



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MEXICO**

---

---

**PROGRAMA DE MAESTRIA Y DOCTORADO EN  
INGENIERIA**

FACULTAD DE INGENIERÍA

**VOLATILIDAD, CRECIMIENTO ECONÓMICO Y  
DESIGUADAD: UN MODELO DE CONTROL ÓPTIMO  
ESTOCÁSTICO**

**T E S I S**

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

**MAESTRO EN INGENIERÍA**

INGENIERÍA DE SISTEMAS – INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

P R E S E N T A :

**SAUL MENDOZA PALACIOS**

TUTOR:

**DR. FRANCISCO VENEGAS MARTINEZ**

AÑO 2010



**JURADO ASIGNADO:**

Presidente: Dra. Balderas Cañas Patricia  
Secretario: Dra. Elizondo Cortez Mayra  
Vocal: Dr. Venegas Martínez Francisco  
1<sup>er.</sup> Suplente: Dr. Sierra Juárez Guillermo  
2<sup>do.</sup> Suplente: M.I. Silva Haro Jorge Luis

Lugar o lugares donde se realizó la tesis:  
Ciudad Universitaria, Distrito Federal, México.

**TUTOR DE TESIS:**

Dr. Venegas Martínez Francisco

---

**FIRMA**

*A mis padres y a Edith con cariño*

Agradezco a:

mis padres y hermanos por su apoyo moral y económico,

Edith por su apoyo incondicional,

mi tutor Francisco por su amistad y apoyo académico,

Patricia Balderas por su apoyo académico,

los sinodales por el interés presentado en mi tesis.

# ÍNDICE

---

Introducción.....	3
Capítulo 1. Antecedentes.....	7
1.1 Introducción al crecimiento económico.....	7
1.2 Medidas de desigualdad de ingresos.....	10
1.3 Metodología.....	11
Capítulo 2. Elementos de cálculo estocástico.....	15
2.1 Probabilidad y procesos estocásticos.....	15
2.2 Proceso Wiener o movimiento Browniano.....	18
2.3 La integral de Itô.....	20
2.4 La fórmula de Itô.....	25
2.5 Ecuaciones diferenciables estocásticas.....	29
2.6 Propiedades Markovianas.....	31
2.7 El problema Dirichlet-Poisson.....	37
Capítulo 3. Control óptimo estocástico.....	39
3.1 Planteamiento del problema.....	39
3.2 Ecuación de Bellman.....	44
3.3 Aplicaciones a la teoría del portafolio.....	50
Capítulo 4. Volatilidad, Crecimiento Económico y desigualdad.....	53
4.1 Descripción de la economía y supuestos del modelo.....	53
4.2 Solución del modelo económico.....	59
4.3 El equilibrio macroeconómico.....	66
4.4 Determinantes de la distribución del ingreso.....	72
4.5 Relación entre la volatilidad y la distribución del ingreso.....	76
4.6 Determinantes del bienestar económico.....	79
4.7 Política fiscal y su relación con la desigualdad y el crecimiento.....	82

Capítulo 5. Simulación del modelo.....	87
5.1 Variables de entradas del modelo, y calibración de modelo .....	88
5.2 Análisis de la volatilidad (una economía sin gobierno) .....	91
4.2 Análisis de la política fiscal.....	92
Conclusiones.....	96
Apéndice.....	101
A1 Condición de transversalidad.....	101
A2 Existencia de equilibrio de crecimiento balanceado.....	103
Bibliografía.....	105

# INTRODUCCIÓN

---

Dar respuesta a las preguntas ¿cómo se genera la desigualdad de ingresos? y ¿cómo ésta se reproduce a lo largo del tiempo? ha sido uno de los mayores retos de los científicos sociales. El interés no sólo se concentra en la generación y reproducción de la pobreza, sino también en sus consecuencias y en sus relaciones con otras variables económicas y sociales (tales como el crecimiento económico, el bienestar social y el desarrollo económico). Establecer una relación entre la desigualdad de ingresos y el proceso de desarrollo económico sería un importante avance en materia de política social. Sin embargo, esta relación se encuentra aún lejos de ser bien entendida. No obstante, la relación entre el crecimiento económico, la desigualdad de ingresos y los niveles de bienestar, han atraído la atención en la teoría económica en los últimos 50 años mostrando diversos resultados.

La relación existente entre desigualdad económica y crecimiento económico ha sido controversial entre los economistas y los teóricos sociales. Los intentos por explicar las relaciones entre la desigualdad y tasas de crecimiento han sido contrapuestos en la literatura empírica y teórica, es decir, se han encontrado países donde los niveles de desigualdad tienen una relación positiva con la tasa de crecimiento, mientras que por otro lado existen países donde altos niveles de desigualdad son causantes de sus bajas tasas de crecimiento. Barro (2000) encuentra una relación positiva en estas variables en países desarrollados y una relación negativa en países subdesarrollados. Una reseña bibliográfica de esta discusión se encuentra en el trabajo realizado por Aghion, Caroli y García-Peñalosa (1999), donde también se discuten cuestiones de los efectos de la volatilidad en la macroeconomía.

Un camino alternativo que ha tomado la investigación económica consiste en estudiar a la desigualdad y al crecimiento económico como procesos independientes. Al respecto, Lundberg y Squire (2003) analizaron varios factores que pueden potencialmente influir en la desigualdad y en el crecimiento, mostrando que sus pruebas empíricas fueron significativas.

A pesar de estas controversias una cosa es clara, tanto el crecimiento económico como los niveles de desigualdad son resultados endógenos de un sistema económico. Por tanto,

ambos son sujetos de las políticas económicas adoptadas y los cambios estructurales de la economía. Otro factor importante que afecta al crecimiento y a la desigualdad es el riesgo o volatilidad. Dentro de la teoría del crecimiento económico es posible encontrar trabajos que relacionan estas dos variables (parte de esta literatura son los trabajos en ciclos económicos) entre ellos se pueden mencionar, por ejemplo, a: Grinols y Turnovsky (1993, 1998), Smith (1996), and Corsetti (1997). Por otro lado, existe evidencia empírica que también relaciona la volatilidad macroeconómica con los niveles de desigualdad, por ejemplo, los países latinoamericanos tienen altos niveles de desigualdad (su índice de Gini oscila entre 0.45 y 0.64) y sus tasas de crecimiento tienen mayores fluctuaciones en comparación con los países de la Unión Europea, además estos últimos tienen niveles de desigualdad menores. García-Peñalosa y Breen (2004) obtienen relaciones positivas entre la volatilidad macroeconómica y los niveles de desigualdad.

El propósito de la tesis es dar una respuesta sólida y argumentada a 3 preguntas de interés científico social y económico:

- i)* ¿Qué variables determinan a la desigualdad de ingresos y que relación tienen con el crecimiento económico?
- ii)* ¿Cómo afectan los niveles de riesgo de un país (volatilidad macroeconómica) al crecimiento económico, distribución de ingresos y bienestar?
- iii)* ¿Qué políticas económicas se deben adoptar para lograr mayores tasas de crecimiento económico, con una distribución de ingresos equitativa?

Luego el objetivo de la tesis es desarrollar un modelo de crecimiento económico endógeno y con volatilidad estocástica en el que se agregan dos supuestos:

- i)* existe una distribución determinada en el capital inicial,
- ii)* la oferta laboral es elástica (es decir, se tiene una “gran” sensibilidad respecto a la tasa salarial).

La argumentación teórica se encuentra bajo un contexto de control óptimo estocástico. Bajo estas condiciones, la tasa de crecimiento del país y la distribución de ingreso se determinan de forma conjunta. Dentro del modelo se encuentra que la oferta laboral de equilibrio, determina los rendimientos del capital y sus efectos directos están en la tasa de

crecimiento de la economía y en la distribución del ingreso. Por último se examinarán los efectos de las políticas económicas (a través de subsidios a la inversión y su financiamiento por los diferentes tipos de impuesto) en la tasa de crecimiento, distribución del ingreso y el bienestar social. Por último se contrasta el modelo teórico con la evidencia empírica a través de simulaciones realizadas para México.

Se utilizará una adaptación del modelo de crecimiento con tecnología “AK” y, como consecuencia, una vez determinadas la distribución del ingreso y la tasa de crecimiento, éstas son invariantes en el tiempo. El modelo “AK” fue propuesto por Romer en 1986, también conocido como modelo de crecimiento endógeno, donde el proceso tecnológico es un proceso inexplicado que permite un crecimiento sostenido. Para ver otros aspectos sobre las diferentes teorías de crecimiento existentes se puede ver el libro *Economic Growth* de Barro y Sala-i-Martin (1995).

El modelo que se desarrolla está basado en tres investigaciones realizadas por García-Peñalosa y Turnovsky (2004), (2005) y (2006). La presente tesis está organizada como sigue.

En el capítulo 1, se muestran los antecedentes históricos del crecimiento económico y su relación con la desigualdad de ingresos, se presenta una breve introducción del índice de Gini, así como la metodología a seguir en el desarrollo de la tesis.

Dado la parte medular de la tesis se encuentra en un contexto de control óptimo estocástico se incluyeron dos capítulos, uno referente al cálculo estocástico y el otro referente al control óptimo estocástico.

En el capítulo 2, se establecen los principales resultados teóricos del cálculo estocástico para su utilización en los capítulos posteriores y su contenido es de carácter introductorio. Los puntos importantes de este capítulo son:

- a) Lema de Itô
- b) Propiedades Markovianas de una Difusión de Itô
- c) Fórmula de Dynkin
- d) Operador Diferencial

En el capítulo 3 se establecen de manera formal la problemática que enfrenta el control óptimo estocástico y las condiciones de primer orden del problema de optimización intertemporal estocástico (la ecuación de Bellman), así como las condiciones de segundo orden (condiciones de transversalidad) para la solución del problema. Por último se da un ejemplo de cómo se emplean los resultados de los teoremas expuestos a modelos económico.

En este el capítulo 4 es la parte medular de la tesis en él se desarrolla el modelo de control óptimo estocástico que caracteriza, las condiciones del equilibrio macroeconómico, así como las condiciones del crecimiento económico. Por último se analizarán los efectos de la política económica en la tasa de crecimiento, distribución del ingreso, y el bienestar social.

Por último en el capítulo 5 se contrasta el modelo teórico con la evidencia empírica a través de simulaciones realizadas para México. En la primera parte de las simulaciones se establece la relación entre la volatilidad macroeconómica, el crecimiento económico y la desigualdad de ingresos. En la segunda parte de las simulaciones se determinan los efectos de las políticas económicas, en la distribución del ingreso, el bienestar social y el crecimiento económico.

# CAPÍTULO 1

## ANTECEDENTES

---

### 1.1 Introducción al crecimiento económico

El propósito del capítulo es dar una breve introducción a la teoría del crecimiento económico y su relación con la desigualdad de ingresos.

La pregunta ¿Cómo crece el PIB de un país?, es una incógnita bastante analizada en el mundo de la economía e incluso con distintas vertientes y controversias.

Harrod (1939) y Domar (1946) fueron los primeros economistas en mirar la formación del capital, para intentar explicar como se incrementan los estándares de vida. Para 1956, Solow formaliza la idea de, que la acumulación de capital es causante de crecimiento, bajo una dinámica de inversión.

Sin embargo, el enfoque moderno del crecimiento económico se inicia con Cass (1965) y Koopmans (1965), quienes introducen el enfoque de optimización intertemporal propuesto por Ramsey en 1928. En este enfoque, se toma a un agente “racional” representativo, quien maximiza su utilidad en cada instante de tiempo para un periodo infinito, condicionado a una función de producción. A diferencia del modelo de Solow, el modelo de Ramsey introduce la acumulación y el consumo de una manera endógena, permitiendo que el agente “racional” seleccione la cantidad ahorro y consumo en cada periodo. En este modelo supone una economía sin distorsiones, y el proceso de acumulación de capital se realiza bajo un esquema tecnológico relativamente rígido. El modelo de control óptimo sería el siguiente:

$$\text{Maximizar}_{c(t)} \int_0^{\infty} U(c(t))e^{-\beta t} dt$$

sutjeto a

$$\dot{k}(t) = Af(k(t)) - c(t) - \delta k(t)$$

donde:

- i)  $U(c(t))$  es la función de utilidad del consumidor, quien solamente consume el bien  $c(t)$  en el tiempo  $t$ ,
- ii)  $\beta$  es la tasa de descuento intertemporal, es la importancia que tiene el consumo de hoy respecto al consumo futuro,
- iii)  $Af(k(t))$  es la función de producción de la economía que depende del capital  $k(t)$  en cada periodo, donde  $A$  es una constante que representa al nivel tecnológico y  $f(\cdot)$  es una función doblemente diferenciable tal que  $f'(\cdot) > 0$  y  $f''(\cdot) < 0$ .
- iiii)  $\delta$  es la tasa de depreciación del capital y  $\dot{k}(t) = \frac{dk(t)}{dt}$ .

Fue hasta 1982, cuando Kydland y Prescott desarrollan un modelo de equilibrio general bajo incertidumbre, con la existencia de shocks tecnológicos. Una versión en tiempo continuo del modelo de Prescott podría ser el siguiente:

$$\text{Maximizar}_{c(t)} E \left[ \int_0^{\infty} U(c(t))e^{-\beta t} dt \right]$$

sutjeto a

$$dk = Af(k(t))(dt + du) - [c(t) - \delta k(t)]dt$$

donde,  $du$  es un shock o choque estocástico en el tiempo  $t$ , y  $du = \mu + \sigma dB$ , con  $\mu = 0$  y  $B$  es un proceso Geométrico Wiener. (Ver capítulo 2).

En estos modelos, la función de producción es cóncava, lo que provoca que periodo a periodo la tasa de crecimiento del PIB se reduzca y que en el infinito no exista posibilidad alguna de crecimiento. La única forma de evitar esto es que el factor tecnológico crezca de forma exógena.

Para 1986, Romer formula un nuevo modelo en el que la función de producción agregada es lineal, bajo el supuesto de que la economía genera externalidades. A este modelo se le denomina también, AK debido a la forma de la función de producción. Con este nuevo supuesto, la economía nunca deja de crecer, su tasa de crecimiento se mantiene constante en cada periodo, independientemente del nivel tecnológico, es por ello que al modelo AK también se le denomina modelo de crecimiento endógeno. Una breve caracterización del planteamiento de modelo matemático es el siguiente:

$$\text{Maximizar}_{c(t)} \int_0^{\infty} U(c(t))e^{-\beta t} dt$$

sujeto a

$$\dot{k}(t) = Ak(t) - c(t) - \delta k(t)$$

Los modelos anteriores trabajan bajo los siguientes supuestos,

- i)* los consumidores, tienen las mismas preferencias y por ende la misma función de utilidad,
- ii)* todos los agentes económicos tiene el mismo capital inicial,
- iii)* los agente económicos tienen la misma función de producción.

Bajo estos supuestos basta un solo individuo denominado agente representativo para caracterizar a la economía.

Los primero trabajos donde se elimina el supuesto *ii)*, es decir la economía cuenta con una distribución desigual, fueron construidos por Alesina y Rodrik (1994), Person y Tabellini (1994) y Berlota (1993), quienes desarrollan un modelo de crecimiento AK no estocástico. En esto trabajos se maneja de manera exógena la oferta laboral, lo que implica que la distribución de ingresos impacta directamente en la tasa del crecimiento del PIB.

Para 1993, Grinols y Turnovsky desarrollan los primeros modelos con volatilidad macroeconómica en tiempo continuo, seguidos de Smith (1996), Corsetti (1997), Turnovsky (2000). En estos modelos a diferencia de propuestos por Prescott, la oferta laboral se determina endógenamente dentro del modelo.

La aportación principal de la tesis, es construir un modelo de crecimiento endógeno, con una distribución no equitativa del capital inicial, donde la oferta laboral se determina de manera endógena, bajo un equilibrio macroeconómico con volatilidad.

## 1.2 Medidas de desigualdad de ingresos

Los estadísticos más frecuentemente usados para medir la dispersión de una variable son, la varianza, la desviación estándar y el coeficiente de variación. Todas estas medidas de dispersión hacen referencia a la media, sin embargo, para hablar de la distribución de ingresos, es necesario tener medidas de dispersión que no dependan de la media, para este propósito el coeficiente de Gini es la medida de desigualdad más frecuentemente utilizada. El coeficiente de Gini es un número entre 0 y 1, en donde el valor 0 corresponde a la perfecta igualdad (todos tienen los mismos ingresos) y 1 corresponde a la perfecta desigualdad (una persona tiene todos los ingresos y los demás ninguno).

El coeficiente de Gini se calcula como una razón de las áreas en el diagrama de la curva de Lorenz, (para ver una referencia tema consulte A. Sen ,1992). Para dibujar a la curva de Lorenz, primero se ordena a los individuos, de menor a mayor ingreso, posteriormente se toma como dominio de la función, a la población acumulada en forma de porcentaje, es decir, el dominio se encuentra en el intervalo  $[0, 1]$ , y donde por ejemplo  $n = 0.70$  representa a un 70% de la población. Como recorrido, la curva de Lorenz tiene a el porcentaje de ingreso acumulado, y por tanto su rango es el intervalo  $[0, 1]$ . Así por ejemplo, el punto sobre la curva de Lorenz  $(n, L(n)) = (0.5, 0.2)$ , significa que un 50% de la población posee un 20% de los ingresos. De esta manera la gráfica de la curva de Lorenz comienza en la coordenada  $(0,0)$  (es decir el 0% de la población posee el 0% de ingresos), y termina en  $(1,1)$ , (es decir el 100% de la población posee el 100% de ingresos). Si el área entre la línea de perfecta igualdad (una recta con pendiente de 45 grados) y la curva de Lorenz es  $A$ , y el área por debajo de la curva de Lorenz es  $B$ , entonces el coeficiente de Gini es  $A/(A+B)$  (ver figura 1.1).

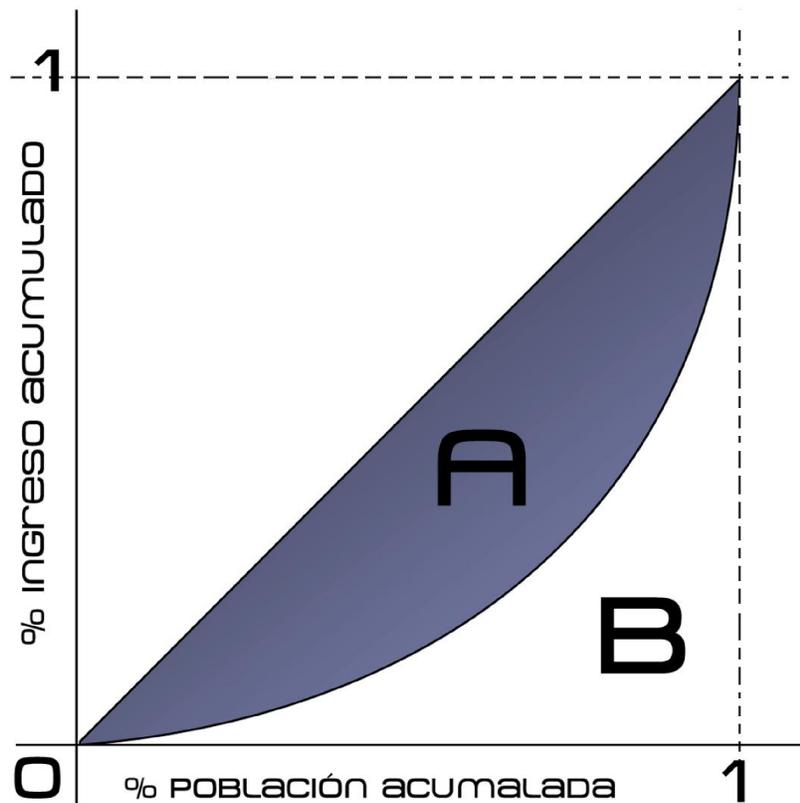


Figura 1.1 Curva de Lorenz

### 1.3 Metodología

En el siguiente esquema se muestra la metodología empleada para el desarrollo de la tesis. La herramienta matemática a utilizar para la construcción el desarrollo de modelo es el cálculo estocástico y el control óptimo estocástico, por ello, en los primeros dos capítulos se desarrolla la base teórica de estas herramientas.

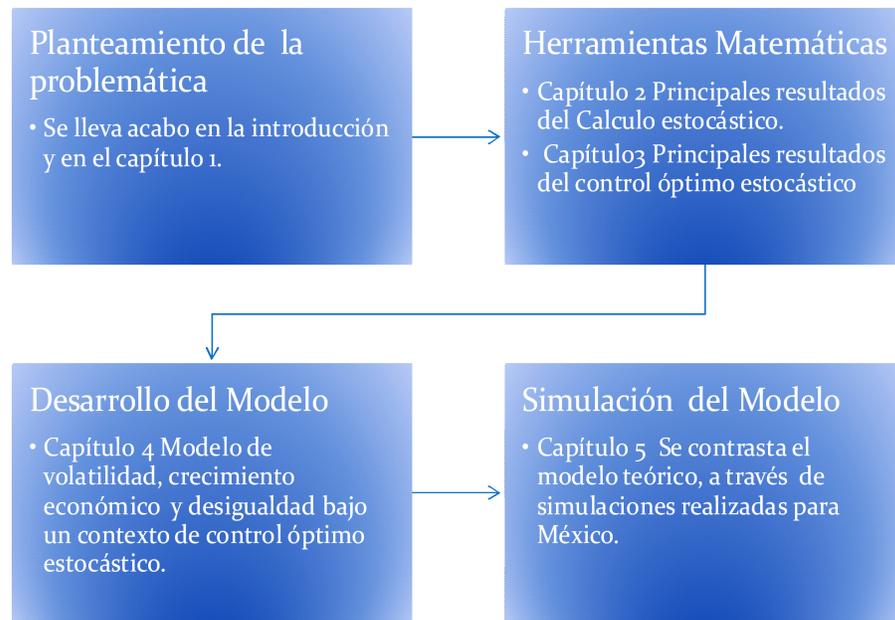


Figura 1.2 Esquema general de la tesis.

En primer lugar se presenta el instrumental matemático bajo el cual se desarrolla la tesis. El calculo estocástico (capítulo 2) permite modelar la volatilidad macroeconómica, mientras que el control óptimo estocástico (capítulo 3) permite evaluar cómo afecta dicha volatilidad a la tasa de crecimiento y a los niveles de desigualdad. Los capítulos 2 y 3 muestran, en forma breve, los principales resultados del cálculo estocástico y control óptimo, y se incluyen las demostraciones de los teoremas más importantes.

El capítulo 4 es la parte medular de la tesis, ahí se presenta el modelo de volatilidad, crecimiento económico y desigualdad, en un contexto de control óptimo estocástico. En él se analiza cómo afecta la volatilidad macroeconomica al crecimiento económico y a la desigualdad de ingresos. También, se analizan las políticas económicas enfocadas a incrementar la tasa de crecimiento y a la reducción de los niveles de desigualdad.

En el capítulo 5 se contrasta el modelo teórico y se toma como referencia a México para calibrar el modelo: De esta manera se determina cuáles son las mejores políticas económicas para obtener una mayor tasa de crecimiento y un bajo nivel de desigualdad de ingresos en la economía de México.

Para la contrastación del modelo, la simulación se realizo con la metodología propuesta por Chung (2004), definiendo los siguientes pasos:

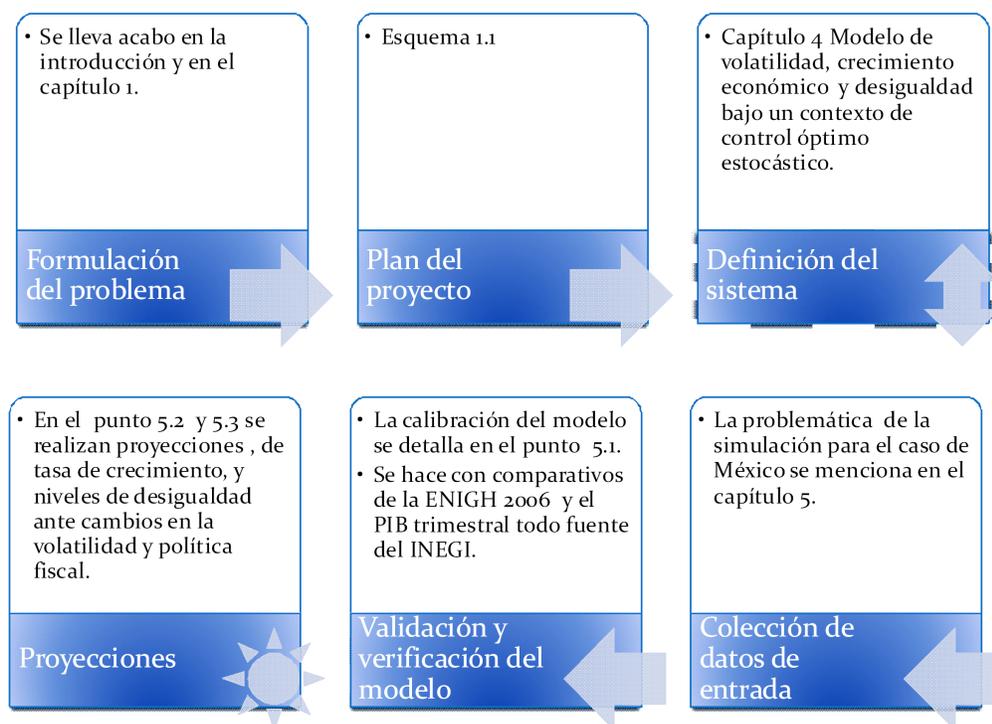


Figura 1.3 Modelo de simulación.

**1. Formulación del problema.** Mediante tres preguntas fundamentales planteadas en la introducción

- i)* ¿Qué variables determinan a la desigualdad de ingresos y que relación tienen con el crecimiento económico?
- ii)* ¿Cómo afectan los niveles de riesgo de un país (volatilidad macroeconómica) al crecimiento económico, distribución de ingresos y bienestar?
- iii)* ¿Qué políticas económicas se deben adoptar para lograr mayores tasas de crecimiento económico, con una distribución de ingresos equitativa?

Parte del planteamiento del problema se encuentra también en los antecedentes del presente capítulo.

**2. Elaboración del proyecto.** Para lo cual se realizó una revisión de los modelos de crecimiento existentes, y se planteó una metodología para abordar el problema (ver figura 1.2).

**3. Definición del sistema.** Se desarrolló en el capítulo 4, como un modelo económico, que engloba la volatilidad macroeconómica, crecimiento económico y desigualdad, bajo un contexto de control óptimo estocástico.

**4. Colección de los datos entrada.** En el capítulo 5 se menciona la problemática existente de datos para la simulación del modelo. Los datos de entrada del modelo son la distribución del capital inicial y estos se plantearon de manera hipotética acorde con los resultados de la calibración del modelo.

**5. Validación y verificación del modelo.** Consiste básicamente en encontrar los parámetros adecuados de la función de utilidad y de producción, con los cuales, el sistema aproxima valores a la tasa de crecimiento promedio de México y distribución del ingreso. Para la tasa de crecimiento promedio, se tomó como referencia el trajo realizado por Barro y Sala-i-Martin (1995, capítulo 10), y el PIB trimestral, publicado por el INEGI en el periodo 1993-2009. Para la distribución del ingreso se usó el índice de Gini y la distribución del ingreso por quintiles, publicados por el INEGI con base en la Encuesta Nacional de Ingreso y Gasto de los Hogares (ENIGH) 2006. Los detalles de la calibración del modelo se dan en el punto 5.1.

**6. Proyecciones.** Se realizaron con el fin de estimar los cambios en la tasa de crecimiento y los niveles de desigualdad, a distintas variaciones exógenas en la economía mexicana. En el punto 5.1 se estiman cambios en la tasa de crecimiento y niveles de desigualdad en México a distintas variaciones de la volatilidad macroeconómica. En el punto 5.3 se plantean proyecciones de los cambios de la tasa de crecimiento y niveles de desigualdad respecto a distintas políticas fiscales, bajo el supuesto de que el gobierno tome la decisión de financiar la inversión al capital, con el propósito de incrementar la tasa de crecimiento y disminuir los niveles de desigualdad. Para ello el gobierno tiene que tomar la decisión, de cuál sería la mejor manera de financiar dicho subsidio a través de tres impuestos: impuestos sobre los rendimientos de capital, impuesto a la tasa salarial e impuestos directos al consumo.

# CAPÍTULO 2

## ELEMENTOS DE CÁLCULO ESTOCÁSTICO

---

El propósito de este capítulo es revisar tópicos de probabilidad, procesos estocásticos y cálculo estocástico cuyos resultados serán utilizados en los capítulos posteriores. Para una revisión más profunda de los tópicos pueden verse Oksendal (2000), Venegas-Martínez (2006), Brzeźniak y Zastawniak (1999).

### 2.1 Probabilidad y procesos estocásticos

**Definición 2.1** Sea  $\Omega$  un conjunto no vacío. Considere una  $\sigma$ -álgebra,  $\mathcal{F}$ , la cual es una familia de subconjuntos de  $\Omega$  tal que:

- i)  $\Omega \in \mathcal{F}$ ,
- ii) Si  $A \in \mathcal{F}$ , entonces  $A^c \in \mathcal{F}$ , donde  $A^c = \Omega - A$ , es el complemento de  $A$ ,
- iii) Si  $A_1, A_2, \dots, A_i, \dots$  es una sucesión de conjuntos en  $\mathcal{F}$ , entonces  $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$ .

En particular, si  $\mathcal{F}$  es una  $\sigma$ -álgebra de  $\Omega$ , se dice que el par  $(\Omega, \mathcal{F})$  es un espacio medible. Si  $A$  es un conjunto en  $\mathcal{F}$ , se dice que  $A$  es  $\mathcal{F}$  medible (o simplemente que  $A$  es medible con respecto de  $\mathcal{F}$ ).

**Definición 2.2** Sea  $(\Omega, \mathcal{F})$  un espacio medible y sea  $\tilde{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$  el conjunto extendido de los reales. Se dice que una función  $\mu : \mathcal{F} \rightarrow \tilde{\mathbb{R}}$  es una medida sobre  $\mathcal{F}$  si:

- i)  $\mu(\emptyset) = 0$ ,
- ii)  $\mu(A) \geq 0$  para todo  $A \in \mathcal{F}$ ,
- iii)  $\mu$  es  $\sigma$ -aditiva, es decir, si  $\{A_i\}$  es una sucesión de conjuntos ajenos (dos a dos) en  $\mathcal{F}$ ,

entonces

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

En este caso se dice que  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  es un espacio de medida. A  $\mu(A)$  se le llama la medida del conjunto  $A \in \mathcal{F}$ . En particular, si  $\mu(\Omega) = 1$ , se dice que  $\mu$  es una medida de probabilidad. Si  $\mu$  es una medida de probabilidad, se acostumbra a escribir  $\mu \equiv P$  y se dice que  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  es un espacio de probabilidad. Así mismo, se dice que  $P(A)$  es la probabilidad del evento  $A \in \mathcal{F}$ . También se dice que un evento  $A \in \mathcal{F}$  es casi seguro (y se abrevia c.s.) si  $P(A) = 1$ .

Cuando se tienen dos conjuntos arbitrarios  $\Omega$  y  $\Omega'$ , y una función  $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ , definida para cualquier conjunto  $B \subset \Omega'$ , se define a la función inversa mediante

$$f^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega \mid f(\omega) \in B\}.$$

**Definición 2.3** Sea  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  un espacio de medida. Se dice que  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  es una función  $\mathcal{F}$ -medible si  $X^{-1}(-\infty, x] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F} \quad \forall x \in \mathbb{R}$ .

En particular sea  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  el conjunto Borel, es decir, la  $\sigma$ -álgebra más pequeña que contiene a todos los intervalos de  $\mathbb{R}$ . En este caso, se dice que una función  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  es una función  $\mathcal{F}$ -medible si  $X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F} \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ .

Notese que si  $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ , entonces su medida  $\mu(X^{-1}(B))$  está bien definida para el caso especial donde  $\mu \equiv P$  es una medida de probabilidad, en cuyo caso se dice que  $X$  es una variable aleatoria.

**Definición 2.4** Sea  $X$  una variable aleatoria. La función de distribución de  $X$  es la función  $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  dada por

$$F_X = P(X \leq x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

La medida de probabilidad inducida por  $X$  es la medida de probabilidad sobre el conjunto Boreliano  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  definida como  $P_X(B) = P\{X \in B\}$  para todo  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ . Nótese que  $P_X(B) = P[X^{-1}(B)]$ . Además, la función de distribución de  $X$  y la medida de probabilidad inducida por  $X$  están relacionadas mediante  $F_X(x) = P_X(-\infty, x]$ .

Una función real  $f$  definida en  $[a, b]$  se dice que es absolutamente continua si  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$  tal que  $\sum_{i=1}^n |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon$  para cualquier colección finita disjunta de subintervalos  $[a_i, b_i]$  en  $[a, b]$  que cumplen con la condición de  $\sum_{i=1}^n |b_i - a_i| < \delta$ . Cuando la función  $F_X$  es creciente y absolutamente continua, entonces  $F_X$  es derivable c.s. (es decir,  $P\{X = x \in \mathbb{R} : F'(x) \text{ existe}\} = 1$ ) y existe una función tal que  $F' = f$  que cumple con  $F(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx$ . Para ver la demostración consultar Rudin (1987), pág. 146.

**Definición 2.5** Sea  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  un espacio de medida y  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una función  $\mathcal{F}$ -medible, se dice que  $f$  es (Lebesgue-)integrable si  $\int_{\Omega} |f|d\mu < \infty$  y es llamada integrable cuadrática si  $\int_{\Omega} |f|^2 d\mu < \infty$ .

Cuando se hace referencia a una función integrable se estará pensando en la integral de Lebesgue, la cual es más general que la integral de Riemann (ver, por ejemplo, Bartle, 1995). En el caso particular donde el espacio de medida es un espacio de probabilidad, se toma a la variable aleatoria  $X$  como función medible, luego la variable aleatoria es integrable si cumple la definición anterior con respecto a la medida de probabilidad  $P$ ; si esto pasa, la esperanza (matemática) existe y la definimos como  $E[X] = \int_{\Omega} X dP$ . Al espacio de las funciones aleatorias integrables se le denotará mediante  $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Si la función es integrable cuadrática, entonces la varianza de la variable aleatoria  $X$  se define como  $\text{Var}[X] = \int_{\Omega} (X - E[x])^2 dP$ . Al espacio de funciones aleatorias integrables cuadráticas se denotará por  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ .

**Definición 2.6** Un proceso estocástico es una familia de variables aleatorias  $\{X(t)\}_{t \in T}$ . Para el caso de tiempo continuo  $T = [0, \infty)$ .

Obsérvese pues que al proceso estocástico se le puede ver como una función  $X : T \otimes \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Para todo  $\omega \in \Omega$ , la función  $t \rightarrow X(t, \omega)$  es llamada trayectoria (muchas veces también llamada serie de tiempo) de  $X(t)$ .

## 2.2 Proceso Wiener o movimiento Browniano

**Definición 2.7** Un proceso Wiener (o Browniano) es un proceso estocástico  $W(t)$  definido en  $t \in [0, \infty)$  tal que:

- i)  $W(0)=0$  c.s. (casi seguro)
- ii) las trayectorias  $t \rightarrow X(t, \omega)$  son continuas c.s.
- iii) para toda sucesión finita  $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$  y conjuntos Borel  $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathbb{R}$  la probabilidad conjunta  $P\{W(t_1) \in A_1, W(t_2) \in A_2, \dots, W(t_n) \in A_n\}$

$$= \int_{A_1} \cdots \int_{A_n} p(t_1, 0, x_1) p(t_2 - t_1, x_1, x_2) \cdots p(t_n - t_{n-1}, x_{n-1}, x_n) dx_1 \cdots dx_n$$

donde  $p(t, x, y) = \frac{1}{(2\pi t)^{1/2}} e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}}$  para todo  $x, y \in \mathbb{R}$  y  $t > 0$  es llamada densidad de transición.

Es fácil ver que la función de densidad de  $W(t)$  es  $p(t, 0, x) = \frac{1}{(2\pi t)^{1/2}} e^{-\frac{x^2}{2t}}$ , lo que implica que  $W(t)$  se distribuye como una variable aleatoria normal con media 0 y varianza  $t$  es decir  $W(t) \sim \mathcal{N}(0, t)$ . Si se utilizan las propiedades de la distribución normal se sabe que  $(W(t) - W(s)) \sim \mathcal{N}(0, t - s)$  (ver Venegas-Martínez, 2006, pág. 34).

**Proposición 2.8** Sea  $W(t)$  un proceso Wiener, entonces  $E[W(s)W(t)] = \min\{s, t\}$  y

$$E[|W(t) - W(s)|^2] = |t - s|.$$

*Demostración.* Sea  $0 < s < t$ , entonces

$$\begin{aligned} E[W(s)W(t)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xyp(s, 0, x)p(t - s, x, y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} xp(s, 0, x) \left( \int_{-\infty}^{+\infty} yp(t - s, x, y) dy \right) dx. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Sea  $u = y - x$ , entonces  $y = x + u$  y

$$\int_{-\infty}^{+\infty} yp(t - s, x, y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} (x + u)p(t - s, x, x + u) du = \int_{-\infty}^{+\infty} (x + u)p(t - s, 0, u) du$$

$$= x \int_{-\infty}^{+\infty} p(t-s, 0, u) du + \int_{-\infty}^{+\infty} (u) p(t-s, 0, u) du = x + 0 = x$$

si se retoma a (2.1), se tiene

$$\mathbb{E}[W(s)W(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(s, 0, x) dx = \mathbb{E}[(W(s))^2] = \text{Var}[W(s)] = s.$$

Para demostrar la segunda igualdad se toma  $0 < s < t$ , entonces  $\mathbb{E}[|W(t) - W(s)|^2] = \mathbb{E}[(W(t) - W(s))^2] = \mathbb{E}[(W(t))^2] + \mathbb{E}[(W(s))^2] - 2\mathbb{E}[W(t)W(s)] = t + s - 2s = t - s$ .

En general para  $s, t \geq 0$  se cumple  $\mathbb{E}[|W(t) - W(s)|^2] = |t - s|$ .

**Definición 2.9** Sea  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  un espacio de probabilidad. Una familia de  $\sigma$ -álgebras en  $\Omega$   $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, \infty)}$  es llamada una filtración, si  $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ , para todo  $0 \leq s \leq t$ .

Como ejemplo se puede tener a la filtración estándar. Sea  $\{X(t)\}_{t \in [0, \infty)}$  un proceso estocástico, entonces la  $\sigma$ -álgebra generada por  $X(t)$ , para todo  $t \in [0, \infty)$ , está dada por  $\mathcal{F}_t = \sigma\{X(s) : 0 \leq s \leq t\}$ .

**Definición 2.10** Un proceso estocástico  $\{X(t)\}_{t \in [0, \infty)}$  que cumple con las siguientes dos condiciones

- i)  $X(t)$  es integrable para todo  $t \in [0, \infty)$ ,
- ii)  $X(t)$  es  $\mathcal{F}_t$ -medible para todo  $t \in [0, \infty)$  (en tal caso decimos que  $X(t)$  es adaptado a  $\mathcal{F}_t$ ),

entonces es llamado

- i) martingala si  $\mathbb{E}[X(t)|\mathcal{F}_s] = X(s)$  para todo  $0 \leq s \leq t$ ,
- ii) submartingala si  $\mathbb{E}[X(t)|\mathcal{F}_s] \geq X(s)$  para todo  $0 \leq s \leq t$ ,
- iii) supermartingala si  $\mathbb{E}[X(t)|\mathcal{F}_s] \leq X(s)$  para todo  $0 \leq s \leq t$ .

**Proposición 2.11** Sea  $W(t)$  un proceso Wiener, y  $0 = t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$  una sucesión finita, entonces los incrementos  $W(t_1) - W(t_0), \dots, W(t_n) - W(t_{n-1})$  son independientes.

*Demostración.* Sea  $0 \leq r \leq s \leq t \leq u$ . Como para todo  $q \geq p \geq 0$  se cumple que  $(W(q) - W(p)) \sim \mathcal{N}(0, q - p)$ , es suficiente mostrar que

$$\text{Cov}[(W(u) - W(t))(W(s) - W(r))] = 0.$$

Como  $E[W(q) - W(p)] = 0$  para todo  $q \geq p \geq 0$ , entonces

$$\text{Cov} [(W(u) - W(t))(W(s) - W(r))] = E [(W(u) - W(t))(W(s) - W(r))].$$

De la proposición 2.8 se tiene que  $E[(W(u) - W(t))(W(s) - W(r))] = E[W(u)W(s)] - E[W(u)W(r)] - E[W(t)W(s)] + E[W(t)W(r)] = s - r + s - r = 0$ .

**Corolario 2.12** Para todo  $0 \leq s \leq t$  la variación  $W(t) - W(s)$  es independiente de la  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{F}_s = \sigma\{W(r) : 0 \leq r \leq s\}$ .

*Demostración.* Sea  $0 \leq s \leq t$ , por la proposición anterior sabemos que para toda  $0 \leq r \leq s$   $W(t) - W(s)$  y  $W(r) - W(0)$  son independientes. Como  $\mathcal{F}_s = \sigma\{W(r) : 0 \leq r \leq s\}$ , entonces  $W(t) - W(s)$  es independiente de  $\mathcal{F}_s$ .

Como para todo  $0 \leq s \leq t$  la variación  $W(t) - W(s)$  es independiente de la  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{F}_s = \sigma\{W(r) : 0 \leq r \leq s\}$ , entonces lo es también su esperanza, es decir  $W(t) - W(s) = E[W(t) - W(s) | \mathcal{F}_s]$  para todo  $0 \leq s \leq t$ , donde  $\mathcal{F}_s = \sigma\{W(r) : 0 \leq r \leq s\}$ . Luego, se sabe que la variación  $W(t) - W(s)$  es una martingala con respecto a la filtración  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, \infty)}$ .

## 2.3 La integral de Itô

**Definición 2.13** La función indicadora o función característica  $1_A : A \rightarrow \mathbb{R}$  se define como:

$$1_A = \begin{cases} 1, & \text{if } x \in A \\ 0, & \text{otro caso.} \end{cases}$$

**Definición 2.14** Sea  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n \leq \infty$  una sucesión finita de números y  $\{e_i\}_{i=0,1,\dots,n} \subset L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$  una serie finita de variables aleatorias tal que  $e_i$  son  $\mathcal{F}_t$ -medibles para todo  $i = 0, 1, \dots, n$ . El proceso simple o proceso escalonado  $\varphi(t)$  es un proceso es-

tocástico que se define como  $\varphi(t) = \sum_{i=0}^{n-1} e_i 1_{[t_i, t_{i+1})}$ .

Obsérvese que, para todo  $i = 0, 1, \dots, n$  las variables aleatorias  $e_i$  son  $\mathcal{F}_t$ -medibles y también integrables cuadráticas, entonces también lo es  $\varphi(t)$  en ambos términos. Es fácil verificar que si  $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$  son procesos simples y  $a, b \in \mathbb{R}$ , entonces  $a\varphi_1(t) + b\varphi_2(t)$  también es un proceso simple.

**Definición 2.15** Sea  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T \leq \infty$  una sucesión finita de números y

$\varphi(t) = \sum_{i=0}^{n-1} e_i 1_{[t_i, t_{i+1})}$  un proceso simple definido en esta sucesión de números. La integral

de  $\varphi(t)$  es definida como  $\int_0^T \varphi(t) dW(t) = \sum_{i=0}^{n-1} e_i (W(t_{i+1}) - W(t_i))$ , donde  $W(t)$  es un proceso Wiener.

**Definición 2.16** Se define a  $\mathcal{M}_T^2$  como el espacio de funciones estocásticas  $X(t)$  (con  $0 < T \leq \infty$ ) tales que :

$$i) \mathbb{E} \left[ \int_0^T |X(t)|^2 dt \right] < \infty,$$

ii)  $X(t)$  es  $\mathcal{F}_t$ -medible para todo  $t \in [0, \infty)$  (en tal caso se dice que  $X(t)$  es adaptado a  $\mathcal{F}_t$ ).

**Proposición 2.17** (Isometría de Itô) Sea  $\varphi(t)$  una función simple estocástica acotada y  $0 < T \leq \infty$ , entonces  $\mathbb{E} \left[ \left( \int_0^T \varphi(t) dW(t) \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[ \int_0^T \varphi(t)^2 dt \right]$ .

*Demostración.* Sea  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T \leq \infty$  una sucesión finita de números y  $\varphi(t) = \sum_{i=0}^{n-1} e_i 1_{[t_i, t_{i+1})}$  un proceso simple definido en esta sucesión de números. Sea además  $W_i = W(t_i)$ ,  $\Delta W_i = W_{i+1} - W_i$  y  $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$ , entonces utilizando el hecho de que

$(e_i e_j \Delta W_i)$  y  $(\Delta W_j)$  son independientes si  $i \neq j$  y por las proposiciones (2.8) y (2.11)

se tiene que:

$$\mathbb{E}[e_i e_j \Delta W_i \Delta W_j] = \begin{cases} 0, & \text{si } i \neq j \\ \mathbb{E}[e_i^2] \Delta t_i, & \text{si } i = j \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{, entonces } \mathbb{E} \left[ \left( \int_0^T \varphi(t) dW(t) \right)^2 \right] &= \mathbb{E} \left[ \left( \sum_{i=0}^{n-1} e_i \Delta W_i \right)^2 \right] \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{E}[e_i e_j \Delta W_i \Delta W_j] = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}[e_i^2] \Delta t_i = \mathbb{E} \left[ \int_0^T \varphi(t)^2 dt \right]. \end{aligned}$$

**Proposición 2.18** Sea  $g(t) \in \mathcal{M}_T^2$  acotada y  $g(\cdot, \omega)$  continua para toda  $\omega \in \Omega$ . Luego existe una sucesión de procesos simples  $\{\varphi_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_T^2$  tal que

$$\mathbb{E} \left[ \int_0^T (g(t) - \varphi_n(t))^2 dt \right] \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty.$$

*Demostración.* Sea  $\varphi_n(t) = \sum_{i=0}^{n-1} g(t_i, \omega) 1_{[t_i, t_{i+1})}$ . Dado que  $g(t) \in \mathcal{M}_T^2$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , entonces  $\{\varphi_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_T^2$ . Como  $\varphi(\cdot, \omega)$  continua, se cumple que

$$\mathbb{E} \left[ \int_0^T (g(t, \omega) - \varphi_n(t, \omega))^2 dt \right] \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty \text{ para toda } \omega \in \Omega. \text{ Luego se cumple}$$

que  $\mathbb{E} \left[ \int_0^T (g(t) - \varphi_n(t))^2 dt \right] \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty.$

**Proposición 2.19** Sea  $h(t) \in \mathcal{M}_T^2$ , entonces existe una sucesión de funciones

$\{g_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_T^2$  acotadas y  $g_n(\cdot, \omega)$  continuas para toda  $\omega \in \Omega$  y para toda  $n \in \mathbb{N}$ , tal que  $\mathbb{E} \left[ \int_0^T (h(t) - g_n(t))^2 dt \right] \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty$

La demostración de esta proposición es algo técnica, y el objetivo principal de la tesis no la requiere, para ver un bosquejo de la misma consultar Oksendal B. (2000) pag 20-21.

**Proposición 2.20.** Sea  $f(t) \in \mathcal{M}_T^2$ , entonces existe una sucesión de funciones

$\{h_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_T^2$  acotadas tal que  $\mathbb{E} \left[ \int_0^T (f(t) - h_n(t))^2 dt \right] \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty.$

*Demostración.* Sea

$$h_n(t, \omega) = \begin{cases} -n, & \text{si } f(t, \omega) < -n \\ f(t, \omega), & \text{si } -n \leq f(t, \omega) \leq n \\ n, & \text{si } f(t, \omega) > n \end{cases}$$

Luego es claro que  $h_n(t, \omega) \rightarrow f(t, \omega)$  y  $|h_n(t, \omega)| \leq n$  para toda  $n \in \mathbb{N}$  por el teorema de convergencia dominada (ver Rudin, 1987, pag 26) se cumple que

$$\mathbb{E} \left[ \int_0^T (f(t) - h_n(t))^2 dt \right] \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty.$$

De las proposiciones 2.18, 2.19, 2.20, si  $f(t) \in \mathcal{M}_T^2$ , se puede elegir una sucesión de procesos simples  $\{\varphi_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_T^2$ , tal que,  $\mathbb{E} \left[ \int_0^T (f(t) - \varphi_n(t))^2 dt \right] \rightarrow 0$ .

**Definición 2.21** Sea  $X(t) \in \mathcal{M}_T^2$  y  $\{\varphi_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_T^2$  una sucesión de procesos simples tal que  $\mathbb{E} \left[ \int_0^T (X(t) - \varphi_n(t))^2 dt \right] \rightarrow 0$ , entonces definimos a la Integral de Itô del proceso estocástico  $X(t)$  como  $\int_0^T X(t) dW(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \varphi_n(t) dW(t)$ .

Es ocasión de realizar una observación importante, sea  $X(t)$  y  $\{\varphi_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}}$  como en la definición anterior y supóngase que  $\int_0^T \varphi_n(t) dW(t)$  forma una secuencia de Cauchy en  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \varphi_n(t) dW(t) = \int_0^T X(t) dW(t)$  existe y pertenece a

$L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Para ver que  $\int_0^T \varphi_n(t) dW(t)$  forma una sucesión de Cauchy en  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$  obsérvese que si  $g \in \mathcal{M}_T^2$  y  $f \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$  sus normas están dadas por  $\|g\|_{\mathcal{M}_T^2} = \left( \mathbb{E} \left[ \int_0^T |g(t)|^2 dt \right] \right)^{\frac{1}{2}}$  y  $\|f\|_{L^2} = \left( \int_{\Omega} |f|^2 dP \right)^{\frac{1}{2}} = (\mathbb{E}[f^2])^{\frac{1}{2}}$ , obsérvese además que si

$\varphi(t)$  un proceso simple, entonces  $I(\varphi(t)) = \int_0^T \varphi(t) dW(t)$  es un proceso estocástico y por tanto una variable aleatoria. Como  $\mathbb{E} \left[ \int_0^T (X(t) - \varphi_n(t))^2 dt \right] \rightarrow 0$ , entonces

$\lim_{n \rightarrow \infty} \|X(t) - \varphi_n(t)\|_{\mathcal{M}_T^2} = 0$ . Es hora de demostrar que  $I(\varphi_n(t)) = \int_0^T \varphi_n(t) dW(t)$  forma una sucesión de Cauchy en  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Como  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|X(t) - \varphi_n(t)\|_{\mathcal{M}_T^2} = 0$ , significa que para toda  $\epsilon > 0$  existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que si  $n > N$ , entonces  $\|X(t) - \varphi_n(t)\|_{\mathcal{M}_T^2} < \frac{\epsilon}{2}$ . Luego para  $m, n > N$  se tiene por la proposición 2.17 que

$$\begin{aligned} \|I(\varphi_m(t)) - I(\varphi_n(t))\|_{L^2} &= \|I(\varphi_m(t) - \varphi_n(t))\|_{L^2} = \|\varphi_m(t) - \varphi_n(t)\|_{\mathcal{M}_T^2} \\ &\leq \|X(t) - \varphi_m(t)\|_{\mathcal{M}_T^2} + \|X(t) - \varphi_n(t)\|_{\mathcal{M}_T^2} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Por tanto la sucesión  $I(\varphi_n(t)) = \int_0^T \varphi_n(t) dW(t)$  forma una sucesión de Cauchy en  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$  y como  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$  es un espacio completo, entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \varphi_n(t) dW(t) = \int_0^T X(t) dW(t)$  existe y pertenece a  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ .

**Proposición 2.22** (Isometría de Itô) Sea  $X(t) \in \mathcal{M}_T^2$  una proceso estocástico, entonces

$$\mathbb{E} \left[ \left( \int_0^T X(t) dW(t) \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[ \int_0^T X(t)^2 dt \right].$$

*Demostración* Sea  $\{\varphi_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_T^2$  una sucesión de procesos simples tal que

$$\mathbb{E} \left[ \int_T (X(t) - \varphi_n(t))^2 dt \right] \rightarrow 0$$

por proposición 2.17  $\|I(\varphi_n(t))\|_{L^2} = \|\varphi_n(t)\|_{\mathcal{M}^2}$  para todo  $n \in N$ . Se toman los limites

$$\|I(X(t))\|_{L^2} = \lim \|I(\varphi_n(t))\|_{L^2} = \lim \|\varphi_n(t)\|_{\mathcal{M}^2} = \|X(t)\|_{\mathcal{M}^2}.$$

**Proposición 2.23** Sea  $\{X_n(t)\}_{n \in N} \subset \mathcal{M}_T^2$  una sucesión de procesos estocásticos tal que

$$\mathbb{E} \left[ \left( \int_0^T X_n(t) - X(t) \right)^2 dt \right] \rightarrow 0, \text{ entonces}$$

$$\int_0^T X(t) dW(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T X_n(t) dW(t).$$

*Demostración.* Sea  $\{X_n(t)\}_{n \in N} \subset \mathcal{M}_T^2$  tal que  $\mathbb{E} \left[ \left( \int_0^T X_n(t) - X(t) \right)^2 dt \right] \rightarrow 0$ , por proposición 2.22 se tiene que  $\|I(X_n(t)) - I(X(t))\|_{L^2} = \|I(X_n(t) - X(t))\|_{L^2} = \|X_n(t) - X(t)\|_{\mathcal{M}_T^2}$  para todo  $n \in N$ . Luengo  $\lim \|I(X_n(t)) - I(X(t))\|_{L^2} = 0$ , por tanto se tiene que  $\int_0^T X(t) dW(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T X_n(t) dW(t)$ .

**Proposición 2.24** Sea  $X(t), Y(t) \in \mathcal{M}_T^2, a, b \in \mathbb{R}$  y  $0 \leq r < s$ , entonces

$$\int_0^s aX(t) + bY(t) dW(t) = a \int_0^s X(t) dW(t) + b \int_0^s Y(t) dW(t).$$

La demostración de esta proposición sólo requiere del uso de límites y se omitirá.

## 2.4 La fórmula de Itô

**Definición 2.25** un proceso estocástico  $X(t)$  es llamado un proceso de Itô si tiene la forma  $X(T) = X(0) + \int_0^T a(t)dt + \int_0^T b(t)dW(t)$ , donde  $b(t) \in \mathcal{M}_T^2$  para todo  $0 < T \leq \infty$  y  $a(t)$  es un proceso adaptado a la filtración  $\mathcal{F}_t$  tal que  $\int_0^T |a(t)|dt < \infty$  para todo  $0 < T \leq \infty$ . La forma diferencial de un proceso de Itô es dado por  $dX(t) = a(t)dt + b(t)dW(t)$ .

**Teorema 2.26 (fórmula de Itô)** Sea  $X(t)$  un proceso de Itô y  $g(t, x)$  una función real con derivadas continuas  $g_t(t, x)$ ,  $g_x(t, x)$ ,  $g_{t,x}(t, x)$ ,  $g_{x,t}(t, x)$  y  $g_{xx}(t, x)$ , entonces  $g(t, X(t))$  es un proceso de Itô tal que

$$dg(t, X(t)) = (g_t(t, X(t))dt + g_x(t, X(t))dX(t) + \frac{1}{2}g_{xx}(t, X(t))(dX(t))^2,$$

o de forma equivalente

$$\begin{aligned} dg(t, X(t)) &= \left( g_t(t, X(t)) + g_x(t, X(t))a(t) + \frac{1}{2}g_{xx}(t, X(t))b(t)^2 \right) dt + g_x(t, X(t))b(t)dW(t) \quad (2.2) \end{aligned}$$

donde además se cumple la regla  $dt dt = dt dW(t) = dW(t) dt = 0$  y  $dW(t)dW(t) = dt$ .

*Demostración.*

Supongase que  $g(t, x)$ ,  $g_t(t, x)$ ,  $g_x(t, x)$  y  $g_{xx}(t, x)$  son acotadas en  $[0, T]$ , y escribamos a (2.2) con la expresión equivalente

$$\begin{aligned} g(T, W(T)) &= g(0, W(0)) + \int_0^T \left( g_t(t, X(t)) + g_x(t, X(t))a(t) + \frac{1}{2}g_{xx}(t, X(t))b(t)^2 \right) dt \\ &\quad + \int_0^T g_x(t, X(t))b(t)dW(t). \end{aligned}$$

Sea  $0 = t_{0,n} < t_{1,n} < t_{2,n} < \dots < t_{n,n} = T$  la partición  $n$  en  $[0, T]$  y se define  $X_{i,n} = X(t_{i,n})$ ,  $W_{i,n} = W(t_{i,n})$ ,  $\Delta t_{i,n} = t_{i+1,n} - t_{i,n}$ ,  $\Delta X_{i,n} = X_{i+1,n} - X_{i,n}$  y  $\Delta W_{i,n} = W_{i+1,n} - W_{i,n}$ . Por el teorema de Taylor se Obtiene

$$\begin{aligned}
g(T, W(T)) - g(0, W(0)) &= \sum_{i=0}^{n-1} g(t_{i+1,n}, X_{i+1,n}) - g(t_{i,n}, X_{i,n}) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} g_t(t_{i,n}, X_{i,n}) \Delta t_{i,n} + \sum_{i=0}^{n-1} g_x(t_{i,n}, X_{i,n}) \Delta X_{i,n} \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} g_{tt}(t_{i,n}, X_{i,n}) (\Delta t_{i,n})^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} g_{xx}(t_{i,n}, X_{i,n}) (\Delta X_{i,n})^2 \\
&\quad + \sum_{i=0}^{n-1} g_{xt}(t_{i,n}, X_{i,n}) \Delta X_{i,n} \Delta t_{i,n} + \sum_{i=0}^{n-1} R_i
\end{aligned}$$

donde  $R_i = o(|\Delta t_{i,n}|^2 + |\Delta X_{i,n}|^2)$ .

Si se descompone la ecuación anterior y se demuestra para cada componente obtenemos:

$$\begin{aligned}
i) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} R_i &= 0 \\
ii) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} g_t(t_{i,n}, X_{i,n}) \Delta t_{i,n} &= \int_0^T g_t(t, X(t)) dt \\
iii) \quad \sum_{i=0}^{n-1} g_x(t_{i,n}, X_{i,n}) \Delta X_{i,n} &= \sum_{i=0}^{n-1} g_x(t_{i,n}, X_{i,n}) [a(t_{i,n}) \Delta t_{i,n} + b(t_{i,n}) \Delta W_{i,n}] \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} a(t_{i,n}) g_x(t_{i,n}, X_{i,n}) \Delta t_{i,n} + \sum_{i=0}^{n-1} b(t_{i,n}) g_x(t_{i,n}, X_{i,n}) \Delta W_{i,n}
\end{aligned}$$

$$\text{donde } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} a(t_{i,n}) g_x(t_{i,n}, X_{i,n}) \Delta t_{i,n} = \int_0^T a(t) g_x(t, X(t)) dt$$

$$\text{y } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} b(t_{i,n}) g_x(t_{i,n}, X_{i,n}) \Delta W_{i,n} = \int_0^T b(t) g_x(t, X(t)) dW(t)$$

$$iv) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[ \left( \sum_{i=0}^{n-1} g_{tt}(t_{i,n}, X_{i,n}) (\Delta t_{i,n})^2 \right)^2 \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E} [(g_{tt}(t_{i,n}, X_{i,n}))^2] (\Delta t_{i,n})^4 = 0$$

entonces,

$$\left\| \sum_{i=0}^{n-1} g_{tt}(t_{i,n}, X_{i,n}) (\Delta t_{i,n})^2 - 0 \right\|_{L^2} = 0$$

$$\text{Luego } \sum_{i=0}^{n-1} g_{tt}(t_{i,n}, X_{i,n}) (\Delta t_{i,n})^2 \rightarrow 0 \text{ en } L^2$$

$$\begin{aligned}
v) \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[ \left( \sum_{i=0}^{n-1} g_{xt}(t_{i,n}, X_{i,n}) \Delta X_{i,n} \Delta t_{i,n} \right)^2 \right] \\
& = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E} \left[ (g_{xt}(t_{i,n}, X_{i,n}))^2 (\Delta X_{i,n})^2 \right] (\Delta t_{i,n})^2 = 0 \\
& \text{Luego } \sum_{i=0}^{n-1} g_{xt}(t_{i,n}, X_{i,n}) \Delta X_{i,n} \Delta t_{i,n} \rightarrow 0 \text{ en } L^2 \\
vi) \quad & \sum_{i=0}^{n-1} g_{xx}(t_{i,n}, X_{i,n}) (\Delta X_{i,n})^2 \tag{2.3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& = \sum_{i=0}^{n-1} (a(t_{i,n}))^2 g_{xx}(t_{i,n}, X_{i,n}) (\Delta t_{i,n})^2 + \sum_{i=0}^{n-1} (b(t_{i,n}))^2 g_{xx}(t_{i,n}, X_{i,n}) (\Delta W_{i,n})^2 \\
& + 2 \sum_{i=0}^{n-1} a(t_{i,n}) b(t_{i,n}) g_{xx}(t_{i,n}, X_{i,n}) \Delta W_{i,n} \Delta t_{i,n} \\
& \text{donde } \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[ \left( \sum_{i=0}^{n-1} (a(t_{i,n}))^2 g_{xx}(t_{i,n}, X_{i,n}) (\Delta t_{i,n})^2 \right)^2 \right]
\end{aligned}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} (a(t_{i,n}))^2 \mathbb{E} \left[ (g_{xx}(t_{i,n}, X_{i,n}))^2 \right] (\Delta t_{i,n})^4 = 0 \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[ \left( \sum_{i=0}^{n-1} a(t_{i,n}) b(t_{i,n}) g_{xx}(t_{i,n}, X_{i,n}) \Delta W_{i,n} \Delta t_{i,n} \right)^2 \right] \\
& = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E} \left[ (a(t_{i,n}) b(t_{i,n}) g_{xx}(t_{i,n}, X_{i,n}))^2 \right] \mathbb{E} [(\Delta W_{i,n})^2] \Delta t_{i,n} \\
& = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E} \left[ (a(t_{i,n}) b(t_{i,n}) g_{xx}(t_{i,n}, X_{i,n}))^2 \right] (\Delta t_{i,n})^3 = 0 \tag{2.5}
\end{aligned}$$

Luego por (2.3), (2.4) y (2.5)

$$\sum_{i=0}^{n-1} (a(t_{i,n}))^2 g_{xx}(t_{i,n}, X_{i,n}) (\Delta t_{i,n})^2 + 2 \sum_{i=0}^{n-1} a(t_{i,n}) b(t_{i,n}) g_{xx}(t_{i,n}, X_{i,n}) \Delta W_{i,n} \Delta t_{i,n} \rightarrow 0 \text{ en } L^2$$

Por último sea  $v(t) = (b(t))^2 g_{xx}(t, X(t))$ ,  $v_{i,n} = v(t_{i,n})$  y

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left[ \left( \sum_{i=0}^{n-1} v_{i,n} (\Delta W_{i,n})^2 - \sum_{i=0}^{n-1} v_{i,n} \Delta t_{i,n} \right)^2 \right] \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}[v_{i,n} v_{j,n} ((\Delta W_{i,n})^2 - \Delta t_{i,n}) ((\Delta W_{j,n})^2 - \Delta t_{j,n})] \tag{2.6}
\end{aligned}$$

Si  $i \neq j$  los eventos  $v_{i,n} v_{j,n} ((\Delta W_{i,n})^2 - \Delta t_{i,n})$  y  $((\Delta W_{j,n})^2 - \Delta t_{j,n})$  son independientes, entonces la ecuación (2.6) se reduce a

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}[(v_{i,n})^2 ((\Delta W_{i,n})^2 - \Delta t_{i,n})^2] \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}[(v_{i,n})^2] \mathbb{E}[(\Delta W_{i,n})^4 + (\Delta t_{i,n})^2 - 2(\Delta W_{i,n})^2 \Delta t_{i,n}] \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}[(v_{i,n})^2] (3(\Delta t_{i,n})^2 + (\Delta t_{i,n})^2 - 2(\Delta t_{i,n})^2) = 2 \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}[(v_{i,n})^2] (\Delta t_{i,n})^2
\end{aligned}$$

$$\text{y } \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}[(v_{i,n})^2] (\Delta t_{i,n})^2 = 0$$

Luego

$\sum_{i=0}^{n-1} (b(t_{i,n}))^2 g_{xx}(t_{i,n}, X_{i,n}) (\Delta W_{i,n})^2 \rightarrow \int_0^T (b(t))^2 g_{xx}(t, X(t)) dt$  en  $L^2$ , y con esto se termina la demostración.

Supongase un proceso estocástico de la forma  $X(t) = (X_1(t), \dots, X_n(t)) \in \mathbb{R}^n$ , un procesos Wiener  $W(t) = (W_1(t), \dots, W_m(t))$  y para cada proceso  $a_i(t)$  y  $b_{i,j}(t)$  (con  $i = 1, \dots, n$   $j = 1, \dots, m$ ) se satisfacen las condiciones de la definición 2.25. Se denota a  $X(t)$  como un proceso de Itô  $n$ -dimensional si  $dX(t) = a(t)dt + b(t)dW(t)$  donde

$$\begin{aligned}
X(t) &= \begin{pmatrix} X_1(t) \\ \vdots \\ X_n(t) \end{pmatrix} & a(t) &= \begin{pmatrix} a_1(t) \\ \vdots \\ a_n(t) \end{pmatrix} & dW(t) &= \begin{pmatrix} dW_1(t) \\ \vdots \\ dW_m(t) \end{pmatrix} \\
b(t) &= \begin{pmatrix} b_{1,1}(t) & \dots & b_{1,m}(t) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ b_{n,1}(t) & \dots & b_{n,m}(t) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

**Teorema 2.27 (fórmula general de Itô)** Sea  $X(t)$  un proceso de Itô  $n$ -dimensional y sea  $g(t, x) = (g^1(t, x), \dots, g^p(t, x))$  una función en  $C^2$  y  $g : [0, \infty) \otimes \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ , entonces  $g(t, X(t))$  es un proceso de Itô cuyo componente  $dg^k(t, X(t))$  (con  $k = 1, \dots, p$ ) es dado por

$$dg^k(t, X(t)) = g_t^k(t, X(t))dt + \sum_{i=1}^n g_{x_i}^k(t, X(t))dX_i(t) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n g_{x_i x_j}^k(t, X(t))dX_i(t)dX_j(t)$$

donde  $dW_i(t)dW_j(t) = \delta_{i,j}dt$        $dW_i(t)dt = dt dW_i(t) = 0$ .

## 2.5 Ecuaciones diferenciables estocásticas

**Ejemplo 2.28 Proceso geométrico Wiener o movimiento geométrico Browniano**

Sea  $X(t)$  un proceso de Itô tal que  $dX(t) = rX(t)dt + \alpha X(t)dW(t)$  o de forma equivalente

$$\frac{dX(t)}{X(t)} = rdt + \alpha dW(t) \rightarrow \int_0^t \frac{dX(s)}{X(s)} = rt + \alpha W(t), \quad (W(0) = 0). \quad (2.7)$$

Por otro lado sea  $g(t, X(t)) = \ln(X(t))$  con  $X(t) > 0$ , Utilizando la fórmula de itô en  $g(\cdot, \cdot)$  se obtiene:

$$\begin{aligned} d(\ln X(t)) &= \frac{1}{X(t)}dX(t) + \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{(X(t))^2} \right) (dX(t))^2 \\ &= \frac{dX(t)}{X(t)} + \frac{1}{2(X(t))^2} \alpha^2 (X(t))^2 dt = \frac{dX(t)}{X(t)} + \frac{1}{2} \alpha^2 dt. \end{aligned}$$

Si se despeja, se obtiene  $\frac{dX(t)}{X(t)} = d(\ln X(t)) + \frac{1}{2} \alpha^2 dt$ . De esta última ecuación y de (2.7) se concluye que

$$\ln \frac{dX(t)}{X(0)} = \left( r - \frac{1}{2} \alpha^2 \right) t + \alpha W(t) \text{ o de forma equivalente } X(t) = X(0)e^{(r-\alpha^2/2)t + \alpha W(t)}.$$

**Teorema 2.29** (Existencia y unicidad para ecuaciones diferenciables estocásticas)

1) Sea  $T > 0$ ,  $a(\cdot, \cdot) : [0, T] \otimes \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $b(\cdot, \cdot) : [0, T] \otimes \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$  funciones medibles que satisfacen:

$$\begin{aligned} i) \quad &\|a(t, x)\| + \|b(t, x)\| \leq C(1 + \|x\|) \text{ para alguna constante } C \text{ con } x \in \mathbb{R}^n, t \in [0, T], \text{ y} \\ &\|b(t, x)\| = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m |b_{i,j}(t, x_i)|^2, \end{aligned}$$

ii)  $\|a(t, x) - a(t, y)\| + \|b(t, x) - b(t, y)\| \leq D\|x - y\|$  para alguna constante  $D$  con  $x, y \in \mathbb{R}^n$ ,  $t \in [0, T]$ .

2) Sea además  $Z$  una variable aleatoria la cual es independiente de la  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{F}_\infty^{(m)}$  generada por  $W(s)$ ,  $s \geq 0$   $E[|Z|^2] < \infty$ .

Si se cumple 1) y 2), entonces la ecuación diferencial estocástica

$$dX(t) = a(t, X(t))dt + b(t, X(t))dW(t) \quad \text{con } t \in [0, T], \quad X(0) = Z$$

tiene una única  $t$ -continua solución  $X(t)$  con la propiedad de que  $X(t)$  es adaptada a la filtración  $\mathcal{F}_t^Z$  generada por  $Z$  y  $W(s)$ ,  $s \leq t$  y además  $E\left[\int_0^T |X(t)|^2 dt\right] < \infty$ .

Para ver la demostración del teorema anterior puede consultarse Oksendal(2000). La solución  $X(t)$  referida al teorema anterior es llamada **solución fuerte**, por que  $X(t)$  es construida de tal manera que es adaptada a la filtración  $\mathcal{F}_t^Z$  generada por  $Z$  y  $\{W(s)\}_{s \leq t}$ . Si sólo se dieran las condiciones de las funciones  $a(t, x)$  y  $b(t, x)$  y el par de procesos  $((\tilde{X}(t), \tilde{W}(t)), \mathcal{H}_t)$  en el espacio de probabilidades  $(\Omega, \mathcal{H}, P)$  fueran una solución de la ecuación diferencial  $dX(t) = a(t, X(t))dt + b(t, X(t))dW(t)$ , entonces  $(\tilde{X}(t), \tilde{W}(t))$  es llamada **solución débil**. Obsérvese que  $\mathcal{H}_t$  es una familia creciente de  $\sigma$ -álgebras tal que  $\tilde{X}(t)$  es  $\mathcal{H}_t$ -adaptado y  $\tilde{W}(t)$  es un  $\mathcal{H}_t$ -proceso Wiener (es decir  $\tilde{W}(t)$  es un movimiento browniano que es martingala con respecto a  $\mathcal{H}_t$ , o de otra forma  $E[\tilde{W}(t+h) - \tilde{W}(t) | \mathcal{H}_t] = 0$  para todo  $t, h \geq 0$ ). Luego  $\tilde{X}(t)$  no tiene que ser  $\mathcal{F}_t^Z$ - adaptado.

La condición (2) del teorema 2.29 garantiza la unicidad de la solución  $X(t)$  que se obtiene. Esta unicidad es llamada **unicidad fuerte**, referida a que si  $X_1(t)$  y  $X_2(t)$  son proceso continuos que satisfacen que:

- i)  $dX_i(t) = a(t, X_i(t))dt + b(t, X_i(t))dW(t)$  con,  $t \in [0, T]$ ,  $X(0) = Z$  y  $i \in \{1, 2\}$ ,
- ii)  $X_i(t)$  es adaptada a la filtración  $\mathcal{F}_t^Z$  generada por  $Z$  y  $W(s)$ ,  $s \leq t$  para  $i \in \{1, 2\}$ ,
- iii)  $E\left[\int_0^T |X_i(t)|^2 dt\right] < \infty$  para  $i \in \{1, 2\}$ ,

entonces  $X_1(t) = X_2(t)$  para todo  $t < T$  c.s., es decir la unicidad va referida a una única trayectoria  $t$ -continua solución  $X(t)$ .

La **unicidad débil** simplemente menciona que si  $X_1(t)$  y  $X_2(t)$  son solución de la ecuación diferencial estocástica  $dX(t) = a(t, X(t))dt + b(t, X(t))dW(t)$  ambas tiene la misma distribución de probabilidad, es decir que para todo  $n$ ,  $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n < \infty$ , y  $B_1, B_2, \dots, B_n \in \mathcal{B}$  conjuntos boreleanos se tiene que:

$$\begin{aligned} & P(X_1(t_1) \in B_1, X_1(t_2) \in B_2, \dots, X_1(t_n) \in B_n) \\ &= P'(X_2(t_1) \in B_1, X_2(t_2) \in B_2, \dots, X_2(t_n) \in B_n). \end{aligned}$$

**Proposición 2.30** Si  $a(t, x)$  y  $b(t, x)$  son dos funciones que satisfacen las condiciones del teorema 2.28, entonces la solución (ya sea débil o fuerte) de la ecuación diferencial estocástica  $dX(t) = a(t, X(t))dt + b(t, X(t))dW(t)$ , al menos cumplirá la unicidad débil (obsérvese que para la unicidad débil no es necesaria la condición 2 del teorema 2.28).

## 2.6 Propiedades Markovianas

Se comenzará por proponer algunas características que deben de cumplir los procesos estocásticos para que se pueda establecer resultados importantes sobre ellos que se utilizarán en el próximo capítulo.

**Definición 2.31** Un proceso estocástico es difusión de Itô si  $X(t, \omega) : [0, \infty) \otimes \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ , satisface la ecuación diferencial estocástica de la forma:

*i)*  $dX(t) = a(X(t))dt + b(X(t))dW(t)$ ,  $t \geq s, X(s) = x$ , donde  $W(t)$  es un proceso Wiener  $m$ -dimensional,

*ii)*  $a(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $b(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$  satisfacen las condiciones del teorema 2.28 (se observa que  $a(\cdot), b(\cdot)$  sólo dependen de  $x$ ) que en este caso se reducen a

$$\|a(x) - a(y)\| + \|b(x) - b(y)\| \leq D\|x - y\| \text{ para alguna constante } D \text{ con } x, y \in \mathbb{R}^n, t \in [0, T].$$

Se denotará a la solución de (*i*) de la definición 2.31 por  $X(t) = X_s^x(t)$  con  $t > s \geq 0$ , sí  $s = 0$ , y a  $X_0^x(t)$  por  $X^x(t)$ . Esta solución  $X(t)$  tendrá la propiedad de *tiempo-homogéneo* en el sentido siguiente. Obsérvese que

$$\begin{aligned}
X_s^x(s+h) &= x + \int_s^{s+h} a(X_s^x(u))du + \int_s^{s+h} b(X_s^x(u))dW(u) \\
&= x + \int_0^h a(X_s^x(s+v))dv + \int_0^h b(X_s^x(s+v))d\widetilde{W}(v), \quad v = u - s
\end{aligned}$$

donde  $\widetilde{W}(v) = W(s+v) - W(s)$ . Por otro lado sea

$$X^x(h) = x + \int_0^h a(X^x(v))dv + \int_0^h b(X^x(v))d\widetilde{W}(v)$$

Por la unicidad de la proposición 2.30,  $\{W(v)\}_{v \geq 0}$  y  $\{\widetilde{W}(v)\}_{v \geq 0}$  tienen la misma  $P^0$ -distribución, es decir  $\{X(t)\}_{t \geq 0}$  es *tiempo-homogéneo*. Ahora se introducen las distribuciones de probabilidad  $Q^x$  de  $\{X(t)\}_{t \geq 0}$  para  $x \in \mathbb{R}$ .  $Q^x$  asigna las distribuciones de  $x \in \mathbb{R}$  asumiendo  $X(0) = x$ . Para ver esto de manera formal sea  $\mathcal{M}_\infty$  la  $\sigma$ -álgebra generada por las variables aleatorias  $X(t, \omega) = X^y(t, \omega)$  donde  $t \geq 0$  y  $y \in \mathbb{R}^n$ , y para  $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_k < \infty$ , y  $B_1, B_2, \dots, B_k \in \mathcal{B}$  conjuntos boreleanos, para cualquier  $k$ . Se define a  $Q^x$  sobre los miembros de  $\mathcal{M}_t$  con  $0 \leq k \leq t$ , como

$$\begin{aligned}
&Q^x(X(t_1) \in B_1, X(t_2) \in B_2, \dots, X(t_k) \in B_n) \\
&= P(X^x(t_1) \in B_1, X^x(t_2) \in B_2, \dots, X^x(t_k) \in B_k).
\end{aligned}$$

Recuerdese que  $\mathcal{F}_t^{(m)}$  es la  $\sigma$ -álgebra generada por  $\{\widetilde{W}(t) : r < t\}$  y  $\mathcal{M}_t$  es la  $\sigma$ -álgebra generada por  $\{X(t) : r < t\}$ . Por el teorema 2.29 se sabe que  $X(r)$  es medible respecto a  $\mathcal{F}_t^{(m)}$  y por tanto  $\mathcal{M}_t \subset \mathcal{F}_t^{(m)}$ .

**Proposición 2.32** (Propiedad débil Markoviana de una Difusión de Itô) Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función borel medible y acotada, entonces para  $t, h \geq 0$

$$E^x \left[ f(X(t+h)) | \mathcal{F}_t^{(m)} \right]_{(\omega)} = E^{X(t, \omega)} [f(X(h))]. \quad (2.8)$$

*Demostración.* Obsérvese primero que  $E^x$  denota el valor expectativo respecto a la medida de probabilidad  $Q^x$  y  $E$  con respecto a  $P$ . Entonces  $E^y[f(X(h))]$  quiere decir o puede describirse como  $E[f(X^y(h))]$  y  $E^{X(t)}[f(X(h))]$  quiere decir  $E^y[f(X(h))]$  evaluada en  $y = X(t)$ . Para  $r \geq t$ , sea

$$X(r, \omega) = X(t, \omega) + \int_t^r a(X(u))du + \int_t^r b(X(u))dW(u).$$

Por la unicidad del teorema 2.30 y reescribiendo  $X(r, \omega) = X_t^{X(t)}(r, \omega)$ . Sea además  $X_t^x(r, \omega)$  como antes descrito y observar que  $X_t^x(r, \omega)$  es independiente de  $\mathcal{F}_t^{(m)}$ . Luego (2.8) se puede reescribir como  $\mathbb{E} \left[ f(X_t^{X(t)}(t+h, \omega)) | \mathcal{F}_t^{(m)} \right] = \mathbb{E}[f(X_0^x(h, \omega))]_{x=X(t)}$ .

Sea  $g(x, \omega) = f(X_t^x(t+h, \omega))$ , luego  $g$  es medible y se aproxima por funciones acotadas de la forma  $\sum_{k=1}^n \phi_k(x) \varphi_k(\omega)$ , usando las propiedades de las expectativas condicionales se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ f(X_t^{X(t)}(t+h, \omega)) | \mathcal{F}_t^{(m)} \right] &= \mathbb{E}[g(X(t), \omega) | \mathcal{F}_t^{(m)}] = \mathbb{E} \left[ \lim_n \sum_{k=1}^n \phi_k(X(t)) \varphi_k(\omega) | \mathcal{F}_t^{(m)} \right] \\ &= \lim_n \sum_{k=1}^n \phi_k(X(t)) \mathbb{E}[\varphi_k(\omega) | \mathcal{F}_t^{(m)}] = \lim_n \sum_{k=1}^n \mathbb{E} \left[ \phi_k(y) \varphi_k(\omega) | \mathcal{F}_t^{(m)} \right]_{y=X(t)} \\ &= \mathbb{E} \left[ g(y, \omega) | \mathcal{F}_t^{(m)} \right]_{y=X(t)} = \mathbb{E}[g(y, \omega)]_{y=X(t)} = \mathbb{E}[f(X_t^y(t+h, \omega))]_{y=X(t)}. \end{aligned}$$

Como  $\{X(t)\}$  es de tiempo-homogéneo se tiene que

$$\mathbb{E} \left[ f(X_t^{X(t)}(t+h, \omega)) | \mathcal{F}_t^{(m)} \right] = \mathbb{E}[f(X_t^y(t+h, \omega))]_{y=X(t)} = \mathbb{E}[f(X_0^y(h, \omega))]_{y=X(t)}.$$

**Definición 2.33** Sea  $\{\mathcal{N}_t\}_{t \in [0, \infty)}$  una filtración. Una variable aleatoria  $\tau : \Omega \rightarrow [0, \infty]$  es llamada tiempo parado con respecto a la filtración  $\{\mathcal{N}_t\}_{t \in [0, \infty)}$ , si  $\{\omega \in \Omega; \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{N}_t$  para todo  $t \in [0, \infty]$ .

**Definición 2.34** Sea  $\tau$  un tiempo parado con respecto a la filtración  $\{\mathcal{N}_t\}_{t \in [0, \infty)}$  y sea  $\mathcal{N}_\infty$  la  $\sigma$ -álgebra más pequeña que contiene a  $\mathcal{N}_t$  para todo  $t \geq 0$ , entonces la  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{N}_\tau$  consiste en todos los conjuntos  $N \in \mathcal{N}_\infty$  tal que  $N \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{N}_t$  para todo  $t \geq 0$ .

Cuando  $\mathcal{N}_t = \mathcal{M}_t$ , entonces  $\mathcal{M}_\tau$  es la  $\sigma$ -álgebra generada por  $\{X_{\min(s, \tau)}; s \geq 0\}$  y cuando  $\mathcal{N}_t = \mathcal{F}_t^{(m)}$ , entonces  $\mathcal{F}_\tau^{(m)}$  es la  $\sigma$ -álgebra generada por  $\{W_{s \wedge \tau}; s \geq 0\}$ .

**Teorema 2.35** (Propiedad fuerte markoviana de una Difusión de Itô) Sea  $f$  una función de Borel acotada en  $\mathbb{R}^n$ ,  $\tau$  un tiempo parado con respecto a  $\mathcal{F}_\tau^{(m)}$ , con  $\tau < \infty$  c.s. Entonces  $\mathbb{E}^x \left[ f(X(\tau+h)) | \mathcal{F}_\tau^{(m)} \right] = \mathbb{E}^{X(\tau)}[f(X(h))]$ .

La demostración del teorema anterior es similar a la proposición 2.32 para ver detalle ver en Oksendal (2000).

Para generalizar el teorema anterior sea  $\mathcal{H}$  el conjunto de todas las funciones reales  $\mathcal{M}_\infty$ -medibles para  $t_i \geq 0$  se define al operador cambio como  $\theta_t : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  como sigue:

si  $\eta = g_1(X(t_1))g_2(X(t_2))\dots g_k(X(t_k))$  donde  $g_i$  es Borel medible,  $t_i \geq 0$ , luego

$$\theta_t \eta = g_1(X(t_1 + t))g_2(X(t_2 + t))\dots g_k(X(t_k + t)).$$

Si se generaliza el teorema 2.35 se obtiene que

$$\mathbb{E}^x \left[ \theta_\tau \eta | \mathcal{F}_\tau^{(m)} \right] = \mathbb{E}^{X(\tau)}[\eta], \quad (2.9)$$

para todos los tiempos parados  $\tau$  y todas las funciones acotadas  $\eta$ , donde  $(\theta_\tau \eta)(\omega) = (\theta_t \eta)(\omega)$  si  $\tau(\omega) = t$ .

Otro caso importante en el operador cambio  $\theta$  es el siguiente, sea  $H \subset \mathbb{R}^n$  medible y  $\tau_H = \inf\{t > 0 : X(t) \notin H\}$  nombrado como el primer tiempo de salida de  $H$ , sea además  $\alpha$  otro tiempo parado y  $g$  una función acotada y continua en  $\mathbb{R}^n$ . Se define ahora  $\delta = g(X(\tau_H))\mathcal{X}_{\{\tau_H < \infty\}}$  y  $\tau_H^\alpha = \inf\{t > \alpha : X(t) \notin H\}$ , entonces se cumple que

$$\theta_\alpha \delta = \theta_\alpha g(X(\tau_H))\mathcal{X}_{\{\tau_H < \infty\}} = g(X(\tau_H^\alpha))\mathcal{X}_{\{\tau_H^\alpha < \infty\}}. \quad (2.10)$$

Para mostrar (2.10) se aproxima a  $\delta$  por funciones  $\delta^{(k)}$  para  $k = 1, 2, 3, \dots$  de la forma

$$\delta^{(k)} = \sum_{j=0}^{k-1} g(X_{t_j})\mathcal{X}_{[t_j, t_{j+1})}(\tau_H) \text{ con } t_j = j2^{-k} \text{ y obsérvese que}$$

$$\begin{aligned} \theta_\alpha \mathcal{X}_{[t_j, t_{j+1})}(\tau_H) &= \theta_\alpha \mathcal{X}_{\{\forall r \in (0, t_j), X_r \in H \ \& \ \exists s \in [t_j, t_{j+1}) \ X_s \notin H\}} \\ &= \mathcal{X}_{\{\forall r \in (0, t_j), X_{r+\alpha} \in H \ \& \ \exists s \in [t_j, t_{j+1}) \ X_{s+\alpha} \notin H\}} \\ &= \mathcal{X}_{\{\forall u \in (\alpha, t_j + \alpha), X_u \in H \ \& \ \exists v \in [t_j + \alpha, t_{j+1} + \alpha) \ X_v \notin H\}} \\ &= \mathcal{X}_{[t_j, t_{j+1})}(\tau_H^\alpha), \end{aligned}$$

tomando limites se obtiene

$$\theta_\alpha \delta = \lim_{k \rightarrow \infty} \theta_\alpha \delta^{(k)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{k-1} g(X_{t_j + \alpha})\mathcal{X}_{[t_j + \alpha, t_{j+1} + \alpha)}(\tau_H^\alpha) = g(X(\tau_H^\alpha))\mathcal{X}_{\{\tau_H^\alpha < \infty\}}.$$

**Definición 2.36** Sea  $X(t)$  un proceso de Itô en  $\mathbb{R}^n$ . El generador  $A$  de  $X(t)$  es definido

$$\text{por } Af(x) = \lim_{t \searrow 0} \frac{\mathbb{E}^x[f(X(t))] - f(x)}{t} \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

El conjunto de funciones  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tal que el limite existe en  $x \in \mathbb{R}^n$  es denotado por  $\mathcal{D}_A(x)$ , mientras que  $\mathcal{D}_A$  denota al conjunto de funciones para las cuales el limite existe para toda  $x \in \mathbb{R}^n$ .

**Lema 2.37** Sea  $Y(t) = Y^x(t)$  un proceso de Itô en  $\mathbb{R}^n$  de la forma

$$Y^x(t, \omega) = x + \int_0^t a(X(s, \omega)) ds + \int_0^t b(X(s, \omega)) dW(s, \omega), \text{ donde } W \text{ es } m\text{-dimensional.}$$

Sea  $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$  (es decir  $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$  y tiene soporte compacto) y sea  $\tau$  un tiempo parado respecto a  $\mathcal{F}_t^{(m)}$  y  $E^x[\tau] < \infty$ . Asuma que  $a(t, \omega)$  y  $b(t, \omega)$  son acotadas para el conjunto  $(t, \omega)$  tal que  $Y(t, \omega)$  pertenece al soporte de  $f$ . Se cumple, entonces que

$$E^x[f(Y(\tau))] = f(x) + E^x \left[ \int_0^\tau \left( \sum_i a_i(s, \omega) \frac{\partial f(Y(s))}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} (bb')_{i,j}(s, \omega) \frac{\partial^2 f(Y(s))}{\partial x_i \partial x_j} \right) ds \right],$$

donde  $E^x$  es la esperenza con respecto a la distribución de probabilidad  $R^x$  para la cual  $Y(t)$  comienza en  $x$ ,  $R^x[Y(t_1) \in F_1, \dots, Y(t_k) \in F_k] = P^0[Y^x(t_1) \in F_1, \dots, Y^x(t_k) \in F_k]$ , y  $F_i$  son conjuntos Borel.

*Demostración.* Sea  $Z = f(Y)$  y apliquemos el lema de Itô, entonces

$$\begin{aligned} dZ &= \sum_{i=1}^n f_{x_i}(t, Y(t)) dY_i(t) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_{x_i x_j}(t, Y(t)) dY_i(t) dY_j(t) \\ &= \sum_{i=1}^n a_i f_{x_i}(t, Y(t)) dt + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_{x_i x_j}(t, Y(t)) (bdW(t))_i (bdW(t))_j \\ &\quad + \sum_{i=1}^n f_{x_i}(t, Y(t)) (bdW(t))_i \end{aligned}$$

donde,

$$(bdW(t))_i (bdW(t))_j = \left( \sum_{k=1}^m b_{ik} dW_k(t) \right) \left( \sum_{l=1}^m b_{jl} dW_l(t) \right) = \left( \sum_{l=1}^m b_{ik} b_{jk} \right) dt = (bb')_{ij} dt$$

luego

$$f(Y(t)) = f(Y(0)) + \int_0^t \left( \sum_{i=1}^n a_i f_{x_i}(s, Y(s)) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (bb')_{ij} f_{x_i x_j}(s, Y(s)) \right) ds$$

$$+ \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m \int_0^t b_{ik} f_{x_i}(t, Y(t)) dW_k(t)$$

por tanto

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^x[f(Y(\tau))] &= f(x) + \mathbb{E}^x \left[ \int_0^\tau \left( \sum_{i=1}^n a_i f_{x_i}(s, Y(s)) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (bb')_{ij} f_{x_i x_j}(s, Y(s)) \right) ds \right] \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m \mathbb{E}^x \left[ \int_0^\tau b_{ik} f_{x_i}(t, Y(s)) dW_k(s) \right] \end{aligned}$$

Por otro lado si  $g$  es una función de Borel Acotada  $|g| \leq M$  y dado que  $g(Y(s))$  y la función indicadora  $\mathcal{X}_{s < \tau}$  son ambas  $\mathcal{F}_s^m$ -medibles, entonces para todo entero  $k$  se cumple que

$$\mathbb{E}^x \left[ \int_0^{\tau \wedge k} g(Y(s)) dW(s) \right] = \mathbb{E}^x \left[ \int_0^k \mathcal{X}_{s < \tau} g(Y(s)) dW(s) \right] = 0.$$

Más aun

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}^x \left[ \left( \int_0^\tau g(Y(s)) dW(s) - \int_0^{\tau \wedge k} g(Y(s)) dW(s) \right)^2 \right] \\ &= \mathbb{E}^x \left[ \int_{\tau \wedge k}^\tau g^2(Y(s)) dW(s) \right] \leq M^2 \mathbb{E}^x[\tau - \tau \wedge k] \rightarrow 0 \quad \text{cuando } k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

$$\text{Por tanto } 0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E}^x \left[ \int_0^{\tau \wedge k} g(Y(s)) dW(s) \right] = \mathbb{E}^x \left[ \int_0^\tau g(Y(s)) dW(s) \right],$$

luego

$$\mathbb{E}^x[f(Y(\tau))] = f(x) + \mathbb{E}^x \left[ \int_0^\tau \left( \sum_{i=1}^n a_i f_{x_i}(s, Y(s)) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (bb')_{ij} f_{x_i x_j}(s, Y(s)) \right) ds \right].$$

**Teorema 2.38** Sea  $X(t)$  una difusión de Itô y  $dX(t) = a(X(t))dt + b(X(t))dW(t)$ , si  $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$ , entonces  $f \in \mathcal{D}_A$  y  $Af(x) = \sum_i^n a_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_i^n \sum_j^n (bb')_{i,j}(x) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ .

*Demostración.* El teorema se sigue aplicando el lema 2.37 (con  $\tau = t$ ) a la definición de  $A$  (definición 2.36).

Combinado el resultado (\*) del lema 2.37 y el resultado del teorema 2.38 obtenemos:

**Teorema 2.39 fórmula de Dynkin** Sea  $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$  y  $\tau$  un tiempo parado, con  $E^x[\tau] < \infty$ , entonces

$$E^x[f(Y(\tau))] = f(x) + E^x \left[ \int_0^\tau Af(X(s))ds \right].$$

## 2.7 El problema Dirichlet-Poisson

En este punto se mostrará el último resultado que utilizaremos en el próximo capítulo, con esto concluimos nuestro breve temario de cálculo estocástico y abrimos pasos a los demás capítulos.

Sea  $D$  un dominio (conjunto abierto y conexo) en  $\mathbb{R}^n$  sea  $L$  el operador diferencial parcial semi-elíptico en  $C^2(\mathbb{R}^n)$  de definido por

$$L = \sum_i^n a_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_i^n \sum_j^n \sigma_{i,j}(x) \frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j},$$

donde  $a_i x$  y  $b_{i,j}$  son funciones continuas.

Se plantea el siguiente problema, supongase  $\phi \in C(\partial D)$  y  $g \in C(D)$  dos funciones y se busca a  $w \in C^2(D)$  tal que:

$$i) \quad Lw = -g \text{ en } D, \quad (2.11)$$

$$ii) \quad \text{y } \lim_{x \rightarrow y, x \in D} w(x) = \phi(y) \text{ para todo } y \in \partial D. \quad (2.12)$$

El bosquejo de la solución lo dividimos en dos:

- 1) Lo primero es buscar una difusión de Itô  $X(t, \omega)$  cuyo generador  $A$  (ver definición 2.36) coincida con el operador diferencial parcial semi-elíptico  $L$  en  $C^2(\mathbb{R}^n)$ . Para lograr esto elegimos a  $b(x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tal que  $\frac{1}{2}b(x)b^T(x) = \sigma_{i,j}(x)$  y asumimos que  $b(x)$  y  $\sigma_{i,j}(x)$  satisfacen las condiciones *i)* y *ii)* del teorema 2.29.

2) Sea  $X(t)$  la solución tal que  $dX(t) = a(X(t)) + b(X(t))dW(t)$  donde  $W(t)$  es un movimiento Wiener  $n$ -dimensional. Como acostumbramos sea  $E^x$  denota la esperanza condicional con respecto a la distribución de probabilidad  $Q^x$ , de que  $X(t)$  comience en  $x \in \mathbb{R}^n$ . Utilizando la fórmula de Dinky (teorema 2.39) se tiene que

$$E^x[w(X(\tau_D))] = w(x) + E^x \left[ \int_0^{\tau_D} Lw(X(s))ds \right] \quad (2.13)$$

donde  $\tau_D = \inf\{t > 0 : X(t) \notin D\}$ . Despejando a  $w(x)$  de (2.13) y considerando paso (1) obtenemos que

$$w(x) = E^x[w(X(\tau_D))] - E^x \left[ \int_0^{\tau_D} Lw(X(s))ds \right], \quad (2.14)$$

hacemos

$$Lw(X(\tau_D)) = -g(X(\tau_D)), \quad (2.15) \quad E^x[w(X(\tau_D))] = E^x[\phi(X(\tau_D))], \quad (2.16)$$

sustituyendo (2.15) y (2.16) en (2.14) obtenemos nuestro candidato a la solución del problema (2.11) y (2.12)

$$w(x) = E^x[\phi(X(\tau_D))] + E^x \left[ \int_0^{\tau_D} g(X(s))ds \right]. \quad (2.17)$$

**Definición 2.40** Un punto  $y \in \partial D$  es llamado regular en  $D$  (con respecto a  $X(t)$ ) si  $Q^y[\tau_D = 0] = 1$ , en otro caso el punto  $y$  es llamado irregular.

**Teorema 2.41** Sea  $\tau_D < \infty$  c.s. ( $Q^x$  para toda  $x$ ),  $\phi \in C(\partial D)$  acotada y  $g \in C(D)$  que satisface  $E^x \left[ \int_0^{\tau_D} g(X(s))ds \right] < \infty$  para todo  $x \in D$ , definimos

$$w(x) = E^x[\phi(X(\tau_D))] + E^x \left[ \int_0^{\tau_D} g(X(s))ds \right] \quad x \in D,$$

entonces:

- i)  $\mathcal{A}w = -g$  en  $D$ ,
- ii) y  $\lim_{t \nearrow \tau_D} w(X(t)) = \phi(X(\tau_D))$ , c.s.  $Q^x$  para todo  $x \in D$ ,
- iii) Si existe una función  $w_1 \in C^2(D)$  y una constante  $C$  tal que

$$|w_1(x)| < C \left( 1 + E^x \left[ \int_0^{\tau_D} g(X(s))ds \right] \right), \quad x \in D$$

y  $w_1$  satisface i) y ii), entonces  $w_1 = w$ .

## CAPÍTULO 3

# CONTROL ÓPTIMO ESTOCÁSTICO

---

El propósito de este capítulo es revisar tópicos de control óptimo estocástico cuyos resultados los utilizaremos en los capítulos posteriores. En la primera parte del capítulo se mostrará un ejemplo donde un agente racional tiene el problema de seleccionar un portafolio óptimo de activos financieros (los cuales no tienen un comportamiento determinista) en un horizonte infinito; en esta primera parte también se dará un bosquejo de la demostración de la ecuación de Bellman. En el punto dos daremos formalidad al teorema de la ecuación de Bellman para controles Markovianos y después una ampliación del teorema a controles  $\mathcal{F}_t^{(m)}$ -adaptables. Finalmente en el punto tres mostraremos la solución analítica (el portafolio óptimo) de nuestro agente racional.

Para una revisión más profundas de los tópicos dados en el segundo capítulo puede revisarse en Oksendal B. (2000), Venegas-Martínez F. (2006), Chang F-R.(2004).

### 3.1 Planteamiento del problema

Se comenzará mostrando un ejemplo donde un inversionista (agente racional) tiene que seleccionar un portafolio de activos financieros de tal manera que maximice su función de utilidad (o "felicidad") para un horizonte infinito.

**Ejemplo 3.1 (Un modelo básico)** Supongase que se tienen  $n$  acciones y el precio de cada acción sigue un proceso geométrico Wiener o movimiento geométrico Browniano (ver ejemplo 2.28)

$$dP_i(t) = \mu_i P(t)dt + \sigma_i dZ_i(t), \text{ con } \mu_i, \sigma_i > 0, \text{ para } i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.1)$$

donde  $Z_i(t)$  denota la aleatoriedad o ruido blanco del precio en el tiempo  $t$ ,  $\mu_i$  denota la tasa media relativa de cambio del precio  $P_i$  y  $\sigma_i$  denota la magnitud del ruido, distorsión o aleatoriedad del precio.

Se denota por  $N_i(t)$  a las unidades de la acción  $i$  en el tiempo  $t$ , la riqueza total en el tiempo  $t$  se denotará por  $W(t)$  y se define a  $c(t)$  como el consumo en el tiempo  $t$ , la ecuación de la restricción presupuestaria queda, entonces como

$$dW(t) = \sum_{i=1}^n N_i(t) dP_i t - c(t) dt. \quad (3.2)$$

Si se sustituye a la ecuación 3.1 en 3.2 obtenemos

$$dW(t) = \sum_{i=1}^n s_i(t) \mu_i W(t) dt - c(t) dt + \sum_{i=1}^n s_i(t) \sigma_i W(t) dZ(t), \quad (3.3)$$

donde  $s_i(t) = \frac{N_i(t) P_i(t)}{W(t)}$  es la proporción de la riqueza gastada en la acción  $i$  en el tiempo  $t$ . Por último, se supone que el activo  $n$  no tiene riesgo, es decir,  $\sigma_n = 0$  y  $\mu_n = r < \mu_j$ , para  $j \neq n$ . Luego la restricción presupuestaria queda como:

$$dW(t) = \sum_{i=1}^{n-1} s_i(t) (\mu_i - r) W(t) dt - [rW(t) - c(t)] dt + \sum_{i=1}^{n-1} s_i(t) \sigma_i W(t) dZ(t). \quad (3.4)$$

El inversionista trata de maximizar su utilidad  $U(c(t))$  en cada instante de tiempo enfrentando el problema

$$\begin{array}{l} \text{Maximizar} \\ (c, \{s_i\}) \end{array} \quad \mathbb{E} \left[ \int_0^{\infty} e^{-\rho t} U(c(t)) dt \right] \quad (3.5)$$

Sujeto a

$$dW(t) = \sum_{i=1}^{n-1} s_i(t) (\mu_i - r) W(t) dt - [rW(t) - c(t)] dt + \sum_{i=1}^{n-1} s_i(t) \sigma_i W(t) dZ(t)$$

con  $W(0) = W$ .

Dado el problema 3.5 de optimización intertemporal, se establece la funcional  $J(y)$  como

$J(y)$

$$= \max_{[c_t, 0 \leq s \leq \Delta t]} \mathbb{E}^y \left[ \int_0^{\Delta t} e^{-\rho s} U(c(s)) ds + \max_{[c_t, \Delta t \leq s \leq \infty]} \mathbb{E}^{y+\Delta y} \left( \int_{\Delta t}^{\infty} e^{-\rho s} U(c(s)) ds \right) \right]. \quad (3.6)$$

Se integra la primera parte del ecuación (3.6), por el teorema de valor de medio para integrales, y se obtiene

$$\int_0^{\Delta t} e^{-\rho t} U(c(t)) dt = e^{-\rho t} U(c(t)) \Delta t, \quad (3.7)$$

donde  $t \in (0, \Delta t)$ . Para integrar la segunda parte de la ecuación realizamos un cambio de variable  $t = s - \Delta t$ , y se tiene que

$$\begin{aligned} & \max_{[c_t, \Delta t \leq s \leq \infty]} \mathbb{E}^{y+\Delta y} \left( \int_{\Delta t}^{\infty} e^{-\rho s} U(c(s)) ds \right) \\ &= \max_{[c_t+\Delta t, 0 \leq t < \infty]} \mathbb{E}^{y+\Delta y} \left( \int_0^{\infty} e^{-\rho(t+\Delta t)} U(c(t+\Delta t)) dt \right) = J(y+\Delta y) \end{aligned} \quad (3.8)$$

Se reescribe a la ecuación (3.6) con los últimos dos resultados (3.7) y (3.8), y de esta forma se llega a

$$0 = \max_{c_t, 0 \leq t \leq \Delta t} \mathbb{E}^y \left[ e^{-\rho t} U(C(t)) \Delta t + J(y+\Delta y) - J(y) \right]. \quad (3.9)$$

Notar que si la funcional es de clase  $C^2$ , entonces por la fórmula de Itô se obtiene

$$J(y+\Delta y) - J(y) = J_t(y) + J_y(y) \Delta y + \frac{1}{2} J_{yy}(y) (\Delta y)^2 + o(\Delta t),$$

tomando la esperanza condicional se llega a

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}^y [J(y+\Delta y) - J(y)] \\ &= \left\{ J_t(y) + \left[ \sum_{i=1}^{n-1} s_i (\mu_i - r) y - [ry - c] \right] J_y(y) + \frac{1}{2} \left[ \sum_{i=1}^{n-1} s_i^2 \sigma_i^2 y \right] J_{yy}(y) \right\} \Delta t + o(\Delta t). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Ahora sustituimos a (3.10) en (3.9) y se divide entre  $\Delta t$ , y por último  $\Delta t \rightarrow 0$ , se obtiene la siguiente ecuación denominada ecuación de Bellman

$$0 = \max_c \left\{ e^{-\rho t} U(c) + J_t(y) + \left[ \sum_{i=1}^{n-1} s_i (\mu_i - r) y - [ry - c] \right] J_y(y) + \frac{1}{2} \left[ \sum_{i=1}^{n-1} s_i^2 \sigma_i^2 y^2 \right] J_{yy}(y) \right\} \quad (3.11)$$

o simplemente

$$0 = \max_c \{ e^{-\rho t} U(c) + \mathcal{A}J(y) \}, \quad (3.12)$$

donde  $\mathcal{A}$  es el operador recursivo de la definición 2.36, o también llamado el operador generador o diferencial (ver teorema 2.38)

$$\mathcal{A}J(y) = \frac{1}{dt} \mathbb{E} \left[ J_t(y) + J_y(y) dy + \frac{1}{2} J_{yy}(W) (dy)^2 \right]. \quad (3.13)$$

Retomando lo anterior y reescribiendo de una manera formal. Suponemos que el estado del sistema en el tiempo  $t$  es descrito por el proceso de Itô

$$dX(t) = dX^u(t) = a(t, X(t), u(t))dt + b(t, X(t), u(t))dW(t) \quad (3.14)$$

donde  $X(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $a : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $b : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times U \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ , y  $W(t)$  es un movimiento Browniano multidimensional. Es de hacer notar que  $u(t) \in U \subset \mathbb{R}^k$  es una función cuyos valores pueden ser elegidos en un conjunto Borel  $U$ , en cada instante  $t$ , para controlar al proceso  $X(t)$  y frecuentemente es nombrado variable de control y por tanto  $u(t) = u(t, \omega)$  es un proceso estocástico. Dado que la decisión para el periodo de tiempo  $(t, t + dt)$  debe de ser basada en lo que ha pasado hasta el tiempo  $t$ , la función  $\omega \rightarrow u(t, \omega)$  debe de ser medible respecto a  $\mathcal{F}_t^{(m)}$ , es decir el proceso  $u(t)$  es  $\mathcal{F}_t^{(m)}$ -adaptado. Por tanto, el lado derecho de nuestra ecuación (3.14) puede ser bien definida como una integral estocástica, bajo las situaciones asumidas de  $a$  y  $b$ .

Sea  $\{X_s^x(h)\}_{h \geq s}$  la solución de (3.14) tal que  $X_s^x(s) = x$ , es decir

$$X^x(h) = x + \int_s^h a(r, X_s^x(r), u(r))dr + \int_s^h b(r, X_s^x(r), u(r))dW(r), \quad h \geq s, \quad (3.15)$$

y la distribución de probabilidad de que  $X(t)$  comience en  $x$  para  $t = s$ , es denotada por  $Q^{s,x}$ . Así que

$$\begin{aligned} & Q^{s,x}(X(t_1) \in F_1, X(t_2) \in F_2, \dots, X(t_k) \in F_n) \\ & = P^0(X_s^x(t_1) \in F_1, X_s^x(t_2) \in F_2, \dots, X_s^x(t_k) \in F_k), \end{aligned}$$

para  $s \leq t_i$ ,  $F_i \subset \mathbb{R}^n$ ,  $1 \leq i \leq k$ ,  $k = 1, 2, \dots$

Sea  $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times U \rightarrow \mathbb{R}$  la función "Utilidad" y  $K : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  la función "Legado", ambas funciones continuas. Sea  $G$  un dominio fijo en  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  y sea  $\widehat{T}$  el primer tiempo fuera de  $G$  despues de tiempo  $s$ , es decir

$$\widehat{T} = \widehat{T}^x(s, \omega) = \inf\{r > s : (r, X_s^x(r)) \notin G\} \leq \infty.$$

Suponemos que

$$\mathbb{E}^{s,x} \left[ \int_s^{\widehat{T}} |F^{u(r)}(r, X(r))| dr + |K(\widehat{T}, X(\widehat{T}))| \mathcal{X}_{\{\widehat{T} < \infty\}} \right] < \infty, \quad (3.16)$$

para todo  $s, x, u$ , donde  $F^u(r, z) = F(r, z, u)$  y definimos a la funcional  $\Phi^u(s, x)$  como

$$\Phi^u(s, x) = \mathbb{E}^{s,x} \left[ \int_s^{\widehat{T}} F^{u(r)}(r, X(r)) dr + K(\widehat{T}, X(\widehat{T})) \mathcal{X}_{\{\widehat{T} < \infty\}} \right] \quad (3.17)$$

Para facilitar la notación se define

$$Y(t) = (s + t, X_s^x(s + t)), \quad \text{para todo } t \geq 0, \quad Y(0) = (s, x) \quad (3.18)$$

y se sustituye (3.18) en la primera ecuación (3.14) para obtener

$$dY(t) = dY^u(t) = a(Y(t), u(t))dt + b(Y(t), u(t))dW(t). \quad (3.19)$$

La distribución de probabilidad  $Y(t)$  que comienza en  $y = (s, x)$  con  $t = 0$  es denotada por  $Q^{s,x} = Q^y$ . Es importante hacer notar que

$$\int_s^{\widehat{T}} F^{u(r)}(r, X(r)) dr = \int_0^{\widehat{T}-s} F^{u(s+t)}(s + t, X(s + t)) dt = \int_0^T F^{u(s+t)}(Y(t)) dt,$$

donde  $T = \inf\{t > 0 : Y(t) \notin G\} = \widehat{T} - s$ . Más aun,

$$K(\widehat{T}, X(\widehat{T})) = K(Y(\widehat{T} - s)) = K(Y(T)).$$

Luego se puede reescribir a la funcional con  $y = (s, x)$  como  $\Phi^u(s, x) = \Phi^u(y)$ , donde

$$\Phi^u(y) = \mathbb{E}^y \left[ \int_0^T F^{u(t)}(Y(t))dt + K(Y(T))\mathcal{X}_{\{T < \infty\}} \right]. \quad (3.20)$$

El problema consiste entonces en encontrar (para cada  $y \in G$ ) un número  $\Phi(y)$  y un control  $u^* = u^*(t, \omega) = u^*(y, t, \omega)$  tal que

$$J(y) = \sup_{(u(t, \omega))} \Phi^u(y) = \Phi^{u^*}(y) \quad (3.21)$$

donde el supremo es tomado sobre todos los procesos  $\{u(t)\}$   $\mathcal{F}_t^{(m)}$ -adaptable, con valores en  $U$ . Tal control  $u^*$  (sí este existe) es llamado control óptimo y  $J$  es llamado función valor. En la presente trabajo se trabajará con los llamados controles Markovianos.

Si se piensa en funciones  $u(t, \omega)$  de la forma  $u(t, \omega) = u_0(t, X(t, \omega))$  para alguna función  $u_0 : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow U \subset \mathbb{R}^k$  y se asume que  $u$  no depende del punto inicial  $y = (s, x)$ , es decir, el control que se escoge en el tiempo  $t$ , sólo depende del estado del sistema en este tiempo, entonces estamos hablando de controles Markovianos, por que con tales características de  $u$ , el proceso de  $X(t)$  correspondiente se transforma en una difusión de Itô, en particular procesos Markovianos (ver definición 2.31). En lo siguiente, nosotros identificaremos una función  $u : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow U$  con el proceso de control Markoviano  $u(Y) = u(t, X(t))$ .

### 3.2 Ecuación de Bellman

Sea  $u = u(Y) = u(t, X(t))$  controles Markovianos, e igual que antes  $Y(t) = (s + t, X_s^x(s + t))$  (para todo  $t \geq 0$ ,  $Y(0) = (s, x)$ ) el sistema de ecuaciones a solucionar

$$dY(t) = dX^u(t) = a(Y(t), u(Y(t)))dt + b(Y(t), u(Y(t)))dW(t).$$

Para  $k \in U$  y  $f \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$  se define a  $L$  el operador semi-eliptico por

$$(L^k f)(y) = \frac{\partial f}{\partial s}(y) + \sum_i^n a_i(y, k) \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_i^n \sum_j^n \sigma_{i,j}(y, k) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \quad (3.22)$$

donde  $\sigma_{i,j} = \frac{1}{2}(bb')_{i,j}$ ,  $y = (s, x)$  y  $x = (x_1, \dots, x_n)$ . Entonces en cada elección de la función  $u$ , la solución  $Y(t) = Y^u(t)$  es una difusión de Itô con el operador diferencial  $\mathcal{A}$  dado por  $(\mathcal{A}f)(y) = (L^{u(y)}f)(y)$  para  $f \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$  (ver teorema (2.41)). Para  $k \in U$  definimos  $F^k(y) = F(y, k)$ . El primer resultado en la teoría de control óptimo estocástico es el siguiente:

**Teorema 3.2 (Ecuación de Bellman )**

Se define  $J(y) = \sup_u \{ \Phi^u(y) : u = u(Y) \text{ Control Markoviano} \}$

a) Sea  $J \in C^2(G) \cap C(\bar{G})$  acotada,  $T < \infty$  c.s. en  $Q^y$  para todo  $y \in G$ ,

b) Se supone que el control óptimo Markoviano  $u^*$  existe,

c) Sea además  $\partial G$  es regular para  $Y^{u^*}$ ,

entonces

$$i) \sup_{k \in U} \{ F^k(y) + (L^k J)(y) \} = 0 \quad \text{para todo } y \in G, \quad (3.23)$$

$$ii) \Phi(y) = K(y) \quad \text{para todo } y \in \partial G,$$

iii) El supremo de (3.23) es obtenido si  $u = u^*(y)$  donde  $u^*(y)$  es óptimo, ó en otras palabras  $F(y, u^*(y)) + (L^{u^*(y)}J)(y) = 0$  para todo  $y \in G$

*Demostración.* Primero se probará *ii)* y *iii)*. Dado que  $u^* = u^*(y)$  es óptimo, entonces se tiene que

$$J(y) = \Phi^{(u^*)}(y) = E^y \left[ \int_0^T F(Y(s), u^*(s)) ds + K(Y(T)) \right].$$

Si  $y \in \partial G$ , entonces  $T = 0$  c.s. con la ley de distribución  $Q^y$  (por la condición *c*, de regularidad de  $\partial G$ ) y por tanto se cumple *ii)*. Por la solución del problema de Dirichlet-Poisson, (teorema (2.41)) se tiene que

$$(L^{u^*(y)}J)(y) = (\mathcal{A}^{u^*(y)}J)(y) = -F(y, u^*(y)) \quad \text{para todo } y \in G,$$

con lo que se cumple *iii)*. Para probar *i)* se fija  $y = (s, x) \in G$  y se elije un control Markoviano  $u$ , sea además  $\alpha \leq T$  un tiempo parado y obsérvese lo siguiente:

sea  $I = \int_0^T F^{u(r)}(Y(r))dr$  y aproximemos a  $I$  por sumas de la forma

$$I^{(k)} = \sum_{i=0}^{k-1} F^{u(r)}(Y(r_i)) \mathcal{X}_{\{t_i < T\}} \Delta r_i,$$

se define además al operador cambio como en el capítulo uno (pag 24)

$$\theta_\alpha I^{(k)} = \sum_{i=0}^{k-1} F^{u(r)}(Y(r_i + \alpha)) \mathcal{X}_{\{t_i + \alpha < T^\alpha\}} \Delta r_i,$$

donde  $\tau^\alpha = \inf\{t > \alpha : Y(t) \notin G\}$ . Siguiendo la argumentación para resolver (2.10) y tomando límites se obtiene que

$$\theta_\alpha I = \theta_\alpha \int_0^T F^{u(r)}(Y(r))dr = \int_\alpha^T F^{u(r)}(Y(r))dr \quad (3.24).$$

Como

$$\Phi^u(y) = \mathbb{E}^y \left[ \int_0^T F^{u(r)}(Y(r))dr + K(Y(T)) \right]$$

por las propiedades de Markov vistas en el punto 2.6, con las ecuaciones (2.9),(2.10) y combinado con (3.24), se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^y[\Phi^u(Y(\alpha))] &= \mathbb{E}^y \left[ \mathbb{E}^{Y(\alpha)} \left[ \int_0^T F^u(Y(r))dr + K(Y(T)) \right] \right] \\ &= \mathbb{E}^y \left[ \mathbb{E}^y \left[ \theta_\alpha \left( \int_0^T F^u(Y(r))dr + K(Y(T)) \right) \mid \mathcal{F}_\alpha \right] \right] \\ &= \mathbb{E}^y \left[ \mathbb{E}^y \left[ \int_\alpha^T F^u(Y(r))dr + K(Y(T)) \mid \mathcal{F}_\alpha \right] \right] \\ &= \mathbb{E}^y \left[ \int_0^T F^u(Y(r))dr + K(Y(T)) - \int_0^\alpha F^u(Y(r))dr \right] \\ &= \Phi^u(y) - \mathbb{E}^y \left[ \int_0^\alpha F^u(Y(r))dr \right], \end{aligned}$$

por tanto se tiene que

$$\Phi^u(y) = \mathbb{E}^y \left[ \int_0^\alpha F^u(Y(r))dr \right] + \mathbb{E}^y[\Phi^u(Y(\alpha))]. \quad (3.25)$$

Sea  $W \subset G$ , donde  $W = \{(r, z) \in G : r < t_1\}$  y  $s < t_1$ . Sea además  $\alpha = \inf\{t \geq 0 : Y(t) \notin W\}$ , es decir,  $\alpha = \inf\{t \geq 0 : Y(t) \notin \{(r, z) \in G : r < t_1, \}\}$  y trabajemos bajo el supuesto de que el control óptimo  $u^*(y) = u^*(r, z)$  existe, entonces se define,

$$u(r, z) = \begin{cases} k, & \text{si } (r, z) \in W \\ u^*(r, z), & \text{si } (r, z) \in G - W \end{cases}$$

donde  $k \in U$  es arbitrario, entonces  $J(Y(\alpha)) = \Phi^{u^*}(Y(\alpha)) = \Phi^u(Y(\alpha))$ . (3.26)

Luego combinando los resultados (3.25) y (3.26) se obtiene,

$$J(y) \geq \Phi^u(y) = \mathbb{E}^y \left[ \int_0^\alpha F^k(Y(r)) dr \right] + \mathbb{E}^y[J(Y(\alpha))] \quad (3.27)$$

y dado que  $J \in C^2(G)$ , aplicando la fórmula de Dynkin (teorema 2.39) se obtiene,

$$\mathbb{E}^y[J(Y(\alpha))] = J(y) + \mathbb{E}^y \left[ \int_0^\alpha (L^k J)(Y(r)) dr \right]. \quad (3.28)$$

Sustituyendo (3.28) en (3.27) se obtiene,

$$J(y) \geq \mathbb{E}^y \left[ \int_0^\alpha F^k(Y(r)) dr \right] + J(y) + \mathbb{E}^y \left[ \int_0^\alpha (L^k J)(Y(r)) dr \right],$$

simplificando  $\mathbb{E}^y \left[ \int_0^\alpha (F^k(Y(r)) + (L^k J)(Y(r))) dr \right] \leq 0$ , cumpliendose entonces

$$\frac{\mathbb{E}^y \left[ \int_0^\alpha (F^k(Y(r)) + (L^k J)(Y(r))) dr \right]}{\mathbb{E}^y[\alpha]} \leq 0 \quad \text{para todo } W \quad (3.29)$$

Como  $F^k(\cdot)$  y  $(L^k J)(\cdot)$  son ambas continuas en  $y$ , tomando el limite  $t_1 \searrow s$  de la expresión (3.29) obtenemos que  $F^k(y) + (L^k J)(y) \leq 0$ , como ya demostramos iii) obtenemos por tanto i) completando la prueba.

**Definición 3.3** Sea  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  un espacio de probabilidad. Una familia  $\{f_j\}_{j \in J}$  de funciones reales y medibles  $f_j$  en  $\Omega$  es llamada uniformemente integrable sí

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \left[ \sup_{j \in J} \left( \int_{\{|f_j| > M\}} |f_j| dP \right) \right] = 0.$$

El teorema anterior sólo muestra una condición necesaria a continuación se muestra el teorema para la suficiencia también llamada condiciones de transversalidad.

**Teorema 3.4 (Condiciones de Transversalidad)**

Sea una función  $\varphi \in C^2(G) \cap C(\bar{G})$  tal que

- a) Para todo  $k \in U$ ,  $F^k(y) + (L^k\varphi)(y) \leq 0$ ; con  $y \in G$ ,
- b)  $\lim_{t \rightarrow T} \varphi(Y(t)) = K(Y(T))\mathcal{X}_{T < \infty}$  c.s en  $Q^y$ ,
- c) y  $\{\varphi(Y(\tau))\}_{\tau \leq T}$  es una familia uniformemente  $Q^y$ -integrable para todo control Markoviano  $u$  y para todo  $y \in G$ ,

entonces

- i)  $\varphi(y) \geq \Phi^u(y)$  para todo control Markoviano  $u$  y para todo  $y \in G$ ,
- ii) más aun, si para cada  $y \in G$  se busca  $u_0(y)$  tal que  $F^{u_0(y)}(y) + (L^{u_0(y)}\varphi)(y) = 0$ , entonces  $u_0 = u_0(y)$  y  $u_0$  debe de ser un control óptimo markoviano tal que  $\varphi(y) = \Phi^{u_0}(y) = J(y)$

*Demostración.* Sea  $u$  un control Markoviano y como se cumplen a) y b)  $L^u\varphi \leq -F^u$  en  $G$ , aplicando la fórmula de Dynkin se obtiene,

$$\mathbb{E}^y[\varphi(Y(T_R))] = \varphi(y) + \mathbb{E}^y \left[ \int_0^{T_R} (L^u\varphi)(Y(r))dr \right] \leq \varphi(y) - \mathbb{E}^y \left[ \int_0^{T_R} F^u(Y(r))dr \right],$$

donde  $T_R = \min\{R, T, \inf\{t > 0 : |Y(t)| \geq R\}\}$  para todo  $R < \infty$ . Por b), c) y (3.16) obtenemos que  $\varphi(y) \geq \mathbb{E}^y \left[ \int_0^{T_R} F^u(Y(r))dr + \varphi(Y(T_R)) \right]$  y además se cumple que

$$\mathbb{E}^y \left[ \int_0^{T_R} F^u(Y(r))dr + \varphi(Y(T_R)) \right] \rightarrow \mathbb{E}^y \left[ \int_0^T F^u(Y(r))dr + K(Y(T))\mathcal{X}_{T < \infty} \right] = \Phi^u(y)$$

cuando  $R \rightarrow \infty$  con lo que se prueba i).

Por otro lado si  $u_0(y)$  es tal que  $F^{u_0}(y) + (L^{u_0}J)(y) = 0$ , las operaciones anteriores se cumplen con igualdad y por tanto ii) se cumple con lo que se termina la prueba.

Los teoremas anteriores brindan soluciones para el caso donde se consideran controles Markovianos, aunque esto es un poco restrictivo. Por fortuna se pueden obtener buenas

aproximaciones a controles Markovianos, apartir de controles  $\mathcal{F}_t^{(m)}$ -adaptados, con algunas condiciones extras.

**Teorema 3.5** Sea  $J_M(y) = \sup \{ \Phi^u(y) : u = u(Y) \text{ control Markoviano} \}$

y  $J_\alpha(y) = \sup \{ \Phi^u(y) : u = u(Y) \text{ control } \mathcal{F}_t^{(m)} - \text{adaptable} \}$ .

Además, se supone que existe un control óptimo  $u_0 = u_0(Y)$  para el problema del control Marcoviano ( $J_M(y) = \Phi^{u_0}(y)$ , para todo  $y \in G$ ), tal que todo punto límite de  $G$ , es regular respecto a  $Y_t^{u_0}$  y que  $J_M$  es una función acotada en  $C^2(G) \cap C(\bar{G})$ . Entonces  $J_M(y) = J_\alpha(y)$ .

*Demostración.* Sea  $\varphi$  una función acotada en  $C^2(G) \cap C(\bar{G})$  que satisface:

- i)  $F^k(y) + (L^k \varphi)(y) = 0$  para todo  $y \in G$ ,  $k \in U$ ,
- ii) y  $\varphi(y) = K(y)$  para todo  $y \in \partial G$

y sea  $u(t, \omega)$  un control  $\mathcal{F}_t^m$ -adaptable, entonces  $Y(t)$  es un proceso de Itô dado por  $Y(t) = a(Y(t), u(t))dt + b(Y(t), u(t))dW(t)$ . Por la fórmula de Dynkin con

$T_R = \min\{R, T, \inf\{t > 0 : |Y(t)| \geq R\}\}$ , para todo  $R < \infty$ , se obtiene,

$$\mathbb{E}^y[\varphi(Y(T_R))] = \varphi(y) + \mathbb{E}^y \left[ \int_0^{T_R} (L^{u(t, \omega)} \varphi)(Y(t)) dt \right]$$

donde

$$(L^{u(t, \omega)} \varphi)(y) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(y) \sum_i^n a_i(y, k) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \sum_i^n \sum_j^n \sigma_{i,j}(y, k) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}$$

donde  $\sigma_{i,j} = \frac{1}{2}(bb')_{i,j}$ ,  $y = (s, x)$  y  $x = (x_1, \dots, x_n)$ . Entonces por i), ii) tenemos que:

$$\mathbb{E}^y[\varphi(Y(T_R))] \leq \varphi(y) - \mathbb{E}^y \left[ \int_0^{T_R} (F(Y(t)), u(t, \omega)) dt \right]$$

tomando  $R \rightarrow \infty$  obtenemos  $\varphi(y) \geq \Phi^u(y)$  (3.30).

Pero por el teorema 3.2 la función  $\varphi(y) = J_M(y)$  y por (3.30) se tiene que  $J_M(y) \geq J_\alpha(y)$ .

Por otro lado

$$\{ \Phi^u(y) : u = u(Y) \text{ control Markoviano} \} \subset \{ \Phi^u(y) : u = u(Y) \text{ control } \mathcal{F}_t^{(m)} - \text{adaptable} \}$$

luego  $J_M(y) \leq J_\alpha(y)$  cumpliéndose el teorema.

Todo lo anterior también aplica para el correspondiente problema de minimización,

$$\Psi(y) = \inf_u \Phi^u(y) = \Phi^{u^*}(y).$$

Para poder hacer notar lo anterior obsérvese que

$$\Psi(y) = -\sup_u \left\{ \mathbb{E}^y \left[ \int_0^T -F^u(Y(t))dt - K(Y(t)) \right] \right\},$$

así que  $-\Psi$  coincide con la solución del problema  $J$ .

### 3.3 Aplicaciones a la teoría del portafolio

**Ejemplo 3.5 (Aplicación de un portafolio)** Se retoma el ejemplo 3.1 y se plantea, entonces que el inversionista trata de maximizar su utilidad  $U(c(t))$  en cada instante de tiempo enfrentando el problema

$$\begin{aligned} &\text{Maximizar} && \mathbb{E} \left[ \int_0^\infty e^{-\rho t} U(c(t)) dt \right] \\ &(c, \{s_i\}) && \end{aligned} \tag{3.5}$$

Sujeto a

$$dW(t) = \sum_{i=1}^{n-1} s_i(t)(\mu_i - r)W(t)dt - [rW(t)c(t)]dt + \sum_{i=1}^{n-1} s_i(t)\sigma_i W(t)dZ(t), \text{ con } W(0) = W$$

recurriendo a la ecuación de Bellman (teorema 3.2) con:

$$\begin{aligned} F^{c, \{s_i\}}(W) &= e^{-\rho t} U(c), \\ (L^{c, \{s_i\}} J)(W) &= J_t(W) + \left[ \sum_{i=1}^{n-1} s_i(\mu_i - r)W - [rW - c] \right] J_W(W) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[ \sum_{i=1}^{n-1} s_i^2 \sigma_i^2 W^2 \right] J_{WW}(W), \end{aligned}$$

se obtiene la condición

$$0 = \max_{c, \{s_i\}} \left\{ e^{-\rho t} U(c) + J_t(W) + \left[ \sum_{i=1}^{n-1} s_i (\mu_i - r) W - [rW - c] \right] J_W(W) + \frac{1}{2} \left[ \sum_{i=1}^{n-1} s_i^2 \sigma_i^2 W^2 \right] J_{WW}(W) \right\}. \quad (3.31)$$

Consideremos ahora un candidato para resolver la ecuación diferencial anterior, sea

$$J(W) = V(W)e^{-\rho t}, \text{ de donde se obtiene,}$$

$$J_t(W) = -\rho V(W)e^{-\rho t}, \quad J_W(W) = V_W(W)e^{-\rho t}, \quad J_{WW}(W) = V_{WW}(W)e^{-\rho t}.$$

Sustituyendo en (3.31) y eliminando términos obtenemos:

$$0 = \max_{c, \{s_i\}} \left\{ U(c) - \rho V(W) + \left[ \sum_{i=1}^{n-1} s_i (\mu_i - r) W - [rW - c] \right] V_W(W) + \frac{1}{2} \left[ \sum_{i=1}^{n-1} s_i^2 \sigma_i^2 W^2 \right] V_{WW}(W) \right\}, \quad (3.32)$$

obteniendo las condiciones de primer orden tenemos que:

$$U_c(c) = V_W(W) \quad (3.33)$$

$$(\mu_i - r) W V_W(W) + s_i \sigma_i^2 W^2 V_{WW}(W) = 0, \quad (3.34)$$

para  $i = 1, 3 \dots n - 1$ . La ecuación (3.33) establece que la utilidad marginal respecto al consumo es igual a la utilidad marginal respecto a su ingreso. La ecuación (3.34) determina la razón óptima de participación de cada activo del portafolio respecto a su riesgo es decir

$$s_i = \frac{\mu_i - r}{\sigma_i^2} \left[ \frac{-V_W(W)}{W V_{WW}(W)} \right] \quad (3.35)$$

Sea  $U(c) = \ln(c)$  y se propone a  $V(W) = \beta_0 + \beta_1 \ln(W)$  para la solución del sistema de ecuaciones diferenciales (3.33) y (3.34). Luego de (3.33) se obtiene,

$$c = \frac{1}{\beta_1} W. \quad (3.36)$$

Para resolver (3.34) se hace  $\left[ \frac{-V_W(W)}{WV_{WW}(W)} \right] = \frac{-\beta_1}{\frac{W}{-W^2}} = 1$ , y (3.35) se transforma a

$$s_i = \frac{\mu_i - r}{\sigma_i^2}. \quad (3.37)$$

Sustituyendo las derivadas  $V_W(W) = \frac{\beta_1}{W}$ ,  $V_{WW}(W) = \frac{-\beta_1}{W^2}$ , (3.36) y (3.37) en (3.32)

$$0 = \ln(W)(1 - \rho\beta_1) - \ln(\beta_1) - \rho\beta_0 + \left[ \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(\mu_i - r)^2}{\sigma_i^2} - \left[ r - \frac{1}{\beta_1} \right] \right] \beta_1 - \frac{1}{2} \left[ \sum_{i=1}^{n-1} \left( \frac{\mu_i - r}{\sigma_i^2} \right)^2 \right] \beta_1. \quad (3.38)$$

Sea

$$\beta_1 = 1/\rho \quad (3.39)$$

por lo que

$$\beta_0 = \frac{1}{\rho^2} \left[ \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(\mu_i - r)^2}{\sigma_i^2} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \left( \frac{\mu_i - r}{\sigma_i^2} \right)^2 - [r - \rho] \right] - \frac{1}{\rho} \ln\left(\frac{1}{\rho}\right) \quad (3.40)$$

Solucionando de esta manera el problema del inversionista.

## CAPÍTULO 4

# VOLATILIDAD, CRECIMIENTO ECONÓMICO Y DESIGUALDAD

---

En el presente capítulo se desarrolla el modelo de control óptimo estocástico que caracterizará las condiciones del equilibrio macroeconómico que condiciona el crecimiento económico, distribución del ingreso y el bienestar social de la economía.

En primer lugar, se describen los supuestos que describen el sistema económico a modelar. Posteriormente, se soluciona el sistema de ecuaciones y se establecen los resultados principales que caracterizan el equilibrio macroeconómico en una economía con intervención de una autoridad gubernamental y de otro sistema económico libre de intervención del gobierno. Esta caracterización muestra que la tasa de crecimiento y los niveles de desigualdad son determinados en forma conjunta y endógena, debido al supuesto de elasticidad de la oferta laboral.

Después de analizar esta caracterización del modelo, analizaremos las consecuencias que tienen incrementos de la volatilidad en la tasa de crecimiento de la economía y en la distribución del ingreso. Por último, analizaremos las consecuencias de las políticas económicas en el bienestar social, crecimiento y desigualdad.

El desarrollo de este capítulo se desarrolla bajo la argumentación del cálculo estocástico y control óptimo estocástico, revisados en los capítulos 2 y 3.

### **4.1 Descripción de la economía y supuestos del modelo**

Los supuestos bajo los cuales se describe el sistema económico, se dividen en tres categorías:

- i)* Empresas (tecnología y pago de factores),
- ii)* Consumidores,
- iii)* Políticas de Gobierno.

**Supuesto 4.1 (Empresas, tecnología y pago de factores)** Se supone un conjunto denso de empresas con masa uno y a cada miembro de este conjunto se denota por  $j$ , es decir  $j \in [0, 1]$  y Obsérvese que  $\int_0^1 dj = 1$ . Cada empresa produce un solo bien, con dos factores de producción los cuales son capital y mano de obra. Para todo  $j \in [0, 1]$  se tiene entonces que la función de producción Cobb-Douglas está determinada por:

$$dY_j = A(L_j K)^\alpha K_j^{1-\alpha} (dt + du), \quad (4.1)$$

donde para cada periodo  $(t, t + dt)$ ,

- i)*  $dY_j$  denota el cambio en la cantidad del único bien que produce la empresa  $j \in [0, 1]$ ,
- ii)*  $A$  es la Tecnología,
- iii)*  $L_j$  denota el número de unidades de labor empleados en la empresa  $j \in [0, 1]$ ,
- iv)*  $K_j$  denota el stock o cantidad de capital empleado en la empresa  $j \in [0, 1]$ ,
- v)*  $K$  es el promedio (agregado) de stock de capital en la economía,
- vi)*  $L_j K$  mide la eficiencia de unidades de labor empleadas por la empresa  $j \in [0, 1]$ , obsérvese que la eficiencia incrementa si incrementa  $K$  lo cual es congruente con la evidencia empírica (ver Grossman y Helpman (1994) cap 1),
- vii)*  $du$  es un shock o choque estocástico en el tiempo  $t$  donde  $du = \mu + \sigma dB$ , donde  $\mu = 0$  para todo  $t$ , y  $B$  es un proceso estocástico Wiener,
- viii)*  $\alpha \in (0, 1)$ .

Todas las empresas se enfrentan a condiciones idénticas de producción y están sujetas a la misma realización de un stock económico, es decir, si todas tuvieran condiciones iniciales iguales, entonces todas las empresas se comportarían igual al promedio de la economía, y por tanto las empresas podrían elegir el mismo nivel de unidades de labor o stock de capital, esto es  $K_j = K$  y  $L_j = L$  para toda  $j \in [0, 1]$ . El stock promedio (agregado) de

capital produce externalidades, tales que, en equilibrio la función agregada (o promedio) de producción es lineal como en Romer (1986) es decir

$$dY = A(LK)^\alpha K^{1-\alpha}(dt + du) = \Omega K(dt + du) \quad (4.2)$$

donde para cada periodo  $(t, t + dt)$

- i)*  $dY$  denota el cambio agregado (o promedio) en la cantidad del único bien que produce la economía,
- ii)*  $L$  denota el número de unidades de labor empleados en la economía,
- iii)*  $\Omega = AL^\alpha$ .

Obsérvese que en este caso y dadas las características del conjunto de empresas, el promedio y el agregado de stock de capital es el mismo, es decir, el agregado es  $\int_0^1 K_j dj = K$  y luego el promedio  $\frac{K}{\int_0^1 1 dj} = \frac{K}{1} = K$ , similar para las unidades de labor  $L$ . Se asume que la tasa salarial en el periodo  $(t, t + dt)$ , es determinada en el comienzo del mismo y es igual al valor marginal del trabajo en el producto esperado, es decir

$$dZ = zdt = \left[ \frac{\partial F}{\partial L_j} \right]_{K_j=K, L_j=L} dt = \alpha \Omega L^{-1} K dt = wK dt \quad (4.3)$$

donde:

- i)*  $Z$  es la tasa salarial en el periodo  $(t, t + dt)$ ,
- ii)*  $F(K_j, L_j)dt = E(dY_j) = E[A(L_j K)^\alpha K_j^{1-\alpha}(dt + du)] = A(L_j K)^\alpha K_j^{1-\alpha} dt$ ,
- iii)*  $z = \alpha \Omega L^{-1} K = wK$

La tasa de retorno del capital queda determinada por el residual

$$dR = \frac{dY - LdZ}{K} = \Omega(dt + du) - \alpha \Omega dt = (1 - \alpha)\Omega dt + \Omega(du) = rdt + du_K \quad (4.4)$$

donde:

- i)*  $rdt = \left[ \frac{\partial F}{\partial K_j} \right]_{K_j=K, L_j=L} dt = (1 - \alpha)\Omega dt$ ,
- ii)*  $du_K = \Omega du$ .

Obsérvese que sólo la tasa de retorno del capital absorbe los shocks o fluctuaciones.

**Supuesto 4.2 (Consumidores)** Se supone un conjunto denso de agentes económicos con masa uno, los cuales tiene una vida infinita; a cada miembro de este conjunto lo denotamos por  $i$ , es decir  $i \in [0, 1]$  y obsérvese que  $\int_0^1 di = 1$ . Todo consumidor o agente económico tiene un comportamiento racional y sus preferencias se representa a través de una función de utilidad intertemporal y sólo puede consumir el bien producido y "ocio". Su utilidad intertemporal queda descrita por la función.

$$E \left[ \int_0^{\infty} \frac{1}{\gamma} (C_i, l_i^\eta)^\gamma e^{-\beta t} dt \right] \quad (4.5)$$

donde

- i)*  $C_i$  es el consumo realizado del único bien por el consumidor  $i \in [0, 1]$  en el tiempo  $t$ ,
- ii)*  $l_i$  es el ocio consumido por el agente  $i \in [0, 1]$  en el tiempo  $t$ ,
- iii)*  $1 - \gamma$  es el coeficiente relativo al riesgo con  $-\infty < \gamma < 0$ ,
- iv)*  $\eta$  representa la elasticidad del ocio en la función de utilidad con  $\eta > 0$  y  $\gamma\eta < 1$

Cada agente económico acumula capital bajo la siguiente ecuación, la cual también se puede entender como la restricción presupuestaria del consumidor

$$dK_i = (1 - \tau_K)rK_i dt + (1 - \tau'_K)K_i du_K + (1 - \tau_w)w(1 - l_i)K dt - (1 + \tau_C)C_i dt + sE[dK_i] + s'(dK_i - E[dK_i]) \quad (4.6)$$

donde:

- i)*  $\tau_K$  es la tasa de impositiva a la parte determinista de los ingresos derivados del capital,
- ii)*  $\tau'_K$  es la tasa de impositiva a la parte estocástica de los ingresos derivados del capital,
- iii)*  $\tau_w$  es la tasa impositiva al salario,
- iv)*  $s$  es el subsidio gubernamental otorgado a la parte determinista de la inversión al capital físico,
- v)*  $s'$  es el subsidio gubernamental otorgado a la parte estocástica de la inversión al capital físico.

Obsérvese que las ecuaciones (4.3) y (4.4) muestran que la tasa salarial  $w$  y la tasa de retorno del capital  $R$  dependen del stock de capital promedio (acumulado)  $K$ . Luego, el agente económico se enfrenta a la restricción promedio (agregada) de la economía

$$dK = (1 - \tau_K)rKdt + (1 - \tau'_K)Kdu_K + (1 - \tau_w)w(1 - l)Kdt - (1 + \tau_C)Cdt + sE[dK] + s'(dK - E[dK]), \quad (4.7)$$

donde:

- i)*  $l$  es la fracción promedio (agregada) del tiempo dedicado al ocio por los agentes económicos,
- ii)*  $C$  es el consumo promedio (agregado) de los agente económicos.

Retomando a la ecuación (4.6), sea

$$Q_1 = (1 - \tau_K)rK_i + (1 - \tau_w)w(1 - l_i)K - (1 + \tau_C)C_i, \quad Q_2 = (1 - \tau'_K)K_i,$$

reescribiendo la ecuación (4.6) obtenemos

$$dK_i = Q_1dt + Q_2du_K + sE[dK_i] + s'(dK_i - E[dK_i]). \quad (4.8)$$

El valor esperado de  $dK$  (ecuación (4.8)), es entonces  $E[dK_i] = Q_1dt + sE[dK_i]$ , lo que implica que

$$E[dK_i] = \frac{Q_1dt}{1 - s}, \quad (4.9)$$

sustituyendo (4.9) en (4.8) se obtiene

$$\begin{aligned} dK_i &= Q_1dt + Q_2du_K + s\frac{Q_1dt}{1 - s} + s'(dK_i - \frac{Q_1dt}{1 - s}), \\ \Rightarrow (1 - s)dK_i &= (1 - s)Q_1dt + (1 - s)Q_2du_K + sQ_1dt + s'(1 - s)dK_i - s'Q_1dt \\ \Rightarrow (1 - s)dK_i - s'(1 - s)dK_i &= (1 - s')Q_1dt + (1 - s)Q_2du_K \\ \Rightarrow (1 - s')(1 - s)dK &= (1 - s')Q_1dt + (1 - s)Q_2du_K \\ \Rightarrow dK &= \frac{Q_1dt}{1 - s} + \frac{Q_2du_K}{1 - s'} \end{aligned} \quad (4.10)$$

Sustituyendo los valores de  $Q_1$  y  $Q_2$  reescribimos la ecuación acumuladora del capital o restricción presupuestaria del consumidor  $i$  (ecuación 4.6) como:

$$dK_i = \frac{(1 - \tau_K)rK_i + (1 - \tau_w)w(1 - l_i)K - (1 + \tau_C)C_i}{1 - s}dt + \frac{1 - \tau'_K}{1 - s'}K_i du_K.$$

De manera similar para la función acumuladora de capital de la economía (o restricción presupuestaria promedio) ecuación (4.7):

$$dK = \frac{(1 - \tau_K)rK + (1 - \tau_w)w(1 - l)K - (1 + \tau_C)C}{1 - s}dt + \frac{1 - \tau'_K}{1 - s'}K du_K.$$

Finalmente, el consumidor se enfrenta al problema de maximizar su función de utilidad intertemporal sujeta a las restricciones de acumulación de capital individual y a la acumulación promedio (o agregada) de la economía, es decir:

$$\begin{array}{l} \text{Maximizar} \\ (C_i, l_i) \end{array} \quad \mathbb{E} \left[ \int_0^\infty \frac{1}{\gamma} (C_i, l_i^\eta)^\gamma e^{-\beta t} dt \right] \quad (4.11)$$

sujeeto a

$$dK_i = \frac{(1 - \tau_K)rK_i + (1 - \tau_w)w(1 - l_i)K - (1 + \tau_C)C_i}{1 - s}dt + \frac{1 - \tau'_K}{1 - s'}K_i du_K, \quad (4.12)$$

$$dK = \frac{(1 - \tau_K)rK + (1 - \tau_w)w(1 - l)K - (1 + \tau_C)C}{1 - s}dt + \frac{1 - \tau'_K}{1 - s'}K du_K, \quad (4.13)$$

donde  $C_i$  y  $l_i$  son las variables de control Markovianas.

**Supuesto 4.3 (gobierno y política económica)** El gobierno tiene la política o regla de tener deficit y superávit igual a cero para el periodo  $(t, t + dt)$  es decir, el balance presupuestario del gobierno se comporta bajo la siguiente regla:

$$sE[dK] + s'(dK - E[dK]) = [\tau_C C + \tau_K rK + \tau_w w(1 - l)K]dt + \tau' K du_K, \quad (4.14)$$

obsérvese (ver ecuación 4.9) que:

$$i) \quad E[dK] = \frac{Q_1 dt}{1 - s} = \frac{[(1 - \tau_K)rK_i dt + (1 - \tau_w)w(1 - l_i)K - (1 + \tau_C)C_i]}{1 - s} dt,$$

$$ii) \quad dK - E[dK] = \frac{Q_1 dt}{1-s} + \frac{Q_2 du_K}{1-s'} - \frac{Q_1 dt}{1-s} = \frac{Q_2 du_K}{1-s'} = \frac{1-\tau'_K}{1-s'} K du_K.$$

Notar que ambos lados de la ecuación (4.14) tienen una parte determinista y otra estocástica. Para lograr la igualdad es necesario que:

$$\tau'_K = s'. \quad (4.15)$$

Sustituyendo (4.15) en (4.14) obtenemos que  $\left[ \tau_K r + \tau_w w(1-l) + \tau_C \frac{C}{K} \right] dt = s \frac{E[dK]}{K}$ , lo que implica

$$\tau_K r + \tau_w w(1-l) + \tau_C \frac{C}{K} = s \frac{E[dK]}{K dt} = s\Psi, \quad (4.16)$$

donde  $\Psi = \frac{E[dK]}{K dt} = E \left[ \frac{dK}{K} \right]$ , es la tasa de crecimiento y la cual es el agregado de la ecuación (4.39).

## 4.2 Solución del modelo económico

Cada agente económico se enfrenta al problema de maximizar su utilidad intertemporal (ecuación (4.11)), sujeto a su restricción de acumulación de capital y a la restricción de acumulación de capital promedio (agregada) de la economía, ecuaciones (4.12) y (4.13), reescribiendo:

$$\text{Maximizar}_{(C_i, l_i)} \quad E \left[ \int_0^{\infty} \frac{1}{\gamma} (C_i, l_i)^\gamma e^{-\beta t} dt \right]$$

sutjeto a

$$dK_i = \frac{(1-\tau_K)rK_i + (1-\tau_w)w(1-l_i)K - (1+\tau_C)C_i}{1-s} dt + \frac{1-\tau'_K}{1-s'} K_i du_K,$$

$$dK = \frac{(1-\tau_K)rK + (1-\tau_w)w(1-l)K - (1+\tau_C)C}{1-s} dt + \frac{1-\tau'_K}{1-s'} K du_K,$$

donde  $C_i$  y  $l_i$  son las variables de control Markovianas.

Se calcula el operador diferencial,

$$(L^{c_i, l_i} J)(K_i, K) = J_t + \left[ \left( \frac{1-\tau_K}{1-s} r - \frac{1+\tau_C}{1-s} \frac{C_i}{K_i} \right) K_i + \frac{1-\tau_w}{1-s} w(1-l_i)K \right] J_{K_i}(K_i, K)$$

$$+ \left[ \frac{1-\tau_K}{1-s} r - \frac{1+\tau_C}{1-s} \frac{C_i}{K} + \frac{1-\tau_w}{1-s} w(1-l_i) \right] K J_K(K_i, K)$$

$$+\frac{1}{2}\sigma_{K_i}^2 K_i^2 J_{K_i K_i}(K_i, K) + \sigma_{K_i K} K_i K J_{K_i K}(K_i, K) + \frac{1}{2}\sigma_K^2 K^2 J_{KK}(K_i, K), \quad (4.17)$$

donde,

$$\sigma_{K_i^2} = \sigma_{K_i K} = \sigma_{K^2} = \frac{1 - \tau'_K}{1 - s'} \frac{du_K}{dt} = \frac{1 - \tau'_K}{1 - s'} \frac{\Omega du}{dt} = \left[ \frac{1 - \tau'_K}{1 - s'} \Omega \right]^2 \sigma^2, \quad (4.18)$$

con

$$F^{c_i, l_i}(K_i, K) = e^{-\beta t} \frac{1}{\gamma} (C_i, l_i^\eta)^\gamma. \quad (4.19)$$

La ecuación de Bellman (teorema 3.2) debe satisfacer :

$$\max_{c_i, l_i} \left\{ e^{-\beta t} \frac{1}{\gamma} (C_i, l_i^\eta)^\gamma + (L^{c_i, l_i} J)(K_i, K) \right\} = 0, \quad (4.20)$$

y consideramos a un candidato para resolver la ecuación diferencial anterior

$$J(K_i, K) = e^{-\beta t} V(K_i, K), \quad (4.21)$$

de donde se obtiene

$$\begin{aligned} J_t(K_i, K) &= -\beta V(K_i, K) e^{-\beta t}, & J_{K_i}(K_i, K) &= V_{K_i}(K_i, K) e^{-\beta t}, \\ J_K(K_i, K) &= V_K(K_i, K) e^{-\beta t}, & J_{K_i K_i}(K_i, K) &= V_{K_i K_i}(K_i, K) e^{-\beta t}, \\ J_{K_i K}(K_i, K) &= V_{K_i K}(K_i, K) e^{-\beta t}, & J_{KK}(K_i, K) &= V_{KK}(K_i, K) e^{-\beta t}, \end{aligned}$$

y obsérvese que:

$$i) \frac{E[dK_i]}{dt} = \left( \frac{1 - \tau_K}{1 - s} r - \frac{1 + \tau_C}{1 - s} \frac{C_i}{K_i} \right) K_i + \frac{1 - \tau_w}{1 - s} w(1 - l_i) K, \quad (4.22a)$$

$$ii) \frac{E[dK]}{dt} = \left[ \frac{1 - \tau_K}{1 - s} r - \frac{1 + \tau_C}{1 - s} \frac{C}{K} + \frac{1 - \tau_w}{1 - s} w(1 - l) \right] K, \quad (4.22b)$$

$$iii) \frac{E[dK_i^2]}{dt} = \sigma_{K_i}^2 K_i^2, \quad (4.22c)$$

$$iv) \frac{E[dK^2]}{dt} = \sigma_K^2 K^2 \quad (4.22d)$$

$$v) \frac{E[dK_i dK]}{dt} = \sigma_{K_i} \sigma_K K_i K \quad (4.22e)$$

Dada la propuesta de la igualdad (4.21) la ecuación de Bellman (4.20) se transforma a

$$\max_{c_i, l_i} \left\{ e^{-\beta t} \frac{1}{\gamma} (C_i, l_i^\eta)^\gamma + (L^{c_i, l_i} e^{-\beta t} V)(K_i, K) \right\} = 0$$

o de forma equivalente, tomando en cuenta las ecuaciones (4.22) obtenemos

$$\max_{c_i, l_i} \left\{ \frac{1}{\gamma} (C_i l_i^\eta)^\gamma - \beta V(K_i, K) + \frac{E[dK_i]}{dt} V_{K_i}(K_i, K) + \frac{E[dK]}{dt} V_K(K_i, K) \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \frac{E[(dK_i)^2]}{dt} V_{K_i K_i}(K_i, K) + \frac{E[dK_i dK]}{dt} V_{K_i K}(K_i, K) + \frac{1}{2} \frac{E[(dK)^2]}{dt} V_{KK}(K_i, K) \right\}. \quad (4.23)$$

Las condiciones de primer orden se obtienen derivando (4.23) con respecto al consumo del individuo  $i$  y su ocio. Las ecuaciones que caracterizan estas condiciones son:

$$\frac{1}{C_i} (C_i l_i^\eta)^\gamma = \frac{1 - \tau_C}{1 - s} V_{K_i}(K_i, K), \quad (4.24)$$

$$\frac{\eta}{l_i} (C_i l_i^\eta)^\gamma = \frac{1 - \tau_w}{1 - s} w K V_{K_i}(K_i, K). \quad (4.25)$$

Como siguiente paso, se deriva la ecuación (4.23) con respecto al capital de cada individuo  $K_i$  y notemos que  $l_i$  no depende de  $K_i$ , mientras que  $C_i$  está en función de  $K_i$  a través de la ecuación (4.24), esta derivada queda determinada por:

$$\frac{1}{C_i} (C_i l_i^\eta)^\gamma C_{i, K_i} - \beta V_{K_i} + \left[ \frac{1 - \tau_K}{1 - s} r - \frac{1 + \tau_C}{1 - s} C_{i, K_i} \right] V_{K_i} + \frac{E[dK_i]}{dt} V_{K_i K_i} \\ + \frac{E[dK]}{dt} V_{K_i K} + \sigma_K^2 K_i V_{K_i K_i} + \frac{1}{2} \frac{E[(dK_i)^2]}{dt} V_{K_i K_i K_i} + \sigma_{K_i K} K V_{K_i K} \\ + \frac{E[dK_i dK]}{dt} V_{K_i K K_i} + \frac{1}{2} \frac{E[dK^2]}{dt} V_{K_i K K} = 0, \quad (4.26a)$$

sustituyendo la ecuación (4.24) en (4.26a) se obtiene

$$\left[ \frac{1 - \tau_K}{1 - s} r - \beta \right] V_{K_i} + \frac{E[dK_i]}{dt} V_{K_i K_i} + \frac{E[dK]}{dt} V_{K_i K} + \sigma_K^2 K_i V_{K_i K_i} + \frac{1}{2} \frac{E[(dK_i)^2]}{dt} V_{K_i K_i K_i} \\ + \sigma_{K_i K} K V_{K_i K} + \frac{E[dK_i dK]}{dt} V_{K_i K K_i} + \frac{1}{2} \frac{E[(dK)^2]}{dt} V_{K_i K K} = 0. \quad (4.26b)$$

Considerese ahora a  $V_{K_i} = V_{K_i}(K_i, K)$ , y de la cual derivamos la ecuación diferencial utilizando la fórmula de Itô (teorema 3.27)

$$dV_{K_i} = V_{K_i K_i} dK_i + V_{K_i K} dK + \frac{1}{2} V_{K_i K_i K_i} (dK_i)^2 + V_{K_i K K_i} (dK_i dK) + \frac{1}{2} V_{K_i K K} (dK)^2, \quad (4.27a)$$

tomando el valor expectativo de esta última ecuación y dividiendo entre  $dt$  se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{E[dV_{K_i}]}{dt} = \frac{dK_i}{dt}V_{K_i K_i} + \frac{E[dK]}{dt}V_{K_i K} + \frac{1}{2} \frac{E[(dK_i)^2]}{dt}V_{K_i K_i K_i} \\ + \frac{E[dK_i dK]}{dt}V_{K_i K K_i} + \frac{1}{2} \frac{E[(dK)^2]}{dt}V_{K_i K K}, \end{aligned} \quad (4.27b)$$

restando la ecuación (4.27b) de (4.26b) y tomando en cuenta la igualdad (4.18) se llega a

$$\left[ \frac{1 - \tau_K}{1 - s} r - \beta \right] V_{K_i} + \sigma_K^2 [K_i V_{K_i K_i} + K V_{K_i K}] + \frac{E[dV_{K_i}]}{dt} = 0. \quad (4.28)$$

La solución de la ecuación (4.28) se obtiene por prueba y error, y dada la forma de la función objetivo se propone la función valor,

$$V(K_i, K) = x K_i^{\gamma - \omega} K^\omega, \quad (4.29a)$$

donde los parámetros  $\omega, x$  tendrán que ser determinados. De (4.29a) se obtiene

$$i) V_{K_i} = (\gamma - \omega)x K_i^{\gamma - \omega - 1} K^\omega = \frac{(\gamma - \omega)V}{K_i}, \quad (4.29b)$$

$$ii) V_K = \omega x K_i^{\gamma - \omega} K^{\omega - 1} = \frac{\omega V}{K}, \quad (4.29c)$$

$$iii) V_{K_i K_i} = (\gamma - \omega)(\gamma - \omega - 1)x K_i^{\gamma - \omega - 2} K^\omega = \frac{(\gamma - \omega)(\gamma - \omega - 1)V}{K_i^2}, \quad (4.29d)$$

$$iv) V_{K_i K} = \omega(\gamma - \omega)x K_i^{\gamma - \omega - 1} K^{\omega - 1} = \frac{\omega(\gamma - \omega)V}{K_i K}, \quad (4.29e)$$

$$v) V_{K K} = \omega(\omega - 1)x K_i^{\gamma - \omega} K^{\omega - 2} = \frac{\omega(\omega - 1)V}{K^2}, \quad (4.29f)$$

sustituyendo las ecuaciones (4.29d) y (4.29e) en (4.28) y despejando  $\frac{E[dV_{K_i}]}{V_{K_i} dt}$  se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{E[dV_{K_i}]}{dt} &= \left[ \beta - \frac{1 - \tau_K}{1 - s} r \right] V_{K_i} + \sigma_K^2 \left[ K_i \frac{(\gamma - \omega)(\gamma - \omega - 1)V}{K_i^2} + K \frac{\omega(\gamma - \omega)V}{K_i K} \right] \\ \Rightarrow \frac{E[dV_{K_i}]}{dt} &= \left[ \beta - \frac{1 - \tau_K}{1 - s} r \right] V_{K_i} + \sigma_K^2 \left[ \frac{(\gamma - \omega)(\gamma - \omega - 1)V}{K_i} + \frac{\omega(\gamma - \omega)V}{K_i} \right] \\ \Rightarrow \frac{E[dV_{K_i}]}{dt} &= \left[ \beta - \frac{1 - \tau_K}{1 - s} r \right] V_{K_i} + \sigma_K^2 [(\gamma - \omega - 1)V_{K_i} + \omega V_{K_i}] \\ \Rightarrow \frac{E[dV_{K_i}]}{V_{K_i} dt} &= \beta - \frac{1 - \tau_K}{1 - s} r + \sigma_K^2 (\gamma - 1). \end{aligned} \quad (4.30)$$

Se retoma la ecuación (4.24) y se despeja

$$V_{K_i} = \frac{1-s}{1-\tau_C} C_i^{\gamma-1} l_i^{\eta\gamma},$$

diferenciando ambos lados de la ecuación utilizando la regla de Itô se obtiene

$$\begin{aligned} dV_{K_i} &= (\gamma-1) \frac{1}{C_i} C_i^{\gamma-1} l_i^{\eta\gamma} \frac{1-s}{1-\tau_C} dC + (\gamma-1)(\gamma-2) \frac{1}{C_i^2} C_i^{\gamma-1} l_i^{\eta\gamma} \frac{1-s}{1-\tau_C} (dC)^2 \\ \Rightarrow dV_{K_i} &= (\gamma-1) \frac{dC}{C_i} V_{K_i} + (\gamma-1)(\gamma-2) \frac{(dC)^2}{C_i^2} V_{K_i} \\ \Rightarrow \frac{dV_{K_i}}{V_{K_i}} &= (\gamma-1) \frac{dC}{C_i} + (\gamma-1)(\gamma-2) \left( \frac{dC}{C_i} \right)^2 \\ \Rightarrow \frac{E[dV_{K_i}]}{V_{K_i}} &= (\gamma-1) \frac{E[dC]}{C_i} + (\gamma-1)(\gamma-2) \frac{E[dC]^2}{C_i^2}. \end{aligned} \quad (4.31a)$$

Durante la trayectoria del crecimiento balaceado, la razón  $\frac{C_i}{K_i}$  se mantiene constante, lo que quiere decir que las tasas de crecimiento son esencialmente iguales (ver ecuaciones (4.12) y (4.18)):

$$\frac{dC_i}{C_i} = \frac{dK_i}{K_i} = \Psi dt + \frac{1-\tau'_K}{1-s'} du_K, \quad (4.32)$$

luego la ecuación (4.31a) se puede reescribir como:

$$\frac{E[dV_{K_i}]}{V_{K_i} dt} = (\gamma-1)\Psi + (\gamma-1)(\gamma-2)\sigma_i^2 \quad (4.31b)$$

donde  $\sigma_i^2$  está descrita por la ecuación (4.18) y donde sólo falta determinar  $\Psi$  para tener el resultado de nuestro sistema completo. Sustituyendo  $\frac{E[dV_{K_i}]}{V_{K_i} dt}$  de (4.30) en (4.31b) y despejando  $\Psi$  obtenemos que la tasa de crecimiento es determinada por :

$$\begin{aligned} \Psi &= \frac{\left( \frac{1-\tau_K}{1-s} \right) r - \beta}{1-\gamma} - \frac{\gamma}{2} \sigma_K^2, \quad \text{lo que implica} \\ \text{por ecuación (4.18)} \Rightarrow \Psi &= \frac{\left( \frac{1-\tau_K}{1-s} \right) r - \beta}{1-\gamma} - \frac{\gamma}{2} \left( \frac{1-\tau'_K}{1-s'} \right)^2 \Omega^2 \sigma^2 \\ \text{por ecuación (4.15)} \Rightarrow \Psi &= \frac{\left( \frac{1-\tau_K}{1-s} \right) r - \beta}{1-\gamma} - \frac{\gamma}{2} \Omega^2 \sigma^2. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Obsérvese que la ecuación (4.15) es implicada por el supuesto de la balanza presupuestal del gobierno igual a cero. La evolución del stock de capital del agente  $i$  está dado por:

$$\frac{dK_i}{K_i} = \frac{dC_i}{C_i} = \left[ \frac{\left( \frac{1 - \tau_K}{1 - s} \right) r - \beta}{1 - \gamma} - \frac{\gamma}{2} \Omega^2 \sigma^2 \right] dt + du_K = \Psi dt + \Omega du. \quad (4.34)$$

Obsérvese que la única diferencia entre los agentes es su stock inicial de capital, el cual no aparece en la ecuación (4.34). Por tanto, todos los individuos tienen la misma tasa de crecimiento en su stock de capital y entonces, la tasa de crecimiento promedio (o agregada) del capital es idéntica a la tasa de crecimiento de los individuos

$$\frac{dK}{K} = \frac{dC}{C} = \left[ \frac{\left( \frac{1 - \tau_K}{1 - s} \right) r - \beta}{1 - \gamma} - \frac{\gamma}{2} \Omega^2 \sigma^2 \right] dt + du_K = \Psi dt + \Omega du. \quad (4.35)$$

Dado que la tasa de crecimiento del capital es la misma para todos los individuos, la distribución del ingreso no cambia en el tiempo. Esto significa que para cada instante del tiempo, la parte proporcional de la riqueza del agente  $i$ , (la cual se representa por  $k_i(t) = \frac{K_i(t)}{K(t)}$ ) es dada por su proporción inicial en el tiempo 0,  $k_i(0) = \frac{K_i(0)}{K(0)}$ . Dividiendo las ecuaciones de primer orden (4.25) entre (4.24) obtenemos:

$$C_i = \frac{w}{\eta} \frac{1 - \tau_w}{1 + \tau_C} K l_i.$$

Dividiendo la ecuación anterior por  $K_i$  obtenemos la relación consumo-riqueza del individuo  $i$ ,

$$\begin{aligned} \frac{C_i}{K_i} &= \frac{w}{\eta} \frac{1 - \tau_w}{1 + \tau_C} \frac{K}{K_i} l_i \\ \Rightarrow \frac{C_i}{K_i} &= \frac{w}{\eta} \frac{1 - \tau_w}{1 + \tau_C} \frac{l_i}{k_i}. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Si en cada instante del tiempo  $t$  cada empresa  $j$  obtiene las unidades de labor que necesita, y los agentes económicos obtienen el ocio requerido para maximizar su utilidad, entonces el mercado de trabajo se encuentra en equilibrio en cada instante del tiempo, es decir,

$$L = \int_0^1 L_j dj = \int_0^1 1 - l_i di = \int_0^1 1 di - \int_0^1 l_i di = 1 - \int_0^1 l_i di = 1 - l. \quad (4.37)$$

Obsérvese que  $\int_0^1 k_i di = \int_0^1 \frac{K_i}{K} di = \frac{1}{K} \int_0^1 K_i di = \frac{K}{K} = 1$  y asumiendo (4.37), se tiene  $\int_0^1 l_i di = l$ , luego la relación agregada consumo-riqueza de la economía

$$\frac{C}{K} = \frac{w}{\eta} \frac{1 - \tau_w}{1 + \tau_C} l. \quad (4.38)$$

Retomando la ecuación de restricción presupuestaria (4.12), la tasa de crecimiento promedio del individuo puede ser descrita como:

$$\Psi = E \left[ \frac{dK_i}{K_i} \right] \frac{1}{dt} = \left( \frac{E[dK_i]}{K_i} \right) \frac{1}{dt} = r \frac{1 - \tau_K}{1 - s} + w \frac{1 - \tau_w}{1 - s} \frac{1 - l_i}{k_i} - \frac{1 + \tau_C}{1 - s} \frac{C_i}{K_i}, \quad (4.39)$$

donde  $k_i = \frac{K_i}{K}$ . Tomando la expresión (4.39) y (4.36), se obtiene,

$$\begin{aligned} \Psi &= r \frac{1 - \tau_K}{1 - s} + w \frac{1 - \tau_w}{1 - s} \frac{1 - l_i}{k_i} - \frac{w}{\eta} \frac{1 + \tau_C}{1 - s} \frac{l_i}{k_i} \\ \Rightarrow \Psi &= r \frac{1 - \tau_K}{1 - s} + \frac{w}{\eta} \frac{1 - \tau_w}{1 - s} \frac{1}{k_i} [\eta(1 - l_i) - l_i + 1 - 1] \\ \Rightarrow \Psi &= r \frac{1 - \tau_K}{1 - s} + \frac{w}{\eta} \frac{1 - \tau_w}{1 - s} \frac{1}{k_i} [1 - l_i + \eta - \eta l_i - 1] \\ \Rightarrow \Psi &= r \frac{1 - \tau_K}{1 - s} + \frac{w}{\eta} \frac{1 - \tau_w}{1 - s} \frac{1}{k_i} [(1 - l_i) + (1 + \eta) - 1] \\ \Rightarrow (1 - l_i) &= \frac{1}{1 + \eta} \left[ 1 - \left( r \frac{1 - \tau_K}{1 - s} - \Psi \right) \left( \frac{\eta}{w} \frac{1 - s}{1 - \tau_w} \right) k_i \right]. \end{aligned} \quad (4.40a)$$

En el apéndice se verá que para que la condición de transversalidad se cumple si, y sólo si,

$$r \frac{1 - \tau_K}{1 - s} > \Psi,$$

por tanto un incremento en el retorno del capital tiene efectos negativos en la oferta laboral. Un incremento en el retorno del capital, permite a los agentes económicos comprar más ocio y sus tasas de crecimiento pueden ser soportadas ofertando menos unidades de trabajo. Esto puede proveer menor labor a la economía, teniendo un efecto compensado sobre su tasa de crecimiento.

Si se integra sobre el conjunto de individuos en la economía, obtenemos la relación agregada de oferta de trabajo,

$$(1 - l) = \frac{1}{1 + \eta} \left[ 1 - \left( r \frac{1 - \tau_K}{1 - s} - \Psi \right) \left( \frac{\eta}{w} \frac{1 - s}{1 - \tau_w} \right) \right]. \quad (4.40b)$$

Obsérvese que de (4.40a) y (4.40b), se obtiene,

$$l_i = lk_i + \left[ \frac{\eta - \eta k_i}{1 + \eta} \right] = lk_i + \frac{\eta}{1 + \eta} - \frac{\eta k_i}{1 + \eta}, \quad \text{lo que implica}$$

$$l_i - l = \left[ l - \frac{\eta}{1 + \eta} \right] (k_i - 1). \quad (4.40c)$$

La relación (4.40c) se denomina "oferta relativa de trabajo". En el apéndice se verá que la condición de transversalidad se cumple si, y sólo si,

$$l > \frac{\eta}{1 + \eta},$$

luego la relación de oferta relativa de trabajo (4.40c), implica una relación positiva entre el ingreso y el ocio. Por último obsérvese que el mercado de bienes requiere la siguiente condición

$$dK = \Omega(dt + du) - Cdt, \quad \text{por tanto}$$

$$\Psi = \Omega - \frac{C}{K}. \quad (4.41)$$

### 4.3 El equilibrio macroeconómico

Podemos resumir los resultados expuestos, bajo en la siguiente proposición:

**Proposición 4.4 (Caracterización del equilibrio macroeconómico)** Sea un sistema económico tal que para todo periodo  $(t + dt)$  se cumplen los siguientes supuestos:

- i)* Se tiene un conjunto denso de empresas con masa 1 y cada empresa produce un único bien con una función de producción Cobb-Douglas  $dY_j = A(L_j K)^\alpha K_j^{1-\alpha}(dt + du)$  (donde  $du$  es un shock estocástico de varianza  $\sigma$ ). La función de producción agregada está determinada por  $dY = AL^\alpha K(dt + du) = \Omega K(dt + du)$ , es decir, existen externalidades.
- ii)* Se tiene un conjunto denso de consumidores o agentes económicos de masa 1 y cada consumidor consume el bien que produce la economía  $C_i$  y ocio  $l_i$  y optimiza su función de utilidad intertemporal  $E \left[ \int_0^\infty \frac{1}{\gamma} (C_i, l_i^\eta)^\gamma e^{-\beta t} dt \right]$ .

iii) El gobierno mantiene su balanza presupuestal bajo la ecuación  $sE[dK] + s'(dK - E[dk]) = [\tau_C C + \tau_K rK + \tau_w w(1-l)K]dt + \tau' K du_K$  (donde  $r$  y  $w$  son determinados en el punto 4.1).

iv) El mercado de trabajo se encuentra en equilibrio, es decir  $L = \int_0^1 L_j dj = \int_0^1 (1 - l_i) di = 1 - \int_0^1 l_i di = 1 - l$ .

Entonces

i) Cada consumidor se enfrenta al problema de optimización intertemporal:

$$\text{Maximizar}_{(C_i, l_i)} \quad E \left[ \int_0^\infty \frac{1}{\gamma} (C_i, l_i^\eta)^\gamma e^{-\beta t} dt \right] \quad (4.11)$$

sujeto a

$$dK_i = \frac{(1 - \tau_K)rK_i + (1 - \tau_w)w(1 - l_i)K - (1 + \tau_C)C_i}{1 - s} dt + \frac{1 - \tau'_K}{1 - s'} K_i du_K, \quad (4.12)$$

$$dK = \frac{(1 - \tau_K)rK + (1 - \tau_w)w(1 - l)K - (1 + \tau_C)C}{1 - s} dt + \frac{1 - \tau'_K}{1 - s'} K du_K. \quad (4.13)$$

Su solución parcial está determinada por las ecuaciones diferenciales estocásticas:

$$\frac{1}{C_i} (C_i l_i^\eta)^\gamma = \frac{1 - \tau_C}{1 - s} V_{K_i}(K_i, K), \quad (4.24)$$

$$\frac{\eta}{l_i} (C_i l_i^\eta)^\gamma = \frac{1 - \tau_w}{1 - s} w K V_{K_i}(K_i, K). \quad (4.25)$$

ii) El equilibrio macroeconómico se caracteriza por el siguiente sistema de ecuaciones:

El capital se incrementa conforme a,

$$\frac{dC_i}{C_i} = \frac{dK_i}{K_i} = \Psi dt + du_K, \quad (4.32)$$

Equilibrio de la tasa de crecimiento

$$\Psi = \frac{\left( \frac{1 - \tau_K}{1 - s} \right) r - \beta}{1 - \gamma} - \frac{\gamma}{2} \Omega^2 \sigma^2, \quad (4.33)$$

Equilibrio de la volatilidad

$$\sigma_{\Psi} = \Omega\sigma, \quad (4.42)$$

Relación individual consumo-capital

$$\frac{C_i}{K_i} = \frac{w}{\eta} \frac{1 - \tau_w}{1 + \tau_C} \frac{l_i}{k_i}, \quad (4.36)$$

Relación agregada consumo capital

$$\frac{C}{K} = \frac{w}{\eta} \frac{1 - \tau_w}{1 + \tau_C} l, \quad (4.38)$$

Relación presupuestaria individual

$$\Psi = r \frac{1 - \tau_K}{1 - s} + w \frac{1 - \tau_w}{1 - s} \frac{1 - l_i}{k_i} - \frac{1 + \tau_C}{1 - s} \frac{C_i}{K_i}, \quad (4.39)$$

Equilibrio de mercado

$$\Psi = \Omega - \frac{C}{K}, \quad (4.41)$$

Restricción presupuestaria del Gobierno

$$\tau_K r + \tau_w w (1 - l) + \tau_C \frac{C}{K} = s \frac{\mathbb{E}[dK]}{K dt} = s\Psi. \quad (4.16)$$

*iii)* Las relaciones de oferta laboral quedan determinadas por

Oferta individual de trabajo

$$(1 - l_i) = \frac{1}{1 + \eta} \left[ 1 - \left( r \frac{1 - \tau_K}{1 - s} - \Psi \right) \left( \frac{\eta}{w} \frac{1 - s}{1 - \tau_w} \right) k_i \right], \quad (4.40a)$$

Oferta agregada de trabajo

$$(1 - l) = \frac{1}{1 + \eta} \left[ 1 - \left( r \frac{1 - \tau_K}{1 - s} - \Psi \right) \left( \frac{\eta}{w} \frac{1 - s}{1 - \tau_w} \right) \right], \quad (4.40b)$$

Oferta relativa de trabajo:

$$l_i - l = \left[ l - \frac{\eta}{1 + \eta} \right] (k_i - 1), \quad (4.40c)$$

*iv)* Las relaciones de equilibrio quedan resumidas por las ecuaciones:

$$\mathbf{RR} \quad \Psi = \frac{(1 - \alpha)\Omega(l) \left( \frac{1 - \tau_K}{1 - s} \right) - \beta}{1 - \gamma} - \frac{\gamma}{2} \Omega^2 \sigma^2, \quad (4.43a)$$

$$\mathbf{PP} \quad \Psi = \Omega(l) \left[ 1 - \frac{\alpha}{\eta} \frac{1 - \tau_w}{1 + \tau_C} \frac{l}{1 - l} \right]. \quad (4.43b)$$

*Demostración.* Sólo mostraremos las relaciones (4.42), (4.43a) y (4.43b), las demás relaciones se detallaron en las secciones 4.1 y 4.2. Comencemos con (4.42), se tiene

$$\frac{dC_i}{C_i} = \frac{dK_i}{K_i} = \Psi dt + du_K,$$

y de (4.18) tenemos que  $\sigma_\Psi^2 = \sigma_{K_i^2} = \Omega^2 \sigma^2$ , con lo que se cumple (4.42). En el punto 4.1 se observa que  $w = \alpha \Omega L^{-1}$  y  $r = (1 - \alpha)\Omega$ , luego de (4.33) obtenemos **RR**.

Sustituyendo (4.38) en (4.42) se obtiene  $\Psi = \Omega - \frac{w}{\eta} \frac{1 - \tau_w}{1 + \tau_C} l$ , y sustituyendo  $w$  se obtiene

$$\Psi = \Omega - \frac{\alpha \Omega}{L \eta} \frac{1 - \tau_w}{1 + \tau_C} l = \Omega - \frac{\alpha \Omega}{\eta} \frac{1 - \tau_w}{1 + \tau_C} \frac{l}{1 - l} = \Omega(l) \left[ 1 - \frac{\alpha}{\eta} \frac{1 - \tau_w}{1 + \tau_C} \frac{l}{1 - l} \right],$$

con lo que se cumple **PP**.

La ecuación **RR** describe la relación entre la tasa de crecimiento  $\Psi$  y el ocio agregado  $l$ , que asegura la igualdad entre la tasa ajustada de riesgo del retorno del capital y pago de consumo. La segunda ecuación **PP**, describe la relación entre la tasa de crecimiento  $\Psi$  y el ocio agregado  $l$ , que asegura el equilibrio en el mercado de bienes. Como un corolario de la proposición 4.4 exhibimos una economía con ausencia de impuestos y subsidios.

**Colorario 4.5 (Caracterización del equilibrio macroeconómico en ausencia de impuestos)** Sea un sistema económico tal que para todo periodo  $(t, t + dt)$  se cumplen los

supuestos *i*), *ii*) y *iv*) de la proposición 4.4, es decir es una economía libre (ausencia de gobierno sin subsidios ni impuestos), entonces:

*i*) Cada consumidor se enfrenta al problema de optimización intertemporal:

$$\text{Maximizar}_{(C_i, l_i)} \quad \mathbb{E} \left[ \int_0^\infty \frac{1}{\gamma} (C_i, l_i^\eta)^\gamma e^{-\beta t} dt \right] \quad (4.11)$$

sujeeto a

$$dK_i = [rK_i + w(1 - l_i)K - C_i] dt + K_i du_K, \quad (4.44a)$$

$$dK = [rK + w(1 - l)K - C] dt + K du_K. \quad (4.44b)$$

Su solución parcial está determinada por las ecuaciones diferenciales estocásticas:

$$\frac{1}{C_i} (C_i l_i^\eta)^\gamma = V_{K_i}(K_i, K), \quad (4.44c)$$

$$\frac{\eta}{l_i} (C_i l_i^\eta)^\gamma = wK V_{K_i}(K_i, K). \quad (4.44d)$$

*ii*) El equilibrio macroeconómico se caracteriza por el siguiente sistema de ecuaciones:

El capital se incrementa conforme a:

$$\frac{dC_i}{C_i} = \frac{dK_i}{K_i} = \Psi dt + du_K,$$

Equilibrio de la tasa de crecimiento

$$\Psi = \frac{r - \beta}{1 - \gamma} - \frac{\gamma}{2} \Omega^2 \sigma^2, \quad (4.44e)$$

Equilibrio de la volatilidad

$$\sigma_\Psi = \Omega \sigma,$$

Relación individual consumo-capital

$$\frac{C_i}{K_i} = \frac{w l_i}{\eta k_i}, \quad (4.44f)$$

Relación agregada consumo capital

$$\frac{C}{K} = \frac{w}{\eta} l, \quad (4.44g)$$

Relación presupuestaria individual

$$\Psi = E \left[ \frac{dK_i}{K_i} \right] \frac{1}{dt} = r + w \frac{1 - l_i}{k_i} - \frac{C_i}{K_i}, \quad (4.44h)$$

Equilibrio de mercado

$$\Psi = \Omega - \frac{C}{K}.$$

*iii)* Las relaciones de oferta laboral quedan determinadas por

Oferta individual de trabajo

$$(1 - l_i) = \frac{1}{1 + \eta} \left[ 1 - (r - \Psi) \left( \frac{\eta}{w} \right) k_i \right], \quad (4.44i)$$

Oferta agregada de trabajo

$$(1 - l) = \frac{1}{1 + \eta} \left[ 1 - (r - \Psi) \left( \frac{\eta}{w} \right) \right], \quad (4.44j)$$

Oferta relativa de trabajo:

$$l_i - l = \left[ l - \frac{\eta}{1 + \eta} \right] (k_i - 1).$$

*iv)* Las relaciones de equilibrio quedan resumidas por la ecuación:

$$\mathbf{RR}' \quad \Psi = \frac{(1 - \alpha)\Omega(l) - \beta}{1 - \gamma} - \frac{\gamma}{2} \Omega^2 \sigma^2, \quad (4.44k)$$

$$\mathbf{PP}' \quad \Psi = \Omega(l) \left[ 1 - \frac{\alpha}{\eta} \frac{l}{1 - l} \right]. \quad (4.44l)$$

En una economía libre de impuestos las características de RR' y PP' quedan descritas por la figura 4.1, sus propiedades se derivan en el apéndice, dode mostraremos

que la ecuación PP' es siempre decreciente en  $l$ , reflejando el hecho de que entre mayor ocio, se reduce el ingreso. Entonces un incremento en la relación Consumo-Ingreso tiene un efecto adverso en la tasa de crecimiento. Por otro lado, de RR' se obtiene  $\frac{\partial \Psi}{\partial l} = \left[ \frac{1-\alpha}{1-\gamma} - \gamma\Omega(l)\sigma \right] \Omega'(l)$ , esta expresión es ambigua para  $\gamma < 0$ . Intuitivamente altos tiempos dedicados al ocio reducen la productividad del capital, teniendo una recaída en el retorno del capital. Este resultado es obtenido si la utilidad marginal de consumo disminuye, esto es, si la tasa de crecimiento balanceado cae. Bajo condiciones "creíbles" ambas relaciones RR' y PP' son concavas y el equilibrio existe si  $\alpha - 1 + \frac{\beta}{A} > -\gamma \frac{1-\gamma}{2} A\sigma^2$ .

**Proposición 4.6** La condición de transversalidad  $\lim_{t \rightarrow \infty} E [K_i^\gamma(t)e^{-\beta t}] = 0$  que garantiza que la solución de las ecuaciones (4.11), (4.12) y (4.13) sea óptima, se cumple si, y sólo si se cumplen alguna de las siguientes relaciones

- i)  $\gamma \left[ r \frac{1-\tau_K}{1-s} - \frac{\gamma}{2}(1-\gamma)\Omega^2\sigma^2 \right] < \beta$ ,
- ii)  $r \left[ \frac{1-\tau_K}{1-s} \right] > \Psi$ ,
- iii)  $l > \frac{\eta}{1+\eta}$ .

La demostración de esta proposición se detallará en el apéndice.

#### 4.4 Determinantes de la distribución de ingreso

Una vez determinadas las condiciones de equilibrio en el modelo de crecimiento y obtenidas la oferta laboral y la tasa promedio de crecimiento económico, es posible determinar las condiciones de la distribución del ingreso. El valor esperado del ingreso del individuo  $i$  y el valor esperado del ingreso promedio de la economía son respectivamente

$$E[dY_i] = [rK_i + w(1-l_i)K] dt,$$

$$E[dY] = [rK + w(1-l)K] dt.$$

Obsérvese que  $r = (1-\alpha)\Omega$ ,  $w = \alpha\Omega L^{-1} = \alpha\Omega(1-l)^{-1}$  y de la ecuación (4.44) se obtiene

$$r - \Psi = -\alpha\Omega + \alpha\Omega \frac{1}{\eta} \frac{l}{1-l} = -w(1-l) + w \frac{l}{\eta} = \frac{w}{\eta} (l - \eta(1-l)).$$

De esta última ecuación y de (4.44i), se obtiene la relación relativa del ingreso esperado del individuo  $i$

$$y_i = \frac{E[dY_i]}{E[dY]} = \frac{rK_i + w(1-l_i)K}{rK + w(1-l)K} = k_i + \frac{\alpha}{(1-l)(1+\eta)}(1-k_i),$$

escribiendo de forma abreviada

$$y_i(l, k_i) = 1 - \rho(l)(1 - k_i), \quad (4.45a)$$

donde

$$\rho(l) = 1 - \frac{\alpha}{(1-l)(1+\eta)}. \quad (4.45b)$$

La ecuación (4.45a) muestra que la distribución del ingreso depende de dos factores, la distribución inicial del capital y la relación de equilibrio entre el ocio y la tasa de crecimiento. El efecto neto de un incremento en el capital inicial sobre el ingreso esperado del individuo  $i$  está dado por  $\rho(l)$ , el cual toma valores entre 0 y 1.

El ingreso esperado de los individuos es creciente en su dotación de capital inicial, los individuos con altos niveles de capital eligen ofrecer menor trabajo, este efecto no es considerable en su ingreso cuando sus capitales son altos. Como consecuencia, la variabilidad del ingreso relativo entre los agentes  $\sigma_y$ , es menor que la variabilidad de capital relativo  $\sigma_k$ , la cual es invariable en el tiempo. Esto tiene como consecuencia que la distribución del ingreso por cambios en el riesgo y políticas económicas se concentran en  $\rho(l)$ , por lo que las políticas enfocadas a reducir los niveles de desigualdad de ingreso, (sin afectar capitales iniciales) deben concentrarse en este factor  $\rho(l)$ .

**Proposición 4.7** Sea un sistema económico tal que se cumplen los supuestos  $i)$ ,  $ii)$  y  $iv)$  de la proposición (4.4) es decir es una economía libre en ausencia de gobierno (subsidijs e impuestos son igual a cero), entonces para todo periodo  $(t, t + dt)$  la variabilidad del ingreso está determinada por la ecuación:

$$\mathbf{DD} \quad \sigma_y = \rho(l)\sigma_k. \quad (4.46)$$

*Demostración* Observemos que  $E^i[E^y[dY_i]] = E^y[E^i[dY_i]] = E^y[Y]$ , luego  $E^i[E^y[y_i]] = E^i\left[\frac{E^y[dY_i]}{E^y[dY]}\right] = 1$ , de manera similar  $E^i[E^k[k_i]] = E^i\left[\frac{E^k[K_i]}{E^k[K]}\right] = 1$ . De la ecuación (4.46a) se tiene que

$$y_i - 1 = y_i - E[y_i] = \rho(l)(k_i - E[k_i]) = \rho(l)(k_i - 1),$$

integrando cuadrados obtenemos que

$$\sigma_y^2 = \int (y_i - 1)^2 di = \rho^2(l) \int (k_i - 1)^2 di = \rho^2(l)\sigma_k^2.$$

La figura 4.1 muestra la relación entre  $\sigma_y$  y  $l$ , dado un nivel de distribución del capital, la varianza de los ingresos relativos decrecen conforme aumenta el ocio agregado de la economía, es decir, es una función cóncava respecto al ocio agregado. Esto se debe a que, incrementos en el ocio (lo que significa que la oferta laboral declina), provoca que la tasa salarial incremente y que los retornos de capital caigan, disminuyendo la brecha o diferencia de ingresos entre las personas que tienen un gran capital inicial y las personas que no lo poseen.

Dado que los impuestos también tienen efecto en la distribución del ingreso, necesitamos distinguir la distribución del ingreso *antes de impuestos* y *después de impuestos*. La distribución del ingreso antes de impuestos queda definida por la relación DD. El ingreso relativo de los individuos después de impuestos (o también llamado neto) queda definida por la relación

$$y_i^{NET} = \frac{E[dY_i]}{E[dY]} = \frac{r(1 - \tau_K)K_i + w(1 - \tau_w)(1 - l_i)K}{r(1 - \tau_K)K + w(1 - \tau_w)(1 - l)K} = k_i + \frac{\alpha}{(1 - l)(1 + \eta)}R(1 - k_i),$$

donde  $R = \frac{1 - \tau_w}{(1 - \alpha)(1 - \tau_K) + \alpha(1 - \tau_w)}$ . Escribiendo de forma abreviada

$$y_i^{NET} = 1 - \rho^{NET}(l, \tau_w, \tau_K)(1 - k_i), \quad (4.47a)$$

donde

$$\rho^{NET}(l, \tau_w, \tau_K) = \frac{\alpha(1 - \tau_w)}{(1 - l)(1 + \eta)[(1 - \alpha)(1 - \tau_K) + \alpha(1 - \tau_w)]}. \quad (4.47b)$$

La función  $\rho^{NET}(l, \tau_w, \tau_K)$ , también se puede escribir en función de su antecesor  $\rho(l)$  como

$$\rho^{NET}(l, \tau_w, \tau_K) = \rho(l) + (1 - \rho(l))(1 - \alpha) \frac{\tau_w - \tau_K}{(1 - \alpha)(1 - \tau_K) + \alpha(1 - \tau_w)}. \quad (4.47c)$$

**Proposición 4.8** Sea un sistema económico tal que, para todo periodo  $(t + dt)$  se cumplen los supuestos *i*), *ii*) *iii*) y *iv*) de la proposición (4.4), entonces la variabilidad del ingreso está determinada por la ecuación:

$$\mathbf{D_N D_N} \quad \sigma_y^{NET} = \rho^{NET}(l, \tau_w, \tau_K) \sigma_k. \quad (4.48)$$

*Demostración* Observemos que  $E^i[E^y[dY_i]] = E^y[E^i[dY_i]] = E^y[Y]$ , luego  $E^i[E^y[y_i]] = E^i \left[ \frac{E^y[dY_i]}{E^y[dY]} \right] = 1$ , de manera similar  $E^i[E^k[k_i]] = E^i \left[ \frac{E^k[K_i]}{E^k[K]} \right] = 1$ . De la ecuación (4.46a) se tiene que

$$y_i^{NET} - 1 = y_i^{NET} - E[y_i] = \rho^{NET}(l, \tau_w, \tau_K)(k_i - E[k_i]) = \rho^{NET}(l, \tau_w, \tau_K)(k_i - 1),$$

integrando cuadrados obtenemos que

$$(\sigma_y^{NET})^2 = \int (y_i^{NET} - 1)^2 di = (\rho^{NET}(l, \tau_w, \tau_K))^2 \int (k_i - 1)^2 di = (\rho^{NET}(l, \tau_w, \tau_K))^2 \sigma_k^2.$$

Los impuestos pueden influir en la distribución del ingreso en dos formas, la primera es al determinar la tasa de crecimiento y la oferta de ocio (ecuaciones RR y PP). Segundo, al influir en el consumo del ocio dentro del equilibrio macroeconómico, esto afecta en forma directa a los retornos del capital, así como a los retornos de ingreso, influyendo en la distribución de los ingresos relativos, esto se refleja en la relación  $\rho^{NET}(l, \tau_w, \tau_K)$ . En la relación (4.47c) se observa que la dispersión antes de impuestos entre el ingreso relativo de los individuos, puede ser mayor que la dispersión después de impuestos si, y sólo si  $\tau_K > \tau_w$ . Bajo un enfoque de estática comparativa y partiendo de una economía libre, un incremento del impuesto sobre el capital, hace que la curva que relaciona la distribución del ingreso después de impuestos con el ocio  $D_N D_N$  se desplace de la curva DD hacia la Izquierda, ver figura 4.1. Si el incremento se diera en el impuesto a la tasa salarial la curva  $D_N D_N$  se desplaza hacia la derecha de DD.

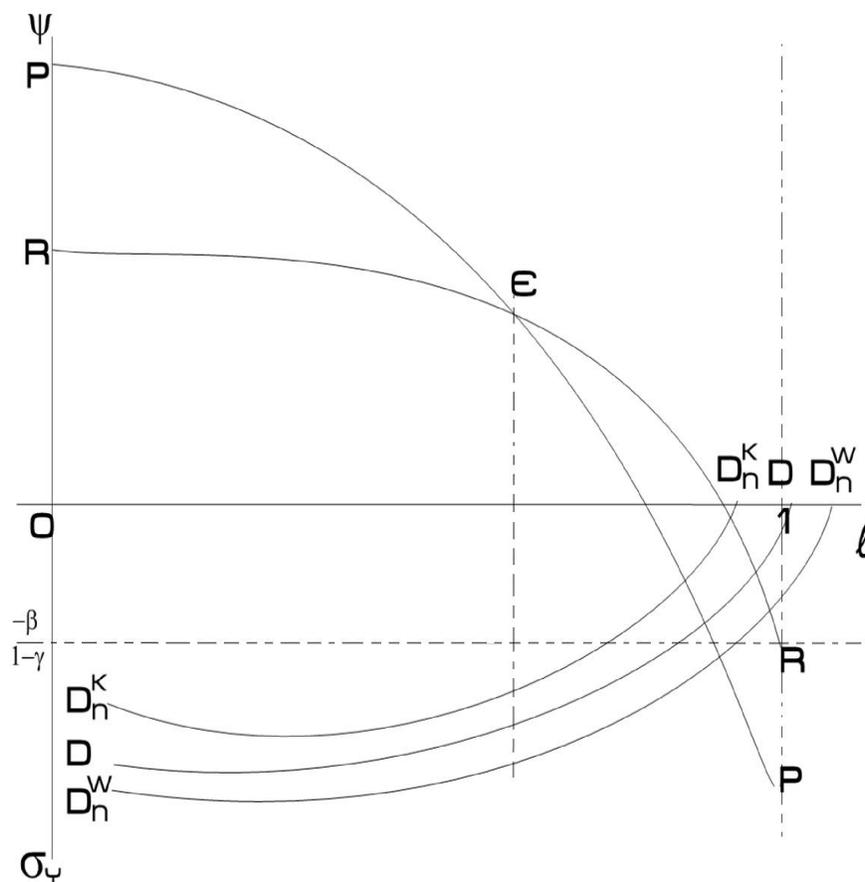


Figura 4.1 Equilibrio macroeconómico E, distribución del ingreso, antes (DD) y después de impuestos en los retornos del capital ( $D_N^K D_N^K$ ) y en la tasa salarial ( $D_N^W D_N^W$ ).

#### 4.5 Relación entre la volatilidad y la distribución del ingreso

Es tiempo de discernir las relaciones entre volatilidad, crecimiento, y la distribución del ingreso. Se estudiará como responden, el crecimiento económico y la distribución del ingreso ante los incrementos en la volatilidad  $\sigma$ . En esta sección se examinará el caso de una economía sin impuestos y discutiremos esta relación de una forma analítica.

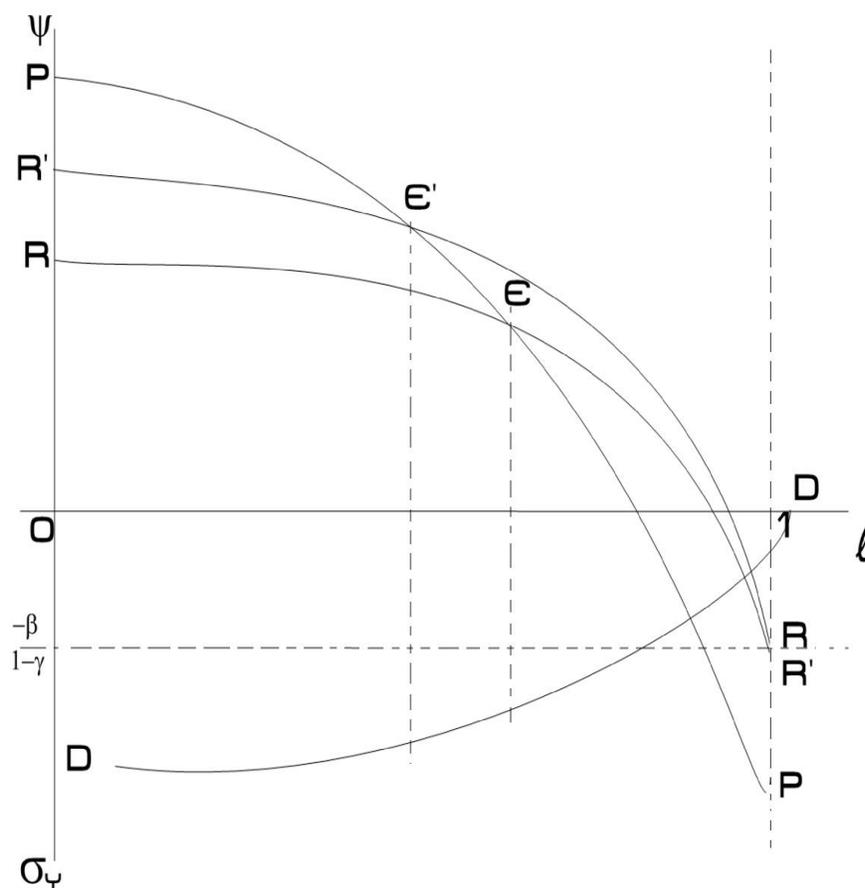


Figura 4.2 Equilibrio macroeconómico E, E' con cambios en la volatilidad.

Los cambios en el riesgo, tienen impactos en los incentivos de acumular capital. Un incremento en  $\sigma^2$  afecta solamente a la curva RR, y para valores de  $\gamma < 0$ , tiende a elevar la curva y a incrementar la tasa de crecimiento de equilibrio (ver figura 4.2). Dada la fracción del tiempo dedicada al ocio, la pendiente de RR tiende a incrementar la tasa de crecimiento del capital cuando incrementa la volatilidad. Un incremento en la tasa de crecimiento  $\Psi$  se refleja también en incrementos en el consumo de las personas, lo que provoca incrementos en la oferta laboral. Esto se puede ver a lo largo de PP pasando del equilibrio E a E', en la figura 4.2. Grandes incrementos en el riesgo, incrementan la volatilidad de la tasa de crecimiento  $\sigma_\Psi = \Omega(l)\sigma$ , por el impacto directo de  $\sigma$  y el impacto de  $l$  ocio agregado (de equilibrio) sobre  $\Omega$ .

De las ecuaciones (4.45a) y (4.47.a) vemos los efectos en la distribución al incrementar el riesgo para una economía sin gobierno y para una economía con gobierno,

$$\frac{d\sigma_y}{d\sigma^2} = \sigma_k \frac{\partial \rho}{\partial l} \frac{\partial l}{\partial \sigma^2} > 0, \quad (4.49a)$$

$$\frac{d\sigma_y}{d\sigma^2} = \sigma_k \left( \frac{1 - \tau_w}{\alpha(1 - \tau_w) + (1 - \alpha)(1 - \tau_K)} \right) \frac{\partial \rho}{\partial l} \frac{\partial l}{\partial \sigma^2} > 0. \quad (4.49b)$$

Un incremento en  $l$  aumenta la desigualdad económica antes y después de impuestos. Un incremento en la volatilidad reduce cantidades de tiempo dedicado al ocio, incrementando la desigualdad del ingreso relativo. La desigualdad antes de impuestos puede ser más grande que la desigualdad después de impuestos si, y sólo si  $\tau_K > \tau_w$ .

El riesgo también podría incrementar otras medidas de desigualdad distintas a la desviación estándar, para ver esto es suficiente notar el efecto de un incremento en el riesgo sobre la relación relativa de ingreso de los agentes es decir,

$$\text{sgn} \left( \frac{dy(k_i)}{d\sigma^2} \right) = -\text{sgn} \left( \frac{\partial \rho}{\partial l} \frac{\partial l}{\partial \sigma^2} (1 - k_i) \right) = \text{sgn}(k_i - 1) = -1. \quad (4.49c)$$

Daremos una interpretación económica para los resultados anteriores. Dado que los agentes son suficientemente adversos al riesgo, mayores niveles de volatilidad en la economía tienen fuertes efectos en el ingreso de las personas, haciendo que reduzcan en un primer instante su consumo e incremente sus ahorros (o al menos se mantienen iguales), consecuentemente la tasa de crecimiento se incrementa. Notar que para PP, la variabilidad del riesgo no tiene efectos en la locación del ocio para una tasa de crecimiento dada. Una alta tasa de crecimiento implica que las futuras tasas salariales se incrementen y por ende el ocio sube de precio, por lo que se incrementa la oferta laboral. Este incremento en la oferta laboral tiene consecuencias en la distribución del ingresos, debido a que superiores ofertas laborales incrementa el retorno del capital de una forma proporcional mayor que las tasas salariales, aun más, una oferta laboral alta reduce las tasas salariales para equilibrar el mercado de trabajo. Dado que la distribución de las unidades laborales es más equitativa que la distribución del capital, la brecha de ingresos entre cualquiera dos individuos se incrementa y por tanto, los niveles de desigualdad también se incrementan.

Notar que entre más inelástica sea la oferta laboral, (esto es, entre más pequeña sea la respuesta de la oferta laboral respecto a la tasa salarial) el riesgo afecta en menor proporción los ingresos relativos. En el caso extremo, donde la oferta laboral es inelástica, el ingreso relativo de la oferta laboral estaría dada por

$$y_i = \frac{rK_i + wK}{rK + wK} = \frac{rk_i + w}{r + w}.$$

Con una tecnología  $AK$  y con una oferta laboral inelástica, resultan tasa salarial y una tasa de interés constantes, lo que implica que bajo estas circunstancias la distribución del ingreso no es afectado por cambios en el riesgo.

## 4.6 Determinantes del bienestar económico

Es hora de trabajar sobre el bienestar de los agentes económicos, por definición, el bienestar del individuo  $i$  es la evaluación de la utilidad intertemporal (ecuación (4.11)), en la solución del problema de crecimiento estocástico. Por la elasticidad constante que presenta la función de utilidad del agente económico, su optimización dado el stock de capital inicial  $K_{i,0}$  puede ser expresada por el valor de

$$V(K_{i,0}) = \frac{1}{\gamma \beta - \gamma (\Psi - \frac{1}{2} \sigma_\Psi^2)} \left( \left( \frac{C_i}{K_i} \right) l_i^\eta \right)^\gamma K_{i,0}^\gamma \quad (4.50a)$$

y el bienestar agregado de la economía está dado por

$$V(K_0) = \frac{1}{\gamma \beta - \gamma (\Psi - \frac{1}{2} \sigma_\Psi^2)} \left( \left( \frac{C}{K} \right) l^\eta \right)^\gamma K_0^\gamma. \quad (4.50b)$$

El bienestar relativo del individuo  $i$  con respecto al bienestar agregado o promedio es, entonces

$$v(k_i) = \frac{\left( \frac{C_i}{K_i} \right)^\gamma l_i^{\eta\gamma}}{\left( \frac{C}{K} \right)^\gamma l^{\eta\gamma}} k_i^\gamma = \left( \frac{l_i}{l} \right)^{(1+\eta)\gamma}. \quad (4.50c)$$

Dada la ecuación (4.50c) y sustituyendo la relación (4.40c) para los valores requeridos de  $l_i$ , obtenemos finalmente

$$v(k_i) = \left[ 1 + \left( 1 - \frac{\eta}{1+\eta} \frac{1}{l} \right) (k_i - 1) \right]^{\gamma(1+\eta)}. \quad (4.50d)$$

Consideremos ahora dos individuos que tienen los stock de capital  $k_2 > k_1$ . La condición de transversalidad implica  $l > \frac{\eta}{1+\eta}$ , lo cual implica que  $v(k_2) > v(k_1) > 0$  para  $\gamma > 0$  y  $v(k_1) > v(k_2) > 0$  para  $\gamma < 0$ . Sin embargo, para el caso de  $\gamma < 0$ , el valor esperado de la utilidad intertemporal es negativo (ver expresión (4.50a)), lo que implica que el agente está mejor si su utilidad relativa es más cercana a cero, por lo que en el último caso, el agente 2 está relativamente mejor que el agente 1, es decir, en ambos casos el agente con mayor capital tiene un mejor bienestar relativo.

Una transformación monótona de la función de utilidad, no altera las preferencias del consumidor y por tanto tampoco las relaciones relativas del bienestar del consumidor, luego (4.50d) puede expresarse como,

$$u(k_i) = (v(k_i))^{1/\gamma(1+\eta)} = 1 + \varphi(l)(k_i - 1), \quad (4.50d)$$

donde

$$\varphi(l) = 1 - \frac{\eta}{1+\eta} \frac{1}{l}, \quad (4.50e)$$

y por las condiciones de transversalidad,  $0 < \varphi(l) < 1$ , por tanto creciente y cóncava en  $l$ .

**Proposición 4.9** Sea un sistema económico tal que, se cumplen los supuestos de la proposición (4.4), entonces la variabilidad del bienestar relativo para todo periodo  $(t, t+dt)$  está determinada por la ecuación:

$$\mathbf{UU} \quad \sigma_u = \varphi(l)\sigma_k \quad (4.50f)$$

*Demostración* Observemos que  $E[u(k_i)] = 1$  y  $E[k_i] = 1$ . De la ecuación (4.50d) se tiene que  $u(k_i) - 1 = u(k_i) - E[u(k_i)] = \varphi(l)(k_i - E[k_i]) = \varphi(l)(k_i - 1)$ , integrando cuadrados obtenemos que  $\sigma_u^2 = \int (u(k_i) - 1)^2 di = \varphi^2(l) \int (k_i - 1)^2 di = \varphi^2(l)\sigma_k^2$ .

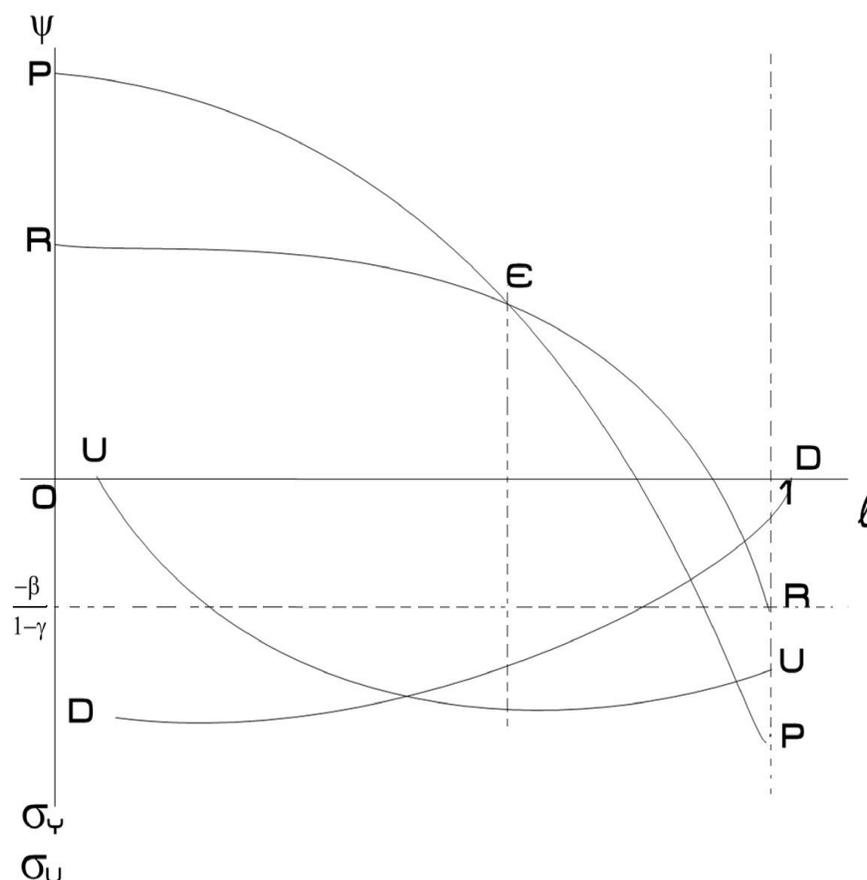


Figura 4.3 Equilibrio macroeconómico E, curvas de desigualdad de ingresos DD y bienestar UU.

La curva UU se dibuja en la figura 4.3, dado que  $\varphi(l)$  es creciente y cóncava en  $l$  y  $\sigma_k$  fijo, entonces la relación (4.46) es también cóncava en  $l$ ; esto se debe a que las personas que poseen un alto nivel de capital, dedicar una unidad de tiempo al ocio no significa una gran pérdida en su consumo, sin embargo, el agregar una unidad de ocio a personas con menor capital significa una pérdida en su consumo, lo cual afecta en gran medida su bienestar, de esta manera, se incrementa la varianza de los niveles de bienestar relativo.

Otra perspectiva es la siguiente, dada la distribución de capital, un incremento en la oferta laboral aumenta en poca proporción los niveles de consumo de personas con una dotación grande de capital, aportando poco al bienestar de estos agentes. Por otro lado, un incremento en la oferta laboral permite tener una mayor proporción de consumo

para aquellos agentes que no cuentan con capital, aportando en una mayor proporción al beneficio de este tipo de agentes económicos. Es decir, una reducción en el ocio (un incremento en la oferta laboral) reduce la varianza relativa del bienestar entre agentes.

#### 4.7 Política fiscal y su relación con la desigualdad y el crecimiento

Un incremento en el ocio o una reducción en la oferta laboral, tiene inmediatamente dos consecuencias:

- i)* Dedicar una unidad de tiempo al ocio no significa una gran pérdida en su consumo para las personas con grandes cantidades de capital. Sin embargo, el agregar una unidad de ocio a personas con menor capital significa una pérdida grande en su consumo, lo cual afecta en gran medida su bienestar. De esta manera se, incrementa la varianza de los niveles de bienestar relativo.
- ii)* Dado un nivel de distribución del capital, la varianza en los ingresos relativos de los individuos decrece conforme aumenta el ocio agregado de la economía . Esto se debe a que incrementos en el ocio, provocan que la tasa salarial se incremente y que los retornos de capital caigan, disminuyendo la brecha o diferencia de ingresos entre las personas que tienen un gran capital y las personas que no lo poseen.

Dado que la oferta laboral es una variable endógena dentro del modelo, la distribución del ingreso es una referencia poco fiable para medir la desigualdad del bienestar, luego ¿cómo podemos establecer políticas económicas para mejorar las condiciones de los agentes económicos?

Una característica del modelo de Romer (1986) es que se ignoran las externalidades asociadas con el stock de capital agregado, generando tasas sub-óptimas de crecimiento. Esto sugiere que, con incremento en subsidios podemos aproximarnos al óptimo social. Con agentes heterogéneos surgen dos preguntas:

- i)* ¿Cómo financiar el subsidio si al gobierno le conciernen dos cosas: incrementar el bienestar promedio y disminuir la brecha de desigualdad en bienestar?

ii) ¿Cuáles son las consecuencias de las diferentes políticas económicas en la tasa de crecimiento y desigualdad económica?

Un incremento en el subsidio de inversión plantea un alto retorno del capital, favoreciendo a los que poseen mayores cantidades de capital, ¿existen políticas económicas tal que ésta redistribución inequitativa del bienestar pueda evitarse?

Es tiempo de contestar las preguntas anteriores en detalle, considerando las distintas formas de financiamiento de un subsidio utilizando en esencia tres distorsiones de impuestos:

- i) Subsidios en inversión financiado por impuestos sobre los ingresos de capital,
- ii) Subsidios en inversión financiado por impuestos sobre los salarios,
- iii) Subsidios en inversión financiado por impuestos sobre el consumo.

**4.7.1 Subsidio vía impuestos sobre el ingreso de capital** Como supuesto se tiene que el gobierno decide financiar el subsidio a la inversión cobrando impuestos sobre los ingresos de capital solamente. El impacto de la política fiscal, cambia la tasa de crecimiento y la oferta laboral como se ilustra en la figura 4.4. Dado que los impuestos son idénticos a cero, incrementos en la tasa de subsidio  $s$ , mueve la curva RR hacia arriba moviendo el equilibrio E sobre la curva PP, incrementando la tasa de crecimiento y reduciendo la cantidad de ocio. Un incremento en la tasa impositiva sobre los ingresos de capital  $\tau_K$ , tiene un efecto opuesto, la curva RR se mueve hacia abajo moviendo el equilibrio E sobre la curva PP reduciendo la tasa de crecimiento e incrementando la cantidad de ocio. Tomando  $\tau_w = \tau_c = 0$ , la restricción presupuestaria del gobierno queda determinada por,

$$\tau_K = \frac{s}{(1 - \alpha)} \left( 1 - \frac{\alpha}{\eta} \frac{l}{1 - l} \right). \quad (4.51a)$$

Esta reducción en la cantidad de ocio implica una mayor oferta laboral y por consecuencia una reducción en la varianza del bienestar relativo  $\sigma_u(l)$ . El efecto neto en la distribución del ingreso es caracterizado por la ecuación (4.47b) de donde  $\rho^{NET}(l, t_K) < \rho(l)$ .

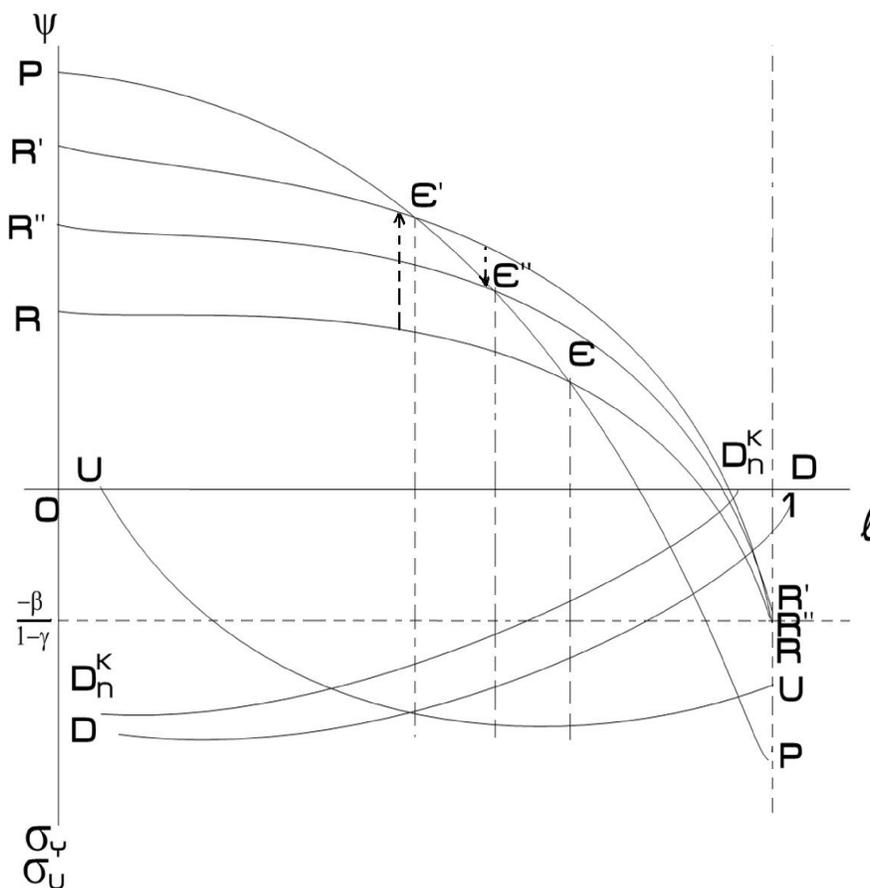


Figura 4.4 Equilibrio macroeconómico subsidio financiado por impuestos sobre el ingreso de capital.

**4.7.2 Subsidio vía impuestos sobre el salario** Como supuesto se tiene que el subsidio de inversión al capital se financia a través de la tasa impositiva al salario. Tomando  $\tau_k = \tau_c = 0$  la restricción presupuestaria del gobierno queda determinada por:

$$\tau_w = \frac{s \left( 1 - \frac{\alpha}{\eta} \frac{l}{1-l} \right)}{\alpha \left( 1 - \frac{s}{\eta} \frac{l}{1-l} \right)}. \quad (4.51b)$$

En este caso, ambas curvas RR y PP se mueven hacia arriba incrementando la tasa de crecimiento ( ver figura 4.5), el problema que surge es determinar la oferta laboral, ya que

esta puede aumentar o disminuir. La razón de esta ambigüedad en los efectos se debe a que un impuesto salarial reduce el salario neto, lo que provoca que exista menos oferta laboral, pero al mismo tiempo, el incremento en las tasas de crecimiento tienden a aumentarlo.

Esta ambigüedad complica ver el impacto que se tiene en la varianza y otras medidas de desigualdad del ingreso al aplicar este tipo de políticas económicas. En primer lugar, un incremento (decremento) en el ocio podría reducir (incrementar) la varianza de los ingresos relativos (se puede constatar en la ecuación (4.46)). Sin embargo, la tasa positiva del impuesto implica una variabilidad del ocio entre los agentes, haciendo que para cualquier distribución dada de rentas brutas, se incremente la variabilidad de ingresos netos, como puede verse en las ecuaciones (4.48b) y (4.48c). Si la política reduce el ocio, los dos efectos trabajan en sentidos opuestos, es decir, podría existir una reducción en la variabilidad de los ingresos mientras que los ingresos netos podrían incrementar.

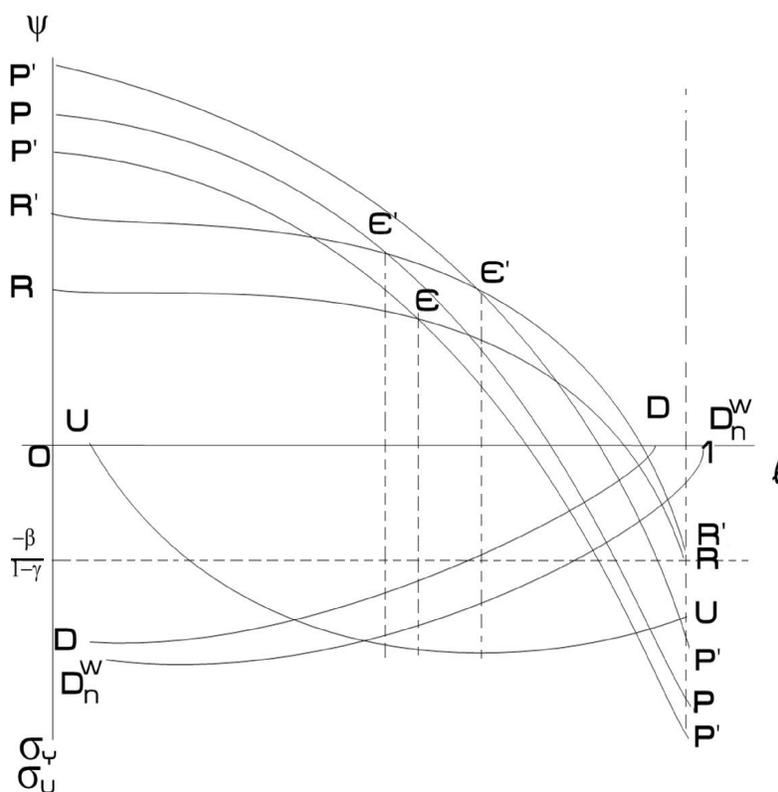


Figura 4.5 Equilibrio macroeconómico subsidio financiado por impuestos sobre la tasa salarial.

**4.7.3 Subsidio vía impuestos sobre el consumo** Como tercera opción, para financiar el subsidio se tiene a los impuestos al consumo. Haciendolas otras tasas impositivas iguales a cero  $\tau_k = \tau_c = 0$ , la restricción presupuestaria gubernamental queda determinada por:

$$\tau_c = \frac{s \left( 1 - \frac{\alpha}{\eta} \frac{l}{1-l} \right)}{\left( \frac{\alpha}{\eta} \frac{l}{1-l} \right) - s}. \quad (4.51c)$$

En este caso,  $\rho^{NET}(l) = \rho(l)$ , es decir, las distribuciones de ingreso antes y después de impuestos son las mismas. Las curvas RR y PP suben, incrementando la tasa de crecimiento (ver figura 4.6). Pero en este caso el ocio declina, es decir, se incrementa la oferta laboral, y así, la desigualdad entre ingresos aumenta. Al incrementarse la tasa salarial se reduce el ocio y puede traer como consecuencia que la varianza de la distribución del bienestar relativo caiga.

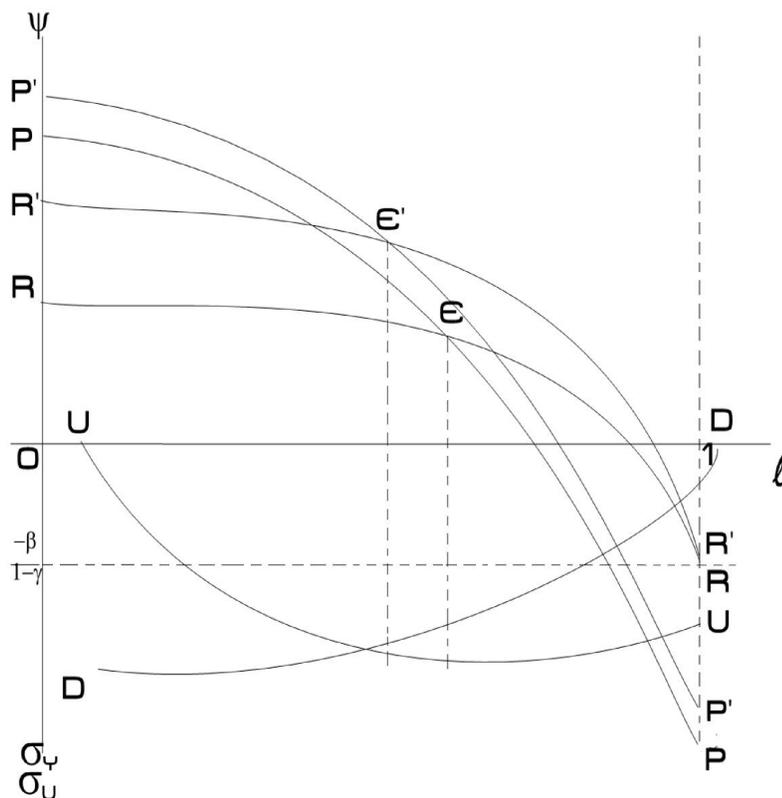


Figura 4.5 Equilibrio macroeconómico subsidio financiado por impuestos sobre la tasa salarial.

## CAPÍTULO 5

### SIMULACIÓN DEL MODELO

---

Existen al menos tres razones por las que no es fácil obtener explicaciones convincentes, sólidas, y sustentadas estadísticamente sobre las causas de los cambios en la desigualdad y crecimiento en México.

- i)* La encuesta ingreso y gasto de los hogares (ENIGH), permite construir medidas de desigualdad y pobreza para México, pero no permite hacer inferencias sobre comparativos con el PIB.
- ii)* Contamos solamente con 17 observaciones, lo cual reduce las posibilidades de realizar inferencias estadísticas robustas de series de tiempo, 15 de estas observaciones datos son estudiados por Miguel Székely (2005).
- iii)* Son un sinnúmero de factores los que intervienen en el proceso de desigualdad y crecimiento económico durante un período de tiempo extenso, y las limitaciones de información impiden probar las hipótesis que se han sugerido en la literatura sobre estos temas.
- iv)* Algunas otras limitaciones son con respecto a cuestiones de la metodología de la contabilidad del Producto Interno Bruto y su relación con otras variables paramétricas del molde expuesto en el capítulo 4.

Miguel Székely en su artículo "Pobreza y desigualdad en México entre 1950 y 2004", muestra una relación estrecha y negativa entre la pobreza, la desigualdad, y el crecimiento económico, lo cual implica que a mayor crecimiento, menor pobreza y desigualdad. En la simulación que realizaremos encontraremos que una mayor desigualdad no implica necesariamente una menor tasa de crecimiento. Aunque como se mencionó anteriormente, no existe evidencia empírica que sustente lo anterior de una manera estadística formal. Sin embargo, se construyó un argumento teórico formal que ayuda a comprender este fenómeno social.

## 5.1 Variables de entradas del modelo, y calibración de modelo

Los parámetros obtenidos en la calibración del modelo para el caso de México se muestran en la en la tabla 1.

**Tabla 1 Parámetros del modelo para el caso de México**

PRODUCCION	$A = 0.50$	$\alpha = 0.30$		
UTILIDAD	$\beta = 0.095$	$\gamma = -6$	$\eta = 0.5$	
RIESGO	$\sigma = 0.05$	0.1,	0.15	0.2 0.3

La elección de elasticidad de producción mide la eficiencia de las unidades de labor, y obsérvese lo siguiente, el pago a los trabajadores es igual a la tasa salarial por la oferta laboral. Luego

$$z(1 - l) = zL = wKL = \alpha\Omega L^{-1}KL = \alpha\Omega K = \alpha Y$$

lo que significa que  $\alpha$  representa la proporción del PIB que se utiliza en el pago de salarios. Barro y Sala-i-Martin (1995) proponen un  $\alpha = 0.30$  para México en su análisis empírico, aunque no existe algún dato estadístico fiable que ayude a una mejor estimación. La elección del escalar  $A = 0.5$  es consistente para generar la tasa de crecimiento empírica, García-Peñalosa y Turnovsky (2004, 2006) utilizan un  $A \in [0.6, 0.75]$ , para algunos países de la OCDE. El parámetro  $\beta = 0.095$  es estándar en la literatura, Barro y Sala-i-Martin (1995) utilizan  $\beta \in [0.02, 0.06]$  para ejemplificar algunas simulaciones dentro de su libro. Con la elección de  $\eta = 0.5$ , obtenemos como resultados aproximados de  $l = 0.61$  lo que significa que las personas dedican un 0.39 de su tiempo al trabajo. Si la persona tuviera un tiempo disponible de 24 horas ellos dedicarían 9 horas de su tiempo a su trabajo. Esta variable es un poco subjetiva, para Estados Unidos Turnovsky señala que existe evidencia empírica en la literatura de ciclos económicos con  $l = 0.72$ . Otra forma posible de calcularlo podría ser la productividad ya que la eficiencia por trabajador se mediría por  $\frac{Y}{(LK)^\alpha}$ , desafortunadamente no se cuenta con estadísticas que ayuden a calcular estas variables. El valor del coeficiente de aversión al riesgo es variable en la literatura, desde valores positivos  $\gamma = 0.5$  hasta valores de  $\gamma = -18$ , se consideró un valor de  $\gamma = -6$ .

Se tomó a la volatilidad de manera exógena con valores en el intervalo  $\sigma \in [0.05, 0.3]$  (valor considerado por García-Peñalosa y Turnovsky (2004) para países de la OCDE), con el objetivo de ver como los shocks estocásticos impactan en nuestra economía.

Como medida de desigualdad, se consideró el coeficiente de Gini, (mismo que se describe en el capítulo 1) ya que es frecuentemente utilizado para medir la desigualdad en la distribución de ingresos.

Para la realización de las simulaciones, se solucionó el sistema de ecuaciones RR y PP, a través del método numérico Newton-Rapshon (método para solucionar ecuaciones simultáneas no lineales) y una vez obtenida la tasa de crecimiento óptima y el ocio óptimo, se solucionó el sistema de ecuaciones del colorario 4.5. La programación se realizó en Matlab y la caja de herramientas se entrega con la tesis.

La tabla 2 muestra la distribución del ingreso generada por la simulación y para su análisis se dividió a los agentes económicos en quintiles, cada quintil posee un 20% de la población. Cabe señalar que en nuestra economía, el salario es el mismo para todos los trabajadores, este supuesto es muy fuerte y hace que nuestro primer quintil tenga un ingreso superior al real. Según la ENIGH en 2006 el primer quintil acumulaba menos del 4% del total del ingreso del país. Para efectos de la simulación, los ingresos de este quintil se reparte en igual porcentaje en los demás quintiles, para de esta manera compensar el resultado de igual salario para todos. El porcentaje de este primer quintil no rebasa por mucho al real, pero si afecta a la medida de desigualdad (índice de Gini), por lo que se decidió hacer lo antes mencionado.

**Tabla 2 Comparación de la distribución del ingreso por quintil entre la ENIGH 2006 y la simulación**

	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	GINI
Dist. Capital	0.0000	0.0000	0.0030	0.1400	0.8570	0.7416
Dist. Ingreso (ENIGH2006)	0.0393	0.0852	0.1322	0.2084	0.5349	0.4615
Dist. Ingreso Simulacio'n	0.0000	0.1278	0.1292	0.1962	0.5468	0.4648

El primer renglón de la tabla 2 muestra la distribución de capital, la cual es hipotética ya que no se cuenta con información sobre ello, pero intenta ser un tanto "real". Los

primeros dos quintiles no poseen capital, su único ingreso es su salario y el último quintil el más rico posee un 85% del total del capital. Como capital se entiende a el valor monetario de la maquinaria y activos que ayuden a la producción de bienes.

El segundo quintil muestra la distribución del ingreso real, que proporciona la ENIGH, y por último la simulación del ingreso bajo los parámetros establecidos y un  $\sigma = 0.05$ . Obsévese que el quintil 1 y 2 de la ENIGH acumulan el 12.45%, similar al de la simulación y bajo estas condiciones se obtienen una tasa de crecimiento de 2.52%, lo cual es consistente con la tasa de crecimiento promedio para México desde 1960, según Barro y Sala-i-Martin (1995) en su capítulo 10 (la tasa de crecimiento promedio que se menciona ahí es de 2.50%).

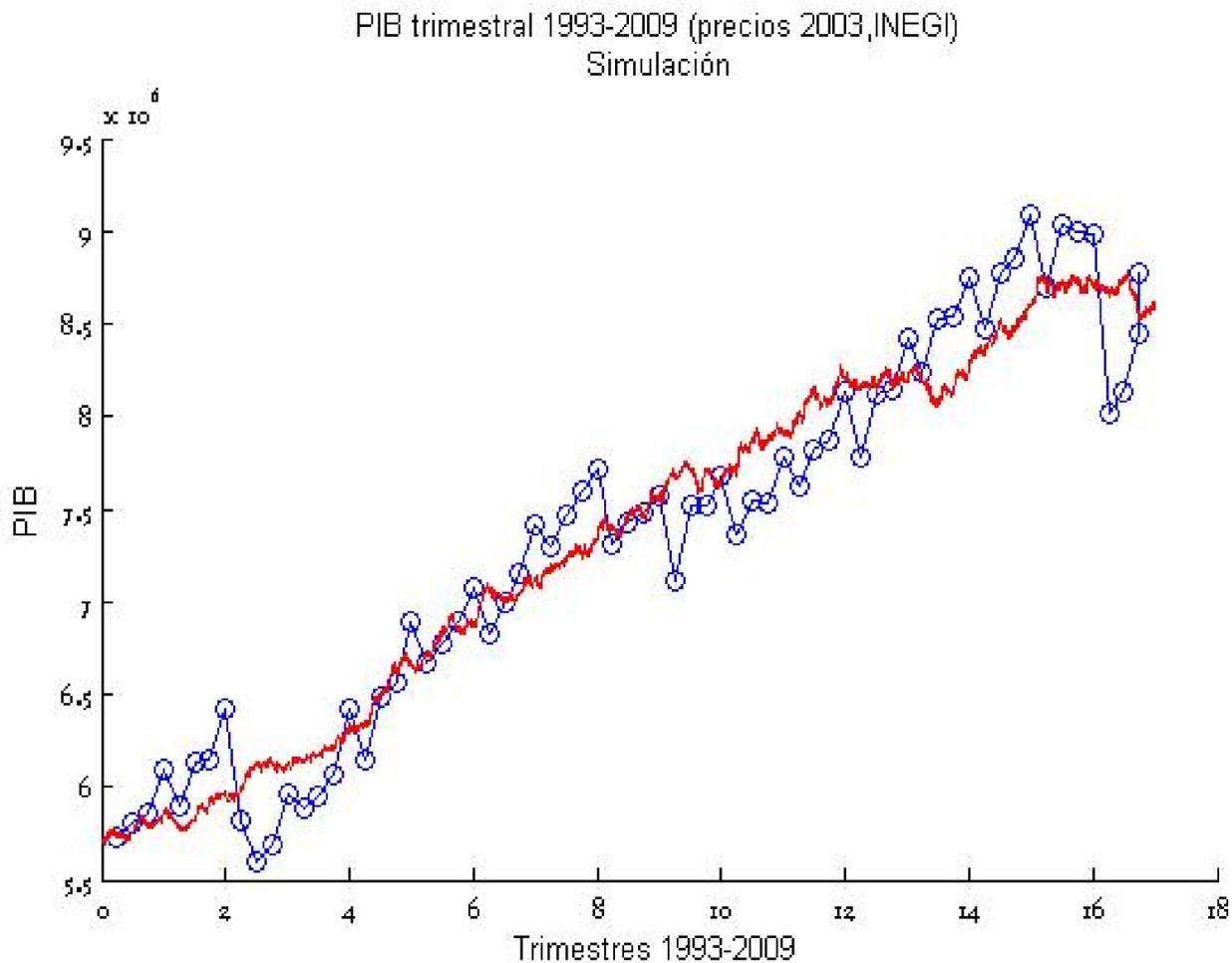


Figura 5.1

Desafortunadamente, el alcance del modelo es limitado y no permite variaciones en la distribución del ingreso en el tiempo, aunque debido a los shocks estocásticos permite establecer una senda estocástica similar a la real. En la Figura 5.1 se realiza una representación gráfica del PIB trimestral a precios del 2003 para el periodo 2003-2009 y se realiza un comparativo con la simulación, con los parámetros de la tabla 1 con un  $\sigma = 0.05$ .

## 5.2 Análisis de la volatilidad (una economía sin gobierno)

En la tabla 3 se muestran las proyecciones que se observan en simulación respecto a la distribución del ingreso en cada quintil, debido a cambios en los valores de la volatilidad  $\sigma$ .

**Tabla 3 Cambios la distribución del ingreso por quintil, debido a cambios en  $\sigma$**

	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	GINI
Dist. Ingreso $\sigma = 0.05$	0.0000	0.1278	0.1292	0.1962	0.5468	0.4648
Dist. Ingreso $\sigma = 0.10$	0.0000	0.1270	0.1285	0.1959	0.5485	0.4664
Dist. Ingreso $\sigma = 0.15$	0.0000	0.1259	0.1273	0.1954	0.5514	0.4690
Dist. Ingreso $\sigma = 0.20$	0.0000	0.1242	0.1257	0.1946	0.5555	0.4726
Dist. Ingreso $\sigma = 0.30$	0.0000	0.1193	0.1208	0.1925	0.5674	0.4832

En la tabla 4 se muestra las respuestas de la tasa de crecimiento de equilibrio  $\Psi$  y de la oferta laboral de equilibrio  $l$  a diferentes cambios de la volatilidad  $\sigma$ .

**Tabla 4 Cambios la tasa de crecimiento ( $\Psi$ ), oferta laboral ( $l$ ), distribución del bienestar ( $\sigma_u$ ), distribución del ingreso ( $\sigma_y$ , GINI) y niveles de bienestar ( $\Delta V$ ) por cambios en  $\sigma$**

$\sigma_k = 17235$	$\Psi$	$l$	$\sigma_u$	$\sigma_y$	GINI	$\Delta V$
$\sigma = 0.05$	0.0252	0.6086	0.7796	0.8427	0.4648	--
$\sigma = 0.10$	0.0285	0.6064	0.7762	0.8476	0.4664	-3.1091
$\sigma = 0.15$	0.0340	0.6027	0.7706	0.8559	0.4690	-4.9904
$\sigma = 0.20$	0.0419	0.5973	0.7617	0.8675	0.4727	-5.9186
$\sigma = 0.30$	0.0650	0.5808	0.7343	0.9012	0.4832	-8,9298

Como muestran las tablas 3 y 4 conforme aumenta la variable  $\sigma$ , la tasa de desigualdad es creciente, y el ocio es decreciente (lo que significa que incrementa la oferta laboral), los niveles de desigualdad del ingreso incrementan, tanto en la varianza  $\sigma_y$ , como en el índice de Gini. Y por último, se ve que la varianza de bienestar disminuye. Todo lo anterior es congruente con lo visto en la sección 4.6. Una observación importante, es el cambio del bienestar agregado (que se refleja la función valor), el riesgo influye de manera negativa al bienestar agregado ya que nuestros agentes económicos son adversos al riesgo.

Finalmente en la tabla 3, se muestra la evolución de los quintiles de acuerdo a los cambios del riesgo  $\sigma_y$ , y es claro que el ingreso se acumula en el quintil 5. Aunque eso no significa una distribución desfavorable del bienestar.

Una reducción en el ocio o un incremento en la oferta laboral tiene inmediatamente consecuencias en la distribución del bienestar. Dedicar una unidad menos de ocio no significa una gran pérdida en el consumo de las personas con grandes cantidades de capital, pero sí una pérdida en su consumo de ocio, lo cual afecta en forma negativa en su utilidad. Sin embargo, el agregar una unidad trabajo a personas con menor capital significa una ganancia grande en su consumo, lo cual afecta de manera positiva y en gran medida a su bienestar. De esta manera, se disminuyen la varianza de los niveles de bienestar relativo.

### 5.3 Análisis de la política fiscal

Es tiempo de analizar las políticas fiscales, para esto suponemos que se otorgará un subsidio del 15% a la inversión en el capital, y queremos ver la forma de financiarlo. Hay que tener en cuenta que debemos tener un déficit y un superávit igual a cero, bajo esta perspectiva se cuenta con tres posibles fuentes de ingreso gubernamental que son:

- i)* impuestos a los retornos del capital,
- ii)* impuesto a la tasa salarial,
- iii)* impuesto al consumo.

Comenzaremos analizando las tres formas de financiamiento para una volatilidad o riesgo de  $\sigma = 0.05$ , y compararemos su comportamiento respecto a una economía donde no interviene el gobierno, es decir con los resultados del primer renglón de la tabla 4 (renglón 0 de la tabla 5). Los parámetros de producción y utilidad son los mismos que en la tabla 1.

**Tabla 5 Cambios la tasa de crecimiento ( $\Psi$ ), oferta laboral ( $l$ ), distribución del bienestar ( $\sigma_u$ ), distribución del ingreso ( $\sigma_y, G_{PRE}, \sigma_y^{NET}, G_{NET}$ ) y niveles de bienestar ( $\Delta V$ ) hacia las distintas formas de financiamiento para solventar el subsidio a la inversión**

	$\sigma = 0.05$		$\sigma_k = 1.7235$			
	$s$	$\tau_K$	$\tau_w$	$\tau_C$	$\Psi$	$l$
0	0.00	--	--	--	0.0252	0.6086
I	0.15	0.0177	--	--	0.0313	0.6046
II	0.15	--	0.0422	--	0.0317	0.6144
III	0.15	--	--	0.0370	0.0415	0.6061
	$\sigma_u$	$\sigma_y$	$\sigma_y^{NET}$	$G_{PRE}$	$G_{NET}$	$\Delta V$
0	0.7796	0.8427	0.8427	0.4650	0.4648	--
I	0.7733	0.8517	0.8408	0.4676	0.4642	0.1960
II	0.7884	0.8296	0.8563	0.4644	0.4726	0.1527
III	0.7756	0.8484	0.8484	0.4696	0.4696	0.0756

El financiamiento al subsidio a la inversión, que genera la tasa de crecimiento más alta, es el impuesto al consumo, pero también tiene el incremento en el bienestar social más bajo, así como sus niveles de desigualdad de ingresos son superiores que en una economía libre de impuestos (ver renglón 0). El subsidio a la inversión financiado por el impuesto al consumo, tiene un equilibrio macroeconómico invariable antes y después de impuestos, ya que este impuesto no afecta en forma directa a los ingresos de los individuos como se observa en el punto 4.7. También es de notar que la varianza de la distribución del bienestar disminuye, ya que al incrementar la tasa de crecimiento, incrementa la tasa salarial e incrementa la oferta laboral reduciendo la brecha de bienestar.

El subsidio a la inversión, financiado por los impuestos sobre los rendimientos del capital, tiene como consecuencia una mejor distribución de ingresos después de impuestos,

incluso mejor que en la economía libre de impuestos, pero también tiene un incremento en la tasa de crecimiento menor que el financiamiento por otros impuestos. Sin embargo, presenta la mayor equidad en la distribución del bienestar como política fiscal y el mejor aumento en el bienestar social, recuérdese que en el modelo se optimiza y una tasa de crecimiento alta no significa que sea óptima para el bienestar social.

La peor manera de subsidiar, es financiarse por los impuestos a la tasa salarial, estos presentan un incremento en la desigualdad de ingresos y de bienestar respecto a la economía libre (renglón 0), y se caracteriza por una disminución en la oferta laboral también.

Por último, en la tabla 6 se muestran los distintos financiamientos del subsidio a la inversión pero con las diferentes variabilidades de la volatilidad. Como se puede ver en la tabla 6, los incrementos en la volatilidad incrementan la tasa de crecimiento y los niveles de desigualdad de ingreso en los tres impuestos, sin embargo los niveles de desigualdad del bienestar disminuyen, como lo expuesto en el punto 4.2.

Las conclusiones sobre el comportamiento de la tasa de crecimiento, desigualdad de ingresos y desigualdad de bienestar son idénticas a las expuestas en la tabla 5:

- i) El impuesto al consumo, (como medio de financiamiento al subsidio a la inversión) que genera la tasa de crecimiento más alta, pero, tiene el incremento en el bienestar social más bajo y los niveles de desigualdad de ingresos superiores que en una economía libre de impuestos. La varianza de la distribución del bienestar disminuye, ya que al incrementar la tasa de crecimiento, incrementa la tasa salarial e incrementa la oferta laboral reduciendo la brecha de bienestar.
- ii) El financiar el subsidio por los impuestos a la tasa salarial, presentan el incremento más alto (respecto a otras maneras de subsidiarse) en la desigualdad de ingresos y de bienestar, y se caracteriza por una disminución en la oferta laboral, esto se debe a la ambigüedad expuesta en el punto 4.7.
- iii) El subsidio a la inversión financiado por los impuestos sobre los rendimientos del capital, tienen como consecuencia un incremento en la tasa de crecimiento menor que si se financiara por otros impuestos. Sin embargo, presenta una mejor distribución

de ingresos después de impuestos, así como una mayor equidad en la distribución del bienestar.

**Tabla 6 Cambios la tasa de crecimiento ( $\Psi$ ), oferta laboral ( $l$ ), distribución del bienestar ( $\sigma_u$ ), distribución del ingreso ( $\sigma_y, G_{PRE}, \sigma_y^{NET}, G_{NET}$ ) hacia las distintas formas de financiamiento para solventar el subsidio a la inversión y cambios en**

$\sigma$									
$\sigma = 0.05$			$\sigma_k = 1.7235$				$s = 0.15$		
$\tau_K$	$\tau_w$	$\tau_C$	$\Psi$	$l$	$\sigma_u$	$\sigma_y$	$\sigma_y^{NET}$	$G_{PRE}$	$G_{NET}$
0.0177	--	--	0.0313	0.6046	0.7733	0.8517	0.8408	0.4676	0.4642
--	0.0422	--	0.0317	0.6144	0.7884	0.8296	0.8563	0.4644	0.4726
--	--	0.0370	0.0415	0.6061	0.7756	0.8484	0.8484	0.4696	0.4696
$\sigma = 0.10$			$\sigma_k = 1.7235$				$s = 0.15$		
$\tau_K$	$\tau_w$	$\tau_C$	$\Psi$	$l$	$\sigma_u$	$\sigma_y$	$\sigma_y^{NET}$	$G_{PRE}$	$G_{NET}$
0.0195	--	--	0.0345	0.6024	0.7698	0.8565	0.8485	0.4692	0.4654
--	0.0464	--	0.0349	0.6132	0.7866	0.8322	0.8616	0.4656	0.4746
--	--	0.0403	0.0448	0.6045	0.7731	0.8519	0.8519	0.4709	0.4709
$\sigma = 0.15$			$\sigma_k = 1.7235$				$s = 0.15$		
$\tau_K$	$\tau_w$	$\tau_C$	$\Psi$	$l$	$\sigma_u$	$\sigma_y$	$\sigma_y^{NET}$	$G_{PRE}$	$G_{NET}$
0.0225	--	--	0.0399	0.5987	0.7639	0.8646	0.8508	0.4717	0.4674
--	0.0535	--	0.0403	0.6113	0.7836	0.8368	0.8705	0.4676	0.4778
--	--	0.0459	0.0503	0.6019	0.7690	0.8576	0.8576	0.4731	0.4731
$\sigma = 0.20$			$\sigma_k = 1.7235$				$s = 0.15$		
$\tau_K$	$\tau_w$	$\tau_C$	$\Psi$	$l$	$\sigma_u$	$\sigma_y$	$\sigma_y^{NET}$	$G_{PRE}$	$G_{NET}$
0.0267	--	--	0.0476	0.5933	0.7551	0.8759	0.8598	0.4753	0.4702
--	0.0635	--	0.0479	0.6084	0.7792	0.8432	0.8831	0.4703	0.4824
--	--	0.0541	0.0581	0.5981	0.7630	0.8657	0.8657	0.4761	0.4761
$\sigma = 0.30$			$\sigma_k = 1.7235$				$s = 0.15$		
$\tau_K$	$\tau_w$	$\tau_C$	$\Psi$	$l$	$\sigma_u$	$\sigma_y$	$\sigma_y^{NET}$	$G_{PRE}$	$G_{NET}$
0.0390	--	--	0.0704	0.5768	0.7275	0.9090	0.8861	0.4856	0.4785
--	0.0923	--	0.0701	0.5996	0.7653	0.8627	0.9198	0.4784	0.4954
--	--	0.0802	0.0809	0.5869	0.7475	0.8891	0.8891	0.4848	0.4848



## CONCLUSIONES

---

Para dar respuesta a las preguntas planteadas en la introducción y cumplir con el objetivo de la tesis, se construyó un modelo de crecimiento económico endógeno en donde la oferta laboral es completamente elástica, y donde existe una distribución desigual del capital inicial. Bajo estas condiciones se obtienen los siguientes resultados:

- i)* En el modelo se determina conjuntamente la tasa de crecimiento  $\Psi$  y la oferta laboral agregada  $l$ , como solución del sistema de ecuaciones **RR** y **PP**, determinandos en el capítulo 4, (ecuaciones (4.43a) y (4.43b)) las cuales se logran resolviendo las condiciones de primer orden (4.24) y (4.25). Es importante hacer notar, que en el sistema de ecuaciones **RR** y **PP** no interviene la distribución de ingreso inicial.
- ii)* La oferta individual de trabajo  $l_i$ , queda determinada por la ecuación (4.40a), e intervienen principalmente tres factores, el capital relativo del individuo  $k_i$  (es decir el capital del individuo  $i$ ,  $K_i$  entre el capital agregado  $K$ ), la tasa de crecimiento  $\Psi$  y la tasa de retorno del capital  $r$ . Las condiciones de transversalidad (condiciones de segundo orden) establecen que  $r \left[ \frac{1-\tau_K}{1-s} \right] > \Psi$ , lo que implica que un incremento en el retorno de capital reduce la oferta de trabajo y también que los individuos que posean más capital relativo ofertan menos trabajo.
- iii)* La distribución del ingreso depende de dos variables (curva **DD**), la oferta relativa del trabajo agregada determinada por el equilibrio macroeconómico, y la distribución del capital inicial. Como era de esperarse, entre mayor sea la desigualdad en la distribución del capital inicial, mayor es el nivel de desigualdad de ingresos (ver ecuaciones (4.45) y (4.46)).
- iv)* El bienestar relativo del individuo  $i$ , queda determinada por la ecuación 4.50d, donde se puede ver que el nivel de bienestar lo determinan dos cosas, la oferta relativa del trabajo agregada (determinada por el equilibrio macroeconómico), y el capital relativo del individuo  $k_i$ . Un agente económico está mejor respecto a los demás, si su capital inicial es mayor que el de los otros.

*v)* La distribución del bienestar (curva **UU**) al igual que la distribución del ingreso, depende de dos variables, la oferta relativa del trabajo agregada (determinada por el equilibrio macroeconómico), y de la distribución del capital inicial. Como era de esperarse entre mayor desigualdad exista en la distribución del capital inicial, mayor es el nivel de desigualdad del bienestar (ver ecuación (4.50e) y (4.50 f)). Sin embargo, existe una enorme diferencia entre ambas curvas, que impide que la distribución del ingreso sea un buen parámetro para utilizarlo como medida de desigualdad del bienestar. Esto se debe, a pesar de que ambas curvas dependen de la distribución del capital y de la oferta laboral, y de que ambas sean concavas, la curva **UU** es creciente en  $l$ , mientras que la curva **DD** es decreciente en  $l$ . Esto se debe a que las personas que poseen un alto nivel de capital, el dedicar una unidad de tiempo al ocio, no significa una gran pérdida en su consumo, sin embargo, el agregar una unidad de ocio a las personas de bajo capital, significa una gran pérdida en su consumo y por ende en su bienestar.

La volatilidad o niveles de riesgo de un país tiene efectos, en la distribución del ingreso, la tasa de crecimiento y en el bienestar de un país, de ahí su importancia para su estudio. El cálculo estocástico es una herramienta útil para modelar a la volatilidad (riesgo) en una economía, ya que permite estudiar soluciones analíticas y numéricas. Cuando la volatilidad presenta incrementos, se encontraron los siguientes resultados:

- i)* Los niveles agregado de bienestar disminuye,
- ii)* La tasa de crecimiento aumenta y la oferta laboral aumenta,
- iii)* Los niveles de desigualdad en la distribución del ingreso aumentan,
- iv)* Los niveles de desigualdad del bienestar disminuyen.

Al incrementar la volatilidad macroeconómica, se puede reducir el ocio lo que significa un incremento en la oferta laboral, teniendo dos consecuencias inmediatas

- i)* Dedicar una unidad menos de ocio, no significa una gran pérdida de bienestar para las personas con grandes cantidades de capital. Sin embargo, el agregar una unidad de ocio a personas con menor capital, significa una pequeña ganancia en su bienestar vía consumo. De esta manera, se disminuye la varianza de los niveles de bienestar

relativo. Sin embargo, dado que los consumidores son adversos al riesgo  $\gamma < 0$ , esto provoca una pérdida del bienestar agregado (ver tabla 4 del capítulo 5).

- ii)* Dado un nivel de distribución del capital, la varianza en los ingresos relativos de los individuos crecen conforme disminuye el ocio agregado de la economía. Esto se debe, a que el incremento en la oferta laboral, provoca que la tasa salarial  $z$  caigan y que los retornos de capital incrementen, disminuyendo la brecha o diferencia de ingresos, entre las personas que tienen un gran capital y las personas que no lo poseen (ver tablas 3 y 4 del capítulo 5).

En las simulaciones se logró establecer un pequeño análisis para México, dando como resultado los niveles de desigualdad y tasas de crecimiento correspondientes. Desafortunadamente el alcance del modelo es limitado y no permite variaciones en la distribución del ingreso en el tiempo. Sin embargo la modelación de los shocks estocásticos permite establecer una senda del PIB similar a la real para el caso de México (ver figura 5.1).

Dentro del análisis de políticas fiscales, se maneja el supuesto de un subsidio a la inversión al capital, financiado por tres impuestos:

- i)* impuestos a los rendimientos de capital,
- ii)* impuestos a la tasa salarial,
- iii)* impuestos al consumo.

Tanto en el estudio analítico del modelo, como en las simulaciones realizadas para México, podemos establecer las siguientes conclusiones para la economía mexicana:

- i)* El financiamiento al subsidio, por el impuesto al consumo, tiene la mayor tasa de crecimiento. Sin embargo, los niveles de desigualdad de ingresos son superiores que en una economía libre de impuestos, y los niveles de desigualdad en bienestar son superiores, a que sí se financiara por otro tipo de impuestos (ver figura 4.6 y tablas 5 y 6 del capítulo 5).
- ii)* Los impuestos a los rendimientos de capital, tienen como consecuencia la mejor distribución de ingresos después de impuestos, incluso mejor que en la economía libre de impuestos (ver tabla 5 del capítulo 5). También, tiene el menor incremento en la tasa

de crecimiento respecto a otros tipos de financiamiento. Sin embargo, presenta también la mayor equidad en la distribución del bienestar como política fiscal (ver figura 4.4 y tablas 5 y 6 del capítulo 5).

- iii)* La peor manera de subsidiar, es financiándonos por los impuestos a la tasa salarial, estos presentan un incremento en la desigualdad de ingresos y del bienestar respecto a otras formas de financiamiento, además de ser la tasa impositiva más alta (ver figura 4.5 y tablas 5 y 6 del capítulo 2).
- iv)* Las tasas impositivas incrementan en forma positiva con aumentos en la volatilidad macroeconómica. La tasa impositiva más baja a cambios en la volatilidad, para subsidiar a la inversión, es el impuesto al capital (ver tabla 6 del capítulo 5).

# APÉNDICE

---

## A1 Condición de transversalidad

**Proposición 3.6** La condición de transversalidad  $\lim_{t \rightarrow \infty} E [K_i^\gamma(t) e^{-\beta t}] = 0$  que garantiza que la solución de las ecuaciones (3.11), (3.12) y (3.13) sea óptima, se cumple si, y sólo si se cumplen alguna de las siguientes relaciones

- i)  $\gamma \left[ r \frac{1 - \tau_K}{1 - s} - \frac{\gamma}{2} (1 - \gamma) \Omega^2 \sigma^2 \right] < \beta$
- ii)  $r \left[ \frac{1 - \tau_K}{1 - s} \right] > \Psi$
- iii)  $l > \frac{\eta}{1 + \eta}$

*Demostración.* Primero observemos el teorema 2.24 y sea

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(K_i^*(t)) = \lim_{t \rightarrow \infty} E \left[ \int_t^\infty \frac{1}{\gamma} (C_i^*(s), l_i^*(s)^\eta)^\gamma e^{-\beta s} ds \right] = 0. \quad A.1$$

De 3.36 se observa que  $\frac{C_i^*(s)}{K_i^*(s)}$  es una constante en el tiempo, sea entonces

$$C_i^*(s) = \left( \frac{C_i^*(s)}{K_i^*(s)} \right) K_i^*(s),$$

de (3.40c) se sabe que  $l_i^*(s)$  es una constante en el tiempo ya que  $k_i^*(s)$  es invariante en el tiempo. Luego A.1 puede reescribirse como

$$\frac{1}{\gamma} \left( \frac{C_i^* l_i^{*\eta}}{K_i^*} \right)^\gamma \lim_{t \rightarrow \infty} E \left[ \int_t^\infty (K_i^*(s))^\gamma e^{-\beta s} ds \right] = 0,$$

donde la tasa de  $K_i^*$  esta dada por la ecuacion (3.32) con  $\tau' = s'$ , luego

$$K_i^*(s) = K_i(0) e^{(\Psi - \frac{1}{2} \sigma_\Psi^2) s + \sigma_\Psi B(s)},$$

$B(s)$  un proceso Wiener. Con lo anterior A.1 Se reescribe como

$$\frac{1}{\gamma} \left( \frac{C_i^* l_i^{*\eta}}{K_i^*} \right)^\gamma \lim_{t \rightarrow \infty} E \left[ \int_t^\infty K_i^\gamma(0) e^{[\gamma(\Psi - \frac{1}{2} \sigma_\Psi^2) - \beta] s + \sigma_\Psi B(s)} ds \right] = 0,$$

Integrando

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\gamma} \left( \frac{C_i^* l_i^{*\eta}}{K_i^*} \right)^\gamma \frac{1}{\beta - \gamma \left( \Psi - \frac{1}{2} \sigma_\Psi^2 \right)} \lim_{t \rightarrow \infty} K_i^\gamma(0) e^{[\gamma \Psi - \beta]t} \\ &= \frac{1}{\gamma} \left( \frac{C_i^* l_i^{*\eta}}{K_i^*} \right)^\gamma \frac{1}{\beta - \gamma \left( \Psi - \frac{1}{2} \sigma_\Psi^2 \right)} \lim_{t \rightarrow \infty} E[K_i^\gamma(t) e^{-\beta t}] = 0, \end{aligned}$$

lo anterior se cumple si, y sólo si

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E[K_i^\gamma(t) e^{-\beta t}] = 0. \quad A.2$$

Tomando en cuenta (3.33) el límite  $\lim_{t \rightarrow \infty} E[K_i^\gamma(t) e^{-\beta t}] = \lim_{t \rightarrow \infty} K_i^\gamma(0) e^{[\gamma \Psi - \beta]t} = 0$  existe si, y sólo si

$$[\gamma \Psi - \beta] < 0 \iff \gamma \left[ r \frac{1 - \tau_k - \beta}{1 - \gamma} - \frac{\gamma}{2} \Omega^2 \sigma^2 \right] < \beta \iff \gamma \left[ r \frac{1 - \tau_k}{1 - s} - \frac{\gamma}{2} (1 - \gamma) \Omega^2 \sigma^2 \right] < \beta,$$

con lo que se cumple *i*).

Para demostrar la equivalencia de *i*) y *ii*) partimos del supuesto que  $\Psi < r \frac{1 - \tau_k}{1 - s}$ , luego

$$\begin{aligned} \frac{r \frac{1 - \tau_k}{1 - s} - \beta}{1 - \gamma} - \frac{\gamma}{2} \Omega^2 \sigma^2 < r \frac{1 - \tau_k}{1 - s} & \iff \frac{r \frac{1 - \tau_k}{1 - s} - \beta}{1 - \gamma} - r \frac{1 - \tau_k}{1 - s} - \frac{\gamma}{2} \Omega^2 \sigma^2 < 0 \\ \iff \frac{\gamma r \frac{1 - \tau_k}{1 - s}}{1 - \gamma} - \frac{\gamma}{2} \Omega^2 \sigma^2 < \frac{\beta}{1 - \gamma} & \iff \frac{\gamma r \frac{1 - \tau_k}{1 - s}}{1 - \gamma} < \frac{\beta}{1 - \gamma} + \frac{\gamma}{2} \Omega^2 \sigma^2. \end{aligned}$$

Como  $\gamma < 0$ ,  $0 < \Omega, \sigma$  de este último resultado se implica que

$$\frac{\gamma r \frac{1 - \tau_k}{1 - s}}{1 - \gamma} < \frac{\beta}{1 - \gamma} + \frac{\gamma}{2} \Omega^2 \sigma^2 < \frac{\beta}{1 - \gamma} + \frac{\gamma^2}{2} \Omega^2 \sigma^2 \iff \gamma \left[ r \frac{1 - \tau_k}{1 - s} - \frac{\gamma}{2} (1 - \gamma) \Omega^2 \sigma^2 \right] < \beta$$

Para demostrar que *i*) implica *ii*) sólo hace falta demostrar que si

$$\frac{\gamma r \frac{1 - \tau_k}{1 - s}}{1 - \gamma} < \frac{\beta}{1 - \gamma} + \frac{\gamma^2}{2} \Omega^2 \sigma^2, \quad \text{entonces} \quad \frac{\gamma r \frac{1 - \tau_k}{1 - s}}{1 - \gamma} < \frac{\beta}{1 - \gamma} + \frac{\gamma}{2} \Omega^2 \sigma^2.$$

y esto se cumple para valores relativamente pequeños de  $\sigma$ .

Para demostrar la equivalencia entre *ii*) y *iii*) se divide la ecuación (3.13) entre  $K$

$$\Psi dt = \frac{dK}{K} = \frac{(1 - \tau_K)r + (1 - \tau_w)w(1 - l) - (1 + \tau_C) \frac{C}{K}}{1 - s} dt + du_K,$$

entonces se cumple que

$$0 < \Psi - r \left( \frac{1 - \tau_K}{1 - s} \right) \iff 0 < \frac{(1 - \tau_w)w(1 - l) - (1 + \tau_C)\frac{C}{K}}{1 - s},$$

$$\iff (1 + \tau_C)\frac{C}{K} > (1 - \tau_w)w(1 - l).$$

Sustituyendo (3.38) en la ecuación anterior

$$(1 + \tau_C)\frac{w}{\eta} \frac{1 - \tau_w}{1 + \tau_C} l > (1 - \tau_w)w(1 - l) \iff 0 > n - ln - l \iff 0 > n - l(1 + n) \iff l > \frac{n}{1 + n}$$

. Con lo que se completa la prueba.

## A2 Existencia de equilibrio de crecimiento balanceado

Para establecer las condiciones de existencia se derivan las relaciones (3.43a) y (3.43b), es decir, que las curvas **RR** y **PP** con respecto al ocio  $l$  obtenemos:

$$\left. \frac{\partial \Psi}{\partial l} \right|_{RR} = -\frac{\alpha \Omega(l)}{1 - l} \left[ \frac{(1 - \alpha)G}{1 - \gamma} - \gamma \Omega(l) \sigma^2 \right] < 0, \quad A.3$$

$$\left. \frac{\partial \Psi}{\partial l} \right|_{PP} = -\frac{\alpha \Omega(l)H}{\eta(1 - l)} \left[ 1 + \frac{\eta}{H} + \frac{(1 - \alpha)l}{1 - l} \right] < 0, \quad A.4$$

donde  $G = \frac{1 - \tau_K}{1 - s}$ ,  $H = \frac{1 - \tau_w}{1 + \tau_C}$ . Para la existencia del equilibrio es necesario que ambas curvas tengan pendiente negativa. También de las ecuaciones (3.43a) y (3.43b), se tiene que

$$\Psi_{RR}(l = 0) = \frac{A(1 - \alpha)G - \beta}{1 - \gamma} - \frac{\gamma}{2} A^2 \sigma^2, \quad (A.5)$$

$$\Psi_{RR}(l = 1) = \frac{-\beta}{1 - \gamma}, \quad (A.6)$$

$$\Psi_{PP}(l = 0) = A, \quad (A.7)$$

$$\Psi_{PP}(l = 1) = -\infty. \quad (A.8)$$

Dos condición necesarias y suficientes para la existencia de un único equilibrio es que  $\Psi_{PP}(l = 0) > \Psi_{RR}(l = 0)$  y  $\lim_{l \rightarrow 1} \Psi_{PP}(l) = -\infty$ . En este caso la curva **PP** esta por debajo

de **RR** para  $l = 1$  y las curvas se cruzan una vez. Luego estas condiciones son suficiente cuando

$$\lim_{l \rightarrow 1} \Psi_{PP}(l) = -\infty \quad \text{A.9}$$

$$(\alpha - 1)G + \frac{\beta}{A} > -\frac{\eta(1 - \eta)}{2} A\sigma^2, \quad \text{A.10}$$

es decir cuando  $\sigma$  no es excesivamente alto. Si A.9 y A.10 no se cumplen, entonces existe más de un equilibrio o este no existe.

# BIBLIOGRAFÍA

---

- Aghion P., Banerjee A. , and T. Piketty, 1999, Dualism and Macroeconomic Volatility, *Quarterly Journal of Economics*, Vol. 114, No. 4, pp. 1359-1397.
- Aghion P, Caroli E., García-Peñalosa C., 1999, Inequality and Economic Growth: The Perspective of the New Growth Theories, *Journal of Economic Literature*, Vol. 37, No. 4, pp. 1615-1660.
- Alesina, Rodrik, 1994, Distributive Politics and Economic Growth, *Quarterly Journal of Economics*, 109, 465-490.
- Barro J., 2000, Income Inequality in OECD Countries: Data and Explanations, *CESifo Economic Studies*, 49, 479-513.
- Barro J., Sala-i-Martin, 1995, *Economic Growth*. McGrall-Hill.
- Bertola G., 1993, Factor Shares and Savings in Endogenous Growth, *American Economic Review*, Vol. 83, No. 5, pp. 1184-1198.
- Breen R., García-Peñalosa, 2004, Income Inequality and Macroeconomic Volatility: An Empirical Investigation, *Review of Development Economic*
- Brzezniak Z., Zastawniak T., 1998, *Basic Stochastic Processes*. Springer.
- Cass D., 1965, Optimum Growth in a Aggregative Model of Capital Acumulation, *Review of Economic Studies*, XXXII, 233-240.
- Chang F.R., 2004, *Stochastic Optimization in Continuos Time*. Cambridge University Press.
- Chung C.A., 2004, *Simulation Modeling Handbook: a practical approach*, CRC Press LLC.
- Corsetti G., 1997, A portafolio approach to endogenous growth: Equilibrium and optimal policy, *Journal of Economic Dynamics and control*, 1627-1641.
- Domar E. D., 1946, Capital Expansion, Rate of Growth, and Employment, *Econometrica*, 14, 137-147

- García-Peñalosa C., and S.J. Turnovsky, 2002, Production Risk and the Functional Distribution of Income in a Developing Economy: Tradeoffs and Policy Responses, *Journal of Development Economics*, forthcoming.
- García-Peñalosa C. and S.J. Turnovsky, 2004, Macroeconomic Volatility and Income Inequality in a Stochastically Growing Economy, Paper presented at the conference “Economic Growth and Income Distribution: On the Nature and Causes of the Wealth of Nations” held in Lucca, Italy, June 2004.
- García-Peñalosa C. and S.J. Turnovsky, 2005, Second-Best Optimal taxation of Capital and Labor in a Developing Economy, *Journal of Public Economics*, 89, pp. 1045-1074.
- García-Peñalosa C., Turnovsky, S.J. 2006, Growth and income inequality: A canonical model. *Economic Theory* 28, pp. 25-49.
- Grinols, E.L. and S.J. Turnovsky, 1993, Risk, the Financial Market, and Macroeconomic Equilibrium, *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol. 17, No. 1-2, pp. 1-36.
- Grinols, E.L. and S.J. Turnovsky, 1998, Risk, optimal government finance, and monetary policies in a growing economy, *Economica*, 65, 401-427.
- Grossman Gene M., Helpman HelpMankiw, 1994, *Innovación y Crecimiento en la Economía Global*, CONACYT Grafos editores, Titulo original Innovation & Growth in the Global Economy, 1991, MIT Press.
- Harrod R.F., 1939, An Essay in Dynamic Theory, *EJ*
- Kydland, F. E., Prescott E., 1982, Time to build and aggregate fluctuations. *Econometrica*, 50, 1345-70.
- Koopmans T., 1965, On the concept of Optimal Growth, *The Econometric Approach to Development Planning*, Rand McNally Press.
- Lundberg, M., Squire L., 2003, The Simultaneous Evolution of Growth and Inequality, *Economic Journal*, 113, 326-344.
- Mankiw N.G., D. Romer, and D.N. Weil, 1992, A Contribution to the Empirics of Economic Growth, *Quarterly Journal of Economics*, Vol. 107, No. 2, pp. 407-437.
- Merton R.C., 1969, Lifetime Portfolio Selection under Uncertainty: The Continuous-Time Case, *Review of Economics and Statistics*, Vol. 51, No. 3, pp. 247-257.
- Oksendal B., 2000, *Stochastic Differential Equations*. Springer.

- Person T., Tabellini G., 1994, Is Inequality Harmful for Growth?, *American economic review*, 84, 600-621.
- Ramsey F., 1928, A Mathematical Theory of Savings, *Economic Journal*, XXXVIII, 543-559.
- Romer Paul.M., 1986, Increasing Returns and Long-Run Growth, *Journal of political Economy*, 94, pp. 1002-37.
- Rudin W., 1987, *Real and Complex Analysis*. McGrall-Hill.
- Sargent T. J. (1979). *Macroeconomic theory. Economic theory, econometrics, and mathematical economics*. New York: Academic Press.
- Sen A., 1992, *Inequality Reexamined*, Harvard University Press.
- Smit, W.T., 1996, Tax, uncertainty, and long-growth, *European Economic Review*, 40, 1647-1664.
- Solow, R.M., 1956, A contribution to the Theory of Economic Growth, *Quarterly Journal of Economics*, LXX, 65-94.
- Stiglitz J., 1969, The Distribution of Income and Wealth Among Individuals, *Econometrica*, Vol. 37, No. 3 pp. 382-397.
- Turnovsky S.J., 2000, Government Policy in a Stochastic Growth Model with Elastic Labor Supply, *Journal of Public Economic Theory*, Vol. 2, No. 4, pp. 389-433.
- Venegas-Martínez, 2006, *Riesgos financieros y económicos: Productos derivados y decisiones económicas bajo incertidumbre*, Thomson.