



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

CONTROL POR MODOS DESLIZANTES DE
TERCER ORDEN PARA UN HELICÓPTERO DE
PRUEBA DE TRES GRADOS DE LIBERTAD

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Ingeniero Eléctrico Electrónico

PRESENTA:

Hugo Andrés Franco de los Reyes

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. Leonid Fridman



2014

*A Lourdes,
por tu valentía y por que siempre has sido diferente.
A Diego,
por acompañarme desde el inicio.*

Agradecimientos

Quiero agradecer a las siguientes personas por influir de manera directa o indirecta en este trabajo:

A mi mamá Lourdes por ser tan valiente y por que con su esfuerzo constante me ha enseñado a conducir mi camino en la dirección adecuada.

A Diego, mi hermano, por enseñarme que la confianza no está determinada por la sangre sino que es algo que se cultiva poco a poco, y por acompañarme en este viaje.

A la BEP, por que encontrarlos fue un alivio para mi, en ustedes tengo un lugar donde sentirme acompañado y me ayudan a seguir.

A todos los integrantes del Laboratorio de Modos Deslizantes, en especial a Toño y Héctor por brindarme su ayuda cuando la necesité.

Al Dr. Leonid Fridman por abrirme paso a esta gran ciencia llamada Control y por el apoyo brindado para realizar este trabajo.

Índice

1. Introducción	1
1.1. Motivación y Estado del Arte	1
1.2. Planteamiento del Problema	4
1.3. Objetivo	4
1.4. Metodología	4
1.5. Contribuciones	6
1.6. Estructura de la tesis	6
2. Preliminares	7
2.1. Algoritmos de Control por Modos Deslizantes de Tercer Orden	7
2.1.1. Algoritmo Super-Twisting de Tercer Orden	8
2.1.2. Control Integral Discontinuo	12
2.1.2.1. Métodos de diseño de las ganancias	14
2.2. Observación por Modos Deslizantes	15
2.2.1. Observador basado en Algoritmo Super-Twisting	16
2.2.2. Observador basado en el Algoritmo Super-Twisting de Tercer Orden	17
2.2.3. Diferenciador Robusto y Exacto de Orden Arbitrario	17
3. Descripción de la Planta y Modelo Matemático	19
3.1. Obtención del modelo	21
3.1.1. Dinámica del ángulo de elevación	22
3.1.2. Dinámica del ángulo <i>pitch</i>	23
3.1.3. Dinámica del ángulo <i>travel</i>	23
3.1.4. Modelo completo	25
3.1.5. Parámetros del sistema	26
3.2. Linealización del sistema	26
3.2.1. Controlabilidad	28
4. Diseño del Esquema de Control	29
4.1. Control de la dinámica del ángulo de elevación	29
4.1.1. Implementación del Algoritmo Super-Twisting de Tercer Orden	31
4.1.2. Implementación del Control Integral Discontinuo	32
4.2. Control de la dinámica de los ángulos de <i>pitch</i> y <i>travel</i>	33
4.2.1. Control del ángulo de <i>travel</i>	34
4.2.2. Control del ángulo de <i>pitch</i>	35
4.2.2.1. Implementación del Algoritmo Super-Twisting de Tercer Orden	36
4.2.2.2. Implementación del Control Integral Discontinuo	36
4.3. Observación de Estados	37
4.3.1. Implementación del Observador basado en el AST	38

4.3.2.	Implementación del Observador basado en el 3-AST	38
4.3.3.	Implementación del Diferenciador Robusto y Exacto de Quinto Orden	39
4.4.	Simulaciones	39
4.4.1.	Control 3-STA, Observador STA	40
4.4.2.	Control 3-STA, Observador 3-STA	41
4.4.3.	Control 3-STA, Diferenciador de Quinto Orden	42
4.4.4.	Control CID, Observador STA	44
4.4.5.	Control CID, Observador 3-STA	45
4.4.6.	Control CID, Diferenciador de Quinto Orden	47
5.	Resultados Experimentales	49
5.1.	Plataforma experimental	49
5.2.	Experimento 1: Desempeño del ángulo de elevación	51
5.2.1.	Algoritmo Super-Twisting de Tercer Orden	52
5.2.2.	Control Integral Discontinuo	54
5.3.	Experimento 2: Medio giro y regulación de elevación	56
5.3.1.	Algoritmo Super-Twisting de Tercer Orden	56
5.3.2.	Control Integral Discontinuo	58
5.4.	Experimento 3: Giro completo y regulación de elevación	60
5.4.1.	Algoritmo Super-Twisting de Tercer Orden	60
5.4.2.	Control Integral Discontinuo	62
6.	Conclusiones	65
A.	Teoría Básica del Control por Modos Deslizantes	67
A.1.	Introducción al Control por Modos Deslizantes	67
A.1.1.	Conceptos Principales	69
A.1.2.	<i>Chattering</i> : Eliminación y Atenuación	73
A.1.2.1.	Eliminación de Chattering: Cuasi-Modo Deslizante	73
A.1.2.2.	Atenuación de chattering: Modo deslizante asintótico	74
A.1.3.	Concepto de Control Equivalente	76
A.1.4.	Ecuaciones de Modos Deslizantes	78
A.1.5.	Condición de Acoplamiento y Propiedades de Insensibilidad	79
A.2.	Modos Deslizantes de Segundo Orden	80
A.2.1.	Algoritmo Twisting	81
A.2.2.	Algoritmo Super-Twisting	81
B.	Archivos de Matlab y Diagramas de Simulink	85
B.1.	Archivos .m	85
B.2.	Diagramas de Simulink	87
C.	Descripción del Hardware del Helicóptero	89
C.1.	Tarjeta dSPACE 1103	89
C.2.	Codificador Incremental	90
C.3.	Etapas de Potencia	90
	Bibliografía	93

Introducción

1.1. Motivación y Estado del Arte

Actualmente la ingeniería de control desempeña un papel fundamental en el desarrollo de nuevas aplicaciones tecnológicas en múltiples áreas como la aeronáutica, la industria automotriz, la robótica y muchas más. En general, el objetivo de un sistema de control consiste en llevar a una variable de interés hacia un valor preestablecido, normalmente conocido como referencia, por medio de una acción correctiva sobre el sistema conocida como entrada de control. Así, por ejemplo, por medio una entrada de control adecuada, es posible regular la posición de un brazo robótico hacia un lugar específico en el que tiene que realizar alguna tarea. Se busca que la regulación de posición del brazo sea rápida y precisa, es decir, que se realice en el menor tiempo posible; y que el brazo llegue a la posición deseada en un solo movimiento y sin sobrepaso.

Uno de los principales problemas que se presenta en los sistemas de control, y que dificultan su correcto funcionamiento; es la existencia de perturbaciones e incertidumbres. Por perturbación se entiende una señal externa e indeseable, que se puede presentar de manera acoplada o desacoplada a la señal de control, generando un comportamiento erróneo en el sistema. Por otro lado, incertidumbres las hay de dos tipos, las conocidas como variaciones paramétricas, que hacen referencia a la posibilidad de que los parámetros de un sistema cambien su valor mientras se lleva a cabo un proceso; y aquellas incertidumbres que se deben a las dinámicas no modeladas al diseñar el controlador.

Para lograr reducir los efectos negativos de las perturbaciones e incertidumbres que pueden afectar el rendimiento de un sistema físico, y poder llevar a cabo correctamente el control del mismo; han surgido varias técnicas de control robusto que alivian este problema. Una de las técnicas con más éxito en este ámbito es el control por modos deslizantes, el cual teóricamente puede cancelar totalmente perturbaciones acopladas a la señal de control y combinado con otras técnicas puede reducir los efectos de perturbaciones desacopladas, además, debido a que sólo utiliza información del estado del sistema y no de los parámetros del mismo, es capaz de llevar a cabo la tarea de control a pesar de la existencia de incertidumbres en el modelado como variaciones paramétricas y el no tomar en cuenta toda la dinámica del sistema.

El control por modos deslizantes clásico, o de primer orden, adquiere sus propiedades gracias al uso de señales discontinuas y de frecuencia infinita (teóricamente); su principal desventaja es el efecto de *chattering* (oscilaciones causadas por el control discontinuo de alta frecuencia), que produce vibraciones y desgaste de los actuadores. No obstante, han surgido varias propuestas para reducir el fenómeno de *chattering*. Las primeras ideas consistieron en utilizar aproximaciones de la función signo, utilizada en los controladores y responsable de la robustez de esta técnica de control, por medio de funciones de saturación

o sigmoides. Otra estrategia consiste en introducir integradores en el control discontinuo para reducir el *chattering*. Por otro lado se han propuesto los modos deslizantes con ganancia adaptable, con el objetivo de ajustar la ganancia del controlador solo al valor requerido para inyectar menos energía al sistema. Finalmente, el enfoque que ha tenido más éxito es el desarrollo de los modos deslizantes de orden superior [12].

Para sistemas lineales y no lineales de segundo orden, con grado relativo dos de la salida con respecto a la señal de control (que representan muchos sistemas mecánicos y eléctricos), existen varios controladores por modos deslizantes que estabilizan todo el estado en tiempo finito aun en presencia de perturbaciones acopladas al canal del control. Podemos mencionar el algoritmo Twisting [11], el Subóptimo [1], el Terminal [25] y el Controlador con convergencia preestablecida [11]; todos estos controladores pueden ser aplicados directamente a sistemas de segundo orden, sin embargo tienen el inconveniente de que utilizan señales discontinuas y por lo tanto producen *chattering*. Otro método para el control de sistemas de segundo orden perturbados, es utilizar, el algoritmo Cuasi Continuo de tercer orden (discontinuo) [12] y agregar un integrador, con esto se logra reducir el *chattering*, sin embargo, esta estrategia requiere información de la salida y sus dos primeras derivadas.

Uno de los controladores por modos deslizantes con más aplicaciones es el conocido Algoritmo Super-Twisting (AST). Este algoritmo evita la aparición de *chattering* debido a que produce una señal de control continua, y para sistemas de grado relativo uno, estabiliza al sistema en tiempo finito. Sin embargo, para poder utilizarlo con sistemas de segundo orden es necesario el diseño de una superficie de deslizamiento de primer grado, lo que resulta en convergencia asintótica de los estados y no en tiempo finito.

Recientemente surgió una nueva propuesta, un controlador por modos deslizantes basado en el AST. Este es un controlador de tercer orden aplicable a sistemas de segundo orden con grado relativo dos; preservando las características del AST:

- Estabiliza el estado de sistemas de grado relativo dos, en tiempo finito.
- Genera un señal de control absolutamente continua aliviando el problema de *chattering*.
- Es robusto contra cierto tipo de perturbaciones e incertidumbres acopladas.
- Requiere solamente el conocimiento de la salida del sistema y su primera derivada.

Debido a estas características el controlador recibe el nombre de Algoritmo Super-Twisting de Tercer Orden (3-AST) [9], existen dos versiones del algoritmo, a la segunda, a lo largo de este trabajo se le llamará Control Integral Discontinuo (CID) [22].

Los algoritmos mencionados hasta ahora que son aplicables a sistemas mecánicos con grado relativo dos, con salida $\sigma = x_1$, en donde x_1 representa la posición del sistema, y algunas de sus características se presentan en la tabla 1.1, en donde se pueden apreciar las ventajas del 3-AST frente a otros algoritmos de control por modos deslizantes.

Algoritmo	Señal de Control	Información	Estabilidad	<i>Chattering</i>
CMD Clásico	Discontinua	σ y $\dot{\sigma}$	Asintótica	Sí
Super-Twisting	Continua	σ y $\dot{\sigma}$	Asintótica	No
Twisting	Discontinua	σ y $\dot{\sigma}$	Tiempo Finito	Sí
3-AST, CID	Continua	σ , $\dot{\sigma}$	Tiempo Finito	No

Tabla 1.1: Diferentes estrategias de control para el sistema perturbado de segundo orden con salida σ y su derivada $\dot{\sigma}$

Los helicópteros son sistemas físicos muy utilizados en la investigación en control para probar el desempeño de nuevos algoritmos, esto debido a que son sistemas complejos con gran cantidad de no linealidades que permiten que las pruebas que se realizan en este sistema sean exigentes y los resultados sean convincentes en cuanto al funcionamiento del controlador. Por esta razón los helicópteros han sido sistemas muy estudiados por los investigadores en control y es común que existan plataformas experimentales para pruebas de laboratorio construidos por varias universidades y empresas.

En el ámbito académico y de investigación existe gran cantidad de prototipos de helicópteros utilizados para experimentación, algunos construidos en las mismas universidades, en este caso se encuentra la Universidad de Baja California (ver [8]) en donde se construyó un helicóptero de pruebas para un laboratorio en línea, en el cual los alumnos de dicha universidad pueden poner a prueba sus propios algoritmos de control desde cualquier computadora con conexión a Internet. El Instituto Tecnológico de Massachusetts tiene una plataforma similar, activa desde el 2004, (ver [7]).

Por otro lado, hay varias empresas que se dedican al diseño y construcción de plataformas de experimentación para sistemas de control, dentro de la basta serie de prototipos que existen, hay varios modelos de helicópteros, los hay de dos y tres grados de libertad; y además de dos, tres o hasta cuatro propulsores, lo que resulta en varios tipos de helicópteros, subactuados y sobreactuados. La compañía Quanser cuenta con tres plataformas tipo helicóptero una de dos grados de libertad con dos propulsores, otra de tres grados de libertad con dos propulsores y por último una de tres grados de libertad con cuatro propulsores. Para los propósitos de este trabajo la plataforma de interés es el helicóptero de tres grados de libertad con dos propulsores, el cual es un sistema subactuado.

En cuanto al aspecto de experimentación, en este prototipo se han llevado a cabo una gran cantidad de experimentos con variadas técnicas de control, desde controladores sencillos como el PID en [20]; control con lógica difusa en [26], controladores basados en redes neuronales en [4]. En cuanto a técnicas de control robusto, en [13] se utiliza la técnica H_∞ , para lograr seguimiento de trayectorias, este método es relativamente nuevo y utiliza elementos de control en el espacio del tiempo y en el espacio de la frecuencia de un modelo lineal del helicóptero. En [10] se presenta un trabajo utilizando realimentación de salida y control adaptable, con la ventaja de poder varias los valores de las ganancias del controlador para poder rechazar diferentes perturbaciones.

En experimentación con controladores por modos deslizantes aplicados al helicóptero de tres grados de libertad de Quanser, hay una gran cantidad de literatura, en [24] se realizan simulaciones de un controlador basado en la combinación de realimentación de salida y modos deslizantes de primer orden; en [5] se utiliza un observador por modos deslizantes para identificar perturbaciones y de esta manera se generan dos entradas de control, una con control clásico y la segunda basada en la perturbación identificada por el observador, obteniendo un controlador robusto por salida. En [21] se utiliza un controlador por modos

deslizantes de orden superior para regular la posición del helicóptero; por otro lado, en [16] se presenta un esquema de control que permite desacoplar el sistema por medio de entradas de control virtuales, se diseña un piloto automático para seguimiento de trayectorias y se utilizan modos deslizantes clásicos con ganancias adaptables para ajustarlas solo al valor necesario de acuerdo a la perturbación que afecta al sistema.

En lo concerniente a algoritmos de modos deslizantes de segundo orden, puede citarse [14] en donde se utiliza el Algoritmo Twisting para seguimiento de trayectorias oscilatorias. En [15], con el objetivo de atenuar el efecto de *chattering*, se utiliza un controlador basado en el Algoritmo Super-Twisting junto con otras técnicas. Por otro lado, en [19] se utiliza el mismo esquema que en [16] pero se aplica el Algoritmo Super-Twisting de Ganancias Variables (ASTGV), con el cual se obtiene una señal de control continua y además adaptable a la perturbación que afecta el sistema. Finalmente, en [2] se utilizan el algoritmo Twisting de Ganancias Adaptables (TGA) y ASTVG para estabilizar el helicóptero y generar señales de control suficientemente grandes para rechazar perturbaciones.

Hasta ahora no hay trabajos en donde se experimente con el helicóptero de tres grados de libertad utilizando el 3-AST.

1.2. Planteamiento del Problema

El problema principal a resolver consiste en diseñar un esquema de control robusto en base al algoritmo 3-AST para estabilizar los estados del helicóptero de tres grados de libertad, un sistema subactuado y no lineal, en tiempo finito y en distintos puntos de operación, contando sólo con la medición de la posición del sistema y la estimación de su derivada, i.e., la velocidad.

1.3. Objetivo

Este trabajo tiene por objetivo probar de forma experimental el recientemente propuesto Algoritmo Super-Twisting de Tercer Orden para controlar un helicóptero de laboratorio de tres grados de libertad, el cual es un sistema subactuado y evaluar su desempeño. Se quiere comprobar que el 3-AST conserva las propiedades del AST. Además se probará la robustez del controlador al utilizar un modelo simplificado del helicóptero, las dinámicas no modeladas fungirán como incertidumbres para el sistema.

1.4. Metodología

1. Análisis y modelado de la planta.

El primer paso para diseñar un sistema de control es conocer la planta, en esta etapa se analiza el entorno donde se encuentra el helicóptero, las restricciones físicas que lo caracterizan, el tipo de actuadores que accionan el sistema y los sensores con los que se cuenta para saber qué señales se pueden medir y qué información del sistema se tiene disponible; para finalmente llegar al modelo matemático que describe el funcionamiento del helicóptero.

2. Selección del algoritmo de control.

Una vez evaluada la planta de acuerdo a sus características se debe seleccionar el algoritmo de control que mejor cumpla con los objetivos propuestos, en este caso se desea probar el relativamente nuevo Algoritmo Super-Twisting de Tercer Orden en dos versiones distintas, el cual, por las características del sistema a controlar, es

sumamente adecuado. En esta etapa y en la anterior la investigación bibliográfica es de suma importancia.

3. Diseño del esquema de control.

En este paso se debe analizar cuál es la mejor forma de aplicar los controladores seleccionados al helicóptero, puesto que es un sistema subactuado. También en esta etapa se diseñan las ganancias de los controladores, y además se debe seleccionar algún observador por modos deslizantes para estimar las variables físicas que no pueden ser medidas y son necesarias para el funcionamiento del controlador. Todo lo anterior con el objetivo de poder llevar a cabo adecuadamente el control del helicóptero.

4. Implementación física.

Para validar el controlador propuesto se realiza una simulación numérica que muestre la convergencia del algoritmo, donde se deben de tomar en cuenta las propiedades del dispositivo electrónico que se empleará para la implementación física. Finalmente se procederá a probar el controlador en el helicóptero, donde podrá ser necesario un ajuste de las ganancias debido a que existen muchos factores externos que influyen en el sistema y que no se consideraron en la simulación.

Con base en los pasos anteriores se diseñará un esquema de control robusto en base al controlador 3-AST para el helicóptero de tres grados de libertad. Debido a que el sistema es no lineal y subactuado es necesario diseñar el esquema de control adecuado que permita regular los tres grados de libertad del helicóptero hacia las posiciones deseadas, además debe ser robusto ante perturbaciones acotadas y acopladas a la señal de control y debe rechazar de manera aceptable perturbaciones no acopladas, también acotadas. Para implementar el controlador es necesario obtener un modelo matemático del sistema y conocer al menos la cota máxima de la derivada de las perturbaciones. Para hacer esto se realizará el análisis del comportamiento del sistema y se obtendrá un modelo no lineal, sin embargo, el controlador será diseñado para el sistema linealizado y las no linealidades serán consideradas como perturbaciones. Además se implementará un observador por modos deslizantes para estimar todo el estado, ya que el sistema solo cuenta con sensores para determinar la posición angular del helicóptero. En la figura 1.1 se puede observar un esquema simplificado de un diagrama de bloques con el sistema de control descrito en este párrafo.

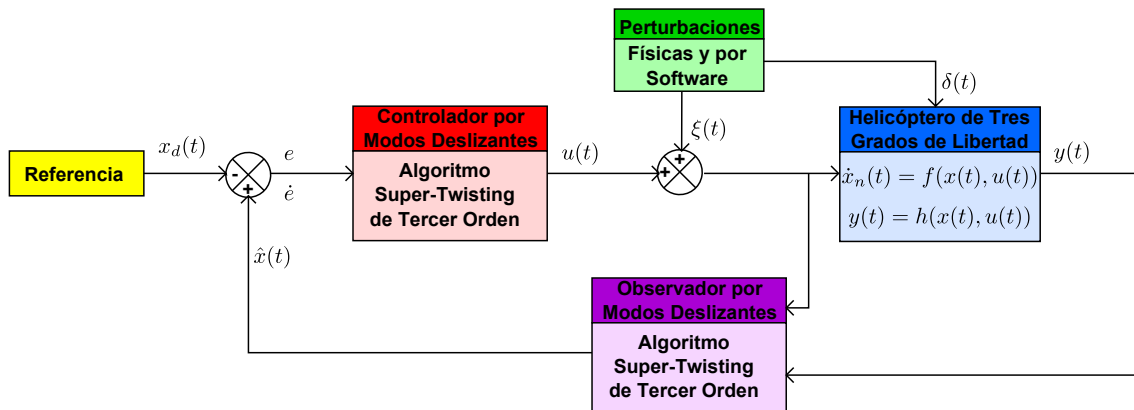


Figura 1.1: Esquema de control a diseñar.

En el esquema propuesto $x_d(t)$ representa el valor deseado de los estados del sistema, e y $\dot{e}$ son la señal de error y su derivada temporal, respectivamente; $u(t)$ es la señal de

control generada por el controlador de modos deslizantes 3-AST; $\xi(t)$ es una perturbación o incertidumbre acoplada a la entrada de control; $\delta(t)$ es una perturbación o incertidumbre no acoplada; $y(t)$ es la salida del helicóptero, es decir, las posiciones angulares en cada uno de los grados de libertad; y finalmente $\hat{x}(t)$ es el vector de estados estimados por el observador por modos deslizantes.

1.5. Contribuciones

La principal contribución de este trabajo es la prueba experimental de dos algoritmos nuevos de control por modos deslizantes de tercer orden, el Algoritmo Super-Twisting de Tercer Orden y el Control Integral Discontinuo, los cuales ya tienen prueba de estabilidad, pero aun no se han presentado resultados experimentales que les proporcionen validez práctica.

La prueba experimental será adecuada puesto que se realizará en un sistema complejo, perturbado y con incertidumbres paramétricas, es decir, se trata de un sistema que exige un controlador robusto para poder llevar a cabo de manera eficiente el objetivo de control.

1.6. Estructura de la tesis

Este trabajo está dividido en 6 capítulos. La presentación de los algoritmos de control y observación que se utilizarán se presentan en el Capítulo 2. En el Capítulo 3 se lleva a cabo la descripción y el modelado del helicóptero. En el Capítulo 4 se presenta el diseño del esquema de control y los resultados de simulaciones. En el Capítulo 5 se muestran los resultados obtenidos en la etapa de experimentación y el análisis correspondiente. Finalmente, en el Capítulo 6 se tienen las conclusiones generales de este trabajo.

Preliminares

En este capítulo se presentan los algoritmos de control y observación por modos deslizantes que se utilizaron para el diseño del esquema de control aplicado al helicóptero. En primer lugar se introducen los algoritmos de control por modos deslizantes de tercer orden, el 3-AST y el CID. Posteriormente se muestran varios algoritmos de observación para estimar las velocidades del helicóptero, ya que estas no se pueden medir directamente.

2.1. Algoritmos de Control por Modos Deslizantes de Tercer Orden

En este apartado se presentan dos algoritmos de control por modos deslizantes de tercer orden, los cuales combinan las características de los algoritmos de segundo orden Twisting y Super-Twisting (ver Apéndice A), es decir, que son aplicables a sistemas de segundo orden con grado relativo dos de la salida con respecto a la señal de control, estabilizan las variables de estado en tiempo finito y además ambos controladores producen una señal de control absolutamente continua.

Los algoritmos de tercer orden que se presentarán a continuación, tienen las siguientes características:

- Logran la estabilización de la salida del sistema y sus primeras dos derivadas en tiempo finito.
- Producen una señal de control totalmente continua, lo que alivia el problema del *chattering*.
- Compensan de manera exacta perturbaciones e incertidumbres continuas.
- Requieren solamente el conocimiento de la salida del sistema y su primera derivada.

Para presentar los algoritmos de tercer orden, se considera el sistema perturbado

$$\ddot{z} = f(z) + g(z)\nu, \quad (2.1)$$

en donde $z \in \mathbb{R}^2$ es el vector de estados del sistema, $y = z = x_1$ es la salida del sistema, $\nu \in \mathbb{R}$ es una señal de control escalar, $f(z)$ es acotada y es el término de perturbaciones

e incertidumbres acopladas que pueden afectar el sistema, y $g(z) \neq 0$. El sistema (2.1) puede reescribirse como

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = f(x_1, x_2) + g(x_1, x_2)\nu, \end{cases} \quad (2.2)$$

para estabilizar el sistema se utiliza el control

$$\nu = g^{-1}(x_1, x_2)u, \quad (2.3)$$

después de sustituir el control (A.16), el sistema (2.2) en lazo cerrado es

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u + f(x_1, x_2) \end{cases} \quad (2.4)$$

El objetivo es utilizar un control continuo u tal que el sistema (2.4) se estabilice en tiempo finito en presencia del término de perturbación e incertidumbres $f(x_1, x_2)$. En las secciones siguientes se presentan dos algoritmos que solucionan el problema planteado.

2.1.1. Algoritmo Super-Twisting de Tercer Orden

Teorema 2.1 [9] *La entrada de control u definida como*

$$u = -k_1|\phi|^{\frac{1}{2}}\text{sign}(\phi) - k_3 \int_0^t \text{sign}(\phi) dt$$

ó

$$\begin{aligned} u &= -k_1|\phi|^{\frac{1}{2}}\text{sign}(\phi) + L \\ \dot{L} &= -k_3\text{sign}(\phi) \end{aligned} \quad (2.5)$$

en donde, $\phi = (x_2 + k_2|x_1|^{\frac{2}{3}}\text{sign}(x_1))$ y k_1 , k_2 y k_3 son ganancias positivas diseñadas adecuadamente, estabiliza el sistema perturbado (2.4) en tiempo finito.

Al sustituir el controlador (2.5) en (2.4), el sistema en lazo cerrado queda como

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -k_1|\phi|^{\frac{1}{2}}\text{sign}(\phi) + L + f(x_1, x_2) \\ \dot{L} = -k_3\text{sign}(\phi), \end{cases} \quad (2.6)$$

supongamos que $x_3 = L + f(x_1, x_2)$, entonces el sistema (2.6) puede reescribirse como

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -k_1|\phi|^{\frac{1}{2}}\text{sign}(\phi) + x_3 \\ \dot{x}_3 = -k_3\text{sign}(\phi) + \rho, \end{cases} \quad (2.7)$$

en donde $\rho = \dot{f}(x_1, x_2)$ que satisface $|\rho| \leq \Delta$. El controlador propuesto en la ec. (2.5) es capaz de estabilizar el sistema (2.2) si la siguiente proposición se satisface.

Proposición. La ecuación diferencial con lado derecho discontinuo dada por la ec. (2.7) estabiliza el sistema en el origen en tiempo finito, para las ganancias diseñadas adecuadamente k_1 , k_2 y k_3 aun en presencia de la perturbación acotada $|\rho| \leq \Delta$, ver [9].

La prueba de la proposición anterior se basa en la función de Lyapunov (2.9), en la que se utiliza la siguiente notación, para una variable real $z \in \mathbb{R}$ elevada a una potencia real $p \in \mathbb{R}$, $\lfloor z \rfloor^p = |z|^p \text{sign}(z)$, por ejemplo, $\lfloor z \rfloor^2 = |z|^2 \text{sign}(z) \neq z^2$. Si p es un número non, esta notación no cambia el significado de la ecuación, i.e., $\lfloor z \rfloor^p = z^p$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \lfloor z \rfloor^0 &= \text{sign}(z), \quad \lfloor z \rfloor^0 z^p = |z|^p, \quad \lfloor z \rfloor^0 |z|^p = \lfloor z \rfloor^p \\ \lfloor z \rfloor^p \lfloor z \rfloor^q &= |z|^p \text{sign}(z) |z|^q \text{sign}(z) = |z|^{p+q}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Una vez presentada la notación que se usará en los siguientes desarrollos, se presenta la función de Lyapunov utilizada, la cual es de la siguiente forma

$$\begin{aligned} V(x) = & p_1 |x_1|^{\frac{4}{3}} - p_{12} \lfloor x_1 \rfloor^{\frac{2}{3}} \left(x_2 + k_2 \lfloor x_1 \rfloor^{\frac{2}{3}} \right) \\ & + p_2 \left| x_2 + k_2 \lfloor x_1 \rfloor^{\frac{2}{3}} \right|^2 + p_{13} \lfloor x_1 \rfloor^{\frac{2}{3}} \lfloor x_3 \rfloor^2 \\ & - p_{23} \left(x_2 + k_2 \lfloor x_1 \rfloor^{\frac{2}{3}} \right) \lfloor x_3 \rfloor^2 + p_3 |x_3|^4, \end{aligned} \quad (2.9)$$

la función de Lyapunov anterior se puede expresar como una forma cuadrática con el vector $\Xi^T = \left[|x_1|^{\frac{2}{3}} \text{sign}(x_1) \quad \phi \quad |x_3|^2 \text{sign}(x_3) \right]$, en donde $\phi = x_2 + k_2 |x_1|^{\frac{2}{3}} \text{sign}(x_1)$, i.e.,

$$V(x) = \Xi^T P \Xi, \quad P = \begin{bmatrix} p_1 & -\frac{1}{2}p_{12} & \frac{1}{2}p_{13} \\ -\frac{1}{2}p_{12} & p_2 & -\frac{1}{2}p_{23} \\ \frac{1}{2}p_{13} & -\frac{1}{2}p_{23} & p_3 \end{bmatrix}.$$

Por otro lado, la derivada a lo largo de las trayectorias de la función de Lyapunov (2.9) es de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) = & q_1 \lfloor x_1 \rfloor^{\frac{1}{3}} x_2 - q_2 |x_1|^{-\frac{1}{3}} x_2^2 - 2k_1 p_2 |\phi|^{\frac{3}{2}} - p_{23} |x_3|^3 \\ & - q_3 |x_1|^{-\frac{1}{3}} x_2 \lfloor x_3 \rfloor^2 + k_1 p_{12} \lfloor x_1 \rfloor^{\frac{2}{3}} \lfloor \phi \rfloor^{\frac{1}{2}} - \bar{q}_4 \lfloor x_1 \rfloor^{\frac{2}{3}} x_3 \\ & + \bar{q}_5 x_3 \phi + p_{23} k_1 \lfloor \phi \rfloor^{\frac{1}{2}} \lfloor x_3 \rfloor^2 - \bar{q}_6 \lfloor x_3 \rfloor^3 \lfloor \phi \rfloor^0, \end{aligned} \quad (2.10)$$

en donde

$$\begin{aligned} q_1 &= \left(\frac{4p_1}{3} - \frac{4k_2 p_{12}}{3} + \frac{4p_2 k_2^2}{3} \right) \\ q_2 &= \left(\frac{2p_{12}}{3} - \frac{4p_2 k_2}{3} \right) \\ q_3 &= \left(\frac{2p_{23} k_2}{3} - \frac{2p_{13}}{3} \right) \\ \bar{q}_4 &= (p_{12} + 2p_{13} k_3 \lfloor \phi \rfloor^0 \lfloor x_3 \rfloor^0 - 2p_{13} \lfloor x_3 \rfloor^0 \rho) \\ \bar{q}_5 &= (p_{12} + 2p_{23} k_3 \lfloor \phi \rfloor^0 \lfloor x_3 \rfloor^0 - 2p_{23} \lfloor x_3 \rfloor^0 \rho) \\ \bar{q}_6 &= (4k_3 p_3 - 4p_3 \rho \lfloor \phi \rfloor^0), \end{aligned}$$

y cuando $\rho = 0$, se define

$$\begin{aligned} \bar{q}_4 &= (p_{12} + 2p_{13} k_3 \lfloor \phi \rfloor^0 \lfloor x_3 \rfloor^0) \\ \bar{q}_5 &= (p_{12} + 2p_{23} k_3 \lfloor \phi \rfloor^0 \lfloor x_3 \rfloor^0) \\ \bar{q}_6 &= (4k_3 p_3). \end{aligned}$$

Las condiciones con las cuales la función de Lyapunov (2.9) (positividad definida de $V(x)$ y negatividad definida de $\dot{V}(x)$) se presentan en el siguiente teorema (ver [9]).

Teorema 2.2 *Considerando la función de Lyapunov $V(x)$ dada por la ec. (2.9). $V(x)$ es positiva definida y radialmente no acotada si y solo si $P > 0$*

$$\begin{aligned} p_1 &> 0 \\ p_1 p_2 &> \frac{1}{4} p_{12}^2 \\ p_1 \left(p_2 p_3 - \frac{1}{4} p_{23}^2 \right) + \frac{p_{12}}{2} \left(-\frac{p_{12} p_3}{2} + \frac{p_{13} p_{23}}{4} \right) + \frac{p_{13}}{2} \left(\frac{p_{12} p_{23}}{4} - \frac{p_2 p_{13}}{2} \right) &> 0, \end{aligned} \quad (2.11)$$

$\dot{V}(x)$ dada por la ec. (2.10) es negativa definida para cada valor de la perturbación que satisface $\rho = 0$ si

$$\begin{aligned} p_1 + p_2 k_2^2 &> k_2 p_{12} \\ p_{12} &= 2 p_2 k_2 \\ p_{23} k_2 &= p_{13} \\ p_{12} &> 2 p_{13} k_3 \\ 2 p_2 &> 2 p_{23} k_3 \\ k_3 &> 0, \end{aligned} \quad (2.12)$$

y existen las variables $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ tal que

$$\begin{aligned} q_1 k_1 k_2 p_{12} - k_1 p_{12} - \sqrt{\frac{2^2 |q_4|^3}{3^3 (p_{23} - |q_6|)}} &> \alpha_1 > 0 \\ \vartheta(\alpha_1) &\geq \beta(\lambda_1, \alpha_1) \\ \frac{2 k_1^2 p_2 p_{23} - \alpha_2}{k_1^3 p - 23 p_{12}} &> \vartheta(\alpha_1) > 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} 2 k_1^2 p_2 p_3 &> \alpha_2 > 0 \\ \vartheta(\alpha_1) &\geq \max \{ \beta(\lambda_1, \alpha_2), \beta(\lambda_2, \alpha_2) \} \\ \frac{1}{(k_1 p_{12})^2} \left(p_{23} - |q_6| - \frac{2^2 |q_4|^3}{3^3 \left(q_1 k_2 - \frac{\alpha_1}{k_1 p_{12}} \right)^2} \right) &> \vartheta(\alpha_2) > 0, \end{aligned} \quad (2.14)$$

en donde $\lambda_1 = 2 p_2 + 2 p_{23} k_3$ y $\lambda_2 = 2 p_2 - 2 p_{23} k_3$. En este caso $V(x)$ satisface la desigualdad diferencial

$$\dot{V} \leq -\kappa V^{\frac{3}{4}},$$

para una constante positiva κ y es una función de Lyapunov para el sistema (2.7), cuyas trayectorias convergen en tiempo finito al origen $x = 0$ para cada valor de la perturbación

$\rho = 0$. El tiempo de convergencia de una trayectoria comenzando en la condición x_0 puede ser estimada como

$$T(x_0) \leq \frac{4}{\kappa} V^{\frac{1}{4}}(x_0).$$

La función $\beta(\alpha, \lambda)$ es una función real de la variable positiva $\alpha > 0$, definida como

$$\beta(\alpha, \lambda) = \begin{cases} \max(0, \beta_1(\alpha, \lambda)) & \text{si } \lambda \geq -\sqrt{3\alpha} \\ \max(0, \beta_2(\alpha, \lambda)) & \text{si } \lambda < -\sqrt{3\alpha} \end{cases}$$

en donde

$$\begin{aligned} \beta_1(\alpha) &= -\alpha r_1^3(\alpha) + \lambda r_1^2(\alpha) + r_1(\alpha) \\ \beta_2(\alpha) &= \alpha r_2^3(\alpha) - \lambda r_2^2(\alpha) + r_2(\alpha) \end{aligned}$$

con

$$r_1(\alpha) = \frac{\lambda + \sqrt{|\lambda|^2 + 3\alpha}}{3\alpha}, \quad r_2(\alpha) = \frac{\lambda - \sqrt{|\lambda|^2 + 3\alpha}}{3\alpha}$$

El Teorema 2.2 proporciona condiciones necesarias para la existencia de una función de Lyapunov para el sistema (2.7) cuando $\rho = 0$. Sin embargo, no es obvio que existan los parámetros $(k_1, k_2, k_3, p_1, p_2, p_3, p_{12}, p_{13}, p_{23}, \alpha_1 \text{ y } \alpha_2)$ para los cuales las condiciones presentadas en el Teorema 2.2 se satisfagan, es decir, que las desigualdades presentadas sean factibles. En [9] se presenta un corolario del Teorema 2.2 por medio del cual es posible afirmar que existen conjuntos de valores de los parámetros que satisfacen las condiciones del teorema en los casos en que $\rho = 0$ y $\rho \neq 0$.

Corolario 2.3 [9] *Suponiendo que el origen $x = 0$ del sistema (2.7) es estable con convergencia en tiempo finito para un conjunto de ganancias (k_1, k_2, k_3) y la ec. (2.9) es la función de Lyapunov, con un conjunto de parámetros $(p_1, p_2, p_3, p_{12}, p_{13}, p_{23})$ en el caso nominal. Entonces el origen $x = 0$ del sistema (2.7) se mantiene con estabilidad con convergencia en tiempo finito para el conjunto de ganancias $(l^3 k_1, l^2 k_2, l^6 k_3)$, así como $V(x)$ en la ec. (2.9) es una función de Lyapunov para el conjunto de parámetros $(l^{-8} p_1, l^{-12} p_2, l^{-24} p_3, l^{-10} p_{12}, l^{-16} p_{13}, l^{-18} p_{23})$, para el número real positivo l suficientemente grande tanto para el caso nominal como para el caso perturbado.*

El Teorema 2.2 junto con su corolario ofrecen un método de diseño para las ganancias (k_1, k_2, k_3) del control 2.5, y los parámetros $(p_1, p_2, p_3, p_{12}, p_{13}, p_{23})$ de la función de Lyapunov asociada, los cuales deben cumplir las condiciones establecidas en las ecs. (2.11) a (2.14), a las desigualdades (2.13) y (2.14) se les da una interpretación gráfica, en la que para que el conjunto de parámetros, estabilicen al sistema en tiempo finito, se debe de cumplir que el grafo de la función $\vartheta(\alpha_1)$ no quede por debajo del grafo de $\beta_1(\alpha_1, \lambda)$, a la vez que el grafo $\vartheta(\alpha_2)$ debe ser intersectado por los grafos de $\beta(\alpha_2, \lambda_1)$ y $\beta(\alpha_2, \lambda_2)$. De esta forma, se puede diseñar un conjunto de parámetros que estabilizan el sistema para el caso

nominal y posteriormente solo diseñar la variable de escalamiento l para el caso perturbado y comprobar que la interpretación gráfica de las condiciones (2.13) y (2.14) se mantenga.

La prueba al Teorema 2.2 y el Corolario 2.3 se encuentra desarrollada detalladamente en [9].

La principal ventaja del Algoritmo Super-Twisting de Tercer Orden, es que únicamente se requiere información de la salida (x_1) y su primera derivada ($\dot{x}_1$) para la estabilización en tiempo finito de las tres variables x_1 , x_2 y x_3 . Este controlador puede ser utilizado en sistemas perturbados con grado relativo dos con respecto a la salida. La principal idea de este algoritmo es la introducción de la integral de un término discontinuo que es capaz de reconstruir la perturbación y cancelarla. Si el sistema (2.6) se estabiliza en tiempo finito, implica que $f(x_1, x_2) = -L = \int_T^t -k_3 \text{sign}(x_2 + k_2 |x_1|^{\frac{2}{3}} \text{sign}(x_1)) dt$, en donde T es el tiempo de convergencia en que los estados llegan a cero, i.e., $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Por lo tanto el término discontinuo agregado es capaz de reconstruir las perturbaciones que afectan el sistema de segundo orden y cancelarlas. Se puede ver fácilmente que el controlador ec. (2.5) sin la variable extra L no es capaz de rechazar perturbaciones, pero sí es continuo. Al agregar la integral de una función discontinua, la señal de control sigue siendo continua pero además adquiere la propiedad de rechazo a perturbaciones acopladas. Sin embargo es necesario que las perturbaciones que afectan el sistema tengan primera derivada y sea acotada, sin importar si la perturbación es acotada o no. Muchos sistemas prácticos de segundo orden son afectados por esta clase de perturbaciones.

2.1.2. Control Integral Discontinuo

Teorema 2.4 [22] *El control definido por*

$$\begin{aligned} u &= -k_1 |x_1|^{\frac{1}{3}} \text{sign}(x_1) - k_2 |x_2|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(x_2) + z \\ \dot{z} &= -k_3 \text{sign}(x_1), \end{aligned} \quad (2.15)$$

estabiliza robustamente y en tiempo finito al origen del sistema (2.4) para toda perturbación $f(x_1, x_2, t)$ con derivada temporal acotada. i.e., $|\dot{f}(x_1, x_2, t)| \geq \Delta$ si las ganancias k_1 , k_2 y k_3 son diseñadas adecuadamente.

El sistema (2.4) en lazo cerrado con el controlador (2.15) tiene la forma

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -k_1 |x_1|^{\frac{1}{3}} \text{sign}(x_1) - k_2 |x_2|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(x_2) + z + f(x_1, x_2, t) \\ \dot{z} = -k_3 \text{sign}(x_1), \end{cases}$$

si se considera $x_3 = z + f(x_1, x_2, t)$, entonces

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -k_1 |x_1|^{\frac{1}{3}} \text{sign}(x_1) - k_2 |x_2|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(x_2) + x_3 \\ \dot{x}_3 = -k_3 \text{sign}(x_1) + \dot{f}(x_1, x_2, t). \end{cases} \quad (2.16)$$

El controlador (2.15) tiene las mismas propiedades que el Algoritmo Super-Twisting de Tercer Orden presentado en la subsección anterior. En [22] se demuestra la convergencia

a cero en tiempo finito del sistema en lazo cerrado (2.16), mediante la siguiente función de Lyapunov,

$$V(x) = \gamma_1 |x_1|^{\frac{4}{3}} + \gamma_2 |x_2|^2 + \gamma_3 |x_3|^4 + \gamma_{13} x_1 x_3 - \gamma_{23} x_2 |x_3|^2 \text{sign}(x_3). \quad (2.17)$$

La derivada de la función de Lyapunov (2.17), utilizando la notación introducida en la subsección anterior es,

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) = & \frac{4}{3} \gamma_1 |x_1|^{\frac{2}{3}} x_2 - 2\gamma_2 k_1 |x_1|^{\frac{1}{3}} x_2 - 2\gamma_2 k_2 |x_2|^{\frac{3}{2}} + 2\gamma_2 x_2 x_3 \\ & - 4\gamma_3 k_3 |x_1|^0 x_3^3 + \gamma_{13} x_3 x_2 - \gamma_{13} k_3 |x_1| + \gamma_{23} k_1 |x_1|^{\frac{1}{3}} |x_3|^2 \\ & + \gamma_{23} k_2 |x_2|^{\frac{1}{2}} |x_3|^2 - \gamma_{23} |x_3|^3 + 2\gamma_{23} k_3 |x_1|^0 x_2 |x_3|. \end{aligned}$$

Las condiciones que deben cumplirse para que la función de Lyapunov sea positiva definida globalmente y que su derivada sea negativa definida y que proveen estabilidad en tiempo finito del sistema (2.16) son las siguientes:

$$0 < \frac{3^3 \gamma_{13}^4 \gamma_2}{4^3 \gamma_1^3} < 4\gamma_2 \gamma_3 - \gamma_{23}^2, \quad (2.18)$$

$$0 < \phi(\alpha) < v(\alpha), \quad (2.19)$$

$$0 < \alpha < 2 \frac{\gamma_2}{\gamma_{23}} - \frac{1}{\gamma_{23} k_2} \sqrt{\frac{2 \cdot 4^2 |\gamma_2 k_1 - \frac{2}{3} \gamma_1|^3}{3^3 \gamma_{13} k_3}}, \quad (2.20)$$

en donde $v(\alpha)$ se define como

$$v(\alpha) \triangleq \frac{1}{\gamma_{23} k_2} (\gamma_{23} - 4\gamma_3 k_3 - \sqrt{\tau}),$$

con

$$\tau = \frac{2^2 \gamma_{23}^3 k_1^3 (2\gamma_2 k_2 - \gamma_{23} k_2 \alpha)^2}{3^3 \gamma_{13} k_3 (2\gamma_2 k_2 - \gamma_{23} k_2 \alpha)^2 - 2 \cdot 4^2 |\gamma_2 k_1 - \frac{2}{3} \gamma_1|^3},$$

y además

$$\phi(\alpha) \geq \psi(\alpha, \lambda), \quad (2.21)$$

en donde la función $\psi(\alpha, \lambda)$ está definida como

$$\psi(\alpha, \lambda) = \begin{cases} \psi_1(\alpha, \lambda) & \lambda \geq -\sqrt{3\alpha} \\ \max(0, \psi_2(\alpha, \lambda)) & \lambda < -\sqrt{3\alpha}, \end{cases} \quad (2.22)$$

donde

$$\psi_1 = -\alpha \left(\frac{\lambda + \sqrt{|\lambda|^2 + 3\alpha}}{3\alpha} \right)^3 + \lambda \left(\frac{\lambda + \sqrt{|\lambda|^2 + 3\alpha}}{3\alpha} \right)^2 + \left(\frac{\lambda + \sqrt{|\lambda|^2 + 3\alpha}}{3\alpha} \right), \quad (2.23)$$

$$\psi_2 = \alpha \left(\frac{\lambda - \sqrt{|\lambda|^2 - 3\alpha}}{3\alpha} \right)^3 - \lambda \left(\frac{\lambda - \sqrt{|\lambda|^2 - 3\alpha}}{3\alpha} \right)^2 + \left(\frac{\lambda - \sqrt{|\lambda|^2 - 3\alpha}}{3\alpha} \right), \quad (2.24)$$

y la variable λ se define como

$$\lambda = 2\gamma_2 + \gamma_{13} + 2\gamma_{23}k_3\text{sign}(x_1)\text{sign}(x_3),$$

dependiendo del valor de x_1 y x_3 , λ puede tomar dos valores diferentes, es decir

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 2\gamma_2 + \gamma_{13} + 2\gamma_{23}k_3 \\ \lambda_2 &= 2\gamma_2 + \gamma_{13} - 2\gamma_{23}k_3.\end{aligned}$$

2.1.2.1. Métodos de diseño de las ganancias

Caso Nominal

El diseño de las ganancias k_1 , k_2 y k_3 , que estabilizan el origen del sistema (2.16) cuando $f(x_1, x_2, t) = 0$, consiste en encontrar un conjunto de ganancias del controlador, k_1 , k_2 y k_3 , y parámetros γ_1 , γ_2 , γ_3 , γ_{13} y γ_{23} que están relacionados con la función de Lyapunov que se utiliza para demostrar la estabilidad del sistema en lazo cerrado. De la desigualdad (2.18) se obtiene

$$\gamma_3 > \frac{3^3\gamma_2\gamma_{13}^4}{4^4\gamma_1^3\gamma_2} + \frac{\gamma_{23}^2}{4\gamma_2},$$

sea η una variable positiva que cumple $\eta > 1$, entonces γ_3 se puede calcular como

$$\gamma_3 = \eta \left(\frac{3^3\gamma_2\gamma_{13}^4}{4^4\gamma_1^3\gamma_2} + \frac{\gamma_{23}^2}{4\gamma_2} \right). \quad (2.25)$$

A la ec. (2.19) se le puede dar una interpretación gráfica, en donde la curva de la función $\psi(\alpha, \lambda)$ que cumple $\psi(\alpha, \lambda) \leq \phi(\alpha)$, tiene que pasar por debajo de la curva de la función $v(\alpha)$, dentro del intervalo permitido para α , el cual está definido por (2.20), además γ_2 se calcula como

$$\gamma_2 = \frac{2\gamma_1}{3k_1}. \quad (2.26)$$

De esta forma, el método consiste en proponer $k_1, k_2, k_3 > 0$ y $\gamma_1, \gamma_{12}, \gamma_{13} > 0$, calcular γ_2 y γ_3 de acuerdo con las ecs. (2.25) y (2.26) y realizar la comprobación gráfica.

Caso Perturbado

Para el caso perturbado, las condiciones que deben cumplirse para el diseño de las ganancias k_1 , k_2 y k_3 que estabilizan el sistema (2.16) con $f(x_1, x_2, y) \neq 0$, que cumple $|\dot{f}(x_1, x_2, y)| \leq \Delta$; además de los parámetros que validan la función de Lyapunov que demuestra la estabilidad, son las siguientes

$$\Delta < k_3,$$

$$0 < \phi(\alpha) < v(\alpha), \quad (2.27)$$

$$0 < \alpha < 2\frac{\gamma_2}{\gamma_{23}} - \frac{1}{\gamma_{23}k_2} \sqrt{\frac{2 \cdot 4^2|\gamma_2k_1 - \frac{2}{3}\gamma_1|^3}{3^3\gamma_{13}(k_3 - \Delta)}},$$

en donde $v(\alpha)$ se define como

$$v(\alpha) \triangleq \frac{1}{\gamma_{23}k_2} \left(\gamma_{23} + 4\gamma_3(k_3 - \Delta) - \sqrt{\tau} \right),$$

con

$$\tau = \frac{2^2 \gamma_{23}^3 k_1^3 (2\gamma_2 k_2 - \gamma_{23} k_2 \alpha)^2}{3^3 \gamma_{13} (k_3 - \Delta) (2\gamma_2 k_2 - \gamma_{23} k_2 \alpha)^2 - 2 \cdot 4^2 |(\gamma_2 k_1 - \frac{2}{3} \gamma_1)|^3},$$

recordando que ϕ se define en las ecs. (2.21) a (2.24) y en este caso la variable λ se define como

$$\lambda = 2\gamma_2 + \gamma_{13} + 2\gamma_{23} k_3 \text{sign}(x_1) \text{sign}(x_3) + 2\gamma_{23} \text{sign}(x_3) \Delta,$$

dependiendo del valor de x_1 y x_3 , λ puede tomar cuatro valores diferentes, pero sólo se consideran el máximo y el mínimo.

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 2\gamma_2 + \gamma_{13} + 2\gamma_{23}(k_3 + \Delta), \\ \lambda_2 &= 2\gamma_2 + \gamma_{13} - 2\gamma_{23}(k_3 + \Delta), \end{aligned}$$

Por lo tanto el método consiste en proponer nuevamente las ganancias k_1 , k_2 , y k_3 , además de $\gamma_1, \gamma_{12}, \gamma_{13} > 0$, calcular γ_2 y γ_3 de acuerdo con las ecs. (2.25) y (2.26) y realizar la comprobación gráfica. Esto para cada Δ diferente de acuerdo con la perturbación que se esté tratando. El proceso de diseño descrito anteriormente resulta muy engorroso, por lo que en [22] se presenta una transformación aplicable a las ganancias k_1 , k_2 y k_3 y los parámetros de la función de Lyapunov utilizada para la prueba de estabilidad, la cual escala los parámetros, que siguen cumpliendo con las condiciones requeridas para estabilidad. De esta forma, sólo hay que diseñar el conjunto de parámetros para el caso nominal y si se requiere rediseñar las ganancias para el sistema perturbado sólo es necesario modificar un solo parámetro relacionado con la transformación aplicada, a continuación se presenta esta transformación.

Suponemos que el origen $x = 0$ es estable en tiempo finito para el sistema (2.16) con las ganancias (k_1, k_2, k_3) y los parámetros $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_{13}, \gamma_{23})$ que validan la función de Lyapunov del sistema en el caso nominal. Se aplica la siguiente transformación $(k_1, k_2, k_3) \rightarrow (Lk_1, L^{\frac{4}{3}}k_2, L^{\frac{3}{2}}k_3)$ y $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_{13}, \gamma_{23}) \rightarrow (L^{-1}\gamma_1, L^{-2}\gamma_2, L^{-5}\gamma_3, L^{-2}\gamma_{13}, L^{\frac{7}{2}}\gamma_{23})$, las desigualdades presentadas anteriormente para el caso nominal (ecs. (2.18) a (2.20)), a pesar del escalamiento de los parámetros se satisfacen. Por lo tanto el origen $x = 0$ es también estable en tiempo finito para el sistema ec. (2.16) con las ganancias $(Lk_1, L^{\frac{4}{3}}k_2, L^{\frac{3}{2}}k_3)$ y los parámetros $(L^{-1}\gamma_1, L^{-2}\gamma_2, L^{-5}\gamma_3, L^{-2}\gamma_{13}, L^{\frac{7}{2}}\gamma_{23})$ de la función de Lyapunov correspondiente, para cualquier número real positivo, $L > 0$, cuando $\Delta \neq 0$.

En [22] se demuestra que una vez que se ha obtenido un juego de parámetros para los cuales el origen del sistema en el caso nominal es estable, solo es necesario encontrar un $\bar{L}$ lo suficientemente grande que cumpla con la desigualdad (2.27) cuando se considera la cota de la derivada temporal de la perturbación Δ ; y entonces para toda $L > \bar{L}$ se demuestra la convergencia al origen de las trayectorias del sistema perturbado.

2.2. Observación por Modos Deslizantes

En los algoritmos de control por modos deslizantes presentados hasta ahora se requiere información de todo el estado del sistema, sin embargo, en general para sistemas mecánicos, se cuenta con sensores para medir solo la posición. Para resolver este problema existen los observadores, los cuales proporcionan una estimación de los estados del sistema.

Un observador es un algoritmo matemático el cual proporciona una estimación de las variables de estado de un sistema a partir de la medición de las salidas y entradas

del mismo. En esta sección se presentan algunos observadores por modos deslizantes, los cuales reatrealimentan el error de estimación de salida a través de un término no lineal (a diferencia de los observadores clásicos como el de Luenberger) y proveen la convergencia en tiempo finito del error de estimación a cero. Las características principales de un observador por modos deslizantes son

- Insensibilidad y robustez ante señales desconocidas.
- Ofrecen la posibilidad de inyectar la salida del sistema para obtener información adicional.

Los observadores por modos deslizantes de segundo orden han demostrado tener una gran exactitud para una gran gama de señales. En particular el algoritmo Super-Twisting es muy utilizado para observación, además su versión de tercer orden también puede ser utilizada.

2.2.1. Observador basado en Algoritmo Super-Twisting

Para un sistema de la forma

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = f(t, x_1, x_2, u) + \xi(t, x_1, x_2, y) \\ y = x_1, \end{cases} \quad (2.28)$$

en donde el término $f(t, x_1, x_2, u)$ es la parte nominal de la dinámica del sistema, mientras que las incertidumbres y perturbaciones son representadas por el término $\xi(t, x_1, x_2, u)$, y además, y es la salida del sistema. La estructura del observador basado en el Algoritmo Super-Twisting tiene la siguiente estructura

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_1 &= \hat{x}_2 + z_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 &= f(t, x_1, \hat{x}_2, u) + z_2, \end{aligned}$$

en donde $\hat{x}_1$ y $\hat{x}_2$ son los estados estimados mientras que z_1 y z_2 son términos de corrección definidos como

$$\begin{aligned} z_1 &= \lambda |x_1 - \hat{x}_1|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(x_1 - \hat{x}_1) \\ z_2 &= \alpha \text{sign}(x_1 - \hat{x}_1), \end{aligned} \quad (2.29)$$

definiendo los errores de observación $\tilde{x}_1 = x_1 - \hat{x}_1$ y $\tilde{x}_2 = x_2 - \hat{x}_2$, la dinámica del error queda como

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_1 &= \tilde{x}_2 - \lambda |\tilde{x}_1|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\tilde{x}_1) \\ \dot{\tilde{x}}_2 &= F(t, x_1, x_2, \hat{x}_2) - \alpha \text{sign}(\tilde{x}_1), \end{aligned}$$

en donde

$$F(t, x_1, x_2, \hat{x}_2) = f(t, x_1, x_2, u) - f(t, x_1, \hat{x}_2, u) + \xi(t, x_1, x_2, y),$$

Si suponemos que el sistema es acotado, entonces debe existir una constante f^+ tal que la desigualdad

$$|F(t, x_1, x_2, \hat{x}_2)| < f^+,$$

se mantenga para cualquier valor de t , x_1 , x_2 y $|\hat{x}_2| \leq 2\sup|x_2|$.

En [23], en donde se presenta este algoritmo de observación, recomiendan elegir los parámetros α y λ como

$$\begin{aligned}\alpha &= 1.1f^+ \\ \lambda &= 1.5\sqrt{f^+},\end{aligned}\tag{2.30}$$

Además recomiendan que si se trata de un sistema mecánico con aceleraciones acotadas, el término f^+ puede ser elegido como el doble de la aceleración máxima del sistema.

2.2.2. Observador basado en el Algoritmo Super-Twisting de Tercer Orden

El Algoritmo Super-Twisting de Tercer Orden también puede ser utilizado para observación, presentando la ventaja de que proporciona una estimación más precisa de los estados del sistema debido a que tiene un término adicional de corrección, el cual es la integral de un término discontinuo. Para el sistema (2.28) consideramos una copia del sistema de la siguiente forma

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_1 &= \hat{x}_2 + z_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 &= \hat{x}_3 + u + z_2 \\ \dot{\hat{x}}_3 &= z_3,\end{aligned}\tag{2.31}$$

en donde z_1 , z_2 y z_3 son términos de corrección definidos por el Algoritmo Super-Twisting de Tercer Orden:

$$\begin{aligned}z_1 &= k_1|e_1|^{\frac{2}{3}}\text{sign}(e_1) \\ z_2 &= k_2|e_1|^{\frac{1}{3}}\text{sign}(e_1) \\ z_3 &= k_3\text{sign}(e_1),\end{aligned}\tag{2.32}$$

en donde los errores de observación se definen como $e_1 = x_1 - \hat{x}_1$ y $e_2 = x_2 - \hat{x}_2$. Y por lo tanto la dinámica del error es

$$\begin{aligned}\dot{e}_1 &= e_2 - z_1 \\ \dot{e}_2 &= -\hat{x} - z_2 + \rho_1 \\ \dot{\hat{x}}_3 &= z_3,\end{aligned}$$

si se define la nueva variable $e_3 = -\hat{x}_3 + \rho_1$, si ρ_1 es tal que $|\dot{\rho}_1| < \rho_0$, la dinámica del error puede definirse como

$$\begin{aligned}\dot{e}_1 &= e_2 - z_1 \\ \dot{e}_2 &= e_3 - z_2 \\ \dot{e}_3 &= -z_3 + \dot{\rho}_1,\end{aligned}$$

de esta forma los errores de observación e_1 , e_2 y e_3 presentarán convergencia a cero en tiempo finito seleccionando las ganancias adecuadas k_1 , k_2 y k_3 (ver [12]).

2.2.3. Diferenciador Robusto y Exacto de Orden Arbitrario

Este algoritmo de diferenciación es una generalización del observador basado en Super-Twisting, el cual también puede ser utilizado para diferenciación, sin embargo tiene como ventajas que se puede implementar un diferenciador de alto orden para estimar varias derivadas de forma simultánea. Tiene la ventaja de que la primera derivada a estimar

2. PRELIMINARES

será muy limpia. Para el caso específico del sistema mecánico de interés, se calcularán las primeras cinco derivadas de las posiciones medidas, pero sólo se utilizará la primera, correspondiente a las velocidades del sistema y que serán sumamente limpias. A continuación se presenta este algoritmo de diferenciación.

Sea la función $f_0(t)$, en donde su k -ésima derivada es continua y acotada por $L > 0$, es posible estimar $\dot{f}_0(t), \ddot{f}_0(t), \dots, f_0^{(k)}(t)$ por medio del siguiente diferenciador

$$\begin{aligned} \dot{z}_0 &= \nu_0, & \nu_0 &= -\lambda_k L^{\frac{1}{k+1}} |z_0 - f_0(t)|^{\frac{k}{k+1}} \text{sign}(z_0 - f_0(t)) + z_1 \\ \dot{z}_1 &= \nu_1, & \nu_1 &= -\lambda_{k-1} L^{\frac{1}{k}} |z_1 - \nu_0|^{\frac{k-1}{k}} \text{sign}(z_1 - \nu_0) + z_2 \\ &\vdots \\ \dot{z}_{k-1} &= \nu_{k-1}, & \nu_{k-1} &= -\lambda_1 L^{\frac{1}{2}} |z_{k-1} - \nu_{k-2}|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(z_{k-1} - \nu_{k-2}) + z_k \\ \dot{z}_k &= -\lambda_0 L \text{sign}(z_k - \nu_{k-1}). \end{aligned}$$

Si los parámetros $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k > 0$ se eligen adecuadamente, las siguientes igualdades se satisfacen después de un transitorio de tiempo finito

$$z_0 = f_0(t), \dots, z_i = \nu_{i-1} = f_0^{i-1}(t), i = 1, 2, \dots, k$$

Este diferenciador tiene una estructura recursiva y una vez que las constantes $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}$ son adecuadamente elegidas para el diferenciador de $(k-1)$ -ésimo orden para la constante L , solamente es necesario sintonizar el parámetros λ_k para el diferenciador de orden k con el mismo parámetro L .

Una posible elección de los parámetros del diferenciador para $k \leq 5$ es $\lambda_0 = 1.1, \lambda_1 = 1.5, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 5, \lambda_4 = 8, \lambda_5 = 12$. Otra posible elección es $\lambda_0 = 1.1, \lambda_1 = 1.5, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3, \lambda_4 = 5, \lambda_5 = 8$.

Descripción de la Planta y Modelo Matemático

En la figura 3.1 se muestra el helicóptero de tres grados de libertad sobre el que se realizarán las pruebas experimentales. El helicóptero es de la compañía Quanser, y es un sistema subactuado ya que sólo tiene dos actuadores, que son los propulsores, mientras que tiene tres grados de libertad. La posición del helicóptero está compuesta por el ángulo de elevación, el ángulo de *pitch* y el ángulo de *travel*.

El helicóptero consiste en una base sobre la cual está montado un brazo, éste soporta en uno de sus extremos el cuerpo del helicóptero, compuesto por dos propulsores que se impulsan por medio de motores de corriente directa, mientras que en el otro extremo del brazo se tiene un contrapeso, el cual reduce la potencia requerida por los motores para mantener el helicóptero en vuelo, al reducir el peso efectivo del cuerpo del helicóptero a solo 70 gramos en la posición horizontal, pero sin afectar la inercia del sistema. Las tres partes (la base, el brazo y el cuerpo del helicóptero) están acopladas por medio de tres articulaciones, resultando en los siguientes tres grados de libertad: el ángulo de elevación, ε , el cual es definido como el movimiento del cuerpo del helicóptero, que corresponde al desplazamiento angular del brazo con respecto al eje horizontal mostrado en la figura 3.2; el ángulo de *pitch*, θ , que es la inclinación del cuerpo del helicóptero con respecto al eje de *pitch*; y el ángulo de *travel*, ψ , el cual es el desplazamiento de todo el sistema alrededor del eje de la base.

Si los propulsores giran en el mismo sentido y con la misma magnitud actúan directamente sobre la elevación del sistema, mientras que si hay una diferencia en la magnitud y/o en el sentido de giro de los propulsores, hay una componente de la fuerza de los propulsores que empuja el cuerpo del helicóptero hacia abajo o hacia arriba, y una segunda componente que empuja lateralmente todo el brazo del helicóptero produciendo un movimiento alrededor del eje de *travel*.

Sensores y actuadores

Como ya se mencionó anteriormente, los actuadores del sistema son los dos propulsores, compuestos por motores de corriente directa y hélices acopladas a sus ejes. Todo el propulsor tiene una constante que relaciona el voltaje aplicado a los motores y la fuerza de empuje que produce el propulsor, por lo que la dinámica de los motores puede ser despreciada. Los motores tienen una resistencia de armadura de $0.83 [\Omega]$ y una constante de par-corriente de $0.0182 [\frac{\text{N}\cdot\text{m}}{\text{A}}]$. La tensión nominal de los motores es de $12 [\text{V}]$ aunque puede soportar tensiones hasta los $22 [\text{V}]$, tanto positivos como negativos. Cuando se aplica una tensión positiva a los motores la fuerza de empuje de los propulsores es hacia arriba,

mientras que una tensión negativa produce una fuerza de empuje hacia abajo.

La planta cuenta con tres codificadores incrementales en cuadratura para medir la posición del helicóptero, uno para cada grado de libertad. El primero mide la inclinación del cuerpo del helicóptero (ángulo de elevación), el segundo mide la rotación de todo el helicóptero sobre el eje vertical de la figura 3.2 (ángulo de *travel*) y el último mide la inclinación de la estructura que sostiene los propulsores (ángulo de *pitch*). Los primeros dos tienen resolución de 4096 cuentas por revolución y el tercero tiene una resolución de 8192 cuentas por revolución, con lo cual se tiene una precisión de 0.0879 y 0.0493 grados por cada cuenta.

3.1. Obtención del modelo

Antes de comenzar con el modelado de la planta, se introduce la notación que se usará, el nombre de cada uno de las variables y parámetros del sistema que se utilizarán a lo largo del desarrollo del modelo matemático del helicóptero de tres grados de libertad, esta información se encuentra en la tabla 3.1.

Hay que mencionar que para el modelo que se pretende realizar se asumieron las siguientes cuestiones:

- Los ejes de elevación y *travel* son perpendiculares.
- Todos los ejes se intersecan en el mismo punto.
- El cuerpo del helicóptero y el centro de masa del contrapeso son colineales.
- La fricción de las articulaciones, la resistencia del aire y las fuerzas centrífugas son despreciadas.
- Las fuerzas generadas por los propulsores son proporcionales a las tensiones aplicadas a los motores, es decir,

$$\begin{bmatrix} F_f \\ F_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_f u_f \\ K_f u_b \end{bmatrix}, \quad (3.1)$$

en donde u_f y u_b son tensiones y son las señales de control aplicadas a cada uno de los motores de los propulsores del helicóptero.

El modelo que se obtendrá a continuación se basa en la segunda ley de Newton para los momentos angulares presentes en cada uno de los grados de libertad del helicóptero. A continuación el desarrollo de forma detallada, primero se trata la dinámica del ángulo de elevación y posteriormente las dinámicas de los ángulos de *pitch* y *travel*, finalmente se presenta el modelo en conjunto y se linealiza en torno al origen.

3. DESCRIPCIÓN DE LA PLANTA Y MODELO MATEMÁTICO

Descripción de la variable o parámetro	Símbolo
Fuerzas de empuje de los motores <i>front</i> y <i>back</i>	F_f, F_b
Ángulo de elevación	ε
Ángulo de <i>pitch</i>	θ
Ángulo de <i>travel</i>	ψ
Velocidad angular de elevación	$\dot{\varepsilon}$
Velocidad angular de <i>pitch</i>	$\dot{\theta}$
Velocidad angular de <i>travel</i>	$\dot{\psi}$
Entradas de control de los propulsores	u_f, u_b
Momento de inercia sobre el eje <i>pitch</i>	J_θ
Momento de inercia sobre el eje <i>travel</i>	J_ψ
Momento de inercia sobre el eje elevación	J_ε
Constante de vuelo del helicóptero	K_p
Constante de conversión del propulsor de tensión a fuerza	K_f
Distancia entre el eje <i>travel</i> y el cuerpo del helicóptero	L_a
Distancia entre el eje <i>pitch</i> y cada uno de los propulsores	l_h
Longitud de efecto de péndulo del eje <i>elevación</i>	l_ε
Longitud de efecto de péndulo del eje <i>pitch</i>	l_θ
Masa de toda la estructura	M
Masa del cuerpo del helicóptero	m
Constante gravitacional	g

Tabla 3.1: Variables y parámetros del helicóptero de tres grados de libertad

3.1.1. Dinámica del ángulo de elevación

El ángulo de elevación se mide con respecto al eje del mismo nombre, el cual es un eje horizontal que cruza la base que soporta el brazo y rota junto con todo el sistema. En la figura 3.3 se muestra un diagrama de cuerpo libre muy simple por medio del cual se puede establecer la dinámica de elevación. Se considera el movimiento hacia arriba del cuerpo del helicóptero como el sentido positivo. La suma de las fuerzas de empuje de los propulsores ejercen un momento hacia arriba, esto para el caso en el que el ángulo de *pitch* es cero, sin embargo si el cuerpo del helicóptero está inclinado, el efecto de la fuerza de los propulsores es debido a la componente vertical de la misma, es decir, se ve afectada por el coseno del ángulo de *pitch*. Por otro lado hay otro momento que se opone a este movimiento, el cual es debido a un efecto de péndulo que presenta el movimiento de elevación del brazo del helicóptero con respecto a su centro de masa, sobre el eje de *pitch*, también está presente la oposición al movimiento del brazo debido a su inercia; por lo tanto la dinámica de este ángulo queda como

$$J_\varepsilon \ddot{\varepsilon} = -Mgl_\varepsilon \cos(\varepsilon) + (F_f + F_b)L_a \cos(\theta), \quad (3.2)$$

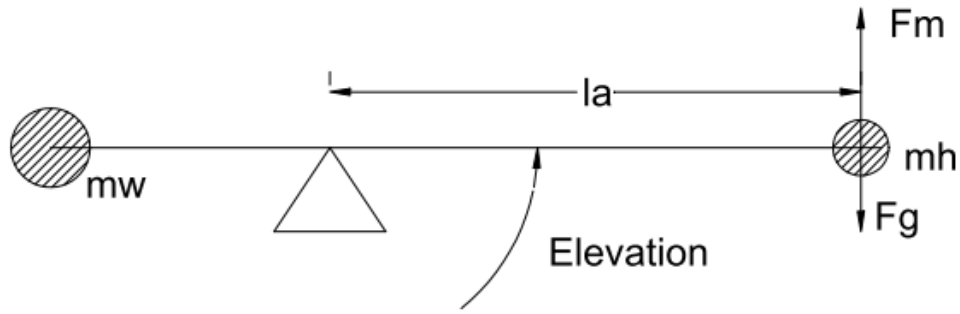


Figura 3.3: Elevación, diagrama de cuerpo libre

3.1.2. Dinámica del ángulo *pitch*

En la figura 3.4 se muestra una diagrama de cuerpo libre sencillo del cuerpo del helicóptero, además de una foto del mismo. Este grado de libertad es actuado directamente por la diferencia de las fuerzas de empuje de los propulsores. Si el propulsor izquierdo (front) produce una fuerza mayor que el propulsor derecho (back), las componentes de la fuerza de empuje resultante producen un cambio positivo en el ángulo de *pitch*, a este movimiento se opone la inercia del sistema, además de un efecto de péndulo que también se mide con respecto al eje apropiado; resultando en la siguiente ecuación diferencial

$$J_{\theta}\ddot{\theta} = -mgl_{\theta}\sin(\theta) + L_h(F_f - F_b), \quad (3.3)$$

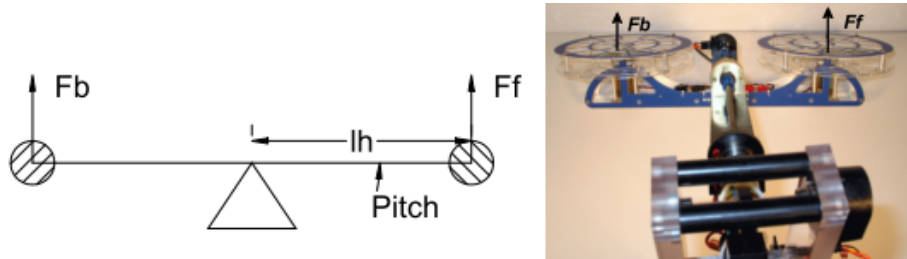


Figura 3.4: *Pitch*, diagrama de cuerpo libre

3.1.3. Dinámica del ángulo *travel*

La dinámica de *travel* no está actuada directamente, sino que depende del ángulo de *pitch*, es decir, el sistema es subactuado. En la figura 3.5 se muestra un diagrama de cuerpo libre del helicóptero del cual se observa que la diferencia entre las fuerzas de empuje de los motores, que produce un *pitch*, tiene un componente horizontal que empuja el cuerpo del helicóptero de forma lateral, a este momento se opone la inercia del sistema, por lo que se obtiene la siguiente ecuación diferencial

$$J_{\psi}\ddot{\psi} = K_p L_a \sin(\theta), \quad (3.4)$$

en la ec. (3.4) el término K_p es denominada constante de vuelo (ver tabla 3.1) y es la fuerza que deben de producir los propulsores para mantener el cuerpo del helicóptero a flote. Esta fuerza es proyectada horizontalmente al multiplicarla por el seno del ángulo

$pitch$ y al multiplicarla por la distancia L_a se tiene el momento que mueve el brazo de forma lateral.

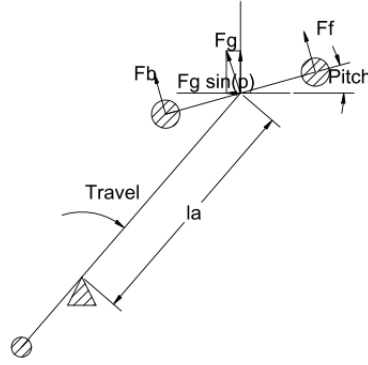


Figura 3.5: *Travel*, diagrama de cuerpo libre

Efecto de péndulo

Cuando los propulsores giran alrededor del eje de $pitch$, el centro de masa del cuerpo del helicóptero se desplaza describiendo un movimiento similar al de un péndulo, lo cual resulta en un par que se opone a la acción de la fuerza de empuje producida por los propulsores. Para calcular el desplazamiento del centro de masa, que puede denotarse como la longitud del efecto de péndulo l_θ , se utiliza la ecuación que describe la dinámica de un péndulo simple, es decir,

$$J_\theta \ddot{\theta} - mgl_\theta \sin(\theta) = 0, \quad (3.5)$$

linealizando la ec. (3.5) para variaciones pequeñas en torno al origen, se obtiene

$$J_\theta \ddot{\theta} + mgl_\theta \theta = 0, \quad (3.6)$$

y dividiendo entre J_θ , la ec. (3.6) queda como

$$\ddot{\theta} + \frac{gl_\theta}{l_h^2} \theta = 0,$$

de donde es posible determinar la frecuencia natural de oscilación como

$$\omega_n = \frac{\sqrt{gl_\theta}}{l_h}. \quad (3.7)$$

Mediante simulaciones o pruebas experimentales se puede determinar el valor del periodo de la oscilación y considerando que $T = \frac{2\pi}{\omega_n}$, es posible determinar ω_n y con este valor y la ec. (3.7) calcular el valor de l_θ .

Para el efecto de péndulo presente en la dinámica del *travel* se puede utilizar un procedimiento similar para determinar el desplazamiento (l_ε) del centro de masa del brazo. Para las simulaciones realizadas posteriormente, los valores de l_θ y l_ε son tomados de [7].

3.1.4. Modelo completo

Juntando las ecs. (3.2) a (3.4) se tiene el modelo completo del helicóptero

$$\begin{aligned} J_\varepsilon \ddot{\varepsilon} &= -Mgl_\varepsilon \cos(\varepsilon) + (F_f + F_b)L_a \cos(\theta) \\ J_\theta \ddot{\theta} &= -mgl_\theta \sin(\theta) + L_h(F_f - F_b) \\ J_\psi \ddot{\psi} &= K_p L_a \sin(\theta), \end{aligned}$$

si se introduce la constante de conversión de las fuerzas de los propulsores a las señales de tensión (ec. (3.1)), que serán las variables de control a diseñar, y considerando que la señal de control que actúa en el ángulo de elevación es $u_s = u_f + u_b$, mientras que $u_d = u_f - u_b$ controla el ángulo de *pitch*, se obtiene el siguiente modelo

$$\begin{aligned} J_\varepsilon \ddot{\varepsilon} &= -Mgl_\varepsilon \cos(\varepsilon) + K_f L_a u_s \cos(\theta) + \delta_1 \\ J_\theta \ddot{\theta} &= -mgl_\theta \sin(\theta) + K_f L_h u_d + \delta_2 \\ J_\psi \ddot{\psi} &= K_p L_a \sin(\theta). \end{aligned} \quad (3.8)$$

En el conjunto de ecuaciones (3.8) se puede apreciar más claramente que el sistema a controlar es subactuado, puesto que las dos señales de control disponibles u_s y u_d , actúan en la dinámica de los ángulos de elevación y *pitch*, respectivamente. Si se requiere actuar la dinámica del ángulo *travel* es necesario producir un ángulo de *pitch* que genere una fuerza lateral que empuje el cuerpo del helicóptero. Es claro que si $\theta = 0$, no puede haber desplazamiento alrededor de la base de la planta. También se puede observar que el ángulo de *pitch* tiene influencia tanto en la elevación como en el *travel*.

Debido a restricciones físicas del sistema se deben tomar las siguientes consideraciones:

- El ángulo *pitch* θ_1 está restringido a $-45^\circ < \theta < 45^\circ$.
- El ángulo de elevación ε_1 está restringido a $-27.5^\circ < \varepsilon < 30^\circ$.

Modelo en variables de estado

Se define el vector de estados de la siguiente forma

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \dot{\varepsilon} \\ \theta \\ \dot{\theta} \\ \psi \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

combinando las ecs. (3.8) y (3.9) e introduciendo los términos δ_1 y δ_2 que engloban incertidumbres en el modelo, dinámicas no consideradas y perturbaciones, el modelo en variables de estado queda como

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_1 &= \varepsilon_2 \\ \dot{\varepsilon}_2 &= -\frac{Mgl_\varepsilon}{J_\varepsilon} \cos(\varepsilon_1) + \frac{K_f L_a}{J_\varepsilon} u_s \cos(\theta_1) + \delta_1 \\ \dot{\theta}_1 &= \theta_2 \\ \dot{\theta}_2 &= -\frac{mgl_\theta}{J_\theta} \sin(\theta_1) + \frac{K_f L_h}{J_\theta} u_d + \delta_2 \\ \dot{\psi}_1 &= \psi_2 \\ \dot{\psi}_2 &= \frac{K_p L_a}{J_\psi} \sin(\theta_1) \end{aligned} \quad (3.10)$$

3.1.5. Parámetros del sistema

En la tabla 3.2, se presentan los valores de los parámetros del sistema que serán utilizados para las simulaciones que se realizarán en el siguiente capítulo.

Descripción del parámetro	Símbolo	Valor	Unidades
Momento de inercia sobre el eje <i>pitch</i>	J_θ	0.0364	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$
Momento de inercia sobre el eje <i>travel</i>	J_ψ	0.91	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$
Momento de inercia sobre el eje de elevación	J_ϵ	0.91	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$
Constante de vuelo del helicóptero	K_p	0.686	N
Constante de conversión del propulsor de volt a newton	K_f	0.1188	$\frac{\text{N}}{\text{V}}$
Distancia entre el eje <i>travel</i> y el cuerpo del helicóptero	L_a	0.66	m
Distancia entre el eje <i>pitch</i> y cada uno de los propulsores	l_h	0.178	m
Longitud de efecto de péndulo del eje <i>elevación</i>	l_ϵ	0.014	m
Longitud de efecto de péndulo del eje <i>pitch</i>	l_θ	0.004	m
Masa de toda la estructura	M	3.57	Kg
Masa del cuerpo del helicóptero	m	1.15	Kg
Constante gravitacional	g	9.81	$\frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{s}^2}$

Tabla 3.2: Valor de los parámetros del helicóptero de tres grados de libertad - Estos son los valores de parámetros utilizados en el diseño y las simulaciones, corresponden a los valores reales.

3.2. Linealización del sistema

El modelo matemático que se obtuvo en la sección anterior es un modelo no lineal, que se puede expresar de forma general como

$$\begin{aligned}\dot{x}_n(t) &= f(x(t), u(t)) \\ y &= h(x(t), u(t)),\end{aligned}$$

que son ecuaciones matriciales, en donde x es el vector de estados y y el vector de salidas, $f(x(t), u(t))$ y $h(x(t), u(t))$ son funciones no lineales y n es el orden del sistema. Para el diseño de los controladores es conveniente trabajar con un sistema lineal puesto que de la comparación entre este modelo y el no lineal se determinarán las perturbaciones. El método de linealización presentado a continuación se basa en la expansión del sistema (3.10) en serie de Taylor alrededor de un punto de equilibrio, el cual se define como un punto (X, U) en el espacio de estados en donde la dinámica del sistema no cambia, es decir, $\dot{\mathbf{x}} = 0$.

Para la linealización de un sistema, se supone que este se encuentra operando en torno a un punto de equilibrio en una región pequeña, por lo que tanto los estados como la señal de control presentan una variación pequeña, es decir,

$$\begin{aligned}x(t) &= X + x_\delta(t) \\ u(t) &= U + u_\delta(t),\end{aligned}$$

en donde X y U denotan valores constantes de los estados y del control, en el punto de equilibrio, respectivamente. Mientras que $x_\delta(t)$ y $u_\delta(t)$ representan variaciones pequeñas

en los estados y en el control.

La expansión en serie de Taylor para las funciones $f(x(t), u(t))$ y $h(x(t), u(t))$ es la siguiente

$$\begin{aligned} f(X + x_\delta(t), U + u_\delta(t)) &= f(X, U) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(X, U)} x_\delta(t) + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{(X, U)} u_\delta(t) + \dots + TOS \\ h(X + x_\delta(t), U + u_\delta(t)) &= f(X, U) + \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{(X, U)} x_\delta(t) + \left. \frac{\partial h}{\partial u} \right|_{(X, U)} u_\delta(t) + \dots + TOS, \end{aligned}$$

en donde TOS significa términos de orden superior, los cuales son despreciados debido a que si el sistema opera en una vecindad cercana a un punto de equilibrio, estos términos son muy pequeños y no causan variaciones significativas en el modelo. Considerando que por la definición de punto de equilibrio $f(X, U) = 0$, el modelo linealizado tiene la siguiente forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du, \end{aligned}$$

en donde

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(X, U)} \quad B = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{(X, U)} \quad C = \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{(X, U)} \quad D = \left. \frac{\partial h}{\partial u} \right|_{(X, U)},$$

Linealización del modelo del helicóptero

Considerando el modelo en variables de estado no lineal (3.10) sin los términos de perturbación, de acuerdo con la definición de punto de equilibrio, i.e., $f(x, t) = 0$, se tiene

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 &= 0 \\ -\frac{Mgl_\varepsilon}{J_\varepsilon} \cos(\varepsilon_1) + \frac{K_f L_a}{J_\varepsilon} u_s \cos(\theta_1) &= 0 \\ \theta_2 &= 0 \\ -\frac{mgl_\theta}{J_\theta} \sin(\theta_1) + \frac{K_f L_h}{J_\theta} u_d &= 0 \\ \psi_2 &= 0 \\ \frac{K_p L_a}{J_\psi} \sin(\theta_1) &= 0, \end{aligned}$$

resolviendo el sistema de ecuaciones anterior se obtiene

$$X = [\varepsilon_1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \psi_1 \quad 0]^T; \quad U = \left[\frac{Mgl_\varepsilon}{K_f L_a} \cos(\varepsilon_1) \quad 0 \right]^T,$$

lo cual indica que se tiene una familia de puntos de equilibrio, sin embargo se elige el origen del espacio de estados como el punto de equilibrio de interés, físicamente implica que el helicóptero se estabilice de forma horizontal en la posición del ángulo de *travel* en la cual se inicie algún experimento, esto debido a que los codificadores incrementales se calibran

3. DESCRIPCIÓN DE LA PLANTA Y MODELO MATEMÁTICO

en cero en la posición que se encuentra el sistema al iniciar el experimento; considerando lo anterior se obtiene

$$X = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T; \quad U = \left[\frac{Mgl_\varepsilon}{K_f L_a} \ 0 \right]^T.$$

Una vez que se tiene el punto de equilibrio se determinan las matrices A , B , C y D del modelo lineal, tomando en cuenta que las salidas de interés son las posiciones angulares, obteniendo finalmente

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) = & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-mgl_\theta}{J_\theta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{K_p L_a}{J_\psi} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(\mathbf{t}) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{K_f L_a}{J_\varepsilon} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{K_f L_h}{J_\theta} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}(\mathbf{t}) + \begin{bmatrix} 0 \\ \delta_1 \\ 0 \\ \delta_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{y}(\mathbf{t}) = & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(\mathbf{t}), \end{aligned} \quad (3.11)$$

en donde el vector de estados es $\mathbf{x}(\mathbf{t}) = [\varepsilon \ \dot{\varepsilon} \ \theta \ \dot{\theta} \ \psi \ \dot{\psi}]^T = [\varepsilon_1 \ \varepsilon_2 \ \theta_1 \ \theta_2 \ \psi_1 \ \psi_2]^T$, que es la información mínima para que en cualquier instante t sea posible determinar el estado del sistema. Además $\mathbf{u}(\mathbf{t}) = [u_s \ u_d]^T$ es el vector de señales de control.

3.2.1. Controlabilidad

Antes de proceder al diseño del esquema de control que se implementará, hay que comprobar que el sistema que se ha analizado hasta este punto sea controlable. Se dice que un sistema es controlable en el tiempo t_0 si se puede llevar de cualquier estado inicial $x(t_0)$ a cualquier otro estado mediante un control sin restricciones, en un intervalo finito de tiempo [17].

Para sistemas lineales, la controlabilidad depende de las matrices A y B . Para que un sistema sea controlable, es condición necesaria y suficiente que la matriz de controlabilidad $\mathcal{C}$, sea de rango completo. Esta matriz se define como

$$\mathcal{C} = [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B] \quad (3.12)$$

La matriz de controlabilidad $\mathcal{C}$ para el sistema (3.11) es de rango completo, es decir, de rango 6 (ver Apéndice B). Con lo anterior se puede concluir que el sistema es controlable en torno al origen del sistema. Para su cálculo se sustituyeron los valores de los parámetros de la tabla 3.2 y se evaluó el rango con el software Matlab.

Diseño del Esquema de Control

En este capítulo se presenta el diseño del esquema de control propuesto. Para esto el helicóptero se divide en dos subsistemas, el primero comprende la dinámica del ángulo de elevación, mientras que el segundo contempla las dinámicas de *pitch* y *travel*. Se realiza este desacople por las características del modelo obtenido, el subsistema de elevación está desacoplado del resto del sistema puesto que la entrada de control u_s actúa solo en este estado. Por otro lado para el control de los ángulos de *pitch* y *travel*, se cuenta con la señal de control u_d que actúa sobre el *pitch* y por medio de este se logra la regulación del *travel*. Se diseñarán dos controladores por modos deslizantes de tercer orden (los presentados en el Capítulo 2) para los ángulos de elevación y *pitch*, éste último sigue una referencia generada por un algoritmo PD y funciona como control virtual para el ángulo de *travel*. También en este capítulo se presenta el diseño de algunos observadores por modos deslizantes para estimar las velocidades del helicóptero y tener todo el estado disponible para el funcionamiento de los controladores.

Objetivo de control

Se quiere hacer regulación de los ángulos de elevación y de *travel*, a diferentes puntos de operación. El ángulo de *pitch* es utilizado como un control virtual sobre el *travel* para poder realizar la regulación.

4.1. Control de la dinámica del ángulo de elevación

La dinámica del ángulo de elevación fue obtenida en el Capítulo 3 y está descrita por la siguiente ecuación en espacio de estados

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_1 &= \varepsilon_2 \\ \dot{\varepsilon}_2 &= -a \cos(\varepsilon_1) + bu_s \cos(\theta_1) \\ a &= \frac{Mgl_\varepsilon}{J_\varepsilon} \quad b = \frac{K_f L_a}{J_\varepsilon},\end{aligned}\tag{4.1}$$

La versión lineal del modelo en espacio de estados para la dinámica del ángulo de elevación y que es válido para pequeñas variaciones de elevación es el siguiente

$$\begin{bmatrix} \dot{\varepsilon}_1 \\ \dot{\varepsilon}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} u_s + \begin{bmatrix} 0 \\ \delta_1 \end{bmatrix},$$

4. DISEÑO DEL ESQUEMA DE CONTROL

que también puede expresarse como

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_1 &= \varepsilon_2 \\ \dot{\varepsilon}_2 &= bu_s + \delta_1.\end{aligned}\tag{4.2}$$

Al comparar el modelo (??) con (4.1) se toma como perturbación la parte no lineal, es decir, $\delta_1 = -a \cos(\varepsilon_1)$. Además, para poder aplicar de forma más sencilla los controladores se elige $u_s = \frac{1}{b}u_1$, lo que resulta en

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_1 &= \varepsilon_2 \\ \dot{\varepsilon}_2 &= u_1 + \delta_1.\end{aligned}$$

El sistema anterior es muy similar al que se utilizó en el Capítulo 2 para presentar los controladores que se utilizarán, por lo que sobre este se diseñará el esquema de control.

Puesto que el objetivo de control para este subsistema es regular la elevación hacia diferentes puntos de equilibrio, se definen las siguientes señales de error

$$\begin{aligned}e_{\varepsilon_1} &= \varepsilon_1 - \varepsilon_{1d} \\ e_{\varepsilon_2} &= \varepsilon_2,\end{aligned}\tag{4.3}$$

en donde ε_{1d} es la elevación deseada, es importante mencionar que debido a que se regula a puntos de equilibrio, es decir, valores constantes de las posiciones angulares, el error de velocidad sólo toma en cuenta la velocidad angular de la elevación pues la velocidad angular deseada es cero ya que se trata de la derivada de una constante.

Expresando la dinámica de los errores definidos en (4.3) se tiene

$$\begin{aligned}\dot{e}_{\varepsilon_1} &= e_{\varepsilon_2} \\ \dot{e}_{\varepsilon_2} &= u_1 + \delta_1,\end{aligned}\tag{4.4}$$

Los controladores que se implementarán en la sección siguiente se aplicarán al sistema de errores (4.4), con lo cual los errores de regulación serán llevados a cero en tiempo finito y por lo tanto el sistema llegará a la posición deseada de elevación también en tiempo finito. Para el correcto diseño de las ganancias de los controladores será necesario conocer la cota de la derivada de la perturbación Δ_1 , que para el diseño se considerará la parte no lineal del modelo 4.1, es decir,

$$\delta_1 = -a \cos(\varepsilon_1),$$

la cota requerida se calcula como

$$\Delta_1 = |\dot{\delta}_{1max}| = |max \{a \sin(\varepsilon_1) \varepsilon_2\}|,$$

en donde a es un parámetro constante y conocido de aceleración ($a = \frac{Mgl_\varepsilon}{J_\varepsilon} = 0.5388 \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \right]$) y el valor máximo que puede tomar el término $\sin(\varepsilon_1)$ es la unidad, por lo tanto

$$\Delta_1 = |\dot{\delta}_{1max}| = |a \varepsilon_{2max}|.$$

Para determinar el valor de la velocidad máxima de elevación ε_{2max} , se realizó una simulación del modelo no lineal del helicóptero con un controlador PID y la respuesta

al escalón del valor máximo del ángulo de elevación posible, de donde se extrajo el valor máximo de la velocidad, resultando que $\varepsilon_{2_{max}} = 0.83 \left[\frac{\text{rad}}{s} \right]$. Ya que se obtuvo esta información, se evaluó el valor de Δ_1 :

$$\Delta_1 = 0.4472 \left[\frac{\text{rad}}{s^3} \right] \quad (4.5)$$

Una vez que se conoce el valor de Δ_1 es posible implementar los controladores presentados en el Capítulo 2.

4.1.1. Implementación del Algoritmo Super-Twisting de Tercer Orden

Para la implementación de este algoritmo de control se utilizan las señales de error definidas en la ec. (4.3), y la ley de control dada por la ec. (2.5), que se presentó en el Capítulo 2, por lo que el control tiene la siguiente estructura

$$\begin{aligned} u_1 &= k_{\varepsilon_1} |\phi_\varepsilon|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\phi_\varepsilon) + L_\varepsilon \\ \dot{L}_\varepsilon &= -k_{\varepsilon_3} \text{sign}(\phi_\varepsilon) \\ \phi_\varepsilon &= e_{\varepsilon_1} + k_{\varepsilon_2} |e_{\varepsilon_2}|^{\frac{2}{3}} \text{sign}(e_{\varepsilon_1}), \end{aligned} \quad (4.6)$$

en donde k_{ε_1} , k_{ε_2} y k_{ε_3} son ganancias a diseñar mediante los métodos presentados en el Capítulo 2.

Al aplicar el método de diseño de las ganancias y parámetros propuesto en [9], sucede que es muy difícil encontrar un conjunto de ganancias y parámetros que satisfagan todas las condiciones necesarias para la prueba de estabilidad, esto debido a que se deben satisfacer doce desigualdades no lineales y aunque se utilizaron los métodos presentados en [9] no fue posible encontrar el conjunto de parámetros que validaran la demostración de estabilidad, por lo que simplemente se eligieron ganancias con las que se tuvo un buen desempeño en simulación y que cumplieran con $k_{\varepsilon_3} > \Delta_1$. Esto se justifica en base a que la demostración de estabilidad dada en [9] y con las cuales se diseñan las ganancias se basa en una función de Lyapunov, y sólo establece condiciones suficientes para la estabilidad del sistema en lazo cerrado, por lo tanto se pueden encontrar ganancias que en simulación o en pruebas experimentales funcionen, pero que no cumplan la prueba de estabilidad. El valor de Δ_1 se calculó en la ec. (4.5). Las ganancias utilizadas se muestran en la tabla 4.1. Por medio de las simulaciones, es posible tener una idea del efecto que tiene cada una de las ganancias en el controlador, k_{ε_1} da peso a la posición, por lo que se regula más rápido mientras el error de posición es grande, por otro lado k_{ε_2} tiene efectos sobre la velocidad, por lo que si se quiere tener un mejor control sobre la velocidad de elevación hay que incrementar esta ganancia, finalmente, k_{ε_3} es para rechazar perturbaciones, por lo que se tiene que elegir mayor que la cota de la derivada de la perturbación.

Ganancia	Valor
k_{ε_1}	7
k_{ε_2}	2
k_{ε_3}	5

Tabla 4.1: Ganancias controlador 3-AST para elevación

	Figura 4.1(a)	Figura 4.1(b)
k_{ε_1}	1	5
k_{ε_2}	1	3.3437
k_{ε_3}	0.1	1.1180
γ_{ε_1}	5	1
γ_{ε_2}	3.3333	0.1333
γ_{ε_3}	0.0018	5.76×10^{-7}
$\gamma_{\varepsilon_{13}}$	1	0.0400
$\gamma_{\varepsilon_{23}}$	0.1	0.0004
η_{ε}	1.1	1.1
Δ_1	0	0.5
L	1	5

Tabla 4.2: Ganancias del controlador CID para elevación y parámetros de la función de Lyapunov

4.1.2. Implementación del Control Integral Discontinuo

También para la implementación de esta ley de control se utilizan las señales de error definidas en la ec. (4.3) y el control (2.15), por lo que el controlador toma la forma

$$\begin{aligned} u_1 &= k_{\varepsilon_1} |e_{\varepsilon_1}|^{\frac{1}{3}} \text{sign}(e_{\varepsilon_1}) - k_{\varepsilon_2} |e_{\varepsilon_2}|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(e_{\varepsilon_2}) + z_{\varepsilon} \\ \dot{z}_{\varepsilon} &= -k_{\varepsilon_3} \text{sign}(e_{\varepsilon_1}), \end{aligned} \quad (4.7)$$

en donde las ganancias k_{ε_1} , k_{ε_2} y k_{ε_3} y los parámetros γ_{ε_1} , γ_{ε_2} , γ_{ε_3} , $\gamma_{\varepsilon_{13}}$ y $\gamma_{\varepsilon_{23}}$, se diseñarán por alguno de los métodos presentados en el Capítulo 2.

Primero es necesario diseñar un conjunto de parámetros para el caso nominal y comprobar que doten de estabilidad el sistema (4.4) mediante la comprobación gráfica y posteriormente, para el caso perturbado, se escalarán los parámetros eligiendo el valor apropiado de la variable de escalamiento L , de acuerdo con el valor de la cota Δ_1 , de la derivada de la perturbación y será necesario volver a realizar la comprobación gráfica para asegurar estabilidad. En este caso, puesto que no se tienen tantas restricciones para el diseño de las ganancias, sí fue posible aplicar los métodos de diseño presentados anteriormente. En la tabla 4.2, en la primera columna, se presenta un conjunto de parámetros que estabilizan la dinámica de la elevación para el caso nominal, mientras que en la segunda columna se presenta el conjunto de parámetros escalados para $\Delta_1 = 0.4472 \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}^3} \right]$ y con $L = 3.5$. Además, en la figura 4.1 se presenta la comprobación gráfica para cada uno de los conjuntos de parámetros presentados, con ésta se puede asegurar que los errores convergen en tiempo finito siempre y cuando la curva de la función $v(\alpha)$ no pase por debajo de la curva de la función $\psi(\alpha)$, lo cual se cumple en las dos gráficas presentadas.

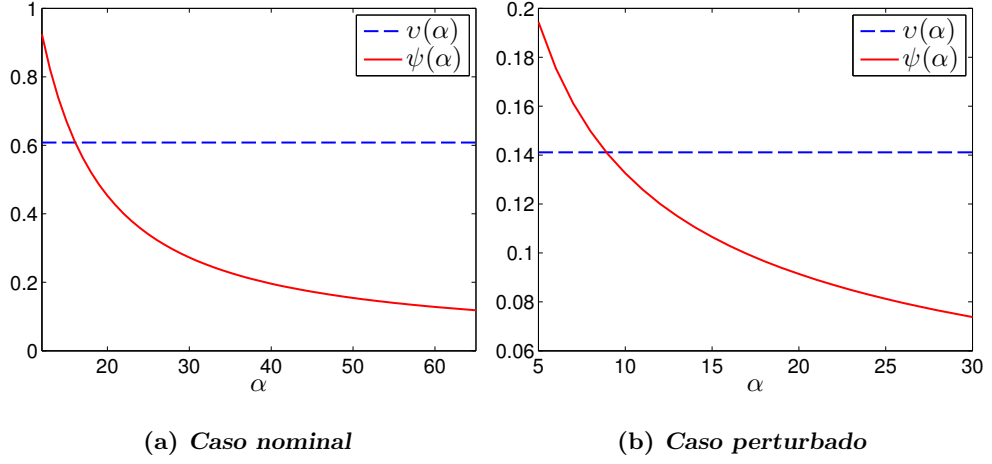


Figura 4.1: $\psi(\alpha, \lambda)$ vs. $\nu(\alpha)$, (a) parámetros de la columna 1 de la tabla 4.2. (b) parámetros de la columna 2 de la tabla 4.2.

4.2. Control de la dinámica de los ángulos de *pitch* y *travel*

La dinámica de los ángulos de *pitch* y *travel* se presentó en el Capítulo 3 y está descrita por las siguientes ecuaciones en espacio de estados

$$\begin{aligned}
 \dot{\theta}_1 &= \theta_2 \\
 \dot{\theta}_2 &= -c \sin(\theta_1) + du_d \\
 \dot{\psi}_1 &= \psi_2 \\
 \dot{\psi}_2 &= e \sin(\theta_1) \\
 c &= \frac{mgl_\theta}{J_\theta} \quad d = \frac{K_f L_h}{J_\theta} \quad e = \frac{K_p L_a}{J_\psi}.
 \end{aligned}$$

El sistema linealizado, en espacio de estados y en forma matricial tiene la siguiente forma

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\psi}_1 \\ \dot{\psi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ e & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ d \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_d + \begin{bmatrix} 0 \\ \delta_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

y también puede escribirse como

$$\begin{aligned}
 \dot{\theta}_1 &= \theta_2 \\
 \dot{\theta}_2 &= du_d - c\theta_1 + \delta_2 \\
 \dot{\psi}_1 &= \psi_2 \\
 \dot{\psi}_2 &= e\theta_1.
 \end{aligned}$$

Para este caso, para aplicar los controladores presentados en el Capítulo 2, también se considera como perturbación parte del modelo, por lo que el término $-c\theta_1$ se engloba en el término de perturbación δ_2 . Por otro lado se elige el control $u_d = \frac{1}{d}u_2$, con estas

adecuaciones el sistema a controlar se expresa como

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_1 &= \theta_2 \\ \dot{\theta}_2 &= u_2 + \delta_2 \\ \dot{\psi}_1 &= \psi_2 \\ \dot{\psi}_2 &= e\theta_1.\end{aligned}\tag{4.8}$$

Al observar la estructura del subsistema (4.8) podemos ver que no habrá un cambio en el ángulo de *travel* si el ángulo de *pitch* no es controlado adecuadamente, es decir, se trata de un sistema subactuado. La entrada de control a diseñar, u_2 , actúa directamente en la dinámica del ángulo de *pitch*, pero el ángulo de *travel* es actuado por el *pitch*.

Tomando en cuenta lo planteado en el párrafo anterior y el objetivo de control presentado al principio del capítulo, es necesario, a partir del ángulo de *travel* deseado, calcular en línea como debe de comportarse el ángulo de *pitch*, es decir, calcular una trayectoria y por medio de u_2 obligar al ángulo de *pitch* a seguirla. Esta trayectoria debe ser suave, por lo que se utilizará un control PD para calcularla, puesto que debido al esquema de control a utilizar, será necesario derivarla, y utilizar un algoritmo por modos deslizantes en este caso podría ser riesgoso debido a que las señales generados por los controladores tienen derivadas discontinuas. Para la entrada de control u_2 sí se utilizará control por modos deslizantes.

4.2.1. Control del ángulo de *travel*

Para calcular la trayectoria necesaria de *pitch* para llevar al ángulo deseado de *travel* a la posición deseada, primero se definen los errores de regulación del ángulo de *travel* como

$$\begin{aligned}e_{\psi_1} &= \psi_1 - \psi_{1d} \\ e_{\psi_2} &= \psi_2,\end{aligned}$$

en donde ψ_{1d} es el ángulo deseado de *travel*, y también en este caso el error de velocidad sólo toma en cuenta la velocidad angular de *travel* puesto que la deseada, dado que se regula a puntos de equilibrio, es cero.

Ahora para calcular el valor necesario del ángulo de *pitch* se define el valor deseado de esta variable por medio de un control PD de la siguiente forma

$$\theta_{1c} = k_{\psi_p} e_{\psi_1} + k_{\psi_d} e_{\psi_2},\tag{4.9}$$

en donde k_{ψ_p} es la ganancia proporcional y k_{ψ_d} la ganancia derivativa, las cuales se eligieron con la función de transferencia del lazo de control y el Software de Matlab PID Tuner, el cual presenta la respuesta al escalón del sistema y por medio de su visualización se varían las ganancias proporcional y derivativa hasta obtener la respuesta deseada, que en este caso fue una respuesta al escalón sin sobrepaso. Sin embargo, debido a que existen dinámicas acopladas que no se contemplan en la función de transferencia, las ganancias obtenidas se modificaron un poco para obtener los mejores resultados de simulación posibles, las utilizadas para el caso en que el resto de estados se controlan con el 3-AST y el CID se presentan en la tabla 4.3. Se utilizó un controlador PD para no incrementar el orden del sistema y afectar la estabilidad de este subsistema, además dado que el sistema es oscilatorio, se requiere que la ganancia derivativa sea mayor que la ganancia proporcional.

	k_{ψ_p}	k_{ψ_d}
3-AST	0.8	3
CID	0.863	3

Tabla 4.3: Ganancias del control PD para *travel*

4.2.2. Control del ángulo de *pitch*

Una vez que se ha establecido cómo se calcula la trayectoria del ángulo de *pitch* para llevar el ángulo de *travel* al valor deseado, hay que obligar al *pitch* a seguir esta trayectoria, la cual se va calculando en línea. Esto se realiza mediante los algoritmos de control por modos deslizantes presentados en el Capítulo 2. Para esto se definen las siguientes señales de error

$$\begin{aligned} e_{\theta_1} &= \theta_1 - \theta_{1c} \\ e_{\theta_2} &= \theta_2 - \dot{\theta}_{1c}, \end{aligned} \quad (4.10)$$

en donde $\dot{\theta}_{1c}$, es estimado con un diferenciador por modos deslizantes. La dinámica de las señales de error, sobre la cual se aplicarán los algoritmos de control por modos deslizantes, es de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \dot{e}_{\theta_1} &= e_{\theta_2} \\ \dot{e}_{\theta_2} &= u_2 - \ddot{\theta}_{1c} + \delta_2. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Para este caso, nuevamente se considera como perturbación la parte no lineal del modelo de la dinámica del ángulo de *pitch*, además de la segunda derivada de la referencia del ángulo de *pitch*, es decir,

$$\delta_2 = -c \sin(\theta_1) - \ddot{\theta}_{1c}.$$

Para aplicar los algoritmos de control por modos deslizantes es necesario conocer la cota Δ_2 de la derivada de la perturbación δ_2 que se calcula como

$$\Delta_2 = |\dot{\delta}_2| = |max \{d \cos(\theta_1) \theta_2\}| + |\ddot{\theta}_{1c}|,$$

en donde d es un término de aceleración que es conocido ($d = \frac{mgl_\theta}{J_\theta} = 1.2397 \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \right]$), además, siendo la unidad el valor máximo que puede tomar el término $\cos(\theta_1)$, se tiene que

$$\Delta_2 = |\dot{\delta}_2| = |d\theta_{2max}| + |\ddot{\theta}_{1c}|.$$

Al igual que en el caso del ángulo de elevación, para determinar el valor máximo que puede tomar la velocidad angular de *travel* se realizó una simulación con un controlador PID y de la respuesta al escalón con el valor máximo posible de *travel*, de la cual se determinó la velocidad del ángulo de *pitch* producido para alcanzar la referencia deseada, obteniendo que $\theta_{2max} = 0.63 \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \right]$. Además también de esta simulación se determinó $|\ddot{\theta}_{1c}|$. Por lo tanto la cota buscada queda evaluada como

$$\Delta_2 = 0.93 \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}^3} \right]. \quad (4.12)$$

4.2.2.1. Implementación del Algoritmo Super-Twisting de Tercer Orden

Para la implementación de este algoritmo de control se utilizan las señales de error definidas en la ec. (4.10), y la ley de control dada por la ec. (2.5), que se presentó en el Capítulo 2, por lo que el control tiene la siguiente estructura

$$\begin{aligned} u_2 &= k_{\theta_1} |\phi_\theta|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\phi_\theta) + L_\theta \\ \dot{L}_\theta &= -k_{\theta_3} \text{sign}(\phi_\theta) \\ \phi_\theta &= e_{\theta_1} + k_{\theta_2} |e_{\theta_2}|^{\frac{2}{3}} \text{sign}(e_{\theta_1}) \end{aligned} \quad (4.13)$$

en donde k_{θ_1} , k_{θ_2} y k_{θ_3} son ganancias a diseñar mediante los métodos presentados en el Capítulo 2. Para este caso tampoco se pudo encontrar el conjunto de ganancias y parámetros que cumplen las condiciones presentadas en el Capítulo 2, las cuales están definidas en [9] y que aseguran estabilidad en tiempo finito de los estados del helicóptero. Por lo tanto se escogieron ganancias con las que se tuvo un buen desempeño en simulación y cumpliendo con que $k_{\theta_3} > \Delta_2$, en donde Δ_2 se calculó en la ec. (4.12). En la tabla 4.4 se presentan las ganancias utilizadas en la simulación con este algoritmo de control.

Ganancia	Valor
k_{ε_1}	10
k_{ε_2}	2
k_{ε_3}	5

Tabla 4.4: Ganancias controlador 3-AST para *pitch*

	Figura 4.2(a)	Figura 4.2(b)
k_{θ_1}	1	10
k_{θ_2}	1	5.6234
k_{θ_3}	0.1	3.1623
γ_{θ_1}	5	0.5
γ_{θ_2}	3.3333	0.0333
γ_{θ_3}	0.0018	1.8×10^{-8}
$\gamma_{\theta_{13}}$	1	0.0100
$\gamma_{\theta_{23}}$	0.1	3.1623×10^{-5}
η_θ	1.1	1.1
Δ_2	0	0.78
L	1	5

Tabla 4.5: Ganancias del controlador CID para *pitch* y parámetros de la función de Lyapunov

4.2.2.2. Implementación del Control Integral Discontinuo

Para el caso del ángulo de *pitch* este controlador se implementa con el objetivo de que los errores de regulación definidos en la ec. (4.10) tiendan a cero en tiempo finito y por lo tanto el ángulo de *pitch* siga la trayectoria calculada en línea por medio de la ec. (4.9), para llevar el ángulo de *travel* a la posición deseada. Por lo tanto, aplicando el control (2.15) a la dinámica de error (4.11) el controlador tiene la forma

$$\begin{aligned} u_2 &= -k_{\theta_1} |e_{\theta_1}|^{\frac{1}{3}} \text{sign}(e_{\theta_1}) - k_{\theta_2} |e_{\theta_2}|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(e_{\theta_2}) + z_\theta \\ \dot{z}_\theta &= -k_{\theta_3} \text{sign}(e_{\theta_1}). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Para este caso las ganancias k_{θ_1} , k_{θ_2} y k_{θ_3} se diseñarán primero para el caso nominal en el que $\delta_2 = 0$ y posteriormente se utilizará el método de escalamiento por medio

de la variable L para $\delta_2 = 0.78 \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}^3} \right]$ calculado en la sección previa. El conjunto de parámetros para el caso nominal y con los que se logra el seguimiento de la trayectoria calculada de *pitch*, se presentan en la primera columna de la tabla 4.5, mientras que los parámetros para el caso perturbado se presentan en la segunda columna de la misma tabla, las comprobaciones gráficas para ambos casos se presentan en la figura 4.2.

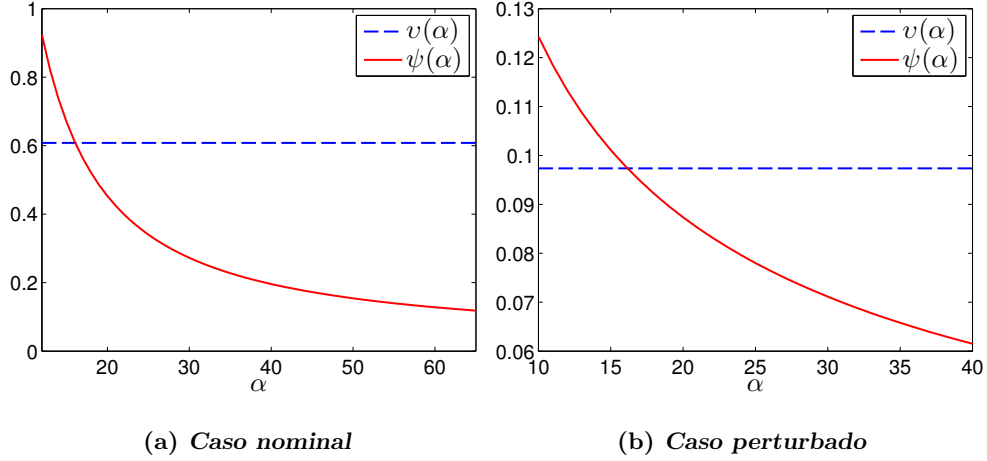


Figura 4.2: $\psi(\alpha, \lambda)$ vs. $\nu(\alpha)$, (a) parámetros de la columna 1 de la tabla 4.5. (b) parámetros de la columna 2 de la tabla 4.5.

4.3. Observación de Estados

Hasta ahora se ha asumido que todo el estado está disponible para la implementación de los controladores presentados, sin embargo, en el caso del prototipo experimental sobre el que se realizarán las pruebas, sólo es posible medir la posición. Es por esto que es necesario implementar algoritmos de observación o diferenciación para poder tener todo el estado disponible para el correcto desempeño de los controladores presentados. En esta sección se presenta la implementación, para las pruebas experimentales, de los diferentes algoritmos de observación presentados en el Capítulo 2, en primer lugar se implementa el observador basado en Super-Twisting, posteriormente un observador basado en el Super-Twisting de Tercer Orden y finalmente se implementa un diferenciador de quinto orden, del cual solo se extrae la primera derivada de la posición del helicóptero, correspondiente a las velocidades del helicóptero.

Antes de realizar la implementación de los algoritmos de observación, es necesario corroborar que el helicóptero sea un sistema observable, esta característica se define como la capacidad de que para un tiempo finito $t > t_0$, para una condición inicial $x(t_0)$ en el tiempo t_0 sea posible determinar el estado x_0 sólo con el conocimiento de la salida del sistema $y(t)$ y la entrada $u(t)$ del mismo.

Un sistema lineal, es observable si se cumple que la matriz de observabilidad $\mathcal{O}$ sea de rango completo, ésta matriz se define como

$$\mathcal{O} = [C \quad CA \quad CA^2 \quad \dots \quad CA^{n-1}] \quad (4.15)$$

Para el caso del helicóptero la matriz de observabilidad tiene rango completo (ver Apéndice B), por lo que el sistema es observable alrededor del punto de equilibrio.

4.3.1. Implementación del Observador basado en el AST

Al aplicar el observador basado en Super-Twisting al modelo del helicóptero para estimar las velocidades de los ángulos de elevación, *pitch* y *travel*, estos tienen la siguiente forma

$$\begin{aligned}
 \dot{\hat{\varepsilon}}_1 &= \dot{\hat{\varepsilon}}_2 + z_{1\varepsilon} \\
 \dot{\hat{\varepsilon}}_2 &= -a \cos(\varepsilon_1) + bu_s \cos(\theta_1) + z_{2\varepsilon} \\
 \dot{\hat{\theta}}_1 &= \hat{\theta}_2 + z_{1\theta} \\
 \dot{\hat{\theta}}_2 &= -c \sin(\theta_1) + du_d + z_{2\theta} \\
 \dot{\hat{\psi}}_1 &= \hat{\psi}_3 + z_{1\psi} \\
 \dot{\hat{\psi}}_2 &= e \sin(\theta_1) + z_{2\psi}.
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

Los términos de corrección para cada uno de los observadores tienen la forma presentada en la ec. (2.29). Las ganancias $\alpha_{\{\varepsilon, \theta, \psi\}}$ y $\lambda_{\{\varepsilon, \theta, \psi\}}$ se calculan de acuerdo con la ec. (2.30), en donde es necesario conocer las cotas $f_{\{\varepsilon, \theta, \psi\}}^+$, que se calculan como el doble del valor máximo de cada una de las aceleraciones del helicóptero, las cuales se determinaron por medio de una simulación del sistema para respuestas al escalón con los controladores presentados y midiendo las aceleraciones que se tienen disponibles en el modelo de simulación. Los valores obtenidos para las cotas de la aceleración, y los valores calculados de α y λ se muestran en la tabla 4.6.

Parámetro	ε	θ	ψ
f^+	$4.2 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$	$25 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$	$1 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$
α	4.62	27.5	1.1
λ	3.0741	7.5	1.5

Tabla 4.6: Ganancias del observador AST

Ganancia	ε	θ	ψ
k_1	4	4	4
k_2	2	2	2
k_3	2	2	2

Tabla 4.7: Ganancias del observador 3-AST

4.3.2. Implementación del Observador basado en el 3-AST

El observador basado en el 3-AST es una copia del sistema original al que se le añaden algunos términos de corrección, al aplicarlo al helicóptero de tres grados de libertad, los observadores para cada una de las velocidades tienen la siguiente estructura

$$\begin{aligned}
 \dot{\hat{\varepsilon}}_1 &= \dot{\hat{\varepsilon}}_2 + z_{1\varepsilon} \\
 \dot{\hat{\varepsilon}}_2 &= -a \cos(\varepsilon_1) + bu_s \cos(\theta_1) + z_{2\varepsilon} + \hat{\varepsilon}_3 \\
 \dot{\hat{\varepsilon}}_3 &= z_{3\varepsilon} \\
 \dot{\hat{\theta}}_1 &= \hat{\theta}_2 + z_{1\theta} \\
 \dot{\hat{\theta}}_2 &= -c \sin(\theta_1) + du_d + z_{2\theta} + \hat{\theta}_3 \\
 \dot{\hat{\theta}}_3 &= z_{3\theta} \\
 \dot{\hat{\psi}}_1 &= \hat{\psi}_2 + z_{1\psi} \\
 \dot{\hat{\psi}}_2 &= e \sin(\theta_1) + z_{2\psi} + \hat{\psi}_3 \\
 \dot{\hat{\psi}}_3 &= z_{3\psi}.
 \end{aligned}$$

Los términos de corrección para cada uno de los observadores están definidos en la ec. (2.32) y las ganancias $k_{\{\varepsilon, \theta, \psi\}_1}$, $k_{\{\varepsilon, \theta, \psi\}_2}$ y $k_{\{\varepsilon, \theta, \psi\}_3}$ para dotar de convergencia en tiempo finito los errores de estimación, se calculan de acuerdo a [12]. En la tabla 4.7 se muestran las ganancias elegidas para cada uno de los observadores de tercer orden para estimar las velocidades del helicóptero.

4.3.3. Implementación del Diferenciador Robusto y Exacto de Quinto Orden

En el Capítulo 2 se mostró la forma generalizada del este diferenciador, este algoritmo se caracteriza por que parte de un término discontinuo el cual se integra junto con otros términos n veces, en donde n es el orden del diferenciador deseado. En esta sección se implementa un diferenciador de quinto orden, cuya entrada son las posiciones del helicóptero y del cual, a pesar que estima las primeras cinco derivadas de las posiciones, solo se toma la primera, es decir las velocidades, al utilizar este diferenciador de alto orden se asegura una primera derivada sumamente limpia y absolutamente continua. El diferenciador de quinto orden tiene la siguiente estructura

$$\begin{aligned}
 \dot{z}_0 &= \nu_0, & \nu_0 &= -12L^{\frac{1}{6}}|z_0 - f(t)|^{\frac{5}{6}}\text{sign}(z_0 - f(t)) + z_1 \\
 \dot{z}_1 &= \nu_1, & \nu_1 &= -8L^{\frac{1}{5}}|z_1 - \nu_0|^{\frac{4}{5}}\text{sign}(z_1 - \nu_0) + z_2 \\
 \dot{z}_2 &= \nu_2, & \nu_2 &= -5L^{\frac{1}{4}}|z_2 - \nu_1|^{\frac{3}{4}}\text{sign}(z_2 - \nu_1) + z_3 \\
 \dot{z}_3 &= \nu_3, & \nu_3 &= -3L^{\frac{1}{3}}|z_3 - \nu_2|^{\frac{2}{3}}\text{sign}(z_3 - \nu_2) + z_4 \\
 \dot{z}_4 &= \nu_4, & \nu_4 &= -1.5L^{\frac{1}{2}}|z_4 - \nu_3|^{\frac{1}{2}}\text{sign}(z_4 - \nu_3) + z_5 \\
 \dot{z}_5 &= -1.1L\text{sign}(z_5 - \nu_4), & |f^{(6)}(t)| &\leq L
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

en donde la función $f(t)$ representa las posiciones del helicóptero, es decir, $\varepsilon(t)$, $\theta(t)$ y $\psi(t)$. Además de la referencia de *pitch* θ_{1c} . Los valores de las constantes para cada uno de los diferenciadores $L_{\{\varepsilon, \theta, \psi\}}$ se presentan en la tabla 4.8.

	ε	θ	ψ	θ_{1c}
L	200	300	200	500

Tabla 4.8: Ganancias del Diferenciador Robusto y Exacto de Quinto Orden

4.4. Simulaciones

Antes de proceder a las pruebas experimentales del funcionamiento del helicóptero, regulando a diferentes puntos de equilibrio con los controladores y observadores presentados, se realizaron las simulaciones de los experimentos, para esto se utilizó el software Simulink de Matlab. A continuación se presentan los resultados de las simulaciones de la combinación de los dos controladores a utilizar con cada uno de los tres observadores implementados, las ganancias utilizadas son las que se diseñaron para cada algoritmo en las secciones anteriores, el tiempo de simulación fue de 30 [s], utilizando el método de integración Runge-Kutta de cuarto orden y con un paso de integración de 0.001 [s]. En todas las simulaciones se regula el ángulo de *travel* a 360° a partir del segundo 3 de la simulación, mientras que la elevación se regula a 10° a partir del segundo 10 de la simulación. Además para mostrar la robustez de los controladores implementados se utilizan señales de perturbación sinusoidales acopladas a las señales de control aplicadas a los motores del helicóptero, $\delta_f = \sin(t) + 2$ y $\delta_b = 2\sin(t) - 1$. Otro aspecto importante que hay que

señalar es que el ángulo de *pitch* máximo se limitó a 20° puesto que así se manejará en los experimentos.

4.4.1. Control 3-STA, Observador STA

En la figura 4.3 se aprecia el comportamiento de las posiciones del helicóptero y las velocidades estimadas, mientras que en la figura 4.4 se presentan las señales de control aplicadas a cada uno de los motores así como las de sus efectos en conjunto. Observando la evolución en el tiempo de la elevación del helicóptero es notable que el controlador por modos deslizantes dota de velocidad este estado puesto que llega a la referencia en tan solo 1 [s], por otro lado, el subsistema compuesto por las dinámicas de los ángulos de *pitch* y *travel* llega a la referencia en aproximadamente 15 [s]. Por el esquema de control diseñado, la trayectoria a seguir del *pitch* es generada por un algoritmo PD con base en la posición de *travel* deseada, el control por modos deslizantes obliga al ángulo de *pitch* a seguir esta trayectoria, en la figura 4.3 se aprecia que el seguimiento es muy preciso. Por otro lado las velocidades estimadas proveen un buen desempeño a pesar de que tienen un poco de *chattering*.

Observando solamente el comportamiento de los estados del helicóptero parece que el sistema funciona adecuadamente puesto que el efecto de las perturbaciones es completamente cancelado por la acción de control, sin embargo al observar estas señales se detecta un problema: el controlador basado en el 3-AST provee una señal de control continua, pero las señales aplicadas al sistema son discontinuas. Esto es debido a un fenómeno recientemente descubierto: no es posible implementar un controlador con Super-Twisting utilizando estados estimados con el mismo algoritmo. A pesar de que se logra el objetivo de control, el 3-AST pierde su principal característica: la continuidad de la señal de control generada. En [3] se describe este problema y para solucionarlo se propone elevar en uno el orden del observador con respecto al controlador. Este caso es diferente puesto que el orden del controlador es mayor que el del observador, por lo tanto en la siguiente subsección se prueba con un observador de tercer orden.

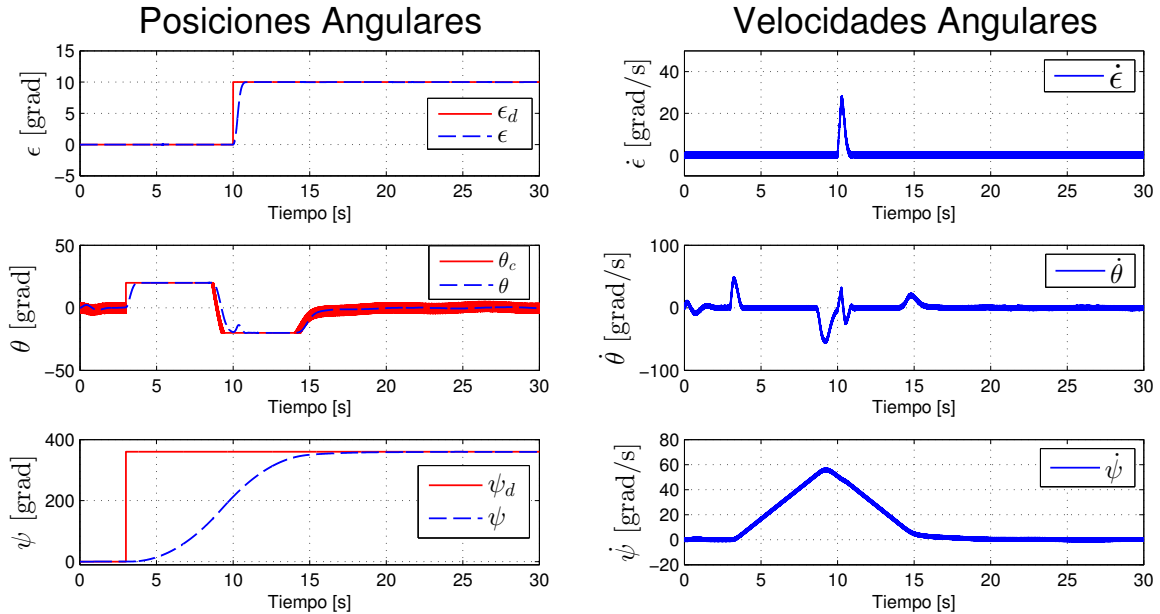


Figura 4.3: Estados del sistema, posiciones angulares y velocidades angulares estimadas, Control 3-STA, Observador STA

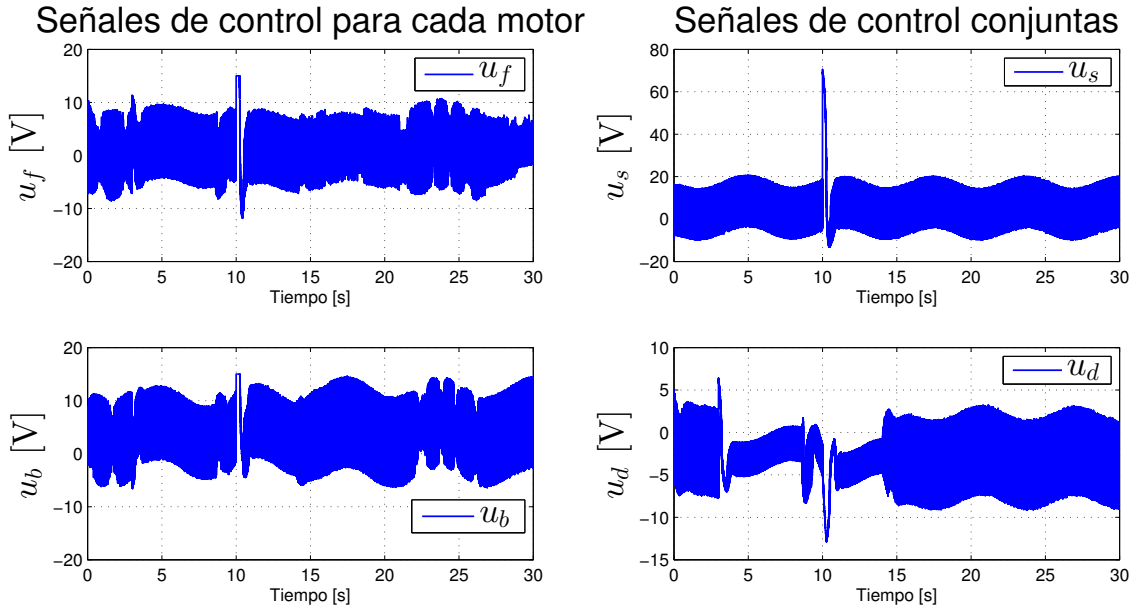


Figura 4.4: Señales de control, individuales para cada motor y conjuntas, Control 3-STA, Observador STA

4.4.2. Control 3-STA, Observador 3-STA

En este caso, para estimar las velocidades del sistema se utiliza un observador basado en el Algoritmo Super-Twisting de Tercer Orden, con la finalidad de obtener una señal de control absolutamente continua que dote al sistema de robustez ante perturbaciones acopladas a la señal de control y que lleve a cabo la regulación del sistema con un desempeño aceptable.

En la figura 4.5 se muestra el comportamiento de los estados, se tiene un desempeño muy similar al resultante de la simulación anterior, la regulación hacia los puntos de equilibrio dados se realiza en un tiempo corto además de que no hay sobrepaso. Las posiciones llegan a las señales de referencia con buen desempeño a pesar de la existencia de perturbaciones acopladas a la señal de control. Por otro lado el controlador actúa en las velocidades del sistema generando sólo el esfuerzo requerido para lograr el objetivo de control, además las velocidades estimadas con el observador por modos deslizantes de tercer orden reducen el *chattering*. Sin embargo, al observar las señales de control, figura 4.6, uno se puede dar cuenta de que el problema de la discontinuidad de la acción de control está aun presente, es notable que el efecto de *chattering* reduce su magnitud pero desde el punto de vista de implementación esto es indeseable y por cuestiones prácticas no se implementará físicamente.

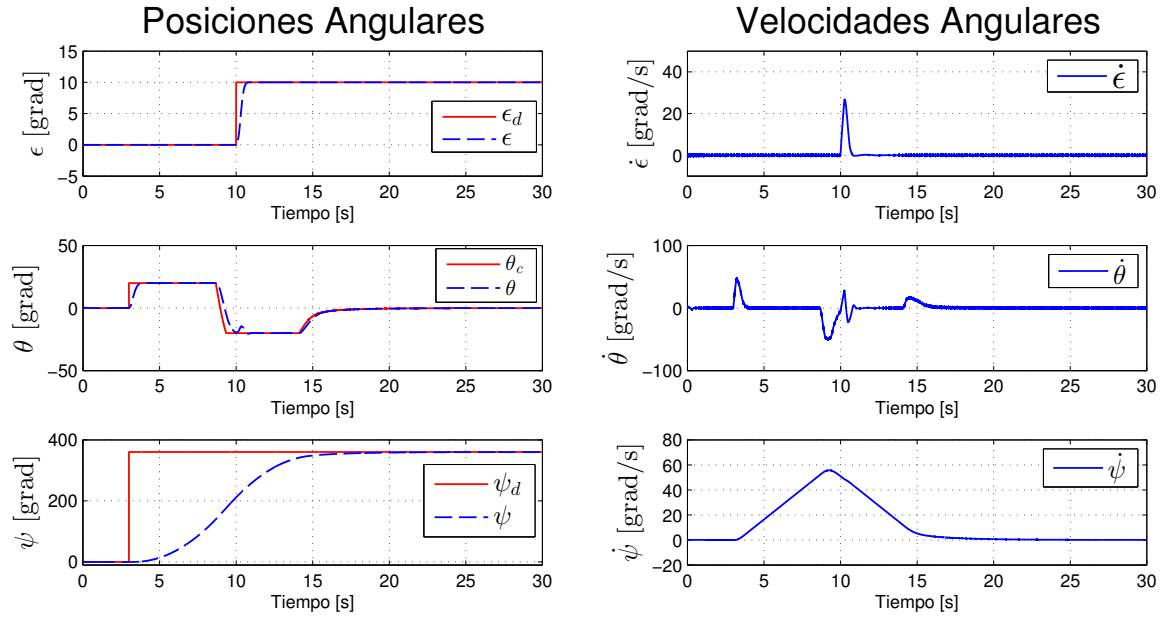


Figura 4.5: Estados del sistema, posiciones angulares y velocidades angulares estimadas, Control 3-STA, Observador 3-STA

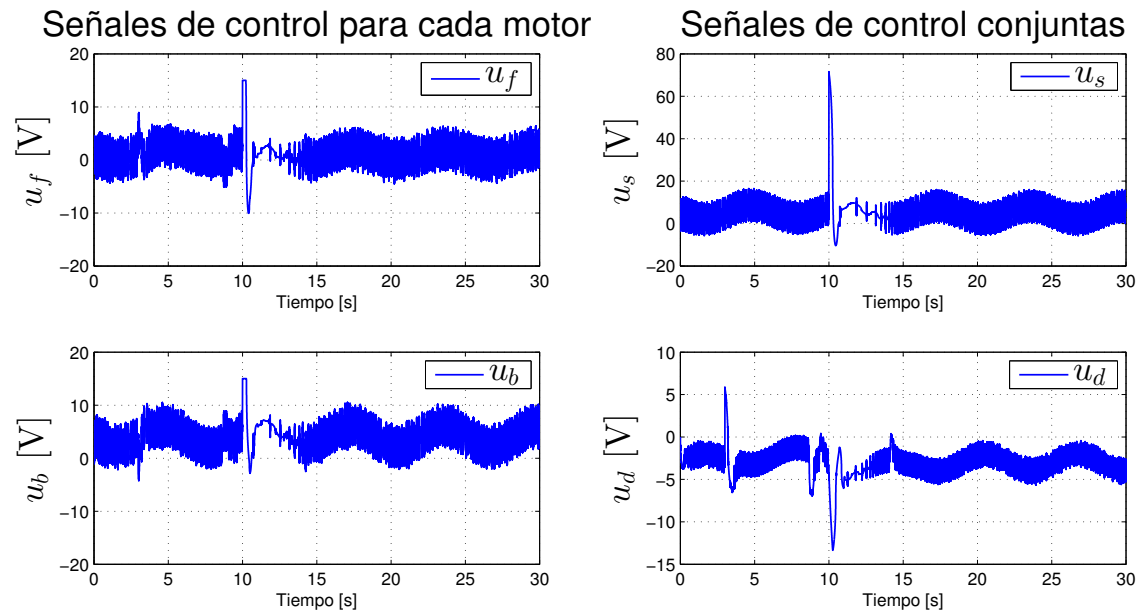


Figura 4.6: Señales de control, individuales para cada motor y conjuntas, Control 3-STA, Observador 3-STA

4.4.3. Control 3-STA, Diferenciador de Quinto Orden

En esta simulación, para estimar las velocidades del helicóptero se utilizó el diferenciador robusto y exacto de quinto orden, del cual solo se utiliza la primera derivada, correspondiente a las velocidades requeridas. Hay que recordar que la principal ventaja de utilizar un diferenciador de alto orden es que provee una señal totalmente continua y muy

limpia, con lo cual se espera aliviar el problema de la pérdida de continuidad de la señal de control que se presentó utilizando observadores por modos deslizantes de segundo y de tercer orden.

En la figura 4.7 se presenta nuevamente la evolución en el tiempo de los estados del helicóptero, las posiciones logran llegar a la referencia con buen desempeño a pesar de las perturbaciones acopladas al control y el efecto del controlador en las velocidades es el adecuado para lograr la regulación de las posiciones en un tiempo corto y no presentan sobrepaso. Las velocidades estimadas ahora son totalmente continuas y al observar las señales de control, figura 4.8, queda claro que el problema de la pérdida de continuidad del control ha sido solucionando, a la vez que se mantiene la propiedad de insensibilidad a perturbaciones acopladas al control.

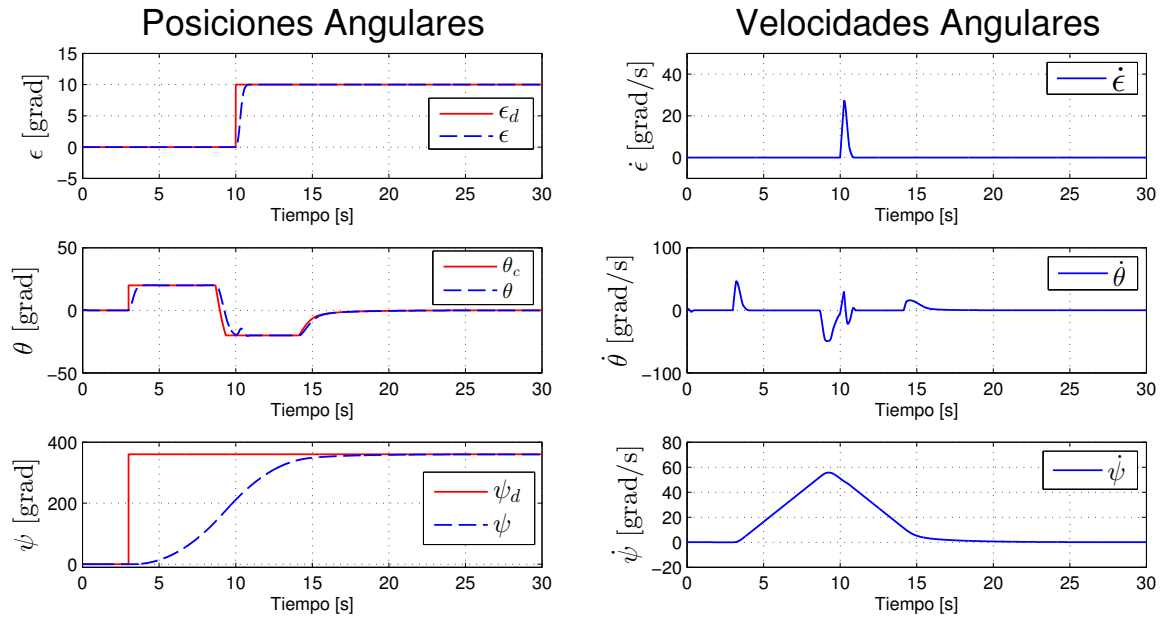


Figura 4.7: Estados del sistema, posiciones angulares y velocidades angulares estimadas, Control 3-STA, Diferenciador de Quinto Orden

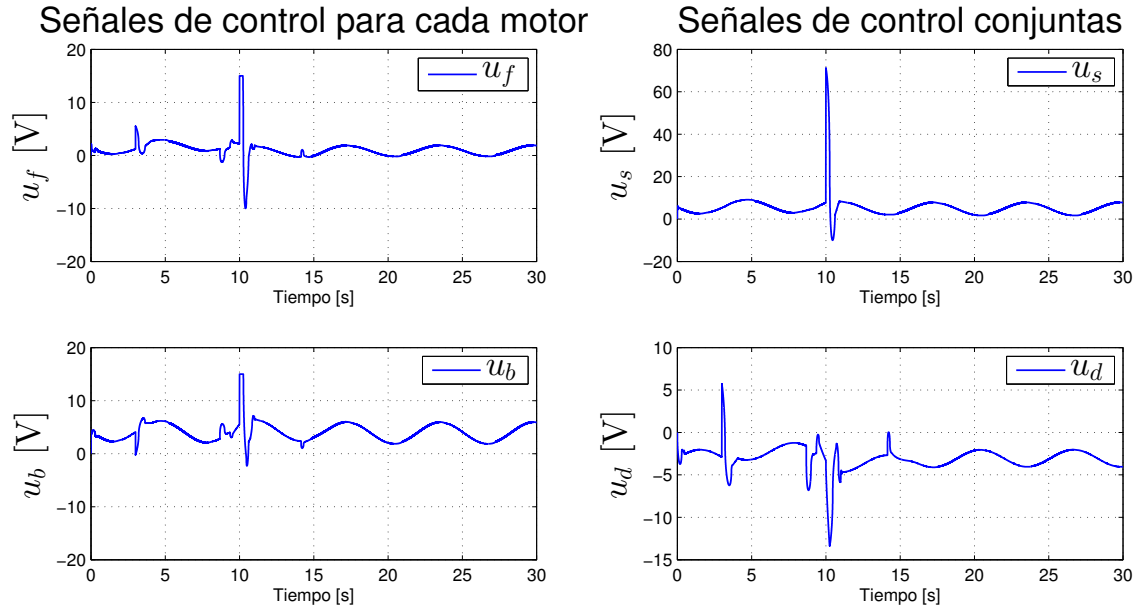


Figura 4.8: Señales de control, individuales para cada motor y conjuntas, Control 3-STA, Diferenciador de Quinto Orden

4.4.4. Control CID, Observador STA

Ahora se presentan las simulaciones con el controlador integral discontinuo y los distintos algoritmos de observación y diferenciación vistos, en este caso se utiliza el observador basado en Super-Twisting. En la figura 4.9 se presentan los estados del sistema con esta combinación de controlador y observador. Se puede ver que en este caso la elevación llega al valor de referencia también en 1 [s] y con un sobrepaso pequeño de 2° . El ángulo de *travel* se estabiliza en el valor requerido aproximadamente en 15 [s] al igual que con el controlador con el 3-AST. El ángulo de *pitch* sigue de manera rápida y con un mínimo de sobrepaso la trayectoria generada, es por esto que el desempeño del *travel* es bueno. Las señales de velocidad estimadas tienen bastante *chattering*, sin embargo se tiene un buen desempeño, todo esto en presencia de perturbaciones acopladas al control. Por otro lado, en la figura 4.10 se observa que también con esta combinación de control y observador se pierde la continuidad de las señales de control. En resumen se tiene un buen desempeño y el sistema es robusto ante perturbaciones pero se pierde la continuidad del algoritmo de control.

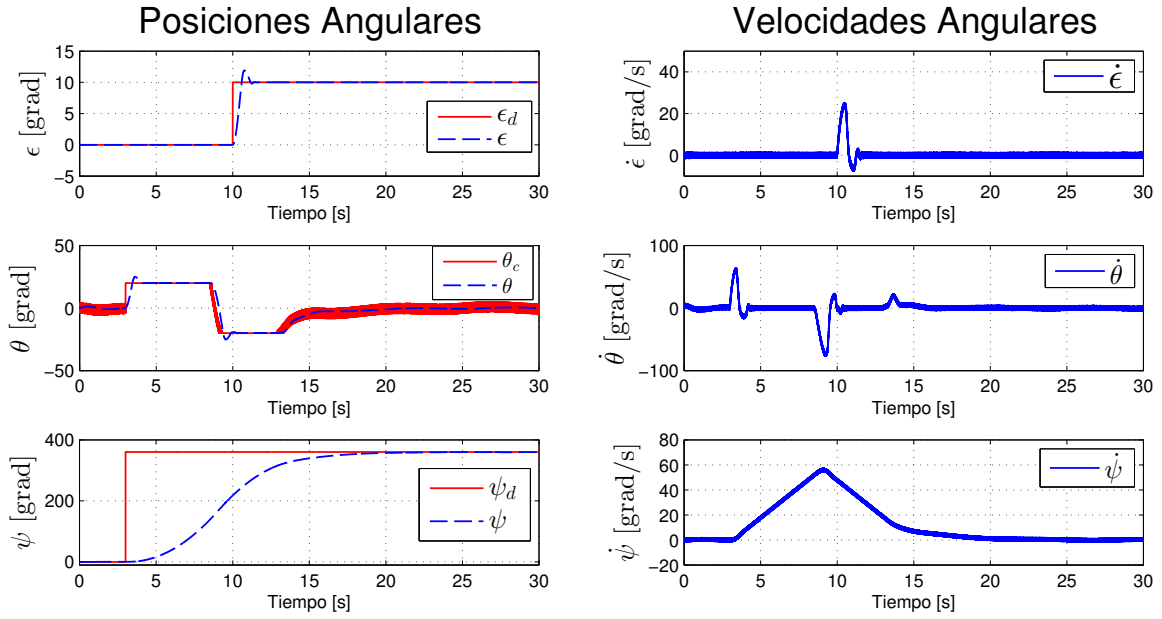


Figura 4.9: Estados del sistema, posiciones angulares y velocidades angulares estimadas, Control CID, Observador STA

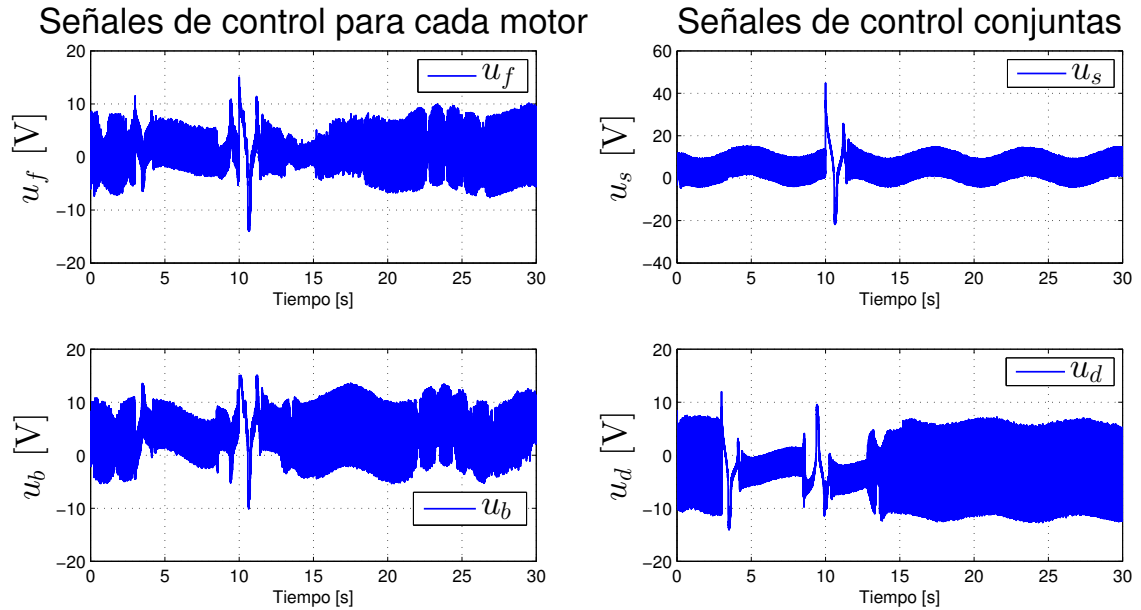


Figura 4.10: Señales de control, individuales para cada motor y conjuntas, Control CID, Observador STA

4.4.5. Control CID, Observador 3-STA

Ahora se presentan los resultados de la simulación estimando las velocidades con un observador basado en el Algoritmo Super-Twisting de Tercer Orden, en la figura 4.11 se tienen las posiciones y velocidades del helicóptero, en este caso el desempeño de las posiciones al llegar a los valores deseados es prácticamente igual al presentado en la

4. DISEÑO DEL ESQUEMA DE CONTROL

subsección anterior, pero en este caso las señales de velocidad estimadas presentan menos *chattering*. Sin embargo, al observar las señales de control en la figura 4.12 se ve de nueva cuenta que aun permanece la discontinuidad de las señales de control, a pesar de esto se tiene buen desempeño e insensibilidad ante incertidumbres y perturbaciones, pero esta combinación tampoco es adecuada para la prueba experimental.

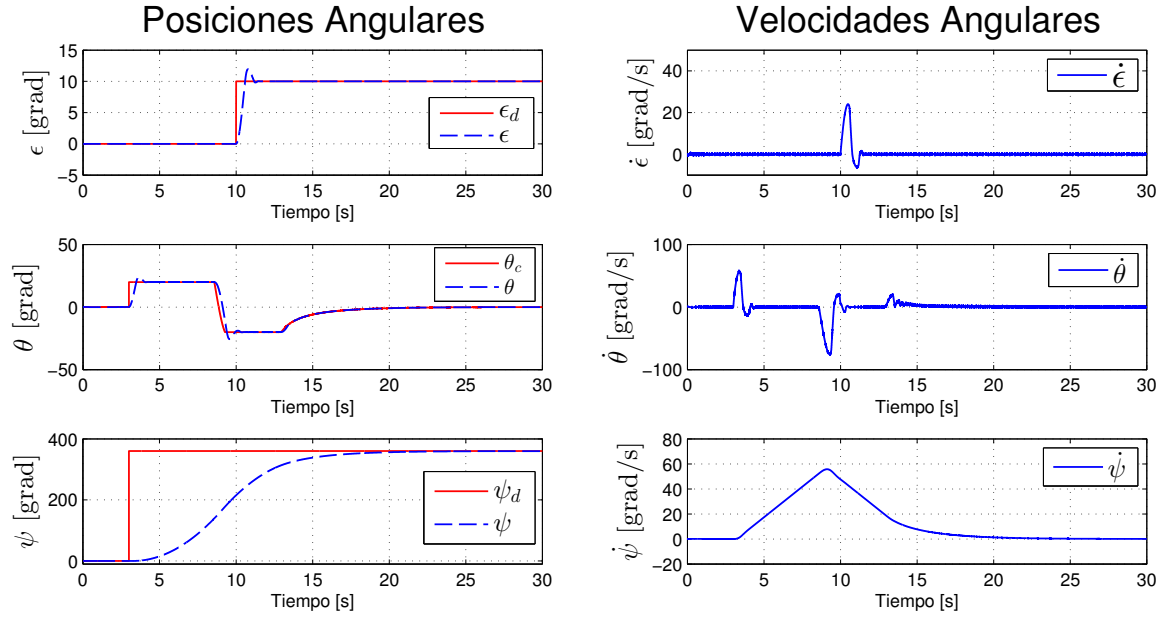


Figura 4.11: Estados del sistema, posiciones angulares y velocidades angulares estimadas, Control CID, Observador 3-STA

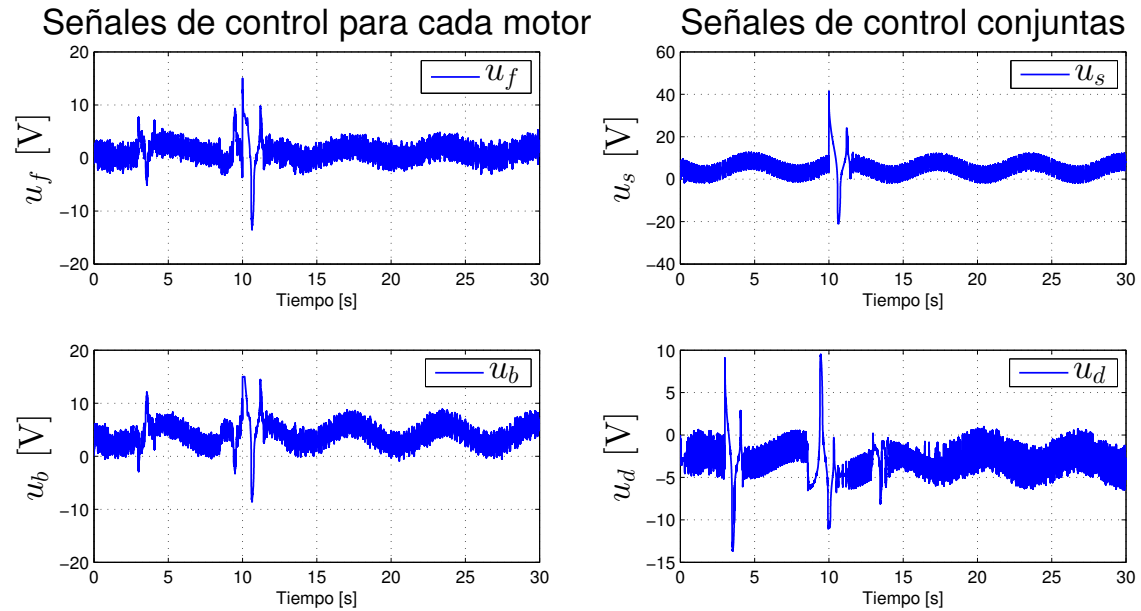


Figura 4.12: Señales de control, individuales para cada motor y conjuntas, Control CID, Observador 3-STA

4.4.6. Control CID, Diferenciador de Quinto Orden

Finalmente se presenta el caso donde se utiliza el diferenciador de quinto orden para estimar las velocidades. Al igual que para el caso del controlador con 3-STA con el diferenciador de quinto orden, ahora sí se tiene una señal de control continua y el sistema mantiene las propiedades de insensibilidad ante incertidumbres y perturbaciones. En la figura 4.13 se pueden observar los estados del sistema, los cuales tienen el mismo desempeño que los casos anteriores en cuanto a la regulación de las posiciones, mientras que aquí podemos observar que las señales estimadas de velocidad son totalmente continuas, también se puede decir que este controlador tiene una acción más agresiva en la velocidad. Por último, en la figura 4.14 se presentan las señales de control que como ya se dijo son absolutamente continuas y se mantiene la característica de robustez.

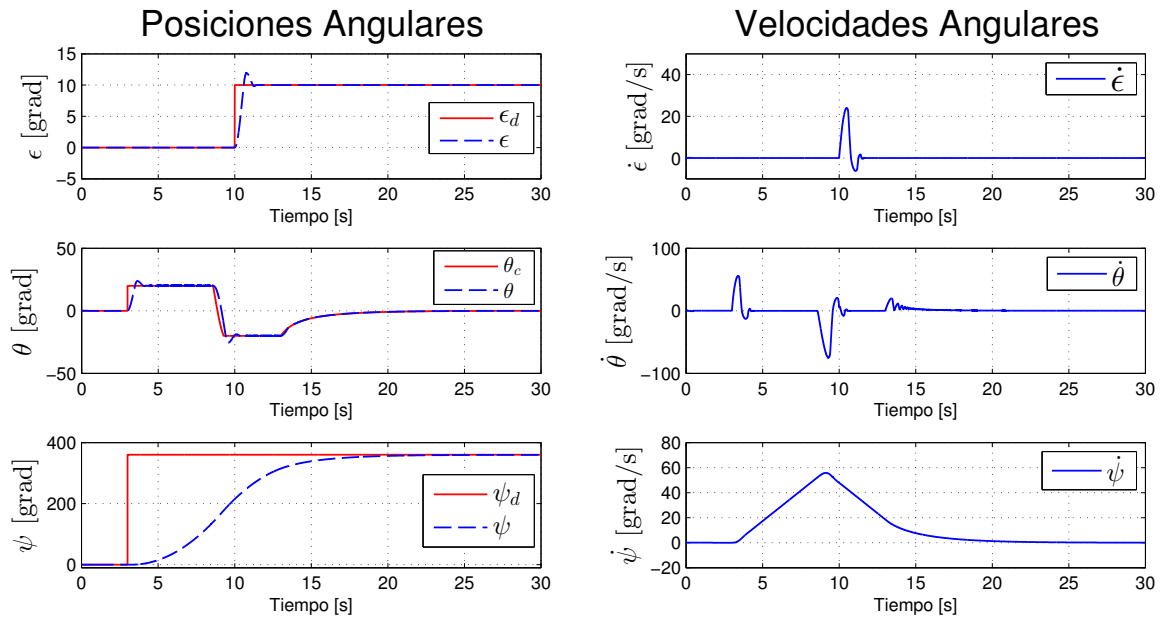


Figura 4.13: Estados del sistema, posiciones angulares y velocidades angulares estimadas, Control CID, Diferenciador de Quinto Orden

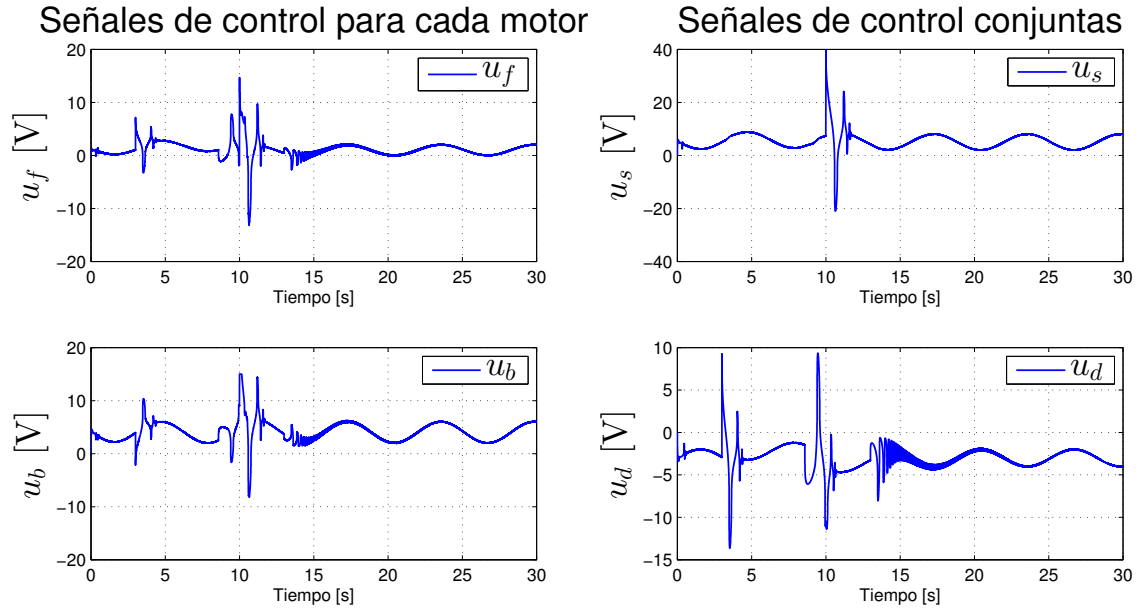


Figura 4.14: Señales de control, individuales para cada motor y conjuntas, Control CID, Diferenciador de Quinto Orden

Comentarios

De los resultados de las simulaciones anteriores se puede concluir que para la implementación física de los esquemas de control simulados, los que son viables son en los que se utiliza el diferenciador de quinto orden para la estimación de las velocidades puesto que las señales de control conservan la continuidad propia de los algoritmos utilizados y por lo tanto estos algoritmos no ponen en riesgo los actuadores del helicóptero. El resto de las simulaciones muestran que además de que se pierde continuidad del control, que es algo indeseado, las señales de control son sumamente agresivas y podrían llegar a dañar el equipo.

En cuanto a la comparación del desempeño de los controladores, por lo menos en simulación, los resultados obtenidos son sumamente similares y además satisfactorios, los controles proveen robustez al sistema y un comportamiento en lazo cerrado muy bueno, puesto que el sistema regula a las posiciones deseadas de forma rápida y precisa, con el mínimo de sobrepaso.

Resultados Experimentales

En este capítulo se presenta una descripción de la plataforma tanto de software como de hardware utilizada para el desarrollo de los experimentos que se realizaron con el helicóptero. Además se presentan los resultados experimentales del desempeño de los esquemas de control implementados. Hay que recordar que como conclusión del Capítulo 4, sólo se implementaron los esquemas de control que estiman las velocidades por medio del diferenciador de quinto orden. Se realizaron varios experimentos para evaluar el desempeño de los dos controladores a probar, el Super-Twisting de Tercer Orden y el Control Integral Discontinuo. En el primer experimento solamente se evalúa el desempeño del controlador del ángulo de elevación. Posteriormente se realizaron dos experimentos con los cuales se pretende observar el funcionamiento del esquema de control completo. El primero se realiza restringiendo el movimiento del helicóptero sólo a la mitad del espacio de trabajo correspondiente al ángulo de *travel*, en el segundo se regula sobre todo el espacio de trabajo, esto se hace con el objetivo de evaluar si una sintonización de los controladores es suficiente para diferentes tareas o sólo para un tipo de movimientos.

5.1. Plataforma experimental

Para implementar los esquemas de control diseñados, se utilizan dos programas diferentes, el primero es Matlab Simulink, en el cual por medio de diagramas de bloques se implementan los algoritmos de control y observación a utilizar. El software contiene una librería especial con un bloque de Simulink por medio del cual es posible ingresar las señales de control calculadas por el controlador hacia el helicóptero, además de leer las medidas de las posiciones que se obtienen con los codificadores incrementales, los cuales entregan una medición en cuentas y es necesario multiplicar este valor por la constante de conversión apropiada para obtener posiciones angulares en grados. Además se debe contar con el *toolbox* de Matlab Real-Time Workshop, el cual se encarga de realizar la conversión de señales digitales a analógicas cuando se realiza el experimento, por medio del hardware adecuado. Una vez que se tiene el sistema de control implementado en Simulink, el modelo se compila y es traducido de los diagramas de bloques a archivos en el lenguaje de programación C.

Una vez que se ha implementado el esquema de control, para proceder a la experimentación en tiempo real, se debe utilizar el software *Control Desk*. Este programa cuenta además con una tarjeta de entradas y salidas y adquisición de datos de la marca dSPACE, modelo 1103. Este dispositivo contiene el microprocesador en el cual se descargan, por medio del software *Control Desk*, los archivos en lenguaje C generados previamente con los algoritmos de control implementados, este componente es el que calcula el valor actual de la señal de control y que estima todo el estado del sistema a partir de las mediciones de las posiciones mediante los algoritmos implementados, todo esto se realiza en tiempo real una vez que inicia el experimento. Además *Control Desk* permite el diseño de interfaces gráficas para la visualización y captura de los datos generados en los experimentos, de esta

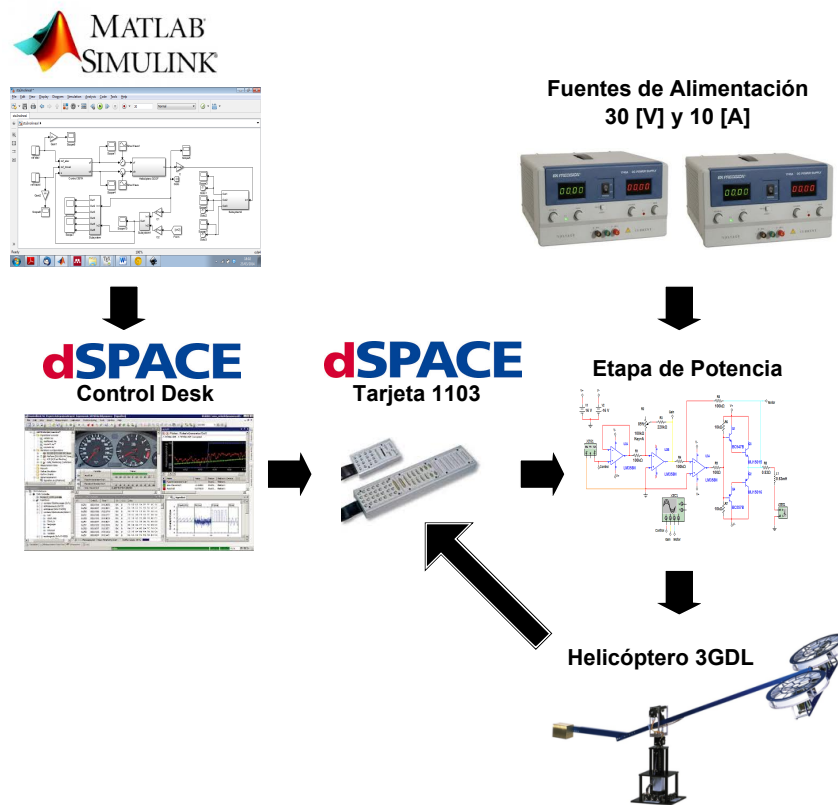


Figura 5.1: Componentes de software y hardware de la plataforma experimental

forma se extrae información acerca del desempeño del sistema de control: las posiciones medidas, las velocidades estimadas y las señales de control. También, desde esta interfaz es posible modificar las ganancias de los controladores y cambiar los valores de la referencia de posición.

Por las características del microprocesador contenido en la tarjeta dSPACE 1103, la señal de control calculada por los controladores implementados se tiene que escalar a un rango entre -1 y 1 [V]. En un instante de tiempo mientras dura el experimento, el microprocesador calcula el valor de la señal de control utilizando las posiciones medidas, que ingresan por un puerto digital de la tarjeta, y las velocidades estimadas, que calcula el mismo controlador, produciendo una señal en el rango mencionado anteriormente y la transfiere al convertidor digital a analógico de la tarjeta que produce una salida entre -10 y 10 [V], posteriormente esta señal pasa a una etapa de potencia que consiste en un amplificador clase B, es decir, amplifica tanto tensión como corriente, este finalmente manda la señal de control adecuada a los motores del helicóptero, el amplificador utilizado es para proporcionar la potencia suficiente para el correcto funcionamiento del sistema. La etapa de potencia es alimentada por tensiones simétricas que proporcionan dos fuentes de poder que pueden suministrar hasta 30 [V] y 10 [A], sin embargo la etapa de potencia sólo permite amplificar las señales que recibe de la tarjeta 1103 de dSPACE, hasta un límite de 15 [V] y los 10 [A] de la fuente, esto es adecuado para los límites de tensión y corriente que pueden soportar los motores de los propulsores del helicóptero. En la figura 5.1 se presenta un diagrama de la plataforma experimental con todos los componentes ya descritos. Además, en la figura 5.2 se muestra la interfaz gráfica diseñada en *Control Desk* para la visualización en tiempo real de los datos de los experimentos.

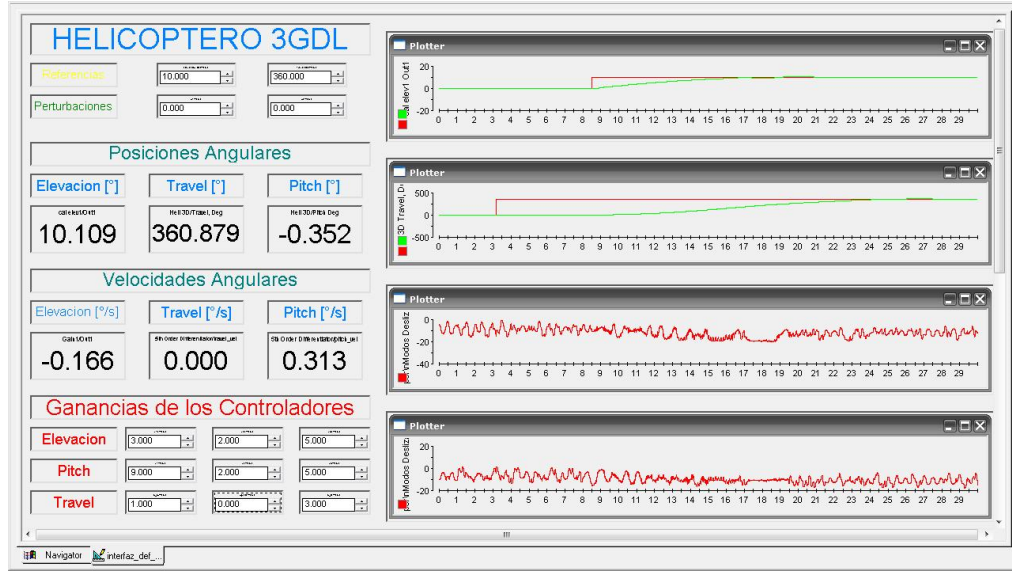


Figura 5.2: Interfaz gráfica utilizada para la visualización de datos en tiempo real

A continuación se presenta la descripción detallada de cada uno de los experimentos realizados y los resultados obtenidos. Para los cálculos en tiempo real se utilizó el método de integración Runge-Kutta de cuarto orden, además se utilizó un paso de discretización de 0.0001 [s] que es el más pequeño que soporta la tarjeta 1103 de dSPACE. Para poder tener una idea de qué tan bueno es el desempeño de los controladores implementados, se compararán los resultados de estos experimentos con los obtenidos en [5], en donde se controló el mismo sistema pero utilizando controladores PID sintonizados con métodos LQR, además de que utilizan identificación por modos deslizantes para cancelar perturbaciones en línea.

5.2. Experimento 1: Desempeño del ángulo de elevación

En este primer experimento se realiza una rutina de vuelo en la que sólo se modifica el valor del ángulo de elevación, la rutina consiste en partiendo del origen regular a -5° , posteriormente a 5° , para luego descender a -10° , posteriormente se asciende a 10° y finalmente se regresa al origen. En este experimento se quiere evaluar el desempeño del controlador de elevación, es por esto que se somete primero a cambios pequeños en la referencia y se van incrementando en 5° , hasta que se tiene un cambio de 20° . Los ángulos de *pitch* y *travel* se mantuvieron en el origen durante toda la rutina. El tiempo del experimento es de 45 [s].

Para sintonizar los controladores, inicialmente se utilizaron las ganancias diseñadas y utilizadas en las simulaciones presentadas en el Capítulo 4, sin embargo los métodos de diseño usados para elegir estas ganancias proveen estabilidad al sistema en lazo cerrado pero eso no quiere decir que se trate de la mejor sintonización, por lo que de manera experimental y a partir de los valores utilizados en las simulaciones se modificaron hasta obtener un mejor desempeño y posteriormente se corroboró que cumplieran con las restricciones teóricas correspondientes para cada controlador. A continuación se presentan las ganancias utilizadas para cada algoritmo utilizado en este experimento, así como para los diferenciadores, y los resultados obtenidos.

5.2.1. Algoritmo Super-Twisting de Tercer Orden

Las ganancias utilizadas para el experimento, tanto para la parte de la elevación del helicóptero como para la parte de *pitch* y *travel*, con las cuales se tuvo el mejor desempeño, se presentan en la tabla 5.1, hay que mencionar que estas ganancias aunque proveen un buen desempeño, no cumplen las restricciones indicadas en [9], al igual que las ganancias utilizadas para la simulaciones, como ya se había mencionado anteriormente esto es por que no fue posible encontrar el conjunto de parámetros que validan la estabilidad en lazo cerrado, sin embargo la prueba asegura suficiencia mas no necesidad, es por esto que es posible elegir las ganancias de forma experimental y de tal forma que el sistema tenga un buen desempeño.

Controladores 3-AST			
	k_1	k_2	k_3
Elevación	10	10	5
<i>Pitch</i>	11	10	5

Controlador PID			
	K_p	K_i	K_d
<i>Travel</i>	1.5	0	3

Diferenciadores				
	L_ϵ	L_θ	L_ψ	$L_{\theta_{1c}}$
Cota L	100	200	500	600

Tabla 5.1: Ganancias de los controladores 3-AST y PID, y de los diferenciadores de quinto orden.

Los resultados del experimento se presentan en las figuras 5.3 y 5.4, en la primera de éstas, se presentan los estados y en la segunda las señales de control. Observando la evolución en el tiempo de los estados del helicóptero durante el experimento, puede decirse que el controlador para el ángulo de elevación, dota al sistema de una respuesta rápida ante cambios en la referencia además de que no presenta sobrepaso. Para un cambio en la referencia de 5° el tiempo de establecimiento es de 2.5 [s], para 10° es de 2.5 [s], para un cambio de 15° es de 4 [s] y para un cambio de 20° es de 5 [s]. En [5] se regula la elevación del helicóptero a un cambio en la referencia de 4° y el tiempo de establecimiento es de aproximadamente 70 [s], al comparar con los 4 [s] para un cambio de 5° en este experimento, queda claro que el controlador utilizado es mucho más eficiente. Los ángulos de *pitch* y *travel* se mantienen en una vecindad cercana al cero y la desviación de este valor es muy pequeña.

Las velocidades estimadas no tienen ruido y proveen las señales adecuadas para el controlador. Es notorio que son algo oscilatorias, al igual que las señales de control, esto puede deberse a que los algoritmos implementados en el control tratan de cancelar los efectos de perturbaciones externas y el efecto de los controladores en conjunto afecta en cierto grado la dinámica sobre la que actúa cada uno, por ejemplo, las señal de control u_s actúa sobre el ángulo de elevación, pero además debido a las dinámicas acopladas, también tiene efectos sobre el ángulo de *travel* y sobre el ángulo de *pitch*, estos efectos tratan de ser cancelados por las señal de control u_d , y lo mismo sucede de forma contraria, los efectos conjuntos se ven reflejados en las oscilaciones de pequeña amplitud presentes en los estados del helicóptero. A pesar de esto el sistema tiene un buen desempeño en general, La señal u_s se satura a 30 [V] para evitar que las tensiones que se aplican al helicóptero puedan dañar el equipo.

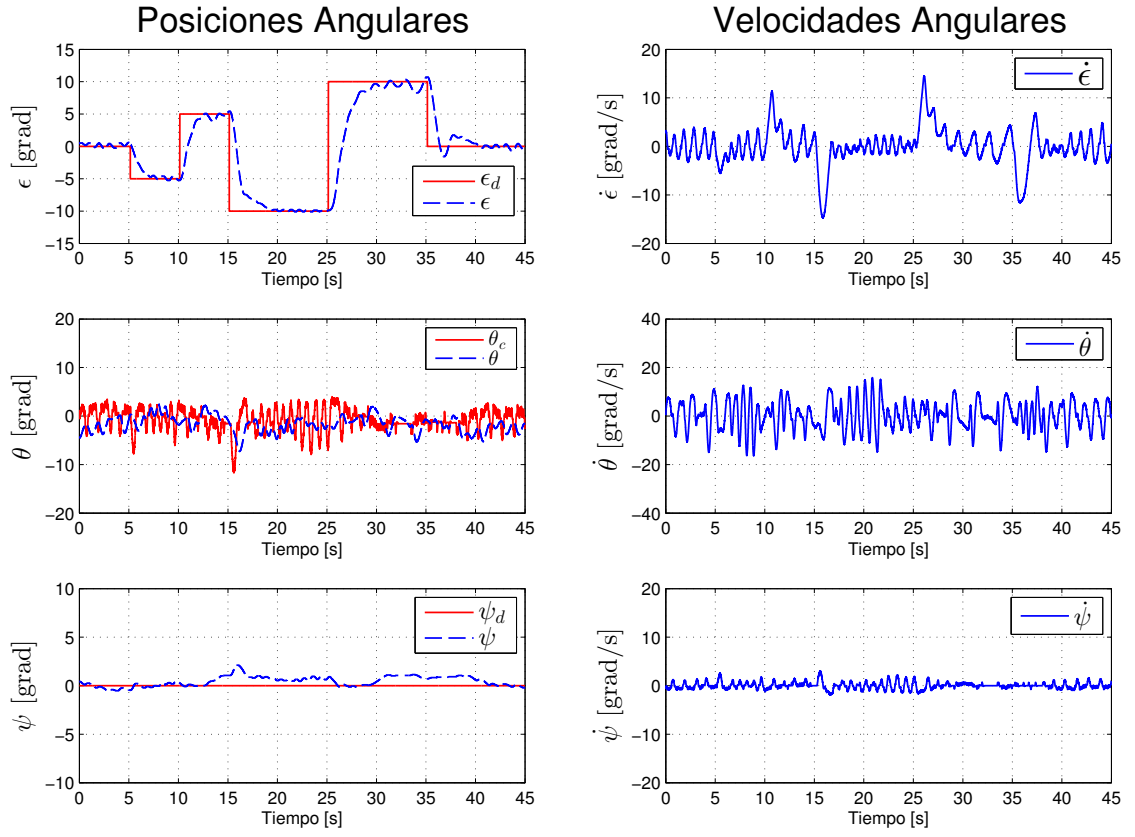


Figura 5.3: Estados del sistema, regulación de la elevación con 3-AST

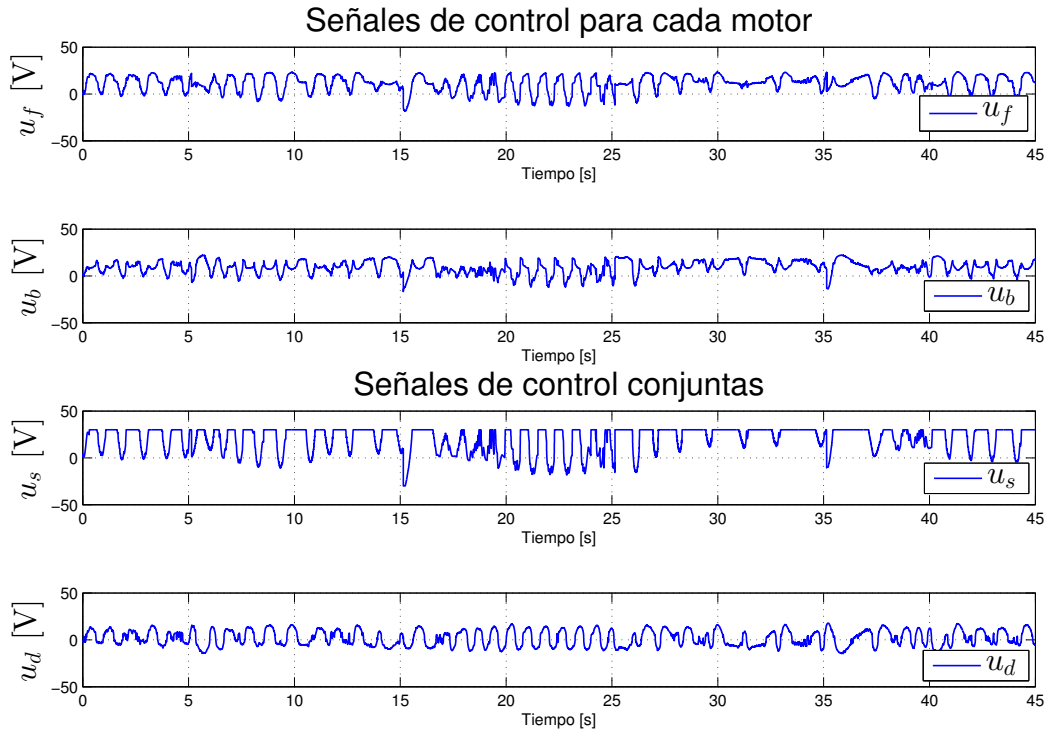


Figura 5.4: Señales de control, regulación de la elevación con 3-AST

5.2.2. Control Integral Discontinuo

Las ganancias utilizadas para el experimento, tanto para la parte de la elevación del helicóptero como para la parte de *pitch* y *travel*, con las cuales se tuvo el mejor desempeño, se presentan en la tabla 5.2, además en la tabla 5.3 se presentan los parámetros completos utilizados para los controladores CID implementados, en la figura 5.5 se presenta la comprobación gráfica correspondiente a los parámetros de los controladores de elevación y de *pitch*.

Ganancias controladores CID			
	k_1	k_2	k_3
Elevación	4.5	4.56	3
<i>Pitch</i>	8	8	3
Ganancias controlador PID			
	K_p	K_i	K_d
<i>Travel</i>	0.8	0	1.5
Ganancias diferenciador			
	L_ε	L_θ	L_ψ
Cota L	100	200	500

Tabla 5.2: Ganancias de los controladores CID y PID y del diferenciador de quinto orden

	Elevación	<i>Pitch</i>
k_1	4.5	10
k_2	4.56	9
k_3	3	6
γ_1	20	20
γ_2	3.3333	1.6667
γ_3	1.46×10^{-5}	1.47×10^{-5}
γ_{13}	1	1
γ_{23}	0.001	0.001
η	1.1	1.1

Tabla 5.3: Parámetros de los controladores CID y las funciones de Lyapunov asociadas

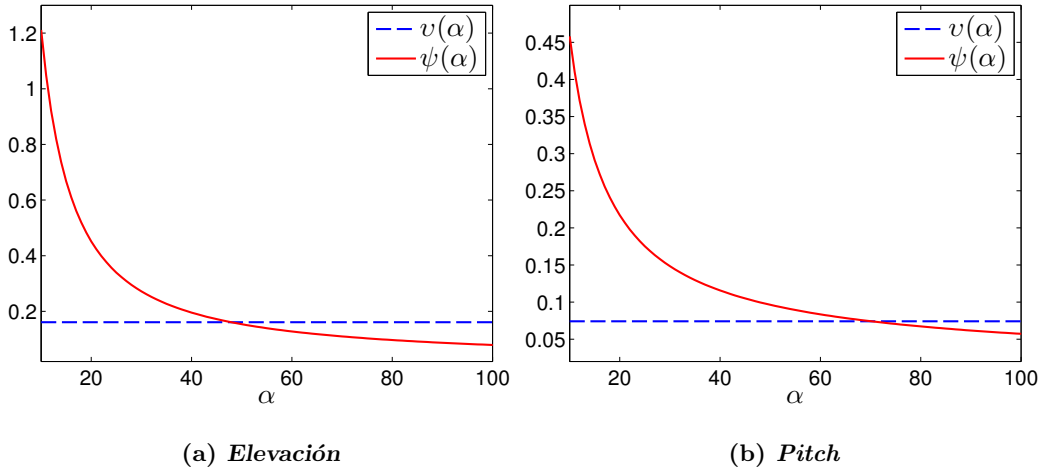


Figura 5.5: $\psi(\alpha, \lambda)$ vs. $\nu(\alpha)$, (a) parámetros de la columna 1 de la tabla 5.3. (b) parámetros de la columna 2 de la tabla 5.3.

Los resultados del experimento para el funcionamiento del helicóptero con el control integral discontinuo se presentan en las figuras 5.6 y 5.7, en donde se tiene la evolución de los estados y del control en el tiempo, respectivamente. Al analizar el desempeño del ángulo de elevación se puede apreciar que con este controlador se tienen tiempos de establecimiento muy similares al caso con el controlador 3-AST, pero las oscilaciones se ven reducidas y el controlador logra mantener al helicóptero estático en las posiciones

deseadas, es decir, tiene mejor precisión. Al comparar con el desempeño obtenido en [5], también se concluye que este controlador tiene mucho mejor desempeño. En este caso las velocidades estimadas también son continuas y adecuadas para tener un buen desempeño. Por otro lado en este caso los ángulos *pitch* y *travel* se desvían un poco más del origen.

En cuanto a las señales de control, nuevamente son un tanto oscilatorias, que como ya se explicó anteriormente posiblemente se debe a la interacción entre los dos controladores por modos deslizantes. También observando las señales de control se puede apreciar su variación cuando actúan sobre la elevación para llevar este ángulo a las posiciones deseadas, en particular, es más notorio en la señal u_s puesto que sus efectos actúan directamente en la elevación, esta señal está saturada en 30 [V] para que las tensiones que son aplicadas a los motores no superen los valores máximos permitidos. Es fácil darse cuenta además, que los señales de control son absolutamente continuas.

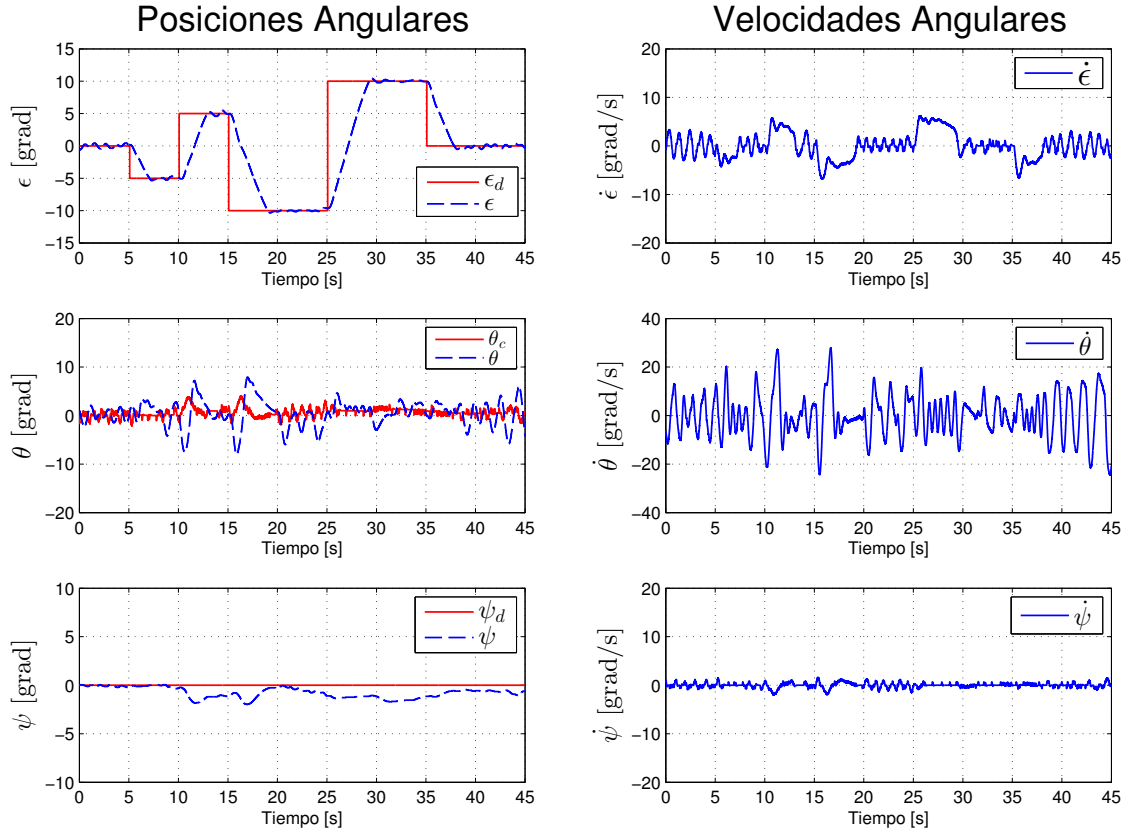


Figura 5.6: Estados del sistema, regulación de la elevación con CID

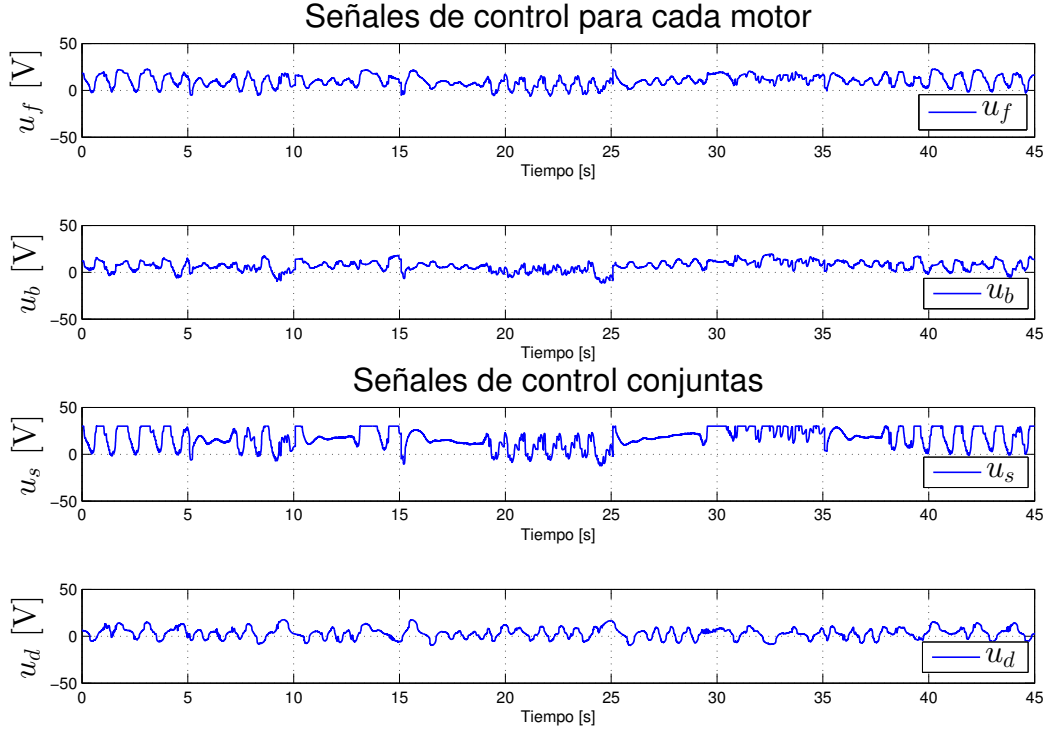


Figura 5.7: Señales de control, regulación de la elevación con CID

5.3. Experimento 2: Medio giro y regulación de elevación

Este experimento tiene una duración de 40 [s], y en él se pretende observar el desempeño de los controladores diseñados al funcionar en conjunto. La prueba consiste en regular la posición de elevación de 0° a 10° a los 5 [s], posteriormente, a los 10 [s], se regula el ángulo de *travel* a 180° , una vez que se llega a esta referencia se regresa al origen, a los 25 [s], y posteriormente, a los 35 [s], el ángulo de elevación se manda a cero. A continuación los resultados obtenidos para cada algoritmo de control.

5.3.1. Algoritmo Super-Twisting de Tercer Orden

Este experimento se realizó con las mismas ganancias que el anterior. En las figuras 5.8 y 5.9, se presentan los resultados obtenidos. Al observar los estados del sistema es claro que en el caso del ángulo de elevación, este llega a la referencia en aproximadamente 5 [s] cuando sube de 0° a 10° y alrededor de 2.5 [s] cuando la elevación baja de 10° a 0° . Sin embargo en la posición elevada este estado presenta oscilaciones que son atribuidas al funcionamiento en conjunto de los controladores, llegando a tener una desviación de hasta $\pm 2^\circ$ de la elevación deseada, es decir, se pierde precisión. En cuando a los ángulos acoplados de *pitch* y *travel*, el helicóptero tarda aproximadamente 12 [s] en dar medio giro en sentido positivo y 10 [s] en sentido negativo, presentando un error en estado estable pequeño. Hay que recordar que el control del ángulo de *travel* se realiza con un controlador PID, la trayectoria generada para llevar el helicóptero al *travel* deseado es seguido por el ángulo de *pitch* de forma un tanto lenta pero es suficiente para tener un buen desempeño en el *travel*. De forma experimental se notó que si se aumentan los valores de las ganancias del controlador de *pitch*, el seguimiento es más rápido pero las oscilaciones aumentan, por lo que se buscó tener un buen desempeño para la regulación del *travel* manteniendo las

oscilaciones en el mínimo valor posible.

Las velocidades estimadas de nueva cuenta tienen oscilaciones, pero ahora es más notorio como varía, por ejemplo, la velocidad del ángulo de *travel* para llevar éste a las posiciones requeridas, es claro que la acción del control en las velocidades es suave. Y finalmente, al observar las señales de control se observa que tienen las mismas características que en los casos anteriores y que son continuas.

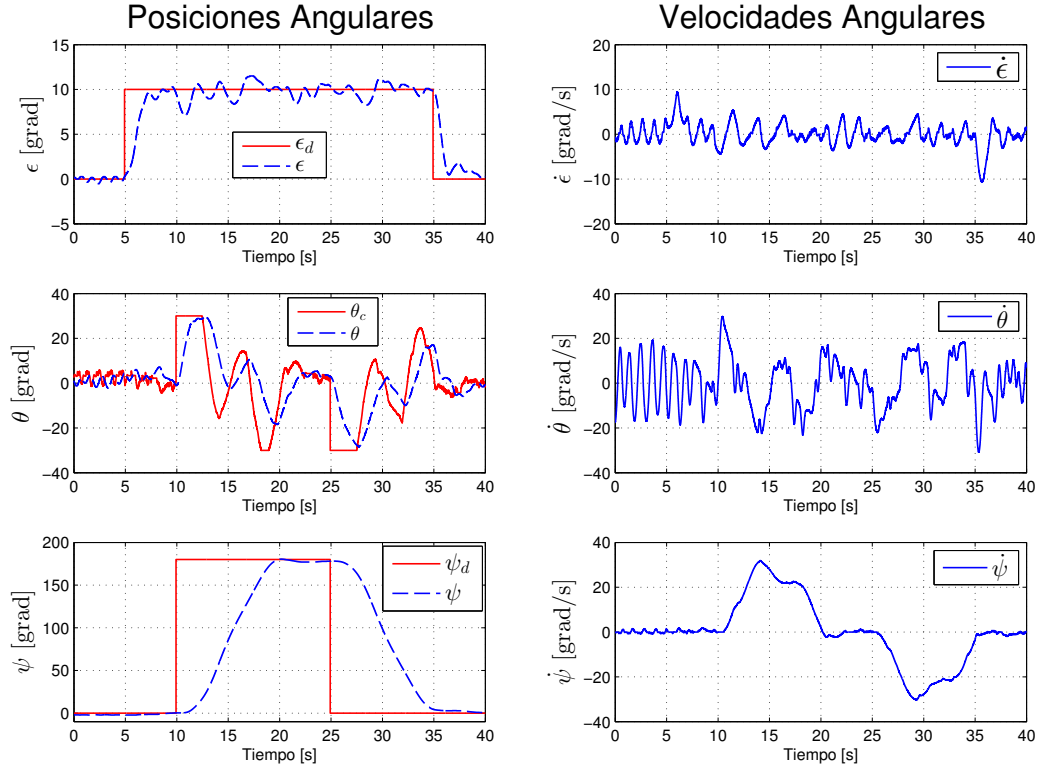


Figura 5.8: Estados del sistema, medio giro y regulación de elevación con 3-AST

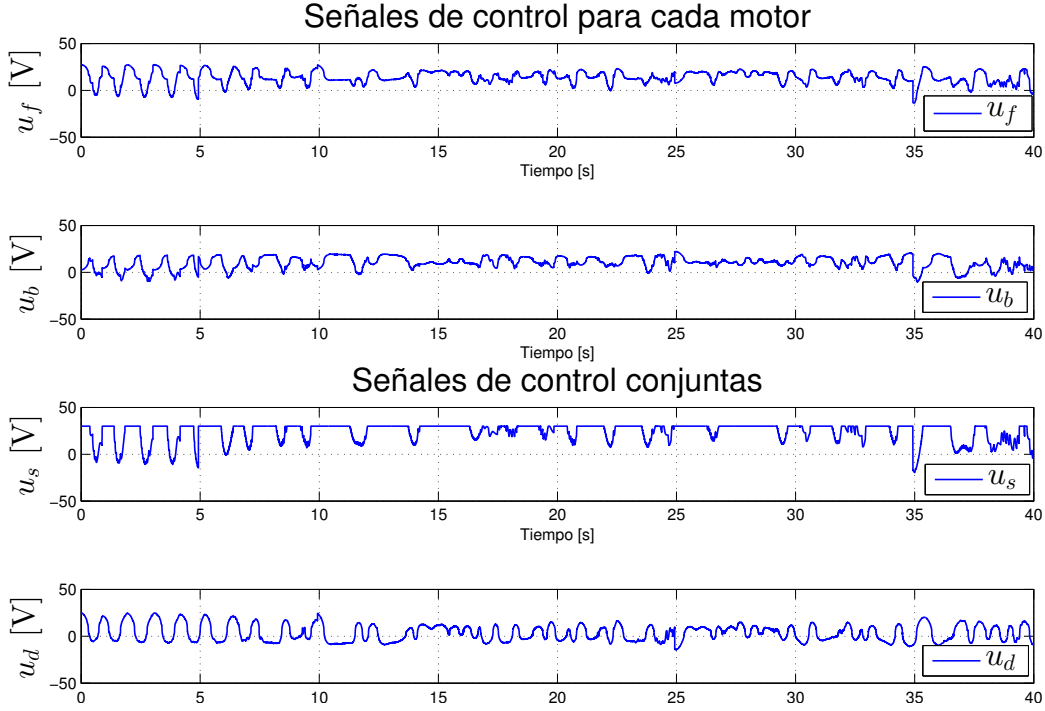


Figura 5.9: Señales de control, medio giro y regulación de elevación con 3-AST

5.3.2. Control Integral Discontinuo

También se utilizaron las ganancias del experimento anterior realizado con este controlador, en las figuras 5.10 y 5.11 se observan los estados del sistema y las señales de control, respectivamente. Al analizarlas con detenimiento se observa que en comparación con el desempeño del 3-AST, este algoritmo regula a la misma velocidad en cuanto al ángulo de elevación pero tiene oscilaciones menores. Mientras que el desempeño del subsistema *travel-pitch* es más rápido que con el 3-AST, en este caso la trayectoria calculada θ_c tiene menor variación y lleva de forma más rápida y precisa el ángulo de *travel* a 180° , y luego de este valor a 0° . En este caso los medios giros se realizan en 10 [s] en ambos sentidos, comparado con el otro algoritmo, se realizan en 2 [s] menos.

En el caso de las velocidades no hay mucha diferencia, siguen siendo un tanto oscilatorias y actúan manera adecuada para llevar el helicóptero a las posiciones deseadas. Las señales de control siguen teniendo características similares a las de los casos anteriores.

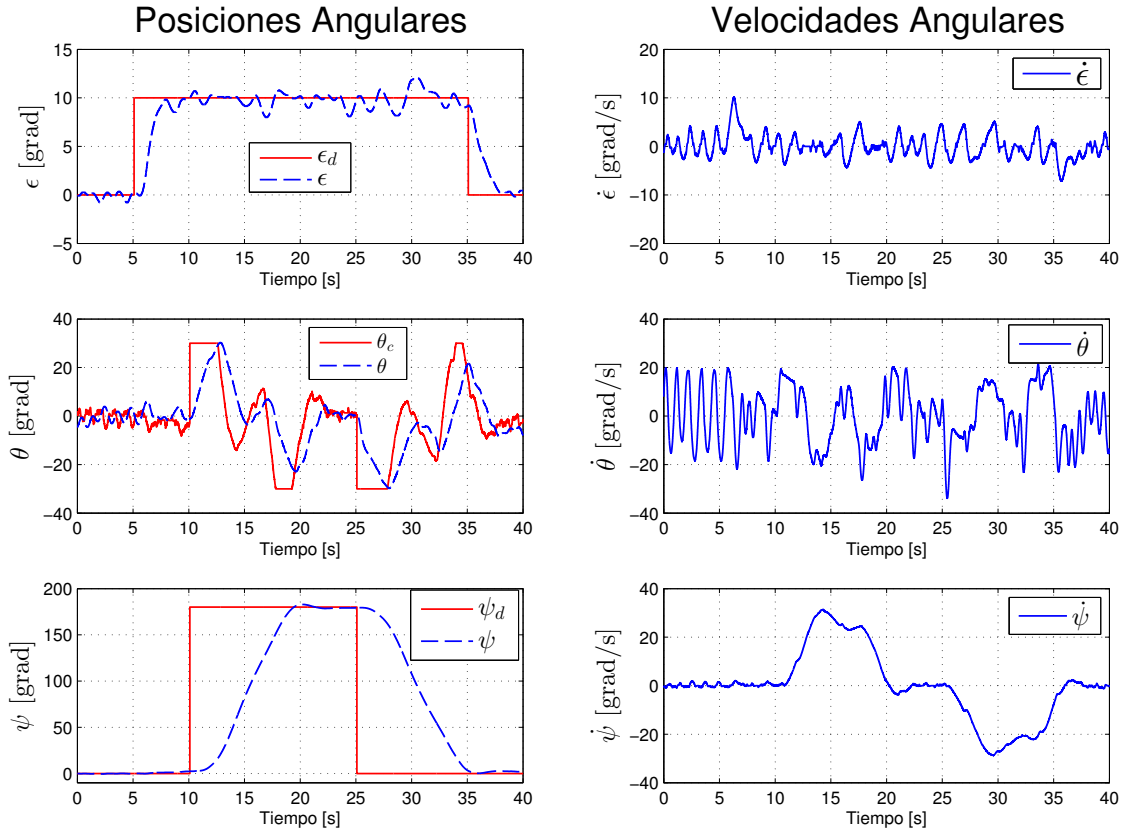


Figura 5.10: Estados del sistema, medio giro y regulación de elevación con CID

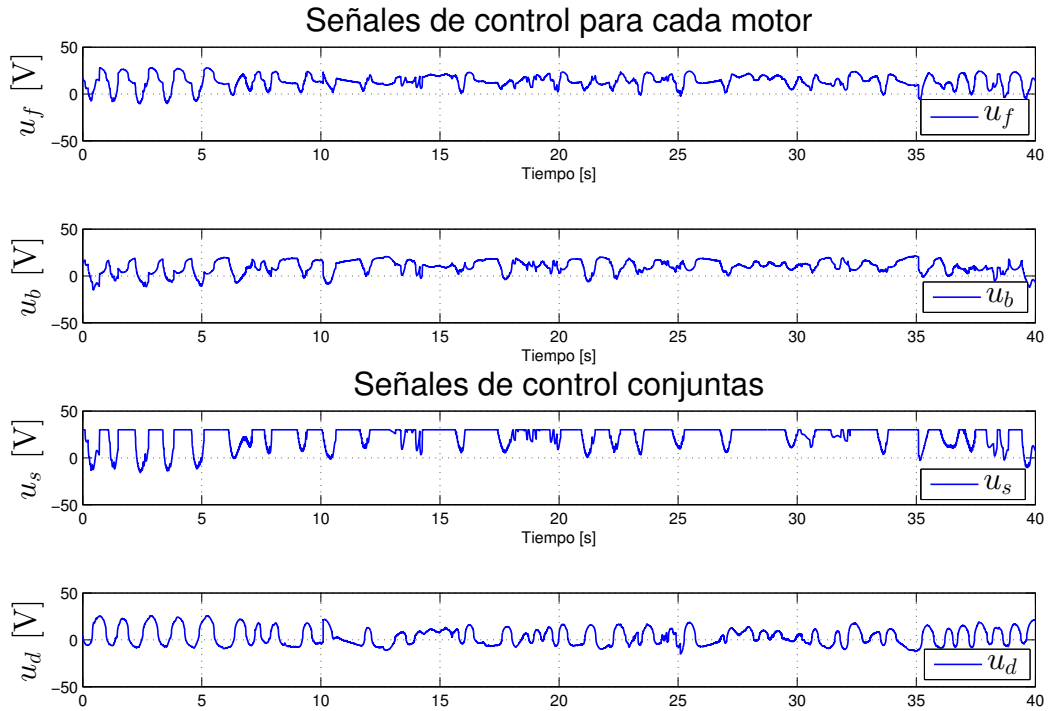


Figura 5.11: Señales de control, medio giro y regulación de elevación con CID

5.4. Experimento 3: Giro completo y regulación de elevación

Este experimento tiene una duración de 30 [s], y en él se pretende observar nuevamente el desempeño de los controladores implementados al funcionar en conjunto. La prueba consiste en regular la posición de *travel* de 0° a 360° a los 5 [s] de haber comenzado el experimento, es decir, que el helicóptero dé un giro completo alrededor de la base fija. Después de 5 [s], se cambia el valor de la referencia de la elevación a 10° , para observar como reacciona el sistema a cambios bruscos cuando se encuentra en movimiento. A continuación se presentan los resultados obtenidos con cada controlador.

5.4.1. Algoritmo Super-Twisting de Tercer Orden

Para este experimento se utilizaron las mismas ganancias que en los casos anteriores. En las figuras 5.12 y 5.13, se tienen los resultados, en la primera figura se presentan los estados del helicóptero, tanto las posiciones como las velocidades angulares, mientras que en la segunda figura se muestran las señales de control, en primer lugar las señales para cada motor y luego el efecto conjunto de éstas.

El ángulo de *travel* alcanza el valor deseado en aproximadamente 18 [s] y no presenta sobrepaso, por otro lado, el ángulo de elevación llega a la referencia en alrededor de 3 [s] y se mantiene ahí, con pequeñas oscilaciones, a pesar de que todo el sistema se encuentra en movimiento y de que el ángulo de *pitch* cambia constantemente, es claro, que cuando el cuerpo del helicóptero alcanza los 10° de elevación deseados, el desplazamiento lateral del helicóptero es más rápido que cuando la elevación es de 0° . Esto es debido que para sostener el cuerpo del helicóptero a cierta elevación se requiere mayor potencia y por lo tanto los propulsores actúan con una fuerza mayor. En [5] se realiza un experimento similar en donde se regulan la elevación con un cambio de referencia de 4° y el *travel* a un cambio de 280° , obteniendo tiempos de establecimiento de 70 [s] y 40 [s], respectivamente, es claro que el esquema implementado en este trabajo tiene mucho mejor desempeño. En este caso la velocidad de *travel* es la adecuada para llevar el cuerpo del helicóptero a la referencia sin tener sobrepaso. Las otras velocidades son similares a las de los casos anteriores, presentan ciertas oscilaciones.

En cuanto a las señales de control, se nota que la señal u_d , la encargada de controlar el ángulo de *pitch*, oscila alrededor de cierto valor medio, el cual es el necesario para realizar el seguimiento de la trayectoria calculada. Por lo demás, todas las señales de control son similares a las de los experimentos anteriores, oscilantes, pero se tiene buen desempeño.

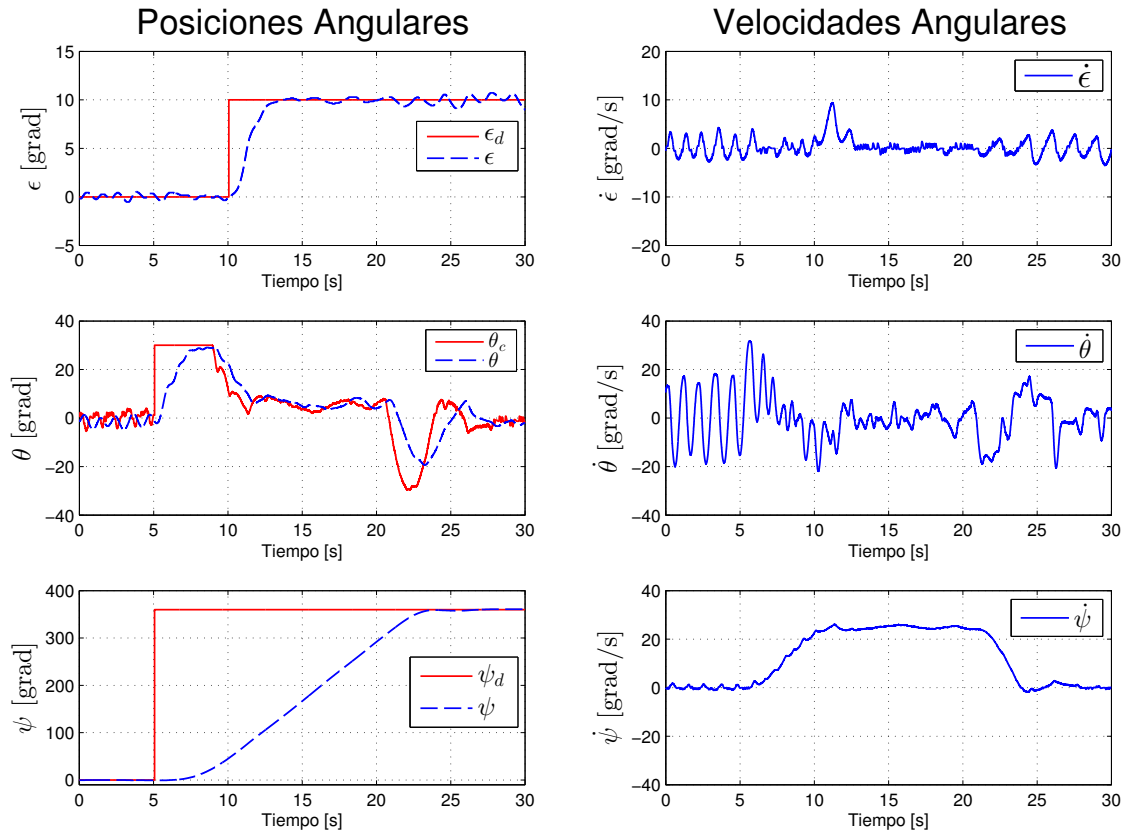


Figura 5.12: Estados del sistema, giro completo y regulación de elevación con 3-AST

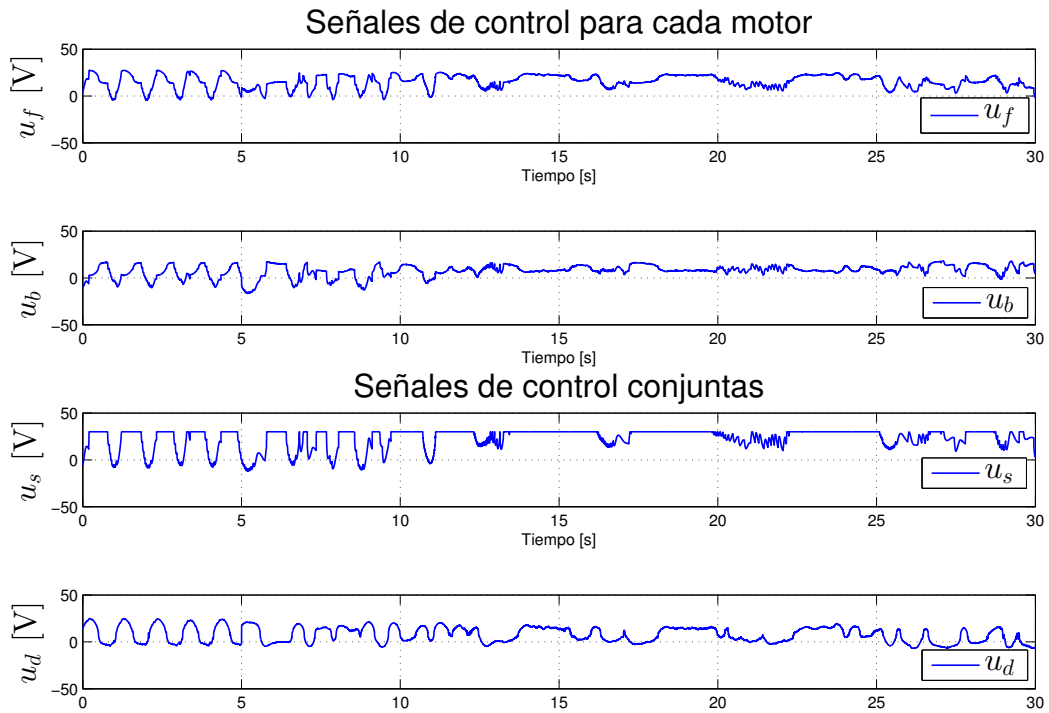


Figura 5.13: Señales de control, giro completo y regulación de elevación con 3-AST

5.4.2. Control Integral Discontinuo

También se utilizaron las ganancias del experimento anterior realizado con este controlador, en las figuras 5.14 y 5.15 se observan los estados del sistema y las señales de control, respectivamente. Al observarlas es claro que en este caso el ángulo de *travel* llega a la posición deseada en aproximadamente 15 [s], por otro lado la elevación lo hace en solo 2 [s] y como en los casos anteriores presenta oscilaciones. También es evidente que cuando el helicóptero no tiene elevación el desplazamiento lateral es menor que cuando la elevación cambia a 10° , esto como ya se explicó anteriormente es debido a que los motores requieren mayor potencia para mantener el helicóptero elevado y por lo tanto también empujan lateralmente con mayor fuerza. Al comparar con los resultados del experimento realizado en [5] y con los de esta misma rutina de vuelo pero utilizando el 3-AST, es claro que este controlador es el que muestra un mejor desempeño para esta rutina. Las velocidades y las señales de control son muy similares al caso anterior.

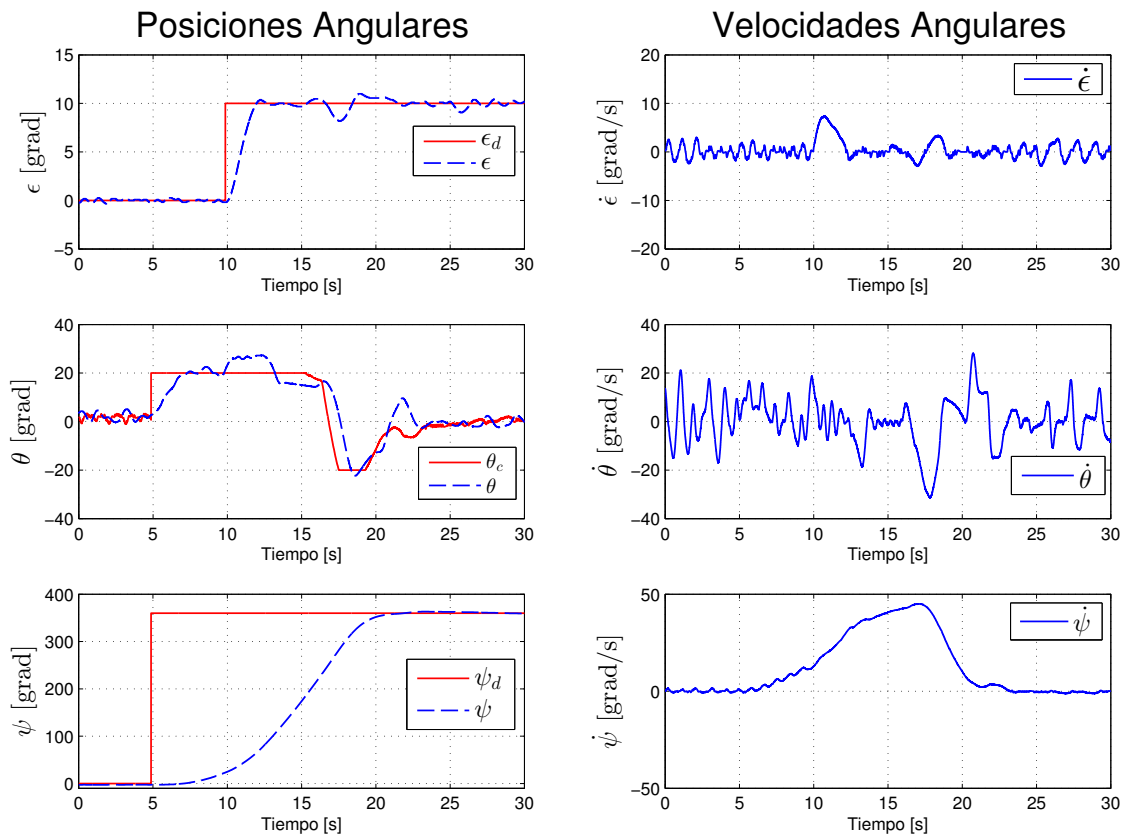


Figura 5.14: Estados del sistema, giro completo y regulación de elevación con CID

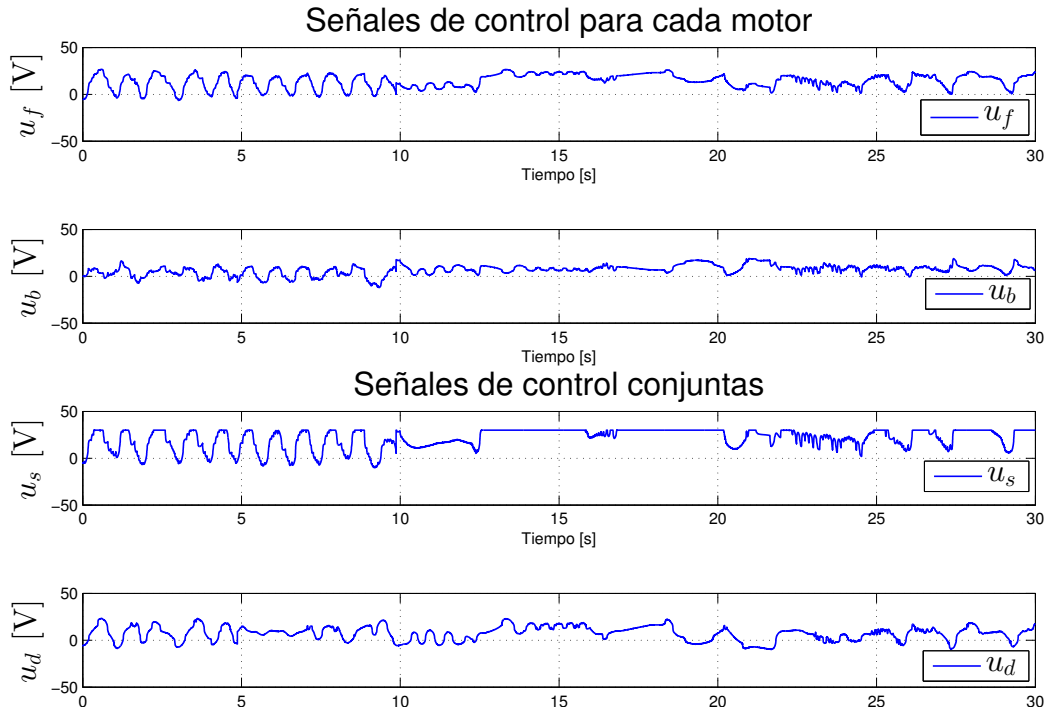


Figura 5.15: Señales de control, giro completo y regulación de elevación con CID

Comentarios

Después de observar los resultados obtenidos para cada una de las rutinas con los dos controladores por modos deslizantes de tercer orden, y de la comparación con los resultados obtenidos en [5], es bastante claro que el desempeño del sistema es mucho mejor cuando se controla con el esquema propuesto en este trabajo, utilizando los controladores basados en el Algoritmo Super-Twisting de Tercer Orden y el Controlador Integral Discontinuo. Las respuestas obtenidas del sistema son sumamente rápidas, sin sobrepaso y con gran precisión. Por otra parte, comparando el desempeño de ambos controladores por modos deslizantes se puede decir que en general el comportamiento es muy similar, sin embargo el CID produce respuestas más rápidas y los estados oscilan menos, por otro lado al comparar las señales de control, las señales producidas por el CID son un poco más suaves y se saturan menos que las producidas por el 3-AST, por lo que éstas inyectan menos energía al sistema.

Conclusiones

En este trabajo se probaron, por primera vez de forma experimental, dos nuevos algoritmos de control por modos deslizantes de orden superior, obteniendo resultados sumamente satisfactorios. El objetivo de controlar un helicóptero experimental de tres grados de libertad con estos controladores se llevó a cabo con un desempeño bastante bueno y superando los resultados obtenidos con otros esquemas de control que se encuentran en la literatura. Además también se realizó una comparación entre los algoritmos de control utilizados.

Se utilizaron el Algoritmo Super-Twisting de Tercer Orden y el Controlador Integral Discontinuo, ambos controladores por modos deslizantes de tercer orden, éstos tienen la propiedad de llevar a cero en tiempo finito la salida del sistema y sus dos primeras derivadas de forma simultánea. Es posible aplicar estos controladores directamente a sistemas de segundo orden con grado relativo dos, como lo es el helicóptero, es decir, no se requiere el diseño de una variable de deslizamiento como en otros algoritmos de control por modos deslizantes, esto presenta la ventaja de que el controlador lleva a cero en tiempo finito los estados del sistema, para el caso de los experimentos realizados en esta tesis, se llevaron a cero en tiempo finito los errores de seguimiento. Esto provee al sistema de respuestas sumamente rápidas ante cambios en las posiciones deseadas.

Para poder realizar de forma adecuada el control del helicóptero, puesto que se trata de un sistema subactuado, fue necesario diseñar de forma apropiada el esquema de control. Esto se llevó a cabo desacoplando el sistema en dos subsistemas independientes. El primero corresponde sólo la dinámica del ángulo de elevación y se aplicaron directamente los controladores de tercer orden. El segundo subsistema engloba las dinámicas de los ángulos de *pitch* y *travel*, los cuales conforman un sistema subactuado: el ángulo de *travel* se controla mediante el *pitch*. Debido a esto primero se diseñó un controlador PD para generar la trayectoria que tiene que seguir el ángulo de *pitch* para lograr llevar el *travel* a la posición deseada, y posteriormente se utilizaron los controladores de modos deslizantes de tercer orden para obligar al ángulo de *pitch* a seguir esta trayectoria, llevando a cero en tiempo finito los errores de seguimiento.

Para la sintonización de los controladores se utilizaron los métodos de diseño de las ganancias presentados en los trabajos de donde se tomaron los algoritmos. Para el caso del Algoritmo Super-Twisting de Tercer Orden, el método de diseño resulta muy restrictivo, esto debido que los parámetros a elegir se relacionan directamente con la función de Lyapunov para la prueba de estabilidad, y se tienen que cumplir 12 condiciones, aun utilizando los métodos de diseño correspondientes, se vuelve muy complicado satisfacer todas las restricciones. Finalmente no fue posible encontrar los parámetros que cumplieran las 12 condiciones y las ganancias simplemente se eligieron de tal forma que el sistema tuviera un buen desempeño en las simulaciones y en los experimentos. En el caso del Control Integral Discontinuo, a pesar de que el conjunto de parámetros a diseñar también están relacionados con la correspondiente función de Lyapunov, se tienen menos restricciones (cuatro)

6. CONCLUSIONES

y es más sencillo diseñar los parámetros por los métodos presentados. Se diseñaron para el caso nominal y posteriormente se escalan de tal forma que se pudiera compensar la dinámica no lineal del sistema. Para ambos controladores, los métodos de diseño sólo aseguran estabilidad más no quiere decir que un conjunto de parámetros válidos sean la mejor sintonización. De lo anterior se concluye que estos métodos de diseño de ganancias son complicados y tediosos, y que es más práctica la elección de estas ganancias de forma experimental, con la posterior comprobación teórica, que fue lo que se hizo en el momento de sintonizar los controladores para las pruebas experimentales.

Por otro lado, fue necesario realizar la implementación de un algoritmo de estimación para obtener las velocidades del sistema, ya que estas no se pueden medir. Se probaron tres algoritmos de observación por modos deslizantes por medio de simulaciones y finalmente se eligió el Diferenciador Robusto y Exacto de quinto orden, ya que los otros algoritmos utilizados, aunque realizan una buena estimación de las velocidades, degeneran la señal de control de los algoritmos utilizados y la vuelven discontinua debido a un problema de las características de las señales estimadas. Con este diferenciador se observó un buen desempeño en el esquema de control tanto en simulación como en la experimentación, obteniendo señales de velocidad totalmente continuas para ambos casos.

El desempeño con ambos controladores es en general bueno, la regulación de los ángulos de elevación y *pitch* se lleva a cabo de forma rápida debido a que los controladores actúan de forma directa para llevar a cero tanto los errores de posición como los de velocidad de forma simultánea. En cuanto a la regulación del ángulo de *travel*, resultó ser algo lenta, debido a que la trayectoria que es calculada en línea por el control PD es lenta también, sin embargo el seguimiento por parte del ángulo de *pitch* a esta trayectoria es bastante bueno, lo cual resulta en una compensación en el desempeño del sistema en cuanto a la velocidad del ángulo de *travel*.

Comparando los resultados obtenidos en este trabajo con los presentados en un experimento donde utilizan controladores PID, es claro que estos controladores tienen mucho mejor desempeño puesto que son más rápidos en la tarea de regulación. Por otro lado, al comparar el desempeño obtenido con cada uno de los dos algoritmos de control por modos deslizantes de tercer orden, se concluye que los dos proveen al sistema de un buen desempeño ante perturbaciones y/o incertidumbres acopladas a la señal de control, además de que realizan la regulación de los estados de forma rápida y precisa, con el inconveniente de que los estados presentan oscilaciones de pequeña amplitud. Con el Control Integral Discontinuo se tuvo mayor velocidad en la regulación a costa de oscilaciones de mayor amplitud. Con el Algoritmo Super-Twisting de Tercer Orden se logró mayor precisión pero el sistema es un poco menos rápido.

En cuanto a las señales de control, se comprobó que ambos controladores producen señales similares, son continuas aunque algo oscilatorias, lo que provoca las oscilaciones de baja amplitud ya mencionadas, esto es debido a que los señales tratan de compensar las dinámicas acopladas entre los subsistemas y afectan el rendimiento individual de cada uno, sin embargo en su conjunto realizan un buen control del sistema.

En términos generales los objetivos planteados para este trabajo se cumplieron y se aportó una de las primeras pruebas experimentales para los nuevos algoritmos de control por modos deslizantes de tercer orden desarrollados recientemente.

Teoría Básica del Control por Modos Deslizantes

Se presenta una introducción a la teoría básica de los modos deslizantes, la cual está fundamentada en [23].

A.1. Introducción al Control por Modos Deslizantes

En la ingeniería de control uno de los aspectos más importantes para el diseño de un controlador, es la obtención de un modelo matemático que representa la dinámica de la planta, sin embargo, siempre existirán discrepancias entre el sistema real y el modelo utilizado para el diseño del control. Estas discrepancias o incertidumbres son generadas por perturbaciones externas al sistema a controlar, variación de los parámetros de la planta, dinámicas parásitas y dinámicas no modeladas. Diseñar una ley de control que permita el comportamiento deseado en lazo cerrado en la presencia de perturbaciones e incertidumbres ha sido un gran problema a resolver para los investigadores en teoría de control. Esto ha conducido a una gran cantidad de investigación en los llamados controladores robustos, que son diseñados adecuadamente para resolver este problema.

Una de las técnicas de control robusto más explotada es el *control por modos deslizantes* [23], las principales características de este tipo de controladores son:

- Insensibilidad ante perturbaciones externas e internas acopladas a la señal de control.
- Convergencia a cero de la variable de deslizamiento.
- Rechazo de incertidumbres acotadas y dinámicas parásitas.
- Alta precisión al valor deseado de la referencia.

Para introducir las bases teóricas del control por modos deslizantes, se utilizará como ejemplo ilustrativo el sistema físico conformado por una masa unitaria que se desplaza linealmente, como se observa en la figura A.1. Se toman como estados del sistema la posición y la velocidad de la masa, es decir, $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$, de esta manera el sistema puede expresarse como,

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 & x_1(0) = x_{10} \\ \dot{x}_2 = u + f(x_1, x_2, t) & x_2(0) = x_{20} \end{cases}, \quad (\text{A.1})$$

en donde u es la entrada de control, y el término de incertidumbre $f(x_1, x_2, u)$, considerado como la fricción seca y viscosa del sistema, así como otras fuerzas externas de resistencia,

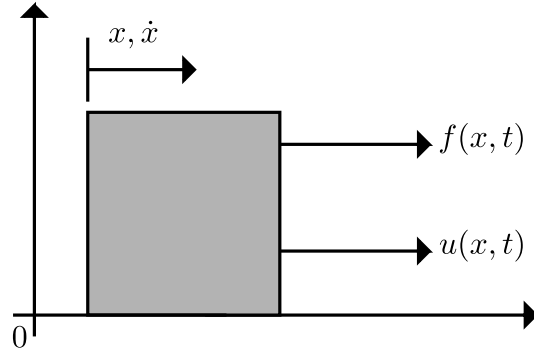


Figura A.1: Masa unitaria con movimiento unidimensional

es acotado, i.e., $|f(x_1, x_2, u)| \leq L > 0$. Se desea diseñar una ley de control $u(x_1, x_2)$ que lleve la masa al origen del sistema de manera asintótica, es decir, la variable $u(x_1, x_2)$ debe llevar los estados del sistema a cero: i.e., $\lim_{x \rightarrow \infty} x_1, x_2 = 0$.

Este problema aunque parece sencillo, no resulta tan fácil de resolver, esto debido a la existencia de la perturbación acotada $f(x_1, x_2, t)$. Se debe lograr la convergencia asintótica de los estados a cero a pesar del término de perturbación. Utilizando un controlador lineal por realimentación de estados de la forma,

$$u = -k_1 x_1 - k_2 x_2, \quad k_1 > 0, \quad k_2 > 0, \quad (\text{A.2})$$

sólo se puede lograr el objetivo de control cuando $f(x_1, x_2, u) \equiv 0$ y además sólo logra llevar a los estados a un dominio acotado $\Omega(k_1, k_2, L)$ para $|f(x_1, x_2, t)| \leq L > 0$.

Ejemplo A.1 Los resultados de simulación del sistema en las ecs. (A.1) y (A.2) con $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = -2$, $k_1 = 3$, $k_2 = 4$ y $f(x_1, x_2, t) = \sin(2t)$, muestran el desempeño del controlador con y sin perturbaciones, los resultados se presentan en las figuras A.2(a) y A.2(b).

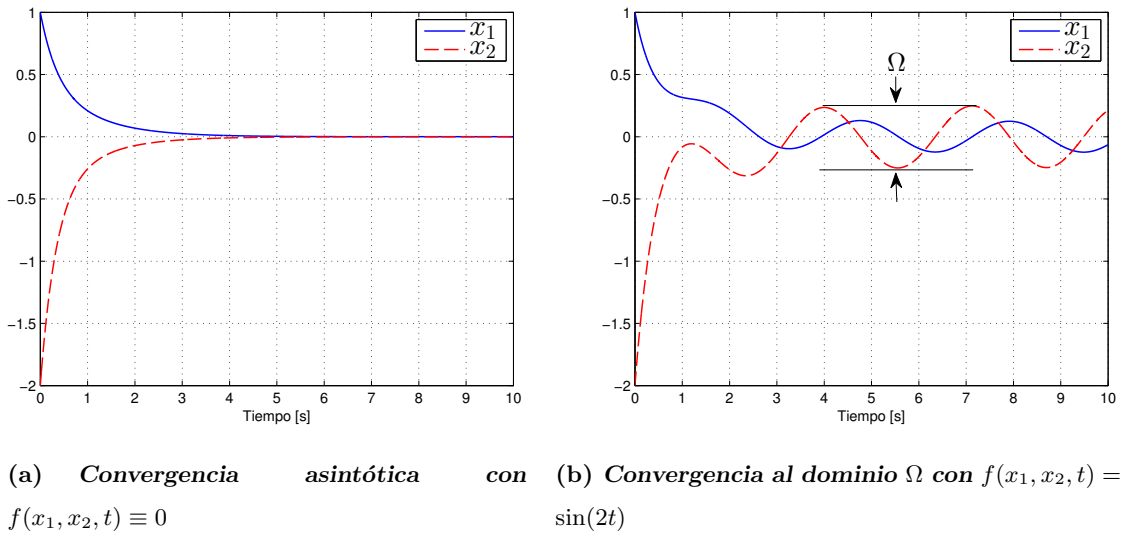


Figura A.2: Estados del sistema para el caso nominal y el caso perturbado

Después de observar los resultados obtenidos de la simulación del movimiento de la masa unitaria, se puede concluir que el controlador (A.2) no es robusto, pues ante perturbaciones acopladas a la señal de control no se tiene un buen desempeño.

A.1.1. Conceptos Principales

Para resolver el problema de control planteado en la sección anterior, del sistema (A.1), se elige la siguiente dinámica deseada,

$$\dot{x}_1 + cx_1 = 0, \quad (\text{A.3})$$

la cual es una ecuación diferencial homogénea, lineal e invariante en el tiempo. Sabiendo que $x_2(t) = \dot{x}_1$, la solución general para la ec. (A.3) y su derivada son,

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_1(0)e^{-ct} \\ x_2(t) &= \dot{x}_1 = -cx_1(0)e^{-ct}, \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

de las ecuaciones anteriores puede notarse que los dos estados $x_1(t)$ y $x_2(t)$ convergen de forma asintótica a cero eligiendo el valor apropiado del parámetro c . También se puede notar que la perturbación acoplada $f(x_1, x_2, t)$ no tiene efectos sobre la dinámica deseada definida en la ec. (A.3), a continuación se determinará la entrada de control u que permita esto. Primero se introduce una nueva variable de estado en el sistema (A.1), llamada *variable de deslizamiento*, definida como,

$$\sigma = \sigma(x_1, x_2) = x_2 + cx_1, \quad c > 0, \quad (\text{A.5})$$

sí la ec. (A.5) se reescribe de la forma:

$$\sigma = x_2 + cx_1 = 0, \quad c > 0, \quad (\text{A.6})$$

representa una línea recta en el espacio de estados, y se le denomina *superficie de deslizamiento*, cuando esta variable toma el valor de cero, los estados del sistema (A.1) también deben de valer cero.

Para lograr que las variables de estado x_1 y x_2 tiendan de forma asintótica a cero, i.e., $\lim_{x \rightarrow \infty} x_1, x_2 = 0$ en presencia de la perturbación acoplada $f(x_1, x_2, t)$, es necesario llevar la superficie de deslizamiento, σ en la ec. (A.6), a cero en tiempo finito por medio de la ley de control u . Para resolver este problema se utilizarán técnicas de Lyapunov. la dinámica de σ se obtiene derivando la ec. (A.6) y utilizando la ec. (A.1), con las cuales se obtiene:

$$\dot{\sigma} = cx_2 + f(x_1, x_2, t) + u, \quad \sigma(0) = \sigma_0, \quad (\text{A.7})$$

para la ecuación anterior se propone la siguiente función candidata de Lyapunov:

$$V = \frac{1}{2}\sigma^2, \quad (\text{A.8})$$

para poder asegurar la convergencia asintótica de la ec. (A.7) al punto de equilibrio $\sigma = 0$ de forma global, se deben satisfacer las siguientes condiciones:

- $\dot{V} < 0$ para $\sigma \neq 0$,
- $\lim_{|\sigma| \rightarrow \infty} V = \infty$,

es un hecho que la segunda condición se satisface para la ec. (A.8). Para probar convergencia en tiempo finito de σ , la primera condición se reescribe como,

$$\dot{V} \leq -\alpha V^{\frac{1}{2}}, \quad \alpha > 0, \quad (\text{A.9})$$

de esta forma se puede demostrar convergencia en tiempo finito. Se resuelve la desigualdad en la ec. (A.9), utilizando el método de separación de variables e integrando en el intervalo $0 \leq \tau < t$, con lo cual se obtiene,

$$V^{\frac{1}{2}}(t) \leq -\frac{1}{2}\alpha t + V^{\frac{1}{2}}(0),$$

de esta forma, $V(t)$ alcanza el punto de equilibrio $\sigma = 0$ en tiempo finito, delimitado por,

$$t_r \leq \frac{2V^{\frac{1}{2}}(0)}{\alpha}. \quad (\text{A.10})$$

Con lo anterior, queda demostrado que la entrada de control u a determinar, que satisface la ec. (A.9), llevará la variable de deslizamiento σ a cero en tiempo finito y la mantendrá ahí posteriormente.

Ahora para calcular la entrada de control u requerida, se evalúa la derivada de $V(x)$ a lo largo de la trayectoria $\dot{\sigma}$,

$$\dot{V} = \sigma \dot{\sigma} = \sigma (cx_2 + f(x_1, x_2, t) + u). \quad (\text{A.11})$$

Con el objetivo de hacer que la dinámica de la superficie de deslizamiento σ sea cero, se elige $u = -cx_2 + \nu$, sustituyendo esto en la ec. (A.11) y considerando la cota de la perturbación como $|f(x_1, x_2, t)| < L \forall t$, se tiene lo siguiente

$$\dot{V} = \sigma (f(x_1, x_2, t) + \nu) = \sigma f(x_1, x_2, t) + \sigma \nu \leq |\sigma|L + \sigma \nu, \quad (\text{A.12})$$

tomando en cuenta la ec. (A.8), la condición (A.9) puede reescribirse como

$$\dot{V} = -\alpha V^{\frac{1}{2}} = -\frac{\alpha}{\sqrt{2}}|\sigma|, \quad \alpha > 0, \quad (\text{A.13})$$

y combinando las ecs. (A.12) y (A.13) puede escribirse

$$\dot{V} = -\frac{\alpha}{\sqrt{2}}|\sigma| \leq |\sigma|L + \sigma \nu. \quad (\text{A.14})$$

Es importante notar que la desigualdad anterior debe ser válida para que la superficie de deslizamiento σ tienda a cero en tiempo finito. Tomando la desigualdad (A.14) y despejando la variable ν , se obtiene

$$\nu \geq -\left(L + \frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right) \frac{|\sigma|}{\sigma}.$$

El término $|\sigma|/\sigma = \sigma/|\sigma|$ es conocido como la función signo de la variable σ y se define como

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}, \quad (\text{A.15})$$

y además

$$\text{sign}(0) \in [-1, 1].$$

De acuerdo con la ec. (A.15), el término ν , se define como

$$\nu = -\rho \text{sign}(\sigma) \quad (\text{A.16})$$

en donde ρ es la ganancia del controlador que debe ser mayor que la cota de la derivada de la perturbación y está definida como

$$\rho = L + \frac{\alpha}{\sqrt{2}}. \quad (\text{A.17})$$

De lo anterior, podemos concluir que el control que estabiliza σ en tiempo finito es

$$u = -cx_2 - \rho \text{sign}(\sigma). \quad (\text{A.18})$$

Del análisis llevado a cabo, algunos aspectos importantes a destacar son los siguientes:

- La variable $\dot{\sigma}$ debe estar expresada en términos del control u para poder diseñar correctamente el control (A.18). Esto debe ser considerado al momento de diseñar la dinámica deseada en la ec. (A.5).
- La ganancia (A.17) está conformada por dos términos, el primero se encarga de compensar la perturbación $f(x_1, x_2, t)$ que afecta al sistema, mientras que el segundo término $\frac{\alpha}{\sqrt{2}}$ es el encargado de determinar el tiempo t_r en el que la superficie de deslizamiento σ llega a cero, que está dado en la ec. (A.10). Mientras más grande sea α , el tiempo t_r será menor.
- El controlador presentado en la ec. (A.18) es llamado un *controlador por modos deslizantes*.
- La condición (A.9) puede reescribirse como

$$\sigma \dot{\sigma} \leq -\frac{\alpha}{\sqrt{2}} |\sigma| \quad (\text{A.19})$$

la cual es conocida como condición de alcanzabilidad.

- Al aplicar el control (A.18) al sistema (A.1), cuando $t > t_r$ se dice que el sistema se encuentra en un *modo deslizante ideal*.

Ejemplo A.2 Los resultados de simulación del comportamiento del sistema (A.1) con el control definido por las ecs. (A.6) y (A.18), las condiciones iniciales $x_1 = 1$, $x_2 = -2$, la ganancia del controlador $\rho = 2$, el parámetro $c = 1.5$ y la perturbación $f(x_1, x_2, t) = \sin(2t)$ para propósitos de simulación, se muestran en las figuras A.3(a), A.3(b), A.4(a) y A.4(b).

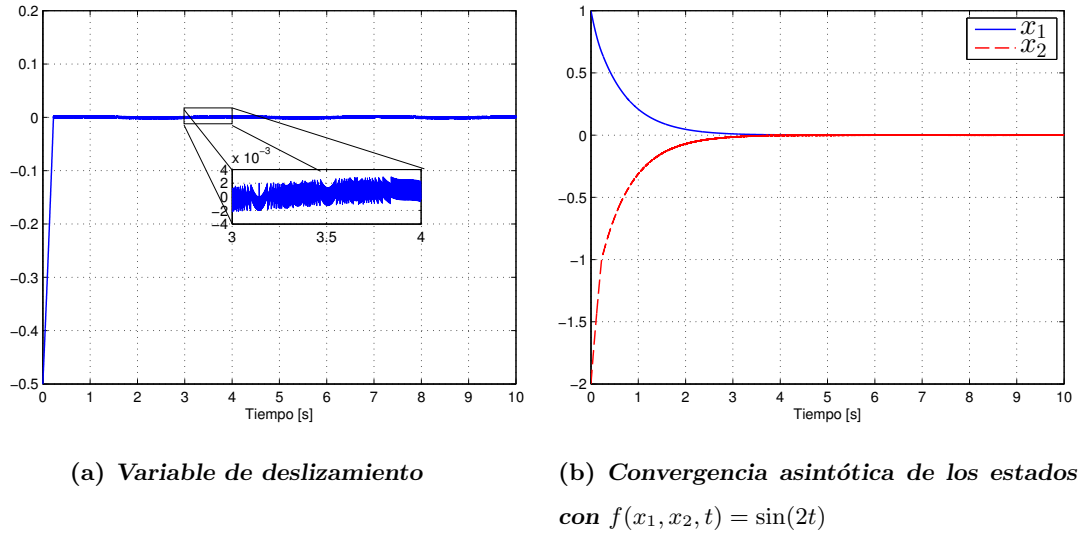


Figura A.3: Variable de deslizamiento y estados del sistema

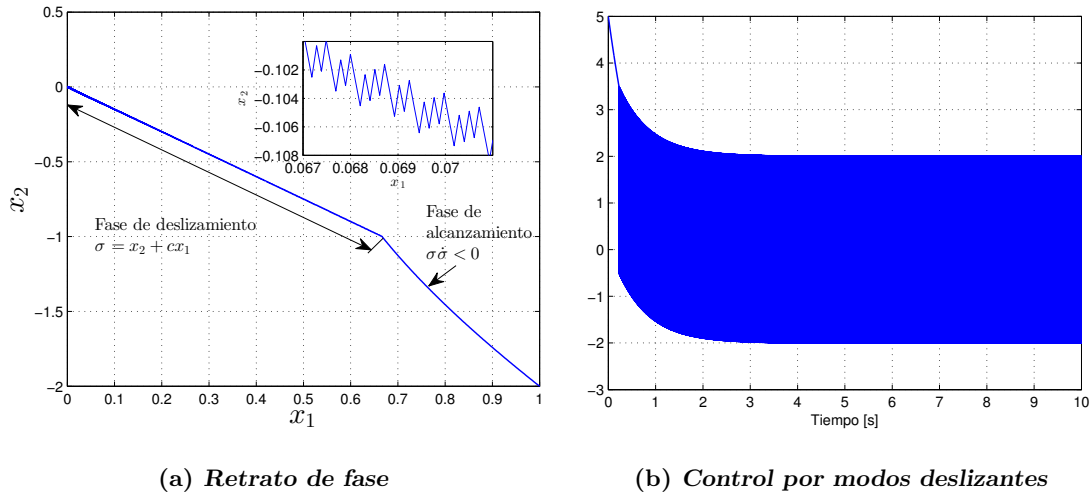


Figura A.4: Trayectoria del sistema y señal de control

En la figura A.3(a) se observa la convergencia a cero en tiempo finito de la variable de deslizamiento, en esta misma figura se hace un acercamiento a la superficie para apreciar el fenómeno de *chattering*. La convergencia a cero de forma asintótica de los estados x_1 y x_2 a pesar de la presencia de la perturbación acotada $f(x_1, x_2, t) = \sin(2t)$ se aprecia en la figura A.3(b).

En el plano de fase mostrado en la figura A.4(a) se pueden apreciar las dos etapas de la superficie de deslizamiento, primero la etapa de alcanzamiento, donde la superficie es llevada a cero por el controlador y posteriormente la etapa de modo deslizante, en la cual los estados se deslizan sobre la superficie hasta llegar a cero, en la figura también se puede observar un acercamiento a la superficie de deslizamiento, en donde se observa un movimiento de *zig-zag* de pequeña amplitud y alta frecuencia, este movimiento lo experimentan los estados (*chattering*). Finalmente, se puede observar el control por modos deslizantes en la figura A.4(b), éste conmuta a una frecuencia muy alta inversamente

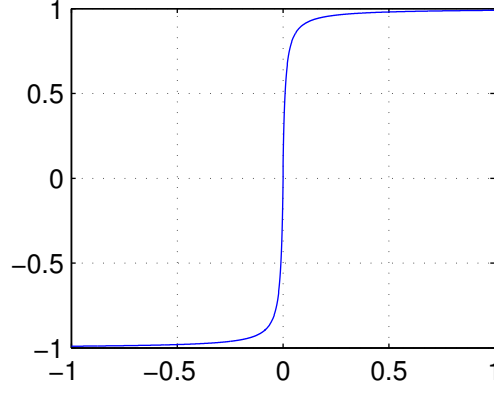


Figura A.5: Función sigmoide

proporcional al paso de muestro 10^{-4} utilizado en la simulación. Esta conmutación de alta frecuencia causa el movimiento en *zig-zag* de la superficie y los estados. Teóricamente, en un modo deslizante ideal la frecuencia de conmutación es infinita y la amplitud del movimiento de *zig-zag* es cero.

A.1.2. *Chattering*: Eliminación y Atenuación

En la mayoría de las aplicaciones de control es importante evitar el fenómeno de *chattering* puesto que en aplicaciones donde se requiere mucha precisión no es aceptable que suceda el movimiento de alta frecuencia. Además de que también los actuadores se deterioran rápidamente. Es preferible manejar señales de control continuas y suaves, pero al mismo tiempo es necesario mantener la propiedad de robustez e insensibilidad ante perturbaciones y dinámicas no modeladas.

A.1.2.1. Eliminación de Chattering: Cuasi-Modo Deslizante

Una solución para que la señal de control ec. (A.18) sea continua y suave, es aproximar la función $\nu = -\rho \text{sign}(\sigma)$ por medio de una función continua y suave, por ejemplo, se puede utilizar la función *sigmoide*:

$$\text{sign}(\sigma) \approx \frac{\sigma}{|\sigma| + \epsilon}$$

en donde ϵ es un escalar positivo. Es importante notar que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\sigma}{|\sigma| + \epsilon} = \text{sign}(\sigma)$$

el valor de ϵ debe ser pequeño y así para $\sigma \neq 0$ asegurar una señal de control suave y continua. En la figura A.5 se puede observar la función sigmoide.

Ejemplo A.3 Los resultados de la simulación del sistema (A.1) con el controlador cuasi-modo deslizante

$$u = -cx_2 - \rho \frac{\sigma}{|\sigma| + \epsilon}$$

y las mismas condiciones que en el ejemplo A.1 se pueden observar en las figuras A.6(a), A.6(b) y A.7. Se puede apreciar que este controlador no proporciona convergencia en

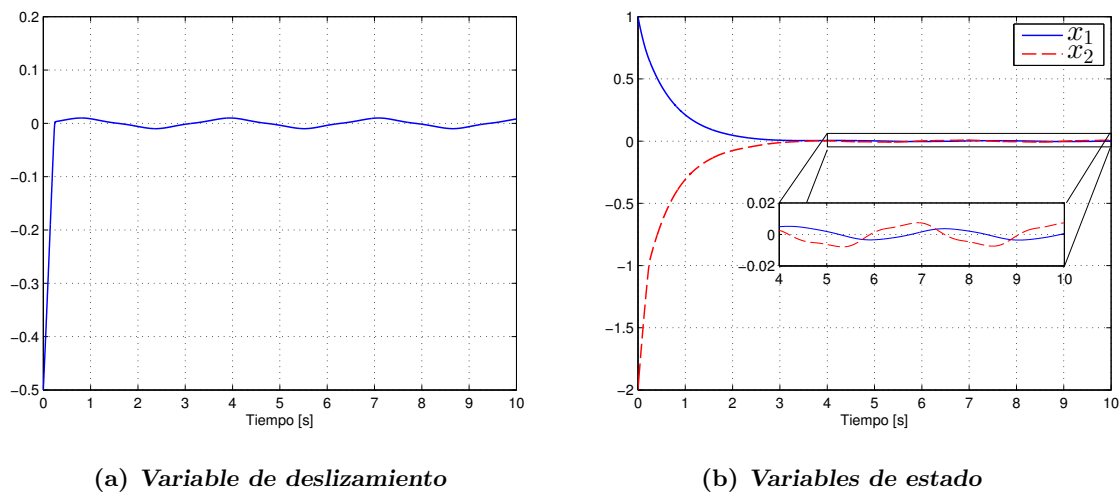


Figura A.6: Sistema controlado con cuasi-modo deslizante

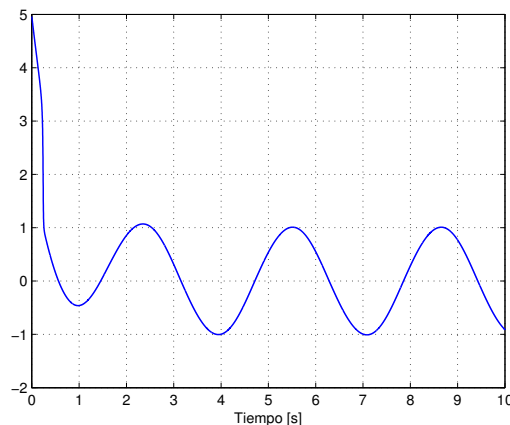


Figura A.7: Señal de control continua

tiempo finito de la superficie de deslizamiento a cero, a su vez, los estados no tienden a convergencia asintótica a cero, en presencia de la perturbación acotada $f(x_1, x_2, t) = \sin(2t)$; sino que, tanto la variable deslizante, como los estados convergen a vecindades cercanas a cero. La ley de control diseñada es continua y suave pero a cambio se pierde robustez y por lo tanto precisión.

A.1.2.2. Atenuación de chattering: Modo deslizante asintótico

Otra forma de poder diseñar un control por modos deslizantes es “esconder” la señal de control discontinua al integrarla. Este método se denomina *atenuación de chattering* puesto que la señal de control conserva un mínimo de *chattering* después de la integración de la señal de conmutación a alta frecuencia.

El sistema (A.1) puede ser reescrito como

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 & x_1(0) = x_{10} \\ \dot{x}_2 = u + f(x_1, x_2, u) & x_2(0) = x_{20} \\ \dot{u} = \nu & u(0) = 0 \end{cases} \quad (\text{A.20})$$

Hasta ahora sabemos que si la variable de deslizamiento es llevada a cero en tiempo finito $t = t_r$, entonces los estados convergen de forma asintótica a cero de acuerdo con la ec. (A.4) para todo $t \geq t_r$ en presencia de una perturbación acotada. Ahora para poder atenuar el efecto de *chattering* se debe conocer también la cota de la perturbación $|f(x_1, x_2, t)| = L$, pero además también se requiere que la perturbación que afecta el sistema sea suave y que su derivada temporal sea acotada también, $|\dot{f}(x_1, x_2, t)| = \bar{L}$.

Para poder atenuar el *chattering* se introduce una nueva variable de deslizamiento

$$s = \dot{\sigma} + \bar{c}\sigma.$$

Ahora se diseñará una ley de control ν para que $s \rightarrow 0$ con convergencia en tiempo finito, con esto un modo deslizante ideal ocurre en la superficie de deslizamiento

$$s = \dot{\sigma} + \bar{c}\sigma = 0, \quad (\text{A.21})$$

y de esta manera se logra que $\sigma, \dot{\sigma} \rightarrow 0$ junto con $x_1, x_2 \rightarrow 0$, mientras aumenta el tiempo, aun con la presencia de la perturbación acotada $f(x_1, x_2, t)$. Pero debemos notar que no se tiene un modo deslizante ideal, sino que ocurre un *modo deslizante asintótico* en el sistema (A.20), debido a que la superficie original σ converge a cero de forma asintótica. Para diseñar el controlador por modos deslizantes en términos de ν se utiliza la ec. (A.19),

$$s\dot{s} = s(\nu + \bar{c}x_2 + (c + \bar{c})u + (c + \bar{c})f(x_1, x_2, t) + \dot{f}(x_1, x_2, t)), \quad (\text{A.22})$$

Seleccionando $\nu = -\bar{c}x_2 - (c + \bar{c})u + \nu_1$ y sustituyéndolo en la ec. (A.22), se obtiene

$$s\dot{s} = s(\nu_1 + (c + \bar{c})f(x_1, x_2, t) + \dot{f}(x_1, x_2, t)) \leq s\nu_1 + |s|(\bar{L} + (c + \bar{c})L), \quad (\text{A.23})$$

escogiendo $\nu_1 = -\rho \text{sign}(s)$ con $\rho > 0$ y sustituyéndolo en la ec. (A.23) se consigue

$$s\dot{s} \leq |s|(-\rho + \bar{s} + (c + \bar{c})L) = -\frac{\alpha}{\sqrt{2}},$$

finalmente, la ganancia ρ del controlador es

$$\rho = \bar{L} + (c + \bar{c})L + \frac{\alpha}{\sqrt{2}}, \quad (\text{A.24})$$

con la cual el control ν queda de la siguiente forma

$$\nu = -\bar{c}x_2 - (c + \bar{c})u - \rho \text{sign}(s), \quad (\text{A.25})$$

y la señal de control (A.25) lleva la variable s a cero en tiempo finito $t_r \leq \frac{\sqrt{2}|s(0)|}{\alpha}$.

Ejemplo A.4 Los resultados de la simulación del sistema (A.20) con el controlador por modos deslizantes dado por las ecs. (A.24) y (A.25), con las condiciones iniciales $x_1(0) = 1$ y $x_2(0) = -2$, la ganancia del controlador $\rho = 30$, los parámetros $c = 1.5$ y $\bar{c} = 10$. Y la

perturbación $f(x_1, x_2, t) = \sin(2t)$ utilizada para los propósitos de la simulación se muestran en las figuras A.8(a), A.8(b), A.9(a) y A.9(b).

La ley de control (A.25) contiene el término de conmutación a alta frecuencia $\rho \text{sign}(s)$ el cual introduce *chattering* en la señal de control ν (figura A.8(a)). Sin embargo, el *chattering* es atenuado en la señal física de control $u = \int \nu dt$ (figura A.8(b)). En la figura A.9(a) puede observarse la convergencia en tiempo finito de la superficie de deslizamiento auxiliar s , mientras que la superficie de deslizamiento original σ tiene convergencia asintótica a cero. En la figura A.9(b) se observa la convergencia asintótica de los estados a cero. De esta forma podemos decir que se logra un *modo deslizante asintótico* con respecto a la variable de deslizamiento σ , con lo cual se logra atenuar el *chattering*.

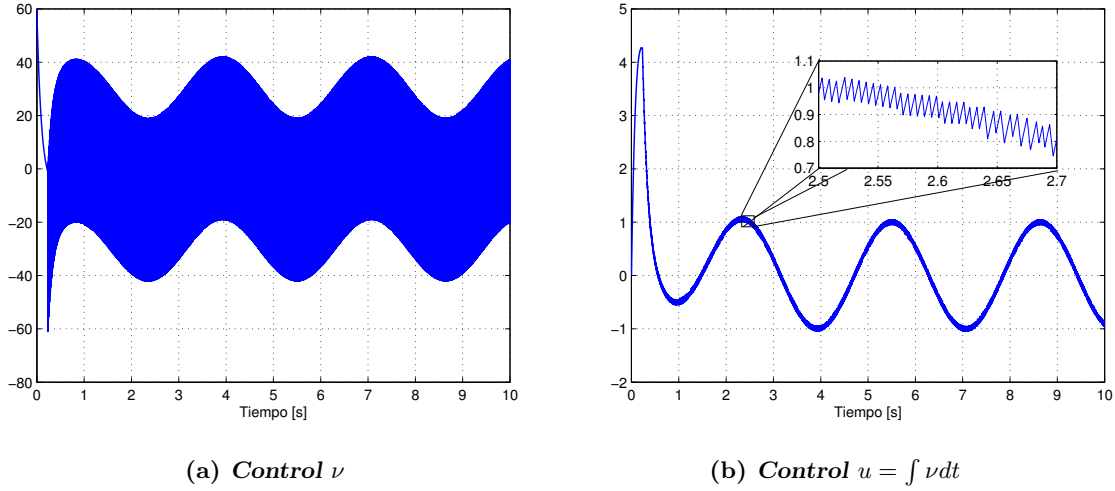


Figura A.8: Señales de control de modo deslizante asintótico

A.1.3. Concepto de Control Equivalente

Cuando el sistema (A.1) con el control dado por las ecs. (A.5) y (A.18) alcanza un modo deslizante ideal en el tiempo t_r , las trayectorias del sistema $x_1(t)$ y $x_2(t)$ permanecen en la superficie de deslizamiento. Esto significa que $\sigma = \dot{\sigma} = 0$ para todo $t \geq t_r$. La condición $\sigma = 0$ conduce a

$$\dot{\sigma} = cx_2 + f(x_1, x_2, t) + u = 0, \quad \sigma(t_r) = 0, \quad (\text{A.26})$$

de donde la función de control que satisface la ec. (A.26) es fácilmente calculada como

$$u_{eq} = -cx_2 - f(x_1, x_2, t) \quad (\text{A.27})$$

a esta función se le llama *control equivalente* y es el encargado de mantener las trayectorias del sistema (A.1) una vez que éstas han alcanzado la superficie de deslizamiento $\sigma = 0$.

El control equivalente tiene las siguientes características:

- La función de control (A.26) en realidad no es el control que se aplica al sistema (A.1) una vez que alcanza la superficie de deslizamiento. De hecho el control (A.27) no puede ser implementado físicamente debido a que en general la perturbación acotada $f(x_1, x_2, t)$ que afecta el sistema es desconocida y aparece explícitamente en la ec. (A.27). La acción del control equivalente describe el promedio de la acción del

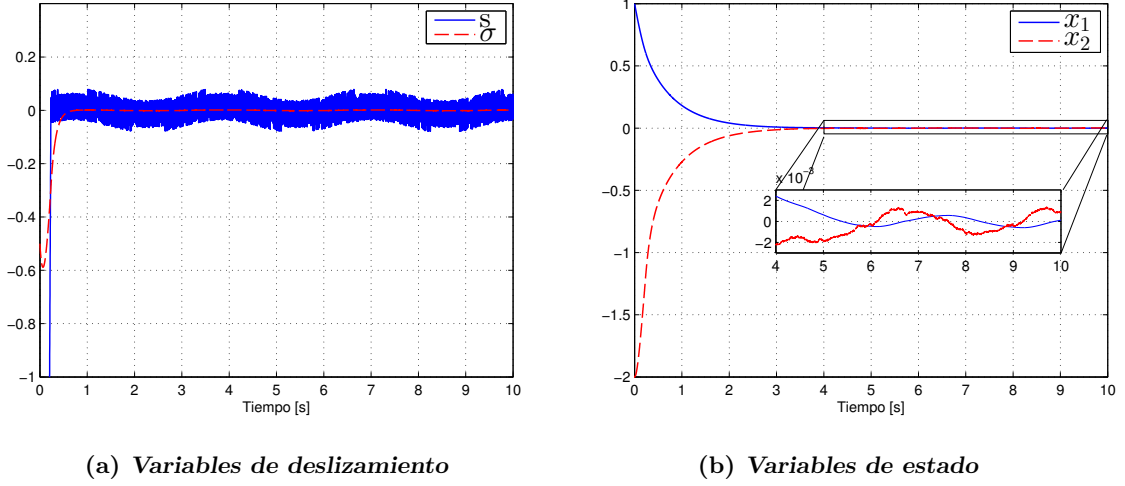


Figura A.9: Superficie y estados de modo deslizante asintótico

control de alta frecuencia dado en la ec. (A.18) al ser aplicado al sistema (A.1). Este promedio puede ser calculado por medio de un filtro paso bajas (FPB) aplicado al término de conmutación a alta frecuencia $\rho \text{sign}(\sigma)$ de (A.18):

$$\hat{u}_{eq} = -cx_2 - \rho \text{FPB}(\text{sign}(\sigma)), \quad t > t_r, \quad (\text{A.28})$$

El filtro paso bajas puede ser implementado por medio de la siguiente ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} \tau \dot{z} &= -z + \text{sign}(\sigma), \\ \hat{u}_{eq} &= -cx_2 - \rho z, \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

en donde τ es un escalar positivo de valor pequeño que representa la constante del filtro.

La señal u_{eq} puede ser estimada de manera bastante precisa por medio de $\hat{u}_{eq}$ haciendo que el valor de τ sea tan pequeño como sea posible pero mayor que el tiempo de muestreo con que se implemente el filtro paso bajas.

- Comparando las ecs. (A.27) y (A.28) la perturbación que afecta el sistema puede ser estimada como:

$$\hat{f}(x_1, x_2, t) = \rho \text{FPB}(\text{sign}(\sigma)), \quad t \geq t_r. \quad (\text{A.30})$$

Ejemplo A.5 El sistema (A.1) con el controlador dado por las ecs. (A.6) y (A.18), las condiciones iniciales $x_1 = 1$, $x_2 = -2$, la ganancia del controlador $\rho = 2$, el parámetro $c = 1.5$ y para propósitos de simulación la perturbación $f(x_1, x_2, t) = \sin(2t)$, se simuló. El control equivalente y la perturbación son estimados utilizando las ecs. (A.29) y (A.30) con $\tau = 0.01$. En la figura A.10(a) se muestra el control equivalente estimado y el ideal, dado por la ec. (A.27), para poder observar que tan buena es la estimación. Podemos observar que los resultados obtenidos en la simulación son sumamente precisos (figura A.10(b)).

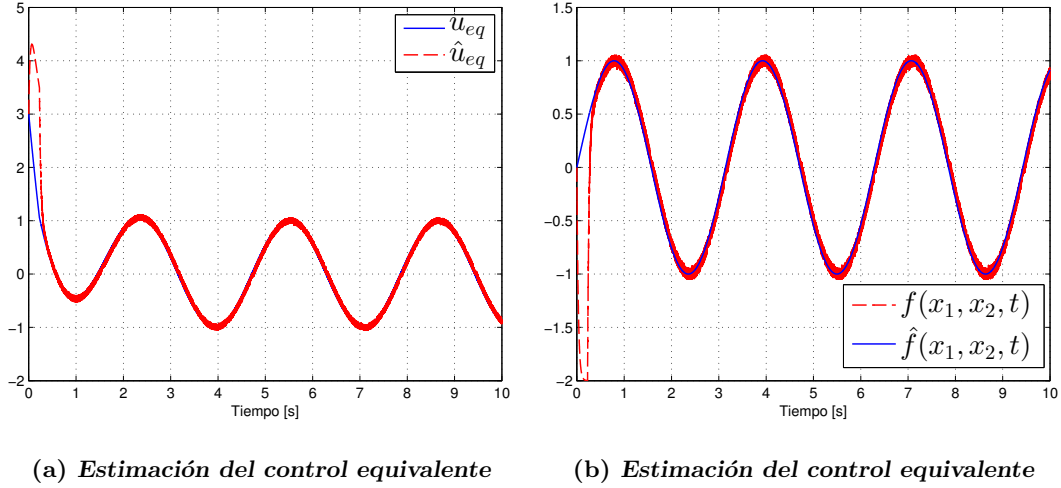


Figura A.10: Señales reales y estimadas

A.1.4. Ecuaciones de Modos Deslizantes

Ya se estableció que el sistema (A.1) con el controlador dado por las ecs. (A.6) y (A.18) presenta dos etapas en el plano de fase (figura A.4(a)), la fase de alcanzamiento, en el que los estados se mueven hacia la superficie de deslizamiento, y la fase de deslizamiento, en la cual los estados se deslizan sobre la superficie hasta llegar ahí y se mantienen en el origen para todo tiempo futuro. La variable de deslizamiento (A.5) es diseñada para que las trayectorias del sistema se muevan de forma deseada en el modo deslizante. Este problema de diseño puede ser resumido a dos tareas.

La primera etapa es encontrar las ecuaciones en el modo deslizante para todo $t \geq t_r$; y la segunda etapa es parametrizar la superficie de deslizamiento (A.5) para lograr que el sistema se comporte con la dinámica deseada.

Sustituyendo el controlador por modos deslizantes dado por las ecs. (A.5) y (A.18) en el sistema (A.1) obtenemos:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 & x_1(t_r) = x_{1r} \\ \dot{x}_2 = -cx_2 - \rho \text{sign}(x_2 + cx_1) + f(x_1, x_2, t) & x_2(t_r) = -cx_{1r}. \end{cases} \quad (\text{A.31})$$

La ec. (A.31) no es adecuada para el análisis en el modo deslizante, puesto que el lado derecho del sistema es una función discontinua que conmuta a alta frecuencia, y que pierde continuidad en cada punto en la superficie de deslizamiento $\sigma = x_2 + cx_1 = 0$. Sin embargo, de la Sección 2.3, sabemos que la dinámica del sistema (A.1) en el modo deslizante (cuando $\sigma = x_2 + cx_1 = 0$) son manejadas por el control equivalente (A.27). Por lo que para obtener la dinámica compensada del sistema en el modo deslizante, se sustituye el control equivalente (A.27) en la ec. (A.31), además, tomando en cuenta que en el modo deslizante $x_2 = -cx_1$, obtenemos:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \underbrace{(-cx_2 - f(x_1, x_2, t))}_{u_{eq}} + f(x_1, x_2, t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -cx_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = -cx_1 \\ \dot{x}_2 = -cx_2 \end{cases},$$

finalmente, la dinámica compensada del sistema (A.1) en el modo deslizante es reducida a la forma

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -cx_1 \\ x_2 = -cx_1 \end{cases} \quad x_1(t_r) = x_{1r}, \quad (\text{A.32})$$

para todo $t \geq t_r$. Una solución para la ec. (A.32) para todo $t \geq t_r$ es la siguiente

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_{1r} e^{-c(t-t_r)} \\ x_2(t) &= -cx_{1r} e^{-c(t-t_r)}, \end{aligned}$$

de la ecuación anterior, es claro que el parámetro $c > 0$ puede ser elegido para dar la velocidad de convergencia deseada de x_1, x_2 a cero.

Las siguientes propiedades son adquiridas por la dinámica del sistema una vez que se encuentra en el modo deslizante:

- El diseño de un controlador por modos deslizantes se reduce a dos etapas. La primera consiste en el diseño de una superficie de deslizamiento de primer orden, como en la ec. (A.5). Mientras que la segunda etapa se diseña la señal de control u para llevar la variable de deslizamiento (A.6) a cero. Para esto se utiliza la dinámica de la superficie de deslizamiento de primer orden dada por la ec. (A.7).
- La dinámica original del sistema es de segundo orden, mientras que su dinámica compensada en el modo deslizante (A.32) es de orden uno. La reducción del orden del sistema es debido a que la ec. (A.32) solo describe la *dinámica lenta*, mientras que la *dinámica rápida* debida al controlador de alta frecuencia de conmutación es de amplitud muy pequeña (ver la figura A.4(a)) y es despreciado en la ec. (A.32).
- La dinámica del sistema no depende de la perturbación acotada $f(x_1, x_2, t)$; sin embargo, su cota superior es utilizada para el diseño del controlador por modos deslizantes (ver ecs. (A.14) y (A.24)).

A.1.5. Condición de Acoplamiento y Propiedades de Insensibilidad

En la Sección 2.4 se explicó que la dinámica del sistema en el modo deslizante no depende de la perturbación acotada $f(x_1, x_2, t)$, pero hay que tomar en cuenta que esta perturbación entra solamente en la segunda ecuación del sistema (A.1). De esto surge la interrogante de si el sistema en el modo deslizante conserva la *propiedad de insensibilidad* a la perturbación acotada, puede ser extendido a perturbaciones acotadas que entran en la primera ecuación del sistema (A.1).

Para encontrar respuesta al cuestionamiento planteado, se considera el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + \varphi(x_1, x_2, t) & x_1(0) = x_{10} \\ \dot{x}_2 = u + f(x_1, x_2, t) & x_2(0) = x_{20}, \end{cases} \quad (\text{A.33})$$

en donde $|f(x_1, x_2, t)| \leq L$ y $|\varphi(x_1, x_2, t)| \leq P$. Asumimos que se ha diseñado una ley de control por modos deslizantes u con el objetivo de llevar las trayectorias del sistema (A.33) a la superficie de deslizamiento $\sigma = x_2 + cx_1 = 0$ en tiempo finito t_r y mantener los estados ahí para todo $t \geq t_r$. La dinámica del sistema en el modo deslizante puede

ser determinada utilizando el enfoque del control equivalente presentado en la Sección 2.4. Para este caso, la dinámica de orden reducido del sistema puede ser escrita como

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + \varphi(x_1, x_2, t) \\ x_2 = -cx_1 \end{cases} \quad x_1(t_r) = x_{1r}. \quad (\text{A.34})$$

De las ecs. (A.33) y (A.34) puede observarse que la perturbación $f(x_1, x_2, t)$ no afecta la dinámica del sistema en el modo deslizante, mientras que la perturbación $\varphi(x_1, x_2, t)$ que entra en la primera ecuación del sistema (en donde el control está ausente) puede causar que los estados no converjan a cero en el modo deslizante. La perturbación $f(x_1, x_2, t)$ es denominada una perturbación *acoplada* al control, por otro lado, a la perturbación $\varphi(x_1, x_2, t)$ se le conoce como una perturbación *no acoplada* a la señal de control.

Hay que hacer notar que esta definición solo es válida para sistemas de una sola entrada y una sola salida, en donde la acción de control u solo está presente en una ecuación. Sin embargo la condición de acoplamiento puede ser extendida a sistemas no lineales, de múltiples entradas y de orden arbitrario.

A.2. Modos Deslizantes de Segundo Orden

Los modos deslizantes convencionales descritos hasta este punto son controladores robustos que pueden lograr el objetivo de control a pesar de que el sistema se vea afectado por perturbaciones externas o incertidumbres en el modelo acopladas al control, por medio de una señal de control discontinua que logra la convergencia en tiempo finito de una salida virtual conocida como variable de deslizamiento, que es una función de los estados, a cero y la mantiene ahí una vez que se alcanza un modo deslizante, logrando con esto la convergencia asintótica a cero de los estados a pesar de la perturbación. Sin embargo este tipo de controladores tienen dos desventajas, la primera es el ya mencionado *chattering*; y la segunda es que todo lo visto hasta ahora es adecuado para sistemas de grado relativo uno. Es decir, que la señal de control aparece explícitamente en la primera derivada de la salida.

Los modos deslizantes de segundo orden surgieron como una alternativa para eliminar las desventajas de los modos deslizantes convencionales. En la actualidad hay varios algoritmos de segundo orden disponibles para aplicarlos a sistemas de grado relativo dos; a su vez existen algoritmos por modos deslizantes de segundo orden que proveen una señal de control continua y que puede ser implementada físicamente. Estos algoritmos en general requieren el uso de una variable de deslizamiento y también se han desarrollado métodos para el diseño de esta para obtener un mejor desempeño del sistema a controlar.

A continuación se presenta la definición formal de los modos deslizantes de segundo orden (ver [18]), y se presentan dos algoritmos de control de segundo orden.

Definición El punto $(x, \dot{x}) = (0, 0)$ es llamado un modo deslizante de segundo orden si es una solución del sistema

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}, t) + g(x, \dot{x}, t)u \mid x(t), f(t), g(t) \in \mathbb{R} \quad (\text{A.35})$$

en donde x es el vector de estados, la función $f(x, \dot{x}, t)$ representa la dinámica nominal del sistema y $g(x, \dot{x}, t)$ es la función de distribución de la señal de control u

A.2.1. Algoritmo Twisting

El controlador por modos deslizantes de segundo orden se caracteriza por la forma en que las trayectorias del sistema convergen a cero en el plano de deslizamiento [6], $\sigma = \dot{\sigma} = 0$. Antes de que las trayectorias lleguen al origen, dan una gran cantidad de giros antes de llegar al modo deslizante de segundo orden. Este controlador puede ser aplicado a sistemas de segundo orden y es capaz de llevar tanto la salida del sistema como su primera derivada a cero. Para un sistema de segundo orden con grado relativo dos de la salida con respecto a la señal de control, como el sistema (A.1); este controlador puede ser aplicado directamente sin la necesidad de diseñar alguna variable de deslizamiento. El Algoritmo Twisting aplicado al sistema (A.1) tiene la siguiente estructura

$$u = -a \operatorname{sign}(x_2) - b \operatorname{sign}(x_1), \quad b > a \quad (\text{A.36})$$

como no se utiliza variable de deslizamiento, en este caso son los estados del sistema los que presentan convergencia en tiempo finito a cero. Aunque este controlador provee esta cualidad y es aplicable a sistemas de segundo orden de grado relativo dos, tiene la desventaja de que produce una señal de control discontinua, por lo que el *chattering* sigue presente.

Ejemplo A.3 Se simuló el sistema (A.1) con el controlador Twisting dado por la ec. (A.36), con las condiciones iniciales $x_1 = 1$, $x_2 = -2$, y los parámetros $a = 4$, $b = 5$ y para propósitos de la simulación se utiliza la perturbación acotada $f(x_1, x_2, t) = \sin(2t)$. Los resultados de la simulación se pueden observar en la figura A.11.

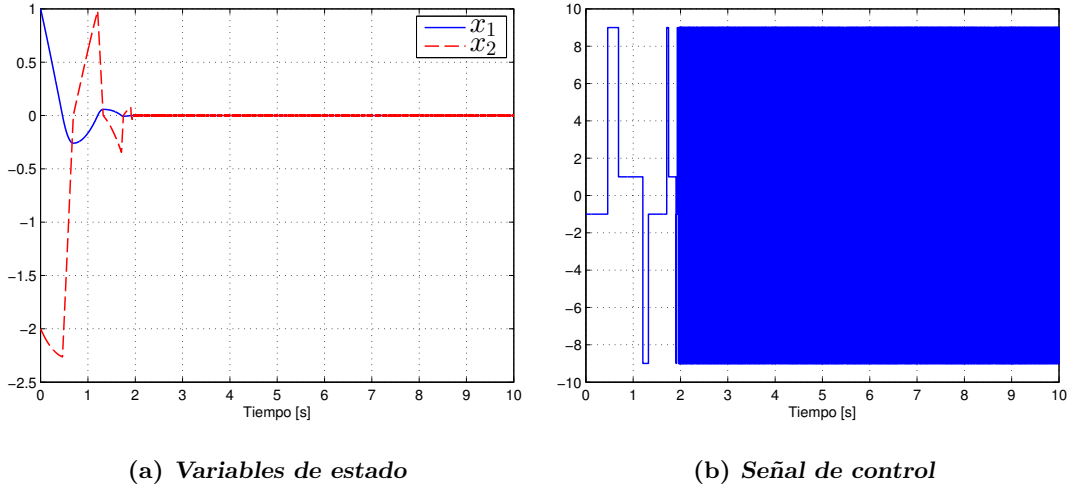


Figura A.11: Sistema mecánico controlado con el Algoritmo Twisting

En la figura A.11(a) puede observarse como los estados son los que convergen en tiempo finito a cero y se mantienen ahí una vez que el sistema está en el modo deslizante de segundo orden. Por otro lado, en la figura A.11(b) se observa la señal de control producida por el Algoritmo Twisting (ec. (A.36)) que tiene *chattering* y por lo tanto no puede ser aplicada en casos prácticos

A.2.2. Algoritmo Super-Twisting

Para sistemas con grado relativo uno, los modos deslizantes de segundo orden pueden emplearse para reducir el efecto de *chattering* y obtener una señal de control continua.

Esto se logra diseñando la derivada de la acción de control, con esto se conserva la robustez de los controladores por modos deslizantes, pero la señal de control que se aplica al sistema es la integral del término discontinuo de alta frecuencia. La estructura de este algoritmo está formado por dos términos, el primero de ellos es continuo y el segundo es la integral de un término discontinuo. Si se desea aplicar este controlador a sistemas de grado relativo dos, es necesario diseñar una variable de deslizamiento como en la ec. (A.5), de esta forma, el controlador lleva, con convergencia en tiempo finito, la superficie de deslizamiento a cero, ((A.6)) así como su primera derivada temporal (modo deslizante de segundo orden); con lo que se tiene convergencia asintótica de los estados a cero. En si lo que realiza el controlador es aumentar el grado relativo del sistema al utilizar la integral del término discontinuo del controlador [6].

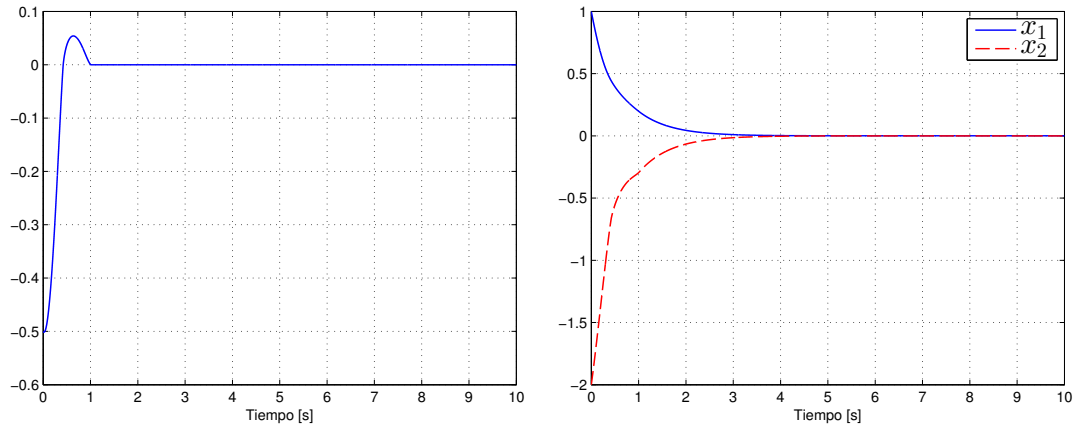
El Algoritmo Super-Twisting tiene la siguiente estructura:

$$\begin{aligned} u &= -k_1|\sigma|^{\frac{1}{2}}\text{sign}(\sigma) + z \\ \dot{z} &= -k_2\text{sign}(\sigma) \end{aligned} \tag{A.37}$$

en donde $k_1 = 1.5\sqrt{C}$ y $k_2 = 1.1C$, C es la cota superior de la derivada de la perturbación acotada, i. e., $\dot{f}(x_1, x_2, t) \leq C$.

Ejemplo A.4 El sistema ec. (A.1) con el controlador Super-Twisting dado por las ecs. (A.6) y (A.37) se simuló para las condiciones iniciales $x_1(0) = 1$ y $x_2(0) = -2$, los parámetros $k_1 = 4$, $k_2 = 3$ y $c = 1.5$; y para propósitos de la simulación se utiliza la perturbación acotada $f(x_1, x_2, t) = \sin(2t)$. Los resultados obtenidos se pueden observar en las figuras A.12 y A.13, en donde es claro que la superficie converge en tiempo finito, los estados de forma asintótica y la señal de control es continua y compensa totalmente los efectos de la perturbación acoplada.

Los algoritmos de segundo orden presentados hasta ahora son aplicables a sistemas de segundo orden y solucionan las desventajas de los modos deslizantes convencionales aunque de forma separada. Por medio del Algoritmo Twisting se logra la convergencia en tiempo finito de la salida y sus dos primeras derivadas, por lo tanto es posible estabilizar los estados del sistema en tiempo finito, ya que no se requiere el diseño de una variable de deslizamiento, sin embargo aun está presente el problema del *chattering*. Por otro lado el Algoritmo Super Twisting es aplicable a sistemas de segundo orden con grado relativo uno, por lo que se requiere el diseño de una variable de deslizamiento, sin embargo tiene la gran ventaja de que produce una señal de control continua y conserva las propiedades de robustez que caracterizan a los modos deslizantes.



(a) *Convergencia en tiempo finito de la superficie de deslizamiento*

(b) *Variables de estado*

Figura A.12: Sistema mecánico controlado con Algoritmo Super-Twisting

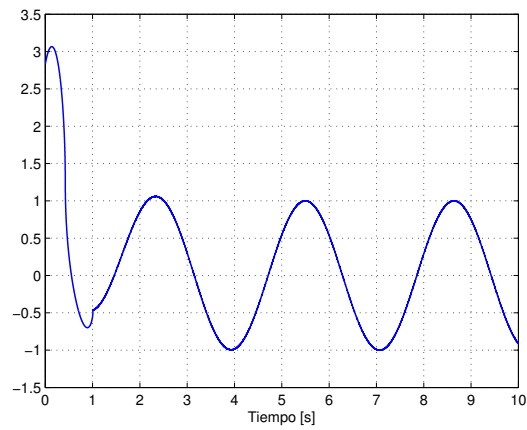


Figura A.13: Señal de control Algoritmo Super-Twisting

Archivos de Matlab y Diagramas de Simulink

B.1. Archivos .m

Para realizar las simulaciones y los experimentos en tiempo real se utilizó el software Matlab y Simulink, el primero es un potente software matemático que puede realizar una gran cantidad de operaciones y funciones preprogramadas, además este software tiene su propio lenguaje de programación, por lo que es posible realizar funciones y programas en los que se realizan cálculos de interés para el usuario de forma rápida. Por otro lado, Simulink es un subprograma de Matlab que permite realizar simulación de sistemas mediante la programación del comportamiento de estos por medio de diagramas de bloques, también existe la posibilidad de combinar las capacidades de programación de Matlab y Simulink para realizar simulaciones en las que se intercambian datos entre el entorno de Matlab y Simulink. A continuación se presentan los archivos utilizados para la simulación.

% Modelo del helicoptero

```
Jp=0.0364;           %Momento de inercia sobre el eje de pitch
Je=0.91;             %Momento de inercia sobre el eje de elevacion
Jt=0.91;             %Momento de inercia sobre el eje de travel
Kp=0.686;            %Fuerza requerida para mantener el helicoptero en vuelo
Rm=0.83;             %Resistencia de armadura del motor
Kt=0.0182;           %Constante corriente-torque del motor
Jm=1.91*10(-6);      %Momento de inercia del rotor del motor
Kf=0.1188;           %Constante de fuerza-empuje del propulsor
M=3.57;              %Masa de todo el sistema
m=1.15;              %Masa del cuerpo del helicoptero
Mw=1.87;             %Masa del contrapeso
Mf=0.713;            %Masa del propulsor frontal ensamblado
Mb=0.713;            %Masa del propulsor trasero ensamblado
La=0.66;             %Distancia entre el eje de travel y el cuerpo del helicoptero
Lh=0.178;            %Distancia entre angulo de pitch y cada motor
Lw=0.47;             %Distancia entre el eje de travel y el contrapeso
lpi=0.004;           %Distancia inercial efecto de pendulo pitch
lel=0.014;           %Distancia inercial efecto de pendulo elevacion
```

```

g=9.81;           %Constante gravitacional

%Matrices del sistema linealizado

A=[0 1 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 1 0 0;
   0 0 -m*g*lp/Jp 0 0 0; 0 0 0 0 0 1; 0 0 (La*Kp)/Jt 0 0 0];
B=[0 0; (La*Kf)/Je 0; 0 0; 0 (Lh*Kf)/Jt; 0 0; 0 0];
C=[1 0 0 0 0 0; 0 0 1 0 0 0; 0 0 0 0 1 0];
D=[0 0; 0 0; 0 0];

%Controlabilidad
CO=ctrb(A,B)
Rco=rank(CO)

%Observabilidad
OB=obsv(A,C)
Rob=rank(OB)

%OBSERVADORES

%Ganancias observador STA
fp=[4.2 25 1];
alpha=1.1*fp;
lambda=1.5*sqrt(fp);

%Ganancias observador 3STA
k1o=[4 4 4];
k2o=[2 2 2];
k3o=[2 2 2];

%Ganancias 5th Order Diff
Le=200;
Lp=200;
Lt=1000;

%CONTROLADORES
%3STA
%Ganancias elevacion
k1e=7;
k2e=2;
k3e=5;

%Ganancias pitch
k1=9;
k2=2;
k3=5;

%Ganancias control PID travel

```

```

Kpt1=0.8;
Kit1=0;
Kdt1=3;

%CID
%Ganancias elevacion
l1e=5;
l2e=3.3437;
l3e=1.118;

%Ganancias pitch
l1=10;
l2=5.6234;
l3=3.1623;

%Ganancias control PID travel
Kpt2=0.863;
Kit2=0;
Kdt2=3;

```

B.2. Diagramas de Simulink

En la figura B.1 se presenta un diagrama de bloques de Simulink que contiene el esquema general de control utilizado para las simulaciones.

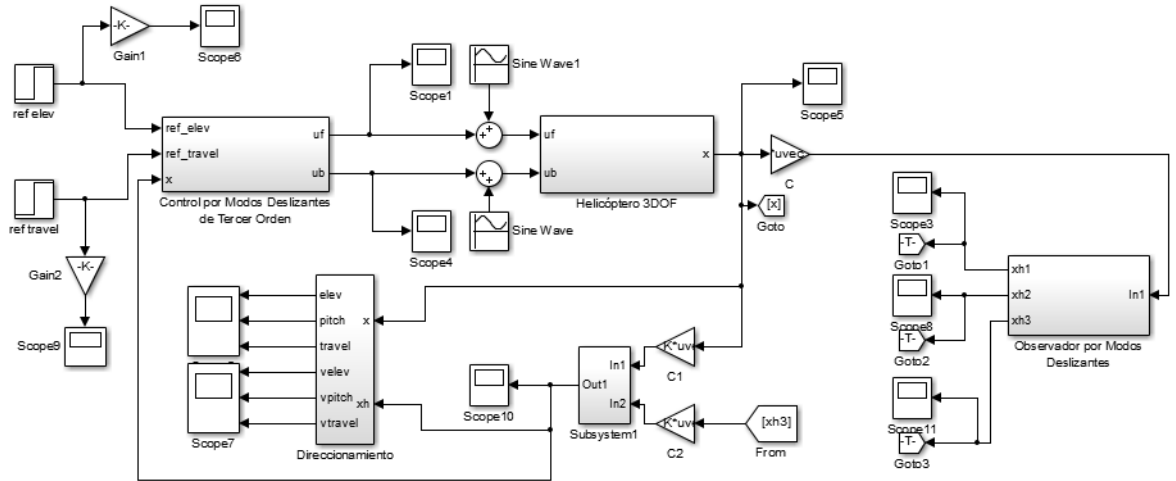


Figura B.1: Diagrama de bloques de Simulink para simulaciones

El bloque Helicóptero 3DOF tiene programado el modelo no lineal del helicóptero, obtenido en el Capítulo 3, por otro lado, en el bloque llamado Controlador por Modos Deslizantes de Tercer Orden se programaron los dos algoritmos utilizados para el control de los ángulos de elevación y *pitch*, además del controlador PD para el ángulo de *travel*. Finalmente en el bloque Observador por Modos Deslizantes se programaron las diferentes

estrategias de estimación de estados presentadas en el Capítulo 2. Con este diagrama de bloques se realizaron las simulaciones por medio de las cuales se decidió que observador utilizar.

En la figura B.2 se muestra en diagrama de bloques en el cual se programaron los controladores por modos deslizantes de tercer orden que se probaron (bloque rojo), además del diferenciador de quinto orden utilizado para estimar las velocidades del sistema (bloque morado). El bloque de color azul contiene la etapa de comunicación de la tarjeta 1103 de dSPACE con el helicóptero, que consiste en las salidas analógicas de la tarjeta y los puertos de lectura de los decodificadores incrementales con que cuenta el helicóptero, los datos obtenidos por estos sensores son cuentas y hay que multiplicarlos por una constante de conversión para obtener grados. En este bloque también se tiene una etapa de escalamiento de las señales de control para que posteriormente al pasar por la etapa de potencia se obtengan las señales adecuadas para los motores del helicóptero. Por último, el bloque amarillo contiene el valor de las referencias de los ángulos de elevación y *travel*.

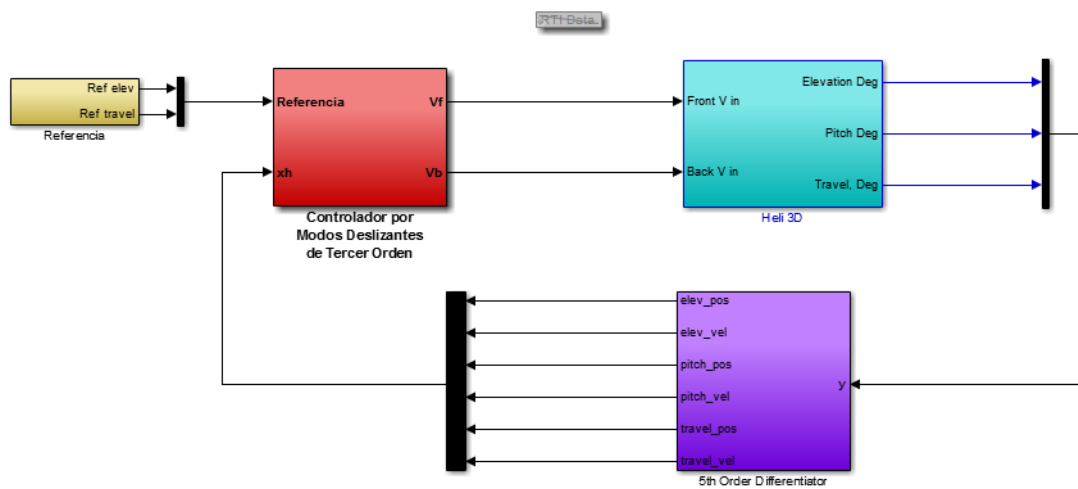


Figura B.2: Diagrama de bloques de Simulink para los experimentos

Descripción del Hardware del Helicóptero

C.1. Tarjeta dSPACE 1103

La tarjeta dSPACE 1103 funciona en conjunto con el software Control Desk y es la encargada ejecutar en tiempo real los controladores implementados y los algoritmos de estimación de velocidades. Además de realizar la transferencia de datos con la interfaz gráfica. Tiene como unidad central de procesamiento (CPU) un procesador digital de señales (DSP) PPC750GX de la marca Texas Instruments, que tiene como característica principal la capacidad de realizar a alta velocidad el cálculo de una gran cantidad de instrucciones o cálculos numéricos.

Para la comunicación externa la tarjeta cuenta con otro procesador, un TMS320F240 de Texas Instruments, el cual se encarga de manejar los periféricos relacionados con la entrada y salida de datos. Para el almacenamiento del programa a ejecutar, la tarjeta cuenta con una memoria EPROM, en la cual se descargan los algoritmos de control programados en Simulink que fueron primero traducidos, por el software de Matlab y las librerías adecuadas de dSPACE, a lenguaje C y posteriormente a lenguaje máquina para que los pueda ejecutar el procesador.

La tarjeta cuenta con 8 puertos DAC's, 20 ADC's, 7 puertos para lectura de codificadores y un puerto generador de señales de PWM. Como ya se mencionó anteriormente, la tarjeta cuenta con un software adicional para la visualización de datos e implementación de instrumentos de medición virtuales. En la figura C.1 se puede observar una fotografía de la tarjeta 1103 de dSPACE.



Figura C.1: Tarjeta 1103 de dSPACE

También es importante mencionar que la tarjeta 1103 produce un señal de salida para el controlador en un rango de -1 [V] a 1 [V], pero produce como salida esta señal amplificada en tensión por un factor de 10, es decir a la salida está en un rango de -10 [V] a 10 [V].

C.2. Codificador Incremental

Para medir la posición angular del helicóptero se utilizan tres codificadores incrementales, este es un dispositivo que permite medir el desplazamiento angular alrededor de un eje. La lectura se lleva a cabo por medio de un emisor y un receptor de luz, en medio de estos se encuentra un disco con franjas opacas que está acoplado al eje de giro, de esta forma cuando se presenta un movimiento angular, el disco se mueve y permite o no el paso de luz, el receptor tiene como señal de salida un nivel alto cuando detecta luz y nivel bajo cuando no lo hace, de esta forma se obtiene un tren de pulsos cuando se presenta movimiento. Además para determinar el sentido de giro, se produce otro tren de pulsos pero desfasado con respecto al primero. De acuerdo con la figura C.2 cuando se tiene un giro hacia la derecha, la señal B estará en nivel alto antes que la señal A, mientras que si el giro es en el sentido opuesto, la señal A estará en nivel alto antes que la señal B, de esta forma es como se determina el sentido de giro. Estos codificadores no pueden medir posiciones absolutas, por lo que requieren una señal adicional denominada *index*, la cual está en fase con la señal A y es utilizada para definir la referencia a partir de la cual se tomarán las mediciones.

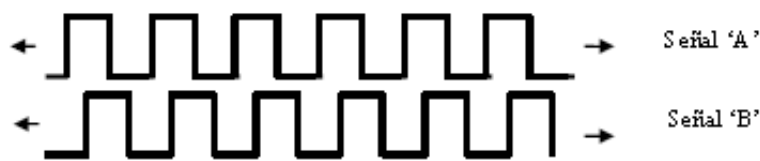


Figura C.2: Señales de salida del codificador incremental

El helicóptero cuenta con tres codificadores incrementales, los encargados de medir los ángulos de elevación y *pitch* tienen una resolución de 4096 cuentas en cuadratura, mientras que el segundo tiene 8192 también en cuadratura. La resolución es el número de pulsos eléctricos por vuelta. Como se ha mencionado, la salida de los codificadores es un tren de pulsos, la tarjeta 1103 de dSPACE entrega el número de pulsos y para hacer la conversión a grados, es necesario multiplicar por la constante de conversión adecuada, la cual está definida como el cociente entre los grados de una vuelta completa y la resolución del codificador incremental, es decir,

$$\phi[\text{grados}] = \frac{\text{No.de pulsos} \times 360[\text{grados}]}{\text{Resolucion del codificador}}$$

en donde ϕ es el desplazamiento angular medido en grados.

C.3. Etapa de Potencia

Para la amplificación de las señales de control que se obtienen de la tarjeta 1103 de dSPACE, se diseñó y construyó un amplificador tipo B, tiene una etapa previa de aco-
plamiento basada en un amplificador operacional en configuración de seguidor de tensión, para evitar daños en el procesador si es que surge una falla en el amplificador. Posteriormente hay una etapa de amplificación de tensión, que consiste en una configuración inversora utilizando también amplificadores operacionales, la ganancia es ajustable por medio de un potenciómetro y su valor máximo es de 3. Finalmente se tiene una etapa de amplificación de corriente manejada por un amplificador operacional en inversor, de esta forma no se altera el signo de la señal de entrada, la amplificación de corriente se lleva

a cabo por de transistores de potencia en arreglo *push-pull*, de esta forma un transistor se encarga de amplificar la parte positiva de las señales y otro la parte negativa, antes de pasar por este arreglo las señales son preamplificadas en corriente por transistores de baja potencia. Finalmente la salida del circuito se transfiere a los motores del helicóptero. Este esquema se tiene dos veces, uno para cada motor. El circuito es alimentado por dos fuentes de tensión en configuración simétrica, las cuales alimentan el circuito con 16 [V] y hasta 10 [A], de acuerdo con esto, las señales a amplificadas tienen un valor máximo de 15 [V]. En la figura C.3 se muestra un diagrama de esquemático del circuito diseñado.

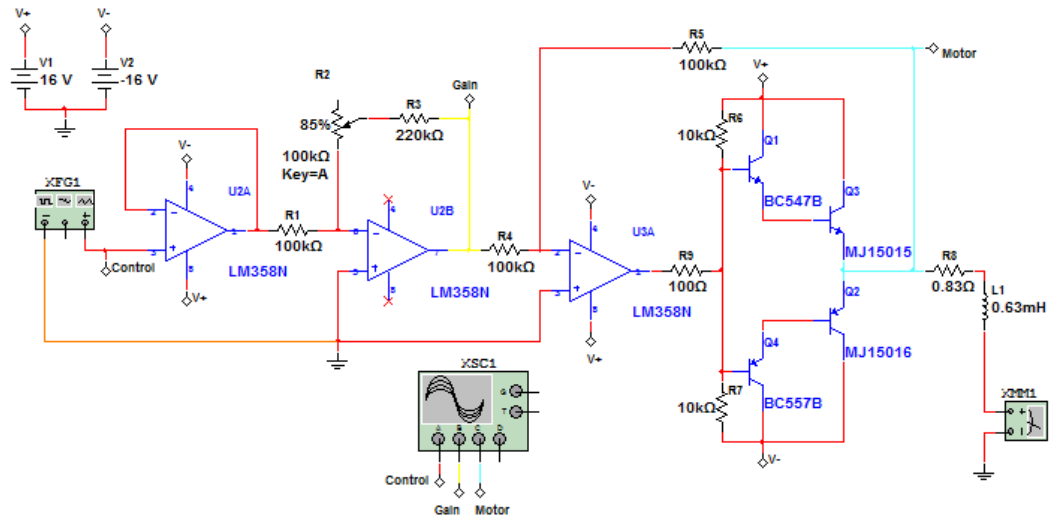


Figura C.3: Etapa de potencia para el helicóptero

De acuerdo a las condiciones del circuito de potencia y de la tarjeta 1103, la señal que calcula el controlador, será amplificada en tensión por un factor de 10 por la tarjeta y luego por un factor de 3 por la etapa de potencia, por lo que en la programación se considera esto al dividir las señales que calculan los controladores entre 30 (por software), de esta forma, en los motores se aplica la señal original calculada por el controlador.

Bibliografía

- [1] GIORGIO BARTOLINI, A FERRARA, AND ELIO USAI. Output tracking control of uncertain nonlinear second-order systems. *Automatica*, **33**(12):2203–2212, 1997. 2
- [2] DIEGO GERMÁN CANEDO TEXON. Control por modos deslizantes con ganancias variables para un helicóptero de tres grados de libertad, Tesis de Licenciatura. Universidad Nacional Autónoma de México, 2012. 4
- [3] ASIF CHALANGA, SHYAM KAMAL, LEONID FRIDMAN, BIJNAN BANDYOPADHYAY, AND JAIME A. MORENO. How to implement super-twisting controller based on sliding mode observer. **Sometido al Congreso Automatica 2014**. 40
- [4] XIUCHENG DONG, YUNYUAN ZHAO, AND GUANGZHENG RUI. Internal model control based on rbf neural network inverse system decoupling in a 3-dof helicopter system. In *Intelligent Control and Automation (WCICA), 2011 9th World Congress on*, pages 570–574. IEEE, 2011. 3
- [5] A FERREIRA DE LOZA, H RÍOS, AND A ROSALES. Robust regulation for a 3-dof helicopter via sliding-mode observation and identification. *Journal of the Franklin Institute*, **349**(2):700–718, 2012. 3, 51, 52, 55, 60, 62, 63
- [6] LEONID FRIDMAN, JAIME MORENO, AND RAFAEL IRIARTE. *Sliding modes after the first decade of the 21st century: State of the art*, **412**. Springer, 2011. 81, 82
- [7] MARIYA ALEKSANDROVNA ISHUTKINA. *Design and implimentation of a supervisory safety controller for a 3DOF helicopter*. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, 2004. 3, 24
- [8] LAURA JIMÉNEZ, SALVADOR GONZÁLEZ, RAFAEL JIMÉNEZ, GABRIEL LARA, AND BRENDA MENDOZA. **Prototipo experimental para el control y evaluación dinámica de un mecanismo tipo helicóptero. 1er Congreso Internacional de Ingeniería Industrial, Mecatrónica y Manufactura, Ciudad Juárez, 2007**. 3
- [9] SHYAM KAMAL, ASIF CHALANGA, BIJNAN BANDYOPADHYAY, JAIME A. MORENO, AND LEONID FRIDMAN. **Third order sliding mode super-twisting algorithm. Sometido al Congreso Automatica 2014**. 2, 8, 9, 11, 12, 31, 36, 52
- [10] ALI T KUTAY, ANTHONY J CALISE, MOSHE IDAN, AND NAIRA HOVAKIMYAN. **Experimental results on adaptive output feedback control using a laboratory model helicopter. Control Systems Technology, IEEE Transactions on**, **13**(2):196–202, 2005. 3
- [11] ARIE LEVANT. Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control. *International journal of control*, **58**(6):1247–1263, 1993. 2
- [12] ARIE LEVANT. **Higher-order sliding modes, differentiation and output-feedback control. International Journal of control**, **76**(9-10):924–941, 2003. 2, 17, 39

- [13] RENQUAN LU, WEI DU, WEIHONG ZHENG, AND ANKE XUE. Robust h_∞ optimal tracking control for 3-dof helicopter. In *Intelligent Control and Automation, 2008. WCICA 2008. 7th World Congress on*, pages 7327–7332. IEEE, 2008. 3
- [14] ILIANA M MEZA-SANCHEZ, YURY ORLOV, AND LUIS T AGUILAR. Periodic motion stabilization of a virtually constrained 3-dof underactuated helicopter using second order sliding modes. In *Variable Structure Systems (VSS), 2012 12th International Workshop on*, pages 422–427. IEEE, 2012. 4
- [15] ILIANA M MEZA-SANCHEZ, YURY ORLOV, AND LUIS T AGUILAR. Stabilization of a 3-dof underactuated helicopter prototype: Second order sliding mode algorithm synthesis, stability analysis, and numerical verification. In *Variable Structure Systems (VSS), 2012 12th International Workshop on*, pages 361–366. IEEE, 2012. 4
- [16] MARCIN ODELGA, ABDELHAMID CHRIETTE, AND FRANCK PLESTAN. Control of 3 dof helicopter: a novel autopilot scheme based on adaptive sliding mode control. In *American Control Conference (ACC), 2012*, pages 2545–2550. IEEE, 2012. 4
- [17] KATSUHIKO OGATA AND YANJUAN YANG. Modern control engineering. 1970. 28
- [18] WILFRID PERRUQUETTI AND JEAN-PIERRE BARBOT. *Sliding mode control in engineering*. CRC Press, 2002. 80
- [19] FRANCK PLESTAN AND ABDELHAMID CHRIETTE. A robust controller based on adaptive super-twisting algorithm for a 3dof helicopter. In *Decision and Control (CDC), 2012 IEEE 51st Annual Conference on*, pages 7095–7100. IEEE, 2012. 4
- [20] QUANSER. *User Manual*, 2004. 3
- [21] HÉCTOR RÍOS, ANTONIO ROSALES, AND ALEJANDRO DAVILA. Global non-homogeneous quasi-continuous controller for a 3-dof helicopter. In *Variable Structure Systems (VSS), 2010 11th International Workshop on*, pages 475–480. IEEE, 2010. 3
- [22] CÉSAR AGUSTÓN ZAMORA SALAZAR. Control integral discontinuo para sistemas de segundo orden, Tesis de Maestría. Universidad Nacional Autónoma de México, 2013. 2, 12, 15
- [23] YURI SHITESSEL, CHRISTOPHER EDWARDS, LEONID FRIDMAN, AND ARIE LEVANT. Sliding mode control and observation. *AMC*, 10:12, 2013. 17, 67
- [24] KONSTANTIN K STARKOV, LUIS T AGUILAR, AND YURY ORLOV. Sliding mode control synthesis of a 3-dof helicopter prototype using position feedback. In *Variable Structure Systems, 2008. VSS'08. International Workshop on*, pages 233–237. IEEE, 2008. 3
- [25] ST VENKATARAMAN AND S GULATI. Control of nonlinear systems using terminal sliding modes. *Journal of dynamic systems, measurement, and control*, 115(3):554–560, 1993. 2
- [26] FENG ZHOU, DENGHUA LI, AND PEIRONG XIA. Research of fuzzy control for elevation attitude of 3-dof helicopter. In *Intelligent Human-Machine Systems and Cybernetics, 2009. IHMSC'09. International Conference on*, 1, pages 367–370. IEEE, 2009. 3