



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

---

---

**PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN  
INGENIERÍA**

**CENTRO DE CIENCIAS APLICADAS Y DESARROLLO  
TECNOLÓGICO**

**HACIA UNA REFRACTOMETRÍA EN  
COLOIDES DENSOS**

**T E S I S**

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

**MAESTRO EN INGENIERÍA**

INGENIERÍA ELÉCTRICA-INSTRUMENTACIÓN

**P R E S E N T A :**

**HUMBERTO CONTRERAS TELLO**

**TUTOR**

**DR. AUGUSTO GARCÍA VALENZUELA**

**NOVIEMBRE 2010**

---

---

**JURADO ASIGNADO:**

**PRESIDENTE: Dr. SANDOVAL ROMERO GABRIEL EDUARDO**

**SECRETARIO: Dr. SÁNCHEZ PÉREZ CELIA ANGELINA**

**VOCAL: Dr. GARCÍA VALENZUELA AUGUSTO**

**1er. SUPLENTE: Dr. ACEVEDO CONTLA PEDRO**

**2do. SUPLENTE: Dr. QURESHI NASER**

**Lugar donde se desarrollo la tesis:**

CENTRO DE CIENCIAS APLICADAS Y DESARROLLO TECNOLÓGICO

CCADET UNAM.

GRUPO DE SENSORES ÓPTICOS Y ELÉCTRICOS.

---

---

# AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo de tesis surge como necesidad y requisito establecido para obtener el grado de Maestro en Ingeniería Eléctrica opción Instrumentación y está motivado en gran parte por mi necesidad de explorar temas novedosos y así poder explotarlos en cuanto a conocimiento y posibles aplicaciones a los resultados obtenidos. Agradezco a mi alma mater, mi UNAM por darme la oportunidad de ampliar mis conocimientos y darme las bases para un desarrollo integral como persona.

Quiero agradecer a todas las personas que primeramente confiaron en mí y que por supuesto, me brindaron su apoyo de manera directa o indirecta, a los cuales les tengo una gran estima por estrecharme sus brazos y darme su apoyo incondicional, a los doctores Augusto, Celia, Eduardo y Asur por su amistad y enormes consejos, a los amigos de generación de maestría, a todos los que colaboran en el grupo de Sensores Ópticos y Eléctricos del CCADET y a todas las personas que durante mi estancia en el CCADET de la UNAM me dieron su enseñanzas y sobre todo, su confianza y amistad.

Pero de manera muy especial quiero agradecer a mi familia, a mi gran familia, pues sin su apoyo durante estos años hubiera sido difícil obtener lo que he logrado, gracias! Y por supuesto que es imperdonable no mencionarlo, quiero decirte GRACIAS Lupilla pues sin tu comprensión y apoyo no sería nada en todos los años que llevamos juntos!

Deseo extender mi agradecimiento al CONACYT por haberme brindado una beca económica durante mi estancia en maestría y agradecer el apoyo financiero a la UNAM a través del proyecto PAPIIT IN 120309 y CONACYT D49482-F.

---

---

# SINOPSIS

En esta tesis resumo el trabajo que realicé en el laboratorio de óptica aplicada del grupo del Sensores Ópticos y Eléctricos del CCADET como parte de los requisitos para obtener el grado de Maestro en Ingeniería en el programa de Posgrado en Ingeniería Eléctrica opción Instrumentación.

Este trabajo pretende ser una primera referencia en el tema de refracción de luz difusa en coloides turbios y sentar las bases para futuras investigaciones. El contenido de este trabajo de tesis está formado de 5 capítulos, cuya descripción es la siguiente:

**Capítulo I. Introducción.** Se plantea el propósito de la investigación, se hace un breve repaso de los antecedentes y se establece la metodología seguida en este trabajo de tesis.

**Capítulo II. Diseño experimental.** Se desarrolla de manera metódica cada uno de los pasos que conllevan al arreglo experimental. También se verifica la respuesta de la cámara CCD utilizada en los experimentos a variaciones lineales de intensidad. Se muestran los ajustes a la escala angular para obtener los perfiles angulares de intensidad.

**Capítulo III. Resultados.** Se exponen y analizan cada uno de los gráficos obtenidos mediante el arreglo experimental. Se analizan los resultados obtenidos para las partículas de TiO<sub>2</sub> y partículas de látex.

**Capítulo IV. Modelo teórico.** A partir de la observación de los resultados experimentales y su posterior análisis se desarrolla un modelo que describe el comportamiento físico de los resultados obtenidos. En este capítulo se plantean los argumentos físicos y matemáticos que tratan de describir el comportamiento de la refracción de la luz difusa.

**Capítulo V. Conclusiones.** En este capítulo se dan las conclusiones generales del desarrollo de la tesis, se expone brevemente algunas respuestas a las interrogantes establecidas en la introducción. También se incluye un apartado de trabajo a futuro en donde se establece la manera en cómo se puede seguir trabajando con la refracción de la luz difusa y sus aplicaciones.

**Apéndices, anexos y bibliografía.** Se exponen algunas aclaraciones sobre puntos que no se desarrollaron a detalle en el transcurso de los capítulos anteriores. Al final se presenta la bibliografía donde el lector puede consultar las referencias utilizadas.

---

---

# Índice

## Hacia una refractometría en coloides densos

Capítulo I. Introducción.....	2
1.1 Presentación .....	2
Objetivos .....	3
Hipótesis.....	3
1.2 Motivación del trabajo de tesis .....	4
1.3 Fundamentos y antecedentes .....	4
1.4 Metodología .....	12
Capítulo II. Diseño experimental.....	14
2.1 Arreglo experimental .....	14
2.2 Verificación de la respuesta lineal de la intensidad de la luz de la CCD.....	18
2.3 Escala angular .....	19
2.4 Materiales.....	22
2.5 Montaje experimental para estudiar el comportamiento de la polarización de la luz difusa.....	22
Capítulo III. Resultados experimentales.....	27
3.1 Respuesta de la cámara CCD.....	27
3.2 Estabilidad de las suspensiones coloidales .....	28
3.3 Medición del perfil de intensidad para la frontera del cono de luz difusa.....	30
3.4 Efecto de la polarización en el cono de luz difusa.....	36
3.5 Conclusiones de los resultados experimentales .....	42
Capítulo IV. Modelo matemático para la refracción de la luz difusa cerca del borde del cono de luz.....	45
4.1 Modelo matemático .....	46
4.2 La función $\vec{f}(k_x, k_y; \vec{r}_n)$ .....	52
4.3 Experimento vs modelo matemático.....	54
4.4 Discusión .....	58
Capítulo V. Conclusiones.....	60
Trabajo a futuro .....	63
Apéndice A.....	65

---

---

Campo de radiación de una partícula.....	65
Apéndice B .....	69
Método de fase estacionaria.....	69
Apéndice C .....	75
Teoría de dos flujos o teoría Kubelca-Munk .....	75
Apéndice D.....	78
BIBLIOGRAFÍA .....	87



---

---

# HACIA UNA REFRACTOMETRÍA EN COLOIDES DENSOS

---

---

---

# Capítulo I. Introducción

## 1.1 Presentación

El problema de la propagación y esparcimiento de la luz en medios turbios ha atraído la atención de muchos investigadores desde muchos años atrás [1-6]. Muchos de ellos se han enfocado en tratar de dar una explicación a todos los fenómenos visuales que ocurren en la naturaleza tales como el color del cielo, la turbulencia del aire, etc., así como el comportamiento de la luz en medios turbios tales como los coloides. Hemos de entender por coloide a un sistema físico-químico formado por dos o más fases, principalmente una denominada *continua*, normalmente fluida y otra *dispersa* en forma de partículas, por lo general sólidas [7]. Algunos ejemplos comunes de coloides turbios son la leche, la sangre y la pintura.

Se han propuesto diversas teorías para describir la propagación de las ondas electromagnéticas a través de sistemas en los que se dan los fenómenos de esparcimiento y absorción de la luz, sin embargo, aún existen muchas interrogantes fundamentales sobre la física que describe estos fenómenos.

Cuando se tienen dos medios transparentes, uno junto al otro, con índice de refracción real, tal como puede suceder en una interfaz vidrio agua, el comportamiento de la luz está bien establecido mediante las relaciones de Fresnel y Snell a través del índice de refracción de los medios. Pero ¿qué ocurre cuando a alguno de los medios –digamos el agua- se le van agregando partículas de alguna sustancia con cierto índice de refracción? en general, se observa la aparición de lo que se denomina componente coherente y componente difusa de la luz. Se ha demostrado en diversos artículos que el comportamiento de la luz en medios con partículas agregadas de tamaño similar a la longitud de onda de la radiación incidente no sigue el comportamiento establecido por las relaciones de Fresnel [8,9]; es por ello que se han elaborado diferentes teorías para tratar de esclarecer como se propaga la luz coherente en los medios con partículas denominados coloides [10-16]. Cabe mencionar que dichas teorías se limitan a lo que denominan *sistemas diluidos*, es decir, a concentraciones pequeñas de partículas, en donde la componente de interés es la coherente, ya que ésta transporta la mayor cantidad de potencia; el coloide puede ser considerado como un sistema homogéneo pero que conserva las mismas propiedades electromagnéticas promedio, asociándole un índice de refracción efectivo. Cuando la concentración de partículas es mayor, la potencia que transporta la luz difusa en el sistema es importante dando la apariencia de turbidez. Es aquí cuando las teorías establecidas se ven limitadas ya que no queda claro si la luz difusa tiene asignados los mismos parámetros efectivos que la luz coherente, y de no ser así, ¿cuáles son?

En este trabajo de tesis titulado “Hacia una refractometría en coloides densos” se estudia el comportamiento de la refracción de luz difusa en coloides con una concentración

---

---

alta de partículas y con un tamaño promedio semejante a la longitud de onda  $\lambda$  de la radiación incidente, intentando establecer una metodología para poder obtener parámetros tales como un índice de refracción efectivo para el coloide y en un futuro, poder comparar dicho parámetro con teorías que han sido desarrolladas para el comportamiento de la luz coherente cuando la concentración de partículas sea baja. Se realizaron experimentos para observar la refracción de luz difusa en coloides turbios hechos de partículas de dióxido de titanio  $\text{TiO}_2$  (rutilo) y látex dispersos en agua. También se analiza y desarrolla un modelo que describe los resultados experimentales obtenidos.

## Objetivos

1. Estudiar la refracción de la luz difusa en coloides con concentración alta de partículas de tamaño semejante a la  $\lambda$  de la radiación incidente.
2. Esclarecer si la luz difusa viajando en un coloide “*ve*” un índice de refracción efectivo.
3. Desarrollar un modelo teórico que se apege a los resultados experimentales.
4. Obtener parámetros tales como un índice de refracción efectivo a partir de los resultados experimentales y del modelo desarrollado.
5. Buscar aplicaciones potenciales de la refracción de la luz difusa en instrumentación óptica en base a los resultados experimentales obtenidos.
6. Establecer las bases para el desarrollo de una refractometría en coloides turbios.

## Hipótesis

La refracción de luz difusa en un coloide compuesto de partículas con alto esparcimiento y de tamaño comparable a la longitud de onda de la radiación incidente, depende de las propias partículas embebidas en la matriz y no únicamente de la matriz que las contiene. El índice de refracción efectivo del coloide está compuesto por una parte real y una parte imaginaria cuya magnitud depende de la concentración en volumen de las partículas inmersas en la matriz. La parte imaginaria del índice de refracción efectivo es consecuencia de la absorción y el esparcimiento de la luz.

---

---

## 1.2 Motivación del trabajo de tesis

La propagación de la luz en un medio turbio usualmente se modela con la teoría de transferencia radiativa [17-20]. Cuando la luz difusa viajando en un coloide turbio se refleja y transmite en una interfaz plana donde existe un cambio de índice de refracción, no es claro si se debería de asumir que la luz difusa está viajando en un medio con el índice de refracción del medio en el que se encuentran las partículas coloidales (usualmente referido como la matriz) o si se debería asumir un índice de refracción efectivo. Muchos autores simplemente evitan este tema y la mayoría usa el índice de refracción de la matriz.

En este trabajo de tesis se presenta un experimento para investigar esta interrogante. Cuando la luz, viajando en un medio transparente, se transmite a un medio transparente con un índice de refracción mayor, ésta se confina en un cono alrededor de la normal de la interfaz. El ángulo de apertura del cono de luz es igual al ángulo crítico para la interfaz de los dos medios. Si la luz difusa proveniente de un medio turbio es transmitida a un prisma de vidrio transparente, un cono de luz difusa puede ser observado. El perfil angular de intensidad obtenido del borde del cono de luz difusa dependerá del índice de refracción *visto* por la luz difusa dentro del coloide turbio.

A partir de la cuantificación del perfil angular de intensidad obtenido en el borde del cono de luz difusa se espera obtener parámetros del coloide bajo estudio tales como un índice de refracción efectivo, dando las bases para establecer un modelo de refractometría el cual permitirá analizar coloides turbios, estudio y técnica del cual no se ha encontrado en la literatura.

## 1.3 Fundamentos y antecedentes

El trabajo de J. Cleark Maxwell y los desarrollos posteriores desde finales del siglo XIX pusieron de manifiesto que la luz tiene naturaleza electromagnética. La electrodinámica clásica conduce a la idea de una transferencia continua de energía por medio de ondas electromagnéticas que contrasta con el punto de vista moderno de la electrodinámica cuántica que describe las interacciones electromagnéticas a través del intercambio de paquetes de energía en términos de partículas denominadas fotones. La naturaleza cuántica de la energía radiante no es siempre evidente, ni tampoco es siempre de interés práctico en óptica. Para la luz, se tiene una representación de naturaleza ondulatoria en la forma de las ecuaciones de Maxwell para el campo electromagnético, útiles para describir los fenómenos que se observan en la naturaleza. Entonces, se puede considerar que la luz es una onda electromagnética clásica, teniendo en cuenta el hecho de que hay situaciones para las cuales esta descripción es incompleta (para una discusión más profunda ver la ref. [21])

La respuesta de los materiales homogéneos a los campos electromagnéticos es de especial interés en óptica física. Por homogéneo se entiende a un medio en el que las

propiedades físicas y químicas que lo definen son las mismas en todos y cada uno de sus puntos y que a simple vista tienen una composición uniforme. El efecto neto de introducir un material transparente isotrópico y homogéneo es que la velocidad de fase de las ondas electromagnéticas cambia con respecto a la del vacío. El cociente entre la velocidad de una onda electromagnética en el vacío  $c$  y en la materia  $v$  se denomina **índice de refracción  $n$** :

$$n \equiv \frac{c}{v} = \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{\epsilon_0\mu_0}} = \sqrt{\epsilon_r\mu_r},$$

en donde  $\epsilon_0$  y  $\mu_0$  son la permitividad eléctrica y permeabilidad magnética del vacío respectivamente y  $\epsilon$  y  $\mu$  son la permitividad eléctrica y permeabilidad magnética del material. La transmisión de la luz a través de un medio homogéneo o transparente es un proceso continuo y repetitivo de absorción y emisión de las ondas electromagnéticas. Cada vez que esto ocurre, se produce un desplazamiento de fase en el campo electromagnético de la luz, que aparece como un cambio en la velocidad de fase aparente del haz de luz transmitido con respecto a su valor nominal en el vacío  $c$ . Esto corresponde a un índice de refracción para el medio que es distinto de uno.

Cuando la luz incide en la superficie de un material transparente, la onda electromagnética “ve” una distribución superficial de átomos muy próximos entre sí. Los frentes de onda esparcidos por los átomos o moléculas se anulan mutuamente en todas las direcciones excepto en la frontal y solamente se mantiene la onda que avanza hacia delante. Cuando la onda alcanza una interfaz entre dos medios transparentes diferentes, se presenta una discontinuidad es decir, un cambio brusco de índice de refracción ocasionando que siempre haya una parte de luz que se esparce hacia atrás o reflejada, a este fenómeno se le denomina **reflexión**. Mediante un análisis detallado a partir de las ecuaciones de Maxwell se llega al siguiente resultado útil, *el ángulo de incidencia  $\theta_i$  es igual al ángulo de reflexión  $\theta_r$ :  $\theta_i = \theta_r$* . La parte de luz que se transmite al otro medio sufre un doblez en su trayectoria original, a este fenómeno se le denomina **refracción**. La ley de Snell describe este comportamiento:  $n_i \sin \theta_i = n_t \sin \theta_t$ . Las ecuaciones de Fresnel [21] nos permiten determinar las relaciones de las amplitudes del flujo que se refleja y refracta en función de los índices de refracción de los materiales, de ahí su importancia.

En óptica es útil y común darle a la luz un tratamiento en forma de rayos. Cuando un rayo de luz pasa de un medio transparente con índice de refracción  $n_1$  a un medio transparente con un índice de refracción menor  $n_2$ , se tiene el caso de reflexión interna ( $n_1 > n_2$ ). En esta situación, los rayos incidentes a un ángulo mayor a uno denominado ángulo crítico  $\theta_c = \sin^{-1}\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$  se reflejan totalmente (reflectancia totalmente uno) de nuevo

hacia el medio incidente en un proceso conocido como **reflexión total interna**. La teoría ondulatoria de la luz mediante la aplicación de las ecuaciones de Fresnel prevé que incluso en el caso de la reflexión total interna, aparece una onda transmitida cuya amplitud disminuye exponencialmente a medida que va penetrando en el medio con índice de

refracción menor. La perturbación avanza como una onda de frontera u **onda evanescente** [para un estudio más detallado ver Ref. 21 y 22]. Su amplitud se reduce rápidamente haciéndose despreciable en el segundo medio a una distancia de tan sólo unas pocas longitudes de onda. Esta onda evanescente transporta un flujo de energía neta de cero a través de la interface. Por otro lado, cuando se tiene reflexión externa ( $n_2 > n_1$ ) conforme los rayos de luz sean rasantes a la frontera entre los medios, la luz se confinará dentro de un cono a un ángulo máximo dado por el ángulo crítico entre los medios.

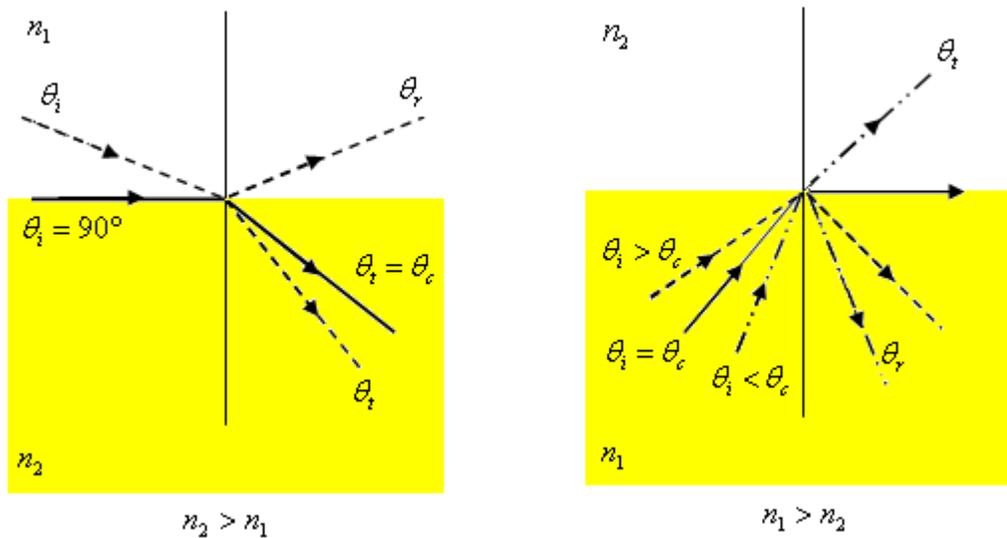


Figura 1. Izquierda, reflexión y transmisión de la luz cuando  $n_2 > n_1$  y derecha, cuando  $n_1 > n_2$ .

Una de las aplicaciones útiles del fenómeno de reflexión total interna para medios transparentes es la de los refractómetros. Un refractómetro es un instrumento que permite obtener el índice de refracción de un líquido o un sólido a una determinada longitud de onda. Existen refractómetros de distintos tipos (para ver una forma de clasificación remitirse a la ref. [23]) como lo son los refractómetros interferométricos y los refractómetros por reflexión interna o ángulo límite. Estos últimos se basan en el estudio del ángulo límite o ángulo crítico para el cual se produce la reflexión total de la luz que atraviesa un medio conocido y la muestra a analizar. Como este valor depende del índice de refracción de los medios atravesados, y dado que el de un medio es conocido, resulta posible conocer el índice de refracción de la muestra.

Los usos del conocimiento del índice de refracción son abundantes. Una de las más importantes es la que permite caracterizar una solución y relacionarlas a diversas propiedades como son su concentración. Así pues, se han caracterizado soluciones y desarrollado tablas que relacionan el índice de refracción con su concentración. Un ejemplo de aplicación es la determinación de la concentración de extractos acuosos vegetales para el desarrollo de medicamentos (por ejemplo ver ref. [24]).

---

---

### *Esparcimiento de la luz*

Desde la observación del comportamiento de la luz como producto de diversos fenómenos en la naturaleza se han generado muchas dudas acerca de su comportamiento, es por ello que el hombre en su afán de entender el medio que lo rodea ha tratado de dar explicación a lo que observa (y a lo no puede ver también) en base al conocimiento que se ha generado por cientos de años. De este modo, se ha observado que la naturaleza no tiene medios transparentes como tal, ya que, desde un punto de vista microscópico, la materia está compuesta por moléculas o agregaciones de partículas, a su vez éstas están formadas de átomos y éstos de cargas eléctricas discretas, electrones y protones, y la lista continuaría, teniendo como resultado que la materia es no homogénea. Lo anterior se puede apreciar de manera más clara con el siguiente ejemplo: si en plena oscuridad se ilumina un medio homogéneo como puede ser agua pura con un haz láser, el camino del haz en el medio puede ser ligeramente percibido aunque el observador se encuentre en una dirección diferente al plano de incidencia, esta observación no es compatible con la ley de Snell la cual afirma que el rayo refractado se encuentra en el plano de incidencia y la cual no toma en cuenta la luz fuera de este plano. Por lo tanto, la Ley de Snell es una primera aproximación y muchas personas se han dedicado a proveer o descubrir el origen de la luz esparcida en todas direcciones. La descripción y el entendimiento de la propagación de la luz a través de sistemas constituidos por una colección de partículas o inclusiones localizadas al azar embebidas en un medio homogéneo llamado matriz ha sido estudiado desde muchos años atrás, su interés no solo radica en la ciencia básica sino también en el potencial tecnológico de sus aplicaciones. Fenómenos como el color del cielo, la turbulencia del aire, el color del follaje de los arboles, la luz de los cúmulos de nubes y la luz salida de coloides son fenómenos que obedecen al *esparcimiento* y *absorción* de la luz. El *esparcimiento* es la modificación de la dirección de la luz pero sin alterarla y la *absorción* de la luz de una partícula es la energía capturada por ésta independientemente de lo que luego ocurra con ella [10].

En muchos problemas de propagación y esparcimiento de ondas electromagnéticas, el medio en el cual viajan las ondas puede ser clasificado como determinístico o aleatorio. Un gran número de investigaciones han sido hechas para el caso determinístico, incluyendo problemas de antenas, difracción y esparcimiento, ondas guiadas, entre otras. En contraste a esos problemas, muchos medios naturales y biológicos son aleatorios variando al azar en el tiempo y en el espacio con determinadas funciones de probabilidad. Así, las ondas en tales medios varían aleatoriamente en amplitud y fase y deben ser descritos en términos de promedios estadísticos y densidades de probabilidad.

Cuando la luz es transmitida a través de un medio turbio (coloide), el esparcimiento de la luz de cada partícula localizada aleatoriamente da origen a un campo de propagación que puede ser dividido en una componente promedio y una fluctuante. La componente promedio es llamada usualmente la componente coherente de la luz y la fluctuante es referida como la componente difusa de la luz. Si el tamaño de partícula es muy pequeña comparada con la longitud de onda de la radiación incidente, la componente difusa transporta una pequeña cantidad de potencia y así la descripción de la propagación de la luz puede ser descrita únicamente en términos de la componente coherente. Sin embargo, si el tamaño de las partículas no es pequeño comparado con la longitud de onda de la radiación

---

---

incidente, la potencia llevada por la componente difusa llega a ser importante, dando origen a una apariencia turbia del sistema.

Es posible adquirir un conocimiento cualitativo de la física que envuelve al esparcimiento por una partícula. Consideremos una partícula de forma arbitraria la cual conceptualmente se puede dividir en pequeñas regiones al interior. Si se le aplica un campo oscilante como por ejemplo una onda electromagnética esta induce un momento dipolar en cada subregión. Estos dipolos empiezan a oscilar a la misma frecuencia del campo aplicado y aparece una radiación secundaria esparcida en todas direcciones. Si consideramos una dirección en particular (a un punto P distante), el campo total esparcido en el punto p se obtiene de la superposición de las ondas esparcidas por cada región de la molécula donde se supone que la dispersión de los dipolos está en fase, son coherentes entre sí. En general, esas relaciones de fase cambian para diferentes direcciones de esparcimiento, así, el campo esparcido varía con la dirección de esparcimiento. Si la partícula es pequeña en comparación con la longitud de onda, todas las ondas secundarias (que provienen de cada subregión de la molécula) estarán aproximadamente en fase; para este tipo de partículas no se espera mucha variación de la luz esparcida con la dirección de observación. Sin embargo, cuando el tamaño de partícula se incrementa, el número de posibilidades de que las ondas se solapen y se cancelen se incrementa. Esto es, a mayor tamaño de partícula, más crestas y valles aparecen en un patrón de esparcimiento. La forma también es importante, si la partícula es deforme, todas las relaciones de fase por el patrón de esparcimiento son diferentes.

Las relaciones de fase entre las ondas secundarias esparcidas dependen de factores geométricos: dirección de esparcimiento, tamaño y la forma de la partícula. Pero la amplitud y fase del momento dipolar inducido para una frecuencia dada depende del material con que están compuestas las partículas. Esto es, para un completo conocimiento del esparcimiento y la absorción de partículas, es necesario conocer cómo responde el bulto de la materia a los campos electromagnéticos oscilatorios [10].

### *Teorías analíticas y teoría de Transferencia Radiativa*

Históricamente, el problema de la propagación de ondas en partículas localizadas aleatoriamente ha sido investigado desde dos puntos de vista. Uno es el de las *Teorías Analíticas* y el otro es el de la *Teoría de Transferencia Radiativa*.

Las teorías analíticas en las que se incluyen las teorías de *single scattering* y *multiple scattering* (la segunda una generalización de la primera) comienzan con una ecuación de onda, se obtiene la solución para el esparcimiento con una sola partícula (*single scattering*), se introducen los efectos de interacción con muchas partículas (*multiple scattering*), y entonces se consideran los promedios estadísticos o configuracionales. En la teoría analítica, se empieza con una ecuación diferencial básica a partir de las ecuaciones de Maxwell o de la ecuación de onda, se introducen las características de absorción y esparcimiento de las partículas y se obtiene una apropiada ecuación diferencial o integral. Este camino es riguroso física y matemáticamente en el sentido que en principio todos los

---

---

efectos de esparcimiento, absorción, difracción e interferencia pueden ser incluidos. Sin embargo, en la práctica, es imposible obtener una formulación que incluya completamente todos esos efectos mencionados y varias teorías las cuales produzcan útiles soluciones son todas aproximadas, cada una siendo útil en un rango específico de parámetros.

En general, cuando una onda plana con un vector de onda  $\vec{k}$  excita un sistema coloidal, el resultado es una onda plana que se propaga a través del coloide con un vector de onda diferente [25] comúnmente llamado vector de onda efectivo  $\vec{k}_{ef}$  producto de la superposición de los campos esparcidos por cada partícula localizada al azar. La magnitud de dicho vector de onda efectivo depende de la forma, el tamaño, el índice de refracción y la densidad de partículas en el coloide. Dependiendo de la magnitud del parámetro de tamaño  $x$ , definido como  $x \equiv k_0 a$ , donde  $k_0 = 2\pi/\lambda_0$  es la magnitud del vector de onda en la matriz y  $a$  es el tamaño de las partículas o inclusiones, el análisis de la propagación de la luz a través del coloide se considera en dos casos extremos: (i) cuando las partículas son pequeñas en comparación a  $\lambda_0$  ( $x \ll 1$ ) y (ii) cuando las inclusiones son comparables o más grandes que  $\lambda_0$  ( $x \geq 1$ ). Así, en el caso de pequeñas partículas se ha encontrado que el vector de onda efectivo  $\vec{k}_{ef}$  existe y se han establecido las *Teorías de Medio efectivo* (TME). En estas teorías la idea es reemplazar un sistema coloidal por un sistema homogéneo ficticio, pero conservando las mismas propiedades electromagnéticas promedio. Este sistema ficticio es llamado medio efectivo y es caracterizado por un conjunto de propiedades efectivas las cuales describen la propagación de la componente coherente a través del coloide. En el caso de partículas muy pequeñas, la energía que transporta la componente difusa es mucho menor que la componente coherente, de modo que es posible despreciarla. Este es justo el caso cuando se utiliza la electrodinámica continua para describir el comportamiento de medios homogéneos, pues se puede considerar que los átomos o moléculas son las partículas inmersas en una matriz (vacío) en donde la componente difusa es despreciada completamente. Cuando el tamaño de partículas es grande ( $x \geq 1$ ) se han hecho esfuerzos por extender la validez de las TME, las cuales son denominadas *Teorías de Medio Efectivo Extendidas* (TMEE) [para una perspectiva más detallada de la teorías TME y TMEE leer la introducción de la Ref. 11 y 25]. Mientras que en el caso de partículas pequeñas es suficiente considerar el campo radiado en la aproximación dipolar, en el caso de partículas grandes el patrón de radiación de los campos electromagnéticos incluye términos de mayor orden en una expansión multipolar. En las TMEE el concepto de medio efectivo está asociado necesariamente sólo a la parte coherente o promedio de los campos, y la energía transportada por la componente difusa solo aparece en el balance de energía como una contribución a la parte imaginaria de las funciones de respuestas efectivas. Se debe enfatizar que en ambas teorías en general se tiene funciones de respuesta complejas, en las cuales la parte imaginaria toma en cuenta la energía absorbida pero también la energía transportada en todas direcciones por el campo difuso a diferencia de la electrodinámica continua macroscópica en donde se interpreta la parte imaginaria como una cantidad que es proporcional a la absorción de la energía por el sistema.

---

---

En contraste con las *teorías analíticas*, esta la *Teoría de Transferencia Radiativa*. La *Teoría de Transferencia Radiativa* conocida también como *Teoría de Transporte* trabaja con la propagación de intensidades únicamente. Ésta está basada en observaciones fenomenológicas y heurísticas de las características de transporte de intensidades y fue iniciada por Schuster en 1905 en su estudio de radiación de atmósferas de niebla. Esta ha sido empleada exitosamente en problemas atmosféricos y de visibilidad bajo el agua, biología marina, emulsiones fotográficas y la propagación de energía radiante en la atmósfera de planetas, estrellas y galaxias. Las ecuaciones diferenciales e integrales que describen esos fenómenos son derivadas, en general, de condiciones a la frontera y de relaciones de conservación de energía. La solución general exacta de esas ecuaciones aún no ha sido obtenida, sin embargo, existen algunos casos especiales para los cuales las soluciones y útiles aproximaciones han sido desarrolladas. Así, existen soluciones aproximadas para los casos límite, distribución tenue y distribución densa [12]. La propagación de la componente difusa de la luz dentro de un medio inhomogéneo es usualmente modelado con la teoría de transferencia radiativa. La teoría de transferencia radiativa se auxilia en una ecuación de balance de energía para una intensidad específica (o radiancia) obtenida de una adición incoherente de la luz incidente y de la luz esparcida. Uno puede argumentar que la luz difusa puede ser considerada como una superposición incoherente de muchas ondas coherentes viajando en muchas direcciones diferentes [12].

La teoría de transporte no empieza con la ecuación de onda. Ésta trabaja directamente con el transporte de energía a través de un medio que contiene partículas. Esta teoría describe la propagación de intensidades en partículas distribuidas aleatoriamente en términos de la intensidad específica  $I(\vec{r}, \hat{s})$  [12], la cual es en general función de la posición  $\vec{r}$  y la dirección  $\hat{s}$  en el espacio de tres dimensiones. El desarrollo de la teoría es heurístico. Aunque los efectos de difracción e interferencia de una sola partícula son incluidos en las características de esparcimiento y absorción la teoría de transporte por sí misma no incluye los efectos de difracción e interferencia. Con el desarrollo general de la teoría de transporte de la propagación de las ondas en presencia de partículas se obtiene una ecuación de transferencia y una ecuación integral para la intensidad específica. Sin embargo, las soluciones exactas a esas ecuaciones han sido obtenidas únicamente para un poco de limitados casos. Los problemas de planos-paralelos y problemas de esparcimiento isotrópico son ejemplos cuyas soluciones han sido obtenidas y expresadas en forma razonablemente tratables. En la mayoría de los casos prácticos, sin embargo, la ecuación de transferencia no puede ser resuelta exactamente, y es necesario recurrir a soluciones aproximadas. Incluso en casos en los cuales las soluciones exactas están disponibles, las expresiones son a menudo muy complejas que es deseable tener una simple aproximación a la solución. Una solución aproximada se tiene cuando la propagación de las ondas se da en un medio con fronteras plano-paralelas. Esta simple geometría representa muchas situaciones físicas tales como las atmósferas planetarias, capas oceánicas, un *slab* de sangre, o una película delgada de pintura, y son posibles razonadamente soluciones simples a estos problemas. Se han desarrollado teorías que son aplicables a estos casos. Se tiene la teoría de dos y cuatro flujos, este es un método heurístico desarrollado por Kubelca-Munk y la cual se puede derivar de la teoría de transferencia radiativa. Así también se han desarrollado teorías de múltiples flujos, entre otras. El método aproximado de dos y cuatro flujos ha sido extensivamente usado. Este requiere no más que simples operaciones

---

---

algebraicas y se ha encontrado que da resultados razonablemente adecuados con los datos experimentales [12]. Sus inconvenientes son que este método requiere de la determinación empírica de coeficientes y el rango de su validez y de sus bases teóricas aún no son bien establecidas.

### *Refracción de la luz difusa*

La reflexión y la transmisión de la luz difusa en la interfaz de un medio inhomogéneo es tratado comúnmente usando las relaciones de Fresnel asumiendo el índice de refracción del medio inhomogéneo como aquel de la matriz [por ejemplo en las Ref. 16 y 26-28]. La cuestión que surge es si uno debería considerar un índice de refracción efectivo cuando se calcula la reflectancia de la luz difusa en lugar del índice de refracción de la matriz solamente. También, uno puede cuestionar la validez de las relaciones de Fresnel en este caso. Si hay un índice de refracción efectivo  $n_{eff}$  para la componente coherente es razonable pensar que quizás hay un índice de refracción efectivo también para la componente difusa.

El problema de medir un índice de refracción efectivo en sistemas coloidales ha sido estudiado experimentalmente desde hace más de 40 años [29-35] y en la mayoría de estos trabajos se han empleado refractómetros de ángulo crítico tipo de Abbe [32]. El problema con estas mediciones es que el principio se basa en la determinación del índice de refracción a partir del ángulo crítico entre la interfaz prisma coloide, sin embargo, la reflectancia para la onda coherente cerca del ángulo crítico en dicha interfaz no tiene una transición definida a la reflexión total interna, lo que implica que no es correcto extraer información acerca del índice de refracción efectivo a partir de un ángulo crítico y más aún, cuando el tamaño de las partículas es comparable a la longitud de onda y su densidad en volumen no es baja, la turbidez del sistema es alta y en este caso la información más relevante se encuentra en la componente difusa pues es ésta la que transporta la mayor cantidad de potencia.

El presente trabajo de tesis es motivado en parte por la necesidad de proveer evidencia experimental en esta materia. Cuando la turbidez del sistema es apreciable, la componente difusa de la luz es la que transporta la mayor información y a partir de la observación y análisis de la refracción de la componente difusa en una interfaz plana entre un prisma de índice de refracción mayor y el coloide bajo estudio es posible ver si se le puede asignar propiedades efectivas al medio coloidal o no. Para este fin se utilizó un arreglo experimental modificado pero previamente propuesto en [8] en donde se puede observar claramente si la luz difusa proveniente de un coloide turbio viene de un medio con índice de refracción de la matriz o no. En este trabajo de tesis se reportan mediciones de perfiles de intensidad de la luz difusa refractada en una interfaz plana mostrando la dependencia de la refracción de la luz con la concentración de partículas coloidales; tal dependencia indica que la transmisión y por ende la refracción de la luz difusa de un medio turbio depende de la presencia de las partículas coloidales y no únicamente de las propiedades ópticas de la matriz.

---

---

Se ha presentado una muy breve descripción del estudio del comportamiento de la luz y en donde se ha establecido que muchas de las investigaciones realizadas no se han enfocado a dar una explicación sobre el fenómeno de refracción de la luz difusa en líquidos complejos como son los coloides densos. Aunque la teoría de transferencia radiativa es útil cuando se requieren mediciones en términos de intensidades específicas muy utilizadas en la industria (en recubrimientos y tejido biológico es muy útil) no es posible mediante ésta explicar el comportamiento físico de la componente difusa al refractarse de un medio a otro, si se le puede asignar un vector de onda efectivo en donde sus características van a depender de las partículas inmersas en la matriz y de esta misma. Como se mencionó párrafos antes, muchos autores al intentar describir el comportamiento de la refracción de la luz en medios con partículas inmersa en éste, en sus desarrollos de modelos únicamente toman el índice de refracción de la matriz sin tomar en cuenta el de las partículas sin nunca justificar el porqué de esa suposición. En el siguiente capítulo se describe el arreglo experimental usado para estudiar el comportamiento de la luz difusa en un medio turbio compuesto de agua destilada (matriz) y partículas de  $\text{TiO}_2$  y Látex.

#### **1.4 Metodología**

Para el desarrollo de este trabajo de tesis se siguió la metodología siguiente:

- Se identificó que la refracción de la luz difusa en líquidos complejos no es clara aún.
- Se desarrolló un arreglo experimental que permite medir el comportamiento de la luz difusa en una interfaz plana proveniente de un coloide.
- Se obtuvieron perfiles de intensidad angular que permiten cuantificar la medición.
- Se estudió la respuesta lineal de la cámara CCD utilizada en el experimento para asegurar que las mediciones realizadas fueran confiables.
- Se probó la estabilidad de las suspensiones coloidales para asegurar que durante el desarrollo del experimento estas no sufrieran una sedimentación influyendo de manera indirecta en los resultados.
- Se desarrolló un modelo que se apegue a los resultados experimentales.
- Se obtuvieron las conclusiones del trabajo de tesis.

En el siguiente capítulo se da una explicación del procedimiento para comenzar a estudiar el comportamiento de la refracción de la luz difusa en líquidos complejos tales como los coloides densos.



---

---

## Capítulo II. Diseño experimental

En este capítulo se presenta el arreglo experimental el cual permite cuantificar el comportamiento de la componente de luz difusa al atravesar una interfaz plana. Cuando la luz proveniente de un coloide turbio es transmitida a un prisma de vidrio de mayor índice de refracción, un cono de luz difusa se puede observar, de éste es posible obtener un perfil angular de intensidad el cual se obtiene del borde del cono de luz difusa formado al interior del prisma. El primer paso fue montar el arreglo experimental para analizar el comportamiento de la componente difusa en un medio turbio obteniendo un perfil angular de intensidad resultado de procesar fotografías tomadas por una cámara CCD del borde del cono de luz formado al interior del prisma, el siguiente paso fue analizar y determinar que la respuesta de la cámara CCD utilizada en el experimento fuera lineal, posteriormente se verificó que los coloides utilizados conformados de partículas de  $\text{TiO}_2$  y látex no sufrieran sedimentación mientras se realizaban los experimentos. Una vez hecho lo anterior se investigó el comportamiento de la luz difusa al excitarla con luz polarizada y observar su respuesta.

Los materiales utilizados para los montajes experimentales fueron:

1. Diodo láser a 635 nm.
2. Goniómetro.
3. Contenedor cilíndrico formado por un portaobjetos y un empaque.
4. Un prisma Dove.
5. Cámara CCD XCD V50 SONY.
6. Dos filtros polarizadores polaroid.
7. Una superficie esparcidora conformada por una pantalla blanca.
8. Accesorios de montaje óptico.
9. Lente con distancia focal de 5 cm.
10. Coloides a diferentes concentraciones de partículas de  $\text{TiO}_2$  y Látex.
11. Tarjeta para captura de fireware 400 para comunicación de la cámara CCD.
12. Computadora personal para procesamiento de las fotografías obtenidas.
13. Agua tridestilada, alcohol isopropílico para la limpieza del equipo utilizado.

### 2.1 Arreglo experimental

Para medir el perfil de intensidad angular del borde del cono de luz difusa refractada fuera del medio turbio pero dentro del prisma de índice de refracción mayor se montó el arreglo experimental siguiente:

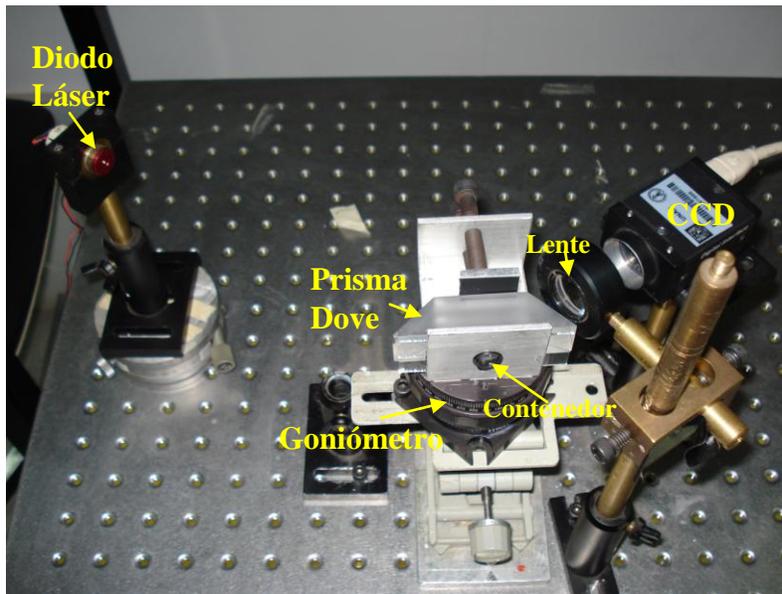
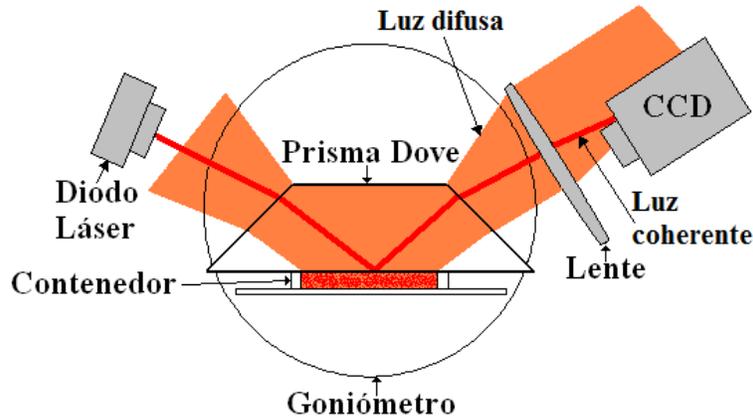


Figura 2. Arriba, esquema del arreglo experimental, abajo, fotografía del montaje experimental usado para visualizar y medir el borde del cono de propagación formado por la luz difusa refractándose fuera del medio turbio.

Se colocó un contenedor cilíndrico a la base de un prisma Dove hecho de BK7 [36] el cual tiene un índice de refracción de  $n_g = 1.51$  a una longitud de onda de 635 nm. El prisma y el contenedor fueron colocados en la parte superior de un goniómetro el cual permite ajustar el ángulo de incidencia de un haz láser. Un haz láser rojo (635 nm) se hace incidir en una base del prisma y a un ángulo muchos grados menor que el ángulo crítico entre el prisma y el agua tridestilada. Cuando el contenedor es llenado con una suspensión turbia de partículas dispersas en agua, parte del haz láser es transmitido dentro del coloide turbio y parte de este es reflejado especularmente de regreso al interior del prisma. La luz transmitida dentro del contenedor sufre múltiple esparcimiento entre las partículas coloidales provocando el surgimiento de una radiación difusa viajando en todas direcciones. Una gran porción de la luz difusa es reflejada de regreso al interior del prisma. Las direcciones de propagación de la luz difusa reflejada en el prisma son confinadas

---

---

dentro de un cono. Una lente fue colocada en una de las caras de salida del prisma permitiendo que una distribución angular de la luz sea mapeada en el plano focal de ésta, y así obtener la distribución espacial de la intensidad de la luz. Una cámara CCD en el plano focal permite obtener directamente imágenes de la distribución espacial de la luz difusa reflejada de regreso en el interior del prisma para diferentes concentraciones de partículas. A partir de la geometría del arreglo experimental es posible asignar una escala angular a cada perfil medido, denominándolo perfil angular de intensidad. El haz coherente reflejado es fácilmente bloqueado (ya que incide fuera del sensor de la cámara) para no ser captado por la CCD como se muestra en la figura 2. Con este montaje es posible observar el borde del cono de propagación formado por la luz difusa proveniente del medio coloidal y ver si éste depende de la concentración de partículas.

El desarrollo experimental consiste en el llenado del contenedor con un coloide turbio compuesto de agua tridestilada (medio matriz) y una concentración, en volumen, conocida de partículas con gran esparcimiento; este procedimiento se repitió para diferentes concentraciones de partículas. Para ello se usaron partículas de dióxido de titanio  $\text{TiO}_2$  (rutilo) de un diámetro promedio de 220 nm con un índice de refracción de alrededor de 2.7 y partículas de látex de diámetro promedio de 450 nm con un índice de refracción de alrededor de 1.48, ambos tipos de partículas suspendidas en agua destilada. Un experimento similar fue desarrollado por G. H. Meeten [29] y colaboradores muchos años atrás sin embargo, en su configuración la luz es incidente al contenedor del coloide por la cara opuesta a la interfaz del prisma. La configuración que se usa aquí asegura que únicamente la luz difusa se refracta al interior del prisma y esto permite medir muestras con una turbidez muy alta. La cámara CCD permite obtener una fotografía del perfil de intensidad de una parte del borde del cono de luz difusa.

El sensor CCD de la cámara posee un total de pixeles de 692 (horizontales) y 504 (verticales) de los cuales el número efectivo de pixeles consta de 659(H) y 494 (V). Una imagen de la CCD consiste de una imagen de 640 x 480 pixeles y profundidad de color de 8 bits.

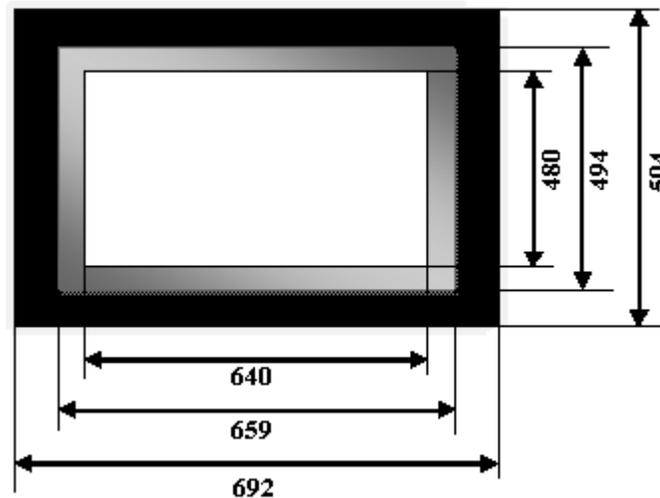


Figura 3. Distribución de pixeles de la cámara CCD. Número total de pixeles: 692 x 504, número de pixeles efectivos: 659 x 494, número de pixeles de salida: 640 x 480.

---

---

Las características principales de la cámara CCD se presentan a continuación:

Marca y modelo: SONY XCD V50  
Número de pixeles efectivos: 330, 000  
Tamaño de celda unitaria: 7.4  $\mu\text{m}$  (H) x 7.4  $\mu\text{m}$  (V)  
Formato de interfaz: IEEE 1394b-2002  
Formato de imagen: 640 x 480 mono8/16  
Alimentación: +8 a +30 Volts  
Dimensiones: 44 (ancho) x 29 (alto) x 57.5 (largo) mm

Cada imagen capturada se manejó como una matriz de 640 columnas y 480 renglones para su posterior procesamiento en MATLAB. Para obtener el perfil angular de la distribución de la intensidad de la luz alrededor del borde del cono de luz difusa se sumaron los valores de todos los pixeles columna por columna y posteriormente se graficaron cada uno de los valores obtenidos contra el número de columna correspondiente.

Dos ejemplos de las imágenes obtenidas del borde del cono de luz difusa se presentan en la figura 4. La figura 4.a corresponde a una imagen tomada cuando la concentración en volumen  $f$  de partículas es baja (látex  $f \sim 2\%$ ). La figura 4.b corresponde a una concentración mayor de partículas (látex  $f \sim 10\%$ ). Las figuras 4.c y 4.d corresponden al perfil angular de intensidad después de procesar las imágenes 4.a y 4.b respectivamente.

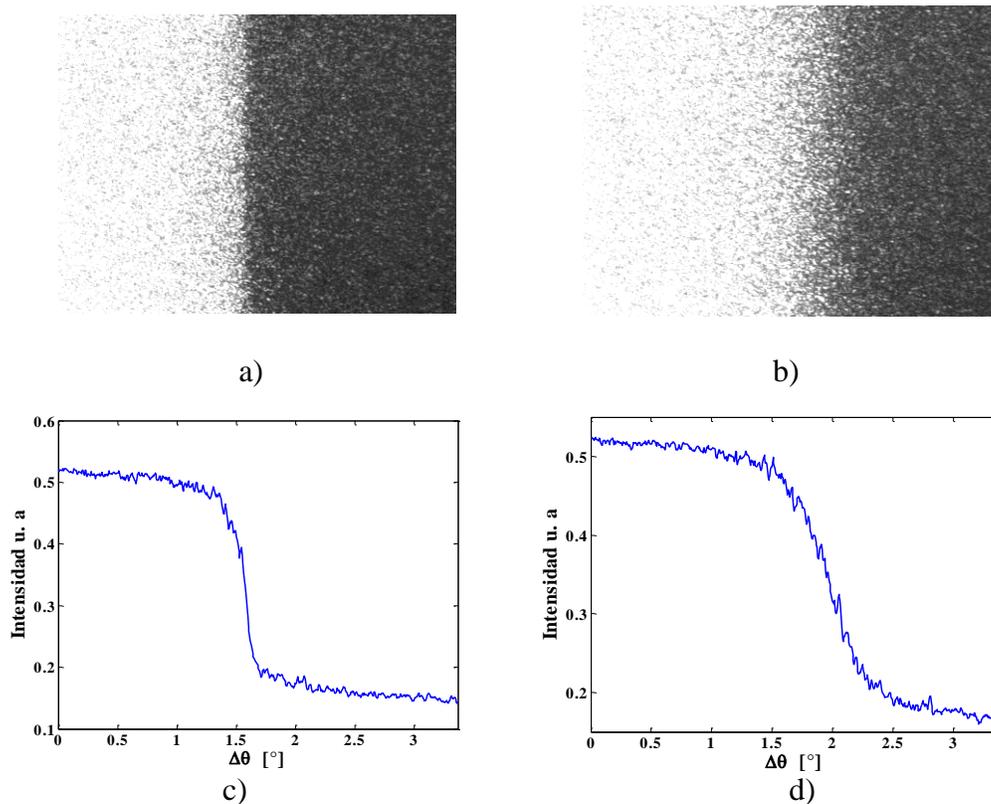


Figura. 4. Luz difusa refractada de partículas de látex inmersas en agua para a)  $f \sim 2\%$  y b)  $f \sim 10\%$ . Abajo, perfiles angulares de intensidad obtenidos del procesamiento de las imágenes para c)  $f \sim 2\%$  y d)  $f \sim 10\%$ .

---

---

Para hacer un análisis cuantitativo de los perfiles angulares de intensidad medidos se debe cambiar la escala horizontal a un ángulo de viaje dentro del prisma y verificar la linealidad de la escala de intensidad de la cámara CCD.

## 2.2 Verificación de la respuesta lineal de la intensidad de la luz de la CCD

Para asegurar que las mediciones hechas en el experimento fueran confiables se necesitó verificar que la respuesta de la cámara CCD a las variaciones de intensidad fuera lineal. Para este fin se desarrolló la siguiente prueba (ver figura 5): un haz láser se pasó a través de dos polarizadores lineales usados para variar la intensidad del haz según la alineación de los ejes de polarización de éstos. El eje de polarización del segundo polarizador (el analizador) fue inicialmente alineado paralelamente con el eje del primer polarizador. Entonces, rotando el analizador un ángulo  $0 \leq \alpha < 360^\circ$  se redujo la intensidad del haz transmitido  $I$  según la ley de Malus:  $I = I_0 \cos^2 \alpha$ . En esta ecuación  $I_0$  corresponde a la intensidad de la luz de la fuente de iluminación.

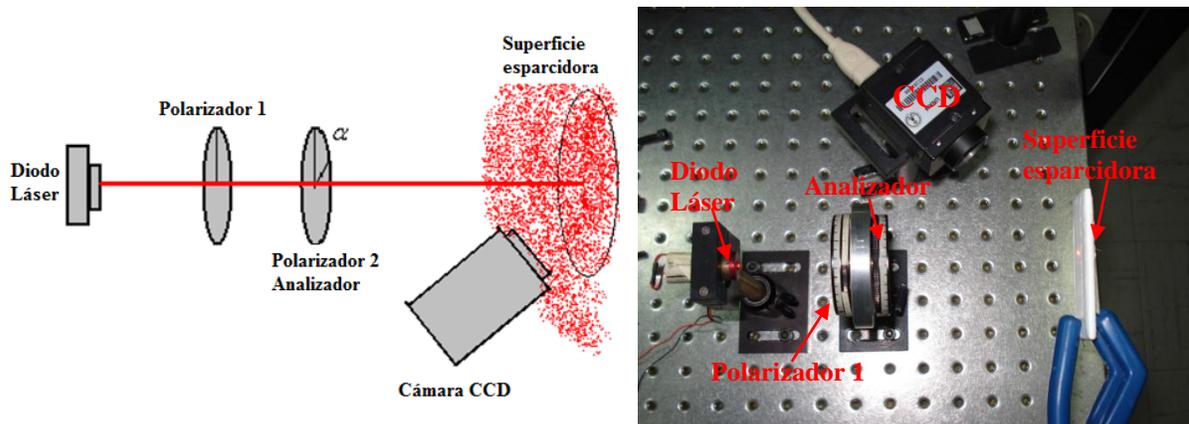


Figura 5. Arreglo experimental para verificar la respuesta lineal de la cámara CCD

El haz láser de salida fue proyectado a una superficie difusa blanca que esparce luz en todas direcciones. La cámara CCD fue colocada enfrente de la superficie en una posición fija, colectando una porción de la luz difusa reflejada. Una fotografía fue tomada inicialmente y entonces se rotó el analizador sucesivamente en pasos de  $10^\circ$ . Si la respuesta de la CCD a variaciones de intensidad es lineal, entonces el valor registrado para algún píxel de la CCD debería ser función de  $\cos^2 \alpha$  al rotar el analizador. Se adicionaron los valores de los píxeles de cada una de las columnas de las fotografías obtenidas mediante la CCD y se graficaron los valores resultantes con respecto al ángulo  $\alpha$  del analizador.

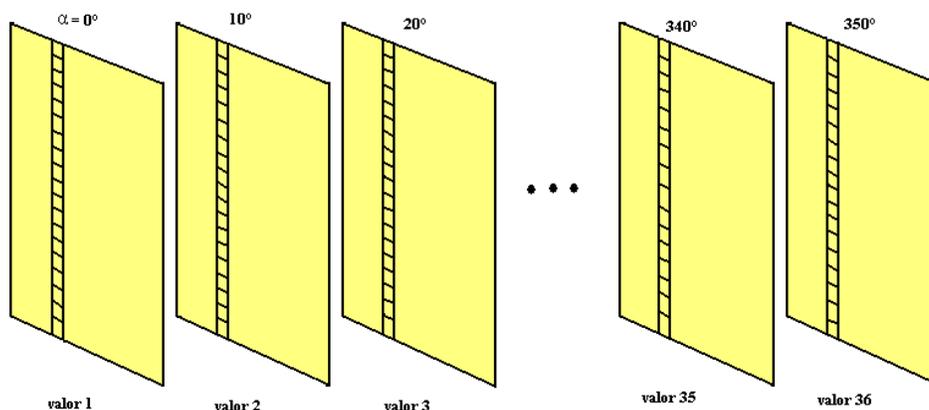


Figura 6. Secuencia de obtención de las gráficas a partir de cada una de las fotografías para analizar la respuesta de la cámara CCD a cambios de intensidad. En cada fotografía obtenida se identificó la misma columna, se sumó el valor de cada uno de los pixeles de cada columna y posteriormente se graficó cada valor a su correspondiente ángulo  $\alpha$ .

### 2.3 Escala angular

Una vez que el perfil de intensidad de la zona de transición fue registrada en la CCD se debió establecer la relación entre la posición lateral a lo largo de la CCD con el ángulo de viaje de la luz dentro del prisma con respecto a la normal de la base de éste. Primero se establece un valor de referencia sobre la escala, esto se hace al localizar la posición sobre la CCD del ángulo crítico para agua tridestilada (a esta longitud de onda y para el prisma utilizado este ángulo es  $\theta_c = 61.7^\circ$ ). Para localizar este ángulo se llenó el contenedor del dispositivo experimental con agua destilada y se colocó un fondo blanco difusor para reflejar algo de luz al interior del prisma. En este caso se observa un borde bien definido del cono de luz en la CCD el cual permite localizar claramente el ángulo de referencia sobre la escala lateral de la CCD.

Una vez localizada la referencia, del conocimiento de la distancia del plano focal ( $D_f$ ) de la lente en la cual se encuentra colocada la cámara CCD y también del conocimiento de las dimensiones de la CCD ( $L_{CCD} = 4.736$  mm) se puede determinar la relación entre un desplazamiento en el plano focal y un cambio en el ángulo de viaje de la luz antes de que entre a la lente, como lo muestra la figura 7.a, y esta dado por,

$$\varphi = \tan^{-1} \left( \frac{L_{CCD}/2}{D_f} \right) \approx \frac{1}{2} \frac{L_{CCD}}{D_f}.$$

Por lo que el ángulo de visión de la cámara CCD es  $2\varphi = 5.4^\circ$ . Finalmente, usando la ley de Snell y la geometría mostrada en la figura 7b) se puede relacionar el cambio en el ángulo de viaje de la luz fuera del prisma al cambio en el ángulo de viaje al interior de éste. Si consideramos que el índice de refracción del vidrio es  $n_g$  y el del aire es  $n_a = 1$  tenemos:

$$n_g \sin \gamma = n_a \sin \beta,$$

$$n_g \cos \gamma = n_a \cos \beta \frac{d\beta}{d\gamma}.$$

Por lo que podemos decir que

$$\Delta\gamma = \frac{n_a \cos \beta}{n_g \cos \gamma} \Delta\beta.$$

Por lo que solo resta demostrar que el cambio en el ángulo  $\theta$  corresponde al mismo que el ángulo  $\gamma$ . De la figura 7.b) tenemos que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es  $180^\circ$ , por lo que

$$45^\circ + (\gamma + 90^\circ) + (90^\circ - \theta) = 180^\circ,$$

$$\theta - \gamma = 45^\circ,$$

$$1 - \frac{d\gamma}{d\theta} = 0,$$

$$\frac{d\gamma}{d\theta} = 1.$$

Llegando a la conclusión de que  $\Delta\gamma \approx \Delta\theta$ . Si se alinean el eje de la lente con la normal de salida del prisma se tiene  $\beta = \varphi$  obteniéndose una relación directa del ángulo de viaje de la luz dentro del prisma y el ángulo captado por la cámara CCD.

Tomando como referencia el valor del ángulo crítico para la interfaz agua-vidrio ( $\theta = 61.7$ ) y sabiendo el ángulo de una de las caras del prisma, podemos determinar los valores de  $\gamma$  y  $\beta$ .

$$45^\circ + (\gamma + 90^\circ) + (90^\circ - 61.8) = 180^\circ,$$

$$\theta - \gamma = 45^\circ,$$

$$\gamma = 16.8^\circ,$$

$$\beta = \sin^{-1}(n_g \sin \gamma) = 25.9^\circ.$$

Con lo cual es posible mediante la sustitución de los valores anteriores obtener un factor de corrección constante ya que el ángulo de visión es pequeño,

$$\frac{n_a \cos \beta}{n_g \cos \gamma} = 0.6.$$

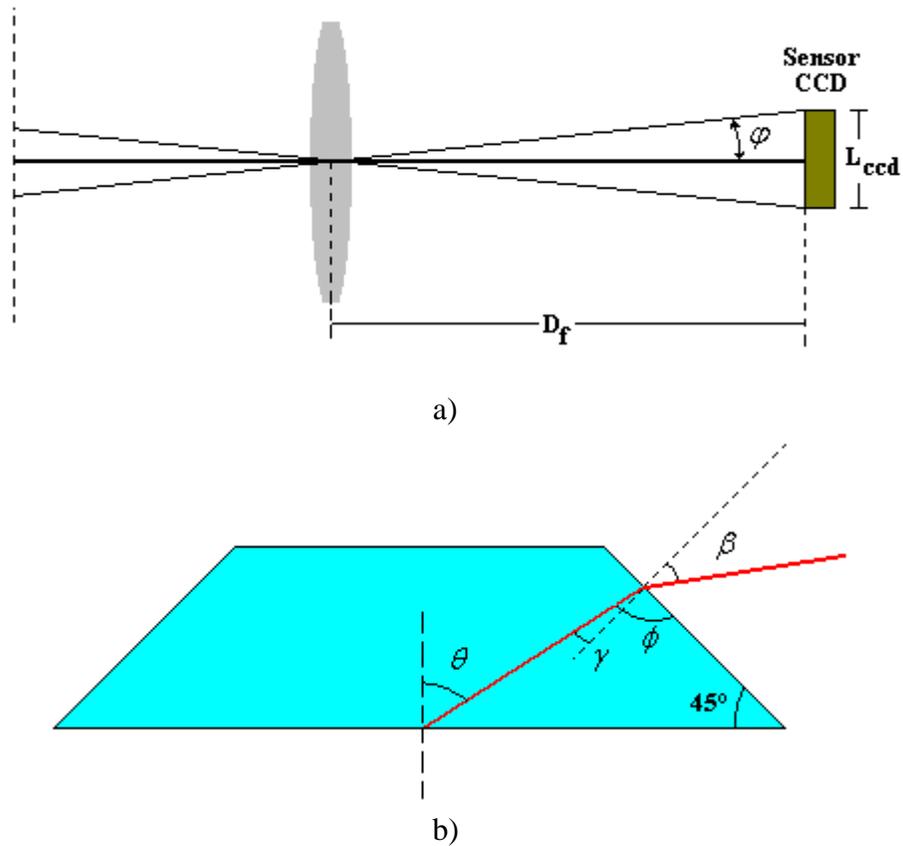


Figura 7. Consideraciones geométricas en la determinación del perfil angular de intensidad. a) vista superior del ángulo de visión de cámara CCD y b) geometría analizada para relacionar el ángulo de viaje de la luz dentro del prisma y fuera de éste.

Ahora bien, la lente colocada a la salida de una de las caras del prisma permite que la distribución angular de la luz sea mapeada en el plano focal a una distribución espacial de la intensidad de la luz; sea  $\Delta x$  un pixel dado correspondiente a una celda del sensor CCD cuya longitud es  $7.4 \mu\text{m}$ , de la figura 7.a se tiene

$$\Delta x = D_f \sin \varphi \approx D_f \varphi,$$

por lo tanto

$$\varphi = \frac{\Delta x}{D_f} \Rightarrow \varphi = \beta \Rightarrow \beta = \frac{\Delta x}{D_f} = \frac{1}{0.6} \Delta \gamma \Rightarrow \Delta \gamma \approx \Delta \theta.$$

Por lo que se obtiene una relación de un desplazamiento angular a una distribución espacial, dadas las dimensiones del sensor CCD de la cámara:

$$\Delta\theta = 0.6 \frac{\Delta x}{D_f} .$$

La Tabla I resume los resultados obtenidos.

TABLA I. Valor del factor de corrección para la escala angular de los perfiles angulares de intensidad.

<b>Resumen de factor de corrección en la escala angular de los perfiles angulares de intensidad</b>	
<b>Aproximación</b>	$\Delta\gamma \approx \Delta\theta$
<b>Factor de corrección</b>	$\Delta\gamma = \frac{n_a \cos \beta}{n_g \cos \gamma} \Delta\beta = 0.6\Delta\beta$
<b>Relación ángulo-posición</b>	$\Delta\theta = 0.6 \frac{\Delta x}{D_f}$

## 2.4 Materiales

Las dispersiones en agua destilada de partículas de  $\text{TiO}_2$  y látex fueron preparadas para ver si la distribución angular de la luz difusa esparcida alrededor del borde del cono de luz depende de la concentración de éstas. Las dispersiones se prepararon a partir de una muestra madre preparada en el CIP-COMEX. Las dispersiones preparadas fueron vigorosamente sacudidas seguidas por un proceso de “ultrasonificación” por 5 minutos para romper cualquier aglomeración de partículas antes de su uso.

Las dispersiones de partículas de látex fueron preparadas alrededor de las siguientes concentraciones en volumen: 2, 5, 8, 10 y 12%. Para las dispersiones de partículas de  $\text{TiO}_2$  se prepararon de alrededor de 0.3, 0.6, 1.2, 1.7, 2.1 y 2.5% en volumen. El valor nominal del índice de refracción de las partículas de látex es de 1.48 y el de las partículas de  $\text{TiO}_2$  es de alrededor de 2.7. Las partículas de látex fueron muy estables y las partículas de  $\text{TiO}_2$  sufrieron sedimentación después de algunas horas; tiempo suficiente para hacer las mediciones presentadas en este trabajo de tesis.

Para probar la estabilidad de las suspensiones coloidales durante el experimento, se midieron los perfiles de intensidad alrededor de la zona de transición para los dos tipos de partículas, látex y  $\text{TiO}_2$ .

## 2.5 Montaje experimental para estudiar el comportamiento de la polarización de la luz difusa

Como un primer acercamiento a observar el efecto de la polarización sobre la luz difusa se implementó el arreglo experimental mostrado en la figura 8. El objetivo de dicho arreglo es tratar de cuantificar que sucede cuando luz polarizada excita el medio coloidal tratando de

---

---

obtener y entender que ocurre con la luz difusa, investigando si esta se mantiene o no polarizada. Se utilizó un polarizador Polaroid cuya tasa de extinción (cociente de transmisión de la componente indeseada a la componente deseada) es típicamente de 1:500 y cuya eficiencia de transmisión es de 80%.

Dado que la fuente de luz proviene de un diodo láser y este se encuentra parcialmente polarizado se localizó su eje preferencial de polarización, una vez identificado se colocó a  $45^\circ$  de tal manera que la componente S y P incidieran de igual manera.

El primer experimento consistió en mantener el arreglo de la figura 2 pero se le agregó un polarizador con su eje de transmisión identificado entre el diodo láser y el prisma Dove. Se obtuvieron perfiles angulares de intensidad para diversos desplazamientos angulares del polarizador a fin de observar que le ocurre a la luz difusa refractada.

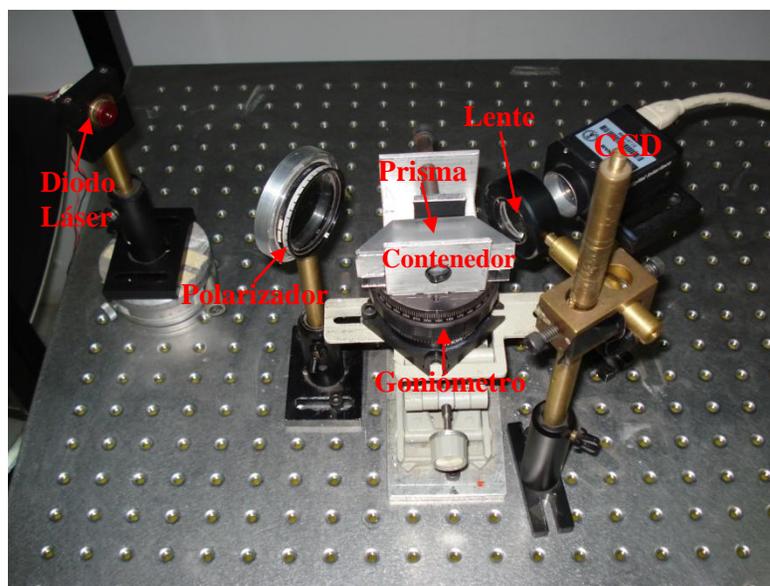
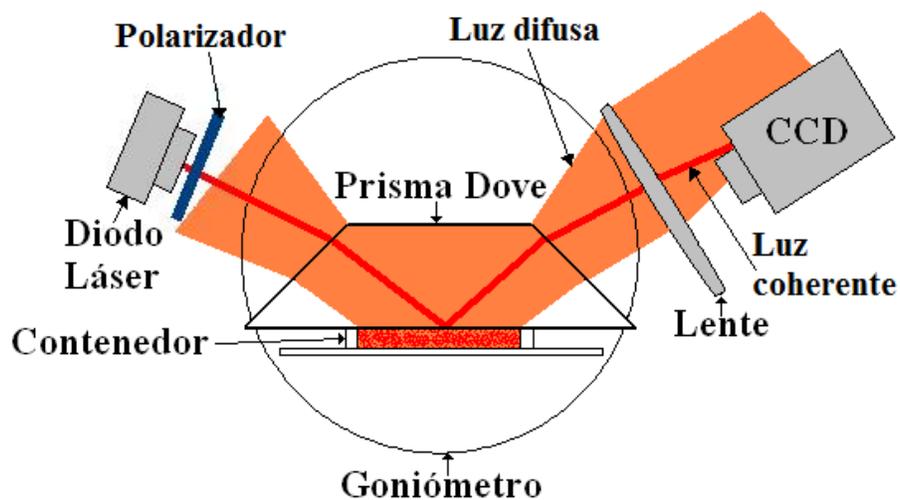


Figura 8. Esquema y fotografía del arreglo experimental con una fuente de luz polarizada.

---

---

El segundo experimento realizado consistió en colocar el polarizador entre la lente y la cámara CCD y de esta manera cuantificar los perfiles angulares de intensidad. El objetivo es observar si la luz difusa tiene una polarización preferencial cuando esta se refracta de una interfaz plana. La figura 9 muestra el arreglo experimental montado.

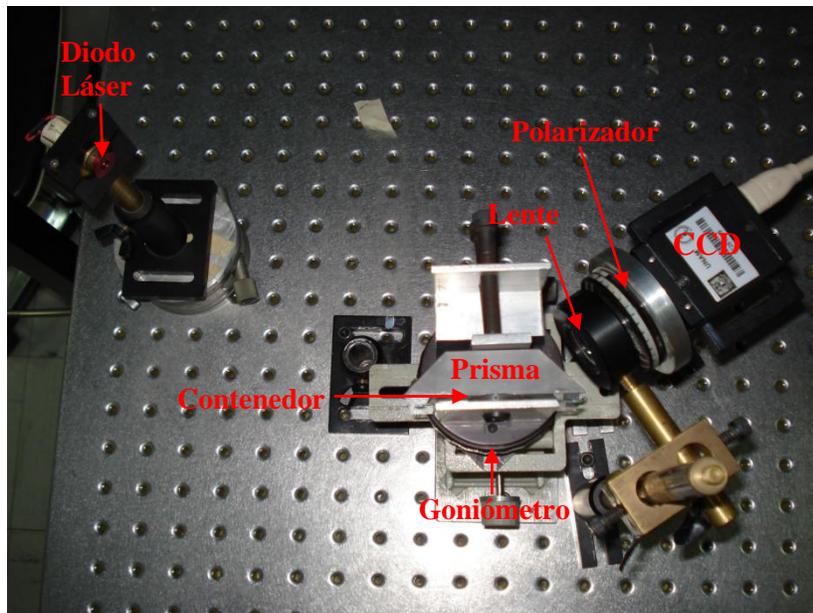
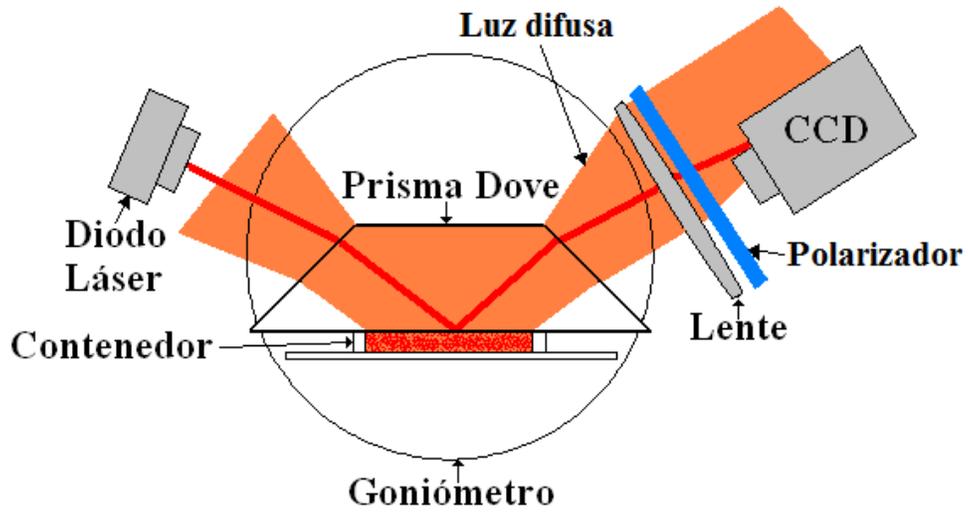


Figura 9. Esquema y fotografía del arreglo experimental para el análisis del estado de polarización de la luz difusa

---

---

De esta manera se trató de exponer de manera clara, pienso yo, cada uno de los experimentos realizados para analizar el comportamiento de luz difusa proveniente de un medio turbio. En el siguiente capítulo se muestran cada uno de los resultados obtenidos durante los experimentos antes descritos. Es importante mencionar que la dificultad de cada uno de los arreglos experimentales recayó en la correcta alineación de cada uno de los elementos que lo conforman, así como la colocación adecuada de la cámara CCD. La implementación de cada montaje experimental fue mostrando que un sistema simple como el que aquí se presenta lleva tiempo y dedicación realizarlo.



---

---

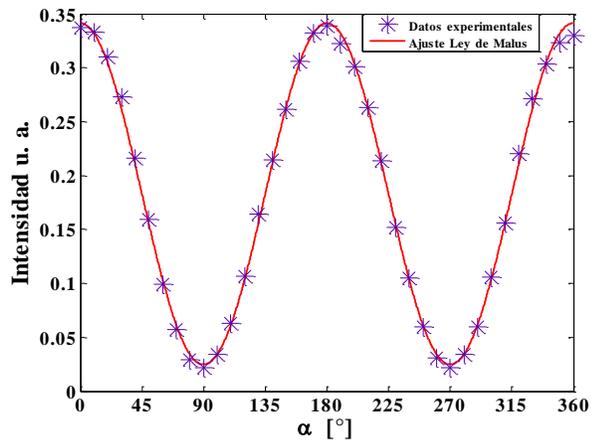
## Capítulo III. Resultados experimentales

En este capítulo se presentan todas las pruebas experimentales que se hicieron a fin de tratar de medir el comportamiento del borde de cono de luz difusa proveniente de un coloide denso, descrito en el capítulo II. Los gráficos obtenidos permiten extraer información que permite entender mejor la refracción de la luz en medios turbios. Primeramente se mostrarán los resultados obtenidos de analizar el comportamiento de la respuesta de la cámara CCD a cambios en la intensidad de la luz que la incide, posteriormente se analizará el comportamiento de los coloides preparados, en seguida, se mostrarán los resultados más interesantes, observar y analizar el comportamiento de la luz difusa a través de los perfiles de intensidad obtenidos, concluyendo con la presentación de la observación del efecto de la polarización sobre las mediciones realizadas.

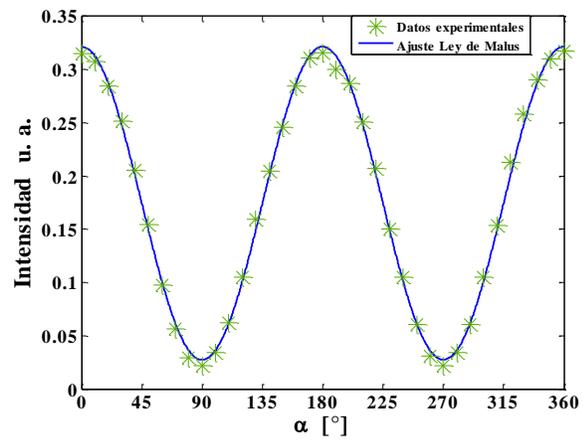
### 3.1 Respuesta de la cámara CCD

El análisis de la respuesta lineal a cambios de intensidad sobre la CCD es de gran importancia, puesto que ello permite asegurar que las curvas obtenidas mediante el procesamiento de imágenes obtenidas de la cámara se debieran únicamente al fenómeno bajo estudio. En la figura 10 se presenta la variación de intensidad como función del ángulo que forman los ejes de polarización del polarizador y el analizador descrito en el punto 2.2 del capítulo anterior.

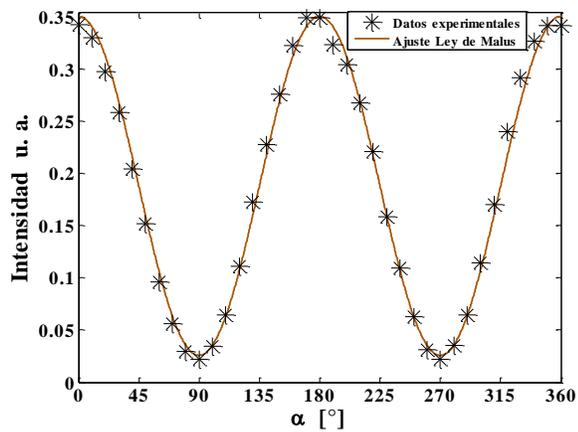
Cada punto en cada una de las gráficas mostradas en la figura 10 corresponde a la suma del valor de todos los pixeles de una columna para un valor fijo de  $\alpha$ . Mediante el *Toolbox Curve Fitting* de MATLAB se hizo el ajuste de los valores experimentales a la función  $\cos^2 \alpha$  correspondiente a la Ley de Malus. Esto para verificar la correspondencia entre los datos experimentales y un modelo de ajuste. La figura 10.a corresponde a la primer columna de un total de 640 para cada fotografía, las figuras 10.b y 10.c corresponden a dos columnas intermedias (160 y 325) y finalmente la figura 10.d corresponde a la columna 640 de cada una de las fotografías. Todas las demás columnas tienen el mismo comportamiento. En esta figura se puede apreciar un ajuste casi perfecto (coeficiente de ajuste de 0.9977) del comportamiento de la cámara CCD a variaciones de intensidad de acuerdo a la ley de Malus. Este resultado nos permite comprobar que los valores de intensidad registrados en la cámara CCD son debidos al fenómeno de refracción de la luz en la frontera del cono de luz difusa proveniente de un medio turbio.



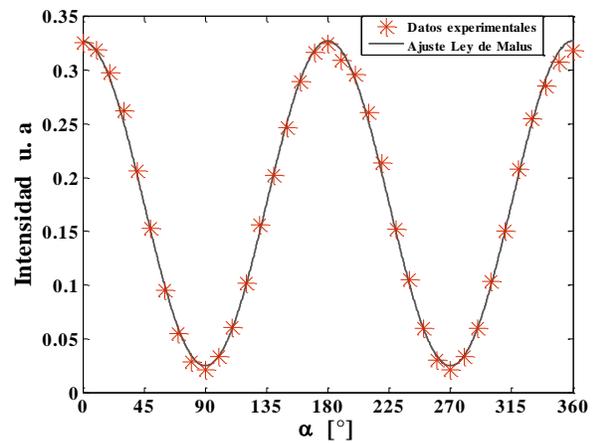
a)



b)



c)



d)

Figura 10. Respuesta de la cámara CCD a variaciones de intensidad. a) Columna de la izquierda de las imágenes, b) y c) columnas intermedias y d) columna derecha.

### 3.2 Estabilidad de las suspensiones coloidales

La siguiente tarea fue determinar que las suspensiones coloidales no sufrieran sedimentación durante la realización de cada medición del perfil angular proveniente de la luz que emerge de ellas. Para esta prueba, se vertió el coloide en el contenedor del arreglo experimental de la figura 2 y se procedió a obtener una fotografía cada cinco minutos durante un lapso de 20 minutos. De estas imágenes se obtuvieron los perfiles de intensidad correspondientes.

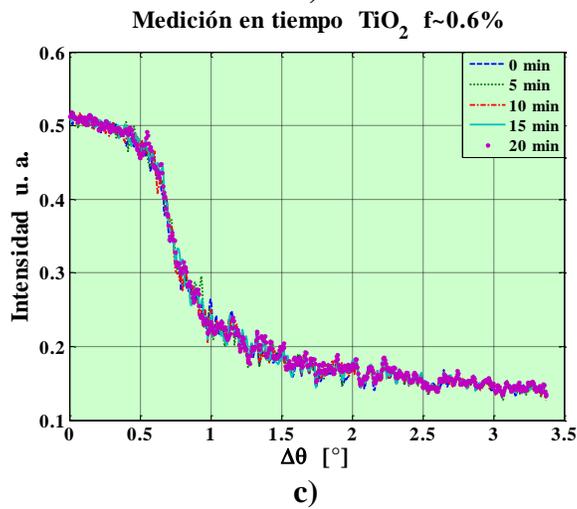
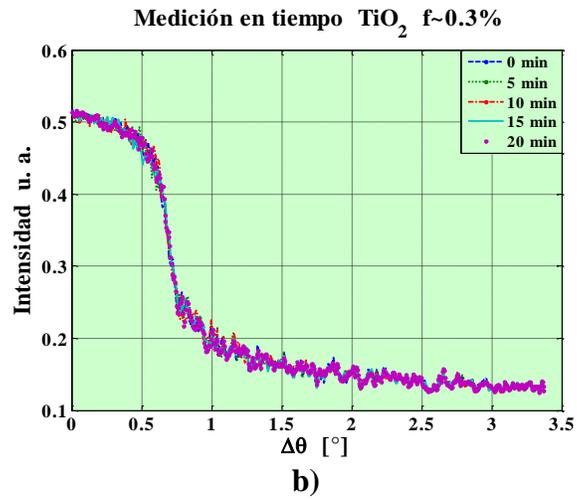
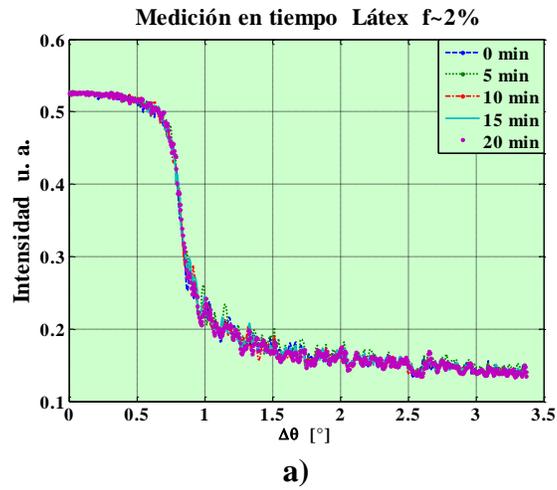


Figura 11. Perfiles angulares de intensidad para coloides de partículas de a) látex a una  $f \sim 2\%$ , b)  $\text{TiO}_2$  a una  $f \sim 0.3\%$  y c)  $\text{TiO}_2$  a una  $f \sim 0.6\%$

---

---

El comportamiento de los coloides es bastante estable como se aprecia en la figura 11. En un lapso de 20 minutos los perfiles angulares de intensidad no se vieron modificados asegurándonos que durante las mediciones no se sedimentaran las muestras, cabe destacar que cada prueba en el experimento principal (colocación de la muestra y obtención de un fotografía) no llevaba más de 5 minutos una vez ajustado correctamente. Los coloides de  $\text{TiO}_2$  a concentraciones más altas ( $f \sim 1.7\%$ ,  $2.1\%$  y  $2.5\%$ ) sufrían una sedimentación después de muchas horas. Así, en estos valores de concentración las mediciones se deben de hacer tomando en cuenta el tiempo de sedimentación en la toma de imágenes.

### 3.3 Medición del perfil de intensidad para la frontera del cono de luz difusa

La primera aproximación a observar el comportamiento del borde del cono de luz difusa (el cual se puede apreciar en la figura 12) fue al obtener una fotografía de dicho borde mediante la cámara CCD para cada una de las concentraciones preparadas de partículas de Látex y de  $\text{TiO}_2$ . La figura 13 muestra una secuencia de las fotografías obtenidas para diferentes concentraciones de Látex en agua tridestilada y su perfil angular de intensidad correspondiente. En cada una de las fotografías se puede apreciar de manera visual el corrimiento de la frontera del cono al incrementar la concentración, resultado bastante interesante pues nos indica que la luz difusa viaja en un medio en el cual se deben tomar en cuenta las propiedades ópticas de las partículas inmersas en la matriz y no solo de la matriz (en este caso agua). En estos experimentos se conservó fija la posición de los elementos en el arreglo experimental y solo fueron cambiando las muestras del coloide.

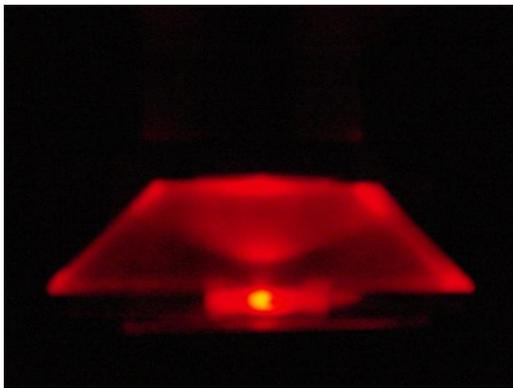


Figura 12. Cono de luz observado al interior del prisma durante el experimento de refracción difusa

En la figura 14 se presentan las fotografías registradas con la CCD y sus respectivos perfiles de intensidad cuando la concentración de partículas de  $\text{TiO}_2$  se va modificando. De la observación de dichas fotografías se puede percibir que conforme la concentración se incrementa la definición del borde del cono se va desvaneciendo, difuminándose completamente a concentraciones altas.

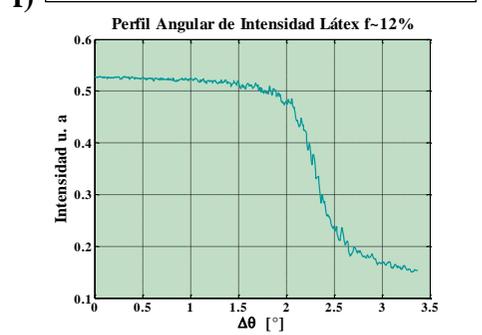
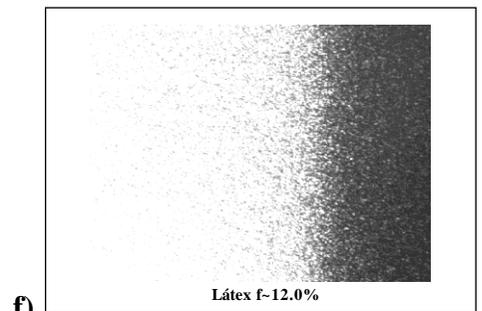
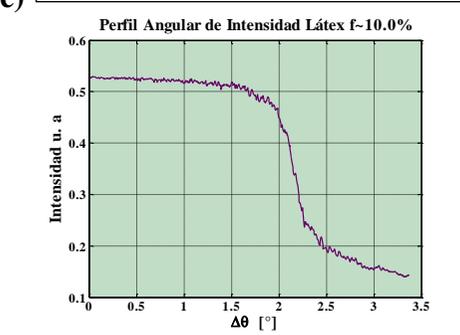
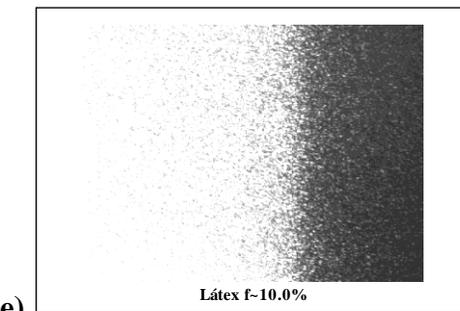
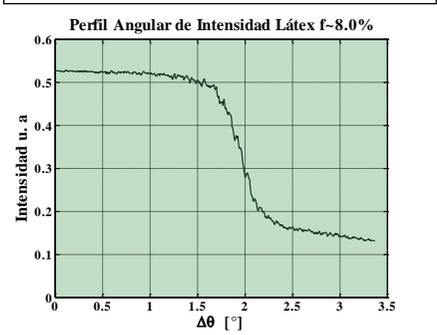
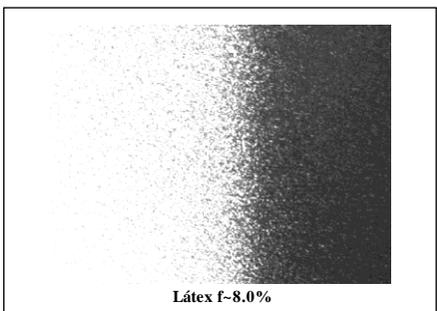
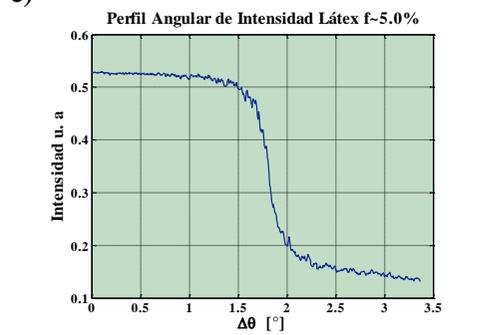
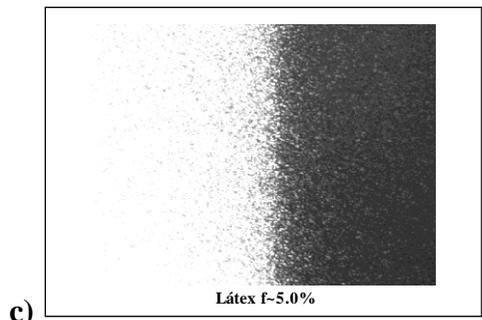
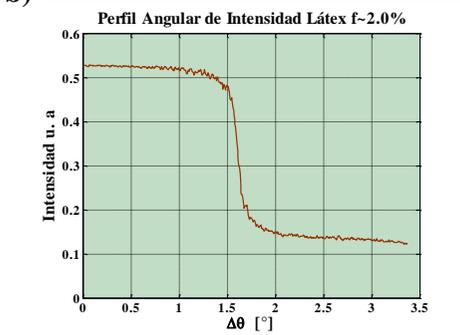
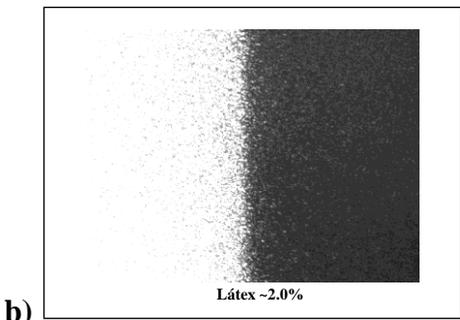
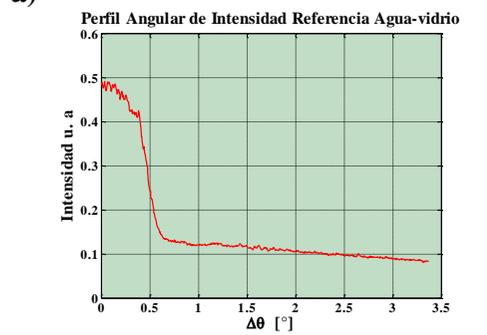
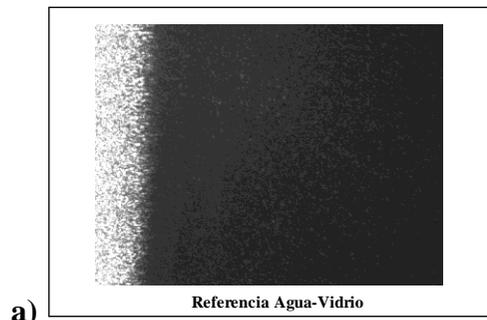


Figura 13. Imágenes con sus correspondientes perfiles de intensidad para a) agua tridestilada y para diferentes concentraciones de partículas de látex: b)  $f \sim 2\%$ , c)  $f \sim 5\%$ , d)  $f \sim 8\%$ , e)  $f \sim 10\%$  y f)  $f \sim 12\%$

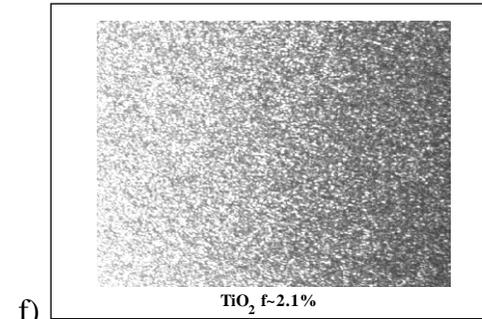
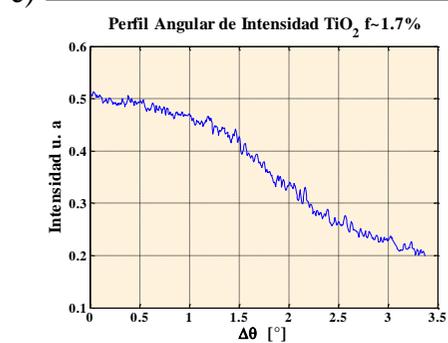
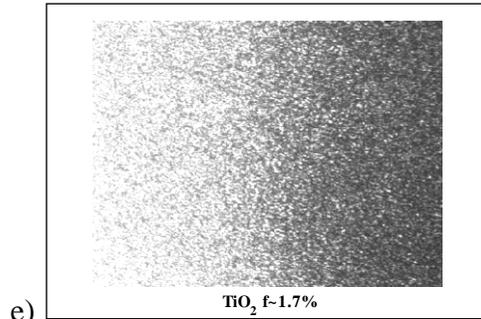
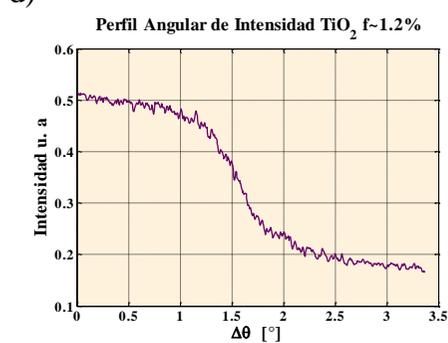
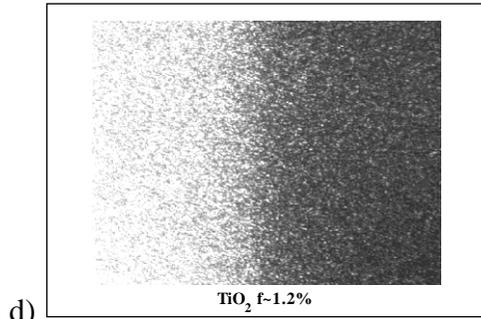
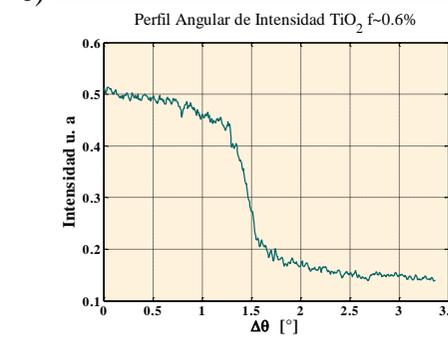
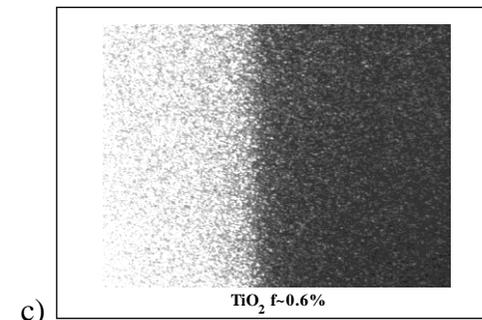
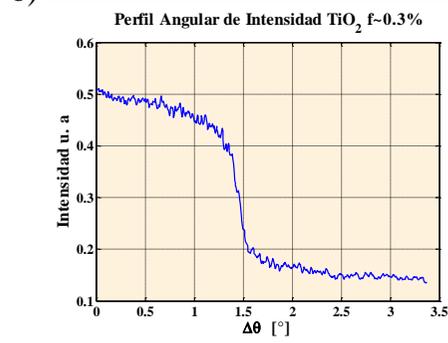
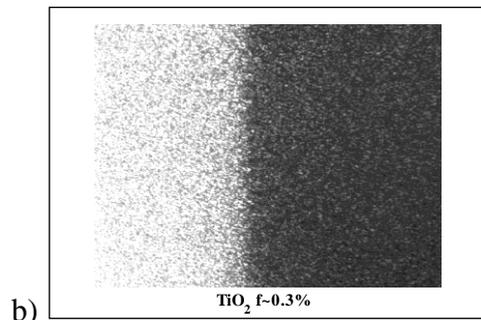
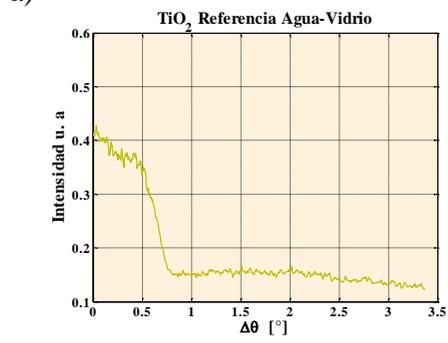
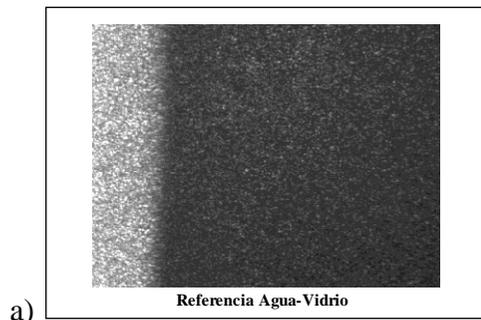


Figura 14. Imágenes con sus correspondientes perfiles de intensidad para a) agua tridestilada y para diferentes concentraciones de partículas de TiO<sub>2</sub>: b)  $f \sim 0.3\%$ , c)  $f \sim 0.6\%$ , d)  $f \sim 1.2\%$ , e)  $f \sim 1.7\%$ , f)  $f \sim 2.1\%$  y f)  $f \sim 2.5\%$

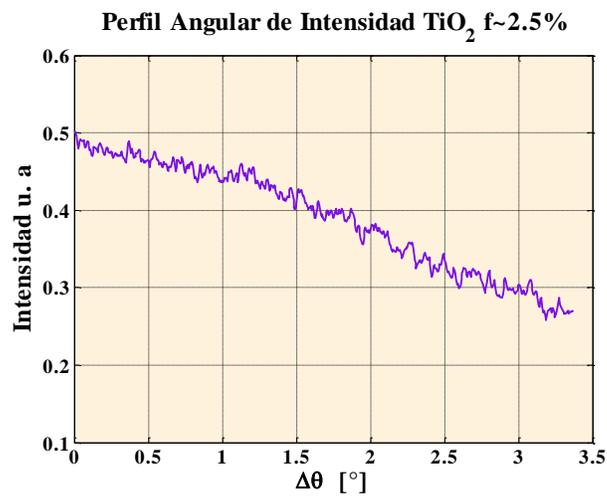
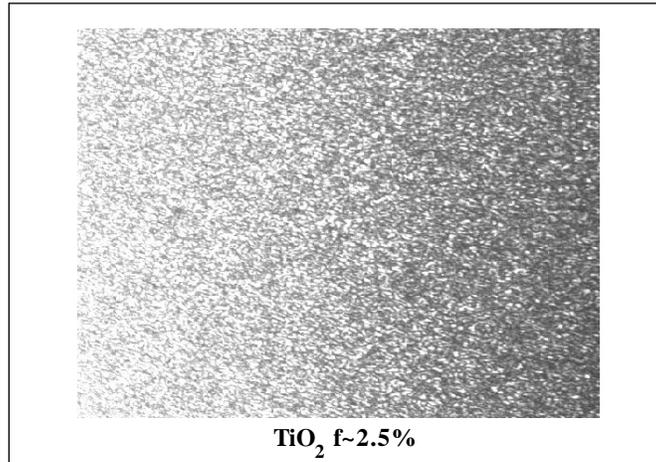


Figura 14 (continuación). Imágenes con sus correspondientes perfiles de intensidad para a) agua tridestilada y para diferentes concentraciones de partículas de TiO<sub>2</sub>: b)  $f \sim 0.3\%$ , c)  $f \sim 0.6\%$ , d)  $f \sim 1.2\%$ , e)  $f \sim 1.7\%$ , f)  $f \sim 2.1\%$  y f)  $f \sim 2.5\%$

---

---

En la figura 15 se comparan los perfiles de intensidad obtenidos de la cámara CCD alrededor del borde del cono de luz difusa reflejados al interior del prisma para diferentes concentraciones en volumen de partículas de látex y de  $\text{TiO}_2$  inmersas en una matriz de agua tridestilada. Los perfiles mostrados ya toman en cuenta las correcciones en la escala angular indicadas en la sección 2.3 del capítulo anterior. Adicionalmente, a partir de la referencia del agua y mediante un ajuste a dicha curva se estableció el valor del ángulo crítico para la interfase agua-vidrio tomando el punto de inflexión de la curva de dicho ajuste, todo esto con ayuda del software MATLAB.

Las curvas a la izquierda en las gráficas de las figuras 15.a) y 15.b) corresponden a los perfiles de intensidad que fueron obtenidas con agua pura por medio de una pantalla difusora de luz en el fondo del contenedor de la muestra. Se puede ver claramente una transición bien definida en el perfil angular de intensidad. Conforme la concentración de partículas se incrementa, la zona de transición se va suavizando. En el caso de la suspensión de partículas de látex, en la cual el índice de refracción es cercano al del agua, hay un desplazamiento hacia valores mayores de  $\theta$  en el perfil angular de intensidad. En el caso de las partículas de  $\text{TiO}_2$  las cuales tiene un índice de refracción mucho mayor que el del agua, al incrementar la concentración de partículas, la pendiente máxima en el perfil de intensidad se reduce considerablemente.

Las leyes de refracción entre medios homogéneos transparentes de ondas viajantes predicen que el perfil de intensidad  $I(\theta)$ , debería ser cero para ángulos mayores al ángulo crítico. Los perfiles mostrados en la figura 15 muestran que éste no es el caso para una suspensión turbia de partículas. Por lo tanto, se puede concluir que la componente difusa de la luz no tiene una refracción que se pueda interpretar correctamente considerando el valor del índice de refracción de la matriz.

Es importante mencionar que se repitieron algunos de los experimentos cambiando el ángulo de incidencia del haz láser en la interfaz prisma-muestra para iluminar el contenedor. Se observó que la posición y la forma de los perfiles obtenidos fueron siempre los mismos.

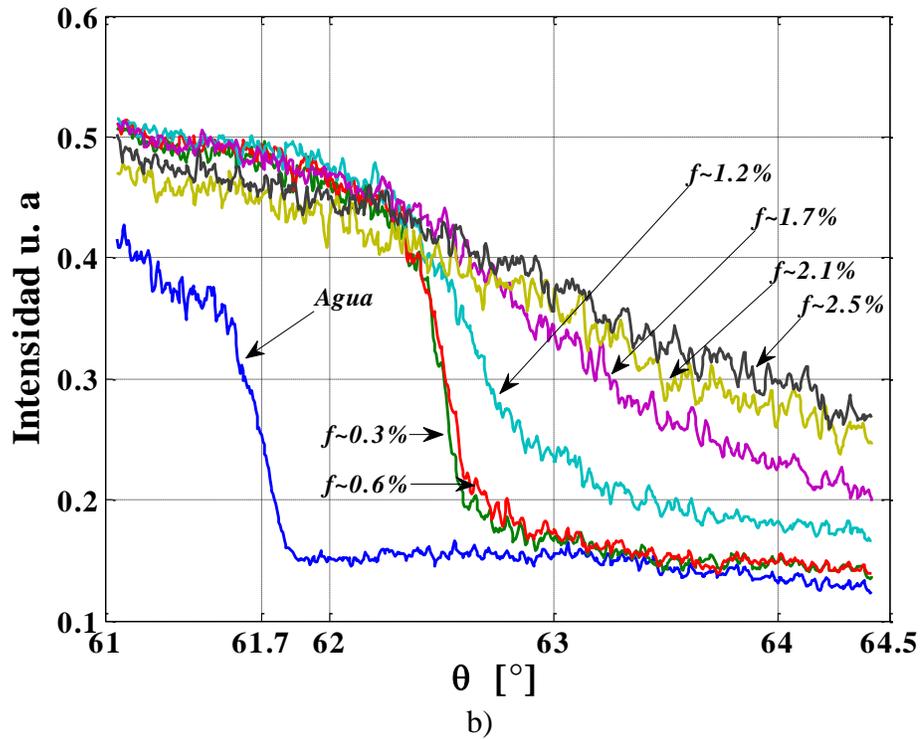
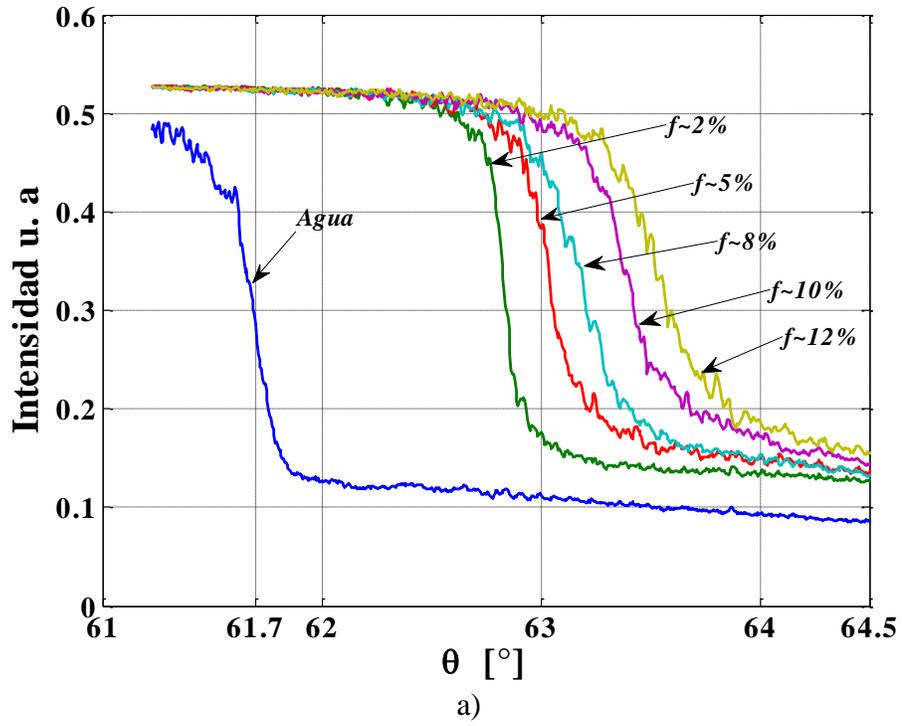


Figura 15. Perfiles angulares de intensidad en el plano focal de la lente de una porción de la frontera del cono de luz difusa. a) Látex y b)  $\text{TiO}_2$

---

---

Al observar los perfiles de intensidad se puede notar que cuando el índice de refracción de las partículas es cercano al de la matriz pareciera que el borde del cono de luz difusa únicamente se va desplazando, indicando que es muy posible que la parte real del índice de refracción se vaya incrementando.

Para indagar si la elección del punto de inflexión en el perfil angular de intensidad da información sobre la localización del ángulo crítico en el caso de la interfase agua-prisma, se realizó un ajuste polinomial a las curvas de látex y mediante ellas obtener el punto de inflexión. Estos resultados se muestran en la figura 16.

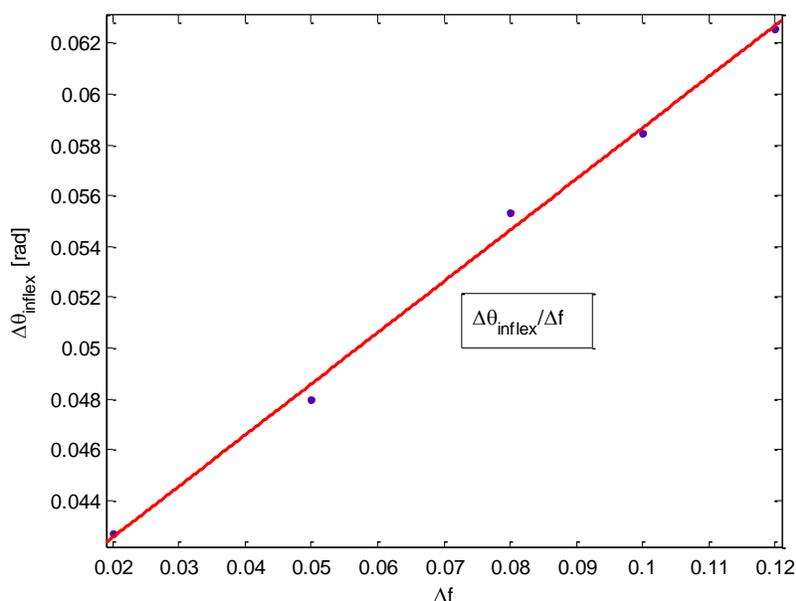


Figura 16. Asignación de los puntos de inflexión para las curvas experimentales de látex como función de la concentración.

La gráfica anterior permite mediante un ajuste de datos observar que el incremento del punto de inflexión es proporcional al incremento de la concentración de partículas lo cual es compatible con lo indicado por Van de Hulst [13] donde establece que en el caso de límite diluido la parte real del índice de refracción efectivo es proporcional al cambio en la concentración llegando a la conclusión de que la toma del punto de inflexión para cuantificar la parte real del índice de refracción puede ser adecuada.

### 3.4 Efecto de la polarización en el cono de luz difusa

Para analizar el efecto de incidir luz polarizada y observar que pasa con ésta en un medio turbio se montó el arreglo experimental descrito en la sección 2.5 y la figura 8. Se utilizó un polarizador Polaroid para polarizar la luz que incide sobre la muestra. Las siguientes

gráficas de la figura 17 y figura 18 muestran los perfiles angulares de intensidad obtenidos cuando se incide luz polarizada al coloide turbio.

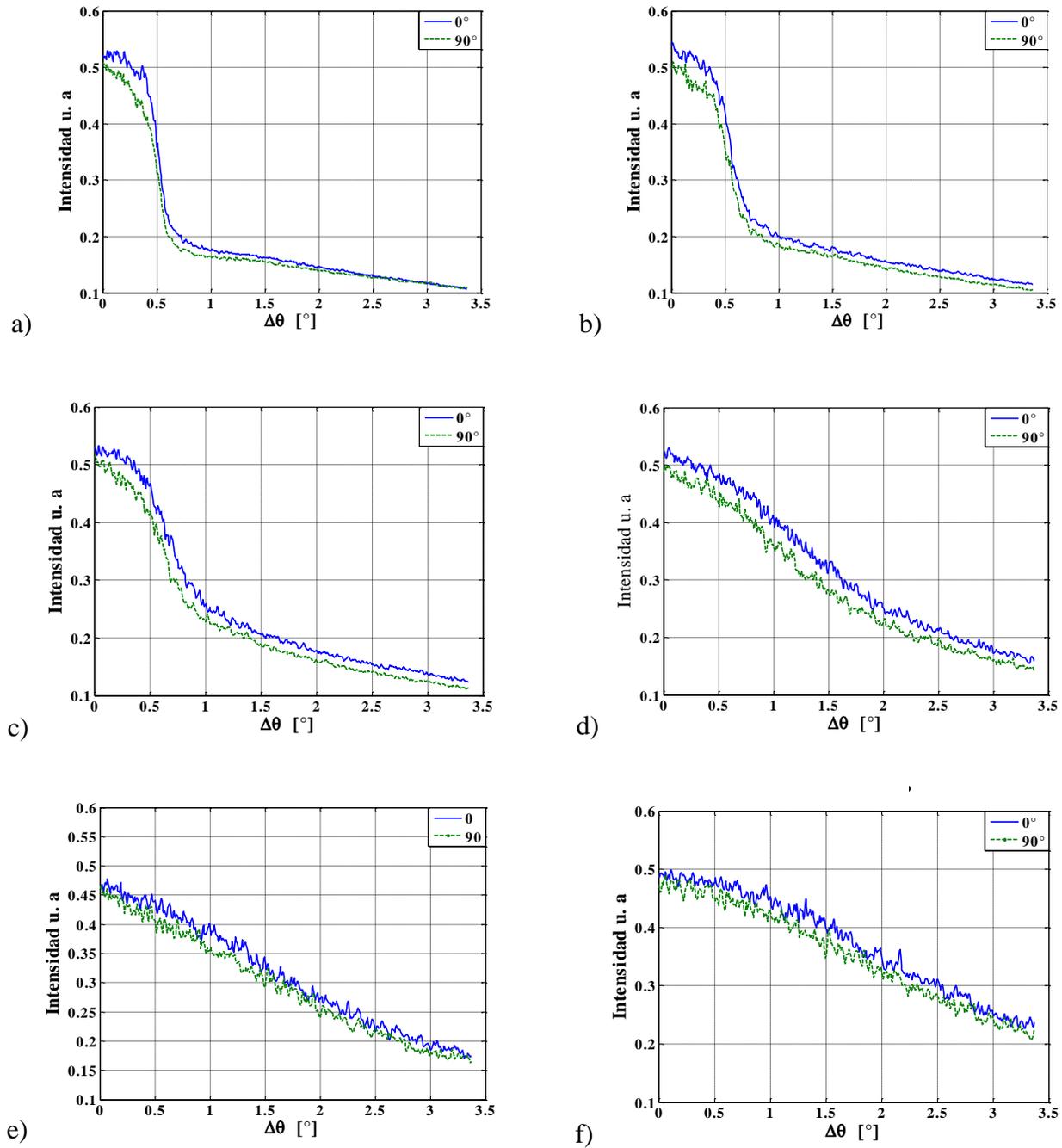


Figura 17. Perfiles angulares de intensidad para diferentes concentraciones de partículas de  $\text{TiO}_2$  cuando la luz incidente esta polarizada. a)  $f \sim 0.3\%$ , b)  $f \sim 0.6\%$ , c)  $f \sim 1.2\%$ , d)  $f \sim 1.7\%$ , e)  $f \sim 2.1\%$  y f)  $f \sim 2.5\%$

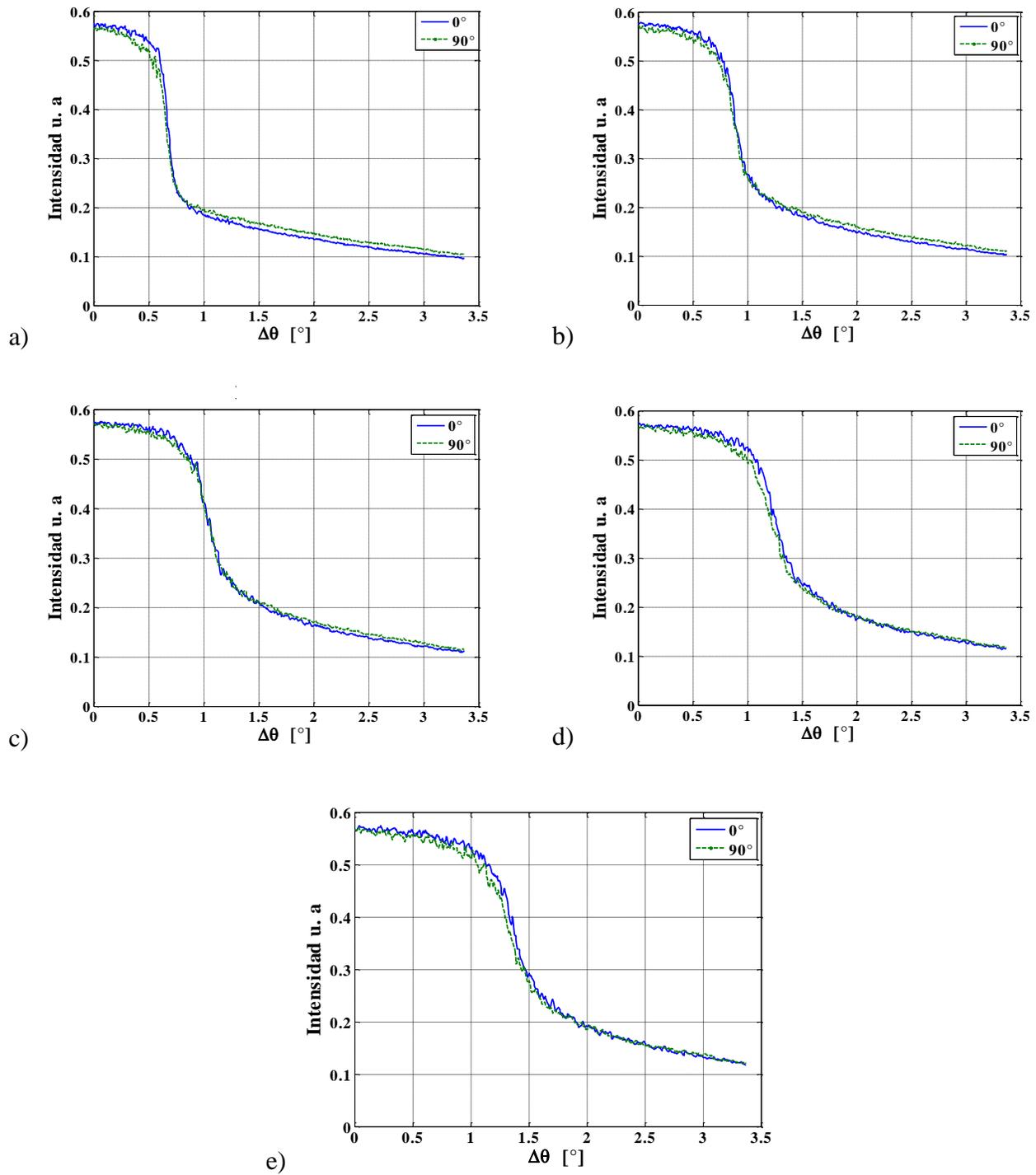


Figura 18. Perfiles angulares de intensidad para diferentes concentraciones de partículas de látex cuando la luz incidente esta polarizada: a)  $f \sim 2\%$ , b)  $f \sim 5\%$ , c)  $f \sim 8\%$ , d)  $f \sim 10\%$  y e)  $f \sim 12\%$

---

---

En las figuras 17 y 18 se aprecia que al incidir luz polarizada se tendrá a la salida del coloide una dependencia de dicha polarización. En el caso de las partículas de  $\text{TiO}_2$ , donde el índice de refracción de las partículas es grande con respecto al de la matriz en las que se encuentran dispersas, se observa un corrimiento angular menor a  $0.5^\circ$  de la polarización P (correspondiente a las mediciones a  $90^\circ$ ) con respecto a la polarización S (correspondiente a las mediciones a  $0^\circ$ ). En el caso de los coloides de partículas de látex, donde el índice de refracción es cercano al de la matriz, el desplazamiento angular de la luz difusa originado por el estado de polarización de la fuente que la excita es menor que las de  $\text{TiO}_2$ .

Con el objetivo de ver cómo es el estado de polarización de la luz difusa proveniente del coloide se montó el arreglo experimental de la figura 9 donde se colocó un polarizador antes de la cámara CCD con el objetivo de comprender mediante la observación de los perfiles angulares de intensidad si la luz proveniente del medio turbio se encuentra polarizada y de qué manera. Para dichas mediciones se posicionó un polarizador Polaroid del cual se tenía identificado su eje de transmisión y este se colocó en una primera posición vertical a nuestro sentido de orientación ( $0^\circ$ ); posteriormente se rotó en el sentido de las manecillas del reloj, posiciones para las cuales se muestran los perfiles angulares de las figuras 19 y 20 para diferentes concentraciones de  $\text{TiO}_2$  y látex, respectivamente.

En las gráficas correspondientes a las diferentes concentraciones de partículas de  $\text{TiO}_2$  y látex mostradas en las figuras 19 y 20 se aprecia un ligero desplazamiento angular dependiendo de la posición del polarizador. En el caso de las partículas de  $\text{TiO}_2$  se observa que para concentraciones menores a  $f \sim 1.7\%$  la zona correspondiente a los primeros  $0.5^\circ$  de la escala angular la intensidad correspondiente a cuando el polarizador se encuentra a  $90^\circ$  es menor que cuando éste se encuentra a  $0^\circ$ . Cuando la concentración es mayor los perfiles angulares difieren a lo largo de toda la escala medida en el desplazamiento angular. Para las partículas de látex la intensidad medida para ambas posiciones del polarizador para intensidades mayores a 0.1 son semejantes. Cuando la intensidad decae por debajo del valor de 0.1, la intensidad del perfil correspondiente a la posición del polarizador a  $90^\circ$  es mayor con respecto a cuando el polarizador se encuentra en la posición de  $0^\circ$ . Ambos resultados, los de látex y  $\text{TiO}_2$ , indican que es muy posible que la luz difusa que se transmite de un medio turbio a un medio homogéneo se tenga que describir tomando en cuenta el efecto de polarización

Los experimentos desarrollados para en un primer inicio tratar de observar como es la polarización de la luz difusa permiten establecer que se debe de estudiar a fondo su comportamiento, para ello sería necesario desarrollar técnicas tales como elipsometría para su medición, idea que nació de una plática con el investigador Dr. Eugenio Méndez del CICESE en una visita al CCADET, idea que esta fuera del desarrollo de este trabajo de tesis pero que sin duda será necesario explorar en trabajos posteriores sobre el tema desarrollado aquí.

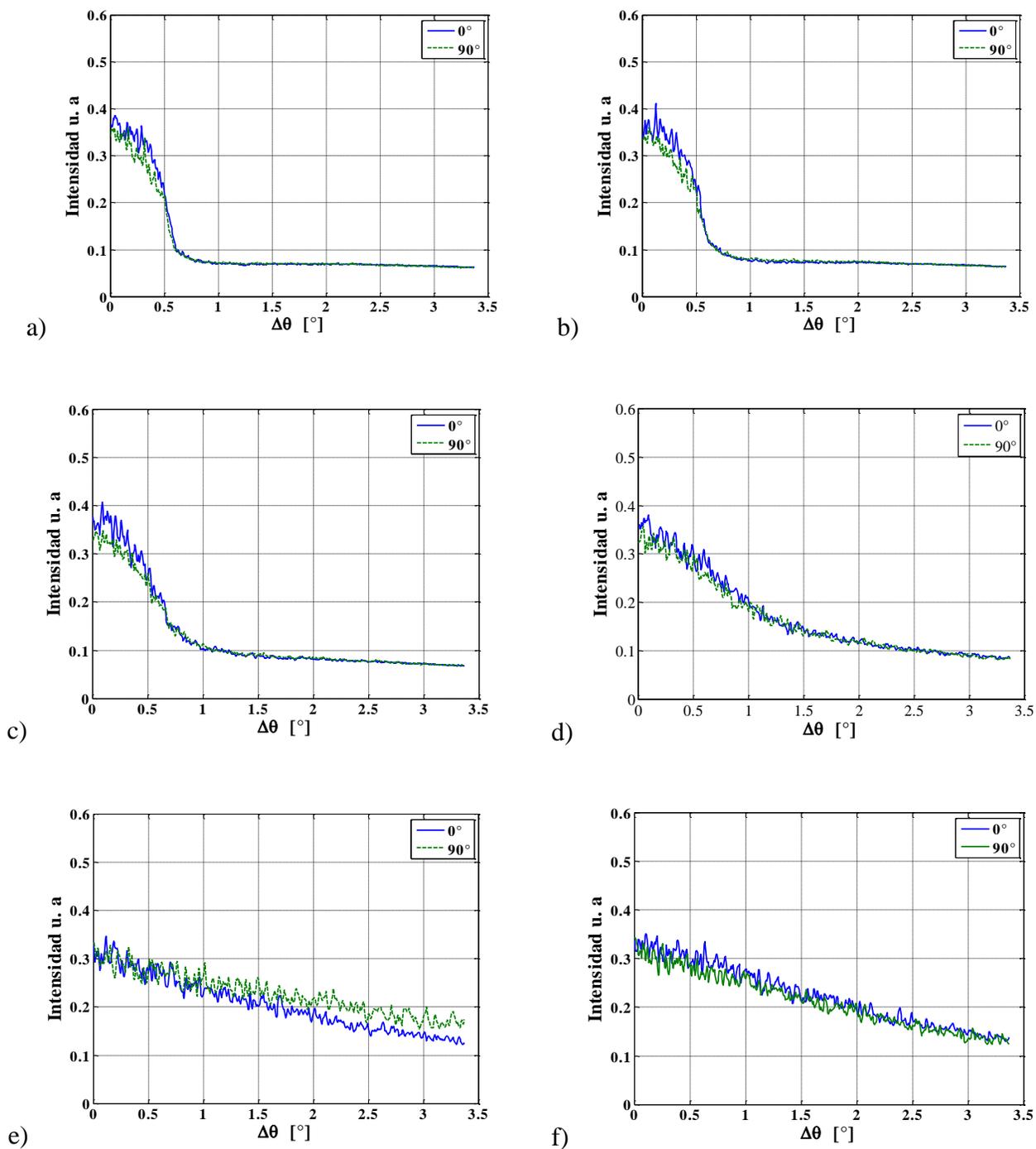


Figura 19. Perfiles angulares de intensidad para diferentes concentraciones de partículas de  $\text{TiO}_2$  para observar el estado de polarización de la luz difusa: a)  $f \sim 0.3\%$ , b)  $f \sim 0.6\%$ , c)  $f \sim 1.2\%$ , d)  $f \sim 1.7\%$ , e)  $f \sim 2.1\%$  y f)  $f \sim 2.5\%$ .

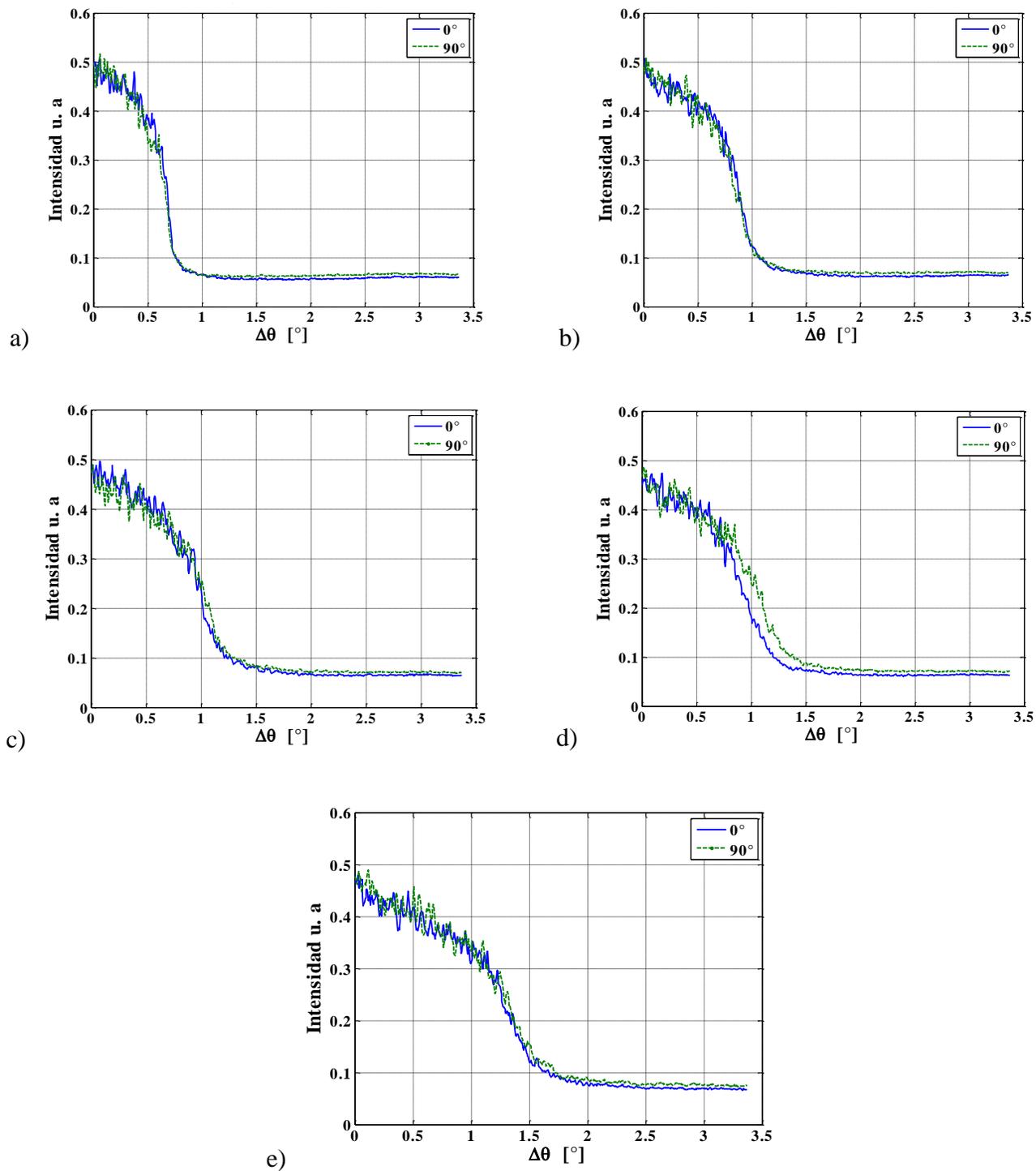


Figura 20. Perfiles angulares de intensidad para diferentes concentraciones de partículas de látex para observar el estado de polarización de la luz difusa: a)  $f \sim 2\%$ , b)  $f \sim 5\%$ , c)  $f \sim 8\%$ , d)  $f \sim 10\%$  y e)  $f \sim 12\%$ .

---

---

### 3.5 Conclusiones de los resultados experimentales

En resumen, los experimentos sobre la refracción de la luz difusa aquí realizados muestran resultados interesantes para tratar de entender su comportamiento. Los perfiles angulares de intensidad medidos cuando el volumen de partículas en el coloide cambia demuestran que el comportamiento de la luz difusa depende de las propiedades ópticas de éstas y no únicamente de la matriz en la que se encuentran inmersas. En diversos artículos se ha establecido que la onda coherente viajando en un medio coloidal tiene un vector de onda efectivo y uno puede definir un índice de refracción efectivo, tal índice de refracción es en general complejo debido al esparcimiento y absorción de las partículas. En base a este argumento, los experimentos mostrados dan clara evidencia de que en las propiedades de refracción y propagación de la luz difusa se debe considerar un medio efectivo, pudiéndole asignar un índice de refracción efectivo.

Si bien es verdad que cuando se observa el comportamiento de los perfiles de intensidad para las partículas de látex (ya que aquí es claro) y se percibe que los cambios en cada uno de ellos son proporcionales al cambio en la concentración, es de esperarse que, de una concentración mayor a menor, el perfil de intensidad del agua pura no se encontrase tan alejada del perfil para la concentración de látex a 2%. Sin embargo, dado que las partículas de látex se originan en una reacción química en agua y de ésta se obtiene una concentración madre, a partir de la cual se obtuvieron las concentraciones con las cuales se trabajan aquí, es probable que no sea el mismo tipo de agua, ya que las soluciones para los experimentos se obtuvieron con agua tridestilada la cual no necesariamente es el mismo tipo de agua con la cual se obtuvo la solución madre. De esta forma puede haber alguna contribución a los perfiles medidos, y es el mismo caso para las partículas de  $\text{TiO}_2$ , las cuales se obtuvieron de la misma manera. Pudiera entonces parecer que lo que se mide en las partículas de látex fuera solo el cambio en la concentración del tipo de agua en la que se encuentran inmersas las partículas. Sin embargo, se observa que dichos cambios se encuentran a ángulos mayores al ángulo crítico en un rango de alrededor  $3^\circ$ , dando como consecuencia que el efecto sea debido al incremento de partículas. Además, en los perfiles de intensidad de  $\text{TiO}_2$  la modificación en el perfil es claro y este no puede ser explicado por diferentes índices de refracción al mezclar el agua en la que se encontraban preparadas las partículas y el agua utilizada para preparar las diferentes concentraciones aquí utilizadas.

En general se pueden distinguir distintos tipos de errores, entre los que se encuentran los errores *graves* que son fáciles de identificar ya que se producen por equivocación o descuido durante un montaje de medición experimental. Ejemplo de estos errores es la contaminación de muestras coloidales y que en los experimentos desarrollados se cuidó de no cometerlo. También se tienen los errores *sistemáticos* que provienen de los instrumentos utilizados tales como el desgaste o defectos de ellos y los efectos del medio ambiente, que en caso de medición de un índice de refracción es crucial el cambio en la temperatura. Y finalmente los errores *al azar* que son debidos a causas que no se pueden establecer directamente en el sistema. En cada uno de los montajes experimentales implementados en

---

---

esta tesis se buscó reducirlos al máximo mediante el ajuste y alineación adecuada de los elementos ópticos utilizados. En todas las cámaras CCD el ruido electrónico aumenta fuertemente con la temperatura. Los experimentos se realizaron a una temperatura estable en el laboratorio. Las imágenes obtenidas por la CCD se sometieron a un proceso de corrección que consistió en restar de la imagen obtenida una imagen tomada en completa oscuridad la cual contiene la señal producida espontáneamente por la excitación térmica del sensor.

Es cierto que el fenómeno de esparcimiento de la luz está completamente caracterizado cuando las propiedades de polarización, fase e intensidad son tomadas en cuenta pero, es importante mencionar que la más importante de ellas es la intensidad. A partir de los resultados obtenidos de la dependencia de los perfiles angulares de intensidad al modificar la concentración de partículas, se desarrolló un primer modelo matemático, dicho modelo se presenta en el siguiente capítulo.



---

---

## Capítulo IV. Modelo matemático para la refracción de la luz difusa cerca del borde del cono de luz.

Uno de los objetivos de este trabajo de tesis es intentar dar una primera explicación al fenómeno observado con la componente difusa de la luz en el borde del cono observado en el experimento de la figura 2, es por ello que en este capítulo se intenta establecer un modelo matemático que permita obtener información útil del fenómeno bajo estudio, obteniéndose conclusiones importantes.

Para el análisis del comportamiento del borde del cono de luz difusa cuando la concentración del volumen de partículas se incrementa se observa un corrimiento en la frontera del cono que en el caso de partículas de látex es claro dicho fenómeno; cuando partículas con mayor esparcimiento se agregan como lo son las partículas de  $\text{TiO}_2$  se aprecia que el borde del cono de luz difusa se va difuminando. Ambos fenómenos son deseables de describir a partir del conocimiento que se tiene sobre el comportamiento del esparcimiento de la luz en una partícula. Para ello, aquí se desarrolla un modelo el cual se auxilia de la transformada de Fourier, una herramienta matemática poderosa útil para analizar campos electromagnéticos propagantes [37] ya que a partir del uso de sus propiedades es posible describir el comportamiento de la luz esparcida por una partícula. El objetivo en el desarrollo siguiente es establecer un modelo matemático sencillo y bajo consideraciones simples que sea capaz de describir lo que ocurre con la transmisión de la luz difusa en un medio coloidal turbio.

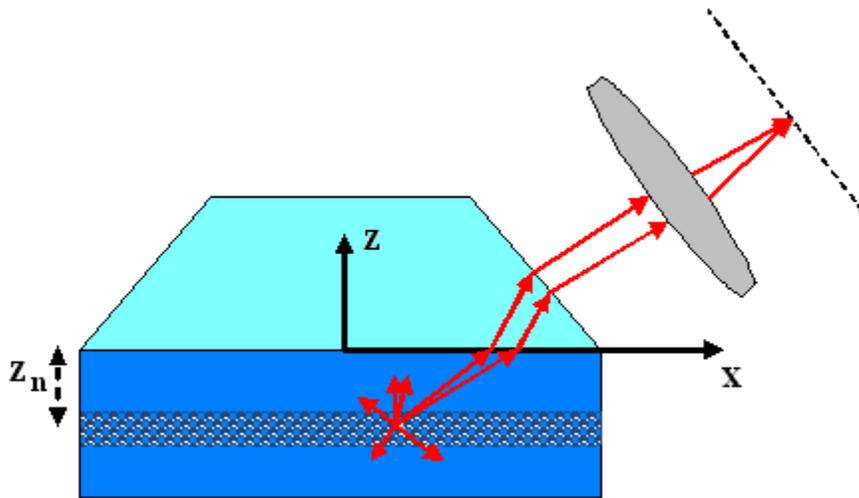


Figura 21. Campo electromagnético esparcido por una partícula, se propaga al detector y se calcula su intensidad.

Para poder determinar el índice de refracción de un sistema coloidal a través de un experimento, primero es necesario describir la transmisión de la luz en un sistema inhomogéneo, esa es la idea con la que se obtiene un primer modelo. El desarrollo del

modelo se propone de la siguiente manera: se establece el campo esparcido por una partícula, posteriormente se propaga el campo electromagnético radiado por esta partícula hasta el detector y se calcula la intensidad correspondiente, el siguiente paso es sumar incoherentemente la intensidad debida a cada partícula coloidal para así obtener una ecuación que describa el comportamiento del cono de luz difusa en el borde de dicho cono.

#### 4.1 Modelo matemático

Consideremos una partícula la cual emite una onda electromagnética plana.

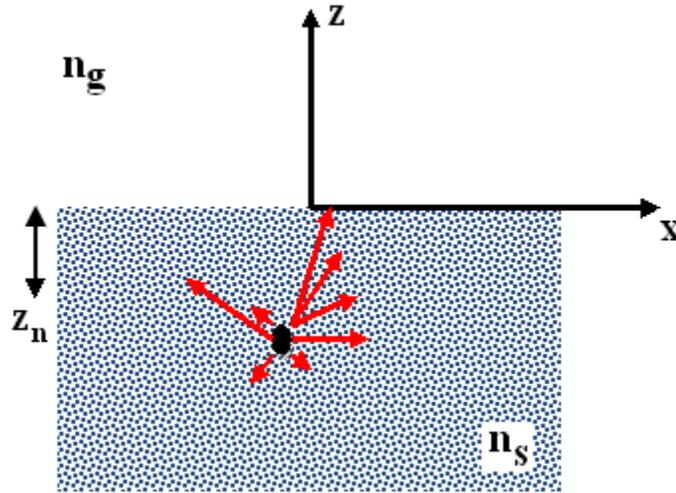


Figura 22. Esquema de radiación de una partícula.

El campo esparcido por una partícula localizada en  $\vec{r}_n$  se puede escribir en puntos del espacio  $\vec{r}$  con  $z > z_n$  como:

$$\vec{E}_n^s(\vec{r}; \vec{r}_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{f}(k_x, k_y; \vec{r}_n) \exp[ik_x x + ik_y y + ik_{zs}(z - z_n)] dk_{xs} dk_{ys}, \quad (1)$$

donde se tiene  $k_{zs} = \sqrt{(\omega^2/c^2)n_s^2 - k_x^2 - k_y^2}$ . La ecuación (1) establece que un campo eléctrico arbitrario en el semi-espacio  $z > z_n$  puede ser representado como un espectro de ondas planas con un vector de amplitud  $\vec{f}$ , donde (estas relaciones se obtienen en el apéndice A)

$$\vec{f} = \vec{f}_{\perp} + f_z \hat{a}_z, \quad (2)$$

$$\vec{f}_\perp(k_x, k_y; \vec{r}_n) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}_\perp(x, y, z_n + \delta) \exp(-ik_x x - ik_y y) dx dy, \quad (3)$$

$$\vec{E}_\perp = E_x \hat{a}_x + E_y \hat{a}_y, \quad (4)$$

$$f_z = \frac{-k_x f_x - k_y f_y}{\sqrt{(\omega^2/c^2)n_2^2 - k_x^2 - k_y^2}}, \quad (5)$$

en donde  $\delta$  es el radio de la partícula.

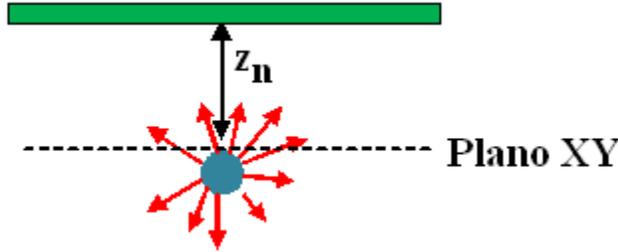


Figura 23. Campo de radiación de una partícula para  $z > z_n$

Supongamos que el medio en donde se encuentran las partículas inmersas en la matriz tiene un índice de refracción efectivo complejo  $n_s$ . Entonces  $n_s = n_s' + in_s''$  y tenemos que  $k_{zs} = k_{zs}' + ik_{zs}''$ . Sustituyendo los valores anteriores en la ecuación (1), ésta se puede escribir como,

$$\vec{E}_n^S(\vec{r}; \vec{r}_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{f}(k_x, k_y; \vec{r}_n) \exp[ik_x x + ik_y y + ik_{zs}'(z - z_n)] \exp[-k_{zs}''(z - z_n)] dk_x dk_y. \quad (6)$$

Tomamos el campo eléctrico esparcido por una partícula y lo propagamos justo antes de la superficie. Para  $z = 0^-$  se tiene,

$$\vec{E}_n^S(x, y, 0^-; \vec{r}_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{f}(k_x, k_y; \vec{r}_n) \exp[ik_x x + ik_y y - ik_{zs}' z_n] \exp[k_{zs}'' z_n] dk_x dk_y. \quad (7)$$

Para  $z = 0^+$ , es decir justo del otro lado de la superficie, tenemos,

$$\vec{E}_n^S(x, y, 0^+; \vec{r}_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{t}(k_x, k_y) \cdot \vec{f}(k_x, k_y; \vec{r}_n) \exp[ik_x x + ik_y y - ik_{zs}' z_n] \exp[k_{zs}'' z_n] dk_x dk_y, \quad (8)$$

donde

$$\vec{t}(k_x, k_y) \cdot \vec{f}(k_x, k_y; \vec{r}_n) = t^{TE} f_{TE}(k_x, k_y; \vec{r}_n) \hat{S}_{TE} + t^{TM} f_{TM}(k_x, k_y; \vec{r}_n) \hat{S}_{TM}, \quad (9)$$

$\hat{s}_{TE} = (\vec{k} \times \hat{a}_z) / |\vec{k} \times \hat{a}_z|$  y  $\hat{s}_{TM} = (\vec{k} \times \hat{s}_{TE}) / |\vec{k} \times \hat{s}_{TE}|$  son los vectores unitarios de polarización TE y TM, respectivamente. Si las partículas son muy pequeñas podemos suponer que los coeficientes de transmisión están dados por las relaciones de Fresnel:

$$t^{TE} = \frac{2\mu_g k_{zs}}{\mu_g k_{zs} + \mu_s k_{zg}}, \quad (10.a)$$

$$t_E^{TM} = \sqrt{\frac{\mu_g \epsilon_s}{\mu_s \epsilon_g}} \frac{2\epsilon_g k_{zs}}{\epsilon_g k_{zs} + \epsilon_s k_{zg}}, \quad (10.b)$$

Donde las ecuaciones (10.a) y (10.b) son los coeficientes de transmisión de Fresnel para las polarizaciones TE y TM respectivamente y,  $k_{zg} = \sqrt{k_g^2 - k_x^2 - k_y^2}$  es la componente z del vector de onda en el medio externo (vidrio),  $n_g$  y  $\mu_g$  son la permitividad eléctrica y permeabilidad magnética del prisma. De esta manera, para puntos en el espacio fuera del coloide, con  $z > 0$  se tiene

$$\vec{E}_n^S(\vec{r}; \vec{r}_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} t(k_x, k_y) \cdot \vec{f}(k_x, k_y; \vec{r}_n) \exp[ik_x x + ik_y y + ik_{zg} z] \exp[(k_{zs}'' - ik_{zs}') z_n] dk_x dk_y. \quad (11)$$

Ahora, en el campo lejano  $(x, y, z) \rightarrow \infty$  se puede realizar la integral por el método de fase estacionaria [37] [en el apéndice B se muestra la obtención del método],

$$\vec{E}_n^S(r, \theta, \phi; \vec{r}_n) = -\frac{4\pi^2 i k_g \cos \theta}{2\pi r} \vec{T}(k_1, k_2; \vec{r}_n) \exp[ik_g r], \quad (12)$$

donde,

$$k_g = (\omega/c)n_g,$$

$$\vec{T}(k_1, k_2; \vec{r}_n) = \vec{t}(k_1, k_2) \cdot \vec{f}(k_1, k_2; \vec{r}_n) \exp[(k_{zs}'' - ik_{zs}') z_n], \quad (13)$$

$k_1$  y  $k_2$  son las coordenadas cartesianas de la dirección de observación por el vector de onda fuera del prisma  $k_1 = n_g k_0 \sin \theta \cos \phi$  y  $k_2 = n_g k_0 \sin \theta \sin \phi$ , y donde ahora,

$$k'_{zs} + ik''_{zs} = \sqrt{(\omega^2/c^2)n_s^2 - k_1^2 - k_2^2} . \quad (14)$$

La intensidad es la magnitud al cuadrado del campo esparcido, por lo que se obtiene,

$$I_n^S(r, \theta, \phi; \vec{r}_n) = \left| -\frac{4\pi^2 i k_g \cos \theta}{2\pi r} \vec{T}(k_1, k_2; \vec{r}_n) \exp[ik_g r] \right|^2 .$$

Desarrollando se obtiene la siguiente expresión,

$$I_n^S(r, \theta, \phi; \vec{r}_n) = \left( \frac{2\pi k_g \cos \theta}{r} \right)^2 \left| \vec{t}(k_1, k_2) \cdot \vec{f}(k_1, k_2; \vec{r}_n) \right|^2 \exp(2k''_{zs} z_n) . \quad (15)$$

Si ahora se toma el promedio configuracional denotado por  $\langle \dots \rangle$  de la ecuación anterior y suponemos que el resultado es independiente de las coordenadas  $(x_n, y_n)$ , se tiene

$$\langle I_n^S(r, \theta, \phi; \vec{r}_n) \rangle = \left( \frac{2\pi k_g \cos \theta}{r} \right)^2 \left\langle \left| \vec{t}(k_1, k_2) \cdot \vec{f}(k_1, k_2; \vec{r}_n) \right|^2 \right\rangle \exp(2k''_{zs} z_n) \equiv I_n^S(r, \theta, \phi; z_n) . \quad (16)$$

Físicamente, el promedio configuracional de la función  $\left| \vec{t}(k_1, k_2) \cdot \vec{f}(k_1, k_2; \vec{r}_n) \right|^2$  corresponde a fijar el vector de posición  $\vec{r}_n$  y mover la n-ésima partícula a todas las posiciones accesibles del sistema, sumando su contribución al promedio de la función  $\left| \vec{t}(k_1, k_2) \cdot \vec{f}(k_1, k_2; \vec{r}_n) \right|^2$  cuando se encuentre dentro del sistema.

Se procede a realizar la suma incoherentemente de la intensidad esparcida por todas las partículas para obtener la intensidad total. Primero se considera la intensidad proveniente de las partículas contenidas en un elemento de volumen diferencial  $dx_n dy_n dz_n$  alrededor del punto  $\vec{r}_n$  como el número de partículas en ese volumen  $\rho dx_n dy_n dz_n$ , por  $I_n^S$ . Tenemos,

$$\Delta I_n(r, \theta, \phi) = \rho I_n^S(r, \theta, \phi) dx_n dy_n dz_n , \quad (17)$$

donde  $\rho$  es la densidad en número por unidad de volumen de partículas (que asumimos constante en el semi-espacio  $z > z_n$ ). Supongamos que sólo sale luz en  $-l/2 < x < l/2$  y  $-l/2 < y < l/2$ , con lo que se obtiene,

$$I_T(r, \theta, \phi) = \rho \int_{-l/2}^{l/2} \int_{-l/2}^{l/2} \int_0^\infty I_n^S(r, \theta, \phi; z_n) dx_n dy_n dz_n . \quad (18)$$

Realizando las integrales en  $dx$  y  $dy$  obtenemos,

$$I_T(r, \theta, \phi) = l^2 \rho \int_{-\infty}^0 I_n^S(r, \theta, \phi; z_n) dz_n . \quad (19)$$

Sustituyendo la intensidad obtenida para una partícula [ec. (15)] se tiene

$$I(r, \theta, \phi) = l^2 \rho \left( \frac{2\pi k_g \cos \theta}{r} \right)^2 \int_{-\infty}^0 \left\langle \left| \vec{t}(k_1, k_2) \cdot \vec{f}(k_1, k_2; \vec{r}_n) \right|^2 \right\rangle \exp(2k_{z2} z_n) dz_n . \quad (20)$$

Dado que el producto de una diada por un vector es un vector, nos podemos auxiliar de esto para obtener su magnitud

$$\left| \vec{t}(k_1, k_2) \cdot \vec{f}(k_1, k_2; \vec{r}_n) \right|^2 = |t^{TE}(k_1, k_2)|^2 |f_{TE}(k_1, k_2; \vec{r}_n)|^2 + |t^{TM}(k_1, k_2)|^2 |f_{TM}(k_1, k_2; \vec{r}_n)|^2 , \quad (21)$$

y por lo tanto,

$$\left\langle \left| \vec{t}(k_1, k_2) \cdot \vec{f}(k_1, k_2; \vec{r}_n) \right|^2 \right\rangle = |t^{TE}(k_1, k_2)|^2 \left\langle |f_{TE}(k_1, k_2; \vec{r}_n)|^2 \right\rangle + |t^{TM}(k_1, k_2)|^2 \left\langle |f_{TM}(k_1, k_2; \vec{r}_n)|^2 \right\rangle . \quad (22)$$

Supongamos que para  $z_n < 0$  tenemos que,

$$\left\langle |f_{TE}(k_1, k_2; \vec{r}_n)|^2 \right\rangle \approx \left\langle |f_{TM}(k_1, k_2; \vec{r}_n)|^2 \right\rangle \approx f_0^2(k_1, k_2) \exp(\tau z_n) , \quad (23)$$

donde  $f_0$  supondremos que es una función suave y que tiene un decaimiento exponencial. Esta suposición se basa en la teoría de Kubelca-Munk (ver apéndice C) o teoría de dos flujos, en donde se define un coeficiente de esparcimiento  $S$  y un coeficiente de absorción  $K$  de manera que se proponen dos flujos viajando en la dirección de “hacia delante  $F_+$ ” y otro en la dirección de “hacia atrás  $F_-$ ” estableciendo un par de ecuaciones diferenciales acopladas, y cuya solución es la combinación lineal de dos funciones exponenciales, si se establecen las condiciones adecuadas a la frontera para un espacio semi-infinito  $F_+(0) = f_0$ ,  $F_-(z \rightarrow \infty) = 0$  y  $F_+(z \rightarrow \infty) = 0$  se tiene que el flujo positivo decae conforme se penetra en el medio turbio con  $\tau = \sqrt{K(K + 2S)}$  (longitud de penetración de luz perfectamente difusa). De esta manera la intensidad al interior del medio turbio decae conforme  $z_n$  toma valores negativos de acuerdo a la notación manejada aquí. Por lo que sustituyendo la ecuación (23) en (20) se obtiene,

$$I(r, \theta, \phi) = l^2 \rho \left( \frac{2\pi k_0 \cos \theta}{r} \right)^2 \left( |t^{TE}(k_1, k_2)|^2 + |t^{TM}(k_1, k_2)|^2 \right) f_0^2(k_1, k_2) \int_{-\infty}^0 \exp(\tau z_n) \exp(2k_{z2} z_n) dz_n . \quad (24)$$

Con lo cual se llega a la expresión final,

$$I(r, \theta, \phi) = l^2 \rho \left( \frac{2\pi k_0 \cos \theta}{r} \right)^2 \frac{\left( |t^{TE}(k_1, k_2)|^2 + |t^{TM}(k_1, k_2)|^2 \right) f_0^2(k_1, k_2)}{\tau + 2k_{z2}''} . \quad (25)$$

Este resultado nos da un perfil de intensidad como función del ángulo de salida. Ahora, podemos afirmar que la función,

$$\left( |t^{TE}(k_1, k_2)|^2 + |t^{TM}(k_1, k_2)|^2 \right) f_0^2(k_1, k_2) ,$$

debe ser una función muy suave de  $k_1$  y  $k_2$  y que no pasa por cero en la zona del ángulo crítico. Dado que solo medimos el perfil de intensidad en un intervalo angular muy pequeño alrededor de la zona de transición (alrededor del borde del cono de luz) podemos considerar esta función como constante. De modo que el modelo para el perfil de intensidad en la zona de transición queda como,

$$I(r, \theta, \phi) \approx \frac{I_0}{\tau + 2k_{zs}''} , \quad (26)$$

Donde  $I_0$  es una constante que puede ser determinada experimentalmente. Por otro lado, recordando de la ecuación (14) que  $k_{zs} = k_{zs}' + ik_{zs}''$  y que  $n_s = n_s' + in_s''$  se tiene

$$k_{zs} = k_{zs}' + ik_{zs}'' = \sqrt{(\omega^2/c^2)n_s^2 - k_1^2 - k_2^2} , \quad (27.a)$$

$$k_{zs} = k_{zs}' + ik_{zs}'' = \sqrt{k_0^2(n_s' + in_s'')^2 - k_1^2 - k_2^2} , \quad (27.b)$$

$$k_0 = \omega/c ,$$

$$k_{zs} = k_{zs}' + ik_{zs}'' = \sqrt{k_0^2 \left[ (n_s')^2 - (n_s'')^2 \right] - k_1^2 - k_2^2 + 2ik_0^2 n_s' n_s''} , \quad (27.c)$$

$$k_{zs} = k_{zs}' + ik_{zs}'' = \sqrt{k_0^2 \left[ (n_s')^2 - (n_s'')^2 \right] - n_g^2 k_0^2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi - n_g^2 k_0^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi + 2ik_0^2 n_s' n_s''} , \quad (27.d)$$

$$k_{zs} = k_{zs}' + ik_{zs}'' = \sqrt{k_0^2 \left[ (n_s')^2 - (n_s'')^2 \right] - n_g^2 k_0^2 \sin^2 \theta + 2ik_0^2 n_s' n_s''} .$$

Con lo que separando parte real y parte imaginaria se obtiene,

$$k_{zs}' = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} , \quad (27.e)$$

$$k_{zs}'' = \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}, \quad (27.f)$$

donde

$$a = k_0^2 \left[ (n_2')^2 - (n_2'')^2 \right] - n_g^2 k_0^2 \sin^2 \theta \quad \text{y} \quad b = 2k_0^2 n_2' n_2''.$$

Finalmente, sustituyendo los resultados de la ecuación (27) en la ecuación (26) se llega al modelo buscado:

$$I(r, \theta, \phi) \approx \frac{I_0}{\tau + 2k_0 \operatorname{Im} \left\{ \sqrt{(n_s' + in_s'')^2 - n_g^2 \sin^2 \theta} \right\}}. \quad (28)$$

La ecuación (28) nos indica que se ha obtenido un perfil de intensidad que depende solo de  $\tau$ ,  $n_s'$  y  $n_s''$ , lo cual lo hace muy interesante y útil para verificar junto con los datos experimentales.

#### 4.2 La función $\vec{f}(k_x, k_y; \vec{r}_n)$

En esta sección se desea encontrar una expresión para la función  $\vec{f}(k_x, k_y; \vec{r}_n)$  de la ecuación (1). Tenemos que el campo esparcido por una partícula esta dado por

$$\vec{E}_n^s(\vec{r}; \vec{r}_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{f}(k_x, k_y; \vec{r}_n) \exp[ik_x x + ik_y y + ik_{zs}(z - z_n)] dk_{xs} dk_{ys}$$

Si observamos la expresión (2) en la Ref. [14], A. García Valenzuela et. al. Quantitative Spectroscopy & Radiative transfer, pág. 79-80, (2003), tenemos que el campo radiado por una partícula puede ser escrito como,

$$E_n^s(\vec{r}; \vec{r}_n) = \int d^3 \vec{r}' \int d^3 \vec{r}'' \vec{G}_0(\vec{r}, \vec{r}') \cdot \vec{T}(\vec{r}' - \vec{r}_n, \vec{r}'' - \vec{r}_n) \cdot \vec{E}_{exc}(\vec{r}''), \quad (29)$$

donde  $\vec{G}_0(\vec{r}, \vec{r}')$  es la función de Green diádica en el espacio libre,  $\vec{T}(\vec{r}' - \vec{r}_n, \vec{r}'' - \vec{r}_n)$  es el operador de transición para una partícula aislada [15] y  $\vec{E}_{exc}(\vec{r}'')$  denota el campo de excitación. Este es definido como el campo incidente más el campo esparcido por el resto de las partículas en una región alrededor de la partícula  $n$ . De acuerdo a la geometría establecida en la Ref. [25] es conveniente expresar a  $\vec{G}_0(\vec{r}, \vec{r}')$  en su expansión en ondas planas dado por,

$$\vec{G}_0(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{i}{8\pi^2} \iint dk_x^s dk_y^s \frac{1}{k_z^s} (\vec{I} - \hat{k}_\pm^s \hat{k}_\pm^s) \exp[i\vec{k}_\pm^s \cdot (\vec{r} - \vec{r}')] . \quad (30)$$

Se puede identificar por medio de la expresión (4) en la Ref. [11], R. G. Barrera, Phys. Rev B. 75 (2007) que una partícula responde no localmente al campo eléctrico incidente  $\vec{E}_{exc}(\vec{r}'')$ ,

$$\int d^3\vec{r}'' \vec{T}(\vec{r}' - \vec{r}_n, \vec{r}'' - \vec{r}_n) \cdot \vec{E}_{exc}(\vec{r}'') = \frac{1}{i\omega\mu_0} \vec{J}_{ind}(\vec{r}') . \quad (31)$$

Por lo que la ecuación (29) se puede reescribir de la siguiente manera:

$$E_n^S(\vec{r}; \vec{r}_n) = \frac{1}{i\omega\mu_0} \int d^3\vec{r}' \vec{G}_0(\vec{r}, \vec{r}') \cdot \vec{J}_{ind}(\vec{r}') . \quad (32)$$

Sustituyendo la expresión para  $\vec{G}_0(\vec{r}, \vec{r}')$  [ec. (30)] obtenemos,

$$E_n^S(\vec{r}; \vec{r}_n) = \frac{1}{i\omega\mu_0} \int d^3\vec{r}' \frac{i}{8\pi^2} \iint dk_x^s dk_y^s \frac{1}{k_z^s} (\vec{I} - \hat{k}_\pm^s \hat{k}_\pm^s) \exp[i\vec{k}_\pm^s \cdot (\vec{r} - \vec{r}')] \cdot \vec{J}_{ind}(\vec{r}') , \quad (33)$$

donde  $\vec{k}_\pm^s = k_x^s \hat{a}_x + k_y^s \hat{a}_y \pm k_z^s \hat{a}_z$  y  $\hat{k}_\pm^s = \left( k_x^s \hat{a}_x + k_y^s \hat{a}_y \pm k_z^s \hat{a}_z / |\vec{k}_\pm^s| \right)$ . Para el campo esparcido por la partícula en  $z > z_n$  se elige el signo positivo el cual ya no se escribirá. Intercambiando el orden de las integrales,

$$E_n^S(\vec{r}; \vec{r}_n) = \frac{1}{i\omega\mu_0} \frac{i}{8\pi^2} \iint dk_x^s dk_y^s \left\{ \frac{1}{k_z^s} (\vec{I} - \hat{k}^s \hat{k}^s) \cdot \int d^3\vec{r}' \exp[-i\vec{k}^s \cdot \vec{r}'] \vec{J}_{ind}(\vec{r}') \right\} \exp[i\vec{k}^s \cdot \vec{r}] . \quad (34)$$

Multiplicando por  $1 = \exp[ik_{zs} z_n] \exp[-ik_{zs} z_n]$  y re-arreglando la ecuación anterior y comparándola con la ecuación (1) se reconoce,

$$\vec{f}(k_x, k_y) = \frac{(\vec{I} - \hat{k}^s \hat{k}^s) \cdot \int d^3 \vec{r}' \exp[-i\vec{k}^s \cdot \vec{r}'] \vec{J}_{ind}(\vec{r}') \exp(ik_{zs} z_n)}{k_{zs}} . \quad (35)$$

Finalmente, agrupando términos se llega a

$$\vec{f}(k_x, k_y) = \frac{W(\vec{k}^s) \exp(ik_{zs} z_n)}{k_{zs}} \quad \text{para } z_n < 0, \quad (36)$$

donde

$$W(\vec{k}^s) = (\vec{I} - \hat{k}^s \hat{k}^s) \cdot \int d^3 \vec{r}' \exp[-i\vec{k}^s \cdot \vec{r}'] \vec{J}_{ind}(\vec{r}') . \quad (37)$$

De esta forma se ha obtenido una expresión formal para la función  $\vec{f}(k_x, k_y; \vec{r}_n)$ . Si recordamos los coeficientes de transmisión considerados para las polarizaciones TE y TM junto con la ec. (36) se puede notar que la función  $\vec{f}(k_x, k_y; \vec{r}_n)$  no pasa por cero en la zona crítica (la zona del borde del cono difuso donde se aprecia el cambio de intensidad).

### 4.3 Experimento vs modelo matemático

El siguiente paso fue verificar que el modelo matemático desarrollado en este capítulo se apegara a los datos experimentales obtenidos mediante el arreglo experimental de la figura 2 y obtener un ajuste de estos. Utilizando el *Toolbox Curve Fitting Tool* de MATLAB se procedió a cargar cada uno de los datos experimentales y mediante el modelo matemático descrito por la ecuación (28) se obtuvieron ajustes a los parámetros buscados, los cuales fueron la parte real y la parte imaginaria del índice de refracción del medio coloidal. El objetivo de dicho análisis es cuantificar las variaciones de los parámetros buscados cuando la concentración de partículas es incrementada, intentando establecer de qué manera afectan estos parámetros a la curva experimental obtenida.

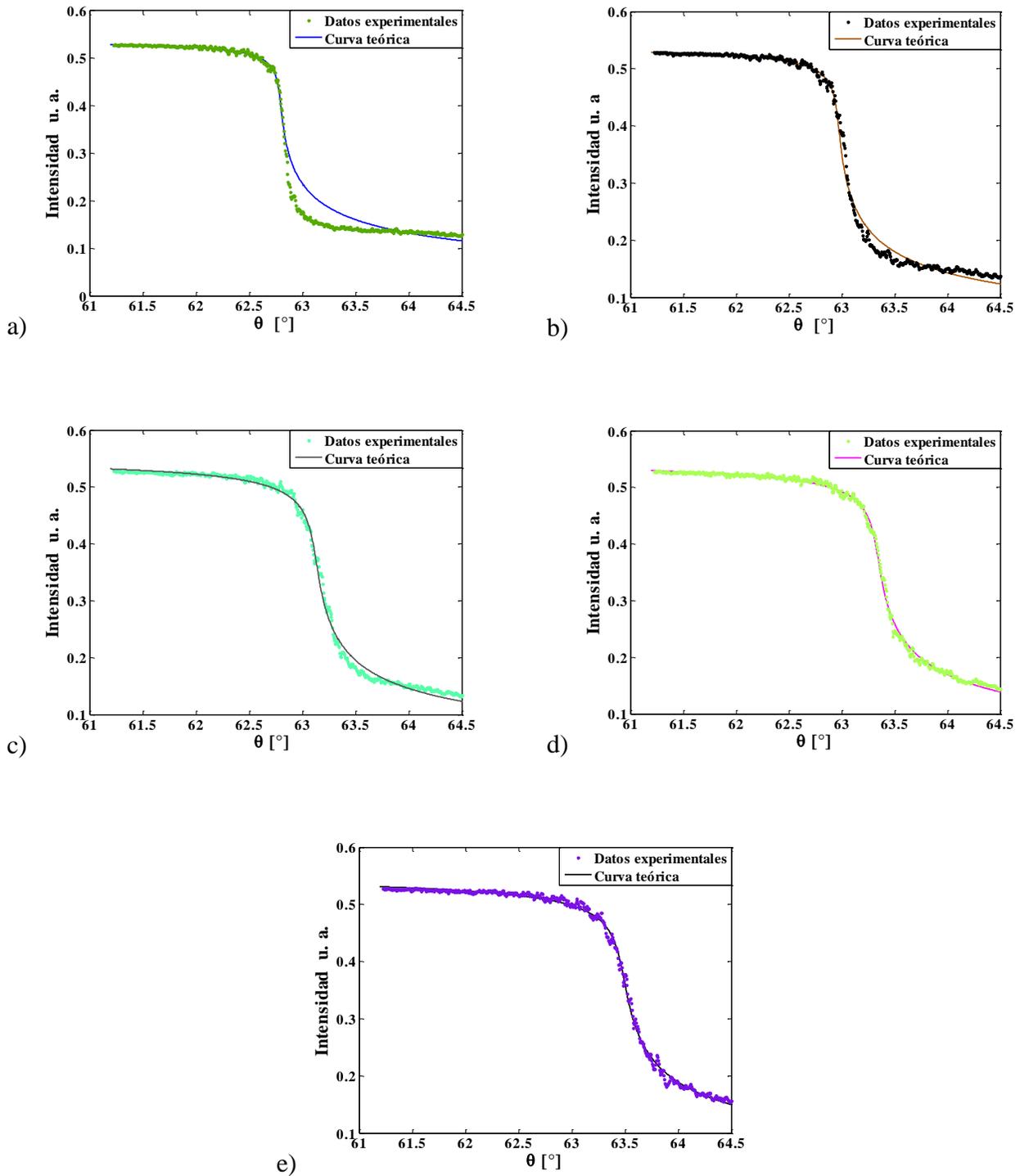
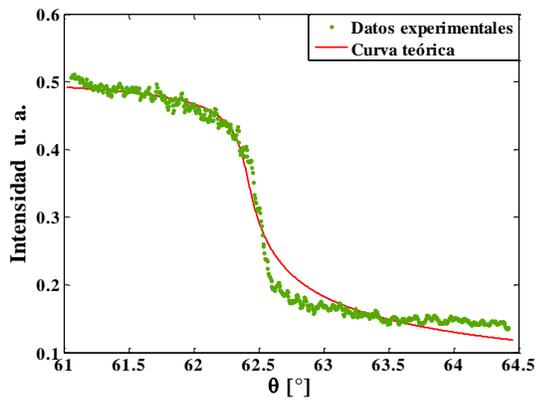
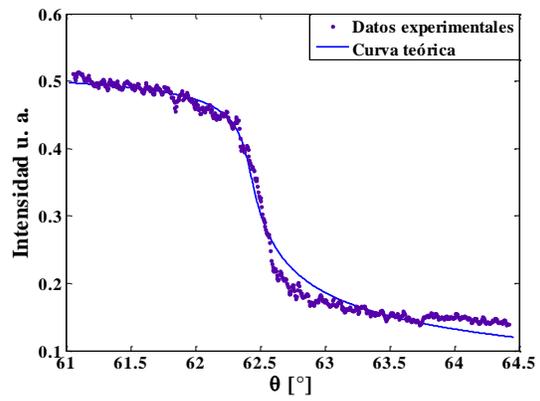


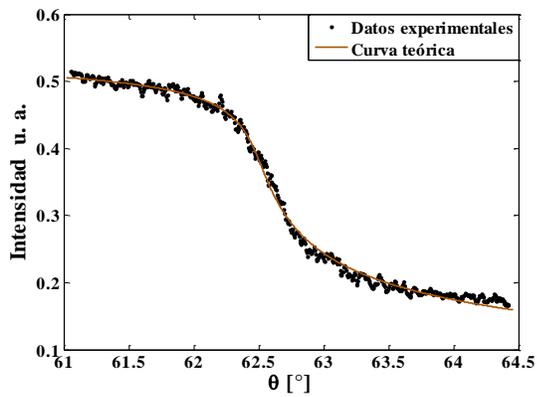
Figura 24. Ajuste de los perfiles angulares de intensidad para diferentes concentraciones de partículas de látex al modelo de la ecuación (28). a)  $f \sim 2\%$ , b)  $f \sim 5\%$ , c)  $f \sim 8\%$ , d)  $f \sim 10\%$  y e)  $f \sim 12\%$ .



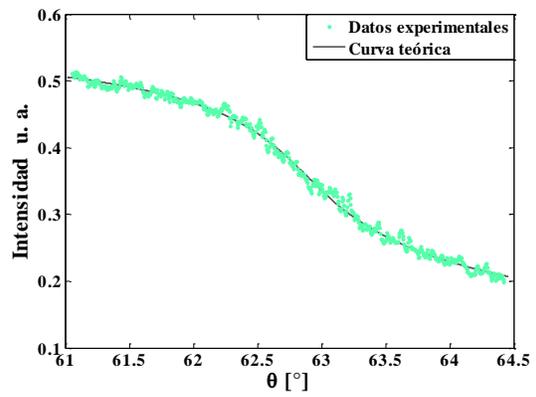
a)



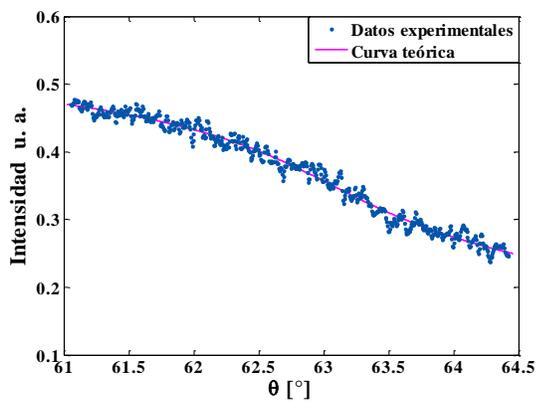
b)



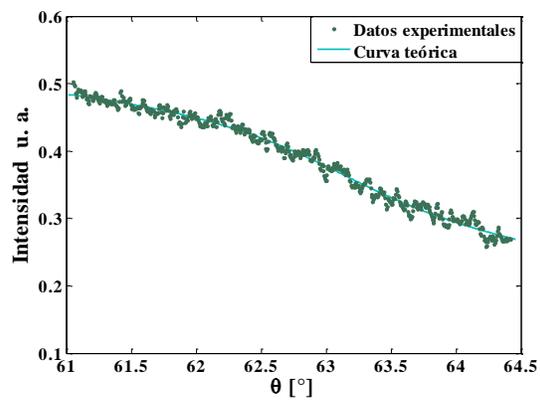
c)



d)



e)



f)

Figura 25. Ajuste de los perfiles angulares de intensidad para diferentes concentraciones de partículas de  $\text{TiO}_2$  al modelo de la ecuación (28). a)  $f \sim 0.3\%$ , b)  $f \sim 0.6\%$ , c)  $f \sim 1.2\%$ , d)  $f \sim 1.7\%$ , e)  $f \sim 2.1\%$  y f)  $f \sim 2.5\%$ .

Al realizar el ajuste del modelo teórico representado por la ecuación (28) se obtienen las figuras 24 y 25. La figura 24 muestra los ajustes realizados a los coloides conformados por partículas de látex, en las cuales se aprecia que conforme la concentración de partículas se incrementa el ajuste se adecua más a los datos experimentales. Cuando la concentración de partículas de látex es alta ( $f \sim 10\%$  y  $12\%$ ) el modelo sigue completamente a los datos experimentales con un coeficiente de ajuste de 0.99. La tabla II muestra los valores obtenidos del ajuste de los datos experimentales a las curvas teóricas establecidas por el modelo obtenido en la sección 4.1 de este capítulo.

Tabla II. Parte real  $n'$  e imaginaria  $n''$  del índice de refracción efectivo obtenido mediante el ajuste de los datos experimentales para partículas de látex

Látex	2%	5%	8%	10%	12%
$n'$	1.343	1.345	1.347	1.349	1.351
$n''$	0.0003278	0.00039	0.0006432	0.0006406	0.0007723

La figura 25 muestra las gráficas obtenidas luego de realizar el ajuste matemático del modelo propuesto en la ecuación (28) para diferentes concentraciones en volumen de partículas de  $\text{TiO}_2$ . Al observar dichas gráficas llama la atención que desde concentraciones más pequeñas de dióxido de titanio ( $f \sim 1.2\%$ ,  $1.7\%$ ,  $2.1\%$  y  $2.5\%$ ) el modelo se ajusta de manera más adecuada ya que se apega bastante a los datos experimentales obtenidos mediante los perfiles de intensidad angular obteniéndose coeficientes de ajuste a la curva de 0.98 en adelante. La tabla III presenta los valores obtenidos del ajuste para la parte real e imaginaria del índice de refracción efectivo.

Tabla III. Parte real  $n'$  e imaginaria  $n''$  del índice de refracción efectivo obtenido mediante el ajuste de los datos experimentales para diferentes volúmenes de partículas de  $\text{TiO}_2$

$\text{TiO}_2$	$\sim 0.3\%$	$\sim 0.6\%$	$\sim 1.2\%$	$\sim 1.7\%$	$\sim 2.1\%$	$\sim 2.5\%$
$n'$	1.338	1.338	1.339	1.344	1.346	1.346
$n''$	0.0007804	0.0008055	0.001513	0.00478	0.009505	0.009579

Si se analizan más a fondo los resultados presentados en las Tablas II y III uno puede percibir por comparación que los valores obtenidos de la parte real del índice de refracción efectivo  $n'$  son mayores para el caso de las partículas de látex con respecto a este mismo valor para las partículas de  $\text{TiO}_2$ , si comparamos este valor con respecto al del agua tridestilada (obtenida por interpolación de ref. [38]  $n=1.33169$ ) en la cual se prepararon las muestras podemos observar que son mayores a los de la matriz que los contiene como se pudiera esperar, ambos variando a partir de la segunda cifra significativa (en látex desde  $n'=1.343$  hasta  $n'=1.351$  y en el caso de látex desde  $n'=1.338$  hasta  $n'=1.346$ ). Ahora bien, si se observan los valores obtenidos en la parte imaginaria del índice de refracción efectivo  $n''$  es claro que para partículas de  $\text{TiO}_2$  los valores obtenidos son mayores que para las partículas de látex aún cuando las concentraciones en volumen de partículas son menores en dióxido de titanio que de látex. De manera general, de la observación de los resultados experimentales se puede llegar a la conclusión de que en el caso de las partículas de látex

---

---

donde el índice de refracción es cercano al de la matriz el efecto en el perfil de intensidad está dominado por variaciones mayores en la parte real con respecto a su parte imaginaria del índice de refracción efectivo, y en el caso de partículas de  $\text{TiO}_2$  en las cuales el índice de refracción es mucho mayor que el del agua, los efectos sobre el perfil de intensidad se encuentran dominados por una mayor variación en la parte imaginaria del índice de refracción efectivo.

#### **4.4 Discusión**

En este capítulo se presentó un modelo matemático que fuera capaz de ajustarse a los valores experimentales presentados en el capítulo 3, dicho modelo matemático se basó en suposiciones sencillas pero ingeniosas las cuales relacionan el comportamiento de la propagación de ondas electromagnéticas mediante el auxilio de la transformada de Fourier adaptando dicho comportamiento a la refracción de la luz difusa viajando en un medio coloidal turbio. Mediante la comparación del modelo matemático y de los datos experimentales se puede llegar a decir que la forma de los perfiles angulares los cuales son utilizados para describir el comportamiento de la luz difusa son el resultado de considerar un medio efectivo para la propagación de la componente difusa, en donde encontramos que todo indica que cuando la parte real del índice de refracción efectivo se incrementa el perfil de intensidad angular sufre un corrimiento sin modificar tanto la forma, y cuando la parte imaginaria de dicho índice se modifica la pendiente central de los perfiles angulares de intensidad cambia, yendo de un valor de pendiente muy grande a uno más pequeño conforme dicho valor se incrementa.

El establecimiento de un modelo matemático y la sensibilidad a un índice de refracción efectivo en la refracción de luz difusa proveniente de un coloide turbio sienta las bases para comenzar a desarrollar refractometría en coloides densos.



---

---

## Capítulo V. Conclusiones

De manera general se establecieron dos objetivos principales, el primero de ellos consistió en obtener datos experimentales acerca del comportamiento de la luz difusa proveniente de un medio coloidal denso y el segundo objetivo consistió en desarrollar un modelo matemático bajo consideraciones simples pero que permitiera describir el fenómeno observado en la parte experimental. En estos objetivos se obtuvieron buenos resultados que permitieron un análisis interesante.

Se analizó la respuesta de la cámara CCD a variaciones lineales de la intensidad de la luz difusa utilizada en el desarrollo de los experimentos con la cual se captaba una imagen y de ella se podía obtener un perfil angular de intensidad a partir del procesamiento de dicha imagen. Se comprobó que la respuesta de la cámara a variaciones lineales de intensidad seguía muy de cerca la ley de Malus la cual establece que la intensidad de la luz polarizada linealmente que atraviesa un polarizador es una función coseno cuadrado de la diferencia del ángulo del eje de polarización de la luz y del eje de polarización del polarizador, demostrando que las mediciones hechas por la cámara se debieran únicamente a las variaciones en intensidad proveniente de la luz difusa. También se analizó el comportamiento de las muestras coloidales, para ello se monitoreó durante un lapso de 20 minutos su comportamiento obteniéndose, cada minuto, el perfil de intensidad correspondiente. Se verificó que tanto las muestras de látex como las muestras de suspensiones coloidales de  $\text{TiO}_2$  eran bastante estables durante el periodo de medición y dado que la prueba de la obtención del perfil de intensidad solo duraba alrededor de 5 minutos se garantizaba que las mediciones no fueran afectadas por la sedimentación de las partículas coloidales. Es importante mencionar que solo las suspensiones formadas de partículas de  $\text{TiO}_2$  sufrían sedimentación después de muchas horas de dejarlas en reposo.

El principal experimento fue observar y cuantificar la refracción de la luz difusa cuando ésta proviene de un medio turbio como lo son las suspensiones coloidales de látex y de  $\text{TiO}_2$ . Esto con el fin de comenzar a entender su comportamiento y tratar de esclarecer y describir la física básica del comportamiento de la propagación de la luz difusa en dichos medios. Este experimento muestra que la refracción de la luz difusa en una interfaz plana depende de la concentración de partículas coloidales y no únicamente de la matriz en la cual se encuentran inmersas. Desde un punto de vista microscópico, el hecho de que la luz sea transmitida fuera del cono de luz definido por el ángulo crítico de la interfase agua-prisma puede ser interpretado como un cambio en el índice efectivo de refracción visto por la luz difusa, el cual va a depender del tipo y de la concentración de partículas coloidales. Uno puede argumentar que la luz difusa puede ser considerada como una superposición de muchas ondas coherentes las cuales son incoherentes entre sí. Por onda coherente se entiende como la onda promedio sobre todas las configuraciones permitidas del sistema. Por otro lado, es bien conocido que una onda coherente viajando en un medio coloidal tiene un vector de onda efectivo y uno puede definir un índice de refracción efectivo. Tal índice de refracción efectivo es en general complejo, incluso en ausencia de absorción óptica (la parte imaginaria del índice de refracción efectivo en coloides turbios viene también del esparcimiento y no solo de la absorción). De esta forma, el experimento desarrollado

---

---

provee clara evidencia de que en las propiedades de refracción y propagación de la luz se debe considerar un medio efectivo. Recordando que la teoría de transferencia radiativa hace uso de las relaciones de Fresnel con el índice de refracción de la matriz para establecer los coeficientes de reflexión y transmisión, se concluye, de acuerdo al experimento realizado aquí, que es necesario considerar extensiones al método usual de transferencia radiativa en el cual se incorpore como tal un medio efectivo.

También se desarrolló un modelo matemático obtenido que permite en un primer intento, dar una explicación del fenómeno observado utilizando un índice de refracción efectivo complejo justificando que dicho modelo se ajusta adecuadamente a los datos experimentales. Es de llamar la atención que el ajuste se adecua más cuando la concentración de partículas es mayor, esto es debido, probablemente, a la consideración realizada sobre el decaimiento exponencial de la luz al interior del coloide el cual, de acuerdo al modelo de dos flujos de Kubelka-Munk se sabe es una buena aproximación solo cuando el esparcimiento es muy grande. En resumen, la suposición de un índice de refracción efectivo complejo es consistente con las mediciones experimentales.

Se realizaron mediciones sobre el efecto de la polarización de la luz incidente a la componente difusa de la luz, con el propósito de ver si la luz difusa está polarizada o no y de qué forma cuando proviene de una interfaz plana. Dichos resultados muestran una diferencia en los perfiles medidos cuando la polarización cambia. Esto indica que se tiene que considerar el estado de polarización de la luz difusa para un completo entendimiento del fenómeno de refracción.

Esta tesis abre el camino para que se continúe en la investigación sobre la refracción de la luz difusa en un medio coloidal al atravesar una interfaz plana ya que se demostró la fiabilidad y sensibilidad al índice de refracción efectivo en coloides densos y se tiene un avance importante hacia la refractometría en coloides densos. También se identificaron los problemas que deberán seguirse trabajando.



---

---

## Trabajo a futuro

A partir de los resultados obtenidos en la experimentación y el modelo desarrollado es posible seguir investigando sobre esta materia, ya que en la actualidad no existe información en la bibliografía que estudie la refracción de la componente difusa de la luz en medios muy turbios en la cual se explique la física básica de dicho comportamiento. Esto abre las puertas a seguir investigando y tratando de establecer cómo se comporta la refracción de la luz difusa cuando se tienen medios coloidales densos donde la turbidez es significativa. Para ello se requiere realizar modelos matemáticos con un mayor formalismo matemático, haciendo uso de funciones de Green y operadores como la matriz de transición  $T$  muy utilizada en fenómenos de esparcimiento para el límite diluido. Será necesario igualmente desarrollar nuevos experimentos en los cuales se puedan comprobar los modelos propuestos. También teniendo en cuenta las observaciones realizadas sobre la preparación de las sustancias coloidales es necesario desarrollar métodos en los cuales no se tengan los problemas descritos, ello puede ser por la preparación de coloides a partir de partículas comerciales controlando perfectamente las condiciones en las cuales se preparan. El experimento permite hacer predicciones sobre su utilidad práctica, entre las cuales pueden ser el monitoreo de sedimentación de partículas, control y monitoreo de películas de pintura y porque no, el poder desarrollar un medidor de glucosa no invasivo en tejido biológico bajo este principio. En este último punto de gran interés, se fundamenta dado que al parecer lo que más afecta a la transmisión de la luz en tejido biológico es la glucosa, tema que en la actualidad muchos investigadores se están dando a la tarea de desarrollar.



---

---

## Apéndice A

### Campo de radiación de una partícula

Si se tiene una función de  $x$ ,  $f(x)$ , su transformada de Fourier es

$$F(k_x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-ik_x x) dx, \quad (\text{A.1})$$

y su transformada inversa es

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(k_x) \exp(ik_x x) dk_x. \quad (\text{A.2})$$

De la misma manera, si tenemos una función de  $x$  y  $y$ , se puede aplicar la transformada de Fourier a ambas variables; así,

$$U(k_x, k_y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \int_{-\infty}^{\infty} u(x, y) \exp(-ik_x x - ik_y y) dx dy, \quad (\text{A.3})$$

$$u(x, y) = \int \int_{-\infty}^{\infty} U(k_x, k_y) \exp(ik_x x + ik_y y) dk_x dk_y. \quad (\text{A.4})$$

El campo eléctrico esparcido por la partícula debe satisfacer las ecuaciones

$$\nabla^2 \vec{E} + \varepsilon\mu_0\omega^2 \vec{E} = 0, \quad (\text{A.5})$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0. \quad (\text{A.6})$$

Donde se supone que no existe densidad de corriente ni de carga y se tiene un medio no magnético. Las ecuaciones (A.5) y (A.6) se pueden expresar en la siguiente forma,

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \varepsilon\mu_0\omega^2 \right) \vec{E}(x, y, z) = 0, \quad (\text{A.7})$$

$$\frac{\partial E_x(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial E_y(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial E_z(x, y, z)}{\partial z} = 0. \quad (\text{A.8})$$

Aprovechando la propiedad siguiente de la transformada de Fourier se obtiene,

$$\mathbb{F}[f^n(x)] = (ik)^n \mathbb{F}[f(x)] ,$$

$$\mathbb{F}_x \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = ik_x \mathbb{F}_x [u(x, y)] ,$$

$$\mathbb{F}_x \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} = (ik_x)^2 \mathbb{F}_y [u(x, y)] .$$

Y aplicándolas a las ecuaciones (A.7) y (A.8) se obtiene:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + n_s^2 k_0^2 - k_x^2 - k_y^2 \right) \tilde{E}(k_x, k_y, z) &= 0 , \\ \frac{\partial^2 \tilde{E}(k_x, k_y, z)}{\partial z^2} + k_{zs}^2 \tilde{E}(k_x, k_y, z) &= 0 , \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

$$\begin{aligned} ik_x \tilde{E}_x(k_x, k_y, z) + ik_y \tilde{E}_y(k_x, k_y, z) + \frac{\partial}{\partial z} \tilde{E}_z(k_x, k_y, z) &= 0 , \\ k_x \tilde{E}_x(k_x, k_y, z) + k_y \tilde{E}_y(k_x, k_y, z) - i \frac{\partial}{\partial z} \tilde{E}_z(k_x, k_y, z) &= 0 , \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

donde  $\tilde{E}(k_x, k_y, z)$  es la transformada de Fourier del campo eléctrico con respecto a  $x$  y  $y$ , además tenemos:

$$\varepsilon \mu_0 \omega^2 = \varepsilon_r \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2 = \varepsilon_r \frac{\omega^2}{c^2} = n_s^2 k_0^2 , \quad n_s = \sqrt{\varepsilon_r} , \quad k_{zs}^2 = n_s^2 k_0^2 - k_x^2 - k_y^2 .$$

La ecuación (A.9) tiene una solución general de la forma  $\exp(\pm ik_z z)$ . Puesto que el campo consiste en ondas propagándose para en la dirección del eje  $z$ , únicamente la solución  $\exp(ik_z z)$  será válida. Así, la solución general a la ecuación es

$$\tilde{E}(k_x, k_y, z) = \tilde{f}(k_x, k_y) \exp(ik_z z) , \quad (\text{A.11})$$

donde  $\tilde{f}(k_x, k_y)$  es una función por encontrar. Usando la ecuación (A.11) en (A.10) se obtiene

$$k_x \tilde{f}_x + k_y \tilde{f}_y + k_z \tilde{f}_z = 0 . \quad (\text{A.12})$$

Escribiéndola de forma vectorial obtenemos:

$$\vec{k} \cdot \vec{f} = 0 . \quad (\text{A.13})$$

La ecuación (A.12) establece que solo dos componentes del vector  $\tilde{f}$  son independientes, esta es una restricción sobre el campo eléctrico impuesta por la divergencia del campo eléctrico.

Al usar la transformada inversa de Fourier, la solución al campo eléctrico está expresada por

$$E(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k_x, k_y, z_n) \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}) dk_x dk_y . \quad (\text{A.14})$$

Donde  $\vec{k} \cdot \vec{r} = k_x x + k_y y + k_z z$  establece que un campo eléctrico en el semi-espacio  $z > 0$  puede ser representado como un espectro de ondas planas donde  $\tilde{f}(k_x, k_y) \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r})$  es una onda plana con un vector de amplitud  $\tilde{f}$  propagándose en la dirección de propagación del vector  $\vec{k}$ . La definición de  $k_z$  es tal que  $|\vec{k}| = n_s k_0$ . Para  $k_x^2 + k_y^2 > n^2 k_0^2$  la constante de propagación  $k_z$  es imaginaria, y las ondas planas en esta parte del espectro decaen exponencialmente nombrándose evanescentes. Estas ondas evanescentes conforman el campo cercano de la partícula. Únicamente las ondas planas que provienen de la parte del espectro correspondiente a los valores de  $k_x^2 + k_y^2$  dentro del círculo de radio  $n^2 k_0^2$  en el plano  $k_x, k_y$  contribuyen al campo de radiación. Asumiendo que el campo eléctrico se conoce en un punto  $z = z_n$ , la solución para las componentes  $x$  y  $y$  del campo eléctrico es igual al asumido como conocido, denominándolo  $\tilde{f}_\perp$ . Así,

$$\begin{aligned} \vec{E}_\perp(x, y) &= \vec{E}(x, y, z_n) , \\ \vec{E}_\perp(x, y; \vec{r}_n) &= \frac{1}{4\pi^2} \int \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}_\perp(k_x, k_y, z_n; \vec{r}_n) \exp(ik_x x + ik_y y) dk_x dk_y . \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Esta expresión es reconocida como la transformada bi-dimensional de Fourier, por lo que de la ecuación (A.3) se tiene

$$\tilde{f}_\perp(k_x, k_y; \vec{r}_n) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}_\perp(x, y; \vec{r}_n) \exp(-ik_x x - ik_y y) dx dy . \quad (\text{A.16})$$

Por lo que  $\tilde{f}_\perp$  está dada en términos de la transformada de Fourier del campo conocido. De la ecuación (A.12) se puede determinar  $\tilde{f}_z$ , ésta está dada por,

$$k_x \tilde{f}_x + k_y \tilde{f}_y + k_z \tilde{f}_z = 0 ,$$

---



---


$$\tilde{f}_z = \frac{-k_x \tilde{f}_x - k_y \tilde{f}_y}{k_z} = \frac{-k_x \tilde{f}_x - k_y \tilde{f}_y}{\sqrt{n^2 k_0^2 - k_x^2 - k_y^2}} . \quad (\text{A.17})$$

De esta manera se ha encontrado una solución formal para el campo eléctrico en cualquier región  $z > z_n$  expresada mediante la ecuación (A.14). En general dicha ecuación es difícil de evaluar excepto en la zona de radiación donde  $r$  es muy grande comparada con  $\lambda_0$  o de manera equivalente  $nk_0 r$  muy grande. Dicha evaluación se realiza mediante el método de fase estacionaria descrito en el apéndice B.

---

---

## Apéndice B

### Método de fase estacionaria

La integral a evaluar es la siguiente

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k_x, k_y) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} dk_x dk_y . \quad (\text{B.1})$$

El método de solución de la integral (B.1) se basa en lo siguiente: cuando  $\vec{r}$  es muy grande  $e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}$  es una función que oscila muy rápidamente y por lo tanto su fase también, ocasionando una falta de adición en fase de varias regiones. Una excepción ocurre en un punto donde  $\vec{k} \cdot \vec{r}$  no varían con pequeños cambios de  $k_x$  y  $k_y$ . Tal punto es denominado *punto de fase estacionaria* y dado que su variación es pequeña, idealmente constante, puede ser caracterizado por la definición de sus derivadas de  $\vec{k} \cdot \vec{r}$  con respecto a  $k_x$  y  $k_y$ .

$$\frac{\partial(\vec{k} \cdot \vec{r})}{\partial k_x} = 0 , \quad \frac{\partial(\vec{k} \cdot \vec{r})}{\partial k_y} = 0 . \quad (\text{B.2})$$

En la pequeña región alrededor del punto de fase estacionaria, el cual se puede denotar por  $k_x = k_1$ ,  $k_y = k_2$ , la función  $\tilde{f}(k_x, k_y)$  que varía lentamente es igual a su valor en el punto de fase estacionaria, por lo que la integral resultante únicamente envuelve funciones de  $e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}$  y que pueden ser evaluadas.

Para facilitar la evaluación se puede expresar  $\vec{k} \cdot \vec{r} = k_x x + k_y y + k_z z$  en coordenadas esféricas usando  $x = r \sin \theta \cos \phi$ ,  $y = r \sin \theta \sin \phi$  y  $z = r \cos \theta$ ; así

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = r(k_x \sin \theta \cos \phi + k_y \sin \theta \sin \phi + \sqrt{n^2 k_0^2 - k_x^2 - k_y^2} \cos \theta) . \quad (\text{B.3})$$

Obteniendo el valor de las derivadas tenemos

$$\frac{\partial(\vec{k} \cdot \vec{r})}{\partial k_x} = 0 \Rightarrow r \sin \theta \cos \phi = \frac{k_x r \cos \theta}{\sqrt{n^2 k_0^2 - k_x^2 - k_y^2}} , \quad (\text{B.4})$$

$$\begin{aligned} (n^2 k_0^2 - k_x^2 - k_y^2) r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi &= k_x^2 r^2 \cos^2 \theta , \\ k_x^2 r^2 (\sin^2 \theta \cos^2 \phi + \cos^2 \theta) + k_y^2 r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi &= n^2 k_0^2 r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi , \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

$$\frac{\partial(\vec{k} \cdot \vec{r})}{\partial k_y} = 0 \Rightarrow r \sin \theta \sin \varphi = \frac{k_y r \cos \theta}{\sqrt{n^2 k_0^2 - k_x^2 - k_y^2}}, \quad (\text{B.6})$$

$$\begin{aligned} k_x^2 (\sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \cos^2 \theta) + k_y^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi &= n^2 k_0^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi, \\ k_x^2 r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + k_y^2 r^2 (\sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \cos^2 \theta) &= n^2 k_0^2 r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi. \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Definiendo,

$$A = \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \cos^2 \theta, \quad B = \sin^2 \theta \cos^2 \varphi, \quad C = \sin^2 \theta \sin^2 \varphi, \quad D = \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \cos^2 \theta,$$

$$F_1 = n^2 k_0^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi, \quad F_2 = n^2 k_0^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi, \quad l = k_x^2 \quad \text{y} \quad m = k_y^2,$$

entonces, el sistema a resolver esta dado por las ecuaciones (B.5) y (B.7) de la forma

$$Al + Bm = F_1, \quad (\text{B.8})$$

$$Cl + Dm = F_2. \quad (\text{B.9})$$

Resolviendo para  $m$  en la ecuación (B.8),

$$l = \frac{F_1 - Bm}{A}. \quad (\text{B.10})$$

Sustituyendo la ecuación (B.10) en la ecuación (B.9) tenemos,

$$C \frac{F_1 - Bm}{A} + Dm = F_2 \Rightarrow \left( D - \frac{BC}{A} \right) m = F_2 - F_1 \frac{C}{A},$$

$$m = \frac{F_2 - F_1 \frac{C}{A}}{\left( D - \frac{BC}{A} \right)}. \quad (\text{B.11})$$

Desarrollando la ecuación anterior con el valor de cada constante se tiene,

$$m = \frac{n^2 k_0^2 \left( \sin^2 \theta \sin^2 \varphi - \cos^2 \theta \frac{\sin^2 \theta \sin^2 \varphi}{\sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \cos^2 \theta} \right)}{\left( \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \cos^2 \theta - \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \varphi \cdot \sin^2 \theta \sin^2 \varphi}{\sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \cos^2 \theta} \right)},$$

$$m = \frac{n^2 k_0^2 \sin^2 \theta (\sin^2 \varphi (\sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \cos^2 \theta) - \cos^2 \varphi \sin^2 \theta \sin^2 \varphi)}{((\sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \cos^2 \theta)(\sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \cos^2 \theta) - \sin^2 \theta \cos^2 \varphi \cdot \sin^2 \theta \sin^2 \varphi)} ,$$

$$m = \frac{n^2 k_0^2 \sin^2 \theta (\sin^2 \varphi \cos^2 \theta)}{(\cos^2 \theta \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \cos^2 \theta \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \cos^4 \theta)} ,$$

$$m = \frac{n^2 k_0^2 \sin^2 \theta (\sin^2 \varphi \cos^2 \theta)}{(\cos^2 \theta \sin^2 \theta (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + \cos^4 \theta)} \Rightarrow \frac{n^2 k_0^2 \sin^2 \theta (\sin^2 \varphi \cos^2 \theta)}{(\cos^2 \theta \sin^2 \theta + \cos^4 \theta)} ,$$

$$m = \frac{n^2 k_0^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)} = n^2 k_0^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi . \quad (\text{B.12})$$

De esta manera el valor para  $k_y$  se puede calcular,

$$m = k_y^2 ,$$

$$k_y = n k_0 \sin \theta \sin \varphi . \quad (\text{B.13})$$

Para obtener el valor para  $k_x$ , se divide la ecuación (B.4) y (B.6) obteniéndose,

$$\frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} = \frac{k_x}{k_y} . \quad (\text{B.14})$$

Sustituyendo la ecuación (B.13) en la ecuación (B.14) se obtiene,

$$k_x = n k_0 \sin \theta \cos \varphi . \quad (\text{B.15})$$

Por lo que el punto de fase estacionaria es donde se tiene,

$$k_x = k_1 = n k_0 \sin \theta \cos \varphi , \quad (\text{B.16})$$

$$k_y = k_2 = n k_0 \sin \theta \sin \varphi . \quad (\text{B.17})$$

La expansión en serie de Taylor para una función de dos variables se expresa de la siguiente forma

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_0, y_0} \Delta x + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{x_0, y_0} \Delta y + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{x_0, y_0} \Delta x^2 + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right|_{x_0, y_0} \Delta y^2 + \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right|_{x_0, y_0} \Delta x \Delta y \dots \quad (\text{B.18})$$

Por lo que desarrollando la función  $\vec{k} \cdot \vec{r}$  en su expansión en serie de Taylor alrededor de del punto de fase estacionaria  $k_1, k_2$  es

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = nk_0 r + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \vec{k} \cdot \vec{r}}{\partial k_x^2} (k_x - k_1)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \vec{k} \cdot \vec{r}}{\partial k_y^2} (k_y - k_2)^2 + \frac{\partial^2 \vec{k} \cdot \vec{r}}{\partial x \partial y} (k_x - k_1)(k_y - k_2), \quad (\text{B.19})$$

Si definimos

$$d\vec{k} \cdot \vec{r} = nk_0 r - (Au^2 + Bv^2 + Cuv), \quad (\text{B.20})$$

$$A = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \vec{k} \cdot \vec{r}}{\partial k_x^2}, \quad B = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \vec{k} \cdot \vec{r}}{\partial k_y^2}, \quad C = -\frac{\partial^2 \vec{k} \cdot \vec{r}}{\partial x \partial y}, \quad u = (k_x - k_1) \quad y \quad v = (k_y - k_2).$$

Podemos expresar la solución de la ecuación (B.1)

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k_x, k_y) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} dk_x dk_y.$$

Utilizando la definición de la ecuación (B.20) y sustituyendo se tiene

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= \int \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k_x, k_y) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} dk_x dk_y, \\ \vec{E}(\vec{r}) &= \int \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k_1 \sin \theta \cos \varphi, k_2 \sin \theta \sin \varphi) e^{ink_0 r - i(Au^2 + Bv^2 + Cuv)} dudv, \\ \vec{E}(\vec{r}) &= \tilde{f}(k_1 \sin \theta \cos \varphi, k_2 \sin \theta \sin \varphi) \int \int_{-\infty}^{\infty} e^{ink_0 r - i(Au^2 + Bv^2 + Cuv)} dudv, \\ \vec{E}(\vec{r}) &= e^{ink_0 r} \tilde{f}(k_1 \sin \theta \cos \varphi, k_2 \sin \theta \sin \varphi) \int \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(Au^2 + Bv^2 + Cuv)} dudv. \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

El siguiente paso es resolver la integral,

$$I = \int \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(Au^2 + Bv^2 + Cuv)} dudv. \quad (\text{B.22})$$

Haciendo algebra con el exponente se obtiene,

$$Au^2 + Bv^2 + Cuv = \left[ \left( \sqrt{A}u \right)^2 + \frac{2\sqrt{A}}{2\sqrt{A}} Cuv + \left( \frac{Cv}{2\sqrt{A}} \right)^2 \right] - \frac{C^2 v^2}{4A} + Bv^2,$$

$$Au^2 + Bv^2 + Cuv = \left( \sqrt{Au} + \frac{Cv}{2\sqrt{A}} \right)^2 - \frac{C^2v^2}{4A} + Bv^2. \quad (\text{B.23})$$

Haciendo un cambio de variable se obtiene,

$$W = \sqrt{Au} + \frac{Cv}{2\sqrt{A}}, \quad (\text{B.24})$$

$$\frac{dW}{du} = \sqrt{A} \Rightarrow du = \frac{dW}{\sqrt{A}}. \quad (\text{B.25})$$

Sustituyendo (B.23), (B.24) y (B.25) en (B.22) se obtiene,

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iW^2} e^{-i\left(\frac{4AB-C^2}{4A}\right)v^2} \frac{dW}{\sqrt{A}} dv = \frac{1}{\sqrt{A}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iW^2} dW \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\left(\frac{4AB-C^2}{4A}\right)v^2} dv. \quad (\text{B.26})$$

Realizando las integrales usando a la conocida formula,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\gamma(x-x_0)^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\gamma}} e^{i\frac{\pi}{4}}. \quad (\text{B.27})$$

Evaluando para  $W$  y  $v$  se obtiene,

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{i^2 \sqrt{A}} e^{i\pi/4} \sqrt{\frac{\pi}{\left(\frac{4AB-C^2}{4A}\right)}} e^{i\pi/4} = e^{i\pi/2} \frac{\pi}{\sqrt{\left(\frac{4AB-C^2}{4}\right)}} = \left( \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right) \frac{\pi}{i^2 \sqrt{4AB-C^2}},$$

$$I = \frac{2\pi}{i\sqrt{4AB-C^2}} = -\frac{2\pi i}{\sqrt{4AB-C^2}}. \quad (\text{B.28})$$

Evaluando los coeficientes A, B y C tenemos,

$$A = \frac{r}{2} \left( \frac{1}{nk_0} + \frac{k_1^2}{n^3 k_0^3 \cos^2 \theta} \right), \quad (\text{B.29})$$

$$B = \frac{r}{2} \left( \frac{1}{nk_0} + \frac{k_2^2}{n^3 k_0^3 \cos^2 \theta} \right), \quad (\text{B.30})$$

---



---


$$C = \frac{k_1 k_2 r}{n^3 k_0^3 \cos^2 \theta} . \quad (\text{B.31})$$

Sustituyendo los valores en (B.28) se obtiene,

$$I = -\frac{2\pi i}{\sqrt{4AB - C^2}} = -\frac{2\pi i n k_0 \cos \theta}{r} . \quad (\text{B.32})$$

Con lo que se obtiene el resultado buscado,

$$\vec{E}(\vec{r}) \approx -\frac{2\pi i n k_0 \cos \theta}{r} e^{i n k_0 r} \tilde{f}(k_1 \sin \theta \cos \varphi, k_2 \sin \theta \sin \varphi) , \quad (\text{B.33})$$

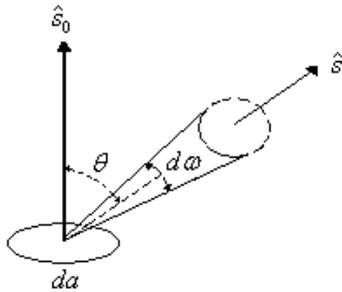
donde

$$f(k_x, k_y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E(x, y) e^{-k_x x - k_y y} dx dy .$$

# Apéndice C

## Teoría de dos flujos o teoría Kubelca-Munk

En teoría de transferencia radiativa se define la intensidad específica  $I(\vec{r}, \hat{s})$ , la cual describe el flujo de potencia que atraviesa un elemento diferencial de superficie centrado en un punto  $\vec{r}$  con un área  $da$  orientada en la dirección de un vector unitario  $\hat{s}_0$  dentro de un ángulo sólido  $d\omega$  alrededor de la dirección  $\hat{s}$  y en un intervalo de frecuencia  $d\nu$  centrado a la frecuencia  $\nu$ , y esta dado por:



$$dP = I(\vec{r}, \hat{s}) \cos \theta da d\omega d\nu$$

$$d\omega = \sin \theta d\theta d\varphi$$

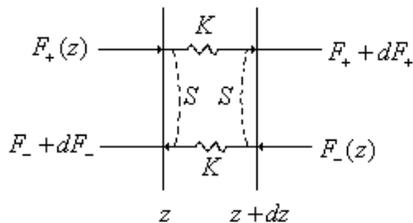
En un problema de invarianza traslacional en un plano (x-y), se define un flujo positivo  $F_+(z)$ , y otro negativo  $F_-(z)$ , en la dirección normal (eje z),

$$\begin{aligned} F_+(z) &= \int_{2\pi^+} I_\nu(\vec{r}, \hat{s}) [\hat{s} \cdot \hat{a}_z] d\omega, \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} I_\nu(z, \theta) \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} F_-(z) &= \int_{2\pi^-} I_\nu(\vec{r}, \hat{s}) [\hat{s} \cdot -\hat{a}_z] d\omega \\ &= \int_0^{2\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} I_\nu(z, \theta) \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi. \end{aligned}$$

En la teoría de dos flujos se define un coeficiente de esparcimiento  $S(\nu)$  y un coeficiente de absorción  $K(\nu)$  de manera que



$$dF_+ = -(K + S)F_+ \rho \sigma_i dz + SF_- \rho \sigma_i dz,$$

$$dF_- = -SF_+ \rho \sigma_i dz + (K + S)F_- \rho \sigma_i dz,$$

donde  $\rho$  es la densidad en número de partículas y  $\sigma_i$  es la sección transversal total de una partícula. Definiendo la distancia óptica adimensional  $\tau = \rho\sigma_i dz$ , tenemos:

$$\begin{aligned}\frac{dF_+}{d\tau} &= -(K+S)F_+(\tau) + SF_-(\tau), \\ \frac{dF_-}{d\tau} &= -SF_+(\tau) + (K+S)F_-(\tau).\end{aligned}$$

Por lo tanto se genera un sistema de dos ecuaciones diferenciales acopladas. Para resolverlas supongamos una solución asumiendo una dependencia exponencial y expresando el sistema en forma matricial

$$\begin{aligned}y_1' &= -(K+S)y_1 + Sy_2, \\ y_2' &= -Sy_1 + (K+S)y_2, \\ \bar{y}' &= A\bar{y} = \begin{bmatrix} -(K+S) & S \\ S & (K+S) \end{bmatrix} \bar{y}.\end{aligned}$$

Al sustituir  $\bar{y} = \bar{x}e^{\delta z}$  y  $\bar{y}' = \delta\bar{x}e^{\delta z}$  y eliminar la función exponencial se obtiene  $A\bar{x} = \delta\bar{x}$ . La ecuación característica es,

$$\det(A - \delta I) = \begin{vmatrix} -(K+S) - \delta & S \\ S & (K+S) - \delta \end{vmatrix} = \delta^2 - K(K+2S) = 0.$$

Obteniendo se los eigenvalores  $\delta_1 = \sqrt{K(K+2S)}$  y  $\delta_2 = -\sqrt{K(K+2S)}$ . La ecuación que describe los eigenvalores es

$$(-(K+S) - \delta)x_1 + Sx_2 = 0.$$

Para  $\delta_1 = \sqrt{K(K+2S)}$  se tiene  $(-(K+S) - \delta_1)x_1 + Sx_2 = 0$ , por lo que puede tomarse

$$\bar{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{(K+S) + \sqrt{K(K+2S)}}{S} \end{bmatrix}.$$

De la misma forma, tomando  $\delta_2 = -\sqrt{K(K+2S)}$  se obtiene,

$$\bar{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{-(K+S) + \sqrt{K(K+2S)}}{S} \end{bmatrix}.$$

---

---

Si definimos

$$A_+ = \frac{(K+S)+\alpha_0}{S}, \quad A_- = \frac{-(K+S)+\alpha_0}{S} \quad \text{y} \quad \tau = \sqrt{K(K+2S)},$$

podemos expresar la solución general en la forma siguiente,

$$\bar{y} = c_1 \bar{y}_1 + c_2 \bar{y}_2 = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ A_+ \end{bmatrix} e^{\tau z} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ A_- \end{bmatrix} e^{-\tau z}.$$

Por lo tanto, la solución general al sistema de ecuaciones de Kubelka-Munk es

$$\begin{aligned} F_+ &= c_1 e^{\tau z} + c_2 e^{-\tau z}, \\ F_- &= c_1 A_+ e^{\tau z} + c_2 A_- e^{-\tau z}. \end{aligned}$$

Si suponemos un semi-espacio de un medio inhomogéneo uniforme y sin reflexión de superficie sobre el que incide un flujo  $F_i$  se tienen las condiciones siguientes

$$\begin{aligned} F_+(0) &= F_i, \\ F_+(\tau \rightarrow \infty) &= F_-(\tau \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

De la segunda condición se tiene que necesariamente  $c_1 = 0$  y de la primera se obtiene

$$F_+ = F_i e^{-\tau z}.$$

Indicando que el flujo positivo tiene una dependencia decayente de forma exponencial conforme ingresa al medio inhomogéneo.

---

---

## Apéndice D

Producto del tema de tesis desarrollado aquí se obtuvo un escrito el cual fue presentado en la VII Reunión Iberoamericana de Óptica (RIO) y X encuentro Latinoamericano de Óptica, Láseres y Aplicaciones (OPTILAS), RIO-OPTILAS 2010, el cual se llevó a cabo en la ciudad de Lima, Perú del 20 al 24 de septiembre de 2010. El trabajo presentado actualmente se encuentra en revisión para su publicación en el *Journal of Physics: Conference Series (JPCS)* y es el siguiente:

### Experimental evidence of an effective medium seen by diffuse light in turbid colloids

**H. Contreras-Tello and A. Garcia-Valenzuela**

Centro de Ciencias Aplicadas y Desarrollo Tecnológico, Universidad Nacional Autónoma de México, Apartado postal 70-186, 04510, México DF, México

E-mail: [humberto.contreras@ccadet.unam.mx](mailto:humberto.contreras@ccadet.unam.mx), [augusto.garcia@ccadet.unam.mx](mailto:augusto.garcia@ccadet.unam.mx)

**Abstract.** The propagation of diffuse light in turbid media is usually modelled with radiative transfer theory. When diffuse light travelling in a turbid colloid is reflected and transmitted at a flat interface where there is a refractive index mismatch, it is not clear whether one should assume the incident diffuse-light is travelling in a medium with a refractive index equal to that of the background medium (usually referred to as the matrix) or if one should assume it travels in an effective medium. Most authors simply avoid this issue and most often use the refractive index of the matrix. While this might be a good approximation for dilute turbid media one may suspect that for highly scattering materials it may not be the case. In this work we investigate experimentally this issue. Our experimental results provide clear evidence that diffuse light inside the turbid colloid travels in an effective medium and not in the matrix.

#### 1. Introduction

The problem of propagation and scattering of light in turbid media has attracted the attention of many researchers since many years ago. Many of them have focused on trying to give an explanation to visual phenomena that occur in nature as the colour of the sky, air turbulence, etc... Colloids are of particular interest in many applications. We refer here to a random ensemble of particles embedded in an otherwise homogeneous substance as colloid. Some common examples of turbid colloids are milk, blood and paint.

When light is transmitted through colloidal media it gets multiply scattered at the randomly located particles. After being scattered, light can be split into an average and a fluctuating component. The average component is usually called the coherent component of light and the fluctuating one is referred to as the diffuse component of light. If the size of particles is very small compared to the wavelength of the incident radiation, the diffuse component carry a small amount of power and the whole description of light propagation can be given only in term of the coherent component. However, if the size of the particles is not very small compared to the wavelength of

---

---

the incident radiation, the power carried by the diffuse component becomes important, giving rise to a turbid appearance of the system.

Different theories have been developed to model the behavior of coherent component of light in dilute turbid colloids such as extended effective-medium theories and coherent wave-scattering theory (e.g. see Ref. [1] and references therein). Recently, the non-local nature of the effective electromagnetic response of turbid colloids has been established, clarifying the origin of some of the inconsistencies and restrictions previously noted in extended effective medium theories [2].

The propagation of the diffuse component of light within an inhomogeneous medium is usually modeled with radiative-transfer theory. Radiative transfer theory relies on an energy balance equation for the specific intensity (or radiance) obtained from the incoherent addition of the incident and the scattered light [3]. The reflection and transmission of diffuse light at the interfaces of an inhomogeneous medium is commonly treated using Fresnel's relationships assuming the refractive index of the inhomogeneous media is that of the matrix [e.g., see Refs. [4-7]]. The question arises whether one should consider an effective refractive index of refraction when calculating the reflectance of the coherent components of the diffuse light instead of the refractive index of the matrix alone. Also, one may question the validity of the Fresnel relationships in this case. The present paper is motivated in part by the need to provide experimental evidence on this matter. To this end we use as simple experimental setup, previously proposed in [8], where we can observe clearly whether diffuse light exiting a turbid colloid comes from a medium with the refractive index of the matrix or not. In this paper, we report measurements of light intensity profiles of diffuse light refracted at a plane interface showing the dependence of the light's refraction on the concentration of colloidal particles; such dependence indicates that the transmission of the diffuse light from a turbid medium depends on the presence of the colloidal particles and not on the optical properties of the matrix alone. Our measurements may be used to test possible models of refraction of diffuse light exiting a turbid inhomogeneous medium through a plane interface.

## 2. Experimental Device

When diffuse light travelling in a transparent medium is transmitted to a transparent medium of higher refractive index, it is confined to a cone around the normal to the interface. The aperture angle of the diffuse-light cone is equal to the critical angle for that interface. If diffuse light comes from a turbid medium and is transmitted to a transparent glass prism, a diffuse-light cone may be observed. The intensity angular-profile defining the borders of the light cone will depend on the refractive index "seen" by the diffuse light within the turbid colloid.

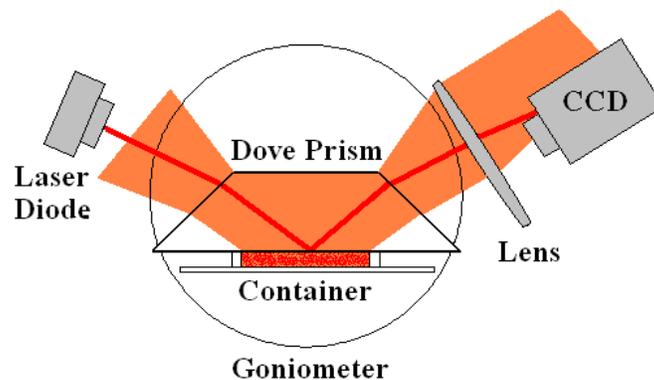
To measure the intensity angular-profile of the refracted diffuse light refracted out of the turbid medium into a glass of higher refractive index we assembled the experimental device shown in Fig 1. We clamped a cylindrical container at the base of a Dove prism made of BK7 (refractive index of 1.51 at  $\lambda = 635$  nm). The prism and container were placed on top of a goniometer to allow adjusting the angle of incidence. A laser beam ( $\lambda = 635$  nm) is incident on the prism base at an angle several degrees lower than the critical angle between the prism and distilled water. When the container is filled with a turbid suspension of particles in water, part of the laser beam is transmitted into the turbid colloid and part of it is reflected specularly back into the prism. The light transmitted into the cell is multiply scattered between the colloidal particles giving rise to a diffuse radiation traveling in all directions. A large portion of the diffuse light is reflected back into the prism. The directions of propagation of the reflected diffuse light in the prism are confined in a cone. A lens was placed on the exit face of the prism and thus the angular distribution of the light is mapped at the focal plane to a spatial distribution of light intensity. A CCD camera in the focal plane allows us obtain directly pictures of the angular distribution of the diffuse light reflected back into the prism for different

---

---

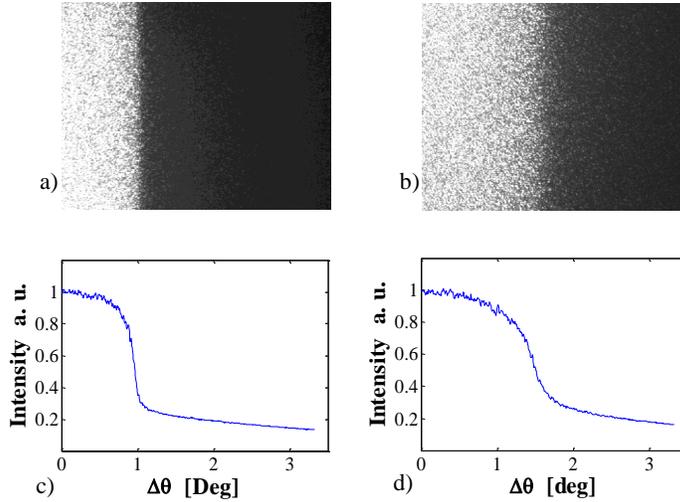
concentration of particles. The linear scale on the CCD picture may be converted to an angular scale of the directions of travel of the diffuse light inside the prism using standard optics. The coherent reflected beam is easily blocked out from the light reaching the CCD as depicted in Figure 1.

The idea of the experiment is to observe the border of the propagation cone formed by diffuse light coming out from a colloidal medium and see whether it depends on the concentration of particles. The performed experiments consisted of filling the container with a turbid colloid composed of tridistilled water (matrix medium) and a known volume concentration of highly scattering particles at different concentrations. We used TiO<sub>2</sub> (rutile) particles of mean diameter of about 220 nm with a refractive index of about 2.7 and Latex particles of mean diameter of about 450 nm with a refractive index of 1.48. Both types of particles were dispersed in distilled water. A similar experiment was actually performed by G. H. Meeten and collaborators many years ago [9]. However in their configuration light was incident to the colloidal cell from the side opposite to the prism interface. The configuration we are using here ensures that only diffuse light is refracted into the prism and allows measuring samples with much higher turbidity. The CCD camera allows us to obtain a snap photo of the intensity angular-profile defining the borders of the light cone.



**Figure 1.** Experimental setup used to visualize and measure the borders of the propagation cone formed by the diffuse light refracting out from the turbid medium.

A CCD image consists of a matrix of 640 columns and 480 rows of intensity levels (8 bits). Two examples of images of the transition zone defining the border of the angular cone of light are shown in Figures 2a and 2b. To obtain a profile of the angular-intensity distribution around the transition zone, we sum the values of all pixels in a given column (480 pixels) and plot the resulting values versus the number of the column. Figures 2a and 2c correspond to a diluted colloid of about 2% (Latex  $f \sim 2\%$ ). We can appreciate a well defined border of the light cone. Figures 2b and 2d correspond to a denser colloid (Latex  $f \sim 10\%$ ) and we can appreciate a smoother transition at the border of the light distribution.

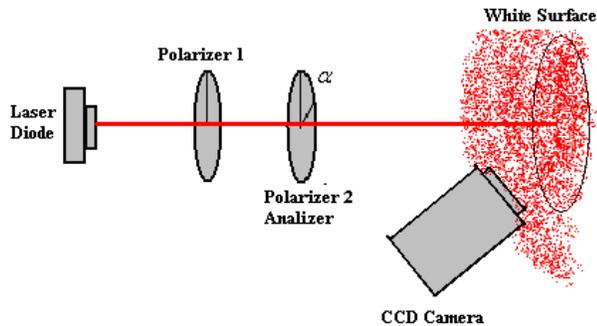


**Figure 2.** Above, snap photos obtained by the CCD camera from de edge of the cone of diffuse light for a volume concentration of particles of a)  $\sim 2\%$  and b)  $\sim 10\%$ . Down, intensity angular-profile obtained by processing snap photos, c) and d) were obtained from a) and b) respectively.

In order to use quantitatively the measured intensity angular-profiles we must transform the horizontal scale in the photographs to an angle-of-travel scale of the light inside the prism, and verify the linearity of the CCD intensity scale.

### 2.1. Verification of linear response to the light intensity of the CCD

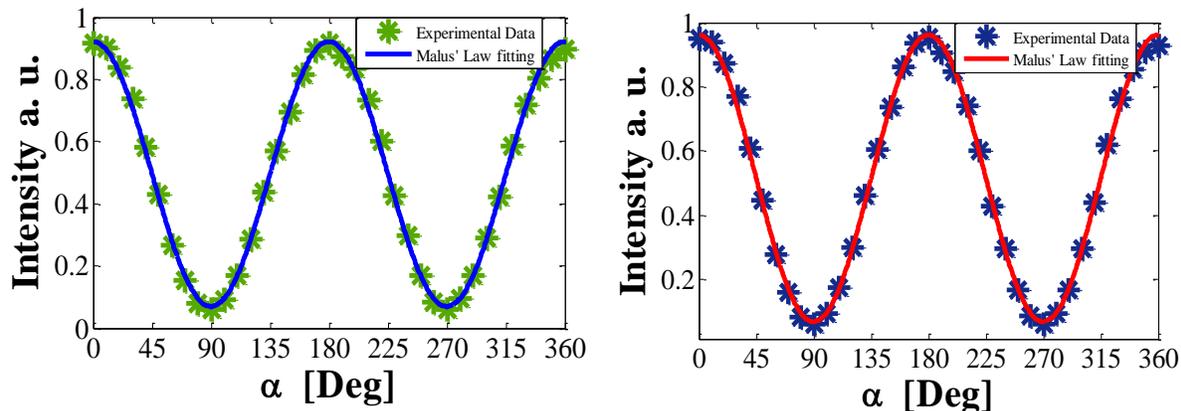
To ensure that measurements made in our experiments are reliable we needed to verify that the response of the CCD camera to the intensity variations is linear. To this end we performed the following test. A laser beam was passed through two linear polarizers with their polarization axes identified. The polarization axis of the second polarizer (the analyzer) was initially aligned with that of the first polarizer. Then, rotating by an angle  $\alpha$  the analyzer reduced the intensity of the transmitted beam according to Malus' law:  $I = I_0 \cos^2 \alpha$ .



**Figure 3.** Scheme of the experimental setup to observe the linearity of the CCD camera.

The output laser beam was projected to a white diffusing surface that scattered light in all directions. The CCD camera was placed in front of the surface in a fixed position, collecting a portion of the reflected diffuse light. A snap photo was taken initially and then successively after

the analyzer was rotated at steps of  $10^\circ$ . If the response of the CCD to variations of the intensity is linear, then the registered value at any pixel of the CCD should follow the function  $I_0 \cos^2 \alpha$  upon rotating the analyzer. We added the pixel values of several columns across the CCD and plotted the resulting value versus the angle of the analyzer  $\alpha$ . In all cases the graph followed closely Malus' law. In Figure 4 we show two examples which correspond to columns near the borders of the CCD.



**Figure 4.** Plots of the column-integrated intensity levels at the CCD in the experiment depicted in figure 3. The right side shows the plot obtained for a column of pixels near one of the borders of the CCD. The plot on the left side corresponds to a column of pixels at the other border of the CCD.

## 2.2. Angular scale

Once an intensity profile about the transition zone is registered on the CCD we must establish the relation between the lateral position along the CCD with the angle of travel of light within the prism with respect to the normal to the base of the prism. First we establish a reference value on the scale. This is done by locating the corresponding position on the CCD of the critical angle for distilled water (at this wavelength and for our prism this angle is  $\theta = 61.7^\circ$ ). To locate this angle we fill the container in the experimental device with distilled water and place a white diffusing bottom in the cell to reflect some light back into the prism. In this case we see a sharp border of the light cone on the CCD which permits us to locate clearly the reference angle on the CCD lateral scale. Then, from the focal distance of the lens used in the set up we obtain the relation between a displacement at the focal plane and a change in the angle of travel of the light before it enters the lens. Finally, using Snell's law and simple geometry, we relate the change in the angle of travel of light outside the prism to the change in the angle of travel inside the prism.

## 2.3. Materials

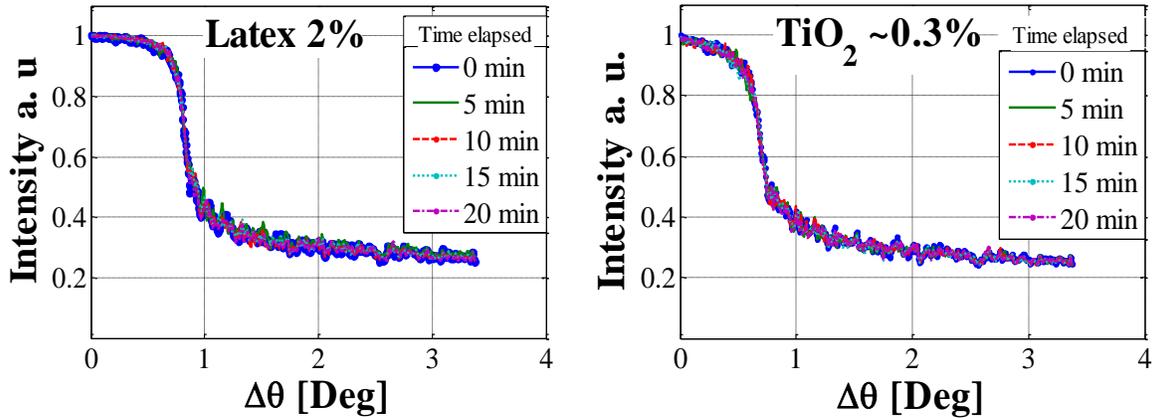
Dispersions in distilled water of  $\text{TiO}_2$  (220 nm in diameter) and latex (450 nm in diameter) particles were prepared to see whether the angular distribution of the diffuse light scattered around the border of the light cone depends on the concentration of particles. The prepared dispersions were vigorously shaken followed by ultrasonication for 5 min to break up aggregates prior to use.

Latex particles dispersions were prepared at the following volume concentrations:  $\sim 2, 5, 8, 10$ , and 12%, and those of  $\text{TiO}_2$  particles at about 0.3, 0.6, 1.2, 1.7, 2.1 and 2.5% in volume. Latex

---

---

particles were very stable and TiO<sub>2</sub> particles had sedimentation after a few hours; enough time to make the measurements presented in this paper.

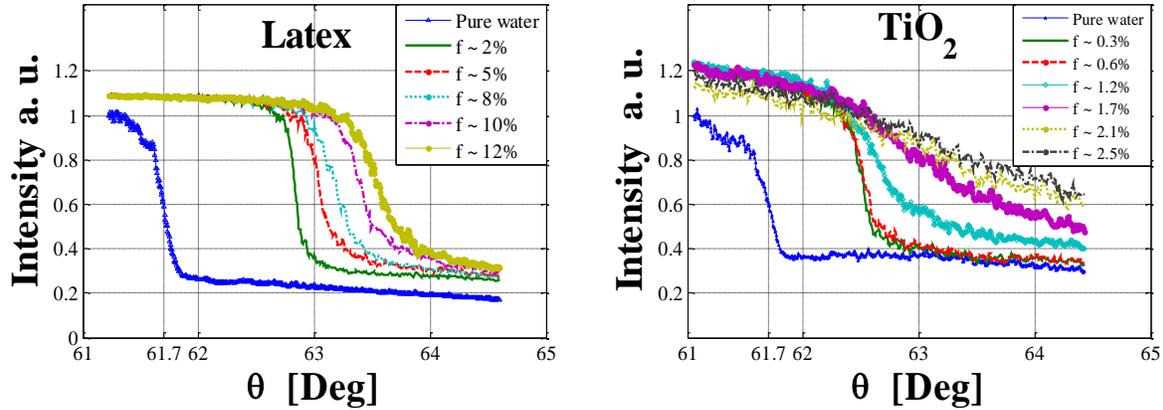


**Figure 5.** Intensity angular-profiles for a concentration of Latex and other of TiO<sub>2</sub> particles. In both plots shows the profiles measured every minute during a period of 20 minutes for the same concentration.

To test the stability of the colloidal suspensions during the experiments, we measured intensity profiles around the transition zone for two samples, one of latex particles and the other for TiO<sub>2</sub> particles. In Fig. 5 we plot the measured intensity profiles in both experiments at different times over a period of 20 minutes. One can appreciate that during the 20 minutes period the profiles were not altered. Therefore, we conclude that the particles did not settle while measurements were performed.

### 3. Experimental results

In Fig 6 we show the intensity angular-profile obtained by the CCD camera around the border of the cone of diffuse light reflected back into the prism for different volume concentrations of latex and TiO<sub>2</sub> particles immersed in tridistilled water. The left-most curves in both figures were obtained with pure water and a light diffusing screen at the bottom of the sample container. One can clearly see a sharp transition in the intensity angular profile. As the particle concentration increases, it is clear that the transition becomes smoother. In the case of the suspensions of latex particles, whose refractive index is closer to that of the water, it is clear that there is displacement to the right of the intensity angular-profile. In the case of TiO<sub>2</sub> particles whose refractive index is much higher than the index of refraction of the water, it is apparent that upon increasing the concentration of particles, the maximum slope in the intensity profile is drastically reduced.



**Figure 6.** Intensity angular-profile at the plane focal of the lens of a portion of the edge of the cone of diffuse light for different volume concentrations of  $\text{TiO}_2$  and Latex particles.

The refraction laws between transparent homogeneous media of travelling waves predict that the intensity profile,  $I(\theta)$ , should be zero for angle larger than the critical angle. The measured profiles shown in Fig. 6 clearly show that this is not the case for the turbid particle suspensions. Therefore we conclude that the diffuse light cannot be assumed to be travelling waves in the matrix (water in this case). We repeated some of the experiments changing the angle of incidence of laser beam at the prism-sample interface to illuminate the container. The position and shape of the profiles obtained were basically unaltered.

#### 4. Conclusions

This experiment shows that the diffuse light transmission at a plane interface depends on the concentration of colloidal particles and not only of the matrix in which they are embedded. From a macroscopic point of view, the fact that light is transmitted outside the cone defined by the critical angle of the water-prism interface can be interpreted as a change in an effective refractive index ‘seen’ by diffuse light which depends on the type and concentration of the colloidal particles. One may argue that diffuse light can be considered as a superposition of many coherent waves which are incoherent among themselves. By coherent wave we mean the average wave over all permitted configurations of the system [1]. On the other hand, it is well known that a coherent wave travelling on a colloidal medium has an effective wave vector and one may define an effective refractive index [1, 8]. Such effective refractive index is in general a complex quantity, even in the absence of optical absorption. (The imaginary part of the effective refractive index in turbid colloids comes also from the scattering and not only from absorption.) Therefore, it appears likely that diffuse light also ‘sees’ an effective refractive index while travelling within a turbid medium. In summary, our experiments provide clear evidence that description of the refraction and propagation properties of diffuse light should consider an effective medium. Extensions of the usual radiative transfer models that incorporate such an effective medium should be explored.

#### Acknowledgments

We acknowledge financial support from Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM) through project PAPIIT IN 120309 and CONACYT D49482-F. H. Contreras is grateful to

---

---

CONACYT for the provision of a student fellowship and to the Facultad de Ingeniería of UNAM for their support in academic-logistics.

### Reference

- [1] Barrera R G and García –Valenzuela A 2003. Coherent reflectance in a system of random Mie scatterers and its relation to the effective-medium approach *J. Opt. Soc. Am.A* **20** 296
- [2] R G Barrera, A. Reyes-Coronado, A García-Valenzuela, "Nonlocal nature of the electrodynamic response of colloidal systems," *Phys. Rev. B* **75**, 184202, 1-19, (2007).
- [3] Ishimaru A. Wave propagation and scattering in random media. (New York: Academic Press, 1978)
- [4] Hans G. Völz, *Industrial Color Testing: Fundamentals and techniques*, 2<sup>nd</sup> edition, Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, ISBN: 3-527-30436-3 (2002)
- [5] RT Marcus, PE Pierce, "An analysis of the first surface correction for the color matching of organic coatings from the viewpoint of radiative transfer theory", *Prog. Org. Coatings* **23** (1994) 239-264.
- [6] A. B. Murphy, "Optical properties of an optically rough coating from inversion of the diffuse reflectance measurements" *Appl. Opt.* **46** (16), 31133-3143, 2007.
- [7] Alexander A. Kokhanovsky, Reiner Weichert, Michael Heuer, and Wolfgang Witt, "Angular Spectrum of Light Transmitted Through Turbid Media: Theory and Experiment," *Appl. Opt.* **40**, 2595-2600 (2001)
- [8] A Reyes-Coronado, A Garcia-Valenzuela, C Sánchez-Pérez and R G Barrera. "Measurement of the effective refractive index of a turbid colloidal suspension using light refraction". *New J. Phys.* **7** (2005) 89
- [9] G H Meeten and A N North. "Refractive index measurement of turbid colloidal fluids by transmission near the critical angle". *Meas. Sci. Technol* **2** 441, 1991



---

---

## BIBLIOGRAFÍA

1. Li Yang and Stanley J. Miklavcic. "Theory of light propagation incorporating scattering and absorption in turbid media". *Optics Letters*, Vol. 30, Issue 7, pp. 792-794 (2005).
2. K. Klier. "Absorption and Scattering in Plane Parallel Turbid Media". *JOSA*, Vol. 62, Issue 7, pp. 882-885 (1972).
3. Warren L. Butler. "Absorption of Light by Turbid Materials". *JOSA*, Vol. 52, Issue 3, pp. 292-299 (1962).
4. G. Zaccanti and P. Brusaglioni. "Method of measuring the phase function of a turbid medium in the small scattering angle range". *Applied Optics*, Vol. 28, Issue 11, pp. 2156-2164 (1989).
5. Edouard Berrocal, David L. Sedarsky, Megan E. Paciaroni, Igor V. Meglinski, and Mark A. Linne. "Laser light scattering in turbid media Part I: Experimental and simulated results for the spatial intensity distribution". *Optics Express*, Vol. 15, Issue 17, pp. 10649-10665 (2007).
6. Augusto García-Valenzuela, Rubén Barrera, Celia Sánchez-Pérez, Alejandro Reyes-Coronado, and Eugenio Méndez. "Coherent reflection of light from a turbid suspension of particles in an internal-reflection configuration: Theory versus experiment". *Optics Express*, Vol. 13, Issue 18, pp. 6723-6737 (2005).
7. S. Aldabe, P. Aramendía. L. Lacreu. *Química I. Fundamentos*. Editorial Colihue, 1999.
8. A Reyes-Coronado, A García-Valenzuela, C Sánchez-Pérez and R G Barrera. "Measurement of the effective refractive index of a turbid colloidal suspension using light refraction". *New J. Phys.* 7 89 (2005).
9. Augusto García-Valenzuela, Rubén Barrera, Celia Sánchez-Pérez, Alejandro Reyes-Coronado, and Eugenio Méndez. "Coherent reflection of light from a turbid suspension of particles in an internal-reflection configuration: Theory versus experiment". *Optics Express*, Vol. 13, Issue 18, pp. 6723-6737 (2005)
10. Boren C. y Huffman D. *Absorption and scattering of light by small particles*. A Wiley-Interscience publication, 1998.

- 
- 
11. R. G. Barrera, A. Reyes-Coronado, A. Garcia-Valenzuela, "Nonlocal nature of the electrodynamic response of colloidal systems," *Phys. Rev. B* **75**, 184202, 1-19, (2007).
  12. Ishimaru A. *Wave propagation and scattering in random media*. New York: Academic Press, 1978.
  13. Van de Hulst, H. C., *Light Scattering by Small Particles*, Wiley, New York, (1983).
  14. A. García-Valenzuela and R. G. Barrera. "Electromagnetic response of a random half-space of Mie scatterers within the effective-field approximation and the determination of the effective optical coefficients", *Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer*, pag 79-80, (2003).
  15. L. Tsang, J. A. Kong. *Scattering of Electromagnetic Waves, Volumen 3. Advanced Topics*. John Wiley and Sons, Inc. (2001).
  16. Alexander A. Kokhanovsky, Reiner Weichert, Michael Heuer, and Wolfgang Witt, "Angular Spectrum of Light Transmitted Through Turbid Media: Theory and Experiment", *Appl. Opt.* **40**, 2595-2600 (2001)
  17. Florian Voit, Jan Schäfer, and Alwin Kienle, "Light scattering by multiple spheres: comparison between Maxwell theory and radiative-transfer-theory calculations," *Opt. Lett.* **34**, 2593-2595 (2009).
  18. Akira Ishimaru and C. W. Yeh, "Matrix representations of the vector radiative-transfer theory for randomly distributed nonspherical particles," *J. Opt. Soc. Am. A* **1**, 359-364 (1984).
  19. Jan Schäfer and Alwin Kienle, "Scattering of light by multiple dielectric cylinders: comparison of radiative transfer and Maxwell theory," *Opt. Lett.* **33**, 2413-2415 (2008).
  20. Gilbert N. Plass, George W. Kattawar, and Frances E. Catchings, "Matrix Operator Theory of Radiative Transfer. 1: Rayleigh Scattering," *Appl. Opt.* **12**, 314-329 (1973).
  21. Hecht E. *Óptica*. 3ra edición. Addison Wesley Iberoamericana, Madrid, 2000.
  22. M Born, E. Wolf. *Principles of optics* 7th edition. Cambridge 2002.
  23. Hernández Sánchez E. *Refractómetro espectroscópico por reflexión interna*. Tesis Maestría, Posgrado en Ingeniería, UNAM 2010.
  24. Relación entre índice de refracción y sólidos totales en extractos acuosos de *Calendula officinalis* L. (caléndula) y *Ocimum sanctum* L. (albahaca morada) *Revista Cubana de Plantas Medicinales*. 2009; 14(3):23-28.

- 
- 
25. R.G. Barrera y A. Garcia-Valenzuela, "Coherent reflectance in a system of random Mie scatterers and its relation to the effective-medium approach". *J. Opt. Soc. Am. A* **20**, 296, (2003).
  26. Hans G. Völz, *Industrial Color Testing: Fundamentals and techniques*, 2<sup>nd</sup> edition, Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, ISBN: 3-527-30436-3 (2002).
  27. RT Marcus, PE Pierce, "An analysis of the first surface correction for the color matching of organic coatings from the viewpoint of radiative transfer theory", *Prog. Org. Coatings* **23** 239-264, (1994).
  28. A. B. Murphy, "Optical properties of an optically rough coating from inversion of the diffuse reflectance measurements" *Appl. Opt.* **46** (16), 31133-3143, (2007).
  29. G.H Meeten y A. N. North "Refractive index measurement of absorbing a turbid fluids by reflection near the critical angle". *Meas. Sci. Technol.* **6**, 214, (1995).
  30. M Mohammadi, "Colloidal Refractometry: meaning and measurement of refractive index for dispersions; the science that time forgot". *Adv. Colloid & Interf. Sci.* **62**, 17, (1995).
  31. A. Chou y M. Kerker, "the refractive index of colloidal sols", *J. Phys. Chem.* **60**, 562, (1956).
  32. K. Alexander, A. Killey, G.H Meeten y M. Senior "Refractive index of concentrated colloidal dispersions". *J. Chem. Soc., Faraday Trans.* **77**, 361, (1981).
  33. G. H. Meeten y A. N. North, "Refractive index measurement of turbid colloidal fluids by transmission near the critical angle". *Meas. Sci. Technol.* **2**. 441. (1991).
  34. G. H. Meeten. "Refraction by spherical particles in the intermediate scattering region", *Opt. Comm.* **134**. 233. (1997).
  35. G. H. Meeten. "Refractive index errors in the critical-angle and the Brewster- angle methods applied to absorbing and heterogeneous materials". *Meas. Sci. Technol.* **8**. 728. (1997).
  36. Edmund optics <http://www.edmundoptics.com/onlinecatalog/>.
  37. Collin Robert E. *Antennas and radiowave propagation*. Mc-Graw Hill series in electrical engineering. 1985.
  38. M. Daimon and A. Masumura, "Measurements of the refractive index of distilled water from the near-infrared region to the ultraviolet region," *Appl. Opt.* **46**, 3811–3820 (2007).

- 
- 
39. Li Yang and Stanley J. Miklavcic. "Theory of light propagation incorporating scattering and absorption in turbid media". *Optics Letters*, Vol. 30, Issue 7, pp. 792-794 (2005).
  40. K. Klier. "Absorption and Scattering in Plane Parallel Turbid Media". *JOSA*, Vol. 62, Issue 7, pp. 882-885 (1972).
  41. Warren L. Butler. "Absorption of Light by Turbid Materials". *JOSA*, Vol. 52, Issue 3, pp. 292-299 (1962).
  42. G. Zaccanti and P. Brusaglioni. "Method of measuring the phase function of a turbid medium in the small scattering angle range". *Applied Optics*, Vol. 28, Issue 11, pp. 2156-2164 (1989).
  43. Edouard Berrocal, David L. Sedarsky, Megan E. Paciaroni, Igor V. Meglinski, and Mark A. Linne. "Laser light scattering in turbid media Part I: Experimental and simulated results for the spatial intensity distribution". *Optics Express*, Vol. 15, Issue 17, pp. 10649-10665 (2007).
  44. E. W. Marchand, "Optics in the Kodak Research Laboratories", *Appl. Opt.* **11**, 60-63 (1972).
  45. R. Ruppin. "Evaluation of extended Maxwell Garnett theories", *Opt. Commun.* **182**, 273-279 (2000).
  46. Petr Chyýlek, Vandana Srivastava, Ronald G. Pinnick, and R. T. Wang, "Scattering of electromagnetic waves by composite spherical particles: experiment and effective medium approximations," *Appl. Opt.* **27**, 2396-2404 (1988).
  47. Reichman J. "Applicability of effective-medium theories to problems of scattering and absorption by nonhomogeneous atmospheric particles". *Appl Opt.* 12(8):1811-5, (1973).
  48. Paul Latimer and Seung Jeong Noh, "Light propagation in moderately dense particle systems: a reexamination of the Kubelka-Munk theory," *Appl. Opt.* **26**, 514-523 (1987).
  49. Andreas H. Hielscher, Judith R. Mourant, and Irving J. Bigio, "Influence of particle size and concentration on the diffuse backscattering of polarized light from tissue phantoms and biological cell suspensions," *Appl. Opt.* **36**, 125-135 (1997).
  50. A. Edward Profio, "Light transport in tissue," *Appl. Opt.* **28**, 2216-2222 (1989).
  51. Reyes Coronado, Alejandro. "Respuesta electromagnética efectiva no local de sistemas coloidales turbios: teoría y experimento". Tesis Doctoral, Posgrado en Ciencias Físicas, UNAM, 2007.