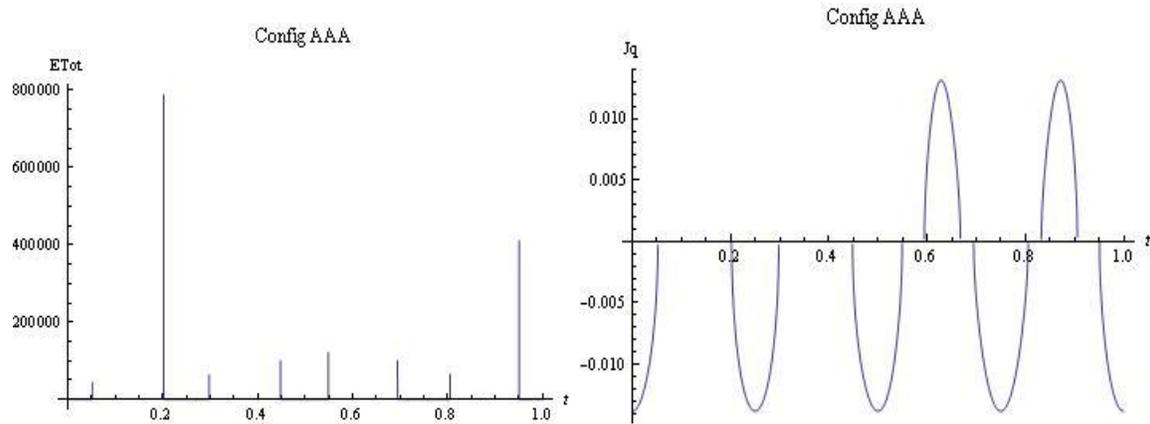


Fig. 4.22 Energía y Jacobiano serial en singularidad serial.

Siendo que no se puede obtener un valor finito de energía, pues la singularidad en la que entra el sistema ocasiona picos infinitos, los puntos de bloqueo del modelo, cuando traba el brazo, quedan fuera de la región y del criterio de optimización.

Para la iteración 14, el sistema cae dentro del criterio de convergencia, el cual define que si no hay cambios mayores al .1% entre iteraciones, se ha llegado al punto óptimo. La solución que se genera tiene un marcado ahorro de energía, y cumple con los criterios de evitar la singularidad Jacobiana, tanto serial como paralela, en toda la trayectoria (Fig. 4.23).

Los datos obtenidos son los siguientes:

$$l1 = 0.652 \text{ [m]}$$

$$l2 = 0.653 \text{ [m]}$$

$$l3 = 0.2 \text{ [m]}$$

$$E_{tot_{AAA}} = 1256.2 \text{ [J]}$$

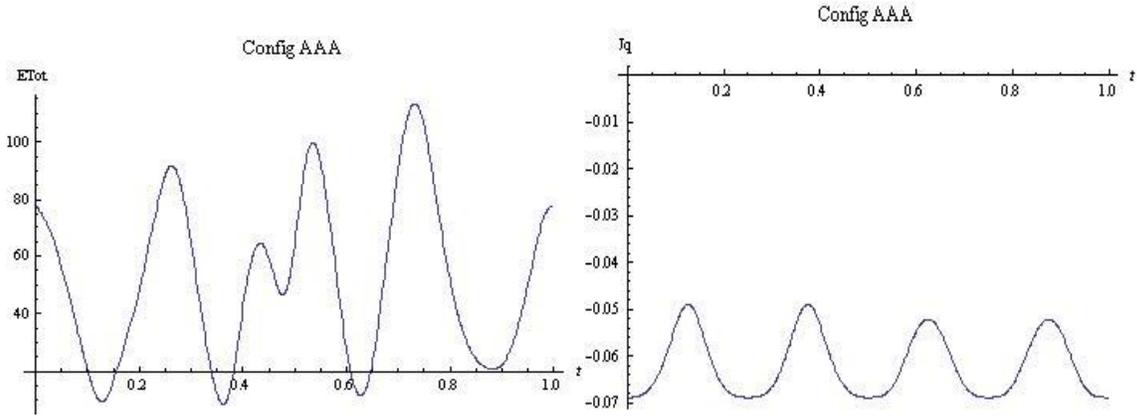


Fig. 4.23 Energía y Jacobiano en iteración 14.

La diferencia entre el primer modelo y la iteración 14 es de 86%, ya que en el primer caso se requieren 6855,77 [J], mientras que en el caso optimizado solo se requieren 1256,2 [J] para realizar la tarea.

4.5.2 Trayectoria 8.

La siguiente trayectoria de análisis es un ocho vertical. En este movimiento, la energía cinética así como la energía potencial del modelo van a variar, por esta desplazando a los cuerpos que componen el sistema en dirección vertical. La trayectoria de trabajo ahora que se encuentra definida por las ecuaciones paramétricas:

$$x_t = 0.5 \sin(4\pi t)$$

$$y_t = 0.5 \cos(2\pi t)$$

$$\varphi = \sin(4\pi t)$$

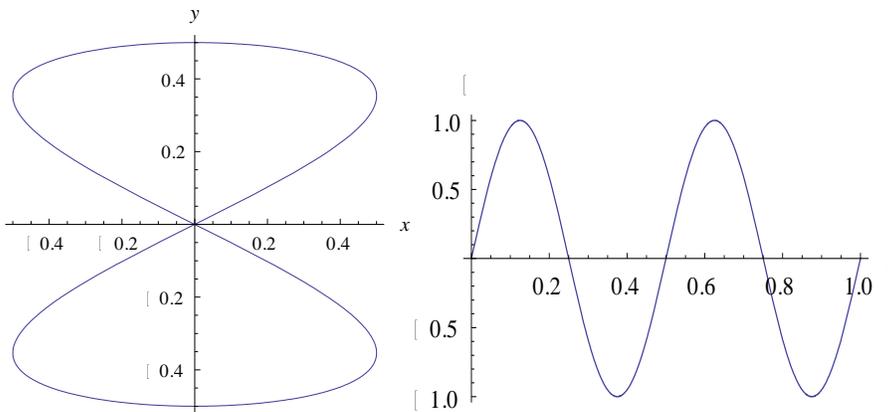


Fig. 4.24. Trayectoria de trabajo y orientación de la placa, caso 2.

En este caso se genera una trayectoria de trabajo en la que la orientación de la placa central se va modificando (Fig. 4.24). En este caso, se obtiene de nueva cuenta los análisis para las 8 configuraciones que se obtienen del análisis cinemático inverso del sistema (Fig. 4.25).

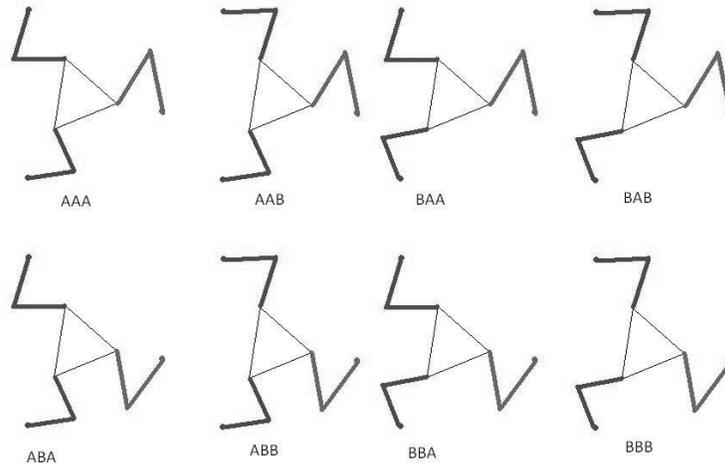


Fig. 4.25 Configuraciones AAA (izquierda) y ABB (derecha).

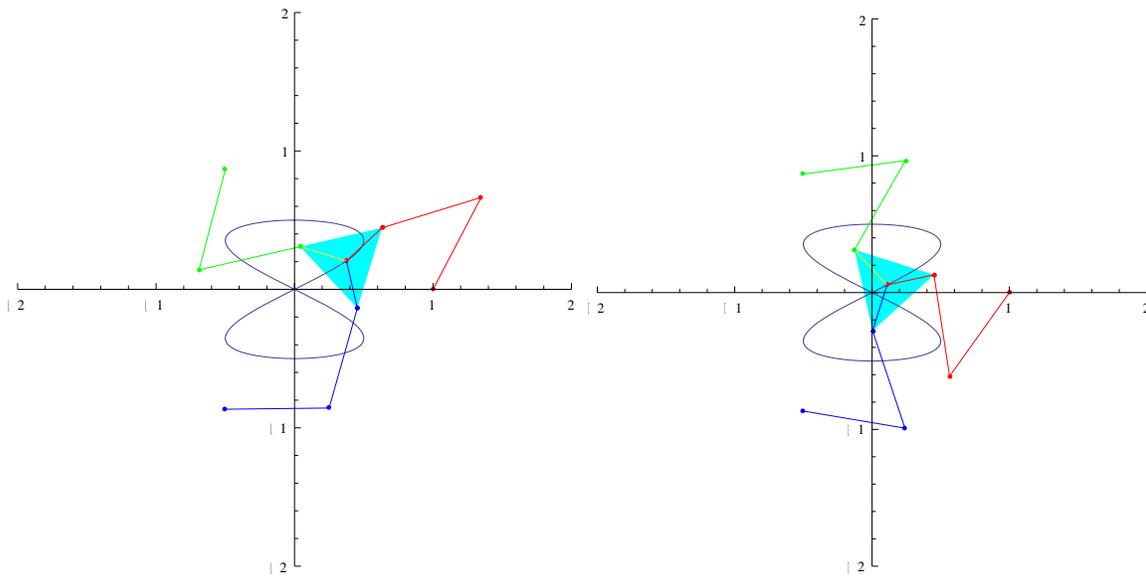


Fig. 4.26 Configuraciones AAA (izquierda) y ABB (derecha) optimadas.

La optimización de modelo converge después de 10 iteraciones, hacia la siguiente solución

$$L1 = 0.7775 \text{ [m]}$$

$$L2 = 0.7778 \text{ [m]}$$

$$L3 = 0.1500 \text{ [m]}$$

$$E_{\text{Global AAA}} = 2503.98 \text{ [J]}$$

Esto es, para todos los casos, las longitudes de diseño óptimas convergen a la misma solución de longitudes, siendo aquí el factor de decisión el comportamiento de las matrices Jacobianas, para evitar el pasar por puntos de singularidad. Las singularidades seriales se eliminan al requerir ellas valores de energía infinitos, cuando el sistema se bloquea, pero para el análisis de las singularidades paralelas, el uso de la matriz j_{θ} resulta indispensable. En las siguiente grafica se observa el comportamiento de las matrices Jacobianas mientras se desarrolla la trayectoria (Fig. 4.27). A pesar de que se acercan peligrosamente a cero, mientras no lo toque, no queda en singularidad.

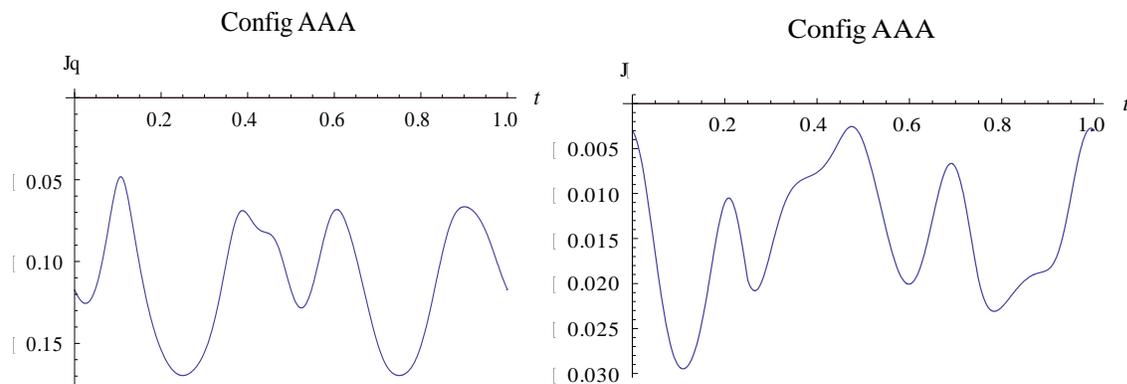


Fig. 4.27 Jacobianos serial y paralelo, iteración 10.

Los valores que se aprecian entre ambas matrices parecen muy dispares. Esto es ocasionado por la forma en que se definen las matrices Jacobianas, pero que para poder compararlas simultáneamente, es necesario escalar una de ellas. Pero solamente con el hecho de que ninguna de ellas se convierta en singular, entra dentro de la región factible del sistema. La región factible, a diferencia de los casos seriales al inicio del capítulo, no es posible visualizarla, ya que se trata de un espacio cambiante en el tiempo, que depende de 3 variables simultáneamente, pero mientras los parámetros de diseño, en este caso, las longitudes de los eslabones, estén dentro de dicha región.

"Quien sobrevive no es ni el más fuerte ni el más inteligente, sino aquel que mejor se adapta al cambio".

Charles Darwin

5. Conclusiones y perspectivas.

A lo largo de este trabajo escrito, se ha revisado desde los conocimientos básicos de física, hasta el planteamiento de un algoritmo que promueva un diseño innovador, que se compone de los siguientes pasos:

- Obtener la función de trayectoria
- Determinar la región factible.
- Determinar la función de energía total en función de los parámetros de diseño.
- Búsqueda del punto óptimo para la función objetivo de energía total.

Los sistemas mostrados y los casos de estudio son solamente una aplicación de este estilo de diseño, en el que se privilegia el uso racional de la energía, como factor determinante de éxito del sistema. El método propuesto ha permitido encontrar las dimensiones óptimas para cada uno de los eslabones, desde sistemas seriales hasta los manipuladores paralelos, permitiendo discernir cuál de ellos tiene un mejor aprovechamiento de la energía que se suministra.

Esta idea de que aquel dispositivo que utiliza mejor la energía de la cual dispone para realizar una tarea en específico puede ser extrapolado no sólo a otros sistemas mecánicos, como mecanismos o robots adaptables. La evolución parece tener el mismo tipo de guía, en la cual, la especie que ocupa mejor su energía disponible, será la más exitosa de una era. Los factores que definen al hombre como una de las especies predominantes en el planeta se pueden agrupar en tres ámbitos; el intelectual, ya que le permite crear cosas nuevas a partir únicamente de su mente; el cambio de su entorno, desde la fabricación de las herramientas manuales primitivas hasta los materiales de la era espacial, y su capacidad para utilizar recursos energéticos desde el fuego hasta la energía del átomo. En este último tenor, el uso racional de la energía es de vital importancia para la prevalencia del humano en la faz del planeta. La disponibilidad de energía de la era actual no debe de estar en contra de su uso de forma racional.

En el caso de esta propuesta de diseño, las soluciones encontradas hasta el momento son aquellas que cumplen los puntos de trabajo descritos y las restricciones geométricas implícitas en cada uno de los modelos propuestos. Al estar evaluando la energía, el modelo elimina los valores en los que esta energía adquiere valores máximos, que corresponden a aquellos en los que el manipulador se desensambla, siendo imposible el movimiento para ese caso y también evita los lugares donde se pierde el control del movimiento, al evitar encontrarse en una singularidad paralela. Al estar considerando toda la trayectoria propuesta, se puede asegurar que el diseño en base a la menor energía es un criterio para encontrar la mejor solución para dicho movimiento.

5.1 Alcances del estudio.

Esta propuesta de diseño se ha ocupado en sistemas seriales y paralelos planos, con articulaciones y actuadores ideales y en simulaciones numéricas. Este acercamiento predice cuales serán las mejores características geométricas para una tarea en específico, ¿funcionará igual para otras tareas a desarrollar? La gran ventaja de los manipuladores, es su capacidad de adaptación a diferentes tareas, así que, las longitudes propicias de diseño para un caso, no serán las mismas que para otra trayectoria de trabajo.

Las aplicaciones de estos sistemas se ven restringidas porque cada punto óptimo corresponde a una sola trayectoria, a una sola configuración del sistema. La prospectiva debe encaminarse a aplicar dicha información en sistemas adaptativos, de tal forma que junto con el cambio de tarea, se puedan cambiar las variables de diseño que definen su movimiento y así llegar a otra configuración de menor energía. Lo que propone este algoritmo es la forma de encontrar las dimensiones adecuadas para el manipulador. El siguiente paso es que el manipulador mismo cambie para realizar la tarea. Esta idea se podría extrapolar del campo de la biología, pues en el diseño de los seres vivos, bajo este principio, aquellos que mejor se puedan adaptar a un cambio en su entorno serán los que sobrevivan.

Otra de las cosas por corregir, es lograr modelos más acordes con la realidad. Falta modelar las pérdidas de energía en las articulaciones, las pérdidas de energía debidas al calentamiento o histéresis en los actuadores. El modelo actualmente propuesto es un modelo ideal, con la ventaja de que nos permite obtener rápidamente las características deseables de algún diseño en particular. Este sólo es un modelo teórico tratando de describir la realidad.

La decisión de primero analizar un manipulador serial RR se basó en que las graficas que describen la energía del sistema se pueden desarrollar en un espacio tridimensional, mientras que en un manipulador de mayor complejidad se requiere un hiperespacio de $n+1$ tomando n eslabones. Para el sistema serial RRR y aún mas, para el sistema paralelo 3RRR, es difícil el poder visualizar dichos espacios de trabajo, ya que en el caso del sistema paralelo, el volumen de trabajo puede tener huecos debido a los puntos que no cumplan las singularidades paralelas (topología de queso Gruyère), además de las fronteras externas debidas a las singularidades seriales. Como prospectiva en ésta línea de aplicación, los siguientes pasos serán el buscar su aplicación a sistemas de lazo cerrado, como los mecanismos planos, o utilizar modelos tridimensionales para analizar el movimiento en el espacio.

5.2 Limitaciones de cómputo.

A diferencia de otros criterios de diseño, este no requiere de una gran capacidad de cómputo. Al comparar el tiempo para el análisis de resultados y muestreo de las regiones para obtener el valor óptimo deseado en otros modelos propuestos, otros métodos mencionan el uso de sistemas computacionales en paralelo por varios días para poder obtener una posible solución. En este método se encuentra directamente la solución de menor energía, los valores de las longitudes

óptimas de los eslabones y el comportamiento energético al ir variando las longitudes de diseño en una sola computadora, con programas de fácil implementación. Ciertamente es que al aumentar la complejidad de las trayectorias y de los modelos físicos de los manipuladores se necesita una mayor capacidad de cómputo, por la complejidad de las funciones, pero al ser estas funciones continuas y derivables dentro de la región factible, los métodos de optimización pueden converger rápidamente. El siguiente paso será el poder ocupar métodos de optimización de mayor capacidad para poder reducir aún más los tiempos de cálculo de los puntos óptimos. Para este caso, el tiempo que requiere la una computadora con un procesador a 2.10 GHz es de 20 minutos, aproximadamente.

Uno de los problemas con los que se encuentra este método de diseño, es seleccionar cuál es el método de optimización adecuado, que permita encontrar la solución rápidamente. La programación de los métodos de optimización es factor clave para que al colocar un sistema de alta complejidad, el método no llegue a fallar. Hay que recordar, que aun con un método numérico muy blindado, puede ser que no se encuentre el mejor óptimo, sino solamente un mínimo local.

Ángeles [14] menciona que los modelos en base a la energía si se pueden desarrollar a partir de las ecuaciones básicas de la mecánica clásica, pero que son muy complejos para poder obtener resultados significativos de una forma sencilla. Con la actual capacidad de cómputo que se encuentra en computadoras personales alrededor de 3 [GHz] esta limitante va quedando atrás, ya que no es necesario que uno esté realizando las operaciones del modelo, si no únicamente colocando las ecuaciones adecuadas que describan el modelo, identificar las restricciones que presenta y elegir un adecuado método de optimización, dejando todo el trabajo de cálculo a la computadora. De esta forma, el problema a resolver es definir cuál es el método de optimización adecuado, que permita encontrar la solución rápidamente. La programación de los métodos de optimización es factor clave para que al colocar un sistema de alta complejidad, y que la obtención del punto óptimo no llegue a fallar. Pero como siempre, hay que recordar, que aun con un método numérico muy blindado, puede ser que no se encuentre el mejor óptimo, sino solamente un mínimo local.

5.3 Perspectivas del estudio a futuro.

Los alcances de aplicación de esta metodología radican en el poder diseñar un manipulador que utilice al máximo la energía disponible, logrando ahorros marginales, que englobados representen un aumento en la eficiencia del proceso, en la disminución de costos y en la disminución de emisiones al medio ambiente.

Los manipuladores se ocupan generalmente para cumplir con actividades de manufactura flexible en los que se pueda modificar fácilmente la tarea a desarrollar. Bajo el actual enfoque de este método, será necesario el modificar al manipulador para cada una de las tareas, para poder asegurar que es el más eficiente, por lo que una de las posibles perspectivas de este trabajo sea el

desarrollar un manipulador serial reconfigurable que pueda seleccionar automáticamente cuales son las dimensiones apropiadas para desarrollar una tarea y además tenga la capacidad de adaptarse para diferentes tareas. Otro de las posibles perspectivas es el conjuntar este análisis de menor energía con el cálculo de la trayectoria más eficiente, con lo cual se lograría el desarrollar una tarea dada aun con mayor eficiencia.

Este análisis por medio de la menor energía ha permitido presentar artículos para diferentes congresos a nivel nacional e internacional (Congreso SOMIM 2008 y 2009, México; IFToMM 11th ARK Symposium 2008, Francia; 19th CIRP-Design Conference 2009, Inglaterra), y plantea otra alternativa de diseño que puede generar toda una línea de investigación aplicada a diversos mecanismos.

5.4 Resumen de la metodología ocupada.

Recapitulando, el procedimiento propuesto para encontrar el punto óptimo es el siguiente:

1. Obtener la función de trayectoria
2. Determinar la región factible, eliminando los puntos en los que el sistema presenta singularidades seriales o paralelas.
3. Determinar la función de energía total del manipulador en función de los parámetros de diseño.
4. Buscar el punto óptimo para la función objetivo de energía total del manipulador dentro de la región factible.

La diferencia en los consumos de energía entre un diseño que tome en cuenta este criterio de diseño y uno que no ha sido optimado pueden ser marginales, como en el caso del sistema paralelo 3RRR en sus trayectorias de trabajo. Y aún cuando los ahorros de energía fueran mínimos en cada una de las operaciones, hay que tomar en cuenta que los manipuladores robóticos generalmente se ocupan en lugares en donde la tarea es repetitiva y se realiza múltiples veces en el día de trabajo, estos ahorros marginales desembocaran en un ahorro global de la energía que se ocupe para un proceso.

El adecuado uso de la energía es uno de los factores que la evolución ha ocupado para seleccionar a los organismos más aptos, mediante su diseño a partir de prueba y error. Al comparar los resultados de mayor eficiencia para movimientos que desarrollan los seres vivos, los resultados se acercan a aquellas dimensiones óptimas de diseño con la menor energía, por lo que esta metodología de diseño tiene grandes alcances en el uso eficiente de energía.

BIBLIOGRAFIA

- [1] "Beyond Kyoto", Foreign Affairs, July August, EUA, 2004.
- [2] Cohen, M. Nagel, E. "Introducción al método científico". Amorrortu Editores, 9º reimpresión. 2000.
- [3] Grossman, Stanley I. "Algebra lineal". Ed. Iberoamericana. Segunda edición. México, 1988.
- [4] Rojo, Jesús. "Algebra Lineal". McGraw – Hill / Interamericana, España, 2001.
- [5] Wark Jr., Kenneth. "Termodinámica". McGraw – Hill, 1º Edición. México. 1991.
- [6] Seely y Ensingn. "Mecanica analitica para ingenieros". UTHEA. Reimpresion 1968. Mexico.
- [7] Beer, Johnston y Claussen. "Mecanica vectorial para ingenieros" McGraw – Hill. 8º Ed. Mexico. 2007.
- [8] Stejskal, Valasek. "Kinematics and dynamics of machinery" Marcel Dekker Inc. EUA. 1996.
- [9] Tsai, Lung-Wen. "Robot Analysis" John Wiley & Sons Inc. EUA. 1999.
- [10] Adby y Dempster. "Introduction to optimization methods" Chapman & Hall, EUA. 1974.
- [11] Snyman, J. A. Berner, D. F. "The design of a planar robotic manipulator from optimum performance of prescribed tasks" Structural design Vol. 18. 1999. Pp. 95-106.
- [12] Hirzinger, G. Sporer, N. Schedl, M. Butterfaß, J. Grebenstein, M. "Torque-Controlled Lightweight Arms and Articulated Hands : Do We Reach Technological Limits Now?" The International Journal of Robotics Research. Vol 23 No. 4-5. April-May 2003. Pp. 331-340.
- [13] Paredis, C. J. J. Koshla, P. K. "Kinematic Design of Serial Link Manipulators From Task Specifications" The International Journal of Robotics Research, Vol 12. No 3. June 1993. Pp. 274-287.
- [14] Angeles, Jorge. "Fundamentals of robotic mechanical systems" Springer. EUA 2003.
- [15] Adby, Paul R. & Dempster. "Introduction to Optimization Methods" Chapman & Hall Mathematics, EUA, 1974
- [16] Ogata, K. "Ingeniería de control moderno" Prentice – Hall Hispanoamerica. México 1980
- [17] Bonev, I. A. Gosselin, C. M. (2001) "Singularity Loci of Planar Parallel Manipulators with Revolute Joints" 2nd Workshop on Computational Kinematics. May 20-22, 2001.

- [18] Bonev, I. A. Zlatanov, D. Gosselin, C. M. (2003) "Singularity Analysis of 3-DOF Planar Parallel Mechanisms" Transactions of the ASME Journal of Mechanical Design, Vol. 125 Pp. 573-581. September 2003
- [19] Alba, O. G. Pámanes, J. A. Wenger, P (2007) "Trajectory planning of a redundant parallel manipulator changing of working mode" 12th IFToMM World Congress. June 18-21, 2007.
- [20] Ma, O. Angeles, J. "Optimum design of manipulators under dynamic isotropy conditions" IEEE International Conference on Robotics and Automation. 1993. Pp 485-492.

Bibliografía complementaria

Lee, E. Mavrodís, C. Merlet, J. P. "Five Precision point Synthesis of Spatial RRR Manipulators Using Interval Analysis" Transactions of the ASME Journal of Mechanical Design. Vol. 126. September 2004. Pp. 842-849.

Linares, P. Ramos, A. et Al."Modelos matemáticos de optimización." Universidad Comillas, Escuela Técnica Superior de Ingeniería, Departamento de organización industrial. Madrid, Octubre 2001.

Hernandez Oliva, G. "Métodos clásicos de optimización para problemas no lineales sin restricciones." Universidad de Chile, departamento de Ingeniería Matemática. Mayo 2006.

Ahumada, J. Pantalone, M. "Variación ciega, heurística y algoritmos genéticos." Facultad de filosofía y humanidades, Universidad Nacional de Cordova, Argentina 2004

Rojas, A. Terrazas, R. "Planacion de trayectorias en manipuladores sin singularidades." XV Congreso Internacional anual de la SOMIM, Sonora México, 2009

Rojas, A. Ledezma Y. "Minimum Enrgy Manipulator Design" Advances in Robot Kinematics: Analysis and Design, Springer, 2008. Pp. 89-99.

Artículos generados a partir de este trabajo.

Rojas, A. Ledezma, Y. “Diseño de Manipuladores en Base a la Tarea y el Mínimo Consumo de Energía”, XIII Congreso Anual de la Sociedad Mexicana de Ingeniería Mecánica A.C., Durango, Dgo. Septiembre 2007.

Rojas, A. Ledezma, Y. “Minimum Energy Manipulator Design”, ARK, 11th International Symposium, Batz-sur-Mer, France. June 2008.

Rojas, A. Ledezma, Y. “Dimensionamiento de manipuladores paralelos 3RRR mediante el método de menor consumo de energía”, XIV Congreso Anual de la Sociedad Mexicana de Ingeniería Mecánica A.C., Puebla, Puebla. Septiembre 2008.

Rojas, A. Ledezma, Y. “Optimal Design of Planar Parallel Manipulators 3RRR Through Lower Energy Consumption” , CIRP-Design 2009, Cranfield, Inglaterra

GLOSARIO

\mathbf{R}^n	Conjunto coordinado de los n reales
\mathbf{V}	Vector
\mathbf{E}	Escalar
$\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$	Vectores del conjunto \mathbf{V}
α, β, γ	Escalares del conjunto \mathbf{E}
XYZ	Sistema coordinado principal
xyz	Sistema coordinado auxiliar
$\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$	Vectores unitarios de la base canónica de XYZ
$\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}$	Vectores unitarios de la base canónica de xyz
T	Transformación de un espacio vectorial
W	Trabajo
F	Fuerza
s	Desplazamiento
\dot{W}	Potencia
E_i	Energía en estado i
Q	Calor
ϵ_0	Permisividad eléctrica
ϵ	Campo eléctrico
μ_0	Permisividad magnética
\mathbf{H}	Campo magnético
m	Masa
I	Inercia
ω	Velocidad angular
v	Velocidad lineal
\vec{p}	Vector de posición
\vec{v}	Vector de velocidad lineal
\vec{a}	Vector de aceleración lineal
\overline{OA}	Vector de posición entre los puntos O y A
$\vec{\omega}$	Vector de velocidad angular
$\vec{\alpha}$	Vector de aceleración angular

ÍNDICE DE FIGURAS

	Página
CAPÍTULO 1	
1.1 Porcentajes de producción de emisiones de carbono.	11
CAPÍTULO 2	
2.1 Sistemas coordenados con distinta orientación.	18
2.2 Máximos y mínimos locales.	19
2.3 Función escalar de variable vectorial.	21
2.4 Sistemas aislado, cerrado y abierto.	23
2.5 Flujo de trabajo al sistema y desde el sistema.	24
2.6 Trayectoria espacial de una partícula.	28
2.7 Representación del mismo punto en sistema cartesiano, cilíndrico y esférico.	29
2.8 Sistema de referencia absoluto (XYZ) y relativo (xyz).	31
2.9 Movimiento espacial de un cuerpo rígido.	32
2.10 Rotación plana.	33
2.11 Traslación plana.	33
2.12 Movimiento plano general.	33
2.13 Traslación espacial de un cuerpo rígido.	34
2.14 Cuerpo rígido en rotación alrededor de un eje fijo.	35
2.15 Movimiento general de un cuerpo rígido en el espacio.	37
2.16 Sistema de referencia en movimiento espacial general.	39
2.17 Sistemas de referencia con diferentes orientaciones y tensores de inercia.	43
2.18 Región factible en R^2	53
2.19 Región factible en R^3	53
2.20 Forma grafica del método de Newton	55
2.21 Error en el método de Newton.	55
2.22 Función objetivo.	57
2.23 Método de Malla.	58
2.24 Método de Gradiente.	59
2.25 Método Simplex.	60
2.26 Algoritmos genéticos.	61
CAPÍTULO 3	
3.1 Esquema del manipulador	63
3.2 Fronteras del sistema	63
3.3 Flujos de energía a través de las fronteras	64
3.4 Elemento diferencial del eslabón	66
3.5 Masa y momento de inercia.	66
3.6 Manipulador RR y trayectoria	68
3.7 Configuración brazo abajo	69
3.8 Configuración brazo arriba	69
3.9 Línea de soluciones del tercer eslabón	70
3.10 Modelo geométrico de 3 eslabones RRR.	71

3.11. Modelo 3RRR	72
3.12. Restricciones geométricas del modelo	75
3.13 Radio de trabajo en el tiempo.	76
3.14 Región de restricciones geométricas.	76
3.15 Modelado 3RRR.	77
3.16 3RRR Modos de operación.	79

CAPÍTULO 4

4.1 Manipulador en trayectoria circular	82
4.2. Radio de trabajo.	82
4.3 Región de restricciones geométricas.	83
4.4 Energía cinética y potencial constante.	83
4.5 Trayectoria circular con energía potencial variable.	84
4.6 Energía en configuración brazo abajo.	85
4.7 Energía en configuración brazo arriba	86
4.8 Solución al sistema con energía potencial variable.	86
4.9 Trayectoria sinusoidal sugerida.	87
4.10 Radio de trabajo, máximo y mínimo.	87
4.11 Región de restricciones geométricas 2.	88
4.12. Energía en configuración brazo arriba (Superior) y brazo abajo (Inferior).	89
4.13 Resultado de energía cinética variable	90
4.14 Posición inicial y final del movimiento del manipulador plano RRR.	92
4.15 Volumen factible en tres dimensiones.	92
4.16 Valores de energía dentro del volumen factible.	93
4.17 Gráfica de energía, con singularidades paralelas.	94
4.18 Trayectoria de trabajo y orientación de la placa.	94
4.19 Energía y Jacobiano paralelo del modelo para la configuración inicial BAA.	95
4.20 Placa central, configuración inicial.	95
4.21 Energía y Jacobiano paralelo en singularidad paralela.	96
4.22 Energía y Jacobiano serial en singularidad serial.	97
4.23 Energía y Jacobiano en iteración 14.	98
4.24. Trayectoria de trabajo y orientación de la placa, caso 2.	99
4.25 Configuraciones AAA (izquierda) y ABB (derecha).	99
4.26 Configuraciones AAA (izquierda) y ABB (derecha) optimadas.	99
4.27 Jacobianos serial y paralelo, iteración 10.	100