



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN
INGENIERÍA

FACULTAD DE INGENIERÍA

TRANSFERENCIA DE CALOR EN UN FLUIDO CONFINADO
ENTRE ESFERAS CONCÉNTRICAS CON ROTACIÓN

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

MAESTRO EN INGENIERÍA

INGENIERÍA MECÁNICA - TERMOFLUIDOS

P R E S E N T A:

ING. ARES CABELLO GONZALEZ

TUTOR:

DR. RUBEN AVILA RODRIGUEZ



2011

JURADO ASIGNADO

Presidente: Dr. Cervantes De Gortari Jaime

Secretario: Dr. Solorio Ordaz Francisco Javier

Vocal: Dr. Ávila Rodríguez Rubén

1^{er}. Suplente: Dr. Ramos Mora Eduardo

2^{do}. Suplente: Dr. Cuevas García Sergio

Lugar donde se realizó la tesis:

DEPARTAMENTO DE TERMOFLUIDOS – FACULTAD DE INGENIERÍA

TUTOR DE TESIS:

Dr. RUBÉN ÁVILA RODRÍGUEZ

FIRMA

Índice general

Índice general	I
Índice de figuras	II
Agradecimientos	V
Nomenclatura	VII
Resumen	IX
Abstract	XI
1. Introducción	1
2. Modelo físico y modelo matemático	9
2.1. Modelo Físico	9
2.1.1. Estructura planetaria	9
2.1.2. Modelo propuesto	11
2.2. Modelo Matemático	13
2.2.1. Ecuación de conservación de masa	13
2.2.2. Ecuación de conservación de cantidad de movimiento	13
2.2.3. Ecuación de conservación de energía	16
2.2.4. Parámetros adimensionales	17
3. Algoritmo numérico	21
3.1. Método de los elementos espectrales	21
3.1.1. Funciones de expansión	22
3.1.2. Definición de los puntos Gauss - Lobatto - Legendre en el dominio físico .	23
3.1.3. Método de Galerkin (Bubnov-Galerkin)	24

3.1.4. Cuadratura de Gauss - Lobato - Legendre	25
3.2. Esfera cúbica	27
4. Resultados	31
4.1. Conducción de calor	31
4.2. Convección natural	34
4.2.1. Número de Rayleigh crítico	34
4.2.2. Patrones de flujo	35
4.3. Convección natural y rotación	44
5. Conclusiones	53
A. Adimensionalización de las ecuaciones	55
A.1. Ecuación de continuidad	56
A.2. Ecuación de cantidad de movimiento	56
A.3. Ecuación de la energía	58
B. Simplificación de los términos de rotación	59
C. Cálculo del número de Nusselt para el caso difusivo.	63
Bibliografía	68

Índice de figuras

2.1. Modelo físico	12
3.1. Ejemplo de la definición de los puntos dentro del dominio estándar	25
3.2. La esfera se divide en seis secciones las cuales corresponden a cada una de las caras del cubo inscrito	27
3.3. Representación de un elemento y su posición dentro del macro elemento.	28
3.4. Cuatro elementos del primer cuadrante de la cara interna del sector	28
3.5. Explosión de los 6 (seis) elementos que forman la esfera	30
4.1. Comparación entre la solución analítica y la solución numérica	32
4.2. Líneas isotermas en los planos meridional y ecuatorial en el estado estacionario del proceso de conducción de calor.	32
4.3. Isosuperficie de la temperatura promedio en el estado estacionario	33
4.4. Campos de velocidad para el número de Rayleigh crítico.	34
4.5. Líneas isotermas en el plano meridional y ecuatorial ($Ra(a) = 1606$)	35
4.6. Isosuperficies de temperatura ($Ra(a) = 1606$)	36
4.7. Patrones de convección en anillos esféricos en el caso sin rotación $Ta = 0$ y $Ra = 5 \times 10^3$, visualización del campo de temperatura en la dirección radial. Las sombras oscuras corresponden al flujo caliente ascendente y los colores brillantes corresponden al flujo frío [Futterer et al., 2010].	37
4.8. Campo de temperatura en el hemisferio sur. Convección para el caso sin rotación $Ta = 0$, $Ra = 4 \times 10^3$ [Futterer et al., 2008].	38
4.9. Números de Nusselt en la convección natural ($Ra(a)=1606$).	39
4.10. Isosuperficie de la temperatura en el inicio de la convección ($Ra(a) = 1606$, $t^* = 0.2$). 40	
4.11. Isosuperficie de temperatura promedio en el pico del Nu externo ($Ra(a) = 1606$, $t^* = 0.378$).	41

4.12. Isosuperficie de temperatura promedio en la convección natural ($Ra(a) = 1606$, $t^* = 0.6$).	42
4.13. Isosuperficie de temperatura promedio despues de modificarse el patrón convectivo ($Ra(a) = 1606$, $t^* = 1.183$).	42
4.14. Isosuperficie de temperatura promedio una vez que los números de Nusselt vuelven a coincidir ($Ra(a) = 1606$, $t^* = 1.538$).	43
4.15. Números de Nusselt en la convección natural ($Ra(a) = 16500$)	43
4.16. Velocidad y temperatura promedio del caso 4	45
4.17. Velocidad y temperatura promedio del caso 5	46
4.18. Velocidad y temperatura promedio del caso 6	48
4.19. Velocidad y temperatura promedio del caso 7	49
4.20. Velocidad y temperatura promedio del caso 8	50
4.21. Velocidad y temperatura promedio del caso 9	51

Agradecimientos

Mi mayor agradecimiento es a mis padres Víctor y Rosa, quienes con su amor y su apoyo me han permitido llegar hasta donde estoy. El significado de este escrito es un logro más de su trabajo.

A mis hermanos Ajax y Apolo, mis compañeros y amigos de siempre, con quienes he aprendido a compartir la vida misma.

A Selene, mi compañera incansable de incontables aventuras y de algunas otras desventuras, con sus consejos y observaciones he aprendido a tomar decisiones en los momentos importantes.

Al doctor Rubén Ávila, director de este trabajo, por su tiempo, dedicación y paciencia durante mi formación profesional. Porque de él he aprendido otra forma de concebir la Ingeniería.

A los doctores Jaime Cervantes, Sergio Cuevas, Eduardo Ramos y Francisco Solorio, que con sus comentarios y enseñanzas me han llevado a ser un mejor estudiante.

A la familia Ávila Martínez, por su generosidad y su hospitalidad incondicional durante mi estancia en la Universidad de California.

A los profes: Daniel, Ponce, Joaquín y Conchita por su invaluable amistad, y su apoyo desinteresado en los momentos difíciles.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por el apoyo económico brindado durante los estudios de maestría.

Al personal del observatorio de visualización de la DGSCA, por su apoyo y dedicación en todo momento.

A todos ellos mi más sincero agradecimiento.

Nomenclatura

C_p	Calor específico a presión constante [kJ/kg K]
C_g	Constante gravitacional [1/s ²]
k	Conductividad térmica [W/m K]
ΔT	Diferencial o incremento de temperatura [K]
E	Energía total [J]
\dot{Q}	Flujo de calor por unidad de tiempo [W]
D	Longitud característica $R_e - R_i$ [m]
m	Masa [kg]
P	Presión [Pa]
P_0	Presión estática [Pa]
P^*	Presión dinámica [Pa]
T	Temperatura [K]
T_0	Temperatura inicial. Temperatura de referencia [K]
t	Tiempo [s]
W	Trabajo [W]
R_e	Radio exterior [m]
R_i	Radio interior [m]
\vec{M}	Vector cantidad de movimiento [kg/m s]
\vec{r}	Vector de posición de la partícula [m]
\vec{F}	Vector fuerza [N]
\vec{g}	Vector gravedad [m/s ²]
\vec{v}	Vector velocidad [m/s]
V	Volumen [m ³]

θ	Ángulo polar de las coordenadas esféricas [rad]
ϕ	Ángulo azimutal de las coordenadas esféricas [rad]
β	Coefficiente de expansión térmica [1/K]
ω	Componente del vector velocidad angular [rad/s]
ρ	Densidad [kg/m ³]
ρ_0	Densidad de referencia [kg/m ³]
α	Difusividad térmica [m ² /s]
$\delta\rho$	Variación de la densidad [kg/m ³]
$\vec{\Omega}$	Vector velocidad angular [rad/s]
ν	Viscosidad cinemática [m ² /s]
μ	Viscosidad dinámica [kg/m s]
$\frac{D}{Dt}$	Derivada material o total
$\frac{d}{dt}$	Derivada o variación en el tiempo
∇	Vector nabla

Resumen

Estudios geológicos han permitido determinar que las capas internas de la Tierra están formadas por una mezcla de materiales en estado líquido o gaseoso a altas temperaturas, por lo que su comportamiento en conjunto puede considerarse como el de un fluido viscoso. Además los estudios y experimentos realizados han establecido que nuestro planeta en sus capas más internas está formado en su mayoría por metales pesados, y que en la capa más profunda del planeta la temperatura y la presión son tales que los materiales se encuentran en estado sólido.

Con esa idea se ha planteado el desarrollo de un modelo computacional que permita simular la dinámica interna del planeta basándose en el estudio del material contenido en las capas internas, haciendo uso para ello de las ecuaciones de la dinámica de fluidos, lo cual permite predecir no únicamente el movimiento, sino también la distribución de temperatura del fluido, y con ello calcular la transferencia de calor desde el interior del fluido hacia los alrededores. Para este modelo se considera una cavidad anular esférica con una relación de radios de 0.35, con fronteras rígidas a temperaturas constantes y diferentes, sin fuente interna de calor, un fluido incompresible, viscoso, no conductor y sin deslizamiento en las fronteras.

En esta etapa de desarrollo del modelo se ha introducido el análisis de la transferencia de calor a través de las fronteras, como función de las tasas de rotación y de convección natural dentro de la cavidad. Considerando que son estos dos movimientos, junto con el campo magnético (no incluido en esta etapa), las fuerzas dominantes que provocan el movimiento del material interno.

Las ecuaciones de Navier-Stokes tridimensionales para flujo incompresible se resuelven numéricamente utilizando el método de elementos espectrales con polinomios Gauss-Lobatto-Legendre, en una malla generada por medio del algoritmo de la esfera cúbica que reproduce una geometría

esférica en coordenadas cartesianas.

Se reportan tres casos de convección natural sin rotación, además para cada una de los casos convectivos se simulan dos velocidades de rotación. Se presentan los patrones de velocidad y temperatura y resultados de la transferencia de calor por ambas fronteras en los nueve casos.

De acuerdo con los resultados obtenidos en este trabajo de investigación es posible concluir que el método numérico permite determinar de manera satisfactoria el número de Rayleigh crítico en un sistema en donde la distribución de la gravedad varía inversamente con el radio de la forma $1/r^5$. Se ha observado que la convección natural no es un proceso estacionario y que la rotación tiene un efecto estabilizante en el flujo que modifica la transferencia de calor tal y como ha sido reportado en la literatura.

Una contribución importante de esta tesis es el acoplamiento del método de elementos espectrales con el algoritmo de la esfera cúbica lo que ha permitido obtener resultados satisfactorios, mismos que pueden ser comparados con resultados previamente publicados.

Abstract

Several geological studies have shown the composition that the inner layers of the Earth's, this materials can be regarded as a high temperature viscous fluid. Furthermore, the studies and experiments have established that our planet in its inner layers is formed mainly by heavy metals, and in the deepest layer, the temperature and pressure are such that the materials are solids.

Therefore in this research a computational numerical model to simulate the internal dynamics of the planet has been developed based on the study of the material in the most inner layers, using the equations of fluid dynamics, which can predict the movement and the temperature distribution of the fluid, also thus calculate the heat transfer from inside to the exterior of the fluid. This model consists of a spherical annular cavity with a radius ratio of 0.35, with rigid boundaries at constant and different temperatures, without internal heat source, an incompressible, viscous and non-conductive fluid with non-slip condition at the boundaries.

The three-dimensional Navier-Stokes equations are solved numerically using the spectral element method (SEM) with Gauss-Lobatto-Legendre polynomials, in a mesh created by the cubed-sphere algorithm in Cartesian coordinates.

We report three cases of natural convection without rotation, in addition for each convective cases are simulated two rotation speeds. We present the velocity and temperature patterns and results of heat transfer at the boundaries for each nine cases.

According to the results obtained in this research we conclude that the numerical method allows satisfactorily determine the critical Rayleigh number in a system where the distribution of gravity varies inversely with the radius of the form $1/r^5$. Also it was observed that natural convection is not a stationary process and that the rotation has a stabilizing effect on the flow

changing the heat transfer as has been reported in the literature.

An important contribution of this work is the coupling of the spectral element method with cubed sphere algorithm which allowed provide satisfactory results, they can be compared with previously published results.

Capítulo 1

Introducción

El fenómeno de transferencia de calor a través de un medio fluido está presente en gran parte de los procesos ingenieriles, desde la refrigeración de equipo electrónico por microcanales, hasta los procesos de siderurgia y de fundición de aleaciones. En la naturaleza también existen una gran diversidad de fenómenos de transferencia de calor en fluidos, desde el flujo capilar en los alveolos pulmonares, hasta el efecto convectivo del sol. Es por ello que para los ingenieros es muy importante conocer, estudiar y dominar los mecanismos por medio de los cuales se lleva a cabo este transporte de energía.

En el caso particular de este trabajo de tesis, el fenómeno que se estudia es el que se lleva a cabo en las capas internas del planeta, con la finalidad de entender cuales son los precursores de los efectos que se observan en la superficie, como el campo magnético terrestre o la disposición geográfica de los ejes volcánicos, para ello se propone un modelo numérico que simula la capa exterior del núcleo terrestre. Ese modelo toma en cuenta tanto las características físicas, la geometría y las fuerzas involucradas, de las cuales se tiene evidencia como resultado de estudios geológicos y sismológicos [Jordan, 1979], [Stixrude et al., 1997], [Alfe et al., 2002], [Monnereau et al., 2010].

Diversos trabajos analíticos, experimentales y numéricos se han publicado sobre la convección natural y forzada de un fluido confinado entre esferas concéntricas, en los cuales se considera una gravedad que actúa sobre el sistema en dirección radial, una rotación de cuerpo rígido (fuerzas de Coriolis y centrífuga), una rotación diferencial (flujo de Couette esférico) y un campo magnético. [Roberts, 1968], [Busse, 1970], [Wimmer, 1978] [Marcus and Tuckerman, 1987], [Dumas and Leonard, 1994], [Zhang, 1994], [Ardes et al., 1997], [Lorenzani and Tilgner, 2001], [Travnikov et al., 2001], [Noir et al., 2001], [Simitiev and Busse, 2003], [Zhang and Liao, 2004],

[Busse et al., 2003], [Hollerbach et al., 2006], [Evonuk and Glatzmaier, 2006], [Kelley et al., 2007], [Tilgner, 2007], [Futterer et al., 2008], [Futterer et al., 2008], [Futterer et al., 2010], [Olson, 2011], [Aubert et al., 2008], [Hernlund and Tackley, 2008], [Wu and Roberts, 2009], [King et al., 2009], [Zhang et al., 2010].

Roberts(1968) desarrolló curvas con los estados de convección marginales para varias relaciones de números de Taylor y Prandtl, incrementando el número de Rayleigh hasta obtener movimientos convectivos. Encontró que en una esfera de fluido con gravedad radial, rotación, densidad y una distribución de las fuentes de calor, todas ellas uniformes, existen modos de convección que son asimétricos con respecto al eje de rotación y además demostró que estos modos de convección son los más inestables aquellos donde el número de Taylor es pequeño.

Zhang(1994) propone que existen dos modos alternativos de convección que son los más comunes a pequeños números de Prandtl, éstos son esencialmente los modos de oscilación inercial de la ecuación de Poincaré con la estructura más simple a lo largo del eje de rotación y simetría ecuatorial. Cada uno se propaga en dirección opuesta al otro (este-oeste) y quedan confinados en la región ecuatorial. Se plantea que el estudio de la frecuencia de estas oscilaciones mediante soluciones de la ecuación de Poincaré puede ser la base para desarrollar métodos de estabilidad para fluidos en rotación. Sin embargo estas oscilaciones convectivas son estudiadas con condiciones de frontera libres de esfuerzo.

Basados en la teoría asintótica de Roberts(1968), y la teoría de ondas de Zhang, Zhang & Liao(2004) describen una nueva teoría para la convección en sistemas esféricos que giran rápidamente, número de Ekman muy pequeño ($Ek \ll 1$), basada en tres hipótesis. Primero, para un número de Ekman pequeño, arbitrario pero fijo, la convección localizada se extiende rápidamente en dirección radial cilíndrica y polar cilíndrica con un número de Prandtl decreciente. Segundo, se asume que para esas condiciones de número de Ekman, existe un flujo diferente de cero en la capa límite de Ekman, y tercero, que la velocidad dominante de la convección se puede expresar en función de la frecuencia media de la convección térmica, del flujo en la capa límite de Ekman y de los modos de onda geostróficos, para los cuales existen expresiones analíticas. Esta teoría permitiría generar expresiones analíticas para la rotación diferencial generada por la interacción no-lineal de las ondas.

Aubert et. al.(2008) generan un modelo de la convección termoquímica, con la acción del dínamo para encontrar explicación a porqué el hemisferio este de la Tierra ($40^\circ - 180^\circ E$) es

sísmicamente más rápido, más isotrópico y más atenuante que el hemisferio oeste. Este modelo reproduce un núcleo externo terrestre a gran escala y temporalmente muy largo considerando la heterogeneidad del núcleo interno y del bajo manto terrestre. Con este modelo logran reproducir un "viento termomagnético" cuya principal característica es una circulación ciclónica por debajo de Asia que concentra campo magnético en la frontera entre el manto y el núcleo, lo que provoca un desprendimiento de material ligero en el hemisferio este de la frontera del núcleo interno, lo cual terminaría generando la anomalía sísmica.

King et al.(2009) realizaron experimentos de laboratorio y simulaciones numéricas de cavidades esféricas con rotación y convección, determinaron que los efectos de convección- rotación no están definidos por el equilibrio global de fuerzas, concluyeron que existe una transición entre los regímenes de flujo dominados por la rotación y los dominados por la convección y esta transición está controlada por el espesor relativo entre la capa límite de Ekman y la capa límite térmica.

Dentro de los trabajos numéricos, Busse(2003) y Simitev & Busse(2003) reportan los resultados de la simulación de un sistema de esferas concéntricas con rotación y sometidas a un campo gravitacional radial, y en el cuál la esfera interna tiene una fuente de calor. Con esta simulación ellos encuentran los patrones convectivos dentro del anulo esférico y los comparan contra resultados experimentales. Debido a la forma de estos patrones Busse(1970) los llamó *Banana cells* ó celdas o formaciones de banana .

Glatzmaier y Evonuk(2006) realizaron una simulación bidimensional (en el plano ecuatorial) de la dinámica interna de un planeta gaseoso con un núcleo sólido, y analizaron la relación que existe entre la velocidad angular con la que gira el planeta y la forma de los patrones convectivos formados debido a ese movimiento. Compararon las diferencias entre tener y no tener un pequeño núcleo sólido a diferentes velocidades angulares.

Una de las grandes complicaciones de la simulación numérica de estos flujos, son las características geométricas de la cavidad, que en principio pareciera ser totalmente adecuada para el uso de coordenadas esféricas, sin embargo estas coordenadas tienen la particularidad de estar numéricamente indeterminadas en los polos, se han hecho varios intentos por resolver este inconveniente como el cálculo de aproximaciones sucesivas o la interpolación entre los datos obtenidos de los puntos cercanos a la indeterminación. Una de las propuestas para resolver este problema fué desarrollada por Hernlund(2008), con un modelo bidimensional en el cual se recogen todas las características tridimensionales del flujo mediante planos bisectores que atraviesan la esfera

y en los cuales queda retenida la información de la tridimensionalidad, sin embargo este modelo supone la existencia de una simetría de los resultados, la cual en general, no está garantizada.

Experimentalmente, Futterer(2008) creó un modelo en el cual se incorpora un sistema de gravedad radial, inducida a través de un campo eléctrico de alto voltaje y rotación, con una diferencia de temperatura entre la frontera interior y la exterior. De este modelo obtienen campos de velocidad y temperatura que utilizan para validar sus resultados obtenidos mediante simulación numérica, . De este estudio concluyen que existe una relación entre los estados convectivos y los parámetros adimensionales propios del sistema. Además determinan que la estabilidad depende mayormente del número de Taylor, es decir, la rotación genera un efecto estabilizante en el flujo.

Otro trabajo experimental fué realizado por Egbers et. al.(2009) en la estación espacial internacional, con un dispositivo automático capaz de reproducir diferentes condiciones de temperatura, gravedad y velocidad de rotación. Este experimento tiene la ventaja que ofrece la condición de micro-gravedad que existe en la estación espacial lo cual significa eliminar la gravedad laboratorio. Con los resultados obtenidos por interferometría se identifican los patrones de flujo subcrítico y supercrítico, con ellos se elabora un mapa en el que se muestran los rangos de los números de Taylor y de Rayleigh en los que se presenta la primera inestabilidad del flujo.

Se han realizado trabajos experimentales para investigar la dinámica de los fluidos del núcleo terrestre utilizando metales líquidos y no metales, considerando la turbulencia, el arrastre del núcleo interno, los efectos de la rotación (constante y variable), la convección térmica, los efectos químicos, la geometría de la cavidad, los campos magnéticos y el cambio de fase, con el fin de simular las condiciones de la dinámica del núcleo de la Tierra, sin embargo estos experimentos presentan diversas dificultades, entre otras, la gran diferencia de escalas física y temporal entre un experimento de laboratorio y el núcleo real, la cantidad de fuerzas que están interactuando entre sí, como la flotación, viscosidad, electromagnética, interfacial, además de estar expuesto a muchas aceleraciones, como la inercia, centrífuga y Coriolis, aunado además a la restringida cantidad de fluidos disponibles para hacer experimentos.

En una revisión de los experimentos realizados para modelar la dinámica del núcleo planetario, Olson(2001) plantea que debido a lo anterior es que los experimentos de laboratorio se han enfocado en tres aspectos principalmente. Primero la caracterización de las propiedades de los materiales, que mezclados semejan las características del núcleo, como viscosidad,

difusividad térmica, difusividad magnética y propiedades químicas, esto permite tener una idea más aproximada de la composición real del material interno. En segundo lugar, generar nuevos descubrimientos, pues los resultados a menudo inesperados de experimentos de laboratorio proporcionan nuevas interpretaciones de las actuales observaciones geofísicas del núcleo, y motivan nuevos experimentos y observaciones. Por último, en los experimentos de laboratorio se pueden proyectar las condiciones básicas proporcionando datos a través de un amplio rango de parámetros, que sirven como punto de referencia para el modelado numérico.

El flujo de Couette esférico también se ha estudiado y documentado, [Hollerbach et al., 2006], [Kelley et al., 2007], [Marcus and Tuckerman, 1987] este flujo se logra mediante la rotación diferencial de una de las esferas con respecto a la otra, y se ha propuesto que existen "ondas" generadas por el movimiento de rotación y que estas ondas están fuertemente ligadas a las inestabilidades en el flujo.

Numericamente Hollerbach et. al.(2006) consideran un anulo esférico con la esfera exterior fija y la interior rotando, con una relación de radios $\beta = (r_o - r_i)/r_i$, en un rango entre 0.1 y 10. Encuentran un flujo base formado por un chorro desde la esfera interna hacia la externa y que no depende de la relación de aspecto, este flujo se modifica a partir del número de Reynolds (Re_c) que cambia en cada caso de acuerdo a la relación de aspecto. Estudian la inestabilidad del flujo en todo el rango de β . Para $0.1 \leq \beta \leq 3.8$ las inestabilidades tienen simetría opuesta como el flujo base, y consisten de una serie de ondas en el chorro, el número de ondas decrece desde 12 hasta 2, conforme la cavidad esférica se hace mas grande. Por arriba de esta relación de radios, es decir $r_i/r_o < 0.2$, la inestabilidad cambia de una perturbación en el chorro y se convierte en una variación en la intensidad del flujo de retorno después de que éste choca contra la esfera exterior. Estos patrones de flujo coinciden con las simulaciones de Marcus & Tuckerman(1987) quienes además midieron el tamaño de los vórtices de Taylor como función del número de Reynolds, cuyas mediciones concuerdan con las mediciones experimentales de Wimmer(1976).

Experimentalmente Keley et. al.(2007) generan un flujo de Couette en una cavidad esférica con una relación de radios de 0.33 utilizando sodio líquido, para medir la presencia de ondas inerciales en el fluido en rotación por medio de inducción magnética. Las relaciones encontradas entre los números de onda del flujo, el campo magnético externo y el campo magnético inducido concuerdan con lo propuesto por la teoría, sin embargo las reglas que rigen los modos de inercia tanto en el experimento como en los núcleos planetarios siguen siendo desconocidas.

Finalmente otro aspecto que se ha estudiado en este tipo de modelos de la dinámica interna es el movimiento de precesión de la cavidad anular, [Lorenzani and Tilgner, 2001], [Noir et al., 2001], [Tilgner, 2007], [Wu and Roberts, 2009], [Zhang et al., 2010] en diversos trabajos se ha encontrado que aún con una velocidad de precesión muy lenta, $Po = \Omega_p/\omega \sim 10^{-2}$ existen efectos notables sobre la capa de Ekman (Noir 2001), lo cual es visible al analizar los campos de vortici- dad que se ven modificados por el efecto de la precesión (Lorenzani 2001), además el movimiento de precesión genera una onda inercial con movimiento retrogrado, es decir en sentido contrario al movimiento de precesión (Zhang 2001), (Zhang 2010). Todos estos movimientos tendrían repercusiones en el flujo del núcleo, y como consecuencia en el campo magnético inducido (Wu 2009), por lo que es conveniente que en el modelo que incorpora las ecuaciones de magnetohi- drodinámica sea considerado el movimiento de precesión.

Además de los trabajos de estudios de la estabilidad citados anteriormente, [Roberts, 1968], [Zhang, 1994] y [Zhang and Liao, 2004], Travnikov(2001) hace un analisis de estabilidad de energía, plantea que en el caso cuando la diferencia entre los radios de las esferas es muy pequeño, (radio interno entre 0.9 y 1 veces el radio exterior) existe un parámetro definido como la raíz cuadrada del número de Grasoff, que permite determinar en función del número de Prandtl el punto crítico en el cual el flujo se vuelve inestable, sin embargo y de acuerdo a los resultados planteados, ese parámetro de inestabilidad es válido únicamente para números de Prandtl muy grandes ya que para el caso de números de Prandtl de orden unidad el parámetro de estabilidad difiere del analisis de estabilidad lineal.

En este trabajo de tesis se plantea un primer modelo muy simplificado de la dinámica interna del núcleo de la Tierra, considerando una cavidad anular esférica con una relación de radios de 0.35, con fronteras rígidas a temperaturas constantes y diferentes, sin fuente interna de calor. El fluido utilizado es incompresible, viscoso, no conductor y con condiciones de no deslizamiento en las fronteras. Se simulan tres condiciones de convección; subcrítico, marginalmente crítico y supercrítico y en cada una de ellas se simulan tres condiciones de rotación, incluyendo la veloci- dad de rotación igual a cero. Se resuelven las ecuaciones de la dinámica de fluidos mediante el método de elementos espectrales utilizando una malla generada con el algoritmo de esfera cúbica.

En el capítulo 2 se presenten el modelo físico y el modelo matemático que rige al caso en estudio.

En el capítulo 3 se presenta una breve descripción del método numérico utilizado, así como

el proceso de generación de la malla mediante el algoritmo de la esfera cúbica.

En el capítulo 4 se presentan los resultados obtenidos para los nueve casos planteados, así como los resultados de la validación del método.

Por último en el capítulo 5 se presentan las conclusiones del trabajo.

Objetivos

Para este trabajo de tesis se han planteado los siguientes objetivos:

- Determinar el número de Rayleigh crítico considerando un campo de gravedad radial que varia de la forma $1/r^5$.
- Estudiar los patrones convectivos producidos por un campo gravitacional radial.
- Estudiar el efecto de la rotación sobre los patrones y la transferencia de calor de la convección natural.
- Calcular la transferencia de calor a través de las fronteras de un anulo esférico sometido a diferentes relaciones de convección y rotación.
- Visualizar y animar en realidad virtual los campos de velocidad, presión y temperatura.

Capítulo 2

Modelo físico y modelo matemático

Cualquier fenómeno que pretenda ser estudiado y analizado, primeramente debe ser comprendido tomando en cuenta la física involucrada, esto con la finalidad de conocer la complejidad y la viabilidad del estudio. El modelo físico además permite conocer y tomar en cuenta todos los principios físicos involucrados, para que éstos sean incluidos al momento de plantear los modelos matemáticos que representan esa física.

En este capítulo se presenta la física involucrada en el fenómeno natural, y posteriormente las consideraciones tomadas en cuenta para el planteamiento de un modelo que reproduzca lo más posible al fenómeno. Posteriormente se hace el desarrollo de cada una de estas ecuaciones que constituyen el modelo matemático a resolver y se plantean los parámetros adimensionales para el análisis de los flujos investigados en este trabajo.

2.1. Modelo Físico

Como ya se ha dicho, es muy importante tener en cuenta la física del fenómeno bajo estudio, para ello es necesario situar de manera amplia el contexto en el cual se está trabajando. Para este trabajo se debe tener en cuenta las características de la estructura interna de la Tierra, y particularmente la física de la capa exterior del núcleo.

2.1.1. Estructura planetaria

Las diversas investigaciones desarrolladas para plantear modelos de la estructura interna de la Tierra, confluyen en que nuestro planeta está formado de diversas capas concéntricas de

características muy particulares cada una de ellas. Dichos modelos sugieren que la capa exterior (corteza terrestre) tiene un espesor aproximado de 350 km y esta dividida en dos capas, la más superficial llamada litosfera, de unos 100 km de espesor y con una composición rígida y frágil. La capa profunda de la corteza se extiende entre los 100 y los 350 km, esta zona llamada astenósfera es de una composición plástica y débil. Por debajo de la corteza se encuentra la mesósfera, también llamado manto terrestre, esta capa se extiende entre los 350 km y los 2800 km de profundidad [Jordan, 1979],[Monnereau et al., 2010].

Más profundo se encuentra el núcleo, constituido por dos capas, una interna en estado sólido y una externa en estado líquido. La teoría de la composición interna de la Tierra propone que el material que forma el núcleo del planeta estaría dado de la siguiente forma:

- El núcleo exterior líquido formado de un material constituido en su mayor parte por metales que por su densidad menor a la del núcleo sólido permanecen en una capa de menor presión que la interior, por lo cual poseen características que lo asemejan a un líquido viscoso, este núcleo exterior tiene un radio aproximado de 3488 km.
- El núcleo sólido formado por una mezcla de metales pesados que debido a su densidad y al campo gravitacional planetario están sometidos a un campo de presión tan grande que los mantiene en estado sólido, este núcleo sólido tiene un radio aproximado de 1231 km.

En el caso particular de este trabajo, la parte de la estructura interna de la Tierra a considerar es el núcleo, por lo cual es necesario conocer algunas características particulares de la composición del material y sus propiedades.

La sismología también nos permite conocer los aspectos más sobresalientes de la estructura interna de la Tierra, por medio del estudio de la velocidad de propagación de las ondas sísmicas, lo cual está documentado para la mayoría de las capas externas, sin embargo el efecto de las capas más internas es todavía una suposición [Alfé et al., 2002].

Las técnicas AB INITIO basadas en la teoría funcional de la densidad permiten calcular los potenciales químicos de los principales componentes de las impurezas tanto del núcleo interno como del núcleo externo (S, O y Si), además de poder obtener estimaciones de las concentraciones presentes de cada uno de estos elementos. Los resultados muestran que el elemento con

mayor concentración es el oxígeno, por encima del azufre y el silicio, lo cual sugiere que si la convección del núcleo es la responsable del campo magnético, el oxígeno es parte muy importante de esta convección.[Alfe et al., 2002] [Stixrude et al., 1997]

Se ha propuesto también una teoría que sostiene que no existe transferencia de masa entre el núcleo externo y el manto inferior sino únicamente un intercambio de energía, y que el núcleo sólido de la Tierra está creciendo debido al aporte de material proveniente del núcleo exterior líquido lo cual supondría modificar la razón de aspecto entre las esferas que contienen al fluido en estudio y tomar en cuenta también al material que compone el manto [Jordan, 1979].

Basado en lo anterior, es muy complicado conocer todas las características de las capas profundas del planeta por lo que es necesario hacer suposiciones e hipótesis al respecto y trabajar con ellas para obtener resultados.

2.1.2. Modelo propuesto

Para poder simular un fenómeno natural es necesario hacer algunas acotaciones, principalmente porque si se pretende simular un sistema tan complejo como el de la dinámica interna de un planeta, surgirán muchas variables que no se pueden parametrizar y que, si se dejaran libres, la simulación requeriría tantos recursos computacionales que sería imposible llevarla a cabo.

Es por eso que en este caso particular el estudio se centra sobre la dinámica del núcleo externo, considerando su interacción con los alrededores como condiciones de frontera sencillas que permitan llevar a cabo simulaciones en tiempos de cómputo considerables y con resultados significativos.

Las condiciones tomadas en cuenta para este estudio están basadas en la física del problema anteriormente descrita, pero también tomando en cuenta las condiciones con las que se han llevado a cabo experimentos y simulaciones anteriormente publicados, con la finalidad de tener puntos de referencia en la literatura para poder comparar los resultados obtenidos.

En el modelo propuesto las condiciones de frontera son las siguientes: un núcleo interno sólido, con una temperatura constante en su superficie, la frontera exterior rígida a una temperatura constante menor a la interior, sin transferencia de masa con los alrededores y con condiciones de no deslizamiento para el fluido.

La cavidad bajo estudio, equivalente al núcleo externo, se encuentre completamente llena de un fluido newtoniano, viscoso, y con una densidad sujeta a la aproximación de Boussinesq .

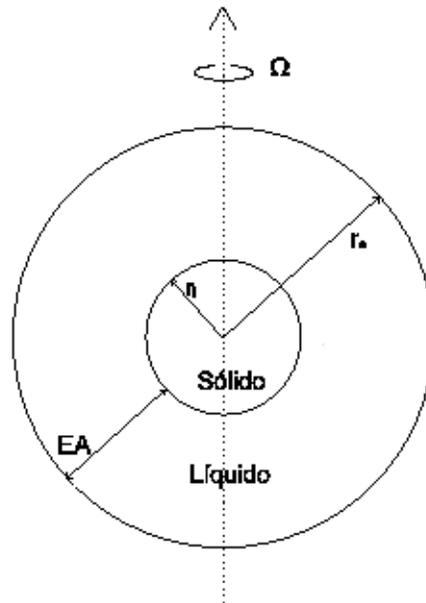


Figura 2.1: Modelo físico

Es importante señalar que en el modelo propuesto no son considerados ni el manto, ni las capas externas del planeta, por lo que la transferencia de calor calculada sobre la frontera exterior es equivalente a la energía que estaría recibiendo el manto, por lo cual sería necesario, posteriormente considerar, tanto la energía absorbida por el manto, la energía transmitida a la corteza en forma de calor latente de cambio de fase, así como la energía que se transmite a la atmósfera, y en un estudio más profundo y detallado considerar la energía radiante proveniente del sol.

Los casos analizados en el presente trabajo de tesis se enlistan a continuación:

- a) Conducción de calor
- b) Convección natural
- c) Convección natural con rotación

2.2. Modelo Matemático

El fluido confinado en la cavidad existente entre las esferas concéntricas, se supone como un fluido: newtoniano, incompresible, cuyas propiedades (densidad (ρ), viscosidad (μ), conductividad térmica (k), difusividad térmica (α), coeficiente de expansión térmica (β)) son constantes. Toda la cavidad gira con una velocidad angular constante (ω) alrededor del eje vertical (\vec{i}_3).

Las ecuaciones de la dinámica de los fluidos están basadas en el cumplimiento de tres principios fundamentales, conservación de masa, conservación de cantidad de movimiento y conservación de energía.

2.2.1. Ecuación de conservación de masa

La ecuación de conservación de masa para un fluido incompresible esta dada como:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0. \quad (2.1)$$

2.2.2. Ecuación de conservación de cantidad de movimiento

La ecuación que describe el movimiento del fluido es la de conservación de cantidad de movimiento que se deriva de la segunda ley de Newton,

$$\vec{F} = \frac{d(m \cdot \vec{v})}{dt}, \quad (2.2)$$

donde m es la masa y \vec{v} es la velocidad.

Tomado en cuenta todas las fuerzas presentes en el movimiento del fluido, e igualandolas al producto de la masa por la variación de la velocidad se tiene:

$$F_{presion} + F_{Coriolis} + F_{centrifuga} + F_{viscosa} + F_{fuente} = \frac{D\vec{M}}{Dt}, \quad (2.3)$$

donde \vec{M} es el vector de cantidad de movimiento.

Puede demostrarse que la ecuación de cantidad de movimiento de un fluido incompresible sujeto a las fuerzas mencionadas puede expresarse como:

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\vec{\nabla}P - 2\rho\vec{\Omega} \times \vec{v} - \rho\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) - \mu\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}) + \rho\vec{g}, \quad (2.4)$$

donde $\frac{D\vec{v}}{Dt}$ es la derivada material de la velocidad, P es la presión, $2\vec{\Omega} \times \vec{v}$ es la aceleración de Coriolis, $\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r})$ es la aceleración centrífuga siendo Ω la velocidad angular, $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v})$ es la aceleración debido al efecto de la viscosidad y \vec{g} es la aceleración de la gravedad [Greenspan, 1968].

Debido a que la variación de la densidad en el término $\rho\vec{g}$ no puede ser despreciada, se utiliza la aproximación de Boussinesq, la cual dice que en todos los términos de la ecuación de cantidad de movimiento la densidad es constante excepto en el término gravitacional, en el cual se define como una función de la temperatura, lo cual es válido siempre y cuando la variación de la densidad sea de alrededor del 1%, para lo cual es necesario que la variación de la temperatura no sea mayor a 10 grados. [Arpaci and Larsen, 1984]

En esta aproximación tenemos entonces

$$\rho = \rho_0[1 - \beta(T - T_0)], \quad (2.5)$$

donde ρ_0 es la densidad de referencia a la temperatura T_0 y β es el coeficiente de expansión térmica.

La densidad entonces se escribe como una constante más una variación, es decir: $\rho_0 + \delta\rho$, al introducirlo al término fuerza de cuerpo de la ecuación de cantidad de movimiento (ec. (2.3)), se escribe como:

$$\frac{1}{\rho_0} [\rho\vec{g}] = 1/\rho_0[\rho_0 + \delta\rho]\vec{g}, \quad (2.6)$$

o bien

$$\frac{1}{\rho_0} [\rho\vec{g}] = \left[1 + \frac{\delta\rho}{\rho_0}\right] \vec{g}. \quad (2.7)$$

De la ecuación de estado (2.5) se tiene:

$$\rho - \rho_0 = -\rho_0\beta(T - T_0), \quad (2.8)$$

donde

$$\rho - \rho_0 = \delta\rho, \quad (2.9)$$

entonces:

$$\delta\rho = -\rho_0\beta(T - T_0). \quad (2.10)$$

Sustituyendo la nueva expresión de la ecuación de estado en la ecuación de cantidad de movimiento, el término se reescribe como:

$$\frac{1}{\rho_0} [\rho\vec{g}] = \left[1 - \frac{\rho_0\beta(T - T_0)}{\rho_0} \right] \vec{g}, \quad (2.11)$$

ó

$$\frac{1}{\rho_0} [\rho\vec{g}] = \vec{g} - \beta(T - T_0)\vec{g}, \quad (2.12)$$

por lo que la ecuación de cantidad de movimiento (ec. (2.3)) queda escrita entonces como:

$$\rho_0 \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\vec{\nabla}P + \rho_0\vec{g} - \rho_0\beta(T - T_0)\vec{g} - 2\rho_0\vec{\Omega} \times \vec{v} - \rho_0\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) - \mu\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}). \quad (2.13)$$

Si el término de presión se divide en dos, una presión estática P_0 más una presión dinámica P^* y se considera que en el equilibrio estático (sin flotabilidad), las velocidades del fluido se hacen cero, la ecuación de cantidad de movimiento (2.13) se reduce a:

$$-\vec{\nabla}P_0 + \rho_0\vec{g} = 0. \quad (2.14)$$

Considerando esto, se puede reescribir la ecuación de cantidad de movimiento de la siguiente manera:

$$\rho_0 \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\vec{\nabla}P^* + \rho_0\beta(T_0 - T)\vec{g} - 2\rho_0\vec{\Omega} \times \vec{v} - \rho_0\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) - \mu\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}). \quad (2.15)$$

Suponiendo que la gravedad está dirigida hacia el centro de la esfera, el término de gravedad se escribe entonces como:

$$\vec{F} = -\rho_0\beta(T_0 - T)\hat{g}\vec{r}, \quad (2.16)$$

donde \bar{T} es la temperatura promedio del fluido, \hat{g} es la constante gravitacional y \vec{r} es el vector de posición unitario en cada punto, definido por:

$$\vec{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}. \quad (2.17)$$

En el caso particular que se estudia en este trabajo de tesis, el sistema gira alrededor del eje vertical por lo que los términos de rotación de la ecuación (2.15) se simplifican a una mínima expresión como se muestra en el apéndice B.

2.2.3. Ecuación de conservación de energía

Basado en el tercer principio fundamental de conservación, la otra ecuación a tomar en cuenta es la de la energía que se deriva a partir de la primera ley de la termodinámica.

$$\dot{Q} + \dot{W} = \frac{DE}{Dt} \quad (2.18)$$

donde \dot{Q} es la tasa de transferencia de calor que ingresa o se extrae al sistema, \dot{W} es el trabajo que se realiza sobre o por el sistema y E es la energía total del sistema.

En la ecuación de balance de energía (2.18) se deben considerar el transporte de energía hacia y desde el volumen, la transferencia de calor por difusión, el trabajo de las fuerzas de presión, el

trabajo de las fuerzas de cuerpo, el trabajo de las fuerzas viscosas y el término fuente de energía.

Tomando en cuenta lo anterior, y considerando que no existe fuente de calor interna, que la conductividad térmica es constante y que el trabajo de las fuerzas viscosas es despreciable, la ecuación de la energía se simplifica como:

$$\frac{DT}{Dt} = \alpha \nabla^2 T \quad (2.19)$$

donde $\alpha = \frac{k}{\rho C_p}$ es la difusividad térmica del fluido.

2.2.4. Parámetros adimensionales

En la dinámica de los fluidos existen una serie de parámetros adimensionales que permiten caracterizar a los flujos, estos parámetros son de suma importancia ya que gracias a ellos se pueden hacer comparaciones o escalamientos de los modelos físicos. Estos parámetros aparecen a partir del proceso de adimensionalización de las ecuaciones como se muestra en el apéndice A.

Número de Rayleigh.

En el caso particular de este trabajo, es el parámetro que permite cuantificar la magnitud del efecto convectivo sobre el fluido.

Debido a la gran variedad de definiciones de número de Rayleigh encontradas en la literatura, en este trabajo se definen dos formas diferentes, una siguiendo el análisis de Chandrasekhar(1961) tomando como valor de referencia la gravedad en la esfera externa, y se describe a continuación:

Considerando que en el caso que se estudia la fuerza de gravedad está orientada en la dirección radial, se puede escribir en coordenadas esféricas como:

$$\vec{f}_s = f_r \vec{i}_r + 0 \vec{i}_\theta + 0 \vec{i}_\phi \quad (2.20)$$

donde f_s es la fuerza en coordenadas esféricas, y f_r es la componente de esa fuerza en la dirección radial.

Esa fuerza en coordenadas esféricas se puede transformar a sus componentes en coordenadas cartesianas mediante una matriz de cambio de coordenadas A , mediante la ecuación $\vec{f}_c = A \vec{f}_s$,

por lo tanto, la fuerza en coordenadas cartesianas se puede escribir como:

$$\vec{f}_c = \begin{bmatrix} \text{sen}\theta\text{cos}\phi & \text{cos}\theta\text{cos}\phi & -\text{sen}\phi \\ \text{sen}\theta\text{sen}\phi & \text{cos}\theta\text{sen}\phi & \text{cos}\phi \\ \text{cos}\theta & -\text{sen}\phi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_r\text{sen}\theta\text{cos}\phi \\ f_r\text{sen}\theta\text{sen}\phi \\ f_r\text{cos}\theta \end{bmatrix}. \quad (2.21)$$

Por otro lado, de la geometría se pueden definir las funciones trigonométricas para los dos ángulos, en función de las coordenadas cartesianas:

$$\text{sen}\theta = \frac{(x_1^2+x_2^2)^{\frac{1}{2}}}{|\vec{r}|} \quad \text{cos}\theta = \frac{x_3}{|\vec{r}|} \quad \text{sen}\phi = \frac{x_2}{(x_1^2+x_2^2)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{cos}\phi = \frac{x_1}{(x_1^2+x_2^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (2.22)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.22) en la matriz (2.21) se puede reescribir la fuerza en coordenadas cartesianas como:

$$\vec{f}_c = f_r \left(\frac{(x_1^2+x_2^2)^{\frac{1}{2}}}{|\vec{r}|} \cdot \frac{x_1}{(x_1^2+x_2^2)^{\frac{1}{2}}} \right) \vec{i}_1 + f_r \left(\frac{(x_1^2+x_2^2)^{\frac{1}{2}}}{|\vec{r}|} \cdot \frac{x_2}{(x_1^2+x_2^2)^{\frac{1}{2}}} \right) \vec{i}_2 + f_r \frac{x_3}{|\vec{r}|}, \quad (2.23)$$

o bien:

$$\vec{f}_c = f_r \frac{x_1}{|\vec{r}|} \vec{i}_1 + f_r \frac{x_2}{|\vec{r}|} \vec{i}_2 + f_r \frac{x_3}{|\vec{r}|} \vec{i}_3. \quad (2.24)$$

Se tiene ya la formulación de la fuerza en coordenadas cartesianas, y esa fuerza de gravedad depende del radio por lo que se puede escribir como $f_r = \hat{g}(R_0) |\vec{r}|$, cuyas unidades son $\left[\frac{m}{s^2}\right]$, y donde $\hat{g}(R_0)$ puede tomar cualquier forma.

Se puede entonces escribir la fuerza de gravedad de la forma:

$$\vec{f}_c = \hat{g}(R_0) |\vec{r}| \frac{x_1}{|\vec{r}|} \vec{i}_1 + \hat{g}(R_0) |\vec{r}| \frac{x_2}{|\vec{r}|} \vec{i}_2 + \hat{g}(R_0) |\vec{r}| \frac{x_3}{|\vec{r}|} \vec{i}_3 \quad (2.25)$$

ó

$$\vec{f}_c = \hat{g}(R_0) x_1 \vec{i}_1 + \hat{g}(R_0) x_2 \vec{i}_2 + \hat{g}(R_0) x_3 \vec{i}_3 \quad (2.26)$$

Se propone entonces que $\hat{g}(R_0)$ sea de la forma $\frac{C_g}{r^5}$, donde C_g es una constante aleatoria con unidades $\left[\frac{m^5}{s^2}\right]$ de tal manera que las unidades de $\hat{g}(R_0)$ sigan siendo $\left[\frac{1}{s^2}\right]$.

Con esta formulación propuesta f_r toma la forma:

$$f_r = \frac{C_g}{r^5} \cdot |\vec{r}| \quad (2.27)$$

como el valor máximo de la fuerza de gravedad está en el radio exterior, se puede evaluar

$$f_r(R_0) = \frac{C_g}{(R_0)^5} \cdot R_0 = \frac{C_g}{(R_0)^4} \equiv \left[\frac{m^5}{s^2 m^4}\right] \equiv \left[\frac{m}{s^2}\right]. \quad (2.28)$$

Por último, sustituyendo esta formulación de la gravedad en la definición del número de Rayleigh, éste puede reescribirse como.

$$Ra = \frac{\beta \Delta T C_g D^3}{\nu^2 R_0^4} \quad (2.29)$$

$$Ra \equiv \left[\frac{\frac{1}{K} K \frac{m^5}{s^2} m^3}{m^4 \frac{m^2}{s} \frac{m^2}{s}} \right] \equiv []$$

A esta definición del número de Rayleigh se le ha llamado **Ra(a)** para efectos de identificación en el texto.

El otro análisis, discutido ampliamente con el Dr. Rubén Ávila, toma en cuenta la variación de la gravedad respecto al radio, para posteriormente hacer una análisis de estabilidad y se obtiene una expresión para el número de Rayleigh de la siguiente forma:

$$Ra = \frac{\hat{\beta} \beta C_g}{\nu \alpha D} \quad (2.30)$$

donde:

$$\hat{\beta} = \left[\frac{T_i - T_o}{\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_o}} \right]$$

A esta segunda definición se le ha llamado **Ra(b)** para su identificación.

Número de Nusselt.

Es el parámetro que permite cuantificar la transferencia de calor a través de las fronteras, y se define como la relación entre el calor de convección entre el calor por conducción:

$$Nu = \frac{hD}{k} \quad (2.31)$$

donde h es el coeficiente convectivo, D es la distancia entre las dos esferas $R_0 - R_i$, y k es la conductividad térmica del fluido.

Número de Taylor.

Es el parámetro que permite evaluar el efecto de las fuerzas de Coriolis y centrífuga sobre las fuerzas viscosas, y en este caso permite cuantificar el efecto de la rotación sobre la convección. Se define como:

$$Ta = \frac{4\omega^2 D^4}{\nu^2} \quad (2.32)$$

donde ω es la velocidad angular de giro, y ν es la viscosidad cinemática del fluido.

Número de Prandtl.

Es el parámetro que permite cuantificar la difusión de cantidad de movimiento sobre la difusión de calor, y se define como:

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} \quad (2.33)$$

donde ν es la viscosidad cinemática, y α es la difusividad térmica del fluido.

De la adimensionalización de las ecuaciones (2.1), (2.15) y (2.19) que se realiza detalladamente en el apéndice A resulta el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\vec{\nabla}^* \cdot \vec{v}^* = 0 \quad (2.34)$$

$$\frac{D\vec{v}^*}{Dt^*} - \left(Ta^{1/2} v_2^* + \frac{Ta}{4} r_1^* \right) \vec{i}_1 + \left(Ta^{1/2} v_1^* - \frac{Ta}{4} r_2^* \right) \vec{i}_2 = -\frac{\partial P^*}{\partial \vec{x}} + Ra T^* + \nabla^{*2} \vec{v}. \quad (2.35)$$

$$\frac{D\theta^*}{Dt^*} = \frac{1}{Pr} [\nabla^{*2} T^*]. \quad (2.36)$$

Este sistema se resuelve con el método descrito en el capítulo 3.

Capítulo 3

Algoritmo numérico

3.1. Método de los elementos espectrales

El método numérico utilizado para resolver las ecuaciones planteadas en el modelo matemático es el de los elementos espectrales. Este método combina la generalidad del método de los elementos finitos con la exactitud de las técnicas espectrales. En la discretización de los elementos espectrales, el dominio computacional es dividido en una serie de elementos, y la velocidad en cada elemento es representada por un interpolante Lagrangiano de alto orden. [Patera, 1983]

Los métodos espectrales consideran la expansión de la solución de la ecuación diferencial en una expansión ortogonal de alto orden, donde los coeficientes de ésta están determinados por una técnica de proyección de residuos pesados. Las aproximaciones se vuelven de orden *infinito* si las funciones de expansión son seleccionadas apropiadamente.

El método de elemento finito es, en el sentido más general, una técnica de residuos pesados aplicada a las series de expansión, cada una con dominio sobre una pequeña región del espacio, (elemento). Cuando la técnica de los residuos pesados depende directamente del principio de asociación variacional, la continuidad de las condiciones de frontera natural está implícitamente satisfecha en las fronteras del elemento como parte del proceso de convergencia.

Al ser un método híbrido recopila las ventajas de los dos que lo componen, por lo que se puede tener una expansión polinomial de la solución en cada uno de los elementos de la malla asegurando la continuidad de la solución en las fronteras de cada elemento.

Una de las ventajas significativas de este método es la posibilidad de reducir considerablemente el número de elementos que componen la malla, debido a que la precisión del método se puede modificar también incrementando el grado de los polinomios de interpolación y viceversa, esto se traduce directamente en un menor tiempo de cómputo además de permitir la implementación directa de algoritmos como el de la esfera cúbica (cubed sphere) y su aplicación en geometrías complicadas.

3.1.1. Funciones de expansión

Al resolver ecuaciones diferenciales con métodos numéricos, no es posible hallar la solución exacta de la ecuación a resolver

$$L(u) = 0, \quad (3.1)$$

por lo que se debe hacer una aproximación polinomial de la función solución que se está buscando

$$u^\delta = u_0 + \sum_{i=1}^{NTP} u_i(t)\Phi_i(x), \quad (3.2)$$

y al hacer dicha aproximación y sustituirla en la ecuación se genera un residual

$$L(u^\delta) = R(u^\delta), \quad (3.3)$$

que es equivalente al error en la solución. Por lo tanto el objetivo del método numérico es hacer que ese residual sea lo más cercano a cero, es decir aproximar lo más posible la solución numérica a la solución real.

$$L(u^\delta) = R(u^\delta) \quad (3.4)$$

El método de los residuales pesados, define el producto interno entre funciones

$$(f, g) = \int_{\Omega} f(x)g(x)d\Omega = 0, \quad (3.5)$$

con la finalidad de encontrar una función cuyo producto interno con el residual sea igual a cero (función de peso), es decir, que el residual, pesado por la función de peso sea igual a cero.

Entre mayor sea el número de puntos con los que se aproxima la solución, más cercana está a la solución real, por lo que es válido decir que la solución aproximada es muy cercana a la solución real conforme $NTP \rightarrow \infty$.

Existen diversos métodos para definir las funciones de peso. En el método de colocación se definen las funciones de peso como funciones δ de Dirac (las funciones δ Dirac tienen las siguientes propiedades

$$\begin{aligned} \delta(x - a) &= 0 & x \neq a \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - a) dx &= 1 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - a) f(x) dx &= f(a), \end{aligned} \quad (3.6)$$

con lo que se garantiza que el residual sea cero en cada punto, es decir, que la función es exacta en cada punto de colocación.

Entonces el residual pesado se escribe como:

$$(v(x)_j, R(u^\delta)) = \int_{\Omega} (\delta(x - x_j), R(u^\delta)) dx = R(u^\delta(x_j, t)) = 0.$$

En el método de volúmenes finitos el dominio Ω se divide en subdominios y las funciones de peso se definen como 1 dentro de su subdominio y 0 fuera de éste. En este trabajo se utiliza el método de Galerkin (secc. 3.1.3).

3.1.2. Definición de los puntos Gauss - Lobatto - Legendre en el dominio físico

Para este trabajo se definieron 384 (trescientos ochenta y cuatro) elementos de ánulo esférico, pero únicamente los 4 (cuatro) elementos base de la malla fueron utilizados en el proceso de creación de los puntos Gauss - Lobatto - Legendre, el resto se creó mediante el uso de coordenadas esféricas (sección 3.2). Cada uno de estos cuatro elementos se creó a partir de 7 (siete) cubos, proyectados hacia siete secciones de esfera concéntricas, de las cuales se obtuvieron 343 puntos dentro del dominio esférico que fueron transportados a un dominio estándar con un sistema de coordenadas local (r, s, t) definido de -1 a 1 en cada uno de sus ejes.

Una vez en el dominio estándar se creó una expansión polinomial isoparamétrica para la posición de cada punto definida como:

$$x = \phi_1 x_1 + \phi_2 x_2 + \phi_3 x_3 + \dots = \sum_{i=1}^{343} \phi_i x_i$$

donde x es la posición del punto donde se está calculando, ϕ_i es la función de expansión en cada punto i , y x_i es la posición de cada uno de los 343 puntos de cada elemento definidos en el dominio estándar ¹. La definición de las funciones de expansión que se utilizan se trata en la sección 3.1.3.

Lo anterior nos permite conocer la posición de cualquier punto dentro del dominio estándar siempre y cuando se conozca la posición de los puntos base definidos, y como esos puntos están definidos en el dominio físico, se conoce la posición de cada uno. Como se trata de una expansión isoparamétrica, se puede entonces conocer cualquier propiedad en cualquier punto del dominio.

Para acoplar esto al método de los elementos espectrales se buscan los puntos Gauss - Lobato - Legendre (GLL) (sección 3.1.4) dentro del dominio estándar, y se calculan con la expansión y así se pueden mapear de regreso al dominio físico de la esfera. En este caso se definen $6^3 = 216$ puntos GLL para cada uno de los 384 elementos que componen la esfera.

3.1.3. Método de Galerkin (Bubnov-Galerkin)

El método de los residuos pesados no define el tipo de función de expansión por lo que existen diversas maneras de elegir estas funciones.

Una variación del método de Galerkin es el método tau, en el que $v(x)_j = \phi_j(x)$, además las funciones de expansión no satisfacen las condiciones de frontera, éstas son forzadas por una serie de ecuaciones adicionales.

Otra variación del método es la aproximación de Petrov - Galerkin, en la que las funciones de peso $v(x)_j$ son diferentes de las funciones de expansión $\phi_j(x)$. Éste es utilizado en los métodos libres de mallas donde las funciones de expansión (MLS), están definidas por los puntos vecinos mientras que las funciones de peso son *splines* de cuarto orden.

En los elementos espectrales se utiliza el método de Bubnov - Galerkin en el que las funciones de peso son exactamente iguales a las funciones de expansión ϕ , con lo que se tiene:

$$(v(x)_j, R(u^\delta)) = (\phi_j(x), R(u^\delta)) = \int_{\Omega} (\phi_j(x), R(u^\delta)) dx = 0$$

¹En la figura 3.1 se muestra un ejemplo con 3^3 puntos, en el caso de este trabajo se definen 7^3 puntos para cada elemento.

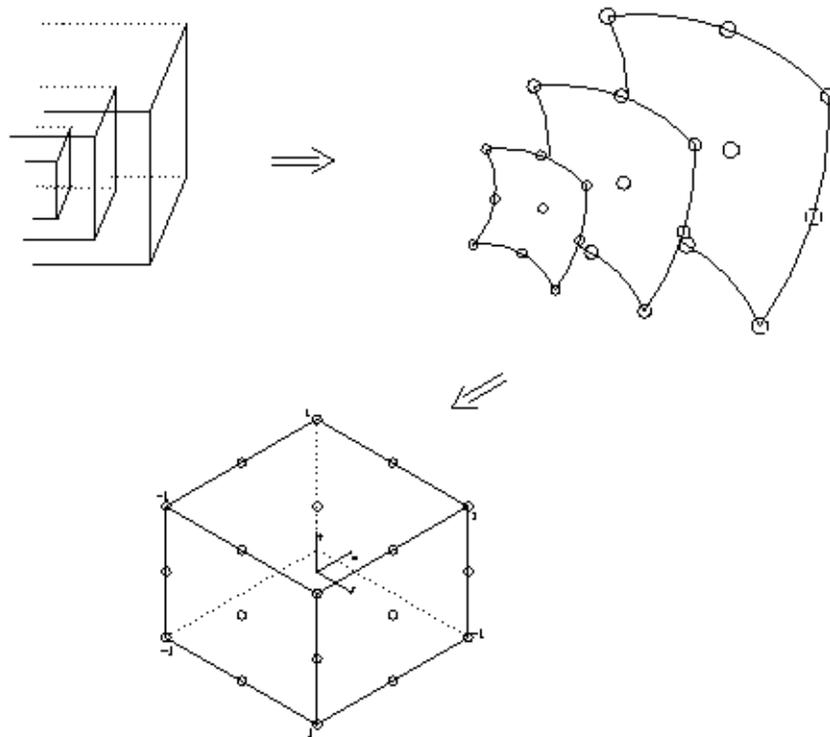


Figura 3.1: Ejemplo de la definición de los puntos dentro del dominio estándar

estas funciones están definidas a partir de polinomios de Lagrange, lo cual garantiza la ortogonalidad entre ellas.

Adicionalmente se tiene que cada función de expansión satisface las condiciones de frontera

$$B\phi_j(x) = 0.$$

3.1.4. Cuadratura de Gauss - Lobato - Legendre

Por lo descrito en la sección 3.1.1, se tienen funciones que es necesario integrar sobre cada dominio elemental, y se debe hacer de forma numérica a través de una suma finita de la forma:

$$\int_{-1}^1 u(\xi) d\xi \approx \sum_{i=0}^{Q-1} w_i u(\xi_i)$$

donde w_i son los pesos y ξ_i representan la abscisa de Q diferentes puntos en el intervalo $-1 \leq \xi_i \leq 1$.

Dentro de las múltiples formas de integración numérica se encuentra la *Cuadratura Gaussiana*, la cual define a las funciones $u(\xi)$ como polinomios de Lagrange y a los pesos w_i como integrales de polinomios de Lagrange. En este caso en particular, se utiliza la cuadratura Gauss - Lobatto - Legendre. Esta cuadratura emplea las abscisas de los puntos que incluyan ambos extremos del intervalo, es decir $\xi = \pm 1$. Entonces los pesos y las abscisas se definen de la siguiente forma:

$$\xi_i = \begin{cases} -1 & i = 0 \\ \xi_{i-1, Q-2}^{1,1} & i = 1, 2, 3, 4, \dots, Q-2 \\ 1 & i = Q-1 \end{cases}$$

$$w_1^{0,0} = \frac{2}{Q(Q-1)[L_{Q-1}(\xi_i)]^2} \quad i = 0, 1, 2, \dots, Q-1$$

donde $L_Q(\xi)$ es el polinomio de Legendre $L_Q(\xi) = P_Q^{0,0}(\xi)$.

3.2. Esfera cúbica

Al trabajar con dominios en geometrías cúbicas surgen muchos problemas con el uso de coordenadas esféricas ya que se tiene la comunmente llamada *singularidad de los polos* donde la coordenada de la longitud puede tomar múltiples valores, o se pueden presentar inconvenientes con la transformación de las ecuaciones a estas coordenadas. Una solución práctica a este problema es el transformar el dominio esférico en un dominio cúbico en el cual se puedan resolver sin mayor inconveniente las ecuaciones, eliminando el problema de las singularidades en los polos. [Ronchi et al., 1996] [Nair et al., 2005]

El algoritmo de la esfera cúbica (cubed - sphere) es un método para mapear los puntos de la superficie de una esfera sobre las caras de un cubo inscrito en la misma (ver Fig. 3.2²). Para lograr esto se definen una serie de transformaciones para cada uno de los sectores de la esfera el cual se trasladará a una de las caras del cubo.

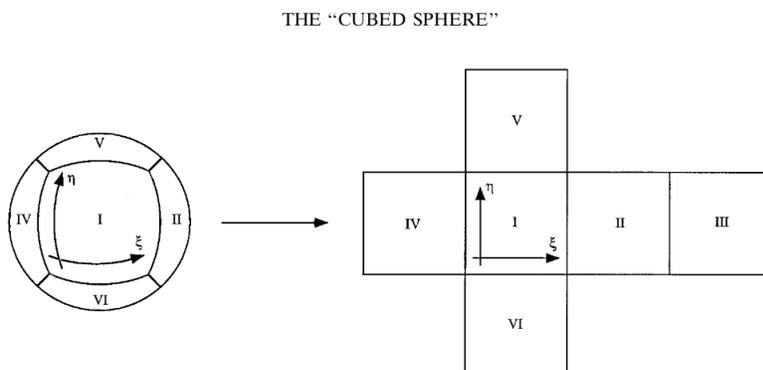


Figura 3.2: La esfera se divide en seis secciones las cuales corresponden a cada una de las caras del cubo inscrito

Una de las aportaciones más importantes de este trabajo es el desarrollo de la malla numérica, para ello se tomó el algoritmo original de seis sectores y se realizó una subdivisión de cada uno de los macro sectores de la esfera, cada sector se dividió en 64 (sesenta y cuatro) elementos cuya proyección corresponde a una sección no simétrica de la pirámide trunca que representa a cada sector (Fig. 3.3).

Para crear las coordenadas de los puntos de cada subsector, se utilizó como punto de referencia la esquina inferior interior del primer macro sector y a partir de ahí se crearon 7 (siete)

²Tomada de Ronchi et. al. 1996

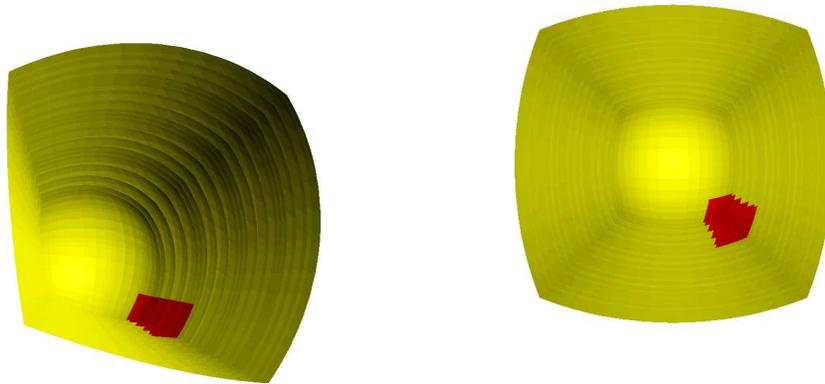


Figura 3.3: Representación de un elemento y su posición dentro del macro elemento.

sectores de esfera concéntricos equidistantes, cada uno formado por una red de 625 (seiscientos veinticinco) puntos, veinticinco en cada dirección. Estos puntos se agruparon en cuatro zonas de 343 (trescientos cuarenta y tres) puntos, siete en cada dirección, compartiendo los puntos de las caras colindantes, cada uno de estos grupos corresponden a los cuatro elementos que forman el primer cuadrante de la cara interna del primer sector (Fig. 3.4).

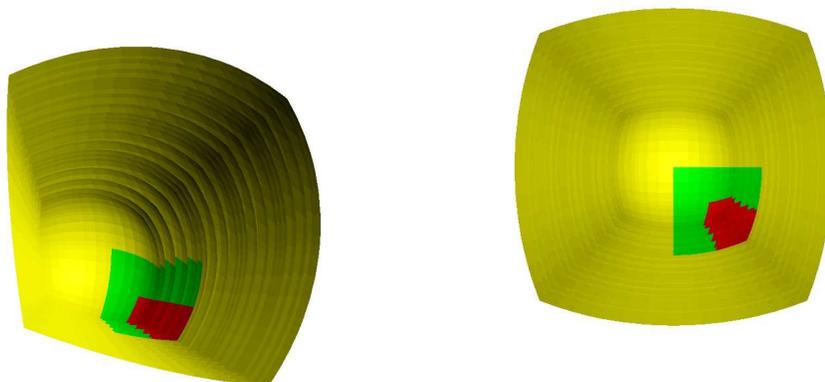


Figura 3.4: Cuatro elementos del primer cuadrante de la cara interna del sector

Cada uno de estos cuatro elementos se trasladaron a un dominio estándar $[-1,1]$, en el cual se definen las raíces del polinomio Gauss-Lobatto-Legendre en las tres direcciones, esto con

la finalidad de calcular las coordenadas en el dominio físico, de cada una de las raíces de los polinomios proyectados sobre el dominio estandar (sección 3.1.2).

Teniendo las coordenadas de las raíces de los polinomios (de orden 6), de cada uno de estos 4 elementos, se ordenan de manera que cada grupo de 216 puntos correspondan a cada elemento en forma subsecuente. Estos 864 (ochocientos sesenta y cuatro) puntos, ya distribuidos correctamente y formando el primer cuadrante de la capa más interna del primer elemento, se transformaron a coordenadas esféricas, con la finalidad de aprovechar la simetría que estas coordenadas ofrecen.

Haciendo uso de las coordenadas esféricas se duplican los 4 elementos creados anteriormente, en la dirección colatitudinal o polar, posteriormente estos ocho elementos se duplican en dirección azimutal, cubriendo así la capa más interna del primer macro elemento, con dieciseis elementos formados por 3456 (tres mil cuatrocientos cincuenta y seis) puntos. Una vez más haciendo uso de las coordenadas esféricas, esta primera capa se multiplica en la dirección radial para obtener 4 capas concéntricas. En este punto se ha construido el primer macro sector formado por 64 (sesenta y cuatro) elementos de 216 (doscientos dieciseis) puntos cada uno.

Este primer macro sector se multiplica tres veces en la dirección colatitudinal hasta formar el anillo de los cuatro macro elementos ecuatoriales de la esfera. Para los macro elementos de los polos se debe hacer un tratamiento especial, ya que la posición del primer elemento dentro del macroelemento cambia para cada uno de los casquetes polares. Una vez ubicado el primer elemento dentro de cada macroelemento polar, éste se duplica primero en una dirección, y posteriormente se duplica en la dirección perpendicular, teniendo en consideración que la coordenada azimutal para esta replicación no crece, sino justo después del polo vuelve a decrecer pero la coordenada polar de esos puntos es una imagen a espejo con signos contrarios a los puntos que la están generando.

Una vez obtenidos los puntos que conforman a los seis macroelementos se deben corregir los errores numéricos en los puntos frontera de cada uno de los 384 (trescientos ochenta y cuatro) elementos, para evitar que existan diferencias entre las coordenadas de los puntos que comparten los elementos, posteriormente se crean los archivos de conectividad entre elementos, en los cuales se especifica la vecindad de cada una de las seis caras de todos los elementos, es decir, se registra qué cara y qué elemento comparten cada una de las seis fronteras de cada elemento. Una vez completa la esfera, se transforman los 82944 (ochenta y dos mil novecientos cuarenta y cuatro) puntos a sus coordenadas cartesianas, para crear el archivo de datos que será leído posteriormente

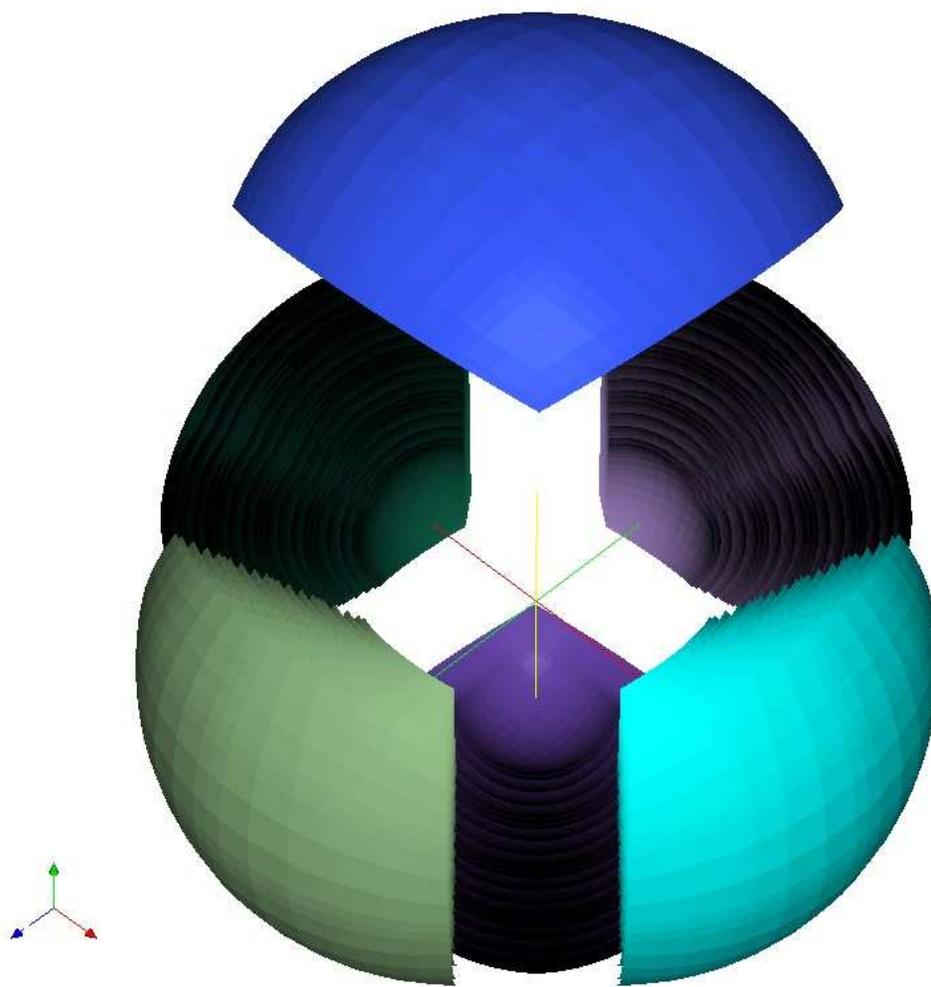


Figura 3.5: Explosión de los 6 (seis) elementos que forman la esfera

por el preprocesador del programa de elementos espectrales para generar la malla computacional.

Capítulo 4

Resultados

En este trabajo de tesis se estudia primero, el proceso de conducción de calor entre dos esferas concéntricas, después, el fenómeno de convección natural entre esas esferas concéntricas provocado por un campo de gravedad radial, posteriormente, se estudia el efecto de diferentes intensidades de rotación sobre los patrones convectivos, haciendo en cada caso un análisis de los efectos de la convección y la rotación sobre la transferencia de calor.

Los resultados obtenidos se comparan con la solución analítica en el caso de la conducción de calor, y con los resultados publicados del proyecto GEOFLOW en el caso de la convección natural.

4.1. Conducción de calor

Cuando se realizan simulaciones numéricas es necesario llevar a cabo una validación de los datos obtenidos, ya sea con resultados experimentales o con soluciones analíticas de las ecuaciones.

Para hacer la validación del código computacional se realizó una simulación del proceso puramente difusivo, del cual se conoce la solución analítica (apéndice C), y se compararon tanto la distribución de temperaturas como los coeficientes convectivos en las dos fronteras.

Al considerar el fenómeno de flujo de calor en un fluido confinado entre dos esferas concéntricas, con temperaturas uniformes constantes y diferentes en las fronteras, sin gravedad, no existe convección, es decir, no hay movimiento del fluido, por lo tanto la distribución de temperatura

en el estado estacionario depende únicamente del radio, por lo que el proceso de conducción de calor se vuelve unidimensional, sujeto únicamente a las condiciones de frontera.

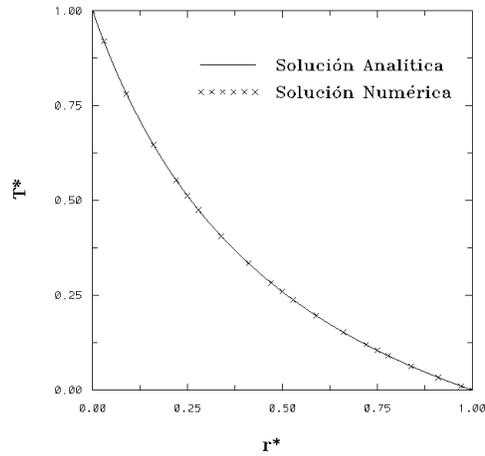
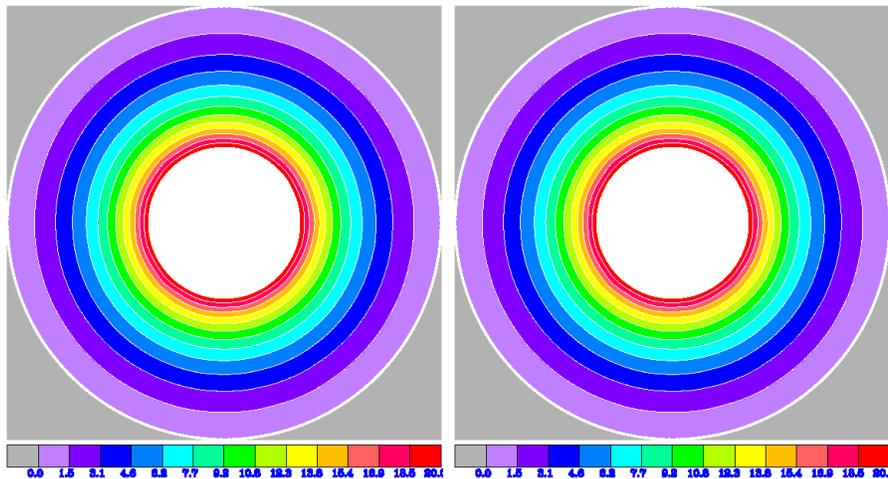


Figura 4.1: Comparación entre la solución analítica y la solución numérica

En la figura 4.1 se muestra la comparación de la distribución de temperatura adimensional a lo largo del radio en el estado estacionario, donde $T^* = \frac{T-T_e}{T_i-T_e}$ y $r^* = \frac{r-R_i}{R_e-R_i}$. En esta gráfica se puede ver que la distribución de temperaturas obtenidas numéricamente, corresponden con la curva que representa la solución analítica de la temperatura.



(a) Isotermas meridionales

(b) Isotermas ecuatoriales

Figura 4.2: Líneas isotermas en los planos meridional y ecuatorial en el estado estacionario del proceso de conducción de calor.

Se realizó también la validación del cálculo numérico del número de Nusselt (transferencia de calor), tanto en la frontera interna como en la frontera externa, comparándolos con los calculados analíticamente a través de las ecuaciones (C.26) y (C.33), desarrolladas en el apéndice C. Los resultados numéricos reproducen el Nusselt unitario en cada frontera.

Se calcularon numéricamente las componentes del vector flujo de calor a través de ambas fronteras y se transformaron a coordenadas esféricas mediante la matriz de cambio de coordenadas (ver ecuación (2.21)), con esto se demuestra que, en el caso difusivo, únicamente se tiene flujo de calor en la dirección radial, y las componentes polar y azimutal son cero, lo cual es físicamente congruente con las isosuperficies de temperatura esféricas concéntricas.

En la figura 4.2 se muestran las isolíneas de temperatura en los planos ecuatorial y meridional, y en la figura 4.3 se muestra la isosuperficie de la temperatura media del fluido, obtenida mediante el promediado de las temperaturas de todos los puntos Gauss-Lobato-Legendre del dominio computacional.

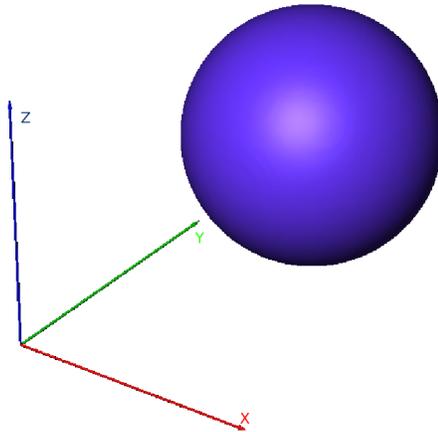


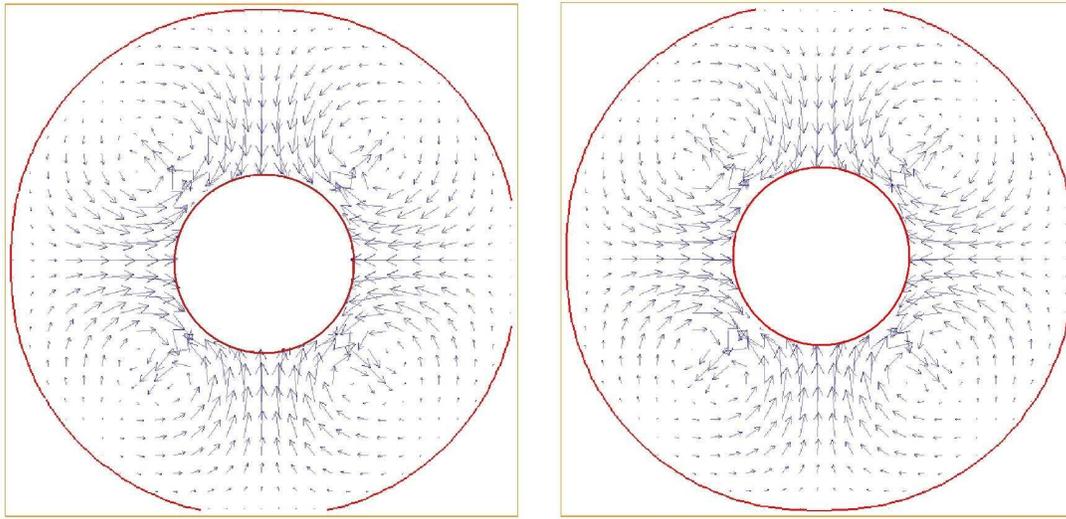
Figura 4.3: Isosuperficie de la temperatura promedio en el estado estacionario

Los resultados obtenidos en este proceso de validación muestran satisfactoriamente el acoplamiento del algoritmo de la esfera cúbica con el método de elementos espectrales.

4.2. Convección natural

4.2.1. Número de Rayleigh crítico

Para el estudio del fenómeno de convección natural entre esferas concéntricas, se propone un campo de gravedad radial que decrece con el radio en función de $1/r^5$, es decir, el valor de la gravedad es menor en el radio exterior y es más grande en el radio interno. Se utiliza esta variación para hacerlo coincidir con el modelo utilizado en el experimento de micro gravedad llevado a cabo en la estación espacial internacional [Futterer et al., 2010].



(a) Campo de velocidad del plano ecuatorial ($Ra(a) = 1606$) (b) Campo de velocidad del plano meridional ($Ra(a) = 1606$)

Figura 4.4: Campos de velocidad para el número de Rayleigh crítico.

Para poder observar los patrones convectivos, se buscó computacionalmente el valor de la constante gravitacional que iniciara la convección natural en el fluido. Con esa constante se calculó el número de Rayleigh crítico, y de acuerdo a los desarrollos planteados en la sección 2.2.4, los valores resultantes son $Ra_c(a) = 1606$ y $Ra_c(b) = 7455.6$.

No existen experimentos o simulaciones numéricas con las características establecidas en este caso, temperaturas fijas en las fronteras, relación de radios 0.35 y gravedad con una variación de la forma $1/r^5$.

Haciendo una revisión de los casos con características similares publicados en la literatura,

se encontró que para el caso de una relación de radios 0.4 con una gravedad variando linealmente con el radio, el número de Rayleigh crítico definido de la misma forma que $Ra(a)$ es 2847 [Tilgner, 1996]. Comparándolo con los resultados obtenidos, el número de Rayleigh crítico $Ra_c(a) = 1606$ es cualitativamente correcto, ya que en este caso la fuerza de flotación es mayor, lo cual implica que el número de Rayleigh crítico debe ser menor que en el caso de la variación lineal de la fuerza.

Para el caso del experimento GEOFLOW con una variación de la gravedad de la forma $1/r^5$ y una relación de radios $r_i/r_e = 0.5$, el número de Rayleigh crítico es 2491 [Futterer et al., 2010]. Cabe mencionar que en la definición del número de Rayleigh utilizada en el experimento GEOFLOW se toman en cuenta los parámetros eléctricos que generan la fuerza de gravedad. Comparándolo con este experimento, el resultado obtenido también es cualitativamente correcto dado que en la simulación el radio interno es más pequeño, por lo que la fuerza de flotación es mayor, y el número de Rayleigh crítico debe ser menor. Este mismo comportamiento ha sido reportado por Chandrasekhar(1961), es decir, entre mayor sea la relación de aspecto el número de Rayleigh crítico es mayor [Chandrasekhar(1961), p. 244].

4.2.2. Patrones de flujo

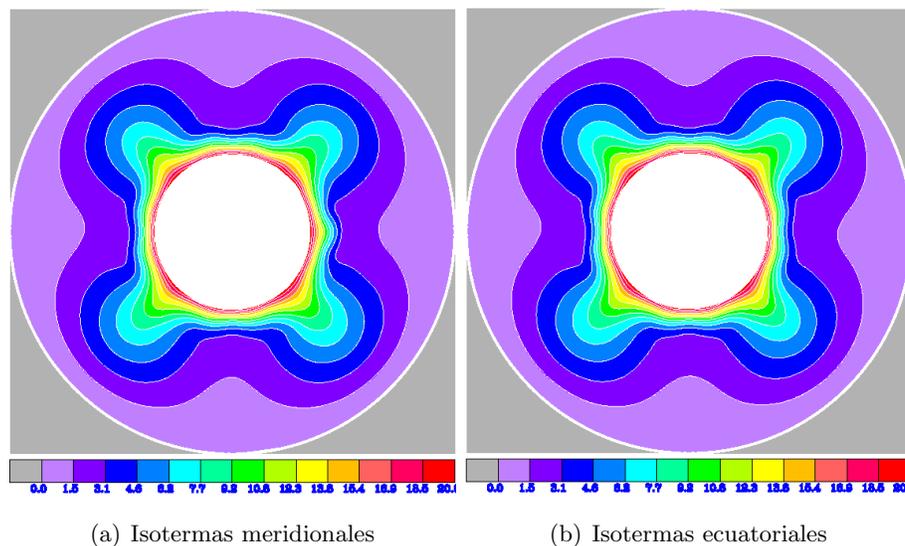


Figura 4.5: Líneas isothermas en el plano meridional y ecuatorial ($Ra(a) = 1606$)

Al observar la figura 4.4(a) en la que se presenta un corte del campo de velocidades en el plano meridional, para el número de Rayleigh crítico ($Ra(a) = 1606$), y compararla con la figura

4.4(b) se puede observar que existe una clara similitud en el campo de velocidades de los dos planos, lo cual sugiere que el campo de velocidades es simétrico en la geometría esférica.

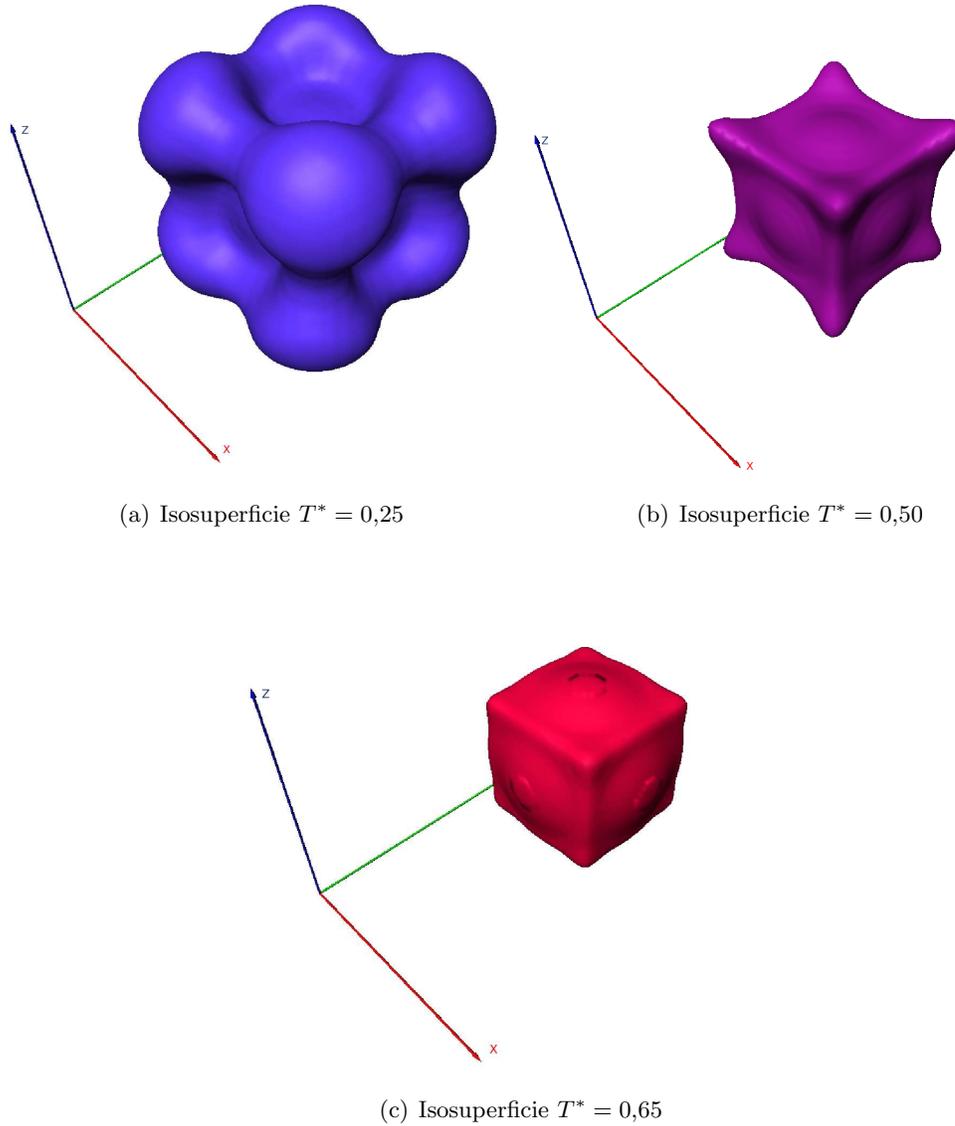


Figura 4.6: Isosuperficies de temperatura ($Ra(a) = 1606$)

El efecto de la convección también se puede observar claramente en las líneas isoterms (ver fig. 4.5), las cuales también muestran simetría, tanto en el plano meridional como en el plano ecuatorial, lo anterior también se puede corroborar al observar la figura 4.6 que presenta una vista isométrica de tres isosuperficies de temperatura.

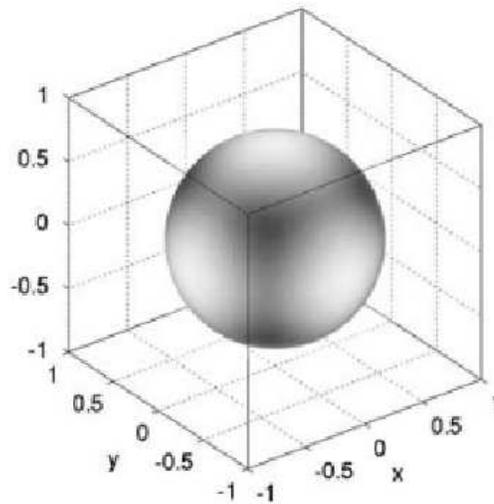


Figura 4.7: Patrones de convección en anillos esféricos en el caso sin rotación $Ta = 0$ y $Ra = 5 \times 10^3$, visualización del campo de temperatura en la dirección radial. Las sombras oscuras corresponden al flujo caliente ascendente y los colores brillantes corresponden al flujo frío [Futterer et al., 2010].

Los patrones obtenidos para el rango de números de Rayleigh $1606 < Ra < 1.2 \times 10^4$ coinciden cualitativamente con los mostrados en la figura 4.7 presentados por Futterer(2009). El número de celdas obtenidas en este patrón de flujo, también corresponde con los patrones reportados por Futterer(2008), (ver figura 4.8).

Por otro lado en diversos artículos publicados en la literatura se hace mención de la inestabilidad de la convección natural, por lo que se dejó correr el tiempo de cálculo sin modificar los parámetros de la convección y se observó que el estado convectivo encontrado permanece durante un tiempo pero posteriormente se modifica, es decir no es un estado permanente.

También se observó que el tiempo que el patrón de flujo se mantiene, depende directamente del número de Rayleigh, es decir entre más grande sea la constante gravitacional menor es el tiempo que se mantiene el patrón convectivo. Ésto sucede hasta un número $Ra(a)$ de 1.2×10^4 , después de este número ya no se obtiene el mismo patrón convectivo.

De los resultados obtenidos se puede ver también una clara dependencia de la transferencia de calor a los efectos de la convección, esta dependencia puede ser observada tanto en el campo de temperatura como en los números de Nusselt tanto interno como externo.

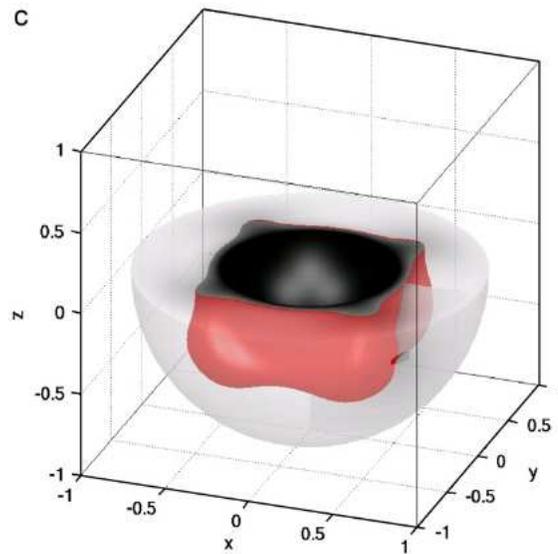


Figura 4.8: Campo de temperatura en el hemisferio sur. Convección para el caso sin rotación $Ta = 0$, $Ra = 4 \times 10^3$ [Futterer et al., 2008].

Una vez que se ha llegado al número de Rayleigh crítico, el fluido comienza a moverse, sin embargo por efecto de la viscosidad, al inicio este movimiento se ve atenuado, hasta que por efecto de la no-linealidad de las ecuaciones, la magnitud de la velocidad es tal que sobrepasa al efecto viscoso, y el proceso convectivo se hace presente en la temperatura. Es decir, el inicio del estado convectivo en la región cercana al número de Rayleigh crítico no es violento, es un proceso lento debido a los efectos de la viscosidad.

Ésto se puede ver en la gráfica 4.9 donde, para el número de Rayleigh crítico ($Ra(a) = 1606$), se observa que antes del tiempo adimensional 0.284 los números de Nusselt son igual a 1, a partir de este punto el fluido llega a un estado de movimiento tal que, la transferencia de calor cambia y los números de Nusselt crecen y oscilan. A partir del tiempo 0.473 la transferencia de calor se estabiliza y se mantiene hasta el tiempo 0.994, después del cual el patrón de flujo cambia y los números de Nusselt también se modifican.

Estos cambios en el número de Nusselt corresponden perfectamente con los cambios en el patrón de flujo, y por consiguiente con las isotermas. Las figuras 4.10, 4.11, 4.12 y 4.13 muestran las isosuperficies de la temperatura promedio para el número de Rayleigh crítico ($Ra(a) = 1606$) en los distintos puntos de la gráfica. La figura 4.10 corresponde a la zona en la cual el movi-

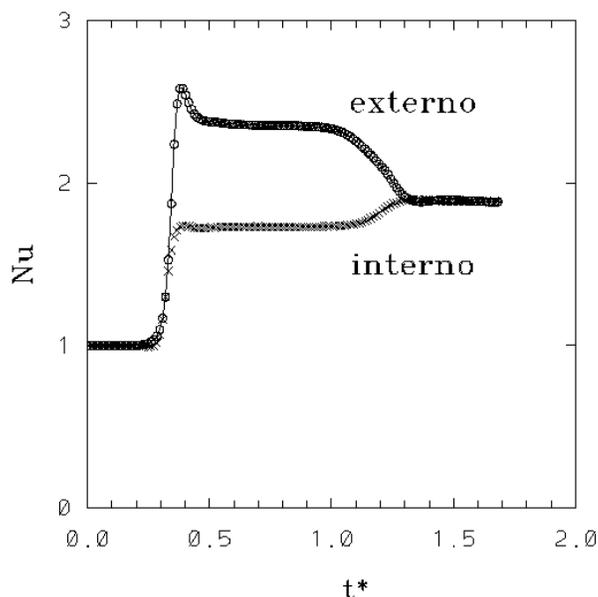


Figura 4.9: Números de Nusselt en la convección natural ($Ra(a)=1606$).

miento del fluido aún no es suficiente como para modificar la transferencia de calor. La figura 4.11 corresponde al punto donde el Nusselt externo es máximo, en $t^* = 0.378$. La figura 4.12 representa el rango ($0.48 < t^* < 0.95$). La figura 4.13 está tomada en $t^* = 1.183$ una vez que el patrón convectivo se ha modificado. Finalmente la figura 4.14 muestra la temperatura promedio en el tiempo $t^* = 1.538$ una vez que los números de Nusselt se han vuelto a igualar, sin embargo después de este punto el patrón convectivo no vuelve a ser estacionario.

La variación en la transferencia de calor se puede explicar observando la gráfica de los números de Nusselt en el tiempo (fig. 4.9). En la primera parte el movimiento del fluido aún no es lo suficientemente intenso como para modificar la transferencia de calor por conducción, razón por la cual el número de Nusselt se mantiene en la unidad. En el momento en que la velocidad del fluido logra vencer los efectos viscosos, las capas de fluido comienzan a acelerarse y este movimiento provoca que se transfiera energía más rápidamente, es por esto que el número de Nusselt aumenta hasta un máximo que se logra cuando la velocidad del fluido también es máxima. Después de esto se llega al estado cuasi-estacionario del flujo, en este momento la transferencia de calor se estabiliza, sin embargo se observa que los números de Nusselt no son iguales, esto quiere decir que por la esfera exterior se está transmitiendo más calor del que se está transfiriendo desde la esfera interna, esto se puede comprobar al observar que la temperatura media es menor que la temperatura media en el caso difusivo.

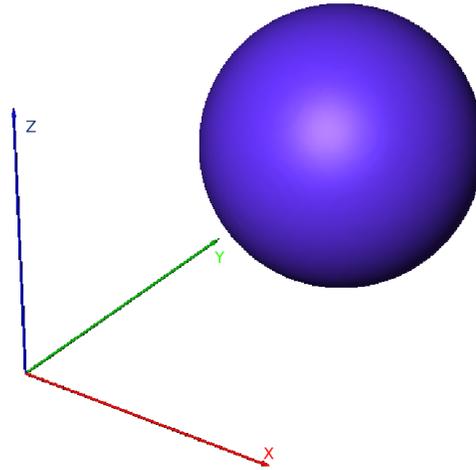


Figura 4.10: Isosuperficie de la temperatura en el inicio de la convección ($Ra(a) = 1606$, $t^* = 0.2$).

Posteriormente vuelve a existir un cambio de los patrones convectivos, y este cambio se ve reflejado en el número de Nusselt, los cuales ahora tienden a coincidir nuevamente lo que significa que las tasas de transferencia de calor tanto en la esfera interna como en la esfera externa vuelven a ser las mismas, sin embargo no regresan hasta el valor que tenían en el caso difusivo, esto es debido a que el fluido se mantiene en movimiento y éste aumenta la tasa de transferencia de calor.

La razón por la que no se mantiene el estado cuasi-estacionario del flujo después de despertar la convección, puede deberse a la diferencia en las tasas de transferencia de calor en las esferas interna y externa. Esto puede estar generando un desbalance térmico que al cabo del tiempo provoca un nuevo brinco del patrón de flujo que buscará equilibrar la transferencia de calor por las dos fronteras, sin embargo este nuevo patrón de flujo de "equilibrio térmico" tampoco es un patrón estacionario.

A diferencia de lo que ocurre en el estado marginal, cuando el número de Rayleigh se incrementa lo suficiente $Ra > 1.2 \times 10^4$ el inicio de la convección es súbito, y el cambio en los números de Nusselt está dado por un escalón desde el inicio de la simulación, como se puede ver en la gráfica 4.15, en la que se muestran los valores de los números de Nusselt para un número de Rayleigh de 16500.

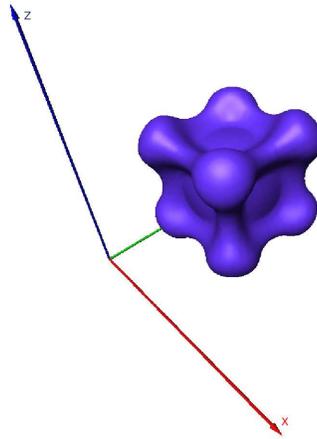


Figura 4.11: Isosuperficie de temperatura promedio en el pico del Nu externo ($Ra(a) = 1606$, $t^* = 0.378$).

Note que para un número de Rayleigh de 16500, el número de Nusselt externo crece hasta un valor cercano a 6, a diferencia del Rayleigh crítico, donde el valor no llega a 3. Además para el caso del Rayleigh supercrítico, los números de Nusselt oscilan y se estabilizan en un periodo de tiempo muy corto.

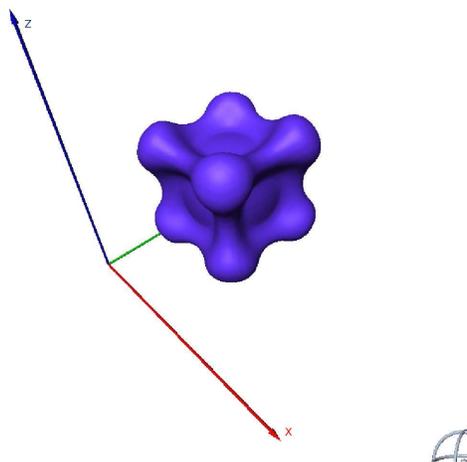


Figura 4.12: Isosuperficie de temperatura promedio en la convección natural ($Ra(a) = 1606$, $t^* = 0.6$).

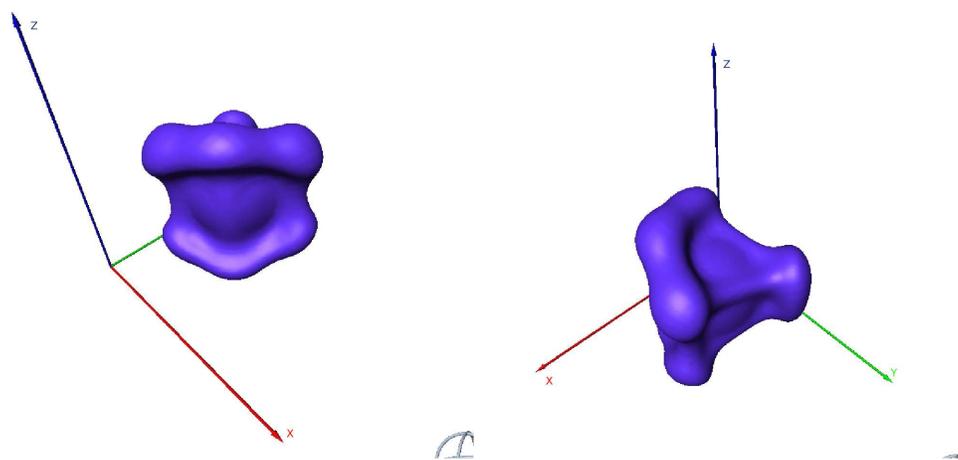


Figura 4.13: Isosuperficie de temperatura promedio despues de modificarse el patrón convectivo ($Ra(a) = 1606$, $t^* = 1.183$).

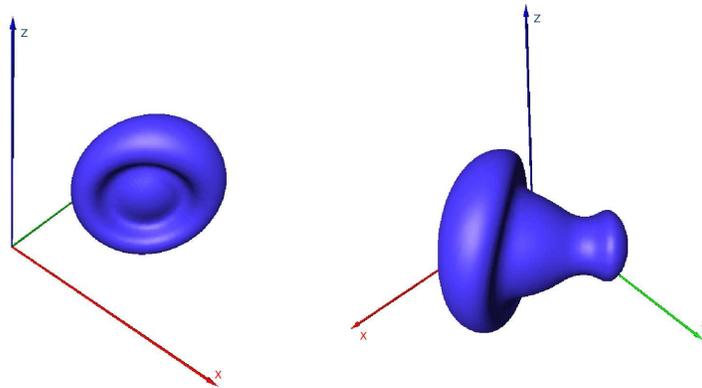


Figura 4.14: Isosuperficie de temperatura promedio una vez que los números de Nusselt vuelven a coincidir ($Ra(a) = 1606$, $t^* = 1.538$).

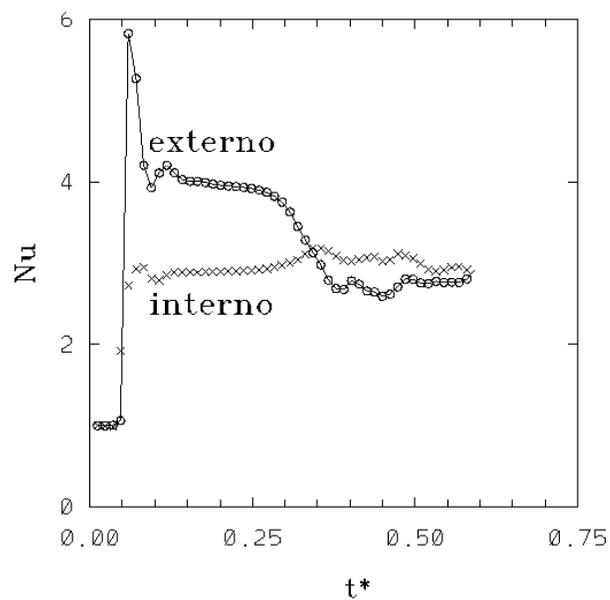


Figura 4.15: Números de Nusselt en la convección natural ($Ra(a) = 16500$)

4.3. Convección natural y rotación

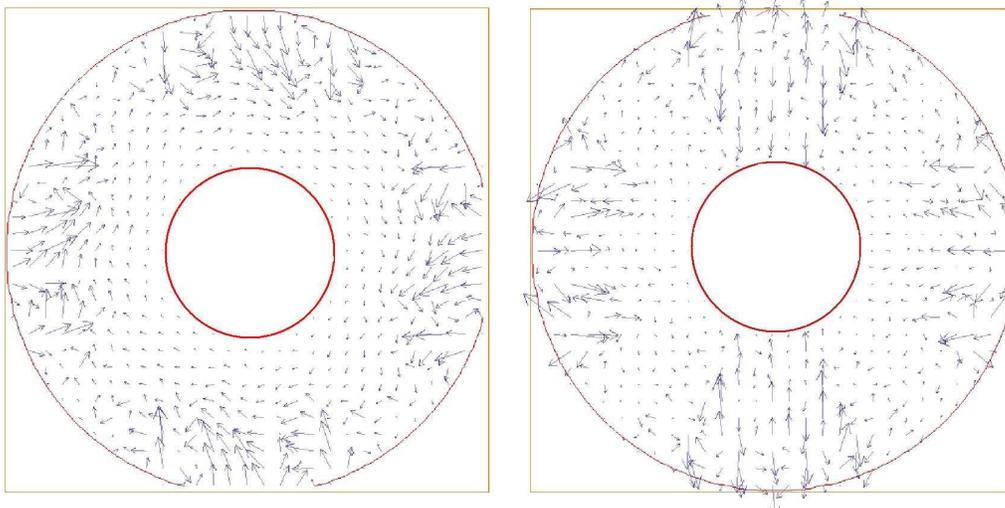
Una vez obtenidos los patrones de la convección natural, se estudió el efecto de la rotación (fuerza de Coriolis) sobre estos patrones convectivos, para ello se tomó como punto de partida el estado cuasi-estacionario de la convección ($Ra(a) = 1606$) y se consideraron dos diferentes valores de velocidad angular con el fin de poder observar y evaluar los efectos de la intensidad de esta nueva fuerza. En el primer caso, se aplicó una velocidad de rotación moderada ($Ta = 7.7 \times 10^4$) de tal manera que los efectos de la rotación y la convección fueran equiparables, es decir que los dos efectos compitieran entre sí. Después se aplicó una velocidad de rotación grande ($Ta = 1 \times 10^6$) dejando que el efecto de la rotación fuera dominante sobre la convección natural.

También se aplicaron estas mismas dos rotaciones a dos números de Rayleigh más, uno por debajo del número de Rayleigh crítico ($Ra(a) = 1098$) y otro supercrítico ($Ra(a) = 3570$). Con estos casos se tienen nueve condiciones, considerando los casos donde $Ta = 0$. En estos casos se calcula el número de Nusselt para ambas fronteras y se observan los patrones convectivos y las superficies isotermas de cada caso. En la tabla 4.3 se muestran los valores del número de Nusselt en cada frontera para cada uno de los casos.

Caso	Ta	Ra(a)	Ra(b)	Nu_i	Nu_e
1	0	1098	5097.8	1.003	0.9981
2	0	1606	7455.6	1.73	2.3551
3	0	3570	16568.	2.26	3.1214
4	77757	1098	5097.8	1.003	0.9974
5	77757	1606	7455.6	1.1133	1.1506
6	77757	3570	16568.	1.7096	1.5700
7	1000000	1098	5097.8	1.0037	1.0212
8	1000000	1606	7455.6	1.0058	1.0180
9	1000000	3570	16568.	1.058	1.0580

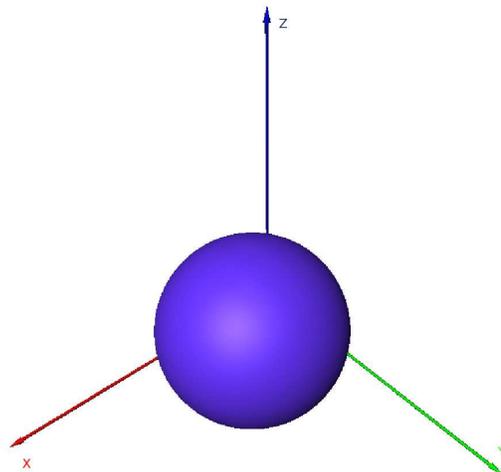
En la sección 4.2.2 se describieron los casos sin rotación $Ta = 0$, en esta sección se muestran algunos aspectos importantes de los seis casos con rotación.

En la figura 4.16 se observan los vectores de velocidad y la superficie de temperatura promedio del caso 4, se puede observar que a pesar de que el efecto de la rotación ya está siendo presente (plano meridional) aún no es suficiente para modificar el campo de temperaturas, además de que al tener un número de Rayleigh subcrítico la convección natural aún no está presente. Ésto también puede observarse en los números de Nusselt que permanecen muy cercanos a la unidad.



(a) Campo de velocidad del plano ecuatorial

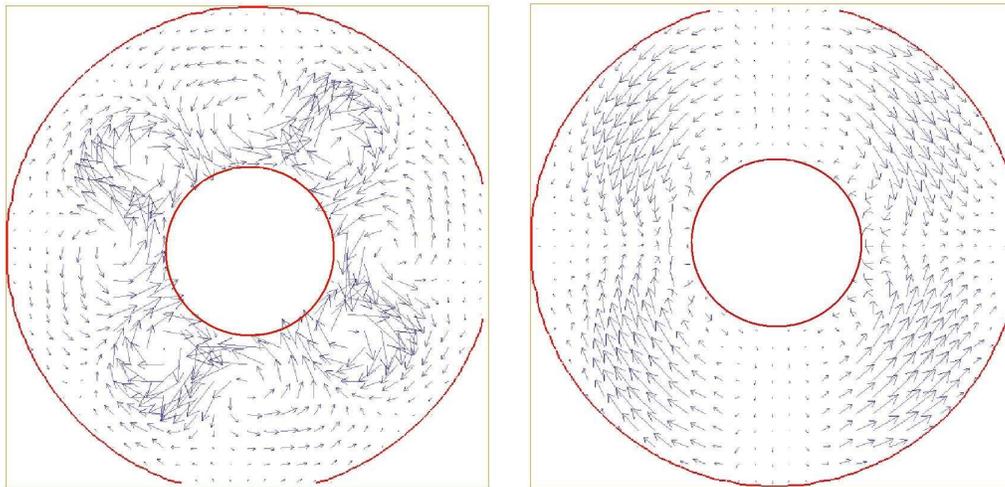
(b) Campo de velocidad del plano meridional



(c) Isotherma de temperatura media

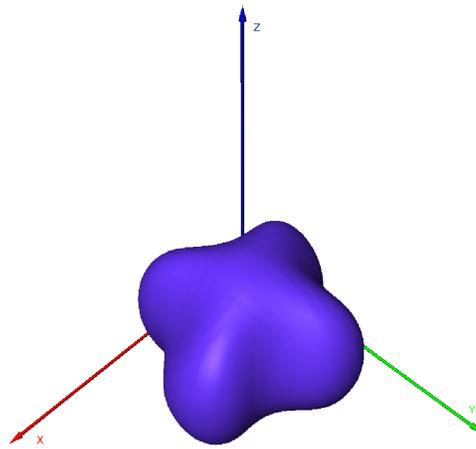
Figura 4.16: Velocidad y temperatura promedio del caso 4

En la figura 4.17 se observan los campos de velocidad y la temperatura promedio del caso 5, en este caso ya existe una notoria presencia de las dos fuerzas, la de gravedad y la de rotación. A pesar de que en el plano ecuatorial pareciera que persisten las celdas convectivas iniciales, al observar el plano meridional y la isosuperficie de temperatura es clara la influencia de la rotación y la modificación de las celdas convectivas. En cuanto a la transferencia de calor la influencia de la rotación también es clara pues disminuyó considerablemente el flujo de calor en dirección radial representado por los números de Nusselt (ver tabla 4.3).



(a) Campo de velocidad del plano ecuatorial

(b) Campo de velocidad del plano meridional



(c) Isotherma de temperatura media

Figura 4.17: Velocidad y temperatura promedio del caso 5

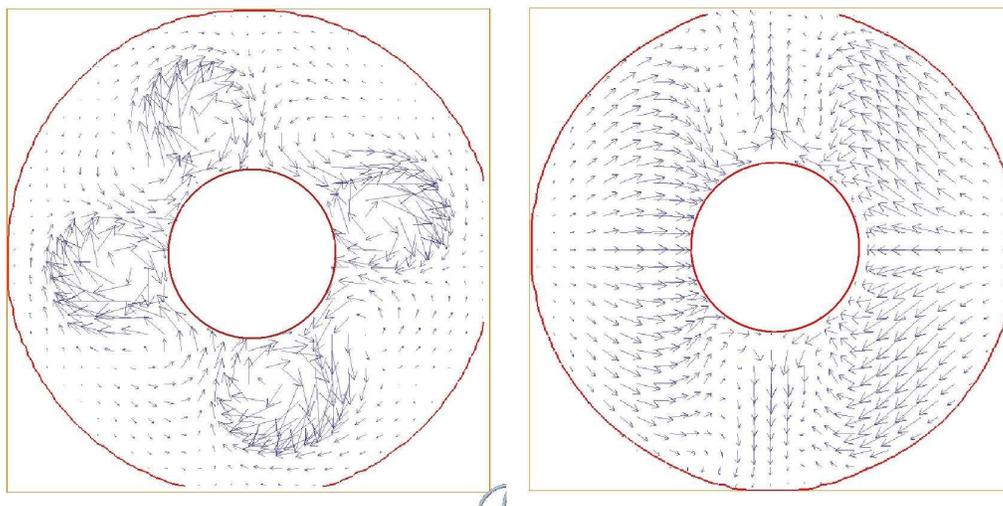
En la figura 4.18 se presentan los campos de velocidad y la superficie de temperatura promedio del caso 6. Aquí se observa que, como la fuerza de gravedad es mayor, las celdas convectivas tienden a ser más marcadas, sin embargo por efecto de la rotación éstas se ven deformadas y son arrastradas en la dirección de la rotación. Esto también se puede apreciar en los vectores del plano meridional, los cuales están dirigidos hacia la esfera interna en la zona cercana al ecuador, por efecto de la fuerza de Coriolis. Al comparar los números de Nusselt (tabla 4.3) es claro el incremento de la convección con respecto al caso anterior (caso 5) pues la transferencia de calor aumenta en la dirección radial.

En las figuras 4.19, 4.20 y 4.21, se presentan los tres últimos casos (7, 8 y 9), y se observa que la rotación es totalmente dominante, las celdas convectivas iniciales han desaparecido y se observan los flujos hacia los polos encontrados en el trabajo previo [Cabello, 2009]. Únicamente en el caso 9 se observa una ligera tendencia de la isosuperficie a recordar las celdas convectivas por la magnitud del número de Rayleigh, sin embargo el efecto de la rotación es mucho más fuerte. La influencia de la rotación puede ser cuantificada en la transferencia de calor, que disminuye prácticamente hasta el valor de difusión (ver tabla 4.3).

Se observa que la rotación tiene un efecto estabilizante en el flujo pero a su vez disminuye la tasa de transferencia de calor (ver tabla 4.3), esto puede deberse a que el flujo comienza a tener componentes en las direcciones polar y azimutal, lo cual disminuye el transporte de energía en dirección radial.

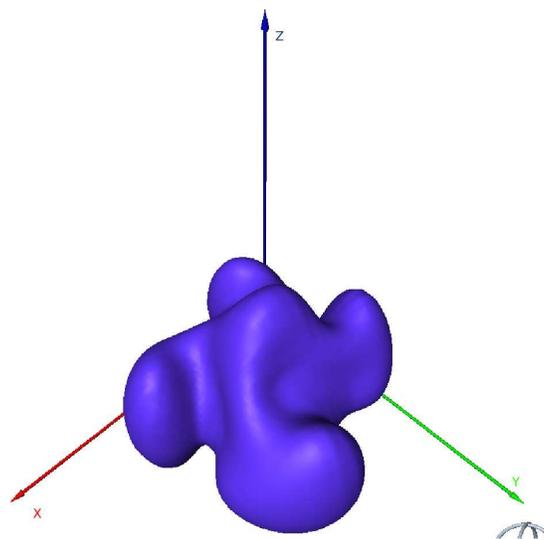
Una vez incorporada la rotación se espera que no exista una nueva inestabilidad al incrementar la velocidad de giro, por el contrario, se espera que el flujo sea cada vez más estable. Es necesario realizar simulaciones con la fuerza de rotación en una escala temporal muy larga, con el fin de evaluar si la fuerza de Coriolis va a conducir a un estado de rotación de cuerpo rígido.

De la figura 4.17 se puede observar que de los casos presentados, ésta relación de números de Rayleigh y de Taylor es en la que las fuerzas están más equilibradas, es decir ninguna de las dos es predominante sobre la otra, las dos aportan al movimiento final del fluido y como consecuencia a la transferencia de calor. Es factible pensar que muy cercana a esta relación se encuentra la razón Ta/Ra en la cuál los dos efectos están plenamente acoplados, y que en ese punto los patrones tengan una geometría particular distinta a las encontradas hasta ahora.



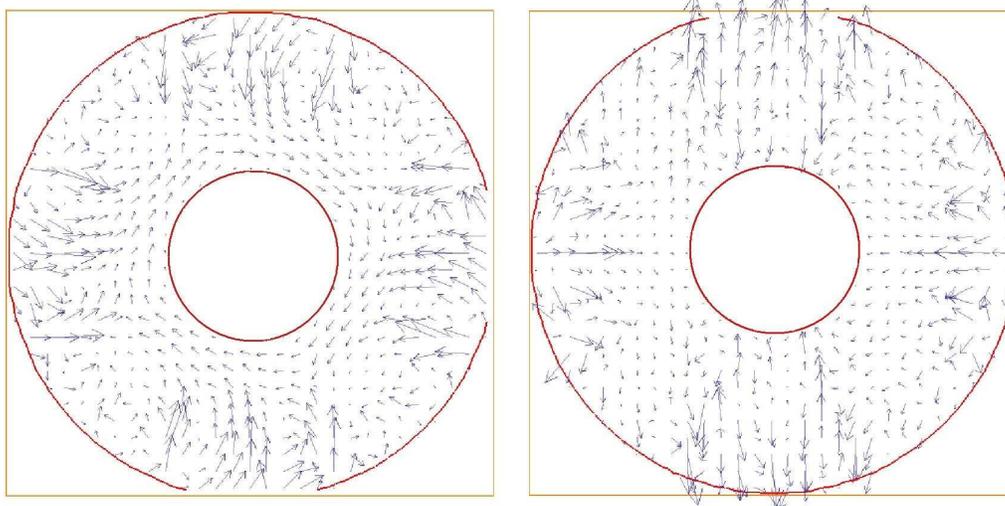
(a) Campo de velocidad del plano ecuatorial

(b) Campo de velocidad del plano meridional



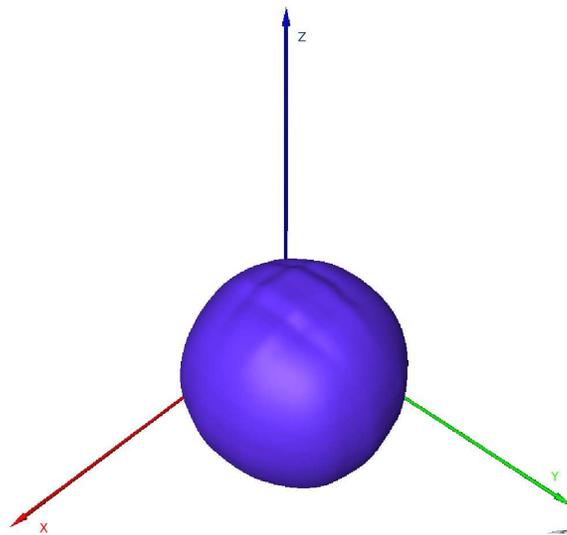
(c) Isotherma de temperatura media

Figura 4.18: Velocidad y temperatura promedio del caso 6



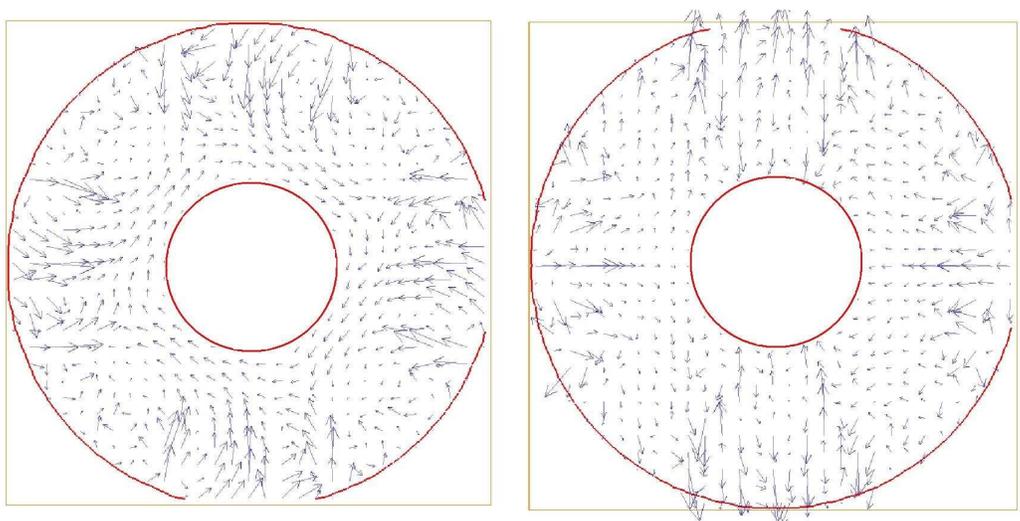
(a) Campo de velocidad del plano ecuatorial

(b) Campo de velocidad del plano meridional



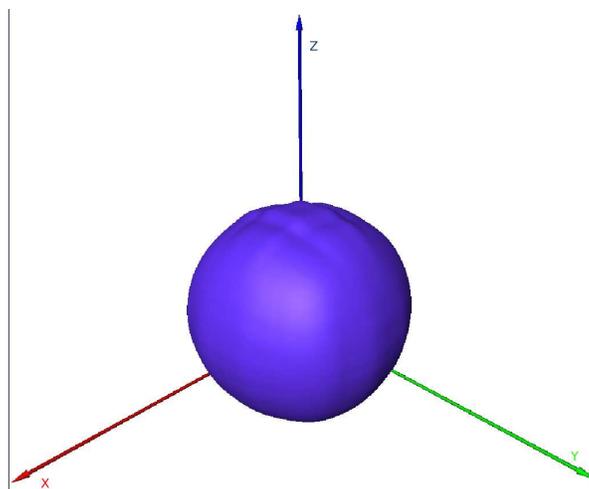
(c) Isoterma de temperatura media

Figura 4.19: Velocidad y temperatura promedio del caso 7



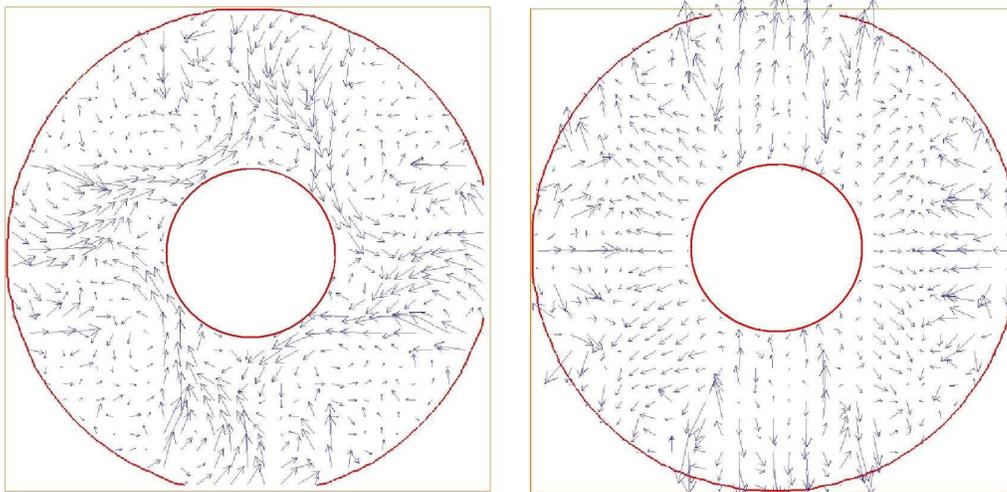
(a) Campo de velocidad del plano ecuatorial

(b) Campo de velocidad del plano meridional



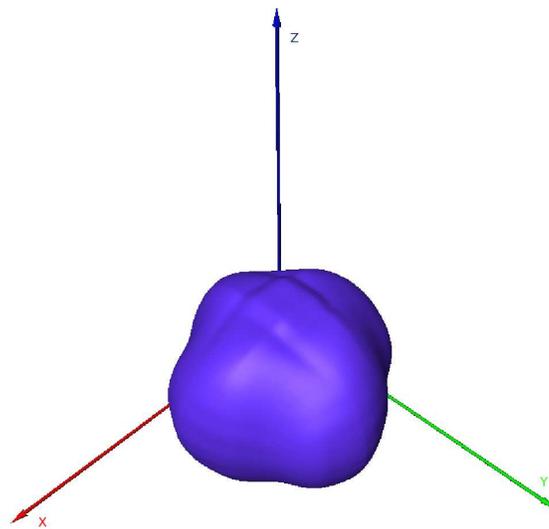
(c) Isotherma de temperatura media

Figura 4.20: Velocidad y temperatura promedio del caso 8



(a) Campo de velocidad del plano ecuatorial

(b) Campo de velocidad del plano meridional



(c) Isotherma de temperatura media

Figura 4.21: Velocidad y temperatura promedio del caso 9

Capítulo 5

Conclusiones

Se logró determinar de manera numérica directa el número de Rayleigh crítico ($Ra(a)_c = 1606$ ($Ra(b)_c = 7455$)) para una distribución de gravedad que varía inversamente con el radio de la forma $1/r^5$, y que coincide cualitativamente con los números de Rayleigh críticos publicados en la literatura.

Se determinó el rango del número de Rayleigh ($1606 < Ra(a) < 12000$ ($7455 < Ra(b) < 56000$)) en el cual la primera inestabilidad de la convección natural es modo 2, sin embargo los patrones convectivos permanecen durante un tiempo y después se presenta otra inestabilidad cuyos patrones convectivos cambian, por lo que se concluye que no existe un estado estacionario.

Para números de Rayleigh ($Ra(a) > 12000$ ($Ra(b) > 56000$)) existe otra bifurcación en la cual el patrón convectivo y la transferencia de calor son diferentes al modo anterior.

Se encontraron bifurcaciones en los patrones de flujo que influyen directamente en la transferencia de calor, estas bifurcaciones dependen de la condición inicial de la simulación. En ningún caso se llega a un estado estacionario en los patrones de flujo, sin embargo la transferencia de calor evaluada con el número de Nusselt tanto en la esfera interna como en la esfera externa tiende a un estado estacionario.

Se observó también que la rotación tiene un efecto estabilizante en el flujo, sin embargo decrece la tasa de transferencia de calor hasta el punto de regresar prácticamente al estado difusivo.

Se desarrolló una nueva malla computacional basada en el algoritmo de la esfera cúbica que permite obtener resultados con confianza, en un corto tiempo, y que son comparables satisfac-

toriamente con resultados numéricos y experimentales publicados.

En base a los resultados, podemos decir que el algoritmo utilizado reproduce satisfactoriamente las condiciones de movimiento y transferencia de calor de un fluido confinado en una geometría esférica. Ésto nos puede permitir desarrollar modelos más complicados, en los cuales se puedan incluir los términos magnetohidrodinámicos de las ecuaciones, así como incluir mas capas externas, para simular las condiciones del manto y de la atmósfera terrestres.

Apéndice A

Adimensionalización de las ecuaciones

A continuación se describe el procedimiento para adimensionalizar las ecuaciones

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0, \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{v} + 2\vec{\Omega} \times \vec{v} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P + \vec{g} + \nu \nabla^2 \vec{v}, \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} T = \alpha \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_3^2} \right]. \quad (\text{A.3})$$

Se definen los parámetros adimensionales.

$$\begin{aligned} v_1^* &= \frac{d}{\nu} v_1, & x_1^* &= \frac{x_1}{d}, & t^* &= \frac{\nu}{d^2} t, \\ v_2^* &= \frac{d}{\nu} v_2, & x_2^* &= \frac{x_2}{d}, & T^* &= \frac{T - T_0}{\Delta T}, \\ v_3^* &= \frac{d}{\nu} v_3, & x_3^* &= \frac{x_3}{d}. \end{aligned}$$

Despejando las variables dimensionales como función de los parámetros adimensionales:

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{v_1^* \nu}{d}, & x_1 &= dx_1^*, & t &= \frac{d^2 t^*}{\nu}, \\ v_2 &= \frac{v_2^* \nu}{d}, & x_2 &= dx_2^*, & T &= T^* \Delta T + T_0, \\ v_3 &= \frac{v_3^* \nu}{d}, & x_3 &= dx_3^*. \end{aligned}$$

En el caso estudiado, el sistema gira en torno al eje z , por lo tanto, los términos de las fuerzas de Coriolis y centrífuga se simplifican, como se muestra en el apéndice B.

A.1. Ecuación de continuidad

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0 \quad (\text{A.4})$$

sustituyendo los parámetros adimensionales:

$$\frac{\nu}{dd} \frac{\partial v_1^*}{\partial x_1^*} + \frac{\nu}{dd} \frac{\partial v_2^*}{\partial x_2^*} + \frac{\nu}{dd} \frac{\partial v_3^*}{\partial x_3^*} = 0 \quad (\text{A.5})$$

$$\frac{\nu}{d^2} \left[\frac{\partial v_1^*}{\partial x_1^*} + \frac{\partial v_2^*}{\partial x_2^*} + \frac{\partial v_3^*}{\partial x_3^*} \right] = 0 \quad (\text{A.6})$$

$$\frac{\partial v_1^*}{\partial x_1^*} + \frac{\partial v_2^*}{\partial x_2^*} + \frac{\partial v_3^*}{\partial x_3^*} = 0 \quad (\text{A.7})$$

o bien:

$$\vec{\nabla}^* \cdot \vec{v}^* = 0 \quad (\text{A.8})$$

A.2. Ecuación de cantidad de movimiento

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - 2v_2\omega_3 - \omega_3^2 r_1 = \frac{-1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_1} + g_1 + \nu \left[\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_3^2} \right] \vec{i}_1 \quad (\text{A.9})$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_2}{\partial x_3} + 2v_1\omega_3 - \omega_3^2 r_2 = \frac{-1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_2} + g_2 + \nu \left[\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_3^2} \right] \vec{i}_2 \quad (\text{A.10})$$

$$\frac{\partial v_3}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_3}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_3}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = \frac{-1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_3} + g_3 + \nu \left[\frac{\partial^2 v_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_3^2} \right] \vec{i}_3. \quad (\text{A.11})$$

Desarrollando el término de la primera dirección:

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - 2v_2\omega_3 - \omega_3^2 r_1 = \frac{-1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_1} + g_1 + \nu \left[\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_3^2} \right]. \quad (\text{A.12})$$

Sustituyendo los parámetros adimensionales:

$$\begin{aligned} \frac{\nu}{d^2} \frac{\nu}{d} \frac{\partial v_1^*}{\partial t^*} + \frac{\nu}{d} v_1^* \frac{\nu}{dd} \frac{\partial v_1^*}{\partial x_1^*} + \frac{\nu}{d} v_2^* \frac{\nu}{dd} \frac{\partial v_1^*}{\partial x_2^*} + \frac{\nu}{d} v_3^* \frac{\nu}{dd} \frac{\partial v_1^*}{\partial x_3^*} - 2\frac{\nu}{d} v_2^* \omega_3 - \omega_3^2 r_1 = & -\frac{1}{\rho} \frac{1}{d} \frac{\partial P}{\partial x_1^*} + \beta(T - T_o)g_1 \\ & + \nu \left[\frac{\nu}{dd^2} \frac{\partial^2 v_1^*}{\partial x_1^{*2}} + \frac{\nu}{dd^2} \frac{\partial^2 v_1^*}{\partial x_2^{*2}} + \frac{\nu}{dd^2} \frac{\partial^2 v_1^*}{\partial x_3^{*2}} \right], \end{aligned}$$

$$\frac{\nu^2}{d^3} \left[\frac{\partial v_1^*}{\partial t^*} + v_1^* \frac{\partial v_1^*}{\partial x_1^*} + v_2^* \frac{\partial v_1^*}{\partial x_2^*} + v_3^* \frac{\partial v_1^*}{\partial x_3^*} \right] - 2 \frac{\nu}{d} v_2^* \omega_3 - \omega_3^2 r_1 = - \frac{1}{\rho d} \frac{\partial P}{\partial x_1^*} + \beta (T^* \Delta T) g_1 + \frac{\nu^2}{d^3} \left[\frac{\partial^2 v_1^*}{\partial x_1^{*2}} + \frac{\partial^2 v_1^*}{\partial x_2^{*2}} + \frac{\partial^2 v_1^*}{\partial x_3^{*2}} \right], \quad (\text{A.13})$$

$$\left[\frac{\partial v_1^*}{\partial t^*} + v_1^* \frac{\partial v_1^*}{\partial x_1^*} + v_2^* \frac{\partial v_1^*}{\partial x_2^*} + v_3^* \frac{\partial v_1^*}{\partial x_3^*} \right] - 2 \frac{d^2}{\nu} v_2^* \omega_3 - \frac{d^3}{\nu^2} \omega_3^2 r_1 = - \frac{d^2}{\rho \nu^2} \frac{\partial P}{\partial x_1^*} + \beta \frac{d^3}{\nu^2} \Delta T g_1 T^* + \nabla^{*2} v_1^*. \quad (\text{A.14})$$

Si se define una presión adimensional y un radio adimensional:

$$P^* = \frac{P}{\rho \nu^2} \quad r_1^* = \frac{r_1}{d}$$

se puede reescribir la ecuación (A.14) como:

$$\frac{Dv_1^*}{Dt^*} - \frac{2d^2\omega_3}{\nu} v_2^* - \frac{d^4\omega_3^2}{\nu^2} r_1^* = - \frac{\partial P^*}{\partial x_1^*} + \frac{\beta d^3 \Delta T g_1}{\nu^2} T^* + \nabla^{*2} v_1^*, \quad (\text{A.15})$$

y recordando la definición de los números adimensionales:

$$Ta = \frac{4\Omega^2 d^4}{\nu^2} \quad Ra = \frac{\beta d^3 \Delta T g}{\nu^2}$$

la ecuación (A.15) finalmente queda escrita de la siguiente manera:

$$\frac{Dv_1^*}{Dt^*} - Ta^{\frac{1}{2}} v_2^* - \frac{Ta}{4} r_1^* = - \frac{\partial P^*}{\partial x_1^*} + Ra T^* + \nabla^{*2} v_1^*. \quad (\text{A.16})$$

En la segunda dirección:

$$\frac{\partial v_2}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_2}{\partial x_3} + 2v_1 \omega_3 - \omega_3^2 r_2 = \frac{-1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_2} + g_2 + \nu \left[\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_3^2} \right]. \quad (\text{A.17})$$

Se reescribe la ecuación (A.17) como:

$$\frac{Dv_2^*}{Dt^*} + \frac{2d^2\omega_3}{\nu} v_1^* - \frac{d^4\omega_3^2}{\nu^2} r_2^* = - \frac{\partial P^*}{\partial x_2^*} + \frac{\beta d^3 \Delta T g_2}{\nu^2} T^* + \nabla^{*2} v_2^*, \quad (\text{A.18})$$

o bien:

$$\frac{Dv_2^*}{Dt^*} + Ta^{\frac{1}{2}} v_1^* - \frac{Ta}{4} r_2^* = - \frac{\partial P^*}{\partial x_2^*} + Ra T^* + \nabla^{*2} v_2^*. \quad (\text{A.19})$$

En la tercera dirección:

$$\frac{\partial v_3}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_3}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_3}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = \frac{-1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_3} + g_3 + \nu \left[\frac{\partial^2 v_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_3^2} \right], \quad (\text{A.20})$$

ó:

$$\frac{Dv_3^*}{Dt^*} = -\frac{\partial P^*}{\partial x_3^*} + RaT^* + \nabla^{*2}v_3^*. \quad (\text{A.21})$$

A.3. Ecuación de la energía

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v_1 \frac{\partial T}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial T}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial T}{\partial x_3} = \alpha_l \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_3^2} \right]. \quad (\text{A.22})$$

Sustituyendo los parámetros adimensionales:

$$\frac{\Delta T \nu}{d^2} \frac{\partial T^*}{\partial t^*} + \frac{\nu}{d} v_1^* \frac{\Delta T}{d} \frac{\partial T^*}{\partial x_2^*} + \frac{\nu}{d} v_2^* \frac{\Delta T}{d} \frac{\partial T^*}{\partial x_2^*} + \frac{\nu}{d} v_3^* \frac{\Delta T}{d} \frac{\partial T^*}{\partial x_3^*} = \alpha \left[\frac{\Delta T}{d^2} \frac{\partial^2 T^*}{\partial x_1^{*2}} + \frac{\Delta T}{d^2} \frac{\partial^2 T^*}{\partial x_2^{*2}} + \frac{\Delta T}{d^2} \frac{\partial^2 T^*}{\partial x_3^{*2}} \right], \quad (\text{A.23})$$

$$\nu \left[\frac{\partial T^*}{\partial t^*} + v_1^* \frac{\partial T^*}{\partial x_1^*} + v_2^* \frac{\partial T^*}{\partial x_2^*} + v_3^* \frac{\partial T^*}{\partial x_3^*} \right] = \alpha \left[\frac{\partial^2 T^*}{\partial x_1^{*2}} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial x_2^{*2}} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial x_3^{*2}} \right], \quad (\text{A.24})$$

o bien:

$$\frac{\partial T^*}{\partial t^*} + v_1^* \frac{\partial T^*}{\partial x_1^*} + v_2^* \frac{\partial T^*}{\partial x_2^*} + v_3^* \frac{\partial T^*}{\partial x_3^*} = \frac{\alpha}{\nu} \left[\frac{\partial^2 T^*}{\partial x_1^{*2}} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial x_2^{*2}} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial x_3^{*2}} \right]. \quad (\text{A.25})$$

Retomando la definición del número de Prandtl:

$$\frac{\partial T^*}{\partial t^*} + v_1^* \frac{\partial T^*}{\partial x_1^*} + v_2^* \frac{\partial T^*}{\partial x_2^*} + v_3^* \frac{\partial T^*}{\partial x_3^*} = \frac{1}{Pr} \left[\frac{\partial^2 T^*}{\partial x_1^{*2}} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial x_2^{*2}} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial x_3^{*2}} \right], \quad (\text{A.26})$$

o de forma vectorial:

$$\frac{DT^*}{Dt^*} = \frac{1}{Pr} [\nabla^{*2}T^*]. \quad (\text{A.27})$$

Apéndice B

Simplificación de los términos de rotación

Debido a que el sistema gira alrededor del eje vertical, los términos $\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r})$ y $2\vec{\Omega} \times \vec{v}$ de la ecuación (2.15) se simplifican de la siguiente manera:

Desarrollando en notación índice el término de aceleración centrífuga se tiene:

$$\begin{aligned}\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) &= \omega_i \omega_j r_i \vec{l}_j - \omega_i \omega_j r_j \vec{l}_i \\ &= \omega_1 \omega_j r_1 \vec{l}_j + \omega_2 \omega_j r_2 \vec{l}_j + \omega_3 \omega_j r_3 \vec{l}_j - \omega_1 \omega_1 r_j \vec{l}_j - \omega_2 \omega_2 r_j \vec{l}_j - \omega_3 \omega_3 r_j \vec{l}_j \\ &= (\omega_1 r_1 \omega_1 + \omega_2 r_2 \omega_1 + \omega_3 r_3 \omega_1 - \omega_1 \omega_1 r_1 - \omega_2 \omega_2 r_1 - \omega_3 \omega_3 r_1) \vec{l}_1 \\ &\quad + (\omega_1 r_1 \omega_2 + \omega_2 r_2 \omega_2 + \omega_3 r_3 \omega_2 - \omega_1 \omega_1 r_2 - \omega_2 \omega_2 r_2 - \omega_3 \omega_3 r_2) \vec{l}_2 \\ &\quad + (\omega_1 r_1 \omega_3 + \omega_2 r_2 \omega_3 + \omega_3 r_3 \omega_3 - \omega_1 \omega_1 r_3 - \omega_2 \omega_2 r_3 - \omega_3 \omega_3 r_3) \vec{l}_3.\end{aligned}\tag{B.1}$$

De igual manera para el término de aceleración de Coriolis:

$$\begin{aligned}
2\vec{\Omega} \times \vec{v} &= 2\epsilon_{ijk}\omega_i v_j \vec{i}_k \\
&= 2\epsilon_{1jk}\omega_1 v_j \vec{i}_k + 2\epsilon_{2jk}\omega_2 v_j \vec{i}_k + 2\epsilon_{3jk}\omega_3 v_j \vec{i}_k \\
&= 2\epsilon_{11k}\omega_1 v_1 \vec{i}_k + 2\epsilon_{12k}\omega_1 v_2 \vec{i}_k + 2\epsilon_{13k}\omega_1 v_3 \vec{i}_k \\
&\quad + 2\epsilon_{21k}\omega_2 v_1 \vec{i}_k + 2\epsilon_{22k}\omega_2 v_2 \vec{i}_k + 2\epsilon_{23k}\omega_2 v_3 \vec{i}_k \\
&\quad + 2\epsilon_{31k}\omega_3 v_1 \vec{i}_k + 2\epsilon_{32k}\omega_3 v_2 \vec{i}_k + 2\epsilon_{33k}\omega_3 v_3 \vec{i}_k \\
&= (2\omega_2 v_3 - 2\omega_3 v_2) \vec{i}_1 \\
&\quad + (2\omega_3 v_1 - 2\omega_1 v_3) \vec{i}_2 \\
&\quad + (2\omega_1 v_2 - 2\omega_2 v_1) \vec{i}_3.
\end{aligned} \tag{B.2}$$

Considerando que el sistema gira con una velocidad constante en torno al eje x_3 (z), es decir, que las componentes del vector velocidad angular Ω en la dirección x_1 (x) y en la dirección x_2 (y) son iguales a cero y la componente en la dirección z tiene un valor constante; entonces se puede reescribir el término de la fuerza centrífuga de la siguiente forma:

$$(\omega_3 \omega_3 r_1) \vec{i}_1 + (\omega_3 \omega_3 r_2) \vec{i}_2. \tag{B.3}$$

De manera semejante el término de Coriolis se escribe como:

$$(-2\omega_3 v_2) \vec{i}_1 + (2\omega_3 v_1) \vec{i}_2. \tag{B.4}$$

Para agregar estas fuerzas al programa de cómputo, los términos de las fuerzas centrífuga (ec. (B.3)) y de Coriolis (ec. (B.4)) se escribieron de la siguiente forma:

$$\left. \begin{aligned} F_x &= \rho_0 \omega^2 x \\ F_y &= \rho_0 \omega^2 y \end{aligned} \right\} \text{centrifuga}, \tag{B.5}$$

$$\left. \begin{aligned} F_x &= -2\rho_0\omega v_y \\ F_y &= 2\rho_0\omega v_x \end{aligned} \right\} \textit{Coriolis} \quad (\text{B.6})$$

donde ω es la velocidad angular con la que gira el sistema en torno al eje vertical (z), v_x y v_y son las componentes en x y y de la velocidad en cada punto, respectivamente.

Apéndice C

Cálculo del número de Nusselt para el caso difusivo.

Para calcular el número de Nusselt es necesario conocer la distribución de temperaturas a lo largo del radio para el caso difusivo, para ello se parte de la ecuación diferencial de la energía en coordenadas esféricas:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) = 0 \quad (\text{C.1})$$

cuya solución general es:

$$T(r) = \frac{A}{r} + B \quad (\text{C.2})$$

sujeta a las condiciones de frontera,

$$T_1 \text{ en } r = r_1 \quad (\text{C.3})$$

$$T_2 \text{ en } r = r_2$$

y se obtiene el sistema de ecuaciones,

$$T_1 = \frac{A}{r_1} + B \quad (\text{C.4})$$

$$T_2 = \frac{A}{r_2} + B$$

de donde se puede despejar a la constante B de la primera ecuación,

$$B = T_1 - \frac{A}{r_1} \quad (\text{C.5})$$

y sustituirla en la segunda ecuación,

$$T_2 = \frac{A}{r_2} + \left(T_1 - \frac{A}{r_1} \right) = \left(\frac{A}{r_2} - \frac{A}{r_1} \right) + T_1 \quad (\text{C.6})$$

simplificando,

$$T_2 = A \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) + T_1 \quad (\text{C.7})$$

y reacomodando los términos se puede escribir como:

$$A \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) = T_2 - T_1 \quad (\text{C.8})$$

con esto se obtiene una expresión para la constante A,

$$A = \frac{T_2 - T_1}{\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)}. \quad (\text{C.9})$$

Posteriormente, sustituyendo la ecuación (C.9) en la ecuación (C.5), se obtiene:

$$B = T_1 - \frac{1}{r_1} \left(\frac{T_2 - T_1}{\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)} \right). \quad (\text{C.10})$$

Con esto se tiene una expresión de la constante B en términos de los radios y las temperaturas,

$$B = T_1 - \left(\frac{T_2 - T_1}{\left(\frac{r_1}{r_2} - 1 \right)} \right). \quad (\text{C.11})$$

Sustituyendo las ecuaciones (C.9) y (C.11) en la ecuación (C.2), se obtiene,

$$T(r) = \frac{1}{r} \left(\frac{T_2 - T_1}{\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)} \right) + T_1 - \left(\frac{T_2 - T_1}{\left(\frac{r_1}{r_2} - 1 \right)} \right) \quad (\text{C.12})$$

que es la distribución de la temperatura como función del radio para todo el ánulo.

Para hacer el cálculo analítico del número de Nusselt en las fronteras interior y exterior del ánulo, es necesario definir algunas variables basadas en las dimensiones del modelo físico:

$$\begin{aligned} r_1 &= r_{\text{interior}}, & r_2 &= r_{\text{exterior}} \\ D &= r_2 - r_1, & \Delta T &= T_{\text{interior}} - T_{\text{exterior}}. \end{aligned}$$

Una vez definidas las nuevas variables, el análisis parte de la definición del número de Nusselt:

$$Nu = \frac{hD}{k} \quad (\text{C.13})$$

y se sustituye la expresión del coeficiente convectivo,

$$Nu = \frac{\left[-\frac{k}{\Delta T} \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=R} \right] D}{k} = -\frac{1}{\Delta T} \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=R} D. \quad (\text{C.14})$$

Si se evalúa la derivada,

$$\frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=R} = \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \left\{ \frac{T_2 - T_1}{\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)} \right\} + T_1 - \left\{ \frac{T_2 - T_1}{\left(\frac{r_1}{r_2} - 1 \right)} \right\} \right]_{r=R} \quad (\text{C.15})$$

se simplifica en:

$$\frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=R} = -\frac{1}{r^2} \left\{ \frac{T_2 - T_1}{\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}} \right\}. \quad (\text{C.16})$$

El número de Nusselt queda entonces como:

$$Nu = -\frac{1}{\Delta T} \left(-\frac{1}{r^2} \left\{ \frac{T_2 - T_1}{\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}} \right\} \right) (r_2 - r_1). \quad (\text{C.17})$$

Retomando la expresión (C.17) y tomando en cuenta el radio en la superficie interna, ($r = r_1$), el número de Nusselt queda como:

$$Nu_{int} = -\frac{1}{\Delta T} \left(-\frac{1}{r_1^2} \left\{ \frac{T_2 - T_1}{\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}} \right\} \right) (r_2 - r_1) \quad (\text{C.18})$$

considerando que si $\Delta T = T_1 - T_2$, entonces $-\Delta T = T_2 - T_1$, por lo que:

$$Nu_{int} = -\frac{1}{\Delta T} \left(-\frac{1}{r_1^2} \left\{ \frac{(-\Delta T)}{\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}} \right\} \right) (r_2 - r_1) \quad (\text{C.19})$$

simplificando los signos:

$$Nu_{int} = -\left(\frac{1}{r_1^2} \left\{ \frac{1}{\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}} \right\} \right) (r_2 - r_1) \quad (\text{C.20})$$

simplificando los parentesis:

$$Nu_{int} = \frac{-1}{r_1^2 \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)} (r_2 - r_1) \quad (\text{C.21})$$

realizando la multiplicación en el denominador:

$$Nu_{int} = \frac{-1}{\frac{r_1^2}{r_2} - r_1} (r_2 - r_1) \quad (\text{C.22})$$

obtenido el común denominador:

$$Nu_{int} = \frac{-1}{\frac{r_1^2 - r_1 r_2}{r_2}} (r_2 - r_1) \quad (\text{C.23})$$

el número de Nusselt en la frontera interna queda como:

$$Nu_{int} = \frac{-r_2}{r_1^2 - r_1 r_2} (r_2 - r_1) \quad (\text{C.24})$$

si se multiplica esta expresión del número de Nusselt por la relación adimensional de los radios $\frac{r_1}{r_2}$, el número de Nusselt interno queda como:

$$Nu_{int} = \frac{-r_2}{r_1^2 - r_1 r_2} (r_2 - r_1) \left(\frac{r_1}{r_2} \right) = \left(\frac{r_2 \cancel{(r_1 - r_2)}}{r_1 \cancel{(r_1 - r_2)}} \right) \frac{r_1}{r_2} \quad (\text{C.25})$$

que se reduce a

$$Nu_{int} = 1. \quad (\text{C.26})$$

De manera similar, se hace el análisis para la frontera exterior, donde ($r = r_2$);

$$Nu_{ext} = -\frac{1}{\Delta T} \left(-\frac{1}{r_2^2} \left\{ \frac{T_2 - T_1}{\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}} \right\} \right) (r_2 - r_1) \quad (\text{C.27})$$

simplificando la diferencia de temperaturas

$$Nu_{ext} = -\frac{1}{\Delta T} \left(-\frac{1}{r_2^2} \left\{ \frac{(-\Delta T)}{\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}} \right\} \right) (r_2 - r_1) \quad (\text{C.28})$$

se escribe,

$$Nu_{ext} = \frac{-1}{r_2 - \frac{r_2^2}{r_1}} (r_2 - r_1) \quad (\text{C.29})$$

o bien, haciendo la expansión del denominador queda como:

$$Nu_{ext} = \frac{-1}{\frac{r_1 r_2 - r_2^2}{r_1}} (r_2 - r_1) \quad (\text{C.30})$$

por lo tanto el número de Nusselt en la frontera externa se expresa de la forma:

$$Nu_{ext} = \frac{-r_1}{r_1 r_2 - r_2^2} (r_2 - r_1) \quad (\text{C.31})$$

si se multiplica esta expresión por la relación de radios inversa $\frac{r_2}{r_1}$, también adimensional, el Nusselt externo queda como:

$$Nu_{ext} = \frac{-r_1}{r_1 r_2 - r_2^2} (r_2 - r_1) \left(\frac{r_2}{r_1}\right) = \left(\frac{r_1 \cancel{(r_1 - r_2)}}{r_2 \cancel{(r_1 - r_2)}}\right) \left(\frac{r_2}{r_1}\right), \quad (\text{C.32})$$

que se simplifica en:

$$Nu_{ext} = 1. \quad (\text{C.33})$$

Bibliografía

- [Alfe et al., 2002] Alfe, D., Gillan, M., and Price, G. (2002). Composition and temperature of the earth's core constrained by combining ab initio calculations and seismic data. *Earth and Planetary Science Letters*, 195:91–98.
- [Ardes et al., 1997] Ardes, M., Busse, F., and Wicht, J. (1997). Thermal convection in rotating spherical shells. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 99:55–57.
- [Arpaci and Larsen, 1984] Arpaci, V. S. and Larsen, P. S. (1984). *Convection heat transfer*. Prentice Hall.
- [Aubert et al., 2008] Aubert, J., Amit, H., Hulot, G., and Olson, P. (2008). Thermochemical flows couple the earth's inner core growth to mantle heterogeneity. *Nature*, 454:758–761.
- [Avila, 2008] Avila, R. (2008). The spectral element method and the meshless local petrov galerkin method for the solution of the fluid equations.
- [Busse et al., 2003] Busse, F., Zaks, M., and Brausch, O. (2003). Centrifugally driven thermal convection at high prandtl numbers. *Physica D*, 184:3–20.
- [Busse, 1970] Busse, F. H. (1970). Thermal instabilities in rapidly rotating systems. *Journal of Fluid Mechanics*, 44:441–460.
- [Cabello, 2009] Cabello, A. (2009). Simulación numérica del flujo en el interior de esferas concéntricas con rotación y cambio de fase.
- [Chandrasekhar, 1961] Chandrasekhar, S. (1961). *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*. Oxford University Press.
- [Dumas and Leonard, 1994] Dumas, G. and Leonard, A. (1994). A divergence-free spectral expansions method for three-dimensional flows in spherical-gap geometries. *Journal of Computational Physics*, 111:205–219.

- [Evonuk and Glatzmaier, 2006] Evonuk, M. and Glatzmaier, G. (2006). A 2d study of the effects of the size of a solid core on the equatorial flow in giant planets. *Icarus*, 181:458–464.
- [Futterer et al., 2010] Futterer, B., Egbers, C., Dahley, N., Koch, S., and Jehring, L. (2010). First identification of sub-and supercritical convection patterns from 'geoflow', the geophysical flow simulation experiment integrated in fluid science laboratory. *Acta Astronautica*, 66:193–200.
- [Futterer et al., 2008] Futterer, B., Gellert, M., von Larcher, T., and Egbers, C. (2008). Thermal convection in rotating spherical shells: An experimental and numerical approach within geoflow. *Acta astronautica*, 62:300–307.
- [Greenspan, 1968] Greenspan, H. P. (1968). *The theory of rotating fluids*. Cambridge Press.
- [Hernlund and Tackley, 2008] Hernlund, J. W. and Tackley, P. J. (2008). Modeling mantle convection in the spherical annulus. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 171:48–54.
- [Hollerbach et al., 2006] Hollerbach, R., Junk, M., and Egbers, C. (2006). Non-axisymmetric instabilities in basic state spherical couette flow. *Fluid Dynamics Research*, 38:257–273.
- [Jordan, 1979] Jordan, T. H. (1979). Structural geology of the earth's interior. *Proc. Natl. Acad. Sci.*, 76(9):4192–4200.
- [Karniadakis and Sherwin, 1999] Karniadakis, G. E. and Sherwin, S. J. (1999). *Spectral /hp Element Methods for CFD*. Oxford University Press.
- [Kelley et al., 2007] Kelley, D. H., Triana, S. A., Zimmerman, D., Tilgner, A., and Lathrop, D. (2007). Inertial waves driven by differential rotation in a planetary geometry. *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics*, 101(5-6):469–487.
- [King et al., 2009] King, E., Stellmach, S., Noir, J., Hansen, U., and Aurnou, J. (2009). Boundary layer control of rotating convection systems. *Nature*, 457:301–304.
- [Lorenzani and Tilgner, 2001] Lorenzani, S. and Tilgner, A. (2001). Fluid instabilities in precessing spheroidal cavities. *Journal of Fluid Mechanics*, 447:111–128.
- [Marcus and Tuckerman, 1987] Marcus, P. and Tuckerman, L. (1987). Simulation of flow between concentric rotating spheres. part 1. steady states. *Journal of Fluid Mechanics*, 185:1–30.
- [Monnereau et al., 2010] Monnereau, M., Calvet, M., Margerin, L., and Souriau, A. (2010). Lop-sided growth of earth's inner core. *Science*, 328:1014–1017.

- [Nair et al., 2005] Nair, R. D., Thomas, S. J., and Loft, R. D. (2005). A discontinuous galerkin transport scheme on the cubed sphere. *Monthly Weather Review*, 133:814–828.
- [Noir et al., 2001] Noir, J., Jault, D., and Cardin, P. (2001). Numerical study of the motions within a slowly precessing sphere at low ekman number. *Journal of Fluid Mechanics*, 437:283–299.
- [Olson, 2011] Olson, P. (2011). Laboratory experiments on the dynamics of the core. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 187:1–18.
- [Patera, 1983] Patera, A. T. (1983). A spectral element method for fluid dynamics: laminar flow in a channel expansion. *Journal of Computational Physics*, 54:468–488.
- [Roberts, 1968] Roberts, P. H. (1968). On the thermal instability of a rotating fluid sphere containing heat sources. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. Series A*, 263:93–117.
- [Ronchi et al., 1996] Ronchi, C., Iacono, R., and Paolucci, P. S. (1996). The "cubed sphere": A new method for the solution of partial differential equations in spherical geometry. *Journal of Computational Physics*, 124:93–114.
- [Simitev and Busse, 2003] Simitev, R. and Busse, F. (2003). Patterns of convection in rotating spherical shells. *New Journal of Physics*, 5:97.1–97.20.
- [Stixrude et al., 1997] Stixrude, L., Wasserman, E., and Cohen, R. (1997). Composition and temperature of earth's inner core. *Journal of Geophysical Research*, 102:24,729–24,739.
- [Tilgner, 1996] Tilgner, A. (1996). High rayleigh-number convection in spherical shells. *Physical Review*, 53(5):4847–4851.
- [Tilgner, 2007] Tilgner, A. (2007). Kinematic dynamos with precession driven flow in a sphere. *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics*, 101(1):1–9.
- [Travnikov et al., 2001] Travnikov, V. V., Rath, H. J., and Egbers, C. (2001). Stability of natural convection between spherical shells: energy theory. *Heat and Mass Transfer*, 45:4227–4232.
- [White, 2003] White, F. M. (2003). *Fluid Mechanics*. Mc Graw Hill, 5th Edition.
- [Wimmer, 1978] Wimmer, M. (1978). Experiments on a viscous fluid flow between concentric rotating spheres. *Journal of Fluid Mechanics*, 78:317–335.
- [Wu and Roberts, 2009] Wu, C.-C. and Roberts, P. (2009). On a dynamo driven by topographic precession. *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics*, 103(6):467–501.

- [Zhang, 1994] Zhang, K. (1994). On coupling between the poincaré equation and the heat equation. *Journal of Fluid Mechanics*, 268:211–229.
- [Zhang et al., 2010] Zhang, K., Chang, K., and Liao, X. (2010). On fluid flows in precessing spheres in the mantle frame of reference. *Physics of Fluids*, 22:116604.
- [Zhang and Liao, 2004] Zhang, K. and Liao, X. (2004). A new theory for convection in rapidly rotating spherical systems. *XXI ICTAM*.