



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

**PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN  
INGENIERÍA**

**ESTIMACIÓN Y CONTROL DE ORIENTACIÓN PARA  
EL NANOSATÉLITE HUMSAT-MÉXICO**

**T E S I S**

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

**MAESTRO EN INGENIERÍA ELÉCTRICA**

INGENIERÍA ELÉCTRICA - INSTRUMENTACIÓN

P R E S E N T A:

**JOSÉ RODRIGO CÓRDOVA ALARCÓN**

TUTOR:

**DR. ESAÚ VICENTE VIVAS**

CO-ASESORES EXTERNOS:

**DR. HUGO RODRÍGUEZ CORTÉS**

**DR. MUHAMMAD YASIR**

**JURADO ASIGNADO:**

Presidente: Dr. Lara Rosano Felipe de Jesús  
Secretario: Dra. Velasco Herrera Graciela  
Vocal: Dr. Vicente Vivas Esau  
1er Suplente: Dra. Baydyk Mykolaivna Tetyana  
2do Suplente: Dr. Kussul Ernst Mikhailovich

Lugares donde se realizó la tesis:

INSTITUTO DE INGENIERÍA, UNAM, MEXICO

SECCIÓN DE MECATRÓNICA, CINVESTAV-IPN, MEXICO

INSTITUTO DE SISTEMAS ESPACIALES IRS, UNIVERSIDAD DE STUTTGART, ALEMANIA

**TUTOR DE TESIS:**

DR. ESAÚ VICENTE VIVAS

---

**FIRMA**

## Resumen

Para abordar el tema de estabilización satelital, se realizó un estudio de las condiciones que rodean a un satélite a lo largo de su órbita para establecer un procedimiento que permita el desarrollo de algoritmos de estimación y control de orientación, así como el estudio de actuadores y sensores que serán utilizados en este proyecto. Esto implicó el desarrollo de modelos matemáticos que describen la dinámica de un satélite y su evolución en una órbita definida que permitirá seleccionar los actuadores, así como determinar los parámetros de control.

Actualmente el Instituto de Ingeniería UNAM (IINGEN-UNAM) no cuenta con una plataforma experimental que permita la validación de algoritmos de control y de estimación de orientación satelital, por lo que primeramente se diseñaron algoritmos de estimación de la orientación de un cuerpo basados tanto en métodos estadísticos (TRIAD y Gauss-Newton por ejemplo) como en métodos analíticos como el Filtro de Kalman Extendido (EKF). Para ello se empleó una unidad de medición inercial (IMU) del Centro de Investigación y Estudios Avanzados CINVESTAV, la cual contiene sensores de referencia inercial similares a los de un satélite. La IMU contiene un software dedicado que permite calcular su orientación en tiempo real; estos cálculos se utilizaron para compararlos con los resultados de los algoritmos diseñados en esta tesis.

Posteriormente, se llevó a cabo el diseño y evaluación de algoritmos de estimación de orientación basados en el EKF para el microsatélite Flying Laptop (FLP), de tal manera que se garantizara la integridad de su carga útil, evitando una exposición prolongada de los rayos del Sol. En esta fase de trabajo se empleó un simulador desarrollado por el IRS que contiene la caracterización de sensores y actuadores utilizados en el hardware de estabilización satelital. La experiencia obtenida se derivó de una estancia académica de trabajo en el Instituto de Sistemas Espaciales (IRS) de la Universidad de Stuttgart, Alemania, efectuada en el transcurso del tercer semestre del programa de Maestría en Ingeniería en la UNAM.

Estos algoritmos de estimación compensan los cambios producidos ya sea por la luz solar o por su ausencia (eclipse) por lo cual la estructura del algoritmo se basa en el empleo de dos EKF. Ello obedece a que no está disponible en todo momento la información de los sensores de sol. Con base en estos resultados, se diseñó un simulador satelital virtual que contiene la dinámica del nanosatélite HumSat-México. Con él se pueden evaluar los parámetros asociados a los algoritmos de estimación de orientación satelital de acuerdo con los sensores y actuadores que serán utilizados en esta misión satelital.

Esta metodología es muy importante para transferir resultados al esquema de estabilización y control del nanosatélite HumSat-México que actualmente desarrolla el IINGEN-UNAM.

Como trabajo futuro y en investigación subsecuente a esta tesis, los resultados que se alcanzaron serán validados experimentalmente por medio de una plataforma suspendida en aire (el medio más parecido y económico para simular en la Tierra la ausencia de fricción espacial), que tendrá la instrumentación de la misión HumSat-México (computadora, ruedas inerciales, bobinas de torque magnético, IMU, baterías, comunicaciones inalámbricas, etc.). A partir de ello se generarán los algoritmos finales de estabilización y control de apuntamiento que serán integrados en una instrumentación reconfigurable e inteligente basada en dispositivos FPGA (que a su vez constituye otro tema de tesis de posgrado).

## Abstract

To address the satellite attitude control subject, an analysis of the orbital conditions during the satellite flight has been performed to state a procedure that allows the development of attitude determination and control algorithms, as well as the analysis of the actuators and sensors used in this project. That implied the development of mathematical models, which describe the satellite dynamics and its flight in a defined orbit. This process will allow the selection of the satellite actuators and sensors, as well as the adjustment of control parameters.

Actually the Engineering Institute, National Autonomous University of Mexico (IINGEN-UNAM) has not an experimental platform for evaluation and validation of satellite attitude determination and control algorithms. In this regard, it has been designed attitude determination algorithms of a body based on statistical methods (e.g. TRIAD and Gauss-Newton) and analytical methods such as the Extended Kalman Filter. An Inertial Measurement Unit (IMU) provided by the Research and Advanced Studies Center, National Polytechnic Institute (CINVESTAV-IPN) was used to perform the required tests. The IMU contains inertial reference sensors similar to those used on a satellite system. The IMU contains a dedicate software which allows real-time attitude computation of a body, whose results were used to compare them with the computations obtained from the algorithms designed in this thesis.

Subsequently, the author has performed the design and evaluation of attitude estimation algorithms based on a EKF for the microsatellite Flying Laptop (FLP), in such a way that its sensitive payload integrity was ensured, avoiding long exposition to Sun radiation exposition. During this research phase, the IRS simulator was used, which contains the sensor and actuator characterization used in the FLP attitude control system. The obtained experience was derived from a research stay in the Institute of Space Systems (IRS), Stuttgart University, Germany, in the third semester of the UNAM Master of Engineering program.

Those algorithms compensate the sun and eclipse phases, so the algorithm architecture is based on two EKF because the sun sensors information is not always available. Based on these results, a satellite virtual simulator was designed which contains the HumSat-Mexico nanosatellite dynamics. With this tool, the parameters associated with the attitude determination algorithms can be evaluated according to the satellite sensors and actuators as well as with the satellite mission objectives.

This methodology is very important to transfer results to the attitude determination and control scheme for the HumSat-Mexico nanosatellite which is being designed at IINGEN-UNAM.

In a further research (elaborated in other posgraduate thesis under the same project), the achieved results will be experimentally validated through a test-bed based on a air bearing platform (the simplest and economic way in Earth to simulate friction-less conditions in space), which will have the instruments of the HumSat-Mexico mission (flight computer, reaction wheels, magnetic torque bars, IMU, batteries, wireless communications and so on). From the obtained results, the final attitude control scheme will be generated and integrated into a smart and reconfigurable instrumentation based on FPGA devices.

---

# CONTENIDO

---

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>1</b>
1.1	Importancia del Sistema de Control de Orientación Satelital . . . . .	2
1.2	Tipos de Control de Orientación en Satélites Pequeños . . . . .	5
1.3	Proyectos Satelitales en México . . . . .	7
1.3.1	Antecedentes de proyectos satelitales nacionales . . . . .	7
1.3.2	SATEDU . . . . .	9
1.3.3	HumSat-México . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Hardware de Estabilización Satelital</b>	<b>12</b>
2.1	Sensores . . . . .	12
2.2	Actuadores . . . . .	16
<b>3</b>	<b>Modelado Matemático del Satélite y Entorno Espacial</b>	<b>17</b>
3.1	Modelo de la Órbita del Satélite . . . . .	17
3.1.1	Tipos de Órbitas . . . . .	17
3.1.2	Parámetros Orbitales . . . . .	20
3.1.3	Ecuación Diferencial de la Órbita . . . . .	20
3.2	Representación de la Orientación de un Cuerpo . . . . .	21
3.2.1	Ángulos de Euler . . . . .	21
3.2.2	Cuaterniones Unitarios . . . . .	22
3.2.3	Matriz de Rotación . . . . .	23
3.3	Dinámica del Satélite en el Espacio . . . . .	24
3.3.1	Dinámica de Cuerpo Rígido . . . . .	24
3.3.2	Cinemática . . . . .	26
3.4	Campo Magnético Terrestre . . . . .	27
3.5	Vector de Sol . . . . .	28
3.6	Principales Perturbaciones Espaciales . . . . .	32
3.6.1	Pares de Origen Magnético . . . . .	32
3.6.2	Pares de Origen Gravitacional . . . . .	32
3.6.3	Pares de Origen Aerodinámico . . . . .	33
<b>4</b>	<b>Modelado de Sensores y Actuadores</b>	<b>34</b>
4.1	Sensores . . . . .	34
4.1.1	Magnetómetro . . . . .	34
4.1.2	Acelerómetro . . . . .	35
4.1.3	Sensores de Sol . . . . .	36
4.1.4	Sensor de Estrellas . . . . .	36
4.1.5	Receptor GPS . . . . .	37

4.1.6	Giróscopos . . . . .	38
4.2	Actuadores . . . . .	39
4.2.1	Bobinas de Par Magnético . . . . .	39
4.2.2	Ruedas Inerciales . . . . .	40
<b>5</b>	<b>Estimación y Control de Orientación</b>	<b>46</b>
5.1	Algoritmos de Estimación Determinísticos . . . . .	46
5.1.1	Método TRIAD . . . . .	47
5.1.2	Método Gauss-Newton . . . . .	47
5.2	Algoritmos de Estimación Analíticos . . . . .	48
5.2.1	Filtro de Kalman Extendido Discreto . . . . .	48
5.2.2	Filtro de Kalman Extendido Continuo . . . . .	49
5.3	Algoritmos de Control de Orientación . . . . .	50
5.3.1	Control de Velocidad . . . . .	50
5.3.2	Control de Velocidad en dos Ejes Usando un Sensor de Referencia Inercial . . . . .	51
5.3.3	Control de Orientación en dos Ejes . . . . .	51
5.3.4	Control de Orientación en tres Ejes . . . . .	52
<b>6</b>	<b>Estimación de la Orientación por medio de una IMU</b>	<b>55</b>
6.1	Descripción del Escenario. . . . .	55
6.2	Algoritmo de Estimación basado en el CEKF . . . . .	56
6.3	Resultados . . . . .	57
<b>7</b>	<b>Estimación de la Orientación del Microsatélite IRS–FLP</b>	<b>64</b>
7.1	El Microsatélite IRS– <i>Flying Laptop</i> . . . . .	64
7.2	El Sistema de Control de Orientación del FLP . . . . .	64
7.2.1	The ACS hardware . . . . .	65
7.2.2	Modos de Control del ACS . . . . .	65
7.2.3	Solución del modelo ACS en modo seguro . . . . .	66
7.3	Algoritmo de Estimación basado en el EKF . . . . .	67
7.3.1	EKF en fase de Sol . . . . .	70
7.3.2	EKF en fase de eclipse . . . . .	71
7.3.3	Nuevo esquema de control basado en el EKF para el FLP en modo seguro de operación . . . . .	72
7.4	Resultados . . . . .	73
<b>8</b>	<b>Integración de Resultados al proyecto HumSat-México</b>	<b>76</b>
8.1	Modelo Virtual para la Visualización de Resultados . . . . .	76
8.2	Órbita del Nanosatélite HumSat-México . . . . .	77
8.3	Esquema de Control Propuesto para el Nanosatélite HumSat-México . . . . .	79
8.3.1	Determinación de la Orientación . . . . .	80
8.3.2	Control de Orientación . . . . .	81
8.4	Resultados de Simulaciones . . . . .	83

<b>9</b>	<b>Conclusiones y Recomendaciones</b>	<b>87</b>
9.1	Resultados Globales . . . . .	87
9.2	Conclusiones . . . . .	87
9.3	Recomendaciones . . . . .	88
<b>A</b>	<b>Sistemas Coordinados de Referencia</b>	<b>92</b>
A.1	Sistema coordinado inercial con centro en la Tierra $\mathcal{S}^I$ . . . . .	92
A.2	Sistema coordinado fijo a la Tierra con centro en la Tierra $\mathcal{S}^E$ . . . . .	92
A.3	Sistema coordinado Orbital con centro en la Tierra $\mathcal{S}^{OE}$ . . . . .	93
A.4	Sistema coordinado Orbital $\mathcal{S}^O$ . . . . .	93
A.5	Sistema coordinado fijo al satélite $\mathcal{S}^B$ . . . . .	93
<b>B</b>	<b>Lista de Valores para el Modelo del Sol</b>	<b>94</b>

---

# LISTA DE FIGURAS

---

1.1	Orientación de un vehículo espacial. . . . .	2
1.2	Izquierda: Intelsat VI, estabilizado por un giro constante dual. Derecha: Intelsat 12, estabilizado en tres ejes . . . . .	3
1.3	Izquierda: Satélite Landsat-7. Centro: Satélite SPOT-5. Derecha: Satélite Radarsat. . . . .	4
1.4	Izquierda: Satélite del Sistema GPS. Derecha: Satélite del Sistema GLONASS. . . . .	5
1.5	Representación del microsátélite Satex. . . . .	8
1.6	El Satélite Educativo SATEDU. . . . .	9
2.1	Dependencia del ángulo de incidencia de la luz del Sol con la corriente de salida de la fotocelda. Se obtiene mayor corriente cuando el ángulo entre el haz de luz y el vector normal al plano de la fotocelda es pequeño. . . . .	13
2.2	Diagrama de un sensor de Sol digital. . . . .	14
2.3	Geometría de un Giróscopo de un Grado de Libertad. . . . .	15
2.4	Diseño conceptual de un Giróscopo de Fibra Óptica. . . . .	15
3.1	Clasificación de órbitas por altura. . . . .	18
3.2	Clasificación de órbitas por excentricidad. . . . .	18
3.3	Clasificación de órbitas por inclinación. a) Progrado, b) Retrogrado, c) Polar, d) Ecuatorial. . . . .	19
3.4	Órbita SSO. . . . .	20
3.5	Definición de los parámetros de una órbita. Plano orbital (izquierda). Espacio 3D (derecha). . . . .	20
3.6	Visualización de la rotación de un eje coordenado. . . . .	22
3.7	Parametrización de la orientación de un cuerpo rígido. . . . .	23
3.8	Sistemas coordenados de referencia. . . . .	25
4.1	Magnetómetro SparkFun de tres ejes (25.4 x 25.4 x 19 mm). . . . .	35
4.2	Acelerómetro ADXL330 en tres ejes con un microcontrolador AVR. . . . .	35
4.3	Sensores finos de Sol TNO, utilizado en diversas misiones en órbitas LEO. . . . .	36
4.4	Sensor de estrellas Comtech AeroAstro miniaturizado de 375 gramos. . . . .	37
4.5	Módulo Receptor GPS Parallax. . . . .	38
4.6	Giróscopo SparkFun SEN-00741. . . . .	39
4.7	Bobinas de par magnético Microcosm. . . . .	39
4.8	Rueda Inercial para satélites pequeños RW90 de Astro und Feinwerktechnik Adlershof GmbH. . . . .	40
4.9	Sistemas coordenados de referencia. . . . .	41
4.10	Orientación de las ruedas inerciales. . . . .	42
4.11	Sistema Coordinado de la Rueda Inercial. . . . .	42
5.1	Filtro de Kalman Extendido Discreto. . . . .	49
6.1	Unidad de medición inercial Xsens-MTi y su sistema coordenado local. . . . .	55

6.2	Sistema coordinado de referencia de la IMU Xsens. . . . .	56
6.3	Proceso de estimación basado en el CEKF. . . . .	57
6.4	Dirigible del departamento de mecatrónica del CINVESTAV-IPN. . . . .	58
6.5	Modelos de realidad virtual del experimento 1 (izquierda) y del experimento 2 (derecha). . . . .	59
6.6	Experimento 1. Vector de campo magnético (arriba) y vector de gravedad (abajo). . . . .	60
6.7	Experimento 1. Orientación del dirigible expresado en cuaterniones unitarios. Cuaternión obtenido por el algoritmo de estimación propuesto(arriba) y cuaternión obtenido del software de la IMU (abajo). . . . .	61
6.8	Experimento 2. Vector de campo magnético (arriba) y vector de gravedad (abajo). . . . .	62
6.9	Experimento 2. Orientación de la IMU en movimiento libre expresado en cuaterniones unitarios. Cuaternión obtenido por el algoritmo de estimación propuesto(arriba) y cuaternión obtenido del software de la IMU (abajo). . . . .	63
7.1	El microsatélite IRS Flying Laptop (izquierda) y su órbita síncrona con el Sol (derecha). . . . .	65
7.2	Hardware del ACS del FLP. . . . .	67
7.3	Modalidades de Control del FLP. . . . .	68
7.4	Esquema de control del FLP (TC = Telecomando, FDIR = Detección de falla, aislamiento y recuperación). . . . .	69
7.5	El Filtro de Kalman Extendido del FLP. . . . .	71
7.6	Nuevo esquema de control para el modo seguro de operación. . . . .	72
7.7	Estimación del vector de Sol, con el comando de control desactivado. . . . .	74
7.8	Estimación de la velocidad angular, con el comando de control desactivado. . . . .	75
7.9	Estimación del vector de Sol utilizando FOGs, con el comando de control desactivado. . . . .	75
8.1	Diagrama del simulador de vuelo para el nanosatélite HumSat-México. . . . .	76
8.2	Vista del modelo virtual para el simulador de vuelo del nanosatélite HumSat-México, donde se puede observar al satélite pasando sobre el polo Norte. . . . .	77
8.3	Simulación de la órbita SSO del nanosatélite HumSat-México. . . . .	78
8.4	Cobertura del nanosatélite HumSat-México en la Tierra. . . . .	78
8.5	Esquema de control del HumSat-México. . . . .	79
8.6	Diagrama del algoritmo de estimación del HumSat-México. . . . .	80
8.7	Filtro de Kalman Extendido Discreto para estimar la orientación del nanosatélite HumSat-México. . . . .	81
8.8	Visualización de la alineación de los paneles solares con el Sol. . . . .	82
8.9	Visualización del comando de apuntamiento hacia el nadir terrestre en diferentes perspectivas. . . . .	82
8.10	Secuencia de la visualización del modo de seguimiento de una estación terrena. . . . .	83
8.11	Desempeño del esquema de control para el apuntamiento al Sol. . . . .	85
8.12	Desempeño del esquema de control para el apuntamiento hacia el nadir terrestre. . . . .	86
8.13	Desempeño del esquema de control para el apuntamiento hacia una estación terrena. . . . .	86
A.1	Sistemas coordinados con centro en la Tierra $\mathcal{S}^I$ y $\mathcal{S}^E$ (izquierda), Sistemas coordinados orbital y cuerpo del satélite $\mathcal{S}^{OE}$ (línea roja), $\mathcal{S}^O$ y $\mathcal{S}^B$ (derecha). . . . .	92

---

# LISTA DE TABLAS

---

1.1	Métodos de Control de Orientación y Capacidades . . . . .	6
3.1	Parámetros orbitales . . . . .	21
6.1	Posición global del experimento. . . . .	58
6.2	Parámetros Sintonizados. . . . .	59
7.1	Sensores y actuadores del ACS del FLP. . . . .	66
7.2	Parámetros iniciales del simulador. . . . .	73
7.3	Parámetros sintonizados del algoritmo de estimación del FLP. . . . .	73
8.1	Parámetros de la órbita SSO del nanosatélite HumSat-México. . . . .	77
8.2	Parámetros del satélite. . . . .	84
8.3	Parámetros iniciales de la simulación. . . . .	84
B.1	Términos periódicos de la Tierra. . . . .	94
B.2	Términos periódicos para la nutación en longitud y oblicuidad. . . . .	99

---

# LISTA DE ABREVIATURAS

---

$\mathcal{S}^B$	Sistema Coordinado fijo al Cuerpo del Satélite	23, 24, 32, 34– 36, 38, 39, 48, 69, 70
$\mathcal{S}^E$	Sistema Coordinado Fijo a la Tierra con centro en la Tierra	27, 31, 33–36, 69, 70
$\mathcal{S}^I$	Sistema Coordinado Fijo Inercialmente con Centro en la Tierra	23–25, 35–39, 71
$\mathcal{S}^O$	Sistema Coordinado Orbital	32, 48
$\mathcal{S}^W$	Sistema Coordinado de la Rueda Inercial	38, 39
ACS	<i>Attitude Control System</i>	1, 2, 4, 10, 15, 62–65, 71
ADCS	<i>Attitude Determination and Control System</i>	1, 2
BTM	<i>Magnetic Torquer Bar</i>	6–8, 38, 64, 65
CCD	<i>Charge-Coupled Device</i>	13
CEKF	<i>Continuous Extended Kalman Filter</i>	51, 53– 55
CINVESTAV-IPN	Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional	1
CMG	<i>Control Moment Gyro</i>	5, 9
DCM	<i>Direction Cosine Matrix</i>	27
DEKF	<i>Discrete Extended Kalman Filter</i>	51, 53
DLR	<i>Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt (German Aerospace Center)</i>	64
DTU	<i>Danmarks Tekniske Universitet (Technical University of Denmark)</i>	64

eEKF	<i>Eclipse Extended Kalman Filter</i>	66, 68
EKF	<i>Extended Kalman Filter</i>	51, 52, 55, 56, 66–68, 70
FLP	<i>Microsatélite Flying Laptop</i>	62–64, 66–68, 70, 71, 73
FOG	<i>Fiber Optic Gyros</i>	14, 62, 64, 65, 73
FPGA	<i>Field Programmable Gate Array</i>	1, 63
GENSO	<i>Global Educational Network for Satellite Operations</i>	8
GEO	<i>Geosynchronous Earth Orbit</i>	16, 17
GLONASS	<i>Global Navigation Satellite System</i>	3, 4, 17
GPS	<i>Global Position System</i>	3, 4, 17, 33, 36, 37, 64, 65
GSOC	<i>Deutsches Raumfahrt-Kontrollzentrum (German Space Operations Center)</i>	64
IAGA	<i>International Association of Geomagnetism and Aeronomy</i>	26
IGRF	<i>International Geomagnetic Reference Field</i>	26
IMU	<i>Inertial Measurement Unit</i>	1, 54– 58
IRS	<i>Institut für Raumfahrtsysteme (Institute of Space Systems), Universität Stuttgart</i>	62
LEO	<i>Low Earth Orbit</i>	16–18
LITEF	<i>Litton Technische Werke Freiburg GmbH</i>	64
LTDN	<i>Local Time of Descending Node</i>	62, 71
MEMS	<i>Microelectromechanical Systems</i>	11
MEO	<i>Medium Earth Orbit</i>	16, 17
NED	<i>Sistema coordenado North-East-Down</i>	27, 31, 34

RSPDEES	Realimentación de la Salida Pasiva de la Dinámica Exacta de Error de Seguimiento	48
sEKF	<i>Sun Extended Kalman Filter</i>	66, 68, 70
SSO	<i>Sun Synchronous Orbit</i>	18, 62, 71
TRIAD	<i>Three Axis Determination</i>	50
UTC	<i>Universal Time Coordinated</i>	37

---

# CAPÍTULO 1

## INTRODUCCIÓN

---

En el área aeroespacial, la tecnología de estabilización es de gran importancia, ya que permite la navegación de vehículos espaciales y la realización de maniobras que garanticen el éxito en una misión. En el campo de los satélites, la tecnología de estabilización abre paso al desarrollo de plataformas satelitales de mayor complejidad y aplicabilidad, de ahí su importancia para cristalizar éxitos nacionales en materia de investigación científica, telecomunicaciones, percepción remota y seguridad nacional.

En México se tienen experiencias en el desarrollo de proyectos espaciales, pero aún no hemos alcanzado los resultados que podrían impulsar el desarrollo nacional de tecnologías de aplicación espacial, particularmente en satélites artificiales, y como consecuencia, la tecnología de estabilización satelital no se ha desarrollado aún, la cual permitiría la consolidación de este tipo de proyectos en beneficio de nuestro país.

A nivel mundial, se han desarrollado diferentes técnicas de estabilización en misiones satelitales por medio de métodos pasivos y activos; los primeros, aprovechando la dinámica del entorno espacial como la gravedad o el campo magnético y los segundos estableciendo maniobras programadas para un fin especial. En estabilización activa, que es el tema central de este proyecto de tesis, se emplean sensores y actuadores dedicados, así como esquemas de control que permiten el cómputo de la orientación del satélite y maniobras de control. Entender y utilizar esta tecnología, abre paso al desarrollo de sistemas de navegación y control de vehículos espaciales, logrando una autosuficiencia tecnológica a nivel nacional.

En esta tesis se estudiaron y desarrollaron algoritmos de estimación y control de orientación de satélites pequeños, los cuales permitirán al nanosatélite HumSat-México<sup>1</sup>, la ejecución de tareas científicas para las cuales fue diseñado. Estos algoritmos fueron evaluados y validados numéricamente mediante un simulador que recrea las condiciones a las que el nanosatélite HumSat-México estará sometido durante su vuelo orbital. Como resultado, se pueden estimar los requerimientos y parámetros de diseño del hardware del sistema de determinación y control de orientación (ADCS) del nanosatélite HumSat-México.

En el capítulo 1 se da una breve introducción al control de orientación de vehículos espaciales y se describe la necesidad de utilizar esta tecnología para la realización de tareas científicas en proyectos de interés nacional. El capítulo 2 está dedicado a la descripción breve de la tecnología utilizada en sensores y actuadores que conforman el ADCS en un vehículo espacial y que se han utilizado en misiones espaciales exitosas. En el capítulo 3 se mencionan los modelos matemáticos que describen la dinámica de un satélite en órbita, así como algunas de las condiciones ambientales a las que un satélite está sometido en el espacio exterior. Para simular la lectura de los sensores y actuadores que integran el ADCS de un satélite, el capítulo 4 contiene el principio básico para modelarlos matemáticamente. En el capítulo 5 se

---

<sup>1</sup>Humanitary Satellite Network Project. [www.humsat.org](http://www.humsat.org)

hace una recopilación de los algoritmos de control y estimación de la orientación estudiados durante el desarrollo del proyecto HumSat-México. En el capítulo 6 se recopilan los resultados del diseño y evaluación de desempeño de un algoritmo de estimación basado en el filtro de Kalman, realizando algunas mediciones con los sensores de una unidad de medición inercial IMU de marca *Xsens* proporcionada por el Departamento de Mecatrónica del CINVESTAV-IPN. Como resultado de una estancia de investigación en el Instituto de Sistemas Espaciales de la Universidad de Stuttgart, Alemania, en el capítulo 7 se mencionan los resultados del diseño y evaluación numérica de un algoritmo de estimación basado en el filtro de Kalman. Este filtro se realizó para la modalidad de *operación segura* del microsatélite *Flying Laptop*, como parte de su sistema de control de orientación (ACS) basado en un dispositivo FPGA, utilizando un simulador de vuelo que integra la caracterización de sus sensores, actuadores y el hardware del ACS del microsatélite *Flying Laptop*. De las experiencias adquiridas, se propone un esquema de control para el nanosatélite HumSat-México, que se menciona en el capítulo 8, el cual podrá ejecutar tareas de observación científica y transmisión de datos. Así mismo, se reportan algunos avances que se han logrado en el diseño conceptual y desarrollo del sistema ADCS del nanosatélite HumSat-México, como producto de esta investigación, cerrando con las conclusiones obtenidas en esta investigación y algunas recomendaciones, mencionadas en el capítulo 9.

## 1.1 Importancia del Sistema de Control de Orientación Satelital

La orientación de un vehículo espacial puede definirse como la relación entre sus ejes coordenados y un sistema coordenado inercial. Comúnmente esta relación se describe por los ángulos *roll*, *pitch* y *yaw*. El sistema coordenado inercial usado frecuentemente es mostrado en la figura 1.1, donde el vector  $+X$  es paralelo al vector de velocidad del vehículo espacial, los vectores  $+X$  y  $+Z$  están contenidos en el plano de la órbita, el vector  $+Y$  es perpendicular al plano de la órbita y el vector  $+Z$  es opuesto al vector de gravedad [1].

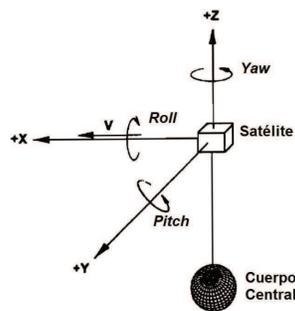


Figura 1.1: Orientación de un vehículo espacial.

Dentro de los subsistemas que conforman un satélite, el subsistema de control de orientación ACS es uno de los más complejos y redituables para desarrollar satélites de alta utilidad para la sociedad. Actualmente, la mayoría de los satélites en órbita poseen una o varias cargas útiles que requieren un control de apuntamiento. Las dos sondas espaciales *Voyager* que conforman sistemas totalmente parecidos a los satélites y que condujeron misiones hacia los planetas exteriores excepto Plutón, tuvieron un sistema de estabilización en tres ejes que permitieron obtener imágenes de alta resolución de Júpiter y sus satélites, Saturno, Titán y sus anillos, así como los sistemas de Urano y Neptuno. El telescopio espacial *Hubble* tiene un sofisticado sistema de estabilización en tres ejes, ya que la precisión es muy importante para la astronomía. Finalmente, el esfuerzo de colocar exploradores sobre la superficie de Marte dentro del

## 1.1. IMPORTANCIA DEL SISTEMA DE CONTROL DE ORIENTACIÓN SATELITAL

programa *Viking* requirió un sistema de estabilización en tres ejes, [2], [3].

### Satélites de Comunicaciones

Los satélites de comunicaciones tienen dos tipos fundamentales de diseño. Uno de ellos es el satélite estabilizado por medio de un giro constante, mejor conocido como *spinner*, y el otro es el satélite estabilizado en tres ejes (figura 1.2).

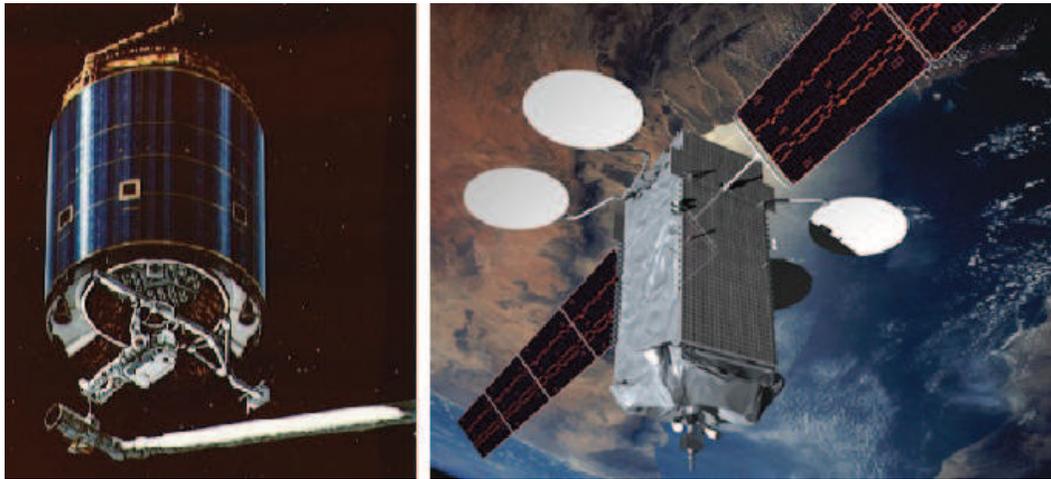


Figura 1.2: Izquierda: Intelsat VI, estabilizado por un giro constante dual. Derecha: Intelsat 12, estabilizado en tres ejes

Los satélites *spinners* tienen una forma cilíndrica que gira en su eje de simetría a una velocidad típica de 60 rpm para alcanzar estabilidad inercialmente. La orientación del satélite puede ser alterada por medio de un número determinado de toberas de propulsión. Casi todo el satélite gira, con excepción de las antenas, las cuales dejan de girar para que éstas apunten en dirección de la Tierra. El suministro de energía eléctrica se lleva a cabo mediante celdas solares colocadas sobre la circunferencia del satélite, pero cubriendo la superficie cilíndrica de celdas solares significa que, en cualquier instante de tiempo, el Sol ilumina no más que la tercera parte de la superficie de las celdas solares, el resto no convierte la energía solar en energía eléctrica. Este uso relativamente ineficiente de recursos energéticos, se vuelve inaceptable cuando los satélites demandan más cantidad de energía. Cuando la potencia requerida excede 1 ó 2 kW, la estabilización en tres ejes de un satélite es la mejor selección.

Los satélites estabilizados en tres ejes pueden tener cualquier forma, sin embargo, usualmente tienen la forma de un cubo. Una cara del satélite, en donde se instalan las antenas de comunicaciones, es orientada hacia la Tierra. Las celdas solares son montadas en paneles que se extienden y se mantienen orientadas hacia el Sol. Además del mejor aprovechamiento de la energía solar, el satélite provee mejor precisión en el apuntamiento de sus antenas, de otro modo, el tamaño de las antenas tendría que ser mayor para asegurar la ganancia suficiente a lo largo del área de cobertura.

### Satélites de Percepción Remota

Algunos ejemplos de misiones satelitales de percepción remota son el sistema *Landsat* y *SPOT* que operan en el espectro óptico e infrarrojo, y el sistema *Radarsat* que opera en el espectro de microondas

(figura 1.3). Estos satélites son estabilizados en tres ejes para orientar sus cargas útiles hacia objetivos específicos. Éstos son colocados en órbitas síncronas con el Sol con altitudes entre 700 y 900 kilómetros, permitiéndoles observar la misma región con un periodo de dos a tres semanas a la misma hora local, o bien, bajo las mismas condiciones de luz.



Figura 1.3: Izquierda: Satélite Landsat-7. Centro: Satélite SPOT-5. Derecha: Satélite Radarsat.

El programa *Landsat* de los Estados Unidos fue lanzado con el propósito de realizar observaciones terrestres, cuya aplicación es la investigación del cambio climático global y aplicaciones en agricultura, recursos acuíferos, crecimiento urbano, geología, reforestación, planeación regional, educación y seguridad nacional. El sistema *SPOT* fue diseñado por la agencia espacial Francesa, con Bélgica y Suecia como sus socios minoritarios. Provee imágenes terrestres para diversas aplicaciones como la agricultura, cartografía, mapeo catastral, estudios ambientales, planeación urbana, telecomunicaciones, reforestación, mapeo del uso y cobertura del suelo, vigilancia, evaluación de desastres naturales, administración de riegos de inundación, exploración de petróleo y gas, geología e ingeniería civil. El programa *Radarsat* es un sistema de satélites de percepción remota Canadiense, orientado al estudio de regiones polares, apoyo a la navegación marítima, identificación de recursos naturales, administración de la agricultura y recursos acuíferos, y el monitoreo del cambio climático [4].

## Satélites de Navegación

El sistema de satélites de navegación global GLONASS desarrollado por Rusia (antes Unión de Repúblicas Socialistas Soviéticas - URSS) y el sistema de posicionamiento global GPS desarrollado por los Estados Unidos, son los sistemas de navegación más representativos en la actualidad. Éstos proveen la determinación de la posición y velocidad en tiempo real de un número ilimitado de objetos móviles en cualquier punto de la superficie terrestre, para uso militar, civil, comercial y científico (figura 1.4).

La constelación del sistema GLONASS consiste de 24 satélites colocados en tres planos orbitales con una inclinación de  $64.8^\circ$ , separados entre sí  $120^\circ$ , con una altitud promedio de 19,132 kilómetros y con un periodo orbital de 11 horas, 15 minutos y 43 segundos. La constelación del sistema GPS consiste en 24 o más satélites en seis planos orbitales cuya inclinación es de  $55^\circ$  con una separación entre ellos de  $60^\circ$ , con un radio de 26,561.75 kilómetros y excentricidad de 0.01 y un periodo orbital de 12 horas del tiempo sideral medio<sup>1</sup>. Actualmente se desarrollan otros sistemas de navegación, como el Galileo

## 1.2. TIPOS DE CONTROL DE ORIENTACIÓN EN SATÉLITES PEQUEÑOS

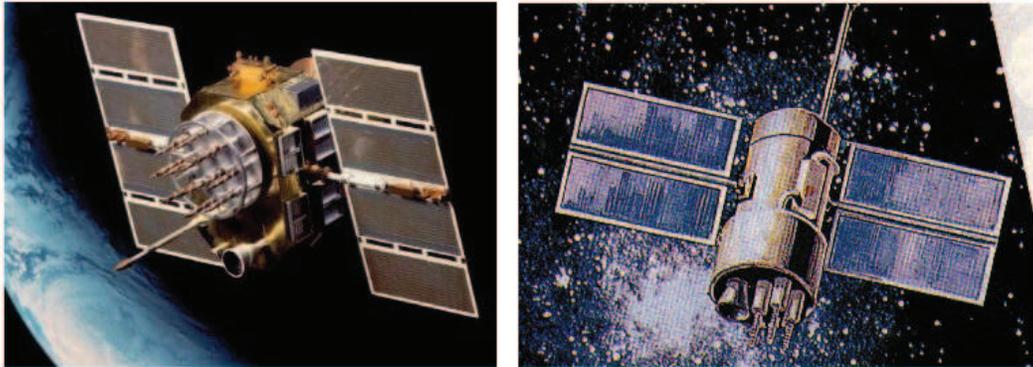


Figura 1.4: Izquierda: Satélite del Sistema GPS. Derecha: Satélite del Sistema GLONASS.

(Europa), el *Beidou* (China), el IRNSS (India), etc.

El sistema de control de orientación ACS tiene como propósito estabilizar al satélite y orientarlo hacia el Sol y la Tierra, orientar el eje vertical del satélite en dirección a la Tierra y los paneles solares hacia el Sol, además de orientar las toberas de propulsión para proveer al satélite de una corrección orbital. Estos satélites usan un sistema de estabilización en tres ejes que está integrado, entre otros componentes por ruedas inerciales y un sistema de reducción de momento basado en toberas de propulsión, [1], [5].

## 1.2 Tipos de Control de Orientación en Satélites Pequeños

Una vez que se han definido los requerimientos de diseño del sistema ACS de un satélite o vehículo espacial mediante la evaluación de los requerimientos y perfil de la misión, se selecciona el método de control de orientación adecuado para cumplir con los requerimientos de potencia, apuntamiento, carga útil y medios para contrarrestar las perturbaciones espaciales (tabla 1.1). Posteriormente se cuantifican los pares perturbadores para seleccionar y dimensionar el hardware de ACS del satélite, se seleccionan los algoritmos de determinación y control de orientación y se realiza una o varias iteraciones para alcanzar el mejor diseño del ACS, [6], [7].

### Métodos Pasivos de Control

El control de orientación mediante el despliegue de un gradiente gravitacional permite el aprovechamiento de las propiedades inerciales del vehículo espacial para mantenerlo apuntando hacia la Tierra. El eje longitudinal del vehículo espacial tiende a alinearse hacia el centro de la Tierra cuando éste se encuentra dentro del campo gravitacional terrestre, siendo un método de control en los dos ejes del vehículo espacial. Este medio de estabilización es económico y no requiere de consumo energético una vez desplegado del satélite. Para controlar su tercer eje, se puede agregar una rueda de momento constante alineado a un eje ortogonal al vector de velocidad del vehículo espacial y al vector en dirección al nadir terrestre, siendo estable cuando la rueda está alineada con el vector normal a la órbita. Sin embargo, el uso de esta rueda de momento constante incrementa el costo de este sistema de estabilización.

---

<sup>1</sup>Un día sideral medio es la rotación de la Tierra hacia la misma posición con respecto al espacio inercial y es aproximadamente cuatro minutos más corto que un día solar

Tabla 1.1: Métodos de Control de Orientación y Capacidades

<b>Tipo</b>	<b>Opciones de Apuntamiento</b>	<b>Maniobrabilidad</b>	<b>Precisión Típica</b>	<b>Límite de Tiempo de Vida</b>
<i>Gradiente Gravitacional</i>	Solamente apuntamiento hacia el nadir terrestre	Muy limitado	$\pm 5$ grados (2 ejes)	Ninguno
<i>Gradiente Gravitacional y Rueda de Momento Constante</i>	Solamente apuntamiento hacia el nadir terrestre	Muy limitado	$\pm 5$ grados (3 ejes)	Rodamientos de la rueda
<i>Magnético Pasivo</i>	Apuntamiento al Norte/Sur Magnético	Muy limitado	$\pm 5$ grados (2 ejes)	Ninguno
<i>Control de Giro</i>	Cualquier dirección fija inercialmente y redireccionamiento con maniobras de precesión	Gran cantidad de propelente para mover un vector rígido de momento angular	$\pm 0.1$ a $\pm 1$ grados (proporcional a la velocidad de giro)	Propelente <sup>1</sup> (si éste aplica)
<i>Control de Giro Dual</i>	Limitado por la articulación del estator o plataforma	Vector de momento angular igual al anterior y restricción por la geometría de la propia plataforma	Igual que la anterior para el rotor y reducción de giro determinado por el apuntamiento y la referencia de la carga útil	Propelente <sup>1</sup> (si éste aplica) y rodamientos de la plataforma
<i>Rueda de Momento Constante (1 rueda)</i>	Adecuado para apuntamiento hacia el nadir terrestre	El vector de momento de la rueda se mantiene paralelo a la normal del plano de la órbita, restringiendo maniobras en el eje <i>yaw</i>	$\pm 0.1$ a $\pm 1$ grados	Propelente <sup>1</sup> (Si éste aplica) y vida de los sensores y rodamientos de la rueda
<i>Momento Cero (Sólo toberas de propulsión)</i>	Sin restricciones	Sin restricciones (Velocidades angulares altas disponibles)	$\pm 0.1$ a $\pm 5$ grados	Propelente
<i>Momento Cero (3 Ruedas)</i>	Sin restricciones	Sin Restricciones	$\pm 0.001$ a $\pm 1$ grados	Propelente <sup>1</sup> (Si éste aplica) y vida de los sensores y rodamientos de las ruedas
<i>Momento Cero (CMG)</i>	Sin restricciones	Sin restricciones (Velocidades angulares altas disponibles)	$\pm 0.001$ a $\pm 1$ grados	Propelente <sup>1</sup> (Si éste aplica) y vida de los sensores y rodamientos de las ruedas

Otro método pasivo de control es el uso de imanes permanentes a bordo del vehículo espacial para

<sup>1</sup>Las toberas de propulsión pueden ser usadas para incrementar y reducir el momento angular en todas las altitudes. En satélites y vehículos espaciales en órbitas bajas y geoestacionarias, se pueden usar bobinas de par magnético.

### 1.3. PROYECTOS SATELITALES EN MÉXICO

alinearse el campo magnético de los imanes con el de la Tierra. Este método presenta mejor rendimiento en vehículos espaciales con apuntamiento hacia la Tierra con órbitas cercanas al ecuador, donde la orientación del campo magnético terrestre es casi constante. Este sistema de estabilización es ligero y económico.

Las técnicas de control de giro son métodos pasivos de control de estabilización, en donde el vehículo espacial gira de tal manera que el vector de movimiento angular permanece fijo inercialmente en el espacio, empleando estabilidad giroscópica. El movimiento giratorio es estable si el vehículo espacial gira en torno al vector que cuenta con el mayor valor de momento de inercia. Un ejemplo de control de giro dual se menciona en la sección 1.1, donde el satélite de comunicaciones posee dos elementos que giran a diferente velocidad en torno al mismo eje. Normalmente, una sección (el rotor) gira rápidamente para proveer un momento angular, mientras que la segunda sección (estator o plataforma) deja de girar para mantener un eje apuntando hacia la Tierra o el Sol. Estos métodos requieren normalmente medios activos de control, como toberas de propulsión o bobinas de par magnético para ajustar la orientación del vehículo espacial y la velocidad de giro y así lograr contrarrestar los pares perturbadores, así como disminuir los efectos de precesión y nutación en el vector de momento angular.

### Métodos Activos de Control

Los satélites estabilizados en tres ejes son cada vez más comunes que aquellos que usan un gradiente gravitacional o estabilización giratoria. Éstos pueden realizar maniobras de apuntamiento y ser estables y precisos, dependiendo de sus sensores y actuadores. Los pares de control generados en los tres ejes del satélite provienen de la combinación de ruedas inerciales, toberas de propulsión, bobinas de par magnético, giróscopos de control de momento (CMGs) o ruedas de momento constante.

Existen variantes de este tipo de sistemas de estabilización. En sistemas de *momento-cero*, las ruedas inerciales responden a los pares de perturbación que afectan al satélite y a señales de error de apuntamiento que el satélite pueda generar durante su misión. Sin embargo, existe la posibilidad de que se presente una saturación de la velocidad de giro de las ruedas debido a pares de perturbación repetitivos. Para ello se requiere aplicar pares externos que pueden ser generados por toberas de propulsión o bobinas de par magnético para reducir el giro de la rueda hasta cero. Este proceso es conocido como *desaturación de momento angular*.

Cuando se requieren pares de control mayores para vehículos espaciales de mayor tamaño o para realizar maniobras rápidas de apuntamiento, es posible el uso de CMGs, que consisten en ruedas de momento constante montadas en suspensiones de Cardan. El control de CMGs es complejo, pero el par disponible en estos dispositivos los hace una opción atractiva.

## 1.3 Proyectos Satelitales en México

### 1.3.1 Antecedentes de proyectos satelitales nacionales

México ha incursionado en las áreas de tecnologías satelitales, lanzando los sistemas Morelos 1 y 2 en la década de los 80's, y los sistemas Solidaridad 1 y 2, y Satmex 5 (Morelos 3) en la década de los 90's, éste último lanzado mediante financiamientos privados por la empresa estatal Telecomm (Telecomunicaciones de México) [8]. Todos estos sistemas satelitales fueron diseñados y construidos en el extranjero, y hasta el momento no se ha colocado un solo satélite en el espacio con tecnología totalmente mexicana que pudiera impulsar el desarrollo de este campo de investigación.

Sin embargo, se han presentado esfuerzos para incursionar en el desarrollo tecnológico aeroespacial. La Universidad Nacional Autónoma de México UNAM, a través del hoy extinto Programa Universitario

de Investigación y Desarrollo Espacial (PUIDE), concibió el proyecto UNAMSAT, el cual fue un paquete de tecnología abierta que fue comprado a la compañía AMSAT (*Radio Amateur Satellite Corporation*), lo cual los obligó a respetar términos de discrecionalidad y de secrecía. Este paquete los ayudó a asimilar tecnología satelital, pero también los limitó en términos de independencia tecnológica. El UNAMSAT fue un microsátélite cúbico de 23 cm por lado con capacidades de comunicaciones digitales similares a un BBS (*Bulletin Broadcasting Service*), y un experimento científico, para medir la velocidad con la que entran los meteoritos a la atmósfera terrestre [9].

Después del proyecto microsatelital UNAMSAT que realizara la UNAM, cuyos mejores resultados se generaron al colocar en órbita y operar al microsátélite UNAMSAT-B por un par de meses en 1996, diversas instituciones educativas y de investigación Mexicanas trabajaron en el desarrollo del proyecto microsatelital SATEX (figura 1.5), [10].



Figura 1.5: Representación del microsátélite Satex.

El microsátélite experimental mexicano SATEX fue diseñado para tener una forma cúbica de 50 cm por lado con una estructura de aluminio basada en un cilindro central y tres placas que forman dos pisos en donde se instalan equipos y experimentos, una masa total de 55 kilogramos. Se ubicaría en una órbita polar a  $98^\circ$  de inclinación y una altitud aproximada de 780 km sobre la Tierra. El periodo de recorrido de la órbita tendría una duración de 101 minutos, con un periodo de sol y de eclipse de 67 y 34 minutos respectivamente. El control del apuntamiento del microsátélite respecto a Tierra se efectuaría primeramente por una etapa de estabilización con bobinas de par magnético (BTM) hasta alcanzar condiciones adecuadas para liberar el gradiente gravitacional, después de liberarlo se contaría con un medio de estabilización pasiva, que requeriría de una segunda etapa de estabilización para alcanzar condiciones dinámicas que permitiera la realización de experimentos que demandaban línea de vista entre el satélite y la Tierra. Durante las fases de estabilización activa se utilizarían 6 bobinas de par magnético colocadas en pares ortogonales, además de cuatro sensores finos de sol y dos magnetómetros de 3 ejes que permitieran determinar el apuntamiento de la plataforma satelital [11].

Sus experimentos fueron propuestos y desarrollados por diversas instituciones de todo el país, entre ellas, el Centro de Investigación Científica y Educación Superior de Ensenada, Baja California (CI-CESE); el Centro de Investigación en Tecnología Digital de Tijuana, Baja California; el Centro de

### 1.3. PROYECTOS SATELITALES EN MÉXICO

Investigación en Matemáticas (CIMAT), de Guanajuato; el Instituto Nacional de Astrofísica Óptica y Electrónica (INAOE), de Puebla, y la UNAM del Distrito Federal [12].

#### 1.3.2 SATEDU

Analizando los problemas que representa la capacitación de personal en el área de satélites, es que se concibe la idea de crear un simulador satelital, con el fin de crear un satélite educativo, para capacitar a los recursos humanos necesarios dentro del área de satélites de manera general o específica dentro de las diferentes partes de logística que requiere la creación de un satélite.



Figura 1.6: El Satélite Educativo SATEDU.

El satélite educativo SATEDU (figura 1.6), diseñado y construido en el Instituto de Ingeniería UNAM, fue concebido para ser útil en laboratorios de investigación para el desarrollo de nuevas soluciones y módulos para subsistemas de satélites reales. En este sentido, se pueden abordar temas de investigación en áreas como estabilización en tres ejes, comunicaciones digitales, sensores de satélites, sistemas de potencia, validación de cargas útiles, computadoras de vuelo, navegación autónoma y constelaciones de satélites.

En el mercado global, existen escasos productos similares a SATEDU, de tal manera que actualmente existe un satélite educativo comercial de laboratorio, que fue desarrollado por la Fuerza Aérea de los Estados Unidos, llamado EYASSAT, con un costo aproximado de 8,000 dólares. SATEDU fue desarrollado para tener un costo aproximado de 3,000 dólares, haciéndolo atractivo para diferentes instituciones de educación a nivel mundial [13].

Los subsistemas que conforman a SATEDU son [8]:

- **Computadora de vuelo (CV)**, que esencialmente está compuesta por un procesador SAB80C166 de Siemens, con oscilador de 40 MHz, 256 kB de memoria RAM donde se cargan los programas

de operación del SATEDU, un microcontrolador PIC16F876A, que es el dispositivo encargado de realizar la carga de un nuevo programa al procesador, 32 MB de memoria flash, 3 sensores de temperatura y 3 arreglos de *latch-up*.

- **Potencia**, constituido por un microcontrolador PIC18F2321, que se comunica con la CV para controlar los apagados y encendidos de las fuentes de energía de los demás subsistemas, una serie de reguladores y un convertidor de DC-DC que surtirá a los subsistemas con energía, un sistema de carga para las baterías y las fuentes de energía primaria y secundaria del SATEDU que están integradas por 4 baterías Li-On recargables y celdas solares autoadheribles. El subsistema de potencia lo componen dos tarjetas, una de ellas contiene las baterías y circuitos complementarios, y la otra la electrónica necesaria para proteger a SATEDU del efecto *latch-up*<sup>1</sup> e interruptores como el *kill switch* y *remover antes de vuelo*, que mantienen totalmente apagado a SATEDU antes de su liberación, como si fuera un satélite para vuelo.
- **Comunicaciones**, consiste en 2 tarjetas, un pequeño módulo conectado a la computadora donde se encuentra el software para manipular al SATEDU y la tarjeta de comunicaciones que sigue el mismo diseño que las demás. Ambas tarjetas poseen un transceptor de RF que trabaja en la banda de los 2.4 GHz y un microcontrolador PIC18F2321 de Microchip, la diferencia radica en que el módulo para la PC usa un transceptor adicional que es utilizado para comunicarse con una PC vía USB.
- **Estabilización**, consiste de una tarjeta que maneja dos métodos de estabilización activa, que son una rueda inercial y BTMs. La rueda inercial es una pequeño disco circular sujeto a un pequeño motor mientras que las BTMs son bobinas puestas una en cada eje para que en conjunto con la rueda inercial, sea posible realizar algunas maniobras de control de orientación en un eje y poder llevar a cabo varios experimentos sobre estabilización.
- **Sensores de Estabilización**, la constituye una tarjeta que aloja los sensores necesarios para monitorear el movimiento de SATEDU, algunos de ellos sirven para visualizar su posición en tiempo real. Los sensores que la componen son una brújula electrónica con una precisión de 0.1°, un acelerómetro en tres ejes y tres giróscopos electrónicos puestos de manera ortogonal para monitorear los tres ejes del satélite.
- **Módulos de expansión y actualización de plataforma**, pensados para desarrollar expansiones que permitan adaptarse al mismo sistema sin necesidad de hacer cambios al circuito impreso de la CV, debido a que se han dejado espacios dentro de los conectores laterales para que estos nuevos subsistemas puedan comunicarse con la CV. Uno de los nuevos desarrollos pensados actualmente es una pequeña cámara que almacene fotografías en la memoria flash de la CV, estos archivos se enviarán a una computadora personal que simula la estación terrena.
- **Segmento terrestre**. Este segmento de supervisión comprende a una computadora personal donde está instalada la interfaz gráfica de comunicación entre SATEDU y la estación terrena (PC). Es un software a través del cual se despliega la telemetría de SATEDU, se realiza el envío de programas de cargado en la CV, etc.

Estos subsistemas están contenidos preliminarmente en una caja de acrílico, la cual es económica y facilita la portabilidad de SATEDU.

---

<sup>1</sup>Efecto de la radiación sobre componentes electrónicos el cual provoca la pérdida de funcionalidad del dispositivo debido a la aparición de corrientes parásitas elevadas (avalancha).

## 1.3. PROYECTOS SATELITALES EN MÉXICO

### 1.3.3 HumSat-México

El proyecto HumSat es una iniciativa educativa y de desarrollo tecnológico internacional para la construcción de una constelación de nanosatélites, fabricados cada uno de ellos por diferentes países, que proporcionarán capacidades de comunicación global a áreas con poca y sin alguna infraestructura. Sus principales promotores son la Universidad de Vigo, España; la Universidad Politécnica de California, Estados Unidos; la UNAM y el Centro Regional de Enseñanza de Ciencia y Tecnología del Espacio para América Latina y el Caribe (CRECTEALC), México.

La arquitectura del sistema HumSat está compuesta por tres segmentos:

- Un segmento del Espacio, que consiste en una constelación de pequeños satélites, algunos de ellos diseñados bajo el estándar CubeSat<sup>1</sup>, además pueden ser integradas algunas cargas útiles secundarias.
- Un segmento terrestre, que consiste en estaciones terrenas y centros de control de misión basados en el sistema GENSO<sup>2</sup>.
- Un segmento de usuario, basado en equipo de bajo costo capaz de transmitir información unidireccional al usuario, o equipo más sofisticado capaz de realizar comunicaciones bidireccionales, para aplicaciones humanitarias y emergencias, así como el monitoreo de parámetros relacionados con el cambio climático.

Actualmente se están empleando todos los recursos tecnológicos de SATEDU, así como las experiencias de desarrollo, para construir el primer satélite autóctono estabilizado en tres ejes para ser lanzado al espacio como uno de los primeros satélites de la constelación internacional HumSat, el cual consistirá de los siguientes subsistemas: estructura 3U (10cm × 10cm × 30cm), potencia con celdas solares desplegadas, computadora de vuelo, comunicaciones inalámbricas en UHF, VHF y banda S, sensores de navegación inercial, ruedas inerciales y BTM como actuadores y una estación terrena. De esta manera, el satélite HumSat-México realizará tareas de alta complejidad que permitirán la validación de tecnología de estabilización en tres ejes, que si bien no es un requerimiento dentro del proyecto HumSat, el satélite perseguirá esta meta para alcanzar el desarrollo de esta tecnología como parte del programa de la Agencia Espacial Mexicana que está cerca de ser iniciado [14].

---

<sup>1</sup>Satélite de forma cúbica de 10 centímetros de lado y un peso de 1 kilogramo. Dicho estándar fue establecido y publicado por la Universidad Politécnica de California y la Universidad de Stanford.

<sup>2</sup>Sistema enfocado a la formación de una red de estaciones terrenas y satélites que pueden interactuar mediante un software estándar. [www.genso.org](http://www.genso.org)

---

## CAPÍTULO 2

# HARDWARE DE ESTABILIZACIÓN SATELITAL

---

Durante el proceso de diseño del ACS de un satélite y considerando las perturbaciones espaciales a las que estará sometido, se seleccionan los sensores que permitirán la adquisición de la orientación del satélite según los requerimientos de la misión, así como los actuadores que permitirán llevar a cabo las maniobras de estabilización permitiendo con ello contrarrestar los pares externos debidos a las condiciones ambientales en el espacio.

### 2.1 Sensores

#### Magnetómetro

Este sensor mide la dirección y magnitud del campo magnético terrestre. Para establecer la orientación del satélite, la información de los magnetómetros es comparada con el vector de campo magnético terrestre que es calculado a bordo del satélite. Sin embargo, el campo magnético terrestre puede variar con el tiempo haciendo imprecisa la orientación estimada del satélite. La información de otros sensores como el sensor de Sol puede mejorar la precisión de la estimación de la orientación del satélite. Cuando un satélite es equipado con bobinas de par magnético, los magnetómetros se utilizan para controlar la polaridad del momento generado por las bobinas, pero éstas deben de ser apagadas cuando los magnetómetros están realizando las mediciones del campo magnético terrestre [6].

Algunos de los más utilizados son los magnetómetros de saturación, que consisten en una bobina principal y una secundaria. La señal de voltaje inducido de la bobina secundaria es distorsionada por el campo magnético ambiental [15].

#### Acelerómetro

El acelerómetro es un dispositivo que detecta variaciones de velocidad. Son construidos de diferentes maneras, pero el más común es el que utiliza la segunda ley de Newton, el cual es conocido como *proof mass*, que consiste en una masa suspendida mediante diferentes técnicas y se mantiene en una posición neutral debido a un campo magnético. Los avances que se han logrado en el área de los sistemas microelectromecánicos (MEMS) han permitido el desarrollo de acelerómetros de menor consumo de energía y de masa y tamaño reducidos. Los elementos de detección incluyen pulsos de cuarzo flexible, en donde el movimiento puede ser detectado mediante variaciones de capacitancia entre la masa flexible y el elemento fijo [5].

## 2.1. SENSORES

### Sensor de Sol

Existen numerosas aplicaciones para el uso de sensores de Sol, y en las últimas décadas han sido desarrollados diferentes tipos de dispositivos de instrumentación solar. Éstos pueden formar parte de un sistema básico de determinación de la orientación, un sistema de adquisición inicial o recuperación después de una falla, o un sistema de orientación independiente de arreglos de celdas solares. Debido a que los satélites de órbita baja presentan fases de eclipse, los sistemas de determinación de la orientación basados en sensores de Sol deben de proveer de medios que toleren la pérdida de esta información sin afectar las restricciones de apuntamiento. Básicamente hay dos tipos de sensores de Sol, analógicos y digitales, [6], [16].

#### *Sensores de Sol Analógicos*

Se basan en celdas solares de silicio cuya corriente de salida es proporcional al coseno del ángulo de incidencia de la luz solar y a propiedades físicas adicionales relacionadas con la celda solar. Sin embargo, a altos ángulos de incidencia, la corriente de salida no sigue exactamente un comportamiento cosenoidal, como se observa en la línea punteada de la gráfica ángulo–corriente de la figura 2.1. Utilizando dos fotodetectores separados por un ángulo de inclinación, puede reconstruirse el ángulo de incidencia de la luz del Sol en un plano del satélite. Agregando otro par de fotodetectores en un plano del satélite ortogonal respecto al anterior, pueden conocerse dos ángulos de incidencia y así reconstruir el vector de la dirección del Sol en el sistema coordenado del cuerpo del satélite.

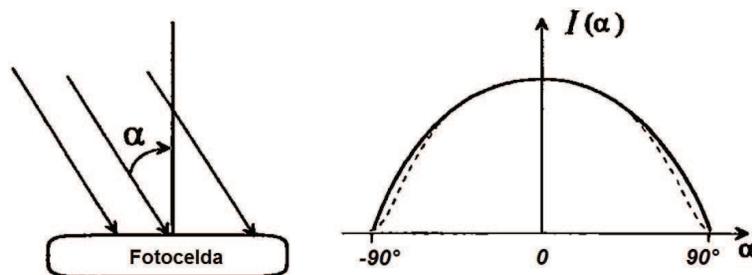


Figura 2.1: Dependencia del ángulo de incidencia de la luz del Sol con la corriente de salida de la fotocelda. Se obtiene mayor corriente cuando el ángulo entre el haz de luz y el vector normal al plano de la fotocelda es pequeño.

#### *Sensores de Sol Digitales*

El sensor de Sol digital permite obtener la información del ángulo de incidencia de la luz del Sol en un plano del satélite. Como su contraparte analógica, pueden utilizarse sensores de Sol digitales distribuidos sobre el cuerpo del satélite en planos ortogonales para determinar el vector de la dirección del Sol. Consiste en una cabeza óptica montada en un contenedor donde se encuentra la electrónica del dispositivo que permite el cálculo de la dirección del Sol referido al eje de la cabeza óptica. La cabeza óptica es un bloque con un índice de refracción determinado, en cuyo lado superior se encuentra una ranura donde entran los rayos del Sol que inciden en un patrón de retículas que permiten expresar la dirección del Sol en forma digital. En la figura 2.2 se ilustran cuatro clases de columnas de fotoceldas, ajuste del umbral automático (ATA), un bit de signo, bits codificados (Código de Gray) y bits de precisión.

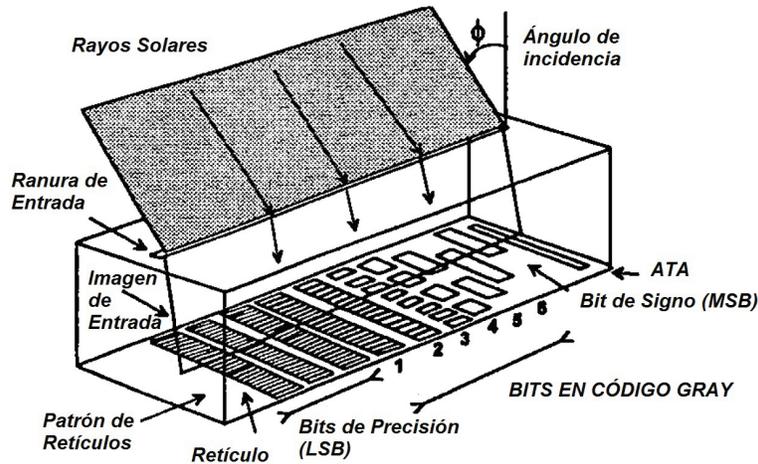


Figura 2.2: Diagrama de un sensor de Sol digital.

## Sensor de Estrellas

Los sensores de estrellas son los sensores de referencia más precisos para medir la orientación de un vehículo espacial. En sistemas de control de orientación en tres ejes, se utilizan seguidores de estrellas o *star trackers* para seguir una o dos estrellas y con ello establecer la orientación de un vehículo espacial en dos o tres ejes. Los más comunes usan sensores CCD que reducen su masa, volumen y consumo energético con el mismo desempeño en términos de precisión. También se han logrado mejoras con el uso de detectores de estado sólido [17].

Los más sofisticados no sólo siguen las estrellas como puntos brillantes, además identifican algún patrón de estrellas. Los sensores de estrellas son susceptibles a quedar "ciegos" por la interferencia del Sol, la Luna e incluso los planetas, por lo que deben de ser instalados adecuadamente según la misión del vehículo espacial. Cuando la misión requiere mayor precisión en la determinación de la orientación del vehículo espacial, se usa una combinación de sensores de estrellas y giróscopos, los cuales se complementan muy bien; los giróscopos se pueden usar para la estabilización inicial o en periodos de interferencia del Sol o la Luna en los sensores de estrellas [6].

## Giróscopos

Son sensores que cuantifican el desplazamiento angular de un cuerpo. Son considerados como sensores inerciales. Existen diferentes tipos de giróscopos que utilizan diferentes fenómenos físicos para realizar mediciones de desplazamiento angular.

### *Principio Mecánico*

Consiste en una rueda giratoria que es montada en unos anillos que constituyen una suspensión de Cardán (*Gimbal*), mostrado en la figura 2.3. El momento angular de un giróscopo es constante en magnitud y paralelo su eje de giro (*Spin Axis*). En ausencia de pares de control o de perturbación, el vector de giro mantiene su orientación fija inercialmente, en consecuencia, cuando un vehículo espacial gira alrededor del eje de entrada (*Input Axis*), la suspensión de Cardán que soporta el eje de giro presenta una precesión en torno al eje de salida (*Output Axis*), o eje de rotación de la suspensión de Cardán. La información de

## 2.1. SENSORES

salida del giróscopo se obtiene a partir del movimiento de la suspensión de Cardán [18].

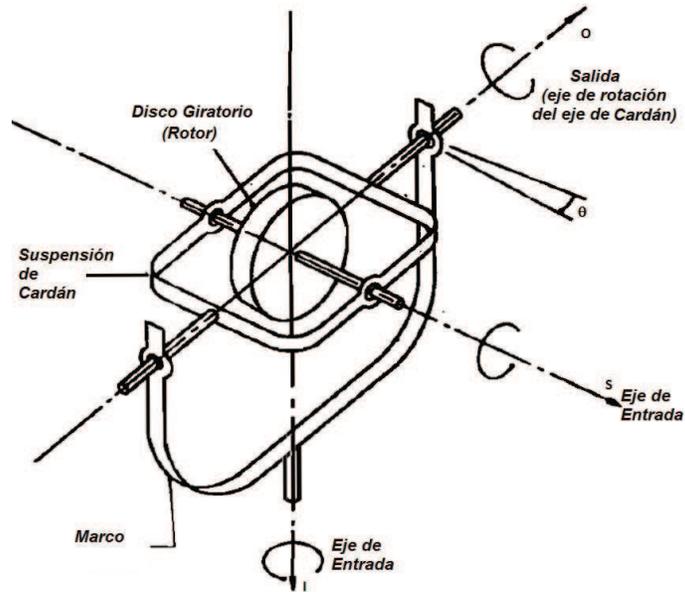


Figura 2.3: Geometría de un Giróscopo de un Grado de Libertad.

### Principio Relativístico

Los Giróscopos de Fibra Óptica (FOGs) son un ejemplo de este tipo de sensores. Su principio de operación se basa en el efecto Sagnac, descubierto en 1913 en honor al francés Georges Sagnac quien realizó el primer experimento de interferometría dedicado al estudio de la correlación entre la velocidad angular y el cambio de fase de un haz de láser.

El elemento de detección es un haz de láser que es separado en dos, los cuales viajan en sentidos opuestos a través de una fibra óptica (figura 2.4). Cuando el vehículo espacial presenta movimiento rotacional en el eje perpendicular al plano de espiral (*sensing coil*), puede medirse un cambio de fase, debido a que un haz de láser viajará en una distancia más corta que el otro haz [5].

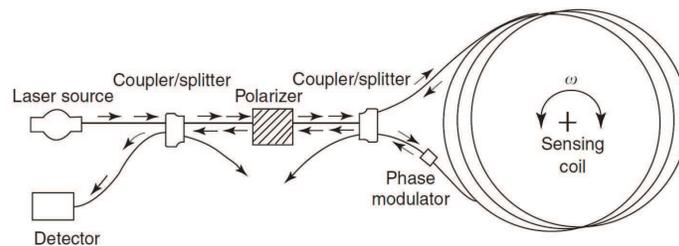


Figura 2.4: Diseño conceptual de un Giróscopo de Fibra Óptica.

### *Efecto Piezoeléctrico*

También están disponibles giróscopos cuya construcción se basa en materiales piezoeléctricos. Son relativamente económicos y pueden ser fabricados con técnicas de micro-manufactura. El principio de funcionamiento se basa en la medición de las vibraciones de una barra metálica, a la cual se adhieren transductores piezoeléctricos que detectan el movimiento, se determina su respuesta al efecto de Coriolis y así, se estima la velocidad angular inercial de un cuerpo. Sin embargo, el desempeño de estos giróscopos en aplicaciones espaciales es reducida, debido principalmente a su sensibilidad a la temperatura y a imperfecciones de fabricación [17].

## **2.2 Actuadores**

### **Bobinas de Par Magnético**

Las bobinas de par magnético aprovechan el campo magnético de la Tierra para generar un par cuando una corriente es enviada hacia la bobina, permitiendo el control de la orientación de un vehículo espacial y la compensación de pares perturbadores [18].

La dirección del momento magnético generado por una bobina es normal al plano de la sección transversal de la bobina. El sentido del momento magnético se determina según la regla de la mano derecha, considerando el sentido que circula la corriente en el embobinado. Al interactuar el momento magnético generado por las bobinas con el campo magnético terrestre, se produce un par en dirección al plano de la sección transversal de la bobina.

Se utilizan comúnmente en vehículos espaciales con órbitas de baja altitud. Sin embargo, su utilidad se reduce en órbitas de mayor altitud ya que el campo magnético disminuye en intensidad, por lo que no se usan en misiones en el espacio profundo [1].

### **Ruedas Inerciales**

Siendo uno de los actuadores con mejor capacidad de generación de par de control, eficientes y con una relativa demanda mínima de energía eléctrica, las ruedas inerciales son utilizadas comúnmente en los sistemas ACS de un vehículo espacial.

La rueda es acoplada mecánicamente al eje de un motor eléctrico, el cual permanece fijo a la estructura del vehículo espacial. Para provocar un movimiento angular en el vehículo espacial alrededor del eje de giro de la rueda inercial, una corriente eléctrica se hace pasar hacia el motor de la rueda inercial. Al momento que la rueda gira, ésta produce un par en dirección contraria al sentido de giro del motor. Como el motor permanece fijo a la estructura del vehículo espacial, éste par es transferido al vehículo espacial y éste empieza a rotar alrededor del eje de giro de la rueda, siendo una aplicación de la tercera ley de Newton de movimiento [2].

Debido a una posible saturación de la capacidad máxima de almacenamiento de movimiento angular de la rueda inercial durante las maniobras de reorientación o la absorción de pares externos, se utilizan otros medios que produzcan pares externos para disminuir periódicamente la cantidad de movimiento angular, como toberas de propulsión o bobinas de torque magnético [18].

Para tener control de la orientación en los tres ejes del vehículo espacial, son instaladas tres ruedas inerciales ortogonales entre sí. También se ha utilizado una configuración redundante de cuatro ruedas inerciales en algunas misiones espaciales.

---

## CAPÍTULO 3

# MODELADO MATEMÁTICO DEL SATÉLITE Y ENTORNO ESPACIAL

---

Por medio de modelos matemáticos se explicará la dinámica del satélite a lo largo de su órbita, considerando las perturbaciones que se presentarán durante su misión.

La utilidad de conocer dichos modelos es la identificación de parámetros de diseño del esquema de control de orientación satelital para conocer aproximadamente, mediante simulaciones, el comportamiento del satélite bajo ciertos comandos de control. Más adelante se hará una descripción general de éstos modelos que fueron usados para el estudio del problema de control y estimación de la orientación de un satélite.

### 3.1 Modelo de la Órbita del Satélite

Para entender el modelo matemático que define la órbita de un satélite, se mencionarán brevemente algunos parámetros que permiten establecer sus características cinemáticas y de forma, con el objeto de conocer la cobertura del satélite alrededor de la Tierra, para que éste pueda llevar a cabo las tareas científicas para las cuales fue diseñado, y así establecer los parámetros de diseño de su esquema de control.

#### 3.1.1 Tipos de Órbitas

Básicamente se pueden identificar diferentes tipos de órbitas de acuerdo a las siguientes categorías [4].

##### 3.1.1.1 *Distancia de la Tierra*

En la figura 3.1 se muestran los tipos de órbitas clasificados por su cercanía con la Tierra, los cuales son LEO, MEO y GEO.

Los satélites en órbitas LEO rodean la Tierra a una altura alrededor de 160 a 800 kilómetros de la superficie de la Tierra. Estos satélites tienen periodos orbitales más cortos y retrasos en la propagación de señales más pequeños, por lo que son altamente adecuados para aplicaciones en comunicaciones, además de que la potencia requerida para señales de transmisión es menor, resultando en satélites de dimensiones pequeñas y económicas para su construcción. Sin embargo, debido al periodo orbital menor, el satélite permanece al alcance de una estación terrena en un lapso corto de tiempo. Otras aplicaciones de satélites en órbitas LEO son la percepción remota, estudios climatológicos, observaciones científicas y aplicaciones militares.

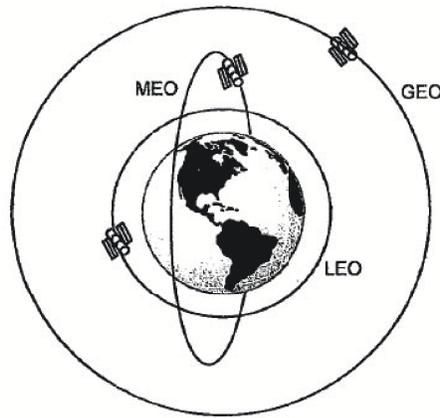


Figura 3.1: Clasificación de órbitas por altura.

En órbitas MEO, el satélite rodea la Tierra a una altura de 10000 a 20000 kilómetros de la superficie terrestre con un periodo orbital entre 6 y 12 horas. Estos satélites permanecen en una región de la Tierra más tiempo que en órbitas LEO, la distancia y retraso de señales de transmisión son más grandes que en satélites en órbitas LEO y sus aplicaciones típicas son las telecomunicaciones y sistemas de navegación (GPS, GLONASS)

Una órbita GEO es una órbita progrado cuyo periodo orbital es igual al periodo de rotación de la Tierra. Si este tipo de órbita estuviera en el plano del ecuador y fuera circular, los satélites permanecerían estacionarios respecto a un punto dado del ecuador. A este tipo de órbitas se les llama geoestacionarias. Para alcanzar esta velocidad orbital, el satélite debe permanecer a una altura de 35786 kilómetros de la superficie de la Tierra, teniendo un periodo orbital de 23 horas 56 minutos. Los satélites en órbitas geoestacionarias juegan un papel muy importante en las telecomunicaciones y señales de video, así como en meteorología y en aplicaciones militares.

### 3.1.1.2 Excentricidad

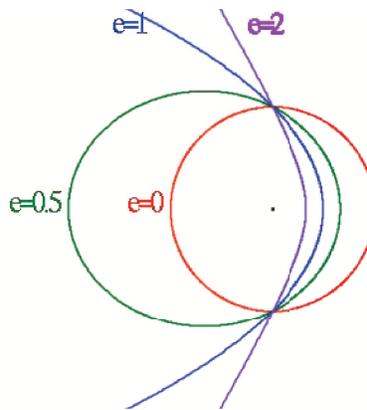


Figura 3.2: Clasificación de órbitas por excentricidad.

### 3.1. MODELO DE LA ÓRBITA DEL SATÉLITE

Según la excentricidad que presenta una órbita (figura 3.2), se puede tener una trayectoria elíptica cuando la excentricidad de la órbita es  $0 < e < 1$ . Cuando  $e = 0$  se tiene una órbita circular, aunque cabe mencionar que todas las órbitas circulares tienen un valor de excentricidad pequeño. Cuando la excentricidad es  $e > 1$  se tiene una órbita hiperbólica y cuando  $e = 1$  la órbita es parabólica.

Existe una órbita elíptica con una excentricidad grande y además muy inclinada ( $0.75$  y  $65^\circ$  respectivamente), llamada órbita Molniya, en donde se colocan satélites en diferentes fases que proveen servicios de telecomunicaciones a zonas que están localizadas a una latitud muy grande (p.ej. países que conformaron la Unión Soviética).

#### 3.1.1.3 Inclinación del Plano Orbital

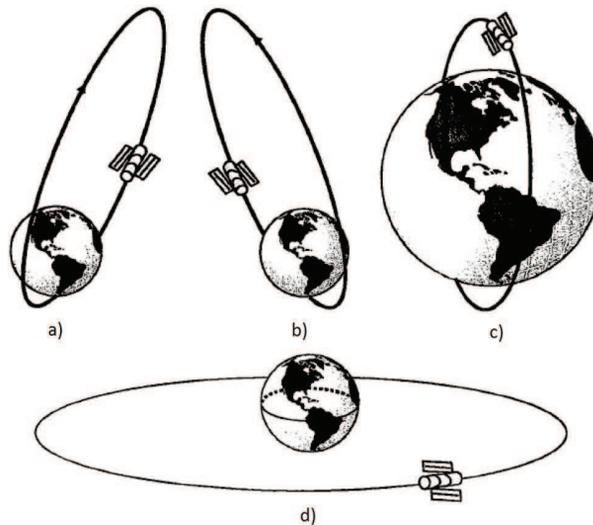


Figura 3.3: Clasificación de órbitas por inclinación. a) Progrado, b) Retrogrado, c) Polar, d) Ecuatorial.

El plano de una órbita puede tener diferentes valores de inclinación respecto del plano ecuatorial de la Tierra. Para una inclinación de  $0^\circ$ , se tiene una órbita ecuatorial, cuyo plano coincide con el ecuador de la Tierra. Para una inclinación de  $90^\circ$  se tiene una órbita polar y para inclinaciones mayores de  $0^\circ$  y menores de  $180^\circ$  se dice que la órbita es inclinada.

Para inclinaciones entre  $0^\circ$  y  $90^\circ$ , el satélite viaja en la misma dirección en la que la Tierra efectúa su rotación, o bien, en una órbita conocida como directa o progrado. Para inclinaciones entre  $90^\circ$  y  $180^\circ$  el satélite viaja en una dirección opuesta a la rotación de la Tierra, es decir, en una órbita retrogrado (figura 3.3).

Dentro de las órbitas LEO, la órbita SSO que se muestra en la figura 3.4, presenta una inclinación entre  $97^\circ$  y  $105^\circ$ , lo que la hace una órbita polar retrogrado. El plano de la órbita mantiene un ángulo constante con la línea Sol-Tierra debido a una perturbación llamada regresión de nodos. La Tierra no es una esfera perfecta, teniendo una cantidad de masa mayor en el ecuador que en los polos, por lo que en órbitas inclinadas, una fuerza en dirección a la normal al plano del ecuador ocurre en el plano de la órbita, pero por propiedades giroscópicas, la inclinación de la órbita no cambia, pero se produce una precesión en el plano de la órbita alrededor del ecuador. Por lo que, en el rango de inclinación mencionado, la precesión coincide con el periodo en la que la Tierra gira alrededor del Sol.

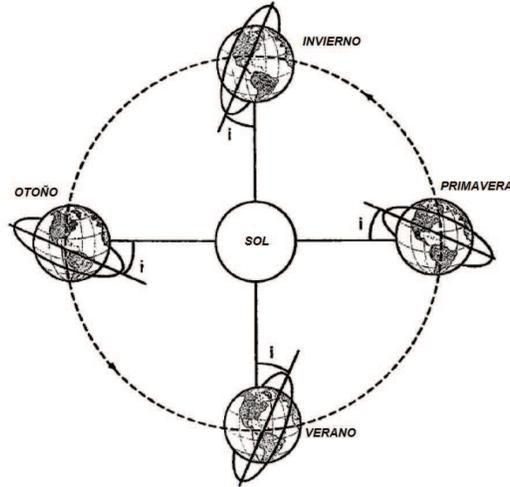


Figura 3.4: Órbita SSO.

### 3.1.2 Parámetros Orbitales

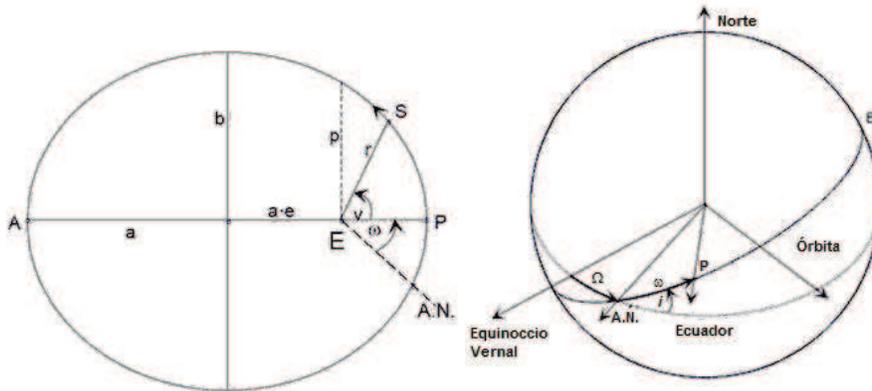


Figura 3.5: Definición de los parámetros de una órbita. Plano orbital (izquierda). Espacio 3D (derecha).

En la figura 3.5 se ilustran las terminologías que describen a una órbita elíptica y en su caso particular, una órbita circular. En la tabla 3.1 se mencionarán cada uno de ellos.

### 3.1.3 Ecuación Diferencial de la Órbita

La ecuación diferencial general de una órbita es:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{m_0 k}{H^2}; \quad u = r^{-1} \quad (3.1)$$

que tiene la forma de un oscilador armónico lineal con una función de fuerza constante. En el caso de órbitas circulares, la solución de la ecuación (3.1) es simplemente una constante y un término armónico

### 3.2. REPRESENTACIÓN DE LA ORIENTACIÓN DE UN CUERPO

En el plano de la órbita (figura 3.5a)	En el espacio 3D (figura 3.5b)
a = Eje semi-mayor	i = Inclinación
e = Excentricidad	$\Omega$ = Ascensión derecha del nodo ascendente
$\omega$ = Argumento del perigeo	$\omega$ = Argumento del perigeo
b = Eje semi-menor	B = Plano Orbital
r = Radio de la órbita	A.N. = Nodo Ascendente
E = Centro de la Tierra	N = Polo Norte
A = Apogeo	P = Perigeo
P = Perigeo	V = Equinoccio Vernal (intersección entre el ecuador de la Tierra y la eclíptica)
v = Anomalía verdadera	
u = $\omega + v$ = Argumento de latitud	
A.N. = Nodo ascendente	
S = Posición del satélite	

Tabla 3.1: Parámetros orbitales

[19]:

$$u = \frac{m_o k}{H^2}; \quad u = r^{-1}; \quad H = m_o r^2 \dot{\theta} \quad (3.2)$$

siendo:

$$k = G m_e m_o = m_o g (R_E)^2 \quad (3.3)$$

donde  $m_o$  es la masa del satélite,  $r$  el radio de la órbita,  $H$  la magnitud del momento angular,  $\dot{\theta}$  la velocidad angular con la que el satélite recorre su órbita,  $G$  la constante de la gravitación universal,  $m_e$  la masa de la Tierra,  $g$  la magnitud de la gravedad terrestre al nivel del mar y  $R_E$  el radio de la Tierra.

Para este proyecto de investigación, se considerará la órbita del satélite HumSat-México como circular, de radio de 6871 kilómetros desde el centro de la Tierra (altitud promedio de 500 kilómetros), teniendo:

$$\dot{\theta} = \omega_o = \sqrt{\frac{k}{m_o r^3}} \quad (3.4)$$

Para describir la órbita del satélite, es suficiente establecer la información del radio, la inclinación y la ascensión derecha del nodo ascendente; y para definir su posición, se necesita el argumento de latitud y considerar que el argumento del perigeo es cero.

## 3.2 Representación de la Orientación de un Cuerpo

Existen diferentes formas de representar la orientación de un cuerpo en relación a un sistema coordenado definido. En este proyecto de investigación se estudiaron tres métodos que permiten establecer transformaciones entre diferentes sistemas coordenados, y en particular, la representación de la orientación de un satélite a lo largo de su órbita [20].

### 3.2.1 Ángulos de Euler

Representan la orientación de un cuerpo respecto a un sistema coordenado de referencia  $xyz$  o la orientación de un sistema coordenado respecto a otro (figura 3.6). Para describir la orientación de un cuerpo en términos de los ángulos de Euler se definen las siguientes rotaciones:

$\theta$  (*roll*) describe la rotación alrededor del eje  $x$ .

$\phi$  (*pitch*) describe la rotación alrededor del eje  $y$ .

$\psi$  (*yaw*) describe la rotación alrededor del eje  $z$ .

En el caso del satélite, estos ángulos describen su orientación relativa a un sistema coordenado de referencia.

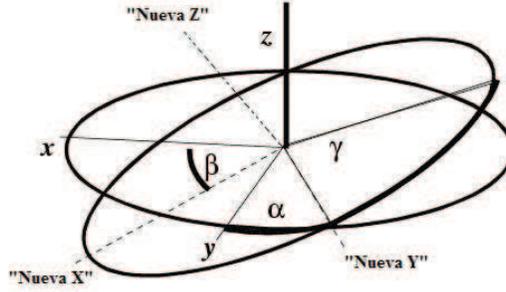


Figura 3.6: Visualización de la rotación de un eje coordenado.

### 3.2.2 Cuaterniones Unitarios

La orientación de un objeto puede ser descrita como una rotación alrededor de un eje. Este eje es un vector unitario  $\lambda$  con componentes en un sistema coordenado de referencia  $xyz$ , por lo que se necesitan cuatro parámetros para describir la orientación respecto a un sistema coordenado de referencia; los tres componentes del vector unitario  $\lambda$  y un ángulo de rotación  $\theta$ .

La ventaja de utilizar cuaterniones unitarios es que se evitan las singularidades (punto(s) donde una función tiende a infinito o está mal definida en otro sentido) que se presentan en secuencias de rotaciones expresadas en ángulos de Euler [20].

Un cuaternión se define por tener una parte escalar  $\eta$  y una vectorial  $\epsilon$ , de manera que:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \eta & \epsilon_1 & \epsilon_2 & \epsilon_3 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

y para un cuaternión unitario, se tiene:

$$\eta^2 + \epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \epsilon_3^2 = \mathbf{q}^\top \mathbf{q} = 1 \quad (3.6)$$

donde:

$$\eta = \cos \frac{\beta}{2} \quad (3.7)$$

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_1 & \epsilon_2 & \epsilon_3 \end{bmatrix} = \lambda \sin \frac{\beta}{2} \quad (3.8)$$

y se puede observar que  $\eta$  y  $\epsilon$  se expresan en términos de una rotación  $\beta$  alrededor de un vector unitario  $\lambda$ , con los cuales también se puede representar la orientación de satélite, mejor conocido como *representación en parámetros de Euler* (figura 3.7).

### 3.2. REPRESENTACIÓN DE LA ORIENTACIÓN DE UN CUERPO

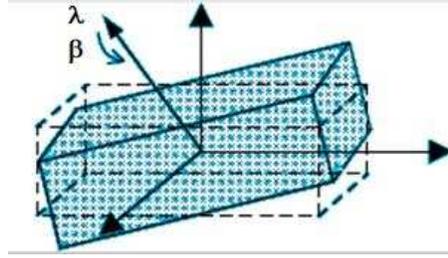


Figura 3.7: Parametrización de la orientación de un cuerpo rígido.

El producto entre dos cuaterniones  $\mathbf{q}_a$  y  $\mathbf{q}_b$  es no conmutativo y está definido por la siguiente ecuación [21]:

$$\mathbf{q}_a \otimes \mathbf{q}_b = \begin{bmatrix} \eta & -\epsilon_1 & -\epsilon_2 & -\epsilon_3 \\ \epsilon_1 & \eta & -\epsilon_3 & \epsilon_2 \\ \epsilon_2 & \epsilon_3 & \eta & -\epsilon_1 \\ \epsilon_3 & -\epsilon_2 & \epsilon_1 & \eta \end{bmatrix}_a \begin{bmatrix} \eta \\ \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \end{bmatrix}_b \quad (3.9)$$

y puede reescribirse como:

$$\mathbf{q}_a \otimes \mathbf{q}_b = \begin{bmatrix} \eta_a \eta_b - \epsilon_a^\top \epsilon_b \\ \eta_a \epsilon_b + \eta_b \epsilon_a + \epsilon_a \times \epsilon_b \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

#### 3.2.3 Matriz de Rotación

Una matriz de rotación puede ser interpretada de tres maneras [22]:

- La transformación de un vector representado en un sistema coordenado a otro sistema coordenado.
- La rotación de un vector en el mismo sistema coordenado.
- La descripción de una orientación mutua entre 2 sistemas coordenados.

La matriz de rotación  $R$  de un sistema coordenado  $a$  a un sistema coordenado de referencia  $b$  se denotará  $R_a^b$  en esta tesis. La matriz  $R$  es una matriz de  $3 \times 3$  de elementos reales, y tiene las propiedades siguientes:  $R^\top R = I^{3 \times 3}$ ,  $\det(R)=1$  y  $R_a^b = (R_b^a)^{-1} = (R_b^a)^\top$ .

La transformación de un vector expresado en un sistema coordenado inicial a otro sistema coordenado final se puede expresar como  $v_{final} = R_{inicial}^{final} v_{inicial}$ .

La matriz de rotación correspondiente a la rotación de  $\beta$  grados alrededor del eje  $\lambda$  puede obtenerse como sigue:

$$R_a^b(\lambda, \beta) = I + S(\lambda) \sin \beta + (1 - \cos \beta) S^2(\lambda) \quad (3.11)$$

donde el operador  $S(\cdot)$  es la matriz anti-simétrica que representa un producto vectorial tal que:

$$x \times y = S(x)y = -S(y)x = S(y)^\top x = \begin{bmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

La ecuación (3.11) puede expresarse en términos de cuaterniones unitarios como sigue:

$$R_b^a(\mathbf{q}) = I + 2\eta S(\epsilon) + 2S^2(\epsilon) \quad (3.13)$$

Otra manera de describir la matriz de rotación es usando los ángulos de Euler:

$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$R_y(\phi) = \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & \sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \phi & 0 & \cos \phi \end{bmatrix}$$

$$R_z(\psi) = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

donde los ángulos  $\theta$ ,  $\phi$  y  $\psi$  son los ángulos de rotación alrededor de los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$  respectivamente.

La derivada de la matriz de rotación con respecto al tiempo es, [21]:

$$\dot{R}_b^a = -\Omega_b^a \times R_b^a \quad (3.14)$$

donde  $\Omega_b^a$  es el vector de la velocidad angular del sistema coordenado  $b$  expresada en el sistema coordenado  $a$  cumpliendo la propiedad  $\Omega_b^a = -\Omega_a^b$  resultando en:

$$\dot{R}_b^a = S(\Omega_b^a)R_b^a = R_b^aS(\Omega_a^b) \quad (3.15)$$

### 3.3 Dinámica del Satélite en el Espacio

Para explicar la dinámica del satélite en el espacio, es necesario el uso de dos ecuaciones diferenciales, la primera relacionada con la cantidad de momento angular, mejor conocida como la dinámica de cuerpo rígido y la otra, asociada con la orientación del satélite, conocida como la cinemática del satélite.

En este proyecto de investigación se omitió el análisis de translación del satélite, ya que éste mantendrá su movimiento natural en su órbita hasta el fin de su ciclo de vida, sin la posibilidad de corregir su curso con medios como toberas de propulsión, por lo que el análisis que se muestra a continuación se limitará a la Dinámica y Cinemática rotacional.

#### 3.3.1 Dinámica de Cuerpo Rígido

En la figura 3.8 se muestran diferentes sistemas coordenados, el sistema coordenado inercial  $\mathcal{S}^I$  es el definido por los ejes  $x_i$ ,  $y_i$  y  $z_i$  y el sistema coordenado del cuerpo del satélite  $\mathcal{S}^B$  es el definido por los ejes  $x_b$ ,  $y_b$  y  $z_b$ . El sistema  $\mathcal{S}^B$  se mueve con una velocidad angular  $\Omega_b^i$  respecto del sistema coordenado  $\mathcal{S}^I$ .

Se define el vector  $r'_i$  que es la distancia entre el centro de masa del satélite, el cual también es la diferencia entre la distancia del centro de masa del satélite al centro del sistema  $\mathcal{S}^I$  y la distancia de la masa de alguna partícula del satélite  $m_i$  al centro del sistema  $\mathcal{S}^I$ .

Para calcular la cantidad momento angular del satélite  $L_i$  respecto al sistema coordenado  $\mathcal{S}^I$ , se considera la siguiente definición [23]:

$$L_i = \sum_{i=1}^n r'_i \times m_i(\Omega_b^i \times r'_i) \quad (3.16)$$

### 3.3. DINÁMICA DEL SATÉLITE EN EL ESPACIO

Expresando el producto vectorial en su forma matricial se tiene que:

$$L_i = \sum_{i=1}^n r'_i \times m_i (\Omega_b^i \times r'_i) = \sum_{i=1}^n m_i S(r'_i) S(\Omega_b^i) r'_i = \sum_{i=1}^n m_i S(r'_i) S(r'_i)^\top \Omega_b^i = J_b \Omega_b^i$$

y se puede observar que:

$$J_b = \sum_{i=1}^n m_i S(r'_i) S(r'_i)^\top \Omega_b^i = \sum_{i=1}^n m_i \begin{bmatrix} y_i'^2 + z_i'^2 & -x_i' y_i' & -x_i' z_i' \\ -y_i' x_i' & x_i'^2 + z_i'^2 & -y_i' z_i' \\ -z_i' x_i' & -z_i' y_i' & x_i'^2 + y_i'^2 \end{bmatrix} \Omega_b^i \quad (3.17)$$

siendo  $J_b$ , definida en la ecuación (3.17), el tensor de inercia del satélite, que se puede interpretar como la distribución de masas de un cuerpo en el sistema coordenado  $\mathcal{S}^B$  respecto al sistema coordenado  $\mathcal{S}^I$  [24].

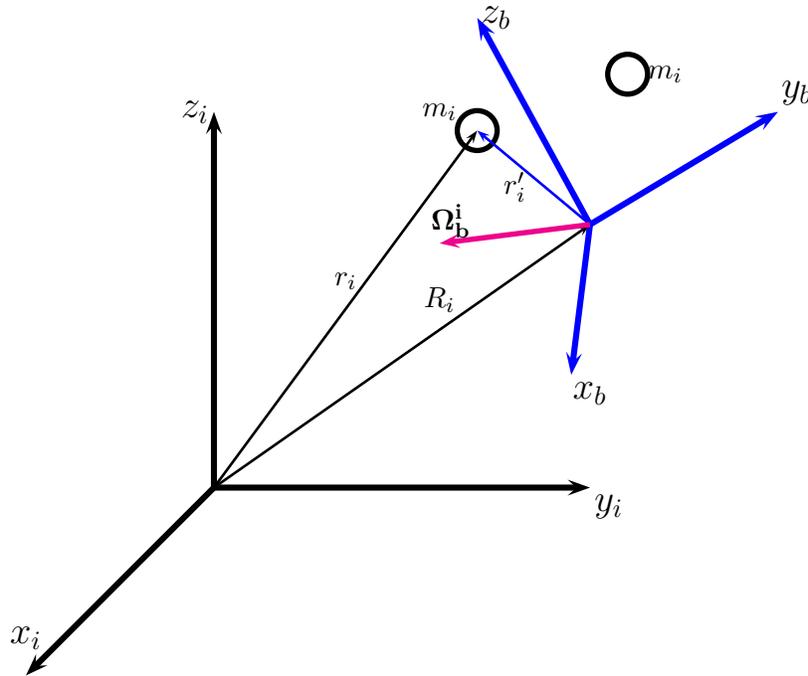


Figura 3.8: Sistemas coordenados de referencia.

La derivada de la cantidad de momento angular alrededor del centro de masa del satélite, considerando la ecuación (3.16), es expresada como:

$$\frac{d}{dt} L_i = \sum_{i=1}^n r'_i \times m_i [\Omega_b^i \times (\Omega_b^i \times r'_i)] + r'_i \times m_i (\dot{\Omega}_b^i \times r'_i) \quad (3.18)$$

Simplificando términos, de acuerdo a la ecuación (3.17) y para un cuerpo rígido, se tiene que:

$$\sum_{i=1}^n r'_i \times m_i [\Omega_b^i \times (\Omega_b^i \times r'_i)] = \Omega_b^i \times J_b \Omega_b^i \quad (3.19)$$

$$\sum_{i=1}^n r'_i \times m_i (\dot{\Omega}_b^i \times r'_i) = J_b \dot{\Omega}_b^i \quad (3.20)$$

y sustituyendo las ecuaciones (3.19) y (3.20) en (3.18) resulta:

$$J \dot{\Omega}_b^i + \Omega_b^i \times J_b \Omega_b^i = \tau \quad (3.21)$$

que es la ecuación diferencial de la dinámica de cuerpo rígido del satélite con respecto al sistema  $S^I$ , siendo  $\tau$  los pares de perturbación y de control.

### 3.3.2 Cinemática

En la sección 3.3.1 se resolvió el problema de la dinámica de cuerpo rígido, es decir, con la presencia de pares perturbadores o de control se puede observar la velocidad angular con la que se mueve un cuerpo, la cual depende de sus propiedades de distribución de masas, pero aún no se conoce la orientación que este cuerpo tendrá bajo la acción de dichos pares.

Para expresar la orientación del cuerpo rígido, se usará un cuaternión unitario  $\mathbf{q}_b^i = [\eta \ \epsilon^\top]^\top$ , que está en función de un vector de giro unitario  $\lambda$  y un ángulo de rotación en torno a dicho eje  $\theta$  expresados en el sistema coordenado  $S^I$ .

Si se definen los componentes del cuaternión unitario  $\mathbf{q}_b^i$  como  $\eta = \cos \beta$  y  $\epsilon = \lambda \sin \beta$ , su derivada respecto al tiempo es [21]:

$$\frac{d\mathbf{q}_b^i}{dt} = \begin{bmatrix} -\frac{d\beta}{dt} \sin \beta \\ \frac{d\lambda}{dt} \sin \beta + \lambda \frac{d\beta}{dt} \cos \beta \end{bmatrix}$$

donde se considera que:

$$\begin{aligned} \frac{d\beta}{dt} &= \|\Omega_b^i\| && \text{es la magnitud de la velocidad angular alrededor del eje } \lambda \\ \lambda \frac{d\beta}{dt} &= \Omega_b^i && \text{es el vector de velocidad angular} \end{aligned}$$

y haciendo:

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\Omega_b^i \times \lambda$$

se tiene que:

$$\frac{d\mathbf{q}_b^i}{dt} = \begin{bmatrix} -\|\Omega_b^i\| \cdot \|\epsilon\| \\ -\Omega_b^i \times \epsilon + \eta \Omega_b^i \end{bmatrix}$$

y haciendo  $\|\Omega_b^i\| \cdot \|\epsilon\| = (\|\Omega_b^i\| \lambda) \cdot (\|\epsilon\| \lambda) = \Omega_b^i \cdot \epsilon = \epsilon^\top \Omega_b^i$ , ya que  $\lambda \cdot \lambda = 1$ , resulta:

$$\frac{d\mathbf{q}_b^i}{dt} = \begin{bmatrix} -\epsilon^\top \Omega_b^i \\ -\Omega_b^i \times \epsilon + \eta \Omega_b^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\epsilon^\top \Omega_b^i \\ (\eta I + S(\epsilon)) \Omega_b^i \end{bmatrix}$$

donde  $I$  es la matriz identidad de dimensiones  $3 \times 3$ .

Puede notarse que la derivada del cuaternión respecto al tiempo, puede expresarse como un producto de cuaterniones, donde  $\mathbf{V}_\Omega = [0 \ \Omega_b^i{}^\top]^\top$ , tal que :

### 3.4. CAMPO MAGNÉTICO TERRESTRE

$$\dot{\mathbf{q}}_b^i = \mathbf{q}_b^i \otimes \mathbf{V}_\Omega = \begin{bmatrix} \dot{\eta} \\ \dot{\epsilon} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta & -\epsilon_1 & -\epsilon_2 & -\epsilon_3 \\ \epsilon_1 & \eta & -\epsilon_3 & \epsilon_2 \\ \epsilon_2 & \epsilon_3 & \eta & -\epsilon_1 \\ \epsilon_3 & -\epsilon_2 & \epsilon_1 & \eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix}$$

Finalmente, expresando el cuaternión unitario  $\mathbf{q}_b^i$  en función de un ángulo medio  $\beta/2$ , la cinemática del satélite es :

$$\dot{\mathbf{q}}_b^i = \begin{bmatrix} \dot{\eta} \\ \dot{\epsilon} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\epsilon^\top \Omega_b^i \\ \frac{1}{2}[\eta I + S(\epsilon)]\Omega_b^i \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

### 3.4 Campo Magnético Terrestre

El modelo para calcular el campo magnético terrestre, que fue estudiado en este proyecto de investigación, es el IGRF, propuesto por la IAGA. Consiste en un modelo armónico esférico que usa coeficientes gaussianos  $g_n^m$  y  $h_n^m$ , que son actualizados cada cinco años. Al final de cada periodo, algunas propuestas son discutidas por la IAGA y la mejor que se aproxime a los datos disponibles es seleccionada.

Es importante mencionar que este modelo no considera variaciones aleatorias en el campo magnético terrestre debido a perturbaciones externas como la actividad solar, que causan variaciones significativas en el campo magnético de hasta 400nT [25].

El campo magnético terrestre  $\mathbf{B}$  es descrito como el gradiente negativo de una función potencial escalar  $V$  tal que:

$$\mathbf{B} = -\nabla V(r, \theta, \phi) \quad (3.23)$$

donde:

$$V(r, \theta, \phi) = a \sum_{n=1}^k \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} \sum_{m=0}^n (g_n^m \cos m\phi + h_n^m \sin m\phi) P_n^m(\theta) \quad (3.24)$$

siendo  $a$  el radio de referencia de la Tierra ( $a=6371.7\text{km}$ ),  $r$ ,  $\theta$  y  $\phi$  son las coordenadas geocéntricas de un cuerpo ( $r$  es el radio en kilómetros,  $\theta$  es la co-latitud donde  $\theta = 90^\circ - \mu$ ,  $\mu$  la latitud y  $\phi$  es la longitud),  $g_n^m$  y  $h_n^m$  son los coeficientes gaussianos y  $P_n^m(\theta)$  representa las funciones Schmidt cuasi-normalizadas asociadas de Legendre de grado  $n$  y orden  $m$ .

Las derivadas parciales de la función escalar  $V(r, \theta, \phi)$  se llevan a cabo de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} b_r &= -\frac{\partial V}{\partial r} = \sum_{n=1}^k \left(\frac{a}{r}\right)^{n+2} (n+1) \sum_{m=0}^n (g_n^m \cos m\phi + h_n^m \sin m\phi) P_n^m(\theta) \\ b_\theta &= -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = -\sum_{n=1}^k \left(\frac{a}{r}\right)^{n+2} \sum_{m=0}^n (g_n^m \cos m\phi + h_n^m \sin m\phi) \frac{\partial P_n^m(\theta)}{\partial \theta} \\ b_\phi &= -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} = -\frac{1}{\sin \theta} \sum_{n=1}^k \left(\frac{a}{r}\right)^{n+2} \sum_{m=0}^n m (g_n^m \cos m\phi + h_n^m \sin m\phi) P_n^m(\theta) \end{aligned} \quad (3.25)$$

donde  $b_r$ ,  $b_\theta$ , y  $b_\phi$  es la intensidad del campo magnético expresado en un sistema coordenado local tangencial. Los polinomios asociados de Legendre  $P_n^m(\theta)$  son calculados de acuerdo a las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} P_{1,1} &= \sin \theta & P_{2,1} &= 3 \cos \theta \sin \theta & P_{3,1} &= \frac{3}{2} \sin \theta (5 \cos^2 \theta - 1) \\ P_{2,2} &= 3 \sin^2 \theta & P_{3,2} &= 15 \cos \theta \sin^2 \theta & & \\ P_{3,3} &= 15 \sin^3 \theta & & & & \end{aligned} \quad (3.26)$$

Es necesaria una conversión de sistemas coordenados para expresar el vector de campo magnético terrestre en el sistema coordenado  $\mathcal{S}^E$ . Previamente se lleva a cabo una conversión de sistemas coordenados, del sistema local tangencial al sistema NED:

$$b_{NED} = \begin{bmatrix} -b_\theta - b_r \sin \epsilon \\ b_\phi \\ b_\theta \sin \epsilon - b_r \cos \epsilon \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

donde  $\epsilon$  es un parámetro relacionado con la forma ovalada de la Tierra.

El último paso es la conversión del sistema coordenado NED al sistema  $\mathcal{S}^E$  construyendo una matriz DCM que relaciona ambos sistemas coordenados usando la información de la latitud y longitud del satélite.

$$DCM_{ned,e} = \begin{bmatrix} -\sin \mu \cos \phi & -\sin \mu \sin \phi & \cos \mu \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ -\cos \mu \cos \phi & -\cos \mu \sin \phi & -\sin \mu \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

y el vector de campo magnético en el sistema coordenado  $\mathcal{S}^E$  es obtenido usando la matriz DCM de la ecuación (3.28):

$$b_E = (DCM_{ned,e})^\top b_{NED} \quad (3.29)$$

### 3.5 Vector de Sol

Para determinar el vector de sol, ha sido programado un algoritmo usado para aplicaciones de radiación [26] que es válido entre el año 2000 a.C. al 6000 d.C. con una incertidumbre de  $\pm 0.0003$ . El algoritmo consiste en la aproximación lineal de los modelos originales, por lo que el cómputo es optimizado. Para adaptar este modelo a aplicaciones satelitales, la salida de este algoritmo (ángulo solar del azimut y cenit), ha sido transformada al sistema coordenado  $\mathcal{S}^E$ .

Los siguientes pasos describen brevemente el algoritmo que ha sido programado.

- **Cálculo del día, siglo y milenio Juliano y sus efemérides:**

Día Juliano ( $INT$ =entero del término calculado,  $Y$ =año,  $M$ =mes del año,  $D$ =Día del mes en tiempo decimal  $B=0$  para el calendario Juliano y  $B = 2 - A + INT(A/4)$  para el cálculo gregoriano, donde  $A = INT(Y/100)$ ):

$$JD = INT(365.25(Y + 4716)) + INT(30.6001(M + 1)) + D + B - 1524.5 \quad (3.30)$$

Efeméride del Día Juliano (en el programa,  $\Delta T$  fue fijado a cero):

$$JDE = JD + \frac{\Delta T}{86400} \quad (3.31)$$

Siglo Juliano:

$$JC = \frac{JD - 2451545}{36525} \quad (3.32)$$

Efeméride del Siglo Juliano:

$$JCE = \frac{JDE - 2451545}{36525} \quad (3.33)$$

Efeméride del Milenio Juliano:

$$JME = \frac{JCE}{10} \quad (3.34)$$

### 3.5. VECTOR DE SOL

- **Cálculo de la longitud, latitud y vector del radio heliocéntrico de la Tierra ( $L_s$ ,  $B_s$  y  $R_s$ ):**

Longitud (en radianes):

$$L_s = \frac{L0 + L1 \cdot JME + L2 \cdot JME^2 + L3 \cdot JME^3 + L4 \cdot JME^4 + L5 \cdot JME^5}{10^8} \quad (3.35)$$

donde cada uno de los términos  $L_i$ ,  $i = 0, 1, \dots$  son calculados como:

$$L0 = \sum_{i=0}^n L0_i; \quad L0_i = A_i \cos(B_i + C_i JME) \quad (3.36)$$

donde  $i$  es la fila de los términos  $L0$  en la tabla B.1, y  $A$ ,  $B$  y  $C$  corresponden a las columnas. Para los términos  $L1$ ,  $L2, \dots$  son calculados de la misma manera usando sus valores correspondientes de la tabla B.1.

La latitud  $B_s$  y el vector del radio  $R_s$  son calculados con el mismo método presentado anteriormente, usando sus valores correspondientes en la tabla B.1. Una vez obtenidos  $L_s$ ,  $B_s$ , y  $R_s$ , estos deben ser convertidos en grados.

- **Cálculo de la longitud y latitud geocéntrica ( $\Theta_s$  y  $\beta_s$ ):**

$$\Theta_s = L + 180; \quad \beta_s = -B \quad (3.37)$$

- **Cálculo de la nutación en longitud y oblicuidad ( $\Delta\psi_s$  y  $\Delta\epsilon_s$ ):**

$$\Delta\psi_s = \frac{\sum_{i=0}^n \Delta\psi_i}{36000000}; \quad \Delta\epsilon_s = \frac{\sum_{i=0}^n \Delta\epsilon_i}{36000000} \quad (3.38)$$

donde:

$$\Delta\psi_i = (a_i + b_i JCE) \sin\left(\sum_{j=0}^4 X_j Y_{i,j}\right) \quad (3.39)$$

$$\Delta\epsilon_i = (c_i + d_i JCE) \cos\left(\sum_{j=0}^4 X_j Y_{i,j}\right) \quad (3.40)$$

donde los valores  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$  y  $d_i$  son valores que corresponden a la  $i$ -ésima fila de las columnas  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$  de la tabla B.2,  $Y_{i,j}$  es el valor que corresponde a la  $i$ -ésima fila y  $j$ -ésima columna en la tabla B.2, y

$$X_0 = 297.85036 + 445267.111480JCE - 0.0019142JCE^2 + \frac{JCE^3}{189474} \quad (3.41)$$

$$X_1 = 357.52772 + 35999.050340JCE - 0.0001603JCE^2 - \frac{JCE^3}{300000} \quad (3.42)$$

$$X_2 = 134.96298 + 477198.867398JCE - 0.0086972JCE^2 + \frac{JCE^3}{56250} \quad (3.43)$$

$$X_3 = 93.27191 + 483202.017538JCE - 0.0036825JCE^2 + \frac{JCE^3}{327270} \quad (3.44)$$

CAPÍTULO 3. MODELADO MATEMÁTICO DEL SATÉLITE Y ENTORNO ESPACIAL

$$X_4 = 125.04452 - 1934.136261JCE + 0.0036825JCE^2 + \frac{JCE^3}{327270} \quad (3.45)$$

los cuales corresponden a la elongación media de la Luna desde el Sol, la anomalía media del Sol y de la Luna, el argumento de latitud de la Luna, y la longitud del nodo ascendente de la órbita media de la Luna en la eclíptica medido desde el equinoccio de la respectiva fecha; todos los valores en grados.

- **Cálculo de la oblicuidad verdadera de la eclíptica ( $\epsilon_s$ ):**

$$\epsilon_s = \frac{\epsilon_0}{3600} + \Delta\epsilon_s \quad (3.46)$$

donde  $\epsilon_0$  es la oblicuidad media de la eclíptica, calculado como:

$$\epsilon_0 = 84381.448 - 4680.93U - 1.55U^2 + 1999.25U^3 - 51.38U^4 - 249.67U^5 - 39.05U^6 + 7.12U^7 + 27.87U^8 + 5.79U^9 + 2.45U^{10} \quad (3.47)$$

y  $U = JME/10$ .

- **Cálculo de la corrección de aberración ( $\Delta\tau_s$ ):**

$$\Delta\tau_s = -\frac{20.4898}{3600 * R_s} \quad (3.48)$$

- **Cálculo de la longitud aparente del Sol ( $\lambda_s$ ):**

$$\lambda_s = \Theta_s + \Delta\psi_s + \Delta\tau_s \quad (3.49)$$

- **Cálculo del tiempo aparente sideral en Greenwich en cualquier tiempo dado ( $\nu_s$ ):**

$$\nu_s = \nu_0 + \Delta\psi_s \cos(\epsilon_s) \quad (3.50)$$

donde  $\nu_0$  es el tiempo medio sideral en Greenwich, en grados, y es calculado como:

$$\nu_0 = 280.46061837 + 360.98564736629(JD - 2451545) + 0.000387933JC^2 - \frac{JC^3}{38710000} \quad (3.51)$$

- **Cálculo de la ascensión derecha geocéntrica del Sol ( $\alpha_s$ ):**

$$\alpha_s = \arctan2\left(\frac{\sin \lambda_s \cos \epsilon_s - \tan \beta_s \sin \epsilon_s}{\cos \lambda_s}\right) \quad (3.52)$$

donde  $\arctan2$  es una función arco tangente que mantiene a  $\alpha_s$  en el cuadrante derecho.

- **Cálculo de la declinación geocéntrica del Sol ( $\delta_s$ ):**

$$\delta_s = \arcsin(\sin \beta_s \cos \epsilon_s + \cos \beta_s \sin \epsilon_s \sin \lambda_s) \quad (3.53)$$

- **Cálculo del ángulo de la hora local del observador ( $H_s$ ):**

$$H_s = \nu_s + \sigma_s - \alpha_s \quad (3.54)$$

donde  $\sigma_s$  es la longitud geográfica del observador, positivo o negativo para el Este u Oeste de Greenwich.

### 3.5. VECTOR DE SOL

- **Cálculo de la ascensión derecha topocéntrica del Sol ( $\alpha'_s$ ):**

$$\alpha'_s = \alpha_s + \Delta\alpha_s \quad (3.55)$$

donde  $\Delta\alpha_s$  es el paralaje en la ascensión derecha del Sol. Después de su cálculo, éste debe ser convertido en grados.

$$\Delta\alpha_s = \arctan2\left(\frac{-x_s \sin \xi_s \sin H_s}{\cos \delta_s - x_s \sin \xi_s \cos H_s}\right) \quad (3.56)$$

donde:

$$\xi_s = \frac{8.794}{3600R_s} \quad (3.57)$$

$$x_s = \cos u_s + \frac{E_s}{6378140} \cos \varphi_s \quad (3.58)$$

$$u_s = \arctan(0.99664719 \tan \varphi_s) \quad (3.59)$$

$$y_s = 0.99664719 \sin u_s + \frac{E_s}{6378140} \sin \varphi_s \quad (3.60)$$

donde  $\varphi_s$  es la latitud geográfica del observador, positiva o negativa en el caso del Norte o Sur del ecuador y  $E_s$  es la elevación del observador (en metros).

- **Cálculo de la declinación topocéntrica del Sol ( $\delta'_s$ ):**

$$\delta'_s = \arctan2\left(\frac{(\sin \delta_s - y \sin \xi_s) \cos \Delta\alpha_s}{\cos \delta_s - x_s \sin \xi_s \cos H_s}\right) \quad (3.61)$$

- **Cálculo del ángulo de la hora local topocéntrica ( $H'_s$ ):**

$$H'_s = H_s - \Delta\alpha_s \quad (3.62)$$

- **Cálculo del ángulo del zenith topocéntrico ( $\theta_s$ ):**

$$\theta_s = 90 - e_s \quad (3.63)$$

donde  $e_s = e_0 + \Delta e_s$  es el ángulo de elevación topocéntrica en grados y  $e_0$  es el ángulo de elevación topocéntrica sin corrección de refracción atmosférica en grados, calculado como:

$$e_0 = \arcsin(\sin \varphi_s \sin \delta'_s + \cos \varphi_s \cos \delta'_s \cos H'_s) \quad (3.64)$$

y

$$\Delta e_s = \frac{283P_s}{1010(273 + T_s)} \frac{1.02}{60 \tan\left(e_0 + \frac{10.3}{e_0 + 5.11}\right)} \quad (3.65)$$

donde  $P_s$  es presión anual local promedio (en millibars),  $T_s$  es la temperatura anual local promedio en °C.

- **Cálculo del ángulo del azimut topocéntrico ( $\phi_s$ ):**

$$\phi_s = \Gamma_s + 180 \quad (3.66)$$

donde  $\Gamma_s$  es el ángulo del azimut local usado por astrónomos, y éste es defino por:

$$\Gamma_s = \arctan2\left(\frac{\sin H'_s}{\cos H'_s \sin \varphi_s - \tan \delta'_s \cos \varphi_s}\right) \quad (3.67)$$

- **Conversión del ángulo del cenit y azimut del Sol al sistema coordenado NED ( $s_{NED}$ )**

$$s_{NED} = \begin{bmatrix} s_N \\ s_E \\ s_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi_s \sin \theta_s \\ \sin \phi_s \sin \theta_s \\ -\cos \theta_s \end{bmatrix} \quad (3.68)$$

La matriz de transformación definida por la ecuación (3.28) es usada para convertir el vector de Sol del sistema coordenado NED al  $\mathcal{S}^E$ :

$$s_E = (DCM_{ned,e})^\top s_{NED} \quad (3.69)$$

### 3.6 Principales Perturbaciones Espaciales

En el espacio existen perturbaciones que afectan tanto a la orientación como la translación de satélites en cualquier tipo de órbita.

Para el estudio de la dinámica del satélite bajo la acción de esquemas de control se considerarán aquellas que afecten la orientación del satélite ya que el estudio de la órbita del satélite queda fuera del alcance de esta tesis. En el caso de la órbita del satélite en estudio, las principales perturbaciones son la gravedad de la Tierra, el campo magnético terrestre y el arrastre aerodinámico, debido a que la órbita del nanosatélite HumSat-México será de órbita baja.

#### 3.6.1 Pares de Origen Magnético

Los pares magnéticos en un satélite resultan tanto de una estrategia de control utilizando actuadores que generan momentos de dipolo magnético o de la magnetización del satélite causado por algunos de sus componentes tales como sensores y actuadores o de campos magnéticos residuales de efectos de carga espacial. Para satélites en órbita con una altitud de más de 800 kilómetros, los pares de origen magnético son frecuentemente las principales perturbaciones que afectan la orientación del satélite.

Si  $\mathbf{m}$  es el momento magnético del satélite en [ $A \ m^2$ ] y  $\mathbf{B}$  es la densidad de flujo magnético en [ $Wb/m^2$ ], el par magnético está dado por:

$$\tau_{mag} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} \quad (3.70)$$

Se debe subrayar que los valores típicos del campo magnético terrestre a baja altitud en el ecuador son de  $3 \times 10^{-5}$  [ $Wb/m^2$ ] [19].

#### 3.6.2 Pares de Origen Gravitacional

Asumiendo que la fuerza gravitacional de un componente del satélite es diferente de otro respecto a su centro de masa, esta diferencia resulta en un par neto. Esto se expresa mediante:

$$\tau_r = 3\omega_o^2 S(c_3^b) J c_3^b \quad (3.71)$$

donde  $c_3^b = R_o^b [0 \ 0 \ 1]^\top$ ,  $R_o^b$  es la matriz de transformación que relaciona al sistema coordenado  $\mathcal{S}^B$  con el sistema  $\mathcal{S}^O$ , cuyo eje  $z_o$  apunta al centro de la Tierra y  $x_o$  coincide con la dirección de desplazamiento del satélite a lo largo de su órbita [18].

Cabe mencionar que esta expresión también sirve para satélites que cuentan con gradiente gravitacional, es decir, una masa que se despliega del satélite y este provee estabilización en la guiñada del satélite. Para el nanosatélite HumSat-México, se considerará como una perturbación externa.

### 3.6. PRINCIPALES PERTURBACIONES ESPACIALES

#### 3.6.3 Pares de Origen Aerodinámico

Los satélites en órbita con una altitud menor de 800 kilómetros, el par aerodinámico es generalmente la perturbación ambiental más importante. La misión de un satélite llega a su fin frecuentemente cuando el par aerodinámico es tan grande que el satélite entra a la atmósfera de la Tierra y el sistema de estabilización deja de ser efectivo [18].

Para la simulación de los modelos matemáticos del nanosatélite HumSat-México no se considera este tipo de perturbación aún cuando la altitud deseada es de aproximadamente 380 a 900 kilómetros, pero se recomienda el estudio de este tipo de perturbaciones en trabajos futuros.

---

## CAPÍTULO 4

# MODELADO DE SENSORES Y ACTUADORES

---

En este capítulo se describirán los modelos matemáticos de los sensores y actuadores como parte del análisis de la dinámica del satélite bajo la acción de un esquema de control y estimación de la orientación.

Los modelos matemáticos de los sensores que se presentan a continuación, simulan la lectura que éstos podrían proporcionar durante la misión del nanosatélite HumSat-México. Aún cuando no se ha considerado un modelo comercial para cada sensor, es posible realizar una adaptación posterior a los modelos matemáticos que se presentarán en las siguientes secciones para simular el tipo de dato y el tiempo de muestreo de cada sensor.

El modelado de los actuadores tiene como objetivo el conocer par generado por ellos, de acuerdo a un esquema de control. No obstante, es posible una adaptación de estos modelos para relacionar el modelo mecánico con el eléctrico, así como la propuesta de un control PWM para obtener el par deseado que generarán los actuadores bajo los comandos de control de orientación.

### 4.1 Sensores

Existen una gran variedad de sensores de aplicación satelital que permiten el cálculo de la orientación del satélite en un sistema coordinado de referencia. Según los parámetros de diseño del satélite y requerimientos de la misión, se deben seleccionar los sensores que mejor proporcionen esta información. Para el proyecto HumSat-México, se consideraron magnetómetros, giróscopos, sensores de Sol y un receptor GPS, pero además se mencionará el modelo de acelerómetro como parte del conjunto de sensores que integran la IMU y el sensor de estrellas como referencia en futuros proyectos satelitales.

#### 4.1.1 Magnetómetro

El magnetómetro es un sensor de referencia inercial (en este caso referido al sistema coordinado  $\mathcal{S}^{\mathcal{E}}$ ) que permite conocer la orientación de un cuerpo en dos ejes, es decir, sólo se conoce el vector de dirección y no el ángulo de rotación en ese mismo eje. Éstos miden la fuerza del campo magnético terrestre, normalmente se miden tres componentes XYZ en el sistema coordinado en el que están configurados los sensores. Estos componentes son normalizados para describir a un vector unitario que está relacionado con la dirección del campo magnético en dicho sistema coordinado, por lo que se puede obtener de manera inmediata la orientación del satélite en dos ejes. La lectura obtenida del magnetómetro tiene la forma:

$$b_B = [b_{Bx} \ b_{By} \ b_{Bz}]^T; |b_B| = 1$$

#### 4.1. SENSORES

Para simular la lectura del magnetómetro, es necesario conocer el modelo del campo magnético de la Tierra, como se menciona en la sección 3.4, tal que la información obtenida es un vector referido al sistema coordenado  $\mathcal{S}^E$ . Mediante el uso de una matriz de transformación, la información obtenida del modelo del campo magnético terrestre es convertida al sistema coordenado  $\mathcal{S}^B$ , es decir:

$$b_B = R_e^b(\mathbf{q}_b^e)b_E = (I - 2\eta S(\epsilon) + 2S(\epsilon)^2)b_E + v(t) \quad (4.1)$$

donde  $\mathbf{q}_b^e$  es el cuaternión unitario que relaciona los sistemas  $\mathcal{S}^B$  y  $\mathcal{S}^E$  y  $v(t)$  es una señal de ruido.

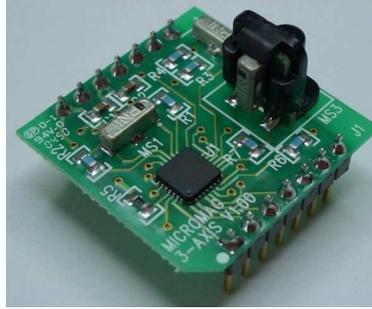


Figura 4.1: Magnetómetro SparkFun de tres ejes (25.4 x 25.4 x 19 mm).

#### 4.1.2 Acelerómetro

Al igual que el magnetómetro, el acelerómetro es un sensor que permite conocer la orientación de un cuerpo en dos ejes referido al sistema coordenado NED. Éstos miden las aceleraciones en la que está sujeto un cuerpo, incluyendo la gravedad terrestre. La lectura obtenida del acelerómetro es normalizada, es decir:

$$a_B = [a_{Bx} \ a_{By} \ a_{Bz}]^T; |a_B| = 1$$

De manera similar que en la ecuación (4.1), su modelo matemático es:

$$a_B = R_e^b(\mathbf{q}_b^e)a_E = (I - 2\eta S(\epsilon) + 2S(\epsilon)^2)a_E + v(t) \quad (4.2)$$

en donde  $a_E$  es el vector de gravedad terrestre, que es normal al plano de la superficie de la Tierra.

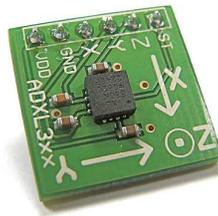


Figura 4.2: Acelerómetro ADXL330 en tres ejes con un microcontrolador AVR.

### 4.1.3 Sensores de Sol

A diferencia de los dos sensores anteriores, la información obtenida de este sensor es un vector que describe la dirección al Sol referido al sistema  $\mathcal{S}^{\mathcal{I}}$ . La información obtenida de estos sensores es un vector unitario expresado en el sistema coordinado Sistema Coordinado fijo al Cuerpo del Satélite ( $\mathcal{S}^{\mathcal{B}}$ ):

$$s_B = [s_{Bx} \ s_{By} \ s_{Bz}]^{\top}; \ |s_B| = 1$$

Sin embargo, para obtener la información de la dirección del Sol, es necesario un pre-proceso, considerando la configuración de estos sensores distribuidos en la superficie del satélite para cubrir una línea de vista de  $4\pi$ , haciendo necesario una transformación del sistema coordinado de los sensores al  $\mathcal{S}^{\mathcal{B}}$ .

Una desventaja que representa el uso de estos sensores es cuando el satélite se encuentra en la fase de eclipse y en este caso, la información del vector de Sol ya no está disponible.

El vector de Sol obtenido de estos sensores tiene la forma:

$$s_B = [s_{Bx} \ s_{By} \ s_{Bz}]^{\top} \ |s_B| = 1 \quad (4.3)$$

Para el modelado de estos sensores es necesario el uso de un modelo que estime el vector de Sol en el sistema coordinado  $\mathcal{S}^{\mathcal{E}}$ , como se menciona en la sección 3.5, y mediante una transformación de coordenadas del sistema  $\mathcal{S}^{\mathcal{E}}$  al  $\mathcal{S}^{\mathcal{B}}$ , de manera similar que los sensores anteriores, se tiene:

$$s_B = R_e^b(\mathbf{q}_b^e) s_E = (I - 2\eta S(\epsilon) + 2S(\epsilon)^2) s_E + v(t) \quad (4.4)$$



Figura 4.3: Sensores finos de Sol TNO, utilizado en diversas misiones en órbitas LEO.

En términos de hardware, tanto en sensores de Sol como en magnetómetros y acelerómetros, es posible que sea necesario el uso de una matriz que describa la orientación de cada sensor referido al sistema coordinado  $\mathcal{S}^{\mathcal{B}}$ , de tal manera que:

$$y_B = A_{sensor}^B y_{sensor} \quad (4.5)$$

donde  $y_B$  ( $3 \times 1$ ) es el vector que contiene la información de la dirección del Sol referido al sistema  $\mathcal{S}^{\mathcal{B}}$ ,  $y_{sensor}$  ( $n \times 1$ ) es el vector de la información directa de los sensores colocados en la superficie del satélite y  $A_{sensor}^B = [Y_{s1} \ Y_{s2} \ \dots \ Y_{sn}]$  es la matriz ( $3 \times n$ ) que describe la orientación  $Y_{sn}$  de los sensores.

### 4.1.4 Sensor de Estrellas

Este tipo de sensores proporciona la información de la orientación en tres ejes del satélite, expresada en el sistema coordinado  $\mathcal{S}^{\mathcal{I}}$ . Usualmente esta información se da en cuaterniones unitarios.

#### 4.1. SENSORES

Su principio de operación es la identificación y comparación de un patrón de estrellas con un catálogo estelar. Con una sola estrella se tiene información de la orientación del satélite en dos ejes, con dos o más estrellas se tiene la información de la orientación en tres ejes. Como la posición de las estrellas se expresa en el sistema  $\mathcal{S}^I$ , la información de la orientación obtenida por el sensor de estrellas se expresa de igual manera en el sistema  $\mathcal{S}^I$ .

Su modelo matemático es:

$$\mathbf{q}_{sensor} = \mathbf{q}_b^i + v(t)$$

donde  $v(t)$  es una señal de ruido.



Figura 4.4: Sensor de estrellas Comtech AeroAstro miniaturizado de 375 gramos.

Aunque en este proyecto se omite el uso de este tipo de sensores y en consecuencia se omite su estudio de manera rigurosa, familiarizarse con este tipo de sensores es de gran importancia para considerarlos en futuros proyectos satelitales donde se requiera mejor precisión en la información de la orientación del satélite, por lo que será necesario un estudio de configuración de hardware (transformación de coordenadas del sensor al  $\mathcal{S}^B$ ) y un análisis de los puntos ciegos a lo largo de su órbita debida al Sol, la Luna y la Tierra.

#### 4.1.5 Receptor GPS

Un receptor GPS proporciona básicamente la posición, velocidad y tiempo de un objeto en la Tierra. Su principio de funcionamiento es la medición del retraso de propagación de una señal de GPS que viaja del satélite al receptor. Son necesarias las mediciones de cuatro satélites del sistema GPS para obtener los parámetros antes mencionados [4].

El formato de posición obtenido por un receptor de GPS está dado por la altitud, longitud y latitud. Una forma de modelarlo matemáticamente es conociendo las efemérides de la órbita del satélite descritas en la sección 3.1. En el caso de una órbita circular, donde la velocidad angular con la que el satélite se desplaza es constante, la posición del satélite  $p_I$  en el sistema  $\mathcal{S}^I$  puede determinarse mediante:

$$p_I = R_z(\nu)R_x(i)R_z(\theta_{AN})p_C + v(t)$$

donde  $p_C$  es la posición del satélite en una circunferencia en el plano XY del sistema  $\mathcal{S}^I$ ,  $\theta_{AN}$  es la ascensión derecha del nodo ascendente,  $i$  es la inclinación,  $\nu$  es la anomalía verdadera en radianes y  $v(t)$  es una función que describe la incertidumbre de la posición del satélite.

Para convertir la información de posición  $p_I$  del satélite en el sistema coordenado  $\mathcal{S}^E$ , es necesario realizar la siguiente transformación de coordenadas:

$$p_E = R_i^e p_I$$

donde:

$$R_i^e = \begin{bmatrix} \cos \theta_{GMST2000} & \sin \theta_{GMST2000} & 0 \\ -\sin \theta_{GMST2000} & \cos \theta_{GMST2000} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

siendo  $\theta_{GMST2000}$  el tiempo sideral del meridiano de Greenwich definido como:

$$\begin{aligned} \theta_{GMST2000} = & \theta_{ERA} + 4.0294444 \times 10^{-6} + 1.28115483T + \\ & + 3.87965892 \times 10^{-4}T^2 - 2.59555 \times 10^{-8}T^3 + \\ & + 5.227777 \times 10^{-9}T^4 \end{aligned}$$

donde:

$$\theta_{ERA} = 2\pi(0.7790572732640 + 1.00273781191135448(JD_{2000} - 2451545))$$

es el ángulo de rotación terrestre en radianes y  $T = (JD - 2451545)/36525$  es el número de siglos desde el 1 de Enero del 2000, 12:00:00hrs. Cuando se requiere una mejor precisión en esta transformación de coordenadas se pueden considerar algunos otros parámetros que describen la rotación de la Tierra, como es la precesión y la nutación, ambos debidos a las fuerzas gravitacionales del Sol y la Luna.

La velocidad se modela como:

$$V_{gps} = \frac{pE_t - pE_{t-1}}{\Delta t}$$

y el tiempo es:

$$t_{gps} = JD_{2000} + t_{gps_o} + \Delta t_{gps-utc}$$

donde  $t_{gps_o} = 7300.5$  es el tiempo a partir que el sistema GPS entró en funcionamiento, que es el 6 de Enero de 1980 a las 00:00:00 hrs, y  $\Delta t_{gps-utc}$  es la diferencia entre el tiempo dado por el sistema GPS y el tiempo universal coordinado UTC.

Cabe mencionar que los receptores GPS pueden ser usados como sensores de orientación, usando las diferencias de mediciones de fase en distintas antenas.



Figura 4.5: Módulo Receptor GPS Parallax.

#### 4.1.6 Giróscopos

Con estos dispositivos se obtiene la velocidad angular absoluta del satélite respecto al sistema coordenado  $S^I$ , de tal manera que la medición tiene la forma de:

$$\Omega_b^i = [\omega_x \ \omega_y \ \omega_z]^T + v(t) \quad (4.6)$$

## 4.2. ACTUADORES

donde  $v(t)$  es una función que describe el ruido y la deriva, además que posiblemente en la instalación de estos sensores en el satélite se considere el uso de la ecuación (4.5) para obtener la información de la velocidad angular del satélite cuando se tienen elementos redundantes.

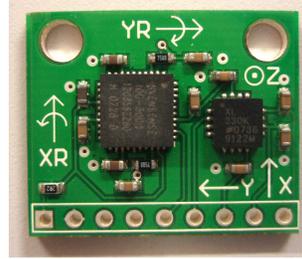


Figura 4.6: Gir6scopo SparkFun SEN-00741.

## 4.2 Actuadores

### 4.2.1 Bobinas de Par Magn6tico



Figura 4.7: Bobinas de par magn6tico Microcosm.

Las bobinas de par magn6tico (BTM) generan un campo magn6tico cuando una corriente es aplicada (figura 4.7). La interacci3n entre el campo magn6tico generado y el campo magn6tico terrestre produce un par externo que es aplicado en el sat6lite. Dicho par es perpendicular al vector de campo magn6tico, por lo que el par generado actúa en dos ejes del sat6lite, esto es:

$$\tau = -b_E \times m_B$$

donde  $b_E$  es el vector del campo magn6tico terrestre expresado en Teslas (densidad de flujo magn6tico), cuyo modelo matem6tico fue descrito en la secci3n 3.4 y  $m$  es el momento magn6tico de las BTMs, expresado en  $[Am^2]$ , el cual es proporcional a la corriente que circula en ellas.

Puede que sea necesario considerar la configuraci3n de las BTMs dentro del sat6lite. Mediante el uso de la ecuaci3n (4.7), se obtiene el momento magn6tico generado en el sistema coordenado  $\mathcal{S}^B$ :

$$m_B = A_{mgt} m_n \quad (4.7)$$

donde  $A_{mgt} = [ Y_{m1} \ Y_{m2} \ \dots \ Y_{mn} ]$  es una matriz de dimensión  $(3 \times n)$  por cada n-BTM instalada en el satélite y describe la orientación  $Y_{mn}$  del momento magnético respecto al sistema  $\mathcal{S}^B$  y  $m_n$  el vector  $(n \times 1)$  de momentos magnéticos de cada BTM.

## 4.2.2 Ruedas Inerciales

Un satélite equipado con ruedas inerciales (figura 4.8) ya no es un cuerpo rígido, debido a la cantidad de movimiento angular independiente de cada rueda que se genera de acuerdo con un comando de control. Esto provee un momento angular extra que contribuye al momento angular total del satélite [27].



Figura 4.8: Rueda Inercial para satélites pequeños RW90 de Astro und Feinwerktechnik Adlershof GmbH.

En la figura 4.9 se muestran diferentes sistemas coordenados, el sistema  $\mathcal{S}^I$  es el definido por los ejes  $x_i, y_i$  y  $z_i$ , el sistema  $\mathcal{S}^B$  es el definido por los ejes  $x_b, y_b$  y  $z_b$ , y el sistema coordenado de una rueda inercial  $\mathcal{S}^W$  es el definido por los ejes  $x_w, y_w$  y  $z_w$ .

El sistema  $\mathcal{S}^B$  se mueve con una velocidad angular  $\Omega_b^i$  respecto del sistema  $\mathcal{S}^I$ , en donde a su vez el sistema  $\mathcal{S}^W$  se mueve respecto del sistema  $\mathcal{S}^B$  con una velocidad angular  $\Omega_w^b$ . A diferencia del análisis que se realizó en la sección 3.3.1, se consideró que el centro del sistema  $\mathcal{S}^I$  coincide con el centro de masa del sistema  $\mathcal{S}^B$ , con el objeto de reducir el análisis matemático que se menciona en los siguientes párrafos.

Se define el vector  $r'_i$  que es la distancia entre el centro de masa del satélite y la masa  $m_i$  que representa la masa de algún componente del satélite, y se define el vector  $r'_j = r_w + R_j$ .

Para calcular la cantidad de momento angular tanto del satélite como de las ruedas inerciales, se considera la ecuación (4.8) que es la cantidad de momento angular de un cuerpo rígido, mencionada anteriormente en la sección 3.3.1:

$$L = \sum_{i=1}^n r'_i \times m_i (\Omega \times r'_i) = J\Omega \quad (4.8)$$

donde  $L$  es la cantidad de movimiento angular del satélite respecto al sistema  $\mathcal{S}^I$ ,  $m_i$  es la masa de una partícula  $i$  del cuerpo del satélite, su velocidad angular es  $\Omega$ , su posición  $r'_i$  y  $J$  es la matriz de inercia del cuerpo.

Considerando las velocidades involucradas en el modelo de la figura 4.9 e integrándolas a la ecuación

## 4.2. ACTUADORES

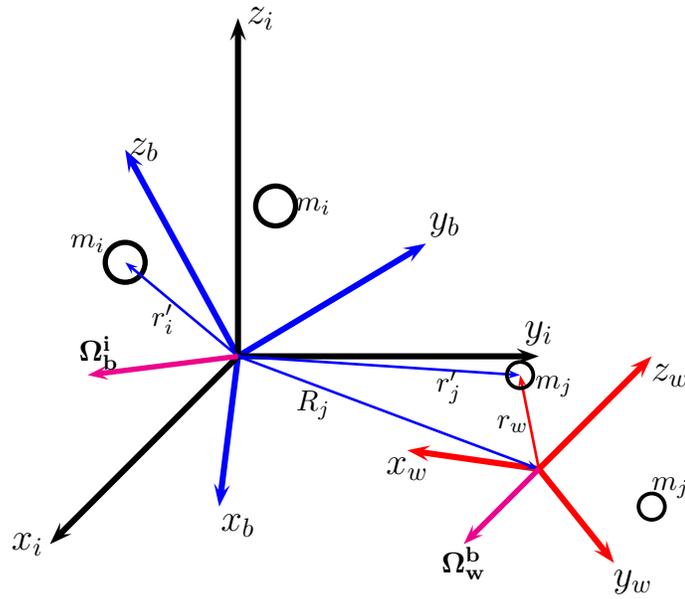


Figura 4.9: Sistemas coordenados de referencia.

(4.8), tenemos:

$$L = \sum_{i=1}^n r'_i \times m_i (\Omega_b^i \times r'_i) + \sum_{j=1}^n (r'_j \times m_j (\Omega_b^i \times r'_j) + r_w \times m_j (\Omega_w^b \times r_w)) \quad (4.9)$$

Sustituyendo  $r'_j = R_j + r_w$  en la ecuación (4.9), se tiene:

$$L = \sum_{i=1}^n r'_i \times m_i (\Omega_b^i \times r'_i) + \sum_{j=1}^n (R_j \times m_j (\Omega_b^i \times R_j) + R_j \times m_j (\Omega_b^i \times r_w) + r_w \times m_j (\Omega_b^i \times R_j) + r_w \times m_j (\Omega_b^i \times r_w) + r_w \times m_j (\Omega_w^b \times r_w)) \quad (4.10)$$

Se debe observar que la expresión de la ecuación (4.10):

$$\sum_{j=1}^n (R_j \times m_j (\Omega_b^i \times r_w) + r_w \times m_j (\Omega_b^i \times R_j)) \quad (4.11)$$

es eliminada, debido a que el centro de masa de las partículas con masa  $m_j$  relativo a la posición  $R_j$  es cero, ya que para este caso,  $R_j$  es constante [28], resultando en la siguiente ecuación:

$$L = \sum_{i=1}^n r'_i \times m_i (\Omega_b^i \times r'_i) + \sum_{j=1}^n (R_j \times m_j (\Omega_b^i \times R_j) + r_w \times m_j (\Omega_b^i \times r_w) + r_w \times m_j (\Omega_w^b \times r_w)) \quad (4.12)$$

y para un cuerpo rígido, se reescribe la ecuación 4.12, obteniendo:

$$L = (J_i^b \Omega_b^i + J_j^b \Omega_b^i) + (J_w^b \Omega_b^i + J_w^b \Omega_w^b) \quad (4.13)$$

o bien:

$$L = J_{sat}^b \Omega_b^i + J_w^b \Omega_w^i + L_w^b \quad (4.14)$$

donde  $L_w^b = J_w^b \Omega_w^b$  es la cantidad de movimiento angular de las ruedas inerciales en el sistema coordenado  $\mathcal{S}^B$ ,  $J_{sat}^b = J_i^b + J_j^b$  es la matriz de inercia del satélite y  $J_w^b$  es la matriz de inercia de la rueda inercial. Entonces la ecuación (4.14) es la cantidad de movimiento angular en términos de las matrices de inercia del satélite y la rueda inercial, y de las velocidades angulares  $\Omega_b^i$  del satélite y  $\Omega_w^b$  de las rueda inercial. Ahora el siguiente paso es incluir en el modelo más de una rueda inercial y la orientación de cada una de ellas, como se muestra en la figura (4.10).

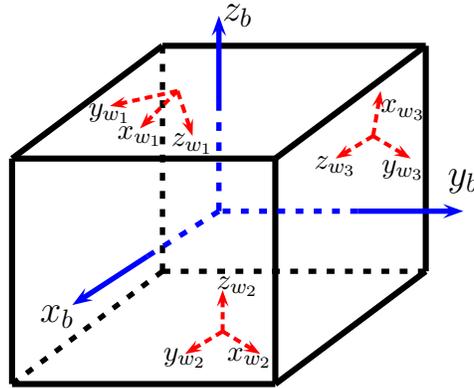


Figura 4.10: Orientación de las ruedas inerciales.

Para modelar la dinámica de las ruedas inerciales se considerará que éstas tienen forma cilíndrica que giran en torno a su eje axial, como se muestra en la figura 4.11, el sistema  $\mathcal{S}^W$  es fijo a la rueda inercial de tal manera que el eje coordenado  $z_w$  coincide con el eje axial, por lo que el vector de la velocidad angular tendrá solo un componente escalar en  $z_w$  tal que  $\Omega_w = [0 \ 0 \ \omega]^T$ .

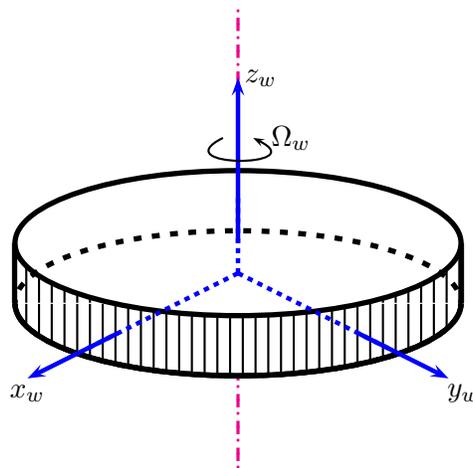


Figura 4.11: Sistema Coordenado de la Rueda Inercial.

Para obtener la velocidad angular de las ruedas inerciales respecto al sistema  $\mathcal{S}^B$  se requiere de una transformación lineal o matriz de rotación, y esta matriz será la que defina la orientación de las ruedas

## 4.2. ACTUADORES

inerciales instaladas dentro del satélite, es decir:

$$\Omega_w^b = R_w^b \Omega_w \quad (4.15)$$

Una manera de obtener esta matriz de rotación es utilizando ángulos de Euler con una secuencia de rotación 3-1-2, es decir,  $R = R_z(\psi)R_x(\theta)R_y(\phi)$ , entonces de la ecuación (4.15):

$$\Omega_w^b = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{13} \\ r_{23} \\ r_{33} \end{bmatrix} \omega \quad (4.16)$$

y se puede demostrar que el vector columna  $A = [r_{13} \ r_{23} \ r_{33}]$  es el vector unitario que representa la orientación de la rueda inercial en el sistema  $\mathcal{S}^B$ . En el caso de tener más de una rueda inercial:

$$\begin{aligned} \Omega_w^b = & \begin{bmatrix} r_{11}^1 & r_{12}^1 & r_{13}^1 \\ r_{21}^1 & r_{22}^1 & r_{23}^1 \\ r_{31}^1 & r_{32}^1 & r_{33}^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_{11}^2 & r_{12}^2 & r_{13}^2 \\ r_{21}^2 & r_{22}^2 & r_{23}^2 \\ r_{31}^2 & r_{32}^2 & r_{33}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_2 \end{bmatrix} + \dots \\ & \dots + \begin{bmatrix} r_{11}^n & r_{12}^n & r_{13}^n \\ r_{21}^n & r_{22}^n & r_{23}^n \\ r_{31}^n & r_{32}^n & r_{33}^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_n \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.17)$$

Simplificando se tiene:

$$\begin{aligned} \Omega_w^b = & \begin{bmatrix} r_{13}^1 \\ r_{23}^1 \\ r_{33}^1 \end{bmatrix} \omega_1 + \begin{bmatrix} r_{13}^2 \\ r_{23}^2 \\ r_{33}^2 \end{bmatrix} \omega_2 + \dots + \begin{bmatrix} r_{13}^n \\ r_{23}^n \\ r_{33}^n \end{bmatrix} \omega_n = \\ = & \begin{bmatrix} r_{13}^1 & r_{13}^2 & \dots & r_{13}^n \\ r_{23}^1 & r_{23}^2 & \dots & r_{23}^n \\ r_{33}^1 & r_{33}^2 & \dots & r_{33}^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \vdots \\ \omega_n \end{bmatrix} = A \Omega_w \end{aligned} \quad (4.18)$$

donde la matriz  $A$  de  $3 \times n$  contiene los vectores columna de la forma que están orientados  $n$  número de ruedas inerciales dentro del satélite, y el vector columna  $\Omega_w = [\omega_1 \ \omega_2 \ \dots \ \omega_n]^\top$  que contiene las velocidades angulares de las ruedas inerciales. Los vectores columna que dan forma a la matriz  $A$  se expresarán como  $[x_n^b \ y_n^b \ z_n^b]$ .

La matriz de inercia de la rueda inercial, asumiendo que tiene una forma simétrica y homogénea, se puede considerar como una matriz diagonal  $diag(J_{xx} \ J_{yy} \ J_{zz})$ , además, la cantidad de movimiento angular de la rueda inercial, como se define en la ecuación (3.16), se reduce a la siguiente expresión:

$$L_w = \begin{bmatrix} J_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & J_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & J_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix} = J_{zz} \Omega \quad (4.19)$$

donde el momento de inercia  $J_{zz}$  es el momento de inercia de la rueda inercial en su eje de simetría, como se muestra en la figura 4.11, y las otras componentes  $J_{xx}$  e  $J_{yy}$  son irrelevantes para este caso.

Para expresar la matriz de inercia de la rueda inercial en términos del sistema  $\mathcal{S}^B$  se considera que la transformación lineal de una matriz de inercia frente a un cambio de base ortonormal definido por el vector unitario  $A$  es [29]:

$$J_w^b = A J_w A^\top \quad (4.20)$$

Aplicando esta definición en el caso de la matriz de inercia de la rueda inercial haciendo las consideraciones de la ecuación (4.19) y (4.20) se tiene que:

$$J_w^b = J_w \begin{bmatrix} (y^b)^2 + (z^b)^2 & -(x^b)(y^b) & -(x^b)(z^b) \\ -(x^b)(y^b) & (x^b)^2 + (z^b)^2 & -(y^b)(z^b) \\ -(x^b)(z^b) & -(y^b)(z^b) & (x^b)^2 + (y^b)^2 \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

Agregando más de una rueda inercial, se procede de la misma manera como en la ecuación (4.18) teniendo:

$$\begin{aligned} J_w^b = & J_{w_1} \begin{bmatrix} (y_1^b)^2 + (z_1^b)^2 & -(x_1^b)(y_1^b) & -(x_1^b)(z_1^b) \\ -(x_1^b)(y_1^b) & (x_1^b)^2 + (z_1^b)^2 & -(y_1^b)(z_1^b) \\ -(x_1^b)(z_1^b) & -(y_1^b)(z_1^b) & (x_1^b)^2 + (y_1^b)^2 \end{bmatrix} + \\ & + J_{w_2} \begin{bmatrix} (y_2^b)^2 + (z_2^b)^2 & -(x_2^b)(y_2^b) & -(x_2^b)(z_2^b) \\ -(x_2^b)(y_2^b) & (x_2^b)^2 + (z_2^b)^2 & -(y_2^b)(z_2^b) \\ -(x_2^b)(z_2^b) & -(y_2^b)(z_2^b) & (x_2^b)^2 + (y_2^b)^2 \end{bmatrix} + \dots + \\ & + J_{w_n} \begin{bmatrix} (y_n^b)^2 + (z_n^b)^2 & -(x_n^b)(y_n^b) & -(x_n^b)(z_n^b) \\ -(x_n^b)(y_n^b) & (x_n^b)^2 + (z_n^b)^2 & -(y_n^b)(z_n^b) \\ -(x_n^b)(z_n^b) & -(y_n^b)(z_n^b) & (x_n^b)^2 + (y_n^b)^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.22)$$

Simplificando la ecuación (4.22), se tiene:

$$J_w^b = \begin{bmatrix} x_1^b & x_2^b & \dots & x_n^b \\ y_1^b & y_2^b & \dots & y_n^b \\ z_1^b & z_2^b & \dots & z_n^b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_{w_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{w_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_{w_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^b & y_1^b & z_1^b \\ x_2^b & y_2^b & z_2^b \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n^b & y_n^b & z_n^b \end{bmatrix} = A J_w A^\top \quad (4.23)$$

Se debe observar que la matriz  $J_w$  contiene las matrices de inercia de las ruedas inerciales del eje de simetría axial de cada una de ellas, y la matriz  $J_w^b$  es la matriz de inercia de las ruedas inerciales según la orientación de cada una de ellas.

Sustituyendo las ecuaciones (4.18) y (4.23) en (4.14):

$$L = J_{sat}^b \Omega_b^i + A J_w A^\top \Omega_b^i + A L_w \quad (4.24)$$

El resultado es una ecuación de cantidad de movimiento angular en términos de la matriz de inercia total de satélite, la matriz de inercia y la orientación de las ruedas inerciales. La ecuación (4.24) también se puede escribir de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} L_s &= (J_{sat}^b + A J_w A^\top) \Omega_b^i + A L_w \\ L_w &= J_w \Omega_w \end{aligned} \quad (4.25)$$

Con el sistema de ecuaciones (4.25) se explica el motivo por el cual el satélite no era considerado como cuerpo rígido, ya que aparece la cantidad de movimiento angular de las ruedas inerciales. Entonces para obtener la dinámica de cuerpo rígido del satélite se deriva la cantidad de movimiento angular del satélite y de las ruedas inerciales mediante la siguiente definición:

$$\dot{L}_e = \tau_e = \dot{L} + \Omega \times L \quad (4.26)$$

y aplicándolo al sistema de ecuaciones (4.25), haciendo  $J = J_{sat}^b + A J_w A^\top$ :

## 4.2. ACTUADORES

$$\begin{aligned}\tau_s &= J\dot{\Omega}_b^i + A\tau_w + \Omega_b^i \times (J\Omega_b^i + AJ_w\Omega_w) \\ \tau_w &= J_w\dot{\Omega}_w\end{aligned}\tag{4.27}$$

expresando el producto vectorial en su forma matricial, la dinámica de cuerpo rígido del satélite equipado con ruedas inerciales será:

$$\begin{aligned}J\dot{\Omega}_b^i &= S(J\Omega_b^i + AJ_w\Omega_w)\Omega_b^i - A\tau_w + \tau_s \\ J_w\dot{\Omega}_w &= \tau_w\end{aligned}\tag{4.28}$$

Este sistema de ecuaciones describe el movimiento angular del satélite, en donde la acción de las ruedas inerciales ejercen una fuerte influencia en la dinámica del satélite. En el diseño de esquemas de control de orientación de satélites equipados con ruedas inerciales, estas ecuaciones se toman en cuenta para estudiar la relación de par nominal de las ruedas inerciales y respuesta del satélite bajo la acción de dichos pares de control.

---

## CAPÍTULO 5

# ESTIMACIÓN Y CONTROL DE ORIENTACIÓN

---

Este capítulo está dedicado a la descripción de algunos algoritmos de estimación y control de la orientación de vehículos espaciales que se estudiaron y aplicaron durante el transcurso de esta investigación.

El uso de estos algoritmos de estimación surge de la restricción que se presenta al emplear sensores que no ofrecen directamente la información de orientación en tres ejes, como en el caso de proyectos como SATEDU, la plataforma experimental y en el nanosatélite HumSat-México (proyectos que desarrolla actualmente el Instituto de Ingeniería, UNAM), por lo que se recurre al uso de algoritmos de estimación y filtrado para llevar a cabo algunas tareas de control de apuntamiento. El análisis de los algoritmos se ha dividido en dos categorías, las cuales se presentarán en las siguientes secciones.

Posteriormente se describen los algoritmos de control que se investigaron para su aplicación dentro del proyecto satelital SATEDU y el nanosatélite HumSat-México. Estos algoritmos serán validados numérica y experimentalmente en una plataforma experimental suspendida en aire que contiene el hardware del subsistema de estabilización del nanosatélite HumSat-México, sin embargo, por el momento se evaluó el desempeño de cada uno de ellos con un simulador de vuelo desarrollado en el Instituto de Ingeniería UNAM, cuyos resultados se mostrarán en el capítulo 8.

El diseño del esquema de control de orientación del nanosatélite HumSat-México y la selección de los algoritmos de estimación y control de orientación estará basado en sus modos de operación, sensores y actuadores para llevar a cabo tareas de percepción remota, comunicaciones directivas u obtención óptima de energía solar. En una investigación subsecuente, estos algoritmos serán programados en un lenguaje de programación (p.ej. C++, VHDL) y serán descargados dentro del hardware del ADCS del satélite. La telemetría proporcionada por el satélite en órbita indicará el desempeño del esquema de control, y así se podrán tomar decisiones para su actualización de manera remota.

### 5.1 Algoritmos de Estimación Determinísticos

La orientación de un cuerpo en dos ejes se conoce cuando se tiene disponible un vector de observación en un sistema coordenado de referencia. Sin embargo, se requiere de al menos dos vectores de observación en el mismo marco de referencia (p. ej. sensores de estrellas) o distintos marcos de referencia (p.ej. uso de diferentes sensores) para obtener la orientación en tres ejes.

Aquí se hará mención de dos métodos determinísticos que han sido analizados y programados con el objetivo de emplear dos o más sensores de referencia inercial para reconstruir un cuaternión unitario que describe la orientación de un objeto en tres ejes. Estos métodos son el método TRIAD, y el método Gauss-Newton.

## 5.1. ALGORITMOS DE ESTIMACIÓN DETERMINÍSTICOS

### 5.1.1 Método TRIAD

El método TRIAD consiste en encontrar una matriz de transformación que relaciona dos sistemas coordenados usando dos vectores de medición y dos vectores de referencia, expresados en el sistema coordenado en el que se efectuó la medición y en el de referencia respectivamente [30].

El procedimiento consiste en encontrar una serie de vectores ortogonales entre sí,  $r_1$ ,  $r_2$  y  $r_3$  en el sistema coordenado donde se efectuó la medición tales que:

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{u_M}{\|u_M\|} \\ r_2 &= \frac{r_1 \times v_M}{\|r_1 \times v_M\|} \\ r_3 &= r_1 \times r_2 \end{aligned} \quad (5.1)$$

y una serie de vectores ortogonales entre sí  $s_1$ ,  $s_2$  y  $s_3$  en el sistema coordenado de referencia tales que:

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{u_R}{\|u_R\|} \\ s_2 &= \frac{r_1 \times v_R}{\|r_1 \times v_R\|} \\ s_3 &= s_1 \times s_2 \end{aligned} \quad (5.2)$$

Posteriormente la matriz de transformación que relaciona ambos sistemas coordenados es calculada por:

$$A_m^r = r_1 \cdot s_1^\top + r_2 \cdot s_2^\top + r_3 \cdot s_3^\top \quad (5.3)$$

que es una manera de expresar la orientación de un objeto en tres ejes.

### 5.1.2 Método Gauss-Newton

Este método se basa en un criterio de mínimos cuadrados del error. A diferencia del método TRIAD, se pueden integrar más de dos vectores de medición con sus respectivos vectores de referencia [31].

La función del error  $S^k$  está definido por:

$$S^k = \sigma^\top \sigma = \left( y_c^i - M y_m^b \right)^\top \left( y_c^i - M y_m^b \right) \quad (5.4)$$

donde  $y_c^i$  contiene los n-vectores de referencia en un sistema coordenado determinado,  $y_m^b$  contiene los n-vectores de mediciones expresado en el sistema coordenado donde se efectuó la medición.  $M$  es definido como:

$$M = \begin{bmatrix} R_b^e(\mathbf{q}_k) & 0 \\ 0 & R_b^e(\mathbf{q}_k) \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

donde  $R_b^e(\mathbf{q}_k)$  es la matriz de rotación que relaciona ambos sistemas coordenados, expresado en términos del cuaternión  $\mathbf{q}_k$ .

Para encontrar el cuaternión  $\mathbf{q}_k$  que relaciona los vectores de medición y de referencia, se realiza un proceso iterativo de minimización de la función de error (5.4). Este proceso se describe en las siguientes ecuaciones:

$$\hat{\mathbf{q}}_{k+1} = \hat{\mathbf{q}}_k - [J^\top(\hat{\mathbf{q}}_k)J(\hat{\mathbf{q}}_k)]^{-1} J^\top(\hat{\mathbf{q}}_k)\sigma(\hat{\mathbf{q}}_k) \quad (5.6)$$

donde  $J(\hat{\mathbf{q}}_k)$  es el Jacobiano de la función  $M$  definido por:

$$J = \left[ \begin{array}{cccc} \left( \frac{\partial M}{\partial q_1} \right) & \left( \frac{\partial M}{\partial q_2} \right) & \left( \frac{\partial M}{\partial q_3} \right) & \left( \frac{\partial M}{\partial q_4} \right) \end{array} \right] y_m^b \quad (5.7)$$

La función de error (5.4) es usada como tolerancia que detiene las iteraciones necesarias para encontrar el cuaternión  $\hat{q}_k$  que normalmente toma de tres a cinco iteraciones para encontrarlo. Es recomendable definir un valor máximo de iteraciones que eviten iteraciones infinitas que pudieran deberse a un valor grande de la función de error (5.4).

## 5.2 Algoritmos de Estimación Analíticos

En comparación con los métodos determinísticos presentados anteriormente, los métodos analíticos consideran las características de ruido de donde proviene la información de las mediciones efectuadas y la dinámica del sistema en estudio.

A continuación se presentará el Filtro de Kalman Extendido (EKF) en su versión continua (CEKF) y discreta (DEKF), que es una herramienta de filtrado que cubre una amplia gama de aplicaciones, y ha sido implementada exitosamente en aplicaciones espaciales, particularmente en el sistema de navegación inercial de vehículos espaciales.

La tarea más desafiante en el diseño del EKF es el ajuste de parámetros que definen el ruido tanto de las mediciones como del mismo proceso de la dinámica del sistema, que dependerán de una rápida o lenta convergencia, e inclusive un mal ajuste pudiera causar divergencia en el filtro debido a la propagación del error durante la continua actualización de dichos parámetros [32].

### 5.2.1 Filtro de Kalman Extendido Discreto

Considerando el siguiente sistema no lineal:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u, t) + w(t) \\ z &= h(x, t) + v(t) \end{aligned} \quad (5.8)$$

donde se asume que  $v(t)$  es una función de ruido blanco de las mediciones,  $w(t)$  es una función de ruido blanco del proceso del sistema,  $x$  es el vector que contiene las variables del sistema de espacio de estados,  $u$  es el vector de comandos de control,  $z$  es el proceso de medición y en donde  $f(x, u, t)$  y  $h(x, t)$  son funciones no lineales. La matriz de covarianza del proceso y de las mediciones  $Q_k$  y  $R_k$  respectivamente está dado por:

$$\begin{aligned} E[w_j w_i^\top] &= \begin{cases} Q, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \\ E[v_j v_i^\top] &= \begin{cases} R, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \\ E[w_j v_i^\top] &= 0, \text{ para toda } j \text{ y } i \end{aligned} \quad (5.9)$$

Para la primera iteración, se debe de establecer una condición inicial para el vector de estados  $\hat{x}_k^-$  y su matriz de error de covarianza  $P_k^-$ .

La ganancia de Kalman  $K_k$  se calcula como:

$$K_k = P_k^- H_k^\top (\hat{x}_k^-) [R + H_k (\hat{x}_k^-) P_k^- H_k^\top (\hat{x}_k^-)]^{-1} \quad (5.10)$$

El siguiente paso es actualizar  $\hat{x}_k$  con la medición  $z_k$  y la ganancia de Kalman  $K_k$  obtenida en la ecuación (5.10):

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k \nu_k \quad (5.11)$$

## 5.2. ALGORITMOS DE ESTIMACIÓN ANALÍTICOS

donde  $\nu_k = z_k - H_k(\hat{x}_k^-)\hat{x}_k^-$  es el proceso de innovación (figura 5.1). Una vez obtenido  $\hat{x}_k$ , el paso de propagación para la  $k + 1$ -iteración debe ser efectuado por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}\hat{x}_{k+1}^- &= \hat{x}_k + \int_k^{k+1} f(\hat{x}_k, u, t) dt \\ P_{k+1}^- &= F_k(\hat{x}_k)P_k F_k(\hat{x}_k)^\top + Q\end{aligned}\quad (5.12)$$

donde:

$$P_k = P_k^- - K_k H_k(\hat{x}_k) P_k^- \quad (5.13)$$

Después de este paso,  $k + 1$  es establecida como  $k$ , cerrando el ciclo repitiendo el proceso de estimación con (5.10). La principal característica del EKF yace en la constante actualización de las funciones linealizadas  $F_k$  y  $H_k$  de (5.8) a lo largo de las trayectorias de las variables estimadas  $\hat{x}$ :

$$F_k = \left. \frac{\partial f(x, u, t)}{\partial x} \right|_{x=\hat{x}_k} \quad H_k = \left. \frac{\partial h(x, t)}{\partial x} \right|_{x=\hat{x}_k} \quad (5.14)$$

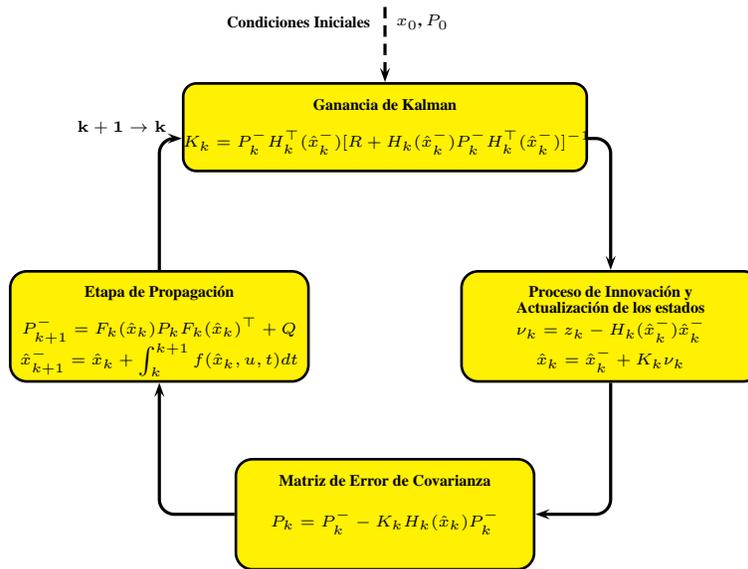


Figura 5.1: Filtro de Kalman Extendido Discreto.

### 5.2.2 Filtro de Kalman Extendido Continuo

De la misma manera que en el caso de DEKF, se considera un sistema como el que se muestra en la ecuación (5.8), es decir:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, u, t) + w(t) \\ y &= h(x, t) + v(t)\end{aligned}$$

y por medio de (5.9) se calculan las matrices de covarianzas de  $v$  y  $w$ .

En el CEKF, el proceso de estimación está dado por:

$$\dot{\hat{x}} = F(\hat{x}, u, t) + K\nu \quad (5.15)$$

donde  $\nu$  es el proceso de innovación definido por:

$$\nu = y - H(\hat{x}) \quad (5.16)$$

y  $K$  es la ganancia de Kalman dada por:

$$K = PH^{\top}R^{-1} \quad (5.17)$$

siendo  $P$  la ecuación de error de covarianza:

$$\begin{aligned} \dot{P} &= FP + PF^{\top} - PH^{\top}R^{-1}HP + Q \\ P(0) &= P_o \end{aligned} \quad (5.18)$$

Finalmente,  $F(\hat{x}, u, t)$  y  $H(\hat{x}, t)$  vienen del proceso de linearización a lo largo de las trayectorias del proceso de estimación como se muestra en (5.14).

## 5.3 Algoritmos de Control de Orientación

### 5.3.1 Control de Velocidad

Este control reduce la velocidad angular del satélite respecto al sistema coordinado del cuerpo del satélite. Para ello, se necesita la medición o estimación de la velocidad angular en los tres ejes del satélite y se realimenta al modelo de la dinámica del satélite mencionado en la ecuación (3.21):

$$J_b \dot{\Omega}_b^i + \Omega_b^i \times J_b \Omega_b^i = \tau \quad (5.19)$$

con una constante de proporcionalidad positiva en forma de una matriz diagonal de ganancias, de tal manera que resulte una matriz positiva definida, esto es:

$$\tau_c = -K_d \Omega_b^i \quad (5.20)$$

#### *Estabilidad*

Para realizar el análisis de estabilidad, se propone la siguiente función de Lyapunov:

$$V = \frac{1}{2} \Omega_b^i{}^{\top} J_b \Omega_b^i, \quad \Omega_b^i \neq 0$$

y su derivada respecto al tiempo considerando el sistema (5.19) y el control (5.20):

$$\dot{V} = \Omega_b^i{}^{\top} J_b \dot{\Omega}_b^i = \Omega_b^i{}^{\top} (-\Omega_b^i \times J_b \Omega_b^i + \tau_c)$$

donde:

$$-\Omega_b^i{}^{\top} (\Omega_b^i \times J_b \Omega_b^i) = \Omega_b^i{}^{\top} S(\Omega_b^i) J_b \Omega_b^i = (S(\Omega_b^i) \Omega_b^i) J_b \Omega_b^i = 0$$

ya que se tiene un producto vectorial entre el mismo vector  $S(\Omega_b^i) \Omega_b^i = 0$ , quedando así:

$$\dot{V} = \Omega_b^i{}^{\top} \tau_c = -\Omega_b^i{}^{\top} K_d \Omega_b^i < 0, \quad \Omega_b^i \neq 0$$

el cual es negativo desde que  $K_d$  es positiva definida, por lo que la realimentación es global y asintóticamente estable, y además se demuestra que  $K_d$  puede ser cualquier matriz positiva definida, no solamente matrices diagonales.

### 5.3. ALGORITMOS DE CONTROL DE ORIENTACIÓN

#### 5.3.2 Control de Velocidad en dos Ejes Usando un Sensor de Referencia Inercial

Cuando la información de velocidad angular de los giróscopos no está disponible, la medición realizada por sensores alternativos puede ser usada para obtener información de la velocidad angular en dos ejes, ya sea con sensores de Sol o magnetómetros, es decir:

$$\Omega_v = S(\dot{v}_b)v_b = -S(v_b)\dot{v}_b = -S(v_b)S(v_b)^\top \Omega_b^i = (I - v_b v_b^\top) \Omega_b^i \quad (5.21)$$

La ley de control es definida realimentando la nueva información (5.21):

$$\tau_c = -K_v \Omega_v \quad (5.22)$$

definiendo la matriz de ganancias  $K_v = k_v I$ .

##### *Estabilidad*

Para realizar el análisis de estabilidad, se propone el uso de la función de Lyapunov:

$$V = \frac{1}{2} \Omega_b^i{}^\top J_b \Omega_b^i, \quad \Omega_b^i \neq 0$$

y su derivada respecto al tiempo considerando el sistema (5.19) y el control (5.22):

$$\dot{V} = -\Omega_b^i{}^\top \tau_c = -k_v \Omega_b^i{}^\top (I - v_b v_b^\top) \Omega_b^i \leq 0$$

en donde  $\dot{V}$  es negativa semidefinida y  $\dot{V}$  es cero cuando la velocidad angular y el vector de Sol son paralelos, en este caso la velocidad angular está dada por  $v_b c$ , donde  $c$  es un escalar, por lo que:

$$\dot{V} = -k_d v_b^\top (I - v_b v_b^\top) v_b c^2 = 0$$

Puede concluirse que el sistema es estable, pero no asintóticamente si  $v_b$  es paralelo a un eje principal. En caso contrario,  $\dot{V}$  no será cero y por lo tanto, el sistema es asintóticamente estable.

#### 5.3.3 Control de Orientación en dos Ejes

Utilizando sensores que proveen información de orientación en dos ejes, este controlador lleva al satélite hacia una dirección de referencia  $s_R$  (e.g. usando la información de sensores de Sol), además que reduce la velocidad angular del cuerpo a cero. Se asume que la derivada de la medición de los sensores de Sol es  $\dot{s}_B = -S(\Omega_b^i) s_B$ .

La ley de control esta definida como:

$$\tau_c = -K_d \Omega_b^i + K_s S(s_R) s_B \quad (5.23)$$

##### *Estabilidad*

Para analizar la estabilidad, se propone el uso de la siguiente función de Lyapunov:

$$V = \frac{1}{2} \Omega_b^i{}^\top J_b \Omega_b^i + \frac{1}{2} (s_R - s_B)^\top M (s_R - s_B)$$

donde se puede observar que se ha agregado la información del error de orientación. Su derivada respecto al tiempo, considerando el sistema (5.19) y el control (5.23), es:

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \Omega_b^{i\top} \tau_c - (s_R - s_B)^\top M \dot{s}_B \\ \dot{V} &= -\Omega_b^{i\top} K_d \Omega_b^i + \Omega_b^{i\top} K_s S(s_R) s_B - (s_R - s_B)^\top M S(s_B) \Omega_b^i\end{aligned}$$

Ahora  $K_s$  y  $M$  se considerarán como matrices diagonales de la forma  $K_s = k_s I$  y  $M = m I$ , después de algunas operaciones algebraicas tenemos:

$$\dot{V} = -\Omega_b^{i\top} K_d \Omega_b^i + \Omega_b^{i\top} S(s_R) s_B (k_s - m) < 0$$

cuando  $k_s = m$ . Así el segundo término desaparece y se prueba que  $\dot{V}$  es siempre negativo para cualquier  $\Omega_b^i$ , además nótese que se tiene otro punto de equilibrio  $\Omega_b^{i*} = 0$ ,  $s_B^* = s_R$ , donde  $\dot{V}$  es cero, por lo tanto el sistema no es global, sino local y asintóticamente estable.

### 5.3.4 Control de Orientación en tres Ejes

Este controlador permite llevar al satélite a una orientación deseada en tres ejes cuando se conoce la información completa de la orientación, ya sea con ángulos de Euler o cuaterniones unitarios obtenidos de un sensor de estrellas o mediante un algoritmo de estimación de la orientación de un satélite con ayuda de sensores de referencia inercial en dos ejes. A continuación se presentará el análisis de estabilidad de dos controladores de orientación en tres ejes definidos por las ecuaciones (5.24) y (5.30).

- Este control proporciona estabilidad en tres ejes del sistema coordinado del cuerpo del satélite a un sistema coordinado de referencia, representado por  $\mathbf{q}_r = [0 \ 0 \ 0 \ 1]^\top$ . La ley de control esta definida como:

$$\tau_c = -K_d \Omega_b^i - K_q \epsilon \quad (5.24)$$

De manera similar que el controlador en dos ejes, se propone el uso de la siguiente función de Lyapunov para analizar estabilidad:

$$V = \frac{1}{2} \Omega_b^{i\top} J_b \Omega_b^i + \frac{1}{2} (\mathbf{q}_r - \mathbf{q}_b^i)^\top M (\mathbf{q}_r - \mathbf{q}_b^i)$$

Su derivada respecto al tiempo, considerando el sistema (5.19) y el control (5.24), es:

$$\dot{V} = \Omega_b^{i\top} \tau_c - (\mathbf{q}_r - \mathbf{q}_b^i)^\top M \dot{\mathbf{q}}_b^i$$

donde:

$$\dot{\mathbf{q}}_b^i = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (\eta I + S(\epsilon)) \Omega_b^i \\ -\epsilon^\top \Omega_b^i \end{bmatrix}$$

sustituyendo en la función de Lyapunov:

$$\dot{V} = -\Omega_b^{i\top} K_d \Omega_b^i - \Omega_b^{i\top} K_q \epsilon - (\mathbf{q}_r - \mathbf{q}_b^i)^\top M \begin{bmatrix} (\eta I + S(\epsilon)) \Omega_b^i \\ -\epsilon^\top \Omega_b^i \end{bmatrix}$$

### 5.3. ALGORITMOS DE CONTROL DE ORIENTACIÓN

Considerando  $K_q$  y  $M$  como matrices diagonales de la forma  $K_q = k_q I$  y  $M = mI$ , despues de algunas operaciones algebraicas tenemos:

$$\dot{V} = -\Omega_b^i{}^\top k_d \Omega_b^i - \Omega_b^i{}^\top k_q \epsilon - m(-\epsilon^\top \quad 1 - \eta) \begin{bmatrix} (\eta I + S(\epsilon)) \Omega_b^i \\ -\epsilon^\top \Omega_b^i \end{bmatrix}$$

$$\dot{V} = -\Omega_b^i{}^\top k_d \Omega_b^i - \Omega_b^i{}^\top (k_q - m) \epsilon < 0$$

Cuando  $k_q = m$ , se concluye que el segundo término desaparece y se prueba que  $\dot{V}$  es siempre negativo para cualquier  $\Omega_b^i$ , por lo tanto el sistema es local y asintóticamente estable.

- A continuación se mencionará el controlador que se ha desarrollado para este proyecto el cual permite el control de orientación en tres ejes [33]. El diseño de este controlador se realizó en dos etapas, las cuales se explican a continuación:

#### Backstepping:

Se define la siguiente función de error:

$$y = \Omega_b^o - \Omega_{b_d}^o = \Omega_b^i - \Omega_{b_d}^i \quad (5.25)$$

donde  $\Omega_b^i = \Omega_b^o - R_o^b \Omega_o^i$  y  $\Omega_o^i = [0 \ \omega_o \ 0]$  es la velocidad de desplazamiento angular del satélite en su órbita y  $R_o^b$  es la matriz de transformación del sistema coordenado  $\mathcal{S}^O$  al  $\mathcal{S}^B$ , además:

$$\Omega_{b_d}^o = \pm \frac{\Delta \tilde{\epsilon}}{1 + \tilde{\epsilon}^\top \tilde{\epsilon}} \quad (5.26)$$

con  $\Delta = \delta I$  una matriz positiva definida.

Expresando la ecuación de la cinemática del satélite (3.22) en términos de (5.25) se tiene:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\eta}} &= -\frac{1}{2} \tilde{\epsilon}^\top (\Omega_{b_d}^o + y) \\ \dot{\tilde{\epsilon}} &= \frac{1}{2} [\tilde{\eta} I + S(\tilde{\epsilon})] (\Omega_{b_d}^o + y) \end{aligned} \quad (5.27)$$

donde  $\tilde{\mathbf{q}}_b^o = [ \ \eta \ \epsilon^\top ]^\top$  es el error entre la orientación del cuerpo y la orientación de referencia dado por la ecuación (3.10). La ecuación (5.27) será de utilidad para realizar el siguiente análisis de estabilidad con una función candidata de Lyapunov y su derivada respecto al tiempo a lo largo de la trayectoria del sistema (5.27):

$$\begin{aligned} V_1 &= (\tilde{\eta} \pm 1)^2 + \tilde{\epsilon}^\top \tilde{\epsilon} \\ \dot{V}_1 &= -\frac{\Delta \tilde{\epsilon}^\top \tilde{\epsilon}}{1 + \tilde{\epsilon}^\top \tilde{\epsilon}} \pm \tilde{\epsilon}^\top y \end{aligned}$$

concluyendo que llevando a  $y$  a cero y por el teorema de LaSalle, considerando la unicidad del cuaternión,  $\tilde{\eta} = \mp 1$  y  $\dot{V}_1 < 0$ . Ahora se diseñará un controlador para llevar a  $y$  a cero usando la metodología de diseño de realimentación de la salida pasiva de la dinámica exacta de error de seguimiento (RSPDEES).

**Realimentación de la salida pasiva de la dinámica exacta de error de seguimiento:**

El diseño del controlador por la metodología RSPDEES, parte del hecho de que el modelo general de un sistema físico está dado por:

$$\mathcal{A}(x)\dot{x} = \mathcal{J}(x, u)x - \mathcal{R}(x, u)x + \mathcal{B}(x)u + \mathcal{E}(t) \quad (5.28)$$

donde  $x$  es el vector de estados  $n$ -dimensional,  $\mathcal{A}^{n \times 1}$  es una matriz simétrica positiva definida y constante,  $u$  es el vector de entradas  $m$ -dimensional,  $\mathcal{J}(x, u)^{n \times n}$  es una matriz antisimétrica,  $\mathcal{R}(x, u)^{n \times n}$  es una matriz simétrica positiva definida,  $\mathcal{E}(t)^{n \times 1}$  es un vector suave  $n$ -dimensional que es función de  $t$  o a veces, un vector constante y  $\mathcal{B}(x)^{n \times m}$  es la matriz de entradas.

La ecuación de la dinámica de cuerpo rígido del satélite, de acuerdo a (5.28), puede escribirse como:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= J, \quad \mathcal{J}(x) = S(J\Omega_b^i) \\ \mathcal{R}(x, u) &= 0, \quad \mathcal{B} = I \\ \mathcal{E}(t) &= 0 \end{aligned}$$

y la dinámica del error del satélite en términos de  $y$  es:

$$J\dot{y} = [\mathcal{J}^*(\Omega_b^i, \Omega_{b_d}^i) - \mathcal{R}^*(\Omega_b^i, \Omega_{b_d}^i)]y + \tilde{\tau} \quad (5.29)$$

donde:

$$\mathcal{J}^*(x, t) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}A_j & -\frac{1}{2}B_j \\ -\frac{1}{2}A_j & 0 & \frac{1}{2}C_j \\ \frac{1}{2}B_j & -\frac{1}{2}C_j & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{R}^*(t) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}A_r\Omega_{b_{d3}}^i & -\frac{1}{2}B_r\Omega_{b_{d2}}^i \\ \frac{1}{2}A_r\Omega_{b_{d3}}^i & 0 & \frac{1}{2}C_r\Omega_{b_{d1}}^i \\ -\frac{1}{2}B_r\Omega_{b_{d2}}^i & \frac{1}{2}C_r\Omega_{b_{d1}}^i & 0 \end{bmatrix}$$

donde  $A_j = (J_{xx} + J_{yy})\Omega_{b_{d3}}^i - 2J_{zz}\Omega_{b_3}^i$ ,  $B_j = (J_{xx} + J_{zz})\Omega_{b_{d2}}^i - 2J_{yy}\Omega_{b_2}^i$  y  $C_j = (J_{yy} + J_{zz})\Omega_{b_{d1}}^i - 2J_{xx}\Omega_{b_1}^i$ . Además,  $A_r = J_{xx} - J_{yy}$ ,  $B_r = J_{xx} - J_{zz}$ , y  $C_r = J_{yy} - J_{zz}$ .

Proponiendo el siguiente controlador:

$$\tau = \mp K\Delta \frac{\tilde{\epsilon}}{1 + \tilde{\epsilon}^\top \tilde{\epsilon}} - K \left( \Omega_b^i + R_o^b \Omega_o^i \right) \quad (5.30)$$

Entonces para cualquier valor de  $K > 0$  y  $\Delta > 0$  el punto de equilibrio:

$$\begin{bmatrix} \eta^* \\ \epsilon^* \\ \Omega_b^{i*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_d \\ \epsilon_d \\ R_o^b(\eta_d, \epsilon_d)\Omega_o^i \end{bmatrix}$$

es global y asintóticamente estable bajo el controlador (5.30), realizando análisis de estabilidad de acuerdo a las ecuaciones (5.27) y (5.29).

---

## CAPÍTULO 6

# ESTIMACIÓN DE LA ORIENTACIÓN POR MEDIO DE UNA IMU

---

La primera fase de este proyecto de investigación fue la propuesta de un esquema de determinación de la orientación de un cuerpo rígido basado en el CEKF, usando una unidad de medición inercial (IMU) de *Xsens*[34] que contiene magnetómetros, acelerómetros y giróscopos. La información obtenida de los sensores mencionados anteriormente, es procesada por medio de un algoritmo basado en un filtro de Kalman, para obtener la orientación de la IMU en tres ejes, expresado en ángulos de Euler o cuaterniones unitarios.

La finalidad de esta evaluación experimental es la familiarización e identificación de parámetros de diseño de algoritmos de estimación para que puedan ser extrapolables a aplicaciones satelitales. Para evaluar el desempeño del esquema de estimación diseñado para este experimento, se comparan los resultados obtenidos del esquema de estimación propuesto con los datos de orientación proporcionados por el software de la IMU.

En las siguientes secciones se describe el escenario en el cual fueron realizados los experimentos, el esquema de estimación desarrollado y los resultados de este proceso de evaluación.

### 6.1 Descripción del Escenario.

Como se mencionó anteriormente, el hardware utilizado es una IMU de la marca *Xsens* modelo MTi (Figura 6.1), la cual incluye un software que permite su configuración, el seguimiento en tiempo real de los movimientos efectuados con la IMU por medio de un visualizador en 3D, opciones que permiten el monitoreo de cada sensor que integra la IMU y la orientación expresada en ángulos de Euler o cuaterniones unitarios [34].



Figura 6.1: Unidad de medición inercial Xsens-MTi y su sistema coordenado local.

La información de acelerómetros y magnetómetros proporcionada por la IMU están expresados en un sistema coordenado local fijo a la Tierra, como se muestra en la figura 6.2, en donde el eje  $x$  apunta al Norte magnético terrestre,  $z$  es normal a la superficie terrestre en dirección al cenit, y  $y$  completa la regla de la mano derecha y es tangente a la superficie de la Tierra.

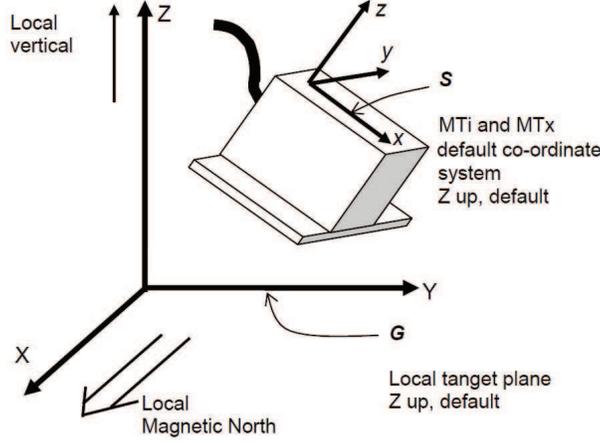


Figura 6.2: Sistema coordenado de referencia de la IMU Xsens.

Por medio del software de la IMU, los datos de cada sensor son almacenados en un archivo que posteriormente será utilizado como entrada para el algoritmo de estimación que se desarrolló, así como la información de la orientación del cuerpo de la IMU, que será la referencia para realizar una evaluación de desempeño.

## 6.2 Algoritmo de Estimación basado en el CEKF

Para el diseño del CEKF, se consideraron los modelos mencionados en las ecuaciones (3.21) y (3.22), de manera que:

$$F(\mathbf{q}, \Omega) = \begin{bmatrix} \dot{\eta} \\ \dot{\epsilon} \\ \dot{\Omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\epsilon^\top \Omega \\ \frac{1}{2}[\eta I + S(\epsilon)]\Omega \\ J^{-1}(-S(\Omega)J\Omega + \tau) \end{bmatrix} + w(t) \quad (6.1)$$

y además se considera el sistema que describe el proceso de medición:

$$y_m^b = \begin{bmatrix} m_m^b \\ a_m^b \\ \omega_m^b \end{bmatrix} + v(t) \quad (6.2)$$

donde  $\omega(t)$  y  $v(t)$  son funciones que describen el ruido del proceso y de la medición respectivamente,  $m_m^b$  es el vector de campo magnético medido,  $a_m^b$  es el vector de la medición del acelerómetro y  $\omega_m^b$  es la medición de los giróscopos, todos ellos respecto al sistema coordenado local de la IMU.

La ganancia de Kalman  $K$  es calculada de acuerdo a las ecuaciones (5.17) y (5.18), resultando una matriz de dimensión  $7 \times 7$ . Sin embargo, para evitar singularidades en el cálculo de la covarianza del cuaternión debido a la interdependencia de cada uno de sus componentes, la matriz de covarianzas del cuaternión fue truncada resultando una ganancia de Kalman  $K$  de dimensión  $6 \times 6$ .

Con la finalidad de reducir la complejidad del EKF, se implementó el algoritmo de estimación determinístico de Gauss-Newton mencionado en la sección 5.2.2, de tal manera que la información del

### 6.3. RESULTADOS

magnetómetro y acelerómetro se fusionen por medio de este método, obteniendo un cuaternión que describe la orientación del cuerpo en estudio. Sin embargo, esta nueva información contiene un nivel de ruido considerable, por lo que es necesario el uso del EKF.

Aplicando este método, el vector  $y_m^b$  es reducido a  $y_m^b = [\mathbf{q}_{gn}^\top \omega_m^{b\top}]^\top + v(t)$ , donde  $\mathbf{q}_{gn} = [\eta_{gn} \epsilon_{gn}^\top]^\top$  es el cuaternión que relaciona las mediciones de los magnetómetros y acelerómetros respecto a su referencia, por lo que la matriz  $H$  es redefinida de acuerdo a la ecuación (5.14) como:

$$H = \left. \frac{\partial H(\mathbf{q}_{gn}, \omega_m^b)}{\partial(\epsilon, \Omega)} \right|_{(\epsilon, \Omega) = (\hat{\epsilon}, \hat{\Omega})} = I^{6 \times 6} \quad (6.3)$$

y las matrices de covarianzas de los vectores  $v(t)$  y  $w(t)$  que pertenecen a los sistemas (6.1), (6.2) son  $R^{7 \times 7}$  y  $Q^{7 \times 7}$  respectivamente, que resultan del cálculo basado en la ecuación (5.9). Puede ser que en ocasiones sea necesario un ajuste o sintonización de estas covarianzas para mejorar el desempeño del filtro.

De acuerdo al sistema (6.1), el proceso de estimación, como se define en la ecuación (5.15), es:

$$\dot{\hat{\Omega}} = J^{-1}(-S(\hat{\Omega})J\hat{\Omega}) + K_{\Omega}\nu \quad (6.4)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{q}}} = \begin{bmatrix} \dot{\hat{\eta}} \\ \dot{\hat{\epsilon}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\hat{\epsilon}^\top \hat{\Omega} \\ \frac{1}{2}[\hat{\eta}I + S(\hat{\epsilon})]\hat{\Omega} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ K_{\epsilon} \end{bmatrix} \nu \quad (6.5)$$

donde el proceso de inovación  $\nu$  es:

$$\nu = \begin{bmatrix} \epsilon_{gn} \\ \Omega_b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{\epsilon} \\ \hat{\Omega} \end{bmatrix}$$

En la figura 6.3 se presenta la estructura del algoritmo de estimación, donde se puede observar el proceso de fusión de los acelerómetros y magnetómetros por medio del método Gauss-Newton, obteniendo un cuaternión que junto con la información de los giróscopos se realiza el proceso de estimación basado en EKF. El propósito de realimentar el cuaternión estimado al método de Gauss-Newton es la reducción del número de iteraciones en el proceso de fusión de sensores y así optimizar la cantidad de operaciones que realiza el algoritmo de estimación de orientación de un cuerpo.

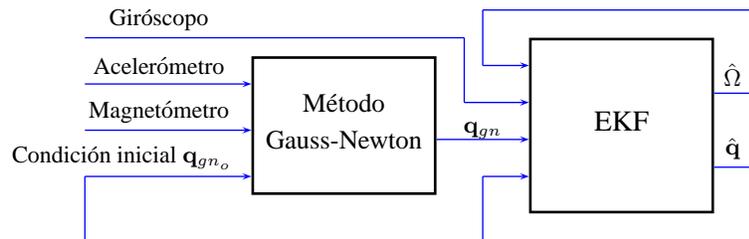


Figura 6.3: Proceso de estimación basado en el CEKF.

## 6.3 Resultados

El experimento consistió en la estimación de la orientación de un dirigible en vuelo libre equipado con una IMU de marca *Xsens* MTi, el cual contiene magnetómetros, giróscopos y acelerómetros, como se

## CAPÍTULO 6. ESTIMACIÓN DE LA ORIENTACIÓN POR MEDIO DE UNA IMU

muestra en la figura 6.4. Por medio de comunicaciones inalámbricas, la IMU envía la información de los sensores hacia una computadora que procesa las mediciones obtenidas con su software para obtener la información de orientación del dirigible.

De manera similar, se realizó un experimento adicional realizando algunos movimientos aleatorios con la IMU, enviando la información de los sensores a una PC que procesa la información para obtener la información de su orientación.



Figura 6.4: Dirigible del departamento de mecatrónica del CINVESTAV-IPN.

Para evaluar el desempeño del algoritmo, la información de la orientación obtenida en ambos experimentos fue comparada con la información de orientación obtenida con el algoritmo.

Para implementar el algoritmo de estimación de orientación en ambos experimentos, fue necesario calcular los vectores de referencia, es decir, el vector de gravedad y el campo magnético terrestre en el lugar donde se realizó el experimento. El vector de gravedad normalizado en el sistema coordenado de referencia descrito en la sección 6.2 es:

$$G^i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T$$

El vector de campo magnético terrestre  $M$  fue calculado del modelo IGRF descrito en la sección 3.4 en el sistema coordenado local según los parámetros de posición global mencionados en la tabla 6.1, resultando un valor de  $M = \begin{bmatrix} 27510.8907 & -3224.6185 & -14767.2050 \end{bmatrix}^T$  nT, y su vector unitario de:

$$M^i = \begin{bmatrix} 0.8764 & -0.1027 & -0.4704 \end{bmatrix}^T$$

Tabla 6.1: Posición global del experimento.

Parámetros de Posición Global	Valores
Altitud	2243 m
Latitud	19°30'35"N
Longitud	99°07'46"O
Fecha	1 Mayo 2009

Añadiendo un factor de corrección debido al material ferromagnético que presenta la electrónica de la IMU y a la misma estructura del dirigible, los vectores de campo magnético de referencia para el

### 6.3. RESULTADOS

vuelo libre del dirigible y el movimiento aleatorio de la IMU fueron respectivamente  $M_1^i = [ 0.7271 \ - 0.0274 \ - 0.6860 ]^T$  y  $M_2^i = [ 0.6857 \ - 0.0140 \ - 0.7277 ]^T$ .

Se realizó un proceso de fusión de magnetómetros y acelerómetros, se obtuvo un cuaternión unitario por medio del método Gauss-Newton y éste fue tratado como una nueva medición, se calculó su matriz de covarianzas y se promediaron sus valores principales. De la misma manera, se calculó la matriz de covarianza del giróscopo.

La matriz de covarianza del proceso fue sintonizada de acuerdo a la incertidumbre de los modelos. Como la incertidumbre en el modelo de la cinemática es menor, se seleccionó una covarianza del proceso menor. Sin embargo, debido a que se desconoce el parámetro  $J$  que es la matriz de inercia del cuerpo en estudio, se seleccionó una covarianza del proceso mayor (tabla 6.2).

Y finalmente, la selección de la condición inicial  $P_o$  se realizó de acuerdo al transitorio deseado, es decir, con la selección de un valor demasiado pequeño, la amplitud del transitorio será grande, por lo que el tiempo de convergencia del filtro se incrementa. Por otro lado, seleccionando un valor muy grande se incrementará el riesgo de indeterminaciones numéricas durante el cálculo de la orientación del cuerpo.

Tabla 6.2: Parámetros Sintonizados.

Covarianzas Sintonizadas	Valores
Cuaternión del Método Gauss-Newton	0.1511
Covarianza del Giróscopo	0.0527
Covarianza del Proceso de la Cinemática	0.1
Covarianza del Proceso de la Dinámica	10
Condición Inicial $P_o$	$10[I^{7 \times 7}]$

Cabe señalar que durante el vuelo del dirigible, la IMU fue configurada con un periodo de muestreo de 0.01 [s], mientras que en el movimiento libre de la IMU, se configuró un periodo de muestreo de 0.04 [s], logrando buenos resultados en ambos experimentos.



Figura 6.5: Modelos de realidad virtual del experimento 1 (izquierda) y del experimento 2 (derecha).

El algoritmo de estimación de orientación fue programado en un software de simulación numérica *Simulink*, de Matlab, en donde los datos almacenados de la IMU se procesan permitiendo la sintonización de parámetros de la tabla 6.2, obteniendo los resultados de desempeño del algoritmo de estimación de orientación del dirigible en vuelo libre (Experimento 1), mostrados en las figuras 6.6 y 6.7, y el de la IMU en movimiento libre (Experimento 2), mostrados en las figuras 6.8 y 6.9. Adicionalmente se diseñaron

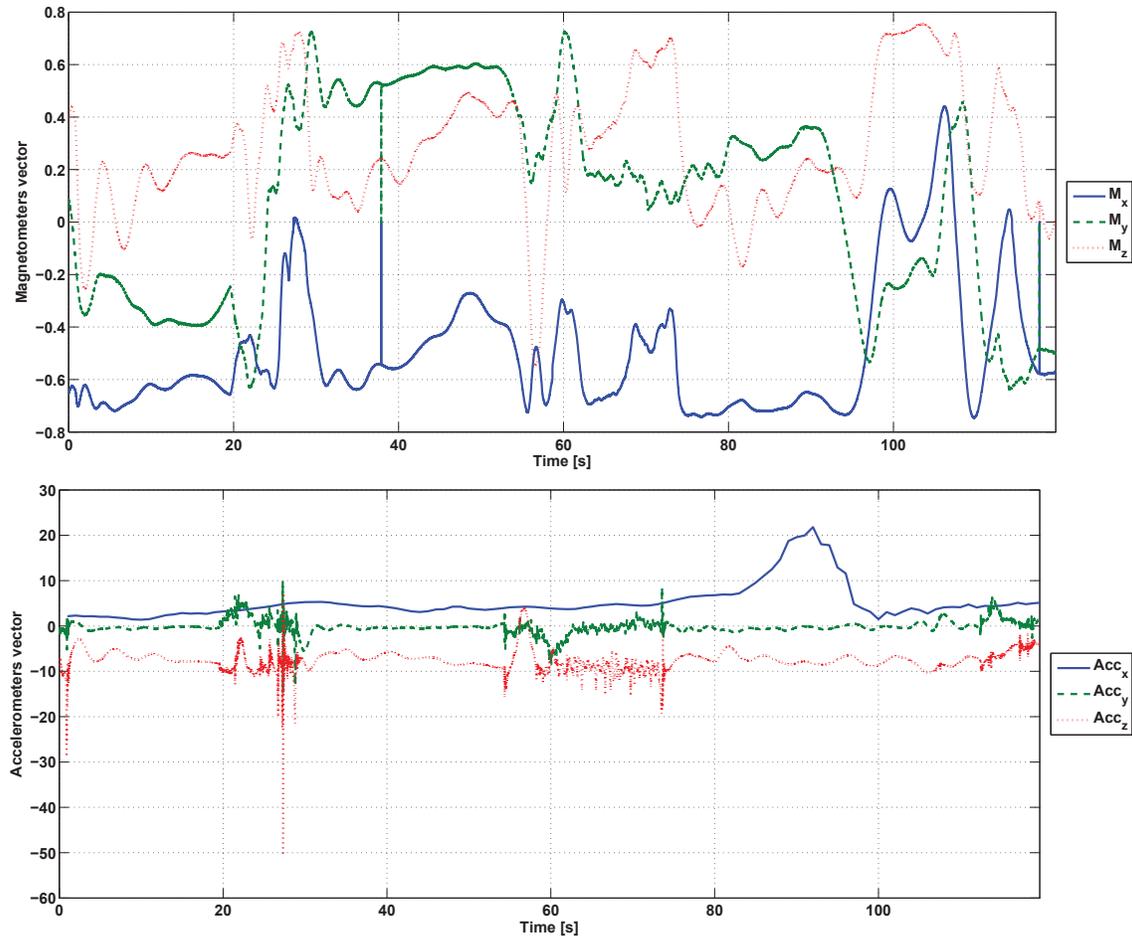


Figura 6.6: Experimento 1. Vector de campo magnético (arriba) y vector de gravedad (abajo).

modelos de realidad virtual que permitieron la comparación visual del desempeño del estimador con la información de orientación del software de la IMU, como se muestra en la figura 6.5.

El diseño del algoritmo de estimación de la orientación de un cuerpo basado en el filtro de Kalman extendido en su forma continua y en el proceso de fusión de sensores mediante el método de Gauss-Newton, permitió reducir la cantidad de operaciones aritméticas del filtro de Kalman y con ello, la cantidad de operaciones aritméticas del esquema de estimación. Los resultados obtenidos fueron satisfactorios en esta primera experiencia, ya que el filtro de Kalman no presentó problemas de divergencia al momento de manipular la IMU con movimientos aleatorios.

La dificultad de la sintonización de los parámetros del filtro de Kalman, la imprecisión del vector de referencia del campo magnético terrestre y en ocasiones, los errores generados por el algoritmo Gauss-Newton, fueron factores que influyeron en el incremento del error entre la orientación estimada y la obtenida por la IMU.

### 6.3. RESULTADOS

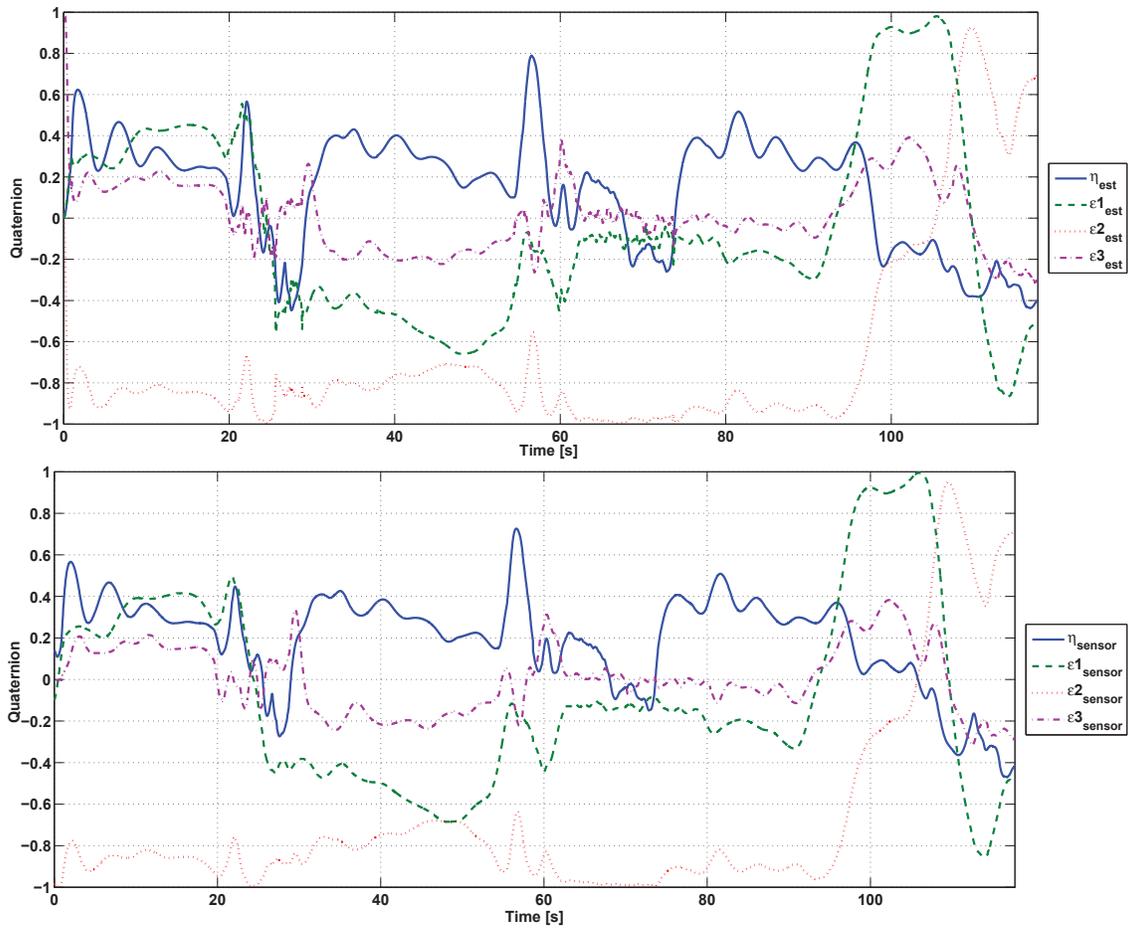


Figura 6.7: Experimento 1. Orientación del dirigible expresado en cuaterniones unitarios. Cuaternión obtenido por el algoritmo de estimación propuesto(arriba) y cuaternión obtenido del software de la IMU (abajo).

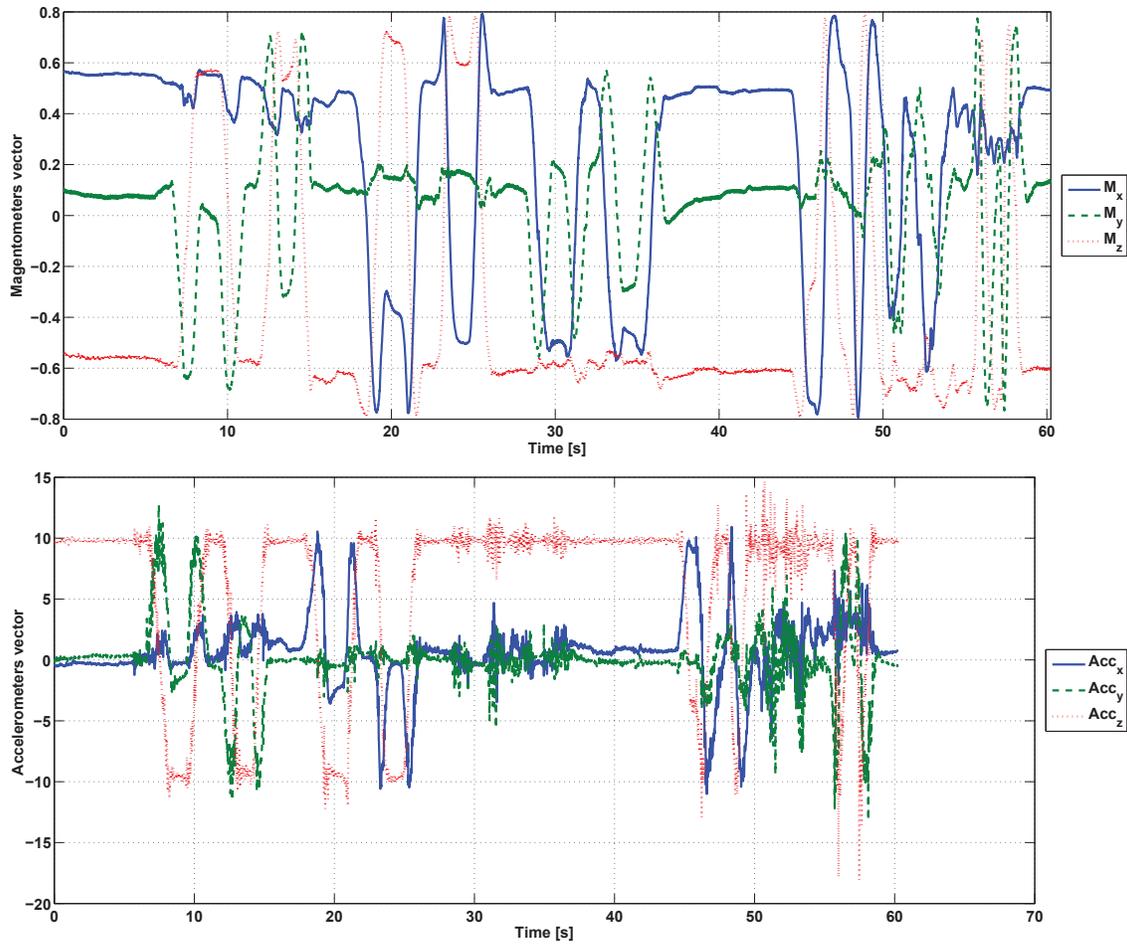


Figura 6.8: Experimento 2. Vector de campo magnético (arriba) y vector de gravedad (abajo).

### 6.3. RESULTADOS

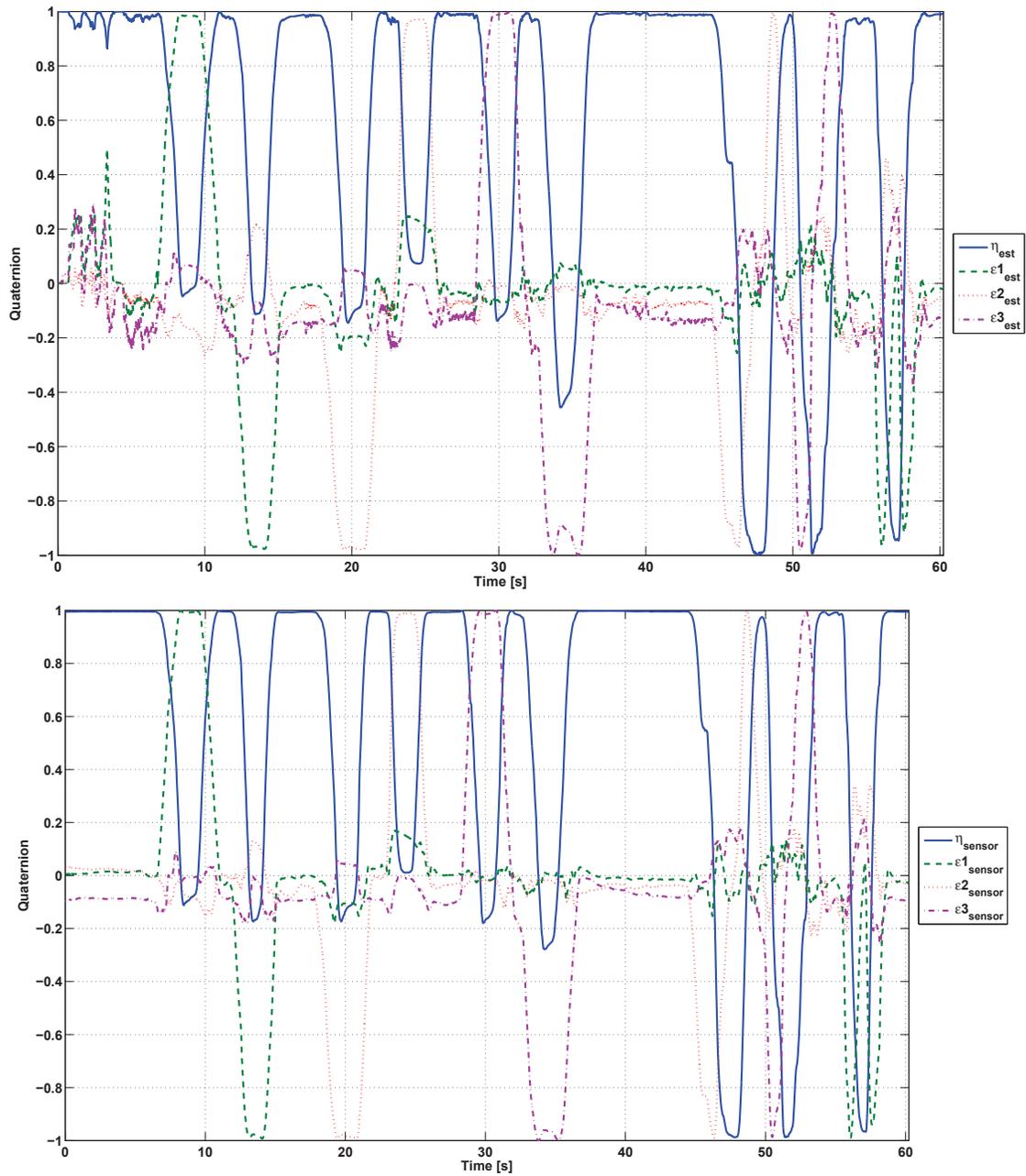


Figura 6.9: Experimento 2. Orientación de la IMU en movimiento libre expresado en cuaterniones unitarios. Cuaternión obtenido por el algoritmo de estimación propuesto(arriba) y cuaternión obtenido del software de la IMU (abajo).

---

## CAPÍTULO 7

# ESTIMACIÓN DE LA ORIENTACIÓN DEL MICROSATÉLITE IRS–FLP

---

En esta segunda fase de proyecto de investigación, se llevó a cabo el desarrollo de algoritmos de estimación de acuerdo a los requerimientos de misión del microsatélite *Flying Laptop* (FLP), que se está desarrollando en el Instituto de Sistemas Espaciales (IRS) de la Universidad de Stuttgart, en Alemania.

Al inicio de la estancia de investigación, se realizó un análisis de estabilidad de los controladores que se diseñaron para cada una de los modos de operación del FLP. Por medio de simulaciones numéricas, se llegó a la conclusión de que se necesitaba un nuevo esquema de control para el modo seguro de operación del FLP, el cual consiste en proteger la integridad de su carga útil sensible a los rayos del Sol, así como el suministro óptimo de energía solar a lo largo de su órbita, utilizando el hardware más confiable para realizar tareas de estabilización.

En las siguientes secciones se mencionarán algunas características del FLP, los algoritmos de estimación desarrollados y los resultados obtenidos de acuerdo a evaluaciones numéricas realizadas en un simulador desarrollado en el IRS.

### 7.1 El Microsatélite IRS–*Flying Laptop*

El FLP es un microsatélite estabilizado en tres ejes, de forma cúbica con dimensiones de 600mm × 700mm × 800mm y peso de 120 kilogramos, (figura 7.1), cuyos objetivos se relacionan con las observaciones científicas de la Tierra y la validación de tecnología para el desarrollo de futuros proyectos satelitales dentro del programa *Stuttgarter Small Satellite Program* (SSSP) del IRS de la Universidad de Stuttgart, Alemania. Ello incluye el uso de un sistema de tres cámaras de alta resolución y un sistema de comunicaciones de alta velocidad como cargas útiles que les permitirá alcanzar sus objetivos [35].

El FLP será lanzado hacia una órbita SSO con una altitud entre 500 y 900 km y con un tiempo local del nodo descendente (LTDN) entre 9:30h y 11:00h. Después de varios análisis, se determinó que la proporción de Sol es cerca de 65%.

### 7.2 El Sistema de Control de Orientación del FLP

El Sistema de Control de Orientación (ACS) del FLP fue diseñado para llevar a cabo tareas de alta precisión, garantizar la integridad de la carga útil y asegurar el suministro de energía solar. Esto implica el uso de instrumentos de medición precisos como sensores de estrellas y giróscopos de fibra óptica (FOG).

## 7.2. EL SISTEMA DE CONTROL DE ORIENTACIÓN DEL FLP

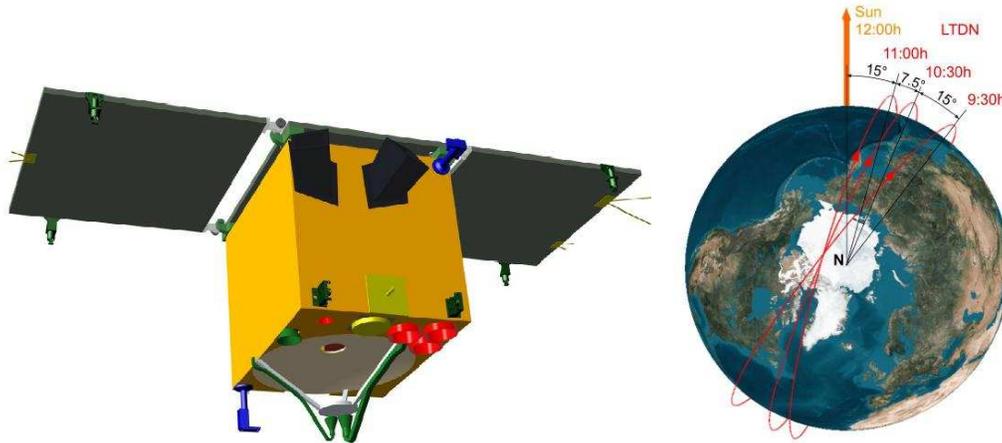


Figura 7.1: El microsatélite IRS Flying Laptop (izquierda) y su órbita síncrona con el Sol (derecha).

### 7.2.1 The ACS hardware

El hardware del ACS del FLP (figura 7.2) consiste en cinco tipos de sensores y dos tipos de actuadores interconectados por medio de una computadora a bordo Virtex II-Pro basada en tecnología FPGA en configuración de tipo estrella, cuya ventaja es el procesamiento en paralelo de cada componente.

Una vista preliminar de los sensores y actuadores del FLP es mostrada en la tabla 7.1.

### 7.2.2 Modos de Control del ACS

Para satisfacer los objetivos de la misión del FLP, se desarrolló un esquema que contiene una secuencia de modalidades de control para el ACS del FLP (figura 7.3). Este esquema permite el control de apuntamiento para realizar diferentes tareas de observación, comunicaciones, asegurar la integridad de la carga útil y proveer energía solar de manera óptima (figura 7.4). Estas tareas son las siguientes:

- **1. Modalidad de reducción de velocidad angular (*Detumbling*):** En esta modalidad, se reduce la velocidad angular del satélite después de ser desplegado o cuando la velocidad angular se incrementa accidentalmente a más de  $3.0^\circ/s$ . Se usan BTMs y magnetómetros en esta modalidad.
- **2. Modalidad de operación segura (*Safe Mode*):** El satélite entra en esta modalidad con una funcionalidad mínima si existe una anomalía en el hardware o software que no puede resolverse a bordo. Esto asegura funciones vitales del satélite suministrando energía solar durante su órbita manteniendo un giro constante alrededor de su eje principal de inercia en dirección al Sol. Se utilizan BTMs junto con magnetómetros y sensores de Sol los cuales fueron seleccionados como los componentes más confiables del ACS.
- **3. Modalidad de espera (*Idle Mode*):** Es también una modalidad de apuntamiento en dirección al Sol. El satélite espera el siguiente comando mientras los paneles solares son alineados en dirección al Sol para un abastecimiento óptimo de energía solar. Se usan ruedas inerciales como actuadores, además del sensor de estrellas, sensores de Sol, y FOGs, para obtener la orientación del satélite.
- **4. Modalidad de apuntamiento inercial (*Inertial Pointing*):** Es una modalidad de apuntamiento donde el satélite lleva a cabo observaciones científicas a un objetivo fijo inercialmente en el espa-

Tabla 7.1: Sensores y actuadores del ACS del FLP.

Hardware	Fabricante	Descripción
Magnetómetros	Zarm-Technik	Se utilizan magnetómetros en tres ejes anisotrópicos y magnetoresistivos basados en un microcontrolador, con una sensibilidad de 8.5[nT].
Sensores de Sol	Sun Systems	Basados en dos paneles solares de GaAs, se emplean ocho unidades para cubrir una vista de $4\pi$ .
Sistema GPS	DLR / GSOC	Tres receptores independientes GPS conectados cada uno por una antena y un amplificador de bajo ruido.
Giróscopos de fibra óptica FOGs	LITEF	Cuatro FOGs organizados en una configuración en tetraedro para la medición de la velocidad angular del cuerpo, con una tasa máxima de deriva de $27[^\circ/h]$ y un desplazamiento aleatorio de $0.15^\circ/\sqrt{h}$ .
Sensor de estrellas	DTU	Con una unidad de procesamiento de datos basado en un microcontrolador y dos cámaras equipadas con un deflector, toma imágenes de las estrellas con una resolución de $752 \times 558$ píxeles.
Ruedas inerciales	Rockwell Collins	Cuatro unidades en configuración tetraedro. Cada una tiene una capacidad de 0.12 [Nms] de momento angular y 5[mNm] como par de reacción en un rango de $\pm 3000$ rpm.
BTMs)	Zarm-Technik	Se utilizan tres BTMs con un momento lineal de dipolo de $6[Am^2]$ cada uno. Consisten en dos bobinas independientes envueltas separadamente en paralelo una sobre otra que provee redundancia, con una masa de 0.24 kilogramos

cio, así como tareas de calibración. Se utilizan ruedas inerciales, sensor de estrellas y FOGs en esta modalidad.

- **5. Modalidad de apuntamiento al nadir terrestre (*Nadir Pointing*):** En esta modalidad el sistema de cámaras apunta al centro de la Tierra con el soporte del sistema GPS. Se utilizan ruedas inerciales, sensores de estrellas y FOGs en esta modalidad.
- **6. Modalidad de seguimiento (*Target Pointing*):** El satélite realiza observaciones científicas de la Tierra apuntando hacia un objetivo en la superficie terrestre durante su vuelo. En esta modalidad también se utilizan rudas inerciales, sensor de estrellas FOGs, además de un receptor GPS.

### 7.2.3 Solución del modelo ACS en modo seguro

Para propósitos de esta tesis, el trabajo realizado se enfoca en la modalidad de operación segura (*Safe Mode*). Anteriormente, el controlador de la modalidad de operación segura estaba basado en un algoritmo de control en dos ejes que fue diseñado para mantener un giro constante de satélite en su eje principal de inercia alineado al vector de dirección del Sol. Esto proveería estabilidad incluso cuando no se tenga

### 7.3. ALGORITMO DE ESTIMACIÓN BASADO EN EL EKF



Figura 7.2: Hardware del ACS del FLP.

disponible información del sensor de Sol en la fase de eclipse, asegurando la integridad de la carga útil y suministro de energía solar.

Para este modo operativo se propone un nuevo esquema de control en tres ejes con el uso de algoritmos de estimación de orientación, haciendo posible el diseño de un controlador en tres ejes con esta nueva información, de tal manera que se cumplan los requerimientos del controlador para el satélite FLP.

### 7.3 Algoritmo de Estimación basado en el EKF

Se diseñó un algoritmo de estimación de orientación para el FLP basado en el EKF para cumplir con los requerimientos del controlador de la modalidad de operación segura, las cuales consisten principalmente en el apuntamiento de los paneles solares en dirección del Sol a lo largo de su órbita, incluso cuando éste se encuentre en la fase de eclipse, donde no se tiene información de la dirección del Sol.

El reto de diseño de este algoritmo fue el cómputo de la orientación del satélite en la fase de eclipse con la información de los magnetómetros, lo que significa que sólo se conoce la información de la orientación del satélite en dos ejes en esta fase y en consecuencia, el cómputo de la dirección del Sol se vuelve imprecisa, a pesar de los problemas de ajuste de covarianzas que involucra el diseño de un filtro de Kalman.

Esta es la razón principal para el diseño de dos filtros de Kalman para cada fase a lo largo de la órbita del FLP. En la fase de Sol (sEKF), tanto la orientación del satélite como su velocidad angular son estimados con una buena precisión. En la fase de eclipse (eEKF) la velocidad angular es estimada con la misma confiabilidad, pero la orientación puede ser estimada usando la información previa del filtro de

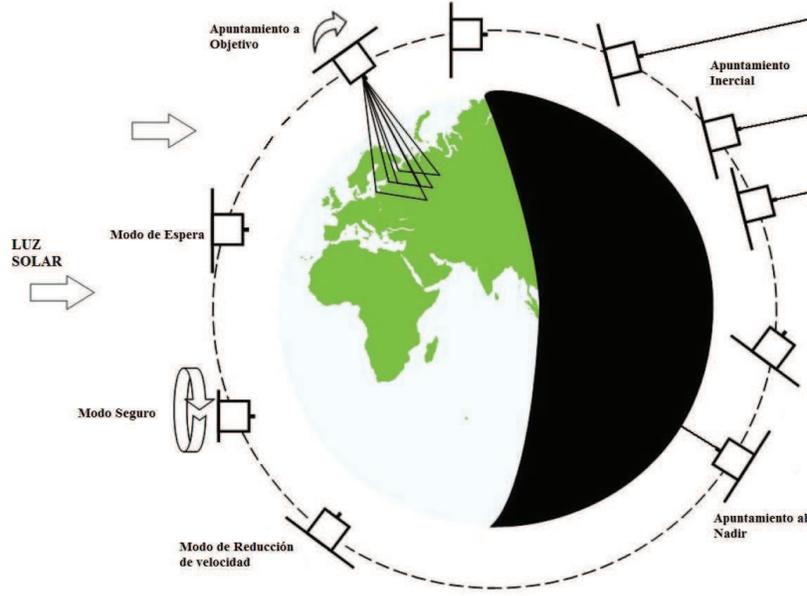


Figura 7.3: Modalidades de Control del FLP.

Kalman, obteniendo una mejor precisión.

La diferencia entre el sEKF y el eEKF yace en las mediciones que se tienen disponibles y la manera como son tratados, pero la estructura de cada uno de ellos es muy similar. En el primer caso, la orientación del satélite en forma de un cuaternión unitario se calcula mediante un método determinístico que lleva a cabo una fusión de los sensores de Sol y el magnetómetro; mientras que en el segundo caso, sólo se tiene la información del magnetómetro. En consecuencia, es necesario el uso de dos matrices de covarianza para cada caso, tanto del proceso como de la medición.

El primer paso para el diseño del EKF, es tener conocimiento del sistema que describe la dinámica y cinemática del FLP en el sistema coordenado fijo a la Tierra, basados en las ecuaciones (3.21) and (3.22), es decir:

$$\begin{aligned}\dot{\Omega}_b^i &= -J_b^{-1}(\Omega_b^i \times J_b \Omega_b^i + \tau_{mag}) \\ \dot{\epsilon} &= \frac{1}{2}[\eta \mathcal{I} + S(\epsilon)]\Omega_b^e \\ \dot{\eta} &= -\frac{1}{2}\epsilon^\top \Omega_b^e\end{aligned}\quad (7.1)$$

donde:

$$\Omega_b^i = \Omega_b^e + R_b^e \Omega_e^i \quad (7.2)$$

siendo  $\Omega_e^i = [0 \ 0 \ \omega_e]^\top$  y  $\omega_e$  la rotación de la Tierra y  $R_b^e$  definido en (3.13).

Como las variables del sistema en espacio de estados deben de estar expresados en el mismo sistema coordenado en el diseño del EKF, las ecuaciones que describen la dinámica del satélite (7.1) deben ser expresadas en el sistema coordenado  $\mathcal{S}^e$  usando la ecuación (7.2) y su derivada:

$$\dot{\omega}_{BE} - \dot{R}_{be} \omega_{EI} = -I^{-1}(\Omega_b^i \times I \Omega_b^i + \tau_{mag}) \quad (7.3)$$

Considerando  $\dot{R}_b^e = S(\Omega)_b^e R_b^e$  y sustituyéndolo en la ecuación (7.3), el sistema en espacio de estados,

### 7.3. ALGORITMO DE ESTIMACIÓN BASADO EN EL EKF

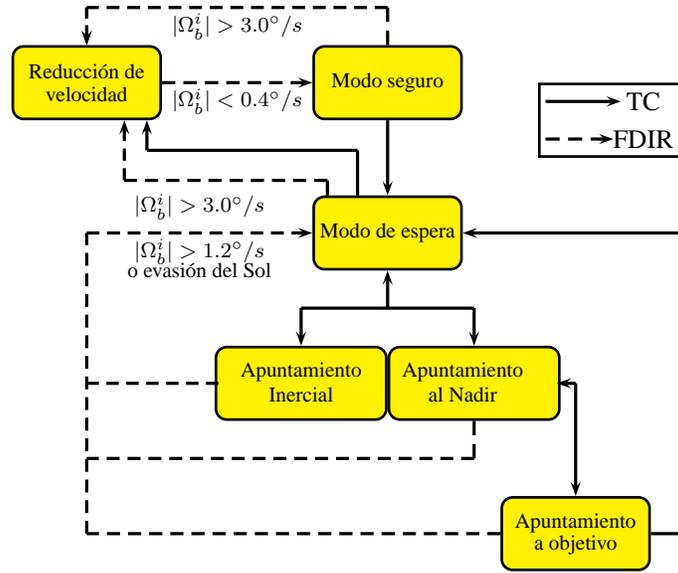


Figura 7.4: Esquema de control del FLP (TC = Telecomando, FDIR = Detección de falla, aislamiento y recuperación).

así como el proceso de linearización mencionado en la ecuación (5.14), es:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{\Omega}_b^e \\ \dot{\epsilon} \\ \dot{\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -J_b^{-1}((\Omega_b^e - R_b^e \Omega_e^i) \times J_b(\Omega_b^e - R_b^e \Omega_e^i) + \tau_{mag}) + S(\Omega_b^e) R_b^e \Omega_e^i \\ \frac{1}{2}[\eta \mathcal{I} + S(\epsilon)] \Omega_b^e \\ -\frac{1}{2} S(\epsilon)^\top \Omega_b^e \end{bmatrix} \quad (7.4)$$

donde  $x = [\Omega_b^e \ \epsilon \ \eta]$  y  $\mathbf{q}_b^e = [\epsilon^\top \ \eta]^\top$ .

Para calcular la ganancia de Kalman con la ecuación (5.10), la matriz  $R$  es establecida seleccionando los valores de covarianza tal que  $R = \text{diag}(cov_m, cov_m, cov_m)$ , donde  $cov_m$  se sintoniza para alcanzar convergencia del filtro. El eEKF,  $cov_m$  puede establecerse con base en las características de ruido del magnetómetro con la ecuación (5.9). En el caso del sEKF,  $cov_m$  puede establecerse con base en los resultados de sintonización del eEKF, pero se debe hacer un ajuste para lograr resultados más precisos.

La actualización del cuaternión (7.5), sugerida en [36], se lleva a cabo mediante un producto de cuaterniones como se indica en la ecuación (3.9), y se usa tanto en el sEKF como en el eEKF. No obstante, el proceso de innovación  $\nu$  es diferente y será explicado en las siguientes secciones.

$$\begin{aligned} \Delta \epsilon_{ud} &= K_q \nu \\ \Delta \eta_{ud} &= \frac{K_q \nu}{\sqrt{1 - \Delta \epsilon_{ud}^\top \Delta \epsilon_{ud}}} \end{aligned} \quad (7.5)$$

$$\mathbf{q}_k = \begin{bmatrix} \eta_{k-1} \Delta \epsilon_{ud} + \epsilon_{k-1} \Delta \eta_{ud} - S \epsilon_{k-1} \Delta \epsilon_{ud} \\ \eta_{k-1} \Delta \eta_{ud} - \epsilon_{k-1}^\top \Delta \epsilon_{ud} \end{bmatrix} \quad (7.6)$$

La actualización de la velocidad angular es:

$$\Omega_k = \Omega_{k-1} + K_\omega \nu \quad (7.7)$$

El proceso de actualización se lleva a cabo extrayendo los elementos necesarios de la matriz de ganancias de Kalman como se muestra en la ecuación (7.8), el cual es calculado con la ecuación (5.10):

$$K_k = \begin{bmatrix} K_\omega \\ K_q \end{bmatrix} \quad (7.8)$$

Para calcular  $P_{k+1}^-$  de la etapa de propagación de acuerdo a la ecuación (5.12), la matriz  $Q$  es establecida por medio de una sintonización de las covarianzas del proceso  $cov_{p_q}$  (relacionado con la cinemática del satélite) y  $cov_{p_\omega}$  (relacionado con la dinámica del satélite) tanto para el eEKF como el sEKF.

El sistema (7.4) tiene un papel importante en la etapa de propagación. Evaluando este sistema en términos de los estados estimados  $\hat{x}$  queda:

$$f(\hat{x}_k, u, t) = \begin{bmatrix} -J_b^{-1}((\hat{\Omega}_b^e - R_b^e(\hat{\mathbf{q}}_b^e)\Omega_e^i) \times J_b(\hat{\Omega}_b^e - R_b^e(\hat{\mathbf{q}}_b^e)\Omega_e^i) + \tau_{mag}) + S(\hat{\Omega}_b^e)R_b^e(\hat{\mathbf{q}}_b^e)\Omega_e^i \\ \frac{1}{2}[\hat{\eta}\mathcal{I} + S(\hat{\epsilon})]\hat{\Omega}_b^e \\ -\frac{1}{2}\hat{\epsilon}^\top \hat{\Omega}_b^e \end{bmatrix} \quad (7.9)$$

y la etapa de propagación para los estados estimados es:

$$\hat{x}_{k+1}^- = \hat{x}_k + \int_k^{k+1} f(\hat{x}_k, u_k, t) dt = \hat{x}_k + \frac{1}{2} (f(\hat{x}_k, u_k, t) + f(\hat{x}_{k-1}, u_{k-1}, t)) \Delta t \quad (7.10)$$

donde la integral de la ecuación (7.10) puede calcularse por medio de un método numérico, (p. ej. regla del trapecio).

*Observación:* Al comienzo de cada iteración del FLP EKF, tiene que asegurarse un valor positivo en el elemento escalar del cuaternión, así como mantener la unicidad del cuaternión, es decir  $\mathbf{q}\mathbf{q}^\top = 1$ , y la de cada vector de medición del campo magnético y dirección del Sol.

### 7.3.1 EKF en fase de Sol

En esta fase, está disponible la información de los sensores de Sol y magnetómetros en el sistema coordenado del cuerpo del satélite, en consecuencia, el cálculo del cuaternión que relaciona los sistemas coordenados  $\mathcal{S}^B$  y  $\mathcal{S}^E$  se lleva a cabo con un método determinístico, como los mencionados en la sección 6.1; debido a la posibilidad de obtener resultados con un nivel alto de ruido, se emplea un filtro de Kalman para obtener resultados más precisos, así como la estimación de la velocidad angular del satélite.

Después de obtener el cuaternión, producto de la fusión de información de los sensores de Sol y magnetómetros, el proceso de medición queda como:

$$y = h(x, t) + v(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \epsilon_c 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \epsilon_c 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \epsilon_c 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \eta_c \end{bmatrix} + v(t) \quad (7.11)$$

Una vez definido  $h(x, t)$ , del proceso de linearización (5.14) resulta la matriz  $H$ :

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.12)$$

### 7.3. ALGORITMO DE ESTIMACIÓN BASADO EN EL EKF

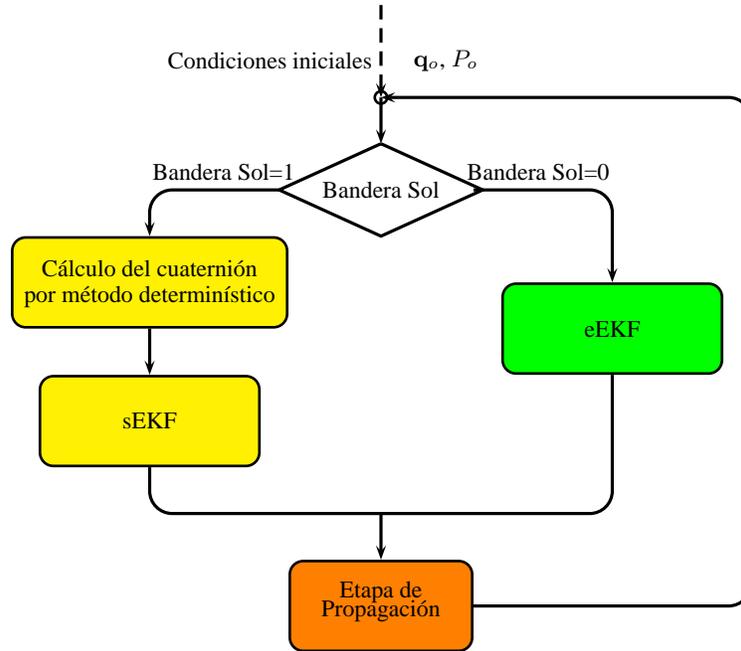


Figura 7.5: El Filtro de Kalman Extendido del FLP.

donde la última columna de la matriz  $H$  fue omitida considerando el hecho de que el término escalar del cuaternión  $\eta$  está relacionada con la parte vectorial mediante la propiedad de unicidad del cuaternión  $\|\mathbf{q}\| = 1$ . Esta restricción resulta en una singularidad en la matriz de covarianzas del cuaternión [20]. Para evitar esta singularidad se optó por el truncamiento de la matriz de covarianzas y en consecuencia, el truncamiento de la matriz  $H$ .

Finalmente, el proceso de innovación es propuesto como:

$$\nu = \epsilon_c - \hat{\epsilon} \quad (7.13)$$

donde  $\mathbf{q}_c = [ \epsilon_c^\top \eta_c ]^\top$  indica un cuaternión previamente calculado por medio de un método determinístico.

#### 7.3.2 EKF en fase de eclipse

En esta fase, únicamente está disponible la información de los magnetómetros. Para determinar el cuaternión que relaciona los sistemas coordenados  $\mathcal{S}^B$  y  $\mathcal{S}^E$ , se propone el uso de la información previa del sEKF o de las condiciones iniciales programadas después de la inicialización del modo seguro de operación del FLP.

El proceso de medición es:

$$y = h(x, t) + v(t) = b_B = R_b^e(\hat{\mathbf{q}}_{k-1})b_E + v(t) \quad (7.14)$$

donde  $R_b^e(\mathbf{q}_{k-1})$  es la matriz de rotación definido por la ecuación (3.13) y  $b_E$  es el vector de campo magnético terrestre en el sistema coordenado  $\mathcal{S}^E$  mencionado en la sección 3.4.

La ecuación (5.14) describe el proceso de linealización requerido para calcular  $H$  y debido a la estructura no lineal de la función  $h(x, t)$  mostrado en la ecuación (7.14), la matriz  $H$  queda como:

$$H = \begin{bmatrix} 0^{3 \times 3} & \left. \frac{\partial (R_b^e(\mathbf{q})b_E)}{\partial \mathbf{q}} \right|_{\mathbf{q}=\hat{\mathbf{q}}_k} \end{bmatrix} \quad (7.15)$$

la cual será utilizada para calcular la ganancia de Kalman descrita en la ecuación (5.10).

Finalmente, el proceso de innovación es:

$$\nu = b_B - R_b^e(\hat{\mathbf{q}}_{k-1})b_E \quad (7.16)$$

### 7.3.3 Nuevo esquema de control basado en el EKF para el FLP en modo seguro de operación

En la sección 7.2.2, se describió el controlador del modo seguro de operación del FLP, donde se implementó un algoritmo de control en dos ejes.

Con el diseño e implementación del algoritmo de estimación basado en el EKF, está disponible la información de la orientación del satélite en tres ejes, permitiendo ello realizar la propuesta de un nuevo algoritmo de control de orientación para alinear los paneles solares con la dirección del Sol a lo largo de la órbita del FLP.

El nuevo esquema de control para el modo seguro de operación del FLP se muestra en la figura 7.6.

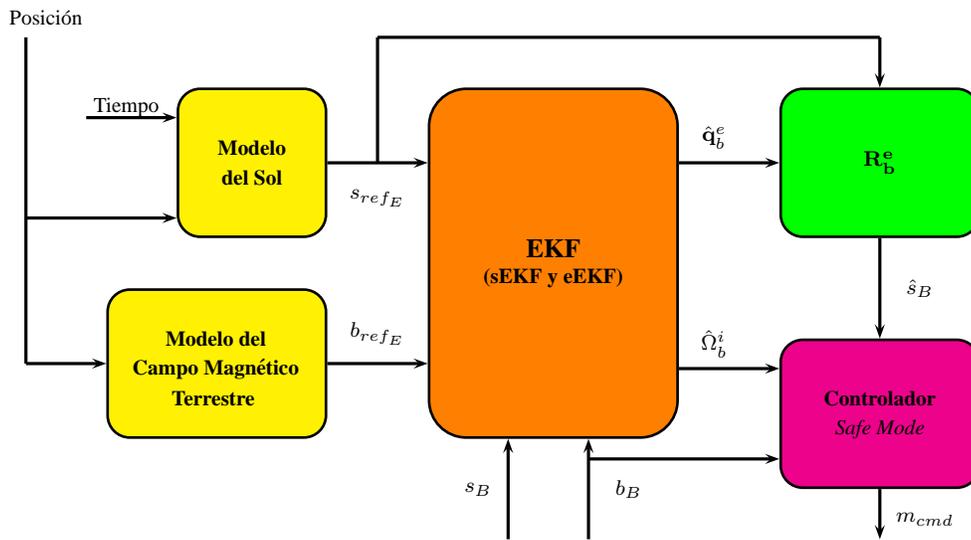


Figura 7.6: Nuevo esquema de control para el modo seguro de operación.

En este esquema, el cuaternión estimado  $\hat{\mathbf{q}}_{BE}$  se usa para construir una matriz de rotación descrita en (3.13), la cual se emplea para estimar el vector de Sol respecto al sistema coordenado del cuerpo del satélite tanto en la fase de Sol como en eclipse.

## 7.4 Resultados

El algoritmo de estimación de orientación del FLP para su modo seguro de operación se programó en un simulador bajo la plataforma de *Simulink* de MATLAB, donde la dinámica del satélite, condiciones espaciales, órbita, modelos de actuadores, sensores e inclusive parte del hardware del ACS del FLP fueron modelados matemáticamente. En la tabla 7.2 se especifican los parámetros iniciales que se establecieron en el simulador para evaluar los algoritmos de estimación:

Tabla 7.2: Parámetros iniciales del simulador.

Parámetros iniciales	Valores
Fecha y hora	01/01/2007 - 00:00:00hrs
Órbita	SSO, 600km al nivel del mar, LTDN 10:30hrs
Posición inicial $S^I$	$[1340.4752015.4056544.9] \times 10^3$ [m]
Velocidad Inicial $S^I$	$[-1.154 - 7.0692.413] \times 10^3$ [m/s]
Orientación inicial del Satélite	$\mathbf{a}_b^i = [0.629 - 0.757 0.051 0.169]$
Velocidad Angular Inicial	$\Omega_b^i = [0.1 0.25 - 0.28]$ [°/s]

Para alcanzar buenos resultados en la estimación del vector de Sol, fue necesario una sintonización adicional de los valores de covarianzas. En la tabla 7.3 se muestran los valores de covarianzas que fueron establecidos en el algoritmo de estimación, en todos los casos se consideraron matrices diagonales para construir las respectivas matrices de covarianzas.

Tabla 7.3: Parámetros sintonizados del algoritmo de estimación del FLP.

Covarianzas sintonizadas	Valores
Cuaternión del método determinístico	$8 \times 10^{-16}$
Covarianza del Giróscopo	$1 \times 10^{-16}$
Covarianza del Proceso de la Cinemática	$1 \times 10^{-16}$
Covarianza del Proceso de la Dinámica	$1 \times 10^{-16}$
Condición Inicial $P_o$	$1 \times 10^{-15}$

El problema de la sintonización de los valores de covarianzas es una tarea difícil y tienen que ajustarse cuidadosamente. En las figuras 7.7 y 7.8 se presentan ejemplos del problema de sintonización y ajuste de los valores de covarianzas, de las ganancias del controlador, así como del efecto que tienen en la estimación del vector de Sol y en las velocidades angulares.

En la figura 7.7, hay un rango pequeño de tiempo en el que el vector de Sol se estima con una precisión aceptable, pero después de un lapso de tiempo, el error aumenta. Una posible causa de este efecto es la incertidumbre de la magnitud de la velocidad angular al momento en que el satélite entra en este modo de operación, sin considerar que ya se establecieron las condiciones para que esto suceda (figura 7.4). En esta simulación se introdujo un valor inicial de velocidad angular arbitrario (figura 7.8) en donde se observa que se mantiene el error entre la velocidad angular real y la estimada.

Ahora bien, observando este escenario se hizo una sugerencia para mejorar el desempeño del algoritmo de estimación desarrollado para mejorar de manera importante la confiabilidad del esquema de control. La mejora implica el uso de FOGs dentro del modo de operación seguro del FLP, cuyo resultado

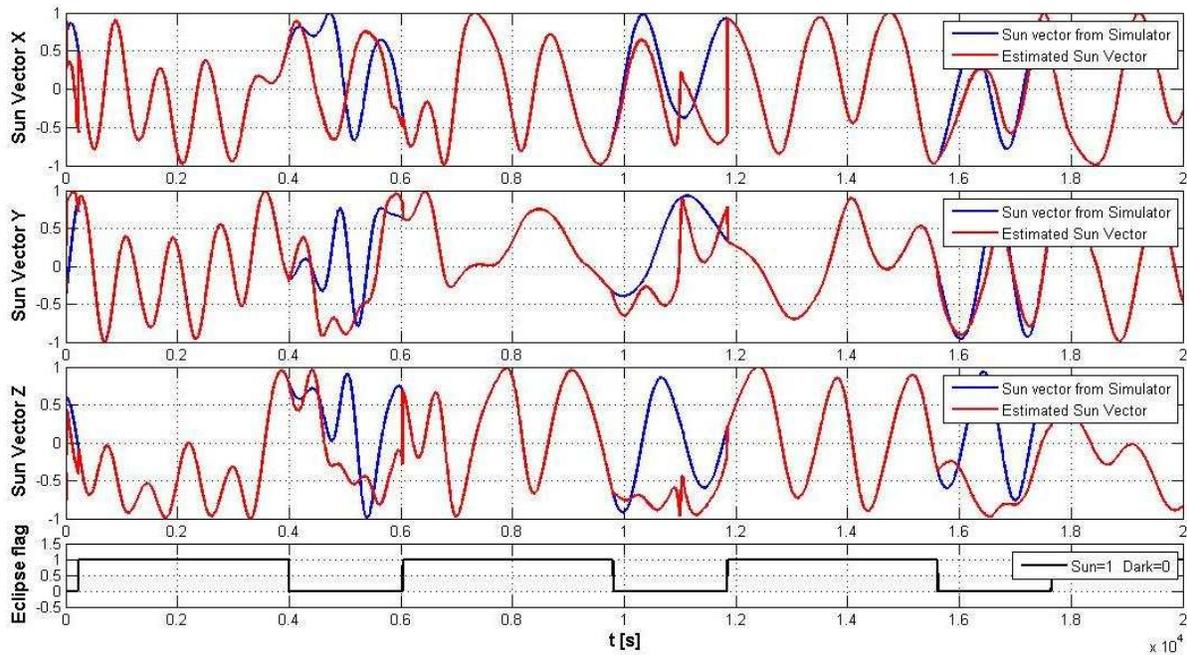


Figura 7.7: Estimación del vector de Sol, con el comando de control desactivado.

se muestra en la figura 7.9.

De acuerdo a los requerimientos del modo seguro de operación del microsatélite *Flying Laptop*, el vector de Sol es estimado exitosamente en las fases de Sol y eclipse para que los paneles solares del satélite estén alineados con el Sol. La decisión de utilizar FOGs yace en la incertidumbre de la magnitud de la velocidad angular cuando el satélite entra en este modo de operación. Con el uso de FOGs, el error de estimación del vector de Sol en la fase de eclipse se redujo y como resultado, la confiabilidad de este nuevo esquema de control mejoró considerablemente.

Comparando el esquema de control anterior del modo seguro de operación con el que se desarrolló en esta investigación, el segundo demuestra ser más confiable que el primero. Sin embargo, no se consideraba el uso de FOGs en este modo de operación, por lo que se sugiere una investigación subsecuente para determinar los nuevos requerimientos de potencia y procesamiento de acuerdo a la actualización del esquema de control.

## 7.4. RESULTADOS

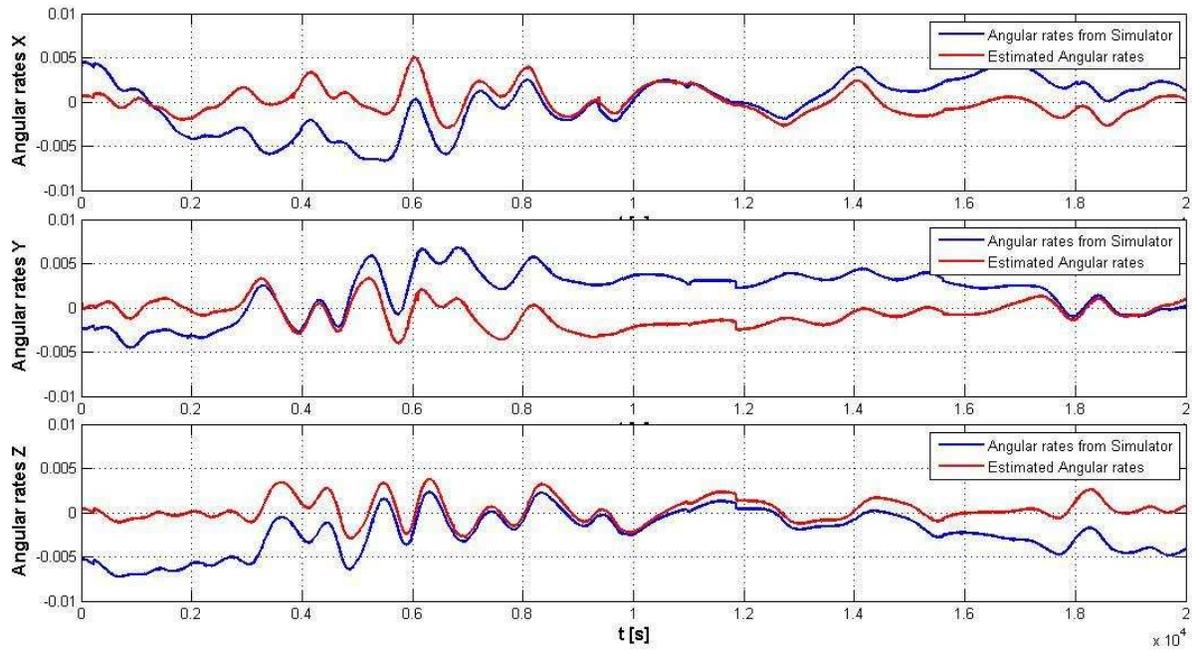


Figura 7.8: Estimación de la velocidad angular, con el comando de control desactivado.

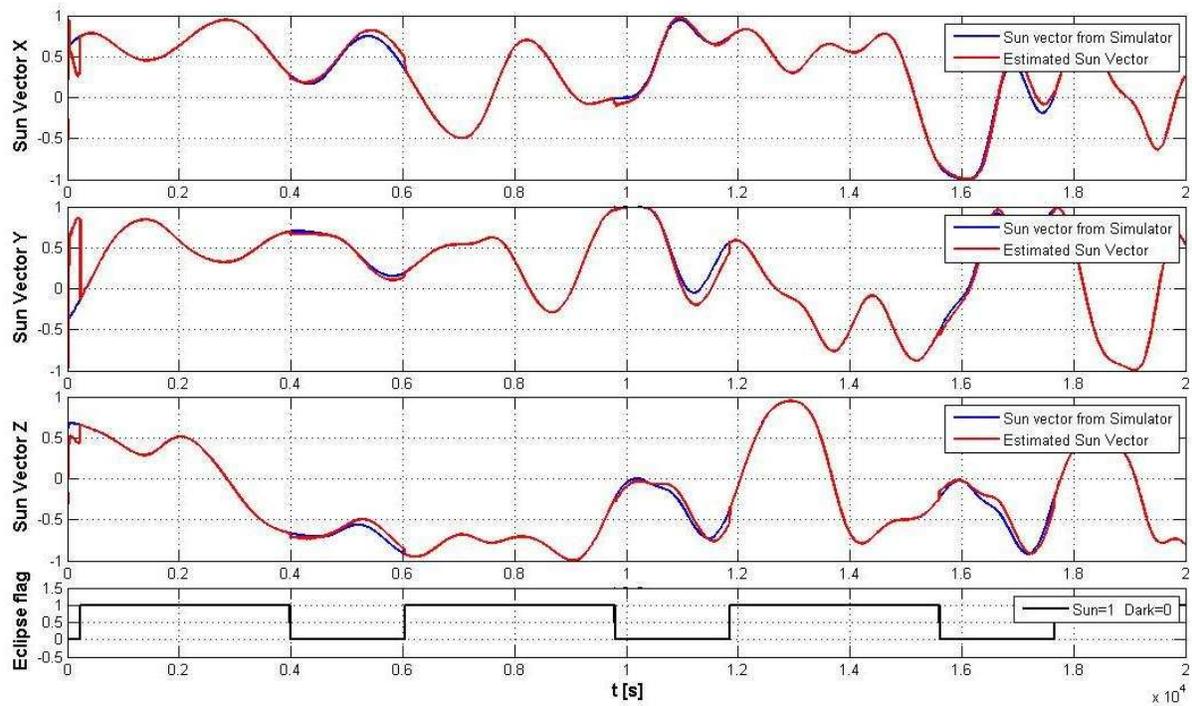


Figura 7.9: Estimación del vector de Sol utilizando FOGs, con el comando de control desactivado.

---

## CAPÍTULO 8

# INTEGRACIÓN DE RESULTADOS AL PROYECTO HUMSAT-MÉXICO

---

Reuniendo las experiencias y resultados descritos en los capítulos 6 y 7, es posible diseñar un esquema de control preliminar para el nanosatélite HumSat-México.

Para realizar un análisis de confiabilidad y desempeño de los algoritmos de estimación y control de orientación del satélite, se diseñó un simulador de vuelo para el nanosatélite HumSat-México (figura 8.1). Este simulador cuenta con la opción de realizar ajustes de parámetros de cada sensor y actuador, así como incluir la definición de las efemérides de la órbita que seguirá el satélite. De esta manera se pueden establecer los parámetros que definirán los actuadores, sensores y los parámetros de control para que el satélite realice las tareas científicas para las cuales fue diseñado.

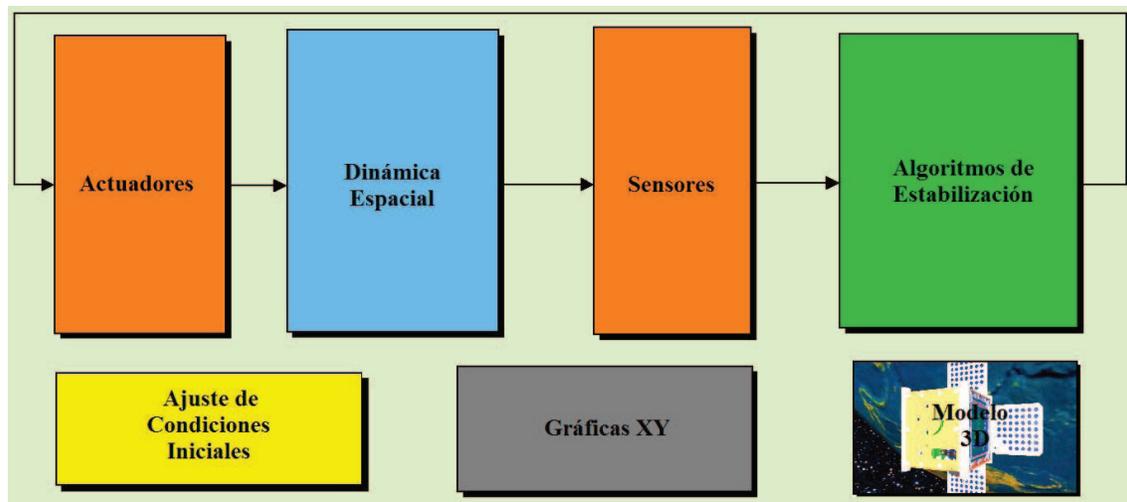


Figura 8.1: Diagrama del simulador de vuelo para el nanosatélite HumSat-México.

### 8.1 Modelo Virtual para la Visualización de Resultados

Debido a la necesidad de interpretar los resultados de las simulaciones de una manera rápida y sencilla para la toma de decisiones, se diseñó un ambiente de realidad virtual que permite visualizar el desempeño

## 8.2. ÓRBITA DEL NANOSATÉLITE HUMSAT-MÉXICO

de los algoritmos de control de orientación satelital.

Aún cuando las gráficas en 2D muestran la magnitud de algunos parámetros de las simulaciones, la interpretación de algunos parámetros como la posición y orientación de objetos en el espacio no es clara, por lo que la visualización de resultados en un modelo 3D genera conclusiones inmediatas.

En la figura 8.2 se muestra la interfaz de usuario del ambiente de realidad virtual desarrollado en *Simulink*, de Matlab, la cual contiene un modelo hipotético de un nanosatélite con estructura 3U, el modelo de la Tierra y el modelo del Sol, todos ellos sincronizados mediante la unidad de tiempo UTC. Con esta herramienta se pueden realizar estudios sobre la órbita del satélite, navegación y evaluación de algoritmos de control de orientación.

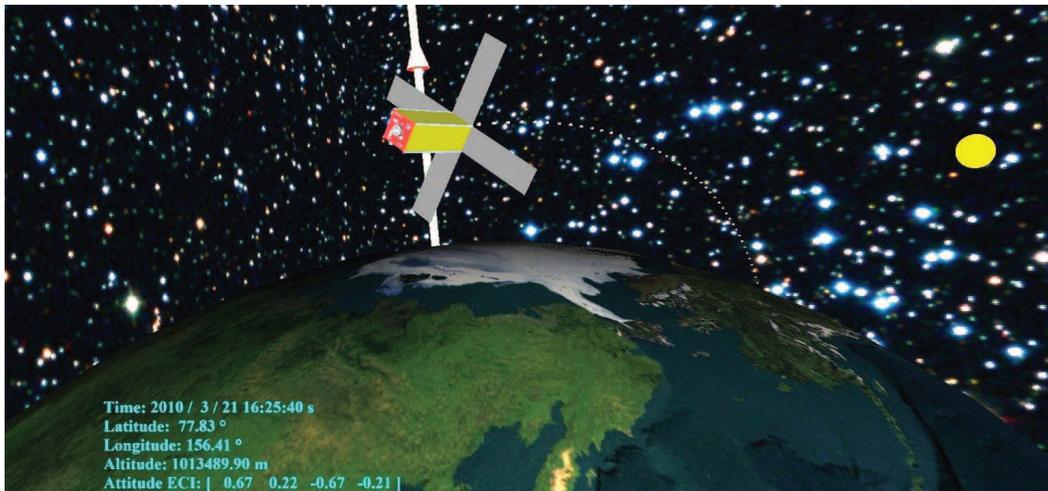


Figura 8.2: Vista del modelo virtual para el simulador de vuelo del nanosatélite HumSat-México, donde se puede observar al satélite pasando sobre el polo Norte.

## 8.2 Órbita del Nanosatélite HumSat-México

La órbita seleccionada para el nanosatélite HumSat-México fue una SSO (figura 8.3), utilizada frecuentemente para aplicaciones de percepción remota. Los parámetros orbitales que se ingresaron al simulador para obtener los resultados de la figura y 8.4 fueron:

Tabla 8.1: Parámetros de la órbita SSO del nanosatélite HumSat-México.

Parámetros	Valores
Fecha y hora	21/03/2010 - 15:44:00hrs
Radio de la orbita	7371.2 km
LTDN	11:30hrs
Inclinación	99.45°
Argumento de perigeo inicial	-45°
Ascensión derecha del nodo ascendente inicial	-8.41°



Figura 8.3: Simulación de la órbita SSO del nanosatélite HumSat-México.

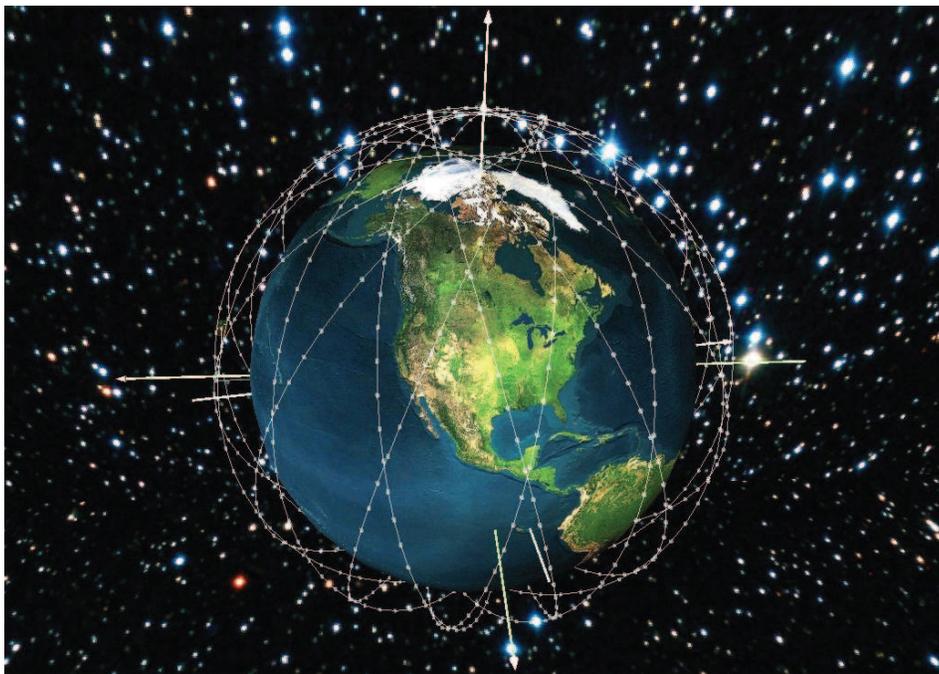


Figura 8.4: Cobertura del nanosatélite HumSat-México en la Tierra.

### 8.3. ESQUEMA DE CONTROL PROPUESTO PARA EL NANOSATÉLITE HUMSAT-MÉXICO

Con los resultados obtenidos se pueden realizar estudios para establecer los parámetros de estabilización que permitirán al satélite realizar tareas tanto de percepción remota como de transmisión de datos hacia una estación terrena mediante comunicaciones direccionales.

### 8.3 Esquema de Control Propuesto para el Nanosatélite HumSat-México

De acuerdo los objetivos que se persiguen con el proyecto HumSat, y a la necesidad de validar tecnología Mexicana de estabilización en tres ejes mediante el nanosatélite HumSat-México, se ha diseñado un esquema de control que permite realizar diferentes maniobras para propósitos específicos, como se muestra en la figura 8.5.

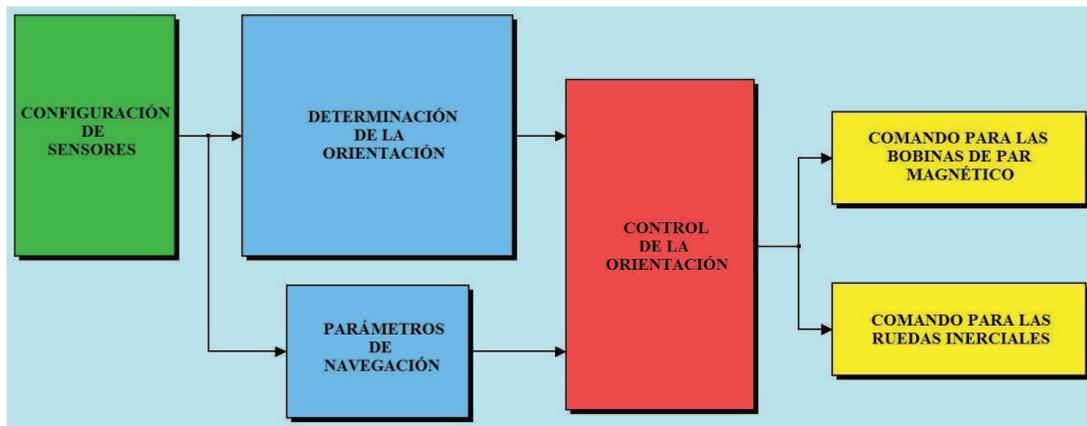


Figura 8.5: Esquema de control del HumSat-México.

El nanosatélite HumSat-México contará con sensores de Sol, magnetómetros, giróscopos y un receptor GPS como sensores. La información proveniente de cada sensor se procesa en el bloque "Configuración de Sensores" en forma de vectores para alimentar a los demás bloques. El bloque "Determinación de la Orientación" se caracteriza por proveer la orientación del satélite de acuerdo a los sensores que estén disponibles. Este proceso se basa en la mezcla de algoritmos de determinación de la orientación determinísticos y analíticos (p.ej. TRIAD y EKF). La información de salida de este bloque es la orientación del satélite en forma de un cuaternión unitario. El bloque "Parámetros de Navegación" tiene como función proveer la información necesaria para que el satélite lleve a cabo tareas de captación óptima de energía solar, percepción remota y comunicaciones direccionales. En el bloque "Control de Orientación" se determina el par de control necesario para realizar las maniobras de estabilización para las tareas de percepción remota, comunicaciones inalámbricas y captación de energía solar. Y por último, los bloques "Comando de la Bobina de Par Magnético" y "Comando de la Rueda Inercial", tienen como función interpretar la información del bloque "Control de Orientación" para que las BTMs y las ruedas inerciales, que son los actuadores del nanosatélite HumSat-México, realicen las maniobras de estabilización.

Este esquema de control estará embebido en una arquitectura reconfigurable basada en un dispositivo FPGA, el cual permitirá la actualización del hardware de estabilización de manera remota [37]<sup>1</sup>.

<sup>1</sup>El trabajo citado forma parte de una investigación doctoral que se realiza actualmente en el Instituto de Ingeniería, UNAM.

### 8.3.1 Determinación de la Orientación

La secuencia del cómputo que permite estimar la orientación del nanosatélite Humsat-México se muestra en la figura 8.6, que es similar a la mencionada en el capítulo 7.

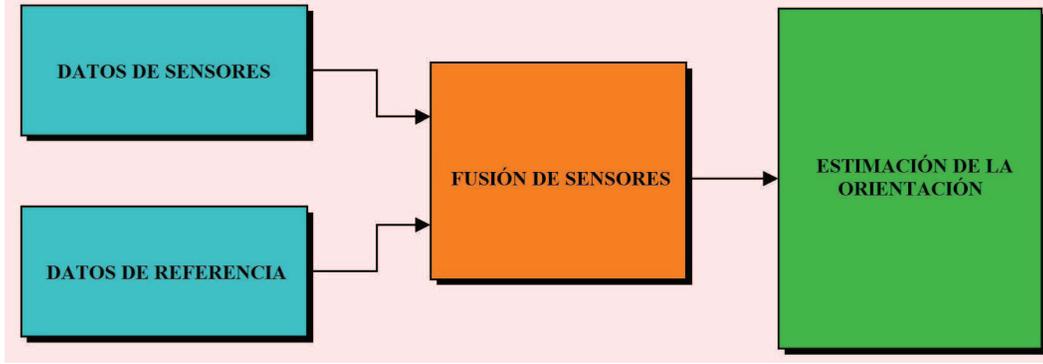


Figura 8.6: Diagrama del algoritmo de estimación del HumSat-México.

Se propone un proceso de fusión de los datos de referencia (modelos del campo magnético terrestre y modelo del vector de Sol descritos en las secciones 3.4 y 3.5) y los sensores disponibles (sección 5.1.2):

$$M = \begin{bmatrix} R_b^e(\mathbf{q}_k) & 0 \\ 0 & R_b^e(\mathbf{q}_k) \end{bmatrix} \quad (8.1)$$

$$J = \left[ \begin{pmatrix} \frac{\partial M}{\partial q_1} \\ \frac{\partial M}{\partial q_2} \\ \frac{\partial M}{\partial q_3} \\ \frac{\partial M}{\partial q_4} \end{pmatrix} \right] y_m^b \quad (8.2)$$

$$\hat{\mathbf{q}}_{k+1} = \hat{\mathbf{q}}_k - [J^\top(\hat{\mathbf{q}}_k)J(\hat{\mathbf{q}}_k)]^{-1}J^\top(\hat{\mathbf{q}}_k)\sigma(\hat{\mathbf{q}}_k) \quad (8.3)$$

$$S^k = \sigma^\top \sigma = (y_c^i - My_m^b)^\top (y_c^i - My_m^b) \quad (8.4)$$

para determinar la orientación del satélite previamente. Esta información es procesada por el algoritmo de estimación basado en un EKF (sección 5.2). Debido a que se presentan fases de eclipse en la órbita del satélite, los sensores de Sol dejan de estar disponibles, por lo que se utilizó el esquema de estimación mencionado en la sección 7.3.2 para compensar este cambio de fase:

Fase de Sol:

$$y = h(x, t) + v(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \epsilon_c 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \epsilon_c 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \epsilon_c 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \eta_c \end{bmatrix} + v(t) \quad (8.5)$$

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (8.6)$$

$$\nu = \epsilon_c - \hat{\epsilon} \quad (8.7)$$

### 8.3. ESQUEMA DE CONTROL PROPUESTO PARA EL NANOSATÉLITE HUMSAT-MÉXICO

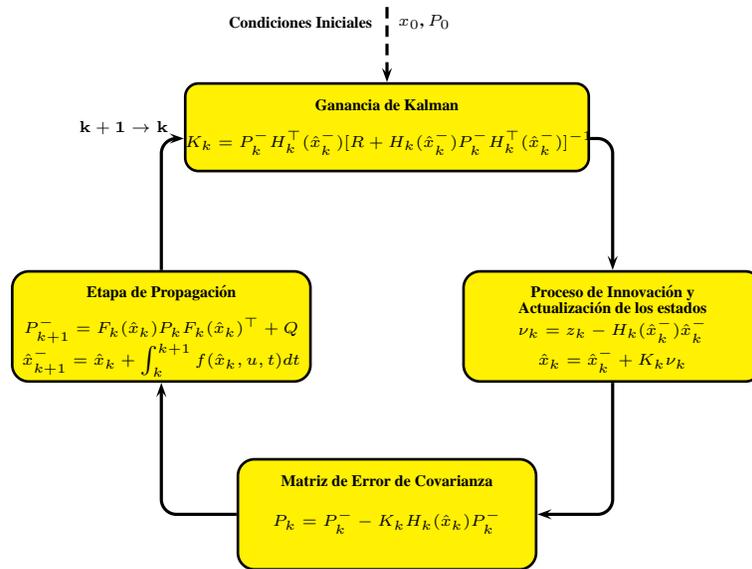


Figura 8.7: Filtro de Kalman Extendido Discreto para estimar la orientación del nanosatélite HumSat-México.

Fase de eclipse:

$$y = h(x, t) + v(t) = b_B = R_b^e(\hat{\mathbf{q}}_{k-1})b_E + v(t) \quad (8.8)$$

$$H = \begin{bmatrix} 0^{3 \times 3} & \left. \frac{\partial(R_b^e(\mathbf{q})b_E)}{\partial \mathbf{q}} \right|_{\mathbf{q}=\hat{\mathbf{q}}_k} \end{bmatrix} \quad (8.9)$$

$$\nu = b_B - R_b^e(\hat{\mathbf{q}}_{k-1})b_E \quad (8.10)$$

La información de la orientación obtenida de este esquema de estimación, se utilizó para realizar las tareas de apuntamiento que se presentan a continuación.

#### 8.3.2 Control de Orientación

Los algoritmos de control de orientación que se muestran en la sección 5.3 se utilizan para llevar a cabo distintas tareas de apuntamiento que requieren control de estabilización en dos o tres ejes:

$$\tau_c = -K_q \tilde{\epsilon} - K_d \Omega_b^i \quad (8.11)$$

$$\tau_c = -K_d \Omega_b^i + K_s S(s_R) s_B \quad (8.12)$$

En esta tesis se propusieron tres comandos de control básicos que permiten al satélite cumplir con su misión: alineación de los paneles solares con el Sol (figura 8.8), apuntamiento hacia el nadir terrestre (figura 8.9) y seguimiento de una estación terrena (figura 8.10). Para realizar estas tareas, el bloque de estimación de orientación y el bloque de navegación de la figura 8.5 determinan los parámetros de referencia que necesita el bloque de control de orientación.

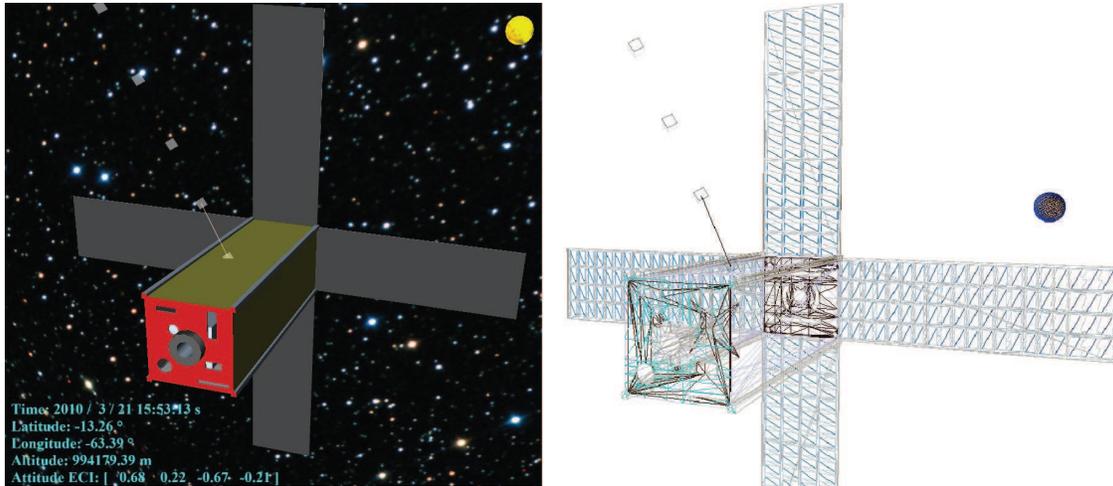


Figura 8.8: Visualización de la alineación de los paneles solares con el Sol.

Para proveer de energía solar al satélite de forma óptima, los paneles solares se alinean con el Sol. Para realizar esta maniobra, la información de los sensores de Sol es filtrada mediante el esquema de estimación presentado en la sección anterior.



Figura 8.9: Visualización del comando de apuntamiento hacia el nadir terrestre en diferentes perspectivas.

La maniobra de apuntamiento hacia el nadir terrestre se utilizará para realizar tareas de percepción remota. La órbita SSO del satélite permite una cobertura completa de la superficie terrestre, por lo que se pueden obtener datos de cualquier parte del mundo.

#### 8.4. RESULTADOS DE SIMULACIONES

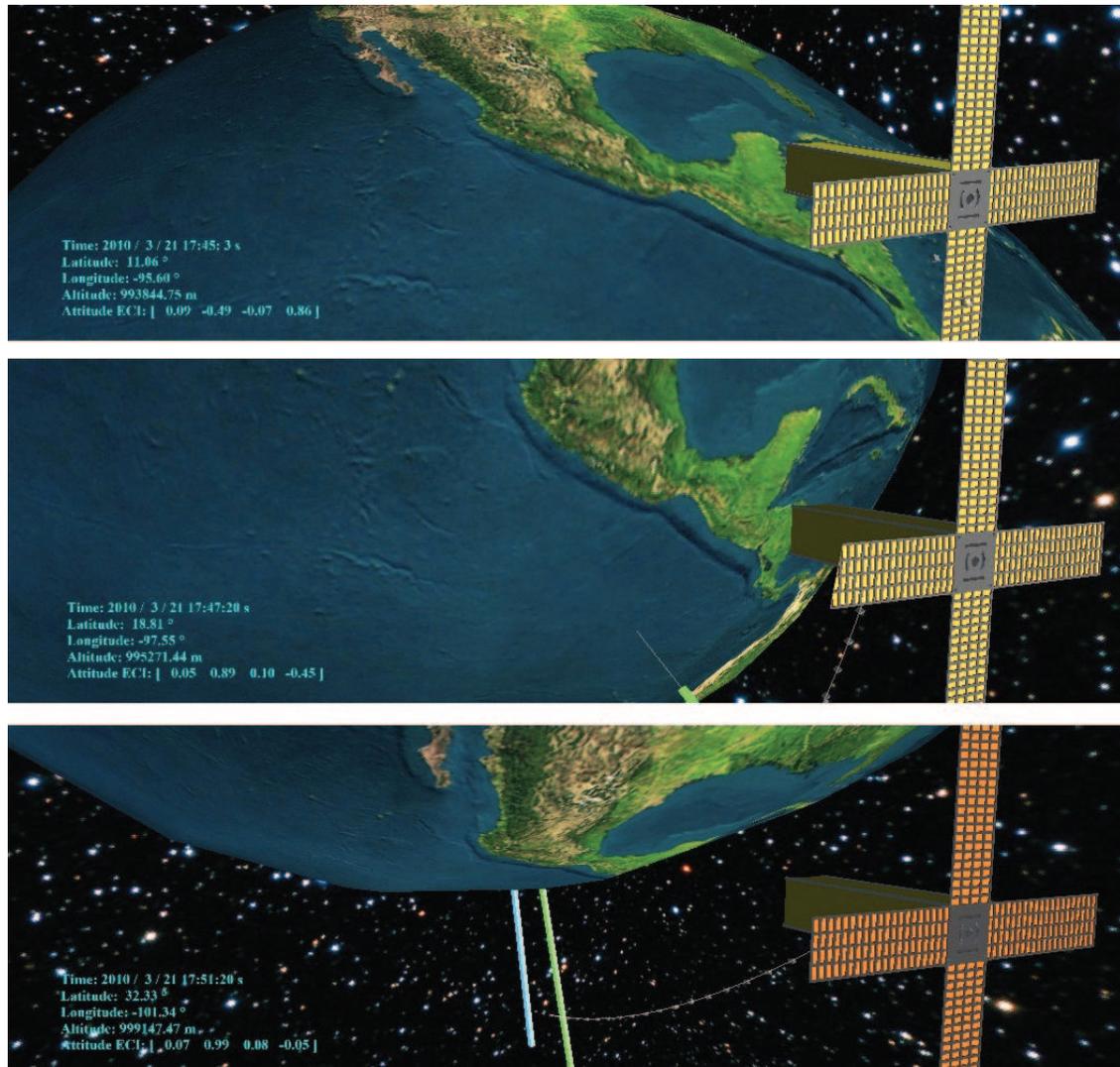


Figura 8.10: Secuencia de la visualización del modo de seguimiento de una estación terrena.

Para transmitir la información almacenada en el satélite hacia una estación terrena, el satélite puede apuntar sus antenas hacia un objetivo determinado en Tierra. El sistema ACS del satélite determinará el momento oportuno para comenzar la alineación de las antenas del satélite hacia una estación terrena.

### 8.4 Resultados de Simulaciones

Una vez establecido el esquema de control para el nanosatélite HumSat-México, se realizaron algunas simulaciones numéricas para mostrar el desempeño de los algoritmos de estimación y control que se implementaron en este trabajo de tesis. Los resultados que se mostrarán a continuación, representan el comportamiento del satélite utilizando ruedas inerciales, cuyo motor de DC fue caracterizado en nuestro laboratorio. Los parámetros propuestos de la rueda inercial se muestran en la tabla 8.2.

Las condiciones iniciales que se ingresaron al simulador se muestran en las tablas 8.1 y 8.2, además

**CAPÍTULO 8. INTEGRACIÓN DE RESULTADOS AL PROYECTO HUMSAT-MÉXICO**

se hace mención de los parámetros de los algoritmos de estimación y control de orientación en la tabla 8.3.

Tabla 8.2: Parámetros del satélite.

<b>PARÁMETROS</b>	<b>VALORES</b>
Matriz de inercia del satélite	$diag(0.059, 0.059, 0.036)$ [kg m <sup>2</sup> ]
Masa del satélite	3.1 [kg]
Configuración de las ruedas inerciales	$diag(1, 1, 1)$
Momento de inercia de cada rueda inercial	$5 \times 10^{-6}$ [kg m <sup>2</sup> ]
Resistencia de la bobina del motor	17.6 [ $\Omega$ ]
Constante de relación par-corriente	0.00571
Constante de relación velocidad-voltaje	0.00571
Voltaje nominal de operación	5 [V]

Tabla 8.3: Parámetros iniciales de la simulación.

<b>PARÁMETROS</b>	<b>VALORES</b>
Orientación inicial respecto al sistema inercial	(1,0,0,0)
Velocidad angular inicial	(0.02,0.02,0.02) [rad/s]
Posición inicial respecto a la Tierra	latitud 7.502°, longitud 94.74°O, altitud 993.4[km]
Velocidad inicial respecto a la Tierra	[-567.1,518.7,3592] [m/s]
<b>Parámetros del proceso de estimación</b>	<b>Valores</b>
Covarianza de los magnetómetros	0.2
Covarianza de los giróscopos	0.4
Covarianza del proceso de fusión de sensores	0.9
Covarianza del proceso de la cinemática del satélite	0.02
Covarianza del proceso de la dinámica del satélite	0.1
Valor inicial de la matriz $P_k$	$1 \times 10^{-3} diag(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$
<b>Parámetros del proceso de control</b>	<b>Valores</b>
Ganancia del controlador proporcional, apuntamiento al Sol	0.002
Ganancia del controlador derivativo, apuntamiento al Sol	0.005
Ganancia del controlador proporcional, apuntamiento al nadir terrestre y estación terrena	0.8
Ganancia del controlador derivativo, apuntamiento al nadir terrestre y estación terrena	0.004

Además de los resultados visuales que se obtuvieron con este simulador (figuras 8.2-8.10), se cierra este capítulo con algunas gráficas que muestran el desempeño del esquema de control propuesto para el HumSat-México en su órbita, así como el comportamiento de las ruedas inerciales durante las maniobras de apuntamiento. Los parámetros de control (tabla 8.3) fueron seleccionados para evitar la saturación de las ruedas inerciales y tener disponible el par de control deseado el mayor tiempo posible. Puede observarse que las ruedas inerciales mantienen un número determinado de revoluciones por minuto cuando el

## 8.4. RESULTADOS DE SIMULACIONES

satélite llega a la orientación deseada, aproximadamente 2000 rpm en cada simulación.

En la figura 8.12 se muestra el error de apuntamiento entre el satélite y el nadir terrestre en forma de un cuaternión unitario; cuando la orientación del satélite coincide con la orientación de referencia, el cuaternión toma el valor de  $[ 0 \ 0 \ 0 \ 1 ]$ . La magnitud del error de orientación es de aproximadamente  $0.8^\circ$  estabilizado en los tres ejes del satélite.

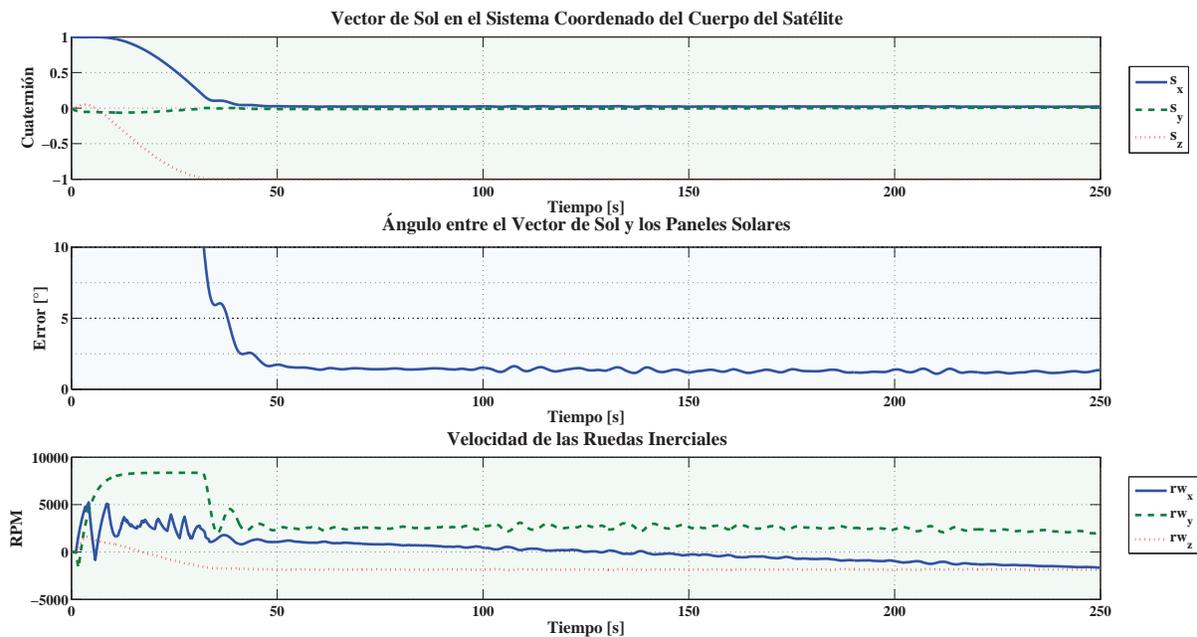


Figura 8.11: Desempeño del esquema de control para el apuntamiento al Sol.

En la figura 8.11 se muestra el vector de la dirección del Sol respecto al sistema coordinado del cuerpo del satélite; este vector deberá tener un valor de  $[ 0 \ 0 \ -1 ]$ , que a su vez es la normal al plano donde se sitúan los paneles solares. La magnitud del error de apuntamiento tiene un valor de aproximadamente  $1.8^\circ$  cuando los paneles solares del satélite están alineados con el Sol.

En la figura 8.13 se muestra el error de apuntamiento entre el satélite y la posición de una estación terrena en la superficie terrestre en forma de un cuaternión unitario. El cuaternión del error de orientación toma el valor de  $[ 0 \ 0 \ 0 \ 1 ]$  cuando la orientación del satélite coincide con la orientación de referencia. La magnitud del error de orientación es de aproximadamente  $0.8^\circ$  cuando el satélite es estabilizado en sus tres ejes.

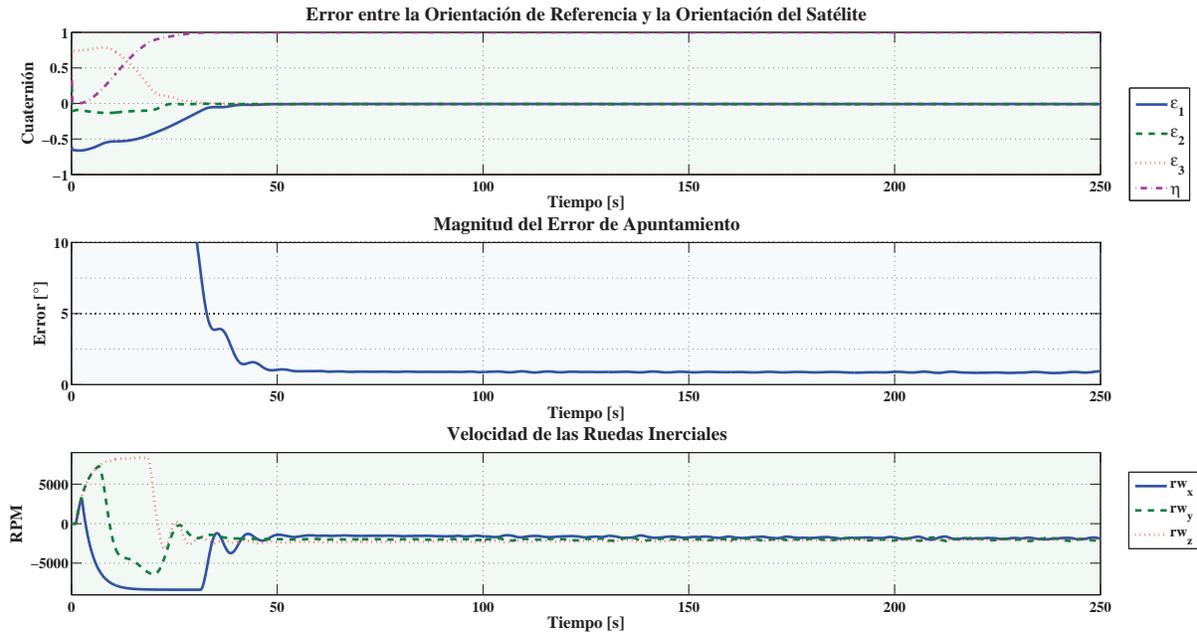


Figura 8.12: Desempeño del esquema de control para el apuntamiento hacia el nadir terrestre.

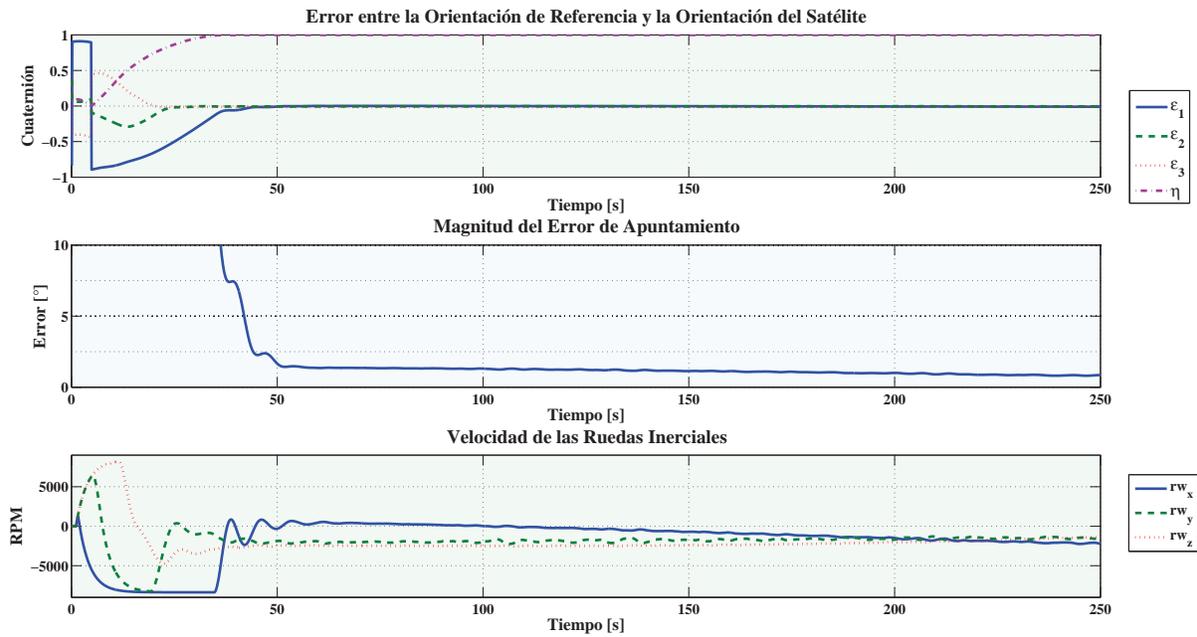


Figura 8.13: Desempeño del esquema de control para el apuntamiento hacia una estación terrena.

---

## CAPÍTULO 9

# CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

---

### 9.1 Resultados Globales

Se estudiaron y analizaron diferentes algoritmos de control y estimación de orientación (capítulo 5) para que el nanosatélite HumSat-México lleve a cabo las tareas básicas de un satélite de percepción remota, que son el apuntamiento a una estación terrena, observación de la superficie terrestre y la obtención óptima de energía solar. Para diseñar el sistema de navegación y control de orientación preliminar para el nanosatélite HumSat-México, se estudiaron los modelos matemáticos que describen la dinámica del satélite lo largo de su órbita (capítulo 3) y los modelos matemáticos que permiten simular sensores y actuadores (capítulo 4).

En el transcurso de esta investigación se implementaron dos algoritmos de estimación para dos casos de estudio, se consideró el manejo de los sensores de una unidad de medición inercial para estimar la orientación de un cuerpo rígido (capítulo 6) y se resolvió el problema de la estimación de la orientación de un microsatélite para su modo seguro de operación (capítulo 7).

En el primer caso, se adquirió experiencia en el manejo del filtro de Kalman extendido en su forma continua con el uso de una unidad de medición inercial, identificando los parámetros de diseño que permitieron formular un algoritmo que hace uso de un método determinístico como es el método Gauss-Newton y el filtro de Kalman extendido.

En el segundo caso se tomaron estas experiencias para resolver el problema de apuntamiento del microsatélite *IRS-Flying Laptop* en el modo seguro de operación, que consiste en alinear sus paneles solares en dirección al Sol y proteger la carga útil del microsatélite de la radiación solar. Después de analizar posibles controladores para cumplir con el requerimiento de estabilización, se optó por el uso de un esquema de control que consistió en el uso de un algoritmo de estimación de orientación basado en un método determinístico y un filtro de Kalman extendido en su forma discreta en donde se tiene información de la dirección del Sol, y solo un filtro de Kalman extendido cuando el satélite se encuentre en fase de eclipse. La información obtenida de este algoritmo permite la estimación de la dirección del Sol a lo largo de la órbita del microsatélite.

### 9.2 Conclusiones

La integración de estas experiencias culminó en la propuesta de un sistema de navegación y control de orientación para el nanosatélite HumSat-México. La principal aportación a este proyecto fue el desarrollo de una herramienta que permite simular las condiciones a las que éste satélite estará sometido durante su misión y que permite evaluar los parámetros de sensores y actuadores que pueden ser utilizados para la adquisición y control de su orientación en el espacio (capítulo 8).

Resulta muy conveniente el uso de esta herramienta en el diseño de un sistema de navegación y control de orientación para evaluar el desempeño de un esquema de control preliminar para un satélite en base a los posibles sensores y actuadores que se utilizarán, permitiendo con ello hacer un balance entre costos y precisión de apuntamiento.

Resulta complicado analizar los resultados que se obtienen de un simulador mediante gráficas en 2D, particularmente cuando se analiza el desempeño de un esquema de control de orientación de un satélite en órbita. Para simplificar este análisis se diseñó y elaboró un modelo de realidad virtual que permite realizar un análisis tridimensional del desempeño del esquema de control del nanosatélite HumSat-México tomando en cuenta la cobertura del satélite en la Tierra y la cantidad de luz solar que incide sobre la Tierra en ciertas épocas del año de manera simultánea.

Respecto a las ruedas inerciales que usa el satélite como actuadores de estabilización, durante esta investigación se tomaron los parámetros de un motor de DC con escobillas y que a su vez fue caracterizado en laboratorio, permitiendo simular su respuesta a un voltaje determinado. Los resultados que se mostraron gráficamente en el capítulo anterior son un factor determinante para establecer tanto los parámetros de selección de ruedas inerciales como para abordar el tema de la saturación de las mismas en una investigación posterior.

El esquema de control de orientación propuesto para el nanosatélite HumSat-México puede ser mejorado realizando un estudio de los requerimientos mínimos para establecer comunicaciones con una estación terrena. De esta manera puede desarrollarse la lógica que permita realizar las maniobras de control de apuntamiento automáticamente en el momento indicado.

### 9.3 Recomendaciones

Por otro lado, se sugiere el estudio de perturbaciones que afecten el desempeño del esquema de control del nanosatélite HumSat-México, como es el arrastre aerodinámico, el cual es la principal perturbación que se presenta en satélites de órbita baja. Además se sugiere el estudio del fenómeno del albedo, que es la cantidad de radiación que la Tierra refleja hacia el espacio exterior; en el espectro visible, la luz que la Tierra refleja hacia el espacio incide en el satélite, agregando un error considerable a las lecturas de los sensores de Sol.

En órbitas síncronas con el Sol, se presenta el fenómeno de eclipse (aproximadamente 40% de la órbita), durante el cual los sensores de Sol no están disponibles, por lo que se sugiere el estudio y modelado matemático de este fenómeno para establecer el momento en que los sensores de Sol sean desactivados sin afectar el desempeño de los algoritmos de estimación en fase de Sol.

En la etapa final de selección de sensores y actuadores, se recomienda realizar un modelado matemático que describa lo mejor posible sus características físicas y eléctricas, de manera que permita el ajuste final de los parámetros del esquema de control del nanosatélite HumSat-México.

La plataforma experimental suspendida en aire (desarrollado en el Instituto de Ingeniería, UNAM y basado en el diseño del Dr. Jorge Prado del Instituto de Geografía, UNAM) es una herramienta valiosa que permite la validación experimental parcial de un sistema de control de orientación para vehículos espaciales, como es SATEDU y el nanosatélite HumSat-México. Si bien esta plataforma permite simular la condición de "cero fricción" en el espacio, aún hay parámetros que no pueden simularse en Tierra, como son las perturbaciones espaciales y los parámetros de apuntamiento hacia la Tierra. Se propone por tanto, realizar un modelo de validación numérico-experimental que permita simular aquellas condiciones que no se pueden tener en una plataforma experimental para proporcionar al simulador los datos de los sensores y actuadores obtenidos del sistema de control de orientación montado en dicha plataforma. Actualmente el equipo que trabaja en el proyecto SATEDU y HumSat-México está analizando estos tópicos y desarrollando estos sistemas de control de orientación utilizando dispositivos DSPs y FPGAs.

---

# BIBLIOGRAFÍA

---

- [1] Charles D. Brown. *Elements of Spacecraft Design*. AAIA Education Series, 2002.
- [2] Graham Swinerd. *How Spacecraft Fly*. Copernicus Books, 2008.
- [3] Victor G. Szebehely, Hans Mark. *Adventures in Celestial Mechanics*. Wiley–VCH, 2004.
- [4] Anil K. Maini, Varsha Agrawal. *Satellite Technology, Principles and Applications*. John Wiley & Sons, Ltd, 2007.
- [5] Hans Mark. *Encyclopedia of Space Science and Technology*. Wiley - Interscience, 2003.
- [6] Wiley J. Larson, James R. Wertz. *Space Mission Analysis and Design*. Space Technology Library, 2005.
- [7] Jason Stricker, Arthur Ingot, Gene Rossov, Jack Rafalowski, Steve Souza. Gravity gradient boom design. Informe técnico, Northeastern University, 2007.
- [8] Emilio Augusto Jiménez Madrigal. Subsistemas de estabilización activa y sensores para un simulador satelital. Tesis de Licenciatura, Facultad de Ingeniería, UNAM, 2009.
- [9] José Rodrigo Córdova Alarcón. Control de estabilización para picosatélite universitario. Tesis de Licenciatura, Facultad de Ingeniería, UNAM, 2008.
- [10] Vicente-Vivas Esaú, García-Nocetti Fabián. Computación tolerante a fallas aplicada en el mantenimiento automático del microsatélite satex. *Información Tecnológica, SciELO Chile*, 17(1):61–68, 2006.
- [11] E. Vicente-Vivas, A. Calvillo-Téllez, J. Mendieta-Jiménez, J. Sosa-Pedroza. Modos operativos del microsatélite satex con base en la disponibilidad de carga de su subsistema de potencia, 2003.
- [12] Vicente-Vivas Esaú, García-Nocetti Fabián. Computadora de vuelo triplex de diseño y manufactura mexicana para el microsatélite satex. *Información Tecnológica, SciELO Chile*, 17(1):69–76, 2006.
- [13] E. Vicente-Vivas, E. A. Jiménez, Z. Carrizales, C. A. Sánchez, J. R. Córdova, R. Alva, M. A. García, G. Islas. Successful development of a portable didactic satellite for training and research in satellite technology, Mayo 2009.
- [14] E. Vicente-Vivas, Fernando Aguado-Agelet, Jordi Puig-Suari, Sergio Camacho-Lara, Hugo Rodríguez, Fátima Moumtadi, E. Jiménez, M. A. Mendoza, M. P. Pedrajas, Adán Espinoza, R. Córdova, R. Alva, C. Álvarez Bernal. Technology transfer from didactic satellite subsystems to space vehicles from a small satellite constellation for humanitarian applications, Junio 2010.
- [15] Walter Fichter. Spacecraft dynamics, navigation and control. Informe técnico, Stuttgart University, 2008.

- [16] Marcel J. Sidi. *Spacecraft Dynamics and Control*. Cambridge University Press, 2005.
- [17] Graham Swinerd Peter Fortescue, John Stark. *Spacecraft Systems Engineering*. John Wiley & Sons, 2003.
- [18] James R. Wertz. *Spacecraft Attitude Determination and Control*. Kluwer Academic Publishers, 1990.
- [19] Vincent L. Pisacane. *Fundamentals of Space Systems*. Oxford University Press, 2005.
- [20] S.T. El Moussaoui Brembo. *Sensor Modelling and Attitude Determination for Micro-Satellite*. Tesis de Maestría, Norwegian University of Science and Technology, 2005.
- [21] Jack B. Kuipers. *Quaternions and Rotation Sequences*. Princeton University Press, 1999.
- [22] Stian Søndersrød Ose. *Attitude determination for the Norwegian student satellite nCube*. Tesis Doctoral, Department of Engineering Cybernetics, Norwegian University of Science and Technology, 2004.
- [23] Herbert Goldstein, Charles Poole, John Safko. *Classical Mechanics*. Addison Wesley, 2000.
- [24] Peter H. Zipfel. *Modeling and Simulation of Aerospace Vehicle Dynamics*. AIAA Education Series, 2007.
- [25] Jeremy Davis. Mathematical modeling of earth's magnetic field. Informe técnico, Virginia Tech, 2004.
- [26] Ibrahim Reda, Afshin Andreas. Solar position algorithm for solar radiation applications. Informe técnico, National Renewable Energy Laboratory, 2008.
- [27] Rafal Wiśniewski. Lecture notes on modeling of a spacecraft. Informe técnico, Aalborg University, 2000.
- [28] Walter Greiner. *Classical Mechanics, Systems of Particles and Hamiltonian Dynamics*. Springer, 2003.
- [29] Howard Curtis. *Orbital Mechanics for Engineering Students*. Elsevier Aerospace Engineering Series, 2005.
- [30] I. Bar-Itzhack, R. Harman. Optimized triad algorithm. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 20:208–211, 1997.
- [31] João Luis Marins, Xiaoping Yun, Eric R. Bachmann, Robert McGhee, Michael J. Zyda. An extended kalman filter for quaternion-based orientation estimation using marg sensors. En *Proceedings of the 2001 IEEE/RSJ, International Conference on Intelligent Robots and Systems*, páginas 2003–2011. 2001.
- [32] Robert Grover Brown. *Introduction to Random Signal Analysis and Kalman Filtering*. John Wiley & Sons, 1997.
- [33] Rodrigo Córdova, Hugo Rodríguez, Esaú Vicente. Nonlinear attitude control for a picosatellite. *Congreso de la Asociación de México de Control Automático AMCA*, 2008.

## BIBLIOGRAFÍA

- [34] Xsens Technologies B.V. *MTi and MTx User Manual and Technical Documentation*, August 2008.
- [35] Georg Grillmayer. *An FPGA based Attitude Control System for the Micro-Satellite Flying Laptop*. Tesis Doctoral, Faculty of Aerospace Engineering and Geodesy of the Universität Stuttgart, 2008.
- [36] M.L. Psiaki, F.Martel, P.K. Pal. Three-axis attitude determination via kalman filtering of magnetometer data. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 1990.
- [37] M. A. Mendoza, J.R. Córdova, Esaú Vicente, Hugo Rodríguez, Miguel Arias, E. Vizcaino, E. A. Jiménez, A. Ramírez, J. F. Osorio. Development and preliminary results of one-axis fpga based attitude control system. *International Conference on Reconfigurable Computing and FPGA's Re-ConFig 2010, Cancun, Mexico*, 2010.

---

## APÉNDICE A

# SISTEMAS COORDENADOS DE REFERENCIA

---

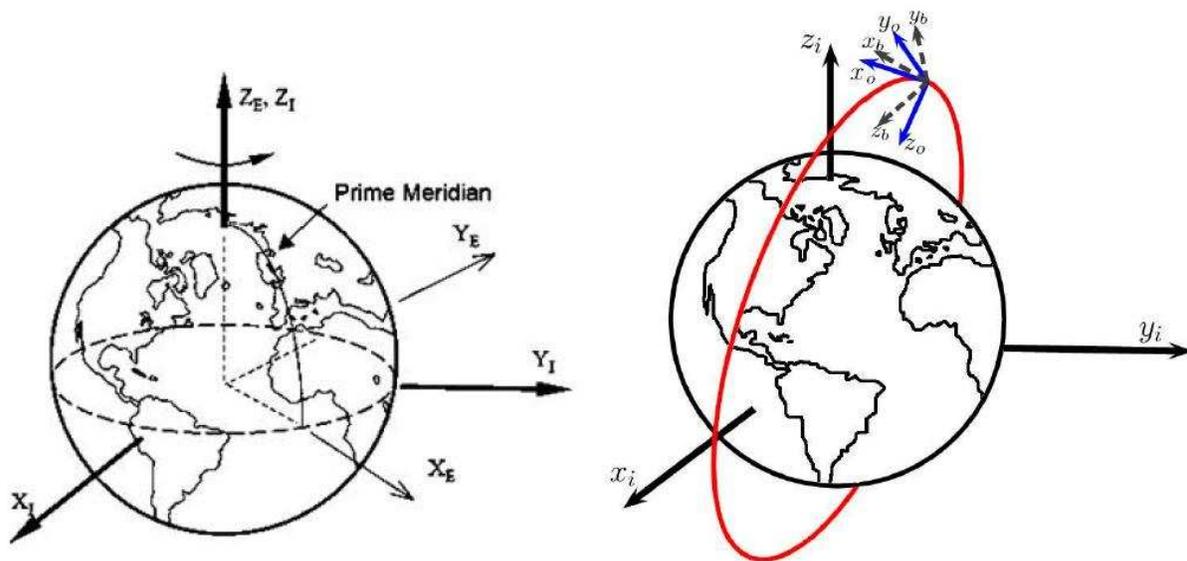


Figura A.1: Sistemas coordenados con centro en la Tierra  $\mathcal{S}^I$  y  $\mathcal{S}^E$  (izquierda), Sistemas coordenados orbital y cuerpo del satélite  $\mathcal{S}^{OE}$  (línea roja),  $\mathcal{S}^O$  y  $\mathcal{S}^B$  (derecha).

### A.1 Sistema coordenado inercial con centro en la Tierra $\mathcal{S}^I$

El eje  $x_i$  apunta al equinoccio vernal (primavera), el eje  $z_i$  apunta al polo norte de la Tierra y el eje  $y_i$  se obtiene con la regla de la mano derecha. Este sistema coordenado permanece fijo inercialmente en el espacio.

### A.2 Sistema coordenado fijo a la Tierra con centro en la Tierra $\mathcal{S}^E$

El eje  $x_e$  apunta a la intersección del meridiano de Greenwich con el ecuador, el eje  $z_e$  apunta al polo norte y la dirección positiva del eje  $y_e$  se determina con la regla de la mano derecha. La rotación del

### A.3. SISTEMA COORDENADO ORBITAL CON CENTRO EN LA TIERRA $\mathcal{S}^{OE}$

sistema  $\mathcal{S}^E$  respecto a  $\mathcal{S}^I$  es de  $\Omega_E = 7.2921 \times 10^{-7} [rad/s]$  alrededor del eje  $z_i$ , y corresponde a la rotación de la Tierra. Sin embargo, la influencia gravitacional del Sol y la Luna afectan al eje de rotación de la Tierra, dicha influencia se conoce como la precesión y nutación del eje de rotación de la Tierra.

### A.3 Sistema coordenado Orbital con centro en la Tierra $\mathcal{S}^{OE}$

Describe la órbita del satélite, en donde  $x_{oe}$  apunta al perigeo,  $y_{oe}$  apunta al eje semimenor y  $z_{oe}$  es perpendicular al plano de la órbita. La influencia gravitacional del Sol y la Luna, así como la oblicuidad de la Tierra, afectan los parámetros de una órbita con el tiempo.

### A.4 Sistema coordenado Orbital $\mathcal{S}^O$

Tiene como origen el centro de masa del satélite, en donde  $z_o$  apunta al centro de la Tierra,  $x_o$  es tangente a la órbita y  $y_o$  completa la regla de la mano derecha.

### A.5 Sistema coordenado fijo al satélite $\mathcal{S}^B$

Este sistema tiene como origen el centro de masa del satélite y su orientación es relativa al Sistema  $\mathcal{S}^O$ . Para nuestro propósito el eje  $z_b$  estará alineado a la dirección en la que apuntará una cámara de alta resolución, y cualquiera de los ejes  $x_b$  o  $y_b$  pueden coincidir con los momentos de inercia principales del satélite. El sistema coordenado  $\mathcal{S}^B$  coincidirá con el sistema coordenado  $\mathcal{S}^O$  cuando la orientación del satélite sea de  $0^\circ$  en *roll*, *pitch* y *yaw*.

---

## APÉNDICE B

# LISTA DE VALORES PARA EL MODELO DEL SOL

---

Tabla B.1: Términos periódicos de la Tierra.

<b>Término</b>	<b>A</b>	<b>B</b>	<b>C</b>
L0	175347046.0	0	0
	3341656	4.6692568	6283.07585
	34894	4.6261	12566.1517
	3497	2.7441	5753.3849
	3418	2.8289	3.5231
	3136	3.6277	77713.7715
	2676	4.4181	7860.4194
	2343	6.1352	3930.2097
	1324	0.7425	11506.7698
	1273	2.0371	529.691
	1199	1.1096	1577.3435
	990	5.233	5884.927
	902	2.045	26.298
	857	3.508	398.149
	780	1.179	5223.694
	753	2.533	5507.553
	505	4.583	18849.228
	492	4.205	775.523
	357	2.92	0.067
	317	5.849	11790.629
	284	1.899	796.298
	271	0.315	10977.079

<b>Término</b>	<b>A</b>	<b>B</b>	<b>C</b>
	243	0.345	5486.778
	206	4.806	2544.314
	205	1.869	5573.143
	202	2.4458	6069.777
	156	0.833	213.299
	132	3.411	2942.463
	126	1.083	20.775
	115	0.645	0.98
	103	0.636	4694.003
	102	0.976	15720.839
	102	4.267	7.114
	99	6.21	2146.17
	98	0.68	155.42
	86	5.98	161000.69
	85	1.3	6275.96
	85	3.67	71430.7
	80	1.81	17260.15
	79	3.04	12036.46
	71	1.76	5088.63
	74	3.5	3154.69
	74	4.68	801.82
	70	0.83	9437.76
	62	3.98	8827.39
	61	1.82	7084.9
	57	2.78	6286.6
	56	4.39	14143.5
	56	3.47	6279.55
	52	0.19	12139.55
	52	1.33	1748.02
	51	0.28	5856.48
	49	0.49	1194.45
	41	5.37	8429.24
	41	2.4	19651.05
	39	6.17	10447.39
	37	6.04	10213.29
	37	2.57	1059.38
	36	1.71	2352.87
	36	1.78	6812.77
	33	0.59	17789.85
	30	0.44	83996.85
	30	2.74	1349.87
	25	3.16	4690.48
<b>L1</b>	628331966747.0	0	0
	206059.0	2.678235	6283.07585
	4303.0	2.6351	12566.1517
	425.0	1.59	3.523

APÉNDICE B. LISTA DE VALORES PARA EL MODELO DEL SOL

<b>Término</b>	<b>A</b>	<b>B</b>	<b>C</b>
	119.0	5.796	26.298
	109.0	2.966	1577.344
	93	2.59	18849.23
	72	1.14	529.69
	68	1.87	398.15
	67	4.41	5507.55
	59	2.89	5223.69
	56	2.17	155.42
	45	0.4	796.3
	36	0.47	775.52
	29	2.65	7.11
	21	5.34	0.98
	19	1.85	5486.78
	19	4.97	213.3
	17	2.99	6275.96
	16	0.03	2544.31
	16	1.43	2146.17
	15	1.21	10977.08
	12	2.83	1748.02
	12	3.26	5088.63
	12	5.27	1194.45
	12	2.08	4694
	11	0.77	553.57
	10	1.3	3286.6
	10	4.24	1349.87
	9	2.7	242.73
	9	5.64	951.72
	8	5.3	2352.87
	6	2.65	9437.76
	6	4.67	4690.48
<b>L2</b>	52919.0	0	0
	8720.0	1.0721	6283.0758
	309.0	0.867	12566.152
	27	0.05	3.52
	16	5.19	26.3
	16	3.68	155.42
	10	0.76	18849.23
	9	2.06	77713.77
	7	0.83	775.52
	5	4.66	1577.34
	4	1.03	7.11
	4	3.44	5573.14
	3	5.14	796.3
	3	6.05	5507.55
	3	1.19	242.73
	3	6.12	529.69

<b>Término</b>	<b>A</b>	<b>B</b>	<b>C</b>
	3	0.31	398.15
	3	2.28	553.57
	2	4.38	5223.69
	2	3.75	0.98
<b>L3</b>	289.0	5.844	6283.076
	35	0	0
	17	5.49	12566.15
	3	5.2	155.42
	1	4.72	3.52
	1	5.3	18849.23
	1	5.97	242.73
<b>L4</b>	114.0	3.142	0
	8	4.13	6283.08
	1	3.84	12566.15
<b>L5</b>	1	3.14	0
<b>B0</b>	280.0	3.199	84334.662
	102.0	5.422	5507.553
	80	3.88	5223.69
	44	3.7	2352.87
	32	4	1577.34
<b>B1</b>	9	3.9	5507.55
	6	1.73	5223.69
<b>R0</b>	100013989.0	0	0
	1670700.0	3.0984635	6283.07585
	13956.0	3.05525	12566.1517
	3084.0	5.1985	77713.7715
	1628.0	1.1739	5753.3849
	1576.0	2.8469	7860.4194
	925.0	5.453	11506.77
	542.0	4.564	3930.21
	472.0	3.661	5884.927
	346.0	0.964	5507.553
	329.0	5.9	5223.694
	307.0	0.299	5573.143
	243.0	4.273	11790.629
	212.0	5.847	1577.344
	186.0	5.022	10977.079
	175.0	3.012	18849.228
	110.0	5.055	5486.778
	98	0.89	6069.78
	86	5.69	15720.84
	86	1.27	161000.69
	85	0.27	17260.15
	63	0.92	529.69
	57	2.01	83996.85
	56	5.24	71430.7

APÉNDICE B. LISTA DE VALORES PARA EL MODELO DEL SOL

<b>Término</b>	<b>A</b>	<b>B</b>	<b>C</b>
	49	3.25	2544.31
	47	2.58	775.52
	45	5.54	9437.76
	43	6.01	6275.96
	39	5.36	4694
	38	2.39	8827.39
	37	0.83	19651.05
	37	4.9	12139.55
	36	1.67	12036.46
	35	1.84	2942.46
	33	0.24	7084.9
	32	0.18	5088.63
	32	1.78	398.15
	28	1.21	6286.6
	28	1.9	6279.55
	26	4.59	10447.39
<b>R1</b>	103019.0	1.10749	6283.07585
	1721.0	1.0644	12566.1517
	702.0	3.142	0
	32	1.02	18849.23
	31	2.84	5507.55
	25	1.32	5223.69
	18	1.42	1577.34
	10	5.91	10977.08
	9	1.42	6275.96
	9	0.27	5486.78
<b>R2</b>	4359.0	5.7846	6283.0758
	124.0	5.579	12566.152
	12	3.14	0
	9	3.63	77713.77
	6	1.87	5573.14
	3	5.47	18849
<b>R3</b>	145.0	4.273	6283.076
	7	3.92	12566.15
<b>R4</b>	4	2.56	6283.08

Tabla B.2: Términos periódicos para la nutación en longitud y oblicuidad.

Coeficientes para el operador Seno					Coeficientes para $\Delta\phi$		Coeficientes para $\Delta\epsilon$	
Y0	Y1	Y2	Y3	Y4	a	b	c	d
0	0	0	0	1	-171996	-174.2	92025	8.9
-2	0	0	2	2	-13187	-1.6	5736	-3.1
0	0	0	2	2	-2274	-0.2	977	-0.5
0	0	0	0	2	2062	0.2	-895	0.5
0	1	0	0	0	1426	-3.4	54	-0.1
0	0	1	0	0	712	0.1	-7	0
-2	1	0	2	2	-517	1.2	224	-0.6
0	0	0	2	1	-386	-0.4	200	0
0	0	1	2	2	-301	0	129	-0.1
-2	-1	0	2	2	217	-0.5	-95	0.3
-2	0	1	0	0	-158	0	0	0
-2	0	0	2	1	129	0.1	-70	0
0	0	-1	2	2	123	0	-53	0
2	0	0	0	0	63	0	0	0
0	0	1	0	1	63	0.1	-33	0
2	0	-1	2	2	-59	0	26	0
0	0	-1	0	1	-58	-0.1	32	0
0	0	1	2	1	-51	0	27	0
-2	0	2	0	0	48	0	0	0
0	0	-2	2	1	46	0	-24	0
2	0	0	2	2	-38	0	16	0
0	0	2	2	2	-31	0	13	0
0	0	2	0	0	29	0	0	0
-2	0	1	2	2	29	0	-12	0
0	0	0	2	0	26	0	0	0
-2	0	0	2	0	-22	0	0	0
0	0	-1	2	1	21	0	-10	0
0	2	0	0	0	17	-0.1	0	0
2	0	-1	0	1	16	0	-8	0
-2	2	0	2	2	-16	0.1	7	0
0	1	0	0	1	-15	0	9	0
-2	0	1	0	1	-13	0	7	0
0	-1	0	0	1	-12	0	6	0
0	0	2	-2	0	11	0	0	0
2	0	-1	2	1	-10	0	5	0
2	0	1	2	2	-8	0	3	0
0	1	0	2	2	7	0	-3	0

APÉNDICE B. LISTA DE VALORES PARA EL MODELO DEL SOL

Coeficientes para el operador Seno					Coeficientes para $\Delta\phi$		Coeficientes para $\Delta\epsilon$	
Y0	Y1	Y2	Y3	Y4	a	b	c	d
-2	1	1	0	0	-7	0	0	0
0	-1	0	2	2	-7	0	3	0
2	0	0	2	1	-7	0	3	0
2	0	1	0	0	6	0	0	0
-2	0	2	2	2	6	0	-3	0
-2	0	1	2	1	6	0	-3	0
2	0	-2	0	1	-6	0	3	0
2	0	0	0	1	-6	0	3	0
0	-1	1	0	0	5	0	0	0
-2	-1	0	2	1	-5	0	3	0
-2	0	0	0	1	-5	0	3	0
0	0	2	2	1	-5	0	3	0
-2	0	2	0	1	4	0	0	0
-2	1	0	2	1	4	0	0	0
0	0	1	-2	0	4	0	0	0
-1	0	1	0	0	-4	0	0	0
-2	1	0	0	0	-4	0	0	0
1	0	0	0	0	-4	0	0	0
0	0	1	2	0	3	0	0	0
0	0	-2	2	2	-3	0	0	0
-1	-1	1	0	0	-3	0	0	0
0	1	1	0	0	-3	0	0	0
0	-1	1	2	2	-3	0	0	0
2	-1	-1	2	2	-3	0	0	0
0	0	3	2	2	-3	0	0	0
2	-1	0	2	2	-3	0	0	0