



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN
INGENIERÍA

OBSERVABILIDAD DE MOTORES DE
RELUCTANCIA CONMUTADA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRO EN INGENIERÍA

ELÉCTRICA: CONTROL

P R E S E N T A:

ALEJANDRA ICXIUH
DE LA GUERRA CARRASCO

TUTOR:

DR. PAUL ROLANDO MAYA ORTIZ

MÉXICO, D.F. 2011

JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dr. Espinosa Pérez Gerardo René

Secretario: Dr. Arteaga Pérez Marco Antonio

Vocal: Dr. Maya Ortiz Paul Rolando

1er. Suplente: Dr. Alvarez Icaza Longoría Luis Agustín

2o. Suplente: Dr. Guerrero Ramirez Gerardo V.

Esta tesis se realizó en el Laboratorio Control de la División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería de la UNAM.

TUTOR DE TESIS:

Dr. Paul Rolando Maya Ortíz

Agradecimientos

A la Universidad Nacional Autónoma de México y
al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología,
NO. REGISTRO: 332351, NO. BECA: 39529.

...the love I made is the shape of my space...

Desecration Smile, RHCP

Dedico esta tesis a:

Aracely, Alejandro, Amaranta y Pablo por estar a mi lado y de mi parte todo el tiempo.

A mi tutor, el Dr. Paul Rolando Maya Ortíz, por su interés en mi formación.

Al Dr. Gerardo René Espinosa Pérez por su apoyo y consejo.

A mis amigos Sofia, Marco y Miguel Angel por lo mucho que aprendí y me divertí al convivir con ellos.

Alejandro por los Beatles, Queen, Cake y los RHCP, tu literatura, tu comida, las gatas, nuestra visión del mundo y todo lo que nos falta por aprender, conocer y vivir juntos.

Índice general

Índice	I
1. Introducción	2
1.1. Motivación	2
1.1.1. Motor de Reluctancia Conmutada	3
1.1.2. Marco Teórico	4
1.2. Control sin sensor de las variables mecánicas	4
1.3. Planteamiento del problema	6
1.3.1. Objetivos	6
1.4. Organización de la tesis	7
2. El Motor de Reluctancia Conmutada	8
2.1. Descripción del motor	8
2.1.1. Funcionamiento	9
2.1.2. Curva Par-Velocidad	10
2.2. Modelo Matemático	11
2.2.1. Sistema electromecánico	13
2.2.2. Modelo máquina trifásica	16
3. Análisis de Observabilidad	18
3.1. Observabilidad	18
3.2. Observabilidad en sistemas no lineales	19
3.3. Mapeo de Observabilidad y Matriz de Observabilidad	20
3.3.1. Determinantes	22
3.4. Análisis con velocidad diferente de cero	24
3.5. Análisis con velocidad cero	28
4. Observador y Controlador	31
4.1. Observador propuesto	32
4.1.1. Proposición	32
4.1.2. Demostración	32

	1
4.2. Controlador	35
4.2.1. Funciones de par compartido	37
5. Validación numérica del esquema de control	38
5.1. Caso 1: Referencia Constante, par de carga cero	40
5.2. Caso 2: Referencia Constante, par de carga cero	41
5.3. Caso 3: Referencia Constante, par de carga cero, controlador saturado	43
5.4. Caso 4: Regulación con par de carga diferente de cero	45
5.5. Caso 5: Seguimiento con par de carga diferente de cero	47
5.6. Caso 6: Regulación con cambio en el par de carga	49
5.6.1. Discusión	50
6. Conclusiones	52
6.1. Aportaciones	53
6.2. Trabajo Futuro	53
Bibliografía	54

Capítulo 1

Introducción

En este capítulo se plantea la motivación del trabajo con el Motor de Reluctancia Conmutada. Se hace la descripción de la máquina estudiada y una revisión de la literatura en cuanto al diseño de observadores de estados se refiere.

Finalmente se plantean el problema a resolver y los objetivos que son motivo de esta tesis.

1.1. Motivación

El control de motores eléctricos es vital para el desarrollo de diversas aplicaciones que van desde el movimiento de maquinaria pesada, electrodomésticos, maquinaria de alta precisión hasta su uso en algunos automóviles eléctricos e híbridos.

Los motores eléctricos tiene una gran versatilidad por diversas razones entre ellas,

- Se pueden diseñar motores de diversos tamaños.
- Existen motores que se pueden conectar a la red eléctrica y los hay con alimentación por medio de baterías.
- Son más eficientes que los motores de combustión interna.

Gracias al avance de la electrónica de potencia se pueden controlar máquinas eléctricas más sofisticadas como el motor de corriente directa sin escobillas y el motor de inducción doblemente alimentado.

1.1.1. Motor de Reluctancia Conmutada

Estos mismos avances han hecho posible el uso del Motor de Reluctancia Conmutada (MRC) en aplicaciones de velocidad variable dado que su operación está ligada al uso de un conmutador electrónico, razón por la que había sido relegado a aplicaciones donde se requiere mover cargas grandes en pequeñas distancias como se cita en [Miller, 2001].

Este motor se ha vuelto una alternativa frente a los motores tradicionalmente usados debido a que no tiene devanados en el rotor y entonces,

- tiene una mejor disipación de calor,
- es más ligero y más pequeño que otros motores de la misma potencia,

En lo que concierne al estator, los devanados de las fases están diseñados para ser independientes entre si, eléctrica y magnéticamente, lo que hace posible la operación del motor aún cuando una de ellas falla.

El estator y el rotor son de polos salientes, para maximizar la diferencia entre la inductancia mínima y máxima, lo que hace mayor la producción de par mecánico de origen eléctrico.

En cuanto a la operación de la máquina, para generar movimiento continuo de la flecha se deben conmutar las fases alternadamente, de tal manera que se minimice el rizo en el par de salida por lo que se necesita conocer la posición angular del rotor para determinar los tiempos de conmutación de las fases a velocidades medias y altas, i.e. ángulos de encendido, conducción y apagado.

Este motor combina un diseño mecánico simple con una electrónica de potencia asociada que puede adaptarse a las necesidades de la aplicación ya que se pueden encontrar impulsores desde un interruptor por fase, lo que dota de una gran flexibilidad a los sistemas que involucran al motor como:

- lavadoras,
- ventiladores,
- centrifugadores para laboratorio,
- frenos para auto [Underwood S., 2004],
- en autos híbridos [Long S.A., 2003].

1.1.2. Marco Teórico

Debido a su construcción y modo de funcionamiento, este motor presenta no linealidades, e.g. saturación magnética, que es necesario identificar de tal forma que los modelos generados describan fielmente el comportamiento de la máquina.

En la literatura se pueden encontrar controladores que usan modelos que consideran la saturación magnética como los que se utilizan en [Ilic'-Spong et al., 1987] y [Espinosa-Perez et al., 2002] y el modelo de señal pequeña donde no se considera, usado en e.g. [Espinosa-Pérez G. R., 2000], [Krishnan, 2001b] y [Lumsdaine A., 1990].

Esta última descripción matemática aunque modela el circuito magnético de forma lineal y no incluye los efectos de saturación, es un modelo matemático no lineal ya que los términos asociados con la fuerza contra-electromotriz y con el par generado son no lineales. Aún cuando es una representación simplificada de la máquina ha probado ser útil en cuanto al diseño de controladores, razón por la cual es el modelo que se analiza en este trabajo.

1.2. Control sin sensor de las variables mecánicas

Los controladores que se mencionaron en la sección 1.1.2, requieren la retroalimentación de todo el estado, i. e. las corrientes de fase, la velocidad y posición angular, lo que para aplicaciones que requieren alto desempeño implica el uso de codificadores, absolutos o incrementales.

El uso de este tipo de sensores puede aumentar el peso, el tamaño y el costo del sistema de control. Además puede ser inadecuado en aplicaciones donde la confiabilidad del sistema sea crucial o donde el ambiente sea hostil.

Debido a que existen numerosas aplicaciones que requieren alto desempeño pero donde se quiere eliminar el uso de los sensores de velocidad y posición angular, situación deseable en todas las máquinas eléctricas, se han creado grupos de trabajo que se dedican a diseñar controladores sin sensores de las variables mecánicas. Este problema podría resolverse de varias formas, una de ellas diseñando controladores que sólo requieran la retroalimentación de la salida (corrientes de fase). Otra forma de resolver el problema es introduciendo observadores de estados en el lazo de control, en este trabajo se aporta en cuanto a la segunda alternativa.

En este trabajo se citan tres ejemplos notables de observadores de estados, el primer ejemplo es el presentado en [Lumsdaine A., 1990] donde se plantean variaciones de un observador tipo Luenberger tomando diversas consideraciones sobre un diseño básico, la dinámica del error se linealiza para hacer la prueba de convergencia.

El segundo ejemplo es un observador de estado reducido, [Solsona et al., 1996], donde se prueba estabilidad del punto de equilibrio de la dinámica del error de observación usando una función de Lyapunov en los errores de estimación, se incluyen dos ejemplos simulados numéricamente donde la condición inicial de velocidad es diferente de cero.

El tercer ejemplo es el presentado en [McCann Roy A., 2001] donde se estiman primero los flujos en lazo abierto suponiendo que la condición inicial del flujo es conocida, estos estimados se consideran una buena representación de los flujos reales, por lo que son usados para generar un error de flujo en un observador basado en modos deslizantes que estima los flujos magnéticos y las variables mecánicas.

Los observadores presentados [Lumsdaine A., 1990] y [McCann Roy A., 2001] usan el modelo de señal pequeña pero con los flujos magnéticos en lugar de las corrientes como la variable que representa al sub-sistema eléctrico y el observador presentado en [Solsona et al., 1996] usa un modelo que considera la saturación magnética.

En [McCann Roy A., 2001] se estiman primero los flujos en lazo abierto con base en

la expresión,

$$\frac{d\lambda}{dt} = u - Ri$$

suponiendo que la condición inicial del flujo es conocida. Estos estimados se consideran una buena representación de los flujos reales, por lo que son usados para generar un error de flujo en un observador basado en modos deslizantes que estima los flujos magnéticos y las variables mecánicas.

Los trabajos antes citados no presentan análisis de convergencia del sistema en lazo cerrado del MRC-Observador de estados, excepto el trabajo de [Lumsdaine A., 1990] donde se linealiza la dinámica del error.

Menos aún se tiene conocimiento de algún trabajo donde se incluya un análisis de estabilidad en lazo cerrado que incluya la dinámica del controlador.

Tampoco se ha presentado, hasta el conocimiento de la autora, un análisis de observabilidad (local o global) que muestre las propiedades de observabilidad del modelo de señal pequeña, y que permita justificar de una manera clara y formal, además de la simulación numérica o incluso de la validación experimental, el funcionamiento de los observadores reportados.

1.3. Planteamiento del problema

Usando el modelo matemático de señal pequeña del MRC, donde se consideran corrientes menores a la corriente de saturación, explicado a detalle en [Miller, 2001] y [Krishnan, 2001b].

El problema es: Diseñar un observador de estados completo para el modelo, que asegure la convergencia del estado estimado al estado real.

1.3.1. Objetivos

A partir del planteamiento anterior se definen los siguientes objetivos:

- Analizar la observabilidad del modelo de señal pequeña del MRC.
- Definir condiciones de observabilidad de este modelo.

- Diseñar un observador que estime los estados del modelo. Cabe mencionar que este objetivo no se cumplió a cabalidad dada la dificultad del mismo, lo que hizo necesario resolver antes el problema intermedio de diseñar un observador que reconstruyera la velocidad a partir de la medición de las salidas, las entradas y considerando que se conoce la posición angular.
- Demostrar analíticamente la convergencia del Observador de estados.
- Presentar la evaluación numérica del sistema Motor-Controlador-Observador, con un controlador previamente reportado en [Maya-Ortiz, 2001].

1.4. Organización de la tesis

En el Capítulo 2 se hace una descripción del Motor de Reluctancia Conmutada, de su funcionamiento y de la curva Par-Velocidad que define a la máquina. Asimismo se presenta una forma de obtener el modelo matemático de señal pequeña del motor.

En el Capítulo 3 se desarrolla el análisis de observabilidad del modelo matemático presentado en el capítulo dos, donde se definen las condiciones bajo las cuales el modelo es observable.

En el Capítulo 4 se define el tipo de observador que se propone en este trabajo, que es de estado reducido. Se presenta la demostración de la estabilidad de la dinámica de error de observación. Asimismo se describe el controlador que se utilizará para la validación numérica.

Los resultados de las simulaciones numéricas del sistema Motor-Control-Observador se presentan en el Capítulo 5.

Finalmente en el Capítulo 6 se exponen las conclusiones, las aportaciones de este documento y se esboza el trabajo futuro.

Capítulo 2

El Motor de Reluctancia Conmutada

En este capítulo se presenta la descripción y el funcionamiento del Motor de Reluctancia Conmutada, así como el modelo matemático de la máquina que se usará a lo largo de este trabajo.

2.1. Descripción del motor

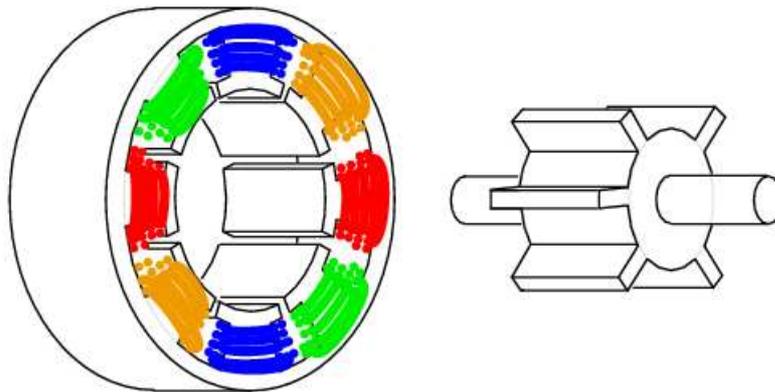


Figura 2.1: Esquema que muestra el estator y rotor de un MRC 8/6

Los MRC rotatorios están contruidos con estatores y rotores concéntricos. El estator

puede ser o no de polos salientes, el rotor siempre tiene polos salientes. La saliencia del estator hace mayor la diferencia entre la inductancia mínima y máxima, y por lo tanto mejora la producción de par en la máquina.

Los polos salientes se diseñan en múltiplos de dos y en máquinas simétricas siempre son más en el estator que en el rotor, para evitar posiciones del rotor que generen par nulo. El número de polos usualmente se incluye en la descripción de un MRC por ejemplo: si tiene seis polos en el estator y cuatro en el rotor es un MRC 6/4. Se suele identificar el número de polos de rotor como N_r .

Esta máquina, como la de la Fig. 2.1 donde se muestra un MRC, tiene un rotor sin devanados que está hecho laminaciones de hierro de alta permeabilidad. El estator, cuando es de polos salientes, presenta devanados concentrados lo que supone mínima producción de inductancia mutua.

Para formar una fase se conectan dos o más devanados en serie. Las fases son independientes entre si, lo que implica que estas están desacopladas eléctrica y magnéticamente, por lo que el análisis de una fase puede ser extendido a las demás considerando los desfases entre cada una.

2.1.1. Funcionamiento

Una máquina de reluctancia es aquella en donde el par es producido por la tendencia del rotor a moverse a la posición donde la inductancia del estator es máxima, es decir, la reluctancia es mínima.

El movimiento del rotor de un motor de reluctancia es producido por el mismo fenómeno que genera movimiento en una pieza ferromagnética al acercarla a un imán. En el caso de la máquina, los polos del rotor son las piezas ferromagnéticas que son atraídas por el campo magnético generado por la excitación de los devanados del estator.

Para producir movimiento constante del rotor se deben encender las fases del estator

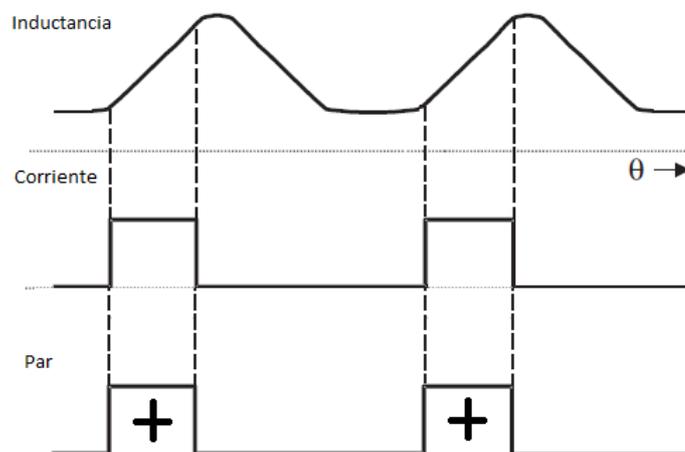


Figura 2.2: Forma de la corriente para producir par positivo

alternadamente durante el intervalo creciente o decreciente de la inductancia de cada fase. De igual forma para obtener par en un mismo sentido se debe excitar cada fase durante un tiempo específico correspondiente a los valores de inductancia entre un mínimo y un máximo, esto es, cuando la inductancia crece, intervalo **JA**, o cuando la inductancia decrece, intervalo **AK**, ver Fig. 2.2. Si se excita una fase en un intervalo de posiciones mayor de lo necesario se puede producir par en sentido contrario.

Por lo tanto para obtener un Par promedio con un rizo mínimo es necesario encender las fases en una secuencia donde los pares producidos por cada fase se sumen, evitando generar par en sentido contrario, pero maximizando el tiempo que una fase esta encendida.

2.1.2. Curva Par-Velocidad

La característica par-velocidad está limitada, como en otros motores eléctricos por los valores máximos de corriente y voltaje de entrada: el par está limitado por la corriente máxima permitida y la velocidad por el voltaje de entrada máximo.

Conforme aumenta la velocidad desde el arranque, ver Fig. 2.3, se perfila una región de par constante hasta que se alcanza la velocidad base, ω_b , que se define como

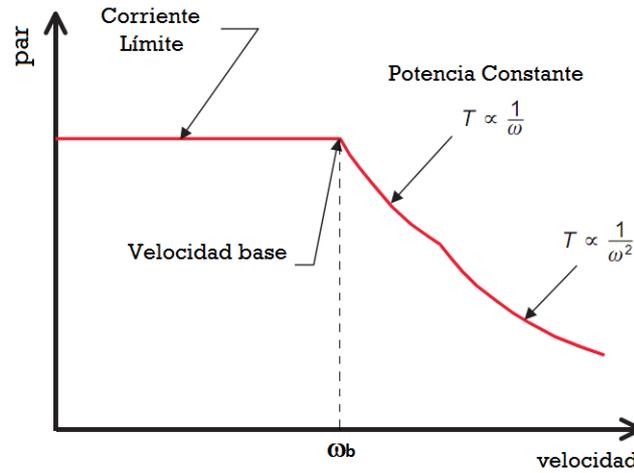


Figura 2.3: Curva par-velocidad

la velocidad a la cual el término asociado a la fuerza contra-electromotriz en esta máquina, e , es igual en magnitud al voltaje de entrada, ver [Miller, 2001]. A partir de este punto la potencia de salida permanece constante y a su valor máximo; valor que es inversamente proporcional a la velocidad. A velocidades altas, la magnitud del término e se incrementa y la potencia comienza a decrecer proporcionalmente con el inverso del cuadrado de la velocidad.

Por lo tanto se definen como velocidades bajas, medias y altas a aquellas velocidades de 0 a $1/3\omega_b$, de $1/3\omega_b$ a la velocidad base y por encima de la velocidad base respectivamente.

2.2. Modelo Matemático

En este trabajo se utiliza un modelo de la máquina que se obtiene haciendo las siguientes consideraciones ¹.

1. Se desprecian las inductancias mutuas entre los devanados del estator, ya que éste tiene devanados concentrados lo que supone mínima interacción entre fases i.e. las fases están desacopladas magnéticamente.

¹Este mismo modelo se puede obtener por medio de distintas técnicas estas se pueden consultar en [Krishnan, 2001b], [Miller, 2001] y [Maya-Ortiz, 2001]

2. Se asume que el flujo magnético cruza el entrehierro únicamente en la dirección radial.
3. Se considera que las inductancias dependen sólo de la posición θ , no de la corriente, esto es, no se considera la operación en la región de saturación magnética.
4. Los flujos magnéticos dependen linealmente de las corrientes del estator y se definen como producto de la inductancia por la corriente en cada fase,

$$\lambda_j = L_j(\theta)i_j$$

5. En esta máquina las inductancias tienen un comportamiento trapezoidal, ver Fig. 2.2, una aproximación válida es la de representarlas como los dos primeros términos pares de la expansión en serie Fourier:

$$L_j(\theta) = l_0 - l_1 \cos\left(N_r\theta - (j-1)\frac{2\pi}{3}\right)$$

N_r es el número de polos del rotor y l_0, l_1 , con $l_0 > l_1$, son constantes positivas obtenidas de forma experimental. En [Ilic'-Spong et al., 1987] se hace uso de ésta representación de las inductancias y se menciona que se ha comprobado que existe un error de menos del 10 % al compararlas con resultados experimentales.

6. Debido a la construcción de la máquina, las inductancias son funciones periódicas de θ con período

$$T = 2\pi/N_r$$

7. El par de entrada se considera constante y conocido.
8. Las entradas del modelo son los voltajes de alimentación de cada fase de estator.
9. Las salidas del modelo son las corrientes en los devanados de cada fase.

Las primeras seis consideraciones modelan los fenómenos magnéticos de forma lineal por lo que no se puede decir nada acerca del comportamiento de la máquina cuando las corrientes son iguales o mayores a la corriente de saturación.

Es hipótesis de este trabajo que aunque se modelan los perfiles de inductancia de forma sinusoidal, esta representación conserva los puntos de inflexión de la inductancia. Más adelante esto será relevante en el análisis de observabilidad.

Aunque la consideración del que el par de carga es conocido y constante es irreal, no es un elemento crucial en el problema que se afronta en este trabajo, diseñar un estimador de esta variable es parte del trabajo futuro.

2.2.1. Sistema electromecánico

Para su estudio la máquina se puede dividir en dos subsistemas interconectados, uno eléctrico y otro mecánico.

Para el sub-sistema eléctrico, un circuito LR equivalente se puede derivar de las dos primeras suposiciones que definen la inductancia mutua como despreciable, ver Fig. 2.4. Por lo tanto el voltaje aplicado es igual a la suma de las caídas resistivas y a la tasa de cambio de los flujos de enlace en la inductancia equivalente. Como se puede ver en la ecuación (2.1) para una fase:

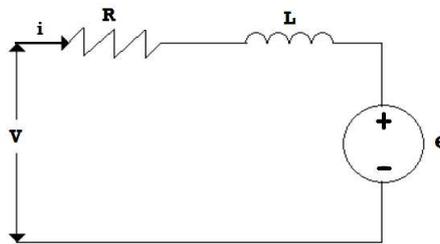


Figura 2.4: Circuito equivalente

$$\frac{d\lambda}{dt} + Ri = u \quad (2.1)$$

donde al sustituir la definición de flujos para una fase $\lambda = L(\theta)i$ se obtiene,

$$L(\theta)\frac{di}{dt} + \omega k(\theta)i + Ri = u \quad (2.2)$$

donde

i es la corriente en la fase,

θ es la posición del rotor,

ω es la velocidad del rotor y

$$k(\theta) = \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta} = N_r l_1 \text{sen}(N_r \theta)$$

es la derivada parcial de la inductancia con respecto a la posición.

Los términos del lado izquierdo de (2.2) se definen como la fuerza contra-electromotriz $e = \omega k(\theta)i$, la caída de voltaje resistiva, Ri y $L(\theta)\frac{di}{dt}$ es la caída de voltaje en el inductor.

La potencia eléctrica instantánea es,

$$ui = L(\theta)i\frac{di}{dt} + \omega k(\theta)i^2 + Ri^2 \quad (2.3)$$

y la tasa de cambio de la energía magnética almacenada es,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Li^2 \right) = \frac{1}{2} i^2 \frac{dL}{dt} + Li \frac{di}{dt} = \frac{1}{2} i^2 \omega \frac{\partial L}{\partial \theta} + Li \frac{di}{dt}. \quad (2.4)$$

Por otro lado, la producción de par en la máquina es explicada usando el principio de conversión de energía en un solenoide como el de la Fig. 2.5.

Donde la potencia mecánica del sistema se obtiene cuando a la potencia de entrada, expresión (2.3), se le restan las pérdidas resistivas y la energía magnética almacenada:

$$P_m = \omega T_e = \frac{1}{2} \omega k(\theta) i^2 \quad (2.5)$$

donde T_e es el par electromagnético instantáneo.

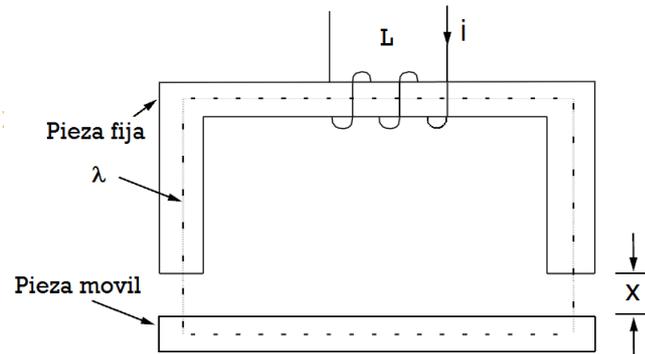


Figura 2.5: Solenoide

De (2.5) se obtiene la expresión para el par electromagnético como sigue.

$$T_e = \frac{1}{2}k(\theta)i^2 \quad (2.6)$$

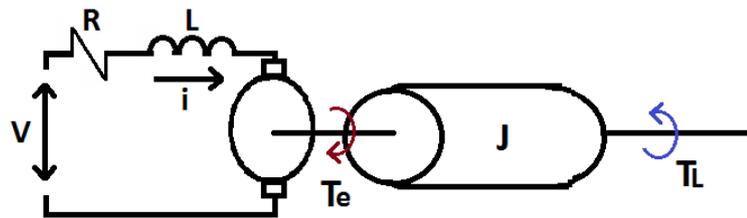


Figura 2.6: Sistema completo

El sub-sistema mecánico se modela, ver Fig. 2.6, como el par producido por una inercia rotacional J al acelerarse, que es igual a la suma del par de carga T_L , que es función de la posición y de la velocidad angular, y el par electromagnético, T_e definido en (2.5), menos el amortiguamiento viscoso, $d\omega$ que representa las pérdidas mecánicas proporcionales a la velocidad tales como los efectos de fricción:

$$J\ddot{\theta} = T_e(\theta, i_j) - T_L - d\omega \quad (2.7)$$

2.2.2. Modelo máquina trifásica

Por facilidad de representación y sin pérdida de generalidad en este trabajo se estudia una máquina trifásica, cuyo modelo se obtiene de la ecuación (2.2), con tres fases en el estator y de la ecuación (2.7) es decir,

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(\theta) \frac{d\mathbf{i}}{dt} &= -\omega \mathbf{C}(\theta) \mathbf{i} - \mathbf{R} \mathbf{i} + \mathbf{u} \\ J\dot{\omega} &= \frac{1}{2} \mathbf{i}^T \mathbf{C}(\theta) \mathbf{i} - d\omega - T_L \\ \dot{\theta} &= \omega \end{aligned} \quad (2.8)$$

donde,

$$\mathbf{i} = [i_1, i_2, i_3]^T$$

son las corrientes en cada fase, donde el superíndice T denota el transpuesto,

$$\mathbf{u} = [u_1, u_2, u_3]^T$$

son los voltajes de entrada,

$$\mathbf{R} = \text{diag} [R, R, R]$$

es la matriz de resistencia,

$$\mathbf{D}(\theta) = \text{diag} [L_1(\theta), L_2(\theta), L_3(\theta)]$$

es la matriz de inductancias $\mathbf{D}(\theta)$ es una matriz diagonal, positiva definida.

$$\mathbf{C}(\theta) = \text{diag} [k_1(\theta), k_2(\theta), k_3(\theta)]$$

es la matriz de las derivadas parciales de las inductancias con respecto a la posición.

Algunas particularidades del modelo son:

- Este modelo refleja el comportamiento de la máquina para corrientes menores a la corriente de saturación.
- El modelo es de quinto orden, donde los estados son las tres corrientes de fase, la velocidad y la posición angulares y las entradas son los voltajes en cada devanado.
- Los parámetros de este modelo son las resistencias de fase, R , la inercia rotacional J y el coeficiente de amortiguamiento d .

Capítulo 3

Análisis de Observabilidad

En este capítulo se presenta la definición de observabilidad general y la condición para observabilidad en sistemas no lineales, además se desarrolla el análisis de observabilidad del modelo presentando en el capítulo anterior.

3.1. Observabilidad

Considere el sistema n -dimensional con p entradas y q salidas, donde $f \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^p$ y $y \in \mathbb{R}^q$ que tiene la siguiente representación,

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \mathbf{y} &= h(\mathbf{x})\end{aligned}\tag{3.1}$$

donde los mapeos $f(\cdot)$ y las funciones $h(\cdot)$ son suficientemente suaves.

Definición 3.1.1 [Skogestad y Postlethwaite, 2005]

*El sistema dado por (3.1) es observable si para cada estado inicial $x(0)$, existe un $t_1 > 0$ finito tal que el conocimiento de la entrada \mathbf{u} y la salida \mathbf{y} en el intervalo $[0, t_1]$ es suficiente para determinar unívocamente el estado inicial $x(0)$. En caso contrario se dice que (3.1) es **no observable**.*

3.2. Observabilidad en sistemas no lineales

El método para analizar la observabilidad que se emplea en este trabajo hace uso de la siguiente definición.

Proposición 3.2.1 [Hermann R., 1977]

Una condición de observabilidad local débil para el sistema representado por (3.1) es que el mapeo de observabilidad

$$\mathbf{o} = \begin{bmatrix} dL_f^0 h \\ dL_f^1 h \\ dL_f^2 h \\ \vdots \end{bmatrix}$$

sea biyectivo. Donde $dL_f^i h(\mathbf{x})$ es la derivada de Lie de orden i de h a lo largo de $f(\mathbf{x}, \mathbf{u})$

▽

Lo anterior es equivalente a pedir que la matriz de Observabilidad definida como

$$\mathbf{J} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{o})$$

sea de rango n .

Es importante recalcar:

- en esta condición no se piden un número específico de derivadas de Lie de cada salida, porque sí con una derivada de Lie se puede demostrar que el mapeo es biyectivo entonces ya se tiene la condición satisfecha. Es posible también que se obtengan $m > n$ derivadas de Lie y no se pueda cumplir la condición.
- De esta forma se pueden obtener condiciones suficientes de observabilidad local una vez que se demuestra que no hay pérdida de rango en el Jacobiano.
- Este método ha sido usado en [De Wit C., 2000] para la máquina de inducción y en [Zaltni D., 2010] para el motor síncrono de imán permanente, en este último

trabajo se obtienen condiciones de observabilidad global para el motor síncrono de imán permanente de polos salientes. En ambos trabajos se analiza el determinante de la matriz jacobiana, $\det(\mathbf{J})$, ya que sí para algún valor de los estados el determinante se anula se puede decir que la matriz perdió rango. Por lo tanto la metodología que se utiliza en este trabajo se basa en encontrar aquellas trayectorias para las cuales el determinante se anula.

A partir de este punto se define el vector de estados como,

$$\mathbf{x} = [\mathbf{i}, \theta, \omega]^T = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]^T$$

y el siguiente vector de salidas,

$$\mathbf{y} = [i_1, i_2, i_3]^T = [x_1, x_2, x_3]^T$$

De la misma forma en las siguientes secciones, por simplicidad de escritura, se escribirán las inductancias como L_j , y sus derivadas con respecto a la posición como k_j sin argumento.

3.3. Mapeo de Observabilidad y Matriz de Observabilidad

Al aplicar la metodología que se deriva de la definición de observabilidad presentada en la Sección 3.2 al modelo representado por (2.8), se obtiene el siguiente mapeo de observabilidad para una derivada de Lie de las salidas, se escoge sólo una derivada porque el modelo es de grado relativo uno:

$$\mathbf{o} = \begin{bmatrix} dL_f^0 h_1 \\ dL_f^0 h_2 \\ dL_f^0 h_3 \\ dL_f^1 h_1 \\ dL_f^1 h_2 \\ dL_f^1 h_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ dL_f^1 x_1 \\ dL_f^1 x_2 \\ dL_f^1 x_3 \end{bmatrix}$$

La matriz de Observabilidad que se obtiene al calcular el Jacobiano del mapeo de Observabilidad está dada por:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\partial L_f x_1}{\partial x_1} & 0 & 0 & \frac{\partial L_f x_1}{\partial x_4} & \frac{\partial L_f x_1}{\partial x_5} \\ 0 & \frac{\partial L_f x_2}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial L_f x_2}{\partial x_4} & \frac{\partial L_f x_2}{\partial x_5} \\ 0 & 0 & \frac{\partial L_f x_3}{\partial x_3} & \frac{\partial L_f x_3}{\partial x_4} & \frac{\partial L_f x_3}{\partial x_5} \end{bmatrix}$$

es importante recalcar que,

- Se observan dos submatrices diagonales en las columnas que corresponden a los gradientes con respecto a las corrientes, x_1 , x_2 y x_3 debido a que las fases del estator están desacopladas.
- Esta matriz es de dimensión 6×5 , ya que el modelo trifásico tiene 3 salidas, mientras que el modelo de la máquina es de quinto orden.

En atención al último punto, para determinar el rango se usa el siguiente teorema:

Teorema 3.3.1 [Kreyszig, 1999] *Una matriz $\mathbf{A} = [a_{jk}]$ de $m \times n$ tiene rango $r \geq 1$, si y sólo si, \mathbf{A} tiene una submatriz \mathbf{A}_r de dimensión $r \times r$ con determinante distinto de cero, aunque exista alguna submatriz de \mathbf{A} con más de r renglones que tenga determinante igual a cero. En particular, si \mathbf{A} es cuadrada, $n \times n$, tiene rango n si y sólo si*

$$\det \mathbf{A} \neq 0$$

◇◇◇

Por lo tanto, se escogen cinco términos del mapeo de observabilidad para obtener matrices cuadradas de 5×5 que son submatrices de \mathbf{J} . Se tienen seis posibles combinaciones, pero se prefieren aquellas que contienen los gradientes de la primeras derivadas de Lie de las salidas.

$$\mathbf{J}_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial L_f x_1}{\partial x_1} & 0 & 0 & \frac{\partial L_f x_1}{\partial x_4} & \frac{\partial L_f x_1}{\partial x_5} \\ 0 & \frac{\partial L_f x_2}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial L_f x_2}{\partial x_4} & \frac{\partial L_f x_2}{\partial x_5} \\ 0 & 0 & \frac{\partial L_f x_3}{\partial x_3} & \frac{\partial L_f x_3}{\partial x_4} & \frac{\partial L_f x_3}{\partial x_5} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}_{13} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\partial L_f x_1}{\partial x_1} & 0 & 0 & \frac{\partial L_f x_1}{\partial x_4} & \frac{\partial L_f x_1}{\partial x_5} \\ 0 & \frac{\partial L_f x_2}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial L_f x_2}{\partial x_4} & \frac{\partial L_f x_2}{\partial x_5} \\ 0 & 0 & \frac{\partial L_f x_3}{\partial x_3} & \frac{\partial L_f x_3}{\partial x_4} & \frac{\partial L_f x_3}{\partial x_5} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}_{23} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\partial L_f x_1}{\partial x_1} & 0 & 0 & \frac{\partial L_f x_1}{\partial x_4} & \frac{\partial L_f x_1}{\partial x_5} \\ 0 & \frac{\partial L_f x_2}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial L_f x_2}{\partial x_4} & \frac{\partial L_f x_2}{\partial x_5} \\ 0 & 0 & \frac{\partial L_f x_3}{\partial x_3} & \frac{\partial L_f x_3}{\partial x_4} & \frac{\partial L_f x_3}{\partial x_5} \end{bmatrix}$$

Las submatrices de \mathbf{J} son nombradas a partir de las corrientes que aparecen en los primeros dos renglones de cada una, es decir, para el Jacobiano \mathbf{J}_{12} los elementos a_{11} y a_{21} son unos, estos elementos corresponden a las derivadas parciales de $\frac{\partial L_f x_1}{\partial x_1} = 1$ y $\frac{\partial L_f x_2}{\partial x_2} = 1$.

3.3.1. Determinantes

De estos los Jacobianos J_{12} , J_{13} y J_{23} se obtienen tres determinantes, los determinantes de cada Jacobiano se definen como $\det(\mathbf{J}) \triangleq \Delta$. Por lo que Δ_{12} , Δ_{13} , Δ_{23} , están dados por

$$\Delta_{12} = \frac{\partial L_f x_3}{\partial x_3} \left(\frac{\partial L_f x_1}{\partial x_4} \frac{\partial L_f x_2}{\partial x_5} - \frac{\partial L_f x_1}{\partial x_5} \frac{\partial L_f x_2}{\partial x_4} \right)$$

$$\Delta_{13} = \frac{\partial L_f x_2}{\partial x_2} \left(\frac{\partial L_f x_1}{\partial x_4} \frac{\partial L_f x_3}{\partial x_5} - \frac{\partial L_f x_1}{\partial x_5} \frac{\partial L_f x_3}{\partial x_4} \right)$$

$$\Delta_{23} = \frac{\partial L_f x_1}{\partial x_1} \left(\frac{\partial L_f x_2}{\partial x_4} \frac{\partial L_f x_3}{\partial x_5} - \frac{\partial L_f x_2}{\partial x_5} \frac{\partial L_f x_3}{\partial x_4} \right)$$

Si se considera en el análisis que x_5 , la velocidad, es diferente de cero, los determinantes desarrollados de los Jacobianos J_{12} , J_{13} y J_{23} están dados por:

$$\begin{aligned} \Delta_{12} = & -\delta_3 k_2 L_2 \left(k_1 \dot{\lambda}_1 x_2 + (f_1 - k_1^2) x_5 x_1 x_2 \right) \\ & + \delta_3 k_1 L_1 \left(k_2 \dot{\lambda}_2 x_1 + (f_2 - k_2^2) x_5 x_1 x_2 \right) \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{13} = & -\delta_2 k_3 L_3 \left(k_1 \dot{\lambda}_1 x_3 + (f_1 - k_1^2) x_5 x_1 x_3 \right) \\ & + \delta_2 k_1 L_1 \left(k_3 \dot{\lambda}_3 x_1 + (f_3 - k_3^2) x_5 x_1 x_3 \right) \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{23} = & -\delta_1 k_3 L_3 \left(k_2 \dot{\lambda}_3 x_2 + (f_2 - k_2^2) x_5 x_2 x_3 \right) \\ & + \delta_1 k_2 L_2 \left(k_3 \dot{\lambda}_2 x_3 + (f_3 - k_3^2) x_5 x_2 x_3 \right) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Donde:

$$\dot{\lambda}_j = u_j - R i_j$$

$$f_1 = N_r L_1 (L_1 - l_0)$$

$$f_2 = N_r L_2 (L_2 - l_0)$$

$$f_3 = N_r L_3 (L_3 - l_0)$$

$$\delta_1 = -\frac{R+x_5 k_1}{L_3^2 L_2^2 L_1}$$

$$\delta_2 = -\frac{R+x_5 k_2}{L_1^2 L_3^2 L_2}$$

$$\delta_3 = -\frac{R+x_5 k_3}{L_1^2 L_2^2 L_3}$$

Es importante hacer las siguientes observaciones acerca de los determinantes:

1. Los términos δ_j siempre son diferentes de cero, porque la funciones L_j y la resistencia de fase siempre son positivas y diferentes de cero.
2. Las funciones f_j sólo dependen de la fase j -ésima al igual que la derivadas de los enlaces de flujo $\dot{\lambda}_j$.
3. Las expresiones que merecen un análisis detallado en (3.2), (3.3) y (3.4) son las que se encuentran entre paréntesis ya que son las que pueden inducir a que los determinantes se hagan cero.

3.4. Análisis con velocidad diferente de cero

En esta sección se describe el análisis de los determinantes cuando la velocidad del rotor es diferente de cero.

Con respecto a la operación de la máquina es importante recalcar que:

- Como se puede ver en la Fig. 3.1 cuando la fase j está completamente alineada, i.e. cuando los polos del rotor se alinean a una fase del estator, la función L_j en esa fase encuentra un máximo y la función k_j correspondiente se hace cero. Lo mismo sucede con k_j cuando L_j se encuentra en un mínimo.
- Se sabe que para tener movimiento continuo del rotor se alterna la operación de las fases, por lo que en algunos intervalos una o más corrientes de fase son iguales a cero.

Estas consideraciones junto con las observaciones de la Sección 3.3.1, son los argumentos que se usarán en esta sección para obtener las condiciones de observabilidad. Con base en lo anterior se supone, sin pérdida de generalidad, que el rotor se mueve en sentido positivo, entonces se enciende una fase cuando $k_j > 0$ y se apaga cuando ésta cambia de signo. De la Fig. 3.2 primero se enciende la fase 1, cuando L_1 es mínima, $k_1 = 0$, y el determinante Δ_{13} queda:

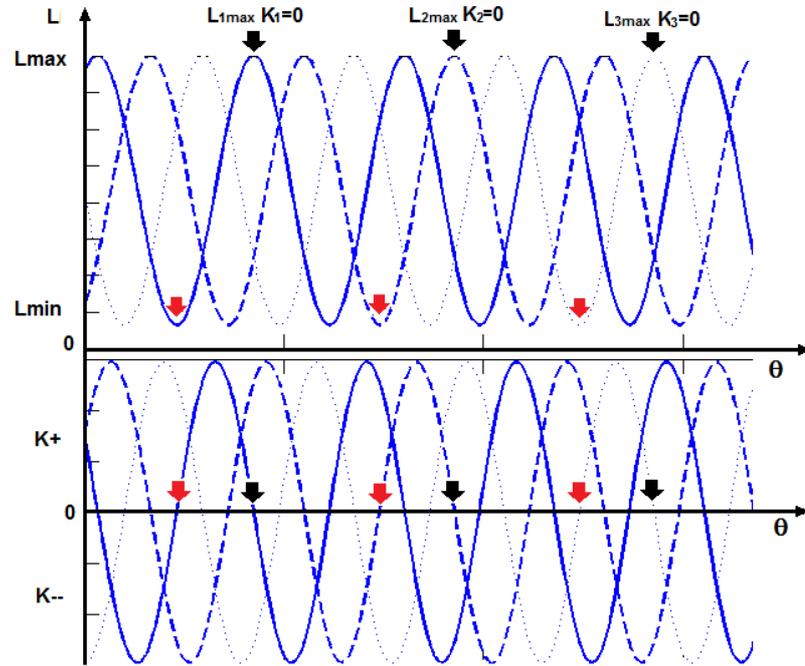


Figura 3.1: Inductancias y sus derivadas

$$\Delta_{13} = -\delta_1 k_3 L_3 (f_1 x_5 x_1 x_3)$$

Este determinante será diferente de cero si x_1 y x_3 no son cero, dado que la fase 3 está encendida, la fase 1 debe encenderse cuando L_1 es mínima.

La siguiente fase que se encuentra en un mínimo es la fase 2, por lo que $k_2 = 0$, y el determinante Δ_{12} queda:

$$\Delta_{12} = \delta_3 k_1 L_1 (f_2 x_5 x_1 x_2)$$

Para que este determinante sea diferente de cero es necesario que la fase 2 sea encendida cuando $k_2 = 0$.

Una vez que el rotor sigue su recorrido, la fase que se encuentra en un mínimo es la fase 3, por lo que $k_3 = 0$, y el determinante Δ_{23} queda:

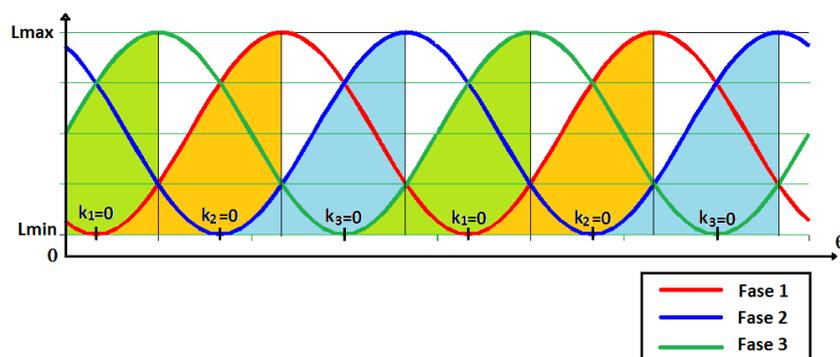


Figura 3.2: Intervalos de conducción de cada fase, se muestran los mínimos de las inductancias

$$\Delta_{23} = \delta_1 k_2 L_2 (f_3 x_5 x_2 x_3)$$

Para que este determinante sea diferente de cero es necesario que la fase 3 sea encendida cuando $k_3 = 0$.

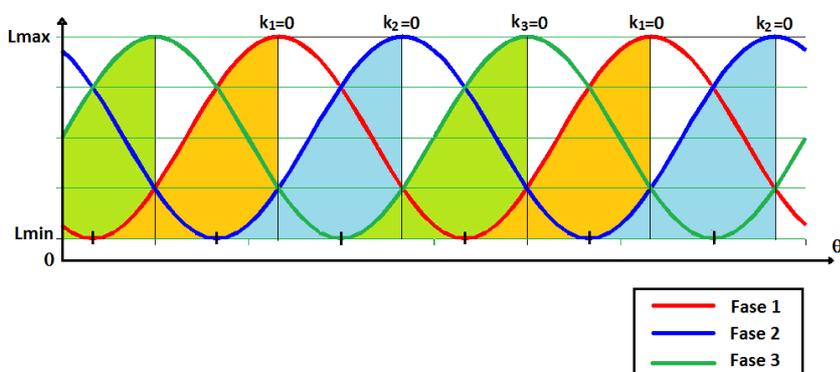


Figura 3.3: Intervalos de conducción de cada fase, se muestran los máximos de las inductancias

Las condiciones anteriores correspondían a los valores mínimos de las funciones L_j . Si ahora se considera que se apagan las fases cuando estas funciones alcanzan un máximo, Fig. 3.3, por ejemplo si L_1 está en un máximo, $k_1 = 0$ y

$$\Delta_{12} = -\delta_3 k_2 L_2 (f_1 x_5 x_1 x_2)$$

por lo tanto, para que el determinante sea diferente de cero, la fase 2 está encendida, la fase 1 debe permanecer encendida hasta que k_1 cambie de signo.

El siguiente máximo es el de la fase 2, $k_2 = 0$ y

$$\Delta_{23} = -\delta_1 k_3 L_3 (f_2 x_5 x_2 x_3)$$

ya que la fase 3 está encendida, la fase 2 debe permanecer encendida mientras k_2 no cambie de signo.

Para el máximo de la fase 3 ocurre algo similar, porque $k_3 = 0$, la primera fase está encendida y

$$\Delta_{13} = \delta_2 k_1 L_1 (f_3 x_5 x_1 x_3)$$

por lo tanto también esta fase se debe apagar con el cambio de signo de k_3 .

Discusión

Con base en el análisis hecho se puede concluir que para la operación con velocidad diferente de cero el modelo del MRC con las corrientes de fase como salidas, es **observable** si:

[L_j **creciente**]

- Las fases se encienden cuando $k_j \geq 0$.
- Las fases se apagan cuando $k_j \leq 0$.

[L_j **decreciente**]

- Las fases se encienden cuando $k_j \leq 0$.
- Las fases se apagan cuando $k_j \geq 0$.

Es importante mencionar que:

- Cómo se mencionó en la Sección 2.2.2 las funciones L_j y k_j son periódicas en la posición, x_4 , por lo que el análisis de un intervalo se extiende a todo el recorrido de las funciones a lo largo del tiempo.
- Se imponen condiciones sobre la conmutación de las fases, y por lo tanto sobre el control de la máquina.
- Estas condiciones se pueden implantar, ya que en la práctica los ángulos de encendido y apagado son parte del intervalo definido por estas.
- La conmutación que definen las condiciones de observabilidad sigue la misma filosofía de la funciones de par compartido, que se definen en la Sección 4.2.1, que son utilizadas para disminuir el rizo en el par de salida mediante la superposición de los pares producidos por cada fase.

3.5. Análisis con velocidad cero

Una trayectoria que es importante analizar en el contexto de las máquinas eléctricas es cuando $x_5 = 0$, para este modo de operación los determinantes de los Jacobianos son:

$$\Delta_{12} = -\delta_3 k_2 L_2 (k_1 \dot{\lambda}_1 x_2) + \delta_3 k_1 L_1 (k_2 \dot{\lambda}_2 x_1) \quad (3.5)$$

$$\Delta_{13} = -\delta_2 k_3 L_3 (k_1 \dot{\lambda}_1 x_3) + \delta_2 k_1 L_1 (k_3 \dot{\lambda}_3 x_1) \quad (3.6)$$

$$\Delta_{23} = -\delta_1 k_3 L_3 (k_2 \dot{\lambda}_2 x_3) + \delta_1 k_2 L_2 (k_3 \dot{\lambda}_3 x_2) \quad (3.7)$$

Donde:

$$\delta_1 = \frac{R}{L_1^2 L_2^2 L_3}$$

$$\delta_2 = \frac{R}{L_1^2 L_3^2 L_2}$$

$$\delta_3 = \frac{R}{L_3^2 L_2^2 L_1}$$

El análisis, como en la Sección 3.4, se centra en obtener condiciones para que los determinantes sean diferentes de cero en los puntos en que las funciones $k_j = 0$. Por lo que como en la Fig. 3.2 primero se revisa que pasa cuando las funciones L_j están en un mínimo.

Cuando $k_1 = 0$, los determinantes Δ_{12} y Δ_{13} se anulan. En este punto, L_1 es mínima, la fase encendida es la 3, lo que implica que $x_3 \neq 0$ y $\dot{\lambda}_3 \neq 0$. Así también la fase 2 está apagada, así que $x_2 = 0$ y $\dot{\lambda}_2 = 0$ por lo tanto el determinante $\Delta_{23} = 0$.

Para la siguiente fase, cuando $k_2 = 0$, los determinantes Δ_{12} y Δ_{23} se anulan. En este punto, L_2 es mínima, la fase encendida es la 1, lo que implica que $x_1 \neq 0$ y $\dot{\lambda}_1 \neq 0$. Así también la fase 3 está apagada, así que $x_3 = 0$ y $\dot{\lambda}_3 = 0$ por lo tanto el determinante $\Delta_{13} = 0$.

Cuando la tercera fase encuentra un mínimo de inductancia $k_3 = 0$, los determinantes Δ_{13} y Δ_{23} se anulan. En este punto la fase encendida es la 2, lo que implica que $x_2 \neq 0$ y $\dot{\lambda}_2 \neq 0$. Así también la fase 1 está apagada, así que $x_1 = 0$ y $\dot{\lambda}_1 = 0$ por lo tanto el determinante $\Delta_{12} = 0$.

En todos los casos cuando la inductancia en una fase es mínima los tres Jacobianos pierden rango.

De manera similar para los valores máximos de inductancia, por ejemplo si la fase 1 tiene un máximo, los determinantes Δ_{12} y Δ_{13} se anulan. La fase que conduce es la 2, pero la fase tres no conduce así que $\Delta_{23} = 0$. Es decir es el mismo caso que para inductancia mínima pero con la fase contraria encendida.

En todos los casos cuando la inductancia en una fase es máxima los tres Jacobianos pierden rango.

Discusión

Por lo tanto se puede decir que el Jacobiano del mapeo de observabilidad usando una derivada de Lie de las salidas pierde rango, ya que los determinantes se anulan simultáneamente cuando $k_j = 0$. Por lo tanto el MRC es no observable cuando la velocidad angular es igual a cero.

Es importante enfatizar que,

- El análisis aquí presentado, para el modelo matemático del MRC dado por la expresión (2.8), indica que la información de los estados puede ser recuperada de la medición de salidas y entradas si:
 - La velocidad es diferente de cero.
 - Se conmutan las fases cómo se especifica en la Sección 3.4.
- Esto quiere decir que el modelo es observable localmente según la definición presentada en la Sección 3.2.
- No se pueden diseñar observadores globales para este modelo matemático.

Capítulo 4

Observador y Controlador

El objetivo más ambicioso de este trabajo, planteado al principio de este documento, era diseñar un observador de las variables mecánicas del MRC que hiciera uso solamente de la medición de salidas y entradas, sin embargo la dificultad del mismo hizo necesario resolver antes el problema intermedio de diseñar un observador que reconstruyera la velocidad a partir de la medición de las salidas, las entradas y considerando que se conoce la posición angular. La complicación se derivó de la dependencia de las inductancias con respecto a la posición, lo que hizo imposible diseñar un observador de estados completo con las técnicas de diseño de observadores tipo Luenberger, que era el tipo de observador que se pensaba diseñar, cómo en [Thau, 1973] por ejemplo, y debido a que el modelo no es globalmente observable tampoco se pudo aplicar la técnica presentada en [Ciccarella G., 1993]. Por lo tanto se optó por diseñar el observador de orden reducido con base en una función candidata de Lyapunov en el error de estimación. Este observador aunque no ofrece solución a un problema real sirve como ejercicio para encontrar una solución al problema de reconstrucción de las variables mecánicas.

Además del observador diseñado se desarrolla la prueba de estabilidad de la dinámica del error del Sistema Motor-Observador que demuestra la convergencia del estado estimado al estado real.

Finalmente se presenta y explica el controlador que completa el esquema de control para el modelo de señal pequeña del MRC.

4.1. Observador propuesto

El observador de orden reducido se diseñó con base en la elección de una función candidata de Lyapunov en los errores de estimación. La función propuesta está inspirada en la función de energía del sistema: la suma de la energía electromecánica y la energía cinética.

4.1.1. Proposición

Proposición 4.1.1 *Dado el modelo matemático del MRC, de orden reducido ya que no se considera la dinámica de la posición,*

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(\theta) \frac{d\mathbf{i}}{dt} &= -\omega \mathbf{C}(\theta) \mathbf{i} - \mathbf{R} \mathbf{i} + \mathbf{u} \\ \mathbf{J} \dot{\omega} &= \frac{1}{2} \mathbf{i}^T \mathbf{C}(\theta) \mathbf{i} - d\omega - \mathbf{T}_L \end{aligned} \quad (4.1)$$

donde se supone que se conocen los parámetros \mathbf{R} , \mathbf{J} , d , el par de carga \mathbf{T}_L y la posición angular, las corrientes de fase y los voltajes de control. Un observador de estados que garantiza la convergencia del error de estimación de la velocidad,

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(\theta) \frac{d\hat{\mathbf{i}}}{dt} &= -\hat{\omega} \mathbf{C}(\theta) \hat{\mathbf{i}} - \frac{1}{2} \hat{\omega} \mathbf{C}(\theta) \tilde{\mathbf{i}} - \mathbf{R} \hat{\mathbf{i}} + \mathbf{G} \tilde{\mathbf{i}} + \mathbf{u} \\ \mathbf{J} \dot{\hat{\omega}} &= \frac{1}{2} \hat{\mathbf{i}}^T \mathbf{C}(\theta) \hat{\mathbf{i}} - d\hat{\omega} - \mathbf{T}_L \end{aligned} \quad (4.2)$$

donde \mathbf{G} es una matriz diagonal de dimensión 3×3 , positiva definida.

4.1.2. Demostración

Se definen los errores de corrientes y de velocidad como $\tilde{\mathbf{i}} = \mathbf{i} - \hat{\mathbf{i}}$ y $\tilde{\omega} = \omega - \hat{\omega}$ respectivamente. Al restar del modelo dado por (4.1) la expresión del observador (4.2), se obtiene la siguiente expresión para la dinámica del error de observación,

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}(\theta) \frac{d\tilde{\mathbf{i}}}{dt} &= -\omega \mathbf{C}(\theta) \mathbf{i} + \hat{\omega} \mathbf{C}(\theta) \hat{\mathbf{i}} + \frac{1}{2} \hat{\omega} \mathbf{C}(\theta) \tilde{\mathbf{i}} - \mathbf{R} \tilde{\mathbf{i}} - \mathbf{G} \tilde{\mathbf{i}} \\
\mathbf{J} \dot{\tilde{\omega}} &= \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{i}}^T \mathbf{C}(\theta) \tilde{\mathbf{i}} - d \dot{\tilde{\omega}} + \tilde{\mathbf{i}}^T \mathbf{C}(\theta) \hat{\mathbf{i}}
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Los estados de este sistema son $\boldsymbol{\varepsilon} = [\tilde{\mathbf{i}}, \tilde{\omega}]$, el punto de equilibrio $\boldsymbol{\varepsilon} = 0$, al demostrar que este punto de equilibrio es estable, se prueba la convergencia del observador. Para demostrarlo se hace uso de la función candidata de Lyapunov,

$$V(\tilde{\mathbf{i}}, \tilde{\omega}) = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{i}}^T \mathbf{D}(\theta) \tilde{\mathbf{i}} + \frac{\mathbf{J}}{2} \tilde{\omega}^2 \tag{4.4}$$

cuyas componentes son funciones cuadráticas, la primera en los errores de estimación de corrientes que es similar a la representación de la contribución de energía del sub-sistema eléctrico. Y la segunda función, cuya variable independiente es el error de estimación de velocidad, que tiene la forma de la energía cinética del sub-sistema mecánico.

La derivada de $V(\tilde{\mathbf{i}}, \tilde{\omega})$ con respecto al tiempo es,

$$\dot{V}(\tilde{\mathbf{i}}, \tilde{\omega}) = \tilde{\mathbf{i}}^T \mathbf{D}(\theta) \frac{d\tilde{\mathbf{i}}}{dt} + \frac{\omega}{2} \tilde{\mathbf{i}}^T \mathbf{C}(\theta) \tilde{\mathbf{i}} + \mathbf{J} \tilde{\omega} \dot{\tilde{\omega}}$$

que evaluada a lo largo de las trayectorias de la dinámica del error tiene la siguiente representación:

$$\begin{aligned}
\dot{V}(\tilde{\mathbf{i}}, \tilde{\omega}) &= \tilde{\mathbf{i}}^T \left[-(\mathbf{R} + \mathbf{G}) \tilde{\mathbf{i}} - \omega \mathbf{C}(\theta) \mathbf{i} + \hat{\omega} \mathbf{C}(\theta) \hat{\mathbf{i}} + \frac{1}{2} \hat{\omega} \mathbf{C}(\theta) \tilde{\mathbf{i}} \right] + \frac{\omega}{2} \tilde{\mathbf{i}}^T \mathbf{C}(\theta) \tilde{\mathbf{i}} \\
&+ \tilde{\omega} \left[-d \dot{\tilde{\omega}} + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{i}}^T \mathbf{C}(\theta) \tilde{\mathbf{i}} + \tilde{\mathbf{i}}^T \mathbf{C}(\theta) \hat{\mathbf{i}} \right].
\end{aligned}$$

Así expresada la derivada de $V(\tilde{\mathbf{i}}, \tilde{\omega})$ tiene tres sumandos, el primero de ellos tiene un término negativo definido en los errores de corrientes con las matrices \mathbf{R} y \mathbf{G} , ambas positivas definidas como ya se mencionó, y varios términos indefinidos. El segundo sumando es indefinido y el tercer sumando tiene un término negativo definido en el error de velocidades, donde d es siempre positiva, y otros términos indefinidos.

Las expresiones que no tienen signo definido se agrupan de tal manera que se cancelan y la derivada queda en función de los términos negativos definidos,

$$V(\dot{\mathbf{i}}, \dot{\omega}) = -\dot{\mathbf{i}}^T (\mathbf{R} + \mathbf{G}) \dot{\mathbf{i}} - d\dot{\omega}^2 \quad (4.5)$$

Donde $\mathbf{R} + \mathbf{G}$ es positiva definida. ▽

A partir de la observación de la ecuación (4.5) se infiere que la convergencia del error de observación depende del conocimiento de los parámetros del modelo del MRC: las resistencias en los devanados representadas por \mathbf{R} y el coeficiente de amortiguamiento d .

Con base en la demostración de la Sección 4.1.2 se asegura la convergencia asintótica de los errores de observación, $\boldsymbol{\varepsilon} = [\tilde{\mathbf{i}}, \tilde{\omega}]$, al punto de equilibrio $\boldsymbol{\varepsilon} = 0$. i.e. se garantiza que los estados estimados convergen a los estados reales.

Se obtiene este resultado gracias a la consideración de que se conoce la posición entonces,

- se disminuye en uno el número de estados del modelo matemático de la máquina,
- se conocen también las inductancias y sus derivadas. Estas señales, como se mencionó en el capítulo anterior, determinan la conmutación de las fases.
- Sí se miden las corrientes y se conocen las inductancias, i.e. se conocen los flujos magnéticos

$$\lambda_j = L_j(\theta) i_j$$

de cada fase.

4.2. Controlador

El sistema Motor-Controlador-Observador tiene la estructura que se muestra en la Fig. 4.1,

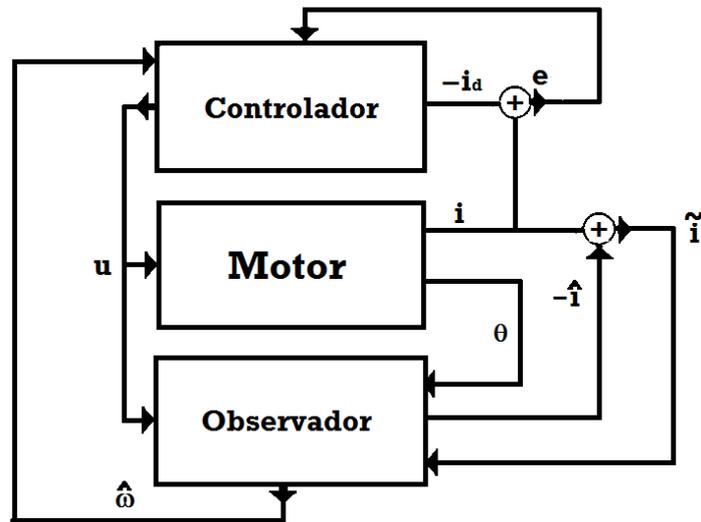


Figura 4.1: Sistema Motor-Control-Observador

El modelo de pequeña señal del MRC, es subactuado, porque la señal de control actúa sólo en el sub-sistema eléctrico, el acoplamiento entre éste y el sub-sistema mecánico se da a través del intercambio de energía entre ellos, es por esta razón que se recomienda el uso del esquema de control por cascada. En [Maya-Ortiz, 2001] se utiliza este método para hacer el control de la máquina, ya que,

- se diseña un controlador de retroalimentación de salida, *e.g.* las corrientes de fase, de tal forma que el lazo cerrado con el sub-sistema eléctrico es pasivo.
- Una vez que se asegura el seguimiento de corrientes, se diseña la forma de las corrientes deseadas, aquí el uso de las funciones de par compartido permitió definir estas corrientes deseadas de tal forma que la convergencia de corrientes implica la convergencia de par.

- El siguiente paso es definir el par deseado que asegure el control de las variables mecánicas, esta definición involucra la retroalimentación de la posición y velocidad angular.

Este es un controlador basado en pasividad que requiere la información de todo el estado, que utiliza las funciones de par compartido para conmutar las fases, con la ley de control representada por,

$$\mathbf{D}(\theta)\frac{d\mathbf{i}_d}{dt} + \omega\mathbf{C}(\theta)\mathbf{i}_d + \mathbf{R}\mathbf{i}_d - \mathbf{K}_v\mathbf{e} = \mathbf{u} \quad (4.6)$$

donde,

$$\mathbf{e} = \mathbf{i} - \mathbf{i}_d$$

y cada entrada de la matriz de ganancias \mathbf{K}_v debe cumplir con la siguiente desigualdad

$$N_r l_1 \text{sen} \left(N_r \theta - (j-1) \frac{2\pi}{3} \right) \omega + R + K_{vj} \geq \epsilon; \quad j = 1, 2, 3 \quad \text{y} \quad \epsilon > 0$$

las corrientes deseadas, \mathbf{i}_d , que por fase, tiene un comportamiento dado por,

$$i_{dj} = \begin{cases} \sqrt{2 m_j(\theta) T_d C^{-1}(\theta)} & \text{si } C(\theta) \neq 0 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

donde, T_d , es el par deseado dado por,

$$T_d = J\ddot{\theta}_d - z + T_L(\theta, \omega)$$

con

$$\dot{z} = -C_1 z + C_2 \dot{\theta} \quad \text{con} \quad z(0) = z_0$$

que define el error de seguimiento filtrado, que es utilizado para analizar la dinámica mecánica de segundo orden como si fuera de primer orden, donde C_1 y C_2 son ganancias de control positivas. En [Maya-Ortiz, 2001] se demuestra que bajo estas condiciones se asegura convergencia asintótica del error de seguimiento de velocidad a cero, con todas las señales internas acotadas, *e.g.* las corrientes deseadas.

4.2.1. Funciones de par compartido

Las funciones $m_j(\theta)$ que aparecen en la definición de las corrientes deseadas son las funciones de par compartido que se definen según lo escrito en [Taylor, 1992] como, Dados dos conjuntos

$$\Theta_j^+ = \theta : k(\theta) \geq 0 \quad \Theta_j^- = \theta : k(\theta) < 0 \quad (4.7)$$

donde los superíndices $+$ y $-$ denotan par positivo o negativo respectivamente, se escogen cualesquiera funciones m_j^+ y m_j^- tales que

$$\begin{aligned} m_j^+ > 0 \forall \theta \in \Theta_j^+; & \quad \sum_{j=1}^3 m_j^+ = 1 \forall \theta \\ m_j^- > 0 \forall \theta \in \Theta_j^-; & \quad \sum_{j=1}^3 m_j^- = 1 \forall \theta \end{aligned}$$

Entonces, estas funciones de par compartido pueden escalar cada unos de los pares de fase para generar un par deseado asignando

$$m_j(\theta) = \begin{cases} m_j^+, & T_d \geq 0 \\ m_j^-, & T_d < 0 \end{cases}$$

Esta definición deja al diseñador la libertad de expresar la estructura de las funciones de par compartido.

En este punto ya se tienen definidos el controlador y el observador que se usarán en el siguiente capítulo, donde se valida numéricamente el lazo de control.

Capítulo 5

Validación numérica del esquema de control

En este capítulo se presentan los resultados de la evaluación numérica del Observador junto con un Control Basado en Pasividad representado por (4.6).

La máquina que se simula es un MRC trifásico de 12 polos en el estator y 8 polos en el rotor cuyos datos, obtenidos de forma experimental, son:

Parámetros	Valor
R	2,2 [Ω]
J	0,09 [Kg/m^2]
N_r	8
l_0	0.052
l_1	0.0095
d	0,01 [Kgs/rad]

La matriz \mathbf{G} , de la ecuación del observador (4.2), es una matriz diagonal positiva definida, con todos sus elementos iguales. La elección de las ganancias se hizo con el fin de minimizar el error de corrientes en todas las fases, se debe recordar que esta matriz esta multiplicada por el error de estimación de las corrientes en (4.2).

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{bmatrix}$$

Los valores numéricos para las ganancias del controlador son los reportados en la tesis [Maya-Ortiz, 2001]. El análisis numérico se dividió en 6 casos que se explican a continuación, en todos los casos las condiciones iniciales del observador y del MRC son las mismas:

1. El MRC en lazo cerrado con el controlador, retroalimentación de todo el estado, regulación de velocidad. El observador conectado en lazo abierto, *i.e.* no se utilizan los valores estimados para el control. Este ejercicio sirve para mostrar que el observador se comporta de como el MRC con parámetros iguales y entradas iguales.
2. En el segundo caso, se incluye el observador en el lazo de control de regulación de velocidad, es decir se usa la velocidad estimada en el lazo de control. Tanto el MRC como el observador tienen los mismos parámetros. Se muestra que la inclusión del observador en el lazo no afecta el desempeño del sistema de control. Las señales de control no están saturadas.
3. Es el mismo caso anterior pero con las entradas de control saturadas a ± 120 [V], el desempeño del lazo de control no se ve afectado, es más los errores de estimación son menores.
4. El cuarto caso es también de regulación de velocidad, pero con par de carga diferente de cero y con una variación de las resistencias de fase del MRC.
5. El quinto caso es de seguimiento de velocidad, la referencia es sinusoidal, también se tiene una variación de las resistencias de fase del MRC y el par de carga es diferente de cero. En este ejemplo se observa que cuando la referencia cruza por cero los errores de observación aumentan.
6. El último caso es de regulación de velocidad con un cambio súbito en el par de carga, también se tiene una variación de las resistencias de fase del MRC y el par de carga es diferente de cero.

5.1. Caso 1: Referencia Constante, par de carga cero

En el primer caso se hace regulación para una referencia constante de 100 [RPM], el motor y el observador tienen los mismos parámetros y el par de carga es cero.

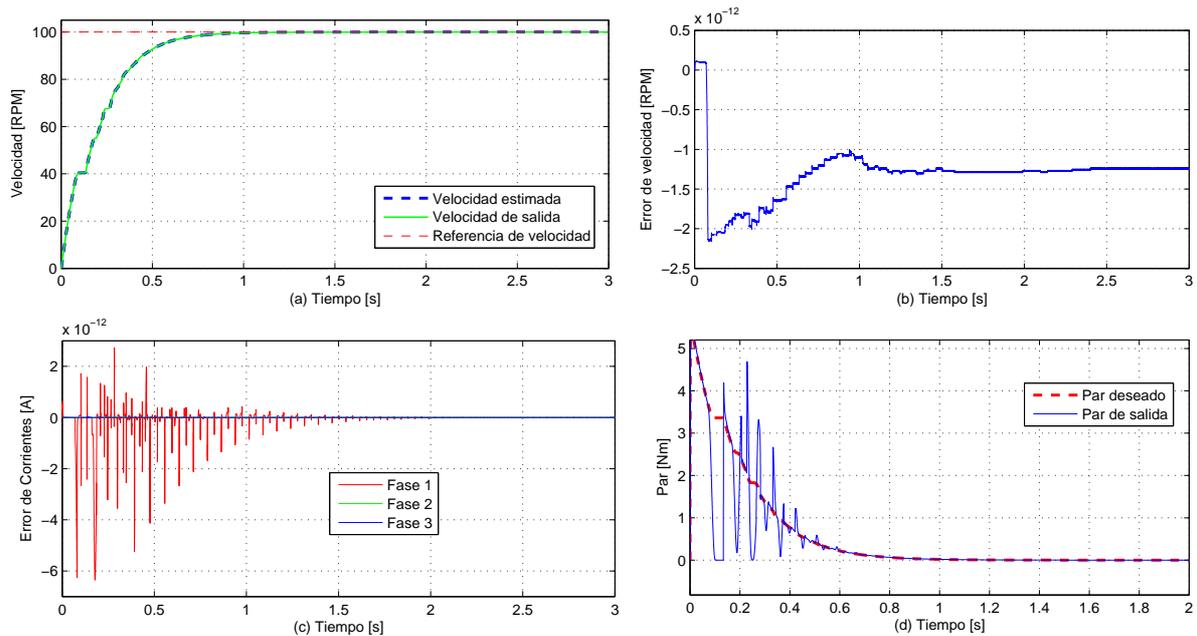


Figura 5.1: Referencia Constante de 100 RPM

En la Fig. 5.1 (a) se muestra la respuesta del motor, velocidad de salida, del observador, velocidad estimada y la referencia de velocidad. En la Fig. 5.1 (b) se muestra el error de observación de velocidad que tiende a un valor constante, aunque cercano a cero. En la Fig. 5.1 (c) se puede ver el error de corrientes de todas las fases. Por último en la Fig. 5.1 (d) se puede ver el par deseado contra el par de salida.

5.2. Caso 2: Referencia Constante, par de carga cero

En el segundo caso se hace regulación para una referencia constante de $100 [RPM]$ con el observador en lazo cerrado con el motor y el controlador, el motor y el observador tienen los mismos parámetros. El par de carga es cero.

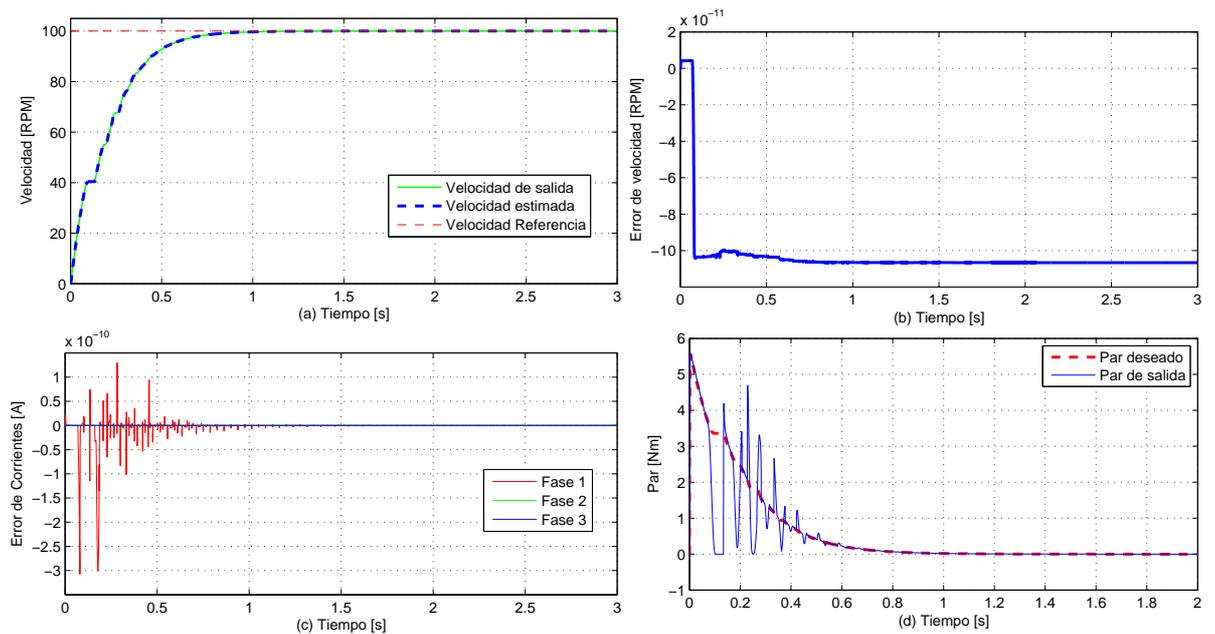


Figura 5.2: Referencia Constante de 100 RPM, par de carga cero

En la Fig. 5.2 (a) se muestra la respuesta del motor, velocidad de salida, del observador, velocidad estimada y la referencia de velocidad. En la Fig. 5.2 (b) se muestra el error de observación de velocidad que tiende a un valor constante, menor que en el caso anterior. En la Fig. 5.2 (c) se puede ver el error de corrientes de todas las fases. Por último en la Fig. 5.2 (d) se puede ver el par deseado contra el par de salida. En la Fig. 5.3 (a) se muestra la señal de control, el valor máximo del voltaje para esta máquina es de $120 [V]$, pero en este caso el control no tiene ninguna saturación y por lo tanto los voltajes de control exceden por mucho el valor máximo permitido. En cuanto a las funciones de par compartido, estas se pueden ver en la Fig. 5.3 (b), donde se aprecia la superposición de la conmutación entre fases.

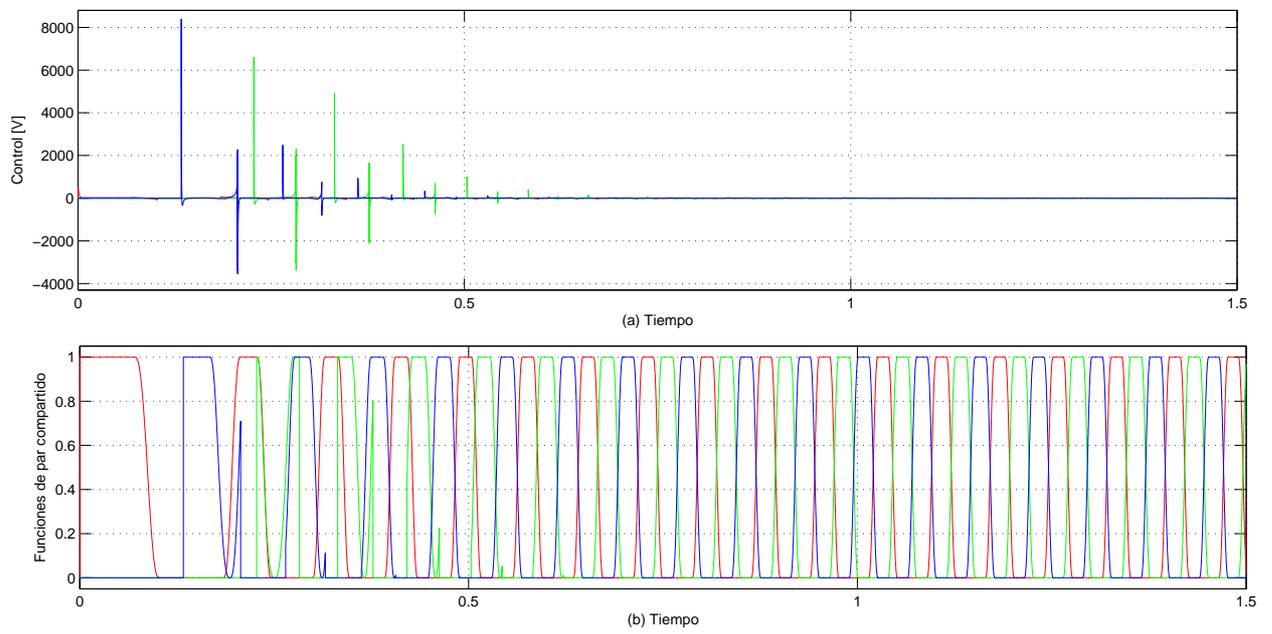


Figura 5.3: Señal de control y funciones de par compartido

5.3. Caso 3: Referencia Constante, par de carga cero, controlador saturado

En el tercer caso se repite el caso anterior pero la señal de control no puede sobrepasar los ± 120 [V].

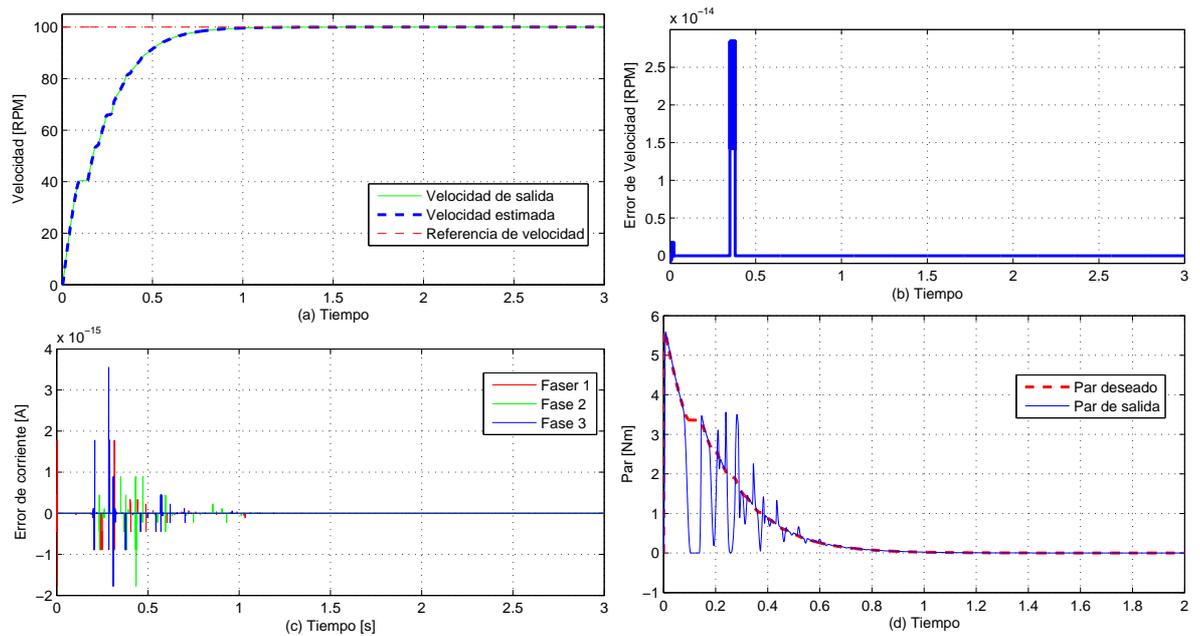


Figura 5.4: Referencia Constante de 100 RPM, par de carga cero, control saturado

En la Fig. 5.4 (a) se muestra la respuesta del motor, velocidad de salida, del observador, velocidad estimada y la referencia de velocidad. En la Fig. 5.4 (b) se muestra el error de observación de velocidad. En la Fig. 5.4 (c) se puede ver el error de corrientes de todas las fases. Por último en la Fig. 5.4 (d) se puede ver el par deseado contra el par de salida.

En la Fig. 5.5 (a) se muestra la señal de control saturado, de las figuras anteriores podemos decir que la saturar esta señal no se afectó el desempeño del lazo de control.

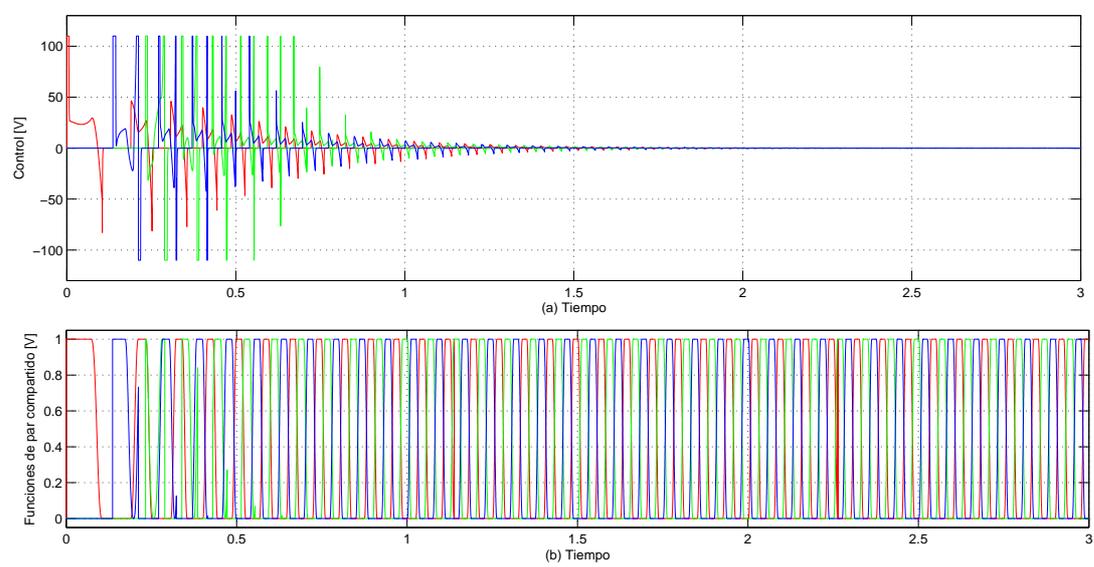


Figura 5.5: Señal de control y funciones de par compartido

5.4. Caso 4: Regulación con par de carga diferente de cero

El cuarto caso es de regulación de una referencia de $100 [RPM]$, con una resistencia 10% mayor en los devanados del motor, i. e. el observador conserva el valor de resistencia de $2,2\Omega$. El par de carga es de $0,1 [Nm]$.

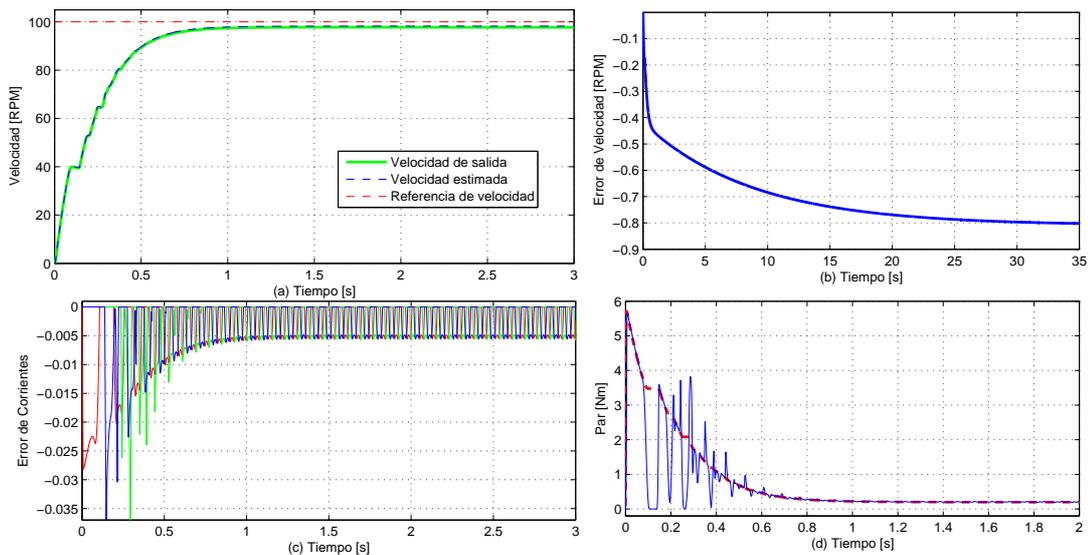


Figura 5.6: Referencia sinusoidal de 100 RPM, par de carga diferente de cero

En la Fig. 5.6 (a) se muestra la respuesta del motor, velocidad de salida, del observador, velocidad estimada y la referencia de velocidad. En la Fig. 5.6 (b) se muestra el error de observación de velocidad que llega a un valor constante de $0,8 [RPM]$ después de $35 [s]$. En la Fig. 5.6 (c) se puede ver el error de corrientes de todas las fases, que permanece constante durante toda la simulación y que es mayor que en los casos con par de carga cero. Por último en la Fig. 5.6 (d) se puede ver el par deseado contra el par de salida.

En la Fig. 5.7 (a) y (b) se muestra la señal de control saturado y las funciones de par compartido, para el intervalo de 10 a $15 [s]$.

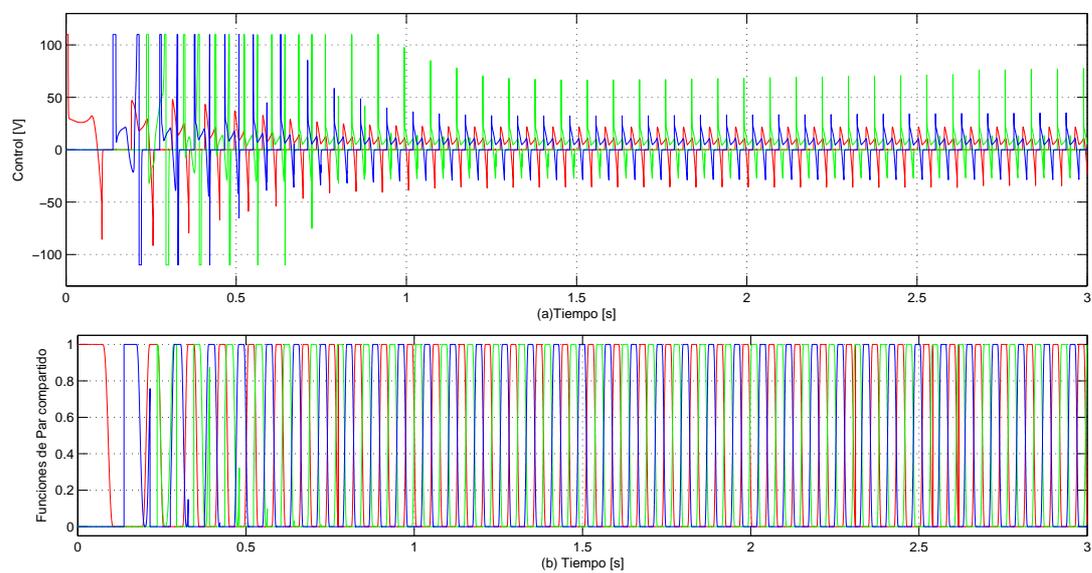


Figura 5.7: Señal de control y funciones de par compartido

5.5. Caso 5: Seguimiento con par de carga diferente de cero

El cuarto caso es de seguimiento de una referencia sinusoidal de $100 [RPM]$, con una resistencia un 10% mayor en los devanados del motor, i.e. el observador conserva el valor de resistencia de $2,2\Omega$. El par de carga es de $0,1 [Nm]$.

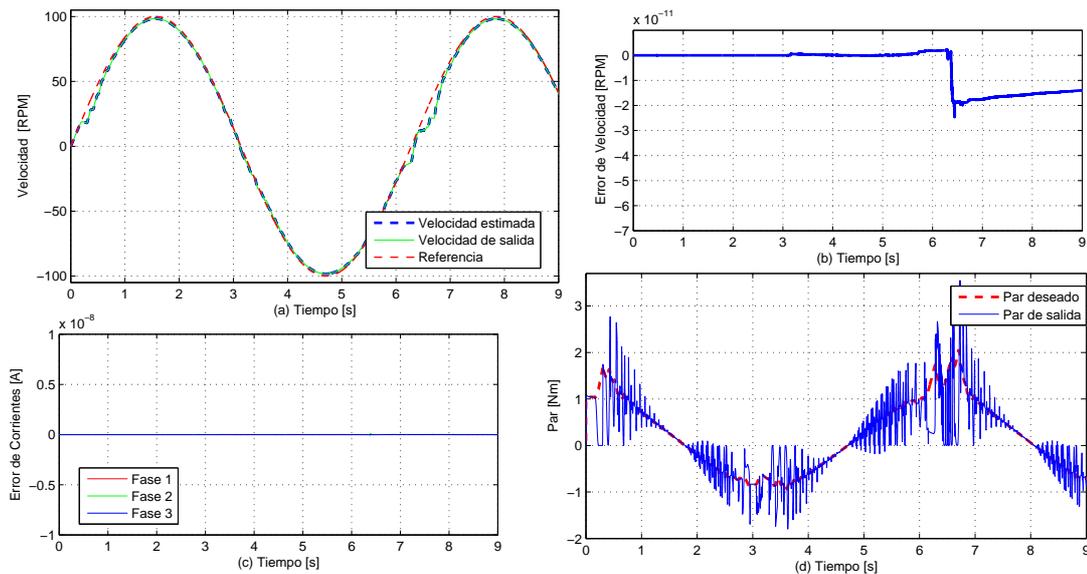


Figura 5.8: Referencia sinusoidal de 100 RPM, par de carga diferente de cero

En la Fig. 5.8 (a) se muestra la respuesta del motor, velocidad de salida, del observador, velocidad estimada y la referencia de velocidad. En la Fig. 5.8 (b) se muestra el error de observación de velocidad que aumenta en los cruces por cero. En la Fig. 5.8 (c) se puede ver el error de corrientes de todas las fases, que es mayor que en el caso de regulación. Por último en la Fig. 5.8 (d) se puede ver el par deseado contra el par de salida.

En la Fig. 5.9 (a) y (b) se muestra la señal de control saturado y las funciones de par compartido, para el intervalo de 10 a 15 [s], se aprecia como tanto el control como la funciones de par compartido se hacen cero en los cruces por cero de la referencia.

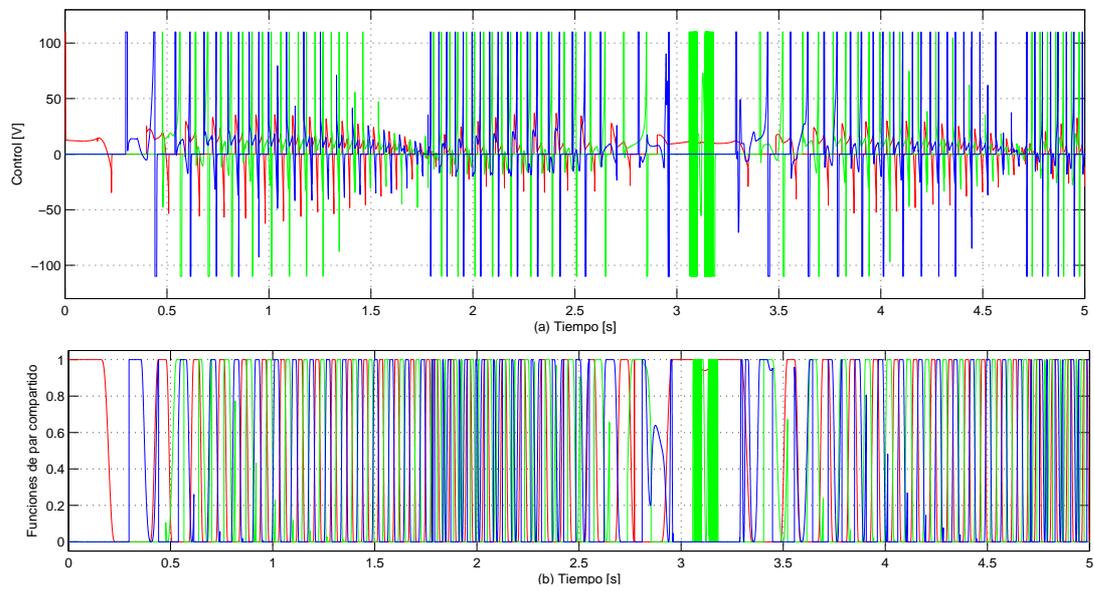


Figura 5.9: Señal de control y funciones de par compartido

5.6. Caso 6: Regulación con cambio en el par de carga

En el siguiente caso se simula la regulación de una referencia de 500 [RPM], con una resistencia un 10 % mayor en los devanados del motor. El par de carga es de 0,1 [Nm], pero varía un 10 % después de 3 [s].

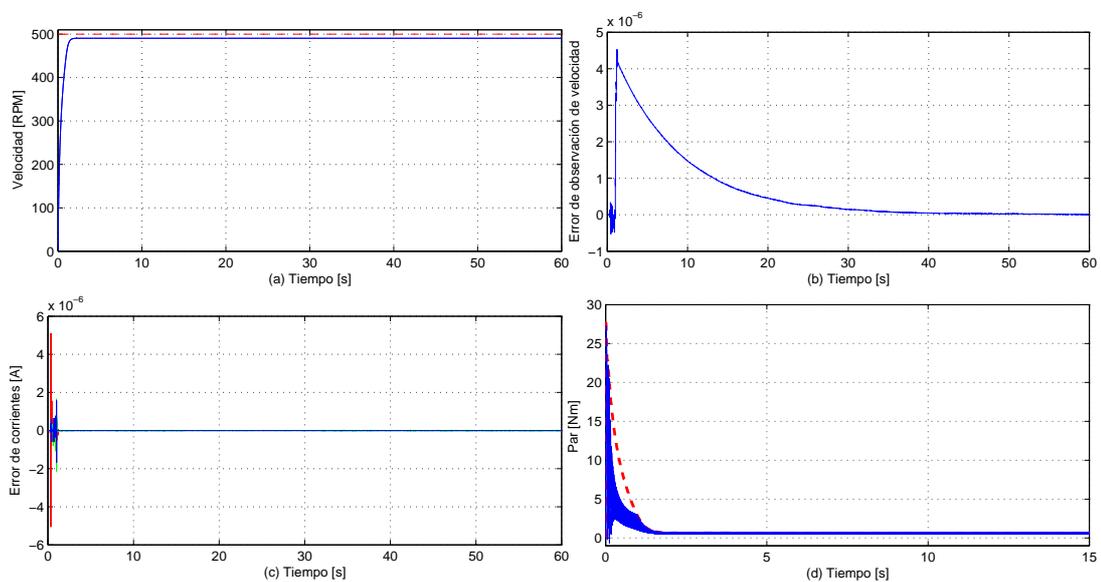


Figura 5.10: Referencia constante de 500 RPM

En la Fig. 5.10 (a) se muestra la respuesta del motor, velocidad de salida, del observador, velocidad estimada y la referencia de velocidad. En la Fig. 5.10 (b) se muestra el error de observación de velocidad. En la Fig. 5.10 (c) se puede ver el error de corrientes de todas las fases, que es mayor que en caso de regulación. Por último en la Fig. 5.10 (d) se puede ver el par deseado contra el par de salida.

En la Figura 5.11 (a) y (b) se muestra la señal de control saturado y las funciones de par compartido, para el intervalo de 10 a 15 [s], se aprecia como el esfuerzo de control se encuentra en el máximo durante toda la simulación.

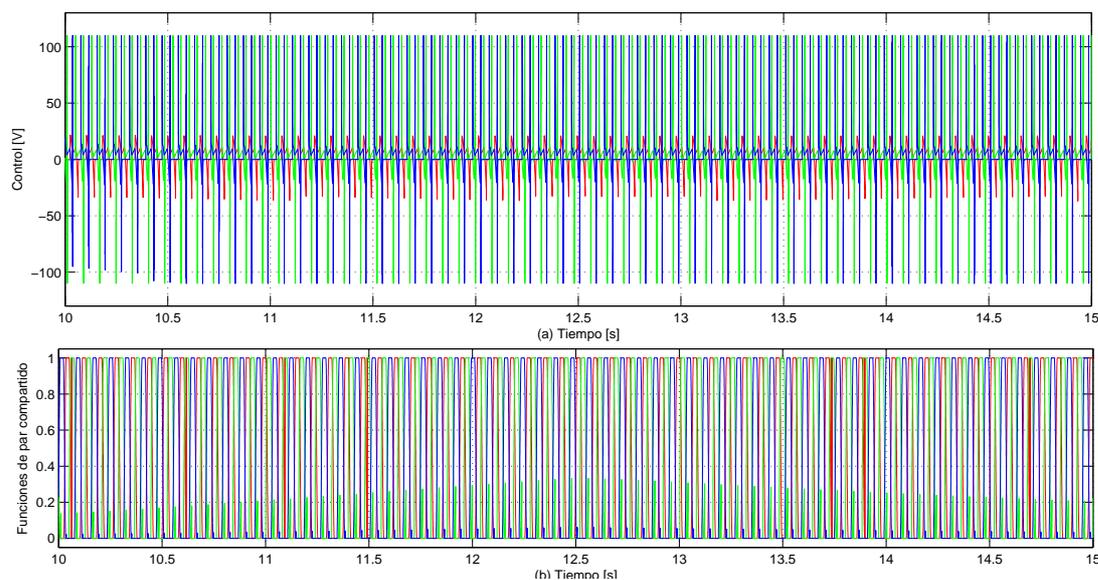


Figura 5.11: Señal de control y funciones de par compartido

5.6.1. Discusión

Cabe señalar que no se ajustaron las ganancias del observador ni del controlador aún cuando se veía un cambio en el desempeño del sistema y que las velocidades que se simularon aunque están muy por debajo de la velocidad nominal, $1500 [RPM]$, son de interés porque demuestran que la máquina puede controlarse a baja velocidad y con par de carga diferente de cero, lo que abarca varias aplicaciones.

A partir de los resultados de las simulaciones se puede decir que el lazo de control incluyendo el observador diseñado, tiene un desempeño adecuado ya que el error entre la velocidad de salida y la referencia es menor al 5% de la magnitud de la referencia, al igual que el error de estimación de velocidad, el error entre el par deseado y el par de salida también es menor al 10% y la velocidad de salida no tiene sobrepaso, cuando el observador y el MRC tienen los mismos parámetros.

Cuando se varía el valor de las resistencias de fase la respuesta muestra error en estado estacionario por lo que el esquema no es robusto ante cambios en las resistencias de fase.

En el caso de seguimiento se hace evidente que el observador tiene más error de estimación de velocidad cuando la referencia cruza por cero, esto era de esperarse dado

que del análisis de observabilidad del Capítulo 3 se sabe que el modelo matemático no es observable cuando la velocidad es cero.

Finalmente se muestra que las funciones de par compartido cumplen dos funciones importantes, la primera es disminuir el rizo en el par y velocidad de salida y el segundo asegurar la observabilidad del motor y por lo tanto la convergencia del observador.

Capítulo 6

Conclusiones

Se escriben las conclusiones con respecto a los objetivos planteados al inicio de este texto:

- Se presentó un análisis de observabilidad del que se derivaron condiciones de observabilidad para un MRC trifásico, pero que se pueden generalizar fácilmente a cualquier número de fases.
- Estas condiciones recaen directamente en el modo en que se opera la máquina, al pedir que se use un método de conmutación conocido como de par compartido.
- Es importante mencionar que la observabilidad es local, ya que el modelo matemático es no observable cuando la velocidad angular del rotor es igual a cero.
- Se diseñó un observador de orden reducido, que estima la velocidad angular de la flecha del rotor, cuando se miden corrientes y voltajes de fase y se conocen las inductancias y sus derivadas.
- En cuanto al Sistema Motor-Observador se demuestra la convergencia asintótica de los estados estimados al estado real.
- En la evaluación numérica del sistema Motor-Controlador-Observador se muestra que el desempeño es bueno (errores de menos del 15 % de la magnitud de la referencia) en un amplio intervalo de velocidades (100 a 400)[RPM] y bajo

distintas condiciones de operación, (par de carga: nulo, constante y variable), con variaciones en las resistencias de fase de hasta un 15 % y no hay sobrepaso en ninguno de los experimentos.

6.1. Aportaciones

- Se realizó un análisis de observabilidad del modelo de pequeña señal del MRC, mostrando que el uso de las funciones de par compartido además de disminuir el rizo en la velocidad angular del rotor y el par de salida, aseguran la observabilidad local del modelo.
- Este resultado además proporciona un punto de partida para el diseño de esquemas de control sin el uso de sensores de las variables mecánicas.

6.2. Trabajo Futuro

- Hacer el análisis de estabilidad del esquema de control completo, con el controlador tomado de [Maya-Ortiz, 2001].
- Hacer la validación experimental del esquema de control reportado en este trabajo.
- Hacer un análisis de Observabilidad de un modelo del MRC que incluyan el comportamiento en la región de saturación, lo que implica usar una aproximación de las inductancias que considere la saturación magnética.
- Diseñar un observador de estados que reconstruya las variables mecánicas.
- Una vez reconstruidas estas variables diseñar un estimador del par de carga.

Por último cabe mencionar que parte de este trabajo, el análisis de observabilidad del MRC, fue presentado en el Congreso Anual de la Asociación de México de Control Automático 2011.

Bibliografía

- [Ciccarella G., 1993] Ciccarella G., Dalla Mora M., G. A. (1993). A luenberger observer for nonlinear systems. *International Journal of Control*, 57:537–556.
- [De Wit C., 2000] De Wit C., Youssef A., B. J. M. P. M. F. (2000). Observability Conditions of Induction Motors at Low Frecuencies. *Proceedings of the 39* IEEE Conference on Decision and Control*, 3:2044–2049.
- [Ehsani M., 2002] Ehsani M., B. F. (2002). Elimination of position sensors in switched reluctance motor drives: State of the art and future trends. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 49:40.
- [Espinosa-Perez et al., 2002] Espinosa-Perez, G., Maya-Ortiz, P., Velasco-Villa, M., y Sira-Ramirez, H. (2002). Passivity-based control of switched reluctance motors with nonlinear magnetic circuits. In *Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control*, volume 1, pages 468 – 473 vol.1.
- [Espinosa-Pérez G. R., 2000] Espinosa-Pérez G. R., Maya-Ortiz P., V.-V. M. S.-R. H. (2000). On the Control of Switched Reluctance Motors. *Proceedings of the 2000 IEEE International Symposium on Industrial Electronics, 2000. ISIE 2000.*, 2:413–418.
- [Espinosa-Pérez G. R., 2004] Espinosa-Pérez G. R., Maya-Ortiz P., V.-V. M. S.-R. H. (2004). Passivity-based control of switched reluctance motors with nonlinear magnetic circuits. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 3:439–448.
- [Espinosa-Pérez G. R., 2005] Espinosa-Pérez G. R., Maya-Ortiz P., V.-V. M. S.-R. H.

- (2005). A note on the passivity-based control of switched reluctance motors. *Proceedings of the 16th IFAC World Congress, 2005*, 16,1.
- [Hartman W., 1994] Hartman W., Z. G. (1994). A comment on: A luenberger observer for nonlinear systems. *International Journal of Control*, 60:1401.
- [Hermann R., 1977] Hermann R., K. A. J. (1977). Nonlinear Controllability and Observability. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-22:728–740.
- [Ilic'-Spong et al., 1987] Ilic'-Spong, M., Marino, R., Peresada, S., y Taylor, D. (1987). Feedback linearizing control of switched reluctance motors. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 32(5):371 – 379.
- [Isidori, 1995] Isidori, A. (1995). *Nonlinear Control Systems*. Springer-Verlag New York, Inc., Secaucus, NJ, USA, 3rd edition.
- [Khalil, 2000] Khalil, H. K. (2000). *Nonlinear Systems*. Pearson Education, New York, 3rd edition.
- [Khalil A., 2007] Khalil A., Underwood S., H. I. K. H.-L. B. G. S. O. A. M. (2007). Four-quadrant pulse injection and sliding-mode-observer-based sensorless operation of a switched reluctance machine over entire speed range including zero speed. *IEEE Transactions on Industrial Applications*, 43:714.
- [Kingsley C. et al., 1992] Kingsley C., U. S. D., González P., V., tr., y Acevedo Pórras, S. (1992). *Máquinas Eléctricas*. McGraw-Hill, México, D. F.
- [Kreyszig, 1999] Kreyszig, E. (1999.). *Advanced Engineering Mathematics*. Wiley India,, New Delhi, 8th ed. edition.
- [Krishnan, 2001a] Krishnan, R. (2001a). Sensorless Operation of SRM Drives: R-and-D Status. *The 27th Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society IECONOL*, pages 1498 – 1503.

- [Krishnan, 2001b] Krishnan, R. (2001b). *Switched reluctance motor drives: modeling, simulation, analysis, design and applications*. Industrial Electronics series. CRC Press.
- [Long S.A., 2003] Long S.A., Schofield N., H. D. P. M. M. M. (2003). Design of a switched reluctance machine for extended speed operation. *IEEE International Electric Machines and Drives Conference, 2003. IEMDC'03*, 1:235 – 240.
- [Lumsdaine A., 1990] Lumsdaine A., J. H. L. (1990). State Observers for Variable-Reluctance Motors. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 37:133–142.
- [Maya-Ortiz, 2001] Maya-Ortiz, P. (2001). *Control Basado en Pasividad de Motores de Reluctancia Conmutada*. Universidad Nacional Autónoma de México Tesis de Maestría, México.
- [McCann Roy A., 2001] McCann Roy A., Islam Mohammad S., a. I. H. (2001). Application of a Sliding-Mode Observer for Position and Speed Estimation in Switched Reluctance Motor Drives. *IEEE Transactions on Industrial Applications*, 37:51–58.
- [Miller, 2001] Miller, T., editor (2001). *Electronic Control of Switched Reluctance Machines*. Newnes Publishers, Oxford, UK.
- [Salmasi F.R., 2001] Salmasi F.R., Fahimi B., G. H. E. M. (2001). Robust sensorless rotor position detection in switched reluctance motors for low speed applications. *IEEE 32nd Annual Power Electronics Specialists Conference, 2001*, 2:839 – 843.
- [Skogestad y Postlethwaite, 2005] Skogestad, S. y Postlethwaite, I. (2005). *Multivariable Feedback Control: Analysis and Design*. John Wiley & Sons.
- [Solsona et al., 1996] Solsona, J., Valla, M., y Muravchik, C. (1996). A nonlinear reduced order observer for permanent magnet synchronous motors. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 43(4):492 –497.
- [Taylor, 1992] Taylor, D. (1992). Pulse-width modulated control of electromechanical systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37:524–538.

- [Thau, 1973] Thau, E. (1973). Observing the state of nonlinear dynamic systems. *International Journal of Control*, 17:471–479.
- [Underwood S., 2004] Underwood S., Khalil A., H. I. K. H. L. B. G. S. O. A. (2004). Switched reluctance motor based electromechanical brake-by-wire system. *International Journal of Vehicle Autonomous Systems*, 2:278 – 296.
- [Zaltni D., 2010] Zaltni D., Naceur M., G. M. B. J. (2010). Observability analysis of PMSM. *Circuits and Systems (SCS)3rd International Conference on Signals*, page 1.