



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

**PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN
INGENIERÍA**

FACULTAD DE INGENIERÍA

**ANÁLISIS DEL PROBLEMA CONJUGADO DE
TRANSFERENCIA DE CALOR EN UN MICROCANAL
PARA UN FLUJO ELECTRO-OSMÓTICO DE UN
FLUIDO CON MODELO REOLÓGICO
PHAN-THIEN TANNER**

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

DOCTOR EN INGENIERÍA

MECÁNICA-TERMOFLUIDOS

P R E S E N T A:

JUAN PABLO ESCANDÓN COLIN

TUTOR:

DR. OSCAR ELADIO BAUTISTA GODÍNEZ



2011

Jurado signado

Presidente: Dr. Jaime Cervantes de Gortari.

Secretario: Dr. Federico Méndez Lavielle.

1^{er}. Vocal: Dr. Oscar Eladio Bautista Godínez.

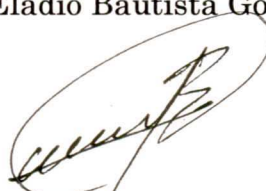
1^{er}. Suplente: Dr. Francisco Javier Solorio Ordaz.

2^{do}. Suplente: Dr. Erick Emanuel Luna Rojero.

Facultad de Ingeniería, UNAM

TUTOR DE TESIS:

Dr. Oscar Eladio Bautista Godínez.

A handwritten signature in black ink, enclosed in a large, loopy oval shape. The signature is cursive and appears to read 'Oscar Eladio Bautista Godínez'.

Firma

Agradecimientos

A mis padres, Fidela y Paulino,
por su acompañamiento y motivación incondicional.

A mi hija, Itzel Paulina,
por tu comprensión, alegría e inocencia.

A mis hermanos, Pilar, Darío e Isela,
por compartir con ustedes las etapas más importantes de mi vida.

A mi cuñado Oscar, a mis sobrinos Diego y André,
por esos momentos de reconfortante diversión y alegría.

Al Dr. Oscar Eladio Bautista Godínez,
por su visión, guía, enseñanzas y conocimientos compartidos.

A la Coordinación de Estudios de Posgrado (CEP) de la UNAM,
por su apoyo al otorgarme una beca durante mis estudios.

Índice general

Resumen	1
Lista de figuras y tablas	2
Nomenclatura	5
1. Introducción	11
1.1 Objetivos	11
1.2 Estructura de la Tesis	12
2. Antecedentes	15
2.1 Microfluídica	15
2.2 Aspectos generales de macro, micro y nanoflujos	16
2.3 Electromagneto-hidrodinámica.....	19
2.3.1 Análisis de órdenes de magnitud para microflujos en EHD y MHD	23
2.4 Flujos electrocinéticos	31
2.5 Ecuaciones gobernantes generales	36
3. Formulación del problema	42
3.1 Modelo físico.....	42
3.2 Hipótesis	43
3.3 Estimación de órdenes de magnitud en las ecuaciones gobernantes ..	48
3.4 Adimensionalización del modelo matemático.....	56
4. Metodología de solución	64
4.1 Solución numérica	64
4.1.1 Análisis numérico	64
4.1.2 Método “SOR”	65
4.2 Solución asintótica	66
4.2.1 Análisis asintótico	66
4.2.2 Límites asintóticos $\bar{\alpha}/\bar{\epsilon}^2 \ll 1$, $\bar{\alpha}/\bar{\epsilon}^2 \sim O(1)$ con $\bar{\alpha} \ll 1$	69
4.3 Número de Nusselt.....	74
5. Análisis de resultados	78

6. Conclusiones		91
7. Referencias		92
Apéndice A.	Análisis del gradiente de velocidad con el modelo reológico Phan-Thien Tanner	95
Apéndice B.	Discretización en diferencias finitas e implementación de la solución numérica	98
Apéndice C.	Codificación de la solución numérica	110

Resumen

En este trabajo se resuelve numérica y analíticamente el problema conjugado de transferencia de calor en estado estable de un flujo de un fluido viscoelástico con un esquema reológico de Phan-Thien Tanner en un microcanal de placas planas paralelas, bajo la influencia de fuerzas electro-osmóticas y de presión; el flujo se considera hidrodinámicamente desarrollado y propiedades constantes. De la solución se obtienen las distribuciones de la temperatura en la región del fluido y la pared sólida del microcanal, mostrando la influencia de los parámetros adimensionales involucrados en el análisis, como son: un indicador del comportamiento viscoelástico, De_K ; el número de Peclet, Pe ; un término normalizado de generación de energía, Λ , siendo la competencia del flujo de calor desde la pared externa del microcanal al calentamiento Joule; un término de conjugación, $\bar{\alpha}$, que considera la competencia entre el calor conductivo longitudinal en la pared del microcanal y el calor convectivo del fluido; un término de competencia entre fuerzas de presión a las fuerzas electro-osmóticas, Γ , que actúa como un término de disminución o incremento de la velocidad del flujo; y las relaciones de aspecto del microcanal y la pared sólida, β y $\bar{\varepsilon}$, respectivamente. Para validar la solución numérica, se obtiene una solución asintótica en los límites de $\bar{\alpha}/\bar{\varepsilon}^2 \ll 1$, $\bar{\alpha}/\bar{\varepsilon}^2 \sim O(1)$ con $\bar{\alpha} \ll 1$. También, se determina el número de Nusselt reducido para este trabajo.

Lista de figuras y tablas

Figura 3.1:	Esquema del flujo mixto electro-osmótico/presión en un microcanal de placas planas paralelas.	43
Figura 5.1:	Perfil de temperatura adimensional como función de la coordenada transversal del microcanal en las regiones del fluido y sólido, en $\chi = 0.5$, para diferentes valores del parámetro viscoelástico, $\varepsilon De_{\kappa}^2$.	80
Figura 5.2:	Perfil de temperatura adimensional como función de la coordenada transversal del microcanal en las regiones del fluido y sólido, en $\chi = 0.5$, para diferentes valores del parámetro Γ .	81
Figura 5.3:	Perfil de temperatura adimensional como función de la coordenada transversal del microcanal en las regiones del fluido y sólido, para diferentes posiciones de la coordenada axial adimensional, χ .	82
Figura 5.4:	Perfil de temperatura adimensional como función de la coordenada transversal del microcanal en las regiones del fluido y sólido, para diferentes valores del parámetro $\bar{\alpha}/\bar{\varepsilon}^2$.	83
Figura 5.5:	Perfil de temperatura adimensional como función de la coordenada transversal del microcanal en las regiones del fluido y sólido, para diferentes valores del número de Peclet, Pe .	84
Figura 5.6:	Perfil de temperatura adimensional como función de la coordenada transversal del microcanal en las regiones del fluido y sólido, para diferentes valores del parámetro Λ .	84

Figura 5.7:	Comparación entre la solución numérica (evaluada en $\eta = 0.5$) y asintótica del perfil de temperatura adimensional del fluido, como función de la coordenada longitudinal χ del microcanal, para diferentes valores del parámetro viscoelástico, $\varepsilon De_{\kappa}^2$.	85
Figura 5.8:	Comparación entre la solución numérica (evaluada en $\eta = 0, 0.5, 1$) y asintótica del perfil de temperatura adimensional del fluido, como función de la coordenada longitudinal χ del microcanal, para un valor del parámetro viscoelástico, $\varepsilon De_{\kappa}^2$.	87
Figura 5.9:	Comparación entre la solución numérica y asintótica del perfil de temperatura adimensional del sólido, como función de la coordenada transversal de la pared del microcanal, evaluada en $\chi = 0.5$, para un valor del parámetro viscoelástico, $\varepsilon De_{\kappa}^2$.	88
Figura 5.10:	Perfil de temperatura como función de la coordenada transversal del microcanal en las regiones del fluido y sólido, en $x = 0.5\text{ cm}$, para diferentes valores de $\varepsilon De_{\kappa}^2$ y $\sigma = 0.001\text{ S/m}$.	88
Figura 5.11:	Perfil de temperatura como función de la coordenada transversal del microcanal en las regiones del fluido y sólido, en $x = 0.5\text{ cm}$, para diferentes de $\varepsilon De_{\kappa}^2$ y $\sigma = 0.005\text{ S/m}$.	89
Figura 5.12:	Comparación entre la solución numérica y asintótica del perfil de temperatura como función de la coordenada longitudinal del microcanal en las regiones del fluido y sólido, para un valor de $\varepsilon De_{\kappa}^2$ y $\sigma = 0.001, 0.005\text{ S/m}$.	89
Tabla 2.1:	Valores típicos geométricos, físicos (soluciones acuosas) y de flujo en dispositivos microfluídicos.	19

Tabla 2.2:	Ecuaciones de Maxwell de los fenómenos electromagnéticos.	21
Tabla 2.3:	Ecuaciones de Maxwell reducidas de los fenómenos electromagnéticos.	22
Tabla 2.4:	Ecuaciones de Maxwell aplicables al estudio de la electrohidrodinámica.	31
Tabla 5.1:	Valores típicos y parámetros de transporte considerados en la solución numérica y asintótica.	79
Tabla 5.2:	Numero de Nusselt reducido, evaluado en diferentes posiciones axiales χ y para diferentes parámetros adimensionales involucrados, con $\bar{\alpha}/\bar{\varepsilon}^2 = 25$.	90
Tabla 5.3:	Numero de Nusselt reducido, evaluado en diferentes posiciones axiales χ y para diferentes valores del parámetro $\bar{\alpha}/\bar{\varepsilon}^2 (=25,2.5,0.25)$.	90

Nomenclatura

A	vector potencial magnético [V·s/m]
B	vector de la intensidad del campo magnético [Tesla, V·s/m ²]
B	campo magnético [Tesla, V·s/m ²]
b	vector de fuerzas de cuerpo por unidad de volumen [N/m ³]
b	fuerzas de cuerpo por unidad de volumen [N/m ³]
c	velocidad de la luz en el vacío 2.9979×10^8 [m/s]
C_p	calor específico [J/kg·K]
D	vector de la densidad de flujo eléctrico [C/m ²]
d	diámetro promedio de la partícula de fluido [m]
De_K	número de Deborah
E	vector del campo eléctrico, [V/m]
E	campo eléctrico [V/m]
e	carga eléctrica elemental 1.602×10^{-19} [C]
F_{y1}	gradiente de temperatura discretizado en el fluido en $(\chi, \eta = 0)$
F_{y2}	gradiente de temperatura discretizado en la interface del fluido en $(\chi, \eta = 1)$
F_{wx1}	gradiente de temperatura discretizado en el sólido en $(\chi = 0, Z)$
F_{wx2}	gradiente de temperatura discretizado en el sólido en $(\chi = 1, Z)$
F_{x2}	gradiente de temperatura discretizado en el fluido en $(\chi = 1, \eta)$
f_E	vector de fuerzas de campo eléctrico [N/m ³]

f_g	vector de fuerzas de campo gravitacional [N/m ³]
$f(\tau_{kk})$	función coeficiente de esfuerzos
G	modulo elástico [N/m ²]
g	vector aceleración de la gravedad [m/s ²]
g	aceleración de la gravedad [m/s ²]
H	vector de intensidad del campo magnético [A/m]
H	mitad del microcanal [m]
h	entalpia [J/kg], coeficiente de transferencia de calor por convección [W/ m ² ·K]
H_a^2	número de Hartmann
H_w	espesor de la pared sólida del microcanal [m]
I	tensor identidad
i_{max}	número máximo de nodos de la malla discretizada en la dirección axial
J	vector de la densidad de corriente eléctrica [C/m ² ·s]
j	corriente eléctrica [C/m ² ·s]
j_{max}	número máximo de nodos de la malla discretizada en la dirección transversal
J_{tot}	vector de corriente total [C/m ² ·s]
k	conductividad térmica [W/m·K]
k_B	constante de Boltzmann 1.38x10 ⁻²³ [J/K]
Kn	número de Knudsen
L	longitud del microcanal, longitud [m]
l	longitud [m]

Nu	número de Nusselt
n_{∞}	número de concentración iónica general del electrolito [$1/m^3$]
p	presión [N/m^2]
Pe	número de Peclet
Q	densidad total de flujo de energía [W/m^2]
\dot{q}	generación de energía por unidad de volumen [W/m^3]
\dot{q}	generación de energía por unidad de volumen [W/m^3]
q_0''	flujo de calor en la pared del microcanal [W/m^2]
q_{cond}''	flujo de calor por conducción [W/m^2]
q_{conv}''	flujo de calor por convección [W/m^2]
Re	número de Reynolds
T	temperatura [K]
\bar{T}	temperatura media [K]
t	tiempo [s]
T_e	temperatura de entrada al microcanal [K]
U	energía interna [J/kg]
u, v, w	componentes de velocidad [m/s]
\bar{u}	velocidad adimensional axial
u_{HS}	velocidad de referencia electro-osmótica Helmholtz-Smoluchowski [m/s]
V	vector de velocidad [m/s]
W	densidad total de energía [J/m ³]
w	profundidad del microcanal [m]

x, y, z	coordenadas cartesianas [m]
Z	coordenada adimensional transversal en la región del sólido
z	valencia del electrolito

Símbolos griegos

$\bar{\alpha}$	parámetro de conjugación en el proceso de transferencia de calor
β	cociente del alto a la longitud del microcanal en la región del fluido
Γ	parámetro adimensional que define la competencia entre las fuerzas de presión a las fuerzas electro-osmóticas
$\dot{\gamma}$	tensor de la rapidez de deformación [1/s]
$\dot{\gamma}$	rapidez de deformación [1/s]
ΔT_y	cambio total de temperatura del microcanal en la coordenada transversal [K]
$\Delta T_{f,x}$	incremento de la temperatura del fluido en la coordenada x [K]
$\Delta T_{f,y}$	incremento de la temperatura del fluido en la coordenada y [K]
$\Delta T_{w,y}$	incremento de la temperatura del sólido en la coordenada y [K]
$\Delta \eta$	incremento nodal en la malla discretizada en la dirección transversal del fluido
$\Delta \Theta$	incremento de la temperatura adimensional discretizada
$\Delta \chi$	incremento nodal en la malla discretizada en la dirección axial del fluido y sólido
ΔZ	incremento nodal en la malla discretizada en la dirección transversal del sólido
ε	parámetro PTT

$\bar{\varepsilon}$	cociente del alto a la longitud del microcanal en la región del sólido
ζ	potencial Z en el plano de corte de la doble capa eléctrica [V]
η	coordenada adimensional transversal en la región del fluido
η_0	coeficiente de viscosidad polimérica [Pa·s]
Θ	temperatura adimensional discretizada
θ	temperatura adimensional
$\bar{\theta}$	temperatura media adimensional
κ	inverso de la longitud Debye [m^{-1}]
κ^{-1}	longitud Debye [m]
κ^2	parámetro Debye-Hückel [m^{-2}]
$\bar{\kappa}$	parámetro electrocinético
Λ	parámetro adimensional que define la competencia entre el flujo de calor desde la pared externa del microcanal al calentamiento Joule en el fluido
λ	trayectoria libre promedio molecular de un fluido [m]
λ_1	tiempo de relajación del fluido [s]
μ	permeabilidad magnética [H/m]
μ_f	viscosidad dinámica del fluido [Pa·s]
μ_0	permeabilidad magnética del vacío 12.566×10^{-7} [H/m]
μ_r	permeabilidad magnética relativa
ξ	constante del método de Sobrerelajación Sucesiva
Π	tensor total de esfuerzos [N/m^2]
ρ	densidad del fluido [kg/m^3],

ρ_e	densidad de carga eléctrica libre [C/m ³]
σ	conductividad eléctrica [S/m]
$\boldsymbol{\tau}$	tensor de esfuerzos [N/m ²]
τ	esfuerzo [N/m ²]
$\boldsymbol{\tau}_{(1)}$	primera derivada convectiva del tensor de esfuerzos [Pa/s]
Φ	relación de aspecto de la malla discretizada en el sólido
χ	coordenada adimensional axial en la región del fluido y sólido
ψ	potencial eléctrico [V]
Ω	relación de aspecto de la malla discretizada en el fluido
ω	factor de relajación del método de Sobrerrelajación Sucesiva

Otros símbolos

ϵ	permisividad dieléctrica [C/ V·m]
ϵ_0	permisividad del vacío 8.854x10 ⁻¹² [C/V·m]
ϵ_r	permisividad dieléctrica relativa

Subíndices

c	característica
f	fluido
i	fila
j	columna
w	pared sólida del microcanal

Superíndices

k	iteración
-----	-----------

Capítulo 1

Introducción

1.1 Objetivos

El objetivo general del presente trabajo es resolver numérica y analíticamente el problema conjugado de transferencia de calor en estado estacionario en un microcanal de placas planas paralelas, bajo la influencia de fuerzas electro-osmóticas y de presión, para mostrar la influencia de los parámetros adimensionales de transporte representativos en el modelo del problema planteado.

Los objetivos particulares son:

- Realizar una revisión bibliográfica de la teoría sobre los principios de la hidrodinámica y fenómenos de transferencia de calor de flujos electrocinéticos en microcanales.
- Identificar las ecuaciones gobernantes generales que rigen los fenómenos de transporte en microcanales.
- Establecer el modelo físico de estudio con las hipótesis correspondientes a la propuesta de solución.
- Considerar en el campo de velocidad del fluido una relación constitutiva basada en el modelo reológico viscoelástico de Phan-Thien Tanner simplificado, en régimen estacionario.

- Obtener las escalas características del modelo físico en estudio con base en un análisis de órdenes de magnitud.
- Adimensionalizar las ecuaciones gobernantes con sus correspondientes condiciones de frontera.
- Identificar los parámetros adimensionales de transporte representativos en el sistema del microcanal.
- Resolver numéricamente las ecuaciones adimensionales de la energía, para el fluido y las paredes del microcanal.
- Validar analíticamente, por medio de una solución asintótica, los resultados obtenidos en la solución numérica.
- Analizar los resultados obtenidos del campo de temperaturas y mostrar la influencia de los parámetros adimensionales de transporte involucrados en el análisis del problema.
- Determinar el coeficiente adimensional de transferencia de calor.

1.2 Estructura de la tesis

En el capítulo 2 de este trabajo se muestra un panorama general sobre el estudio de la microfluídica y el movimiento de fluidos sobre los cuales se ejercen fuerzas sin el accionamiento de partes móviles; en particular se observa los rangos de estudio de flujos electromagneto-hidrodinámicos y la aplicación de las leyes de Maxwell en la descripción de los fenómenos electromagnéticos relacionados con movimiento de fluidos. De lo anterior se deriva la rama de flujos electrocinéticos como uno de los principales métodos para el movimiento de fluidos químicos y biológicos en

aplicaciones con dispositivos microfluídicos. En este capítulo también se establecen las ecuaciones gobernantes generales de transporte de masa, momento, energía y electrocinéticas en forma vectorial.

En el capítulo 3 se describe el esquema del modelo físico de estudio, así como el establecimiento de las hipótesis propuestas para la simplificación de las ecuaciones gobernantes generales de transporte. Posteriormente se identifican las escalas características del problema al realizar una estimación de órdenes de magnitud de variables representativas dentro de los rangos de valores típicos en flujos mixtos electro-osmóticos/presión en microcanales; lo anterior, con el propósito de finalizar la simplificación de las ecuaciones gobernantes y obtener el modelo matemático a resolver en un esquema de un problema conjugado de transferencia de calor. Se proponen las variables adimensionales convenientes para normalizar el modelo matemático, con sus respectivas condiciones de frontera y obtener un esquema adimensional, lo que deriva en la identificación de los parámetros adimensionales.

En el capítulo 4 se establece la metodología para resolver el modelo matemático adimensional. Primeramente, se describe el análisis numérico que seguirá el proceso iterativo para la solución de las ecuaciones adimensionales de la energía, en un esquema en diferencias finitas centrales, y su implementación en el método numérico de solución de Sobrerrelajación Sucesiva (SOR -Successive Over Relaxation-, por sus siglas en el idioma inglés), para ecuaciones diferenciales parciales elípticas. En la segunda parte de este capítulo, con objetivo de validar analíticamente el proceso numérico previamente establecido, se determina una solución asintótica en los límites de $\bar{\alpha}/\bar{\varepsilon}^2 \ll 1$, $\bar{\alpha}/\bar{\varepsilon}^2 \sim O(1)$ con $\bar{\alpha} \ll 1$, para los perfiles de temperatura en la región del

fluido y sólido del microcanal; también se determina el coeficiente de transferencia de calor adimensional mediante el número de Nusselt reducido para este problema.

En el capítulo 5 se presentan los resultados obtenidos numéricamente para los perfiles de temperatura transversal en las regiones del fluido y del sólido del microcanal, mostrando la influencia de los parámetros adimensionales de transporte representativos en el sistema. Posteriormente, se realiza la validación de la solución numérica con la solución asintótica propuesta, por medio de la comparación de perfiles de temperatura para la región del fluido en la coordenada axial y para el sólido en la coordenada transversal, respectivamente. Después, con fines demostrativos se implementa la solución de los perfiles de temperatura transversal y axial en la región del fluido, en un caso particular con variables físicas. Finalmente, se muestra la comparación entre las soluciones numéricas y asintóticas para el número de Nusselt reducido.

Capítulo 2

Antecedentes

2.1 Microfluídica

En los últimos años los estudios de fenómenos que involucran el manejo de sustancias coloidales y la mecánica de fluidos en dispositivos con escalas del orden de unas decenas o cientos de micrómetros han tenido una gran relevancia. De esta manera, la microfluídica surge con la necesidad del estudio de dispositivos y métodos para controlar y manipular flujos de fluidos con longitud de escalas menores a un milímetro.

El enfoque de la microfluídica se centra en cuatro tareas fundamentales: a) desarrollo de métodos diseño y fabricación de microdispositivos integrados, b) manipulación de microflujos, c) uso potencial de microsistemas para estudios fundamentales de procesos físicos, químicos y biológicos, y d) rentabilidad en la aplicación de microdispositivos en las diversas tareas de análisis. En este contexto, la literatura de la microfluídica contiene una amplia descripción de diversos tipos de elementos funcionales en donde se incluyen válvulas, bombas, actuadores, interruptores, dispensadores, mezcladores, filtros, separadores, intercambiadores de calor, etc., algunos de los cuales son motivo de investigaciones y propuestas de nuevas configuraciones. Por otra parte, el concepto de laboratorio en un chip, surge como la integración de todos los componentes antes mencionados, y demuestra el éxito en la

ejecución de procesos de síntesis, análisis y reacción de muestras en pequeños volúmenes de fluidos. Sin embargo, en la actualidad existen tópicos sobre estos dispositivos que asocian los procesos de transporte de masa, cantidad de movimiento y energía. Stone et al. (2004), Steffen y Friedhelm (2007), reportaron que los microflujos se pueden manipular por diversos tipos de campos externos, al ejercer fuerzas de presión, eléctricas, magnéticas, capilares, sonoras, etc. Diversas aplicaciones y clasificación de microbombas de acuerdo a su principio de funcionamiento son revisadas por Laser y Santiago (2004), y Chunsun et al. (2007).

2.2 Aspectos generales de macro, micro y nanoflujos

Un parámetro importante en el flujo de un fluido es el número de Reynolds, $Re = \rho u_c L_c / \mu_f$, para indicar el régimen de flujo en que se encuentra el sistema, en donde ρ y μ_f son la densidad y viscosidad dinámica del fluido, u_c y L_c son la velocidad y longitud característica del sistema, respectivamente. En el diseño de sistemas macroscópicos con tuberías circulares, el régimen de flujo es generalmente turbulento con $Re \geq 2300$; y en el caso de sistemas con $1 < Re \leq 2300$ el régimen es laminar. En contraste, en la escala de microflujos el régimen es usualmente laminar; en este caso, considerando valores característicos para sistemas de laboratorios en un chip, se obtienen valores de $Re \sim 1$ y menores, (Steffen y Friedhelm, 2007). Esto demuestra que el flujo dentro del microcanal usualmente ocurre en régimen laminar donde el flujo es gobernado por las fuerzas viscosas. El carácter laminar en microflujos tiene aplicaciones importantes para el diseño de sistemas microfluídicos en el

monitoreo, control, resolución y modelado de análisis de muestras, en procesos de separación, detección y reacción, así como en el uso de herramientas computacionales para simulación de estos sistemas. Otra diferencia fundamental entre macro y microflujos es la influencia de la teoría de capa límite. En macroflujos, los campos de velocidad, temperatura y concentración son significativamente diferentes en la región de la capa límite respecto de la región restante del dominio del flujo. En microflujos, las capas límite se extienden en todo el dominio del flujo, esta circunstancia puede ser explotada para determinar los campos de flujo, temperatura y concentración; y su consecuente aprovechamiento en el control y manipulación de microflujos, (Steffen y Friedhelm, 2007).

Por otra parte, en años recientes ha ocurrido un progreso significativo en el campo de la nanofabricación, éste ha llevado a la manipulación de fluidos en dominios de longitudes del orden de nanómetros. El manejo de fluidos en estas escalas hace parecer en algunos casos que la perspectiva de aplicación sea más remota que en el caso de microflujos, es por eso que conforme las estructuras de conducción de los fluidos se vuelven más pequeñas, es conveniente revisar la aplicabilidad de las leyes macroscópicas de transporte de cantidad de movimiento, energía, masa y concentración. En el caso de flujos macroscópicos, las leyes fundamentales de transporte siguen la hipótesis del medio continuo, en donde el efecto del tamaño y espaciado intermolecular de los fluidos transportados respecto al tamaño de la escala característica de los sistemas no afecta la aplicación de esta teoría. El uso de la hipótesis del medio continuo y de sus ecuaciones gobernantes de transporte se estima con el número adimensional de Knudsen, $\text{Kn} = \lambda/L_c$, donde λ es la trayectoria libre promedio entre las moléculas del fluido, $\lambda = (k_B T) / (\sqrt{2} \pi d^2 p)$, donde k_B es la

constante de Boltzmann, T , d , p son la temperatura, diámetro promedio de la partícula de fluido, y presión total del sistema de flujo, respectivamente. En el caso de flujo de gases la hipótesis del medio continuo se aplica para valores de $Kn < 0.01$; en el intervalo de $0.01 < Kn < 0.1$, ésta hipótesis todavía puede ser válida a las ecuaciones gobernantes, sin embargo, las condiciones de frontera en las paredes sólidas tienen que considerar el efecto del deslizamiento del fluido y salto de temperatura (Karniadakis et al., 2005); mientras que para valores altos del número de Knudsen, en la región de transición $0.1 < Kn < 10$ las ecuaciones del medio continuo no proveen una adecuada descripción de los procesos de transporte y en general este rango del número de Knudsen ofrece una alta complejidad de análisis para la predicción de los campos de velocidad, temperatura y concentración, debido a las colisiones intermoleculares entre moléculas del fluido y las paredes sólidas; finalmente para valores de $Kn > 10$ es alcanzado el régimen de flujo molecular libre entre las moléculas del fluido y las paredes sólidas y las colisiones entre moléculas pueden ser despreciadas, (Steffen y Friedhelm, 2007). En el caso de flujo de líquidos en escala micro ($\sim 10^2 \text{nm} - 10^2 \mu\text{m}$), puede ser aplicada la teoría del medio continuo (Hu y Li, 2007); dimensiones por debajo de una magnitud de 100 nm, entran en la región de nanofluídica, en donde el líquido no se considera como un medio continuo, sino como un ensamble de molecular, y se deben considerar condiciones de deslizamiento en las fronteras solidas de los sistemas.

Por lo anterior, y considerando valores característicos para sistemas de laboratorios en un chip en escala de microflujos, se obtienen valores muy pequeños del número de Kn, de esta forma, la teoría del medio continuo es aplicable en el presente

trabajo. La Tabla 2.1 resume algunos valores característicos manejados en la escala de microflujos y los correspondientes valores de los números adimensionales de Re y Kn .

Tabla 2.1. Valores típicos geométricos, físicos (soluciones acuosas) y de flujo en dispositivos microfluídicos.

Parámetro	Notación (unidad)	Orden de magnitud	Referencia
Altura del microcanal	H (μm)	10^2	Bayraktar y Pidugu, 2006; Horiuchi y Dutta, 2004
Densidad	ρ (kg/m^3)	10^3	Tang et al, 2004a, 2007; Das y Chakraborty, 2006
Viscosidad dinámica	μ ($\text{Pa}\cdot\text{s}$)	10^{-3}	Das y Chakraborty, 2006; Horiuchi y Dutta, 2004
Temperatura	T (K)	10^2	Tang et al., 2004a; Das y Chakraborty, 2006; Xuan, 2008
Presión total	p (Pa)	10^5	Bayraktar y Pidugu, 2006; Ramos, 2007;
Diámetro promedio de la partícula	d (m)	10^{-9}	Masliyah y Bhattacharjee, 2006
Velocidad	u (m/s)	10^{-3}	Ramos, 2007; Bayraktar y Pidugu, 2006; Stone et al, 2004
Número de Reynolds	Re	0.1	
Número de Knudsen	Kn	10^{-5}	

2.3 Electromagneto-hidrodinámica

En la escala de microflujos, la electromagneto-hidrodinámica estudia el movimiento de fluidos por medio de microbombas, las cuales ejercen fuerzas sin el accionamiento de partes móviles. Estas microbombas se dividen de acuerdo a la fuerza aplicada sobre fluidos: aplicación de fuerzas eléctricas, electrohidrodinámicas (EHD) y fuerzas magnéticas, magnetohidrodinámicas (MHD), (Ramos, 2007).

El estudio de la EHD se divide de acuerdo al campo eléctrico aplicado en el dominio de flujo de la manera siguiente.

Fuerza del campo eléctrico aplicado en todo el volumen del fluido: a) bombeo por inyección; se inyectan cargas eléctricas –iones por parte de los electrodos a un fluido altamente dieléctrico como etanol, metanol, acetona, propanol–, las cargas eléctricas viajan de un electrodo emisor a un electrodo colector arrastrando por fricción al fluido

de trabajo, y son conducidas por la fuerza de Coulomb. Entre algunas aplicaciones de este tipo de sistemas, se encuentra el enfriamiento criogénico en microsistemas. b) bombeo por conducción, no es un método común de bombeo en microflujos, consiste en la aplicación de un campo eléctrico en un fluido dieléctrico en donde por disociación molecular los iones se forman al exceder el límite del campo eléctrico aplicado, surgiendo capas eléctricas no equilibradas iónicas en la vecindad de los electrodos donde la razón de disociación es grande. Esas capas eléctricas no equilibradas son cargadas con el signo opuesto del electrodo adyacente. Las fuerzas de Coulomb actúan sobre las capas cargadas eléctricamente, produciendo el mecanismo de bombeo. Sus posibles aplicaciones son el enfriamiento de microsistemas. c) bombeo por inducción, la carga eléctrica se induce en un medio no homogéneo por el campo eléctrico, provocando una fuerza eléctrica sobre las cargas inducidas, la cual se transmite al fluido. La no homogeneidad del líquido es provocada por un gradiente de temperatura la cual disocia las cargas eléctricas del líquido. Sus posibles aplicaciones sobre soluciones salinas hace posible su empleo en manipulación de muestras biomédicas y químicas, así como enfriamiento de microsistemas.

Fuerza del campo eléctrico aplicado en la capa difusa de una doble capa eléctrica (EDL –Electric Double Layer por sus siglas en el idioma inglés): El estado químico de la pared sólida de un conducto a escalas micrométricas, es afectado por la presencia de una solución electrolítica, generando una EDL dentro del seno del fluido y en las cercanías de la pared. La EDL está formada por una capa eléctrica fija en la pared y una capa eléctrica difusa con alta concentración de cargas eléctricas libres. El movimiento del fluido sucede cuando un campo eléctrico es aplicado sobre la capa eléctrica difusa de la EDL, generando una fuerza de arrastre de las cargas eléctricas libres y consecuentemente del fluido electrolítico. Las aplicaciones son el flujo electro-

osmótico, la separación electroforética, enfriamiento de microsistemas, aplicaciones en procesos de separación, reacción y mezcla de muestras en análisis biomédicos y químicos.

En el caso de la MHD, ésta realiza el estudio de las fuerzas de Lorentz que actúan sobre el fluido, y que aparecen cuando una corriente eléctrica es sujeta a un campo magnético estático, este último generado por un imán permanente.

En este contexto, las ecuaciones de Maxwell son el conjunto de ecuaciones que describen por completo los fenómenos electromagnéticos y están dadas en la Tabla 2.2, (Castellanos y Pérez, 1998; Griffiths, 1999; Jackson, 1998).

Tabla 2.2. Ecuaciones de Maxwell de los fenómenos electromagnéticos.

Nombre	Ecuación en forma diferencial
Ley de corrientes totales	$\mathbf{J}_{tot} = \mathbf{J} + (\partial\mathbf{D}/\partial t)$
Vector potencial magnético	$\mu\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}$
Ley circuital de Ampere	$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_{tot}$
Fuerza de Lorentz	$\mathbf{E} = \mu\mathbf{V} \times \mathbf{H} - (\partial\mathbf{A}/\partial t) - \nabla\psi$
Ecuación de electricidad elástica	$\epsilon \mathbf{E} = \mathbf{D}$
Ley de Ohm	$\sigma\mathbf{E} = \mathbf{J}$
Ley de Gauss	$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_e$
Ecuación de continuidad de carga	$\nabla \cdot \mathbf{J} = -(\partial\rho_e/\partial t)$

donde \mathbf{J}_{tot} es la corriente total, \mathbf{J} es la densidad de corriente eléctrica, \mathbf{D} es la densidad de flujo eléctrico, ρ_e es la densidad de carga eléctrica libre, \mathbf{E} es el campo eléctrico, ψ es el potencial eléctrico, σ es la conductividad eléctrica del medio, \mathbf{H} es la intensidad de campo magnético, μ es la permeabilidad magnética, \mathbf{V} es la velocidad

de la carga dentro del campo magnético, A es el potencial magnético, y ϵ es la permisividad del medio. En la actualidad, las ecuaciones de Maxwell para fenómenos electromagnéticos pueden ser reducidas de la manera que se muestran en la Tabla 2.3, (Castellanos, 1998; Griffiths, 1999; Jackson, 1998; Masliyah y Bhattacharjee, 2006; Karniadakis et al., 2005).

Tabla 2.3. Ecuaciones de Maxwell reducidas de los fenómenos electromagnéticos.

Nombre	Ecuación en forma diferencial
Ley de Gauss	$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_e$
Ley de Gauss para el campo magnético	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$
Ley de Faraday	$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$
Ley generalizada de Ampere	$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + (\partial \mathbf{D} / \partial t)$

donde \mathbf{B} es la densidad del flujo magnético. Adicionalmente, para un medio homogéneo se establecen las siguientes relaciones electromagnéticas:

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E}, \quad (2.1)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H}, \quad (2.2)$$

donde $\epsilon_0, \epsilon_r, \mu_0, \mu_r$, son la permisividad del vacío, la permisividad relativa del medio, la permeabilidad magnética del vacío y permeabilidad magnética relativa del medio; las ecuaciones presentadas por las Tablas (2.2-2.3) son las relaciones fundamentales que gobiernan la propagación de las ondas electromagnéticas; por tanto, aunque la velocidad de la luz no aparece explícitamente en estas ecuaciones, es un parámetro importante que es recuperado mediante la siguiente expresión

$$\mu_0 \epsilon_0 = 1/c^2, \quad (2.3)$$

donde c , es la velocidad de la luz en el vacío.

2.3.1 Análisis de órdenes de magnitud para microflujos en EHD y MHD

Los fenómenos electromagnéticos tienen una amplia gama de aplicación en el campo de la microfluídica para el movimiento de fluidos. De la misma forma, también es amplia la complejidad de la aplicación de las leyes de Maxwell en la EHD y la MHD (Kikuchi, 1999; Ramos, 2007); es por eso, que para propósitos del presente trabajo con aplicación en flujos electro-osmóticos en microcanales, es importante definir los límites adecuados para el uso de estas ecuaciones y el posible desacoplamiento de los fenómenos eléctricos y magnéticos. De esta manera, al considerar la influencia entre un campo magnético aplicado B_0 , y uno generado por un flujo de corriente B_j , en un sistema microfluídico en condiciones magnetoestáticas y electroestáticas, es decir que los campos magnéticos y eléctricos no varían respecto al tiempo, (Masliyah y Bhattacharjee, 2006), se tiene primeramente de la ley de Ampere de la Tabla 2.3 en corriente continua, (Ramos, 2007)

$$\nabla \times \vec{B} = \mu \vec{J}, \quad (2.4)$$

donde se proponen las siguientes escalas características para la densidad de corriente, campo magnético y geometría del sistema microfluídico

$$J_c \sim j, \quad B_c \sim B_j, \quad L_c \sim l, \quad (2.5)$$

donde j y l , son la densidad de la corriente y longitud característica; por lo tanto, el campo magnético generado por la corriente eléctrica se obtiene de un orden de magnitud de la ecuación (2.4)

$$B_j \sim \mu_0 j l. \quad (2.6)$$

Considerando materiales no magnéticos en la ecuación (2.6), por tanto $\mu \approx \mu_0$, (Ramos, 2007). La competencia entre el campo magnético generado B_j de la ecuación (2.6) y el aplicado B_0 , se puede determinar de la siguiente forma

$$\frac{B_j}{B_0} \sim \frac{\mu_0 j l}{B_0}. \quad (2.7)$$

En este contexto y considerando la ecuación de Navier-Stokes para sistemas EHD/MHD dada por la siguiente expresión

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} \right] = -\nabla p + \mu_f \nabla^2 \mathbf{V} + \rho \mathbf{g} + \rho_e \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}, \quad (2.8)$$

donde \mathbf{V} , t , p , \mathbf{g} y ρ_e son la velocidad del fluido, el tiempo, la presión hidrodinámica, la aceleración gravitacional, y la densidad de carga eléctrica del medio, respectivamente. La ecuación (2.8) considera fuerzas de cuerpo por efectos gravitacionales, eléctricos (Masliyah Bhattacharjee, 2006) y magnéticos (Kikuchi, 1999). Definiendo las

siguientes escalas características para los términos de fuerzas viscosas y magnéticas de la ecuación (2.8)

$$j_c \sim j, \quad B_c \sim B_0, \quad u_c \sim u, \quad L_c \sim l, \quad (2.9)$$

donde u es la velocidad de flujo característica del sistema debida a la densidad de corriente creada por la fuerza magnética de Lorentz; al comparar en órdenes de magnitud al término de fuerzas viscosas y magnéticas en la ecuación (2.8), se tiene que la densidad de corriente generada por un campo magnético aplicado es del siguiente orden

$$j \sim \frac{u\mu_f}{l^2 B_0}, \quad (2.10)$$

al sustituir la ecuación (2.10) en (2.7) se obtiene

$$\frac{B_j}{B_0} \sim \frac{\mu_0 \mu_f u}{B_0^2 l}. \quad (2.11)$$

En sistemas microfluídicos en régimen de MHD/EHD, se tienen los siguientes valores típicos en soluciones electrolíticas acuosas no magnéticas (Ramos, 2007): $u \sim 10^{-3} \text{ m/s}$, $B_0 \sim 1 \text{ Tesla}$, $l \sim 10^{-4} \text{ m}$, $\mu_f \sim 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$, $\mu \approx \mu_0 \approx 12.566 \times 10^{-7} \text{ H/m}$; por lo tanto, la competencia entre el campo magnético generado B_j y el aplicado B_0 de la ecuación (2.11) es

$$\frac{B_j}{B_0} \ll 1, \quad (2.12)$$

la ecuación (2.12) indica que un campo eléctrico generado por una corriente es despreciable en comparación a un campo magnético aplicado por un imán permanente. Ahora, al considerar un sistema microfluidoico magnetoestático y electrostático, además de que el campo eléctrico es irrotacional, es decir que de la ley de Faraday en la Tabla 2.3, $\nabla \times \mathbf{E} = 0$, por tanto $\mathbf{E} = -\nabla \psi$, (Masliyah y Bhattacharjee, 2006); se sustituye la ecuación de la ley de ohm $\mathbf{E} = \mathbf{J}/\sigma$, en la ecuación de la fuerza de Lorentz de la Tabla 2.2, para obtener la densidad de corriente producida por la aplicación de un campo eléctrico y magnético de la forma siguiente

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}). \quad (2.13)$$

Estableciendo las siguientes escalas características para la ecuación (2.13)

$$j_c \sim j, \quad B_c \sim B_0, \quad u_c \sim u, \quad E_c \sim E, \quad (2.14)$$

al comparar, en órdenes de magnitud, los términos del campo magnético $\mathbf{V} \times \mathbf{B}$ y eléctrico \mathbf{E} de la ecuación (2.13), y considerando la ley de Ohm $\mathbf{E} = \mathbf{J}/\sigma$, se tiene

$$\frac{uB_0}{E} \sim \frac{\sigma u B_0}{j}, \quad (2.15)$$

por tanto, al sustituir la ecuación (2.10) en (2.15) resulta

$$\frac{\sigma B_0^2 l^2}{\mu_f} = Ha^2, \quad (2.16)$$

donde, Ha^2 es el número de Hartmann el cual representa la competencia de las fuerzas del campo magnético a las fuerzas viscosas en la ecuación (2.8) para el flujo de un fluido en régimen EHD/MHD. En orden de evaluar el número de Ha^2 , Ramos (2007), establece un rango de aplicación de las microbombas según el valor de la conductividad eléctrica del medio. Para flujos de fluidos en escala microfluídica con una conductividad eléctrica $\sigma \leq 1 \text{ S/m}$ (típica para soluciones electrolíticas como es el caso del presente trabajo) y con los valores típicos previamente establecido para B_0, l, μ_f el número de Hartmann se evalúa de la siguiente forma

$$\frac{\sigma B_0^2 l^2}{\mu_f} = Ha^2 < 1, \quad (2.17)$$

en el caso de flujo de fluidos altamente conductores con una conductividad eléctrica $\sigma > 10^5 \text{ S/m}$, Ha^2 toma valores más grandes que la unidad, (Ramos, 2007)

$$\frac{\sigma B_0^2 l^2}{\mu_f} = Ha^2 > 1. \quad (2.18)$$

Ahora, al considerar el caso de microflujos bajo la acción de campos eléctricos en sistemas microfluídicos en un rango de $E \sim 10^5 \text{ V/m}$ (Stone et al., 2004; Horiuchi et al., 2006), y con ayuda de los valores típicos de u y B_0 , la competencia del efecto de un

campo magnético y de un campo eléctrico aplicado se evalúa de la ecuación (2.15), obteniendo

$$\frac{uB_0}{E} \ll 1, \quad (2.19)$$

donde se observa el predominio de la acción del campo eléctrico sobre un campo magnético aplicado en fluidos con baja conductividad eléctrica, la condición anterior se cumple claramente también en sistemas puramente en régimen de la EHD en donde $B_j < 1 \text{ Tesla}$.

Por otra parte, siguiendo el contexto sobre los límites del electromagnetismo para simplificar las ecuaciones de Maxwell, se pueden derivar las ecuaciones en condiciones electro-cuasiestáticas y magneto-cuasiestáticas en el movimiento de fluidos para desacoplar los efectos eléctricos y magnéticos. Los términos cuasiestáticos se refieren a un movimiento lento del fluido, y se describe como lento en comparación a la velocidad de la luz, (Castellanos, 1998). De la ecuación de conservación de la energía en un sistema, (Kikuchi, 1999)

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{Q} = 0, \quad (2.20)$$

donde W es la densidad total de energía del sistema y \mathbf{Q} es la densidad total de flujo de energía, la cuales son definidas a continuación

$$W = \frac{1}{2} \rho V^2 + \rho U + \frac{1}{2} \epsilon E^2 + \frac{1}{2} \mu H^2, \quad (2.21)$$

$$\mathbf{Q} = \rho V \left(\frac{1}{2} V^2 + h \right) - V \mathbf{\Pi} - k_f \nabla T + \mathbf{E} \times \mathbf{H}, \quad (2.22)$$

donde U y h son la energía interna y la entalpia por unidad de masa, $\mathbf{\Pi}$ y k_f son el tensor de esfuerzos viscosos y la conductividad térmica del fluido, respectivamente. Estableciendo la competencia entre los términos de la densidad de energía eléctrica y magnética de la ecuación (2.21), (Castellanos et al., 1998; 2007)

$$\frac{\epsilon E^2/2}{B^2/2\mu} = \frac{E^2}{c^2 B^2}, \quad (2.23)$$

con $\mu\epsilon \sim 1/c^2$. De la ecuación (2.6), se determina el orden de magnitud del campo magnético generado B_j por el flujo de corriente en un sistema microfluido, bajo la aplicación única de campos eléctricos; de la ley de Ohm $j \sim \sigma E$ y tomando en cuenta los valores típicos dados para sistemas con soluciones electrolíticas acuosas, $l \sim 10^{-4} m$, $\sigma \sim 10^{-3} S/m$, $E \sim 10^5 V/m$, $\mu_0 \approx 12.566 \times 10^{-7} H/m$, (Ramos, 2007), se tiene lo siguiente

$$B_j \sim \mu_0 j l \ll 1, \quad (2.24)$$

considerando el resultado de la ecuación (2.24) y el valor característico para el campo eléctrico E establecido anteriormente, en la ecuación (2.23), se puede observar el cumplimiento de la condición electro-cuasiestática (Castellanos et al., 1998; 2007), como sigue

$$\frac{\epsilon E^2/2}{B_j^2/2\mu} = \frac{E^2}{c^2 B_j^2} \gg 1, \quad (2.25)$$

lo anterior implica que el campo eléctrico es irrotacional, es decir que el efecto del campo magnético generado por una corriente en un sistema con régimen EHD es despreciable. Por tanto, para fluidos dieléctricos, como es el caso de flujos electrocinéticos y en general para el estudio de la EHD, esta condición se satisface ampliamente. Por otra parte, en el caso de considerar sistemas microfluídicos con régimen MHD, se utiliza la ley de Ohm $j \sim \sigma E$ en la ecuación (2.6), para obtener el campo eléctrico generado por la aplicación de un campo magnético, (Castellanos, 1998)

$$E_j \sim \frac{B_0}{\sigma \mu_0 l}, \quad (2.26)$$

ahora, sustituyendo la ecuación (2.26) en (2.23), y considerando valores típicos para el flujo de un fluido altamente conductor, $l \sim 10^{-4} m$, $\sigma > 10^5 S/m$, $B_0 \sim 1 Tesla$, $\mu \approx \mu_0 \approx 12.566 \times 10^{-7} H/m$, (Ramos, 2007), $\epsilon \sim 10^{-11} C/V \cdot m$, (Castellanos et al., 1998; 2007), se tiene

$$\frac{\epsilon E_j^2/2}{B_0^2/2\mu_0} = \frac{\epsilon (B_0/\sigma \mu_0 l)^2/2}{B_0^2/2\mu_0} = \frac{\epsilon}{\mu_0 \sigma^2 l^2} \ll 1, \quad (2.27)$$

la condición de la ecuación (2.27) desacopla los efectos eléctricos en el estudio de la MHD, cumpliéndose la condición magneto-cuasiestática (Castellanos et al., 1998; 2007.)

En conclusión, en sistemas microfluídicos con régimen en EHD, donde se incluyen los flujos electrocinéticos (como es el caso del presente trabajo), las ecuaciones de Maxwell se desacoplan de los fenómenos magnéticos y se reducen como lo indica la Tabla 2.4, (Ramos, 2007; Castellanos et al., 1998; 2007), al cumplir las siguientes condiciones

$$\frac{\sigma B^2 l^2}{\mu_f} = Ha^2 < 1, \quad (2.17)$$

$$\frac{\epsilon E^2/2}{B^2/2\mu} = \frac{E^2}{c^2 B^2} \gg 1. \quad (2.25)$$

Tabla 2.4. Ecuaciones de Maxwell aplicables al estudio de la electrohidrodinámica.

Nombre	Ecuación en forma diferencial
Ley de Gauss	$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_e$
Ley de Faraday	$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$
Ecuación de continuidad de carga	$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -(\partial \rho_e / \partial t)$

2.4 Flujos electrocinéticos

Los dispositivos microfluídicos han sido utilizados en la manipulación de análisis biomédicos y químicos durante la última década; de esta manera, el transporte electrocinético como rama de estudio de la electrohidrodinámica, se usa actualmente en forma extensa para el control de flujo y la manipulación de solutos, inyección, separación, mezcla, dilución/concentración y reacción de muestras, (Masliyah y

Bhattacharjee, 2006; Karniadakis et al., 2005). En un principio, el transporte electrocinético explota una combinación de dos mecanismos conductores: la electroforesis y la electro-ósmosis, (Tang et al., 2007). La electroforesis resulta de la migración de solutos cargados en electrolitos bajo la aplicación de campos eléctricos, (Tang et al., 2007, 2004a,b). El flujo electro-osmótico surge cuando las paredes solidas de un microcanal están en contacto con un electrolito, el estado químico de las superficies generalmente se altera; como resultado en la superficie se concentran iones con una carga eléctrica determinada, mientras que iones de carga eléctrica opuesta son liberados dentro del líquido. La carga eléctrica superficial se balancea con los iones opuestamente cargados y presentes en el medio fluido; esta superficie eléctricamente cargada es conocida como EDL y consta de dos zonas, una capa eléctrica fija en donde los iones están fijos a la pared del canal, y una capa eléctrica difusa en donde se encuentra una alta concentración de iones libres, la interface entre estas dos zonas, se le conoce como plano de corte de la EDL. Una medida característica de la EDL es por medio de la longitud de Debye, la cual es una propiedad de la solución electrolítica y representa una distancia característica de la superficie cargada a el punto donde el potencial eléctrico decae aproximadamente en un 33% del potencial superficial, (Masliyah y Bhattacharjee, 2006). Si un campo eléctrico se aplica a lo largo del eje axial del microcanal en presencia de la distribución de la densidad de carga eléctrica dentro de la EDL, los elementos ionizados de fluido localizados dentro de la capa eléctrica difusa, tenderán a moverse bajo la acción de fuerzas electrostáticas; como consecuencia y debido a la naturaleza cohesiva del fluido (viscosidad), se empuja a la solución intermedia entre las EDLs, dejando una fuerza electrocinética de cuerpo sobre la totalidad del fluido. De esta manera, la fuerza electro-osmótica es una función combinada de la distribución de la densidad de carga y un campo eléctrico que se

genera por una diferencia de potencial que se aplica entre la entrada y salida del microcanal, (Masliyah y Bhattacharjee, 2006; Karniadakis et al., 2005). Como consecuencia del rápido desarrollo de tecnologías de laboratorios en un chip, la electro-ósmosis está siendo utilizada ampliamente como fuerza conductora para manipular flujos de líquidos para transporte y control de muestras en análisis biológicos, químicos y diagnósticos médicos, (Ramos, 2007; Laser y Santiago, 2004). Por tanto, es fundamental entender las características del flujo de fluidos en dispositivos microfluídicos para su óptimo diseño y control, (Zhao et al., 2008).

La hidrodinámica de los fenómenos electrocinéticos ha sido revisada ampliamente en la literatura, específicamente el flujo electro-osmótico y electroforético se detalla por Masliyah y Bhattacharjee (2006), Karniadaski et al. (2005) y Li (2004). Diversas geometrías de microcanales han sido empleadas para conducir flujos electro-osmóticos, como placas planas paralelas, capilares cilíndricos, rectangulares, etc., (Tang et al., 2004a). Cuando un campo eléctrico se aplica en la dirección de un flujo electrocinético surge el inevitable calentamiento Joule, (Li, 2004; Tang et al., 2003, 2004a,b; Xuan et al., 2005, 2004a,b). Estudios realizados por Xuan et al. (2004a,b,c), Tang et al. (2003, 2004a,b, 2007), Zhao y Liao (2002), analizan fenómenos de transferencia de calor conjugados y acoplados con la temperatura en flujos electro-osmóticos, y enfatizan en el efecto del calentamiento Joule en el flujo; el acoplamiento de los sistemas antes mencionados son a través de la temperatura en la constante dieléctrica del fluido, viscosidad y conductividad térmica. La separación de muestras por medio del flujo electroforético en base solo al solvente del flujo en microcanales es tratada por Tang et al. (2003, 2007, 2004b), Xuan y Li (2004c, 2005). Sin embargo, es importante mencionar que en el análisis de los trabajos previamente mencionados en este párrafo solo consideran fluidos Newtonianos.

Por otra parte, con el surgimiento de la electrocinética para el transporte de fluidos biológicos a través de microistemas basados en biochips, se hace necesario caracterizar matemáticamente los mecanismos de transporte asociados al proceso para un diseño eficiente de los sistemas microfluídicos. Las estrategias para caracterización se han basado generalmente en el transporte electro-osmótico de fluidos Newtonianos, sin embargo, esta consideración puede ser un tanto inadecuada para estas aplicaciones. Es claro que un modelo como la ley de Newton de viscosidad puede ser insuficiente para describir completamente el comportamiento constitutivo de fluidos biológicos complejos. Aunque en la literatura existen varios modelos propuestos para analizar el comportamiento de fluidos no Newtonianos, en la actualidad, todavía aparecen implicaciones pertinentes sobre el transporte de flujos electrocinéticos que no han sido resueltos completamente por la comunidad científica, (Das y Chakraborty, 2006). Estudios realizados por Zhao et al. (2008), Berli y Olivares (2008), y Tang et al. (2009) consideran la ley de potencia para fluidos no Newtonianos y trabajan sobre la hidrodinámica de flujo electro-osmótico; Das y Chakraborty (2006) también utiliza la ley de potencia para resolver analíticamente la distribución de la velocidad, temperatura y concentración en flujos electro-osmóticos de fluidos biológicos no Newtonianos; Park y Lee (2008) presentan una investigación de la hidrodinámica para flujos electro-osmóticos viscoelásticos como la sangre y ADN a través de microcanales, en donde el concepto de la velocidad de referencia Helmholtz-Smoluchowski se adapta para fluidos viscoelásticos. Recientemente, se han presentado soluciones analíticas por Afonso et al. (2009) y Dhinakaran et al. (2010) para el flujo de fluidos viscoelásticos en estado estable y flujo completamente desarrollado en microcanales de placas planas paralelas y tuberías bajo la influencia de fuerzas electrocinéticas y de presión usando la aproximación de Debye-Hückel, los fluidos viscoelásticos empleados

describen el modelo constitutivo de Phan-Thien Thaner (PTT), estos trabajos muestran los efectos combinados de la reología del fluido y los gradientes de fuerzas electro-osmóticas y de presión sobre la distribución de la velocidad. Es importante indicar, que muchos de los fluidos usados en flujos electro-osmóticos pueden ser descritos por ecuaciones constitutivas viscoelásticas, que relacionan el modelo PTT, tal como la sangre, saliva, líquido sinovial y otros biofluidos, (Fam et al., 2007; Moyers-Gonzalez et al., 2008; Owens, 2006; Thurston y Greiling, 1978; Vissink et al., 1984).

También, Herwig y Hausner (2003), y Maranzana et al. (2004), realizaron algunos intentos por estudiar los efectos de escala en dispositivos microfluídicos, los cuales tienen gran importancia, entre los cuales se pueden identificar: 1) conducción de calor axial, en las regiones del líquido y pared sólida del microcanal, 2) transferencia de calor conjugada (relativa al espesor de las paredes), 3) propiedades dependientes de la temperatura, 4) propiedades dependientes de la presión, 5) rugosidad de las paredes; los primeros dos efectos de escala mencionados, son identificados como cruciales.

De esta forma, el presente trabajo resuelve el problema conjugado de transferencia de calor en un flujo electro-osmótico con un modelo PTT, donde se muestran resultados numéricos y analíticos de la influencia simultánea del calentamiento Joule, comportamiento viscoelásticos del fluido, de la combinación de un flujo conducido por fuerzas electro-osmóticas/presión y efecto del problema conjugado, sobre los perfiles de temperatura en un microcanal de placas planas paralelas. Los resultados antes mencionados, son de suma importancia práctica, que no han sido tratados por trabajos previos.

2.5 Ecuaciones gobernantes generales

Las ecuaciones gobernantes generales, que describen los fenómenos de transporte del presente trabajo, son: la ecuación del potencial eléctrico dentro de la EDL, conservación de la masa, conservación de la cantidad de movimiento, ecuación constitutiva de fluidos viscoelásticos y conservación de la energía en las regiones del fluido y sólido del microcanal. Estas ecuaciones se presentan a continuación.

Ecuación de Poisson – Boltzmann.

La mayoría de las superficies consiguen cargas eléctricas superficiales cuando entran en contacto con un electrolito. Las fuerzas electrostáticas derivadas de estas cargas eléctricas superficiales son esenciales para estabilizar las suspensiones coloidales y juegan un papel relevante en sistemas de conductos con flujo de fluidos biológicos y procesos industriales. En orden de entender el papel de la concentración y distribución de cargas y del potencial eléctrico, Masliyah y Bhattacharjee (2006), realizan un estudio sobre la electrostática en este tipo de fluidos en ausencia de una corriente eléctrica en contacto con superficies sólidas, como antecedente de su aplicación en flujos electrocinéticos.

De la ley de Gauss, definida como una ecuación de Maxwell en la Tabla 2.4, que relaciona el flujo del campo eléctrico a través de una superficie cerrada y las cargas dentro de la superficie, además tomando en cuenta la relación eléctrica dada por la ecuación (2.1), se obtiene

$$\nabla \cdot \epsilon E = \rho_e. \quad (2.28)$$

Considerando un campo eléctrico irrotacional, de la fuerza de Lorentz en Tabla 2.2, el campo eléctrico se puede determinar en función del escalar potencial eléctrico, $\mathbf{E} = -\nabla\psi$. De esta manera, la distribución del potencial eléctrico en estado de equilibrio en un microcanal que confina una solución electrolítica se determina por medio de la ecuación de Poisson

$$\nabla \cdot \epsilon \nabla \psi = -\rho_e, \quad (2.29)$$

de la distribución de Boltzmann para un electrolito simétrico, se tiene que la densidad de carga eléctrica de la solución electrolítica en las cercanías de las superficies sólidas de un microcanal dentro de la EDL, está dada por la siguiente expresión, (Masliyah y Bhattacharjee, 2006)

$$\rho_e = -2ze n_\infty \sinh\left(\frac{ze\psi}{k_B T_f}\right), \quad (2.30)$$

donde z , e , n_∞ , k_B y T_f son la valencia del electrolito, la carga eléctrica elemental, el número de concentración iónica general de la solución, la constante de Boltzmann y temperatura del fluido respectivamente. Al sustituir la ecuación (2.30) en (2.29) se tiene la ecuación de Poisson-Boltzmann para la distribución del potencial eléctrico dentro de la EDL como a continuación se muestra

$$\nabla \cdot \epsilon \nabla \psi = 2ze n_\infty \sinh\left(\frac{ze\psi}{k_B T_f}\right), \quad (2.31)$$

Ecuación de conservación de la masa.

$$\frac{D\rho}{Dt} + \nabla \cdot \rho \mathbf{V} = 0, \quad (2.32)$$

Ecuación de conservación de la cantidad de movimiento.

$$\frac{D\rho \mathbf{V}}{Dt} = -\nabla \cdot \mathbf{\Pi} + \mathbf{b}, \quad (2.33)$$

donde $\mathbf{\Pi}$ y \mathbf{b} son el tensor total de esfuerzos y las fuerzas de cuerpo por unidad de volumen respectivamente. $\mathbf{\Pi}$ se define como

$$\mathbf{\Pi} = p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}, \quad (2.34)$$

donde \mathbf{I} y $\boldsymbol{\tau}$ son el tensor identidad y el tensor de esfuerzos, respectivamente. Las fuerzas de cuerpo \mathbf{b} se establecen de la manera siguiente

$$\mathbf{b} = \mathbf{f}_E + \mathbf{f}_g, \quad (2.35)$$

donde \mathbf{f}_E y \mathbf{f}_g son las fuerzas debidas el efecto del campo eléctrico y gravitacional, respectivamente. \mathbf{f}_E se establece como a continuación se indica, (Masliyah y Bhattacharjee, 2006; Kikuchi, 1999; Catellanos y Pérez, 2007)

$$\mathbf{f}_E = \rho_e \mathbf{E} - \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \nabla \epsilon + \frac{1}{2} \nabla \left(\rho \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \right), \quad (2.36)$$

el primer término de la ecuación (2.36) es la fuerza de Coulomb, el segundo es la fuerza dieléctrica y el último es la fuerza de electro-restrictiva. f_g se representa por

$$f_g = \rho g. \quad (2.37)$$

Ecuación constitutiva de fluidos viscoelásticos.

El estudio de fluidos Newtonianos ha probado ser de un gran valor para resolver problemas de interés ingenieril, pero esta consideración se limita a flujos con esfuerzos cortantes independientes del tiempo. Esto generalmente es inapropiado para la descripción de fenómenos de flujo en donde los esfuerzos cortantes dependen del tiempo y la respuesta elástica (efecto de memoria) de fluidos poliméricos se convierte en un factor importante, (Bird et al., 1987). Por tanto, es necesario incluir una ecuación constitutiva más amplia dependiente de la reología de los fluidos, que describa el comportamiento del flujo de una manera más detallada. De esta manera, un modelo de forma diferencial se establece como sigue para describir el comportamiento de fluidos complejos tal como son los fluidos viscoelásticos, los cuales serán tratados en el presente trabajo, (Afonso et al., 2009; Osswald y Hernández-Ortiz, 2006)

$$f(\tau_{kk})\boldsymbol{\tau} + \lambda_1\boldsymbol{\tau}_{(1)} + \lambda_2\{\dot{\boldsymbol{\gamma}}\cdot\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau}\cdot\dot{\boldsymbol{\gamma}}\} + \lambda_3\{\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\tau}\} = \eta_0\left[\dot{\boldsymbol{\gamma}} + \lambda_4\dot{\boldsymbol{\gamma}}_{(2)}\right], \quad (2.38)$$

donde $f(\tau_{kk})$ y $\boldsymbol{\tau}_{(1)}$, son la función coeficiente de esfuerzos y la primera derivada convectiva del tensor de esfuerzos; η_0 y $\dot{\boldsymbol{\gamma}}$ son el coeficiente de viscosidad polimérica y

el tensor de la rapidez de deformación del fluido, respectivamente; λ_2 , λ_3 y λ_4 son coeficientes del modelo constitutivo general. λ_1 es el tiempo de relajación del fluido definido como sigue

$$\lambda_1 = \frac{\eta_0}{G} \quad (2.39)$$

donde G es el modulo de elasticidad del fluido. La función coeficiente de esfuerzos $f(\tau_{kk})$ está definido por

$$f(\tau_{kk}) = 1 + \frac{\varepsilon \lambda_1}{\eta_0} \tau_{kk} \quad (2.40)$$

donde τ_{kk} y ε son la traza del tensor de esfuerzos y parámetro PTT del fluido, respectivamente. Por otra parte la primera derivada convectiva del tensor de esfuerzos está dada por la siguiente expresión

$$\tau_{(1)} = \frac{D\boldsymbol{\tau}}{Dt} - [(\nabla V)^T \cdot \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau} \cdot (\nabla V)]. \quad (2.41)$$

La ecuación (2.38) se simplifica al considerar el modelo constitutivo de PTT, cuando $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$ y $\lambda_4 = 0$ (Afonso et al., 2009; Osswald y Hernández-Ortiz, 2006)

$$f(\tau_{kk})\boldsymbol{\tau} + \lambda_1 \left\{ \frac{D\boldsymbol{\tau}}{Dt} - [(\nabla V)^T \cdot \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau} \cdot (\nabla V)] \right\} = \eta_0 \dot{\boldsymbol{\gamma}}, \quad (2.42)$$

donde la rapidez de la deformación se define de la siguiente manera, (Morrison, 2001)

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} = (\nabla \mathbf{V}) + (\nabla \mathbf{V})^T. \quad (2.43)$$

Ecuación de conservación de la energía.

La ecuación de conservación de la energía para la región del fluido es

$$\rho C_{pf} \frac{DT_f}{Dt} = \nabla \cdot (k_f \nabla T_f) + \Pi \dot{\boldsymbol{\gamma}} + \dot{q}, \quad (2.44)$$

donde C_{pf} es el calor específico del fluido, \dot{q} es la generación de energía debida al calentamiento Joule por unidad de volumen en el fluido; ésta última definida por, (Tang et al., 2004a; Das y Chakraborty, 2006)

$$\dot{q} = \frac{(\rho_e \mathbf{V} + \sigma \mathbf{E})(\rho_e \mathbf{V} + \sigma \mathbf{E})}{\sigma(T_f)}. \quad (2.45)$$

por otra parte, la ecuación de conservación de la energía para la región sólida de la pared del microcanal es, (Xuan et al., 2004a; Tang et al., 2004b)

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_w C_{pw} T_w) = \nabla \cdot (k_w \nabla T_w), \quad (2.46)$$

donde C_{pw} , k_w y T_w son el calor específico, la conductividad térmica y temperatura de la pared del microcanal, respectivamente.

El siguiente capítulo hará uso de estos antecedentes sobre flujos electrocinéticos y ecuaciones gobernantes generales para desarrollar la formulación del modelo matemático a resolver en el presente trabajo, el cual considera en el transporte de fluidos viscoelásticos en microcanales de placas planas paralelas.

Capítulo 3

Formulación del problema

3.1 Modelo físico

En la Figura 3.1 se muestra el esquema del modelo físico de estudio. Se considera el transporte de un fluido no Newtoniano con características viscoelásticas con el modelo reológico de Phan-Thien Tanner en un electrolito simétrico. El fluido fluye a través de un microcanal de placas planas paralelas de altura $2H$, longitud L , profundidad w y espesor de pared H_w . Se establece que $L/H \gg 1$, $L/H_w \gg 1$, $w/H \gg 1$, $w/H_w \gg 1$. El sistema de coordenadas se compone de una coordenada axial x y una coordenada transversal y . El flujo es accionado por un campo eléctrico E_x (electro-osmótico) generado por la aplicación de un potencial eléctrico y por un gradiente de presión p_x (Poseuille) en la dirección axial entre la entrada y salida del microcanal, respectivamente. El fluido entra a una temperatura T_e en $x=0$. La pared del microcanal tiene condiciones adiabáticas en $x \leq 0$ y $x \geq L$. En la región $0 \leq x \leq L$ hay un flujo de calor constante q_0'' desde la pared externa del microcanal hacia los alrededores del sistema. En la figura se indica la alta concentración de cargas eléctricas en la zona de la longitud de Debye κ^{-1} dentro de la EDL; además de la velocidad de referencia Helmholtz–Smoluchowski u_{HS} en la dirección del flujo.

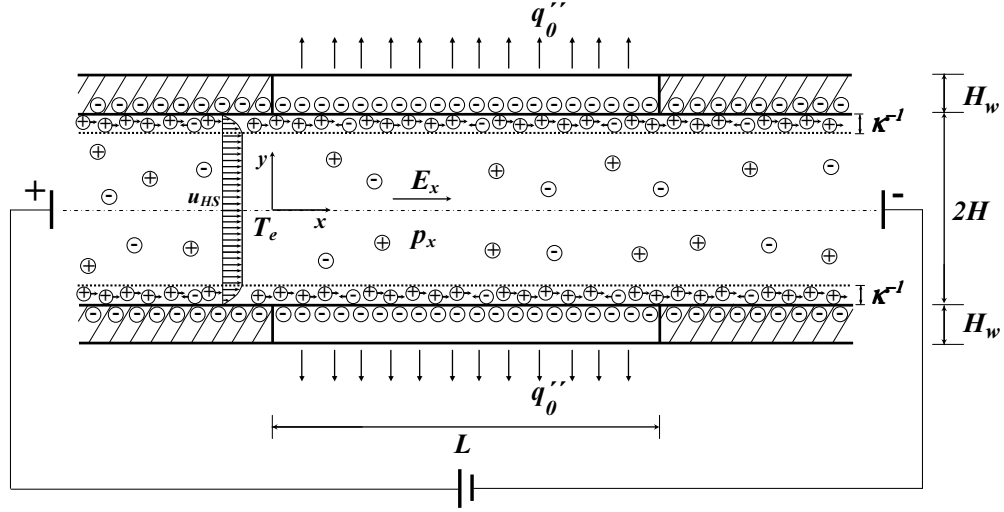


Figura 3.1. Esquema del flujo mixto electro-osmótico/presión en un microcanal de placas planas paralelas.

3.2 Hipótesis

Las ecuaciones gobernantes en coordenadas cartesianas de Poisson-Boltzmann, conservación de la masa, conservación de la cantidad de movimiento, fluidos viscoelásticos, conservación de la energía para la región del fluido y sólido de la sección 2.5, consideradas en el presente trabajo son las siguientes, respectivamente

$$\frac{\partial}{\partial x} \epsilon_r \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \epsilon_r \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \epsilon_r \frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{2ze n_{\infty}}{\epsilon_0} \sinh\left(\frac{ze\psi}{k_B T_f}\right), \quad (3.1)$$

$$\left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} \right\} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w) = 0, \quad (3.2)$$

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \left[\frac{\partial}{\partial x} \tau_{xx} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{xy} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{xz} \right] + b_x, \quad (3.3)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \left[\frac{\partial}{\partial x} \tau_{yx} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{yy} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{yz} \right] + b_y, \quad (3.4)$$

$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \left[\frac{\partial}{\partial x} \tau_{zx} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{zy} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zz} \right] + b_z, \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} & \left[1 + \frac{\varepsilon \lambda_1}{\eta_0} (\tau_{xx} + \tau_{yy} + \tau_{zz}) \right] \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix} + \lambda_1 \frac{D}{Dt} \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix} - \\ & \lambda_1 \left[\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \right] \\ & = \eta_0 \begin{pmatrix} \dot{\gamma}_{xx} & \dot{\gamma}_{xy} & \dot{\gamma}_{xz} \\ \dot{\gamma}_{yx} & \dot{\gamma}_{yy} & \dot{\gamma}_{yz} \\ \dot{\gamma}_{zx} & \dot{\gamma}_{zy} & \dot{\gamma}_{zz} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} \rho C_{pf} \left(\frac{\partial T_f}{\partial t} + u \frac{\partial T_f}{\partial x} + v \frac{\partial T_f}{\partial y} + w \frac{\partial T_f}{\partial z} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(k_f \frac{\partial T_f}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_f \frac{\partial T_f}{\partial y} \right) + \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(k_f \frac{\partial T_f}{\partial z} \right) &+ \left\{ \begin{pmatrix} p_x & 0 & 0 \\ 0 & p_y & 0 \\ 0 & 0 & p_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} \dot{\gamma}_{xx} & \dot{\gamma}_{xy} & \dot{\gamma}_{xz} \\ \dot{\gamma}_{yx} & \dot{\gamma}_{yy} & \dot{\gamma}_{yz} \\ \dot{\gamma}_{zx} & \dot{\gamma}_{zy} & \dot{\gamma}_{zz} \end{pmatrix} + \dot{q}_x + \dot{q}_y + \dot{q}_z, \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\rho_w C_{pw} \frac{\partial T_w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k_w \frac{\partial T_w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_w \frac{\partial T_w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_w \frac{\partial T_w}{\partial z} \right). \quad (3.8)$$

donde u, v y w son la componentes de la velocidad en las coordenadas cartesianas x, y y z , respectivamente.

Las siguientes hipótesis se establecen para simplificar las ecuaciones gobernantes anteriores

- El flujo es completamente desarrollado con $V = \{u(y), 0, 0\}$.
- El campo de temperatura se encuentra en régimen estacionario.
- Flujo incompresible.
- Propiedades constantes con la temperatura, para cambios menores a 10 K, (Horiuchi y Dutta, 2004).
- Las paredes del microcanal están sujetas a un flujo de calor constante.
- Se impone un gradiente de presión constante en la dirección x .
- El efecto de la aceleración gravitacional es únicamente en la dirección de la coordenada y .
- El campo eléctrico es irrotacional, y actúa solamente en la dirección de la coordenada x .
- El movimiento del fluido obedece al modelo reológico de Phan-Thien Tanner simplificado (SPTT).
- El potencial Z es uniforme a través de las paredes del microcanal, debido a los bajos cambios de temperatura en el sistema.
- El calentamiento Joule es uniforme a través del microcanal.

Por tanto atendiendo a las suposiciones establecidas, las ecuaciones de Poisson-Boltzmann, conservación de la masa, cantidad de movimiento y conservación de la energía (para el microcanal y sus paredes) se transforman de la siguiente manera, respectivamente

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{2ze n_{\infty}}{\epsilon} \sinh\left(\frac{ze\psi}{k_B T_f}\right), \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (3.10)$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{yx} + \rho_e E_x, \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \rho g_y, \quad (3.12)$$

$$\rho C_{pf} u \frac{\partial T_f}{\partial x} = k_f \left(\frac{\partial^2 T_f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_f}{\partial y^2} \right) + \left\{ \begin{pmatrix} p_x & 0 & 0 \\ 0 & p_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{zz} \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} 0 & \dot{\gamma}_{xy} & 0 \\ \dot{\gamma}_{yx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \left\{ \frac{(\rho_e u + \sigma E_x)(\rho_e u + \sigma E_x)}{\sigma} \right\}, \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial^2 T_w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_w}{\partial y^2} = 0. \quad (3.14)$$

Las condiciones de frontera asociadas a las ecuaciones (3.9), (3.11-3.14) son, respectivamente

$$\psi(x, y = H) = \zeta, \quad (3.15)$$

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial y} \right|_{(x, y=0)} = 0, \quad (3.16)$$

donde ζ es el potencial Z fijado en el plano de corte de la EDL,

$$u(x, y = H) = 0, \quad (3.17)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{(x, y=0)} = 0, \quad (3.18)$$

$$T_f(x = 0, y) = T_e, \quad (3.19)$$

$$\left. \frac{\partial T_f}{\partial x} \right|_{(x=L, y)} = 0, \quad (3.20)$$

$$\left. \frac{\partial T_f}{\partial y} \right|_{(x, y=0)} = 0, \quad (3.21)$$

$$T_f(x, y = H) = T_w(x, y = H); -k_f \left. \frac{\partial T_f}{\partial y} \right|_{(x, y=H)} = -k_w \left. \frac{\partial T_w}{\partial y} \right|_{(x, y = H)} \quad (3.22)$$

$$\left. \frac{\partial T_w}{\partial x} \right|_{(x=0, y)} = 0, \quad (3.23)$$

$$\left. \frac{\partial T_w}{\partial x} \right|_{(x=L, y)} = 0, \quad (3.24)$$

$$-k_w \left. \frac{\partial T_w}{\partial y} \right|_{(x, y=H+H_w)} = q_0''. \quad (3.25)$$

3.3 Estimación de órdenes de magnitud en las ecuaciones gobernantes

El análisis de escalas se recomienda como el método inicial para obtener una información significativa del trabajo intelectual en la solución de problemas de los modelos matemáticos que rigen el comportamiento de un fenómeno. El objetivo del análisis de escalas en este trabajo, es usar los principios básicos de mecánica de fluidos y transferencia de calor para determinar los órdenes de magnitud aproximados de las variables de interés, cuando se lleva a cabo apropiadamente, éste anticipa dentro de un factor de orden unidad los resultados obtenidos por soluciones exactas. Por tal motivo esta sección del trabajo recurre a este método como una herramienta adicional para la simplificación de las ecuaciones gobernantes y proponer las escalas características del sistema.

Ecuación de Poisson – Boltzmann.

De la geometría del sistema se tienen los siguientes órdenes de magnitud para las coordenadas axial y transversal respectivamente

$$x \sim L, \quad (3.26)$$

$$y \sim H, \quad (3.27)$$

para el potencial eléctrico se tiene

$$\psi \sim \psi_c, \quad (3.28)$$

donde ψ_c es el potencial eléctrico de referencia.

Considerando un microcanal largo en donde $L \gg H$ y que la permisividad del medio solvente es independiente de la temperatura al establecer que los cambios de temperatura son menores a 10 K (Horiuchi y Dutta, 2004), se comparan en órdenes de magnitud el término axial con el transversal del potencial eléctrico de la ecuación (3.9), obteniendo lo siguiente

$$\frac{\psi_c}{L^2} \ll \frac{\psi_c}{H^2}, \quad \left(\frac{H}{L}\right)^2 \ll 1 \quad (3.29)$$

por lo anterior, la ecuación (3.9) de la distribución del potencial eléctrico se transforma como a continuación se indica en

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{2ze n_\infty}{\epsilon_r \epsilon_0} \sinh\left(\frac{ze\psi}{k_B T_f}\right) = -\rho_e. \quad (3.30)$$

La ecuación (3.30) es válida para microcanales largos donde se considera que el potencial eléctrico es independiente de la posición axial y que el fluido está en estado de equilibrio sin la aplicación de un campo eléctrico, (Masliyah y Bhattacharjee, 2006). Por otra parte, considerando la aproximación Debye-Hückel, se tiene que

$$\sinh\left(\frac{ze\psi_c}{k_B T_c}\right) \sim \frac{ze\psi_c}{k_B T_c}, \quad (3.31)$$

donde T_c es la temperatura característica del sistema. La ecuación (3.31) es válida cuando se cumple la siguiente condición

$$\frac{ze\psi_c}{k_B T_c} \leq 1, \quad (3.32)$$

que se alcanza con valores típicos utilizados en aplicaciones de flujos electro-osmóticos (Tabla 2.1, 5.1); por lo establecido en la ecuación (3.31), la ecuación (3.30) se puede linearizar de la siguiente manera

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \kappa^2 \psi, \quad (3.33)$$

donde κ^2 es el parámetro Debye-Hückel dado por

$$\kappa^2 = \left(\frac{2z^2 e^2 n_\infty}{\epsilon k_B T_f} \right). \quad (3.34)$$

Las condiciones de frontera correspondientes para resolver la ecuación (3.33) son las indicadas por las ecuaciones (3.15) y (3.16), obteniéndose la solución a la distribución del potencial eléctrico del medio solvente en estado de equilibrio como función de la coordenada transversal

$$\psi = \zeta \frac{\cosh(\kappa y)}{\cosh(\kappa H)}, \quad (3.35)$$

donde κ es el inverso de la longitud de Debye. Por lo tanto, la densidad de carga eléctrica dentro de la EDL se obtiene al combinar las ecuaciones (3.33) y (3.35) con la ecuación (3.30) del potencial eléctrico en la dirección transversal, quedando la siguiente expresión que se sustituirá en la solución de la ecuación de conservación de cantidad de movimiento (3.11)

$$\rho_e = -\epsilon \kappa^2 \zeta \frac{\cosh(\kappa y)}{\cosh(\kappa H)}. \quad (3.36)$$

Ecuación de conservación de la cantidad de movimiento.

De la ecuación (3.12), y considerando que la columna hidrostática transversal es despreciable a escalas micrométricas, y en este caso cuando $L \gg H$, se establece el siguiente orden de magnitud para el gradiente de presión en la coordenada transversal

$$\frac{\partial p}{\partial y} \sim 0, \quad (3.37)$$

de esta forma, la presión solo es función de la posición axial x en el sistema, lo que significa

$$\frac{\partial p}{\partial x} \approx \frac{dp}{dx}. \quad (3.38)$$

Tomando en cuenta el orden de magnitud establecido por la ecuación (3.37), las ecuaciones de cantidad de movimiento (3.11) y (3.12) se transforman de la siguiente manera

$$0 = -\frac{dp}{dx} + \frac{d\tau_{yx}}{dy} + \rho_e E_x, \quad (3.39)$$

con sus correspondientes condiciones de frontera dadas por las ecuaciones (3.17) y (3.18). El manejo de la ecuación (3.39) en combinación con el modelo reológico SPTT, para la obtención del gradiente de velocidades en el flujo mixto electro-osmótico/presión, es dado en el Apéndice A.

Ecuación de conservación de la energía en el fluido.

Estableciendo las siguientes escalas características en el sistema

$$E_x \sim E_c, \quad u \sim u_c, \quad (3.40)$$

donde E_c y u_c son el campo eléctrico y velocidad característicos, respectivamente; ésta última tiene el siguiente orden de magnitud

$$u_c \sim u_{HS}, \quad (3.41)$$

donde, $u_{HS} = -\epsilon \zeta E_c / \eta_0$ es la velocidad de referencia Helmholtz-Smoluchowski, utilizada por Afonso et al. (2009), en el análisis del campo de velocidad de fluidos viscoelásticos con modelo SPTT. Al comparan en órdenes de magnitud al tercer término del lado izquierdo de la ecuación (3.13), que es el término fuente en la ecuación de la energía, con valores típicos en flujos electro-osmóticos (Tabla 5.1), resulta

$$\frac{\rho_e u_{HS}}{\sigma E_c} \ll 1, \quad (3.42)$$

donde se puede observar que la densidad de carga neta moviéndose con el fluido es despreciable con el efecto conductivo al aplicar el campo eléctrico, (Das y Chakraborty, 2006). Con lo indicado en el orden de magnitud de la ecuación (3.42), el efecto del calentamiento Joule de la ecuación (3.13) queda determinado únicamente por

$$\dot{q}_x \sim \sigma E_c^2. \quad (3.43)$$

Considerando el término de conversión de energía mecánica por efectos viscosos a energía térmica de la ecuación (3.13) y con ayuda de la ecuación (A.6) en el Apéndice A y la ecuación (3.37), se tiene el siguiente orden de magnitud

$$\left\{ \begin{pmatrix} p_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} 0 & \dot{\gamma}_{xy} & 0 \\ \dot{\gamma}_{yx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim (p_c + \tau_c) \dot{\gamma}_c, \quad (3.44)$$

en donde se establecen las siguientes escalas características

$$p \sim p_c \sim p_x, \quad \tau \sim \tau_c, \quad \dot{\gamma} \sim \dot{\gamma}_c, \quad (3.45)$$

donde, p_c , τ_c y $\dot{\gamma}_c$ son las escalas características para la presión, esfuerzo y velocidad de deformación, respectivamente. De la ecuación (A.10) en el Apéndice A, se asume que el balance entre los esfuerzos cortantes provocados por el efecto de las fuerzas

electro-osmóticas a las de presión, son del mismo orden de magnitud, como a continuación se indica

$$\frac{\in \zeta E_c \kappa}{p_c H} \sim 1, \quad (3.46)$$

por lo tanto, la ecuación (3.44) se transforma en

$$(p_c + \tau_c) \dot{\gamma}_c \sim \tau_c \dot{\gamma}_c \sim p_c \dot{\gamma}_c, \quad (3.47)$$

en donde el esfuerzo de corte característico se establece de la ecuación (3.46) como sigue

$$\tau_c \sim \in \zeta E_c \kappa, \quad (3.48)$$

mientras que el orden de magnitud de la velocidad de deformación en la ecuación (3.47) es, (Morrison, 2001)

$$\dot{\gamma}_c \sim \frac{u_c}{H}, \quad (3.49)$$

por lo anterior, el balance entre el calor generado por el calentamiento Joule de la ecuación (3.43), al de energía mecánica por efectos viscosos de la ecuación (3.47), y con valores típicos en sistemas microfluídicos mixtos con fuerzas conductoras electro-osmóticas y de presión (Tabla 5.1), queda

$$\frac{\sigma E_c^2}{\in \zeta E_c \kappa u_{HS} / H} \gg 1, \quad (3.50)$$

de esta manera, es posible despreciar el calentamiento producido por efectos viscosos en el movimiento del fluido en el microcanal, por lo que finalmente la ecuación (3.13), se reduce de la manera siguiente

$$\rho C_{pf} u \frac{\partial T_f}{\partial x} = k_f \frac{\partial^2 T_f}{\partial x^2} + k_f \frac{\partial^2 T_f}{\partial y^2} + \sigma E_x^2, \quad (3.51)$$

con sus correspondientes condiciones de frontera dadas por las ecuaciones (3.19-3.22). Ahora, de la ecuación (3.51), al comparar los términos difusivos axial y transversal con el de generación de calor por calentamiento Joule, se tienen las siguientes escalas para los cambios de temperatura características de la región del fluido en el sistema

$$\Delta T_{f,x} \sim \frac{\sigma E_c^2 L^2}{k_f}, \quad (3.52)$$

$$\Delta T_{f,y} \sim \frac{\sigma E_c^2 H^2}{k_f}, \quad (3.53)$$

donde $\Delta T_{f,x}$ y $\Delta T_{f,y}$ son los incrementos de la temperatura característicos en las direcciones x y y en la región del fluido, respectivamente. Estableciendo un balance entre la ecuación (3.52) y (3.53) se tiene

$$\frac{\Delta T_{f,x}}{\Delta T_{f,y}} \sim \frac{L}{H} \gg 1, \quad (3.54)$$

lo que significa que las diferencias de temperatura en la dirección longitudinal son mucho mayores que en la dirección transversal en el microcanal.

3.4 Adimensionalización del modelo matemático

En el proceso de adimensionalización de las ecuaciones gobernantes se propone introducir las siguientes variables para normalizar el modelo matemático del presente trabajo

$$\chi = \frac{x}{L}, \quad (3.55)$$

$$\eta = \frac{y}{H}, \quad (3.56)$$

$$Z = \frac{y-H}{H_w}, \quad (3.57)$$

$$\bar{u} = \frac{u}{u_{HS}}, \quad (3.58)$$

$$\theta_f = \frac{k_f(T_f - T_e)}{\sigma E_x^2 H^2}, \quad (3.59)$$

$$\theta_w = \frac{k_f(T_w - T_e)}{\sigma E_x^2 H^2}, \quad (3.60)$$

donde χ es la coordenada en la direcci3n axial para la regi3n del fluido y s3lido; η y Z son las coordenadas transversales en la regi3n del fluido y s3lido, respectivamente; \bar{u} , θ_f y θ_w son la velocidad, temperatura en el fluido y temperatura en el s3lido del microcanal, respectivamente. A continuaci3n se sustituir3n las variables adimensionales anteriores en las ecuaciones gobernantes del modelo matem3tico.

Ecuaci3n de conservaci3n de la masa.

Introduciendo las variables adimensionales dadas por las ecuaciones (3.55) y (3.58) en la ecuaci3n (3.10), se tiene la ecuaci3n adimensional de conservaci3n de la masa

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \chi} = 0. \quad (3.61)$$

Ecuaci3n de conservaci3n de la cantidad de movimiento.

Introduciendo las variables adimensionales dadas por las ecuaciones (3.56) y (3.58) en la ecuaci3n (A.12) en el Ap3ndice A, se obtiene la ecuaci3n adimensional para el gradiente de velocidad del sistema

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} + A \sinh(\bar{\kappa}\eta) - \Gamma\eta + 2B\epsilon De_{\kappa}^2 \sinh^3(\bar{\kappa}\eta) - \\ & \frac{2\Gamma^3}{\bar{\kappa}^2} \epsilon De_{\kappa}^2 \eta^3 - 6F\Gamma \epsilon De_{\kappa}^2 \sinh^2(\bar{\kappa}\eta)\eta + \frac{6Q}{\bar{\kappa}} \Gamma^2 \epsilon De_{\kappa}^2 \eta^2 \sinh(\bar{\kappa}\eta) = 0. \end{aligned} \quad (3.62)$$

con sus correspondientes condiciones de frontera

$$\bar{u}(\chi, \eta = 1) = 0, \quad (3.63)$$

$$\left. \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} \right|_{(\chi, \eta=0)} = 0, \quad (3.64)$$

donde $De_\kappa = \lambda_1 \kappa u_{HS}$ es el número de Deborah (basado en el espesor de la EDL y la velocidad Helmholtz-Smoluchowski). De la adimensionalización del gradiente de velocidad, surgen los siguientes parámetros y constantes de simplificación

$$\Gamma = -\frac{H^2}{\epsilon \zeta} \frac{p_x}{E_x}, \quad (3.65)$$

$$\epsilon De_\kappa^2 = \epsilon (\lambda_1 \kappa u_{HS})^2, \quad (3.66)$$

$$\bar{\kappa} = \kappa H, \quad (3.67)$$

$$A = \frac{\bar{\kappa}}{\cosh(\bar{\kappa})}, \quad (3.68)$$

$$B = \frac{\bar{\kappa}}{\cosh^3(\bar{\kappa})}, \quad (3.69)$$

$$F = \frac{1}{\cosh^2(\bar{\kappa})}, \quad (3.70)$$

$$Q = \frac{1}{\cosh(\bar{\kappa})}, \quad (3.71)$$

donde Γ es la competencia de las fuerzas de presión a las fuerzas electro-osmóticas; $\varepsilon De_{\bar{\kappa}}^2$ es el parámetro viscoelástico que define el comportamiento reológico del fluido; y $\bar{\kappa}$ es el parámetro electrocinético que indica una medida representativa del espesor de la EDL respecto a la altura H del microcanal, respectivamente; A, B, F y Q son constantes de simplificación. Por tanto, la solución de la ecuación (3.62) es

$$\begin{aligned} \bar{u} = & (1 - 2F\varepsilon De_{\bar{\kappa}}^2)(1 - S) + \frac{2}{3}\varepsilon De_{\bar{\kappa}}^2(1 - S^3) - \frac{1}{2}\Gamma(1 - \eta^2) \left[1 + \frac{\varepsilon De_{\bar{\kappa}}^2}{\bar{\kappa}^2} \Gamma^2(1 + \eta^2) \right] + \\ & \frac{3}{2} \frac{\varepsilon De_{\bar{\kappa}}^2}{\bar{\kappa}^2} \Gamma \left[1 - S^2 + (\bar{\kappa}^2 - (\bar{\kappa}\eta)^2) F + 2\bar{\kappa}M(\eta SR - 1) \right] - \\ & \frac{12\varepsilon De_{\bar{\kappa}}^2}{\bar{\kappa}^4} \Gamma^2 \left[\bar{\kappa}M(1 - \eta R) + \left(1 + \frac{1}{2}(\bar{\kappa}\eta)^2 \right) S - \left(1 + \frac{1}{2}\bar{\kappa}^2 \right) \right], \end{aligned} \quad (3.72)$$

donde

$$S = \frac{\cosh(\bar{\kappa}\eta)}{\cosh(\bar{\kappa})}, \quad (3.73)$$

$$R = \frac{\sinh(\bar{\kappa}\eta)}{\sinh(\bar{\kappa})}, \quad (3.74)$$

$$M = \tanh(\bar{\kappa}), \quad (3.75)$$

siendo S y R variables simplificadas; M es una constante de simplificación. En régimen estacionario y para $\varepsilon = 0$, la ecuación (3.62) recupera el modelo tradicional en forma adimensional de flujo mixto electro-osmótico y de presión, (Masliyah y Bhattacharjee, 2006; Afonso et al., 2009; Sharma y Chakraborty, 2008) para fluidos Newtonianos como sigue

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} + A \sinh(\bar{\kappa} \eta) - \Gamma \eta = 0, \quad (3.76)$$

con sus respectivas condiciones de frontera dadas en las ecuaciones (3.63) y (3.64).

Ecuación de conservación de la energía en el fluido.

Introduciendo las variables adimensionales dadas por las ecuaciones (3.55), (3.56), (3.58) y (3.59) en la ecuación (3.51), se obtiene la ecuación adimensional de la energía para la región del fluido

$$\beta Pe \bar{u} \frac{\partial \theta_f}{\partial \chi} = \beta^2 \frac{\partial^2 \theta_f}{\partial \chi^2} + \frac{\partial^2 \theta_f}{\partial \eta^2} + 1, \quad (3.77)$$

con sus correspondientes condiciones de frontera

$$\theta_f(\chi = 0, \eta) = 0, \quad (3.78)$$

$$\left. \frac{\partial \theta_f}{\partial \chi} \right|_{(\chi=1, \eta)} = 0, \quad (3.79)$$

$$\left. \frac{\partial \theta_f}{\partial \eta} \right|_{(\chi, \eta=0)} = 0, \quad (3.80)$$

$$\theta_f(\chi, \eta=1) = \theta_w(\chi, Z=0), \quad (3.81)$$

adicionalmente a la ecuación (3.81), se toma en cuenta la condición de compatibilidad en la interface interna de la pared del microcanal; de esta forma, sustituyendo las variables adimensionales dadas por las ecuaciones (3.56), (3.57), (3.59) y (3.60) en la condición de frontera de continuidad de flujo de calor de la ecuación (3.22), que dicta una de las condiciones del fenómeno conjugado de transferencia de calor, queda

$$\frac{\bar{\alpha}}{\bar{\varepsilon}^2} \left. \frac{\partial \theta_w}{\partial Z} \right|_{(\chi, Z=0)} = \left. \frac{\partial \theta_f}{\partial \eta} \right|_{(\chi, \eta=1)}, \quad (3.82)$$

del proceso de adimensionalización de las ecuaciones (3.77) y (3.82) surgen los siguientes parámetros

$$\beta = \frac{H}{L}, \quad (3.83)$$

$$Pe = \frac{\rho C_{pf} u_{HS} H}{k_f}, \quad (3.84)$$

$$\bar{\alpha} = \frac{k_w}{k_f} \frac{H}{L} \frac{H_w}{L}, \quad (3.85)$$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{H_w}{L}, \quad (3.86)$$

donde β es el cociente del alto a la longitud del microcanal en la región del fluido; $\bar{\varepsilon}$ es el cociente del alto a la longitud del microcanal en la región del sólido; Pe y $\bar{\alpha}$ son el número de Peclet y el término de conjugación, éste último, representa la competición entre el calor conductivo longitudinal en la pared del microcanal y el calor convectivo en el régimen de flujo laminar del fluido.

Ecuación de conservación de la energía en el sólido.

Introduciendo las variables adimensionales dadas por las ecuaciones (3.55), (3.57) y (3.60) en la ecuación (3.14), se obtiene la ecuación adimensional de la energía para la región del sólido

$$\bar{\alpha} \frac{\partial \theta_w}{\partial \chi^2} + \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\varepsilon}^2} \frac{\partial^2 \theta_w}{\partial Z^2} = 0, \quad (3.87)$$

con sus correspondientes condiciones de frontera

$$\left. \frac{\partial \theta_w}{\partial \chi} \right|_{(\chi=0, Z)} = 0, \quad (3.88)$$

$$\left. \frac{\partial \theta_w}{\partial \chi} \right|_{(\chi=1, Z)} = 0, \quad (3.89)$$

mientras que en la interface externa del microcanal se sustituyen las variables adimensionales dadas por las ecuaciones (3.57) y (3.60) en la condición de frontera dada por la ecuación (3.25), quedando

$$\left. \frac{\partial \theta_w}{\partial Z} \right|_{(\chi, Z=1)} = -\frac{\bar{\epsilon}^2}{\bar{\alpha}} \Lambda, \quad (3.90)$$

del proceso de adimensionalización anterior surge el siguiente parámetro donde

$$\Lambda = \frac{q_0''}{\sigma E_x^2 H}, \quad (3.91)$$

es el término normalizado de generación de energía, siendo la competencia entre el flujo de calor desde la pared externa del microcanal y el calentamiento Joule. Por otra parte, en la interface interna del microcanal, se considera de la ecuación (3.22) en forma adimensional

$$\theta_w(\chi, Z=0) = \theta_f(\chi, \eta=1), \quad (3.92)$$

adicionalmente a la ecuación (3.92), se debe introducir la condición de compatibilidad del fenómeno conjugado de transferencia de calor, dada por la ecuación (3.82).

En el siguiente capítulo, se planteará la metodología de solución del modelo matemático adimensional formulado en este apartado, con base en una solución numérica por un método iterativo convencional y su validación analítica por medio de una solución asintótica.

Capítulo 4

Metodología de solución

4.1 Solución numérica

4.1.1 Análisis numérico

El modelo matemático se resolvió mediante un esquema numérico convencional en diferencias finitas centrales. Las ecuaciones de energía para el fluido y del sólido son resueltas por un proceso iterativo, en donde ni la temperatura, ecuación (3.81), ni su correspondiente gradiente, ecuación (3.82), son conocidos en la interface sólido-líquido, lo que conlleva al un problema conjugado de transferencia de calor; por tanto, primeramente se resuelve la temperatura adimensional de la pared sólida con sus condiciones de frontera, especificando una temperatura arbitraria en la interface interna del microcanal para inicializar el proceso. Consecuentemente se obtiene un campo de temperaturas en la pared del microcanal, del cual se determinan el gradiente de temperatura en la interface interna hacia la región del sólido $(\partial\theta_w/\partial Z)|_{(\chi,Z=0)}$; este gradiente de temperatura se usa para completar la condición de frontera de la ecuación (3.82) y determinar el gradiente de temperaturas $(\partial\theta_f/\partial\eta)|_{(\chi,\eta=1)}$ para resolver la ecuación de la energía en la región del fluido en conjunto con sus demás condiciones de frontera. De esta manera, se obtiene un campo de temperaturas para el fluido. Una vez que se resuelven las regiones del sólido y del fluido, se comparan la temperatura interfacial $\theta(\chi,\eta=1)$ y $\theta_w(\chi,Z=0)$, hasta cumplir la

condición de tolerancia impuesta al proceso numérico $|\theta_f(\chi, \eta = 1) - \theta_w(\chi, Z = 0)| \leq 10^{-5}$.

Si la condición anterior no se satisface, el ciclo se repite llevando la nueva temperatura interfacial calculada en la iteración previa de la región del fluido al sólido $\theta_w(\chi, Z = 0) = \theta_f(\chi, \eta = 1)$, con el fin de inicializar nuevamente el proceso numérico.

El modelo matemático del problema se resolvió numéricamente para diferentes valores de los parámetros adimensionales εDe_κ^2 , $\bar{\alpha}$, Pe , Γ y Λ . Para los cálculos numéricos, en el fluido se empleo el siguiente tamaño de la malla discretizada $\Delta\chi = 0.005$, $\Delta\eta = 0.005$, con $M = 200$ nodos en la dirección transversal η y $N = 200$ nodos en la dirección longitudinal χ . Similarmente, para la pared solida del microcanal, el tamaño de malla es $M = 200$ nodos en la dirección transversal Z y $N = 200$ nodos en la dirección longitudinal χ . Por lo tanto, el sistema de ecuaciones linear se presenta por una matriz de orden $N \times M$ para cada región, el cual se resolvió por el método iterativo de Sobrrelajación Sucesiva (SOR), con una tolerancia de 10^{-8} .

4.1.2 Método “SOR”

La discretización de los modelos matemáticos adimensionales y sus respectivas condiciones de frontera, (Apéndice B), se implementaron en el método iterativo de solución SOR, (Hoffman, 2001). En el método de SOR, la temperatura adimensional del fluido y de la pared solida del microcanal es evaluada en iteraciones sucesivas mediante

$$\Theta_{f;i,j}^{k+1} = \Theta_{f;i,j}^k + \omega_f \Delta \Theta_{f;i,j}^{k+1}, \quad (4.1)$$

$$\Theta_{w;i,j}^{k+1} = \Theta_{w;i,j}^k + \omega_w \Delta \Theta_{w;i,j}^{k+1}, \quad (4.2)$$

donde k, i y j son el número de iteración y posiciones nodales de la malla discretizada en la dirección axial y transversal, respectivamente; $\Theta_f, \varpi_f, \Delta\Theta_{f;i,j}^{k+1}$ y $\Theta_w, \varpi_w, \Delta\Theta_{w;i,j}^{k+1}$ son la temperatura adimensional en forma discretizada, factor de relajación del método SOR y cambio de la temperatura adimensional por iteración y nodo de la malla discretizada en la región del fluido y sólido, respectivamente. El factor de relajación se obtiene de las siguientes expresiones

$$\varpi_{f,w} = 2 \left(\frac{1 - \sqrt{1 - \xi_{f,w}}}{\xi_{f,w}} \right), \quad (4.3)$$

$$\xi_{f,w} = \left[\frac{\cos(\pi/I) + (\Omega, \Phi)^2 \cos(\pi/J)}{1 + (\Omega, \Phi)^2} \right]^2, \quad I = (i_{max} - 1), J = (j_{max} - 1), \quad (4.4)$$

donde $\Omega = \Delta\chi/\Delta\eta$ y $\Phi = \Delta\chi/\Delta Z$ son las relaciones de aspecto de la malla discretizada en la región del fluido y sólido, respectivamente; i_{max} y j_{max} son el número máximo de nodos en la dirección axial y transversal. La codificación de la solución numérica en Fortran PowerStation 4.0, se presenta en el Apéndice C.

4.2 Solución asintótica

4.2.1 Análisis asintótico

Con el objetivo de validar los resultados numéricos, se propuso una solución asintótica para las ecuaciones (3.77) y (3.87). Por tanto, para obtener los parámetros adimensionales y los regímenes de trabajo relevantes para este propósito, se introduce

un análisis de órdenes de magnitud en este apartado. Debido a las condiciones adiabáticas de ambos lados de la pared del microcanal, un orden de magnitud del balance de energía en la pared del microcanal indica, en primera aproximación, que la mayoría del calor generado por efecto del calentamiento Joule es del orden de magnitud del calor conductivo transversal en el sistema del microcanal, y también del mismo orden de magnitud que las pérdidas de calor, esto es

$$\sigma E_x^2 H \sim k_f \frac{\Delta T_{f,y}}{H} \sim k_w \frac{\Delta T_{w,y}}{H_w} \sim q_0'' \quad (4.5)$$

donde $\Delta T_{w,y}$ es el incremento de temperatura característica en la dirección transversal de la pared del microcanal. Por otra parte, el cambio total de temperatura en la coordenada transversal del microcanal es entonces del orden de

$$\Delta T_y \sim \Delta T_{f,y} + \Delta T_{w,y} \quad (4.6)$$

Combinando las ecuaciones (4.5) y (4.6), se puede demostrar que

$$\frac{\Delta T_{f,y}}{\Delta T_y} \sim \frac{1}{1 + \frac{\bar{\epsilon}^2}{\bar{\alpha}}} \quad (4.7)$$

$$\frac{\Delta T_{w,y}}{\Delta T_y} \sim \frac{\frac{\bar{\epsilon}^2}{\bar{\alpha}}}{1 + \frac{\bar{\epsilon}^2}{\bar{\alpha}}} \quad (4.8)$$

por lo tanto, al sustituir $\Delta T_{f,y}$ de la ecuación (4.7) en la ecuación (4.5), el cambio total de temperatura en la coordenada transversal debe ser del orden de

$$\Delta T_y \sim \frac{\sigma E_x^2 H^2}{k_f} \left[1 + \frac{\bar{\varepsilon}^2}{\bar{\alpha}} \right]. \quad (4.9)$$

De las ecuaciones (4.7) y (4.8), se obtienen límites asintóticos relevantes, los cuales dictan los regímenes físicos del proceso conjugado de transferencia de calor. Básicamente, para flujos electro-osmóticos se tienen límites típicos para parámetros adimensionales los cuales son $\bar{\alpha}/\bar{\varepsilon}^2 \ll 1$ y $\bar{\alpha}/\bar{\varepsilon}^2 \sim O(1)$, ambos para $\bar{\alpha} \ll 1$.

Para valores de $\bar{\alpha}/\bar{\varepsilon}^2 \ll 1$, de las ecuaciones (4.7) y (4.8), se obtiene

$$\frac{\Delta T_{f,y}}{\Delta T_y} \sim \frac{\bar{\alpha}}{\varepsilon^2}, \quad \frac{\Delta T_{w,y}}{\Delta T_y} \sim 1, \quad (4.10)$$

con la ecuación (4.10), se puede observar que la caída de temperatura transversal en el fluido son muy pequeñas comparadas con el cambio total de temperatura ΔT_y , a lo mucho del orden de $\bar{\alpha}/\bar{\varepsilon}^2$; mientras que las variaciones de temperatura transversal en la pared del microcanal con el cambio total de temperatura ΔT_y son del mismo orden.

En el límite $\bar{\alpha}/\bar{\varepsilon}^2 \sim O(1)$ se consideran dos casos: $\bar{\alpha}/\bar{\varepsilon}^2 \sim 1$ y $\bar{\alpha}/\bar{\varepsilon}^2 \gg 1$. Primeramente, para valores de $\bar{\alpha}/\bar{\varepsilon}^2 \sim 1$, de las ecuaciones (4.7) y (4.8), se obtiene

$$\frac{\Delta T_{f,y}}{\Delta T_y} \sim \frac{1}{2}; \frac{\Delta T_{w,y}}{\Delta T_y} \sim \frac{1}{2}, \quad (4.11)$$

así, las variaciones de temperatura transversal, tanto como para la pared del microcanal y el fluido (comparadas con ΔT_y), son del mismo orden de magnitud.

Finalmente, para valores de $\bar{\alpha}/\bar{\varepsilon}^2 \gg 1$, de las ecuaciones (4.7) y (4.8), resulta lo siguiente

$$\frac{\Delta T_{f,y}}{\Delta T_y} \sim 1; \frac{\Delta T_{w,y}}{\Delta T_y} \sim \frac{\bar{\varepsilon}^2}{\bar{\alpha}}. \quad (4.12)$$

A partir de la ecuación (4.12), se puede observar que la caída de temperatura transversal en el fluido es del mismo orden que el cambio total de la temperatura ΔT_y , mientras que las variaciones de temperatura transversal en la pared del microcanal con el cambio total de temperatura ΔT_y son muy pequeñas, a lo mucho del orden de $\bar{\varepsilon}^2/\bar{\alpha}$. La solución asintótica presentada en la siguiente sección valida la solución numérica, considerando los límites asintóticos $\bar{\alpha}/\bar{\varepsilon}^2 \ll 1$, $\bar{\alpha}/\bar{\varepsilon}^2 \sim O(1)$ con $\bar{\alpha} \ll 1$.

4.2.2 Límites asintóticos $\bar{\alpha}/\bar{\varepsilon}^2 \ll 1$, $\bar{\alpha}/\bar{\varepsilon}^2 \sim O(1)$ con $\bar{\alpha} \ll 1$

En este régimen, se proponen las siguientes series de expansiones regulares, en potencias de $\bar{\alpha}$. Primeramente para la temperatura adimensional de la región del fluido

$$\theta_f = \theta_{f0}(\chi) + \bar{\alpha}\theta_{f1}(\chi, \eta) + \dots, \quad (4.13)$$

y para la región del sólido en el microcanal

$$\theta_w = \theta_{w0}(\chi, Z) + \bar{\alpha}\theta_{w1}(\chi, Z) + \dots, \quad (4.14)$$

con lo anterior, se asume que la temperatura del fluido en primera aproximación es función de χ , y la temperatura de la pared del microcanal depende de χ y Z . Al introducir la ecuación (4.14) para la región del sólido en la ecuación (3.87), queda la siguiente expresión

$$\bar{\alpha} \left[\frac{\partial^2 \theta_{w0}}{\partial \chi^2} + \bar{\alpha} \frac{\partial^2 \theta_{w1}}{\partial \chi^2} + \dots \right] + \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\varepsilon}^2} \left[\frac{\partial^2 \theta_{w0}}{\partial Z^2} + \bar{\alpha} \frac{\partial^2 \theta_{w1}}{\partial Z^2} + \dots \right] = 0, \quad (4.15)$$

con sus correspondientes condiciones de frontera dadas por las ecuaciones (3.88-3.90), que se transforman de la manera siguiente, respectivamente

$$(\chi = 0, \eta): \frac{\partial \theta_{w0}}{\partial \chi} + \bar{\alpha} \frac{\partial \theta_{w1}}{\partial \chi} + \dots = 0, \quad (4.16)$$

$$(\chi = 1, \eta): \frac{\partial \theta_{w0}}{\partial \chi} + \bar{\alpha} \frac{\partial \theta_{w1}}{\partial \chi} + \dots = 0, \quad (4.17)$$

$$(\chi, Z = 1): \frac{\partial \theta_{w0}}{\partial Z} + \bar{\alpha} \frac{\partial \theta_{w1}}{\partial Z} + \dots = -\frac{\bar{\varepsilon}^2}{\bar{\alpha}} \Lambda. \quad (4.18)$$

Para la región del fluido, se sustituye la ecuación (4.13) en la ecuación (3.77) resultando en

$$\beta Pe \bar{u} \left[\frac{\partial \theta_{f0}}{\partial \chi} + \bar{\alpha} \frac{\partial \theta_{f1}}{\partial \chi} + \dots \right] = \beta^2 \left[\frac{\partial^2 \theta_{f0}}{\partial \chi^2} + \bar{\alpha} \frac{\partial^2 \theta_{f1}}{\partial \chi^2} + \dots \right] + \bar{\alpha} \frac{\partial^2 \theta_{f1}}{\partial \eta^2} + 1, \quad (4.19)$$

con sus respectivas condiciones de frontera dadas por las ecuaciones (3.78-3.80)

$$(\chi=0, \eta): \theta_{f0} + \bar{\alpha} \theta_{f1} + \dots = 0, \quad (4.20)$$

$$(\chi=1, \eta): \frac{\partial \theta_{f0}}{\partial \chi} + \bar{\alpha} \frac{\partial \theta_{f1}}{\partial \chi} + \dots = 0, \quad (4.21)$$

$$(\chi, \eta=0): \frac{\partial \theta_{f0}}{\partial \eta} + \bar{\alpha} \frac{\partial \theta_{f1}}{\partial \eta} + \dots = 0. \quad (4.22)$$

Ambas ecuaciones, (4.15) y (4.19), necesitan de condiciones de compatibilidad en la interface interna de la pared del microcanal dadas por las ecuaciones (3.81) y (3.82), quedando respectivamente

$$(\theta_{w0} + \bar{\alpha} \theta_{w1} + \dots)_{(\chi, Z=0)} = (\theta_{f0} + \bar{\alpha} \theta_{f1} + \dots)_{(\chi, \eta=1)}, \quad (4.23)$$

$$\frac{\bar{\alpha}}{\bar{\varepsilon}^2} \left[\frac{\partial \theta_{w0}}{\partial Z} + \bar{\alpha} \frac{\partial \theta_{w1}}{\partial Z} + \dots \right]_{(\chi, Z=0)} = \left[\frac{\partial \theta_{f0}}{\partial \eta} + \bar{\alpha} \frac{\partial \theta_{f1}}{\partial \eta} + \dots \right]_{(\chi, \eta=1)}. \quad (4.24)$$

Agrupando términos del orden $\bar{\alpha}^0$, de la ecuación (4.24), se obtiene

$$O(\bar{\alpha}^0): \frac{1}{\bar{\epsilon}^2} \frac{\partial \theta_{w0}}{\partial Z} \Big|_{(\chi, Z=0)} = \frac{\partial \theta_{f1}}{\partial \eta} \Big|_{(\chi, \eta=1)}. \quad (4.25)$$

Considerando los límites asintóticos de este apartado, se deduce de la ecuación (4.15) que los gradientes de temperatura en la dirección transversal de la pared interna y externa del microcanal son constantes; por lo anterior, de la ecuación (4.18) se tiene la siguiente igualdad

$$\frac{\partial \theta_{w0}}{\partial Z} \Big|_{(\chi, Z=1)} = \frac{\partial \theta_{w0}}{\partial Z} \Big|_{(\chi, Z=0)} = -\frac{\bar{\epsilon}^2}{\alpha} \Lambda, \quad (4.26)$$

de la ecuación (4.26), la condición de frontera en la interface interna del microcanal de la ecuación (4.25) se transforma en

$$\frac{\partial \theta_{f1}}{\partial \eta} \Big|_{(\chi, \eta=1)} = -\frac{\Lambda}{\bar{\alpha}}. \quad (4.27)$$

Por otra parte, al considerar la ecuación (3.54), que indica que las caídas de temperatura en la coordenada transversal son muy pequeñas en comparación de las caídas de temperatura en la coordenada axial, se puede integrar la ecuación (4.19) de la energía del fluido en la dirección de la coordenada transversal:

$$\begin{aligned} \beta Pe \frac{\partial \theta_{f0}}{\partial \chi} \int_{\eta=0}^{\eta=1} \bar{u} d\eta + \bar{\alpha} \beta Pe \frac{\partial \theta_{f1}}{\partial \chi} \int_{\eta=0}^{\eta=1} \bar{u} d\eta = \\ \beta^2 \frac{\partial^2 \theta_{f0}}{\partial \chi^2} \int_{\eta=0}^{\eta=1} d\eta + \bar{\alpha} \beta^2 \frac{\partial^2 \theta_{f1}}{\partial \chi^2} \int_{\eta=0}^{\eta=1} d\eta + \bar{\alpha} \frac{\partial \theta_{f1}}{\partial \eta} \Big|_{(\chi, \eta=1)} + 1. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Sustituyendo la ecuación (4.27) en (4.28), y agrupando términos del orden $\bar{\alpha}^0$, se obtiene una ecuación diferencial simplificada para la temperatura adimensional de la región del fluido

$$O(\bar{\alpha}^0): \beta Pe \frac{\partial \theta_{f0}}{\partial \chi} k_1 = \beta^2 \frac{\partial^2 \theta_{f0}}{\partial \chi^2} - \Lambda + 1, \quad (4.29)$$

donde, $k_1 = \int_{\eta=0}^{\eta=1} \bar{u}(\eta; \varepsilon De_{\bar{\kappa}}^2, \bar{\kappa}, \Gamma) d\eta$. La solución general de la ecuación (4.29), con sus correspondientes condiciones de frontera indicadas por las ecuaciones (4.20) y (4.21), en primera aproximación es

$$\theta_{f0}(\chi) = \frac{(\Lambda - 1) \left[\exp\left(\frac{k_1 Pe}{\beta}(\chi - 1)\right) - \exp\left(-\frac{k_1 Pe}{\beta}\right) \right]}{(k_1 Pe)^2} + \frac{(1 - \Lambda)\chi}{k_1 \beta Pe}, \quad (4.30)$$

donde

$$\begin{aligned} k_1 = & \left[1 - 2\varepsilon De_{\bar{\kappa}}^2 F + \frac{M}{\bar{\kappa}} (2\varepsilon De_{\bar{\kappa}}^2 F - 1) \right] + \\ & \left[\frac{2}{3} \varepsilon De_{\bar{\kappa}}^2 - \frac{2\varepsilon De_{\bar{\kappa}}^2 F}{3\bar{\kappa}} \left(M \left\{ \frac{1}{3F} + \frac{2}{3} \right\} \right) \right] - \left[\frac{1}{3} \Gamma + \frac{2}{5} \frac{\varepsilon De_{\bar{\kappa}}^2}{\bar{\kappa}^2} \Gamma^3 \right] + \\ & \frac{3}{2} \frac{\varepsilon De_{\bar{\kappa}}^2}{\bar{\kappa}^2} \Gamma \left[1 - \frac{F \sinh(2\bar{\kappa})}{4\bar{\kappa}} - \frac{\bar{\kappa}}{2} + \frac{2}{3} F \bar{\kappa}^2 + \frac{MQ}{2 \sinh(\bar{\kappa})} \left(\cosh(2\bar{\kappa}) - \frac{\sinh(2\bar{\kappa})}{2\bar{\kappa}} \right) - 2\bar{\kappa} M \right] - \\ & \frac{36\varepsilon De_{\bar{\kappa}}^2}{\bar{\kappa}^4} \Gamma^2 \left[\frac{\bar{\kappa} M}{2} + \frac{M}{\bar{\kappa}} - \frac{\bar{\kappa}^2}{6} - 1 \right]. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Considerando los límites asintóticos de este apartado en la ecuación (4.15), se agrupan términos del orden $\bar{\alpha}^0$, para obtener la siguiente expresión

$$\frac{\partial^2 \theta_{0w}}{\partial Z^2} = 0, \quad (4.32)$$

por lo tanto, la solución analítica de la ecuación de la energía para la temperatura adimensional de la pared sólida del microcanal con sus correspondientes condiciones de frontera dadas por las ecuaciones (4.18) y (4.23), en primera aproximación resulta como a continuación se indica

$$\theta_{w0}(\chi, Z) = -\frac{\bar{\varepsilon}^2}{\bar{\alpha}} \Lambda Z + \theta_0(\chi). \quad (4.33)$$

4.3 Número de Nusselt

De la definición del número de Nusselt

$$\text{Nu} = \frac{hL_c}{k_f}, \quad (4.34)$$

donde h es el coeficiente de transferencia de calor por convección y $L_c \sim H$ es una longitud característica. El flujo de calor en la interface interna del microcanal obedece a la condición de no salto en la temperatura, por tanto

$$q''_{conv} = q''_{cond} = h[T_f(x, y=H) - \bar{T}_w] = -\frac{\partial T_f}{\partial y} \Big|_{(x, y=H)}, \quad (4.35)$$

donde q''_{conv} y q''_{cond} son el flujo de calor por convección y flujo de calor por conducción en la interface interna del microcanal, respectivamente; \bar{T}_w es la temperatura media en la pared del microcanal. De la ecuación (4.35) se deduce la siguiente expresión para el coeficiente de transferencia de calor por convección

$$h = \frac{-\left. \frac{\partial T_f}{\partial y} \right|_{(x,y=H)}}{T_f(x,y=H) - \bar{T}_w}. \quad (4.36)$$

Sustituyendo la ecuación (4.36) en la ecuación (4.34), el número de Nusselt reducido para este problema se escribe como

$$\text{Nu} = -\frac{H \left. \frac{\partial T_f}{\partial y} \right|_{(x,y=H)}}{T_f(x,y=H) - \bar{T}_w}. \quad (4.37)$$

En términos de las variables adimensionales y con ayuda de la solución para el campo de temperaturas en primera aproximación de la sección 4.2.2, la ecuación (4.37) se transforma en

$$\text{Nu} = \frac{-\left. \frac{\partial \theta_{f0}}{\partial \eta} \right|_{(\chi,\eta=1)}}{\theta_{f0} - \bar{\theta}_{w0}}, \quad (4.38)$$

donde $\bar{\theta}_{w0}$ es la temperatura media adimensional en la pared del microcanal definida por la siguiente relación

$$\bar{\theta}_w = \frac{\int_0^1 \theta_{0w}(\chi, Z) dZ}{\int_0^1 dZ}. \quad (4.39)$$

La ecuación (4.39) se ayuda de la integración de la ecuación (4.33), quedando

$$\bar{\theta}_w = \theta_{f0} - \frac{\varepsilon^2 \Lambda}{2\bar{\alpha}}. \quad (4.40)$$

De la ecuación (3.82) para los gradientes de temperatura en la interface del microcanal se tiene

$$\left. \frac{\partial \theta_{f0}}{\partial \eta} \right|_{(\chi, \eta=1)} = \frac{\bar{\alpha}}{\varepsilon^2} \left. \frac{\partial \theta_{w0}}{\partial Z} \right|_{(\chi, Z=0)}, \quad (4.41)$$

considerando la ecuación (4.26), la ecuación (4.41) se transforma en

$$\left. \frac{\partial \theta_{f0}}{\partial \eta} \right|_{(\chi, \eta=1)} = -\Lambda. \quad (4.42)$$

Sustituyendo las ecuaciones (4.40) y (4.42) en la ecuación (4.38), se obtiene el número de Nusselt reducido

$$\text{Nu} = 2 \frac{\bar{\alpha}}{\varepsilon}. \quad (4.43)$$

El número de Nusselt reducido en forma discretizada para su solución numérica se encuentra al final del Apéndice B.

En el siguiente capítulo, se presentaran en forma grafica los resultados de la solución numérica en la distribución de los perfiles de temperatura en la región del fluido y solido del microcanal en el problema conjugado de transferencia de calor que se plantea en este trabajo; además se mostrara la influencia de los parámetros adimensionales representativos en el proceso de transporte. Finalmente se validaran los resultados numéricos obtenidos para los perfiles de temperatura y para el número de Nusselt, con la solución analítica propuesta.

Capítulo 5

Análisis de resultados

Para los propósitos numéricos y analíticos en este estudio, en la Tabla 5.1 se presentan valores de los parámetros físicos utilizados y que resultaron en los parámetros de transporte adimensionales involucrados en el análisis.

La Figura 5.1 muestra los perfiles de la temperatura adimensional a través de la sección transversal del microcanal, evaluada en la posición de la coordenada axial $\chi = 0.5$, para diferentes valores de los parámetros adimensionales mostrados y variación del parámetro viscoelástico, $\varepsilon De_{\kappa}^2 (= 0, 1, 4)$. La distribución de temperaturas en la región del fluido exhibe un comportamiento ligeramente parabólico, y en el sólido un comportamiento linear, similar a los resultados mostrados por Tang et al. (2004b) para fluidos Newtonianos. Se puede observar que al incrementar el valor del parámetro viscoelástico (junto con los esfuerzos cortantes y velocidad de deformación dentro de la EDL), el efecto de convección de calor también se incrementa, por tanto, el valor de temperatura adimensional decrece con respecto al caso Newtoniano ($\varepsilon De_{\kappa}^2 = 0$). La temperatura más alta ocurre en el centro del microcanal, por tanto, es claro que el calor generado por calentamiento Joule se transfiere de la región central a la pared del microcanal por convección y conducción en el fluido, y se disipa a través de la pared del microcanal por conducción, para finalmente ser transferido hacia el exterior por el efecto de flujo de calor constante q_0'' .

Tabla 5.1. Valores típicos y parámetros de transporte considerados en la solución numérica y asintótica.

	Notación	Valor	Unidad	Referencia
Geométricos	H	$\sim 10^{-4}$	(m)	Tang et al., 2004b, 2007
	H_w	$\sim 10^{-5} \cdot 10^{-4}$	(m)	Tang et al., 2004a,b; Xuan et al., 2004b
	L	$\sim 10^{-2}$	(m)	Tang et al., 2004a; Xuan et al., 2004a
Electrocinéticos	κ^{-1}	$\sim 10^{-6}(\ddagger)$	(m)	Masliyah y Bhattacharjee, 2006
	z	$\sim 10^0$	(-)	Masliyah y Bhattacharjee, 2006
	ϵ	$\sim 10^{-10}(*)$	(C/V·m)	Masliyah y Bhattacharjee, 2006
	ζ	$\sim 10^{-2}$	(V)	Masliyah y Bhattacharjee, 2006; Afonso et al. 2009
	E	$\sim 10^5$	(V/m)	Masliyah y Bhattacharjee, 2006; Horiuchi et al., 2006
Viscoelásticos	σ	$\sim 10^{-3}$	(S/m)	Ramos, 2007
	ϵ	0.0–0.5	(-)	Dhinakaran et al., 2010
Flujo	De_{κ}^2	0.0–3.5	(-)	Dhinakaran et al., 2010; Afonso 2009
	η_0	$\sim 10^{-4}$	(Pa·s)	Tang et al., 2004a; Das y Chakraborty, 2006;
Flujo	ρ	$\sim 10^3$	(kg/m ³)	Tang et al., 2004a; Das y Chakraborty, 2006;
	p_x	$\sim 10^1$	(Pa/m)	Xuan y Li, 2005
	u_{HS}	$\sim 10^{-3}$	(m/s)	Ramos, 2007
Térmicos	k_f	0.61–0.7	(W/m·K)	Tang et al., 2004b; Xuan et al., 2004a
	k_w	0.15–0.19(‡)	(W/m·K)	Tang et al., 2004b; Xuan et al., 2004a
	k_w	1.38(§)	(W/m·K)	Tang et al., 2004b; Xuan et al., 2004a
	C_p	4180	(J/kg·K)	Xuan et al., 2004a
	q_0''	$\sim 10^3$	(W/m ²)	
Parámetros adimensionales	β	0.01	(-)	
	$\bar{\epsilon}$	0.001	(-)	
	$\bar{\kappa}$	$\sim 10^2$	(-)	Masliyah y Bhattacharjee, 2006; Tang et al., 2004b
	ϵDe_{κ}^2	0, 1, 0, 4, 0	(-)	Afonso et al., 2009
	Γ	-1.0, 0.0, 2.5	(-)	Afonso et al., 2009
	$\bar{\alpha}$	$2.5 \times 10^{-7} - 2.5 \times 10^{-5}$	(-)	
	Pe	0.5–1.5	(-)	Horiuchi y Dutta, 2004
Λ	0.5, 0.75, 1.0	(-)	Das y Chakraborty, 2006;	

‡Basado en un electrolito simétrico con concentración iónica de ~ 0.001 mM; * solución acuosa; † polimetil metacrilato (PMMA); § sílice fundida

La Figura 5.2 muestra los perfiles de temperatura adimensional a través de la sección transversal del microcanal, evaluada en la coordenada axial $\chi = 0.5$, mostrando la influencia del parámetro $\Gamma (= -1, 0, 2.5)$, que representa la competencia entre las fuerzas de presión y las fuerzas electro-osmóticas. Es evidente que para valores negativos de Γ , se obtiene físicamente el efecto de un gradiente de presión favorable

en dirección del flujo, acelerándolo y aumentando el efecto convectivo de calor, causando un decremento de la temperatura adimensional; caso contrario se obtiene para valores positivos de Γ . En esta figura, también se incluye el caso de $\Gamma=0$, el cual corresponde a un flujo dominado por un perfil de velocidad tipo "tapón" y fuerzas electro-osmóticas.

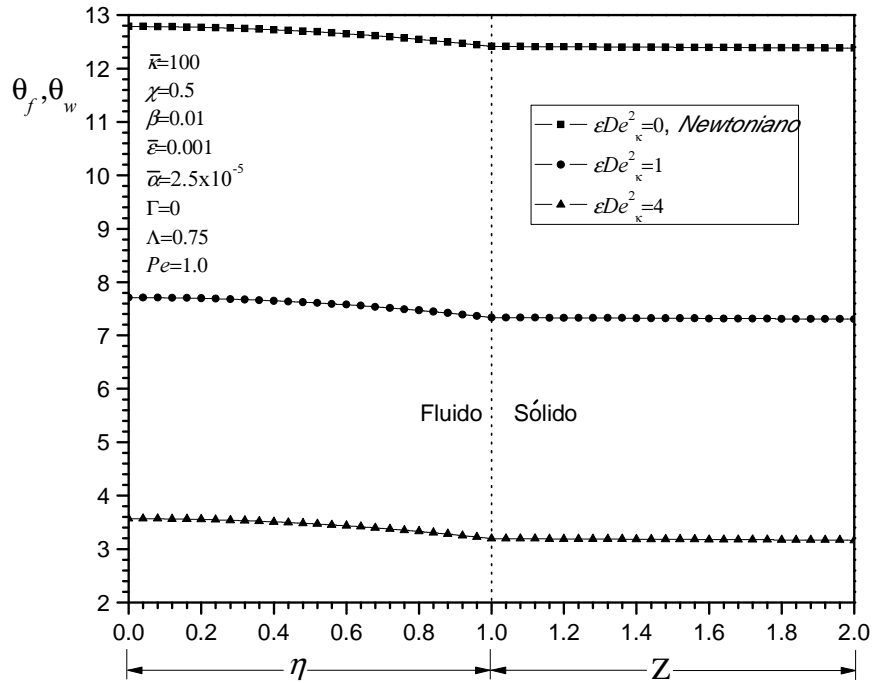


Figura 5.1. Perfil de temperatura adimensional como función de la coordenada transversal del microcanal en las regiones del fluido y sólido, en $\chi = 0.5$, para diferentes valores del parámetro viscoelástico, ϵDe_{κ}^2 .

La Figura 5.3 muestra los perfiles de temperatura adimensional a través de la sección transversal del microcanal para diferentes posiciones de la coordenada axial adimensional, $\chi(=0.1,0.5,1)$. Para los parámetros seleccionados, se observa un crecimiento lineal de la temperatura hacia la salida del microcanal.

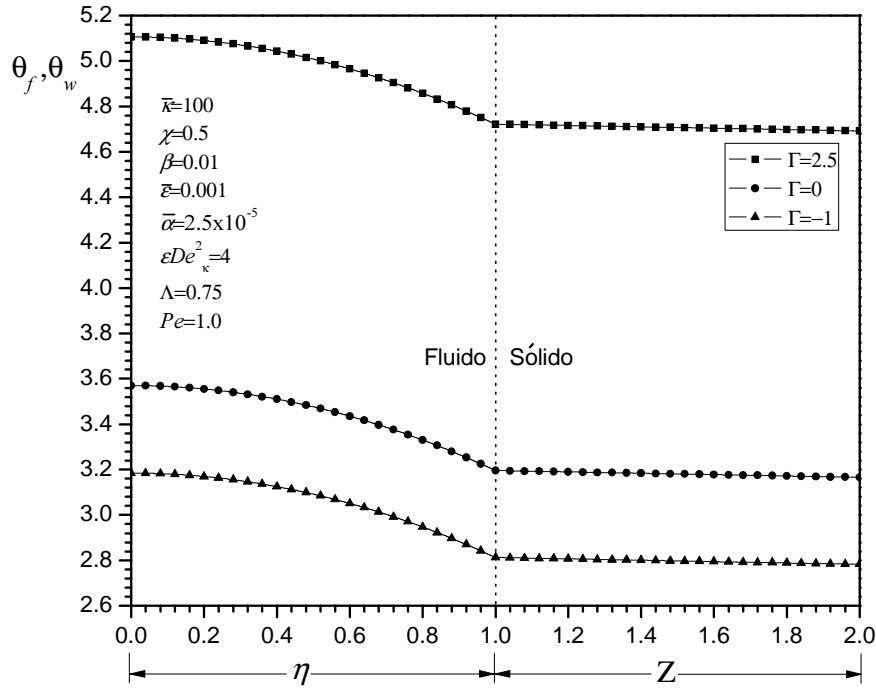


Figura 5.2. Perfil de temperatura adimensional como función de la coordenada transversal del microcanal en las regiones del fluido y sólido, en $\chi = 0.5$, para diferentes valores del parámetro Γ .

La Figura 5.4 muestra los perfiles de temperatura adimensional a través de la sección transversal del microcanal, evaluada en la coordenada axial $\chi = 0.5$, para diferentes valores del parámetro $\bar{\alpha}/\bar{\varepsilon}^2$ ($= 25, 2.5, 0.25$), respectivamente. En esta figura se puede apreciar que para valores decrecientes del parámetro $\bar{\alpha}/\bar{\varepsilon}^2$, hay un incremento de los gradientes de temperatura a través de la pared del microcanal; estas predicciones numéricas, están de acuerdo a al análisis de órdenes de magnitud dados en la sección 4.2.1 del Capítulo 4. Por ejemplo, para $\bar{\alpha}/\bar{\varepsilon}^2 = 25$, corresponden al límite mostrado por la ecuación (4.12), en donde prevalece $(\Delta T_{f,y}/\Delta T_y) \sim 1$ y $(\Delta T_{w,y}/\Delta T_y) \sim (\bar{\varepsilon}^2/\bar{\alpha})$; para $\bar{\alpha}/\bar{\varepsilon}^2 = 2.5$, corresponde el límite dado por la ecuación (4.11); finalmente, para $\bar{\alpha}/\bar{\varepsilon}^2 = 0.25$, corresponde el límite dado por la ecuación (4.10). Por tanto, para los

parámetros mostrados y para valores decrecientes del parámetro $\bar{\alpha}/\bar{\varepsilon}^2$, la disipación de calor es más lenta a través la pared del microcanal, causando importantes gradientes de temperatura, por efecto de la variación de la conductividad térmica y la geometría de la pared del canal.

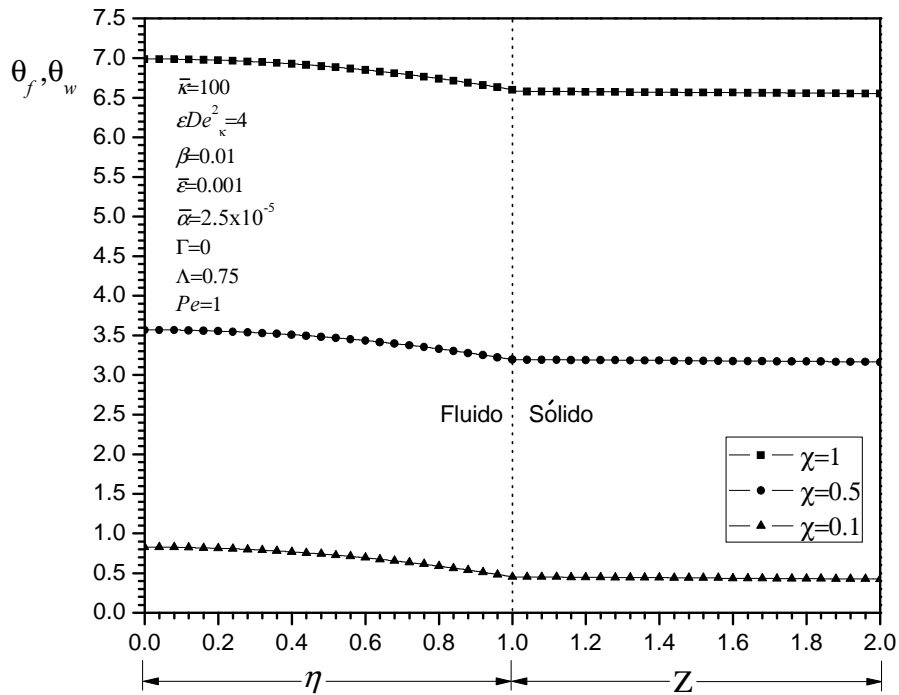


Figura 5.3. Perfil de temperatura adimensional como función de la coordenada transversal del microcanal en las regiones del fluido y sólido, para diferentes posiciones de la coordenada axial adimensional, χ .

La Figura 5.5 muestra la influencia del número de Peclet, Pe ($= 0.5, 1, 1.5$), sobre el proceso conjugado de transferencia de calor. Se puede observar, que al incrementar los valores de Pe , el efecto convectivo de calor tiende a disminuir los valores de la temperatura adimensional en el microcanal. Por lo tanto, el número de Peclet es un indicador de la magnitud del efecto convectivo en el sistema.

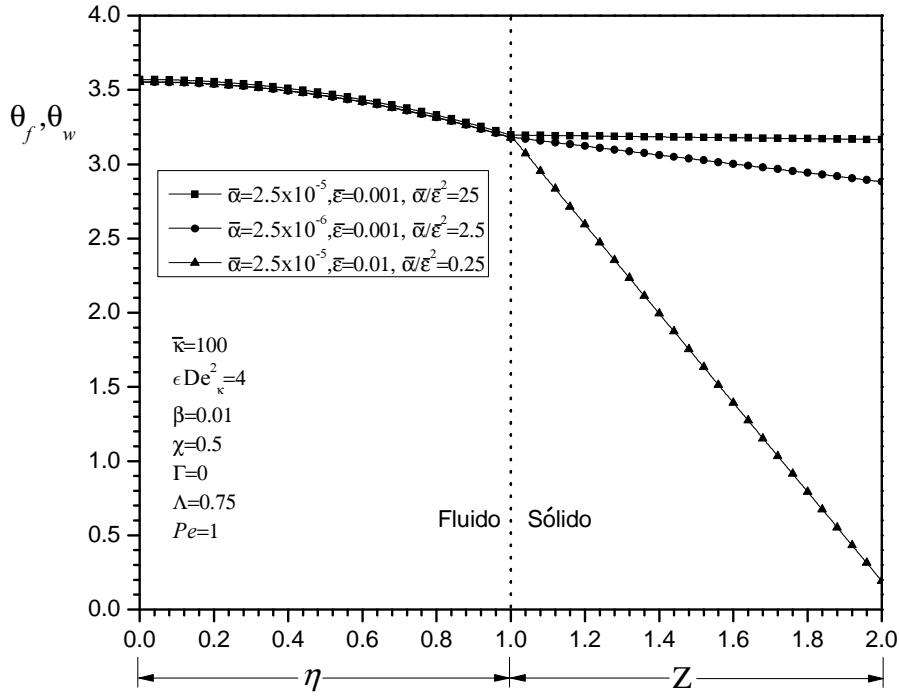


Figura 5.4. Perfil de temperatura adimensional como función de la coordenada transversal del microcanal en las regiones del fluido y sólido, para diferentes valores del parámetro, $\bar{\alpha}/\bar{\epsilon}^2$.

La Figura 5.6 muestra los perfiles de temperatura adimensional a través de la sección transversal del microcanal, evaluada en la coordenada axial $\chi = 0.5$, mostrando la influencia del parámetro $\Lambda (=0.5, 0.75, 1)$, que representa la competencia del calor generado por el calentamiento Joule al flujo de calor en la superficie externa del microcanal. En esta figura, se observa que para cualquier valor del parámetro Λ , los cambios de temperatura adimensional en la coordenada transversal de la región del fluido y del sólido, son pequeños; sin embargo, la influencia entre los valores de Λ cambia los perfiles de temperatura en forma muy sensible. Por tanto, el efecto del calentamiento Joule es el factor dominante para valores decrecientes de este parámetro en comparación de la correspondiente extracción de calor por q_0'' .

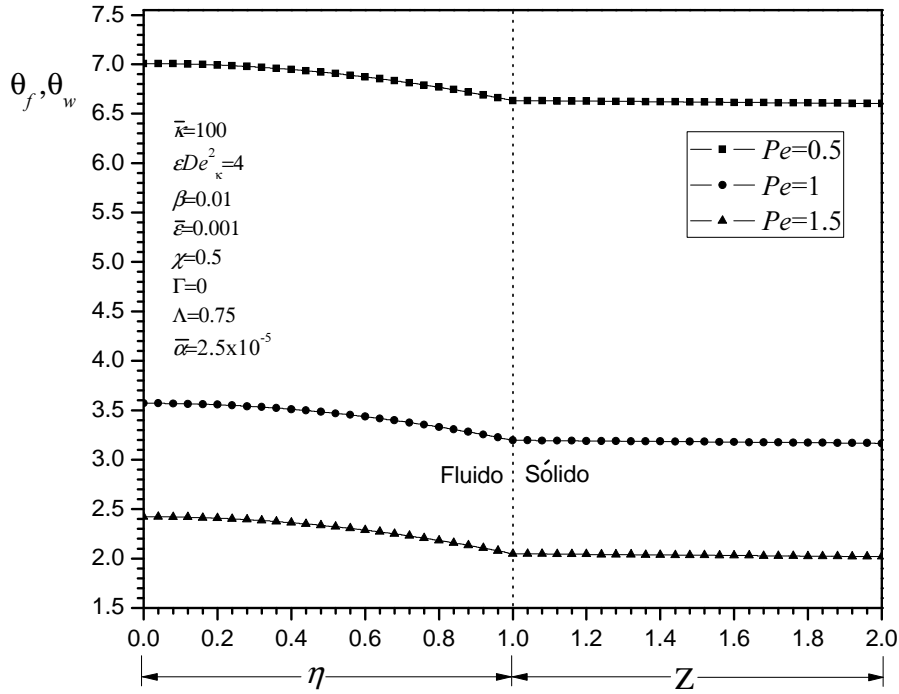


Figura 5.5. Perfil de temperatura adimensional como función de la coordenada transversal del microcanal en las regiones del fluido y sólido, para diferentes valores del número de Peclet, Pe .

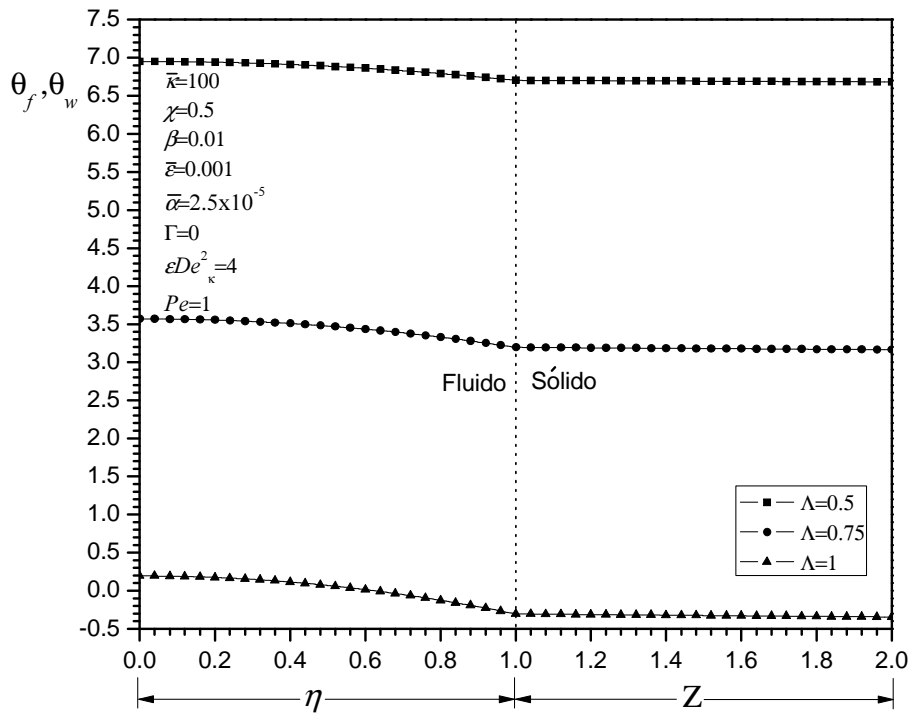


Figura 5.6. Perfil de temperatura adimensional como función de la coordenada transversal del microcanal en las regiones del fluido y sólido, para diferentes valores del parámetro Λ .

La Figura 5.7 compara las solución numérica (evaluada en la coordenada transversal $\eta = 0.5$) de las ecuaciones (3.77-3.82), con la solución asintótica de la ecuación (4.30) en el comportamiento de la temperatura adimensional del fluido como función de la coordenada longitudinal χ del microcanal, para diferentes valores del parámetro viscoelástico, $\varepsilon De_{\kappa}^2 (= 0, 1, 4)$. Se observa la correspondencia entre soluciones. Se muestra también, una ampliación del perfil de temperatura axial de la zona a la salida del microcanal para un valor $\varepsilon De_{\kappa}^2 = 0$, donde se puede apreciar el cumplimiento de la condición de frontera de la ecuación (3.79).

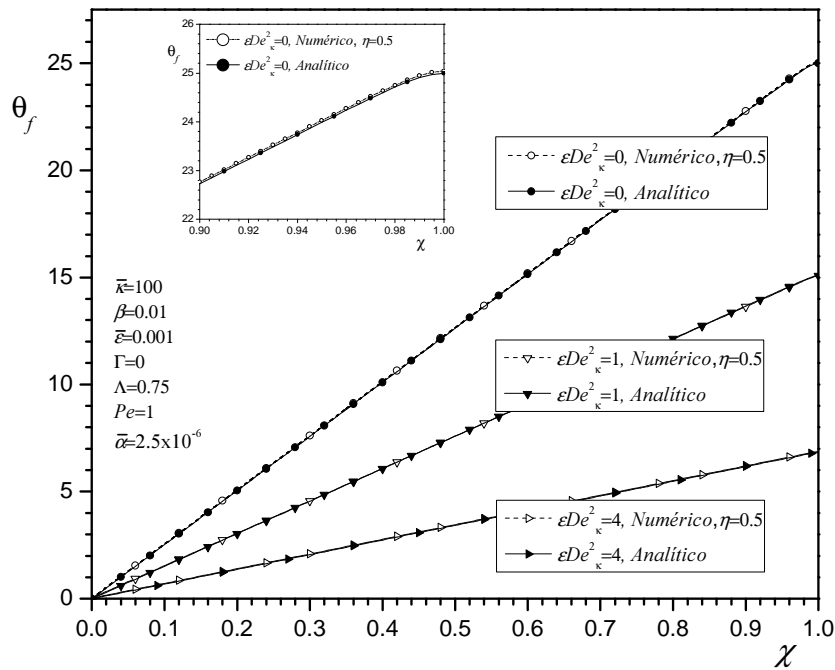


Figura 5.7. Comparación entre la solución numérica (evaluada en $\eta = 0.5$) y asintótica del perfil de temperatura adimensional del fluido, como función de la coordenada longitudinal χ del microcanal, para diferentes valores del parámetro viscoelástico, $\varepsilon De_{\kappa}^2$.

La Figura 5.8 compara la solución numérica (evaluada en $\eta = 0, 0.5, 1$) y la solución asintótica de la temperatura adimensional del fluido como función de la coordenada

longitudinal χ del microcanal. Para los parámetros mostrados y un valor del parámetro viscoelástico $\varepsilon De_{\kappa}^2 = 4$, se observa una mejor correspondencia de la solución asintótica en primera aproximación con el resultado obtenido numéricamente en la posición transversal $\eta = 0.5$.

La Figura 5.9 y para los parámetros mostrados, con $\varepsilon De_{\kappa}^2 = 4$, compara la solución numérica dada por las ecuaciones (3.87-3.90), (3.92) y (3.82), con la solución asintótica dada en primera aproximación por la ecuación (4.33), en el comportamiento del perfil de la temperatura adimensional del sólido a través de la coordenada transversal de la pared del microcanal. Se observa que la correspondencia entre estas soluciones de los perfiles de temperatura no es tan exacta como el caso de la región del fluido en la Figura 5.7, pero es un buen indicador en primera aproximación del correcto desempeño del método numérico en la solución del modelo matemático, tanto para la región del fluido como de la pared del microcanal.

Como caso ilustrativo y en orden de implementar los resultados de la solución numérica de la Figura 5.1, las Figuras 5.10 y 5.11 muestran los perfiles de temperatura del microcanal en casos particulares de variables físicas como función de la coordenada transversal y . Para los parámetros adimensionales mostrados, para tres diferentes valores de $\varepsilon De_{\kappa}^2 (= 0, 1, 4)$ y dos diferentes valores de la conductividad eléctrica $\sigma (= 0.001, 0.005 S/m)$, respectivamente, se pueden comparar ambas figuras, apreciando que al incrementar el valor de la conductividad eléctrica, la temperatura en el sistema se incrementa drásticamente.

De la misma manera, para implementar la solución de la Figura 5.7 en variables físicas, la Figura 5.12, presenta la comparación entre la solución numérica (evaluada

en $y = 50\mu m$) y la solución asintótica en el comportamiento de los perfiles de temperatura en unidades físicas como función de la coordenada longitudinal x , para un valor del parámetro viscoelástico $\varepsilon De_{\kappa}^2 = 4$ y dos diferentes valores de la conductividad eléctrica $\sigma (= 0.001, 0.005 S/m)$, respectivamente. Se aprecia que al incrementar el valor de la conductividad eléctrica, la temperatura del fluido se incrementa drásticamente en la dirección longitudinal, lo cual influye en la distribución de temperaturas en la región de la pared sólida del microcanal, como se aprecia en las Figuras 5.10 y 5.11, respectivamente.

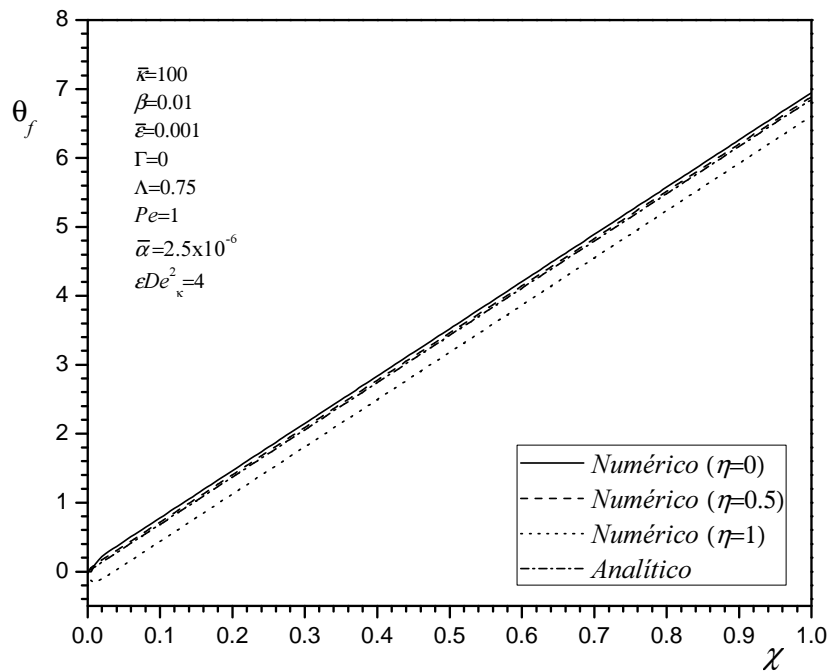


Figura 5.8. Comparación entre la solución numérica (evaluada en $\eta = 0, 0.5, 1$) y asintótica del perfil de temperatura adimensional del fluido, como función de la coordenada longitudinal χ del microcanal, para un valor del parámetro viscoelástico, $\varepsilon De_{\kappa}^2$.

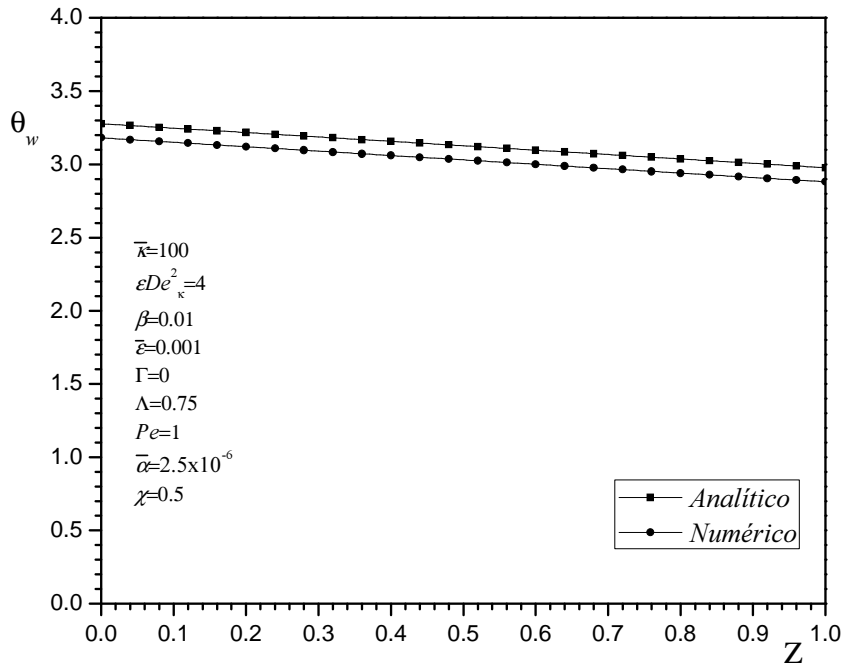


Figura 5.9. Comparación entre la solución numérica y asintótica del perfil de temperatura adimensional del sólido, como función de la coordenada transversal de la pared del microcanal, evaluada en $\chi = 0.5$, para un valor del parámetro viscoelástico, ϵDe_{κ}^2 .

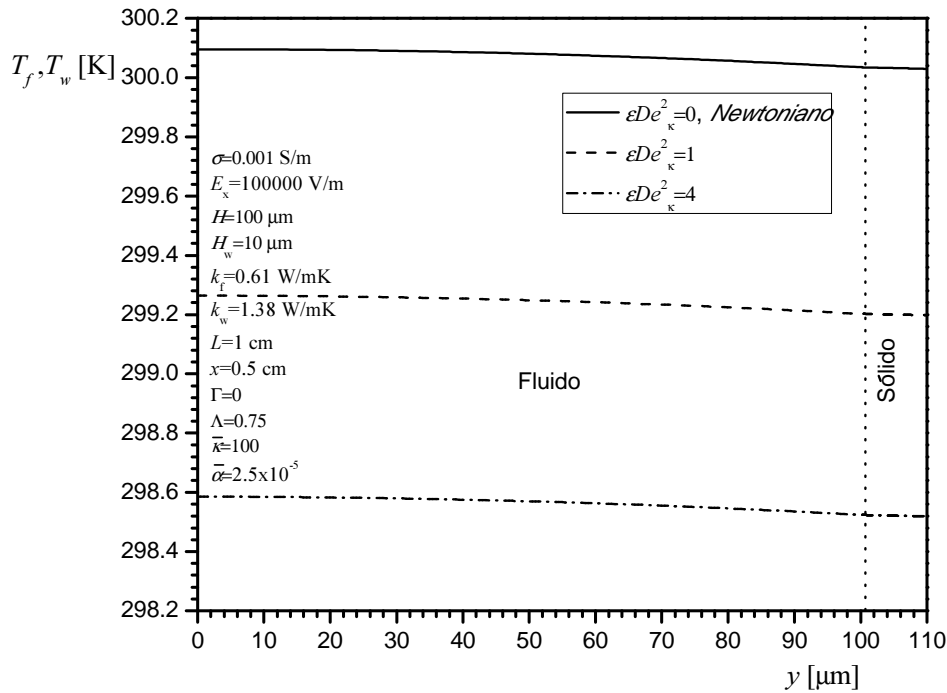


Figura 5.10. Perfil de temperatura como función de la coordenada transversal del microcanal en las regiones del fluido y sólido, en $x = 0.5 \text{ cm}$, para diferentes valores ϵDe_{κ}^2 y $\sigma = 0.001 \text{ S/m}$.

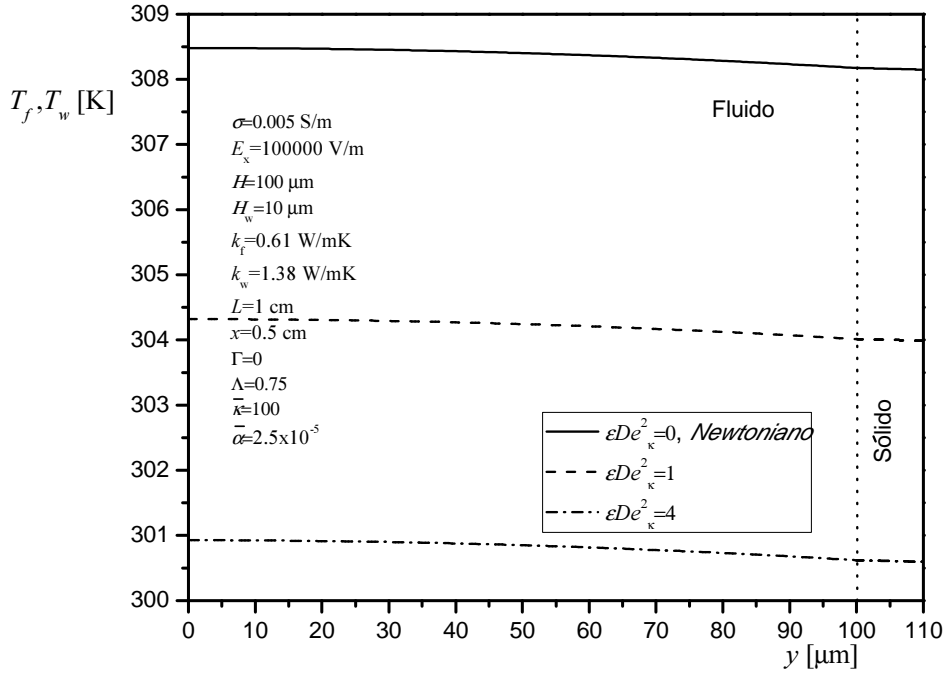


Figura 5.11. Perfil de temperatura como función de la coordenada transversal del microcanal en las regiones del fluido y sólido, en $x = 0.5 \text{ cm}$, para diferentes valores de ϵDe_x^2 y $\sigma = 0.005 \text{ S/m}$.

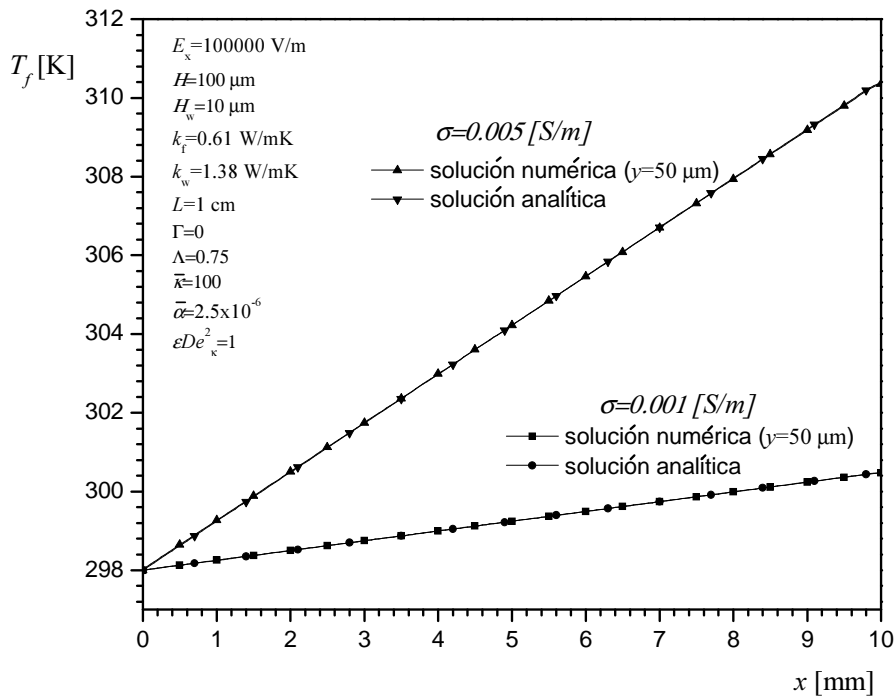


Figura 5.12. Comparación entre la solución numérica y asintótica del perfil de temperatura como función de la coordenada longitudinal del microcanal en las regiones del fluido y sólido, para un valor de ϵDe_x^2 y

$$\sigma = 0.001, 0.005 \text{ S/m} \dots$$

Complementariamente, en las Tablas 5.2 y 5.3, se presenta la comparación entre las soluciones numérica y asintótica para el número de Nusselt reducido, evaluado en diferentes posiciones axiales χ y para diferentes parámetros adimensionales involucrados. En la Tabla 5.2 se muestra que el número de Nusselt es independiente de los parámetros adimensionales De_κ , Pe , Λ , Γ y $\bar{\kappa}$. En el caso del presente trabajo en donde el flujo de calor es constante en la interface externa del microcanal, se tiene que Nu es una constante que también es independiente de la coordenada axial χ , dependiendo únicamente del parámetro $\bar{\alpha}/\bar{\varepsilon}^2$ indicado por la ecuación (4.43), como se puede observar en la Tabla 5.3. En estas tablas, el subíndice A , se refiere a la solución asintótica y el subíndice N , denota la solución numérica.

Tabla 5.2. Numero de Nusselt reducido, evaluado en diferentes posiciones axiales χ y para diferentes parámetros adimensionales involucrados, con $\bar{\alpha}/\bar{\varepsilon}^2 = 25$.

χ	Nu_N								Nu_A
	$\epsilon De_\kappa^2 = 1$	$\epsilon De_\kappa^2 = 4$	$\Gamma = 0$	$\Gamma = 2.5$	$Pe = 1.0$	$Pe = 1.5$	$\Lambda = 0.75$	$\Lambda = 1.0$	
0.1	49.8665	49.8266	49.8266	49.8416	49.8266	49.8266	49.8266	49.6997	50
0.5	49.8765	49.8433	49.8433	49.8516	49.8433	49.8366	49.8433	49.6972	50
1.0	49.6240	49.5123	49.5123	49.6381	49.5123	50.7227	49.5123	49.8438	50

Tabla 5.3. Numero de Nusselt reducido, evaluado en diferentes posiciones axiales χ para diferentes valores del parámetro $\bar{\alpha}/\bar{\varepsilon}^2$ ($=25, 2.5, 0.25$).

χ	$\bar{\alpha} = 2.5 \times 10^{-5}, \bar{\alpha}/\bar{\varepsilon}^2 = 25$		$\bar{\alpha} = 2.5 \times 10^{-6}, \bar{\alpha}/\bar{\varepsilon}^2 = 2.5$		$\bar{\alpha} = 2.5 \times 10^{-5}, \bar{\alpha}/\bar{\varepsilon}^2 = 0.25$	
	Nu_N	Nu_A	Nu_N	Nu_A	Nu_N	Nu_A
0.1	49.8266	50	4.9849	5	0.4982	0.5
0.5	49.8433	50	4.9835	5	0.4982	0.5
1.0	49.5123	50	5.0057	5	0.4990	0.5

Conclusiones

En el presente trabajo se analizó numérica y asintóticamente el problema conjugado de transferencia de calor de flujos combinados, electro-osmóticos y de presión en un microcanal de placas planas paralelas. El fluido que se considero sigue un modelo reológico PTT. El resultado final de este trabajo fue la estimación de los perfiles de temperatura adimensional en la región del fluido y de la pared sólida del microcanal en las condiciones impuestas. Se mostró la influencia de los parámetros adimensionales de transporte representativos, como son parámetros reológicos del fluido, de flujo, electrocinéticos y de transferencia de calor; parámetros que tienen una relevancia significativa en el control del incremento o decremento de la temperatura en el sistema del microcanal. Se logró alcanzar una buena aproximación de los resultados numéricos obtenidos con la solución asintótica propuesta, lo cual deja un campo de aplicación abierto al empleo de técnicas experimentales con fines de seguir validando el modelo matemático aquí desarrollado. Esta investigación ayudará a comprender las consecuencias del incremento de la temperatura por el calentamiento Joule, el cual tiene importantes efectos prácticos. Tales efectos de calentamiento pueden tener consecuencias en una baja eficiencia de separación de muestras, reducción de la resolución en los análisis, y pérdidas en la inyección de muestras en aplicaciones biomédicas. Por lo tanto, el presente modelo y su correspondiente solución, pueden actuar como una herramienta que ayude al entendimiento de los diferentes mecanismos de transporte en el eficiente diseño de los sistemas microfluídicos.

Referencias

- Afonso A.M., Alves M.A., Pinho F.T., Analytical solution of mixed electro-osmotic/pressure driven flows of viscoelastic fluids in microchannels, *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 159:50-63, 2009.
- Bayraktar T., Pidugu S.B., Characterization of liquid flows in microfluidic systems, 49:815–824, 2006.
- Berli C.L.A., Olivares M.L., Electrokinetic flow of non-Newtonian fluids in microchannels, *Journal of Colloid and Interface Science*, 320:582-589, 2008.
- Bird R.B., Armstrong R.C., Hassager O., *Dynamics of polymeric liquids. Fluid Mechanics*, John Wiley & Sons, Volume 1, 2d. ed., 1987.
- Castellanos A. y Pérez A., *Electrohydrodynamics systems*. Handbook of experimental fluid mechanics, Chapter 21, Springer Berlin, 2007.
- Castellanos A., *Electrohydrodynamics*. CSIM courses and lectures No. 380, International Centre for Mechanical Sciences. Springer - Verlag Wien New York, 1998.
- Chakraborty S., Roy S., Thermally developing electroosmotic transport of nanofluids in microchannels. *Microfluid Nanofluid*, 4:501-511, 2008.
- Chunshun Z., Da X., Yuyuan L., Micropumps, microvalves, and micromixers within PCR microfluidic chips: Advances and trends, *Biotechnology Advances*, 25: 483-514, 2007.
- Das S., Chakraborty S., Analytical solutions for velocity, temperature and concentration distribution in electroosmotic microchannel flows of a non-Newtonian bio-fluid, *Analytica Chimica Acta*, 559:15-24, 2006.
- Dhinakaran S., Afonso A.M., Alves M.A., Pinho F.T., Steady viscoelastic fluid flow between parallel plates under electro-osmotic forces: Phan-Thien-Tanner model, *Journal of Colloid and Interface Science*, 344:513-520, 2010.
- Fam H., Bryant J.T., Konopoulou M., Rheological properties of synovial fluids, *Biorheology*, 44:59-74, 2007.
- Griffiths D.J., *Introduction to Electrodynamics*. Prentice Hall, NJ, 3a. ed., 1999.
- Herwig H., Hausner O., Critical view on “new results in micro-fluid mechanics”: an example, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 46:935-937, 2003.
- Hoffman J.D., *Numerical Methods for Engineers and Scientist*. Marcel Dekker, Inc., Chap. 5, 9, 2001.
- Horiuchi K., Dutta P. and Hossain A., Joule-heating effects in mixed electro-osmotic and pressure-driven microflows under constant wall heat flux, *Journal of Engineering Mathematics*, 54:159-180, 2006.
- Horiuchi K., Dutta P., Joule heating effects in electroosmotically driven microchannel flows, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 47: 3085-3095, 2004.
- Hu G., Li D., Multiscale phenomena in microfluidics and nanofluidics, *Chemical engineering science*, 62:3443–3454, 2007.
- Jackson J.D., *Classical electrodynamics*. Wiley, 3a. ed., 1998.
- Karniadakis G., Beskok A., Aluru N., *Microflows and Nanoflows*. Interdisciplinary Applied Mathematics, Springer, V. 29, 2005.

- Kikuchi H., EHD/EMHD transport processes and electric reconnection in dusty and dirty plasmas. *Annals of the New York Academy of Sciences*, V. 891, Heat and mass transfer under plasma condition, 1999.
- Laser D.J. and Santiago J.G., A review of micropumps, *Journal of micromechanics and microengineering*, 14:35-64, 2004.
- Li D., *Electrokinetics in Microfluidics*. Interface Science and Technology, Elsevier Academy Press, V. 2, 2004.
- Maranzana G., Perry I., Maillet D., Mini- and Micro-channels: influence of axial conduction in the walls, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 47: 3993-4004, 2004.
- Masliyah J. H., Bhattacharjee S., *Electrokinetic and Colloid Transport Phenomena*. Wiley Interscience, 2006.
- Maynes D., Webb B.W., The effect of viscous dissipation in thermally fully-developed electro – osmotic heat transfer in microchannels. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 47:987-999, 2004.
- Morrison F.A. *Understanding rheology*. Oxford University Press, 2001.
- Moyers-Gonzalez, RG R.G.O., Fang J., A non-homogeneous constitutive model for human blood. Part I: Model derivation and steady flow, *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 617:327-354, 2008.
- Osswald T.A., Hernández-Ortiz J.P., *Polymer processing modeling and simulation*. Hanser Publishers, Munich, 2006.
- Owens R.G., A new microstructure-based constitutive model for human blood, *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 140:57-70, 2006.
- Park H.M. and Lee W.M., Helmholtz – Smulochowski for viscoelastic electroosmotic flows, *Journal of Colloid and Interface Science*, 317:631-636, 2008.
- Ramos A., *Microfluidic Technologies for Miniaturized Analysis Systems, Electrohydrodynamics and Magnetohydrodynamics Micropumps*. Chapter 2: Springer US, 2007.
- Sharma A., Chakraborty S., Semi-analytical solution of the extended Graetz problem for combined electroosmotically and pressure-driven microchannel flows with step-change in wall temperature. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 51:4875-4885, 2008.
- Steffen H. and Friedhelm S., *Microfluidic Technologies for Miniaturized Analysis Systems*. Springer, 2007.
- Stone H.A., Stroock A.D., and Ajdari A., Engineering flows in small devices: microfluidics toward a lab-on-a-chip, *Annual Review of Fluid Mechanics*, 36:381-411, 2004.
- Tang G., Yan D., Yang C., Gong H., Chai C., Lam Y., Joule heating and its effects on electrokinetic transport of solutes in rectangular microchannels, *Sensors and Actuators A*, 139: 221-232, 2007.
- Tang G.H., Li X.F., He Y.L., Tao W.Q., Electroosmotic flow of non-Newtonian fluid in microchannels, *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 157:133-137, 2009.
- Tang G.Y., Yang C., Chai C.J., and Gong H.Q., Modeling of Electroosmotic Flow and Capillary Electrophoresis with the Joule Heating Effect: The Nernst – Planck Equation versus the Boltzmann Distribution, *Langmuir*, 19:10975-10984, 2003.
- Tang G.Y., Yang C., Chai C.K., and Gong H.Q., Numerical analysis of the thermal effect on electroosmotic flow and electrokinetic mass transport in microchannels, *Analytica Chimica Acta*, 507: 27-37, 2004b.

- Tang G.Y., Yang C., Chai J.C., Gong H.Q., Joule heating effect on electroosmotic flow and mass species transport in microcapillary. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 47:215-227, 2004a.
- Thurston G.B., Greiling H., Viscoelastic properties of pathological synovial fluids for a wide range of oscillatory shear and frequencies, *Rheologica Acta*, 17:433-445, 1978.
- Vissink A., Waterman H.A., Gravermade E.J., Panders A.K., Vermey A., Rheological properties of saliva substitutes containing mucin, carboxymethyl cellulose or polyethylenoxide, *Journal of Oral Pathology Medicine*, 13:22-28, 1984.
- Xuan X., and Li D., Analytical study of Joule heating effects on electrokinetic transportation in capillary electrophoresis. *Journal of Chromatography A*, 1064: 227-237, 2005.
- Xuan X., and Li D., Joule heating effects on peak broadening in capillary zone electrophoresis, *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 14:1171-1180, 2004c.
- Xuan X., Joule heating in electrokinetic flow, *Electrophoresis*, 298:33-43, 2008.
- Xuan X., Sinton D., Li D., Thermal end effects on electroosmotic flow in a capillary, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 47:3145-3157, 2004a.
- Xuan X., Xu B., Sinton D. and Li D., Electroosmotic flow with Joule heating effects, *Miniaturisation for Chemistry, Biology & Bioengineering Lab Chip*, 4:230-236, 2004b.
- Yang J. and Kwok Y.D., Effect of liquid slip in electrokinetic parallel – plate microchannel flow, *Journal of Colloid and Interface Science*, 260:225-233, 2003.
- Zhao C., Zholkovskij E., Masliyah J. H., Yang C., Analysis of electroosmotic flow of power – law fluids in a slit microchannel, *Journal of Colloid and Interface Science*, 326:503-510, 2008.
- Zhao T.S. and Liao Q., Thermal effects on electro – osmotic pumping of liquids in microchannels, *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 12:962-970, 2002.

Apéndice A

Análisis del gradiente de velocidad con el modelo reológico Phan-Thien Tanner

En el caso de la ecuación constitutiva de fluidos viscoelásticos con el modelo SPTT, se tiene que el balance de esfuerzos con la velocidad de deformación queda, (Afonso et al., 2009; Osswald y Hernández-Ortiz, 2006)

$$\left[1 + \frac{\varepsilon\lambda_1}{\eta_0}(\tau_{xx} + \tau_{yy} + \tau_{zz})\right] \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{zz} \end{pmatrix} + \lambda_1 \dot{\gamma}_{yx} \begin{pmatrix} 2\tau_{yx} & \tau_{yy} & 0 \\ \tau_{yy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \eta_0 \begin{bmatrix} \dot{\gamma}_{yx} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.1})$$

de donde resulta el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left[1 + \frac{\varepsilon\lambda_1}{\eta_0}(\tau_{xx} + \tau_{yy} + \tau_{zz})\right] \tau_{xx} = 2\lambda_1 \tau_{yx} \dot{\gamma}_{yx}, \quad (\text{A.2})$$

$$\left[1 + \frac{\varepsilon\lambda_1}{\eta_0}(\tau_{xx} + \tau_{yy} + \tau_{zz})\right] \tau_{yy} = 0, \quad (\text{A.3})$$

$$\left[1 + \frac{\varepsilon\lambda_1}{\eta_0}(\tau_{xx} + \tau_{yy} + \tau_{zz})\right] \tau_{zz} = 0, \quad (\text{A.4})$$

$$\left[1 + \frac{\varepsilon\lambda_1}{\eta_0}(\tau_{xx} + \tau_{yy} + \tau_{zz})\right] \tau_{yx} - \lambda_1 \tau_{yy} \dot{\gamma}_{yx} = \eta_0 \dot{\gamma}_{yx}, \quad (\text{A.5})$$

de las ecuaciones (A.3) y (A.4), se deduce lo siguiente

$$\tau_{yy} = \tau_{zz} = 0, \quad (\text{A.6})$$

y dividiendo la ecuación (A.2) por (A.5) se obtiene

$$\tau_{xx} = \frac{2\lambda_1 \tau_{yx}^2}{\eta_0}. \quad (\text{A.7})$$

de la ecuación (A.5) se obtiene la velocidad de deformación como se indica a continuación

$$\dot{\gamma}_{yx} \equiv \frac{du}{dy} = \frac{\left[1 + \frac{\varepsilon\lambda_1}{\eta_0} \tau_{xx}\right] \tau_{yx}}{\eta_0}, \quad (\text{A.8})$$

la ecuación (A.8) define por tanto, el gradiente de velocidad para el modelo reológico viscoelástico considerado de SPTT, que al sustituir la ecuación (A.7) se transforma en la siguiente expresión

$$\frac{du}{dy} = \frac{\tau_{yx}}{\eta_0} + 2\varepsilon\lambda_1^2 \left(\frac{\tau_{yx}}{\eta_0}\right)^3. \quad (\text{A.9})$$

Despejando el término de las fuerzas viscosas de la ecuación (3.39) y sustituyendo la densidad de la carga eléctrica de la ecuación (3.36), se hace un proceso de integración en la dirección transversal resultando en la siguiente expresión para el esfuerzo cortante τ_{yx}

$$\tau_{yx} = \epsilon \zeta E_x \kappa \frac{\sinh(\kappa y)}{\cosh(\kappa H)} + p_x y, \quad (\text{A.10})$$

donde $p_x = dp/dx$. Sustituyendo el esfuerzo cortante τ_{yx} dado por la ecuación (A.10) en la ecuación (A.9), se obtiene una nueva expresión para el gradiente de velocidad del sistema en función de las fuerzas electro-osmóticas y de presión

$$\frac{du}{dy} = \left(\frac{\epsilon \zeta E_x \kappa \sinh(\kappa y)}{\eta_0 \cosh(\kappa H)} + \frac{p_x y}{\eta_0} \right) + 2\epsilon \lambda_1^2 \left(\frac{\epsilon \zeta E_x \kappa \sinh(\kappa y)}{\eta_0 \cosh(\kappa H)} + \frac{p_x y}{\eta_0} \right)^3. \quad (\text{A.11})$$

Desarrollando el polinomio de la ecuación (A.11), ésta se expande de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \frac{du}{dy} = & \frac{\epsilon \zeta E_x \kappa \sinh(\kappa y)}{\eta_0 \cosh(\kappa H)} + \frac{p_x y}{\eta_0} + \\ & 2\epsilon \lambda_1^2 \left[\left(\frac{\epsilon \zeta E_x \kappa \sinh(\kappa y)}{\eta_0 \cosh(\kappa H)} \right)^3 + \left(\frac{p_x y}{\eta_0} \right)^3 \right] + \\ & 2\epsilon \lambda_1^2 \left[3 \frac{p_x y}{\eta_0} \left(\frac{\epsilon \zeta E_x \kappa \sinh(\kappa y)}{\eta_0 \cosh(\kappa H)} \right)^2 + 3 \left(\frac{p_x y}{\eta_0} \right)^2 \left(\frac{\epsilon \zeta E_x \kappa \sinh(\kappa y)}{\eta_0 \cosh(\kappa H)} \right) \right], \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

con sus correspondientes condiciones de frontera dadas por las ecuaciones (3.17) y (3.18).

Apéndice B

Discretización en diferencias finitas e implementación de la solución numérica

B.1 Discretización del modelo matemático

El modelo matemático fue resuelto por un esquema numérico con diferencias finitas centrales, (Hoffman, 2001). Primeramente, discretizando el paso nodal para la coordenada axial adimensional de la región del fluido y sólido

$$\chi = i\Delta\chi : i = 0, 1, \dots, N; \quad (\text{B.1})$$

ahora para la coordenada transversal de la región del fluido y sólido, se tiene respectivamente

$$\eta = j\Delta\eta, Z = j\Delta Z : j = 0, 1, \dots, M. \quad (\text{B.2})$$

Las derivadas parciales de las ecuaciones de energía (3.77) y (3.87), pueden ser escritas en forma discretizada como se muestra a continuación; para la coordenada axial de la región del fluido y sólido

$$\frac{\partial \theta_f}{\partial \chi} \simeq \frac{\Theta_{f;i+1,j} - \Theta_{f;i-1,j}}{2\Delta\chi}, \quad (\text{B.3})$$

$$\frac{\partial^2 \theta_f}{\partial \chi^2} \simeq \frac{\Theta_{f;i+1,j} - 2\Theta_{f;i,j} + \Theta_{f;i-1,j}}{\Delta\chi^2}; \quad \frac{\partial^2 \theta_w}{\partial \chi^2} \simeq \frac{\Theta_{w;i+1,j} - 2\Theta_{w;i,j} + \Theta_{w;i-1,j}}{\Delta\chi^2}, \quad (\text{B.4})$$

ahora, para las coordenadas transversal de la región del fluido y sólido

$$\frac{\partial^2 \theta_f}{\partial \eta^2} \simeq \frac{\Theta_{f;i,j+1} - 2\Theta_{f;i,j} + \Theta_{f;i,j-1}}{\Delta\eta^2}; \quad \frac{\partial^2 \theta_w}{\partial Z^2} \simeq \frac{\Theta_{w;i,j+1} - 2\Theta_{w;i,j} + \Theta_{w;i,j-1}}{\Delta Z^2}. \quad (\text{B.5})$$

Región del fluido: Sustituyendo los términos adecuados de las ecuaciones (B.3- B.5) en la ecuación (3.77), se obtiene la versión discretizada de la ecuación de la energía adimensional para todos los nodos que no son nodos frontera

$$\left[\beta^2 - \frac{\Delta\chi\beta Pe\bar{u}_j}{2} \right] \theta_{f;i+1,j} + \Omega^2 \theta_{f;i,j+1} + \left[\beta^2 + \frac{\Delta\chi\beta Pe\bar{u}_j}{2} \right] \theta_{f;i-1,j} + \Omega^2 \theta_{f;i,j-1} - 2(\beta^2 + \Omega^2) \theta_{f;i,j} + \Delta\chi^2 = 0, \quad (\text{B.6})$$

para $i = 1, \dots, i_{\max-1}; j = 1, \dots, j_{\max-1}$.

El término de la velocidad adimensional \bar{u} de la ecuación (3.72) se reemplaza por el término por \bar{u}_j , sustituyendo la coordenada adimensional transversal η por el término adecuado de la ecuación (B.2), quedando en su versión discretizada de la manera siguiente

$$\begin{aligned}
\bar{u}_j = & \left(1 - 2D\varepsilon De_{\bar{\kappa}}^2\right)(1-F) + \frac{2}{3}\varepsilon De_{\bar{\kappa}}^2(1-F^3) - \frac{1}{2}\Gamma(1-(j\Delta\eta)^2) \left[1 + \frac{\varepsilon De_{\bar{\kappa}}^2}{\bar{\kappa}^2}\Gamma^2(1+(j\Delta\eta)^2)\right] \\
& + \frac{3}{2}\frac{\varepsilon De_{\bar{\kappa}}^2}{\bar{\kappa}^2}\Gamma \left[1 - F^2 + \left(\bar{\kappa}^2 - (\bar{\kappa}(j\Delta\eta))^2\right)D + 2\bar{\kappa}M((j\Delta\eta)FR - 1)\right] - \\
& \frac{12\varepsilon De_{\bar{\kappa}}^2}{\bar{\kappa}^4}\Gamma^2 \left[\bar{\kappa}M(1-(j\Delta\eta)R) + \left(1 + \frac{1}{2}(\bar{\kappa}(j\Delta\eta))^2\right)F - \left(1 + \frac{1}{2}\bar{\kappa}^2\right)\right].
\end{aligned} \tag{B.7}$$

Las condiciones de frontera discretizadas de la ecuación (B.6) se dan a continuación.

De la ecuación (3.78), para la sección de entrada del microcanal en $\chi = 0$:

$$\Theta_{f;i,j} = 0 \tag{B.8}$$

para $i = 0 ; j = 0, \dots, j_{max}$.

De la ecuación (3.79), para la salida del microcanal en $\chi = 1$:

$$\begin{aligned}
& \Omega^2\Theta_{f;i,j+1} + 2\beta^2\Theta_{f;i-1,j} + \Omega^2\Theta_{f;i,j-1} - 2(\beta^2 + \Omega^2)\Theta_{f;i,j} \\
& + \Delta\chi^2 + \left[\beta^2 - \frac{\Delta\chi\beta Pe\bar{u}_j}{2}\right]2\Delta\chi F_{x2} = 0,
\end{aligned} \tag{B.9}$$

con $F_{x2} = (\partial\theta_f/\partial\chi)\Big|_{(\chi=1,\eta)} \simeq \left[\left(\Theta_{f;i+1,j} - \Theta_{f;i-1,j}\right)/2\Delta\chi\right] = 0$; para $i = i_{max}; j = 1, \dots, j_{max-1}$.

De la ecuación (3.80) para el centro del microcanal en $\eta = 0$:

$$\begin{aligned}
& \left[\beta^2 - \frac{\Delta\chi\beta Pe\bar{u}_j}{2}\right]\Theta_{f;i+1,j} + 2\Omega^2\Theta_{f;i,j+1} + \left[\beta^2 + \frac{\Delta\chi\beta Pe\bar{u}_j}{2}\right]\Theta_{f;i-1,j} - \\
& 2(\beta^2 + \Omega^2)\Theta_{f;i,j} + \Delta\chi^2 - 2\Omega^2\Delta\eta F_{y1} = 0,
\end{aligned} \tag{B.10}$$

con $F_{y1} = (\partial\theta_f/\partial\eta)\Big|_{(\chi,\eta=0)} \simeq \left[\left(\Theta_{f;i,j+1} - \Theta_{f;i,j-1}\right)/2\Delta\eta\right] = 0$; para $i = 1, \dots, i_{max-1}; j = 0$.

De la ecuación (3.81), para la interface interna del microcanal en $\eta=1$:

$$\Theta_{f;i,j} = \Theta_{w;i,j} \quad (\text{B.11})$$

para $i=0,\dots,i_{max}; j=j_{max}$. Además de la ecuación (B.11) en la interface interna del microcanal, se considera la condición de compatibilidad dada por la ecuación (3.82) de la forma discretizada siguiente

$$\begin{aligned} & \left[\beta^2 - \frac{\Delta\chi\beta Pe\bar{u}_j}{2} \right] \Theta_{f;i+1,j} + 2\Omega^2 \Theta_{f;i,j-1} + \left[\beta^2 + \frac{\Delta\chi\beta Pe\bar{u}_j}{2} \right] \Theta_{f;i-1,j} - \\ & 2(\beta^2 + \Omega^2) \Theta_{f;i,j} + \Delta\chi^2 + 2\Omega^2 \Delta\eta F_{y2(i,j)} = 0, \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

con $F_{y2(i,j)} = (\bar{\alpha}/\bar{\varepsilon}^2) (\partial\theta_w/\partial Z)|_{(\chi,Z=0)} \simeq [(\Theta_{f;i,j+1} - \Theta_{f;i,j-1})/2\Delta\eta]$; para $i=1,\dots,i_{max-1}; j=j_{max}$.

Ahora, la condición de frontera para el nodo esquina de la malla en las coordenadas $i=i_{max}, j=0$, fue discretizada considerando las condiciones de salida y del centro del microcanal de las ecuaciones (3.79) y (3.80), obteniéndose

$$\begin{aligned} & 2\beta^2 \Theta_{f;i-1,j} + 2\Omega^2 \Theta_{f;i,j+1} - 2(\beta^2 + \Omega^2) \Theta_{f;i,j} + \Delta\chi^2 - \\ & 2\Delta\eta\Omega^2 F_{y1} + \left[\beta^2 - \frac{\Delta\chi\beta Pe\bar{u}_j}{2} \right] 2\Delta\chi F_{x2} = 0, \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

finalmente para la región del fluido, la condición de frontera para el nodo esquina de la malla en las coordenadas $i=i_{max}, j=j_{max}$, fue discretizada considerando las condiciones

de salida y de la interface interna del microcanal de las ecuaciones (3.79) y (3.82), obteniéndose

$$2\beta^2\Theta_{f;i-1,j} + 2\Omega^2\Theta_{f;i,j-1} - 2(\beta^2 + \Omega^2)\Theta_{f;i,j} + \Delta\chi^2 + \left[\beta^2 - \frac{\Delta\chi\beta Pe\bar{u}_j}{2} \right] 2\Delta\chi F_{x2} + 2\Omega^2\Delta\eta F_{y2(i,j)} = 0, \quad (\text{B.14})$$

Región del sólido: Sustituyendo los términos adecuados de las ecuaciones (B.4) y (B.5) en la ecuación (3.87), se obtiene la versión discretizada de la ecuación de la energía adimensional para todos los nodos que no son nodos frontera

$$\bar{\alpha}\Theta_{w;i+1,j} + \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\varepsilon}^2}\Phi^2\Theta_{w;i,j+1} + \bar{\alpha}\Theta_{w;i-1,j} + \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\varepsilon}^2}\Phi^2\Theta_{w;i,j-1} - 2\bar{\alpha}\left(1 + \frac{\Phi^2}{\bar{\varepsilon}^2}\right)\Theta_{w;i,j} = 0, \quad (\text{B.15})$$

para $i = 1, \dots, i_{max-1}; j = 1, \dots, j_{max-1}$.

Las condiciones de frontera discretizadas de la ecuación (B.15) se dan a continuación.

De la ecuación (3.88), para el lado izquierdo de la pared del microcanal en $\chi = 0$:

$$2\bar{\alpha}\Theta_{w;i+1,j} + \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\varepsilon}^2}\Phi^2\Theta_{w;i,j+1} + \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\varepsilon}^2}\Phi^2\Theta_{w;i,j-1} - 2\bar{\alpha}\left(1 + \frac{\Phi^2}{\bar{\varepsilon}^2}\right)\Theta_{w;i,j} - 2\bar{\alpha}\Delta\chi F_{wx1} = 0, \quad (\text{B.16})$$

con $F_{wx1} = (\partial\theta_w/\partial\chi)|_{(\chi=0,Z)} = \left[(\Theta_{w;i+1,j} - \Theta_{w;i-1,j}) / 2\Delta\chi \right] = 0$; para $i = 0; j = 1, \dots, j_{max-1}$.

De la ecuación (3.89) para el lado derecho de la pared del microcanal en $\chi = 1$:

$$2\bar{\alpha}\Theta_{w;i-1,j} + \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\varepsilon}^2}\Phi^2\Theta_{w;i,j+1} + \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\varepsilon}^2}\Phi^2\Theta_{w;i,j-1} - 2\bar{\alpha}\left(1 + \frac{\Phi^2}{\bar{\varepsilon}^2}\right)\Theta_{w;i,j} + 2\bar{\alpha}\Delta\chi F_{wx2} = 0, \quad (\text{B.17})$$

con $F_{wx2} = (\partial\theta_w/\partial\chi)|_{(\chi=1,Z)} = \left[(\Theta_{w;i+1,j} - \Theta_{w;i-1,j}) / 2\Delta\chi \right] = 0$; para $i = i_{max}; j = 1, \dots, j_{max-1}$.

De la ecuación (3.92) para la interface interna del microcanal en $Z = 0$:

$$\Theta_{f;i,j} = \Theta_{w;i,j} \quad (\text{B.18})$$

para $i = 0, \dots, i_{max}; j = 0$.

Para la condición de frontera de la interface externa del microcanal, de la ecuación (3.90), en $Z = 1$:

$$\bar{\alpha}\Theta_{w;i+1,j} + 2\frac{\bar{\alpha}}{\bar{\varepsilon}^2}\Phi^2\Theta_{w;i,j-1} + \bar{\alpha}\Theta_{w;i-1,j} - 2\bar{\alpha}\left(1 + \frac{\Phi^2}{\bar{\varepsilon}^2}\right)\Theta_{w;i,j} - 2\Lambda\Phi^2\Delta Z = 0, \quad (\text{B.19})$$

para $i = 1, \dots, i_{max-1}; j = j_{max}$.

Ahora, la condición de frontera para el nodo esquina en las coordenadas $i = 0, j = j_{max}$, fue discretizada considerando las condiciones del lado izquierdo y de la interface externa de la pared del microcanal de las ecuaciones (3.88) y (3.90), obteniéndose

$$2\bar{\alpha}\Theta_{w;i+1,j} + 2\frac{\bar{\alpha}}{\bar{\varepsilon}^2}\Phi^2\Theta_{w;i,j-1} - 2\bar{\alpha}\left(1 + \frac{\Phi^2}{\bar{\varepsilon}^2}\right)\Theta_{w;i,j} - 2\bar{\alpha}\Delta\chi F_{wx1} - 2\Lambda\Phi^2\Delta Z = 0, \quad (\text{B.20})$$

finalmente, para la región del sólido, la condición de frontera para el nodo esquina en las coordenadas $i = i_{max}, j = j_{max}$, fue discretizada considerando las condiciones del lado derecho y de la interface externa de la pared del microcanal de las ecuaciones (3.89) y (3.90), obteniéndose

$$2\bar{\alpha}\Theta_{w;i-1,j} + 2\frac{\bar{\alpha}}{\bar{\epsilon}^2}\Phi^2\Theta_{w;i,j-1} - 2\bar{\alpha}\left(1 + \frac{\Phi^2}{\bar{\epsilon}^2}\right)\Theta_{w;i,j} + 2\bar{\alpha}\Delta\chi F_{wx2} - 2\Lambda\Phi^2\Delta Z = 0 \quad (\text{B.21})$$

B.2 Implementación del método “SOR”

La discretización anterior de los modelos matemáticos adimensionales y sus respectivas condiciones de frontera se implementaron en el método iterativo de SOR, como a continuación se describe.

Región del fluido: El cambio de temperatura $\Delta\Theta_{f;i,j}^{k+1}$ en nodos interiores que no correspondan a nodos frontera es determinada de la ecuación (B.6) adaptándose al método de SOR de la siguiente forma

$$\Delta\Theta_{f;i,j}^{k+1} = \left\{ \begin{array}{l} \left[\beta^2 - \frac{\Delta\chi\beta Pe\bar{u}_j}{2} \right] \Theta_{f;i+1,j} + \Omega^2 \Theta_{f;i,j+1} + \\ \left[\beta^2 + \frac{\Delta\chi\beta Pe\bar{u}_j}{2} \right] \Theta_{f;i-1,j} + \\ \Omega^2 \Theta_{f;i,j-1} - 2(\beta^2 + \Omega^2) \Theta_{f;i,j} + \Delta\chi^2 \end{array} \right\} / 2(\beta^2 + \Omega^2). \quad (\text{B.22})$$

La temperatura en la entrada del fluido del microcanal fue especificada por la ecuación (B.8); mientras que las condiciones de frontera que no tienen temperatura especificada son adaptadas al método de SOR como sigue, primeramente a la salida del microcanal a partir de la ecuación (B.9) se obtiene

$$\Delta\Theta_{f;i,j}^{k+1} = \left\{ \begin{array}{l} \Omega^2\Theta_{f;i,j+1} + 2\beta^2\Theta_{f;i-1,j} + \Omega^2\Theta_{f;i,j-1} - \\ 2(\beta^2 + \Omega^2)\Theta_{f;i,j} + \Delta\chi^2 + \left[\beta^2 - \frac{\Delta\chi\beta Pe\bar{u}_j}{2} \right] 2\Delta\chi F_{x2} \end{array} \right\} / 2(\beta^2 + \Omega^2), \quad (\text{B.23})$$

para la condición de frontera en el centro del microcanal a partir de la ecuación (B.10) se obtiene

$$\Delta\Theta_{f;i,j}^{k+1} = \left\{ \begin{array}{l} \left[\beta^2 - \frac{\Delta\chi\beta Pe\bar{u}_j}{2} \right] \Theta_{f;i+1,j} + 2\Omega^2\Theta_{f;i,j+1} + \\ \left[\beta^2 + \frac{\Delta\chi\beta Pe\bar{u}_j}{2} \right] \Theta_{f;i-1,j} - \\ 2(\beta^2 + \Omega^2)\Theta_{f;i,j} + \Delta\chi^2 - 2\Omega^2\Delta\eta F_{y1} \end{array} \right\} / 2(\beta^2 + \Omega^2). \quad (\text{B.24})$$

La temperatura en la interface interna del fluido del microcanal fue especificada por la ecuación (B.11) y en adición a esta condición de frontera, a partir de la ecuación (B.12) se obtiene

$$\Delta\Theta_{f;i,j}^{k+1} = \left\{ \begin{array}{l} \left[\beta^2 - \frac{\Delta\chi\beta Pe\bar{u}_j}{2} \right] \Theta_{f;i+1,j} + 2\Omega^2\Theta_{f;i,j-1} + \\ \left[\beta^2 + \frac{\Delta\chi\beta Pe\bar{u}_j}{2} \right] \Theta_{f;i-1,j} - \\ 2(\beta^2 + \Omega^2)\Theta_{f;i,j} + \Delta\chi^2 + 2\Omega^2\Delta\eta F_{y2(i,j)} \end{array} \right\} / 2(\beta^2 + \Omega^2). \quad (\text{B.25})$$

Para la condición de frontera en el nodo esquina en las coordenadas $i=i_{max}, j=0$ y a partir de la ecuación (B.13) se obtiene

$$\Delta\Theta_{f,i,j}^{k+1} = \left\{ \begin{array}{l} 2\beta^2\Theta_{f;i-1,j} + 2\Omega^2\Theta_{f;i,j+1} - 2(\beta^2 + \Omega^2)\Theta_{f;i,j} + \Delta\chi^2 - \\ 2\Delta\eta\Omega^2 F_{y1} + \left[\beta^2 - \frac{\Delta\chi\beta Pe\bar{u}_j}{2} \right] 2\Delta\chi F_{x2} \end{array} \right\} / 2(\beta^2 + \Omega^2), \quad (\text{B.26})$$

finalmente, la condición de frontera para el nodo esquina en las coordenadas $i=i_{max}, j=j_{max}$ y a partir de la ecuación (B.14) se obtiene

$$\Delta\Theta_{f,i,j}^{k+1} = \left\{ \begin{array}{l} 2\beta^2\Theta_{f;i-1,j} + 2\Omega^2\Theta_{f;i,j-1} - 2(\beta^2 + \Omega^2)\Theta_{f;i,j} + \Delta\chi^2 + \\ \left[\beta^2 - \frac{\Delta\chi\beta Pe\bar{u}_j}{2} \right] 2\Delta\chi F_{x2} + 2\Omega^2\Delta\eta F_{y2(i,j)} \end{array} \right\} / 2(\beta^2 + \Omega^2), \quad (\text{B.27})$$

Región del sólido: El cambio de temperatura $\Delta\Theta_{w,i,j}^{k+1}$ en nodos interiores que no correspondan a nodos frontera es determinada de la ecuación (B.15) adaptándose al método de SOR de la siguiente forma

$$\Delta\Theta_{w,i,j}^{k+1} = \left\{ \begin{array}{l} \bar{\alpha}\Theta_{w;i+1,j} + \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\epsilon}^2}\Phi^2\Theta_{w;i,j+1} + \bar{\alpha}\Theta_{w;i-1,j} + \\ \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\epsilon}^2}\Phi^2\Theta_{w;i,j-1} - 2\bar{\alpha}\left(1 + \frac{\Phi^2}{\bar{\epsilon}^2}\right)\Theta_{w;i,j} \end{array} \right\} / 2\bar{\alpha}\left(1 + \frac{\Phi^2}{\bar{\epsilon}^2}\right), \quad (\text{B.28})$$

las condiciones de frontera que no tienen temperatura especificada son adaptadas al método de SOR como sigue, considerando primeramente el lado izquierda de la pared del microcanal a partir de la ecuación (B.16) se obtiene

$$\Delta\Theta_{w;i,j}^{k+1} = \left\{ \begin{array}{l} 2\bar{\alpha}\Theta_{w;i+1,j} + \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\varepsilon}^2}\Phi^2\Theta_{w;i,j+1} + \\ \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\varepsilon}^2}\Phi^2\Theta_{w;i,j-1} - 2\bar{\alpha}\left(1 + \frac{\Phi^2}{\bar{\varepsilon}^2}\right)\Theta_{w;i,j} - \\ 2\bar{\alpha}\Delta\chi F_{wx1} \end{array} \right\} / 2\bar{\alpha}\left(1 + \frac{\Phi^2}{\bar{\varepsilon}^2}\right), \quad (\text{B.29})$$

ahora, para el lado derecho de la pared del microcanal a partir de la ecuación (B.17) se obtiene

$$\Delta\Theta_{w;i,j}^{k+1} = \left\{ \begin{array}{l} 2\bar{\alpha}\Theta_{w;i-1,j} + \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\varepsilon}^2}\Phi^2\Theta_{w;i,j+1} + \\ \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\varepsilon}^2}\Phi^2\Theta_{w;i,j-1} - 2\bar{\alpha}\left(1 + \frac{\Phi^2}{\bar{\varepsilon}^2}\right)\Theta_{w;i,j} + \\ 2\bar{\alpha}\Delta\chi F_{wx2} \end{array} \right\} / 2\bar{\alpha}\left(1 + \frac{\Phi^2}{\bar{\varepsilon}^2}\right). \quad (\text{B.30})$$

La temperatura en la interface interna del microcanal fue especificada por la ecuación (B.18), adicionalmente se considera la ecuación (3.82), para evaluar los siguientes gradientes de temperatura en las regiones del fluido y solido, respectivamente

$$\frac{\bar{\alpha}}{\bar{\varepsilon}^2} \frac{\partial\theta_{w,i,j}}{\partial Z} \Big|_{(\chi,Z=0)} = \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\varepsilon}^2} \left(\frac{\theta_{w,i,j+1} - \theta_{w,i,j}}{\Delta Z} \right) \Big|_{(i,j=0)} = \frac{\partial\theta_{f;i,j}}{\partial\eta} \Big|_{(\chi,\eta=1)} = F_{y2(i,j)}, \quad (\text{B.31})$$

la ecuación anterior es necesaria para evaluar el gradiente $F_{y2(i,j)}$ en las ecuaciones (B.12) y (B.14) para la región del fluido. Ahora, a partir de la condición de frontera en la interface externa de la pared del microcanal de la ecuación (B.19) se obtiene

$$\Delta\Theta_{w;i,j}^{k+1} = \left\{ \begin{array}{l} \bar{\alpha}\Theta_{w;i+1,j} + 2\frac{\bar{\alpha}}{\varepsilon^2}\Phi^2\Theta_{w;i,j-1} + \bar{\alpha}\Theta_{w;i-1,j} - \\ 2\bar{\alpha}\left(1 + \frac{\Phi^2}{\varepsilon^2}\right)\Theta_{w;i,j} - 2\Lambda\Phi^2\Delta Z \end{array} \right\} / 2\bar{\alpha}\left(1 + \frac{\Phi^2}{\varepsilon^2}\right). \quad (\text{B.32})$$

Ahora, a partir de la condición de frontera para el nodo esquina en las coordenadas $i=0, j=j_{max}$, de la ecuación (B.20) se obtiene

$$\Delta\Theta_{w;i,j}^{k+1} = \left\{ \begin{array}{l} 2\bar{\alpha}\Theta_{w;i+1,j} + 2\frac{\bar{\alpha}}{\varepsilon^2}\Phi^2\Theta_{w;i,j-1} - \\ 2\bar{\alpha}\left(1 + \frac{\Phi^2}{\varepsilon^2}\right)\Theta_{w;i,j} - 2\bar{\alpha}\Delta\chi F_{wx1} - 2\Lambda\Phi^2\Delta Z \end{array} \right\} / 2\bar{\alpha}\left(1 + \frac{\Phi^2}{\varepsilon^2}\right), \quad (\text{B.33})$$

finalmente, a partir de la condición de frontera para el nodo esquina en las coordenadas $i=i_{max}, j=j_{max}$, de la ecuación (B.21) se obtiene

$$\Delta\Theta_{w;i,j}^{k+1} = \left\{ \begin{array}{l} 2\bar{\alpha}\Theta_{w;i-1,j} + 2\frac{\bar{\alpha}}{\varepsilon^2}\Phi^2\Theta_{w;i,j-1} - \\ 2\bar{\alpha}\left(1 + \frac{\Phi^2}{\varepsilon^2}\right)\Theta_{w;i,j} + 2\bar{\alpha}\Delta\chi F_{wx2} - 2\Lambda\Phi^2\Delta Z \end{array} \right\} / 2\bar{\alpha}\left(1 + \frac{\Phi^2}{\varepsilon^2}\right). \quad (\text{B.34})$$

B.3 Número de Nusselt reducido

De la ecuación (4.38), el numero de Nusselt reducido se puede representar en forma discretizada como a continuación de indica

$$\text{Nu}_N = \frac{-\frac{\partial\theta_{f0}}{\partial\eta}\Big|_{(\chi,\eta=1)}}{\theta_{f0} - \bar{\theta}_{w0}} = \frac{2\left[(\Theta_{f;i,j=j_{max}}) - (\Theta_{f;i,j=j_{max}-1})\right]}{2\Theta_{f;i,j=j_{max}} - \left[\Theta_{w,i,j=0} + \Theta_{w,i,j=j_{max}}\right]}, \quad (\text{B.35})$$

considerando el no salto de temperatura en la interface interna del microcanal

$\Theta_{f;i,j=j_{max}} = \Theta_{w,i,j=0}$, de esta forma simplificando la ecuación (B.35) se transforma en

$$\text{Nu}_N = \frac{2[(\Theta_{f;i,j=j_{max}}) - (\Theta_{f;i,j=j_{max}-1})]}{\Delta\eta[\Theta_{f;i,j=j_{max}} + \Theta_{w,i,j=j_{max}}]} \quad (\text{B.36})$$

Apéndice C

Codificación de la solución numérica

Programa en Fortran PowerStation 4.0, que resuelve el modelo matemático del problema conjugado de transferencia de calor en un flujo de un fluido viscoelástico con modelo reológico Phan-Thien Tanner simplificado (SPTT) en un microcanal de placas planas paralelas en estado estable e hidrodinámicamente desarrollado.

```
program main

!*****REGION DEL SOLIDO -asignacion de formato y datos del problema-*****
real (kind=8),dimension(2000,2000)::fw
real (kind=8),dimension(2000)::gradiente
real (kind=8),dimension(2000)::gradiente2
real (kind=8),dimension(2000)::tempInterfaceSolido
real (kind=8)::epsilongorro
real (kind=8)::dwx
real (kind=8)::dwy
real (kind=8)::alfagorro
real (kind=8)::lambda
real (kind=8)::beta
real (kind=8)::tol
real (kind=8)::tol3
real (kind=8)::fi
real (kind=8)::fwx2
real (kind=8)::fwx1
real (kind=8)::omegaw
real (kind=8)::zetaw
real (kind=8)::dfmaxw
real (kind=8)::dfw
real (kind=8)::dew
integer::i, j, iter, jmax, imax, ix
data dwx, dwy, iter, tol, tol3/0.005, 0.005, 50000000, 1.0e-08, 0.001/
data imax, jmax, iw, ix/201, 201, 1, 1/
data fwx1, fwx2 /0.0, 0.0/
!*****REGION DEL FLUIDO -asignacion de formato y datos del problema-*****
real (kind=8),dimension(2000,2000)::f
real (kind=8),dimension(1000)::veloci
real (kind=8),dimension(2000)::gradiente3
real (kind=8),dimension(2000)::tempInterfaceFluido
real (kind=8),dimension(2000)::DELTATEMPERATURAINTERF
```

```

real (kind=8)::dx
real (kind=8)::dy
real (kind=8)::Pe
real (kind=8)::velocidad
real (kind=8)::M
real (kind=8)::D
real (kind=8)::AA
real (kind=8)::BB
real (kind=8)::CC
real (kind=8)::DD
real (kind=8)::coeficiente1
real (kind=8)::coeficiente2
real (kind=8)::parametro
real (kind=8)::k
real (kind=8)::GAMA
real (kind=8)::OMEGAMAY
real (kind=8)::fx2
real (kind=8)::fy1
real (kind=8)::omega
real (kind=8)::zeta
real (kind=8)::dfmax
real (kind=8)::df
real (kind=8)::de
data dx, dy/0.005, 0.005/
data fx2, fy1 /0.0, 0.0/
data k/100.0/           !radio relativo del microcanal
data GAMA/0.0/         !termino de la influencia de la presion
data parametro/1.0/    !parametro viscoelastico
!*****ITERACION PRINCIPAL DEL PROBLEMA CONJUGADO*****
itM=1
do itP=itM, iter
  PRINT' (I10)', itP
  !*****Creacion de archivos de salida datos del SOLIDO*****
  !*****Archivo de datos de temperatura nodal*****
  open(6, file='solido.dat')
  !*****Archivo de datos del gradiente de temperatura*****
  open(7, file='gradientesolido.dat')
  !*****Creacion de archivos de salida datos del FLUIDO*****
  !*****Archivo de datos de temperatura nodal*****
  open(8, file='fluido.dat')
  !*****Archivo de datos del gradiente de temperatura*****
  open(9, file='gradientefluido.dat')
  !****Creacion de archivos de datos de la comparación de la temperatura interfacial*****
  !*****Archivo de datos de LA DELTA temperatura nodal*****
  open(10, file='deltatemperaturainterface.dat')
  !*****S O L I D O*****
  !*****Determinacion del factor de correccion omegaw*****
  zetaw=((cos(3.141516/(imax-1))+((dwx/dwy)**2)*cos(3.141516/(jmax-1)))/(1+(dwx/dwy)**2))*2
  omegaw=2*((1-sqrt(1-zetaw))/zetaw)
  !*****Inicializacion de nodos en el SOLIDO *****
  !*****Interface de la pared interna del microcanal*****
  if (itP==1) then
    fw(1,1)=1.0
    fw(imax,1)=1.0

```

```

do i=2, imax-1
    fw(i, 1)=1.0
end do
else
!*****Nueva temperatura en la pared interna del canal*****
do i=1, imax
    fw(i, 1)=tempInterfaceFluido(i)
end do
end if
!*****Pared externa del microcanal*****
fw(1, jmax)=0.0
fw(imax, jmax)=0.0
do i=2, imax-1
    fw(i, jmax)=0.0
end do
!*****Pared izquierda del microcanal*****
do j=2, jmax-1
    fw(1, j)=0.0
end do
!*****Pared derecha del microcanal*****
do j=2, jmax-1
    fw(imax, j)=0.0
end do
!*****Nodos interiores a 0.0 de la malla discretizada*****
do i=2, imax-1
    do j=2, jmax-1
        fw(i, j)=0.0
    end do
end do
!*****SOLUCION DE LA ECUACION DE LA ENERGIA EN EL SOLIDO*****
epsilongorro=0.001          !Relacion de esbeltez (Hw/L)
epsilongorro2=epsilongorro**2
fi=(dwx/dwy)**2
lambda=0.75
alfagorro=0.000025
dew=2.0*alfagorro*(1.0+(fi/epsilongorro2))
do itw=1, iter
    dfmaxw=0.0
    do j=2, jmax, ix
        do i=1, imax, ix
            !Correccion de temperaturas en los nodos internos de la malla discretizada
            if ((j>1).and.(j<jmax).and.(i>1).and.(i<imax)) then
                dfw=(alfagorro*fw(i+1, j)+alfagorro*(fi/epsilongorro2)*fw(i, j+1)+alfagorro*fw(i-1, j)+&
                    alfagorro*(fi/epsilongorro2)*fw(i, j-1)-dew*fw(i, j))/dew
            end if
            !Correccion de temperaturas en los nodos del borde izquierdo del microcanal
            if ((i==1).and.(j>1).and.(j<jmax)) then
                dfw=(2.0*alfagorro*fw(i+1, j)+alfagorro*(fi/epsilongorro2)*fw(i, j+1)+&
                    alfagorro*(fi/epsilongorro2)*fw(i, j-1)-dew*fw(i, j)-2.0*alfagorro*dwx*fw1)/dew
            end if
            !Correccion de temperaturas en los nodos del borde derecho del microcanal
            if ((i==imax).and.(j>1).and.(j<jmax)) then
                dfw=(2.0*alfagorro*fw(i-1, j)+alfagorro*(fi/epsilongorro2)*fw(i, j+1)+&
                    alfagorro*(fi/epsilongorro2)*fw(i, j-1)-dew*fw(i, j)+2.0*alfagorro*dwx*fw2)/dew
            end if
        end do
    end do
end do

```

```

end if
!Correccion de temperaturas en los nodos del borde externo del microcanal
if ((j==jmax).and. (i>1).and. (i<imax)) then
    dfw=(alfagorro*fw(i+1, j)+2. 0*alfagorro*(fi/epsilongorro2)*fw(i, j-1)+&
        alfagorro*fw(i-1, j)-dew*fw(i, j)-2. 0*dwy*lambda*fi)/dew
end if
!Correccion de temperaturas en el nodo esquina superior izquierdo
if ((j==jmax).and. (i==1)) then
    dfw=(2. 0*alfagorro*fw(i+1, j)+2. 0*alfagorro*(fi/epsilongorro2)*fw(i, j-1)-&
        dew*fw(i, j)-2. 0*alfagorro*dwx*fwx1-2. 0*dwy*lambda*fi)/dew
end if
!Correccion de temperaturas en el nodo esquina superior derecho
if ((j==jmax).and. (i==imax)) then
    dfw=(2. 0*alfagorro*fw(i-1, j)+2. 0*alfagorro*(fi/epsilongorro2)*fw(i, j-1)-&
        dew*fw(i, j)+2. 0*alfagorro*dwx*fwx2-2. 0*dwy*lambda*fi)/dew
end if
if (abs(dfw). gt. dfmaxw) dfmaxw=dfw
    fw(i, j)=fw(i, j)+omegaw*dfw
end do
end do
!Determinacion de gradiente de temperaturas en la interface del solido hacia el fluido
do i=1, imax, ix
    tempInterfaceSolido(i)=fw(i, 1)
    gradiente(i)=(fw(i, 2)-fw(i, 1))/(dwy)
    gradiente2(i)=(alfagorro/epsilongorro2)*gradiente(i)
end do
if (abs(dfmaxw). le. tol) then
    goto 50
end if
end do
50 PRINT' (I10, f20. 15)', itw, dfmaxw
!*****Escritura de resultados en los archivos de datos de salida del solido*****
!*****Contador, iteracion final, avance nodal, campo de temperaturas*****
do j=1, jmax, ix
    write (6, 1010) j, itw, dwy*(j-1), (fw(i, j), i=1, imax, ix)
end do
!*****Gradientes y temperatura interfacial*****
do i=1, imax, ix
    write (7, 1020) dwx*(i-1), gradiente(i), gradiente2(i), tempInterfaceSolido(i)
end do
!*****Formato de variables de salida del solido*****
1010 format (I10, 1x, I15, 1x, f12. 6, 1x, 501f12. 6)
1020 format (f12. 6, 1x, f12. 6, 1x, f12. 6, 1x, f12. 6)
!*****Cierre de archivos de datos de salida del solido*****
close (6)
close (7)
!*****F L U I D O*****
!*****Determinacion del factor de correccion omega*****
zeta=((cos(3. 141516/(imax-1))+((dx/dy)**2)*cos(3. 141516/(jmax-1)))/(1+(dx/dy)**2))**2
omega=2*(1-sqrt(1-zeta))/zeta
!*****Inicializacion de nodos en el FLUIDO *****
!*****Centro del microcanal*****
f(1, 1)=0. 0
f(imax, 1)=0. 0

```

```

do i=2, imax-1
  f(i, 1)=0.0
end do
!*****Interface de la pared interna del microcanal*****
f(1, jmax)=0.0
f(imax, jmax)=0.0
do i=2, imax-1
  f(i, jmax)=0.0
end do
!*****Entrada del microcanal*****
do j=2, jmax-1
  f(1, j)=0.0
end do
!*****Salida del microcanal*****
do j=2, jmax-1
  f(imax, j)=0.0
end do
!*****Nodos interiores a 0.0 de la malla discretizada*****
do i=2, imax-1
  do j=2, jmax-1
    f(i, j)=0.0
  end do
end do
!*****SOLUCION DE LA ECUACION DE LA ENERGIA EN EL FLUIDO*****
Pe=1.0          !numero de Peclet
beta=0.01       !Relacion de esbeltez (H/L)
beta2=beta**2
OMEGAMAY=(dx/dy)**2
de=2.0*(beta2+OMEGAMAY)
do it=1, iter
  dfmax=0.0
  do j=1, jmax, ix
    do i=2, imax, ix
      !*****Determinacion del perfil de velocidad*****
      D=1/((cosh(k))**2)
      M=tanh(k)
      AA=(1.0-2.0*D*parametro)*(1.0-(cosh(k*dy*(j-1))/cosh(k)))
      BB=(0.66666667)*parametro*((1.0-(cosh(k*dy*(j-1))/cosh(k))**3))
      CC=0.5*GAMA*(1.0-((j-1)*dy)**2)*(1.0+parametro*((GAMA/k)**2)*(1.0+((j-1)*dy)**2))
      DD=1.5*parametro*(GAMA/(k**2))*(1.0-(cosh(k*dy*(j-1))/cosh(k))**2)+((k**2)-&
        (k*dy*(j-1)**2)*D+2.0*k*M*((dy*(j-1)*(cosh(k*dy*(j-1))/cosh(k))*&
        (sinh(k*dy*(j-1))/sinh(k))-1.0))
      EE=(12.0/(k**4))*parametro*(GAMA**2)*(k*M*(1.0-(dy*(j-1)*(sinh(k*dy*(j-1))/sinh(k))))+&
        ((1+(0.5)*((k*dy*(j-1)**2)*(cosh(k*dy*(j-1))/cosh(k)))-(1.0+(0.5)*(k**2))))
      velocidad=AA+BB-CC+DD-EE
      veloci(j)=velocidad
      coeficiente1=(beta2-((dx*beta*Pe/2)*velocidad))
      coeficiente2=(beta2+((dx*beta*Pe/2)*velocidad))
      !Correccion de temperaturas en los nodos internos de la malla discretizada
      if ((j>1).and.(j<jmax).and.(i>1).and.(i<imax)) then
        df=(coeficiente1*f(i+1, j)+OMEGAMAY*f(i, j+1)+coeficiente2*f(i-1, j)+OMEGAMAY*f(i, j-1)-&
          de*f(i, j)+(dx**2))/de
      end if
      !Correccion de temperaturas en los nodos del centro del microcanal
    end do
  end do
end do

```



```

if ((j==1).and. (i>1).and. (i<imax)) then
    df=(coeficiente1*f(i+1, j)+2. 0*OMEGAMAY*f(i, j+1)+coeficiente2*f(i-1, j)-&
        de*f(i, j)+(dx**2)-(2. 0*OMEGAMAY*dy*fy1))/de
end if
!Correccion de temperaturas en los nodos de la interface interior del microcanal
if ((j==jmax).and. (i>1).and. (i<imax)) then
    df=(coeficiente1*f(i+1, j)+2. 0*OMEGAMAY*f(i, j-1)+coeficiente2*f(i-1, j)-&
        de*f(i, j)+(dx**2)+(2. 0*OMEGAMAY*dy*gradiente2(i)))/de
end if
!Correccion de temperaturas en los nodos de salida del microcanal
if ((i==imax).and. (j>1).and. (j<jmax)) then
    df=(OMEGAMAY*f(i, j+1)+2. 0*beta2*f(i-1, j)+OMEGAMAY*f(i, j-1)-&
        de*f(i, j)+(dx**2)+coeficiente1*2. 0*dx*fx2)/de
end if
!Correccion de temperaturas en el nodo esquina inferior a la salida del microcanal
if ((j==1).and. (i==imax)) then
    df=(2. 0*beta2*f(i-1, j)+2. 0*OMEGAMAY*f(i, j+1)-de*f(i, j)+(dx**2)-&
        (2. 0*OMEGAMAY*dy*fy1)+coeficiente1*2. 0*dx*fx2)/de
end if
!Correccion de temperaturas en el nodo esquina superior a la salida del microcanal
if ((j==jmax).and. (i==imax)) then
    df=(2. 0*beta2*f(i-1, j)+2. 0*OMEGAMAY*f(i, j-1)-de*f(i, j)+(dx**2)+&
        coeficiente1*2. 0*dx*fx2+(2. 0*OMEGAMAY*dy*gradiente2(i)))/de
end if
if (abs(df).gt.dfmax) dfmax=df
    f(i, j)=f(i, j)+omega*df
end do
end do
!Determinacion de gradiente de temperaturas en la interface del fluido hacia el solido
do i=1, imax, ix
    tempInterfaceFluido(i)=f(i, jmax)
    gradiente3(i)=(f(i, jmax)-f(i, jmax-1))/(dy)
end do
if (abs(dfmax).le.tol) then
    exit
end if
end do
!*****Escritura de resultados en los archivos de datos de salida del fluido*****
!*****Contador, iteracion final, avance nodal, campo de temperaturas, velocidad*****
do j=1, jmax, ix
    write (8, 1050) j, it, dy*(j-1), (f(i, j), i=1, imax, ix), veloci(j)
end do
!*****Gradientes y temperatura interfacial*****
do i=1, imax, ix
    write (9, 1080) dx*(i-1), gradiente3(i), tempInterfaceFluido(i)
end do
!*****Formato de variables de salida del fluido*****
1050 format (I10, 1x, I15, 1x, f12. 6, 1x, 501f12. 6, 1x, f12. 6)
1080 format (f12. 6, 1x, f12. 6, 1x, f12. 6)
!*****Cierre de archivos de datos de salida del fluido*****
close (8)
close (9)
!*****Comparacion de las temperaturas de la interface del solido y fluido*****
do i=1, imax, ix

```

```

        DELTATEMPERATURAINTERF(i)=tempInterfaceFluido(i)-tempInterfaceSolido(i)
    end do
!*****Datos de salida de la comparacion del temperaturas interfaciales*****

do i=1,imax,ix
    write (10,1090) itP,dx*(i-1),DELTATEMPERATURAINTERF(i)
end do
!*****Formato de variables de salida de la comparación de temperaturas interfaciales*****
1090 format (I10,1x,f12.6,1x,f12.6)
!*****Cierre de archivos de datos de salida de la comparación de temperaturas*****
close (10)
!*****CONDICIONAL DE SALIDA DEL PROGRAMA ITERATIVO PRINCIPAL *****
in=1
280 in=in
do itC=in,imax
    i=1+itC
    if (abs(DELTATEMPERATURAINTERF(i)).ge.tol3) then
        goto 200
    else
        PRINT' (I10,1x,I10,1x,f12.6)',itP,i,DELTATEMPERATURAINTERF(i)
        in=i
        goto 280
    end if
end do
pause
exit
200 itM=itP+1
end do
end

```