



UNIVERSIDAD NACIONAL
AVENIDA DE
MEXICO

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

**PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN
INGENIERÍA**

FACULTAD DE INGENIERÍA

**ANÁLISIS DE ESFUERZOS EN PLACAS DELGADAS
CON ORIFICIO CIEGO BAJO CARGAS
A TENSIÓN**

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE

DOCTOR EN INGENIERÍA

MECÁNICA – DISEÑO MECÁNICO

P R E S E N T A:

JOSÉ EMILIANO MARTÍNEZ ORDAZ



TUTOR:

DR. JORGE CARRERA BOLAÑOS

Ciudad Universitaria, México D.F. 2011

ÍNDICE

	Introducción	i
Capítulo I	Estado del Arte y Objetivos	1
Capítulo II	Marco Teórico. Introducción	7
	<u>CINEMÁTICA</u>	
	2.1 Cuerpo	8
	2.2 Deformación y Desplazamiento	8
	2.3 Deformaciones Infinitesimales	10
	2.4 Movimientos	11
	<u>FUERZA Y ELASTICIDAD LINEAL</u>	
	2.5 Fuerza	12
	2.6 Elasticidad	14
	<u>TEORÍA DE FOTOELASTICIDAD</u>	
	Introducción	21
	2.7 Fotoelasticidad Tridimensional	22
	2.7.1 Materiales para Fotoelasticidad Tridimensional	23
	2.7.2 Cortes	23
	2.7.3 Corte Principal diferente al corte superficial	24
	<u>PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA</u>	
	2.8 Caso de Estudio	27
2.8.1 Definición geométrica del Cuerpo Ω	28	
2.9 Planteamiento del Problema	29	
2.9.1 Condiciones de Frontera	33	
Capítulo III	Diseño del Experimento. Introducción	37
	3.1 Objetivos del experimento	38
	3.1.1 “No Constante”	38
	3.2 Objeto de experimentación	42
	3.3 Medios experimentales	43
	3.4 Obtención de los cortes principales	44
	3.4.1 Cortes Principales	44
	3.5 Resultados: gráficas y tablas	48
3.6 *Clasificación de las pruebas	49	
3.7 Evaluación de los datos	50	
Capítulo IV	Experimentación. Introducción	51
	4.1 Obtención de las placas	52
	4.2 Datos obtenidos	52
	4.2.1 Tipo de datos	53
	4.2.2 Calidad de los datos	55
	4.3 Método y material del modelo	56
	4.4 Reporte para el corte transversal 1-AT	56
	4.5 Reporte para el corte transversal 2-AT	59
	4.6 Reporte para el corte transversal 3-AT	61
	4.7 Reporte para el corte longitudinal 1-AL	64
	4.8 Reporte para el corte longitudinal 2-AL	66
4.9 Reporte para el corte longitudinal 3-AL	68	
4.10 Fuentes de error	71	

Capítulo V	Planteamiento Numérico. Introducción	72
	CONCEPTOS MATEMÁTICOS EN FEM	
	5.1 Dominio y Frontera	73
	5.2 Selección del elemento finito. Discretización	73
	5.2.1 Interpolación	75
	5.3 Ecuaciones básicas resueltas por el código ABAQUS	76
	5.3.1 Deformación	76
	5.3.2 Equilibrio y Trabajo Virtual	77
	5.3.3 Esfuerzo	77
	5.4 Modelo Numérico	77
	5.5 Discretización	79
	5.6 Solicitaciones, restricciones y condiciones de frontera	80
	5.6.1 Sollicitación	80
	5.6.2 Restricciones	81
5.6.3 Condiciones de Frontera	81	
5.7 Prueba de Convergencia	82	
5.7.1 Criterio de convergencia de Cauchy	82	
5.7.2 Verificación	83	
Capítulo VI	Resultados Numéricos. Introducción	84
	6.1 Condiciones de uso	85
	6.2 Condiciones de carga	85
	6.3 Puntos en consideración para su estudio (corte transversal)	85
	6.3.1 Unidades	86
	6.3.2 Criterios de Falla	86
	6.4 Reporte para el corte transversal 1-AT	87
	6.5 Reporte para el corte transversal 2-AT	89
	6.6 Reporte para el corte transversal 3-AT	92
	6.7 Reporte para el corte longitudinal 1-AL	95
6.8 Reporte para el corte longitudinal 2-AL	97	
6.9 Reporte para el corte longitudinal 3-AL	99	
Capítulo VII	Conjunción de Resultados y Conclusiones.	
	7.1 Conjunción de resultados experimentales y numéricos	102
	7.2 Conclusiones	105
	7.3 Investigación a futuro	107
	Bibliografía y Referencias	108
	Apéndice 0	111
	Apéndice 1	113
	Esquema general de notación	114

INTRODUCCION

El estudio del comportamiento mecánico de elementos de máquinas ante la presencia de concentradores de esfuerzo es de gran importancia desde el punto de vista tanto científico como tecnológico. Cualquier elemento de máquina que esté en contacto con otro elemento, ya sea dinámico o estático, está expuesto a sufrir un sinnúmero de modificaciones en su geometría. Estos cambios de geometría son generalmente bruscos, lo cual genera que los esfuerzos no se distribuyan de forma homogénea y esto causa que se concentren en esta zona.

Desde el punto de vista de la ciencia básica, resulta de interés estudiar este comportamiento debido a la amplia gama de geometrías existentes que no han sido estudiadas, metodologías experimentales para la correcta modelación del fenómeno y por último, y no menos importante, su carácter 3D en la mayoría de los casos.

Desde el punto de vista tecnológico, los concentradores de esfuerzo son la principal causa hoy en día de fallas catastróficas en el área metal-mecánica, automotriz, militar y médica. La presencia de debris[†] en láminas de acero o aluminio, anclaje de puentes, túneles, fuselaje de aviones, entre otros, son algunos ejemplos donde se tienen concentradores de esfuerzo. El ingeniero no puede seguir confiando en el factor de seguridad para diseñar sus motores, máquinas o mecanismos. Por tanto, se encuentran a la expectativa de que nuevos estudios, con nuevas tablas, gráficas y nomogramas les proporcionen mayor conocimiento de este problema.

Dentro de la gran gama de concentradores de esfuerzos, los de mayor interés son los orificios circulares. Los orificios pueden o no atravesar en su totalidad al herramental que lo presente. En el primer caso, el orificio recibe el nombre de barrenado. En el segundo caso, al orificio se le denomina ciego. La diferencia principal radica en que el segundo es de un carácter 3D, no se le puede estudiar como un problema 2D, como es el caso del primero.

Considerando lo anterior, es claro que el estudio del comportamiento mecánico de placas delgadas ante la presencia de concentradores de esfuerzo es un tema actual (por desgracia para el ingeniero) y relevante, como lo muestran los trabajos difundidos en los últimos años. Es importante mencionar que los enfoques con los que se ha estudiado esta temática

[†] El término debris se le asigna a las impurezas presentes en láminas de acero o aluminio, las cuales se incrustan en la lámina creando pequeños orificios ciegos en ella.

ha sido muy amplia. Se han involucrado disciplinas como la física, la matemática aplicada, por supuesto la ingeniería, y en los últimos años la médica y la militar. Esta claro que desde el punto de vista de las ciencias el objetivo es el desarrollar una teoría general que considere las leyes físicas aplicables en el fenómeno y se pueda generar un modelo matemático que al ser resuelto brinden, al ingeniero en diseño en este caso, las predicciones necesarias para diseñar el(los) elemento(s) de máquina que requiere.

No obstante lo anterior, muchos avances en la aplicación de diversos fenómenos físicos para la solución de problemas tecnológicos han sido generados por ingenieros que al estar en contacto directo con el problema, proponen soluciones aproximadas. Estas soluciones, aunque carecen de precisión, resultan útiles para el aprovechamiento de las ventajas que ofrece el control del fenómeno en cuestión. Sin embargo, este pensamiento ya no tiene cabida en el mundo actual.

En el presente trabajo se estudiará el efecto que tiene la presencia de un orificio circular ciego en placas delgadas bajo una carga a tensión. Este estudio no se concentrará en la superficie libre de la placa, sino en la raíz del orificio ciego. Esto debido a que, tomando como hipótesis que en la interface existente entre la concavidad del orificio y la línea vertical que se dirige hacia la superficie libre (punto A en la Fig. 1.2) hay una zona de alta concentración de esfuerzo y por ende, no debe ser ignorada.

Dentro de las técnicas experimentales empleadas para el estudio 3D de esfuerzos, la más utilizada por razones de precisión y campo de visualización es la fotoelasticidad 3D, mediante el uso de la técnica llamada “stress freezing”. Aunque como única desventaja que se tiene es el ser una técnica que requiere de mucha experiencia de campo, precisión en todas las etapas del proceso, esto para la obtención de los resultados óptimos.

La fotoelasticidad es una técnica de campo completo que provee directamente la información de la diferencia de esfuerzos principales y la orientación de las direcciones principales en el punto de interés del modelo. Sampson [30] enumera cuatro áreas donde la fotoelasticidad tridimensional juega un papel importante: (1) el análisis de estructuras 3D muy complejas para ser modeladas numéricamente dentro de las limitaciones de los programas disponibles; (2) verificación experimental en la predicción de esfuerzos obtenidos de programas computacionales nuevos y sin comprobar; (3) modelado de estructuras compuestas de dos o más componentes en contacto y en las cuales las

condiciones de frontera cambian al incrementar la carga; y (4) verificación de métodos aproximados para resolver problemas 3D utilizando técnicas numéricas 2D.

La fotoelasticidad es la única técnica de campo completo disponible para el estudio de esfuerzos internos en el modelo. En una técnica conocida como “stress freezing” [1], el modelo conservará la misma distribución de esfuerzos, como la tenía cuando era parte del modelo 3D[‡]. Los cortes (usualmente de 1-3mm de espesor, dependiendo del problema) son analizados usando los conceptos de la fotoelasticidad 2D.

Uno de los propósitos del presente trabajo es demostrar que, bajo condiciones propias, una aproximación numérica apoyada de los resultados experimentales, será una herramienta más poderosa y útil. Es por esto que se hará uso del paquete numérico ABAQUS para apoyo de los resultados experimentales.

Sin embargo, el estudio de orificios ciegos [§] ha sido un tema poco analizado, por no decir que no ha sido estudiado. Las razones posibles: (1) puede ser un tema poco importante e interesante; (2) debido a su naturaleza 3D, el nivel de complejidad es mucho mayor que en un problema 2D, como lo sería un barreno; (3) es una configuración poco común en áreas del diseño mecánico; (4) por razones fuera de nuestro conocimiento. Es deber del presente trabajo demostrar lo contrario de la razón (1).

El presente trabajo está dividido en 10 capítulos y dos apéndices en los cuales se describen a detalle aspectos generales como: aspectos técnicos para la obtención de los cortes longitudinal y transversal, como lo son la velocidad de corte, velocidad de avance, tipo de cortadores, número de gavilanes, materiales utilizados, refrigerante, entre otros. Se agregó la ficha técnica del material fotoelástico utilizado para la investigación, así como también una hoja de datos obtenidos en laboratorio para una mejor administración de la bitácora de actividades experimentales.

En el capítulo 1 se presenta la introducción, conteniendo lo más básico e importante que se debe presentar desde un principio: el *qué* se va a realizar como trabajo de investigación, *cómo* se realizará el mismo y el *por qué* se realiza el trabajo propuesto.

[‡] Hay que tomar en consideración que el proceso de corte no produzca ningún tipo de esfuerzo residual.

[§] Un orificio ciego es aquél orificio que no encuentra salida; es decir, que no atraviesa a toda la estructura mecánica.

El capítulo 2 se presenta el marco teórico necesario que se ocupará en los capítulos subsecuentes para la obtención de resultados cuantitativos. Posteriormente, se presenta el planteamiento del problema.

El capítulo 3 y 4, titulado Diseño Experimental y Experimentación, respectivamente, responden al *qué* se está haciendo. Se presentan de forma objetiva la metodología utilizada como aportación importante y rica del presente trabajo. Se hace un reporte de laboratorio profesional, así como una clasificación de los resultados obtenidos.

El capítulo 5 y 6, al igual que los dos anteriores, presentan y clasifican los resultados obtenidos, pero bajo técnicas numéricas.

El capítulo 7 presenta la conjunción global de los resultados experimentales y numéricos obtenidos y muestra las conclusiones generadas a partir de la comprensión de resultados obtenidos.

Se anexa la ficha bibliográfica y apéndices necesarios.

1. ESTADO DEL ARTE

Dentro de la frontera del conocimiento, el estudio de los concentradores de esfuerzo han sido tema vigente con el auge de herramientas experimentales (extensometría, foto-diodos, fotoelasticidad empotrada, fotoelasticidad digital, entre otros) así como herramientas numéricas. Todas ellas con el fin de proporcionar resultados más precisos para los variados problemas que se presenta en la industria. Desde 1898 hasta el presente año se tiene conocimiento de soluciones analíticas, experimentales, numéricas y lo que hoy en día es la metodología más utilizada: métodos híbridos (soluciones experimentales-numéricas).

Kirsch [32] en 1898 obtuvo la solución analítica para el problema de una placa delgada de anchura infinita con un orificio circular bajo carga uniaxial. Kirsch encuentra que el esfuerzo máximo es $\sigma_{\theta} = 3\sigma_{aG}$ el esfuerzo aplicado. Este esfuerzo se ubica en la periferia del orificio en $\theta = \frac{\pi}{2}$ y $\theta = \frac{3\pi}{2}$, tomando el origen en el centro del orificio.

Howland [26] retoma lo hecho por Kirsch y estudia el comportamiento de una placa delgada de anchura finita con orificio circular bajo carga uniaxial. De igual manera que Kirsch el problema es plano y pudo resolverse encontrando una cierta función de esfuerzo de Airy ϕ que satisficiera las condiciones de frontera y las ecuaciones de compatibilidad. Dado que la anchura es finita, Howland establece valores para casos donde el parámetro D/W (diámetro del orificio/ancho de la placa) no es constante.

Cuatro años después en 1934 Wahl y Beeuwkes [33] ocuparon los resultados de Howland para el caso donde $D/W > 0.5$ y obtuvieron los resultados por medio de métodos fotoelásticos. Este trabajo fue el primero que se tenga registro donde se aplicaba la fotoelasticidad para el estudio de concentradores de esfuerzo en placas delgadas.

Sternberg y Sadowsky [24] estudiaron la concentración de esfuerzos en una placa finita de espesor arbitrario. Para una placa de espesor arbitrario la solución primaria de esfuerzo plano o deformación plana son sobreimpuestas en la solución del problema residual correspondiente para obtener la solución real. Encontraron que bajo carga uniaxial, el

esfuerzo tangencial σ_θ en la raíz del orificio sigue siendo el máximo, sin embargo no es constante a lo largo del espesor. Es el primer resultado 3D que toma en consideración parámetros que incluyen el espesor de la placa t .

En 1955 Naghdi [22] estudia el efecto de orificios elípticos en placas gruesas bajo flexión. Como sus antecesores Naghdi investiga el factor de concentración de esfuerzos para los casos donde la deformación cortante y el esfuerzo normal-transversal tienen repercusiones de importancia en la frontera del orificio elíptico. El estudio se desarrolla partiendo de la teoría de flexión de placas desarrollada por E. Reissner en búsqueda de soluciones analíticas.

E. L. Reiss [34] adopta la teoría de la capa límite para determinar las correcciones tridimensionales en la teoría generalizada del esfuerzo plano para placas infinitas con orificios circulares bajo tensión. Reiss desarrolla y obtiene de forma analítica dichas correcciones utilizando teorías mejor sustentadas como métodos variacionales y la antes mencionada teoría de la capa límite.

Youngdahl y Sternberg [23] obtienen una solución tridimensional para los esfuerzos y deformaciones que ocurren en la frontera de un orificio cilíndrico presentes en cuerpos elásticos semi-infinitos. La solución obtenida está de forma integral y se dedujo con el apoyo de las funciones de esfuerzo de Papkovich.

Hasta finales de los 60's se tenía gran interés en aportar a la teoría soluciones analíticas al problema de los cuerpos con orificios. Sin embargo todos se encontraban inmersos en el área de la elastoestática. En 1974 Fang, Hemann y Achenbach [35] investigan la concentración de esfuerzos dinámicos en placas con orificios circulares. A partir de este trabajo es cuando se abre una nueva brecha de la fotoelasticidad aplicada al campo de la dinámica.

Field y Kirkwood [36] en 1976 investigaron la concentración de esfuerzo en ventanas de barcos bajo cargas de alta presión. Esta investigación patrocinada por la NASA fue un parte

aguas a la ya de por sí alta estima que se le tenía a la fotoelasticidad como la principal técnica experimental para análisis de esfuerzos y deformaciones.

Sanford y Beaubien [21] realizan una investigación acerca de los esfuerzos a los que se ve sometido un pedal de geometría compleja. Dicha geometría no presenta orificio alguno, sin embargo sirve de ejemplo para aplicar una metodología –en ese entonces no realizada- que hoy en día se conoce como métodos híbridos. Intentan demostrar que no es necesario tomar partido por métodos experimentales o numéricos y que la solución es más poderosa si se combinan ambos métodos para los fines prácticos.

Durante gran parte de los 80's y la primera parte de los 90's las investigaciones sobre concentradores de esfuerzos se centraron en obtener soluciones analíticas y experimentales en placas delgadas. La fotoelasticidad (2D y 3D) fue la técnica más utilizada para fines experimentales que sin embargo fue cediendo terreno a paquetería numérica y por ser ésta más barata ocupó preferencias entre los investigadores.

Todavía en 1990 Folias y Wang [38] presentan una solución analítica del estado de esfuerzos 3D en la frontera de un orificio circular presente en una placa de espesor arbitrario. El análisis hecho por los investigadores muestra que el factor de concentración de esfuerzos ' K ' varía a través del espesor y muestra ser muy sensible a cualquier cambio en la relación de radio y espesor, a/h . El estudio muestra también que para relaciones de $(a/h) \geq 4$, los resultados que la teoría del esfuerzo plano predice son más que adecuados para aplicaciones ingenieriles.

Peindl et. al. [37] aplicaron el método del 'stress freezing' para el análisis de esfuerzos en sistemas que reemplazan de forma total el hombro humano. Esta aplicación para fines ortopédicos no es la primera y la fotoelasticidad 3D por medio del 'stress freezing' es la metodología más utilizada para estos fines. Los autores encuentran que los esfuerzos máximos se ubican en el cuello de uno de los componentes y en la interfase componente-hueso simulada por inclusiones de PMMA (polymethylmethacrylate).

Iancu et. al. [19] en 2005 investigan de forma experimental y numérica la de distribución esfuerzos en placas gruesas unidas por medio de un perno. El análisis experimental se realizó por una técnica llamada fotoelasticidad “empotrada o fija” y extensometría tradicional. El análisis numérico se realizó con el código comercial ABAQUS. El trabajo se centra en un mejor diseño de uniones tipo perno.

Wang et. al. [18] estudian el campo de esfuerzos en superficies cercanas a un orificio circular presentes en placas infinitas. Los autores proponen un método de superposición reemplazado utilizando soluciones clásicas para placas infinitas con orificios circulares y la teoría modificada de contacto de Hertz. Utilizan la técnica de fotoelasticidad digital para verificar los resultados sobrepuestos. Los resultados indicaron que el método propuesto provee una forma efectiva de calcular el campo de esfuerzos en la frontera del orificio.

Baselga y Maza [39] determinan la distribución de esfuerzos en placas ortotrópicas con orificio circular así como su esfuerzo último mediante el uso de una subrutina (UMAT) desarrollada para estos fines dentro del código de E.F. ABAQUS. Ambos resultados, numéricos y analíticos, son confrontados con los resultados obtenidos de forma experimental mediante el uso de extensometría.

Xu y Wang [40] en 2009 trabajan en lo que al parecer es una línea de investigación de amplias aplicaciones en el área aeroespacial-mecánica-civil y bio-ingeniería. Se estudia el comportamiento de placas piezoeléctricas con orificio circular bajo cargas a flexión. Obtienen una solución analítica. Se presentan expresiones para el factor de concentración esfuerzos, momentos y desplazamientos eléctricos.

En el presente año Yang et. al. [41] modelan de forma numérica el campo de esfuerzos residuales 3D en una probeta con orificio circular producido por la técnica superficial denominada ‘golpe directo por laser’. A una probeta se le somete a dos tipos de análisis: primero se investiga el efecto que tiene en la frontera del orificio circular un ‘golpe’ efectuado en la parte superior de éste por la técnica superficial antes mencionada; luego se

le somete a una nueva probeta a dos ‘golpes’, uno en la parte superior del orificio y otro en la parte inferior.

A lo largo de 60 años el estudio de placas delgadas con orificios circulares han sido estudiadas con regularidad, Primeramente se buscaban soluciones analíticas debido mucho a la falta de herramientas computacionales y métodos experimentales que sobrepasaran las limitaciones que se tenían con la teoría de la resistencia de sólidos.

Una vez descubierta la propiedad (óptica) de birrefringencia de ciertos materiales policristalinos se pudieron sentar las bases de la teoría de fotoelasticidad. Una vez puesta en práctica se pudieron confrontar las soluciones analíticas encontradas con la solución experimental. La gran ventaja que arrojan los métodos fotoelásticos es el ser una técnica experimental de campo completo. Sin embargo la principal virtud que aún hoy en día no existe competencia alguna es el poder analizar la frontera de geometrías que generan concentradores de esfuerzo, como lo son barrenos, muescas, debris, etc. Las primeras investigaciones se centraban en placas con la presencia de un orificio circular, no importando si se encontraba centrado o no, ya que siempre se consideraban placas de dimensión infinita tanto en anchura como altura. Luego comenzaron a manejarse relaciones entre parámetros de importancia, como anchura vs diámetro del orificio, altura vs diámetro del orificio, las cuales sirvieron para crear tablas y gráficas de carácter práctico para el ingeniero de campo. La escuela del este de Europa, principalmente la rusa, se enfocaron en crear soluciones analíticas al problema de placas con orificios de cualquier geometría. Con ellos se empezaron a analizar placas gruesas. A partir de mediados de los 70's, se enfocó la atención en las aplicaciones. Debido a que un 90% aprox. del herramental mecánico tiene orificios principalmente ciegos, se han resuelto un sinnúmero de casos de geometrías con orificios circulares. Había pues que agregarle una adaptación más a la investigación de placas con orificios circulares: el carácter tridimensional. El método experimental por excelencia para analizar esfuerzos y deformaciones para problemas tridimensionales es el conocido como ‘stress freezing’. Descubierta a mediados de los 30's por Oppel en Alemania, esta técnica tiene presencia de peso aún y con el advenimiento de los paquetes computacionales. En lugar politizar estas dos técnicas y convertirlas en rivales, hoy se

puede gozar de tenerlas y proveer al investigador de dos métodos cuya misión además de poder crear conocimiento es la de hacerlas crecer y poder entender cuales son sus limitaciones y en qué aplicaciones una es más provechosa y práctica que la otra.

2. OBJETIVOS DE LA TESIS

En el presente trabajo se busca explorar en mayor medida un área poco estudiada en la ciencia aplicada: la presencia de orificios ciegos en placas delgadas. Por su naturaleza tridimensional, el problema requiere del uso de técnicas experimentales que se adecuen con este requisito fuerte. La fotoelasticidad tridimensional por medio del método del “stress freezing” es la técnica más utilizada en la frontera del conocimiento. Hasta donde tiene conocimiento el autor, no se encuentra registro alguno de resultados experimentales y/o numéricos y/o analíticos del estado de esfuerzos en la raíz y periferia de orificios ciegos en placas delgadas bajo cargas a tensión no-constantes. De tal forma los objetivos del presente trabajo son:

- i. Obtener el estado de esfuerzos en zonas catalogadas como cruciales para conocimiento del ingeniero en diseño y que dado su ubicación son de difícil acceso visual.
- ii. Obtención de resultados cualitativos y cuantitativos que lleven a una mejor comprensión del comportamiento local del orificio bajo cambios en la profundidad de éste en la placa.
- iii. Realizar una retroalimentación del método experimental con el numérico que lleve a diseñar el experimento de manera satisfactoria y que sea fiable para el ingeniero que desee ocuparlo.
- iv. Dado que el problema recae en la ciencia aplicada dentro de los concentradores de esfuerzos, obtener valores del F.C.E. “ K ” se vuelve importante y hasta cierto punto natural de obtener para su uso en campo.

Una vez que se ha plasmado lo que se ha realizado en la frontera del conocimiento respecto al estudio del estado de esfuerzos en orificios en placas delgadas y gruesas así como los objetivos trazados para el presente trabajo se pueden visualizar las siguientes contribuciones al estado del arte:

- i.** Información del comportamiento mecánico de placas delgadas sujetas a cargas a tensión no constante ante la presencia de orificios ciegos.
- ii.** Nueva aplicación de la metodología hoy en día más utilizada para el estudio de concentradores de esfuerzo: métodos híbridos.
- iii.** Un planteamiento experimental no desarrollado con anterioridad para generar las condiciones de frontera deseadas.

Introducción

En el presente capítulo se abordan conceptos generales de la cinemática desde el punto de vista de la Mecánica del Medio Continuo [2], [5]. Se define el concepto de cuerpo, movimiento, deformación, desplazamiento y el gradiente de deformaciones. Se definen también el campo material y espacial asociado a dicho movimiento.

Las definiciones fundamentales de la elasticidad son generadas a partir de la noción de densidad de fuerza. El tensor de esfuerzo de Cauchy, y el tensor de esfuerzo de Piola-Kirchhoff son definidos.

Conceptos de suma importancia por su aporte teórico y operacional como valor y vector propio, transformaciones lineales, base y dimensión de un espacio vectorial \mathbf{V} se definen en el apéndice 0. Por último se presentará de forma concisa los conceptos básicos detrás de la teoría de la fotoelasticidad [1], [3]. Se anexa en el apéndice 2 conceptos que debido a su extensión no fueron incluidos. No es intención del presente capítulo el sustituir una exposición completa de la teoría detrás del presente trabajo. Se pretende mostrar lo mínimo indispensable para una comprensión correcta de lo que se expone.

CINEMÁTICA

2.1 Cuerpo

Definición [6].- Un **cuerpo** Ω es una región regular del espacio euclidiano ξ con las siguientes características fundamentales:

- a) Ω está acotado.
- b) Ω es conexo.
- c) La frontera de Ω , $\partial\Omega$, está formada por la unión de un número finito de subconjuntos $\partial\Omega_i \subseteq \partial\Omega$ tal que:

$$\partial\Omega = \bigcup_{i=1}^n \partial\Omega_i, \quad n \geq 1,$$

cada $\partial\Omega_i$ debe estar representado de forma analítica.

2.2 Deformación y desplazamiento [2, 6]

Se ha optado por ocupar a Gurtin [2, c. III, c. IV] para presentar los conceptos mas importantes de la mecánica del medio continuo. Comentarios adicionales sobre las definiciones presentadas fueron tomados de Carrera [6].

En cinemática se estudian las alteraciones y desarrollo de la trayectoria de un cuerpo. En la mecánica del medio continuo se consideran además las deformaciones. Todo ello sin considerar aún las causas de esas alteraciones. Se considera que el cuerpo Ω ocupa una región regular en el espacio euclidiano ξ .

Una deformación es una función \mathbf{f} que da la imagen de un punto \mathbb{p} de la configuración no deformada (o material) en una nueva configuración llamada configuración deformada (o espacial)

$$\mathbf{f}(\mathbb{p}) = \mathbf{x}$$

La función \mathbf{f} debe cumplir con las siguientes condiciones:

1. \mathbf{f} debe ser uno-uno (impenetrabilidad del cuerpo Ω).
2. \mathbf{f} sea derivable (todas las veces que sea necesario).
3. Dado el gradiente $\nabla\mathbf{f}$ se exige que para todo punto $\mathbb{p} \in \Omega$

$$\det \nabla \mathbf{f}(\mathbb{p}) > 0$$

El campo vectorial \mathbf{u} , donde $\mathbf{u}: \Omega \rightarrow \mathbf{V}$ tal que

$$\mathbf{u}(\mathbb{p}) = \mathbf{f}(\mathbb{p}) - \mathbb{p} \quad (2.1)$$

se llama **campo vectorial de desplazamientos**.

El tensor

$$\mathbf{F}(\mathbb{p}) = \nabla \mathbf{f}(\mathbb{p}) \quad (2.2)$$

es llamado **gradiente de deformación**. Si \mathbf{F} es un campo tensorial constante para todo punto material \mathbb{p} , es decir

$$\mathbf{F}(\mathbb{p}) = \mathbf{T}_o$$

se dice que la deformación es **homogénea** si admite la representación

$$\mathbf{f}(\mathbb{p}) = \mathbf{f}(\mathbb{q}) + \mathbf{F}(\mathbb{q})(\mathbb{p} - \mathbb{q}) \quad (2.3)$$

para todo \mathbb{p} y $\mathbb{q} \in \Omega$.

Algunos tipos de deformaciones homogéneas con un punto fijo \mathbb{q} son [2, pp. 43-44]:

Rotaciones:

$$\mathbf{f}(\mathbb{p}) = \mathbb{q} + \mathbf{R}(\mathbb{q})(\mathbb{p} - \mathbb{q})$$

donde \mathbf{R} es una transformación ortogonal, i.e. $\mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{I}$.

Elongaciones:

$$\mathbf{f}(\mathbb{p}) = \mathbb{q} + \mathbf{U}(\mathbb{q})(\mathbb{p} - \mathbb{q})$$

donde \mathbf{U} tiene la forma

$$\mathbf{U} = \mathbf{I} + (\lambda - 1)(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i)^{**}, \quad \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lema. Toda deformación homogénea se puede descomponer en una translación y una rotación ó elongación (extensión o contracción).

“Una deformación homogénea es una función lineal desplazada. Una deformación general no necesariamente es lineal, pero si está representada por una función clase C^{2++} es factible asumir que el término lineal del desarrollo en series de Taylor representa una buena aproximación al comportamiento local de la función, o sea la derivada:

$$\mathbf{f}(\mathbb{p}) = \underbrace{\overbrace{\mathbf{f}(\mathbb{q})}^{\text{Translación}} + \overbrace{\frac{\mathbf{f}'(\mathbb{q})}{1!} + (\mathbb{p} - \mathbb{q})}^{\text{Rotación o Elongación}} + \frac{\mathbf{f}''(\mathbb{q})}{2!} (\mathbb{p} - \mathbb{q})^2 + \dots}_{\text{Deformación Homogenea}}$$

Dada entonces una deformación cualquiera, si los puntos \mathbb{q} y \mathbb{p} están suficientemente cerca se tiene

$$\mathbf{f}(\mathbb{p}) = \mathbf{f}(\mathbb{q}) + D\mathbf{f}[\mathbb{q}](\mathbb{p} - \mathbb{q}) + \mathbf{o}(\|\mathbb{p} - \mathbb{q}\|^2)$$

y si los términos $\mathbf{o}(\|\mathbb{p} - \mathbb{q}\|^2)$ son negligibles, se llega a

$$\mathbf{f}(\mathbb{p}) = \mathbf{f}(\mathbb{q}) + \mathbf{F}[\mathbb{q}](\mathbb{p} - \mathbb{q}), \text{ donde } D\mathbf{f}[\mathbb{q}] = \mathbf{F}[\mathbb{q}]$$

Es decir, la deformación se comporta de forma local como una deformación homogénea” [Carrera, 6].

2.3 Deformaciones infinitesimales.

Hipótesis. Se asume que el gradiente de desplazamiento $\nabla \mathbf{u}$ es pequeño.

Derivando a (2.1) se tiene

$$\mathbf{F}(\mathbb{p}, t) = \mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}(\mathbb{p}, t).$$

Se define el campo tensorial

$$\mathbf{E}(\mathbb{p}, t) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u}(\mathbb{p}) + \nabla \mathbf{u}(\mathbb{p})^T) \tag{2.4}$$

como el **campo tensorial de deformaciones unitarias infinitesimales** [2, p. 55].

La deformación unitaria infinitesimal \mathbf{E} depende estrictamente del gradiente de desplazamientos $\nabla \mathbf{u}$. El gradiente de una función vectorial puede obtenerse mediante el Jacobiano

$$\nabla \mathbf{u}(\mathbb{p}) = \begin{pmatrix} \overline{u_{11}} & \overline{u_{12}} & \overline{u_{13}} \\ \overline{u_{21}} & \overline{u_{22}} & \overline{u_{23}} \\ \overline{u_{31}} & \overline{u_{32}} & \overline{u_{33}} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}(\mathbb{p}) = \begin{pmatrix} u_1(\mathbb{p}) \\ u_2(\mathbb{p}) \\ u_3(\mathbb{p}) \end{pmatrix}$$

“Un **desplazamiento rígido infinitesimal** de un cuerpo Ω es un campo vectorial $\mathbf{u}(\mathbb{p})$ en Ω con el gradiente de desplazamientos constante y antisimétrico; es decir, admite estar representado como

$$\mathbf{u}(\mathbb{p}) = \mathbf{u}(\mathbb{q}) + \mathbf{W}(\mathbb{p} - \mathbb{q})$$

para todo \mathbb{p} y $\mathbb{q} \in \Omega$ y \mathbf{W} antisimétrico” [2, p.55]. El desplazamiento rígido infinitesimal es de suma importancia ya que nos ayuda a comprobar si el sistema de fuerzas $(\mathfrak{s}, \mathfrak{b})$ es correcto o no, mediante el uso del Teorema del Trabajo Virtual.

Teorema de Caracterización (para desplazamientos rígidos infinitesimales). Sea \mathbf{u} un campo vectorial diferenciable en Ω . Entonces lo siguiente es equivalente:

- i) $\mathbf{u}(\mathbb{p})$ es un desplazamiento rígido infinitesimal.
- ii) $\mathbf{u}(\mathbb{p})$ tiene la propiedad de proyección: para todo $\mathbb{p}, \mathbb{q} \in \Omega$,

$$\{(\mathbb{p} - \mathbb{q}) | [\mathbf{u}(\mathbb{p}) - \mathbf{u}(\mathbb{q})]\} = 0.$$
- iii) $\nabla \mathbf{u}(\mathbb{p})$ es antisimétrico para cada $\mathbb{p} \in \Omega$.
- iv) La deformación unitaria infinitesimal $\mathbf{E}(\mathbb{p}) = \mathbf{0}$ para cada $\mathbb{p} \in \Omega$.

2.4 Movimientos [6, 2]

“Sea Ω un cuerpo. Un movimiento de Ω , $\Omega \subseteq \xi$, es una función clase C^3

$$\chi: \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \xi$$

tal que para cada t , $\chi(\cdot, t)$ es una deformación de Ω . La posición ocupada por el punto material \mathbb{p} en el tiempo t será

$$\mathbf{x} = \chi(\mathbb{p}, t)$$

Se define como **trayectoria** al conjunto de pares ordenados (figura 2.1)

$$\mathfrak{S} = \{(\mathbf{x}, t) | \mathbf{x} \in \Omega_t, t \in \mathbb{R}\}.$$

donde

$$\Omega_t = \chi(\Omega, t)$$

es la región ocupada por el cuerpo Ω en el tiempo t “[2, pp. 58-59].

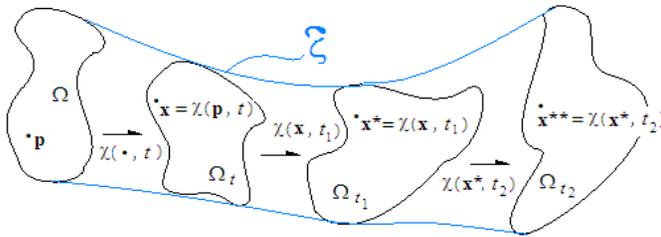


Figura 2.1 Trayectoria hecha por el cuerpo Ω a lo largo de diferentes tiempos t .

FUERZA Y ELASTICIDAD LINEAL

El objetivo de esta sección es el de definir los conceptos de fuerza de cuerpo, fuerza de superficie, esfuerzo y esfuerzo normal. Con estos conceptos y los definidos en el capítulo de cinemática, se definirá el tensor de esfuerzo de Cauchy, el tensor de esfuerzo de Piola-Kirchhoff y se enunciarán las ecuaciones de la teoría de elasticidad lineal basado en [Gurtin, pp. 97].

2.5 Fuerza [2, 6]

¿Que efectos tiene la fuerza \mathfrak{l} que se le aplican al cuerpo Ω bajo estudio? La fuerza \mathfrak{l} que se está aplicando se ejerce de forma global. Pero, ¿qué efectos locales causa esa fuerza?

Hipótesis de Cauchy. Cauchy asume la existencia de una densidad de fuerza \mathfrak{s} definida para cada vector unitario \mathbf{n} y cada par ordenado (\mathfrak{x}, t) de la trayectoria \mathfrak{S} del movimiento descrito por el cuerpo Ω .

Definición. Sea \mathcal{N} el conjunto de todos los vectores unitarios normales a la superficie de Ω o de una parte de Ω , $\mathcal{N} = \{\mathbf{n} \mid \|\mathbf{n}\| = 1\}$. “Por un sistema de fuerzas de un cuerpo Ω durante un movimiento con trayectoria \mathfrak{S} se refiere a un par $(\mathfrak{s}, \mathfrak{b})$ de funciones con

- (1) $\mathfrak{s}(\mathbf{n}_{\mathfrak{x}}, \mathfrak{x}, t)$, para cada $\mathbf{n}_{\mathfrak{x}} \in \mathcal{N}$ y t , una función diferenciable de \mathfrak{x} en Ω_t .
- (2) $\mathfrak{b}(\mathfrak{x}, t)$ para cada t , una función continua de \mathfrak{x} en Ω_t .

y definidas:

$$s: \mathcal{N} \times \mathfrak{S} \rightarrow \mathbf{V}, \quad \mathbb{b}: \mathfrak{S} \rightarrow \mathbf{V}$$

se le llamará **fuerza de superficie** a s y **fuerza de cuerpo** a \mathbb{b} ” [2, p.99]

Teorema de Cauchy [2, p. 99]. Sea (s, \mathbb{b}) un sistema de fuerzas de Ω durante un movimiento. Entonces una condición necesaria y suficiente para que las leyes de balance de momentum se cumplan es que exista un campo tensorial espacial \mathbf{T} llamado el tensor de esfuerzo de Cauchy, tal que

(a) Para cada vector unitario \mathbf{n} ,

$$s(\mathbf{n}_x, \mathbf{x}, t) = \mathbf{T}(\mathbf{x}, t)\mathbf{n}_x; \quad (2.4a)$$

(b) $\mathbf{T}(\mathbf{x}, t)$ es simétrico;

(c) $\mathbf{T}(\mathbf{x}, t)$ satisface la ecuación de movimiento:

$$\mathbf{div} \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) + \mathbb{b}(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x}, t)\dot{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t) \quad (2.5)$$

El campo tensorial de esfuerzos de Cauchy es un campo espacial. Dado que no se conoce a priori la configuración deformada del cuerpo Ω es necesario obtener al tensor de Cauchy en términos de la configuración material o no deformada. Este tensor es llamado el campo tensorial de esfuerzos de Piola-Kirchhoff.

No se debe dejar de lado el apreciar el poder que se encuentra en el teorema de Cauchy, ni olvidar las suposiciones inherentes en él. Este teorema provee una descripción de las fuerzas internas en todas las situaciones. De la ecuación 2.4a se observa un punto de suma importancia: la fuerza de superficie s depende *linealmente* en \mathbf{n}_x y donde \mathbf{T} depende sólo de \mathbf{x} .

2.6 Elasticidad [2, 6]

En ciencia debe tenerse claro a que nos referimos cuando un cuerpo es elástico. Existen cuerpos que cuando se les somete a una sollicitación sus alteraciones no son definitivas. Antes de poder definir un cuerpo elástico desde la mecánica del medio continuo, se hará mención a dos axiomas inherentes en la definición.

Axioma 1. La respuesta material de un cuerpo elástico es independiente del observador.

Axioma 2. La respuesta del material en t_0 no depende de lo que pasó en $t < t_0$, es decir, no tiene memoria.

Un *cuerpo elástico* es un cuerpo material cuya respuesta es invariante del observador y cuyo campo tensorial de esfuerzos es una función lineal del gradiente de deformación del movimiento y de los puntos de la configuración de referencia y cuya ecuación constitutiva es

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{F}(\mathbb{p}, t), \mathbb{p})$$

donde $\hat{\mathbf{T}}: \text{Lin}^+ \times \Omega \rightarrow \text{Sim}$, y \mathbf{T} es un tensor simétrico que cumple con (a), (b) y (c) en el teorema de Cauchy.

De manera restringida se asume que el campo tensorial de esfuerzos no depende de la historia, sino de la configuración original. Eso quiere decir que se puede restringir el gradiente de deformación en la configuración original.

En sólidos, lo que mejor se conoce es la configuración material Ω_0 . Se requiere pues tener un campo tensorial equivalente en $\Omega_0 : \mathbf{T} \sim \mathbf{T}_m$.

Sea (χ, \mathbf{T}) sea un proceso dinámico^{††}. Para una parte \mathfrak{B}_0 de Ω_0 , la fuerza de superficie total en \mathfrak{B}_0 en un tiempo t es

$$\int_{\partial\mathfrak{B}_t} \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) \mathbf{n}_{\mathbf{x}} dA = \int_{\partial\mathfrak{B}_0} (\det \mathbf{F}(\mathbb{p}, t)) \mathbf{T}_m \mathbf{F}^{-T}(\mathbb{p}, t) \mathbf{m}_{\mathbf{x}} dA$$

donde

$$\mathbf{S}(\mathbb{p}, t) = (\det \mathbf{F}(\mathbb{p}, t)) \mathbf{T}_m \mathbf{F}^{-T}(\mathbb{p}, t), \quad \mathbf{S}: \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \text{Lin}$$

es el **tensor de Piola-Kirchhoff**; \mathbf{n} y \mathbf{m} son, respectivamente, los campos de vectores normales en $\partial\mathfrak{B}_t$ y $\partial\mathfrak{B}_0$, mientras \mathbf{T}_m es la descripción material del tensor de Cauchy \mathbf{T} .

Linealizando al tensor de esfuerzo de Piola-Kirchhoff [2, p. 199] se encuentra que

$$\mathbf{S}(\mathbb{p}, t) = \mathbf{C}[\mathbf{E}(\mathbb{p}, t)] \quad (2.6)$$

donde \mathbf{C} es el tensor de elasticidad. Es importante señalar las premisas que se toman en consideración para el proceso de linealizar a \mathbf{S} :

1. Los esfuerzos residuales valen cero; i.e., $\mathbf{S}(\mathbf{I}) = \mathbf{0}$
2. El gradiente de desplazamientos $\nabla \mathbf{u}$ es infinitesimal.

Es importante observar que si se tiene un desplazamiento rígido infinitesimal, la deformación unitaria infinitesimal $\mathbf{E}(\mathbb{p}, t) = \mathbf{0}$ y por tanto el tensor de Piola-Kirchhoff $\mathbf{S}(\mathbb{p}, t) = \mathbf{0}$.

El sistema de ecuaciones para un comportamiento estático de un cuerpo elástico dentro del marco de la teoría lineal, consiste en:

- (i) las relaciones deformación-desplazamiento

$$\mathbf{E}(\mathbb{p}, t) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u}(\mathbb{p}) + \nabla \mathbf{u}(\mathbb{p})^T) \quad (2.8)$$

- (ii) las relaciones esfuerzo-deformación

$$\mathbf{S}(\mathbb{p}, t) = \mathbf{C}[\mathbf{E}(\mathbb{p}, t)] \quad (2.9)$$

- (iii) la ecuación de equilibrio

$$\mathbf{div} \mathbf{S}(\mathbb{p}, t) + \mathbf{b}(\mathbb{p}, t) = \mathbf{0} \quad (2.10)$$

Sin embargo en muchas ocasiones es más conveniente trabajar con la relación esfuerzo-deformación (2.9) de manera invertida para tener $\mathbf{E}(\mathbb{p}, t)$ en función de $\mathbf{S}(\mathbb{p}, t)$, esto es,

$$\mathbf{E}(\mathbb{p}, t) = \frac{1}{2\mu} \left[\mathbf{S}(\mathbb{p}, t) - \frac{\lambda}{2\mu + 3\lambda} (\text{tr} \mathbf{S}(\mathbb{p}, t)) \mathbf{I} \right] \quad (2.11)$$

donde λ y μ son las constante de Lamé y las cuales expresan propiedades del material.

Dado que el módulo de Young y la relación de Poisson se pueden obtener experimentalmente por medio de extensometría, la ecuación (2.11) puede expresarse en términos de estos dos parámetros.

Recordando que

$$E = \frac{\mu(2\mu + 3\lambda)}{\mu + \lambda}, \quad y \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\mu + \lambda)}$$

$$\mathbf{E}(\mathbb{p}, t) = \frac{1}{E} [(1 + \nu)\mathbf{S}(\mathbb{p}, t) - \nu(\text{tr } \mathbf{S}(\mathbb{p}, t)\mathbf{I})] \quad (2.12)$$

Mediante el uso de la Teoría de la fotoelasticidad se obtiene el valor y vector propio del esfuerzo principal en un punto deseado del cuerpo Ω . De igual manera con el uso de la herramienta numérica se obtienen esos mismos datos para su uso posterior. Sin embargo, las ecuaciones (2.9), (2.10) y (2.12) carecen de coordenadas y su uso se vuelve un poco complicado –aunque por supuesto no se niega que el uso de notación directa es la usada en la frontera del conocimiento y una vez dominada es mucho más generosa que la notación indicial–. Es por esta razón que se enunciarán estas mismas ecuaciones pero en coordenadas cartesianas, no sin antes desarrollar paso a paso el procedimiento para llegar a ellas a partir de las ecuaciones (2.8), (2.10) y (2.12).

En el espacio \mathbb{R}^3 , el campo vectorial $\mathbf{u}(\mathbb{p}) = \begin{pmatrix} u(\mathbb{p}) \\ v(\mathbb{p}) \\ w(\mathbb{p}) \end{pmatrix}$. Mediante el Jacobiano se puede

obtener el gradiente de $\mathbf{u}(\mathbb{p})$:

Recordando que $(\nabla \mathbf{u})_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ se tiene que

$$\nabla \mathbf{u}(\mathbb{p}) = D\mathbf{u}(\mathbb{p}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(\mathbb{p}) \\ v(\mathbb{p}) \\ w(\mathbb{p}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto

$$\nabla \mathbf{u}(\mathbb{p})^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Así pues, el campo tensorial de deformaciones (ec. 2.8) toma la forma:

$$\mathbf{E}(\mathbb{p}, t) = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{u}(\mathbb{p}) + \nabla \mathbf{u}(\mathbb{p})^T] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} & 2 \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} & 2 \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{E}(\mathbb{p}, t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \frac{\gamma_{yx}}{2} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{zx}}{2} & \frac{\gamma_{zy}}{2} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

$$\text{donde } \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \gamma_{yx} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y},$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}, \gamma_{zy} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}$$

Las componentes del desplazamiento $\mathbf{u}(\mathbb{p})$ están en función de las coordenadas cartesianas en \mathbb{R}^3 y pueden ser expresadas de la forma

$$\begin{aligned} u &= u(x, y, z) \\ v &= v(x, y, z) \\ w &= w(x, y, z) \end{aligned}$$

El primer elemento de la primera fila de la expresión (2.13), i.e. $\frac{\partial u}{\partial x}$ nos indica el cambio $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ de la componente u en dirección al eje coordenado x . Dado que el desplazamiento de u es paralelo al eje x se le conoce como deformación normal y se le denota comúnmente

como ϵ_x . Tomando el segundo elemento en su forma expandida, $\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$, nos indica el cambio de la componente u en dirección al eje y más el cambio de la componente v en dirección al eje x . A este cambio se le denomina deformación cortante y se le denota como γ_{xy} . Desde el punto de vista físico representa la disminución de ángulos entre dos segmentos de recta en la vecindad de un punto $\mathbb{p} \in \Omega$ inicialmente paralelas a los ejes x y y . Reconstruyendo la expresión (2.13) se tiene

$$\mathbf{E}(\mathbb{p}, t) = \begin{pmatrix} \epsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{yx}}{2} & \epsilon_y & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{zx}}{2} & \frac{\gamma_{zy}}{2} & \epsilon_z \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

La ecuación (2.14) representa el estado de deformaciones en un punto general \mathbb{p} . Esta ecuación es **independiente** de las propiedades mecánicas del material y por ende es válida para cualquier punto $\mathbb{p} \in \Omega$ ya sea un sólido, líquido o gas. La ecuación (2.12) representa el estado de deformaciones para un material sólido, elástico, lineal, isótropo y homogéneo. Reescribiendo,

$$\mathbf{E}(\mathbb{p}, t) = \frac{1}{E} \left[\underbrace{(1 + \nu)\mathbf{S}(\mathbb{p}, t)}_{(1)} - \underbrace{\nu(\text{tr } \mathbf{S}(\mathbb{p}, t)\mathbf{I})}_{(2)} \right]$$

Desarrollando a (1) se tiene:

$$\text{Siendo } \mathbf{S}(\mathbb{p}, t) = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix},$$

$$(1 + \nu)\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \sigma_x(1 + \nu) & \tau_{xy}(1 + \nu) & \tau_{xz}(1 + \nu) \\ \tau_{yx}(1 + \nu) & \sigma_y(1 + \nu) & \tau_{yz}(1 + \nu) \\ \tau_{zx}(1 + \nu) & \tau_{zy}(1 + \nu) & \sigma_z(1 + \nu) \end{pmatrix}$$

Desarrollando a (2) se obtiene:

$$\nu(\text{tr } \mathbf{S})\mathbf{I} = \nu(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)\mathbf{I} = \begin{pmatrix} \nu(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) & 0 & 0 \\ 0 & \nu(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) & 0 \\ 0 & 0 & \nu(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \end{pmatrix}$$

Finalmente, el campo tensorial de deformaciones infinitesimales toma la forma

$$\mathbf{E}(\mathbb{p}, t) = \begin{pmatrix} \frac{\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)}{E} & \frac{(1+\nu)}{E} \tau_{xy} & \frac{(1+\nu)}{E} \tau_{xz} \\ \frac{(1+\nu)}{E} \tau_{yx} & \frac{\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)}{E} & \frac{(1+\nu)}{E} \tau_{yz} \\ \frac{(1+\nu)}{E} \tau_{zx} & \frac{(1+\nu)}{E} \tau_{zy} & \frac{\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)}{E} \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

Igualando término por término de las ecuaciones (2.14) y (2.15) obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$(2.16) \quad \begin{cases} \epsilon_x = \frac{\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)}{E} = \frac{\partial u}{\partial x} \\ \epsilon_y = \frac{\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)}{E} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \epsilon_z = \frac{\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)}{E} = \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \gamma_{yz} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \gamma_{zx} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{cases}$$

El sistema (2.16) ofrece una visión más individual del comportamiento de cada componente del campo tensorial de deformaciones infinitesimales.

De la ecuación (2.10) se obtendrán las tres ecuaciones de equilibrio en coordenadas cartesianas para \mathbb{R}^3 .

Recordando que $(\text{div } S)_i = \sum_j \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_j}$, y $\mathbb{b}(\mathbb{p}, t)$ es el campo vectorial $\mathbb{b}: \mathfrak{S} \rightarrow V$ se tiene

$$\text{div} \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por lo que se obtiene el sistema de tres ecuaciones diferenciales parciales

$$(2.17) \quad \begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0 \end{cases}$$

Estas ecuaciones son llamadas las ecuaciones de equilibrio y son ecuaciones de ‘campo’ en el sentido de que conectan los esfuerzos de punto en punto.

El sistema (2.16) consiste de seis relaciones esfuerzo-deformación, seis relaciones deformación-desplazamiento, y el sistema (2.17) consiste en las tres ecuaciones de equilibrio. Juntas forman un sistema de 15 ecuaciones con 15 incógnitas las cuales pueden ser resueltas según los datos que se vayan obteniendo.

TEORÍA DE LA FOTOELASTICIDAD

El polariscopio circular o plano es el instrumento óptico para trabajar la fotoelasticidad y su funcionamiento será brevemente descrito. No es un fin del presente capítulo el ilustrar al lector con la teoría de la fotoelasticidad, base necesaria para la investigación desarrollada. Se cree que el lector se encuentra familiarizado con la teoría, así como de sus aplicaciones. Se ha propuesto como apéndice 2 la teoría de fotoelasticidad para problemas planos, y se describirá la teoría para problemas tridimensionales, aplicaciones, materiales, y técnicas para el análisis experimental de esfuerzos en tres dimensiones [1, 3, 8, 30].

Introducción. [1]

Muchos materiales transparentes no cristalinos que son ópticamente isotrópicos cuando se encuentran libres de esfuerzos se vuelven ópticamente anisotrópicos y exhiben características similares a los cristales cuando se encuentran bajo sollicitaciones. Estas características permanecen mientras las cargas en el material se mantengan pero desaparecen cuando se quitan las cargas. Este comportamiento es conocido como doble refracción temporal. El método de la fotoelasticidad se basa en este comportamiento físico de materiales transparentes no cristalinos.

2.6 Polariscopio circular. [1, 8]

Como el nombre supone, el polariscopio circular emplea luz polarizada circular. Como se ilustra en la figura 2.2, el polariscopio contiene cuatro elementos ópticos y una fuente de luz.

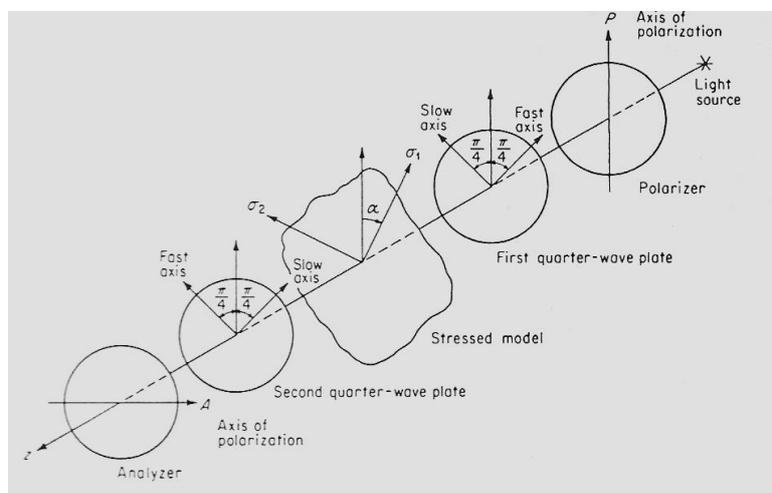


Figura 2.2 Arreglo de los elementos ópticos en un polariscopio circular

El primer elemento seguido de la fuente de luz es el polarizador. Este convierte la luz ordinaria en luz polarizada plana. El segundo elemento es una placa de cuarto de onda puesta a un ángulo de $\beta = \frac{\pi}{4}$ al plano de polarización. Esta placa convierte la luz polarizada plana en luz polarizada circular. La segunda placa de cuarto de onda es puesta con su eje *rápido* paralelo al eje *lento* de la primera placa de cuarto de onda. El propósito de este elemento es el convertir la luz polarizada circular en luz polarizada plana vibrando en el plano vertical. Por último, el analizador se ocupa para extinguir la luz, puesto se eje de polarización horizontal. La tabla 2.1 muestra los cuatro posibles arreglos dependiendo de si las placas de cuarto de onda y los polarizadores están cruzados o no.

ARREGLO	PLACAS DE CUARTO DE ONDA	POLARIZADOR Y ANALIZADOR	CAMPO
A ^o	Cruzado	Cruzado	Obscuro
B	Cruzado	Paralelo	Claro
C	Paralelo	Cruzado	Claro
D	Paralelo	Paralelo	Oscuro

Tabla 2.1. Cuatro arreglos de los elementos ópticos en un polariscopio circular [Dally, p. 373]

2.7 FOTOELASTICIDAD TRIDIMENSIONAL. [1, 28, 31]

Existen muchos cuerpos que son tridimensionales en carácter y no pueden ser analizados usando técnicas bidimensionales o planas. Por ejemplo, no es práctico ni conveniente el tratar de relacionar los efectos ópticos integrados en un modelo tridimensional complejo con los esfuerzos presentes en él. Sin embargo es posible el construir y cargar el modelo tridimensional y analizar planos internos del modelo de manera fotoelástica usando métodos por ‘congelamiento de esfuerzos’ De ahora en adelante se referirá por *stress-freezing* a éste método. Con el método de stress freezing, las deformaciones del modelo y su respuesta óptica asociada son encerradas dentro del modelo tridimensional cargado. Una vez que el proceso de congelar los esfuerzos es completado, el modelo puede ser cortado y analizado de forma fotoelástica para obtener información de los esfuerzos internos.

El método de stress-freezing de encerrar en el modelo las deformaciones se basa en el comportamiento bifásico de muchos polímeros cuando son calentados. Los materiales

poliméricos están compuestos de largas cadenas de moléculas de hidrocarburo. Para mayores detalles acerca del comportamiento bifásico de los polímeros se sugieren a [1] y [8]. El proceso se explica detalladamente en el capítulo III.

2.7.1 Materiales para fotoelasticidad tridimensional.

La fotoelasticidad tridimensional fue una realidad a finales de 1930 y desde entonces se han ocupado diferentes materiales para esta aplicación. Dally [1] incluye en esta lista a materiales como Catalin 61-893, Kriston, Castolite, y últimamente las resinas epóxicas. Debido a que ya se dejó de producir una (Kriston) y otras son de calidad inferior a las resinas epóxicas, se adquirió una placa de Resina Epóxica con la compañía estadounidense Vishay Group y cuyas especificaciones técnicas se encuentran en el anexo 2.

2.7.2 Cortes en el modelo. [1, 31]

Si un modelo fotoelástico tridimensional es observado en el polariscopio el patrón de franja resultante no puede, en general, ser observado. Esto se debe a que la luz que pasa a través del espesor del modelo tridimensional integra la diferencia de esfuerzos principales $\sigma_1 - \sigma_2$ sobre la longitud de la trayectoria de la luz y muy poco puede concluirse respecto al estado de esfuerzos en cualquier punto del modelo.

Sin embargo, pueden examinarse de manera individual planos de interés cortados previamente del modelo tridimensional para determinar el estado de esfuerzos existente en ese corte particular. Se asume que el corte realizado es suficientemente delgado en relación al tamaño del modelo, para asegurar que los esfuerzos no cambian tanto en magnitud como en dirección a través del espesor del corte.

Dally [1] y Johnson [31] comentan que existen principalmente tres tipos de cortes: cortes superficiales, cortes principales diferentes a los superficiales y cortes generales. Dado que el tipo de corte a realizar depende de manera fundamental en la geometría del modelo y del tipo de información a encontrar, se describirá de forma más extensa el segundo tipo de corte dado que fue el realizado por el equipo de trabajo. Véase Dally [1], Johnson [31] y Durelli [8] para más detalles.

2.7.3 Corte Principal diferente al corte superficial. [1]

Un modelo normalmente puede contener planos de simetría u otros planos que se saben son principales, como es el caso de la placa con el orificio ciego. El corte transversal presentado en la figura 2.3 representa un plano de simetría, el cual se sabe es un plano principal, así como también el corte longitudinal es un plano principal. Planos, esfuerzos y direcciones principales se definen en Gurtin [2, pp. 105].

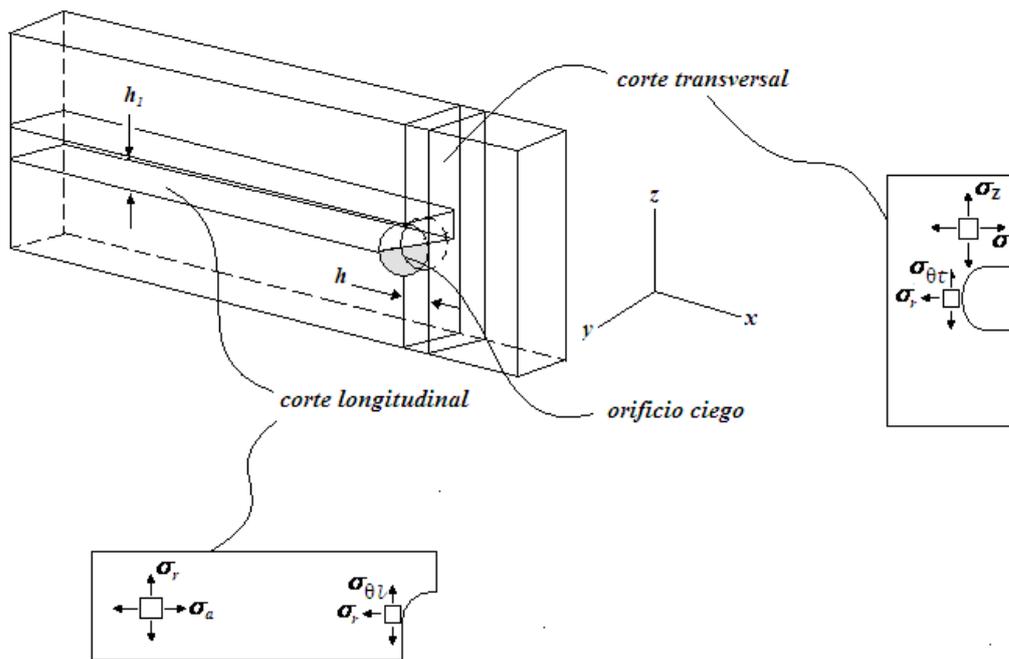


FIGURA 2.3 Cortes de la placa con orificio ciego a lo largo de planos con esfuerzos principales.

Si son examinados ambos cortes en el polariscopio a incidencia normal, el patrón de franjas que resulta proveerá los siguientes datos. Para el corte transversal

$$\sigma_r - \sigma_z = \frac{Nf_\sigma}{h}$$

en cualquier punto interior del corte.

N es el número de orden de franja;

f_σ es el valor de franja del material y es una propiedad del material del modelo para una longitud de onda dada λ, y el espesor del modelo *h*;

En las fronteras externas del corte transversal mostrado en la figura 1.4:

En la frontera horizontal del corte transversal: $\sigma_r = \frac{Nf\sigma}{h}$

En la frontera vertical del corte transversal: $\sigma_z = \frac{Nf\sigma}{h}$

En la frontera de la raíz del orificio $\sigma_r = 0$, por lo tanto se tiene que

$$\sigma_{\theta t} = \frac{Nf\sigma}{h} \quad (2.18)$$

En todos los puntos interiores del plano transversal, el valor propio del esfuerzo cortante máximo τ_{max} está dado por

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_r - \sigma_z}{2} = \frac{Nf\sigma}{2h}$$

El estudio de placas delgadas con la presencia de un orificio ciego puede deberse por ejemplo a un debris^{ss} en láminas metálicas después del rolado. O puede ser que el orificio ciego sea parte del diseño de la pieza. Cuerpos presentes en el orificio ciego, como remaches o tornillos se considera ejercen cargas pasivas en la placa, i.e., ejercen una carga negligible en comparación a las cargas a tensión ejercidas en la placa. Si se considera que esta carga q no es pasiva y negligible, el esfuerzo tangencial en la frontera de la raíz del orificio ciego toma la forma

$$\sigma_{\theta t} = \frac{Nf\sigma}{h} - q$$

El corte longitudinal de la placa delgada provee patrones de franja que están relacionadas con los esfuerzos tangenciales y radiales. Por tanto

$$\sigma_r - \sigma_a = \frac{Nf\sigma}{h_1}$$

en cualquier punto interior del corte.

En la frontera vertical, $\sigma_a = 0$, por lo que $\sigma_r = \frac{Nf\sigma}{h_1}$.

En la frontera horizontal, $\sigma_r = 0$, por lo que $\sigma_{\theta l} = \frac{Nf\sigma}{h_1}$

En la frontera del orificio ciego, se tiene que $\sigma_r = 0$ por lo que

$$\sigma_{\theta l} = \frac{Nf_{\sigma}}{h_1} \quad (2.19)$$

El esfuerzo cortante máximo en cualquier punto interior del corte transversal es

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_r - \sigma_a}{2} = \frac{Nf_{\sigma}}{2h_1}$$

Los cortes longitudinal y transversal proveen datos suficientes para obtener valores individuales de los esfuerzos principales en la frontera del orificio ciego, tanto en la raíz como en el recorrido del orificio, así como el esfuerzo cortante máximo en ambos planos.

2.8 CASO DE ESTUDIO.

En la presente investigación, se analizará el estado de esfuerzos en la raíz de un orificio ciego circular presente en placas delgadas. Se toma por ejemplo el caso en aplicaciones aeronáuticas donde se tienen configuraciones como se muestra en la Fig. 2.4. Se coloca una solera de acero que sirve de refuerzo y unión de la estructura central del avión y el ala. Esta solera esta unida al fuselaje por medio de tornillos.

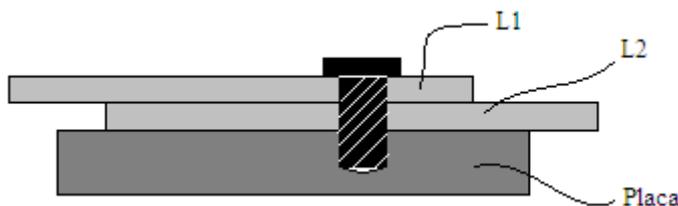


Figura 2.4 Configuración de la unión del fuselaje (L1, L2) unidas al refuerzo de acero (placa).

Hoy en día, los estudios se centran en conocer la distribución de esfuerzos a lo largo de los remaches que unen placas quebradizas. Iancu y Ding [19] investigaron la distribución de esfuerzos existente a lo largo de uniones tipo perno que unen dos placas gruesas. Los resultados experimentales fueron obtenidos por medio de fotoelasticidad. Hicieron uso del programa ABAQUS para el análisis numérico.

Los remaches, al igual que los tornillos que se usan para unirlos con el refuerzo de acero, se considera que ejercen una carga **negligible** en comparación con la carga a tensión que se tiene en la placa delgada. Sin embargo, el ignorar los esfuerzos que están presentes en el refuerzo de acero es una suposición bastante fuerte de parte del ingeniero en diseño.

Un acertado diagnóstico del problema es una de las múltiples tareas del analista de esfuerzos.

El analista debe diagnosticar, observar los componentes como un todo. Tiene conocimiento del funcionamiento global del sistema y del funcionamiento individual de sus partes. En este trabajo se asume que se puede centrar la atención en la placa con orificio ciego y aislarla de las dos láminas del fuselaje y del tornillo que lo sujeta a ellas.

Premisa. Se considera que las láminas (L1 y L2) así como la placa funcionan como un todo, por lo que están sometidas a las mismas cargas, y se desprecia cualquier tipo de fuerza por fricción que exista entre ellas.

El caso de estudio únicamente ilustra una de las variadas geometrías que pueden tenerse de orificios ciegos. En efecto, para el caso de estudio el tornillo que sirve de unión para las placas y la solera requiere de un machuelo para atornillarse o ‘fijarse’ a la solera. El machuelado en la solera genera una cuerda y que por supuesto genera una geometría diferente a la mostrada en la figura 2.5. Sin embargo, dado que en el presente trabajo se quiere hacer un estudio profundo del comportamiento mecánico de placas delgadas ante la presencia de un orificio ciego, por el momento lo más importante es la presencia de éste en la placa. Como trabajo a futuro se podría tomar en consideración diferentes geometrías del orificio, como la generada por un machuelo.

Premisa. Se considera una geometría del orificio ciego como la ilustrada en la Fig. 2.5.

La Fig. 2.5 muestra la placa, aislada en su totalidad de la estructura que forma al fuselaje. En adelante, se referirá a la placa como el cuerpo Ω .

Será conveniente escoger una región Ω como referencia para identificar puntos del cuerpo con sus posiciones en Ω .

Nos referiremos a Ω como la configuración de referencia [6]. Puntos $\mathbb{p} \in \Omega$ son puntos materiales; subregiones regulares de Ω se llamarán **partes** [2].

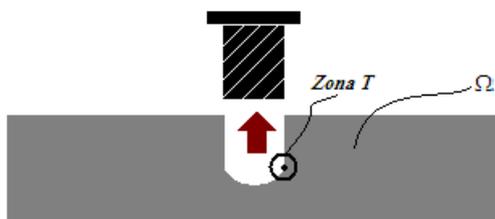


Figura 2.5 Placa Ω aislada del fuselaje y tornillo.

2.8.1 Definición geométrica del cuerpo Ω .

La Figura 2.6 muestra la configuración de la placa alterada por la presencia del orificio ciego.

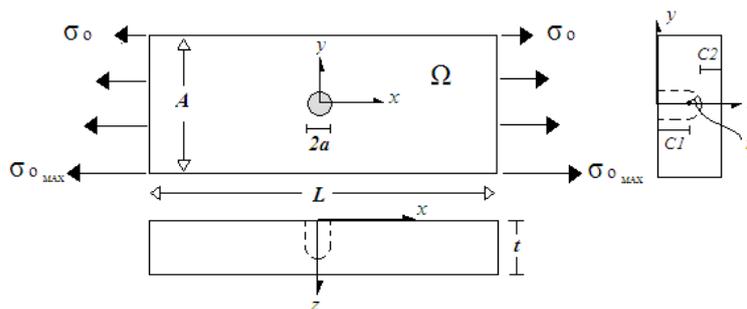


Figura 2.6 Configuración del cuerpo Ω .

$$\Omega: |x| \leq L; |y| \leq A; z \leq 2h$$

$$\text{Orificio: } x^2 + y^2 \leq a^2$$

$$\text{Cilindro: } 0 \leq z \leq c_1;$$

$$Cl = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 \leq a^2, 0 \leq z \leq c_1\}$$

$$\text{Semi-esfera: } (x - h)^2 + (y - k)^2 + (z - l)^2 = r^2; h = 0, k = 0, l = c_1$$

$$SE = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + (z - c_1)^2 \leq r^2; c_1 \leq z \leq c_1 + r\}$$

$$\Omega = REC \setminus (Cl \cup SE)$$

Definición de las fronteras del cuerpo Ω

Antes de definir las condiciones de frontera presentes en el cuerpo Ω , será necesario definir de forma analítica las fronteras de este. En la Figura 2.7 se observan las superficies que delimitan al cuerpo Ω y sus correspondientes fronteras $\partial\Omega_n$.

$$\partial\Omega_1 = \{(x, y, z) | z = 0, -L \leq x \leq L, -A \leq y \leq A\} \setminus \{(x, y, z) | z = 0, x^2 + y^2 \leq a^2\}$$

$$\partial\Omega_2 = \{x = L, -A \leq y \leq A, z = h\}$$

$$\partial\Omega_3 = \{-L \leq x \leq L, y = A, z = h\}$$

$$\partial\Omega_4 = \{(x, y, z) | x = -L, -A \leq y \leq A, z = h\}$$

$$\partial\Omega_5 = \{(x, y, z) | -L \leq x \leq L, y = -A, z = h\}$$

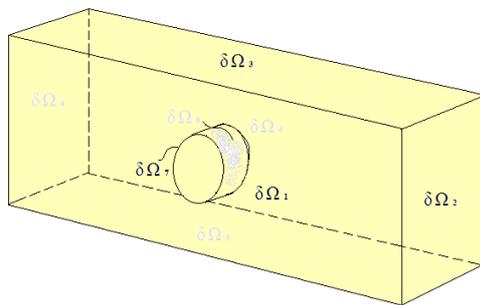


Figura 2.7 Cuerpo Ω con sus fronteras $\partial\Omega_n$.

$$\partial\Omega_6 = \{(x, y, z) | -L \leq x \leq L, -A \leq y \leq A, z = h\}$$

$$\partial\Omega_7 = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 = a^2, 0 \leq z \leq c_1\}$$

$$\partial\Omega_8 = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + (z - c_1)^2 = r^2, c_1 \leq z \leq c_1 + r\}$$

En el caso concreto, los parámetros tienen los siguientes valores:

$$2L = 60 \text{ [mm]} ; 2A = 26 \text{ [mm]} ; 2a = 5 \text{ [mm]} ; 2h = 9.2 \text{ [mm]} ; r = 1.6 \text{ [mm]}.$$

2.9 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Se requiere encontrar el estado de esfuerzos en el recorrido y la raíz del orificio ciego en la placa que se muestra en la Figura 2.6. La importancia de obtener el estado de esfuerzos en la raíz radica en: 1) la zona de transición (Zona T, Figura 2.5) que se tiene en la raíz del orificio origina una concentración de esfuerzo de consideración. En el punto T, la derivada vale cero; 2) no se tiene registro acerca de los esfuerzos que se generan en estas zonas.

Dentro de los variados métodos experimentales que se podrían utilizar, se hace uso de la fotoelasticidad. Dentro de los datos que se pueden obtener por este método, los que interesan son las franjas isocromáticas. Las franjas isocromáticas son regiones (del mismo color, de ahí su nombre) donde la diferencia de esfuerzos principales es constante. La ecuación 2.20 muestra esta diferencia de esfuerzos principales, los cuales están en función del número de franja N , del espesor del modelo h y del valor de franja f_{σ} .

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{Nf_{\sigma}}{h} \quad (2.20)$$

Sin embargo, en la frontera, ya sea σ_1 o σ_2 valen cero, esto debido a que no existe ningún esfuerzo aplicado en la frontera y no se cumplirían las ecuaciones de equilibrio. Por lo tanto el esfuerzo principal se obtiene de la ecuación 2.21.

$$\sigma_1 = \frac{Nf_{\sigma}}{h} \quad (2.21)$$

Estos patrones de franja, que representan la diferencia de esfuerzos principales, de qué manera ayudan a comprender qué está pasando internamente en el cuerpo. Qué significan estas franjas. En qué sentido la fuerza que se le aplica al cuerpo está afectando en las franjas.Cuál es la relación entre el campo tensorial de esfuerzos y la

fuerza que se le aplica. Es conveniente pues, explicar el por qué se están obteniendo estos datos y de qué manera se introducen en la mecánica del medio continuo para su correcto uso. Para esto, se partirá de la hipótesis de Cauchy [2] de donde se tomará la notación directa empleada por Gurtin [2] para explicar el cómo se relacionan la densidad de fuerza de superficie que se le aplica a un cuerpo y la fuerza interna, representada por un campo tensorial, que se genera internamente en el cuerpo. Si ζ es una superficie orientada en Ω_t con la normal unitaria positiva \mathbf{n} en \mathbf{x} , entonces $\mathfrak{s}(\mathbf{n}_{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, t)$ es la fuerza, por unidad de área, ejercida del otro lado de ζ en el material del lado negativo de ζ por el material del lado positivo.

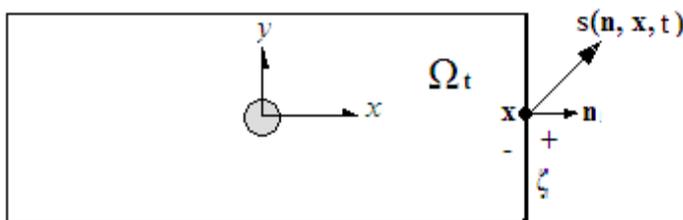


Figura 2.8

Si en la configuración dada en la Fig. 2.6, se asume un estado a tensión pura en la placa, la fuerza $\mathfrak{s}(\mathbf{n}_{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\sigma}_o$ coincide con el vector unitario $\mathbf{n}_{\mathbf{x}}$, dado que sólo se considera el esfuerzo **normal** a la superficie ζ . En efecto, para puntos en la frontera de Ω_t , $\mathfrak{s}(\mathbf{n}_{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, t)$ —con \mathbf{n} la normal unitaria hacia fuera de $\partial\Omega_t$ en \mathbf{x} — da la fuerza de superficie, por unidad de área, aplicada en el cuerpo por el ambiente. Esta fuerza comúnmente se le llama fuerza de tracción o de contacto y repercute internamente en el cuerpo produciendo una fuerza interna, la que llamamos esfuerzo. Este esfuerzo viene dado por un campo tensorial espacial en cada punto y en cada tiempo. Es decir,

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) \tag{a}$$

En materiales elásticos, la respuesta del material depende de la ecuación constitutiva (b)

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{T}^*(\mathbf{F}(\mathbb{p}, t), \mathbb{p}) \tag{b}$$

Los esfuerzos que se generen dentro del cuerpo dependen de cómo \mathbf{F} deforme al material.

La fotoelasticidad proporciona de manera óptica franjas isocromáticas. Mediante un conteo de estas, conociendo el valor de franja (lo proporciona el mismo fabricante de la lámina) y el espesor del modelo, se obtiene el esfuerzo en cada punto \mathbf{x} y tiempo t que

se requiera. Estos valores pueden agruparse y ser representados por medio de un campo tensorial \mathbf{T} de la siguiente forma,

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} = \frac{Nf_\sigma}{h_1} \quad (c)$$

Por tanto los valores obtenidos por la fotoelasticidad corresponden a los **valores propios** del campo tensorial \mathbf{T} . Es la manera más eficiente de poder caracterizar al estado de esfuerzos en un punto \mathbf{x} . Si se conocen los esfuerzos principales^{***}, se pueden conocer las direcciones principales. Esta dirección principal puede estar representada por un vector

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad (d)$$

Se tiene pues que el tensor (c) aplicado al vector (d)

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t)\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \sigma_2 & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \sigma_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = s(\mathbf{v}, \mathbf{x}, t) \quad (e)$$

Recordando que cuando se cumple

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t)\mathbf{v} = \sigma(\mathbf{x}, t)\mathbf{v}, \quad \mathbf{v} = |\mathbf{v}|, \quad (1)$$

se deduce que σ es un esfuerzo principal y \mathbf{v} es una dirección principal. Dado que el campo tensorial \mathbf{T} es simétrico, existen tres vectores propios mutuamente perpendiculares, y sus correspondientes tres valores propios [2, p. 105, 6]. En la figura 2.9 se muestran las franjas isocromáticas formadas alrededor cercanas al punto de contacto \mathbf{x} de la fuerza aplica $\mathbf{T}(\mathbf{x}, t)\mathbf{n}_x$.

Las franjas (ilustradas de forma delgada para una mejor visualización) representan zonas donde la diferencia de esfuerzos principales es constante. El símbolo σ representa uno de esos esfuerzos principales y \mathbf{v} es la dirección principal (vector propio) correspondiente al esfuerzo σ .

*** Definición: Sea $\mathbf{T}=\mathbf{T}(\mathbf{x},t)$ el esfuerzo en un lugar y tiempo particular. Si

$$\mathbf{T}\mathbf{n}=\sigma\mathbf{n}, \quad |\mathbf{n}|=1,$$

entonces σ es un esfuerzo principal y \mathbf{n} es la dirección principal [2, p. 105].

Se les llama plano principal al plano donde los esfuerzos cortantes se desvanecen, y únicamente se tiene el esfuerzo normal. A este esfuerzo junto con su dirección se les denomina esfuerzo principal y dirección principal.

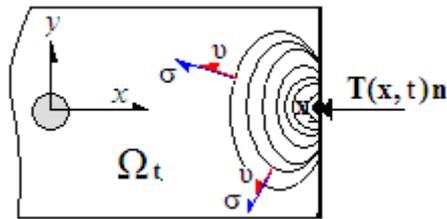


Figura 2.9 Esfuerzos y direcciones principales (azul y rojo) que son representados por los valores y vectores propios; en 2D.

Sin embargo, si no se conoce la configuración espacial (o deformada), no se pueden utilizar las ecuaciones (b) y (2.10). En la sección 2.6 se menciona cómo se pasa al tensor de Cauchy \mathbf{T} a la configuración material \mathbf{S} . Al tensor \mathbf{S} se le conoce como el tensor de esfuerzo Piola-Kirchhoff. Reconstruyendo la ecuación constitutiva (b) en términos materiales se tiene

$$\mathbf{S}(\mathbb{p}, t) = \mathbf{S}^*(\mathbf{F}(\mathbb{p}, t), \mathbb{p}) \tag{2.22}$$

La ecuación 2.22 significa que el campo tensorial de esfuerzos es solamente una función del gradiente de deformación del movimiento y de los puntos de la configuración de referencia o material [6]. El campo tensorial de esfuerzos mide, por así decirlo, la potencialidad del cuerpo ante fuerzas externas.

Después de hacer álgebra, considerar desplazamientos infinitesimales, linealizar a \mathbf{S} y convertir al tensor Piola-Kirchhoff en un tensor simétrico bajo la teoría de la elasticidad lineal, se tiene que para materiales isotrópicos y homogéneos el tensor de Piola-Kirchhoff queda representado por la ecuación 2.7.

Como se comentó en la sección 2.6, se tienen tres ecuaciones que rigen la teoría de la elasticidad lineal: la ecuación de movimiento (2.10), la ecuación constitutiva (2.7) y la compatibilidad cinemática (2.8). Cuando se cumplen estas condiciones se dice que está ante un problema de elasticidad. Si en un problema se tienen los desplazamientos, entonces ocupando la definición (2.7) se obtiene el tensor de deformaciones infinitesimal \mathbf{E} , y ocupando después la ec. (2.6) se obtiene el tensor de esfuerzos de Piola-Kirchhoff \mathbf{S} . Recordar que para un campo vectorial de desplazamientos

$$\mathbf{u}(x, y, z) = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{u}}(x, y, z) \\ \bar{\mathbf{v}}(x, y, z) \\ \bar{\mathbf{w}}(x, y, z) \end{pmatrix}, \quad \nabla \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Adicional al cumplimiento de las tres ecuaciones de la elasticidad lineal, el problema debe cumplir con lo que se conoce como las condiciones de frontera y las cuales se definen a continuación.

2.9.1 Condiciones de Frontera

Importancia. En Mecánica al igual que en el problema específico expuesto en el presente trabajo, nos enfrentamos en particular a ecuaciones diferenciales de segundo orden. Recordemos que para caracterizar el estado mecánico de una partícula partimos de:

- i) Posición, y
- ii) Velocidad.

Y tomando como premisa que $\ddot{x} = f(\dot{x}, x)$.

La función f está íntimamente ligada a su comportamiento local. La manera en cómo cambia no es arbitraria. El comportamiento local está íntimamente ligado con lo que pasa globalmente, y como se sabe las condiciones iniciales y de frontera son condiciones globales.

Una ecuación diferencial tiene una infinidad de soluciones; por ejemplo

$$\frac{du}{dx} = f(x) \quad (2.23)$$

es una ecuación diferencial de primer orden cuya solución tiene la forma

$$\mathbf{u} = \int f(x)dx + C = F(x) + C \quad (2.24)$$

donde $F(x)$ es cualquier integral indefinida de $f(x)$. La constante arbitraria C es llamada constante de integración y es esta constante la que le da infinidad de soluciones a \mathbf{u} , ya que al derivar cualquier función constante se obtiene como único valor el mismo elemento en el rango de la función “derivada”: la función lineal cero (0). Esta constante de integración no aparece en (2.23) por lo que se debe recuperar del exterior de la ecuación como una “restricción” adicional sobre \mathbf{u} . Gracias al teorema de Gauss, al teorema de Green se sabe que no hace falta dar las condiciones iniciales en todos los

puntos del cuerpo Ω , sino que basta dar los valores en la frontera $\partial\Omega$ del cuerpo. Por lo tanto, por el teorema de Existencia para ecuaciones diferenciales de primer orden se tiene que tener una función conocida g tal que

$$\mathbf{u}(\mathbb{p}) = g(\mathbb{p}), \quad \text{para todo } \mathbb{p} \in \partial\Omega \quad (2.25)$$

Esta condición (2.25) se le conoce como condición Dirichlet sobre la frontera.

De la misma forma que se procedió y razonó para las ecuaciones de primer orden se procederá con las de segundo orden. Se había dicho que al derivar una función \mathbf{u} se perdía una constante (función constante) y debía obtenerse esa información del exterior de la función. Ahora se requiere una función \mathbf{u} que cumpla con

$$\frac{d^2\mathbf{u}}{dx^2} = f(\mathbf{u}', \mathbf{u}) \quad (2.26)$$

Dado que se deriva dos veces a \mathbf{u} se pierde no sólo información de \mathbf{u} sino también de \mathbf{u}' y como se sabe al derivar una función escalar, $\nabla\mathbf{u}$, se obtiene una función vectorial. Por lo tanto, no sólo se pierden funciones constantes escalares, sino también funciones constantes vectoriales. Tal y como se requirió para el primer caso, es esencial incluir esta información en la frontera $\partial\Omega$ y que cumpla con las siguientes tres condiciones:

- i) dependa de la función \mathbf{u} ,
- ii) esté representada en forma vectorial, y
- iii) esté definida en la frontera.

Sea \mathbf{u} una función vectorial. Su derivada direccional en un punto \mathbb{p} en la dirección al campo vectorial de vectores normales (hacia fuera) en la frontera $\partial\Omega$ está dada por

$$\frac{\partial\mathbf{u}(\mathbb{p})}{\partial\mathbf{n}} = (\text{grad } \mathbf{u}(\mathbb{p})|\mathbf{n}) = (\nabla\mathbf{u}(\mathbb{p})|\mathbf{n}) \quad (2.27)$$

donde $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$, y $\mathcal{N} = \{\mathbf{n} \mid \|\mathbf{n}\| = 1\}$.

La condición de frontera necesaria para dar un campo vectorial \mathbf{v} sobre $\partial\Omega$ recibe el nombre de condición von Neumann. Se asume pues que el campo de vectores normales es igual a la función vectorial conocida \mathbf{v} :

$$\frac{\partial\mathbf{u}(\mathbb{p})}{\partial\mathbf{n}} = \mathbf{v}(\mathbb{p}) \quad (2.28)$$

donde $\mathbb{p} \in \partial\Omega$, y $\mathbf{v}: \partial\Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Condiciones de Frontera en el cuerpo Ω . Ocupando las figuras 2.6 y 2.7 para definir las condiciones existentes en la frontera se tiene:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial \mathbf{u}(\mathbb{p})}{\partial \mathbf{n}} \right)_{\partial \Omega_2} &= \sigma_o \\ \left(\frac{\partial \mathbf{u}(\mathbb{p})}{\partial \mathbf{n}} \right)_{\partial \Omega_4} &= -\sigma_o \end{aligned} \right\} \quad (2.29)$$

En la figura 2.6 se muestra las sollicitaciones a la que esta sometida la placa: una carga σ_o positiva (dirección del eje x [+]), y una carga σ_o negativa (dirección en el eje x [-]) las cuales se representan en las condiciones de frontera (2.29₁ y 2.29₂) respectivamente.

Las restricciones de desplazamiento aplicadas en la frontera $\partial \Omega$ del cuerpo se ocuparon para evitar cualquier desplazamiento sobre los ejes y y z en las fronteras 1, 3, 5 y 6.

Esta restricción queda representada como

$$\mathbf{u}(\mathbb{p}) = \mathbf{u}(\mathbb{p})[x], \quad \text{en } \partial \Omega_{1,3,5,6} \quad (2.30)$$

El problema se reduce entonces a encontrar una función \mathbf{u} que cumpla con las ecuaciones de la elasticidad lineal:

- i) la ecuación de movimiento (2.10),
- ii) la ecuación constitutiva (2.7), y
- iii) la compatibilidad cinemática (2.8).

Y junto con ellas, se tiene que cumplir con las condiciones de frontera (2.29 y 2.30).

CAPITULO III. DISEÑO DEL EXPERIMENTO

Introducción. Por ser una de las aportaciones del presente trabajo, se detallarán todos los elementos estructurales del experimento. Como se menciona en Carrera [6]: “El experimento constituye el método más importante del conocimiento empírico”. Se ubican como principales elementos estructurales del experimento: 1) la finalidad del experimento; 2) el objeto de experimentación; 3) los medios experimentales; y 4) la sollicitación que se realiza de forma directa en el experimento. La meta será el contestar el **qué** es lo que se está haciendo. Construir una metodología del diseño experimental a partir de los requerimientos que van surgiendo en el largo proceso del diseño del experimento. El utilizar los resultados metodológicamente es lo que brindará al experimentalista la posibilidad de generar mejores diseños que se adecuen al equipo presente en el laboratorio.

3.1 Objetivos del experimento. El mecanismo de concentración de esfuerzos ha ido quedando claro: cualquier cambio abrupto de geometría en un material sometido a ciertas solicitaciones debidas crea una concentración. Por ejemplo, en escalones de concreto se inserta una solera de aluminio o acero en el ‘canto’. Es una zona en la que debido a un cambio geométrico brusco se concentran la mayor parte de los esfuerzos al pisar.

El método del barrenado, ampliamente utilizado para obtención de esfuerzos residuales, es una prueba destructiva, debido a que se perfora un orificio ciego en el material del elemento estructural. Esta variedad de orificio circular es la que se analiza en el presente trabajo. La concentración de esfuerzos en la periferia, el recorrido y en la raíz del orificio ciego es tan alta que debe considerarse para su estudio (Figura 3.0). Aunque se cree que una grieta se origina en planos o ‘caras’ accesibles visualmente al técnico encargado de revisar posibles fallas en un elemento de máquina o estructural, los resultados obtenidos sustentan la hipótesis de que esas grietas pueden surgir en otras partes.

Hipótesis. El estado de esfuerzos en la raíz del orificio ciego y en el recorrido son zonas donde pueden generarse grietas debido a una considerable concentración de esfuerzos.

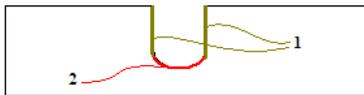


Figura 3.0 El recorrido del orificio (1) y la raíz (2) son las zonas consideradas en el trabajo.

Esta situación se incrementa cuando el orificio ciego tiene acabados diferentes a los de una broca de punta redonda. Se someterá a estudio una placa delgada con orificio circular ciego bajo una sollicitación a tensión *casi pura*. Se observará su comportamiento en planos principales, se confrontarán estos resultados con otros obtenidos numéricamente y por último se manejarán diferentes parámetros de diseño, como la geometría de la raíz, profundidad y diámetro del orificio, ubicación del orificio, entre las más comunes.

3.1.1 “No Constante”. Para producir un estado de tensión puro se requiere de herramientas de sujeción y celdas de carga para geometrías específicas. Una celda de carga diseñada para aplicar tensión en placas delgadas rectangulares no necesariamente sirve para aplicar la misma sollicitación en una barra redonda. Tanto las herramientas de sujeción

como las celdas de carga se mandan diseñar e instrumentar según la prueba a la que se requiere someter el modelo. En el laboratorio de mecánica experimental del posgrado en Ingeniería Mecánica, UNAM, donde se llevó a cabo este proyecto, la única celda de carga disponible esta diseñada e instrumentada para producir compresión en los modelos experimentales. Por ello el Dr. Luis A. Ferrer propuso que se trabajara con lo que propiamente se puede denominar un “modelo experimental” de aplicación de tensión a un cuerpo de material fotoelástico con la geometría requerida.

Se requería de ese modelo físico que se adaptase a la celda de carga y que pudiese reflejar de manera eficaz el estado de esfuerzos en la placa. La foto 3.1 muestra el mecanismo existente en el polariscopio circular para producir una carga a compresión. Se indican con flechas las distintas partes del mecanismo.



Figura 3.1 Arreglo experimental con las siguientes componentes: A) Celda de carga, instrumentada en la parte central por medio de tres strain gages; B) Placa modelo de resina epóxica; C) Tornillo sinfín para aplicar la carga a compresión.

También se produjeron las herramientas de sujeción que restrinjan de manera óptima al modelo físico sin producir otro tipo de restricción, fuerza o par.

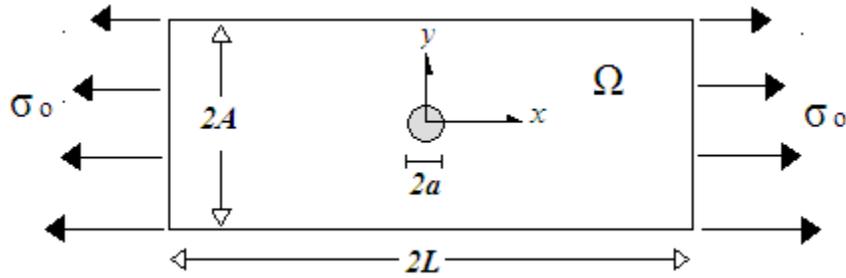


Figura 3.1 Placa sometida a un estado de tensión puro.

Una viga a flexión pura produce una distribución de esfuerzos como se ilustra en la figura 3.2. Por tanto, se puede producir una zona de tensión (abajo del eje neutro) utilizando un mecanismo que produzca una carga concentrada en la parte central de la placa. Se obtiene un estado de esfuerzos que tiene la forma de un gradiente con las siguientes características:

1. Un esfuerzo máximo a compresión en la parte superior de la viga, y va bajando hasta llegar a cero en el eje neutro.
2. Partiendo del eje neutro, un valor de cero a un máximo a tensión en la parte inferior de la viga.

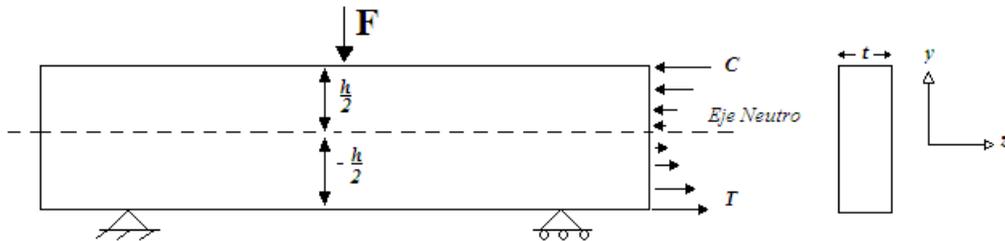


Figura 3.2 Placa sometida a flexión. Parte superior al eje neutro a compresión C y la parte inferior al eje neutro a una tensión T .

Esta configuración se reprodujo en el polariscopio. La celda de carga produce una concentración de esfuerzos en el punto de contacto con la placa. Esto se traduce en una producción de franjas isocromáticas en la periferia de este punto de contacto (Foto 3.2). Para destacar visualmente la zona de interés, se toma la decisión de maquinar una ranura en la placa a lo largo de l . Se puede observar en la foto 3.2 como se concentran las franjas en la zona donde se aplica la carga (zona A).

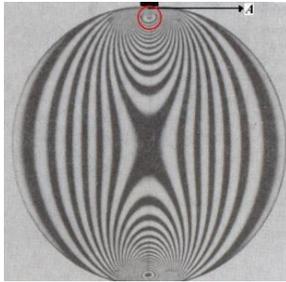


Foto 3.2 Concentración de franjas en A.

Una vez hecha la ranura, se barrenan orificios circulares ciegos con profundidades de $\frac{1}{8}$ ", $\frac{1}{4}$ ", $\frac{5}{16}$ ". Además de ser medidas comerciales, éstas profundidades no superan la distancia ($>0.8t$). La figura 3.3 muestra la geometría final de la placa modelo a montar en el polariscopio circular.

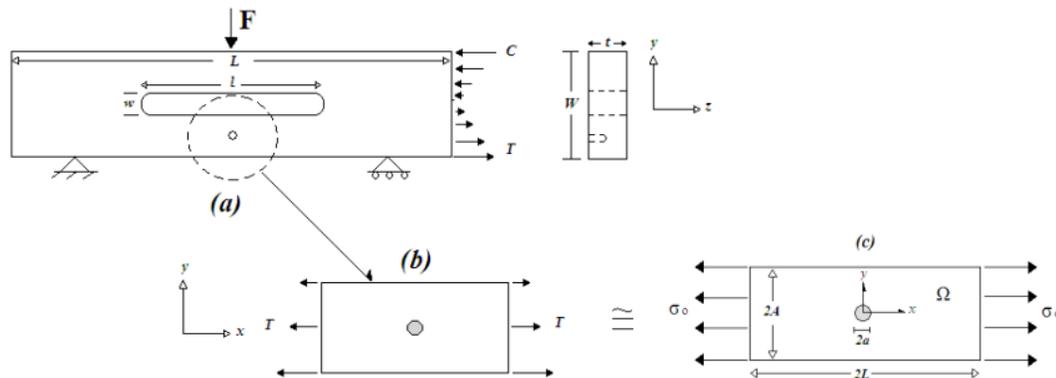


Figura 3.3 Esquema de la geometría final propuesta por el equipo de trabajo para reproducir el estado de esfuerzos de la placa problema, resolviendo así la limitante instrumental.

El color oscuro del orificio circular es para indicar que es ‘ciego’.

De ahora en adelante se referirá al orificio circular ciego como orificio.

De la figura 3.3 se pueden deducir ciertos aspectos:

1. Aprovechando el principio de St. Venant^{†††}, se puede considerar que la placa (Figura 3.3b) es estáticamente equivalente a la placa de la derecha (Figura 3.3c).

^{†††} El principio de St. Venant brevemente enuncia: Si un sistema de fuerzas que actúan en una porción de la frontera es remplazado por un sistema de fuerzas estáticamente equivalente en la misma porción de la frontera, entonces los esfuerzos, deformaciones en partes del cuerpo suficientemente alejados de esta porción de la frontera permanecen aproximadamente iguales.

2. Los esfuerzos a tensión T , no están uniformemente distribuidos, sino que varían linealmente a lo largo de h (partiendo de un valor de $\pm 0.3T$ hasta $1.0T$). Es aquí donde surge el término “casi puro”.
3. Como se mostrará en los resultados numéricos del capítulo V, la diferencia cuantitativa⁺⁺⁺ del estado de esfuerzos y deformaciones en la periferia de la raíz del orificio entre la placa (Figura 3.3b y 3.3c) es de $\pm 1.05\%$.

3.2 Objeto de experimentación. Una correcta selección del material es importante según la clase de datos a obtener y el tipo de instrumentación a utilizar. Dado que se utiliza la fotoelasticidad, se requiere de un material transparente que permita el paso de luz difusa a través de él.

Como opciones se tienen: 1) Uretano; 2) Resina epóxica; 3) Policarbonato; 4) Acrílico, entre las más importantes que se producen actualmente. Todos los materiales enumerados son birrefringentes, son relativamente fáciles de conseguir en el mercado, tienen muy buen acabado, pero sólo las resinas epóxicas tienen la cualidad de ‘congelar’ los esfuerzos una vez retirada la carga sobre el modelo experimental (Véase capítulo I).

En el laboratorio de mecánica experimental se disponía de:

1. Polariscopio circular.
2. Cámara fotográfica digital.
3. Otros instrumentos (trípode, mordazas, fuente de luz)

No se disponía de:

1. Horno con temperatura controlada.
2. Bomba de vacío.
3. Desecador.
4. Compresor.
5. Moldes.

La placa de resina epóxica fue comprada en E.U. ya que no se produce aquí mismo. La ficha técnica de la placa se muestra en el apéndice 2.

⁺⁺⁺ Se hace mención de la diferencia cuantitativa dado que no existe una diferencia cualitativa perceptible entre las franjas producidas en ambas configuraciones de placa.

3.3 Medios experimentales. En el capítulo II dentro del marco teórico se explica el método del “stress freezing”. Su funcionamiento, aplicaciones, herramientas necesarias para su completa función, son descritas. A continuación se enumeran las herramientas necesarias para obtener de los cortes principales: la visualización de franjas y por ende el estado de esfuerzos en la periferia del orificio.

1. El polariscopio circular es el principal instrumento utilizado para este tipo de análisis. Consiste en un arreglo de lentes polarizadores (analizador y polarizador), 2 lentes de de cuarto de onda que transforman la luz plana en luz circular, y una fuente de luz blanca y/o monocromática. La foto 3.3 muestra el polariscopio empleado en este proyecto.
2. Dado que no se disponía de un horno de temperatura controlada para elevar la temperatura del modelo a una razón de $\pm \frac{10^{\circ}\text{C}}{\text{hr}}$, se compró un horno comercial típico (30 x 25 x 17) [cm] al que se le adaptó un controlador de temperatura en la perilla de temperatura del horno. La instalación tiene una precisión aceptable, aunque menor que la de un equipo profesional.
Como ventaja está su rentabilidad y costo. El controlador térmico recomendado por el equipo experimental es de la marca WATLOW ELECTRICAL INST. , código HC-2320-HDR247-LCCS. El termopar depende de las dimensiones del horno comercial obtenido.
3. Se necesita enfriar el modelo a una razón de $\pm \frac{10^{\circ}\text{C}}{\text{hr}}$ una vez montado y cargado en el polariscopio. Esto se logra aislando del ambiente las herramientas de sujeción y la celda de carga mediante una caja hermética, con vidrio en las paredes laterales, y con un controlador térmico. Este sistema se construye e instrumenta a la medida del polariscopio para aplicaciones puramente 3D.
Se adaptaron en el travesaño y los pilares del polariscopio resistencias para evitar que la temperatura del modelo bajara bruscamente y causara esfuerzos residuales.
4. Cámara fotográfica profesional o semi-profesional. Se usó una cámara NIKON digital modelo D40 con lente DX SWM ED IF Aspherical ∞ -0.45m/1.48ft $\text{Ø}67$.

Los siguientes procedimientos son necesarios realizarse dentro del laboratorio y de preferencia por técnicos expertos en el manejo de resinas y acrílicos.

1. En el caso presente los cortes se efectuaron en el Laboratorio de Mecánica Computacional, del edificio de posgrado de la Facultad de Ingeniería por el M.I. Jesús Trenado y el autor. Se cortó mediante una fresa, con un cortador de 4 gavilanes, con velocidad del husillo por arriba de las 3500 revoluciones, y avance de 10 mm/min., para evitar calentamiento. Se refrigeró con aire y no con algún líquido, ya que la resina epóxica es un material higroscópico. Sin embargo, existen otras opciones para llevar a cabo los cortes como se menciona en Johnson [30].
2. Para un mejor acabado superficial después del corte se usó pasta de diamante para pulir la superficie lo que se llevó a cabo de la manera adecuada para no afectar las propiedades mecánicas del material.

3.4 Obtención de los cortes principales. Si el patrón de los esfuerzos congelados en un modelo fotoelástico tridimensional es observado en el polariscopio, el patrón de franja resultante no puede ser interpretado, ya que la luz que pasa a través del espesor del modelo integra la diferencia de esfuerzos ($\sigma_1' - \sigma_2'$) sobre la longitud de la trayectoria de la luz por lo que poco puede concluirse del estado de esfuerzos en cualquier punto interior [1, pp. 457].

Para resolver esta dificultad, el modelo 3D es cortado para remover planos de interés. Estos planos pueden ser examinados individualmente para determinar el estado de esfuerzos en un plano o corte particular (Véase el capítulo I).

En estudios de este tipo se asume que el corte es suficientemente delgado en relación al tamaño del modelo. Esto garantiza que los esfuerzos no cambien en magnitud o dirección a lo largo del espesor del corte.

3.4.1 Cortes principales. Es común que los modelos tridimensionales contengan planos de simetría u otros planos conocidos como principales secundarios^{§§§}. En la placa se tienen dos planos principales secundarios. El primero de ellos es en el plano xy , y será el corte

^{§§§} Se les llama secundarios para no tener confusión respecto a los esfuerzos principales en problemas 2D.

longitudinal. El segundo es en el plano yz , y será el corte transversal. Existe pues una relación sumamente práctica entre los cortes y la teoría. La figura 3.4 ilustra dichos cortes.

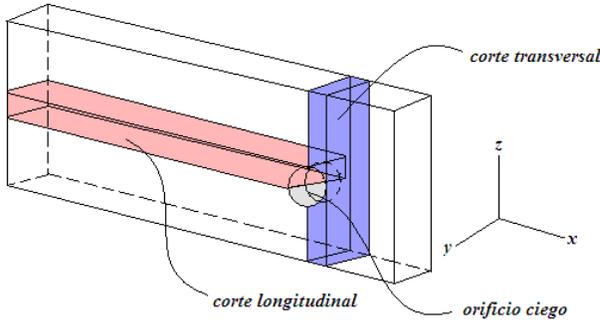


Figura 3.4 Cortes realizados a la placa modelo mostrando los cortes que físicamente se obtendrán para su estudio posterior en el polariscopio.

En Teoría de Elasticidad los esfuerzos y direcciones principales se definen como los valores y vectores propios respectivamente, del tensor \mathbf{T} que se obtiene al evaluar el campo tensorial de esfuerzos en el punto espacial \mathbf{x}_0 bajo análisis. Dado que \mathbf{T} es simétrico [1, pp. 101], se sabe que existe un sistema de coordenadas, en el caso 3D, definido por un origen \mathfrak{O} , en este caso se establece el punto espacial \mathbf{x}_0 bajo análisis como origen, y por una base ortonormal de $\mathbb{R}^3, \{e_1, e_2, e_3\}$. En ese sistema de coordenadas el origen y dos de esos vectores definen tres planos, llamados planos principales, que denotamos por

$$\begin{aligned} P_1 &= \{\mathfrak{O}; e_2, e_3\} \\ P_2 &= \{\mathfrak{O}; e_1, e_3\} \\ P_3 &= \{\mathfrak{O}; e_1, e_2\} \end{aligned}$$

Por construcción, e_1 es el vector normal al plano P_1 en el punto espacial $\mathbf{x}_0 = \mathfrak{O}$; e_2 es el vector normal a P_2 en ese punto y e_3 el vector normal al plano P_3 en \mathbf{x} . Por lo tanto, al aplicar \mathbf{T} a e_i , $\mathbf{T}e_i$, el resultado será el mismo vector e_i multiplicado por el valor propio λ_i correspondiente:

$$\mathbf{T}e_i = \lambda_i e_i$$

y la proyección de $\mathbf{T}e_i$ en el plano P_i es el vector cero $\mathbf{0}$.

Interpretación Física. Si P_i es el plano tangente a la frontera de una parte de un cuerpo \mathfrak{B} , el esfuerzo a que está sometido \mathfrak{B} en \mathbf{x}_0 no tiene componentes tangenciales, es decir, no se producen esfuerzos cortantes.

Tómese como ejemplo el corte transversal que se muestra aislado en la figura 3.5. Los esfuerzos producidos en la placa antes de hacer el corte están a tensión. Son esfuerzos normales, ortogonales al plano yz .

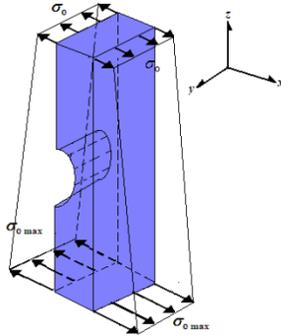


Figura 3.5 Corte transversal aislado del modelo experimental. El esfuerzo normal σ_n está distribuido de manera uniforme en ambas caras del plano yz .

De la figura 3.5 se observa que sólo existen esfuerzos normales y no cortantes. Sin embargo, esto no es del todo cierto. La configuración experimental de la figura 3.3 para producir tensión en el dominio del orificio tiene un inconveniente. Una fuerza puntual aplicada de esa manera produce esfuerzos cortantes. Sin embargo, la magnitud de esta componente es casi nula en comparación al esfuerzo normal. Esto se observa en la figura 3.6. La magnitud de cada esfuerzo está en relación con la norma del vector. Por tanto, se observa que existe una proporción aproximada de $\approx 15:1$ entre la componente normal y cortante.

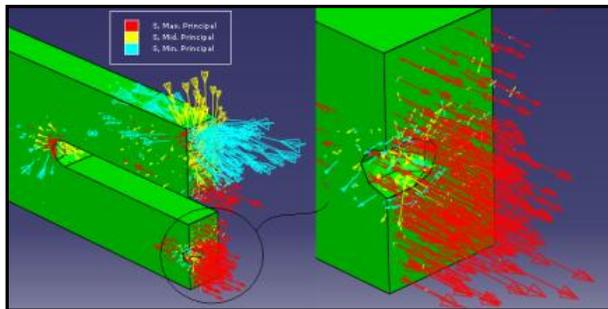


Figura 3.6 Corte transversal de la placa en el programa ABAQUS.

Es común que los modelos tridimensionales contengan planos de simetría u otros planos que son principales. El plano transversal y el longitudinal presentados en la figura 3.5 son planos de simetría. Estos planos son también conocidos como planos principales. Es razonable pues el seccionar el modelo tridimensional de la placa para obtener los cortes longitudinal y transversal. Si los cortes son examinados en el polariscopio a incidencia

normal, el patrón de franjas resultantes proveerá los siguientes datos. Para el corte transversal

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{Nf_\sigma}{h} \quad (3.1)$$

donde $(\sigma_1 - \sigma_2) = (\sigma_\theta - \sigma_r)$. En la periferia de la raíz del orificio se tiene que

$$\sigma_r = 0, \quad \sigma_\theta = \frac{Nf_\sigma}{h} \quad (3.2)$$

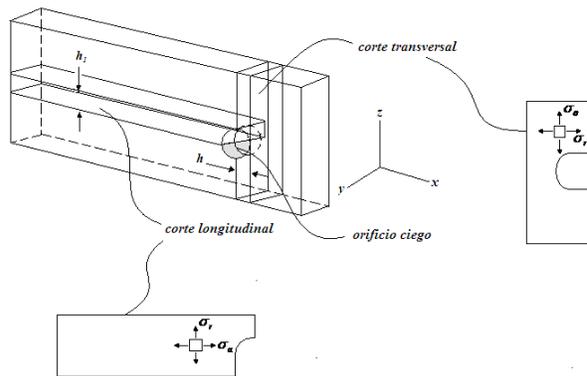


Figura 3.7 Cortes de l modelo experimental a lo largo de los planos de esfuerzo principal.

Para el corte longitudinal se tiene

$$\sigma_r - \sigma_a = \frac{Nf_\sigma}{h_1} \quad (3.3)$$

En la periferia de la raíz del orificio se tiene

$$\sigma_r = 0, \quad \sigma_a = \frac{Nf_\sigma}{h_1} \quad (3.4)$$

Los cortes transversal y longitudinal presentados en la figura 3.7 indican las direcciones de los esfuerzos principales en el plano. Las igualdades 3.1 y 3.3 establecen que la diferencia de los esfuerzos principales en un modelo 2D pueden determinarse si el retardo relativo N puede ser medido. El valor de franja f_σ es proporcionado por el proveedor del material. El número de franja N se obtiene haciendo conteo de franjas tal y cómo se explica en el capítulo dos.

3.5 Resultados: gráficas y tablas. Una vez obtenidos los resultados cuantitativos utilizando las ecuaciones que sean requeridas, se plasman para uso práctico. Una de las respuestas buscadas al momento de realizar un experimento en ingeniería es el poder trasladar los datos obtenidos a tablas y gráficas que puedan ser utilizadas por el ingeniero. Una manera útil de llevar a cabo este proceso, y utilizada por el equipo de trabajo, es la siguiente.

1. Una vez que se tiene el corte longitudinal o transversal, se observa a incidencia normal en el polariscopio circular para realizar el conteo de franjas.
2. Obteniendo el valor de franja N mediante el conteo de franjas, se ocupa la igualdad 3.2 o 3.4 según el corte analizado, y se obtiene el valor del esfuerzo principal (radial o tangencial) en el punto de interés.

Para mayor claridad se analiza la Fig. 3.8, la cual corresponde a un corte transversal. Los puntos A muestran un cambio de orden de franja con respecto a los puntos B de medio orden. Conforme nos vamos acercando a la raíz del orificio, la concentración de esfuerzo va aumentando. Si en el conteo de franjas da $A=1\frac{1}{2}$, entonces $B=2$.

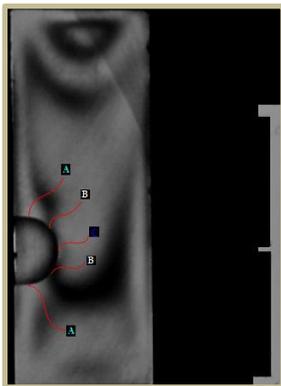


Figura 3.8 Corte transversal visto en el polariscopio en Campo Claro. La escala es de 20[mm].

3. Una vez que se obtienen los esfuerzos principales en toda la periferia del orificio ciego, se grafica.
4. Las tablas encontradas en la mayoría de libros hacen mención de la concentración de esfuerzos respecto al tipo de carga que se le aplica al elemento en estudio. Aprovechando el tipo de geometría que se tiene en el presente trabajo, se puede agregar también el factor de concentración de esfuerzos en función de la carga

aplicada, y del punto de interés. Es decir, el factor K en función del ángulo φ que se tiene con respecto a la horizontal.

3.6 *Clasificación de las pruebas. Una vez terminada la etapa de corte de los modelos experimentales, se constató que la ausencia de una extensa clasificación en toda la literatura del análisis experimental de esfuerzos hace que se cometan errores los cuales van desde no etiquetar con los datos correctos el modelo hasta no saber bajo que condiciones de frontera fueron hechas las pruebas.

Por tanto se tiene un poco de libertad para desarrollar un estándar respecto a la clasificación de la prueba.

Dentro de los posibles datos que pueden ser señalados en la clasificación de la prueba, se llegó a la conclusión de que los siguientes datos son los determinantes para este tipo de prueba:

1. Material
2. Tipo de sollicitación (tensión, compresión, torsión, etc)
3. Sollicitación efectuada (magnitud)
4. Profundidad del orificio
5. Diámetro del orificio
6. Largo/Alto de la placa
7. Espesor de la placa

La fig. 3.9 muestra estos siete puntos. Revisando las referencias, es conveniente tomar en consideración que siempre se ocupa la primer letra de cada dato, según sea el caso, y cuando se trata de escalares se usan los necesarios.

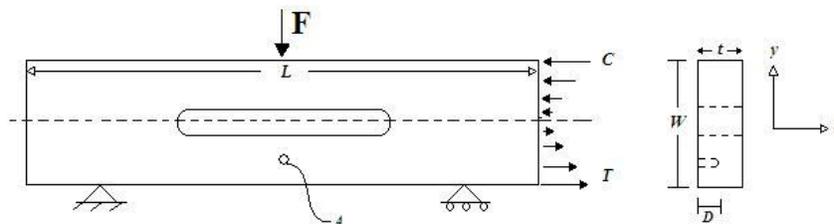


Figura 3.9 Placa para clasificación de datos.

Para el caso donde:

$$F = 100 \text{ [kg]}$$

$$L = 300 \text{ [mm]}$$

$$W = 30 \text{ [mm]}$$

$$t = 10 \text{ [mm]}$$

$$D = 6 \text{ [mm]}$$

Se tiene pues una clasificación con la siguiente forma:

Material	Tipo de Solicitación	Magnitud	Profundidad	Diámetro	Largo/Alto	Espesor
R	T	100	D6	A3	10:1	t10

De forma compacta, la información se proporciona como: **R-T100-D6-A3/10:1/t10**

Para el caso del tipo de solicitud, se considera que si se aplica de manera como aparece en la fig. 3.9, el esfuerzo que se produce en la parte inferior al eje neutro está a tensión, y por esa razón se designa con la letra **T**.

3.7 Evaluación de los datos [6]. Los esfuerzos y direcciones principales son valores que pueden ser obtenidos dentro del marco de la teoría de fotoelasticidad. Estos resultados son representados dentro del álgebra lineal por valores y vectores propios, respectivamente, y sirven para obtener el tensor de esfuerzo de Piola-Kirchhoff, como se ha mencionado en el planteamiento del problema. En el capítulo cuatro, se muestran las regularidades y repeticiones presentes en el patrón de franjas de cada corte. Existe un factor de proporcionalidad, en este caso el número de franjas es proporcional a la solicitud realizada.

CAPITULO IV. EXPERIMENTACION

Introducción. En el presente capítulo se explicará el por qué y cómo se realizó el experimento físicamente. Desde los comienzos mismos del desarrollo del método experimental, no han aminorado las polémicas acerca de la correlación entre la teoría y el experimento —uno de los objetivos inherentes que se propone el presente trabajo—, de las posibilidades del método experimental, del significado de los resultados del experimento en el desarrollo de la ciencia. Es por esta razón que una vez presentada la finalidad del experimento en el capítulo anterior, corresponde pues, el presentar el medio experimental utilizado.

En el marco teórico se resume de manera amplia las leyes, teorías atrás de la fotoelasticidad tridimensional. Por tanto, únicamente corresponde ilustrar de manera formal el procedimiento seguido para la obtención de los resultados experimentales.

4.1 Obtención de las placas. Debido a que la lámina obtenida en EU tenía dimensiones comerciales de 600 mm x 600 mm x 9.8 mm [largo x ancho x espesor], se tuvo que maquinar utilizando una fresa de CNC para así tener las dimensiones adecuadas para ser montadas en el polariscopio. En la figura 4.1 se muestra una de las etapas de corte que fueron hechas en el laboratorio de mecatrónica. El cortador era vertical, de dos gabilanes con baño de carburo de tungsteno. La razón por la que no se quiere expandir mucho esta información es porque se encuentra más allá de las expectativas del trabajo el profundizar sobre el tema.

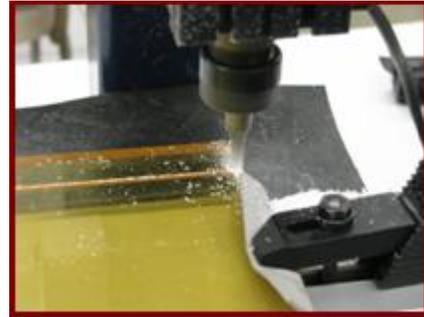


Figura 5.1 Proceso de corte de la lámina

En el anexo A se tiene una ficha técnica completa del material, con propiedades fotoelásticas, mecánicas, así como también una explicación clara del manejo que se le debe dar al material para evitar producir cualquier tipo de esfuerzos residuales. En la figura 4.2 se muestra la geometría final requerida del modelo para el experimento. Las velocidades de corte, de avance, así como fotos que muestran esfuerzos residuales creados por hacer caso omiso de cómo maquinar el material se muestran en el Anexo D.

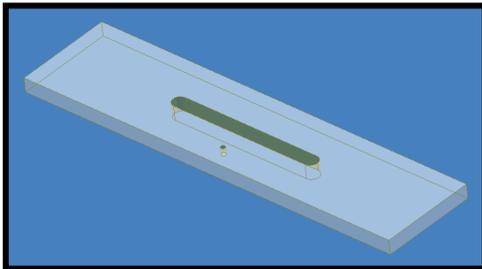


Figura 4.2 Geometría final requerida para el modelo

4.2 Datos obtenidos. En la ciencia como en la tecnología la medición de datos no se hace así porque sí. Así como el cardiólogo le interesa de un electrocardiograma el número de palpitations por minuto, la intensidad de ellas, la frecuencia cardiaca, entre otras, al experimentalista le interesa de los resultados que arroja un polariscopio, el número de franjas isocromáticas, isoclinas, el color de ellas, la forma, entre otras. Ni el cardiólogo ni el experimentalista buscan datos que no les sirva dentro del marco teórico-práctico de su investigación o estudio. Es por esto que es importante explicarle al lector el tipo de datos a

obtener, el por qué estos datos y no otros, la calidad de estos datos y la calidad de las mediciones.

4.2.1 Tipo de datos. En la ciencia y tecnología, con datos se refieren al nivel más bajo de abstracción de los cuales la información y el conocimiento son derivados. Como se mencionó anteriormente, para el análisis experimental de esfuerzos y deformaciones se tienen varios métodos. Debido a la información requerida y dicho con toda claridad, a la instrumentación que se tiene, se optó por la fotoelasticidad. Una gran ventaja de este método sobre otros radica en que se obtiene información en todo el campo de estudio, a diferencia de otros métodos que arrojan información del estado de esfuerzos sólo en un punto en particular. El instrumento utilizado por este método es el polariscopio circular. Su funcionamiento ya fue descrito en el capítulo II. Los datos que arroja son puramente cualitativos. Las franjas isocromáticas representan los lugares geométricos donde la diferencia de esfuerzos principales tiene el mismo valor.

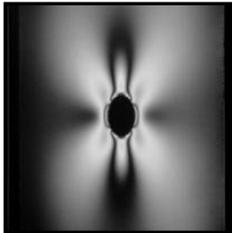


Fig. 4.3 Franjas Isocromáticas

Son cualitativos debido a que no se obtiene un valor cuantitativo del análisis sino hasta que se lleve a la teoría que enmarca e interpreta estos datos, las franjas, y los transforma en valores cuantitativos. Sólo de esta manera puede el ingeniero experimentalista proporcionarle al ingeniero de campo los valores cuantitativos de esfuerzo que tanto requiere para saber si una estructura o elemento de máquina puede fallar. No hay que dejar de lado de que ambos aspectos van íntimamente ligados.

Es tan sencillo como analizar la cantidad $90 \left[\frac{N}{m^2} \right]$: una no adquiere ningún significado sin la otra. La figura 4.3 muestra el patrón de franjas isocromáticas generadas alrededor de una lámina con orificio elíptico, sujeta a tensión.

Las razones por la que se manejan este tipo de datos son varias. La fotoelasticidad genera información en todo el campo de trabajo. Le ayuda al experimentalista a utilizar de mejor

manera su experiencia e intuición; basta observar como se concentran las franjas en la periferia del orificio de la figura 4.3. Es el método más utilizado dentro de las técnicas experimentales—aún hoy en día con los paquetes de elemento finito—, para problemas de contacto, problemas que involucren fuerzas puntuales, cualquier tipo de sollicitación en placas, cascarones, láminas con cambios de geometría muy pronunciados, entre los más importantes. Y por si fuera poco, la fotoelasticidad es sumamente gráfica, atrae la atención del observador.

Como desventajas se tienen pocas, aunque de consideración. Los materiales fotoelásticos tienden a ser difíciles de conseguir en el mercado debido a su alto costo y poca variedad de aplicaciones. El policarbonato, siendo el material por excelencia que mejores características mecánicas ofrece para pruebas bidimensionales, es de alto costo, y su tamaño comercial en lámina es sumamente grande (120 x 180 x 0.6 [cm]).

Para pruebas tridimensionales, el único material que actualmente se comercializa es la resina epóxica. En el mercado se puede conseguir con relativa facilidad y a un bajo costo, aunque en forma líquida. El problema radica en que para producir uno mismo la lámina necesita de moldes, desecadores, cámara de vacío, horno, y por supuesto mucha experiencia. Esto debido a que el material, al momento de curar requiere de un catalizador, el cual eleva considerablemente la temperatura de la resina y esto conlleva a producir esfuerzos residuales. Por tanto, es recomendable el conseguir el material en lámina aún sacrificando tiempo y un alto costo.

El método de Stress Freezing o congelamiento de esfuerzos es “por mucho la técnica más efectiva y popular para ‘congelar’ los esfuerzos y deformaciones en un modelo [1]” y por esta razón se ha tomado la decisión de ser esta la técnica experimental a ocupar.

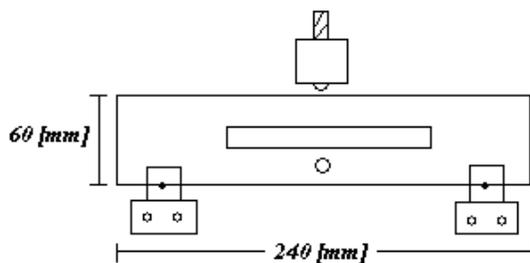
Existen muchos cuerpos que son tridimensionales en carácter, y no pueden ser enfocados eficazmente usando técnicas bidimensionales. No es práctico el relacionar los efectos ópticos en un modelo tridimensional complicado a los esfuerzos en el modelo. Pero es posible, sin embargo, el construir y cargar un modelo tridimensional y el analizar planos interiores del modelo fotoelásticamente usando métodos de congelamiento de esfuerzos. Con esta técnica, los esfuerzos y la respuesta óptica asociada a estos esfuerzos son congelados en el modelo 3D. Una vez que el proceso se ha completado, el modelo puede cortarse y ser analizado fotoelásticamente para obtener información de esfuerzos internos.

Esta información es traducida en términos de esfuerzos normales, principales, cortantes, cortantes máximos (criterio de falla de Tresca), factores de concentración de esfuerzos, esfuerzos octahédricos (criterio de falla de von Mises). Todos estos datos son regularmente necesarios y utilizados por compañías en el área automotriz, aeronáutica, civil, militar, hidráulica (para tuberías y cascarones), médica entre otras.

4.2.2 Calidad de datos. El obtener el material en su geometría casi final es un gran comienzo, principalmente por el estar libre de esfuerzos. A partir de aquí, el proceso tiene tres importantes etapas que deben considerarse para evitar producir esfuerzos residuales:

1. La placa de resina epóxica debe ser maquinada para obtener su geometría final, como se muestra en la figura 4.2. El proceso de corte produce zonas donde la temperatura puede elevarse lo cual genera franjas o esfuerzos residuales. En el anexo A se explica el proceso de corte de la placa para evitar producir gradientes de temperatura altos.
2. Se recomienda un horno con temperatura controlada, ya que la placa debe ser elevada a temperatura crítica (110-120°C), con un gradiente de 5-10°C/hr. Por desgracia, este punto no pudo cubrirse de la mejor manera debido a que se llevo a cabo utilizando un horno comercial.
3. El enfriado del modelo debe ser controlado, con un gradiente no mayor a 10°C/hr, hasta la temperatura ambiente. El enfriado se llevo a cabo acoplado resistencias con control de temperatura, alrededor de la base del polariscopio. Esta medida no evita que la temperatura ambiente afecte de manera irregular el gradiente de enfriamiento de la placa.
4. Los ‘puristas’ experimentales señalan que el no fotografiar en un cuarto oscuro introduce error. Esto debido a que la teoría óptica basa sus planteamientos considerando luz paralela. Esta situación no se presenta en el laboratorio. Sin embargo, se ha demostrado que los errores no son de importancia en la práctica. Los posibles errores en la visualización y conteo de franjas no son perceptibles para el ojo humano.

4.3 Método y material del modelo. El método del “stress freezing” fue el utilizado para la realización del análisis experimental. Como se ha dicho, este método consiste en cargar el modelo a una temperatura alta (entre 105°C y 120°C) y enfriarlo de manera gradual y controlada hasta la temperatura ambiente con la carga todavía en él. Una vez a temperatura ambiente, se descarga al modelo y se proceden a hacer los cortes pertinentes. Se hizo uso de una placa de resina epóxica PSM-9, caracterizada por un alto módulo elástico, y buena sensibilidad óptica. En el anexo A se muestra la ficha técnica del material utilizado. De la placa original (Dimensiones: 508 x 508 x 93 [mm]) se obtuvieron 16 placas de 240 x 60 x 93 [mm] para ser montadas y cargadas de la manera en que se explica en la sección 3.3. En todas las operaciones de maquinado se usaron herramientas de corte con punta de carburo. Fue utilizado un refrigerante para eliminar cualquier calentamiento y evitar hasta un mínimo generar esfuerzos por el maquinado. Las superficies exteriores, interiores y el orificio ciego tal como se muestra en la figura 4.2 fueron maquinadas usando una fresadora semi-automática. Para obtener los cortes principales fue utilizada una fresadora CNC. El diámetro, las profundidades y la ubicación de los centros del orificio ciego fueron precisos dentro de ± 0.001 in según las especificaciones técnicas de la fresadora CNC utilizada. El método de carga y las dimensiones de los modelos se muestran en boceto 4.1. Los puntos de sujeción de donde se sostiene al modelo fueron hechos de acero 1018.



Boceto 4.1 Boceto de los modelos de PSM-9 mostrando las dimensiones.

4.4 Reporte para la placa 1-AT(Carga=100kgs.). La tabla 4.1 muestra como se clasificaron las distintas placas, con sus respectivas características técnicas referentes al orificio. Se considera importante el señalar que los cortes una vez hechos, deben ser puestos de nueva cuenta en el polariscopio circular para su visualización. Como se ha mencionado, una ventaja del método 3D de ‘stress freezing’ radica en que pueda visualizarse el estado de esfuerzos interno en un cuerpo sujeto a una sollicitación dada. No es trivial el modo en cómo de puede sujetar dichos cortes dado su tamaño. Normalmente se tendría un bastidor

con un riel ajustable al espesor del corte, para poder colocar varios a la vez y poder comparar de una manera más cómoda. La fotografía 4.3a ejemplifica la labor hecha, mientras que la fotografía 4.3b es un acercamiento del corte transversal en B/N (modo que facilita el conteo de franjas) usando el paquete computacional Photoshop ®.

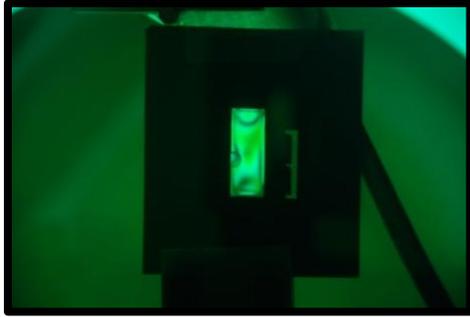


Foto 4.3a. Corte transversal para la placa con orificio ciego de 3.4[mm] de profundidad

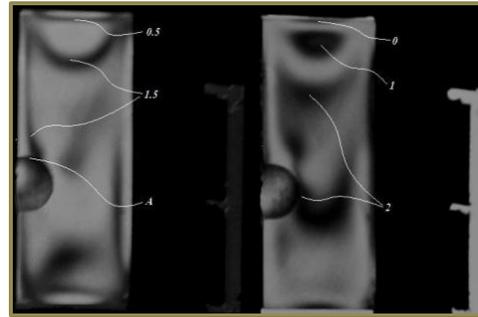


Foto 4.3b. [Zoom] Corte transversal en C.O y C.C.

Profundidad [mm]	Corte Transversal T	Corte Longitudinal L	
3.1 ($\frac{1}{8}in$)	1-AT	1-AL	1
6.2 ($\frac{1}{4}in$)	2-AT	2-AL	2
7.8 ($\frac{5}{16}in$)	3-AT	3-AL	3
Placa A			

Tabla 4.1 Clasificación de placas respecto a su orificio.

El plano transversal mostrado en las fotografías 4.3a y 4.3b representan un plano de simetría que es también conocido como plano principal. Estos cortes fueron examinados en el polariscopio bajo incidencia normal. Los patrones de franja proveerán los siguientes datos (ver figura 4.4).

Para el corte transversal

$$(\sigma_1 - \sigma_2) = \frac{Nf\sigma}{h} \quad (4.1)$$

donde $(\sigma_1 - \sigma_2) = (\sigma_a - \sigma_r)$ en la parte rectangular del modelo. En la frontera libre del corte mostrado en la figura 4.4:

$$\sigma_a = \frac{Nf\sigma}{h} \quad \text{en la frontera vertical (4.2)}$$

$$\sigma_{\theta} = \frac{Nf\sigma}{h} \quad \text{en la frontera del orificio ciego (4.3)}$$

Es claro que del corte se pueden obtener valores individuales de los esfuerzos internos, y el esfuerzo tangencial para el plano YZ. El esfuerzo radial $\sigma_r = 0$ en la frontera del orificio ciego.

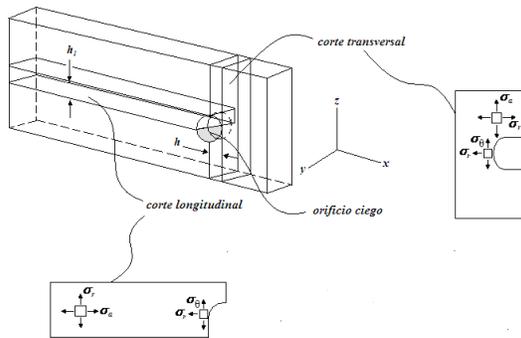


Figura 4.4 Corte de la placa a lo largo de los esfuerzos principales.

De la fotografía 4.3b, se puede obtener valores de los esfuerzos principales a lo largo de la franja isocromática. Ocupando la ec. 4.3, se tiene:

Solicitación de 1000 [N]	Ángulo θ [rad]	Esfuerzo tangencial σ_{θ} [MPa]
	$-\pi/2$	37.56
	$-\pi/4$	34.98
	0	28.57
	$\pi/4$	29.55
	$\pi/2$	31.65

Tabla 4.1 Valores del σ_{θ} .

El orden de franja máximo es de 2.6, y ocurre en el vértice que forma la frontera libre y el orificio ciego. Este es el punto de máximo esfuerzo (2.1 veces el esfuerzo aplicado) presente en todo el dominio de estudio. Este comportamiento era el esperado respecto a la hipótesis hecha en el capítulo I. La máxima concentración de esfuerzo no está ocurriendo en la zona de transición A (donde empieza la concavidad de la raíz). Por otro lado, de manera cualitativa se puede afirmar que el punto de transición sí genera que los esfuerzos no se concentren en la frontera libre y se distribuyan hacia él. La figura 4.5 muestra lo antes mencionado, e inclusive se puede ver que no existe esfuerzo a compresión en ninguna

región del orificio ciego. Todos los esfuerzos presentes a lo largo del orificio ciego son a tensión.

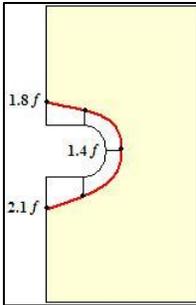
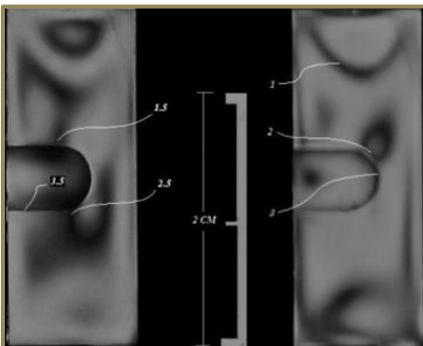


Figura 4.5 Distribución de esfuerzo tangencial a lo largo del orificio ciego

En el apéndice B se muestran las fotografías tomadas de los cortes hechos para las placas con la misma profundidad del orificio ciego. Se puede verificar que no hay cambios significativos en el patrón de franjas. Con esto se comprueba que sucedieron dos cosas:

1. No se incurrió en ningún tipo de falla técnica al momento de obtener los cortes transversal y longitudinal que produjeran esfuerzos residuales, ó
2. Se cortaron igual de mal las placas, hecho que se considera improbable.

4.5 Reporte para la placa 2-AT(Carga=100kgs.). Para no perder la línea de presentación de los cortes, se decidió que el lector pueda observar el comportamiento del plano transversal con diferentes profundidades del orificio y no intercalar los diferentes cortes hechos. En la fotografía 4.6 se muestra el patrón de franjas isocromáticas para una profundidad del orificio ciego de 6.3[mm].

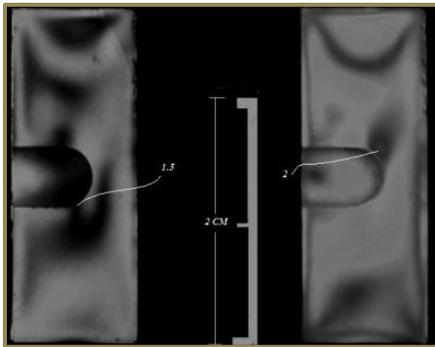


Fotografía 4.6 Corte transversal (plano YZ) con orificio ciego de 6.3 mm de profundidad en campo claro (izquierda) y campo oscuro (derecha).

Es interesante observar varios aspectos y similitudes que se tienen conforme se incrementa la profundidad del orificio:

1. Se sigue distribuyendo los esfuerzos en la zona de transición A señalada con anterioridad. Esto se puede observar en la franja de orden $N=1.5$ y $N=2.5$ en campo claro.
2. Se produce una franja más en el centro de la raíz del orificio ciego. Esto nos dice que al parecer el orificio ayuda a que se concentre el esfuerzo en la raíz y se disminuye en la frontera libre.
3. Se observa la franja de orden $N=3.5$ que parte del vértice entre la frontera libre y el orificio ciego.

La fotografía 4.7 muestra el mismo corte transversal, pero hecha en otra placa. La similitud de resultados en el patrón de franjas es notable.



Fotografía 4.7 Corte transversal de una segunda placa.

Desde el punto de vista cualitativo, se observan patrones de franja que desnudan el comportamiento de la placa ante la presencia del orificio.

Entre más profundo sea el orificio el esfuerzo se va concentrando a lo largo del recorrido del orificio y en la zona de transición A.

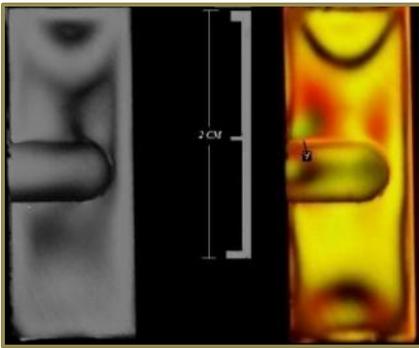
La tabla 4.2 muestra los valores del esfuerzo tangencial en función del ángulo θ .

Solicitación de 1000 [N]	Ángulo θ [rad]	Esfuerzo tangencial σ_{θ} [MPa]
	$-\pi/2$	41.33
	$-\pi/4$	37.54
	0	29.04
	$\pi/4$	31.44
	$\pi/2$	36.2

Tabla 4.2. Valores del σ_{θ} .

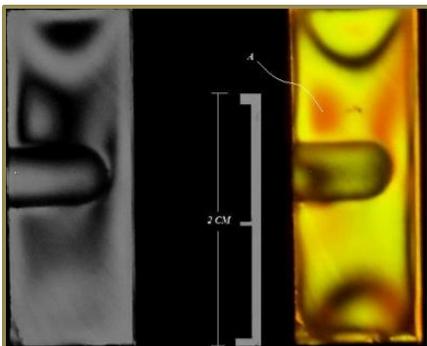
El orden de franja máximo se encuentra ubicado en el recorrido del orificio, y tiene un valor de $N=3.5$. Es el punto de esfuerzo máximo y es 2.42 veces el esfuerzo aplicado. Es decir, para el ingeniero en diseño, el factor de seguridad K está apenas por debajo de lo que normalmente se considera lo ideal, que es de 3. De las tablas 4.1 y 4.2, el cambio de consideración lo sufre el valor del esfuerzo tangencial cuando $\theta = -\frac{\pi}{2}$.

4.6 Reporte para la placa 3-AT (Carga=100kgs.). Podría esperarse, después de los dos anteriores reportes, que el esfuerzo aumentará en la raíz del orificio, debido a su mayor profundidad. La fotografía 4.8 muestra un cambio respecto a la ubicación del esfuerzo máximo tangencial. En el punto A puede observarse que hay tres franjas de diferente tonalidad que indican una concentración de esfuerzos en esa zona.



Fotografía 4.8 Corte transversal para placa con orificio de profundidad de 7.8mm.

Hacer un análisis cuantitativo a partir de la fotografía 4.8 es difícil debido a la poca nitidez en las franjas. Podrían encontrarse más de una franja en donde se creería que hay sólo una. De cualquier manera, se puede hacer un análisis cualitativo.

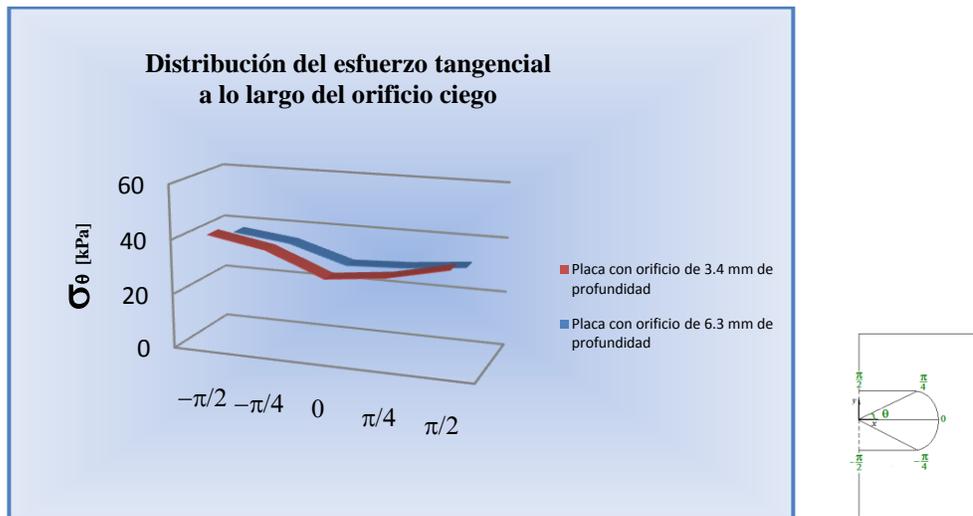


Fotografía 4.9 Corte transversal para una placa con orificio ciego de 7.8mm.

Tomando como contraste la fotografía 4.9, la cual tuvo una carga de 75 kgs. [$\approx 750\text{N}$], se puede ver que como el esfuerzo se distribuye de manera más uniforme a lo largo del orificio cuando la carga es mas baja; pero conforme se va aumentando, esa uniformidad se pierde y empieza a concentrarse cerca de la frontera izquierda.

Esta aseveración tiene una explicación. Conforme se va alejando la raíz del orificio ciego de la frontera libre (izquierda), el esfuerzo creado en la raíz ya no repercute de manera importante en la frontera libre**** por lo que si se quisiera conocer el estado de esfuerzos en esa frontera se puede analizar como un problema 2D de una placa con orificio circular.

La gráfica 4.1 muestra la distribución de esfuerzo tangencial a lo largo de la raíz. Se puede observar que en ambas profundidades, el esfuerzo máximo se encuentra en el recorrido del orificio, muy cercano al vértice que forma con la frontera libre. Es importante señalar que el presente comportamiento es para el plano YZ.



Gráfica 4.1 Distribución del esfuerzo tangencial a lo largo de la raíz del orificio

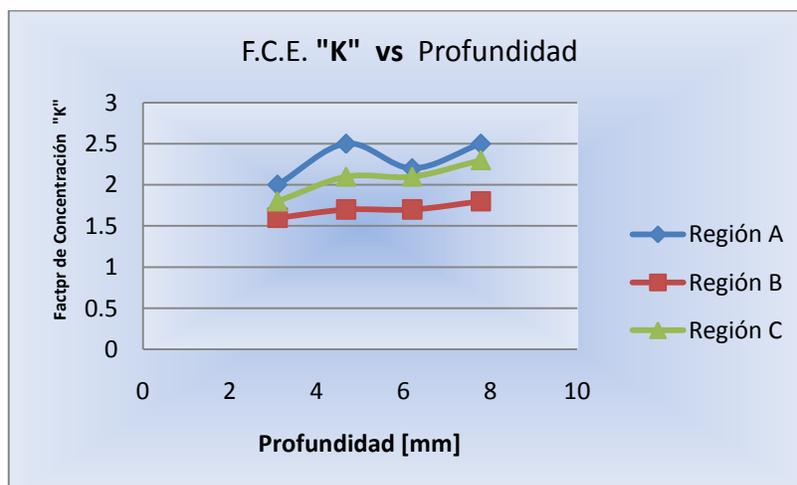
La gráfica 4.2 muestra la distribución del esfuerzo tangencial en función de la profundidad del orificio ciego. La abscisa representa la profundidad total del orificio ciego en [mm]; la ordenada al origen representa los valores del esfuerzo tangencial máximo en [kPa].

**** Recordar el principio de Saint Venant [31, pp.130-131]



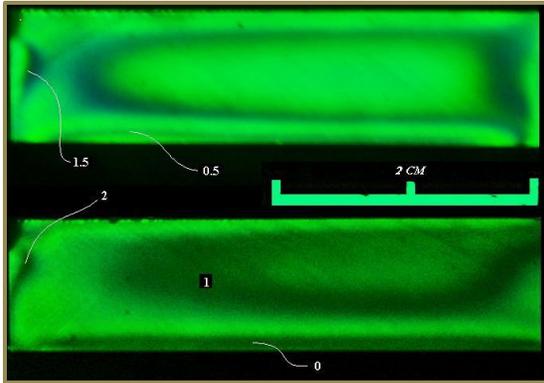
Gráfica 4.2 Esfuerzo tangencial máximo producido por la presencia de un orificio ciego bajo un estado de esfuerzos unidimensional.

La gráfica 4.3 muestra los resultados para el factor de concentración de esfuerzos K en la frontera semicircular de la raíz. Las puntos de transición A y C siguen siendo las zonas de mayor concentración de esfuerzos. Es importante observar que para una profundidad de 4.68 [mm] y 7.7 [mm] los f.c.e. son prácticamente los mismos. El ingeniero en diseño se puede percatar que el f.c.e. alcanza un valor máximo en la zona de transición A de la misma magnitud que en el vértice que forma el orificio con la frontera libre, a $-\frac{\pi}{2}$.



Gráfica 4.3 Valores del factor de concentración de esfuerzos K alrededor de la raíz del orificio ciego

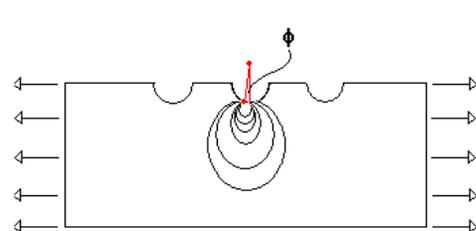
4.7 Reporte para la placa 1-AL (Carga=100 [kg]). Una vez hecho el reporte para los cortes transversales, toca turno a los cortes longitudinales. El corte longitudinal corresponde al corte mostrado en la figura 4.4. La foto 4.10 muestra el corte longitudinal hecho para la placa con un orificio ciego de 3.1 [mm] de profundidad. A diferencia del corte transversal, el corte longitudinal presenta una concentración de franjas isocromáticas en la raíz del orificio.



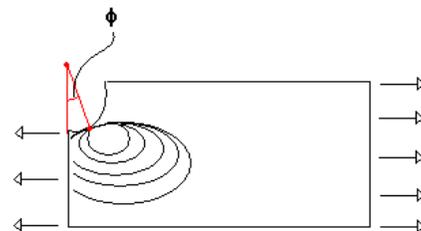
Fotografía 4.10 Corte longitudinal para una placa con orificio ciego de 3.1 mm de profundidad

La fotografía superior corresponde a un corte en campo oscuro, mientras que la inferior está en campo claro. En ambas se puede observar una franja que empieza en la raíz del orificio, muy cercana a la zona de transición donde empieza la concavidad del orificio ciego.

Parece evidente que el esfuerzo máximo se ubicará en el centro de la raíz del orificio. Este comportamiento es el esperado. Durelli [8, pp. 210-212] realiza un análisis de la distribución de esfuerzos en placas con muescas semicirculares bajo carga uniaxial. Encuentra que el esfuerzo máximo ocurre en un punto muy cercano al centro de la muesca semicircular, a un ángulo ϕ radianes. La figura 4.6 muestra un esquema del corte longitudinal obtenido de la placa y el análisis hecho anteriormente por Durelli.



Placa con muescas semicirculares bajo carga uniaxial



Corte longitudinal de una placa delgada bajo una carga a tensión

Figura 4.6 Ubicación del punto de mayor concentración de esfuerzo hecho por Durelli (izquierda) y en el presente trabajo (derecha).

El ángulo ϕ va disminuyendo conforme se van agregando muescas semicirculares a la placa delgada. Este mismo caso se podrá comprobar que pasa en el presente estudio; conforme se va incrementando la profundidad del orificio ciego, el esfuerzo se va concentrando en el centro del mismo.

Una de las posibles causas de tal comportamiento es el tipo de sollicitación que se le aplicó a la placa. En el capítulo III se ilustró cómo se realizó el experimento para producir un estado a tensión mediante flexión pura. Debido a lo anterior, la magnitud del esfuerzo varía de manera lineal (ver figura 3.2 y 3.3). Otra posible causa podría estar en que no se haya alineado de manera correcta la celda de carga con la ubicación del orificio ciego. Esto se muestra en la figura 4.7. Si la sollicitación no es realizada de manera colineal al centro del orificio ciego, podría causar que el esfuerzo máximo no se ubique en el centro de la raíz.

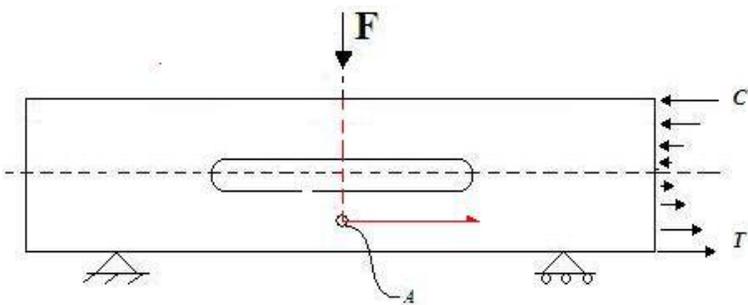


Figura 4.7

En el capítulo V se realizarán pruebas numéricas para observar si la primera, segunda o ambas causas antes mencionadas, son responsables de dicho comportamiento.

Los valores del esfuerzo principal tangencial σ_θ a lo largo del orificio ciego se muestran en la tabla 4.3.

Sollicitación de 1000 [N]	Ángulo θ [rad]	Esfuerzo tangencial σ_θ [MPa]
	0	10.5
	$\pi/4$	17.75
	$\pi/2$	26.2

Tabla 4.3 Valores del esfuerzo tangencial σ_θ .

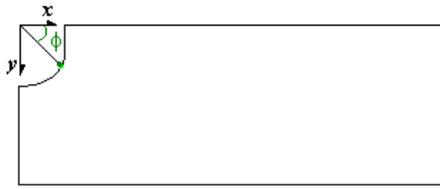
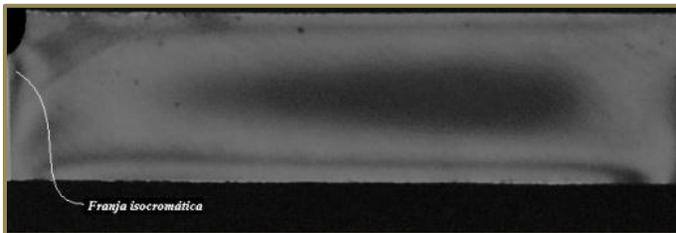


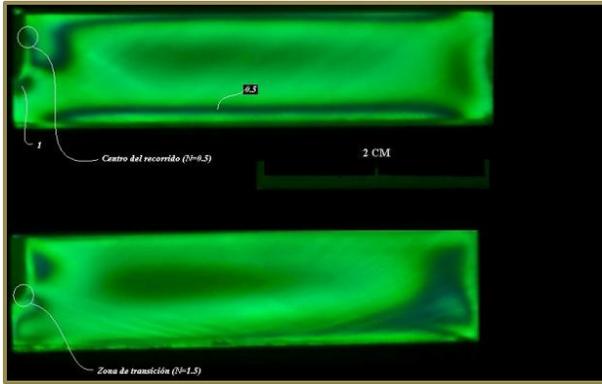
Figura 4.8 Esquema para el ángulo ϕ (+ giro a favor de las manecillas del reloj)

De manera cualitativa se puede señalar lo siguiente. En la fotografía 4.11 se señala la franja de orden $N=2.5$. Al parecer, las franjas se van concentrando al centro de la raíz del orificio ciego; es decir, el ángulo ϕ disminuye.



Fotografía 4.11 Corte longitudinal para una placa con orificio ciego con profundidad de 3.1 mm.

4.8 Reporte para la placa 2-AL (Carga=75 y 100 [kg]). La fotografía 4.12 muestra el corte longitudinal hecho a dos placas diferentes, con un orificio ciego de 6.3 [mm] de profundidad. Ambas fotografías fueron tomadas en campo oscuro. El corte superior tuvo una carga de 75 [kg], mientras que la inferior la tuvo de 100 [kg]. Se ha comentado con anterioridad que el conteo de franjas es importante para la obtención de resultados cuantitativos. Sin embargo se puede realizar un análisis cualitativo a partir de ambos cortes presentados en la fotografía 4.12. Del corte superior se puede observar que la franja que inicia a media altura del recorrido del orificio ciego tiene un orden de franja mayor que la zona en la parte superior a ella (franja $N=0$). Se empieza a formar una franja en la parte central de la raíz del orificio ciego. Bajo una carga de 100 [kg], se observa que la franja de mayor orden se ubica ahora en la zona de transición entre el recorrido y la concavidad del orificio.



Fotografía 4.12 Corte longitudinal hecho para dos placas diferentes, con orificio ciego de 6.3 [mm] de profundidad. Ambos fotografías en Campo Oscuro.

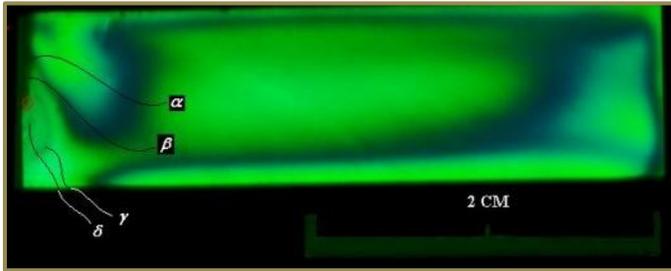
De la fotografía 4.10, ambos cortes muestran una franja que empieza en la misma zona de transición (marcadas $N=1.5$ y $N=2$ respectivamente) que la obtenida en la parte inferior de la fotografía 4.12.

En la tabla 4.4 se muestran los valores del esfuerzo tangencial σ_θ ubicados en los mismos puntos calculados en la tabla anterior; los valores K calculados son referentes al factor de concentración de esfuerzos (F.C.E).

Solicitación de 1000 [N]	Ángulo θ [rad]	Esfuerzo tangencial σ_θ [MPa]	K
	0	13.5	1.01
	$\pi/4$	19.5	1.57
	$\pi/2$	28.75	2.15

Tabla 4.4 Valores del esfuerzo tangencial y el F.C.E. para el corte longitudinal con orificio ciego de 6.3mm de profundidad.

La fotografía 4.13 muestra un corte longitudinal hecho para una placa con carga de 250 [kg] (2500 [N]). Se observa pues que conforme se aumenta la solicitación, las franjas van aumentando en número y concentrándose en el centro del orificio ciego. La franja marcada con la letra α tiene su origen casi en la parte central del recorrido del orificio ciego. Si se observa de nueva cuenta la fotografía 4.12, esta misma franja tenía su origen la zona de transición. En esta ocasión, la franja γ es la que comienza en esta zona de transición. La franja de mayor orden N es la marcada con la letra δ .



Fotografía 4.13 Corte longitudinal hecho para una placa sometida a una carga de 250 kgs.

Este comportamiento concuerda con los resultados obtenidos en las tablas 4.3 y 4.4. El esfuerzo se va concentrando en la raíz del orificio ciego. Sin embargo, el comportamiento indica que se va concentrando en el centro del orificio ciego, pero debido a los cortes principales realizados para todas las placas, esto no se puede asegurar. En el capítulo 6 se verificará de manera numérica esta posible tendencia.

La Figura 4.9 muestra de manera gráfica el comportamiento del factor de concentración de esfuerzo para ambos casos donde la carga es diferente para cada placa.

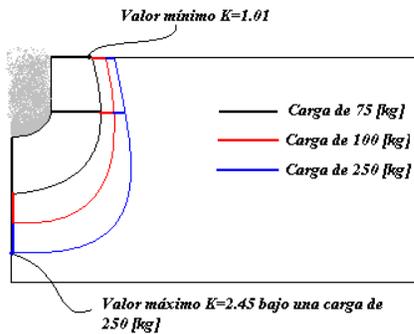
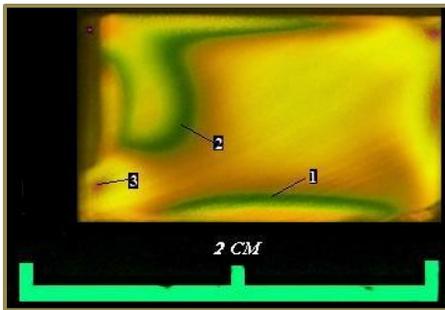


Figura 4.9 Distribución del F.C.E. "K" a lo largo del recorrido y de la raíz del orificio ciego bajo tres diferentes cargas.

El factor K como se ha comentado, es de suma importancia para el diseño en ingeniería mecánica, debido a que es un parámetro que condensa información acerca de los esfuerzos promedios en una pieza con sus respectivos esfuerzos principales máximos.

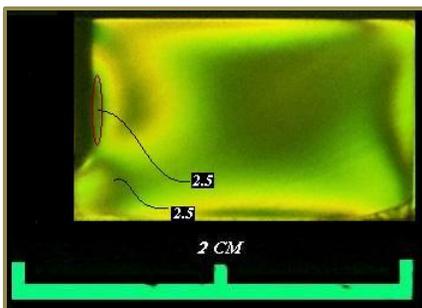
4.9 Reporte para la placa 3-AL (Carga= 75 [kg]). Como último reporte se tiene el corte longitudinal hecho para dos placas con orificio ciego circular de 7.8 [mm] de profundidad. De nueva cuenta se puede observar en la fotografía 4.14 que existe una franja de orden mayor que empieza a la mitad del recorrido del orificio ciego, tal y como sucede en el corte superior de la fotografía 4.12.



Fotografía 4.14 Corte longitudinal para una placa con orificio ciego de 7.8 [mm] de profundidad (Campo Oscuro)

Si se observa la fotografía 4.6 (en B/N), la ubicación de la franja e orden $N=1.5$ comienza casi en el centro del recorrido del orificio. Como se mostrará en el capítulo 6, este comportamiento se repetirá en el análisis numérico. Es interesante observar que se obtuvo un patrón de franjas muy similar al obtenido en los cortes de las fotografías 4.12 y 4.13. La fotografía 4.15 muestra el corte longitudinal hecho para otra placa, con la diferencia que fue tomada en campo claro. Se encierra en un óvalo rojo la zona donde está ubicada la franja de orden $N=2.5$.

Es importante señalar dicha franja ya que al parecer se distribuye de manera más homogénea el esfuerzo a lo largo del recorrido del orificio ciego. También se puede comentar respecto a la ubicación de esta franja. Sternberg y Sadowsky [24] encontraron que una placa delgada con un barreno circular bajo una carga uniaxial, el esfuerzo tangencial σ_{θ} máximo ocurre en la raíz del orificio. Sin embargo σ_{θ} no es constante a lo largo del espesor de la placa. Este valor, cercano a los planos libres, es ligeramente inferior al valor encontrado en el centro del recorrido del barreno.



Fotografía 4.15 Corte longitudinal hecho para una placa con orificio ciego de profundidad de 7.8 mm, en campo claro.

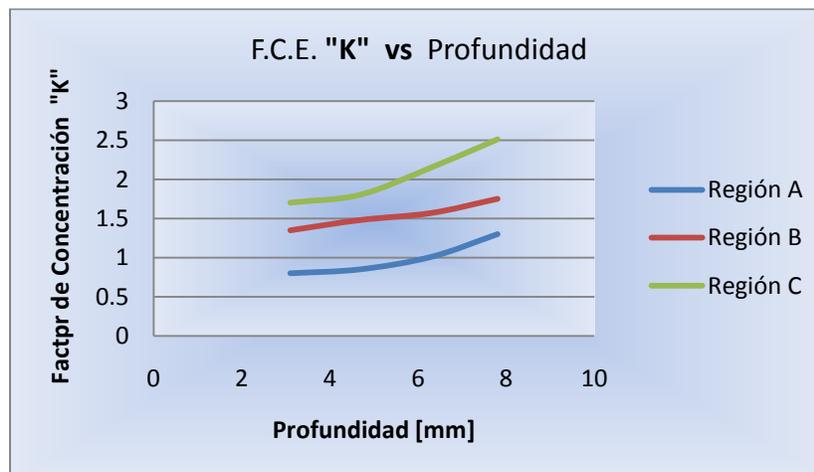
Este comportamiento se asemeja al observado en la fotografía 4.15. Conforme se va incrementando la profundidad del orificio ciego, se va centrado la franja de orden mayor. La tabla 4.5 muestra los valores propios (σ_θ) y los factores de concentración de esfuerzo K . Tomando como base lo señalado en la figura 4.8 acerca de la ubicación de las zonas que se consideran importantes debido a su geometría, se observa que el esfuerzo tangencial en el centro de la raíz es ya de considerable magnitud.

Solicitación de 750 [N]	Ángulo θ [rad]	Esfuerzo tangencial σ_θ [MPa]	K
	0	16.5	1.3
	$\pi/4$	21.5	1.75
	$\pi/2$	30.25	2.51

Tabla 4.5 Valores del esfuerzo tangencial y el F.C.E. para el corte longitudinal con orificio ciego de 7.8 mm de profundidad.

La gráfica 4.4 muestra como se comporta el factor K respecto a la profundidad. El resultado más importante radica en el comportamiento exponencial que se tiene en la región C, la cual se ubica en el centro de la raíz del orificio ciego.

La región B corresponde a la zona de transición entre el recorrido y la concavidad del orificio. La región A está ubicada en el vértice que se forma entre el recorrido del orificio y la frontera libre.



Gráfica 4.4 Valores del factor de concentración de esfuerzos K alrededor de la raíz del orificio ciego con respecto a la profundidad.

4.10 Fuentes de error. El equipo de trabajo cree importante señalar algunas de las causas que pudieron incrementar la inexactitud en los resultados experimentales presentados.

Como primera causa esta el control de temperatura. Como se ha comentado anteriormente, el modelo necesita ser llevado a una temperatura crítica de manera controlada; es decir, se necesita de un horno especializado o en su defecto de un horno comercial con un controlador de temperatura adaptado a este. El método utilizado para este trabajo ya fue explicado y cuantificar qué tanto error se pudo haber tenido es difícil. Sin embargo, se llegó a buen puerto este proceso tomando en consideración que no se produjeron ningún tipo de franjas residuales en los modelos.

Otra posible causa fue el proceso para obtener los cortes principales. Se recomienda en la ficha técnica del material fotoelástico el utilizar una sierra cinta. Se utilizó una fresa CNC para obtener dichos cortes. La herramienta de corte utilizada posee un acabado con carburo para evitar altas temperaturas. Con esto se trató de compensar de alguna manera el no haber utilizado la sierra cinta.

CAPÍTULO V. PLANTEAMIENTO NUMÉRICO

Introducción. La geometría del modelo numérico se digitalizó usando un paquete comercial de diseño y fue guardado en un formato compatible para ser leído en ABAQUS. Se hizo un mallado fino en la periferia del orificio y un mallado más grueso en todo el volumen restante de la placa. Para la aplicación de la fuerza se creó un área rectangular en la parte superior central de la placa. Para los puntos de apoyo que restringen a la placa de cualquier traslación y rotación se realizaron áreas rectangulares en la parte inferior derecha e izquierda. El uso de herramientas numéricas para el apoyo de resultados experimentales ha tenido un gran auge. Ragulskis [20] desarrolla técnicas híbridas para el análisis fotoelástico numérico-experimental. Sanford y Beaubien [21] trabajan con una metodología que combina los resultados de un paquete interactivo de elemento finito y fotoelasticidad tridimensional. Iancu y Ding [19] analizan uniones en placas quebradizas con traslape sencillo utilizando técnica fotoelástica y numérica. Esta última mediante el uso del software ABAQUS. Se realizó una prueba de convergencia para determinar que tan “fino” debió hacerse el mallado en la periferia del orificio ciego.

5. Conceptos matemáticos en FEM.

5.1 Dominio y frontera.

El objetivo de la mayoría de los análisis es el determinar funciones desconocidas, llamadas variables dependientes, que satisfagan un conjunto dado de ecuaciones diferenciales en un dominio dado y algunas condiciones de frontera en la frontera del dominio. El concepto de dominio y frontera del dominio fueron definidos en la sección 2.1. En cinemática se usa el término de cuerpo en lugar de dominio. Se denotará como Ω al cuerpo (dominio) y $\partial\Omega$ a la frontera de éste.

5.2 Selección del elemento finito. Discretización.

Los siguientes comentarios aplican tanto para el caso 2D como el 3D, sin embargo para una visualización más clara se ilustrará dichos comentarios para el primer caso. Existe más de una geometría simple que puede ser utilizada como elemento finito. Las funciones de interpolación dependen no sólo del número de nodos en el elemento sino también de la geometría de éste. Una de las geometrías más simples es el triángulo, seguido del rectángulo. En la figura 5.1 se ilustra el uso de triángulos y cuadriláteros como elementos finitos para discretizar al dominio (cuerpo) Ω .

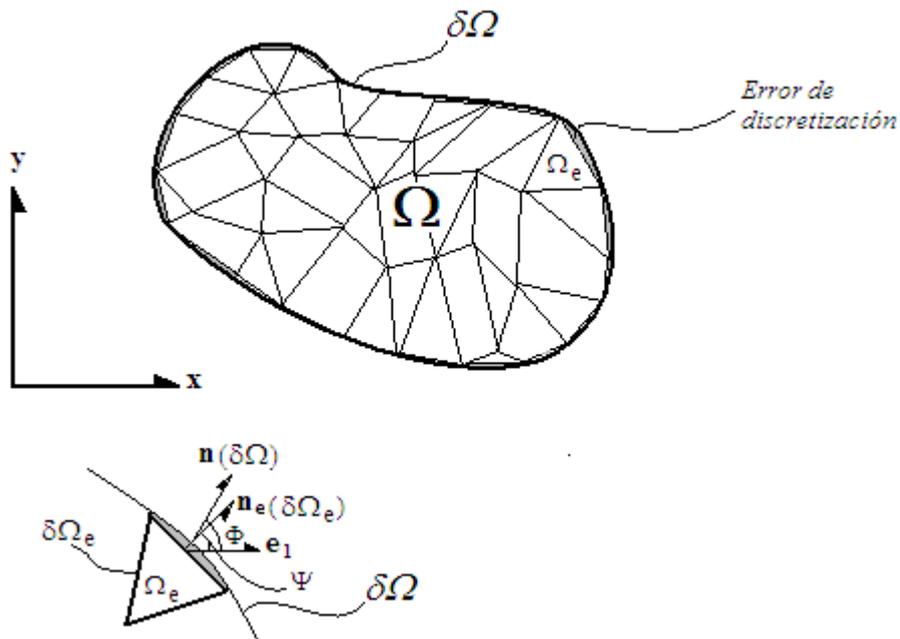


Figura 5.1 Discretización de elementos finitos de un cuerpo *irregular* Ω por medio de elementos triangulares y cuadriláteros; se separa un elemento triangular con frontera $\delta\Omega_e$, y vector normal \mathbf{n} en la frontera del elemento.

Como se observa en la figura 5.1 el cuerpo Ω contiene partes que no están discretizadas. Aislando un elemento triangular Ω_e (y cuya frontera se denota como $\delta\Omega_e$) tiene como campo de vectores normales a $\mathbf{n}_e(\delta\Omega_e)$ el cual forma un ángulo Ψ con respecto al eje x . Este ángulo no coincide con el campo de vectores normales $\mathbf{n}(\delta\Omega)$ el cual forma un ángulo Φ con respecto a eje x . La presencia del orificio ciego en la placa genera una geometría parecida a la ilustrada en la figura 5.1. Como se observa en la figura 5.2 la concavidad de la raíz del orificio ciego producida por la punta redonda del cortador hace que se tenga una geometría difícil de discretizar. Una propuesta para minimizar el error es produciendo una discretización más fina en la zona de mayor importancia para el estudio. Entre más elementos se dispongan para formar la geometría deseada, habrán más puntos donde el vector normal \mathbf{n}_e del elemento coincida con el vector normal \mathbf{n} en el punto \mathbb{p} de la raíz del orificio ciego, es decir

$$\cos\Phi = \frac{(\mathbf{e}_1|\mathbf{n})}{\|\mathbf{e}_1\| \|\mathbf{n}\|} = \frac{(\mathbf{e}_1|\mathbf{n}_e)}{\|\mathbf{e}_1\| \|\mathbf{n}_e\|}$$

Uno de los criterios más importantes que se está tomando en consideración para escoger el tipo de elemento finito es su adaptación geométrica en la región.

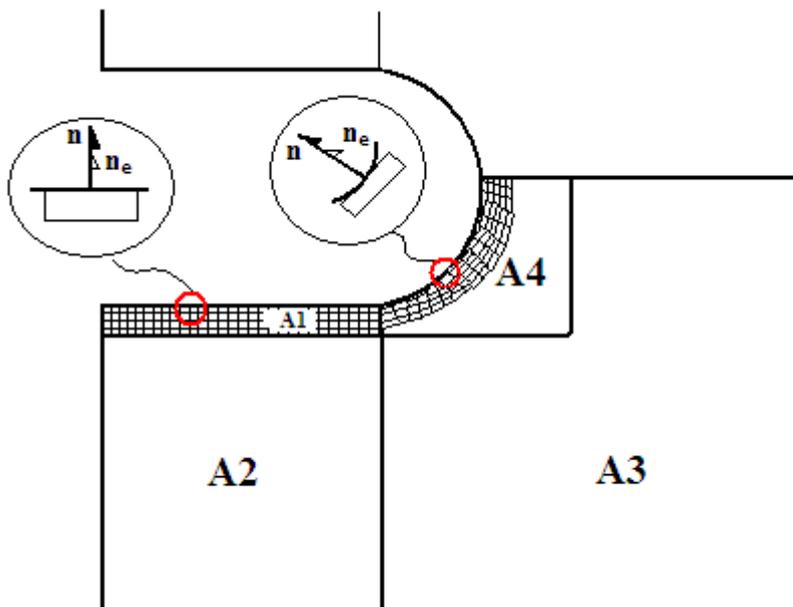


Figura 5.2 Tipo de elementos ocupados para el mallado (discretización) tanto para el recorrido del orificio ciego (A1) como para la concavidad de la raíz del orificio (A4).

Como se observa en la figura 5.2 se utilizarán los siguientes elementos finitos:

	TIPO DE ELEMENTO	NÚMERO DE ELEMENTOS / mm *
A1	C3D20 (20-node quadratic brick)	12 / mm
A2	C3D20 (20-node quadratic brick)	4 / mm
A3	C3D20 (20-node quadratic brick)	4 / mm
A4	C3D20 (20-node quadratic brick)	54 / ¼ arco

El tipo de elemento “Solid; Brick” se ilustra en la figura 5.3. Es muy importante hacer la siguiente aclaración: los elementos utilizados son sólidos (3D) y la razón por la que se enumeran las “áreas” a las que se les va a discretizar con estos elementos, es sólo por razones prácticas. Se hace hincapié en realizar una discretización más densa en las zonas de mayor importancia para el estudio que se requiere.

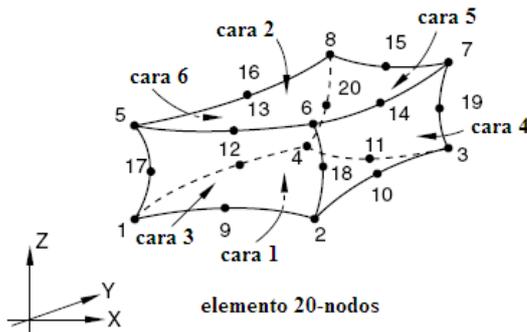


Figura 5.3 Elemento tipo C3D20 (ladrillo sólido) para ocuparse en modelos tipo viga 3D.

En la figura 5.2 se ilustra de manera “restringida” lo que se discute en el párrafo de arriba.

5.2.1 Interpolación [37]

La interpolación isoparamétrica está definida en términos de coordenadas isoparamétricas del elemento finito g, h, r . Estas son coordenadas en la configuración no deformada (material) dado que ABAQUS ocupa un código Lagrangiano. El eje de coordenada esta situado en el centro del elemento finito. Teniendo en consideración que $x = g, y = h, z = r$, la función de interpolación para el elemento “Solid; Brick” es:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}(g, h, r) = & -\frac{1}{8}(1-g)(1-h)(1-r)(2+g+h+r)\mathbf{u}_1 - \frac{1}{8}(1+g)(1-h)(1-r)(2-g+h+r)\mathbf{u}_2 \\
& - \frac{1}{8}(1+g)(1+h)(1-r)(2-g-h+r)\mathbf{u}_3 - \frac{1}{8}(1-g)(1+h)(1-r)(2+g-h+r)\mathbf{u}_4 \\
& - \frac{1}{8}(1-g)(1-h)(1+r)(2+g+h-r)\mathbf{u}_5 - \frac{1}{8}(1+g)(1-h)(1+r)(2-g+h-r)\mathbf{u}_6 \\
& - \frac{1}{8}(1+g)(1+h)(1+r)(2-g-h-r)\mathbf{u}_7 - \frac{1}{8}(1-g)(1+h)(1+r)(2+g-h-r)\mathbf{u}_8 \\
& + \frac{1}{4}(1-g)(1+g)(1-h)(1-r)\mathbf{u}_9 + \frac{1}{4}(1-h)(1+h)(1+g)(1-r)\mathbf{u}_{10} \\
& + \frac{1}{4}(1-g)(1+g)(1+h)(1-r)\mathbf{u}_{11} + \frac{1}{4}(1-h)(1+h)(1-g)(1-r)\mathbf{u}_{12} \\
& + \frac{1}{4}(1-g)(1+g)(1-h)(1+r)\mathbf{u}_{13} + \frac{1}{4}(1-h)(1+h)(1+g)(1+r)\mathbf{u}_{14} \\
& + \frac{1}{4}(1-g)(1+g)(1+h)(1+r)\mathbf{u}_{15} + \frac{1}{4}(1-h)(1+h)(1-g)(1+r)\mathbf{u}_{16} \\
& + \frac{1}{4}(1-g)(1+g)(1-h)(1-r)\mathbf{u}_{17} + \frac{1}{4}(1-h)(1+h)(1+g)(1-r)\mathbf{u}_{18} \\
& + \frac{1}{4}(1-g)(1+g)(1+h)(1+r)\mathbf{u}_{19} + \frac{1}{4}(1-h)(1+h)(1-g)(1+r)\mathbf{u}_{20}
\end{aligned}$$

5.3 Ecuaciones básicas a resolver por el código ABAQUS [37]

El objetivo que se tiene en este apartado es el escribir las ecuaciones que resuelve el código ABAQUS. En el capítulo I, sección 1.4, 1.5 y 1.6 en [37] se plasman de manera extensa las bases teóricas de conceptos de la Cinemática y Mecánica.

5.3.1 Deformación

Una vez descrita la configuración inicial de la placa es de interés el conocer su deformación en $t > t_0$ al momento de aplicarse una sollicitación.

El gradiente de deformación, por el teorema de descomposición polar es

$$\mathbf{F} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{R}$$

$$\mathbf{F}\mathbf{F}^T = \mathbf{V}^2$$

$$\mathbf{F}^T\mathbf{F} = \mathbf{U}^2$$

donde \mathbf{V} es el tensor de elongaciones izquierdo, \mathbf{U} es el tensor de elongaciones derecho y \mathbf{R} es el c. t. de rotaciones. El tensor \mathbf{V} se obtiene de

$$\mathbf{V} = \lambda_I \mathbf{n}_I \mathbf{n}_I^T + \lambda_{II} \mathbf{n}_{II} \mathbf{n}_{II}^T + \lambda_{III} \mathbf{n}_{III} \mathbf{n}_{III}^T$$

y por tanto

$$\mathbf{F}\mathbf{F}^T = \mathbf{V}^2 = \lambda_I^2 \mathbf{n}_I \mathbf{n}_I^T + \lambda_{II}^2 \mathbf{n}_{II} \mathbf{n}_{II}^T + \lambda_{III}^2 \mathbf{n}_{III} \mathbf{n}_{III}^T$$

Donde $\lambda_I^2, \lambda_{II}^2, y \lambda_{III}^2$ son los valores propios de \mathbf{FF}^T así como $\mathbf{n}_I, \mathbf{n}_{II}$ y \mathbf{n}_{III} son sus vectores propios. Es interesante observar que no se trabaja con los campos tensoriales de deformación de Cauchy-Green derecho e izquierdo (\mathbf{C} y \mathbf{B} respectivamente).

5.3.2 Equilibrio y Trabajo Virtual.

El principio de trabajo virtual es la “formulación débil” de las ecuaciones de equilibrio y es usada como la relación de equilibrio para la formulación de elemento finito. El gradiente virtual de velocidad

$$\delta \mathbf{L} = \frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}}$$

puede descomponerse en su parte simétrica y antisimétrica

$$\delta \mathbf{L} = \delta \mathbf{D} + \delta \mathbf{W},$$

donde $\delta \mathbf{D}$ es la razón virtual de deformación y $\delta \mathbf{W}$ la razón virtual de giro. Se tiene después de algunas consideraciones importantes (el tensor de Cauchy es simétrico) y de algunas operaciones algebraicas se obtiene

$$\delta \mathbf{D} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} + \left[\frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} \right]^T \right)$$

que se define de la misma forma que en Gurtin [2] para el campo tensorial de deformaciones infinitesimales \mathbf{E} .

5.3.3 Esfuerzo

Para el cálculo de los esfuerzos, se define al segundo campo tensorial de esfuerzos de Piola-Kirchhoff como

$$\mathbf{S} = J \mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^T$$

donde $J = dV/dV_0$ es el Jacobiano de la deformación elástica entre la referencia original y el volumen actual; $\boldsymbol{\sigma}$ es el campo tensorial de esfuerzos de Cauchy.

5.4 Modelo Numérico

Dado que la geometría por completo de la placa es un parámetro que se puede controlar sin ninguna limitación por el paquete numérico, ninguna consideración se dejó de lado. Dentro de esas consideraciones se encuentran:

- i. Área de contacto de la celda de carga en la placa (figura 5.4). Dado que en el proceso experimental no se tuvo bajo control el centrar la carga aplicada a la placa con el orificio ciego debido a la temperatura crítica a la que se encontraba la placa. En el modelo numérico se realizó dicha área que coincidiera en la misma línea de acción que el centro del orificio (figura 5.5). De manera estricta no se tendría un área de contacto, sino una curva a lo largo del espesor de la placa si se considera que los materiales son rígidos. Sin embargo, como se eleva a temperatura crítica la placa de resina ($110^{\circ}\text{C} < T_C \leq 125^{\circ}\text{C}$) su ductilidad incrementa y por ende la celda de carga (hecha de aluminio) ocupa algo más que una curva.
- ii. De la misma manera que en el punto (i) se produjeron áreas rectangulares en la base del modelo numérico para simular las condiciones que se tuvieron en el proceso experimental, sin embargo como se observa en la figura 5.6 las mordazas de sujeción tienen un balín el cual evita que entre en contacto un área mayor de la que se requiere.

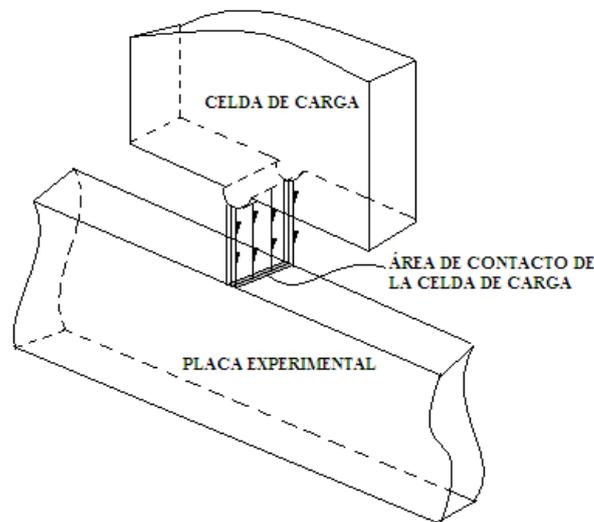


Figura 5.4 Área de contacto formada por la aplicación de una carga de la celda en la placa

- iii. Dentro de las propiedades mecánicas de la resina epóxica a temperatura crítica ocupada para el análisis experimental se tiene un módulo de elasticidad $E = 17.2 \text{ MPa}$ y una relación de Poisson $\nu = 0.44$.

- iv. Se produjeron tres áreas, como se ilustra en la figura 5.7 las cuales son paralelas a los planos XY , YZ y ZX . Las tres juntas forman el paralelepípedo que será discretizado según como se explicará más adelante.

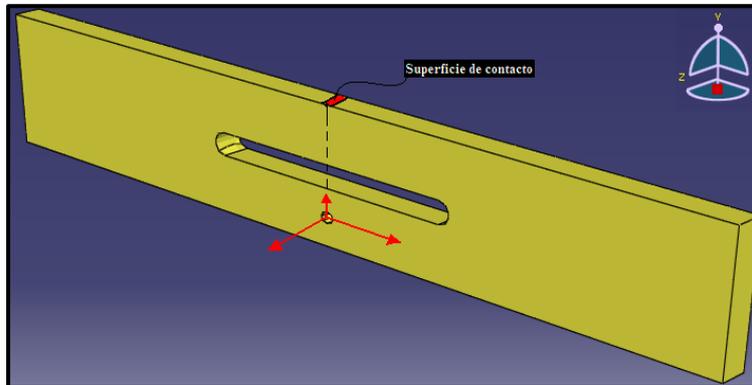


Figura 5.5 Modelo numérico de la placa con la superficie creada para aplicarle la sollicitación debido.

5.5 Discretización

La generación del mallado es un importante procedimiento de subdividir la geometría sólida en elementos finitos. Un mallado fino requiere un tiempo de cómputo considerable y por supuesto espacio de memoria. Por otra parte, el mallado ‘grueso’ reduce ambas cuestiones arriba mencionadas pero con resultados no tan precisos –por no decir exactos. En este trabajo el mallado que se consideró el adecuado según lo buscado se basó en una prueba de convergencia que se explicará en la sección 5.7. El elemento “Solid; Brick” se adapta bastante bien a mallados irregulares (causados normalmente por modelos producidos en sistemas CAD/CAM). Este tipo de elemento puede también ser usado para analizar esfuerzos en elementos estructurales con plasticidad, creep, dilatación, deflexiones largas y deformaciones largas. Como el interés del presente trabajo se centra en el orificio ciego y sus vecindades, el mallado es más fino. Para este volumen creado en la vecindad del orificio se tienen alrededor de 2800 elementos y 3900 nodos después del mallado.

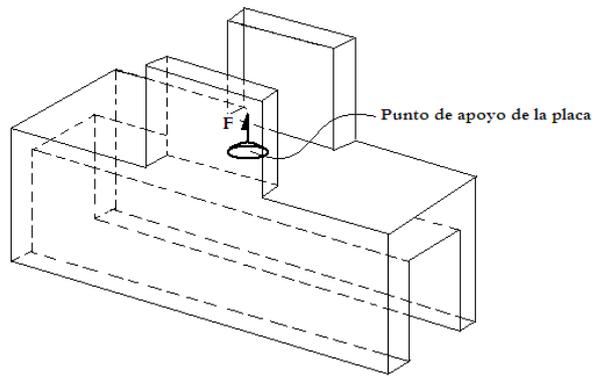


Figura 5.6 Esquema de la mordaza diseñada y maquinada para sujetar a la placa.

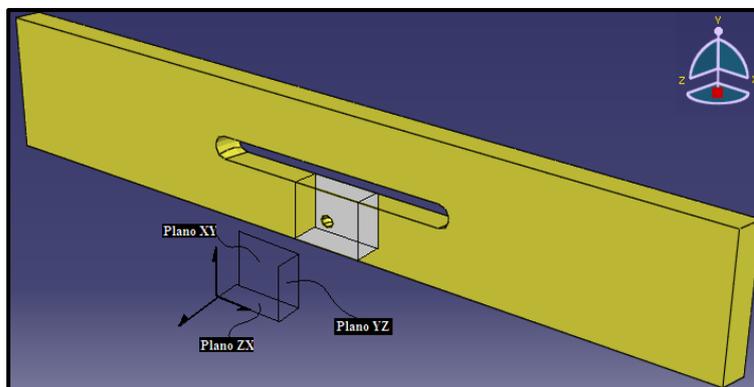


Figura 5.7 Planos creados para realizar el mallado fino en el paralelepípedo.

5.6 Solicitación, Restricciones y Condiciones de Frontera

5.6.1 Solicitación

La fuerza concentrada en el área de contacto de la celda es de 981 [N] y es aplicada como presión uniforme en el área rectangular del modelo numérico. La manera de aplicar una fuerza puntual en el paquete numérico es de la misma forma que se realizaría de forma experimental: ubicando la celda de carga en el lugar geométrico donde se requiera ejercer la fuerza (al igual que uno puede dar las coordenadas del punto donde se aplicará la fuerza en el paquete numérico). Sin embargo, como ya se mencionó antes, la fuerza se está ejerciendo en un área rectangular (que tiene un número infinito de puntos) mediante un rodillo de aluminio y no sería recomendable ni práctico aplicar una fuerza a cada nodo y lugar geométrico contenido en el rectángulo.

5.6.2 Restricciones

En cuanto a las restricciones existentes, la placa estuvo sujeta por dos mordazas que evitaban que la placa tuviera desplazamiento sobre los ejes Y y Z . Dichas restricciones en el programa ABAQUS se realizan ingresando valores de 0 (cero) a los grados de libertad (DOF) en los ejes Y y Z . El eje X se conserva sin restricción dado que la placa puede desplazarse en sobre él.

5.6.3 Condiciones de Frontera

- i. Sea $\partial\Omega_{vN}$ la superficie rectangular (figura 5.8 [A]) creada para que se presente la condición von Neumann

$$\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}}\right)_{\partial\Omega_{vN}}(\mathbb{p}, t) = \mathcal{F}$$

donde \mathcal{F} es una función constante (presión) aplicada en la superficie A , \mathbf{n} el campo de vectores normales a A y \mathbf{u} la función desconocida.

- ii. Sea $\partial\Omega_D$ las superficies rectangulares (figura 5.8 [B]) creadas para que se apliquen las condiciones Dirichlet

$$\mathbf{u}_{y,z}(\mathbb{p}, t) = \mathbb{X}$$

$$\mathbf{u}_x(\mathbb{p}, t) = \mathbf{f}(x)$$

donde \mathbf{f} es una función desconocida del desplazamiento \mathbf{u} en términos únicamente de la coordenada 'x'. La primera restricción indica que el desplazamiento \mathbf{u} en cada punto material \mathbb{p} de la superficie en sus direcciones y y z es igual a una función constante igual 0 (cero).

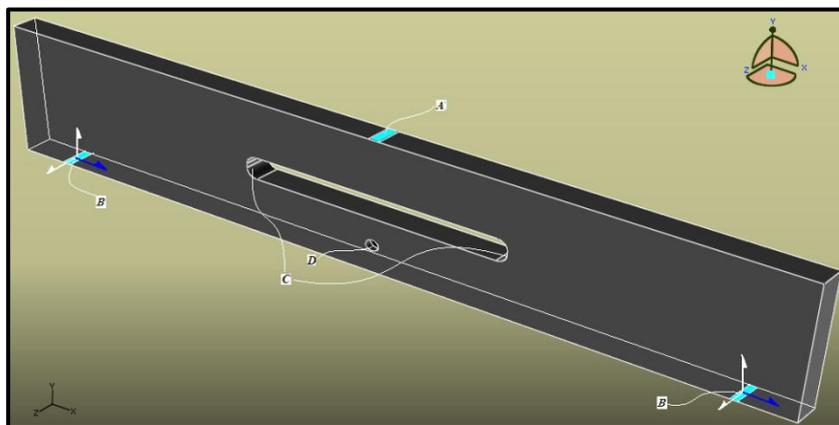


Figura 5.8 Modelo numérico creado con las superficies necesarias para ejercer la sollicitación y las restricciones

5.7 Prueba de Convergencia

Como se comentó, el número de elementos finitos ocupados es muy importante para la calidad de los resultados. Un mallado fino requiere un tiempo y memoria (RAM) de cómputo considerable. Por otro lado, un mallado grueso reduce la demanda en ambos casos, pero conlleva resultados imprecisos. Por tanto se llevó a cabo una prueba de convergencia. El modelo numérico desarrollado arriba con propiedades mecánicas de la resina epóxica utilizada en el modelo experimental es el utilizado. Se hizo el mallado con cuatro diferentes tamaños de elementos finitos para observar la convergencia de los resultados. El mallado más fino tiene 2800 elementos y el más grueso 300 elementos. Se utilizará el criterio de convergencia de Cauchy para concluir sobre los resultados obtenidos.

5.7.1 Criterio de Convergencia de Cauchy [5]

Definición. Una secuencia $X = (x_n)$ de números reales se dice que es una **secuencia de Cauchy** si para cada $\varepsilon > 0$ existe un número natural $H(\varepsilon)$ tal que para todo número natural $n, m \geq H(\varepsilon)$, los términos x_n, x_m satisfacen $|x_n - x_m| < \varepsilon$.

Criterio de Convergencia de Cauchy. Una secuencia de números reales es convergente **si y sólo si** es una secuencia de Cauchy.

5.7.2 Verificación

Los esfuerzos principales máximos del orificio ciego vs el número de elementos finitos se muestran de la tabla 5.1 a la 5.3. En mallados donde se encuentren como mínimo 1280 elementos finitos (16 e.f. (x) x 16 e.f. (y) x 5 e.f. (z)) el esfuerzo máximo se encuentra dentro de un $\varepsilon \leq 5\%$ (según la figura 6.2 del c. VI).

Tabla 5.1 Esfuerzos principales máximos para el punto 6 (centro de la raíz del orificio ciego)

Número de elementos finitos	2800	1280	748	300
Esfuerzo Principal Máximo σ_θ [MPa]	24.701	24.491	23.101	22.067

Tabla 5.2 Esfuerzos principales máximos para el punto 8 (punto de transición entre el recorrido y la raíz del orificio ciego)

Número de elementos finitos	2800	1280	748	300
Esfuerzo Principal Máximo σ_θ [MPa]	35.589	35.288	33.751	32.711

Tabla 5.3 Esfuerzos principales máximos para el punto 11

Número de elementos finitos	2800	1280	748	300
Esfuerzo Principal Máximo σ_θ [MPa]	39.131	38.811	37.122	36.133

La conclusión es que un mallado con 1280 e.f. satisface el criterio de convergencia de Cauchy, ya que:

1. Para el punto 6: $|24.701 - 24.491| = 0.210 = 0.85\% < \varepsilon$
2. Para el punto 8: $|35.589 - 35.288| = 0.301 = 0.84\% < \varepsilon$
3. Para el punto 11: $|39.131 - 38.511| = 0.620 = 1.58\% < \varepsilon$

CAPÍTULO VI. RESULTADOS NUMÉRICOS

Introducción. Se presentarán resultados cualitativos y cuantitativos obtenidos mediante el uso del paquete de E. F. ABAQUS®. El gran auge que se ha tenido por el manejo de esta herramienta ha hecho que se pierda el hilo conductor entre la teoría y la práctica. Los resultados presentados serán puestos en contraste con los resultados experimentales; esta interacción es necesaria para una correcta interpretación de los resultados obtenidos de forma numérica. Debido a causas económicas el proceso experimental requirió de una debida atención ya que no se tenían demasiadas placas con que trabajar. Una gran ventaja que posee el método numérico radica en el “infinito” número de pruebas que se pueden hacer sin costo alguno. Primero se exponen los resultados obtenidos para los cortes principales tal y como se realizaron en el método experimental. Se obtendrán los valores y vectores propios en los puntos^{†††} considerados como zonas de concentración de esfuerzos dentro del dominio de estudio.

6.1 Condiciones de uso. El estudio numérico de una placa delgada con orificio ciego se realizó usando el programa de elemento finito ABAQUS 6.7. El post-procesador usado para construir el modelo de elemento finito fue ABAQUS/Viewer 6.7-1. Se crearon diversos modelos numéricos para los diversos cambios en los parámetros, tales como la profundidad del orificio ciego y geometría de la raíz del mismo.

El mallado está dividido en dos regiones: una cúbica correspondiente al volumen que rodea al orificio ciego con un mallado más fino y una rectangular con mallado más grueso.

6.2 Condiciones de carga. Uno de los problemas más difíciles tratándose del modelo de elemento finito fue el crear las superficies de contacto. Los parámetros de la superficie de contacto pueden afectar de manera considerable los resultados finales. Estas superficies son tres: a) una para aplicar una presión uniforme y b) dos superficies para aplicar un desplazamiento $\mathbf{0}$ (vector cero) sólo para las direcciones Y y Z . Recordar que las placas se montaron sobre herramientas de sujeción que permitían desplazamiento sobre el eje X ; 32 elementos fueron usados alrededor del orificio ciego. Las propiedades mecánicas que se manejaron para el modelo numérico fueron las mismas que se indican en la ficha técnica de la resina epóxica PSM-9. La figura 6.1 muestra los valores correspondientes a las constantes elásticas (Módulo de Young E y la relación de Poisson ν) que se ingresaron en el programa. De manera previa se ha considerado al material como homogéneo, isotrópico, elástico y lineal.

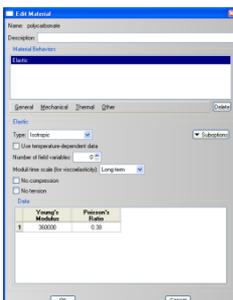


Figura 6.1 Comando utilizado en ABAQUS para ingresar los valores de las constantes elásticas del material.

6.3 Zonas en consideración para su estudio (Corte transversal). A diferencia de haberse limitado los resultados experimentales a puntos muy específicos donde existen concentraciones de esfuerzo, en el análisis numérico no se limitarán sólo considerar esos mismos puntos.

Una vez corroborando los resultados numéricos obtenidos en los mismos puntos que los considerados en el modelo experimental, entonces se podrán obtener y analizar los valores correspondientes a los restantes puntos señalados en la figura 6.2. Los puntos de color rojo están ubicados en la misma zona de los valores propios obtenidos de forma experimental; de color azul son los nuevos puntos de donde se podrán obtener los valores propios principalmente en el recorrido del orificio ciego. Se tienen pues 11 puntos a considerar, y este número no cambiará aún y con que se tenga una profundidad mayor o menor a la que se muestra en la figura 6.2.

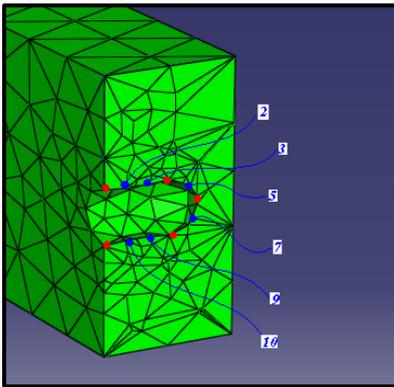


Figura 6.2 Nodos en consideración para obtención de valores propios.

Se manejará la misma clasificación de cortes como la ocupada de forma experimental y como se ilustra en la tabla 5.1.

6.3.1 Unidades. Es muy importante tener en cuenta que unidades se han ido manejando a lo largo de la experimentación. Las unidades que se ocuparon para el diseño numérico de la placa fueron milímetros [mm], por lo que las unidades para la presión aplicada será en [MPa].

6.3.2 Criterios de Falla. Dentro de los criterios de falla que se tienen programados en el programa, se encuentran:

1. Criterio de von Mises.
2. Criterio de Tresca.

Se pueden obtener los esfuerzos principales por separado. Por desgracia, recordando que las franjas isocromáticas son zonas donde la diferencia de los esfuerzos principales es constante, no podrán relacionarse de manera óptica las franjas obtenidas de forma experimental con las obtenidas de manera numérica. Sin embargo, se sabe que en la frontera uno de esos esfuerzos vale cero, por lo que se puede obtener de manera directa

el esfuerzo principal σ_θ o σ_r según sea el caso. Además deben coincidir de forma cualitativa las zonas de mayor concentración de esfuerzo en el análisis numérico con las obtenidas de manera experimental.

6.4 Reporte para el corte transversal 1-AT. Dentro de las múltiples opciones de visualización que se tienen para presentar los resultados, se ha optado por no mostrar la división nodal en la placa (tal y como aparece en la figura 6.2). Se prefirió mostrar únicamente los bordes de la placa. Ambas opciones de visualización se pueden observar en la figura 6.3.

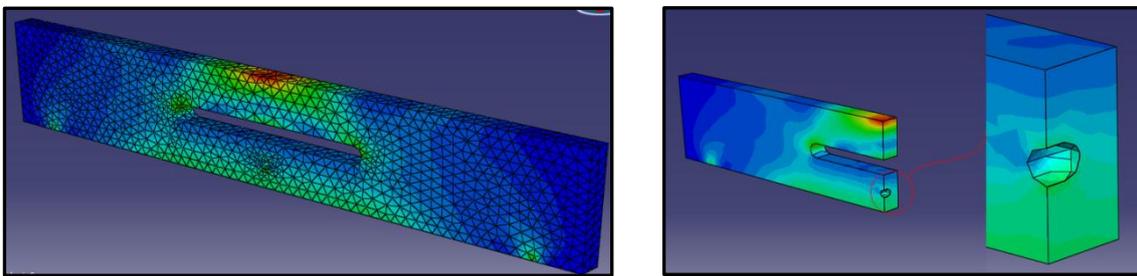


Figura 6.3 Izquierda: modo de visualizar los resultados mostrando todos los bordes exteriores (nodal); derecha: visualización únicamente de los bordes de la placa.

Los valores propios existentes en la ubicación de los 11 puntos considerados en la figura 6.2 se presentan en la tabla 6.1. De igual manera se obtuvieron los factores de concentración de esfuerzo para cada punto. En la figura 6.4 se muestra de perfil el corte transversal hecho en la placa con orificio ciego de 3.1 [mm] de profundidad. Los valores corresponden al esfuerzo principal (σ_θ) máximo.

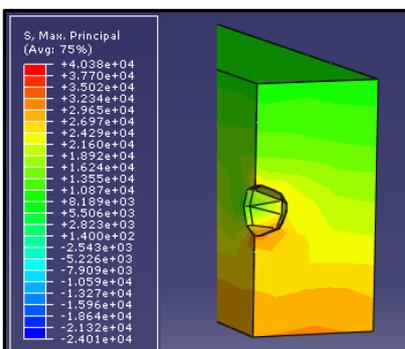


Figura 6.4 Valores del esfuerzo principal máximo para el corte transversal, para el caso de un orificio ciego de 3.1 mm de profundidad

La figura 6.5 (derecha) muestra las zonas donde se tuvo los valores más altos del esfuerzo principal. Es interesante observar el comportamiento de la zona marcada con el número 5. No es precisamente un punto de transición entre el recorrido del orificio y la

concavidad de la raíz, pero la ubicación es la misma que la obtenida de forma experimental (Fotografía 4.3b).

Punto	Esfuerzo tangencial σ_{θ}	F.C.E. “K”
1	24.655e3	1.7
4	20.766e3	1.43
5	25.125e3	1.73
6	23.298e3	1.60
7	23.954e3	1.65
8	27.585e3	1.90
11	29.897e3	2.1

Tabla 6.1 Valores propios del esfuerzo tangencial para una placa con orificio ciego con profundidad de 3.1 mm.

Este comportamiento presumiblemente corrobora que no se incurrió en alguna clase de error, por lo menos en las condiciones de frontera impuestas en el modelo numérico. Una vez obtenidos los valores propios, es conveniente graficar para ubicar y comprender cómo se está comportando el esfuerzo principal en toda la periferia del orificio ciego. En la tabla 6.1 se pueden observar varios detalles que llaman la atención.

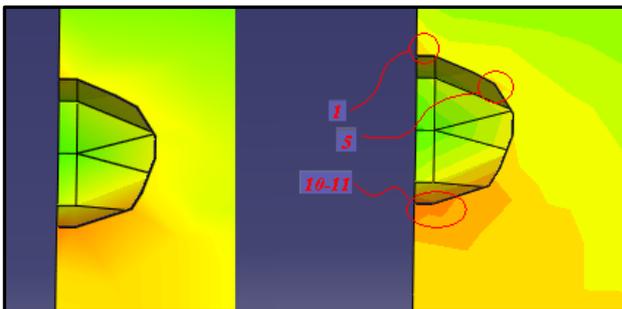
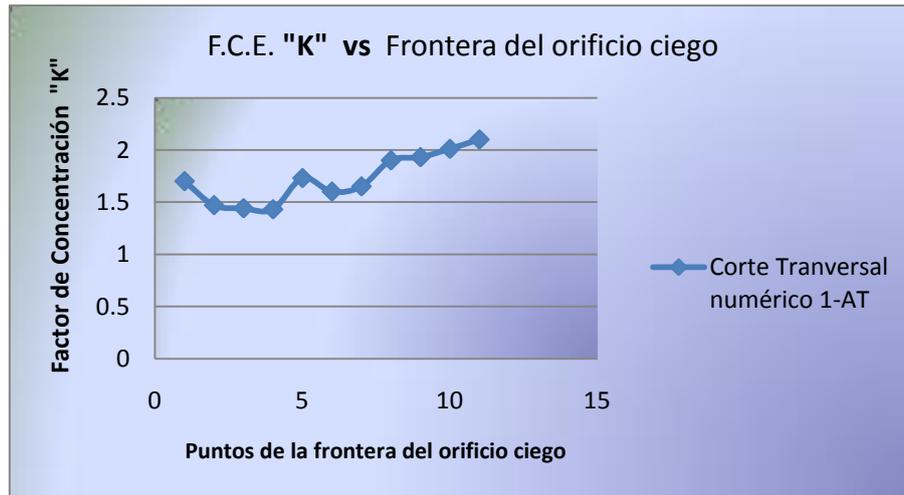


Figura 6.5 Distribución del esfuerzo principal máximo alrededor del dominio de estudio.

Los puntos 10 y 11 indicados en la figura 6.5 muestran una concentración de consideración y de alguna manera este comportamiento es lógico. Debido a que se está sometiendo a la placa a una flexión como la explicada en la sección 3.1.1, se produce un estado a tensión que va de menos (eje neutro) a más (parte inferior de la placa). Esto explica el por qué se tiene un estado de esfuerzos de mayor magnitud en la parte inferior donde se encuentran los puntos 10 y 11.

Debido a que la profundidad del orificio es de 3.1mm, no se pudo generar un recorrido más largo para que se pudieran tomar todos los puntos señalados en la figura 6.2. Por tanto, sólo se ocuparon los puntos que están presentes en la tabla 6.1.



Gráfica 6.1 Comportamiento del Factor K en la periferia del orificio ciego.

Como la profundidad del orificio ciego no fue muy grande, no se produjo propiamente un recorrido. Como se observa en la figura 6.5, la broca de punta redonda sólo generó la concavidad que tiene su punta. Esta concavidad se muestra en la figura 6.6 con los valores del factor de concentración de esfuerzos K en la periferia del orificio.

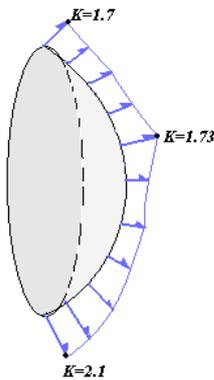


Figura 6.6 Concavidad formada por la punta redonda de la broca.

Estos valores K se representan mediante vectores de color azul para hacer referencia del tipo de esfuerzo presente en la periferia del orificio; en el caso de la figura 6.6, los esfuerzos están a tensión.

6.5 Reporte para el corte transversal 2-AT. Se retomará por un momento algunos hechos que se presentaron en los resultados experimentales para el corte transversal 2-AT (6.2 mm. de profundidad).

En la fotografía 4.6 se observa que las franjas de mayor orden se encuentran en el recorrido del orificio ciego. La franja de mayor orden se encuentra cercana al vértice que se forma entre la frontera libre y el orificio. La figura 6.7 muestra que este

comportamiento se repite en el análisis numérico. La región señalada con la letra A corresponde al recorrido del orificio hasta la zona de transición, señalada con la letra B.

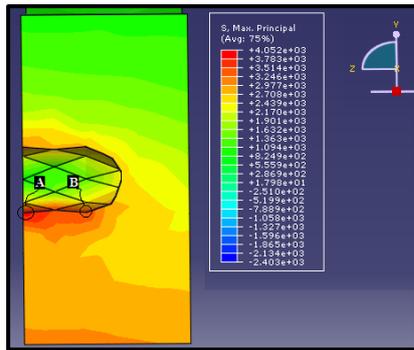


Figura 6.7 Valores del esfuerzo principal máximo para el corte transversal, para el caso de un orificio ciego de 6.2 mm de profundidad

También se observa en la figura 6.7 que el esfuerzo principal máximo se distribuye de forma uniforme a todo lo largo del recorrido del orificio ciego. Esto ayuda a que no se concentre en el vértice de 90° que se forma entre la frontera y el orificio. La tabla 6.2 muestra los valores del esfuerzo tangencial de acuerdo a los puntos mencionados e ilustrados en la figura 6.2. El factor de concentración de esfuerzo máximo se encuentra en el vértice (punto 11) y es de 2.62. Aún y con que se tiene un factor K de consideración, la deformación máxima se considera todavía infinitesimal. La tabla 6.3 y la figura 6.8 ilustran los valores y la zona de mayor deformación, respectivamente.

Punto	Esfuerzo tangencial σ_{θ}	F.C.E. “ K ”
1	28.356e3	1.88
2	28.176e3	1.87
3	27.638e3	1.84
4	26.804e3	1.78
5	25.535e3	1.71
6	24.701e3	1.64
7	31.340e3	2.08
8	35.589e3	2.37
9	37.122e3	2.47
10	38.298e3	2.55
11	39.131e3	2.62

Tabla 6.2 Valores propios del esfuerzo tangencial para una placa con orificio ciego con profundidad de 6.2 mm.

La razón por la que las franjas obtenidas de manera experimental no coinciden de manera gráfica con las obtenidas por la vía numérica es la siguiente. El patrón de franjas

isocromáticas obtenidas de un modelo bidimensional da líneas a lo largo de las cuales la diferencia de esfuerzos principales $\sigma_1 - \sigma_2$ es igual a una constante [2]. Por otra parte, las franjas obtenidas por medio numérico son representativas de los esfuerzos por separado. Sin embargo, ambas deben coincidir al momento de ubicar las zonas de mayor concentración de esfuerzos.

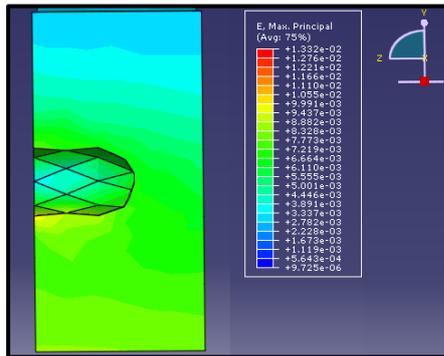
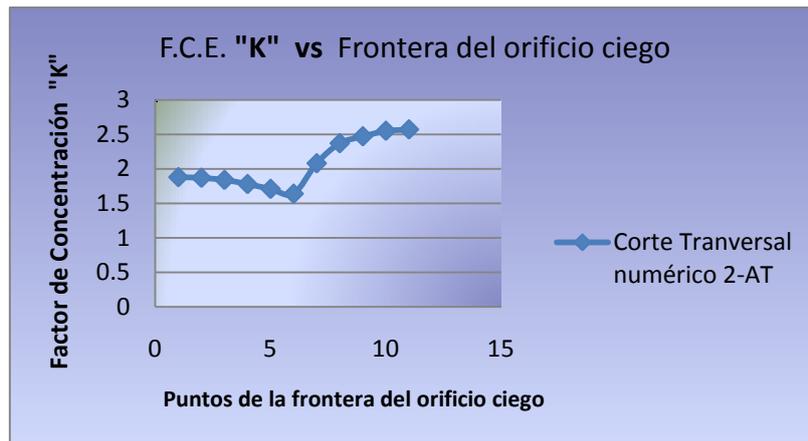


Figura 6.8 Valores para la deformación máxima en el corte transversal, para el caso de un orificio ciego de 6.2 mm de profundidad.

Punto	Deformación máxima ϵ_1
1	0.07029
2	0.06823
3	0.06698
6	0.06595
8	0.08171
10	0.08954
11	0.09323

Tabla 6.3 Valores de la deformación máxima para una placa con orificio ciego con profundidad de 6.2 mm.

La gráfica 6.2 muestra el comportamiento del esfuerzo tangencial máximo en la frontera del orificio ciego. Una diferencia importante respecto a la gráfica 6.1 radica en la ausencia de un ‘pico’ presente en el punto 5. A partir del punto 6 (centro de la raíz del orificio) hasta el punto 11, el factor K se lleva de manera más uniforme.



Gráfica 6.2 Comportamiento del Factor K en la periferia del orificio ciego.

La figura 6.9 muestra la distribución del esfuerzo máximo con respecto al esfuerzo nominal a lo largo del orificio. El esfuerzo máximo se presenta en el vértice a un ángulo de $-\frac{\pi}{2}$ rad.

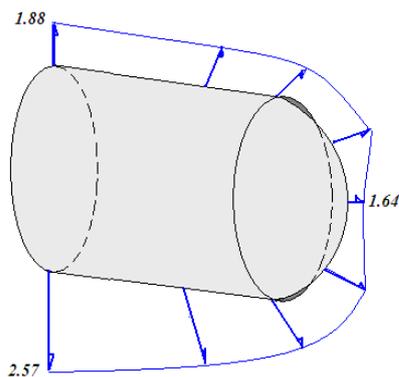


Figura 6.9 Distribución del esfuerzo a lo largo del recorrido y la raíz del orificio ciego.

Los esfuerzos presentes tanto en el recorrido como en la raíz del orificio ciego se encuentran a tensión.

6.5 Reporte para el corte transversal 3-AT. Se han encontrado resultados interesantes para un orificio ciego de 7.8mm de profundidad. Después de analizar los resultados para los cortes 1-AT y 2-AT, la distribución de esfuerzos principales en la periferia del recorrido y del orificio se va incrementando conforme aumenta la profundidad. Sin embargo, como se observa en la figura 6.10, el esfuerzo se concentra tanto en el vértice del recorrido y la frontera libre y en la zona de transición. Ambas zonas están encerradas y marcadas como σ_{max} .

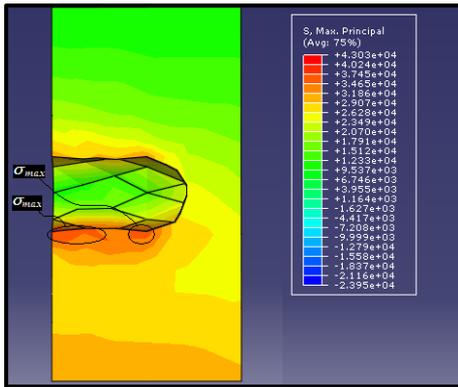


Figura 6.10 Valores del esfuerzo principal máximo para el corte transversal, para el caso de un orificio ciego de 7.8 mm de profundidad

En la figura 6.11 se puede observar un acercamiento del orificio. La distribución del esfuerzo principal no es uniforme a lo largo del recorrido. Se puede distinguir que los esfuerzos se concentran casi la mitad el recorrido y disminuye hasta un valor de $0.85\sigma_{max}$.

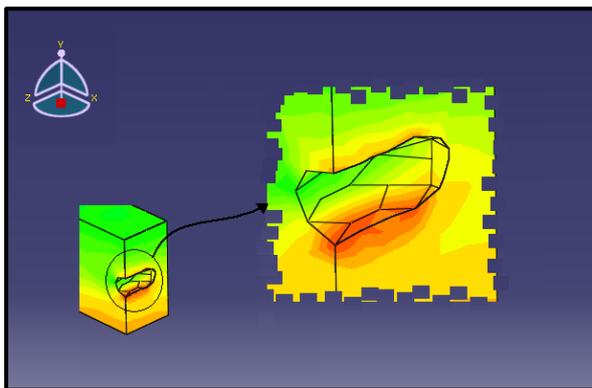


Figura 6.11 Distribución del esfuerzo principal máximo en la frontera del orificio ciego.

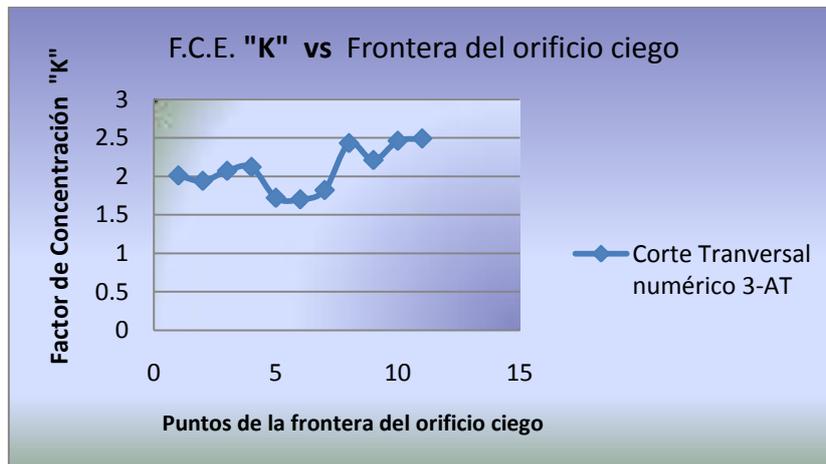
Los resultados experimentales muestran similares resultados, de manera especial en la zona de transición entre el recorrido y la concavidad del orificio. La diferencia entre los esfuerzos principales existente entre el centro de la raíz del orificio (punto 6) y la frontera del recorrido (punto 11) se ha reducido en un 17.2% con respecto a los mismos puntos del corte 2-AT. La concentración de esfuerzos tangenciales en el punto 11 baja de manera considerable y aumenta en el centro de la raíz.

Punto	Esfuerzo tangencial σ_θ	F.C.E. “K”
1	30.822e3	2.01
2	29.211e3	1.94
3	31.171e3	2.07
4	31.816e3	2.12

5	25.912e3	1.72
6	25.592e3	1.71
7	27.332e3	1.82
8	36.463e3	2.43
9	33.247e3	2.21
10	36.963e3	2.46
11	37.487e3	2.48

Tabla 6.4 Valores propios del esfuerzo tangencial para una placa con orificio ciego con profundidad de 7.8 mm.

Sin embargo, el comportamiento a lo largo del recorrido es de altibajos. La gráfica 6.3 muestra que el esfuerzo tangencial conforme se va acercando a la zona de transición entre el recorrido y la raíz. En este punto aumenta de nueva cuenta, muy cerca del valor obtenido para el corte 2-AT.



Gráfica 6.3 Comportamiento del Factor K en la periferia del orificio ciego.

La magnitud de la deformación que sufre el orificio a lo largo del recorrido y en la raíz se ilustra en la tabla 6.5. El principal cambio se presenta en el centro de la raíz del orificio, donde hubo un aumento del 10.9% con respecto al corte 2-AT.

Punto	Deformación máxima ϵ
1	0.07613
2	0.07501
3	0.07498
6	0.07387
8	0.09496
10	0.09219
11	0.09834

Tabla 6.5 Valores de la deformación máxima para una placa con orificio ciego con profundidad de 7.8 mm.

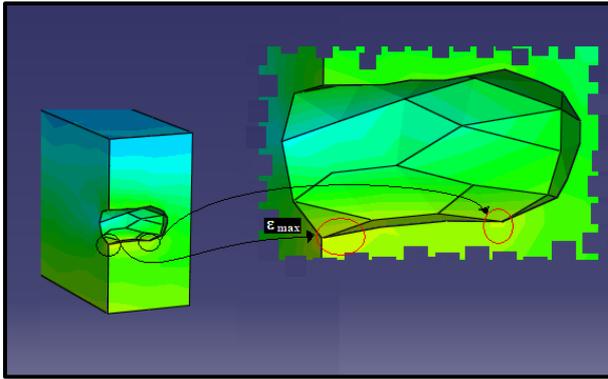


Figura 6.12 Distribución de la deformación máxima en el corte transversal, para el caso de un orificio ciego de 7.8 mm de profundidad.

6.6 Reporte para el corte longitudinal 1-AL. De la misma manera que se obtuvieron los resultados para los cortes transversales se han obtenido los longitudinales. En la figura 6.13 se observa que el esfuerzo principal máximo se encuentra en el centro de la raíz del orificio ciego. Sin embargo, a diferencia de lo ocurrido de forma experimental donde se tiene un ángulo ϕ y se localiza el esfuerzo principal máximo, en la parte numérica se tuvo mayor control en este aspecto.

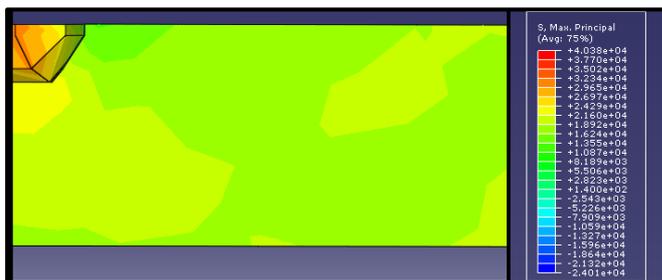
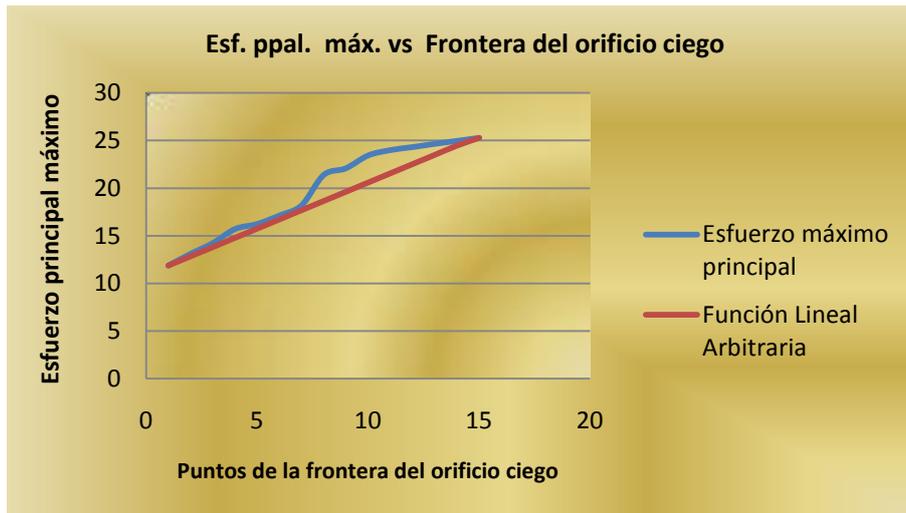
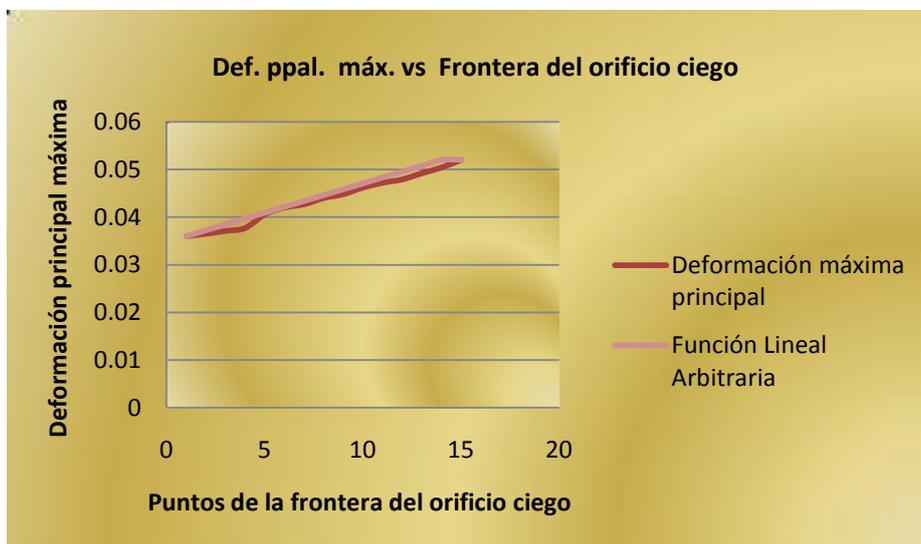


Figura 6.13 Distribución del esfuerzo principal máximo (tangencial) a lo largo de la raíz del orificio ciego de 3.1 mm.

Se comentó en el capítulo IV que la posible razón por la que se tenía este ángulo ϕ se debía al hecho de no tener colineal la fuerza aplicada a la placa con el centro del orificio ciego. Esta falla produce error y se tiene que tomar en consideración al momento de obtener resultados cualitativos. Este error se encuentra dentro de un rango aceptable y no se consideró que produjera cambios de consideración si se hubiera hecho de forma exacta. Gracias a la ventaja que ofrece la técnica numérica, se pueden obtener los valores cuantitativos en cualquier nodo que se requiera. Por tanto, no se limitará graficar sólo tres puntos como sucedió en la parte experimental y se graficarán los puntos que se crean suficientes a partir de $\phi=0$ hasta $\phi=\pi/2$ [rad], según como se indica en la figura 4.8 del capítulo IV.



Gráfica 6.4 Valores de σ_{θ} a lo largo del orificio ciego.



Gráfica 6.5 Valores de la deformación principal ϵ_{θ} a lo largo del orificio ciego.

El comportamiento que se observa en la gráfica 6.5 es prácticamente lineal. Sin embargo, analizando ambas gráficas se podría concluir que el comportamiento de σ_{θ} vs ϵ_{θ} no es lineal. La tabla 6.6 muestra los valores del esfuerzo principal y su correspondiente deformación según el ángulo ϕ considerado como se muestra en la figura 6.14.



Figura 6.14

Ángulo ϕ [rad]	Esfuerzo Principal (σ_{θ}) [MPa]	Deformación Principal (ϵ_{θ})	F.C.E. "K"
0	13.57	0.0351	0.88
$\pi/6$	16.13	0.0428	0.97

$\pi/3$	21.81	0.0482	1.29
$\pi/2$	24.26	0.0531	1.48

Tabla 6.6 Valores propios y F.C.E. “K” para el corte longitudinal 1-AL.

6.7 Reporte para el corte longitudinal 2-AL. De la misma manera que el reporte 6.6, se presentarán resultados para los esfuerzos y deformaciones principales. Sin embargo, la profundidad del orificio ciego presente en este reporte (6.2 mm) hace que se puedan obtener valores propios en más puntos, ya que propiamente se tiene un recorrido y una raíz producidos por el orificio ciego. La figura 6.15 muestra el corte longitudinal con su tabla de valores propios.

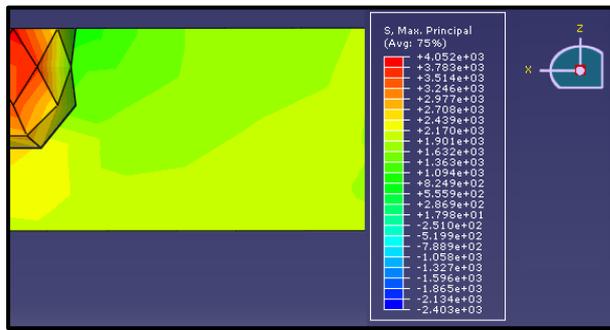


Figura 6.15 Distribución del esfuerzo principal máximo (tangencial) a lo largo de la raíz del orificio ciego de 6.2 mm.

Se observa de forma clara que el esfuerzo se va concentrando en el centro de la raíz (zona color naranja); para el corte 1-AL esta misma zona estaba de color amarillo. La zona de mayor concentración de esfuerzo se encuentra en el recorrido del orificio (zona color roja). Sus valores coinciden con los obtenidos para el corte transversal 2-AT.

La mayor profundidad del orificio ciego causó que el esfuerzo aumentara en el centro de la raíz. Sin embargo, cerca de la frontera la distribución se mantuvo dentro del mismo rango que el corte 1-AT.

La zona de transición entre el recorrido del orificio y la raíz del orificio ciego no parece causar una concentración en el plano ZX estudiado.

La figura 6.16 muestra la distribución de la deformación máxima principal ϵ_0 para el mismo corte longitudinal.

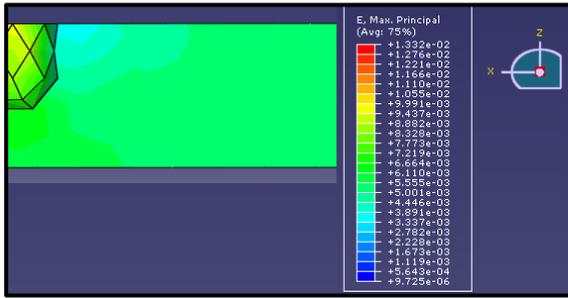


Figura 6.16 Distribución de la deformación máxima principal en el corte longitudinal, para el caso de un orificio ciego de 6.2 mm de profundidad.

La distribución se muestra mas uniforme en comparación de los esfuerzos principales máximos. El valor propio máximo se encuentra en el centro de la raíz, y ha aumentado 22% aproximadamente. Sin embargo, se mantiene dentro del rango permitido para considerarse una deformación infinitesimal. La figura 6.17 muestra los puntos más importantes del recorrido del orificio y de la raíz del mismo.

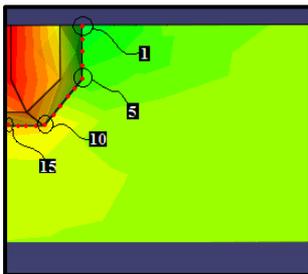
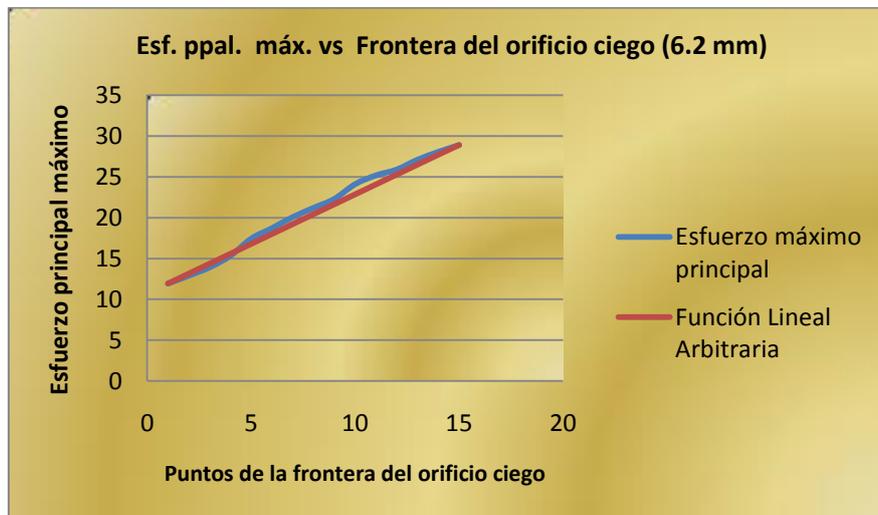


Figura 6.17 Puntos 1 y 5 pertenecen al recorrido del orificio (1 en la frontera y 5 en la zona de transición) y los puntos 10 y 15 a la raíz del orificio.

La gráfica 6.6 muestra cómo se distribuye el esfuerzo principal máximo en la frontera del orificio ciego; partiendo del punto 1 que se ubica donde comienza el recorrido hasta el punto 15 que se encuentra en el centro de la raíz del orificio.



Gráfica 6.6 Valores de σ_1 a lo largo del orificio ciego de 6.2 mm de profundidad

El esfuerzo a lo largo del recorrido y la raíz va aumentando de forma mas uniforme; esto se cree pueda deberse a la profundidad del orificio. Si se observan de nueva cuenta los cortes transversales, la distribución del esfuerzo principal máximo a largo del orificio fueron aumentando de manera más uniforme conforme se incrementó la profundidad del orificio ciego.

6.8 Reporte para el corte longitudinal 3-AL. La figura 6.18 muestra el corte longitudinal para un orificio ciego de 7.8mm de profundidad (izquierda) y para un orificio de 8.6mm de profundidad (derecha). Llama la atención que el esfuerzo principal máximo sea menor en comparación del corte 2-AL con una profundidad del orificio menor.

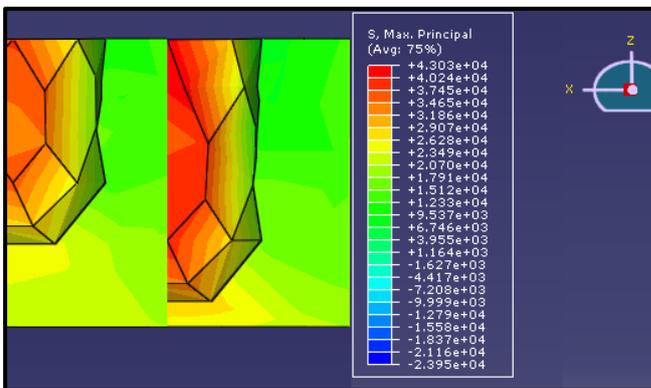
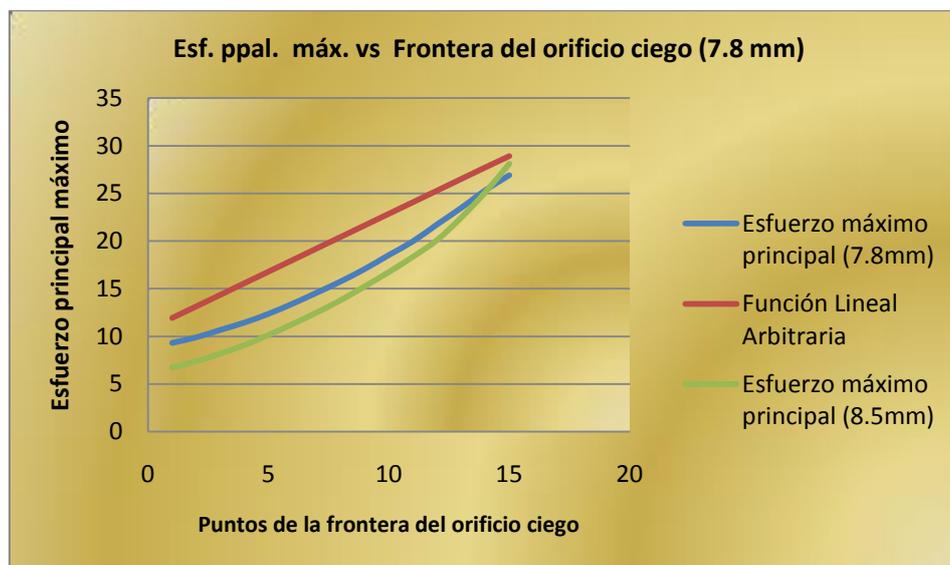


Figura 6.18 Distribución de esfuerzos principales máximos para orificios de 7.8mm y 8.5mm.

La gráfica 6.7 muestra cómo se va comportando el esfuerzo principal a lo largo de los puntos considerados. Los valores propios van aumentando de forma exponencial conforme se acercan al centro de la raíz del orificio.



Gráfica 6.7 Valores de σ a lo largo del orificio ciego de 7.8 y 8.5 mm de profundidad

Conforme se va acercando la raíz del orificio ciego a la frontera libre, los valores propios van incrementando de forma exponencial; inclusive superan en magnitud a los obtenidos para el caso del corte 3-AL.

Por otra parte, la deformación máxima principal que se tiene es de 0.0691 y se ubica en el centro de la raíz del orificio. La figura 6.19 muestra la distribución a lo largo del recorrido y de la raíz.

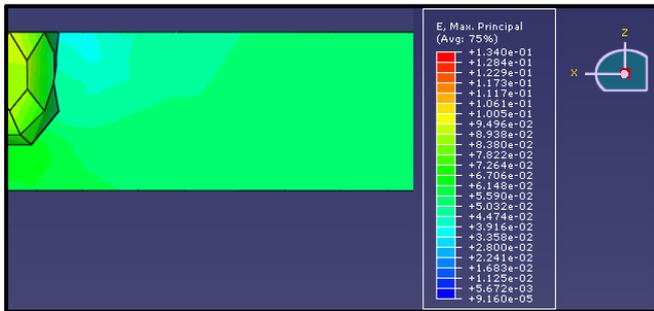
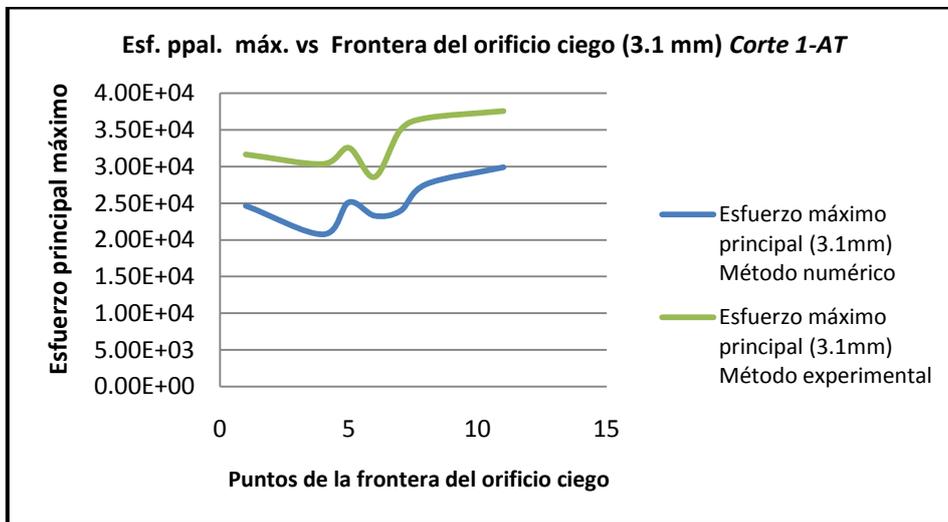


Figura 6.19 Distribución de la deformación máxima principal en el corte longitudinal, para el caso de un orificio ciego de 7.8 mm de profundidad.

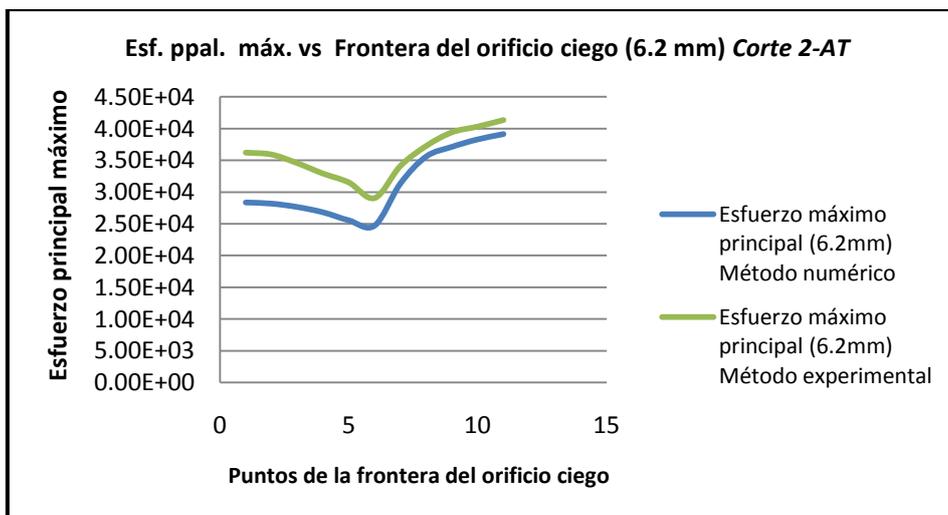
CONJUNCIÓN DE RESULTADOS Y
CONCLUSIONES

7.1 Conjunción de resultados experimentales y numéricos

Las figuras 4.5 y 6.6 muestran, respectivamente los valores de concentración de esfuerzos para el corte transversal 1-AT obtenidos experimental y numéricamente. Aún y cuando se tienen de forma cuantitativa diferencias de $\pm 17\%$, la concentración de esfuerzo más alta se ubica en la misma zona en ambos métodos. El comparativo de ambos resultados se ilustra en la gráfica 7.1. En ambas se presentan puntos de inflexión en los puntos de la frontera 3, 5 y 6. Los máximos se ubican en el punto de la frontera no. 11 para ambas gráficas. Sin embargo, los mínimos se encuentran en el punto no. 7 y en el punto no. 4 según los resultados experimentales y numéricos respectivamente.



Gráfica 7.1 Distribución del esfuerzo ppal. máximo a lo largo de la frontera del orificio ciego (3.1mm)



Gráfica 7.2 Distribución del esfuerzo ppal. máximo a lo largo de la frontera del orificio ciego (6.2mm)

La gráfica 7.2 muestra el comportamiento de la placa para el corte transversal 2-AT. De nueva cuenta, existe una diferencia de $\pm 21\%$ en el punto de la frontera no. 1. El esfuerzo principal máximo aumenta en un 25% en el punto de mayor concentración de esfuerzo (punto no. 11), ubicado en el vértice entre el recorrido del orificio y la frontera libre. A diferencia del comportamiento para el corte 1-AT donde la diferencia de valores entre ambos métodos permanece constante, en el corte 2-AT los valores empiezan a acercarse casi hasta encontrarse a partir del centro del orificio ciego hasta el punto del recorrido no. 11.

Para el caso del corte transversal 3-AT, las fotografías obtenidas experimentalmente no tuvieron la claridad necesaria para hacer un análisis cuantitativo. Sin embargo, es importante señalar lo obtenido en ambos métodos. La figura 7.1 muestra ambos resultados. En la figura 7.1 (a) se señala la ubicación de la franja de mayor orden N , la cual comienza muy cercana a la zona de transición entre el recorrido del orificio y la raíz del mismo y al parecer termina en la frontera libre; en la figura 7.1 (b) se señala con mayor detalle estos puntos que coinciden con los obtenidos experimentalmente.

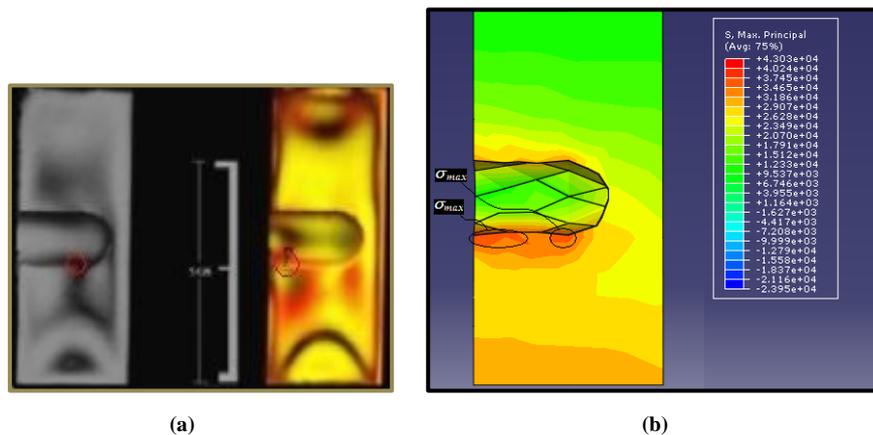
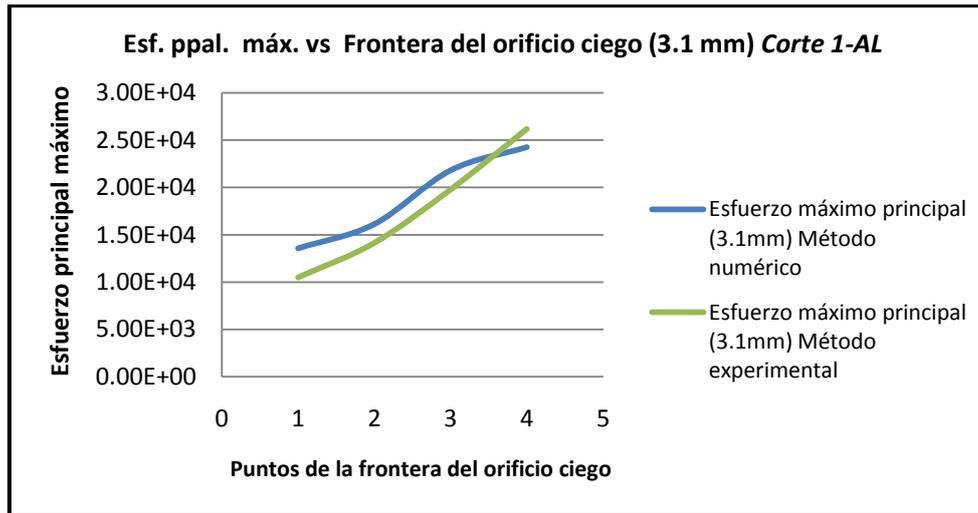
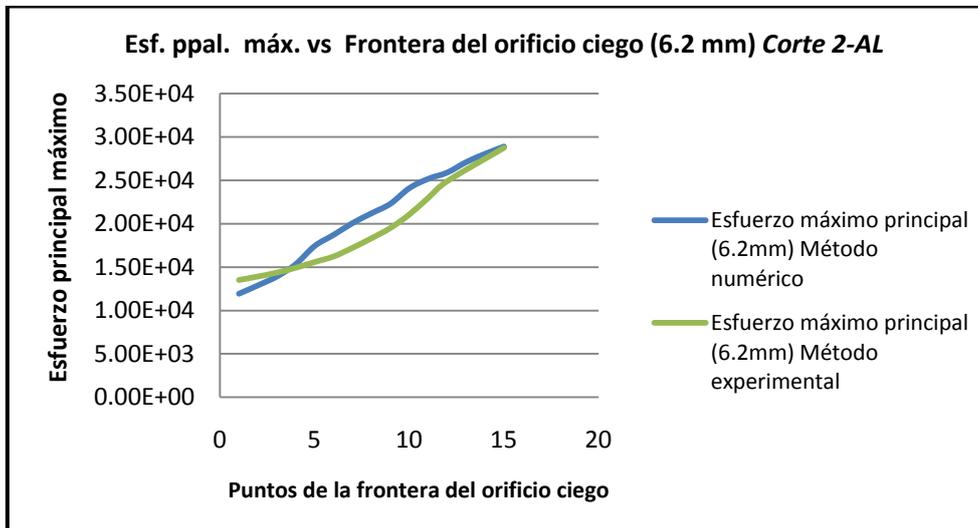


Figura 7.1 Corte transversal 3-AT obtenidos por métodos experimental y numérico

Las gráficas 7.3 y 7.4 muestran un comportamiento exponencial partiendo de la frontera libre (punto no. 1) hasta el centro de la raíz del orificio ciego (punto no. 4 para orificio de 3.1mm de profundidad y punto no. 15 para orificio de 6.2mm de profundidad) según los valores obtenidos de forma experimental. De la misma manera que sus análogos (cortes 1-AT y 2-AT) los valores obtenidos por ambos métodos difieren en mayor grado para el corte 1-AL con un 11%; mientras para el corte 2-AL difieren en un 4%.

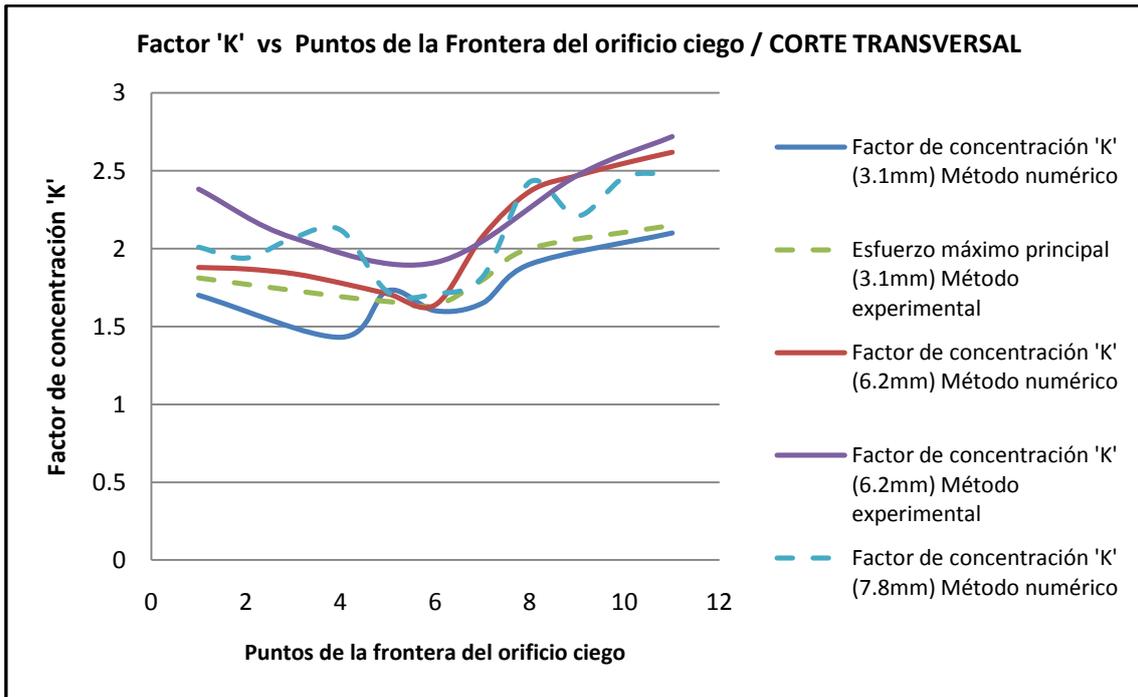


Gráfica 7.3 Distribución del esfuerzo ppal. máximo a lo largo de la frontera del orificio ciego (3.1mm) Corte 1-AL

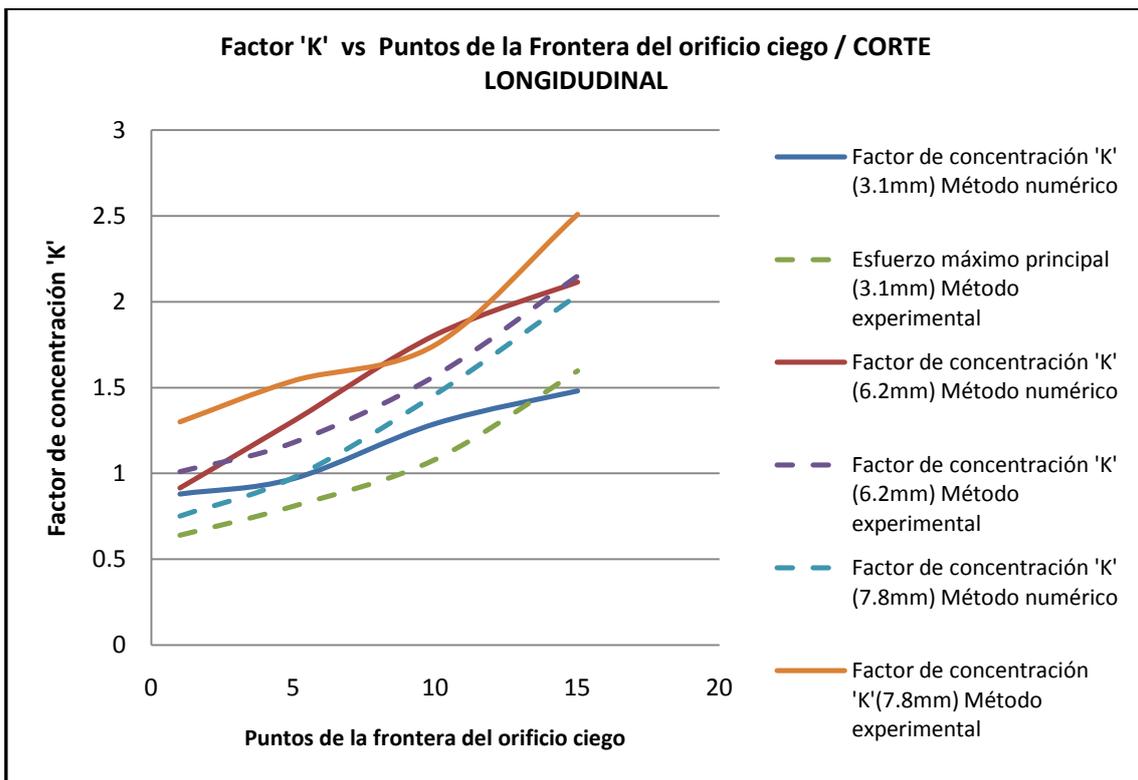


Gráfica 7.4 Distribución del esfuerzo ppal. máximo a lo largo de la frontera del orificio ciego (6.2mm) Corte 2-AL

Dos de los resultados más importantes se muestran en las gráficas 7.5 y 7.6. El factor de concentración de esfuerzos 'K' obtenido para ambos cortes muestra que el esfuerzo máximo se ubica en zonas donde el ingeniero de campo puede tener acceso visualmente. Sin lugar a dudas este hecho es importante. Los concentradores de esfuerzo siguen siendo tema de investigación debido a que son la principal causa de falla en elementos de máquina, herramental, placas, láminas, cascarones y cualquier otra forma que se les quiera dar.



Gráfica 7.5 Distribución del factor 'K' a lo largo del recorrido y raíz del orificio ciego para los cortes transversales



Gráfica 7.6 Distribución del factor 'K' a lo largo del recorrido y raíz del orificio ciego para los cortes longitudinales

7.2 Conclusiones

Se ha investigado el comportamiento mecánico de las placas delgadas con orificio ciego bajo cargas a tensión ‘casi’ puro. Se adquirió una placa fotoelástica para pruebas tridimensionales comercial para de ahí obtener 18 sub-placas (280mm x 60mm x 9.2mm). Se determinó que el único parámetro a manejar sería la profundidad del orificio ciego. Llevado a cabo el proceso del ‘stress freezing’ con el equipo a disposición, el tutor junto con los asesores determinaron qué cortes debían obtenerse para conocer el comportamiento del orificio ciego, y en particular la raíz de éste, y así proporcionarle al ingeniero de campo datos específicos que requiera antes de diseñar sus orificios.

Sternberg & Sadowsky [24] encontraron que el esfuerzo máximo en placas con orificios circulares se encuentra en la raíz del orificio; efectivamente encontraron que el esfuerzo a lo largo del espesor de la placa variaba en un 4%, aún y con que el problema se consideraba plano. El presente estudio ha encontrado que el esfuerzo principal máximo se encuentra en zonas donde existe un cambio abrupto de geometría, puntos donde la derivada vale cero, situación que corrobora una de las hipótesis propuestas en el capítulo II.

De la misma manera que se ha comprobado la gran virtud de los orificios ciegos como disipadores de esfuerzo [32], el presente estudio muestra que conforme se tiene un aumento en la profundidad del orificio ciego, el esfuerzo se distribuye a lo largo del recorrido de éste logrando distribuirse de manera más homogénea. Sin embargo, como se observa en la gráfica 7.5, el esfuerzo principal en el punto 8 (zona de transición) alcanza un valor apenas por debajo del máximo en el punto 11 (inicio del recorrido del orificio). Esto no es muy conveniente que suceda debido a lo comentado con anterioridad; esta zona de transición está fuera del alcance visual del ingeniero de campo y no se puede tener la certeza de que no sea ahí donde pueda tener origen una grieta.

Los métodos híbridos, tal y cómo es considerado el término en ingeniería, son hoy en día la metodología utilizada en la frontera del conocimiento para el estudio de esfuerzos y deformaciones en áreas como la mecánica, biomédica, civil, naval, entre las más importantes.

Los grandes avances que se han tenido en el área computacional han hecho que la interacción entre los métodos experimentales y numéricos sean las líneas de investigación por excelencia en ingeniería. Sin embargo, esta investigación se ha realizado con la plena conciencia de que los programas de elemento finito sólo son una herramienta que aporta su granito de arena, y que el método experimental corrobora lo mostrado por el programa de EF. Y que debajo de estos métodos, se encuentra la teoría, cimiento insustituible que se tuvo como aliado en la presente investigación. La mecánica del medio continuo, vista desde el punto de vista de Gurtin [2], proporcionó la base del presente trabajo. Conceptos tan puramente físicos como el de densidad y masa, generan una percepción más eficaz y concisa de lo que se debe entender como esfuerzo hoy en día. Este concepto de esfuerzo toca tierra –por así decirlo- en el área experimental bajo la propiedad de birrefringencia temporal presente en algunos materiales cristalinos. El concepto de esfuerzo propuesto por Cauchy no encuentra mejor explicación (fuera de la matemática) que en la teoría de la fotoelasticidad. Esta interacción entre la teoría y la práctica fue llevada a cabo en el presente trabajo. Se desarrolló una metodología sencilla y por supuesto mejorable en todos los sentidos. La mecánica del medio continuo, y en particular la teoría de elasticidad lineal fueron interactuando con los resultados obtenidos experimental y numéricamente.

7.3 Investigación a futuro.

1. Desarrollo completo de un modelo matemático que prediga el comportamiento de placas delgadas con orificio(s) ciego(s).
2. Desarrollo experimental de placas con orificio ciego con diferentes tipos de acabado: punta recta y punta cónica.
3. Desarrollo de una “nueva” teoría de fotoelasticidad en términos de álgebra lineal y mecánica del medio continuo; es decir, una visión más moderna.

[1]	Dally, J. W., Riley, W. <i>Experimental Stress Analysis</i> . Maryland: College House Enterprises (2004)
[2]	Gurtin, M. E. <i>An Introduction to Continuum Mechanics</i> . New York: Academic Press (2003)
[3]	Durelli, J. A., Phillips, E. A., Tsao, C. H. <i>Introduction to the Theoretical and Experimental Analysis of Stress and Strain</i> . New York: McGraw-Hill (1958)
[4]	Brinkmann, H., Klotz, E. <i>Linear Algebra and Analytic Geometry</i> . Reading: Addison Wesley (1971)
[5]	Bartle, R., Sherbert, D. <i>Introduction to Real Analysis</i> . New York: John Wiley & Sons (2000)
[6]	Carrera, B., J. <i>Apuntes de Mecánica del medio Continuo</i> . Semestre 2007-1, 2008-1. F.I. Posgrado. UNAM.
[7]	Spivak, M. <i>Calculus</i> . Madrid: Reverté (1982)
[8]	Durelli, J. A., Riley, W. <i>Introduction to Photomechanics</i> . New Jersey: Prentice Hall (1968)
[9]	Fleming, W. A. <i>Funciones de varias variables</i> . México: CECSA (1975)
[10]	Bowen, R. M., Wang, C.C. <i>Introduction to Vectors and Tensors</i> , Vol. 1. New York: Plenum (1976)
[11]	Hirsch, M. W., Smale, S. <i>Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra</i> . New York: Academic Press (1974)
[12]	Golomb, M., Shanks, M. <i>Elements of Ordinary Differential Equations</i> . New York: McGraw-Hill (1950)
[13]	Martin, H. C., Carey, G. F. <i>Introduction to Finite Element Analysis</i> . New York: McGraw-Hill (1973)
[14]	Shanley, F. R. <i>Mechanics of Materials</i> . New York: McGraw-Hill (1967)
[15]	Takashi, M., Mawatari, S. Hybrid Stress Analysis by Construction of Approximate Analytical solution. <i>IUTAM Symposium on Advanced Optical Methods and Applications in Solid Mechanics</i> . Netherlands: Kluwer Academic Publishers. 321-332 (2000)
[16]	Babu, K., Ramesh, K. Development of photoelastic fringe plotting scheme from 3D FE results. <i>Communications in Numerical methods in Engineering</i> . 22 , 809-821 (2007)
[17]	Babu, K., Ramesh, K. Role of finite elements in evolving the slicing plan for photoelastic analysis of three-dimensional analysis models. <i>Experimental Techniques</i> . 30 (3), 52-56 (2006)
[18]	Wang, W-C., Chen, M-S., Lin, M-S., Wu, C-P. Investigation of the Stress Field of a Near-surface Circular Hole. <i>Society of Experimental Mechanics</i> . 45 (3), 244-249 (2005)
[19]	Iancu, F., Ding, X., Cloud, G. L., Raju, B. B. Three-dimensional Investigation of Thick Single-lap Bolted Joints. <i>Society of Experimental Mechanics</i> . 45 (4), 351-358 (2005)
[20]	Ragulskis, M., Ragulskis, L. Plotting Isoclinics for Hybrid Photoelasticity and Finite Element Analysis. <i>Society of Experimental Mechanics</i> . 44 (3), 235-240 (2004)

[21]	Sanford, R. J., Beaubien, L. A. Stress Analysis of a Complex Part: Photoelasticity vs. Finite Elements. <i>Society of Experimental Stress Analysis (SESA)</i> . 441-448 (1977)
[22]	Naghdi, P. M. The Effect of Elliptic Holes on the Bending of Thick Plates. <i>Transactions of the ASME</i> , 54 (A-26), 89-94 (1955)
[23]	Youngdahl, C. K., Sternberg, E. Three-Dimensional Stress Concentration Around a cylindrical Hole in a Semi-Infinite Elastic Body. <i>J. Applied Mechanics (Trans. Of the ASME)</i> , December, 855-864 (1966)
[24]	Sternberg, E., Sadowsky, M. D. Three-dimensional Solution for the Stress Concentration around a Circular hole in a Plate of Arbitrary Thickness. <i>J. of Applied Mechanics</i> , 16 , 27-38 (1949)
[25]	Shchukin, V., Timár, I. Calculation of Stresses in Isotropic Plates with Two Circular Holes. <i>J. of Computational and Applied Mechanics</i> . 5 (1), 141-150 (2004)
[26]	Howland, R. C. J. On the Stresses in the Neighborhood of a Circular Hole in a Strip under Tension. <i>Transactions of the Royal Society (London)</i> , A229 , 49-86 (1929)
[27]	Wahl, A. M., Beeuwkes, R. Stress Concentration Produced by Holes and Notches. <i>Transactions of the ASME</i> , August, 617-623 (1934)
[28]	Hetenyi, M. The Fundamentals of Three-Dimensional Photoelasticity. <i>Journal of applied Mechanics</i> , 5 (4), pp. 149-155, 1938.
[29]	Timoshenko, S., Goodier, J. N. <i>Theory of Elasticity</i> . New York: McGraw-Hill (1951)
[30]	Piskunov, N. <i>Cálculo Diferencial e Integral</i> . Vol. 1, Moscú: Mir (1982)
[31]	Johnson, R. L. Model Making and Slicing for Three-Dimensional Photoelasticity. <i>Experimental Mechanics</i> , 23N-32N, March (1969)
[32]	Kirsch, G. Die Theorie der Elastizität und die Bedürfnisse der Festigkeitslehre. <i>Zentralblatt Verein Deutscher Ingenieure</i> , 42 , pp. 797 (1898)
[33]	Wahl, A. M., Beeuwkes, R. Stress Concentration produced by holes and notches. <i>Transactions of the ASME</i> , August, pp. 617-623 (1934)
[34]	Reiss, E. L. Extension of an infinite plate with a circular hole, <i>Journal of the Society for Industrial and applied Mathematics</i> , 1 (4), p. 840 (1963)
[35]	Fang, S.-J., Hemann, J. H., Achenbach, J. D. Experimental and Analytical investigation of Dynamic Stress concentrations at a circular hole. <i>Journal of Applied Mechanics (Trans. Of the ASME)</i> , June, pp. 417-422 (1974)
[36]	Field, J. E., Kirkwood, W. F. Stress Concentrations around Multiple Windows in a High-Pressure Vessel. <i>Experimental Mechanics</i> , p 223 (1976)
[37]	Peindl, R. D., Harrow, M. E., Connor, P. M., Banks, D. M., D'Alessandro, D. F. Photoelastic Stress Freezing Analysis of Total shoulder replacement systems, <i>Experimental Mechanics</i> , 44 (3), June, pp. 228-234 (2004)

[38]	Folias, E. S., Wang, J.-J. On the Three-dimensional stress field around a circular hole in a plate of arbitrary thickness. <i>Computational Mechanics</i> , 6 , pp. 379-391 (1990)
[39]	Baselga, A. S., Maza, F. M. Methods for Modelling the ultimate strength of orthotropic plate with a central hole under uniaxial tension. <i>Journal of Material Science (Springer Science Pub.)</i> , 41 , pp. 4365-4372 (2006)
[40]	Xu, S.-P., Wang, W. Bending of Piezoelectric plates with a circular hole, <i>Acta Mechanica</i> , 203 , pp. 127-135 (2009)
[41]	Yang, X. D., Zhou, J. Z., Hu, L. L., Wang, C. D. Numerical simulation on 3D Residual Stress Field of both-side laser shot peened specimen with center hole. <i>Trans. Tech. Publications</i> , pp. 97-101, (2010)
[42]	Hoffman, K., Kunze, R. <i>Linear Algebra</i> . New Jersey: Prentice Hall (1971)

ÁLGEBRA LINEAL

Espacio Vectorial

Definición. Sea \mathbf{V} un conjunto y \mathbb{R} un campo. \mathbf{V} es un *espacio vectorial* si satisface las siguientes reglas:

- i) *Existe una operación binaria en \mathbf{V} llamada adición, y denotada por $+$ tal que*
 1. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ para todo $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}$
 2. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ para todo $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$
 3. *Existe un elemento $\mathbf{0} \in \mathbf{V}$ tal que $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$ para todo $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$.*
 4. *Para cada $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ existe un elemento $-\mathbf{u}$ tal que $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$.*
- ii) *Existe una operación llamada multiplicación escalar en donde cada escalar $\alpha \in \mathbb{R}$ puede ser combinado con cada elemento $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ para obtener un elemento $\alpha\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ tal que*
 1. $\alpha(\beta\mathbf{u}) = (\alpha\beta)\mathbf{u}$
 2. $(\alpha + \beta)\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{u}$
 3. $\alpha(\mathbf{u} + \mathbf{w}) = \alpha\mathbf{u} + \alpha\mathbf{w}$
 4. $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y todo $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$. Todo elemento de un espacio vectorial se le denomina vector.

Producto Interno

Definición. Sean \mathbb{R} el cuerpo de los números reales y \mathbf{V} un espacio vectorial sobre \mathbb{R} . Un **producto interno** sobre \mathbf{V} es una función que asigna a cada par ordenado de vectores \mathbf{u}, \mathbf{v} de \mathbf{V} un escalar $(\mathbf{u}|\mathbf{v})$ de \mathbb{R} de tal modo que para cualesquiera $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ de \mathbf{V} y todos los escalares α

1. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}|\mathbf{w}) = (\mathbf{u}|\mathbf{w}) + (\mathbf{v}|\mathbf{w})$
2. $(\alpha\mathbf{u}|\mathbf{v}) = \alpha(\mathbf{u}|\mathbf{v})$
3. $(\mathbf{v}|\mathbf{u}) = \overline{(\mathbf{u}|\mathbf{v})}$, donde la barra indica conjugación compleja.
4. $(\mathbf{u}|\mathbf{u}) > 0$ si $\mathbf{u} \neq 0$

En \mathbb{R}^n existe un producto interno que se llama producto interno canónico, y que definidos un $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ y $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$ puede escribirse como

$$(\mathbf{u}|\mathbf{v}) = \sum_j u_j v_j$$

Transformaciones Lineales

Una **función** consta de lo siguiente:

- i) Un conjunto A , llamado dominio de la función;
- ii) Un conjunto B , llamado rango de la función;
- iii) Una relación (o correspondencia) f , que asocia a cada elemento x de A sólo un elemento $f(x)$ de B .

Definición. Sean \mathbf{V} y \mathbf{W} espacios vectoriales. Una función

$$f: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$$

se llama lineal si para todo $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$f(\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}) = \alpha f(\mathbf{u}) + \beta f(\mathbf{v})$$

Valores y vectores propios. Producto Tensorial

Definición. Sea $\mathbf{T}: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ una función lineal.

Un vector $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ con la siguiente propiedad:

$$\mathbf{T}\mathbf{u} = \lambda \mathbf{u}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \text{ ó } \mathbb{C}.$$

se llama vector propio (ó eigenvector) de \mathbf{T} .

El escalar λ se llama valor propio (ó eigenvalor) de \mathbf{T} .

Definición. El producto tensorial de dos vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} es una manera de obtener un tensor (función lineal) a partir de esos dos vectores. En coordenadas

$$(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})$$

es la función representada por la matriz con elementos

$$(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})_{ij} = a_i b_j$$

$$\text{Si } \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \text{ entonces } (\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) = \begin{pmatrix} u_1 v_1 & u_1 v_2 & u_1 v_3 \\ u_2 v_1 & u_2 v_2 & u_2 v_3 \\ u_3 v_1 & u_3 v_2 & u_3 v_3 \end{pmatrix}$$

MECÁNICA DEL MEDIO CONTINUO.

Proceso Dinámico

Por un proceso dinámico nos referimos a un par ordenado de funciones (χ, \mathbf{T}) con

- i) χ un movimiento,
- ii) \mathbf{T} un campo tensorial simétrico en la trayectoria \mathfrak{S} de χ , y
- iii) $\mathbf{T}(\mathbf{x}, t)$ una función derivable de \mathbf{x} en Ω_t .

Teorema de la Divergencia

Sea Ω una región regular acotada, y dejemos que $\psi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{v}: \Omega \rightarrow \mathbf{V}$, y $\mathbf{S}: \Omega \rightarrow \text{Lin}$ sean campos diferenciables (puntuales, vectoriales y tensoriales respectivamente).

Entonces,

$$\int_{\partial\Omega} \psi \mathbf{n} \, dA = \int_{\Omega} \nabla \psi \, dV$$

$$\int_{\partial\Omega} (\mathbf{v} | \mathbf{n}) \, dA = \int_{\Omega} \text{div } \mathbf{v} \, dV$$

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{S} \mathbf{n} \, dA = \int_{\Omega} \text{div } \mathbf{S} \, dV$$

donde \mathbf{n} es el campo de vectores normales (hacia afuera) en $\partial\Omega$.

Regla de la Cadena

Sea \mathbf{g} una función diferenciable en $\mathbf{x} \in \mathfrak{D}$, y sea \mathbf{f} una función diferenciable en $\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$. Entonces la composición

$$\mathbf{h} = \mathbf{f} \circ \mathbf{g}$$

es diferenciable en \mathbf{x} y

$$D\mathbf{h}(\mathbf{x})[\mathbf{u}] = D\mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{x})) [D\mathbf{g}(\mathbf{x})[\mathbf{u}]].$$

para todo $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$.

ESQUEMA GENERAL DE NOTACIÓN

ÍNDICE DE SÍMBOLOS UTILIZADOS

<i>Símbolo</i>	<i>Nombre</i>	<i>Lugar donde se define por primera vez</i>
Ω	Cuerpo	6
Ω_t	Región ocupada por el cuerpo en el tiempo t	10
\mathbb{b}	Fuerza de cuerpo	11
\mathcal{C}	Curva	9
\mathbb{C}	Tensor de elasticidad	13
div	Divergencia, divergencia espacial	11
D	Derivada	8
det	Determinante	7
E	Módulo de Young	14
\mathbf{E}	Deformación infinitesimal	9
ξ	Espacio euclidiano	6
\mathbf{f}	Deformación	6
\mathbf{F}	Gradiente de deformación	7
f_σ	Valor de franja del material	18
h	Espesor del corte	18
\mathbf{I}	Tensor identidad	7
K	Factor de concentración de esfuerzos	53
\mathbf{n}	Vector normal unitario en la frontera	11
\mathcal{N}	Conjunto de vectores normales unitarios	11
N	Número de franja	18
$o(\mathbf{u})$	Símbolo para “menor orden de \mathbf{u} ”	11
\mathbb{p}, \mathbb{q}	Puntos materiales	6
\mathbf{R}	Tensor de rotación	7
\mathbb{R}	Reales	9
\mathbf{S}	Tensor de Piola-Kirchhoff	13
\mathbf{s}	Fuerza de superficie	11
Sim	Conjunto de todos los tensores simétricos	12
tr	Traza	13
t	Tiempo	9
\mathbf{T}	Tensor de Cauchy	11
\mathfrak{S}	Trayectoria	10
\mathbf{u}	Campo vectorial de desplazamientos	7
\mathbf{U}	Tensor de elongación	7
\mathbf{V}	Espacio vectorial asociado a ξ	5
\mathbf{v}	Velocidad	11
\mathbf{W}	Tensor antisimétrico	9
\mathbf{x}	Punto espacial	6
χ	Movimiento	9
λ	Módulo de Lamé	13
ρ	Densidad	11
μ	Módulo al cortante	13
ν	Relación de Poisson	14
σ_r	Esfuerzo principal (radial)	18
σ_θ	Esfuerzo principal (tangencial)	18
$\partial\Omega$	Frontera del cuerpo Ω	13
∇	Gradiente, gradiente material	7
X	Secuencia	74

NOTACIÓN GENERAL

<i>Expresión</i>	<i>Significado</i>
$\partial\Omega_i \subseteq \partial\Omega$	La frontera $\partial\Omega$ está formada por la unión de un número finito de subconjuntos $\partial\Omega_i$
$\bigcup_{i=1}^n \partial\Omega_i$	Unión de los subconjuntos $\partial\Omega_i$ desde $i=1$ hasta n
$\mathbf{u}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{V}$	\mathbf{u} es una función que va del conjunto \mathbb{R} al conjunto \mathbf{V} ; \mathbb{R} es el dominio y \mathbf{V} es el rango.
$f \circ g$	Composición de las funciones f y g ; es decir, $(f \circ g)(x) = f(g(x))$
$\{(\mathbf{x}, t) R(\mathbf{x}) \text{ esta definida}\}$	El conjunto de todos los pares ordenados (\mathbf{x}, t) tal que $R(\mathbf{x})$ esta definida.
$\ \mathbf{u}\ $	Norma de un vector \mathbf{u}
$\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$	Producto tensorial de dos vectores \mathbf{u} y \mathbf{v}