



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

---

**PROGRAMA DE MAESTRIA Y DOCTORADO EN  
INGENIERIA**

FACULTAD DE INGENIERÍA

**EFFECTO DE GRUPO DE PILOTES  
EN LA RESPUESTA DE ESTRUCTURAS**

**T E S I S**

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

**DOCTOR EN INGENIERÍA**

INGENIERÍA CIVIL - INGENIERÍA SÍSMICA

P R E S E N T A:

**HÉCTOR RAÚL AGUILAR BECERRIL**

TUTOR:

**DR. JAVIER AVILÉS LÓPEZ**

2010



**JURADO ASIGNADO:**

Presidente: DR. RESENDIZ NÚÑEZ DANIEL  
Secretario: DR. AYALA MILIAN AMADO GUSTAVO  
Vocal: DR. AVILÉS LÓPEZ JAVIER  
1er. Suplente: DR. SÁNCHEZ SESMA FRANCISCO  
2do. Suplente: DR. MURIÁ VILA DAVID

Lugar o lugares donde se realizó la tesis:

FACULTAD DE INGENIERÍA, UNAM

**TUTOR DE TESIS:**

DR. JAVIER AVILÉS LÓPEZ

---

**FIRMA**

# CONTENIDO

---

<b>ABSTRACT</b>	<b>1</b>
<b>RESUMEN</b>	<b>2</b>
<b>I ANTECEDENTES</b>	<b>3</b>
<b>II INTRODUCCIÓN</b>	<b>4</b>
<b>III RIGIDECES DINÁMICAS</b>	<b>7</b>
III.1 INTERACCIÓN DINÁMICA	
III.2 RIGIDECES DINÁMICAS	
III.3 RIGIDECES DINÁMICAS PARA PILOTES AISLADOS	
III.4 PARÁMETROS QUE CONTROLAN EL COMPORTAMIENTO DE LAS RIGIDECES DINÁMICAS EN PILOTES	
III.5 RIGIDECES DINÁMICAS PARA PILOTES EN EL VALLE DE MÉXICO	
<b>IV MODELO PARA EL CÁLCULO DE RIGIDECES DINÁMICAS</b>	<b>27</b>
IV.1 VIBRACIONES EN EL PROBLEMA AXISIMÉTRICO	
IV.2 DESPLAZAMIENTOS Y FUERZAS NODALES CONSISTENTES	
<b>V MÉTODO DE ANÁLISIS PARA EL CÁLCULO DE RIGIDECES DINÁMICAS</b>	<b>41</b>
V.1 VIBRACIONES VERTICALES	
V.2 VIBRACIONES HORIZONTALES	
V.3 VIBRACIONES TORSIONALES	
V.4 ACCIONES EN LA PARED DEL CIMIENTO	
<b>VI VALIDACIÓN DEL MÉTODO</b>	<b>59</b>
VI.1 EFECTIVIDAD DEL MÉTODO	
VI.2 CIMENTACIONES PROFUNDAS	
<b>VII EFECTO DE GRUPO</b>	<b>66</b>
VII.1 VIBRACIÓN VERTICAL	
VII.2 VIBRACIÓN HORIZONTAL	
VII.3 CABECEO	
VII.4 PARÁMETROS QUE CONTROLAN EL EFECTO DE GRUPO	
<b>VIII RESPUESTA ESTRUCTURAL</b>	<b>78</b>
VIII.1 RESPUESTA DINÁMICA ESTRUCTURAL	
VIII.2 CASO DE APLICACIÓN	

<b>IX</b>	<b>CONCLUSIONES</b>	<b>85</b>
<b>X</b>	<b>REFERENCIAS</b>	<b>87</b>
	<b>APÉNDICE A.</b> SISTEMA MATRICIAL INTEGRAL	<b>92</b>
	<b>APÉNDICE B.</b> DESARROLLOS MATEMÁTICOS DEL MÉTODO	<b>95</b>
	<b>APÉNDICE C.</b> NOTACIÓN	<b>105</b>

## ABSTRACT

---

A boundary method for the tridimensional problem of deep foundation's impedance functions is presented.

The method rigorously considers the depth foundation and the site stratigraphy. The head of the pile is considered like a rigid plate on surface, with axial symmetry, rough and massless. The modes of vibration adopted are torsion, vertical translation and horizontal translation. The deep foundation is embedded in a soil stratum with rigid base and horizontally layered.

The study domain is divided in the interior region and the exterior region. The first one, located under the pile head, represents the foundation body. To this region the pile properties are assigned. Under the tip of the friction piles, the interior region corresponds to the deep layered media. Its boundary conditions are rigid surface and rigid base. The exterior region is located out of the foundation and its boundary conditions are free surface and rigid base.

For each vibration mode, the impedance functions are computed by the integration of stresses acting on the deep foundation. The total force is obtained from the nodal consistent forces between the interior and the exterior regions. This interface corresponds to the shaft of the pile. The total force is evaluated from the particular and homogenous solutions obtained under the foundation head.

With the proposed method, static stiffness values and stiffness and damping coefficients are computed for some specific problems. The agreements showed between the results of the proposed method and those obtained by other authors are good.

The whole impedance function for the foundation system is obtained by considering the group effect, using interaction factors.

The proposed method is applied to analyze an hypothetic structure resting in a group of piles with their heads connected by a rigid cap foundation. The changes in the structural dynamic response are evaluated.

The proposed method represents a rigorously and efficient mathematical tool to compute impedance functions for deep foundations.

## RESUMEN

---

Se presenta un método de frontera tridimensional para la determinación de rigideces dinámicas de elementos de cimentación profundos en medios estratificados.

El método propuesto considera explícitamente los efectos de la profundidad de desplante del cimiento profundo y la estratigrafía del sitio. En el modelo la cabeza del pilote se asume como una placa rígida en superficie, rugosa y carente de masa, sujeta a vibraciones torsionales, verticales y horizontales. El medio en que se encuentra el pilote corresponde a un depósito de suelo estratificado horizontalmente, apoyado sobre una base fija. El dominio de análisis se divide en una región interior y otra exterior. La primera, bajo la cabeza del pilote, representa el cuerpo del cimiento mediante la asignación de propiedades congruentes con los materiales que lo constituyen; en el caso de pilotes de fricción, bajo su punta se considera la columna de suelo de soporte. Las condiciones de frontera en esta región son superficie y base fijas. La segunda región corresponde a la zona que envuelve al cimiento, con condiciones de frontera libre en la superficie y fija en la base.

Al integrar los campos de esfuerzos generados en el cimiento se construyen las funciones de impedancia para cada modo de vibración. La fuerza total en la pared resulta de las fuerzas nodales consistentes en la frontera entre la región interior y la región exterior, coincidente con el fuste del cimiento hasta la profundidad de desplante. La fuerza total es el resultado conjunto de las soluciones particular y homogénea a nivel de la cabeza del cimiento.

Aplicando el método propuesto se calculan rigideces estáticas y coeficientes de rigidez y amortiguamiento para problemas previamente estudiados por otros autores, encontrando una buena aproximación.

La rigidez dinámica de todo el sistema de cimentación se establece al incorporar el efecto de grupo en los pilotes, mediante el uso de factores de interacción.

El método propuesto se aplica al caso de una estructura hipotética apoyada en una cimentación compuesta por un cajón y pilotes, determinando los cambios generados en la respuesta dinámica estructural.

El método representa una alternativa rigurosa y eficiente para el cálculo de rigideces dinámicas en cimentaciones profundas.

## CAPITULO I

**ANTECEDENTES**

---

Es sabido que el fenómeno de la interacción dinámica suelo-estructura es particularmente importante en la respuesta sísmica de construcciones ubicadas en depósitos de suelo blando. Esta condición produce un incremento en la flexibilidad del sistema, induciendo cambios en las propiedades dinámicas de la estructura y en su respuesta.

La respuesta dinámica de un sistema suelo-cimentación-estructura depende fuertemente de las propiedades geométricas y materiales de la cimentación, definidas por su tipo. Las características del sistema de cimentación y su interacción con el suelo de apoyo inducen movimientos que afectan directamente a las propiedades dinámicas estructurales.

Particularmente se ha puesto especial interés en el estudio de la interacción dinámica en cimentaciones de tipo superficial. El estudio del comportamiento de un elemento enterrado someramente en un depósito se ha hecho extensivo al análisis del comportamiento dinámico de estructuras apoyadas en zapatas, losas o cajones de cimentación. Sin embargo, un número considerable de estructuras localizadas en sitios de terreno blando que transmiten grandes descargas al suelo, se encuentran apoyadas en cimentaciones que incluyen elementos de tipo profundo, constituidos principalmente por cajones de cimentación, o losas, ligados a pilotes o pilas.

Se tienen experiencias de daños y colapsos de estructuras apoyadas en cimentaciones profundas durante la ocurrencia de temblores. Ejemplo de ello son los casos acontecidos durante el terremoto de septiembre de 1985 en la ciudad de México, donde algunas cimentaciones compuestas por cajones y losas de cimentación apoyadas en pilotes de fricción presentaron hundimientos diferenciales permanentes y, en algunos casos, fallaron. Este escenario obliga a estudiar el comportamiento dinámico de este tipo de cimentaciones y su efecto en la respuesta sísmica estructural. De igual forma, aún existen incertidumbres sobre el comportamiento dinámico de cimentaciones compuestas por pilotes de punta o pilas.

En esta investigación se estudia y analiza el efecto que tienen los pilotes de cimentación en la respuesta dinámica de estructuras. Para ello se determinan los parámetros geométricos y materiales que gobiernan el comportamiento de este tipo de cimentaciones. El sistema suelo-cimentación se analiza con un modelo representativo caracterizado por resortes lineales y amortiguadores viscosos, con propiedades dependientes de la frecuencia de excitación, llamadas rigideces dinámicas o funciones de impedancia. En la determinación de las funciones de impedancia en cimentaciones profundas, se incorpora el efecto que causa el grupo de elementos en la rigidez dinámica del conjunto.

Se presenta la formulación de un método de frontera riguroso para el cálculo de rigideces dinámicas de cimentaciones profundas. Los resultados obtenidos con este método para el caso de vibraciones verticales, horizontales y torsionales muestran una buena aproximación al compararlos con soluciones obtenidas por otros autores. Se introduce el efecto de grupo de los elementos de cimentación y, para un caso de aplicación práctica, se determina el efecto que genera la interacción dinámica suelo-cimentación profunda en la respuesta estructural.

## INTRODUCCIÓN

---

El estudio de la respuesta dinámica de cimentaciones surge por la necesidad de diseñar apoyos apropiados para maquinaria, producto del avance tecnológico de la industria en la primera mitad del siglo pasado. Las investigaciones sobre cimentaciones de maquinaria se extendieron al estudio de cimentaciones sujetas a sollicitaciones sísmicas, cuya importancia se debe a las experiencias devastadoras de sismos severos en las grandes ciudades.

Parte fundamental del desarrollo de los métodos para conocer la respuesta de sistemas suelo-cimentación ha sido la teoría de propagación de ondas en semiespacios elásticos o viscoelásticos. Las primeras aplicaciones de este tipo se pueden atribuir a Lamb (Gazetas, 1983), quien en 1904 estudió la vibración de un medio elástico semi-infinito por la aplicación de una carga dinámica concentrada. Posteriormente, Reissner (1936) da inicio a la dinámica de suelos moderna mediante el estudio idealizado de la respuesta de un disco cilíndrico verticalmente cargado sobre un semiespacio. La mayor contribución de Reissner se atribuye a la introducción del concepto de amortiguamiento por radiación, a través de su teoría.

Considerando distribuciones de esfuerzos uniformes y desplazamientos lineales en el contacto suelo-cimentación, Sung (1953) y Quinlan (1953) presentaron soluciones aproximadas para cimentaciones circulares y rectangulares oscilando verticalmente. De igual forma Arnold *et al* (1955) y Bycroft (1956) obtuvieron soluciones aproximadas para cimentaciones circulares bajo carga horizontal y momentos de volteo.

Las primeras soluciones rigurosas aparecieron en los años sesenta al estudiar la vibración de sistemas suelo-cimentación con métodos de frontera y estableciendo patrones de desplazamiento bajo cimentaciones rígidas. Awojobi y Grootenhuis (1965) estudiaron todos los posibles modos de oscilación para cimentaciones rígidas continuas y circulares sobre un semiespacio, empleando técnicas de transformación. Por otra parte, Lysmer (1965) obtuvo una solución para vibraciones verticales axisimétricas mediante la discretización de la superficie de contacto en anillos concéntricos. Una aproximación conceptualmente similar a la de Lysmer fue obtenida por Elourdy *et al* (1967) para cimentaciones rectangulares verticalmente cargadas.

Una de las mayores contribuciones desarrollada durante los años sesenta fue la propuesta de Hsieh (1962) y Lysmer (1965). Consistió en representar el comportamiento dinámico de una cimentación masiva, verticalmente cargada, mediante un oscilador de un grado de libertad con coeficientes de rigidez y amortiguamiento dependientes de la frecuencia de excitación. El éxito en la reproducción aproximada de la respuesta de sistemas con el uso de la analogía de Lysmer, tuvo un efecto determinante en las investigaciones subsecuentes. Richart y Whitman (1967) hicieron extensiva la aproximación de Lysmer a todos los modos de vibración.

Luco y Westmann (1968) y Karasudhi *et al* (1968), aplicaron técnicas matemáticas para resolver problemas elastodinámicos de frontera, con objeto de obtener soluciones numéricas exactas para todos los modos de vibración en cimentaciones continuas sobre un semiespacio. Igualmente, Luco y Westmann (1971), Veletsos y Wei (1971), y Veletsos y Verbic (1973) aplicaron estos métodos

numéricos para extender las soluciones disponibles a cimentaciones circulares con excitaciones en alta frecuencia, así como en materiales viscoelásticos con amortiguamiento histerético.

El desarrollo de formulaciones dinámicas aplicando elementos finitos con fronteras laterales absorbentes, impulsó el estudio de la respuesta de cimentaciones superficiales y enterradas en un depósito estratificado (Kuhlemeyer, 1969 y Lysmer *et al*, 1974).

Por otra parte, Luco (1974) y Gazetas (1975) desarrollaron soluciones analíticas para cimentaciones continuas, rectangulares y circulares en la superficie de un semiespacio, o en un depósito estratificado, sobre una base rígida. Empleando estas formulaciones, Hadjian y Luco (1977) y Gazetas y Roesset (1979) ampliaron la gama de cimentaciones estudiadas.

En 1973, Novak obtuvo soluciones analíticas aproximadas para cimentaciones circulares enterradas en un semiespacio y determinó los coeficientes de rigidez y de amortiguamiento para la interacción de las paredes de la cimentación con el suelo. Más tarde este método fue aplicado por Novak (1974) y Novak y Aboul-Ella (1978) para estudiar la respuesta dinámica de pilotes.

Wong y Luco (1976), Awojobi y Tabiowo (1976), Savidis (1977), Kitamura y Sakurai (1979) y Dominguez y Roesset (1978) desarrollaron investigaciones dirigidas al estudio de soluciones para cimentaciones rígidas de forma arbitraria, así como cimentaciones de rigidez finita (Lin, 1978; Whitakker y Christiano, 1982 e Iguchi y Luco, 1981).

Las investigaciones de Awojobi (1972) y Gazetas (1980, 1981a, 1981b) se han destacado por el estudio de cimentaciones en medios no homogéneos y en suelos anisotrópicos. También existen trabajos de Jakub y Roesset (1977) dirigidos al estudio de la respuesta de cimentaciones en suelos con comportamiento no lineal.

En las últimas décadas, el estudio de la interacción dinámica se ha dirigido a la evaluación del comportamiento de pilotes embebidos en depósitos homogéneos, no homogéneos o estratificados. Particularmente, se estudian soluciones para sistemas con grupos de pilotes dinámicamente cargados. Entre estas investigaciones se tienen las de Novak (1977), Dobry *et al* (1982), Kagawa y Kraft (1980), Kaynia y Kausel (1982), Roesset (1984), Dobry y Gazetas (1988).

Con el avance tecnológico actual sobre dispositivos para el monitoreo del comportamiento de sistemas de cimentación, Nikolaou *et al* (2001) presentan la comparación de los resultados obtenidos del comportamiento de una pila, idealizada con un modelo aproximado de viga sobre una cimentación elástica de Winkler, con las mediciones tomadas durante un sismo de un elemento de cimentación instrumentado, obteniendo una razonable aproximación.

Bajo el escenario expuesto y buscando contribuir al conocimiento que sobre las cimentaciones profundas se tiene, la investigación que aquí se presenta se dirige al estudio del comportamiento dinámico de pilotes. Para ello el trabajo se ha centrado en el desarrollo de los siguientes puntos principales:

- Estudio del fenómeno de interacción dinámica.
- Estudio de las rigideces dinámicas existentes para cimentaciones profundas.
- Estudio de los parámetros geométricos y materiales que controlan la respuesta dinámica de sistemas suelo-elemento de cimentación profundo.

- Formulación de un método de frontera para el problema tridimensional de rigideces dinámicas para cimentaciones profundas de cualquier tipo, embebidas en un depósito estratificado.
- Estudio del efecto de grupo en elementos de cimentación profundos.
- Desarrollo de un método generalizado para considerar el efecto de grupo en cimentaciones profundas.
- Determinación del efecto de la interacción dinámica suelo-grupo de elementos de cimentación profundos en la respuesta estructural.
- Aplicación.

La principal contribución de este trabajo se centra en el desarrollo de un método tridimensional para la determinación de rigideces dinámicas de elementos de cimentación profundos en medios estratificados.

El método propuesto considera explícitamente los efectos de la profundidad de desplante y la estratigrafía del sitio. En el modelo se supone una placa rígida en superficie, rugosa y carente de masa, sujeta a vibraciones torsionales, verticales y horizontales. Este elemento representa la cabeza del pilote. El medio corresponde a un depósito de suelo estratificado horizontalmente, apoyado sobre una base fija. El dominio de análisis se divide en una región interior y otra exterior. La primera, bajo la cabeza del pilote, representa el cuerpo del cimiento mediante la asignación de propiedades congruentes con los materiales que lo constituyen; en el caso de pilotes de fricción, bajo su punta se considera la columna de suelo de soporte. La segunda región corresponde a la zona que envuelve al cimiento, con condiciones de frontera libre en la superficie y fija en la base.

Las funciones de impedancia para cada modo de vibración se construyen al integrar los campos de esfuerzos generados en el cimiento. La fuerza total en la pared resulta de las fuerzas nodales consistentes en la frontera entre la región interior y la región exterior, coincidente con el fuste del cimiento hasta la profundidad de desplante. La fuerza total es el resultado conjunto de las soluciones particular y homogénea a nivel de la cabeza del cimiento.

Con el método descrito se han calculado rigideces estáticas y coeficientes de rigidez y amortiguamiento para problemas previamente estudiados por otros autores, encontrando una muy buena aproximación.

Para la determinación de la rigidez de todo el sistema, se incorpora el efecto de grupo en los elementos de cimentación profundos.

Se aplica el método propuesto a una estructura hipotética apoyada en una cimentación con pilotes y se determinan los cambios generados en la respuesta dinámica estructural.

El método representa una alternativa rigurosa y eficiente para el cálculo de rigideces dinámicas en cimentaciones profundas.

## RIGIDECES DINÁMICAS

---

### III.1 INTERACCIÓN DINÁMICA

Para el estudio de la respuesta dinámica de estructuras desplantadas en depósitos de suelo blando es fundamental considerar los efectos de sitio y la interacción suelo-estructura. Los primeros se refieren al efecto de difracción múltiple que producen las ondas sísmicas al encontrarse con las fronteras entre capas de suelo blando, generando interferencias destructivas y constructivas que se traducen en atenuaciones y amplificaciones, respectivamente. La interacción dinámica suelo-estructura se define como el conjunto de efectos inerciales y cinemáticos producidos en la estructura y el suelo por la flexibilidad de este.

Al tomar en cuenta la interacción suelo-estructura se busca una aproximación al comportamiento real de estructuras cuando las condiciones del depósito de suelo blando donde se apoyan influyen en su respuesta dinámica.

El problema de la interacción dinámica suelo-estructura se puede descomponer en la parte de interacción inercial y la de interacción cinemática. Los efectos inerciales afectan directamente al comportamiento de la estructura; aumentan el periodo fundamental de vibración, modifican el amortiguamiento y, hasta donde se tiene conocimiento, reducen la ductilidad en función del tipo de estructura. Estos fenómenos ocurren por el aumento de flexibilidad que sufre la estructura al encontrarse sin empotramiento fijo en su base.

En términos generales se observa una reducción en el amortiguamiento estructural; sin embargo, por efecto de los amortiguamientos material y geométrico del suelo, el amortiguamiento global puede aumentar. Por otra parte, la reducción de la ductilidad es función decreciente del alargamiento del periodo por interacción (Rosenblueth y Reséndiz, 1988), al menos para el modo fundamental; sin embargo, aún son desconocidos otros posibles efectos en la respuesta estructural.

La interacción cinemática se refiere a los efectos que la geometría y la rigidez de la cimentación tienen al filtrar las altas frecuencias de la excitación. Esta interacción reduce los movimientos de torsión y cabeceo de la cimentación. La interacción cinemática es la diferencia que existe entre la respuesta estructural determinada para el movimiento efectivo de la cimentación y la propia respuesta bajo el movimiento de campo libre. Se ha observado que la intensidad de este efecto es mayor en cimentaciones muy amplias o alargadas.

Generalmente se acostumbra considerar los efectos de interacción inercial y despreciar aquellos debidos a la interacción cinemática. Esto resulta conservador siempre que los efectos de amplificación de sitio sean tomados en cuenta en el movimiento sísmico en la superficie del terreno, al definir la excitación de diseño en la vecindad de la cimentación.

Para considerar los efectos de la interacción suelo-estructura es necesario utilizar modelos que representen adecuadamente las condiciones del sistema. El modelo usualmente propuesto para este tipo de análisis se compone por un oscilador de un grado de libertad amortiguado, para el que se

obtienen periodos y amortiguamientos, en la condición de interacción. El oscilador idealiza la estructura en estudio en su modo fundamental. La cimentación se representa por resortes y amortiguadores, obtenidos a partir de funciones de impedancia que reflejan la rigidez dinámica del conjunto suelo-cimentación.

### III.2 RIGIDECES DINÁMICAS

En la analogía de Lysmer (1965) se establece que el comportamiento dinámico de una cimentación cargada verticalmente sobre un semiespacio, se puede determinar empleando un oscilador de un grado de libertad con coeficientes de rigidez y de amortiguamiento dependientes de la frecuencia de excitación. Estos coeficientes representan la rigidez dinámica que controla el comportamiento de la cimentación. El éxito de la analogía se debe a la coincidencia de los resultados con estudios experimentales; por ello, se ha considerado válido emplear este enfoque en el estudio de la respuesta dinámica de sistemas suelo-cimentación. Con este antecedente, se establece que el comportamiento de una cimentación en el problema de interacción suelo-estructura está controlado por las rigideces dinámicas.

Conceptualmente las rigideces dinámicas o funciones de impedancia del conjunto suelo-cimentación se definen como la relación en estado estacionario entre la fuerza (momento) excitadora y el desplazamiento (rotación) resultante en la misma dirección, suponiendo que la cimentación es rígida, carente de masa y está excitada armónicamente.

La representación matemática de la rigidez dinámica es una función compleja dependiente de la frecuencia de excitación. La parte real representa la rigidez e inercia del suelo. La parte imaginaria se refiere al amortiguamiento material por comportamiento histerético, y al geométrico, por radiación de ondas.

Los significados matemático y físico de las rigideces dinámicas se pueden ilustrar empleando una analogía con un oscilador elemental, cuya ecuación de movimiento es

$$M\ddot{x}(t) + C\dot{x}(t) + Kx(t) = p(t) \quad (\text{III.1})$$

donde  $M$ ,  $C$  y  $K$  son respectivamente la masa, el amortiguamiento y la rigidez del oscilador,  $p(t)$  es la fuerza excitadora y  $x(t)$  el desplazamiento. Para una excitación armónica  $p(t) = Pe^{i\omega t}$  se obtiene en el estado estacionario una respuesta también armónica  $x(t) = Xe^{i\omega t}$ . En estas condiciones, la ecuación anterior se reduce a

$$(K + i\omega C - \omega^2 M)X = P \quad (\text{III.2})$$

Por definición, la rigidez dinámica del oscilador queda representada por,

$$\tilde{K}(\omega) = \frac{P}{X} = (K - \omega^2 M) + i\omega C \quad (\text{III.3})$$

La parte real de la expresión compleja expresa la rigidez e inercia del sistema y la parte imaginaria la energía disipada a través de su amortiguamiento.

La función de impedancia del oscilador se acostumbra presentar en términos de la rigidez estática y los coeficientes de impedancia dependientes de la frecuencia, de la forma

$$\tilde{K}(\omega) = K(k + i\omega c) \quad (\text{III.4})$$

donde

$$k = 1 - \omega^2 / \omega_o^2$$

$$c = 2\zeta_o / \omega_o$$

siendo  $\omega_o$  la frecuencia natural y  $\zeta_o$  el amortiguamiento del oscilador; este último representa el porcentaje de amortiguamiento con respecto al crítico. Los parámetros  $k$  y  $c$  se conocen como coeficientes de rigidez y amortiguamiento, respectivamente. Para el oscilador,  $k$  decrece con la frecuencia y se hace nula para la frecuencia natural, en tanto que  $c$  permanece constante. Bajo este esquema, la rigidez dinámica  $\tilde{K}(\omega)$  se puede expresar como el producto de la rigidez estática  $K$  por un factor dinámico complejo  $(k + i\omega c)$  que considera las características de inercia y amortiguamiento del sistema. Para la frecuencia cero el factor dinámico se reduce a la unidad real y por tanto la rigidez dinámica coincide con la estática.

Con base en la analogía con el oscilador elemental, la rigidez dinámica del conjunto suelo-cimentación para el modo de vibración  $m = x, z, r, xr$  se acostumbra expresar mediante una función compleja dependiente de la frecuencia de excitación, de la forma (Gazetas, 1983)

$$\tilde{K}_m(\eta_m) = K_m^o(k_m(\eta_m) + i\eta_m c_m(\eta_m))(1 + i2\zeta) \quad (\text{III.5})$$

donde  $\zeta$  es el amortiguamiento efectivo del sitio (amortiguamiento material representativo de la formación de suelo);  $K_m^o$  es la rigidez estática mientras que  $k_m$  y  $c_m$  son respectivamente los coeficientes de rigidez y amortiguamiento (amortiguamiento geométrico de la formación de suelo) dependientes de la frecuencia normalizada  $\eta_m$ .

Si  $K_m$  representa el resorte y  $C_m$  el amortiguador equivalentes del suelo (figura III.1), la función de impedancia del conjunto suelo-cimentación se define alternativamente mediante la expresión compleja

$$\tilde{K}_m(\omega) = K_m(\omega) + i\omega C_m(\omega) \quad (\text{III.6})$$

Por tanto, el resorte y amortiguador se relacionan con la rigidez estática y los coeficientes de impedancia por medio de las siguientes expresiones:

$$K_m = K_m^o(k_m - 2\zeta\eta_m c_m) \quad (\text{III.7})$$

$$\omega C_m = K_m^o(\eta_m c_m + 2\zeta k_m) \quad (\text{III.8})$$



**Figura III.1. Resortes y amortiguadores equivalentes del suelo**

El resorte  $K_m$  expresa tanto la rigidez como la inercia del suelo; la dependencia de la frecuencia se debe solamente a la influencia que ésta tiene en la inercia, ya que la rigidez del suelo es esencialmente independiente de la frecuencia. En tanto que el amortiguador  $C_m$  expresa los amortiguamientos material y geométrico del suelo; el primero es prácticamente independiente de la frecuencia y se debe a comportamiento histerético, mientras que el segundo es dependiente de la frecuencia y se debe a comportamiento viscoso producto de la radiación de ondas.

Se destaca que las fuerzas laterales en la base de la cimentación producen tanto desplazamientos como rotaciones, lo que da origen a impedancias acopladas que son debidas fundamentalmente al enterramiento de la cimentación. Este acoplamiento entre la traslación y rotación es generalmente despreciable, principalmente en aquellas cimentaciones someramente enterradas.

Las soluciones existentes para funciones de impedancia están restringidas a modelos viscoelásticos lineales. El comportamiento no lineal del suelo se introduce modificando sus propiedades en función de la magnitud de las deformaciones esperadas en el sitio de interés.

Actualmente, se cuenta con diversos procedimientos para el cálculo de rigideces dinámicas en función de los tipos de cimentación y del modelo geotécnico. En términos generales, los sistemas suelo-cimentación se pueden clasificar de acuerdo con los aspectos siguientes (Gazetas, 1991):

1. La forma de la cimentación (circular, alargada, rectangular, arbitraria).
2. Tipo de perfil de suelo (depósitos uniformes, depósitos estratificados, depósito uniforme sobre base rígida, depósito estratificado sobre base rígida).
3. Profundidad de desplante (cimentaciones superficiales, cimentaciones enterradas, cimentaciones piloteadas).

Por otra parte, los métodos de análisis pueden agruparse de la siguiente forma:

1. Métodos analíticos y semianalíticos, aplicados a depósitos estratificados y cimentaciones superficiales rectangulares (Luco, 1976; Gazetas y Roesset, 1976, 1979).
2. Métodos dinámicos de elemento finito para cimentaciones superficiales, enterradas y cimentaciones con pilotes en suelos estratificados. La mayoría de estos métodos se limitan a casos axisimétricos y de deformación plana. Generalmente requieren de una base rígida bajo el depósito (Waas, 1972; Kausel, 1974; Lysmer *et al*, 1975).

3. Métodos híbridos: analíticos y numéricos, como los de hiper elementos finitos (Kausel, 1981; Lysmer *et al*, 1981, Tassoulas, 1981).
4. Técnicas aproximadas que simplifican la física del problema y proporcionan soluciones alternativas a situaciones complejas, como la separación entre las paredes de la cimentación y el suelo circundante (Berdugo y Novak, 1972; Meek y Veletsos, 1973; Novak, *et al*, 1978; Nogami, 1979; Gazetas y Dobry, 1984; Wolf, 1985, 1988; Gazetas y Tassoulas, 1987).

La aplicación de métodos rigurosos en la determinación de funciones de impedancia requiere de programas especializados de cómputo, generalmente no disponibles para la mayoría de los ingenieros de la práctica. Por ello, en la primer parte de la investigación desarrollada se ha buscado proponer expresiones y curvas adimensionales de aplicación práctica, apoyadas en resultados rigurosos y formulaciones aproximadas. En este sentido, Dobry y Gazetas (1985), Gazetas *et al* (1985), Gazetas y Tassoulas (1987) y Fotopoulou (1989) tienen trabajos relacionados con cimentaciones rígidas, de cualquier geometría, en la superficie de un semiespacio homogéneo, así como cimentaciones con enterramiento parcial o total. Kausel (1974), Johnson *et al* (1975), Gazetas y Roesset (1976, 1979), Elsabee y Morray (1977), Jakub y Roesset (1977), Kausel y Ushijima (1979) y Chow (1987), para cimentaciones circulares o continuas sobre la superficie de un depósito homogéneo que descansa en una base rígida, así como para las parcial o totalmente enterradas. Hadjan y Luco (1977), Gazetas (1983), Booker *et al* (1985), Wong y Luco (1985), Werkle y Waas (1986) y Novak (1987), para cimentaciones cuadradas, o continuas, sobre un depósito no homogéneo que incrementa su módulo de rigidez gradualmente con la profundidad. Roesset (1980a, b), Sánchez Salinero (1982), Velez *et al* (1983) y Gazetas (1984), para pilotes flotantes embebidos en uno o dos estratos homogéneos, o en un semiespacio; los factores de interacción para considerar el efecto de grupo de pilotes se han estudiado por Dobry y Gazetas (1988) y Gazetas y Makris (1990), a partir del procedimiento de superposición propuesto por Poulos (1968,1971).

### III.3 RIGIDECES DINÁMICAS PARA PILOTES AISLADOS

En general, la respuesta dinámica de pilotes ante fuerzas laterales, verticales y momentos flexionantes actuando en sus cabezas, es independiente de la longitud de estos elementos. Esto es debido a que sólo a lo largo de una porción superior del pilote, conocida como longitud activa, las cargas impuestas son transmitidas al suelo circundante. La longitud activa del pilote es función de su diámetro y de la rigidez relativa entre el suelo y el pilote.

Las rigideces dinámicas que aquí se presentan sólo son aplicables a pilotes flexibles, los cuales deben cumplir con la condición siguiente,

$$L_p \gg L_c \quad (III.9)$$

donde  $L_p$  es la longitud total y  $L_c = 2d(E_p/E_s)^{0.25}$  la longitud activa del pilote (Gazetas, 1991). Además,  $d$  y  $E_p$  son el diámetro y el módulo de elasticidad del pilote, respectivamente, mientras que  $E_s = 2(1+\nu_s)G_s$  es el módulo de Young del suelo. La gran mayoría de pilotes caen en esta categoría, incluso algunos de gran diámetro en suelos muy blandos, como aquellos con sección cercana a 1.0 m construidos en sitio.

En cimentaciones con pilotes, las funciones de impedancia para un pilote aislado en los distintos modos de vibración  $m = h, r, hr, v$ , se determinan a partir del resorte y amortiguador en sustitución del suelo que toman las siguientes formas:

$$K_m = K_m^0 k_m \quad (\text{III.10})$$

$$C_m = \frac{2K_m^0 c_m}{\omega} \quad (\text{III.11})$$

Particularmente, para el caso del amortiguador equivalente en el modo vertical, la expresión anterior se sustituye por

$$C_v = c_v \quad (\text{III.12})$$

Para un pilote de fricción enterrado en un estrato viscoelástico con base rígida, las rigideces estáticas y los coeficientes de rigidez y amortiguamiento para los modos de traslación horizontal, traslación vertical, cabeceo y acoplamiento, se pueden aproximar mediante las expresiones presentadas por Gazetas (1991), las cuales se indican a continuación.

### III.3.1 Vibración horizontal

$$K_h^o = d E_s \left( \frac{E_p}{E_s} \right)^{0.21} \quad (\text{III.13})$$

$$k_h = 1 \quad (\text{III.14})$$

$$c_h = \begin{cases} 0.8\zeta, & \text{para } \eta \leq \eta_s \\ 0.8\zeta + 0.175 \left( \frac{E_p}{E_s} \right)^{0.17} \eta, & \text{para } \eta > \eta_s \end{cases} \quad (\text{III.15})$$

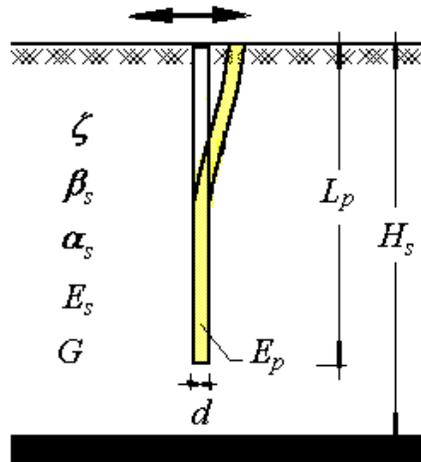


Figura III.2 Pilote aislado en vibración horizontal

### III.3.2 Vibración vertical

$$K_v^0 = 1.9dE_s \left( \frac{L_p}{d} \right)^{0.67} \quad (\text{III.16})$$

$$k_v = \begin{cases} 1, & \text{para } L_p/d < 15 \\ 1 + \sqrt{\eta}, & \text{para } L_p/d \geq 50 \end{cases} \quad (\text{III.17})$$

$$c_v = \begin{cases} 0, & \text{para } \eta \leq \eta_p \\ \frac{4L_p^2 G}{\beta} \left( 1 - e^{-(E_p/E_s)(L_p/d)^2} \right) \eta_s \eta^{-0.2}, & \text{para } \eta > 1.5\eta_p \end{cases} \quad (\text{III.18})$$

Para los coeficientes del modo vertical se realiza una interpolación lineal en los intervalos  $15 \leq L_p/d < 50$  y  $\eta_p < \eta \leq 1.5\eta_p$ .

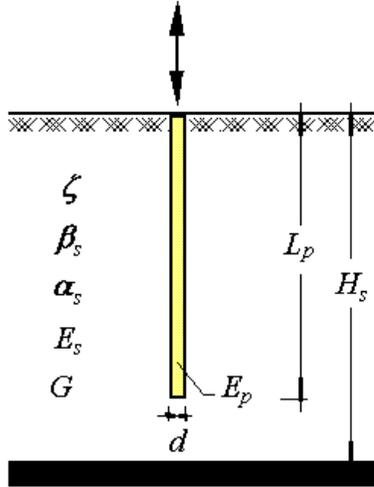


Figura III.3 Pilote aislado en vibración vertical

### III.3.3 Cabeceo

$$K_h^0 = dE_s \left( \frac{E_p}{E_s} \right)^{0.21} \quad (\text{III.19})$$

$$k_r = 1 \quad (\text{III.20})$$

$$c_r = \begin{cases} 0.25\zeta, & \text{para } \eta \leq \eta_s \\ 0.25\zeta + 0.056(E_p/E_s)^{0.2}\eta, & \text{para } \eta > \eta_s \end{cases} \quad (\text{III.21})$$

### III.3.4 Acoplado

$$K_h^o = dE_s \left( \frac{E_p}{E_s} \right)^{0.21} \quad (\text{III.22})$$

$$k_{hr} = 1 \quad (\text{III.23})$$

$$c_{hr} = \begin{cases} 0.5\zeta, & \text{para } \eta \leq \eta_s \\ 0.5\zeta + 0.135(E_p/E_s)^{0.18}\eta, & \text{para } \eta > \eta_s \end{cases} \quad (\text{III.24})$$

En las ecuaciones anteriores,  $\eta$  representa la frecuencia normalizada definida como

$$\eta = \frac{\omega d}{\beta_s} \quad (\text{III.25})$$

en tanto que  $\eta_s$  y  $\eta_p$  representan las frecuencias fundamentales adimensionales del estrato de suelo en vibración transversal y vertical, respectivamente, las cuales se definen como:

$$\eta_s = \frac{\pi d}{2H_s} \quad (\text{III.26})$$

$$\eta_p = \frac{\pi d}{2H_s} \frac{\alpha_s}{\beta_s} \quad (\text{III.27})$$

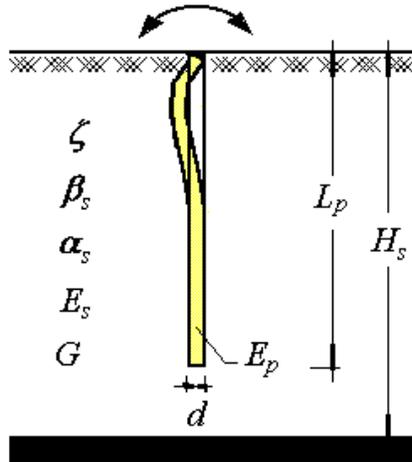


Figura III.4 Pilote aislado en cabeceo

### III.4 PARÁMETROS QUE CONTROLAN EL COMPORTAMIENTO DE LAS RIGIDECES DINÁMICAS EN PILOTES

Mediante un análisis de los parámetros materiales y geométricos que controlan tanto a las rigideces estáticas, como a los coeficientes de rigidez y de amortiguamiento propuestos por Gazetas (1991), en la determinación de las funciones de impedancia, se han construido curvas que permiten cuantificar directamente estos parámetros e identificar aquellos de mayor importancia.

En las figuras III.5 a III.8 se muestran curvas de donde es posible determinar las rigideces estáticas ante los modos de vibración horizontal, vertical, cabeceo y acoplado.

Como se observa, las rigideces estáticas están gobernadas por los parámetros geométricos: diámetro y longitud del pilote y, los parámetros materiales: módulos de elasticidad del suelo y del pilote. En especial las rigideces asociadas a los modos en vibración horizontal, cabeceo y acoplado están controladas por la relación entre módulos de pilote y suelo, mientras que la rigidez vertical está dominada por la relación longitud – diámetro del pilote.

Como se indica en las expresiones antes presentadas, los coeficientes de rigidez se pueden asumir unitarios para cualquier frecuencia, salvo el caso de los coeficientes de rigidez en vibración vertical, donde son dependientes de la relación de esbeltez del pilote como se observa en la figura III.9. En esta figura se presentan curvas para los casos longitud-diámetro del pilote  $L_p / d \leq 15$ ,  $L_p / d = 30$  y  $L_p / d \geq 50$ .

Los coeficientes de amortiguamiento en los modos horizontal, cabeceo y acoplado, además de estar controlados por la frecuencia adimensional ( $\eta$ ), son función de la relación entre módulos de elasticidad del pilote y del suelo, así como del amortiguamiento material. La configuración de los coeficientes de amortiguamiento en función de estos parámetros se indica en las figuras III.10, III.11 y III.12. En ellas se han estudiado las relaciones  $E_p / E_s = 10, 100, 1000, 10000$  y  $25000$ .

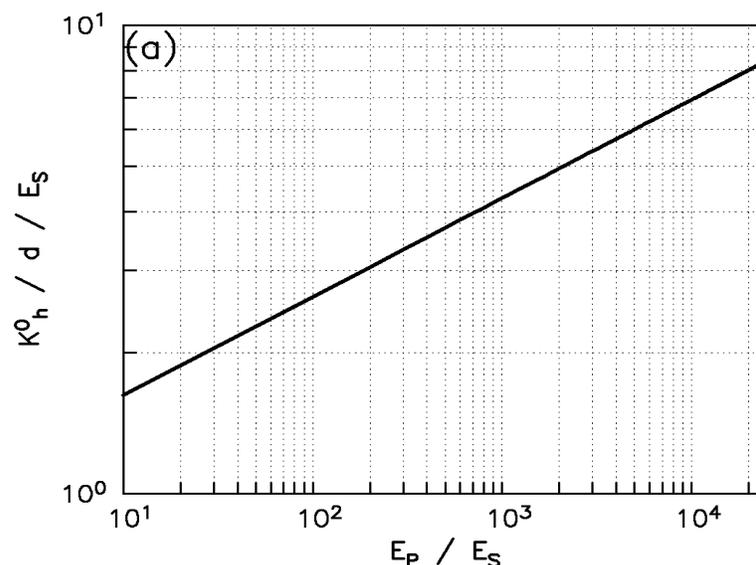


Figura III.5 Rigideces estáticas para el modo en vibración horizontal en pilotes

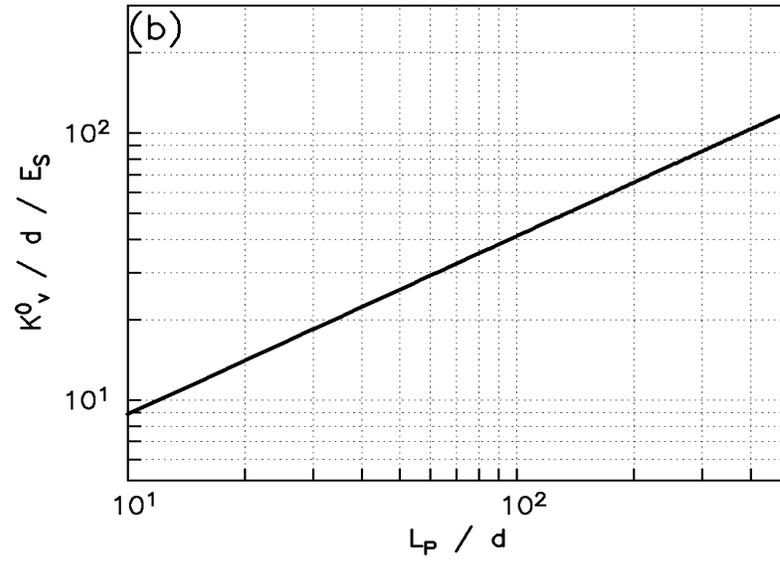


Figura III.6 Rigideces estáticas para el modo en vibración vertical en pilotes

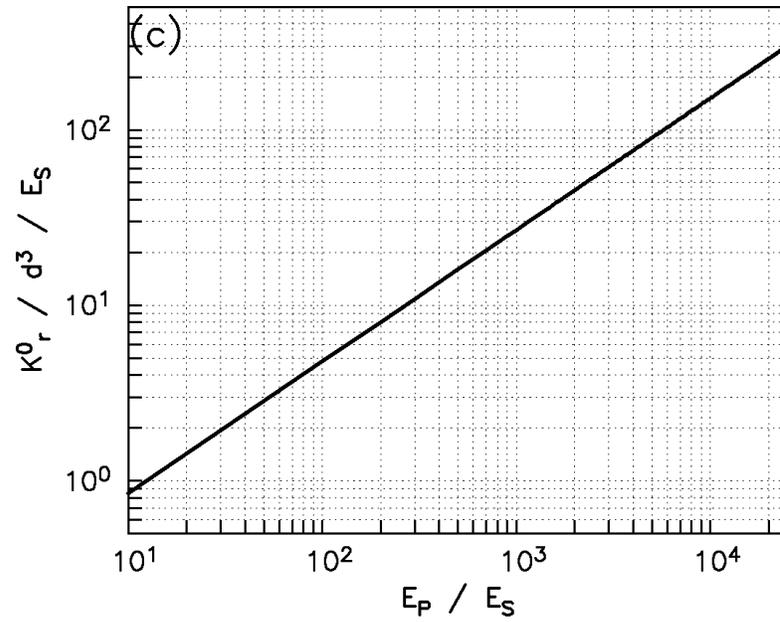


Figura III.7 Rigideces estáticas para el modo de cabeceo en pilotes

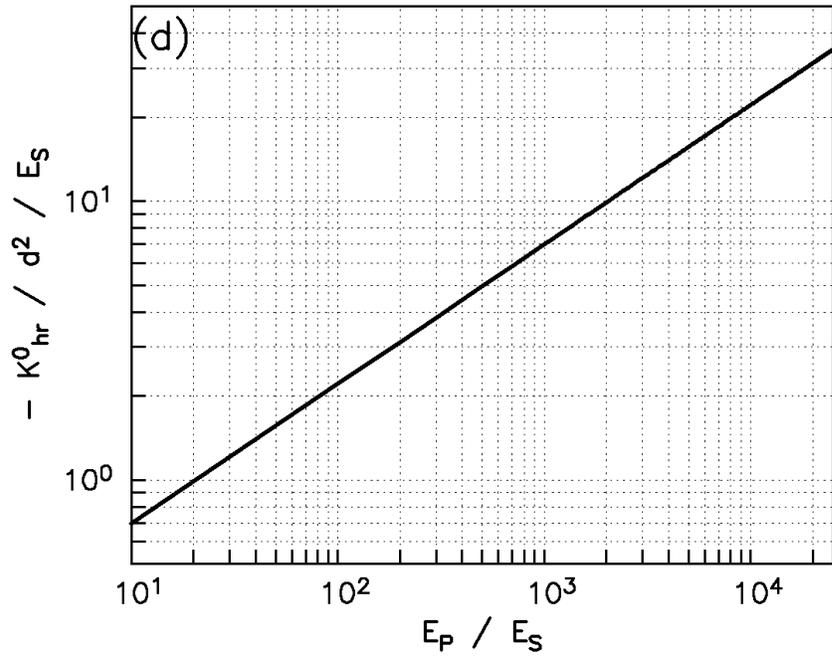


Figura III.8 Rigideces estáticas para el modo acoplado en pilotes

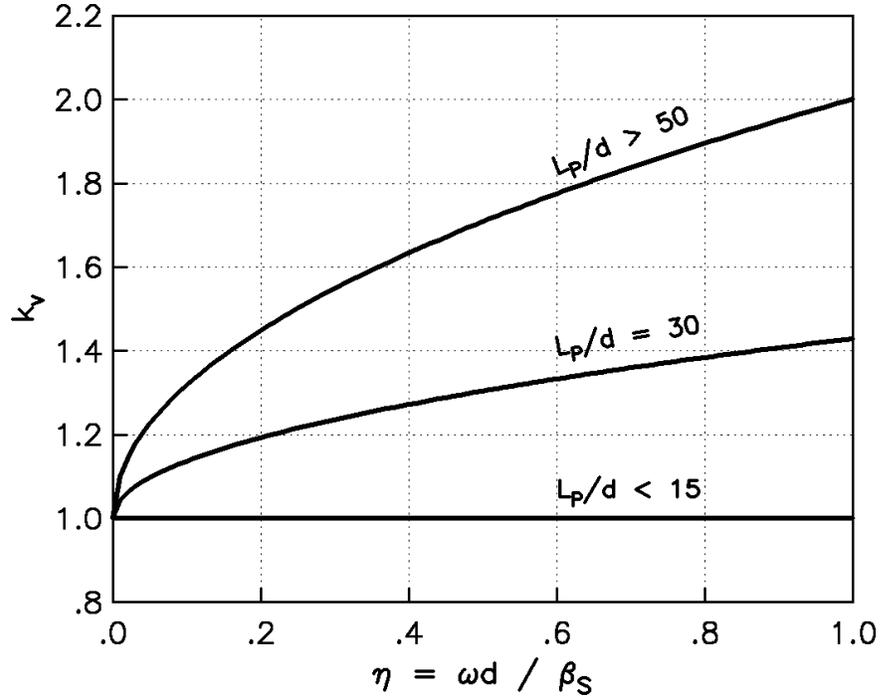


Figura III.9 Coeficientes rigidez para el modo vertical en pilotes

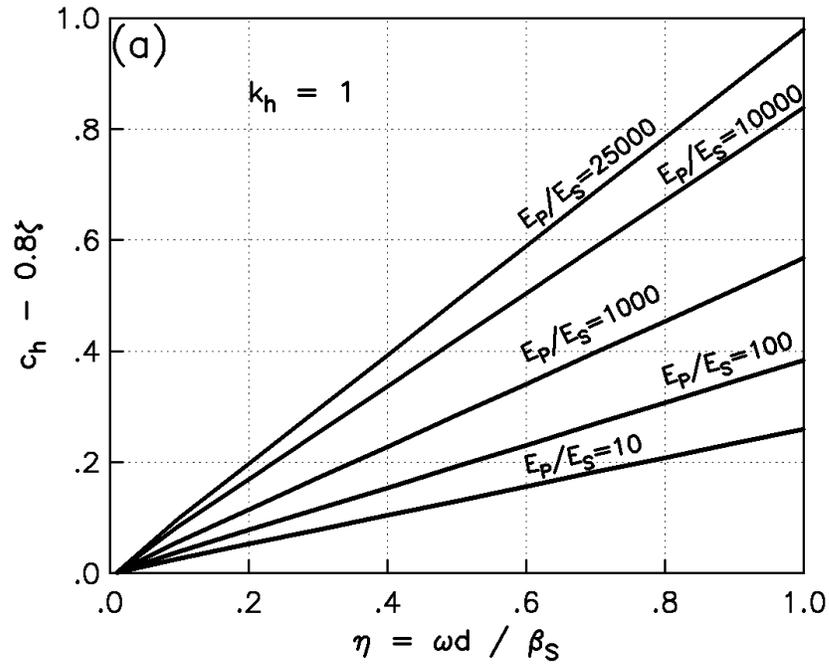


Figura III.10 Coeficientes de amortiguamiento para el modo horizontal en pilotes

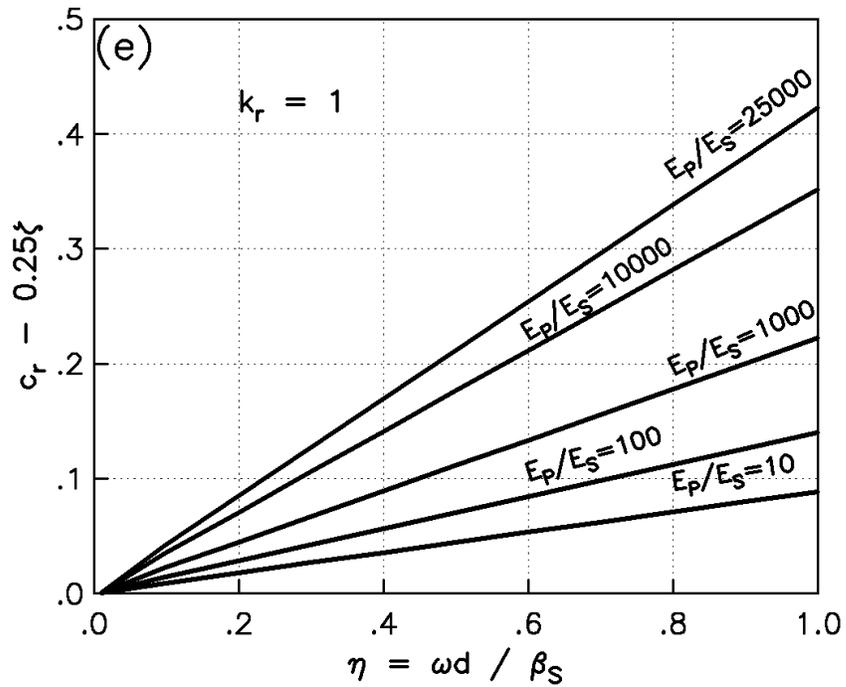


Figura III.11 Coeficientes de amortiguamiento para el modo en cabeceo en pilotes

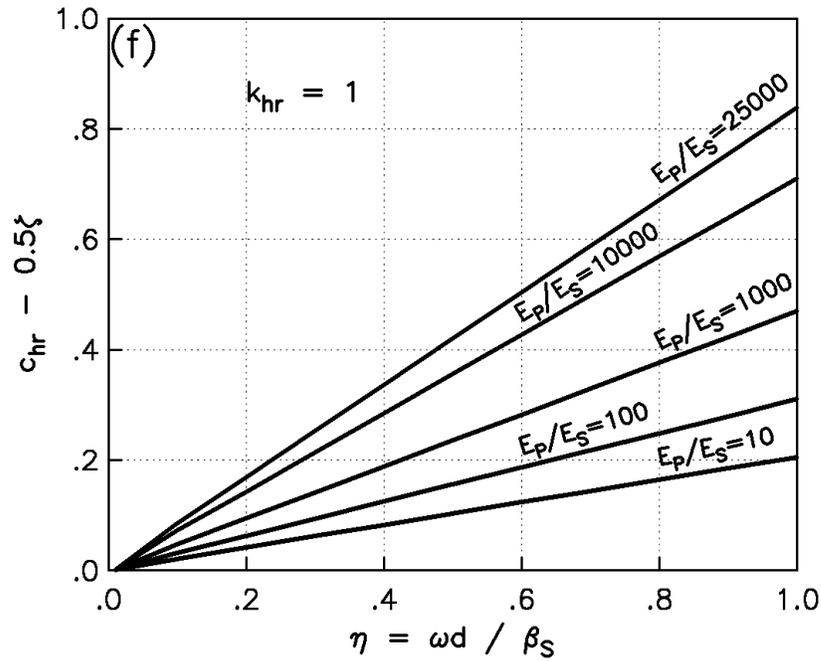


Figura III.12 Coeficientes de amortiguamiento para el modo acoplado en pilotes

Para el caso de los coeficientes de amortiguamiento en el modo vertical, además de la relación entre módulos elásticos, intervienen el módulo de Poisson y la relación de esbeltez del pilote. Por tanto, los escenarios geométricos y materiales se multiplican. En las figuras III.13, III.14 y III.15 se muestra el comportamiento del coeficiente de amortiguamiento vertical para la relación entre módulos indicado, considerando a la relación de Poisson como  $\nu = 1/2$  y relaciones de esbeltez  $L_p / d = 50, 100$  y  $500$ .

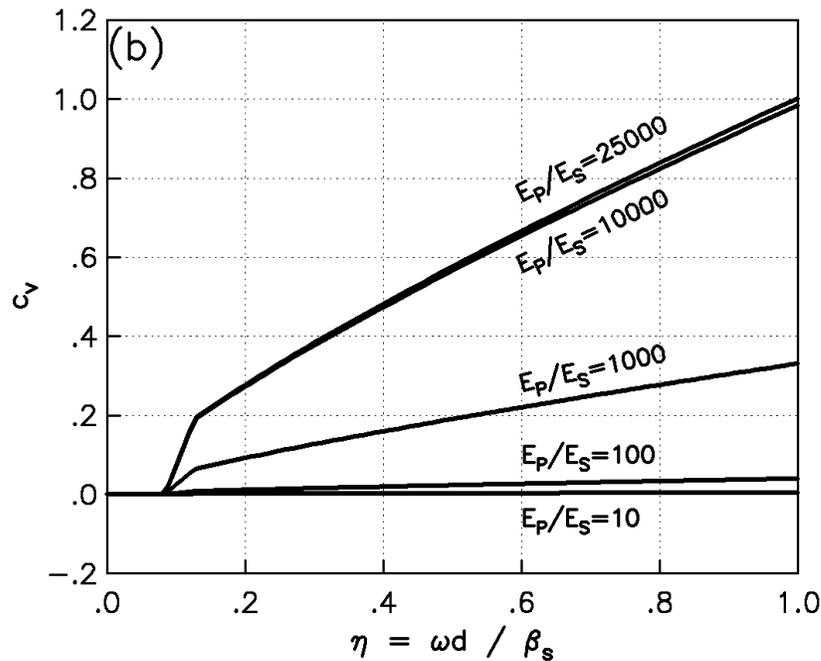


Figura III.13 Coeficientes de amortiguamiento para el modo vertical en pilotes considerando  $\nu = 1/2$  y  $L_p/d = 50$

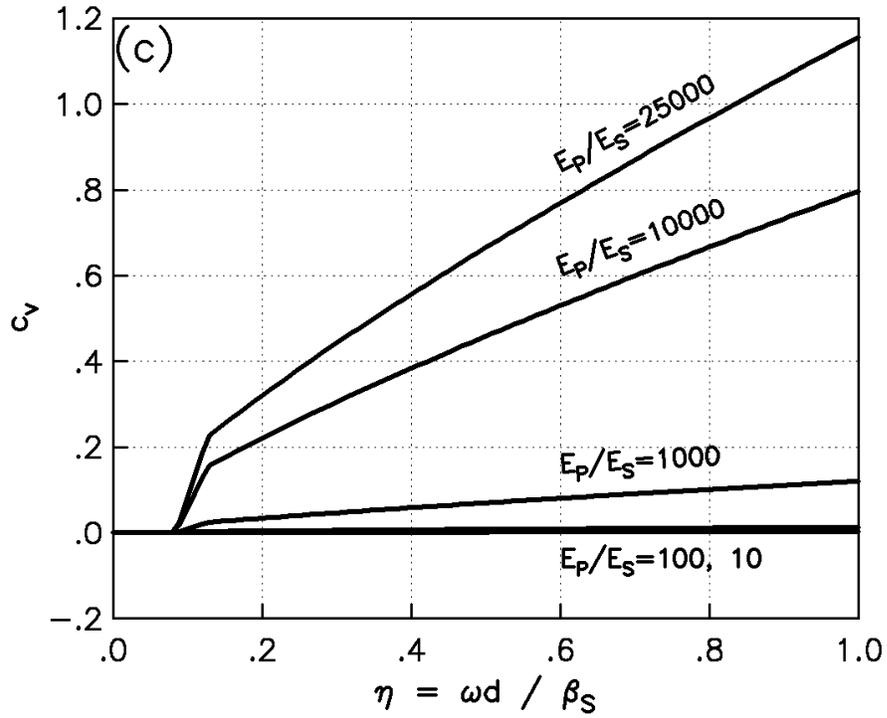


Figura III.14 Coeficientes de amortiguamiento para el modo vertical en pilotes considerando  $\nu = 1/2$  y  $L_p/d = 100$

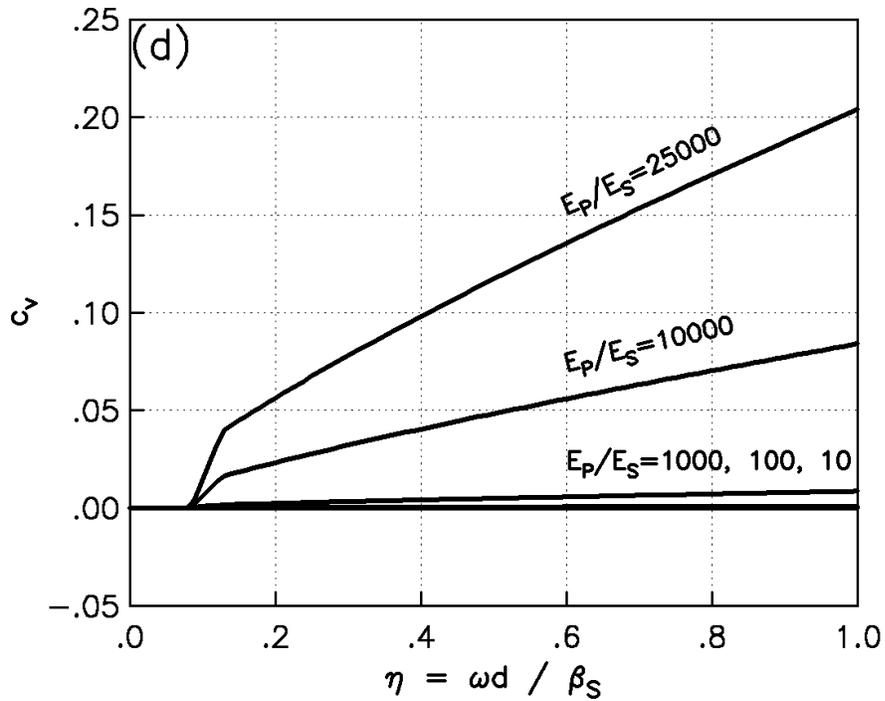


Figura III.15 Coeficientes de amortiguamiento para el modo vertical en pilotes considerando  $\nu = 1/2$  y  $L_p/d = 500$

Nótese que en las curvas de los coeficientes de amortiguamiento (figuras III.10 a III.15), los valores son muy bajos para frecuencias menores a la primer frecuencia resonante del depósito, debido a que sólo reflejan la pérdida de energía por amortiguamiento histerético, siendo prácticamente nulo el amortiguamiento por radiación. Este efecto se identifica claramente en las curvas de las figuras III.13, III.14 y III.15.

### III.5 RIGIDECES DINÁMICAS PARA PILOTES EN EL VALLE DE MÉXICO

En función de las expresiones arriba estudiadas y considerando las propiedades que caracterizan al subsuelo del valle de México, así como las condiciones geométricas y materiales que típicamente presentan las cimentaciones con pilotes que en esta región se construyen, se han elaborado curvas que permiten determinar los parámetros necesarios para construir las rigideces dinámicas de sistemas suelo-pilote en el valle de México.

En primer lugar se considera que los módulos de elasticidad del suelo en el valle de México acusan un intervalo de variación amplio. Por ello, y con objeto de cubrir toda la gama posible de suelos, se han considerado módulos elásticos ubicados entre 10 y 10,000 kg/cm<sup>2</sup>. Adicionalmente, se ha asumido como representativo aplicar módulos de Poisson de ½ y amortiguamiento material del 5%, ya que los suelos saturados del valle se aproximan a estos valores.

Por su parte, las cimentaciones con pilotes que típicamente se construyen en el valle de México incluyen pilotes con diámetros ubicados entre 20 y 50 cm. La longitud de estos elementos, en algunos casos, puede ser de hasta 70.0 m. En cuanto a su fabricación, los pilotes se construyen para la mayoría de los casos de concreto armado, con una resistencia del concreto a la compresión ubicada entre 250 y 300 kg/cm<sup>2</sup>, lo que se asocia con un módulo elástico medio de aproximadamente 230,000 kg/cm<sup>2</sup>.

Bajo el escenario expuesto, en las figuras III.16 a III.19 se presentan las curvas con que es posible calcular las rigideces estáticas, aplicables para el valle de México, para los modos en vibración horizontal, vertical, cabeceo y acoplado. En ellas se han considerado los siguientes parámetros:

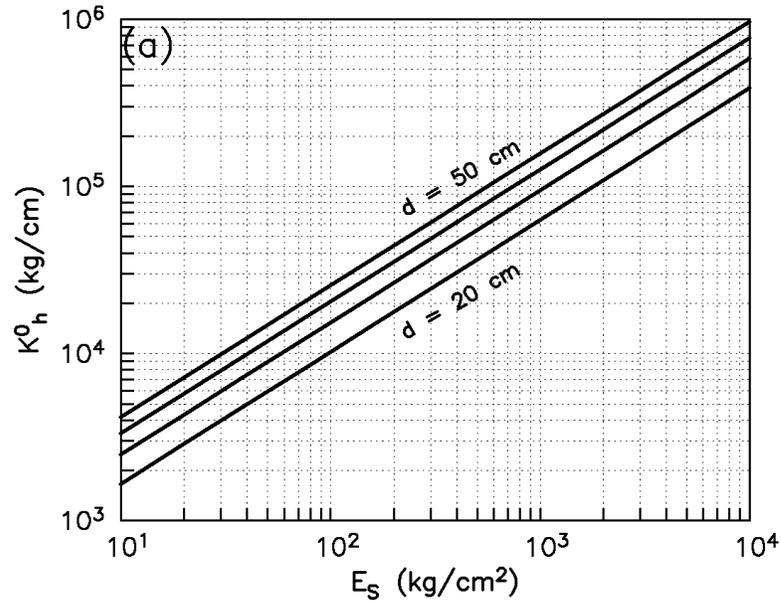
$$10 \leq E_s \leq 10000 \text{ kg/cm}^2$$

$$d = 20, 30, 40 \text{ y } 50 \text{ cm}$$

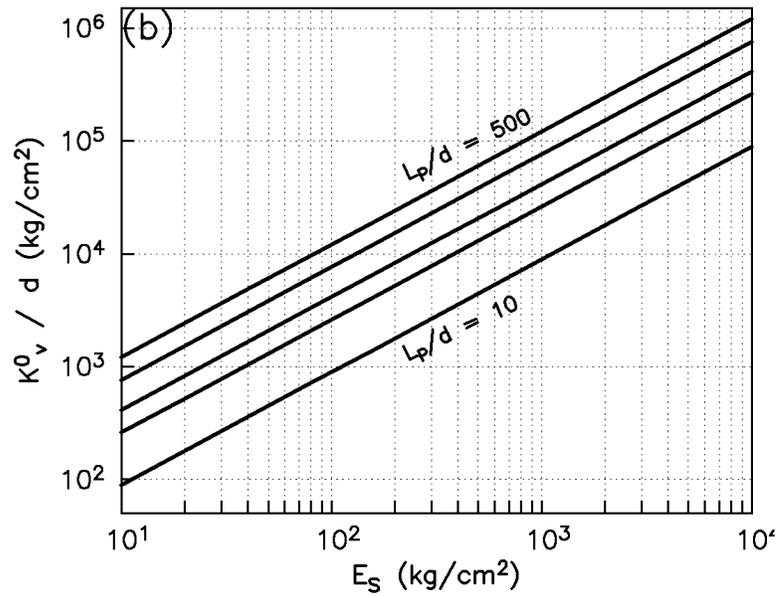
$$L_p / d = 50, 100, 250 \text{ y } 500$$

Los coeficientes de rigidez para los modos en vibración horizontal, cabeceo y acoplado son unitarios, mientras que el coeficiente de rigidez en el modo vertical presenta la configuración ya indicada en la figura III.9.

En las figuras III.20, III.21 y III.22 se muestran los coeficientes de amortiguamiento para los modos horizontal, cabeceo y acoplado, respectivamente. Estas curvas son función de la frecuencia normalizada y del módulo de elasticidad del suelo con valores  $E_s = 10, 100, 1000 \text{ y } 10000 \text{ kg/cm}^2$ .



**Figura III.16 Rigideces estáticas para el modo en vibración horizontal aplicable a pilotes de fricción en el valle de México**



**Figura III.17 Rigideces estáticas para el modo en vibración vertical aplicable a pilotes fricción en el valle de México**

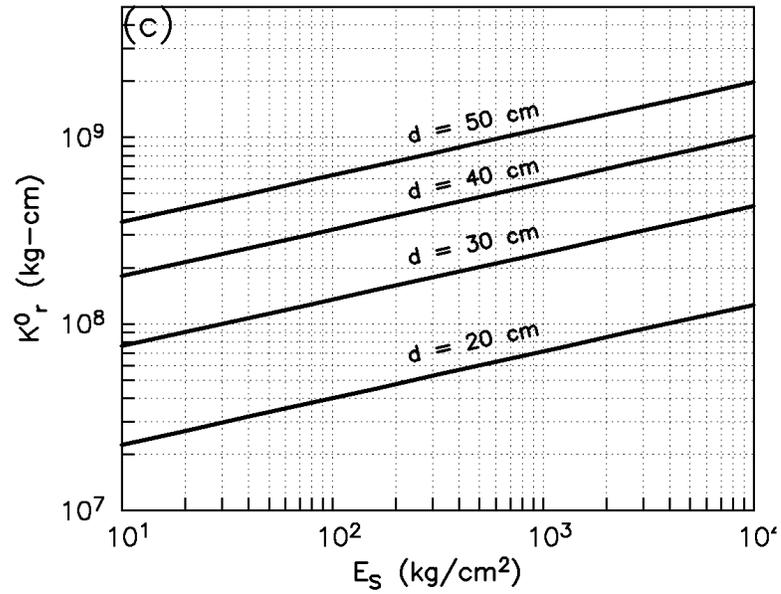


Figura III.18 Rigideces estáticas para el modo en cabeceo aplicable a pilotes de fricción en el valle de México

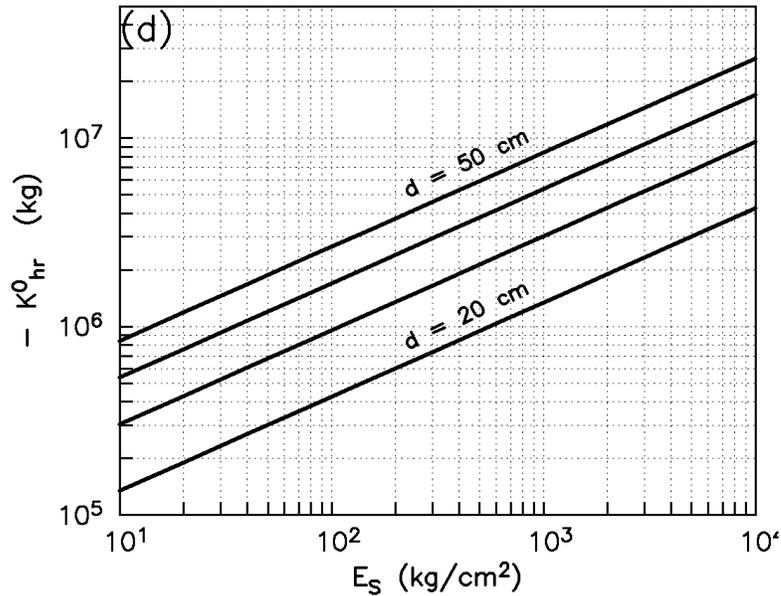


Figura III.19 Rigideces estáticas para el modo acoplado aplicable a pilotes de fricción en el valle de México

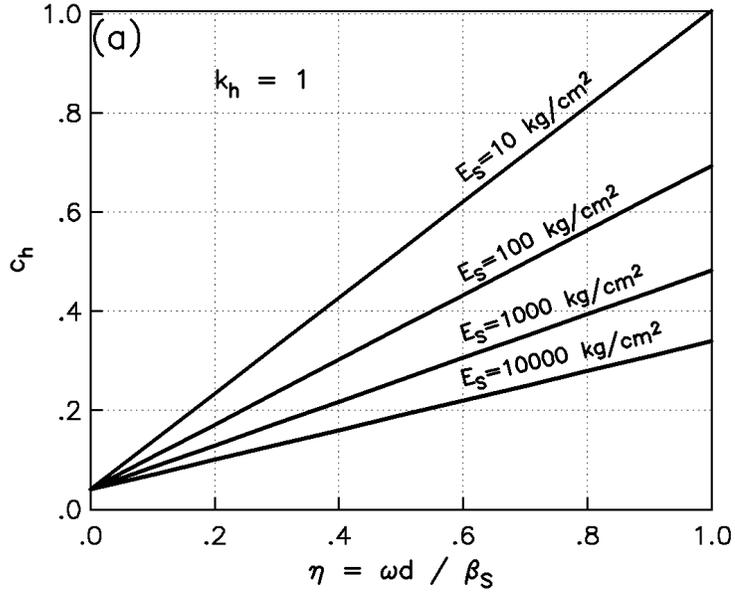


Figura III.20 Coeficientes de amortiguamiento para el modo horizontal aplicables a pilotes de fricción en el valle de México

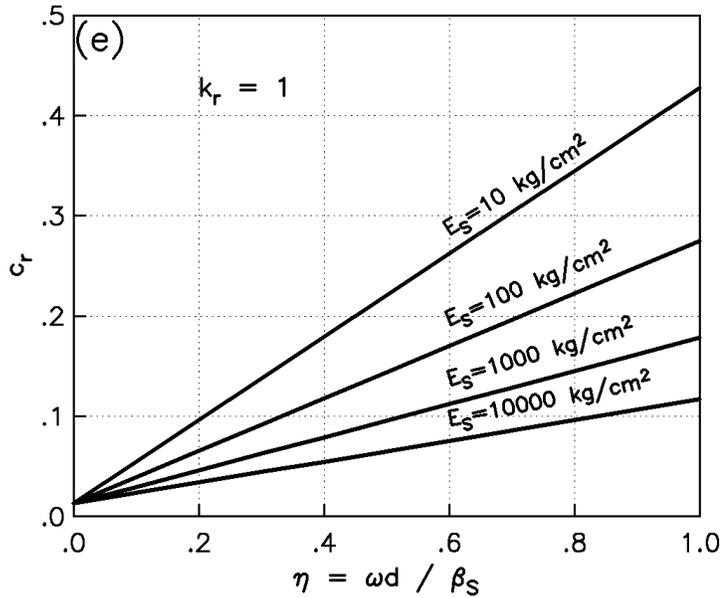
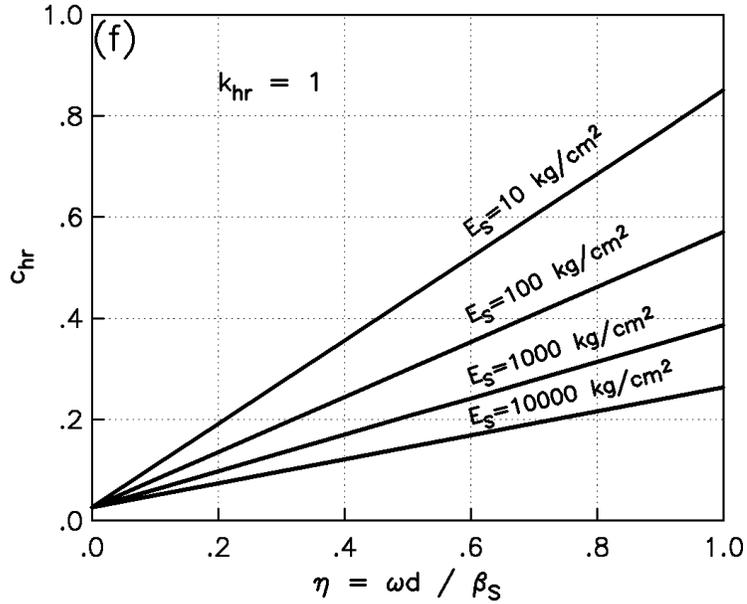
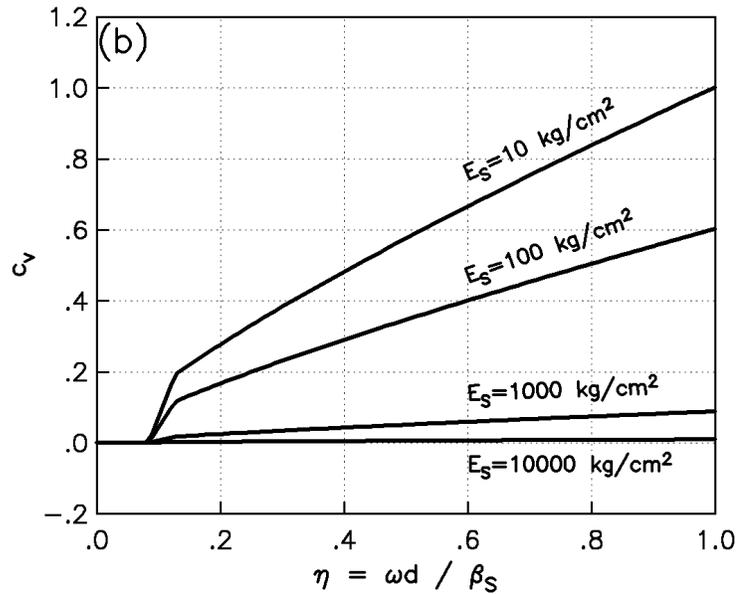


Figura III.21 Coeficientes de amortiguamiento para el modo en cabeceo aplicable a pilotes de fricción en el valle de México

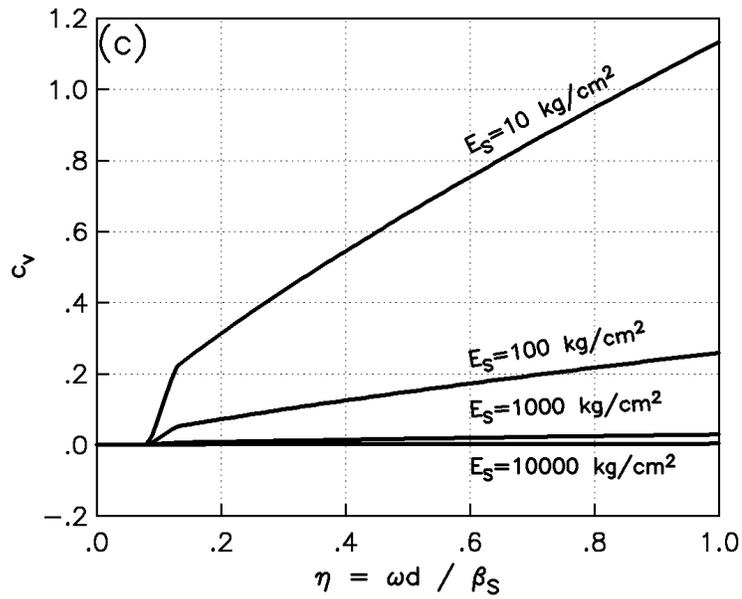


**Figura III.22 Coeficientes de amortiguamiento para el modo acoplado aplicable a pilotes de fricción en el valle de México**

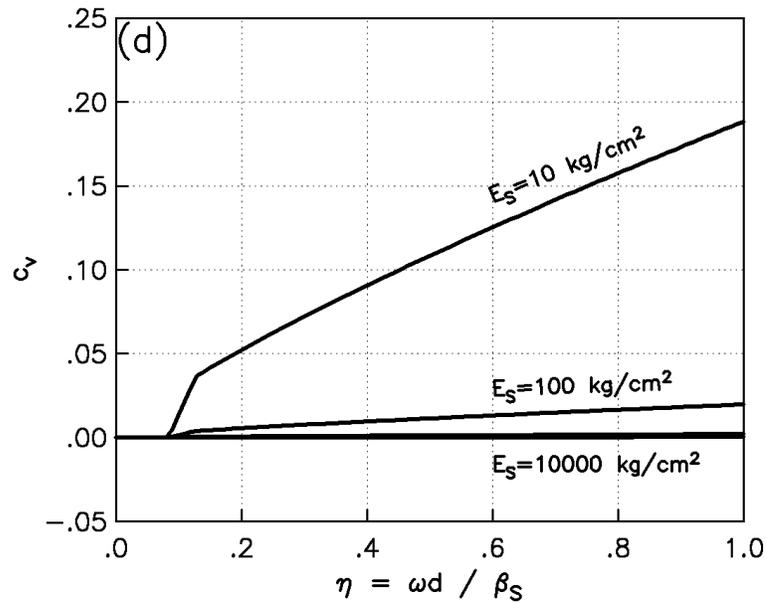
La configuración de los coeficientes de amortiguamiento en el modo vertical se presentan en las figuras III.23, III.24 y III.25 para una relación de Poisson  $\nu = 1/2$ , relación de esbeltez del pilote  $L_p / d = 50, 100$  y  $500$  y módulos elásticos del suelo  $E_s = 10, 100, 1000$  y  $10000 \text{ kg/cm}^2$ .



**Figura III.23 Coeficientes de amortiguamiento para el modo en vibración vertical aplicables a pilotes de fricción en el valle de México para  $\nu=1/2$  y  $L_p/d=50$**



**Figura III.24** Coeficientes de amortiguamiento para el modo en vibración vertical aplicable a pilotes de fricción en el valle de México para  $\nu=1/2$  y  $L_p/d=100$



**Figura III.25** Coeficientes de amortiguamiento para el modo en vibración vertical aplicable a pilotes de fricción en el valle de México para  $\nu=1/2$  y  $L_p/d=500$

El empleo de las curvas de las figuras III.9 y III.16 a III.25 son una alternativa para la determinación práctica de las rigideces estáticas y coeficientes de rigidez y de amortiguamiento los sistemas suelo-cimentación profunda típicos que se construyen en el valle de México.

## MODELO PARA EL CÁLCULO DE RIGIDECESES DINÁMICAS

---

Se presenta un método de frontera para el problema tridimensional del cálculo de funciones de impedancia en cimentaciones profundas. Este método ha sido aplicado al análisis de cimentaciones superficiales rugosas tipo cajón, carentes de masa y con simetría axial, enterradas en un depósito de suelo estratificado horizontalmente que se apoya sobre una base fija (Lysmer, 1970; Lysmer y Drake, 1971; Lysmer y Waas, 1972; Waas, 1972; Kausel, 1974; Kausel, Roesset y Waas, 1975, Kausel y Roësset, 1977; Tassoulas y Kausel, 1983 y Aguilar, 1998). La aplicación de este método se hace extensiva a cimentaciones profundas compuestas por pilotes o pilas.

El método consiste en determinar los modos de propagación del suelo y números de onda asociados, mediante el análisis del problema discreto de valores y vectores característicos para las ondas generalizados de Love (caso antiplano) y Rayleigh (caso plano). El problema tridimensional para el análisis del movimiento de ondas armónicas en regiones axisimétricas se construye a partir del problema algebraico de valores y vectores característicos derivado de los casos antiplano y plano.

El dominio de análisis se divide en una región interior y otra exterior. La primera está formada por el pilote y el suelo de soporte; se encuentra limitada por su cabeza plana en superficie y la base fija del depósito de suelo, presentando condiciones de frontera fija tanto en la superficie como en el basamento. La región exterior, corresponde al depósito de suelo que envuelve al pilote, con condiciones de frontera libre en la superficie y fija en el basamento. A partir de los modos de propagación y números de onda para el caso axisimétrico, se construyen vectores de desplazamiento y fuerzas modales en la frontera entre las regiones interior y exterior, los que se combinan con coeficientes de participación con el propósito de obtener los desplazamientos y fuerzas consistentes en los nodos comunes entre ambas regiones.

Para las vibraciones a que está sujeto el pilote, es necesario evaluar la solución particular en la región interior que cumpla con la condición de frontera inhomogénea en el contacto cabeza plana-cuerpo del pilote (movimiento unitario impuesto) para estimar los coeficientes de participación modal que permitan definir los campos de desplazamientos y fuerzas en todo el dominio de análisis.

Por otra parte, se obtiene la solución homogénea en la región interior para cada modo de vibración, con lo que se tiene completo el problema.

Las funciones de impedancia para cada modo de vibración se construyen al integrar los campos de esfuerzos generados en la cabeza del pilote.

### IV.1 VIBRACIONES EN EL PROBLEMA AXISIMÉTRICO

Para estudiar las vibraciones de tipo armónico en un depósito estratificado en tres dimensiones, se considera una región axisimétrica a partir de un sistema de coordenadas cilíndricas  $r, \theta, z$ , donde las

amplitudes de los desplazamientos  $u, v, w$  ocurren en las direcciones radial, tangencial y axial, respectivamente (figura IV.1).

Las ecuaciones diferenciales de equilibrio que involucran el movimiento para el estrato  $j$  del depósito son las siguientes (Achenbach, 1976)

$$\begin{aligned} \nabla^2 u - \frac{u}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{1-2\mu_j} \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} + \frac{\omega^2}{\beta_j^2} u &= 0 \\ \nabla^2 v - \frac{v}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1}{1-2\mu_j} \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} + \frac{\omega^2}{\beta_j^2} v &= 0 \\ \nabla^2 w + \frac{1}{1-2\mu_j} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} + \frac{\omega^2}{\beta_j^2} w &= 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.1})$$

donde  $\beta_j$  representa la velocidad de propagación de ondas transversales o de corte para el estrato  $j$ , que se relaciona con la rigidez  $G_j$  y la densidad de masa  $\rho_j$  mediante

$$\beta_j = \sqrt{\frac{G_j}{\rho_j}} \quad (\text{IV.2})$$

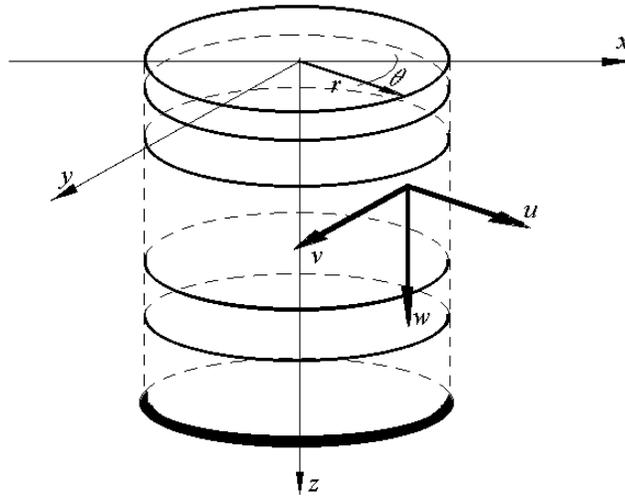
Adicionalmente, las amplitudes de los esfuerzos (figura IV.2) se evalúan con (Achenbach, 1976),

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \lambda_j \varepsilon + 2G_j \frac{\partial u}{\partial r} \\ \sigma_\theta &= \lambda_j \varepsilon + 2G_j \left[ \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right] \\ \sigma_z &= \lambda_j \varepsilon + 2G_j \frac{\partial w}{\partial z} \\ \tau_{r\theta} &= G_j \left[ \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right] \\ \tau_{\theta z} &= G_j \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial z} \right] \\ \tau_{rz} &= G_j \left[ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right] \end{aligned} \quad (\text{IV.3})$$

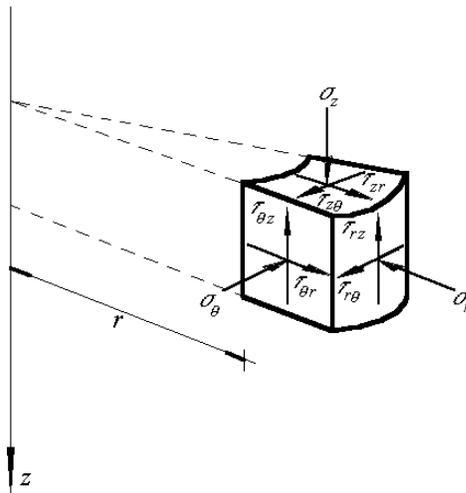
En las expresiones IV.1 y IV.3,  $\nabla^2$  y  $\varepsilon$  son el Laplaciano y la dilatación, respectivamente, definidos como

$$\nabla^2 = \frac{\partial}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (IV.4)$$

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial v}{\partial \theta} + u \right] + \frac{\partial w}{\partial z} \quad (IV.5)$$



**Figura IV.1** Región axisimétrica de un depósito estratificado en coordenadas cilíndricas



**Figura IV.2** Esfuerzos actuantes en un elemento diferencial en coordenadas cilíndricas

Al igual que en los problemas independientes de ondas generalizadas de Love y Rayleigh, el campo de desplazamientos para una región axisimétrica estratificada horizontalmente puede evaluarse por

la combinación lineal de modos naturales de propagación, que se obtienen a partir de la separación de variables.

Por tanto, la variación de las formas modales para el caso antiplano, o de ondas de Love, se determina a partir de las siguientes relaciones (Kausel, 1974):

$$u(r, \theta, z) = \frac{n}{r} V(z) C_n(kr) \begin{cases} \cos(n\theta) \\ \text{sen}(n\theta) \end{cases}$$

$$w(r, \theta, z) = 0 \quad (\text{IV.6})$$

$$v(r, \theta, z) = kV(z) C'_n(kr) \begin{cases} -\text{sen}(n\theta) \\ \cos(n\theta) \end{cases}$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

Por otra parte, las ecuaciones que incluyen la variación de las formas modales para el caso Plano o de ondas de Rayleigh son las siguientes (Kausel, 1974):

$$u(r, \theta, z) = kU(z) C'_n(kr) \begin{cases} \cos(n\theta) \\ \text{sen}(n\theta) \end{cases}$$

$$w(r, \theta, z) = -ikW(z) C_n(kr) \begin{cases} \cos(n\theta) \\ \text{sen}(n\theta) \end{cases} \quad (\text{IV.7})$$

$$v(r, \theta, z) = \frac{n}{r} U(z) C_n(kr) \begin{cases} -\text{sen}(n\theta) \\ \cos(n\theta) \end{cases}$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

En ambos casos,  $n$  se asocia con el número de Fourier y  $C_n(\gamma)$  es cualquier solución de la ecuación de Bessel de orden  $n$

$$C_n'' + \frac{1}{\gamma} C_n' + \left[ 1 - \frac{n^2}{\gamma^2} \right] C_n = 0 \quad (\text{IV.8})$$

donde  $C'_n$  indica derivada con respecto al argumento  $\gamma$ .

En las ecs. IV.6 y IV.7, se aplica el  $\cos(n\theta)$  para  $u, w$  y el  $-\text{sen}(n\theta)$  para  $v$  siempre que el modo sea simétrico. En caso contrario, modo antisimétrico, se utiliza el  $\text{sen}(n\theta)$  para  $u, w$  y el  $\cos(n\theta)$  para  $v$ .

Al sustituir las expresiones IV.6 en las ecuaciones diferenciales que controlan el movimiento (ecs. IV.1), se observa que para el estrato  $j$ ,  $V$  debe satisfacer la expresión

$$k^2 G_j V - G_j \frac{d^2 V}{dz^2} - \rho_j \omega^2 V = 0 \quad (\text{IV.9})$$

Para este caso, los esfuerzos asociados se definen como:

$$\begin{aligned} \sigma_z &= 0 \\ \tau_{\theta z} &= k G_j \frac{dV}{dz} C'_n(kr) \begin{Bmatrix} -\text{sen}(n\theta) \\ \cos(n\theta) \end{Bmatrix} \\ \tau_{zr} &= \frac{n}{r} G_j \frac{dV}{dz} C_n(kr) \begin{Bmatrix} \cos(n\theta) \\ \text{sen}(n\theta) \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{IV.10})$$

De igual forma, al sustituir las ecuaciones IV.7 en IV.1,  $U, W$  deben satisfacer las expresiones para los modos de vibración obtenidas del problema plano,

$$\begin{aligned} k^2 (\lambda_j + 2G_j) U + ik (\lambda_j + G_j) \frac{dW}{dz} - G_j \frac{d^2 U}{dz^2} - \omega^2 \rho_j U &= 0 \\ k^2 G_j W + ik (\lambda_j + G_j) \frac{dU}{dz} - (\lambda_j + 2G_j) \frac{d^2 W}{dz^2} - \omega^2 \rho_j W &= 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.11})$$

siendo los esfuerzos correspondientes,

$$\begin{aligned} \sigma_z &= -ik \left[ (\lambda_j + 2G_j) \frac{dW}{dz} - ik \lambda_j U \right] C_n(kr) \begin{Bmatrix} \cos(n\theta) \\ \text{sen}(n\theta) \end{Bmatrix} \\ \tau_{\theta z} &= \frac{n}{r} G_j \left[ \frac{dU}{dz} - ikW \right] C_n(kr) \begin{Bmatrix} -\text{sen}(n\theta) \\ \cos(n\theta) \end{Bmatrix} \\ \tau_{zr} &= k G_j \left[ \frac{dU}{dz} - ikW \right] C'_n(kr) \begin{Bmatrix} \cos(n\theta) \\ \text{sen}(n\theta) \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{IV.12})$$

Manteniendo las condiciones de continuidad de desplazamientos y esfuerzos en las interfaces entre estratos, y de acuerdo con las condiciones de frontera correspondientes, puede observarse que  $V$  es una eigenfunción con eigenvalor  $k$  de un problema algebraico de eigenvalores idéntico al del problema antiplano:

$$\left[ k^2 \tilde{A} + \tilde{G} - \omega^2 \tilde{M} \right] \tilde{\Delta} = \tilde{0} \quad (\text{IV.13})$$

Por otra parte,  $U, W$  son eigenfunciones con eigenvalor  $k$  del problema algebraico de eigenvalores idéntico al del problema plano:

$$\left[ k^2 \tilde{A} + ik\tilde{B} + \tilde{G} - \omega^2 \tilde{M} \right] \tilde{\Delta} = \tilde{0} \quad (\text{IV.14})$$

Por lo tanto, el problema algebraico de eigenvalores derivado de los problemas plano y antiplano, puede aplicarse directamente al análisis del movimiento de ondas armónicas en regiones axisimétricas. En otras palabras, el problema axisimétrico se forma a partir de los problemas antiplano y plano.

Con base en lo establecido, al considerar que el depósito de suelo tridimensional está dividido en  $N$  substratos y que las condiciones de frontera son para una superficie libre y base fija, la matriz de formas modales  $\tilde{X}$  de  $(3N \times 3N)$  se compone por las formas modales o eigenvectores del problema plano y los eigenvectores del problema antiplano, ocupando las primeras  $2N$  columnas de la matriz los primeros, y las últimas  $N$  los segundos:

$$\tilde{X} = \left[ \tilde{\Delta}^j \right] \quad 1 \leq j \leq 3N \quad (\text{IV.15})$$

$$\Delta^j = \Delta^{jp} \quad \begin{array}{l} 1 \leq j \leq 2N \\ 1 \leq jp \leq 2N \end{array}$$

$$\Delta^j = \Delta^{ja} \quad \begin{array}{l} 2N < j \leq 3N \\ 1 \leq ja \leq N \end{array}$$

donde los índices  $jp$  y  $ja$  corresponden a los casos plano y antiplano, respectivamente.

Los renglones de la matriz  $\tilde{X}$  se asocian consecutivamente con las direcciones  $u, w, v$ , por lo que en las primeras  $2N$  columnas que la componen (modos del problema plano), los elementos correspondientes a los renglones  $3k$  son nulos; de igual forma son nulos los elementos de los renglones  $3k-2$  y  $3k-1$  de las últimas  $N$  columnas (modos del problema antiplano) para  $1 \leq k \leq N$ .

Mediante un procedimiento similar, se construye la matriz  $\tilde{K}$  de  $(3N \times 3N)$ , colocando en la diagonal principal los números de onda o eigenvalores de cada caso:

$$\tilde{K} = \text{diag}[k_j] \quad 1 \leq j \leq 3N \quad (\text{IV.16})$$

$$k_j = k_{ip} \quad \begin{array}{l} 1 \leq j \leq 2N \\ 1 \leq ip \leq 2N \end{array}$$

$$k_j = k_{ia} \quad \begin{array}{l} 2N < j \leq 3N \\ 1 \leq ia \leq N \end{array}$$

Si la condición de frontera en superficie es fija, la matriz  $\tilde{X}$  será de  $(3N - 3Df) \times (3N - 3Df)$ , constituida por las formas modales del problema plano ocupando las  $2N - 2Df$  primeras columnas, y por las formas modales del problema antiplano posicionándose en las últimas  $N - Df$  columnas:

$$\tilde{X} = [\tilde{\Delta}^j] \quad 1 \leq j \leq 3N - 3Df \quad (\text{IV.17})$$

$$\Delta^j = \Delta^{jp} \quad 1 \leq j \leq 2N - 2Df \\ 2Df \leq jp \leq 2N$$

$$\Delta^j = \Delta^{ja} \quad 2N - 2Df < j \leq 3N - 3Df \\ Df \leq ja \leq N$$

De la misma forma, en la matriz  $\tilde{X}$  los renglones corresponden a las direcciones  $u, w, v$  para cada subestrato. La matriz diagonal  $\tilde{K}$  de números de onda asociados, se construye de acuerdo con lo siguiente:

$$\tilde{K} = \text{diag}[k_j] \quad 1 \leq j \leq 3N - 3Df \quad (\text{IV.18})$$

$$k_j = k_{ip} \quad 1 \leq j \leq 2N - 2Df \\ 2Df < ip \leq 2N$$

$$k_j = k_{ia} \quad 2N - 2Df < j \leq 3N - 3Df \\ Df < ia \leq N$$

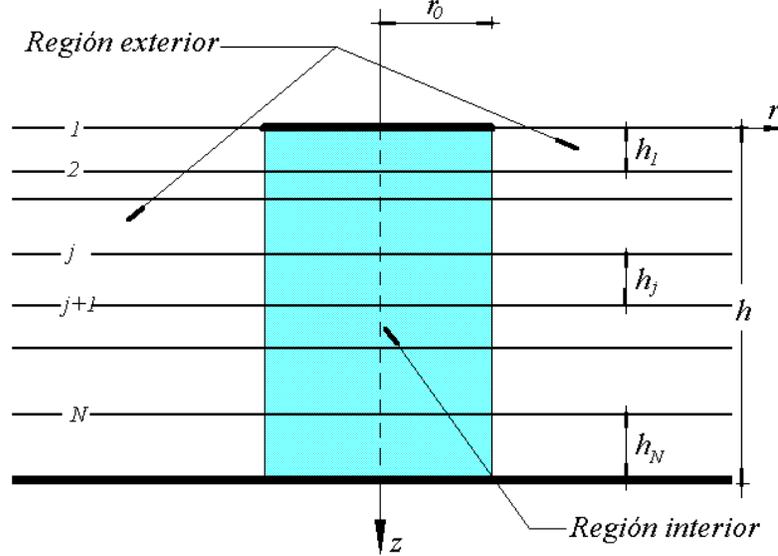
Se destaca que, para el modelo investigado, el parámetro  $Df$  corresponde a la profundidad donde se localiza la cabeza del pilote o pila; para los casos aquí analizados se considera en la superficie del depósito, es decir  $Df = 0$ .

Para un depósito estratificado horizontalmente, se sabe que la frontera inferior queda establecida por la base fija donde descansa. Si en este escenario se incluye una cimentación de geometría cilíndrica se tienen las condiciones de superficie libre y superficie fija, correspondiendo la primera fuera de la zona donde se ubica la cimentación y la segunda bajo ella. Con ello y de acuerdo con el método propuesto, se ha dividido el problema axisimétrico en una región exterior para el primer caso y una región interior para el segundo. La frontera entre estas regiones está limitada por el radio  $r_0$  del pilote o pila (figura IV.3).

## IV.2 DESPLAZAMIENTOS Y FUERZAS NODALES CONSISTENTES

A partir de las formas modales establecidas en el problema axisimétrico, y de acuerdo con el modelo dividido en las regiones interior y exterior, el interés ahora es evaluar las fuerzas y desplazamientos consistentes en la interfase de ambas regiones.

Los desplazamientos y fuerzas, producto de las ondas elásticas que se propagan en un depósito estratificado, se estudian en la unión de los segmentos de línea en que se han discretizado los estratos, es decir, en los nodos. A estas cantidades se les conoce como desplazamientos y fuerzas nodales.



**Figura IV.3 Dominio de análisis**

Los desplazamientos nodales consistentes entre ambas regiones del problema axisimétrico se pueden calcular como una combinación lineal de modos de vibración. Por otra parte, las fuerzas nodales asociadas se determinan integrando los esfuerzos que actúan sobre las superficies cilíndricas con normal  $r = r_0$ , limitadas por las profundidades  $z_j$  y  $z_{j+1}$  para todos los substratos  $j$  involucrados en el problema.

Se debe considerar que sobre la superficie cilíndrica donde actúan los esfuerzos, las ondas viajan hacia ella cuando se trata de la superficie interior, mientras que para la superficie exterior las ondas se alejan. Por ello, para evaluar los desplazamientos y las fuerzas nodales consistentes, se considera  $r_0 \leq r$  y  $0 \leq r \leq r_0$  para las regiones exterior (figuras IV.4) e interior (figura IV.5), respectivamente.

#### IV.2.1 Desplazamientos nodales consistentes

Para un número de Fourier  $n$ , el vector de desplazamientos nodales  $\tilde{\mathbf{U}}$  se puede determinar a partir de la matriz de amplitudes de desplazamiento modal  $\tilde{\mathbf{W}}$  y el vector de factores de participación modal  $\tilde{\mathbf{\Gamma}}$ , mediante

$$\tilde{\mathbf{U}} = \tilde{\mathbf{W}}\tilde{\mathbf{\Gamma}} \quad (\text{IV.19})$$

Para la condición de superficie libre,  $\tilde{\mathbf{U}}$  es un vector de  $3N$  elementos que contiene a los desplazamientos producidos en las direcciones radial, vertical y tangencial para los  $N$  substratos.

En el contacto entre ambas regiones  $r = r_0$ , las primeras  $2N$  columnas de la matriz de amplitudes de desplazamiento modal se definen como

$$\begin{aligned} W_{3j-2,l} &= k_l U_j^l C_n'(k_l r_0) \\ W_{3j-1,l} &= -ik_l W_j^l C_n(k_l r_0) \\ W_{3j,l} &= \frac{n}{r_0} U_j^l C_n(k_l r_0) \end{aligned} \quad (\text{IV.20a})$$

donde  $1 \leq l \leq 2N$  y  $1 \leq j \leq N$ , siendo  $l$  el modo particular del problema algebraico de eigenvalores. Las últimas  $N$  columnas de la matriz de amplitudes modales donde  $2N+1 \leq l \leq 3N$  y  $1 \leq j \leq N$ , se definen como

$$\begin{aligned} W_{3j-2,l} &= \frac{n}{r_0} V_j^{l-2N} C_n(k_l r_0) \\ W_{3j-1,l} &= 0 \\ W_{3j,l} &= k_l V_j^{l-2N} C_n'(k_l r_0) \end{aligned} \quad (\text{IV.20b})$$

En estas expresiones se observa que las primeras  $2N$  columnas corresponden al problema plano y las últimas  $N$  al problema antiplano, por ello  $k_l$  se asocia con los números de onda de Rayleigh y Love cuando  $1 \leq l \leq 2N$  y  $2N+1 \leq l \leq 3N$ , respectivamente.

Si la condición de frontera en la superficie de la región es rígida por la presencia de la cabeza plana inmóvil del pilote, el vector de desplazamientos nodales  $\tilde{\mathbf{U}}$  se compone por  $3N - 3Df$  elementos, evaluado a partir de la matriz de formas modales  $\tilde{\mathbf{W}}$  en  $r = r_0$ , constituida por las  $2N - 2Df$  columnas de amplitudes de desplazamiento modal definidas en las ecs. IV.20a y las  $N - Df$  columnas de amplitudes de desplazamiento modal dadas por las ecs. IV.20b.

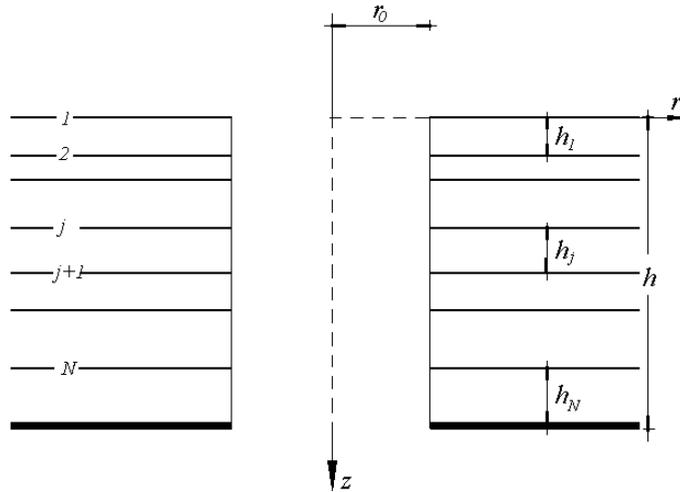
Para la región exterior ( $r > r_0$ ), en la solución de la ecuación de Bessel que participa en las relaciones IV.20a y IV.20b, se aplica la función de Hankel  $H_n^{(2)}$  de segunda especie y orden  $n$ , por presentar un comportamiento asintótico cuando  $r \rightarrow \infty$  de la forma

$$C_n(kr) = H_n^{(2)}(kr) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{-ikr + i\frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{4}} \quad (\text{IV.21})$$

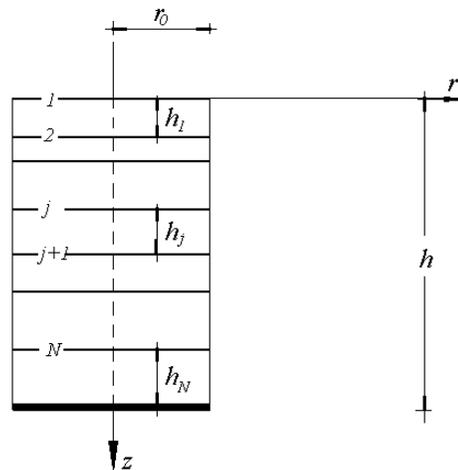
Cuando se trata de la región interior ( $r < r_0$ ), se utiliza la función de Bessel  $J_n$  de primera especie y orden  $n$  como solución a la ecuación de Bessel, porque no es singular (está acotada) cuando  $r \rightarrow 0$ ,

$$C_n(kr) = J_n(kr) \approx \frac{(kr)^n}{2^n n!} \quad (IV.22)$$

Bajo este escenario, es posible construir la matriz de amplitudes de desplazamiento modal que incluye a las regiones exterior e interior; sin embargo, para evaluar los desplazamientos nodales consistentes entre ambas regiones se debe definir el vector de factores de participación  $\tilde{\Gamma}$  al formar y resolver el sistema completo como se indica en el Apéndice A, donde además se incluyen las fuerzas modales asociadas.



IV.4 Región exterior,  $0 < r_0 \leq r$



IV.5 Región interior,  $0 \leq r \leq r_0$

### IV.2.2 Fuerzas nodales consistentes

Para determinar las fuerzas nodales consistentes del subestrato  $j$  en la región exterior  $0 < r_0 \leq r$ , considerando un modo definido por el eigenvector  $\tilde{\Delta}$  y número de onda  $k$ , es necesario integrar los esfuerzos en la superficie cilíndrica para  $r = r_0$  multiplicados por las funciones de forma a lo largo de  $z_j \leq z \leq z_{j+1}$ . Para los nodos  $j$  y  $j+1$  que limitan al subestrato  $j$  se tiene que

$$\begin{aligned}
 P_{r,j}^j &= -r_0 \int_{z_j}^{z_{j+1}} \bar{\sigma}_r \Big|_{r=r_0} N_j^j(z) dz, & P_{r,j+1}^j &= -r_0 \int_{z_j}^{z_{j+1}} \bar{\sigma}_r \Big|_{r=r_0} N_{j+1}^j(z) dz \\
 P_{z,j}^j &= -r_0 \int_{z_j}^{z_{j+1}} \bar{\tau}_{zr} \Big|_{r=r_0} N_j^j(z) dz, & P_{z,j+1}^j &= -r_0 \int_{z_j}^{z_{j+1}} \bar{\tau}_{zr} \Big|_{r=r_0} N_{j+1}^j(z) dz \\
 P_{\theta,j}^j &= -r_0 \int_{z_j}^{z_{j+1}} \bar{\tau}_{r\theta} \Big|_{r=r_0} N_j^j(z) dz, & P_{\theta,j+1}^j &= -r_0 \int_{z_j}^{z_{j+1}} \bar{\tau}_{r\theta} \Big|_{r=r_0} N_{j+1}^j(z) dz
 \end{aligned} \tag{IV.23}$$

donde  $N_j^j$  y  $N_{j+1}^j$  son las funciones de forma que corresponden a los nodos  $j$  y  $j+1$ , respectivamente. Estas tienen una variación lineal dentro del subestrato  $j$  y se definen como

$$\begin{aligned}
 N_j^j(z) &= \frac{z_{j+1} - z}{h_j} & N_{j+1}^j(z) &= \frac{z - z_j}{h_j} \\
 z_j &\leq z \leq z_{j+1}
 \end{aligned} \tag{IV.24}$$

Por su parte,  $\bar{\sigma}_r, \bar{\sigma}_\theta, \bar{\sigma}_z, \bar{\tau}_{r\theta}, \bar{\tau}_{\theta z}, \bar{\tau}_{zr}$  definen las amplitudes de los esfuerzos  $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{r\theta}, \tau_{\theta z}, \tau_{zr}$  para los modos de Love o Rayleigh mediante las siguientes relaciones

$$\begin{aligned}
 \sigma_r &= \bar{\sigma}_r \begin{Bmatrix} \cos(n\theta) \\ \text{sen}(n\theta) \end{Bmatrix} \\
 \sigma_\theta &= \bar{\sigma}_\theta \begin{Bmatrix} \cos(n\theta) \\ \text{sen}(n\theta) \end{Bmatrix} \\
 \sigma_z &= \bar{\sigma}_z \begin{Bmatrix} \cos(n\theta) \\ \text{sen}(n\theta) \end{Bmatrix} \\
 \tau_{r\theta} &= \bar{\tau}_{r\theta} \begin{Bmatrix} -\text{sen}(n\theta) \\ \cos(n\theta) \end{Bmatrix} \\
 \tau_{\theta z} &= \bar{\tau}_{\theta z} \begin{Bmatrix} -\text{sen}(n\theta) \\ \cos(n\theta) \end{Bmatrix}
 \end{aligned} \tag{IV.25}$$

$$\tau_{zr} = \bar{\tau}_{zr} \begin{cases} \cos(n\theta) \\ \text{sen}(n\theta) \end{cases}$$

evaluados  $\sigma_r, \tau_{zr}, \tau_{r\theta}$  a partir de las expresiones IV.10 o IV.12, según sea el caso.

Considerando que  $U, V, W$  varían linealmente en el sustrato  $j$ , y sustituyendo los valores correspondientes de  $\bar{\sigma}_r, \bar{\tau}_{zr}, \bar{\tau}_{r\theta}$  en IV.1 para integrar y ensamblar en la región  $0 \leq z \leq h$ , se encuentra que el vector de fuerzas  $\tilde{P}$  para el modo  $l$ ,  $1 \leq l \leq 3N$  (Tassoulas, 1981), se define por

$$\tilde{P} = r_0 \left[ k_l^2 \tilde{A} \tilde{\Psi}^l + k_l (\tilde{D} - \tilde{E} + n\tilde{N}) \tilde{\Phi}^l - \left( \frac{n(n+1)}{2} \tilde{L} + n\tilde{Q} \right) \tilde{\Psi}^l \right] \quad (\text{IV.26})$$

donde  $\tilde{\Psi}^l, \tilde{\Phi}^l$  son las columnas de las matrices  $\tilde{\Psi}, \tilde{\Phi}$  asociadas con las amplitudes de desplazamiento para el modo  $l$ . Para la condición de superficie libre el vector  $\tilde{P}$  está compuesto por  $3N$  elementos con las fuerzas  $P'_{3j-2}, P'_{3j-1}, P'_{3j}$  correspondientes a las fuerzas radial, vertical y tangencial del nodo  $j$ , respectivamente.

$\tilde{A}, \tilde{D}, \tilde{E}, \tilde{N}, \tilde{L}, \tilde{Q}$  son matrices de  $3N \times 3N$  elementos que caracterizan al depósito en función de las propiedades de cada sustrato, y resultan de ensamblar las submatrices  $A^j, D^j, E^j, N^j, L^j, Q^j$ . La composición de estas matrices, junto con las  $\tilde{\Psi}, \tilde{\Phi}$ , se definen posteriormente.

Bajo la condición de frontera fija en la superficie de la región por la presencia del cimiento, el vector  $\tilde{P}$  contiene  $3N - 3Df$  elementos.

Las matrices  $\tilde{A}, \tilde{D}, \tilde{E}, \tilde{N}, \tilde{L}, \tilde{Q}$  son de dimensión  $(3N - 3Df) \times (3N - 3Df)$ , pues están ensambladas sólo con las matrices  $A^j, D^j, E^j, N^j, L^j, Q^j$  que se encuentran bajo la cimentación. De igual forma se modifican las matrices  $\tilde{\Psi}, \tilde{\Phi}$ .

A partir de los vectores  $\tilde{P}$  para cada modo  $l$  se construye una matriz de amplitudes de fuerza modal, análoga a la matriz de amplitudes de desplazamiento modal  $\tilde{W}$ , que al multiplicarse por el vector común de factores de participación  $\tilde{\Gamma}$  se determina el vector de fuerzas nodales consistentes  $\tilde{F}$  (Tassoulas, 1981):

$$\tilde{F} = r_0 \left[ \tilde{A} \tilde{\Psi} \tilde{K} \tilde{K} + (\tilde{D} - \tilde{E} + n\tilde{N}) \tilde{\Phi} \tilde{K} - \left( \frac{n(n+1)}{2} \tilde{L} + n\tilde{Q} \right) \tilde{\Psi} \right] \tilde{\Gamma} \quad (\text{IV.27})$$

Por otra parte, al considerar el lado opuesto de la superficie cilíndrica que corresponde a la región interior donde  $0 \leq r \leq r_0$ , se obtiene la matriz de fuerzas nodales consistentes definida por

$$\tilde{\mathbf{F}} = -r_0 \left[ \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\Psi} \tilde{\mathbf{K}} \tilde{\mathbf{K}} + (\tilde{\mathbf{D}} - \tilde{\mathbf{E}} + n\tilde{\mathbf{N}}) \tilde{\Phi} \tilde{\mathbf{K}} - \left( \frac{n(n+1)}{2} \tilde{\mathbf{L}} + n\tilde{\mathbf{Q}} \right) \tilde{\Psi} \right] \tilde{\Gamma} \quad (\text{IV.28})$$

cuya única diferencia con respecto al vector de fuerzas nodales de la región exterior es el signo negativo que presenta el segundo miembro de la ec.IV.28, debido a que la orientación de la superficie cilíndrica de este elemento es opuesta a la región  $0 < r_0 \leq r$ .

Al igual que la matriz de amplitudes de desplazamiento modal, la matriz de amplitudes de fuerza modal se incluye en el sistema matricial global del Apéndice A.

Las matrices  $A^j, D^j, E^j, N^j, L^j, Q^j$  junto con los arreglos  $\tilde{\Psi}, \tilde{\Phi}$ , se definen de la siguiente forma

$$\tilde{\mathbf{A}}^j = \frac{h_j}{6} \begin{bmatrix} 2(\lambda_j + 2G_j) & 0 & 0 & \lambda_j + 2G_j & 0 & 0 \\ 0 & 2G_j & 0 & 0 & G_j & 0 \\ 0 & 0 & 2G_j & 0 & 0 & G_j \\ \lambda_j + 2G_j & 0 & 0 & 2(\lambda_j + 2G_j) & 0 & 0 \\ 0 & G_j & 0 & 0 & 2G_j & 0 \\ 0 & 0 & G_j & 0 & 0 & 2G_j \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{D}}^j = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \lambda_j & 0 & 0 & -\lambda_j & 0 \\ -G_j & 0 & 0 & G_j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_j & 0 & 0 & -\lambda_j & 0 \\ -G_j & 0 & 0 & G_j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{E}}^j = \frac{G_j h_j}{3r_0} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{N}}^j = \frac{G_j h_j}{6r_0} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{L}}^j = \frac{2 G_j h_j}{3 r_0^2} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{Q}^j = \frac{G_j}{2r_0} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Phi_{3j-2,l} &= -U_j^l C_{n-1}(k_l r_0) \\ \Phi_{3j-1,l} &= -iW_j^l C_n(k_l r_0) \\ \Phi_{3j,l} &= 0 \end{aligned} \left\{ \begin{array}{l} 1 \leq l \leq 2N \quad \text{y} \quad 1 \leq j \leq N \quad \text{región exterior} \\ 1 \leq l \leq 2N - 2Df \quad \text{y} \quad Df < j \leq N \quad \text{región interior} \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} \Phi_{3j-2,l} &= 0 \\ \Phi_{3j-1,l} &= 0 \\ \Phi_{3j,l} &= -V_j^{l-2N} C_{n-1}(k_l r_0) \end{aligned} \left\{ \begin{array}{l} 2N < l \leq 3N \quad \text{y} \quad 1 \leq j \leq N \quad \text{región exterior} \\ 2N - 2Df < l \leq 3N - 3Df \quad \text{y} \quad Df < j \leq N \quad \text{región interior} \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} \Psi_{3j-2,l} &= U_j^l C_n(k_l r_0) \\ \Psi_{3j-1,l} &= iW_j^l C_{n-1}(k_l r_0) \\ \Psi_{3j,l} &= 0 \end{aligned} \left\{ \begin{array}{l} 1 \leq l \leq 2N \quad \text{y} \quad 1 \leq j \leq N \quad \text{región exterior} \\ 1 \leq l \leq 2N - 2Df \quad \text{y} \quad Df < j \leq N \quad \text{región interior} \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} \Psi_{3j-2,l} &= 0 \\ \Psi_{3j-1,l} &= 0 \\ \Psi_{3j,l} &= V_j^{l-2N} C_n(k_l r_0) \end{aligned} \left\{ \begin{array}{l} 2N < l \leq 3N \quad \text{y} \quad 1 \leq j \leq N \quad \text{región exterior} \\ 2N - 2Df < l \leq 3N - 3Df \quad \text{y} \quad Df < j \leq N \quad \text{región interior} \end{array} \right.$$

Nótese que de los elementos que constituyen a  $\tilde{\Psi}, \tilde{\Phi}$  se distinguen los correspondientes al caso plano y antiplano, ocupando las  $2N$  primeras columnas los primeros y las últimas  $N$  los segundos, siempre que se trate de la región exterior. Para la región interior, los casos plano y antiplano se asocian con las  $2N - 2Df$  primeras columnas y  $N - Df$  últimas columnas, respectivamente.

# MÉTODO DE ANÁLISIS PARA EL CÁLCULO DE RIGIDECESES DINÁMICAS

La propuesta principal de este trabajo de investigación se centra en un método de análisis alternativo para el cálculo riguroso de rigideces dinámicas para pilotes. Para determinar las fuerzas con que se calculan las funciones de impedancia se considera al pilote como una cimentación cilíndrica alargada, con radio  $r_0$ , simulando a su cabeza como una placa carente de masa, rígida y rugosa, en un depósito estratificado donde se garantiza la unión de este medio con el cuerpo del cemento.

Las fuerzas asociadas a las funciones de impedancia, que actúan sobre la cimentación cilíndrica sujeta a una excitación obedecen a tres efectos. Los primeros dos actúan en la base de la cabeza del pilote: uno por las acciones debidas a la respuesta de la cimentación ocasionadas por un movimiento impuesto, y el otro por las acciones debidas a la respuesta del elemento bajo condiciones de frontera fija en el fondo y en la superficie. El efecto restante ocurre sobre la pared perimetral del cemento originado por las fuerzas nodales en el contacto suelo-cimentación.

Las fuerzas en la base se obtendrán a partir de la determinación de las que ocurren en la placa rígida superficial que representa la cabeza del cemento, evaluadas por soluciones particulares y la superposición de las formas modales del depósito. Por otra parte, las fuerzas sobre las paredes del cemento se obtienen integrando las fuerzas nodales consistentes sobre la superficie cilíndrica en que actúan.

## V.1 VIBRACIONES VERTICALES

Las condiciones para estudiar el efecto de las vibraciones verticales en una cimentación enterrada en un depósito estratificado (figura V.1), son las siguientes:

- Las vibraciones armónicas son simétricas con respecto a un plano vertical
- El número de Fourier asociado a este tipo de vibraciones es  $n = 0$
- El movimiento de la partícula ocurre sobre los planos verticales
- Sólo existen las amplitud de desplazamiento  $u, w$  en función de  $r, z$ , respectivamente

Para el substrato  $j$  ( $1 \leq j \leq N$ ), las ecuaciones diferenciales que controlan las amplitudes de desplazamiento  $u, w$ , a partir de las expresiones IV.1, son:

$$\begin{aligned} (\lambda_j + G_j) \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} \right] + G_j \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + (\lambda_j + G_j) \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial z} + \omega^2 \rho_j u &= 0 \\ (\lambda_j + G_j) \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + G_j \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right] + (\lambda_j + G_j) \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial z} \right] + \omega^2 \rho_j w &= 0 \end{aligned} \quad (V.1)$$

y los esfuerzos, a partir de IV.3, se definen como

$$\sigma_r = (\lambda_j + 2G_j) \frac{\partial u}{\partial r} + \lambda_j \left[ \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} \right]$$

$$\sigma_\theta = (\lambda_j + 2G_j) \frac{u}{r} + \lambda_j \left[ \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} \right]$$

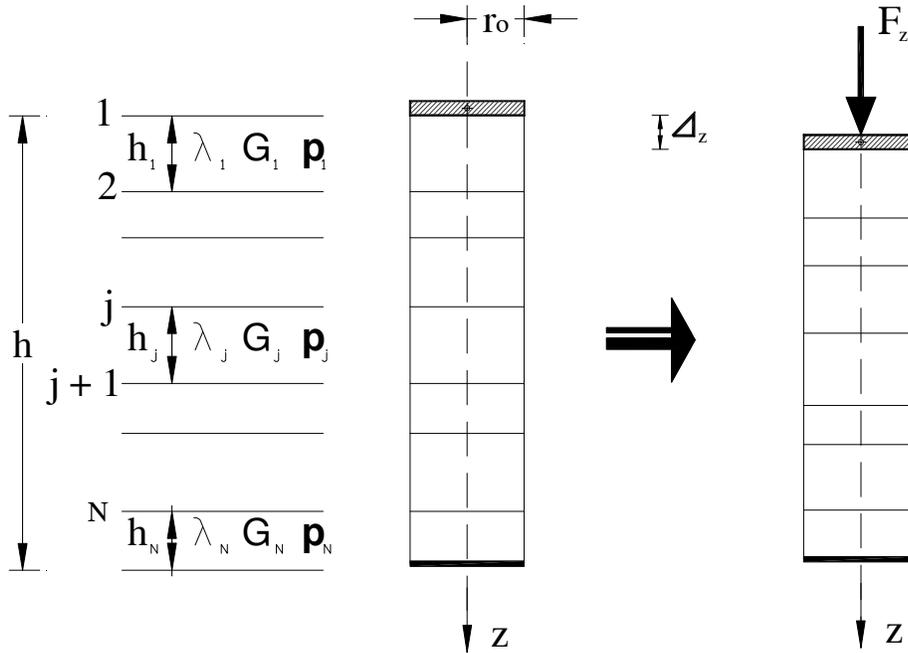
$$\sigma_z = (\lambda_j + 2G_j) \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda_j \left[ \frac{u}{r} + \frac{\partial u}{\partial r} \right]$$

$$\tau_{r\theta} = 0$$

$$\tau_{\theta z} = 0$$

$$\tau_{zr} = G_j \left[ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right]$$

(V.2)



**Figura V.1 Cimentación axisimétrica sometida a vibraciones verticales**

Las amplitudes de los desplazamientos  $u, w$  deben ser continuos en las interfaces de los estratos en  $z = z_j$ , para  $2 \leq j \leq N$ , así como las amplitudes de los esfuerzos  $\sigma_z, \tau_{\theta z}, \tau_{zr}$  que actúan en la dirección vertical, por ello

$$G_{j-1} \left[ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right]_{z=z_j^-} = G_j \left[ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right]_{z=z_j^+} \quad (\text{V.3})$$

Las condiciones de frontera que se tienen para el modo de traslación vertical en la región interior, limitada por  $0 \leq r \leq r_0$  y  $z_{Df} \leq z \leq h$  son:

$$\begin{aligned} u(r, z_{Df}) &= 0 \\ 0 &\leq r \leq r_0 \\ w(r, z_{Df}) &= \Delta z \end{aligned} \quad (\text{V.4})$$

donde  $\Delta z$  es la amplitud de la traslación vertical del cimiento. La base del depósito se considera fija y queda definida por

$$\begin{aligned} u(r, h) &= 0 \\ 0 &\leq r \leq r_0 \\ w(r, h) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{V.5})$$

Los grados de libertad para este sistema son el desplazamiento vertical  $\Delta z$  asociado a la cimentación y los desplazamientos nodales  $u_j, w_j$  que ocurren en  $(r_0, z_j)$  para  $Df + 1 \leq j \leq N$ , y que, particularmente son funciones lineales de  $z$  en cada sustrato.

De acuerdo con las condiciones de frontera establecidas, se tiene que

$$\begin{aligned} u_{Df} &= 0 & w_{Df} &= \Delta z \\ u_{N+1} &= 0 & w_{N+1} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{V.6})$$

Las cargas que corresponden a los grados de libertad son la fuerza  $F_z$  en la cimentación y las fuerzas radiales  $P_{r,j}$  y verticales  $P_{z,j}$  en  $(r_0, z_j)$  para  $Df + 1 \leq j \leq N$ .

La fuerza de interés en esta sección corresponde a la que actúa en la cabeza del cimiento por efecto de desplazamiento en dirección del eje  $z$ , determinada a través de la siguiente relación:

$$F_z = -2\pi \int_0^{r_0} \sigma_z \Big|_{z=0} r dr \quad (\text{V.7})$$

### • Solución Particular

Para estimar la fuerza en la región interior a partir de un desplazamiento vertical unitario  $\Delta z = 1$  de la placa que representa la cabeza de la cimentación bajo las condiciones de frontera inhomogéneas del sistema, las relaciones

$$u(r, z) = 0 \quad (V.8)$$

$$w(r, z) = W(z)$$

se sustituyen en las ecuaciones diferenciales IV.1. Para el estrato  $j$ ,  $W$  debe satisfacer la ecuación diferencial

$$(\lambda_j + 2G_j) \frac{d^2 W}{dz^2} + \omega^2 \rho_j W = 0 \quad (V.9)$$

imponiendo las condiciones de continuidad en las interfaces  $z = z_j$  para  $2 \leq j \leq N$ ,

$$(\lambda_{j-1} + 2G_{j-1}) \frac{dW}{dz} \Big|_{z=z_j^-} = (\lambda_{j-1} + 2G_{j-1}) \frac{dW}{dz} \Big|_{z=z_j^+} \quad (V.10)$$

y las condiciones de frontera en la base de la cabeza del cimiento

$$W(z_{Df}) = 1 \quad (V.11)$$

$$W(h) = 0$$

Para encontrar la solución discreta se debe resolver el sistema

$$[\tilde{G} - \omega^2 \tilde{M}] \tilde{\Delta} = \tilde{F} \quad (V.12)$$

con

$$\Delta_{Df} = 1$$

$$\Delta_j = W(z_j), \quad Df + 1 \leq j \leq N$$

$$F_{Df} = -\sigma_{Df} = -(\lambda_{Df} + 2G_{Df}) \frac{dW}{dz} \Big|_{z=Df}$$

$$F_j = 0, \quad Df + 1 \leq j \leq N$$

donde  $\tilde{G}, \tilde{M}$  son matrices tridiagonales simétricas, ensambladas a partir de las submatrices  $\tilde{G}^j, \tilde{M}^j$ , que se definen como

$$\tilde{G}^j = \frac{\lambda_j + G_j}{h_j} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (V.13)$$

$$\tilde{M}^j = \rho_j h_j \begin{bmatrix} 1/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/3 \end{bmatrix} \quad (V.14)$$

Para este tipo de vibraciones los vectores  $\tilde{\Delta}, \tilde{F}$  se integran al sistema global del Apéndice A.

Al resolver el sistema V.12 y aplicar la expresión V.7, se tienen los elementos necesarios para determinar la fuerza vertical que actúa en la cabeza del cimiento, mediante la relación

$$F_{CABEZA-1} = F_z^{Df} = \pi F_{Df} r_0^2 \quad (\text{V.15})$$

En el Apéndice B se muestran mayores detalles sobre la obtención de la fuerza vertical de la ec.V.15.

### • Solución Homogénea

Con objeto de estudiar la solución en la cimentación debida a los modos de vibración con base y superficie rígida, es necesario imponer la nulidad del desplazamiento vertical, por lo que  $\Delta_z = 0$ . Bajo este escenario, la condición de frontera en la parte superior de la región interior queda establecida como

$$w(r, z_{Df}) = 0 \quad 0 \leq r \leq r_0 \quad (\text{V.16})$$

Cualquier amplitud de desplazamiento  $u, w$  que satisface la ecuación diferencial V.1, las condiciones de continuidad V.3 y las condiciones de frontera V.5 y V.16, se pueden escribir como una superposición de modos. De acuerdo con IV.7 se definen como

$$\begin{aligned} u(r, z) &= kU(z)J_0'(kr) \\ w(r, z) &= -ikW(z)J_0(kr) \end{aligned} \quad (\text{V.17})$$

En estas expresiones se introduce la función de Bessel  $J_0$ , ya que se trata de la región interior comprendida por  $0 \leq r \leq r_0$ .

Al sustituir las ecuaciones V.17 en las ecuaciones V.2, se tiene que el único esfuerzo distinto de cero corresponde a  $\sigma_z$ :

$$\sigma_z = -kJ_0(kr) \left[ i \frac{dW}{dz} (\lambda_j + 2G_j) + kU(z)\lambda_j \right] \quad (\text{V.18})$$

Ante las condiciones establecidas, la fuerza  $F_z$  en dirección del eje  $z$ , se obtiene al sustituir la ecuación V.18 en la V.7, resultando que

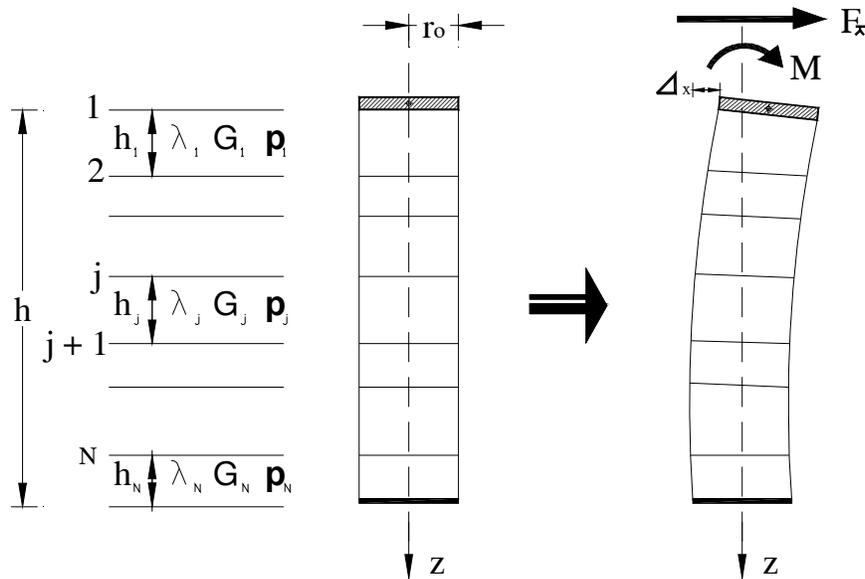
$$F_{CABEZA-2} = F_z = 2\pi r_0 J_1(kr_0) \left[ kU(z)\lambda_j + i \frac{dW}{dz} (\lambda_j + 2G_j) \right] \quad (\text{V.19})$$

donde  $J_1$  es la función de Bessel de primer orden (Abramowitz y Stegun, 1970). Los detalles de este desarrollo se presentan en el Apéndice B.

## V.2 VIBRACIONES HORIZONTALES

Para estudiar el efecto de las vibraciones por traslación horizontal en una cimentación axisimétrica enterrada en un depósito estratificado (figura V.2), se deben tomar en cuenta las siguientes consideraciones:

- Las vibraciones son de tipo armónico y simétricas con respecto a planos verticales
- El número de Fourier asociado a este tipo de vibraciones es  $n = 1$
- El movimiento de la partícula produce desplazamientos en todas direcciones
- Participan los modos generalizados de Love y Rayleigh



**Figura V.2 Cimentación axisimétrica sometida a vibraciones horizontales**

Las amplitudes de los desplazamientos  $u, w, v$  que ocurren en las direcciones radial, axial y tangencial, respectivamente, pueden generalizarse a partir de los casos plano y antiplano mediante las relaciones siguientes:

$$\begin{aligned}
 u(r, \theta, z) &= \bar{u}(r, z) \cos \theta \\
 w(r, \theta, z) &= \bar{w}(r, z) \cos \theta \\
 v(r, \theta, z) &= -\bar{v}(r, z) \sin \theta
 \end{aligned}
 \tag{V.20}$$

donde  $\bar{u}, \bar{w}, \bar{v}$  son las amplitudes de los desplazamientos para los casos de Rayleigh o Love.

Las ecuaciones diferenciales que gobiernan las amplitudes de los desplazamientos  $\bar{u}, \bar{w}, \bar{v}$  en el substrato  $j$ , para  $1 \leq j \leq N$ , se obtienen al sustituir estos valores en las ecuaciones IV.1, que de acuerdo con las consideraciones antes expuestas resultan ser

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} - \frac{2\bar{u}}{r^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} + \frac{2\bar{v}}{r^2} + \frac{1}{1-2\mu_j} \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial r} + \frac{\omega^2}{\beta_j^2} \bar{u} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{v}}{\partial r} - \frac{2\bar{v}}{r^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial z^2} + \frac{2\bar{u}}{r^2} + \frac{1}{1-2\mu_j} \frac{\bar{\varepsilon}}{r} + \frac{\omega^2}{\beta_j^2} \bar{v} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{w}}{\partial r} - \frac{\bar{w}}{r^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial z^2} + \frac{1}{1-2\mu_j} \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial z} + \frac{\omega^2}{\beta_j^2} \bar{w} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{V.21})$$

donde  $\bar{\varepsilon}$  es la dilatación dada por

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} + \frac{\bar{u}}{r} - \frac{\bar{v}}{r} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \quad (\text{V.22})$$

Las amplitudes de los esfuerzos correspondientes se definen con base en las ecuaciones IV.3 por

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \bar{\sigma}_r \cos \theta = \left[ \lambda_j \bar{\varepsilon} + 2G_j \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} \right] \cos \theta \\ \sigma_\theta &= \bar{\sigma}_\theta \cos \theta = \left[ \lambda_j \bar{\varepsilon} + 2G_j \frac{\bar{u}}{r} - 2G_j \frac{\bar{v}}{r} \right] \cos \theta \\ \sigma_z &= \bar{\sigma}_z \cos \theta = \left[ \lambda_j \bar{\varepsilon} + 2G_j \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right] \cos \theta \\ \tau_{r\theta} &= -\bar{\tau}_{r\theta} \text{sen} \theta = -G_j \left[ \frac{\partial \bar{v}}{\partial r} - \frac{\bar{v}}{r} + \frac{\bar{u}}{r} \right] \text{sen} \theta \\ \tau_{\theta z} &= -\bar{\tau}_{\theta z} \text{sen} \theta = -G_j \left[ \frac{\bar{w}}{r} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right] \text{sen} \theta \\ \tau_{zr} &= \bar{\tau}_{zr} \cos \theta = G_j \left[ \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial r} \right] \cos \theta \end{aligned} \quad (\text{V.23})$$

Se debe mantener la continuidad de las amplitudes de desplazamiento  $u, w, v$  y los esfuerzos  $\sigma_z, \tau_{\theta z}, \tau_{zr}$  en el contacto entre substratos, es decir en  $z = z_j$ , para  $2 \leq j \leq N$ ,

$$\begin{aligned}
 \left[ \lambda_{j-1} \bar{\varepsilon} + 2G_{j-1} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right]_{z=z_j^-} &= \left[ \lambda_j \bar{\varepsilon} + 2G_j \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right]_{z=z_j^+} \\
 G_{j-1} \left[ \frac{\bar{w}}{r} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right]_{z=z_j^-} &= G_j \left[ \frac{\bar{w}}{r} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right]_{z=z_j^+} \\
 G_{j-1} \left[ \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial r} \right]_{z=z_j^-} &= G_j \left[ \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial r} \right]_{z=z_j^+}
 \end{aligned} \tag{V.24}$$

La región axisimétrica de estudio se limita por  $0 \leq r \leq r_0$  y  $z_{Df} \leq z \leq h$ . Ante este escenario, las condiciones de frontera prescritas en la superficie de la región interior, es decir, en la cabeza del cimiento, quedan establecidas por las relaciones siguientes

$$\begin{aligned}
 \bar{u}(r, z_{Df}) &= \Delta_x \\
 \bar{w}(r, z_{Df}) &= -r\phi \quad 0 \leq r \leq r_0 \\
 \bar{v}(r, z_{Df}) &= \Delta_x
 \end{aligned} \tag{V.25}$$

siendo  $\Delta_x$  y  $\phi$  las amplitudes de la traslación horizontal en la dirección del eje  $x$  y la rotación alrededor del eje  $y$ , respectivamente, para el sistema de coordenadas  $x, y, z$ .

La base del depósito se considera rígida, por ello, las condiciones de frontera se definen como

$$\begin{aligned}
 \bar{u}(r, h) &= 0 \\
 \bar{w}(r, h) &= 0 \quad 0 \leq r \leq r_0 \\
 \bar{v}(r, h) &= 0
 \end{aligned} \tag{V.26}$$

Los grados de libertad para este sistema son, por una parte, el desplazamiento horizontal  $\Delta_x$  y el giro por rotación  $\phi$  asociados a la cimentación, y por otra, los desplazamientos nodales  $\bar{u}_j, \bar{w}_j, \bar{v}_j$  que ocurren en  $(r_0, z_j)$  para  $Df + 1 \leq j \leq N$ , los cuales son funciones lineales de  $z$  en cada substrato.

Por las condiciones de frontera establecidas en la parte superior e inferior de la región, se tiene que

$$\begin{aligned}
 \bar{u}_{Df} = \bar{v}_{Df} = \Delta_x \quad \bar{w}_{Df} = -r_0\phi \\
 \bar{u}_{N+1} = \bar{w}_{N+1} = \bar{v}_{N+1} = 0
 \end{aligned} \tag{V.27}$$

Las acciones que corresponden a los grados de libertad son, para la cimentación, la fuerza horizontal  $F_x$  y el momento por cabeceo  $M$  actuando en la cabeza del elemento, mientras que para los nodos son las fuerzas radiales  $P_{r,j}$  y verticales  $P_{z,j}$  en  $(r_0, z_j)$  siendo  $Df + 1 \leq j \leq N$ . Las fuerzas consistentes en la cabeza del cimient, se definen a través de las siguientes relaciones

$$F_x = -\pi \int_0^{r_0} \bar{\tau}_{zr} \Big|_{z=0} r dr - \pi \int_0^{r_0} \bar{\tau}_{\theta z} \Big|_{z=0} r dr \quad (\text{V.28})$$

$$M = \pi \int_0^{r_0} \sigma_z \Big|_{z=0} r^2 dr$$

### • Solución Particular

La solución particular que satisface las condiciones de frontera inhomogéneas del sistema, dadas por un desplazamiento horizontal unitario  $\Delta_x = 1$  y giro nulo  $\phi = 0$ , se pueden encontrar al sustituir

$$\begin{aligned} \bar{u}(r, z) &= U(z) \\ \bar{w}(r, z) &= 0 \\ \bar{v}(r, z) &= U(z) \end{aligned} \quad (\text{V.29})$$

en las ecuaciones diferenciales V.21. Para el sustrato  $j$ ,  $U$  debe satisfacer la expresión

$$G_j \frac{d^2 U}{dz^2} + \omega^2 \rho_j U = 0 \quad (\text{V.30})$$

manteniendo las condiciones de continuidad para desplazamientos y esfuerzos a través del contacto entre sustratos, es decir en las interfaces  $z = z_j$  para  $2 \leq j \leq N$ ,

$$G_{j-1} \frac{dU}{dz} \Big|_{z=z_j^-} = G_j \frac{dU}{dz} \Big|_{z=z_j^+} \quad (\text{V.31})$$

y las condiciones de frontera

$$\begin{aligned} U(z_{Df}) &= 1 \\ U(h) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{V.32})$$

Para obtener la solución discreta de la ec.V.30, se debe encontrar la solución al sistema

$$[\tilde{G} - \omega^2 \tilde{M}] \tilde{\Delta} = \tilde{F} \quad (\text{V.33})$$

donde

$$\Delta_{Df} = 1$$

$$\Delta_j = U(z_j), \quad Df + 1 \leq j \leq N$$

$$F_{Df} = -\tau_{Df} = -G_{Df} \left. \frac{dU}{dz} \right|_{z=0}$$

$$F_j = 0, \quad Df + 1 \leq j \leq N$$

donde  $\tilde{G}, \tilde{M}$  son matrices tridiagonales simétricas ensambladas a partir de las submatrices  $\tilde{G}^j, \tilde{M}^j$  que se definen como

$$\tilde{G}^j = \frac{\lambda_j + G_j}{h_j} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{V.34})$$

$$\tilde{M}^j = \rho_j h_j \begin{bmatrix} 1/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/3 \end{bmatrix} \quad (\text{V.35})$$

Los vectores  $\tilde{\Delta}, \tilde{F}$  se incluyen en el sistema matricial global del Apéndice A para este tipo de vibraciones.

Al utilizar las ecuaciones V.28 y resolver el sistema V.33 se pueden determinar la acciones (fuerza y momento) por traslación horizontal y cabeceo acoplado en la cabeza del cimiento, resultando que

$$F_{CABEZA-1} = F_x^{Df} = \pi r_0^2 F_{Df} \quad (\text{V.36})$$

$$M_{CABEZA-1} = M_{Df} = \frac{\pi}{2} r_0^2 G_{Df} (1 - \Delta_{Df+1}) \quad (\text{V.37})$$

### • Solución Homogénea

Para evaluar las acciones en la cabeza de la cimentación debidas a los modos de vibración con base y superficie rígidas, es necesario imponer la nulidad de las amplitudes de la traslación horizontal y el giro por cabeceo, mediante  $\Delta_x = 0$  y  $\phi = 0$ , respectivamente. Bajo este escenario, las condiciones de frontera en la parte superior de la región interior son

$$\begin{aligned} \bar{u}(r, z_{Df}) &= 0 \\ \bar{w}(r, z_{Df}) &= 0 \quad 0 \leq r \leq r_0 \\ \bar{v}(r, z_{Df}) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{V.38})$$

Cualquier amplitud de desplazamiento  $\bar{u}, \bar{w}, \bar{v}$  que satisface las ecuaciones diferenciales V.21, las condiciones de continuidad V.24 y las condiciones de frontera V.26 y V.38, pueden escribirse como una superposición de modos, que de acuerdo con IV.6 y IV.7 se expresan como

$$\begin{aligned}\bar{u}(r, z) &= kU(z)J_1'(kr) \\ \bar{w}(r, z) &= -ikW(z)J_1(kr)\end{aligned}\tag{V.39a}$$

$$\bar{v}(r, z) = \frac{1}{r}U(z)J_1(kr)$$

y

$$\begin{aligned}\bar{u}(r, z) &= \frac{1}{r}V(z)J_1(kr) \\ \bar{w}(r, z) &= 0\end{aligned}\tag{V.39b}$$

$$\bar{v}(r, z) = kV(z)J_1'(kr)$$

correspondiendo las ecuaciones V.39a al caso plano, o de Rayleigh, y las V.39b al antiplano, o de Love. En ambas condiciones, para la región interior, comprendida por  $0 \leq r \leq r_0$ , se introduce la función de Bessel de primer orden  $J_1$ .

Para calcular las acciones que actúan en la cabeza del cimiento, es necesario estudiar de forma independiente los casos plano y antiplano.

### ***Problema plano***

Al sustituir las ecuaciones V.39a, que corresponden al caso plano o de Rayleigh, en las ecuaciones de esfuerzos V.23, se tiene que

$$\bar{\sigma}_r = 0$$

$$\bar{\sigma}_\theta = 0$$

$$\bar{\sigma}_z = -kJ_1(kr) \left[ kU(z)\lambda_j + i \frac{dW}{dz} (\lambda_j + 2G_j) \right]\tag{V.40}$$

$$\bar{\tau}_{r\theta} = 0$$

$$\bar{\tau}_{\theta z} = \frac{1}{r} J_1(kr) G_j \left( \frac{dU}{dz} - ikW(z) \right)$$

$$\bar{\tau}_{zr} = kJ_1'(kr)G_j \left( \frac{dU}{dz} - ikW(z) \right)$$

Con las condiciones de frontera y continuidad en interfaces, la fuerza y el momento correspondientes a la traslación horizontal ( $F_{xP}$ ) en dirección del eje  $x$ , y el giro por cabeceo acoplado ( $M_P$ ) alrededor del eje  $y$ , respectivamente, se obtienen al sustituir los valores de esfuerzos determinados por V.40 en las ecuaciones V.28, resultando que

$$F_{CABEZA-2P} = F_{xP} = -\pi r_0 J_1(kr_0) G_j \left( \frac{dU}{dz} - ikW(z) \right) \quad (V.41)$$

$$M_{CABEZA-2P} = M_P = -\pi r_0^2 J_2(kr_0) \left[ kU(z)\lambda_j + i \frac{dW}{dz} (\lambda_j + 2G_j) \right]$$

donde  $J_1, J_2$ , representan la función de Bessel de primer y segundo orden (Abramowitz y Stegun, 1970), respectivamente. Los detalles de estos desarrollos se presentan en el Apéndice B.

### ***Problema antiplano***

Sustituyendo ahora las ecuaciones V.39b, del caso antiplano o de Love, en las ecuaciones de esfuerzos V.23, se tiene que

$$\bar{\sigma}_r = 0$$

$$\bar{\sigma}_\theta = 0$$

$$\bar{\sigma}_z = 0$$

$$\bar{\tau}_{r\theta} = 0$$

(V.42)

$$\bar{\tau}_{\theta z} = kJ_1'(kr) \frac{dV}{dz} G_j$$

$$\bar{\tau}_{zr} = \frac{1}{r} J_1(kr) \frac{dV}{dz} G_j$$

De igual forma, manteniendo las condiciones de frontera y continuidad, las acciones correspondientes a la traslación horizontal ( $F_{xA}$ ) en dirección del eje  $x$  y el giro por cabeceo acoplado ( $M_A$ ) alrededor del eje  $y$ , se determinan aplicando las ecuaciones V.28 con los esfuerzos evaluados en V.42, de donde se obtienen los siguientes resultados

$$F_{CABEZA-2A} = F_{xA} = -\pi r_0 J_1(kr_0) \frac{dV}{dz} G_j$$

(V.43)

$$M_{CABEZA-2A} = M_A = 0$$

El detalle de estos desarrollos se presenta en el Apéndice B.

### V.3 VIBRACIONES TORSIONALES

El estudio de las vibraciones torsionales inducidas en una cimentación axisimétrica enterrada en un depósito estratificado (figura V.3), se debe desarrollar bajo el siguiente marco condicional:

- Las vibraciones armónicas son antisimétricas con respecto a un plano vertical.
- El número de Fourier asociado a este tipo de vibraciones es  $n = 0$
- El movimiento de la partícula es perpendicular a los planos verticales
- Sólo existe la amplitud  $v$  en función de  $r, z$

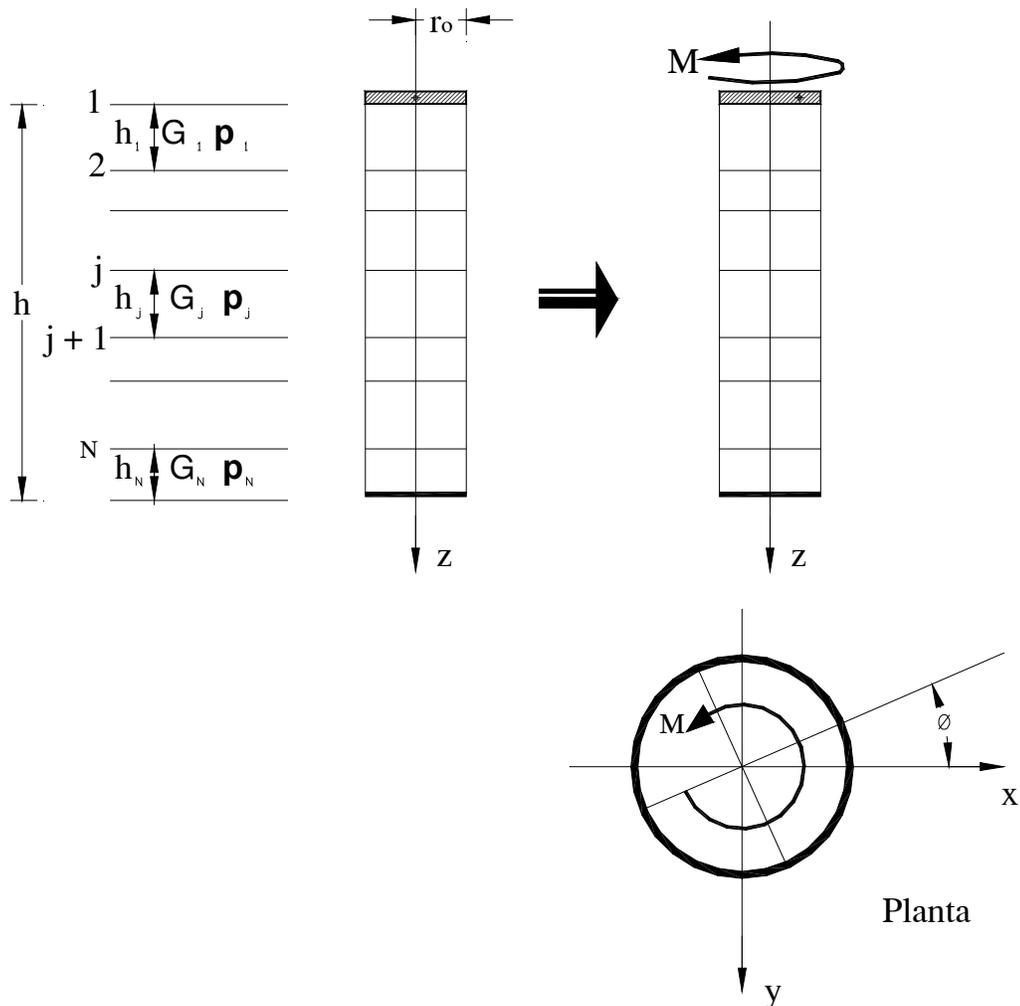


Figura V.3 Cimentación axisimétrica sometida a vibraciones torisonales

La ecuación diferencial que controla la amplitud  $v$  en el sustrato  $j$  para  $1 \leq j \leq N$  se determina a partir de las ecuaciones IV.1 y las condiciones anteriores, resultando que

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{v}{r^2} + \frac{\omega^2}{\beta_j^2} v = 0 \quad (\text{V.44})$$

Las amplitudes de esfuerzos correspondientes se definen partir de las ecs. IV.3, resultando que

$$\begin{aligned} \sigma_r &= 0 \\ \sigma_\theta &= 0 \\ \sigma_z &= 0 \\ \tau_{r\theta} &= G_j \left[ \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right] \\ \tau_{\theta z} &= G_j \frac{\partial v}{\partial z} \\ \tau_{zr} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{V.45})$$

De acuerdo con las condiciones con que fue concebido el modelo del depósito, se debe mantener la continuidad del desplazamiento  $v$  en las interfaces de los sustratos, así como los esfuerzos en la dirección vertical  $\sigma_z, \tau_{\theta z}, \tau_{zr}$ . Por ello, para  $z = z_j$ , con  $2 \leq j \leq N$  se tiene que

$$G_{j-1} \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{z=z_j^-} = G_j \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{z=z_j^+} \quad (\text{V.46})$$

Dado que la geometría de la cimentación es axisimétrica con radio  $r_0$ , la región interior, bajo la cabeza del cimentación se limita en el plano horizontal por  $0 \leq r \leq r_0$  y en la dirección vertical por  $z_{Df} \leq z \leq h$ , considerando a  $Df$  como el índice que corresponde al sustrato donde descansa la cabeza del pilote y que  $h$  es la coordenada de la base del depósito. Los grados de libertad involucrados en el sistema son el giro  $\phi$  de la cimentación y los desplazamientos nodales  $v_j$  que ocurren en  $(r_0, z_j)$  para  $Df + 1 \leq j \leq N$ , siendo  $N$  el número de sustratos.

Para el modo en torsión, el movimiento inducido por la cimentación en la región interior, está definido por la expresión

$$v(r, z_{Df}) = r\phi, \quad 0 \leq r \leq r_0 \quad (\text{V.47})$$

siendo  $\phi$  la amplitud de la rotación del cimientto, que se considera positiva en sentido antihorario.

La condición de frontera rígida en la base del depósito queda establecida mediante

$$v(r, h) = 0, \quad 0 \leq r \leq r_0 \quad (\text{V.48})$$

Con estas condiciones de frontera, los desplazamientos nodales en la cabeza de la cimentación y en la base del depósito están definidos por  $v_{Df} = v(r_0, z_{Df}) = r_0 \phi$  y  $v_{N+1} = 0$ , respectivamente.

La fuerza asociada con el giro de la cimentación es el momento generado por el efecto de torsión, determinado a través de la relación

$$M = -2\pi \int_0^{r_0} \tau_{\theta z} \Big|_{z=0} r^2 dr \quad (\text{V.49})$$

### • Solución Particular

Con el propósito de determinar la fuerza que se genera por un giro unitario, se resuelve la solución particular que satisfaga las condiciones de frontera inhomogéneas del sistema estableciendo que  $\phi = 1$ . Esta solución se puede encontrar al sustituir la relación

$$v(r, z) = rV(z) \quad (\text{V.50})$$

Aplicando la ecuación diferencial V.44, el desplazamiento  $V$  debe satisfacer la expresión siguiente para el substrato  $j$

$$G_j \frac{d^2 V}{dz^2} + \omega^2 \rho_j V = 0 \quad (\text{V.51})$$

Con las condiciones de continuidad en las interfaces de los substratos, en que  $z = z_j$  para  $2 \leq j \leq N$ , se tiene

$$G_{j-1} \frac{dv}{dz} \Big|_{z=z_j^-} = G_j \frac{dv}{dz} \Big|_{z=z_j^+} \quad (\text{V.52})$$

Además se tienen las condiciones de frontera

$$\begin{aligned} V(z_{Df}) &= 1 \\ V(h) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{V.53})$$

Para encontrar la solución discreta correspondiente, se resuelve el sistema

$$[\tilde{G} - \omega^2 \tilde{M}] \tilde{\Delta} = \tilde{F} \quad (\text{V.54})$$

con

$$\begin{aligned}\Delta_{Df} &= 1 \\ \Delta_j &= V(z_j), \quad Df + 1 \leq j \leq N \\ F_{Df} &= -\tau_{Df} = -G_{Df} \left. \frac{dV}{dz} \right|_{z=Df} \\ F_j &= 0, \quad Df + 1 \leq j \leq N\end{aligned}$$

donde  $\tilde{G}, \tilde{M}$  son las mismas matrices tridiagonales simétricas definidas para el problema antiplano. Adicionalmente los vectores  $\tilde{\Delta}, \tilde{F}$  se incluyen dentro del vector independiente del sistema matricial integral.

Al resolver el sistema de la ecuación V.54, el momento que ocurre en la cabeza de la cimentación se puede determinar a partir de la expresión V.49, mediante,

$$M_{CABEZA-1} = M_{Df} = \frac{\pi}{2} F_{Df} r_0^4 \quad (\text{V.55})$$

Mayores detalles sobre la obtención de la ec.V.55 se presentan en el Apéndice B.

### • Solución Homogénea

Para la solución en la cabeza de la cimentación debida a los modos de vibración con base y superficie rígidas, es necesario imponer la nulidad de los desplazamientos por torsión. Para ello se hace  $\phi = 0$ . Así la condición en la frontera superior de la región interior queda establecida como

$$v(r, z_{Df}) = 0 \quad 0 \leq r \leq r_0 \quad (\text{V.56})$$

Cualquier amplitud de desplazamiento  $v$  que satisface la ecuación diferencial V.44, las condiciones de continuidad V.46 y las condiciones de frontera V.48 y V.56, puede escribirse como una superposición de modos. De acuerdo con IV.6 esto se expresa como

$$v(r, z) = kV(z)J'_0(kr) \quad (\text{V.57})$$

donde se introduce el número de onda  $k$  y la función de Bessel  $J_0$ , ya que se trata de la región interior comprendida en  $0 \leq r \leq r_0$ .

Al sustituir la ecuación V.57 en las expresiones V.45 de esfuerzos, se tiene que el único valor diferente de cero es

$$\tau_{\theta z} = kJ'_0(kr) \frac{dV}{dz} G_j \quad (\text{V.58})$$

Bajo estas condiciones, el momento por torsión  $M$  alrededor del eje  $z$  se obtiene al sustituir la ecuación V.58 en V.49, resultando que

$$M_{\text{CABEZA-2}} = M = 2\pi r_0^2 J_2(kr_0) \frac{dV}{dz} G_j \quad (\text{V.59})$$

donde  $J_2$  es la función de Bessel de segundo orden (Abramowitz y Stegun, 1970). El detalle del desarrollo para obtener la ec.V.59 se muestra en el Apéndice B.

#### V.4 ACCIONES EN LA PARED DEL CIMIENTO

La fuerza total generada en la frontera vertical suelo-pared del cimiento se estima a partir de las fuerzas nodales consistentes determinadas en la región interior con las expresiones indicadas en la Sección IV.2, previa solución del sistema global del Apéndice A.

Con base en el vector de fuerzas nodales (ec. IV.27), se suman las acciones de los nodos incluidos hasta la profundidad de desplante y se integran en la superficie cilíndrica de la cimentación; sin embargo, las fuerzas son función de las vibraciones impuestas: torsionales, verticales y horizontales.

Para las vibraciones verticales, la expresión que representa a la fuerza integrada en la superficie perimetral del cimiento es la siguiente

$$F_{\text{PARED}} = -2\pi \sum_{j=1}^{Df} F_j(w) \quad (\text{V.60})$$

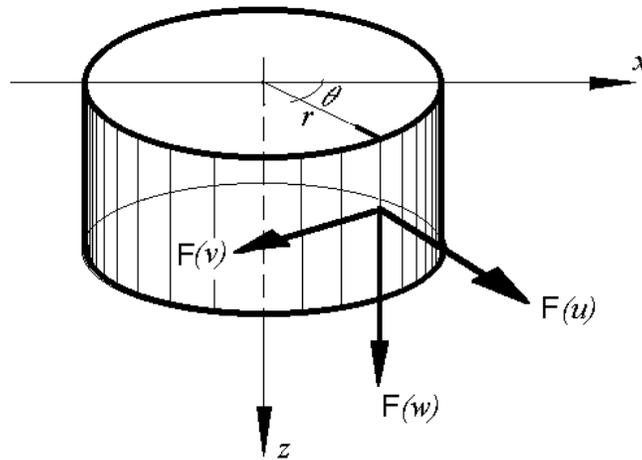
Las acciones en la pared de la cimentación para vibraciones horizontales son la fuerza:

$$F_{\text{PARED}} = -\pi \left( \sum_{j=1}^{Df} F_j(u) + \sum_{j=1}^{Df} F_j(v) \right) \quad (\text{V.61a})$$

y el momento acoplado por cabeceo,

$$M_{\text{PARED}} = -\pi \left[ (z_{Df} - z_j) \left( \sum_{j=1}^{Df} F_j(u) + \sum_{j=1}^{Df} F_j(v) \right) + R \sum_{j=1}^{Df} F_j(w) \right] \quad (\text{V.61b})$$

En las ecuaciones anteriores  $F_j(u)$ ,  $F_j(v)$ ,  $F_j(w)$  representan las fuerzas que corresponden al nodo  $j$  en las direcciones radial, tangencial y vertical, respectivamente (figura V.4).



**Figura V.4 Acciones en la pared del pilote o pila**

Mayores detalles sobre los desarrollos de las expresiones V.59, V.60 y V.61 se indican al final de cada sección del Apéndice B.

Se destaca que, para el caso de estudio se analizan las acciones actuando en la cabeza del pilote o pila, considerada como una placa rígida con profundidad de desplante nula. Con este modelo las paredes del cemento se asumen despreciables por corresponder con el espesor de la placa.

# VALIDACIÓN DEL MÉTODO

## VI.1 EFECTIVIDAD DEL MÉTODO

Con el fin de evaluar los resultados obtenidos con el método propuesto, se han calculado los coeficientes de rigidez y de amortiguamiento, dependientes de la frecuencia, para un depósito estratificado con una cimentación enterrada bajo dos escenarios estudiados por otros autores. Se destaca que estos casos corresponden a cimentaciones cilíndricas superficiales; sin embargo, se han hecho las consideraciones necesarias para que los pilotes analizados sean coincidentes con esta geometría.

Los depósitos de suelo estudiados se dividieron en estratos con propiedades y características geométricas iguales, representando así a los depósitos homogéneos e isotrópicos analizados por otros autores. En los modelos analizados se considera una cimentación cilíndrica, rígida y rugosa, en perfecto contacto con el suelo.

Las variables geométricas que controlan el sistema son: la profundidad del depósito  $H$ , la profundidad de enterramiento  $D$  y el radio de la cimentación  $R$ . Estos parámetros se aplican a la normalización de las dimensiones del sistema. Como se indicó, para el caso de cimentaciones profundas, únicamente se considera como elemento completamente rígido a su cabeza, siendo la profundidad de desplante de esta placa siempre nula. Por otra parte, las variables materiales que participan son la relación de Poisson  $\mu$  y la fracción de amortiguamiento crítico del suelo  $\zeta$ .

La función de impedancia para los diferentes modos de vibración se normalizó atendiendo a lo siguiente:

- Vibraciones Verticales  $\frac{K_{zz}(\eta)}{GR} = \frac{K_{zz}^0}{GR} (k(\eta) + i\eta c(\eta))\xi$  (VI.1)

- Vibraciones Horizontales  $\frac{K_{xx}(\eta)}{GR} = \frac{K_{xx}^0}{GR} (k(\eta) + i\eta c(\eta))\xi$  (VI.2)

- Vibraciones Torsionales  $\frac{K_u(\eta)}{GR^3} = \frac{K_u^0}{GR^3} (k(\eta) + i\eta c(\eta))\xi$  (VI.3)

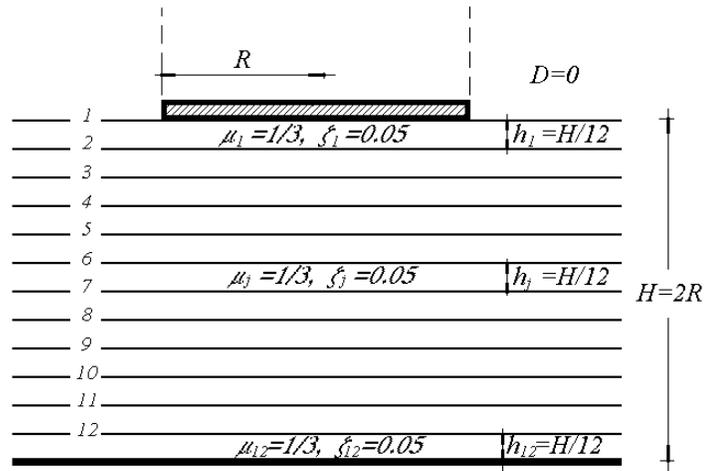
Para los casos estudiados, se ha empleado el amortiguamiento con comportamiento histerético, por lo que en las expresiones anteriores

$$\xi = (1 + i2\zeta) \quad (VI.4)$$

Bajo las consideraciones expuestas, el caso A de estudio se compone por un depósito formado por doce estratos sobre el que yace la cimentación. Para este modelo, las relaciones adimensionales entre

las variables geométricas corresponden a  $H/R = 2$  y  $D/R = 0$ , mientras que las propiedades materiales se consideraron como  $\mu = 1/3$  y  $\zeta = 5\%$  (figura VI.1). La rigidez estática y la configuración de los coeficientes de rigidez y amortiguamiento para este caso, fueron determinadas por Luco y Westmann (1971) y posteriormente por Tassoulas y Kausel (1983).

Las rigideces estáticas para el escenario expuesto se determinaron utilizando el método propuesto y se compararon con las obtenidas por los otros autores. Los resultados se muestran en la tabla VI.1



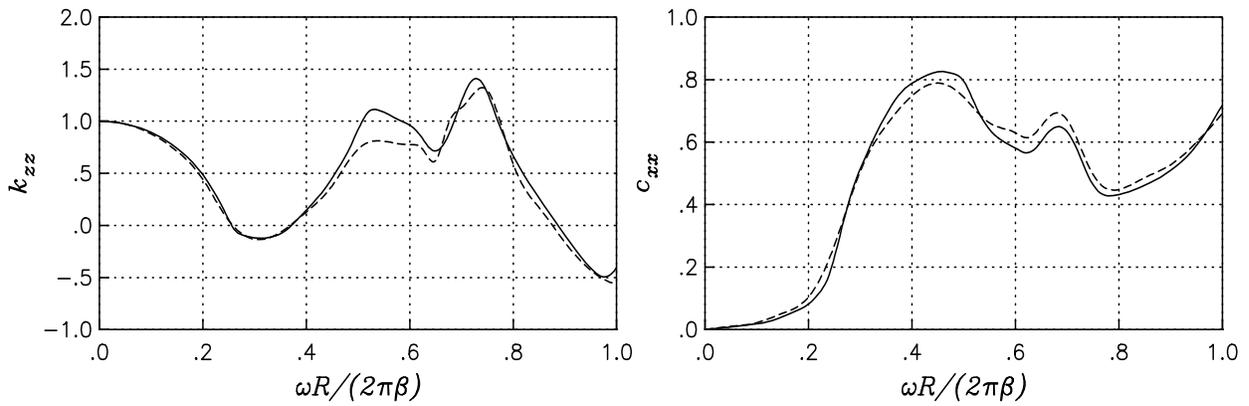
**Figura VI.1 Configuración geométrica y material del problema estudiado por Luco y Westmann (1971) y Tassoulas y Kausel (1983)**

**Tabla VI.1 Rigideces Estáticas para  $H/R = 2$ ,  $D/R = 0$  y  $\mu = 1/3$**

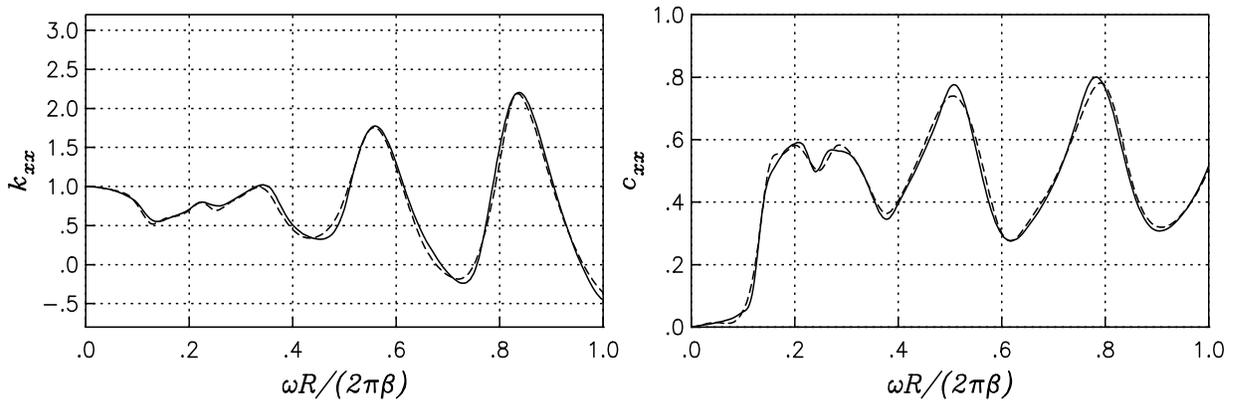
<i>Rigidez estática normalizada</i>	<i>Luco y Westmann, Kausel y Tassoulas</i>	<i>Método Propuesto</i>
$K_{zz}^0 / GR$	10.37	10.93
$K_{xx}^0 / GR$	6.36	6.47
$K_{tt}^0 / GR^3$	5.79	5.79

La variación de los coeficientes de rigidez  $k$  y amortiguamiento  $c$  con la frecuencia normalizada  $\eta/2\pi$  para los modos en vibración vertical, horizontal y torsional, se muestra en las figuras VI.2, VI.3 y VI.4, respectivamente. En ellas, las curvas con línea continua corresponden a las evaluadas con el método propuesto y las discontinuas coinciden con las obtenidas por Luco y Westmann (1971) y Tassoulas y Kausel (1983).

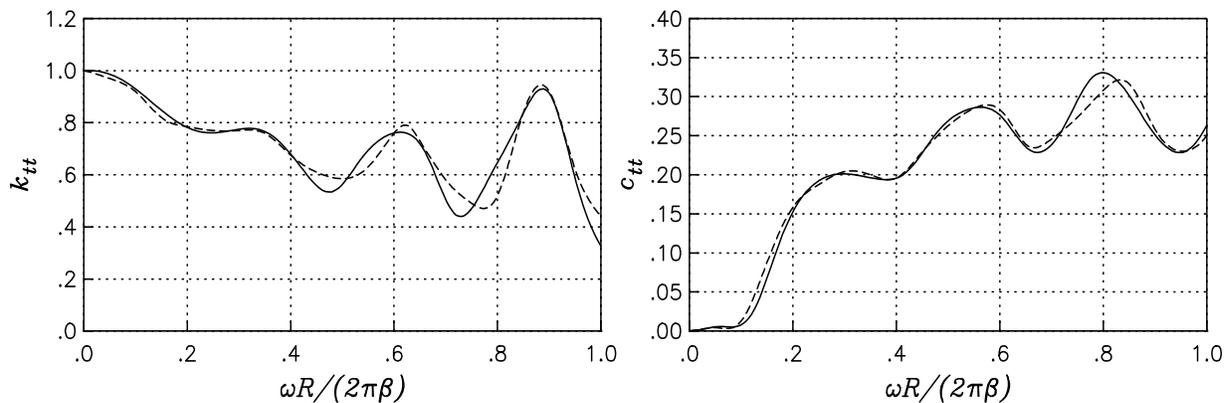
Como se puede observar, los coeficientes de rigidez y amortiguamiento evaluados con el método propuesto reproducen razonablemente los resultados obtenidos por Luco y Westmann, y Tassoulas y Kausel.



**Figura VI.2** Coeficientes de rigidez y amortiguamiento para sistemas suelo-cimentación ante vibraciones verticales para  $H/R = 2$ ,  $D/R = 0$  y  $\mu = 1/3$ ; método propuesto (—) y Luco y Westmann (1971) y Tassoulas y Kausel (1983) (----)



**Figura VI.3** Coeficientes de rigidez y amortiguamiento para sistemas suelo-cimentación ante vibraciones horizontales para  $H/R = 2$ ,  $D/R = 0$  y  $\mu = 1/3$ ; método propuesto (—) y Luco y Westmann (1971) y Tassoulas y Kausel (1983) (----)

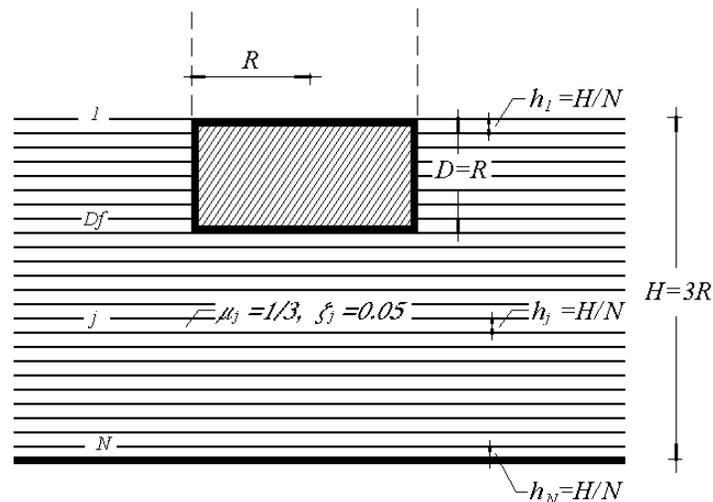


**Figura VI.4** Coeficientes de rigidez y amortiguamiento para sistemas suelo-cimentación ante vibraciones torsionales para  $H/R = 2$ ,  $D/R = 0$  y  $\mu = 1/3$ ; método propuesto (—) y Luco y Westmann (1971) y Tassoulas y Kausel (1983) (----)

Para el caso B de estudio se introdujo el efecto de enterramiento de la cimentación en el depósito estratificado. Para esta condición, las variables materiales se mantienen:  $\mu = 1/3$  y  $\zeta = 5\%$  y, las relaciones adimensionales entre las variables geométricas corresponden a  $H/R = 3$  y  $D/R = 1$  (figura VI.5). Las funciones de impedancia para este escenario fueron evaluadas por Kausel y Ushijima en 1979.

La configuración de las curvas que describe la variación de los coeficientes de rigidez y amortiguamiento obtenidos con el método propuesto, se compara con la determinada por Kausel y Ushijima (1979). Estos resultados se muestran en las figuras VI.6, VI.7 y VI.8 para los modos vertical, horizontal y torsional, respectivamente. En ellas la línea continua corresponde al método presentado en este trabajo y la línea discontinua a lo obtenido por Kausel y Ushijima.

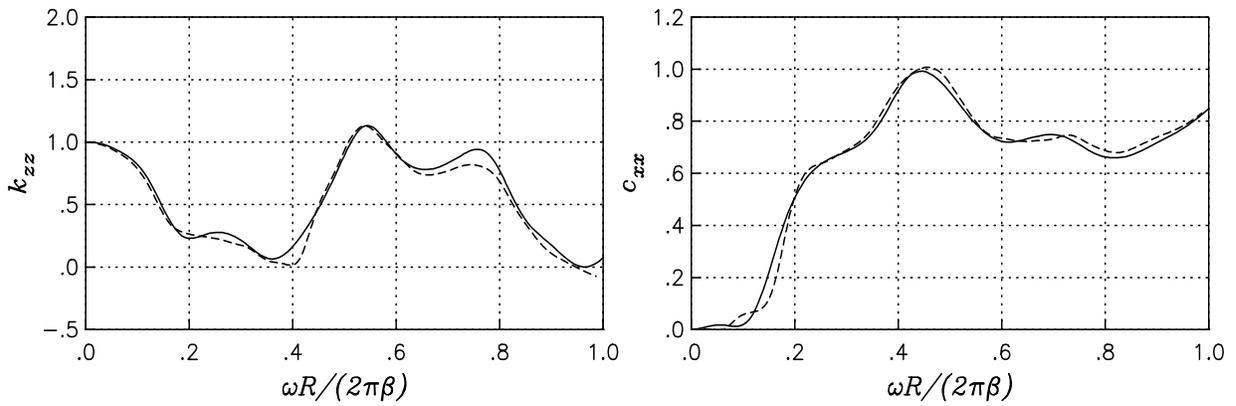
Se observa que las diferencias entre las curvas de los coeficientes dinámicos mostradas en las figuras VI.6, VI.7 y VI.8 son mínimas, salvo para la zona de alta frecuencia correspondiente a los valores de los coeficientes de rigidez en vibración horizontal. Esta diferencia se atribuye a la variación entre el número de estratos considerados en el método propuesto y el desconocido que utilizaron los autores de referencia.



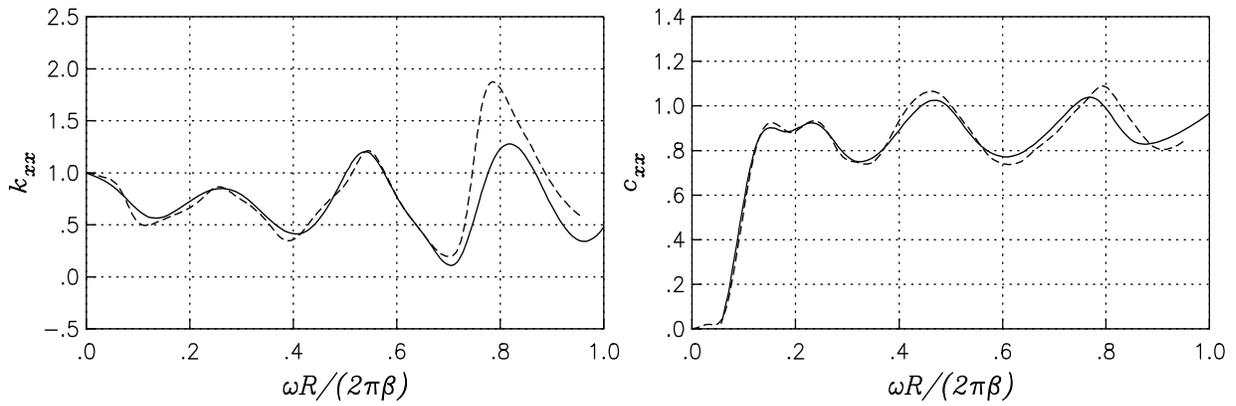
**Figura VI.5 Configuración geométrica y material del problema estudiado por Kausel y Ushijima (1979)**

## VI.2 CIMENTACIONES PROFUNDAS

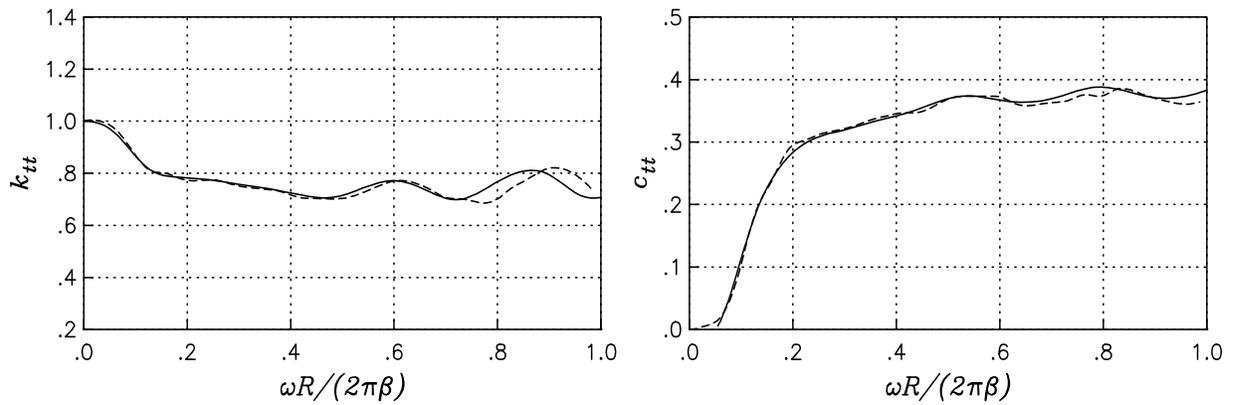
Para el caso B analizado (figura VI.5) se introdujo el efecto del enterramiento de la cimentación en el depósito estratificado y su esbeltez. Las variables materiales se mantienen:  $\mu = 1/3$  y  $\zeta = 5\%$ . Las relaciones adimensionales entre las variables geométricas se indican en la figura VI.9 y Tabla VI.2, en función de la geometría inicialmente planteada en la figura VI.5, tomando como parámetro normalizador el radio  $R$ .



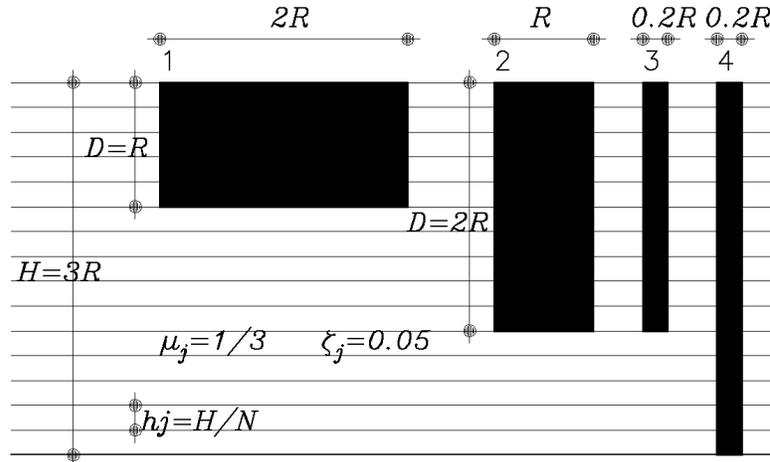
**Figura VI.6** Coeficientes de rigidez y amortiguamiento para sistemas suelo-cimentación ante vibraciones verticales para  $H/R = 3$ ,  $D/R = 1$  y  $\mu = 1/3$ ; método propuesto (—) y Kausel y Ushijima (1979) (----)



**Figura VI.7** Coeficientes de rigidez y amortiguamiento para sistemas suelo-cimentación ante vibraciones horizontales para  $H/R = 3$ ,  $D/R = 1$  y  $\mu = 1/3$ ; método propuesto (—) y Kausel y Ushijima (1979) (----)



**Figura VI.8** Coeficientes de rigidez y amortiguamiento para sistemas suelo-cimentación ante vibraciones torsionales para  $H/R = 3$ ,  $D/R = 1$  y  $\mu = 1/3$ ; método propuesto (—) y Kausel y Ushijima (1979) (----)



**Figura VI.9 Configuración geométrica y material de los casos de estudio**

**Tabla VI.2 Relaciones geométricas en los casos de estudio**

<i>Caso</i>	<i>Radio</i>	<i>Empotramiento D</i>	<i>Espesor H</i>	<i>Esbeltez</i>
1*	$R$	$R$	$3R$	$0.5$
2	$R/2$	$2R$	$3R$	$2$
3	$R/10$	$2R$	$3R$	$10$
4	$R/10$	$3R$	$3R$	$15$

\* Nota: Caso 1=Caso A estudiado por Kausel y Ushijima (1979)

Para el caso 1, igual al caso A, la configuración de los coeficientes de rigidez y amortiguamiento obtenida con el método propuesto se compara nuevamente con las determinadas por Kausel y Ushijima (1979). Estos resultados se muestran en las figuras VI.10 y VI.11 para los modos horizontal y vertical, respectivamente. En ellas la línea continua corresponde al método presentado en este trabajo y la línea discontinua a lo obtenido por Kausel y Ushijima.

Los casos 2, 3 y 4 de la figura VI.9 representan configuraciones geométricas asociadas a cimentaciones de tipo profundo. Los resultados del método propuesto aplicado a estos casos se muestran en las mismas figuras VI.10 y VI.11, donde se presenta el cambio en la configuración de los coeficientes de rigidez y amortiguamiento para cimentaciones con profundidad de desplante mayor y cada vez más esbeltos (casos 2, 3 y 4 de la figura VI.9 y Tabla VI.2)).

Los elementos de cimentación correspondientes a los casos 3 y 4 se asocian con un pilote de fricción y con un pilote de punta, respectivamente.

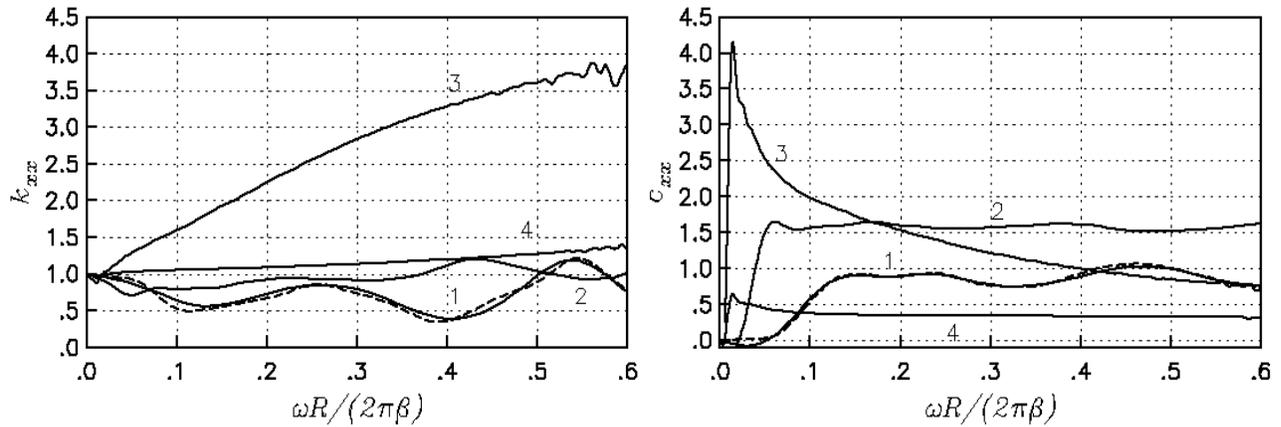


Figura VI.10 Coeficientes de rigidez y amortiguamiento para sistemas suelo-cimentación ante vibraciones horizontales; método propuesto (—) y otros autores (----, caso 1).

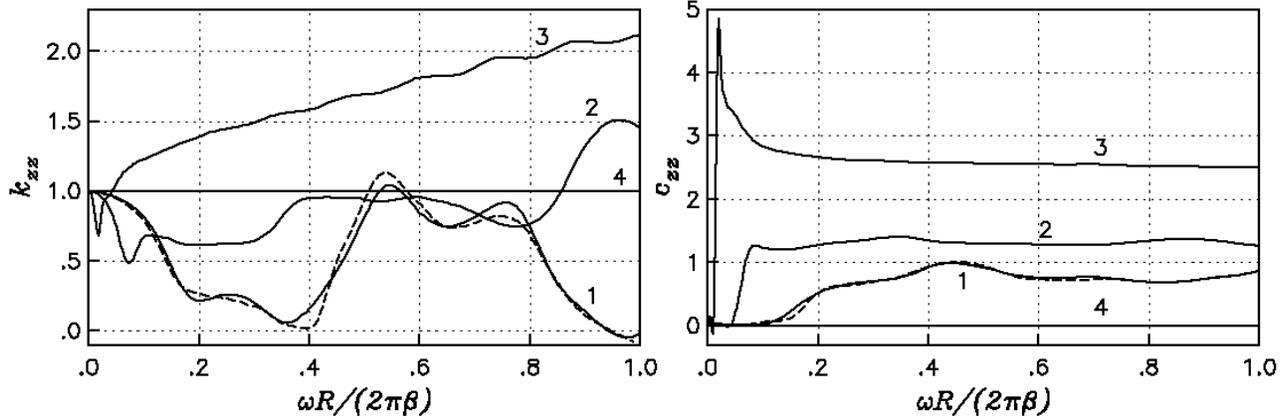


Figura VI.11 Coeficientes de rigidez y amortiguamiento para sistemas suelo-cimentación ante vibraciones verticales; método propuesto (—) y otros autores (----, caso 1).

## EFECTO DE GRUPO

---

Para el estudio de la respuesta dinámica de un grupo de pilotes es válido aplicar el procedimiento de superposición propuesto por Poulos (1968, 1971), donde se considera el efecto que produce un pilote sobre otro. Roesset (1984) y otros, han demostrado que los resultados obtenidos al aplicar la superposición de Poulos a problemas dinámicos son una buena aproximación de las soluciones rigurosas. Por lo tanto, la respuesta de un grupo de pilotes se puede determinar con buena aproximación al emplear "factores de interacción" obtenidos a partir del efecto producido entre dos pilotes.

Para calcular la influencia que produce un pilote  $p$  (activo) en un pilote  $q$  (pasivo), es válido remplazar al pilote  $q$  por su eje, despreciando sus dimensiones (Sánchez-Salineró, 1983; Roesset 1984). En esta consideración se toma en cuenta que las deformaciones en el contorno del pilote  $q$ , provocadas por las ondas generadas del pilote  $p$ , se encuentran prácticamente en fase.

Con el fin de aplicar los factores de interacción a un grupo de pilotes, Dobry y Gazetas (1988) proponen un método simple para el cálculo de rigideces y amortiguamientos dinámicos para pilotes flotantes. Los resultados de este método práctico se aplican para los diferentes modos de vibración del sistema.

### VII.1 VIBRACIÓN VERTICAL

El efecto que produce la vibración vertical de un pilote  $p$  en la respuesta de un pilote  $q$ , se puede evaluar mediante el factor de interacción dinámica  $\alpha_v$ , dependiente de la frecuencia y definido como

$$\alpha_v(w) = \frac{w_{qp}}{w_{qq}} \quad (\text{VII.1})$$

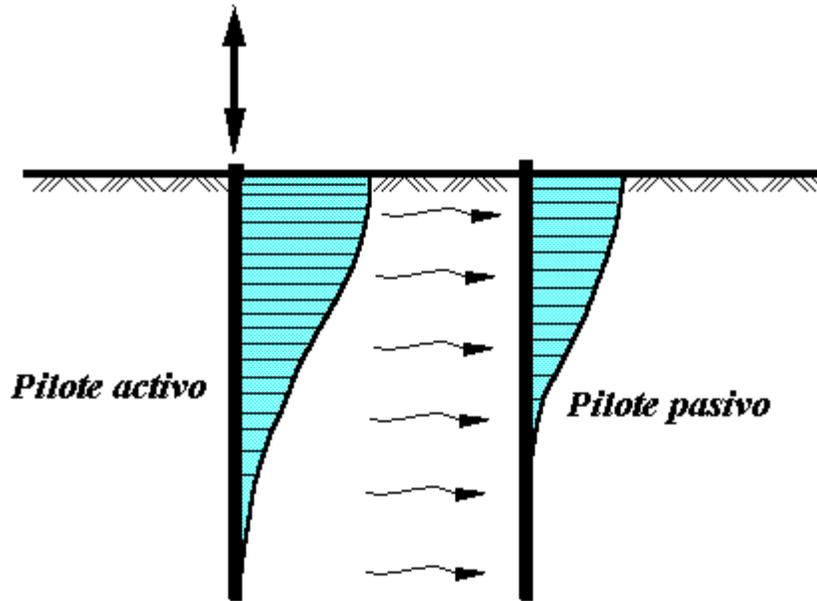
donde  $w_{qp}$  es el desplazamiento adicional del pilote  $q$  causado por el pilote  $p$  en vibración y  $w_{qq}$  es el desplazamiento del pilote originado por su propia carga dinámica (figura VII.1).

El campo de desplazamiento dinámico en el entorno de un pilote  $p$  en vibración se define por la expresión,

$$w(r) \approx A \frac{1}{\sqrt{r}} e^{-\zeta \omega r / \beta} e^{i\omega(t-r/\beta)} \quad (\text{VII.2})$$

donde  $A = A(z)$  es una amplitud constante y  $r$  es la distancia horizontal entre el eje del pilote  $p$  y el punto de interés.

Para una distancia  $r = S$ , coincidente con el eje del pilote pasivo  $q$ , se determina el desplazamiento  $w_{qp}$ , el que resulta prácticamente igual al del perímetro del mismo pilote. Por otra parte, al considerar que  $r = r_0 = d/2$ , se obtiene el desplazamiento  $w_{qq}$  en el perímetro del pilote  $q$  bajo su propia carga dinámica, donde se desprecia el retraso de la vibración entre el centro y la periferia del elemento.



**Figura VII.1 Distribución de amplitudes de desplazamiento a lo largo del fuste de un pilote (activo) oscilando y de un pilote vecino (pasivo)**

Por definición, la expresión aproximada propuesta por Dobry y Gazetas (1988) para la función de interacción ante vibraciones verticales se representa por,

$$\alpha_v \approx \left( \frac{S}{r_0} \right)^{-0.5} e^{-\zeta \omega S / \beta} e^{-i \omega S / \beta} \quad (\text{VII.3})$$

A partir de esta ecuación y en función de la impedancia para un pilote individual, se calcula la respuesta de un grupo de pilotes. Por ejemplo, para una excitación vertical  $P e^{i \omega t}$  aplicada a un pilote de un grupo de  $2 \times 2$ , el desplazamiento  $X_1 e^{i \omega t}$  para el pilote 1 incluyendo la acción del resto de los pilotes se calcula como

$$X_1 = X_{11} + 2X_{12} + X_{14}$$

$$X_1 = X_{11} (1 + 2\alpha_{12} + \alpha_{14}) \quad (\text{VII.4})$$

$$X_1 = \frac{P}{\tilde{K}_v} \left[ 1 + 2\alpha_v(S) + \alpha_v(S\sqrt{2}) \right]$$

con ello la impedancia total del grupo de cuatro pilotes  $\tilde{K}_v^G$ , a partir de la impedancia de cada pilote  $\tilde{K}_v$ , se determina por

$$\tilde{K}_v^G = \frac{4P}{X_1} = \frac{4\tilde{K}_v}{1 + 2\alpha_v(S) + \alpha_v(S\sqrt{2})} \quad (\text{VII.5})$$

en estas ecuaciones  $\alpha_v(S)$  es el factor de interacción para los pilotes separados entre sí una distancia  $S$  y  $\alpha_v(S\sqrt{2})$  es el factor correspondiente a los pilotes en diagonal separados  $S\sqrt{2}$ .

Se destaca que cuando el número de pilotes estudiados es pequeño la solución de la rigidez dinámica es directa, sin embargo, cuando se tiene un arreglo con  $n$  número de pilotes es necesario construir un sistema matricial. Para ello se considera que el desplazamiento  $X_i e^{i\omega t}$  para un pilote  $i$ , incluyendo la acción del resto de los pilotes, se determina mediante

$$X_i = X_{ii}(1 + \sum \alpha_{ij}) \quad \text{para } j = 1, n \quad (\text{VII.6})$$

o bien,

$$X_i = \frac{P_i}{\tilde{K}_v} (1 + \sum \alpha_{ij}) \quad \text{para } j = 1, n \quad (\text{VII.7})$$

de donde se deriva el siguiente sistema matricial que involucra a todos los pilotes del arreglo:

$$\frac{1}{\tilde{K}_v} \begin{bmatrix} 1 & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & 1 & \alpha_{23} & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_{2n} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ P_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (\text{VII.8})$$

Al resolver el sistema propuesto, la rigidez dinámica para el grupo de pilotes  $\tilde{K}_v^G$ , será igual a la relación que existe entre la sumatoria de fuerzas verticales actuando sobre cada pilote y el desplazamiento unitario generado en ellos:

$$\tilde{K}_v^G = \frac{\sum P_i}{X^G} \quad (\text{VII.9})$$

donde

$$X_G = X_1 = X_2 = X_3 = \dots X_n = 1$$

## VII.1 VIBRACIÓN HORIZONTAL

Para pilotes oscilando lateralmente el factor de interacción  $\alpha_h$  depende, además de la frecuencia y de la distancia  $S$ , del ángulo  $\theta$  que forma la línea virtual que los separa y la dirección de la fuerza horizontal aplicada. Sin embargo, es suficiente con evaluar el coeficiente de interacción horizontal para los ángulos  $\theta = 0$  y  $\theta = 90^\circ$  (figura VII.2) y utilizar la ecuación,

$$\alpha_h(\theta^\circ) \approx \alpha_h(0^\circ)\cos^2 \theta + \alpha_h(90^\circ)\text{sen}^2 \theta \quad (\text{VII.10})$$

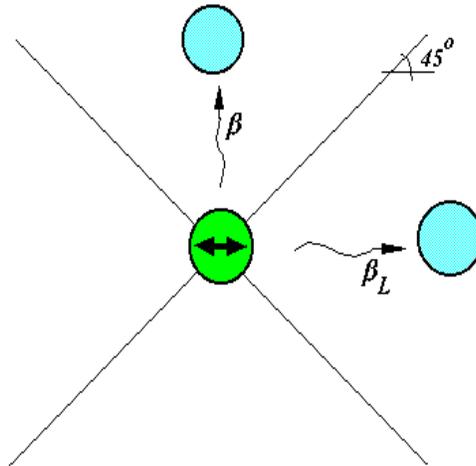
aplicable para cualquier ángulo  $\theta$  con buena aproximación. Los factores de interacción para  $\theta = 0$  y  $\theta = 90^\circ$  se determina con las siguientes expresiones,

$$\alpha_h(90^\circ) \approx \alpha_v \quad (\text{VII.11})$$

$$\alpha_h(0^\circ) \approx \left(\frac{S}{r_0}\right)^{-0.5} e^{-\zeta\omega S/\beta_L} e^{-i\omega S/\beta_L} \quad (\text{VII.12})$$

donde  $\beta_L$  es la velocidad análoga de Lysmer definida como:

$$\beta_L = 3.4\beta/\pi/(1-\nu) \quad (\text{VII.13})$$

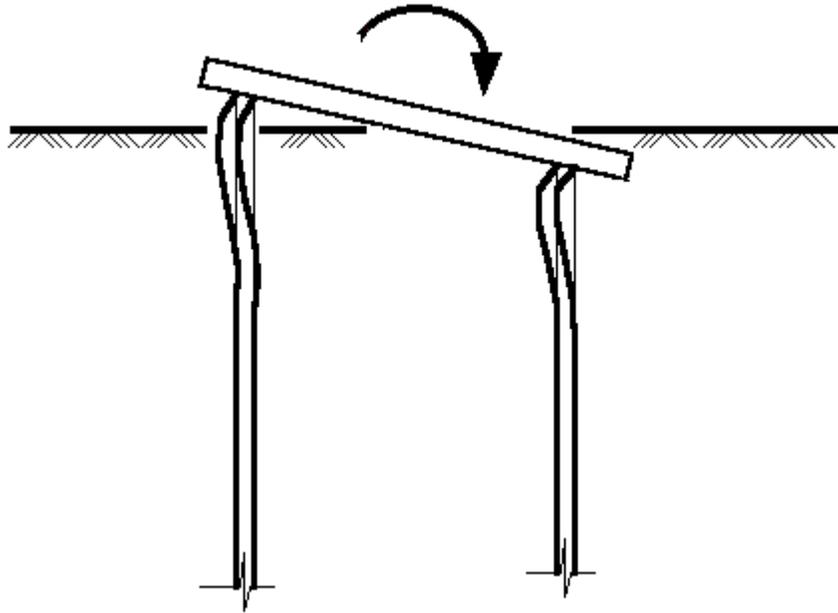


**Figura VII.2 Velocidades de onda aparentes producidas por un pilote oscilando lateralmente**

### VII.3 CABECEO

Se considera que no existe interacción debido a la deformación por rotación en cada pilote. Tal deformación tiene efecto a pocos diámetros por debajo de la cabeza del pilote y produce una disminución del campo de esfuerzo alrededor del pilote (figura VII.3). Por ello, aún para la separación mínima, los pilotes vecinos se localizan fuera de la zona de influencia de este efecto. Bajo estas condiciones, las deformaciones axiales y rotacionales del pilote  $q$  se deben sólo a los

generados por su propia carga dinámica, y se adicionan las deformaciones axiales generadas por el pilote  $p$ .



**Figura VII.3 Deformaciones en pilotes producidas por cabeceo**

#### **VII.4 PARÁMETROS QUE CONTROLAN EL EFECTO DE GRUPO**

Como se ha observado, de acuerdo con los factores de interacción propuestos por Dobry y Gazetas, el efecto de grupo se centra en la relación entre los campos de desplazamientos que generan dos pilotes próximos al estar sujetos a vibraciones verticales. Con este análisis se definen directamente los factores de interacción para el modo en vibración vertical.

Para el caso de vibraciones horizontales, se extiende a esta forma de vibrar el campo de aplicación definido para vibraciones verticales, incluyendo ahora la velocidad análoga de Lysmer y el ángulo de incidencia en que se propagan las ondas entre el pilote activo y el pasivo.

En el modo por cabeceo ya se ha dicho que no existe interacción alguna entre los pilotes; sin embargo, se deben considerar los desplazamientos verticales de cada pilote en función de su distancia al eje centroidal del arreglo de pilotes.

Por tanto, los factores de interacción que permiten considerar el efecto de grupo en pilotes flotantes se reducen a las expresiones que involucran a las vibraciones verticales y horizontales.

##### **VII.4.1 Vibraciones verticales**

La expresión del factor de interacción ante vibraciones verticales es función de los siguientes parámetros geométricos y materiales:

- diámetro del pilote
- distancia entre el pilote activo y el pasivo
- amortiguamiento material
- velocidad de propagación de ondas de corte
- y, naturalmente, la frecuencia de excitación.

De estos parámetros se ha observado que aquellos que mayormente influyen en el efecto de grupo son la distancia entre pilotes, el amortiguamiento y la frecuencia de excitación.

La frecuencia de excitación, la velocidad de propagación de ondas de corte y el diámetro del pilote se pueden incluir en un solo parámetro: la frecuencia normalizada  $\eta$  (ver ec. III.25).

Por tanto, el factor de interacción queda sólo en función del amortiguamiento y de la separación de los pilotes para diferentes valores de la frecuencia normalizada. Para observar el efecto que tienen estos dos parámetros se ha estudiado un par de pilotes vibrando verticalmente y calculado el módulo del factor de interacción correspondiente, es decir,

$$|\alpha_{v12}| \approx \left| \left( \frac{2S}{d} \right)^{-0.5} e^{-\zeta\omega S/\beta} e^{-i\omega S/\beta} \right| \quad (\text{VII.14})$$

El módulo del factor de interacción proporciona una medida del incremento de desplazamiento que produce un pilote sobre otro.

En la figura VII.4 se muestra el efecto que tiene el amortiguamiento en el factor de interacción para una configuración suelo-pilotes dada y donde la distancia normalizada con respecto al diámetro es  $S/d = 12.5$ . Observe que para frecuencias bajas el efecto que ejerce un pilote sobre otro es mayor. Esto indica que el incremento de desplazamiento que produce un pilote sobre otro puede ser de hasta un 20%, ya que obedece a la siguiente expresión:

$$X_1 = X_{11}(1 + \alpha_{12}) \quad (\text{VII.15})$$

Como se esperaba, en la misma figura VII.4 se observa que la influencia de un pilote sobre otro disminuye conforme se incrementa el amortiguamiento material del suelo.

Ahora en las figuras VII.5, VII.6 y VII.7 se presentan factores de interacción para 2, 5 y 10% de amortiguamiento material, respectivamente. En ellas se muestran curvas con diferentes distancias entre pilotes definidas a partir de las relaciones  $S/d = 3, 5, 10, 20, 50$  y el caso extremo de 200. Como se observa en estas figuras el efecto que tiene un pilote sobre otro se atenúa conforme se incrementa la separación entre ellos. Además, con respecto a la frecuencia, la atenuación es más rápida para los amortiguamientos mayores.

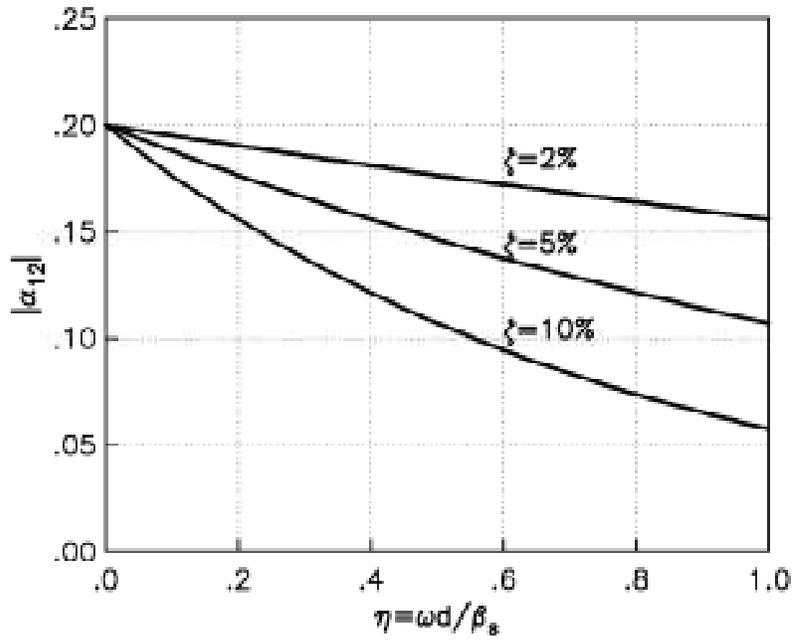


Figura VII.4 Efecto del amortiguamiento en el factor de interacción para el modo vertical

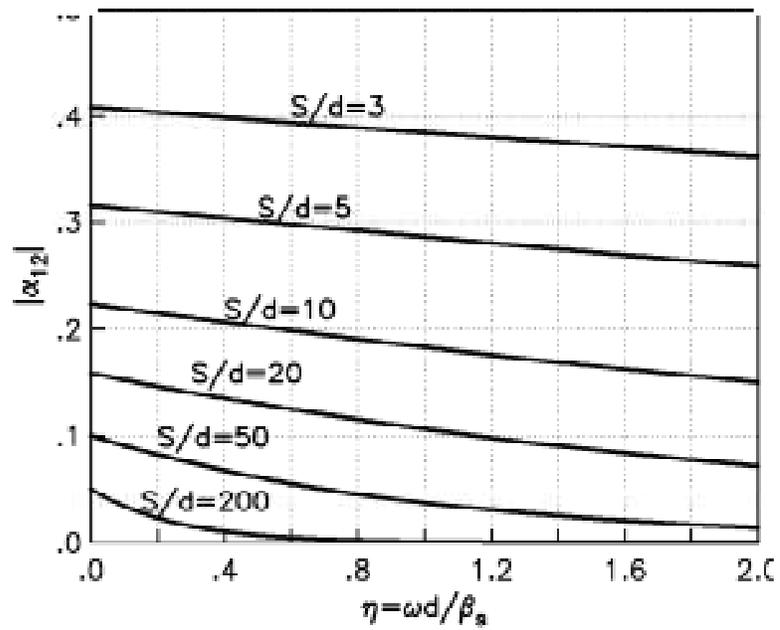


Figura VII.5 Efecto de la separación entre pilotes en el factor de interacción para el modo vertical con  $\zeta = 2\%$

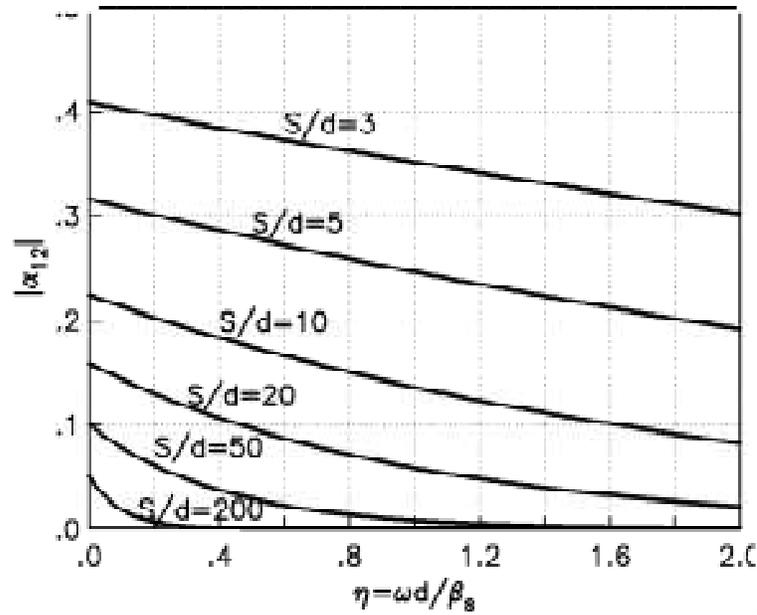


Figura VII.6 Efecto de la separación entre pilotes en el factor de interacción para el modo vertical con  $\zeta = 5\%$

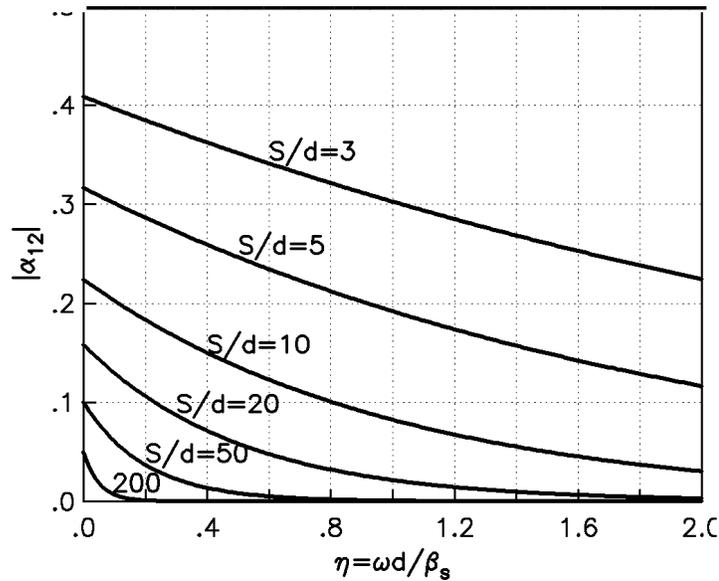


Figura VII.7 Efecto de la separación entre pilotes en el factor de interacción para el modo vertical con  $\zeta = 10\%$

#### VII.4.2 Vibraciones horizontales

Las expresiones que definen el factor de interacción ante vibraciones horizontales dependen, además de los parámetros arriba expuestos, de la relación de Poisson y del ángulo entre la dirección de la

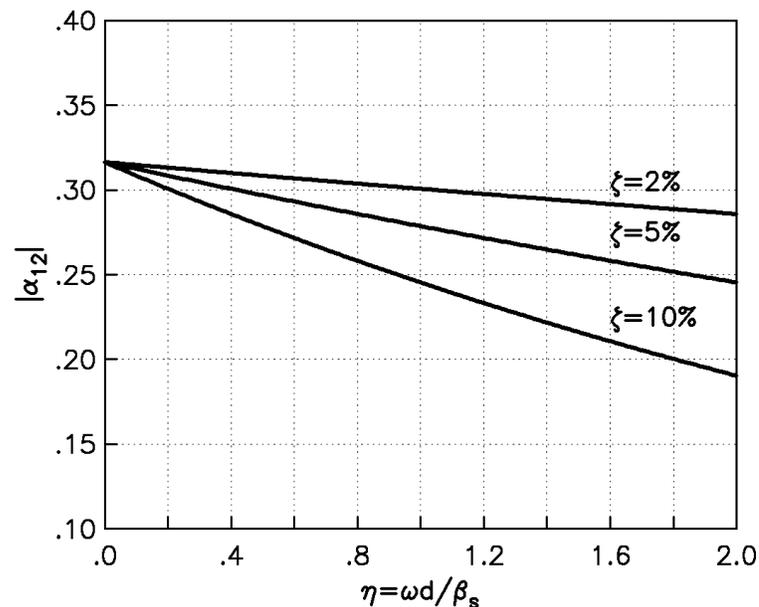
propagación de ondas y la línea imaginaria que une, en planta, a los pilotes en estudio. Se destaca que un pilote ubicado en ángulo de  $\theta = 90^\circ$  con respecto a la dirección en que se propagan las ondas adquiere un factor de interacción horizontal con magnitud semejante a la del factor en vibración vertical.

Además de la posición entre pilotes, el factor de interacción en vibración horizontal depende de la relación de Poisson, necesaria para el cálculo de la velocidad análoga de Lysmer. Por tanto, los parámetros materiales y geométricos que intervienen en el efecto de grupo causado por pilotes vibrando horizontalmente son los siguientes:

- diámetro del pilote
- distancia entre el pilote activo y el pasivo
- amortiguamiento material
- velocidad de propagación de ondas de corte
- ángulo con respecto a la incidencia de las ondas
- relación de Poisson
- frecuencia de excitación

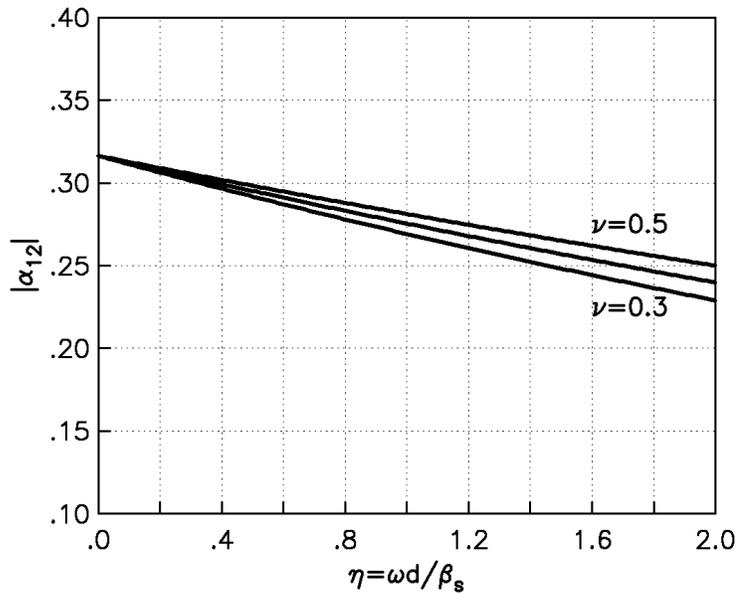
Al igual que para el caso de vibraciones verticales, el diámetro del pilote, la velocidad de propagación y la frecuencia quedan representados por la frecuencia normalizada.

La variación del amortiguamiento en la frecuencia presenta tendencias similares a las arriba observadas, como lo ilustra la figura VII.8, calculada para una relación  $S/d = 5$ ,  $\mu = 0.45$  y  $\theta = 0^\circ$ , donde, al aumentar el valor del amortiguamiento material del suelo, los valores del factor de interacción horizontal son menores.



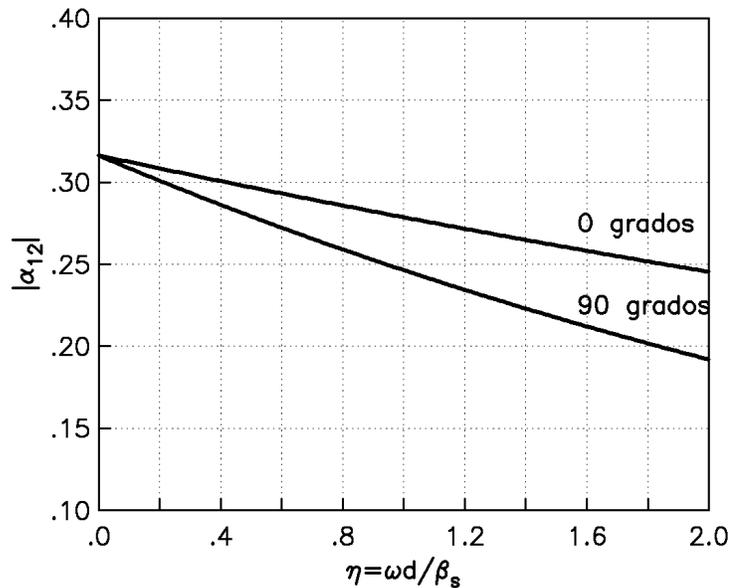
**Figura VII.8 Efecto del amortiguamiento en el factor de interacción para el modo horizontal con  $S/d = 5$ ,  $\mu = 0.45$  y  $\theta = 0^\circ$**

En la figura VII.9 se presenta el efecto que tiene la variación de la relación de Poisson en el factor de interacción horizontal. Como se observa, su efecto no es importante aún para relaciones de Poisson asociadas a tipos de suelos distintos.



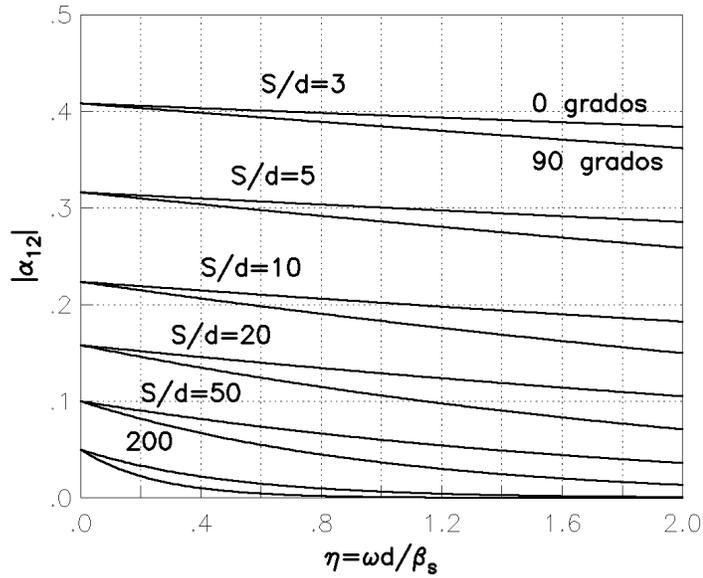
**Figura VII.9 Efecto de la relación de Poisson en el factor de interacción para el modo horizontal con  $S/d = 5$ ,  $\zeta = 5\%$  y  $\theta = 0^\circ$**

En la figura VII.10 se muestran las tendencias que presenta el factor de interacción horizontal, en función de la frecuencia normalizada, para ángulos  $\theta = 0^\circ$  y  $\theta = 90^\circ$  con respecto a la incidencia de las ondas. En esta figura se observa el menor efecto que se tiene en los valores de los factores de interacción para el pilote localizado a  $90^\circ$  con respecto a la dirección de incidencia.

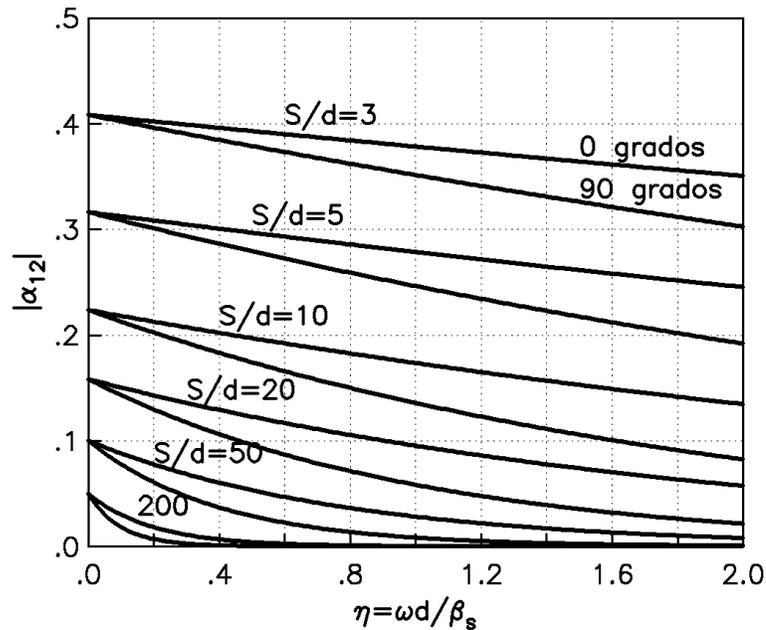


**Figura VII.10 Efecto del ángulo  $\theta$  en el factor de interacción para el modo horizontal con  $S/d = 5$ ,  $\mu = 0.45$  y  $\zeta = 5\%$**

Finalmente, en las figuras VII.11, VII.12 y VII.13, se presentan los efectos combinados de los parámetros más relevantes, correspondientes al 2, 5 y 10% de amortiguamiento material, respectivamente. En ellas se destaca, principalmente, la influencia que genera la distancia existente entre los pilotes en estudio, seguida del ángulo con respecto a la incidencia. Estas curvas se construyeron considerando que  $\mu = 0.45$ .



**Figura VII.11** Efecto de la relación  $S/d$  y del ángulo  $\theta$  en el factor de interacción para el modo horizontal con  $\zeta = 2\%$  y  $\mu = 0.45$



**Figura VII.12** Efecto de la relación  $S/d$  y del ángulo  $\theta$  en el factor de interacción para el modo horizontal con  $\zeta = 5\%$  y  $\mu = 0.45$

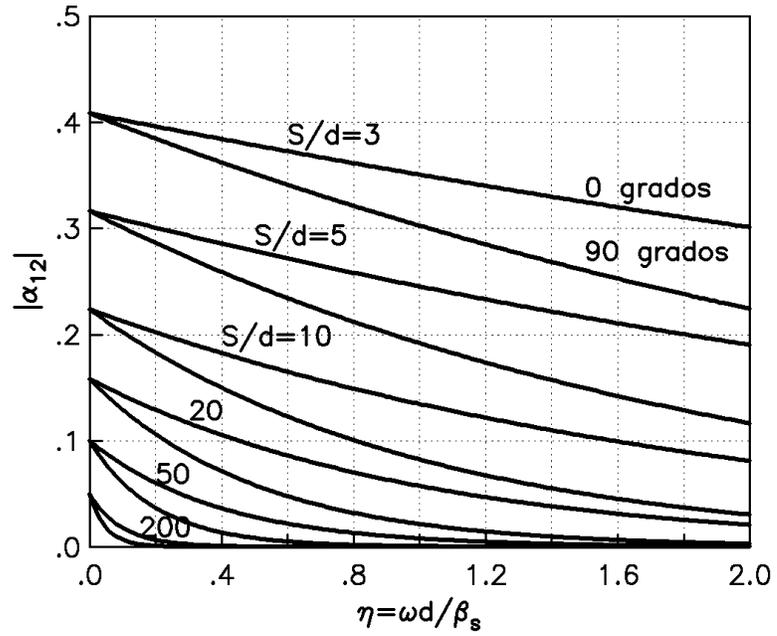


Figura VII.13 Efecto de la relación  $S/d$  y del ángulo  $\theta$  en el factor de interacción para el modo horizontal con  $\zeta = 10\%$  y  $\mu = 0.45$

## RESPUESTA ESTRUCTURAL

### VIII.1 RESPUESTA DINÁMICA ESTRUCTURAL

Al incluir la flexibilidad del suelo en la respuesta de una estructura, su periodo fundamental de vibración, su amortiguamiento y su ductilidad se modifican. De los efectos producidos por la interacción inercial, sólo se han estudiado con detalle los asociados a los cambios en el periodo y al amortiguamiento estructural.

Para evaluar la respuesta dinámica de una estructura apoyada sobre una base flexible, se recurre a la ecuación matricial de equilibrio dinámico para un oscilador de un grado de libertad amortiguado y con interacción, expresada como

$$\mathbf{M}_s \ddot{\mathbf{x}}_s + \mathbf{C}_s \dot{\mathbf{x}}_s + \mathbf{K}_s \mathbf{x}_s = -\ddot{x}_0 \mathbf{M}_0 \quad (\text{VIII.1})$$

donde  $\mathbf{x}_s$  es un vector de coordenadas compuesto por  $\{x_e, x_c, \phi_c\}^T$  donde  $x_e$  es el desplazamiento de la estructura con respecto a la base,  $x_c$  el desplazamiento de la base de la cimentación relativo al movimiento horizontal de campo libre  $x_0$  y  $\phi_c$  la rotación de la cimentación. Por otra parte,  $\mathbf{M}_s$  representa la matriz de masa,  $\mathbf{C}_s$  la matriz de amortiguamiento,  $\mathbf{K}_s$  la matriz de rigidez y  $\mathbf{M}_0$  es un vector de carga. Estas componentes se definen como:

$$\mathbf{M}_s = \begin{bmatrix} M_e & M_e & M_e(H_e + D) \\ M_e & M_e + M_c & M_e(H_e + D) + M_c D/2 \\ M_e(H_e + D) & M_e(H_e + D) + M_c D/2 & M_e(H_e + D)^2 + J_c \end{bmatrix} \quad (\text{VIII.2})$$

$$\mathbf{C}_s = \begin{bmatrix} C_e & 0 & 0 \\ 0 & C_h & C_{hr} \\ 0 & C_{rh} & C_r \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_s = \begin{bmatrix} K_e & 0 & 0 \\ 0 & K_h & K_{hr} \\ 0 & K_{rh} & K_r \end{bmatrix} \quad (\text{VIII.3})$$

$$\mathbf{M}_0 = \begin{bmatrix} M_e \\ M_e + M_c \\ M_e(H_e + D) + M_c D/2 \end{bmatrix} \quad (\text{VIII.4})$$

donde  $M_e$ ,  $H_e$ ,  $C_e$  y  $K_e$  son la masa, altura, amortiguamiento y rigidez del oscilador sin interacción, respectivamente. Estos índices representan los parámetros equivalentes de la estructura en su condición de base rígida.  $D$  es la profundidad de desplante y  $J_c$  el momento de inercia de la masa  $M_c$  de la cimentación.  $C_i$  y  $K_i$  para  $i = h, r, hr$ , representan el amortiguamiento y la rigidez

del sistema suelo-cimentación, respectivamente, definidos a partir de las funciones de impedancia para los modos en vibración horizontal, cabeceo y acoplado.

Bajo una excitación armónica, con dependencia del tiempo dada por el factor  $e^{i\omega t}$ , la ecuación de equilibrio dinámico se puede expresar como

$$[K_s + i\omega C_s - \omega^2 M_s]X_s = -\ddot{X}_0 M_0 \quad (\text{VIII.5})$$

Rigurosamente es necesario resolver el sistema matricial en el dominio de la frecuencia con objeto de obtener valores de la función de transferencia para cada periodo del oscilador. Para la solución del sistema se pueden aplicar procedimientos estándar de eliminación gaussiana (Crandall, 1956). La solución proporciona los espectros de amplitudes del desplazamiento relativo de la estructura  $X_e$ , del desplazamiento relativo a la cimentación  $X_c$  y de su rotación  $\Phi_e$ .

Al afectar el valor complejo  $X_e$  por el cuadrado de la frecuencia de excitación, se obtiene la pseudoaceleración requerida para construir la función de transferencia de un oscilador con interacción suelo-estructura. A partir de la frecuencia y amplitud en resonancia de la función de transferencia, se define el corrimiento del periodo estructural y la modificación del amortiguamiento del oscilador.

Alternativamente, es posible determinar el periodo y amortiguamiento modificados por interacción igualando la parte real e imaginaria de la pseudoaceleración en resonancia del sistema real con las partes correspondientes de un sistema de remplazo, cuyo periodo y amortiguamiento sean los efectivos de la estructura con base flexible. En el sistema matricial de equilibrio se desprecian la masa de la cimentación y su momento de inercia, así como el modo acoplado en el cálculo de las funciones de impedancia, que se ha visto no influyen fuertemente en la respuesta estructural (Aguilar, 1992).

Al igualar las partes reales de los sistemas involucrados, se obtiene que el periodo efectivo  $\tilde{T}_e$ , considerando la interacción suelo-estructura, queda definido por:

$$\tilde{T}_e = (T_e^2 + T_h^2 + T_r^2)^{1/2} \quad (\text{VIII.6})$$

donde  $T_e$  es el periodo fundamental estructural en la condición de base rígida y,

$$T_h = 2\pi \left( \frac{M_e}{K_h} \right)^{1/2} \quad (\text{VIII.7})$$

$$T_r = 2\pi \left( \frac{M_e (H_e + D)}{K_r} \right)^{1/2} \quad (\text{VIII.8})$$

son periodos naturales de vibración en traslación horizontal y rotación de la base.

La forma de obtener el periodo efectivo es iterativa, empleando para la primera aproximación, las rigideces estáticas, con lo que se obtiene un primer periodo efectivo. Este parámetro se utilizará para

evaluar las rigideces dinámicas y obtener un nuevo periodo efectivo. Este proceso continúa hasta que el periodo converge a un valor.

Conocido el periodo efectivo, el amortiguamiento efectivo asociado  $\tilde{\zeta}_e$  se obtiene de igualar las partes imaginarias de los sistemas mencionados. Sin embargo, para fines de diseño se puede adoptar la ecuación ajustada siguiente (Avilés *et al*, 1992):

$$\tilde{\zeta}_e = \zeta_e \left( \frac{T_e}{\tilde{T}_e} \right)^3 + \frac{\zeta_h}{1 + 2\zeta_h^2} \left( \frac{T_h}{\tilde{T}_e} \right)^2 + \frac{\zeta_r}{1 + 2\zeta_r^2} \left( \frac{T_r}{\tilde{T}_e} \right)^2 \quad (\text{VIII.9})$$

Esta expresión cubre la mayoría de los casos de interés práctico. En ella, los amortiguamientos  $\zeta_h, \zeta_r$  correspondientes a la traslación y rotación de la base de la estructura, respectivamente, y se obtienen mediante

$$\zeta_h = \frac{\omega C_h}{2K_h} \quad (\text{VIII.10})$$

$$\zeta_r = \frac{\omega C_r}{2K_r} \quad (\text{VIII.11})$$

siendo  $\omega C_i$  con  $i = h, r$ , la parte imaginaria de las rigideces dinámicas del modelo suelo-cimentación.

La figura VIII.1 ilustra al oscilador de reemplazo con base empotrada caracterizado con su periodo y amortiguamiento efectivos.

A partir de la determinación de las funciones de impedancia y con esta solución alternativa, se han cuantificado periodos y amortiguamientos efectivos en función de los periodos y amortiguamientos para base rígida de la estructura en estudio.

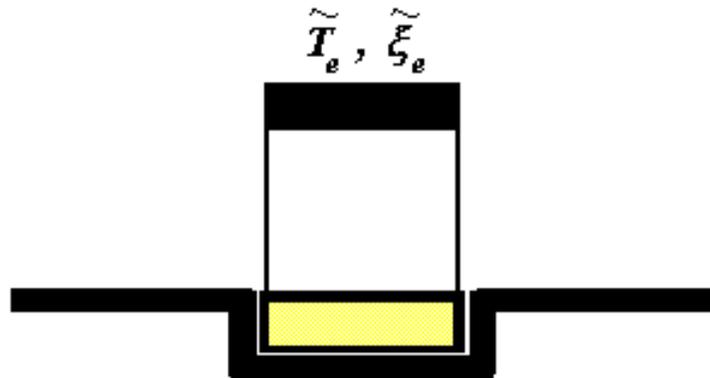


Figura VIII.1 Oscilador efectivo con base rígida

## VIII.2 CASO DE APLICACIÓN

Con base en las características de un sistema estructura-cimentación propuesto, las propiedades y parámetros dinámicos asociados a un depósito de suelo de la zona de lago del valle de México, se presentan los resultados del análisis de interacción dinámica suelo-cimentación-estructura, aplicando los desarrollos realizados en esta investigación.

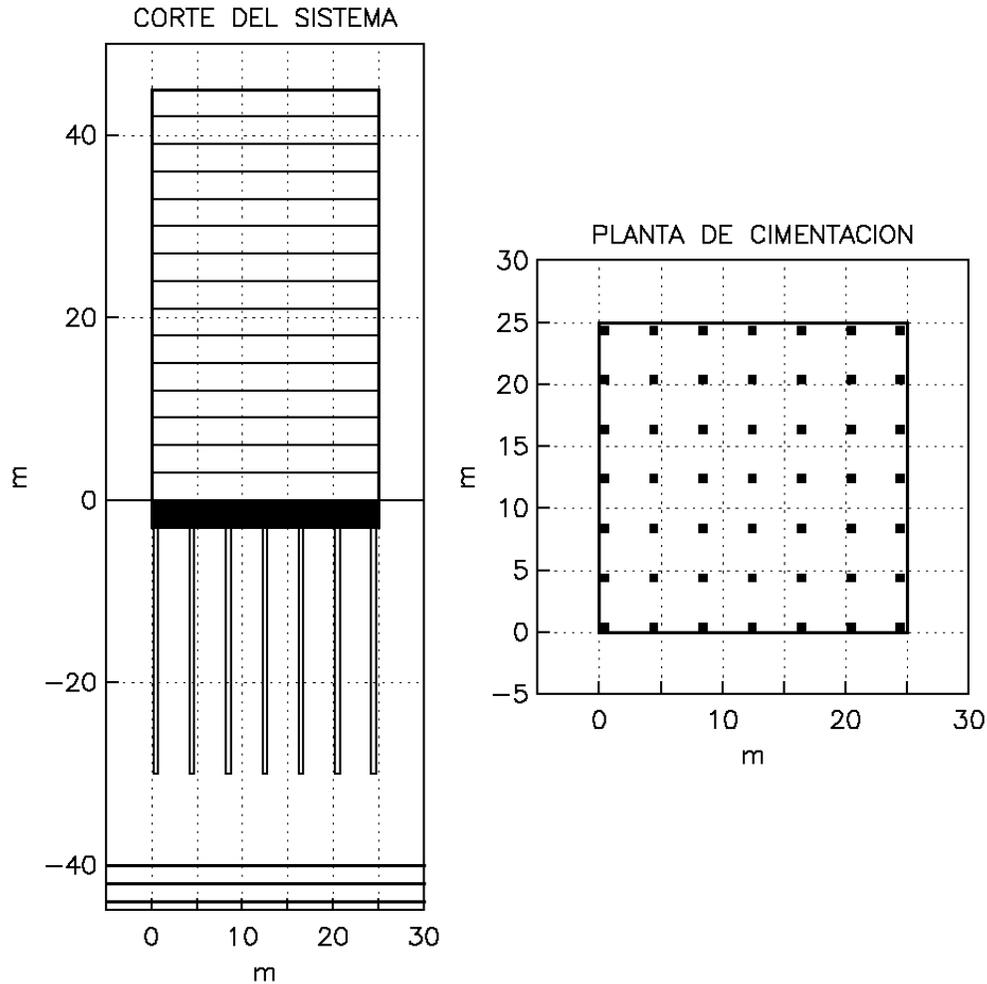
Se presenta también el efecto que tiene la modificación de los parámetros dinámicos estructurales en la aceleración espectral.

La determinación de los periodos y amortiguamientos efectivos del sistema se obtuvieron a partir de un proceso iterativo, iniciando con la frecuencia correspondiente al periodo de la estructura con base rígida hasta lograr la convergencia del método y encontrar la frecuencia característica del sistema.

Los análisis se realizaron a partir de las propiedades de la estructura, cimentación y depósito de suelo siguientes:

- **Estructura**
  - Peso efectivo 11,250.0 t
  - Periodo dominante de vibración 1.5 s
  - Amortiguamiento estructural 5.0 %
  - Altura efectiva de la estructura 31.5 m
  
- **Cajón de cimentación**
  - Largo 25.0 m
  - Ancho 25.0 m
  - Profundidad de enterramiento 3.0 m
  
- **Pilotes**
  - Lado de la sección transversal cuadrada 0.50 m
  - Longitud efectiva 27.0 m
  - Profundidad de desplante 30.0 m
  - Número de elementos 49 (7 x 7)
  - Resistencia a la compresión del concreto,  $f'c$  300.0 kg/cm<sup>2</sup>
  - Módulo de elasticidad 14,000( $f'c$ )<sup>0.5</sup>
  
- **Subsuelo**
  - Espesor compresible 40.0 m
  - Peso volumétrico medio 1.3 t/m<sup>3</sup>
  - Relación de Poisson 0.49
  - Periodo dominante de vibración 2.0 s
  - Velocidad media de propagación de ondas S 80.0 m/s
  - Amortiguamiento material medio 6.0 %

La configuración geométrica del sistema suelo-cimentación-estructura se presenta gráficamente en la figura VIII.2.



**Figura VIII.2 Sistema suelo-cimentación-estructura estudiado**

Los resultados del análisis correspondiente al sistema suelo-grupo de pilotes-cajón de cimentación-estructura fueron los siguientes,

- **Periodo del sistema suelo-cimentación-estructura:** 1.93 s
- **Amortiguamiento del sistema suelo-cimentación-estructura:** 9.26%
- **Rigideces dinámicas para el cajón de cimentación:**

Vibración vertical	( 160,306.7,	19,236.8i) t/m
Vibración horizontal	( 89,412.8,	41,918.2i) t/m
Cabeceo	(18,043,884.8,	2,218,485.1i) t-m
- **Rigideces dinámicas para un pilote**

Vibración vertical	( 9,475.7,	1.8i) t/m
Vibración horizontal	( 7,921.5,	15,514.2i) t/m
Cabeceo	( 17,133.0,	711.1i) t-m

- **Factores de interacción para el grupo de pilotes**

Vibración vertical	(	5.5,	3.1i)
Vibración horizontal	(	5.7,	2.2i)
Cabeceo	(	840.8,	200.8i)

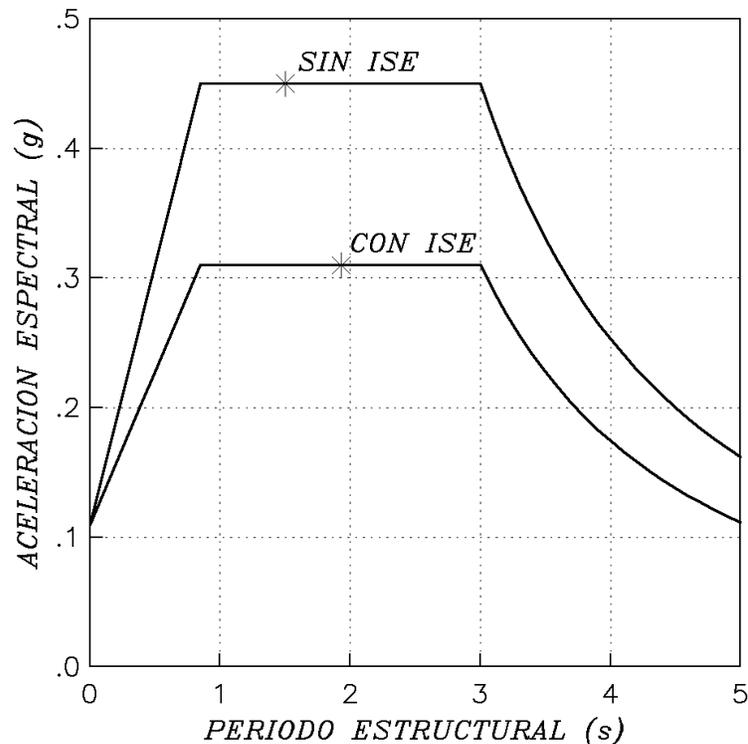
- **Rigideces dinámicas del sistema suelo-pilotes-cajón de cimentación**

Vibración vertical	(	377,939.8,	139,716.0i) t/m
Vibración horizontal	(	100,370.2,	148,304.8i) t/m
Cabeceo	(	52,073,923.0,	10,181,924.4i) t-m

Se destaca que en este análisis el efecto del cajón de cimentación se determinó aplicando las expresiones para el cálculo de las rigideces dinámicas propuestas por (Kausel, et al, 1978).

Con base en el espectro de diseño establecido para el sitio de estudio, es posible modificar su forma a partir del cambio en el amortiguamiento del sistema por efecto de la interacción suelo-estructura. Con el espectro sísmico modificado y el alargamiento del periodo estructural, se establece el valor de aceleración espectral a que estará sujeta la estructura.

Bajo este escenario las aceleraciones espectrales con y sin interacción se indican en la tabla VIII.1 y gráficamente en los espectros de diseño de la figura VIII.3.



**Figura VIII.3** Espectros de diseño con valores de aceleración espectral (\*) asociados a los periodos estructurales con y sin interacción suelo-estructura

**Tabla VIII.1 Cambios en la respuesta estructural**

<b>Condición</b>	<b>Periodo Estructural</b>	<b>Amortiguamiento estructural</b>	<b>Aceleración espectral</b>	<b>Cortante basal</b>
Sin interacción	1.50 s	5.0 %	0.45 g	5,062.5 t
Con interacción	1.93 s	9.3 %	0.31 g	3,487.5 t

En la misma Tabla VIII.1 se indica también el cambio en el cortante basal por efecto de la interacción suelo-estructura, donde se observa una reducción del 31% para este caso.

## CONCLUSIONES

---

El objetivo principal de esta investigación fue estudiar y analizar el efecto que tiene un grupo de elementos de cimentación profundos en la respuesta dinámica de estructuras.

El modelo conceptual de estudio parte del propuesto por Lysmer en 1965, donde se hace uso de un oscilador de un grado de libertad con coeficientes de rigidez y de amortiguamiento dependientes de la frecuencia de excitación. Estos coeficientes representan la rigidez dinámica que controla el comportamiento de la cimentación. De esta forma, el problema de interacción suelo-estructura queda controlado por las funciones de impedancia o rigideces dinámicas.

De la literatura técnica se recopilaron y estudiaron las expresiones disponibles para determinar la rigidez dinámica de sistemas suelo-pilote bajo diferentes formas de vibración. Con ellas se realizó un análisis paramétrico que permitió identificar las principales propiedades materiales y geométricas que controlan la respuesta dinámica del sistema.

Se observó que las rigideces estáticas asociadas a los modos en vibración horizontal, cabeceo y acoplado están controladas por el contraste entre los módulos de elasticidad entre el pilote y el suelo, mientras que la rigidez estática vertical está dominada por la relación longitud-diámetro del pilote. Los coeficientes de rigidez son también dependientes de la relación de esbeltez del pilote. Los coeficientes de amortiguamiento en los modos horizontal, cabeceo y acoplado, además de la frecuencia de excitación, son función del amortiguamiento material y de la relación entre módulos de elasticidad del pilote y del suelo. Para los coeficientes de amortiguamiento en el modo vertical interviene además el módulo de Poisson.

Los resultados del análisis paramétrico se emplearon para la construcción de curvas, de aplicación práctica, que permiten determinar las rigideces estáticas y los coeficientes de rigidez y de amortiguamiento con que se construyen las rigideces dinámicas para sistemas suelo-pilote.

La principal contribución de esta investigación se centra en el desarrollo de un método de frontera riguroso para el problema tridimensional de funciones de impedancia aplicable a cimentaciones profundas. En el modelo se consideró que la cabeza del elemento de cimentación es una placa rígida. El cuerpo del cimiento, con rigidez establecida, se encuentra embebido en un depósito estratificado horizontalmente que descansa sobre una base fija, por tanto, el método considera explícitamente la estratigrafía del medio y los efectos del desplante del cimiento.

El método consiste en determinar los modos de propagación del suelo y números de onda asociados, mediante el análisis del problema discreto de valores y vectores característicos para las ondas generalizadas de Love (caso antiplano) y Rayleigh (caso plano). El dominio de análisis se divide en una región interior y otra exterior. La primera está formada por el pilote o pila y el suelo de soporte, mientras que la segunda se constituye por el depósito de suelo que envuelve al cimiento. A partir de los modos de propagación y números de onda para el caso axisimétrico, se construyen vectores de desplazamiento y fuerzas modales en la frontera entre las regiones interior y exterior, los que se combinan con coeficientes de participación con el propósito de obtener los desplazamientos y

fuerzas consistentes en los nodos comunes entre ambas regiones. Las funciones de impedancia para cada modo de vibración se construyen al integrar los campos de esfuerzos generados en la base de la cabeza del pilote. Los principales modos de vibración estudiados corresponden a los de traslación vertical, traslación horizontal y torsión.

Se realizaron pruebas de transparencia para corroborar la efectividad del método, encontrando que los resultados son siempre consistentes y congruentes con lo esperado.

Se calcularon rigideces estáticas y coeficientes de rigidez y amortiguamiento para problemas estudiados por otros autores, encontrando diferencias mínimas. Para esta comparación la geometría de la cimentación profunda se simuló como una de tipo superficial.

La flexibilidad del método propuesto permite obtener las rigideces dinámicas para cimentaciones profundas de cualquier tipo. Si la punta de la cimentación se ubica en una capa competente, se obtendrán las funciones de impedancia para pilotes de punta o pilas. Si la capa competente se localiza a mayor profundidad que la punta del cemento, se determinarán las funciones de impedancia para pilotes de fricción.

En esta investigación se incluyó también la aplicación de factores de interacción para considerar el efecto de grupo en las cimentaciones con pilotes o pilas. El efecto de grupo se centra en la relación entre los campos de desplazamientos que generan dos elementos de cimentación al estar sujetos a vibraciones. Bajo este principio se propone un procedimiento que permite determinar la rigidez dinámica de un grupo de elementos de cimentación de cualquier número. Se logra a partir de la solución de un sistema matricial complejo donde se incluyen los factores de interacción, la rigidez dinámica de un solo elemento y el desplazamiento unitario impuesto del conjunto. Este procedimiento resulta eficiente y de aplicación práctica para determinar la respuesta global dinámica de sistemas suelo-elementos de cimentación.

Del análisis de los factores de interacción que controlan el efecto de grupo de elementos de cimentación, se observó que son particularmente dependientes de la distancia entre pilotes, el amortiguamiento material y la frecuencia de excitación.

Controlada la respuesta del sistema suelo-cimentación a través de las funciones de impedancia y los factores de interacción, se determinó el efecto que causa en la respuesta estructural, particularmente en el alargamiento del periodo y la modificación del amortiguamiento. Para ello, se aplicó un método que parte de la solución rigurosa al sistema matricial de la ecuación de equilibrio dinámico del sistema integral.

Los desarrollos aquí expuestos se aplicaron al estudio de una estructura hipotética ubicada en la zona de lago del valle de México. En este análisis se determinaron las rigideces dinámicas para un pilote, los factores de interacción del grupo de elementos, la modificación de los parámetros dinámicos estructurales y los cambios que inducen en la aceleración espectral. Esto permite calcular finalmente el efecto de la interacción suelo-estructura en el cortante basal de diseño.

## REFERENCIAS

---

- Abramowitz M y Stegun I A (1970)**, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications, Inc., New York, NY.
- Achenbach J D (1976)**, *Wave Propagation in Elastic Solids*, North-Holland Publishing Co., Oxford, G B.
- Aguilar H R (1992)**, "Respuesta de Sistemas Suelo-Cimentación-Estructura", *Tesis Profesional*, Universidad La Salle, México, D.F.
- Aguilar H R (1998)**, "Funciones de Impedancia para Cimentaciones Enterradas en Depósitos de Suelo Estratificado", *Tesis de Maestría*, Universidad Nacional Autónoma de México, México, D.F.
- Arnold R N, Bycroft G N y Warburton G B (1955)**, "Forced Vibrations of a Body on an Infinite Elastic Solid", *Journal of Applied Mechanics*, ASME, 22, 391.
- Avilés J, Pérez Rocha E y Aguilar H R (1992)**, "Periodos y Amortiguamientos Efectivos de Sistemas Suelo-Estructura", *Boletín del Centro de Investigación Sísmico*, Fundación Javier Barros Sierra.
- Awojobi A D y Grootenhuis P (1965)**, "Vibration of Rigid Bodies on Elastic Media", *Proc. Royal Soc. Lond.*, A287, 27.
- Awojobi, A O (1972)**, "Vibration of a Rigid Circular Foundation on Gilson Soil", *Geotechnique*, 22, No. 2, 333.
- Awojobi, A O y Tabiowo, P. H (1976)**, "Vertical Vibration of Rigid Bodies with Rectangular Bases on Elastic Media", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 4, 439.
- Berdugo Y O y Novak M (1972)**, "Coupled Horizontal and Rocking Vibrations of Embedded Footings", *Canadian Geotechnical Journal*, 9.
- Booker J R, Balaam N P y Davis E H (1985)**, "The Behavior of an Elastic Non-Homogeneous Halfspace, Parts I and II", *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 9.
- Bycroft G N (1956)**, "Forced Vibrations of a Rigid Circular Plate on a Semi-Infinite Elastic Space and an Elastic Stratum", *Phil. Trans. Royal Soc. Lond.*, A248, 327.
- Chow Y K (1987)**, "Vertical Vibrations of 3-D Rigid Foundation on Layered Media", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 15.
- Crandall S H (1956)**, *Engineering Analysis*, McGraw-Hill, Inc., New York.
- Dobry, R, Vicente, E, O'Rourke, M y Roesset, J M (1982)**, "Horizontal Stiffness and Damping of Single Piles", *Journal of Geotechnical Engineering Division*. ASCE, 108, GT3, 439.
- Dobry R y Gazetas G (1985)**, "Dynamic Stiffness and Damping of Foundations by Simple Methods", *Vibrations Problems in Geotechnical Engineering*, Ed. Gazetas G y Selig E T, ASCE.
- Dobry R y Gazetas G (1988)**, "Simple Method for Dynamic Stiffness and Damping of Floating Pile Groups", *Geotechnique* 38, No.4, 557-574.
- Dominguez, J y Roesset, J M (1978)**, "Dynamic Stiffness of Rectangular Foundations", *Research Report R78-20*, MIT.
- Elourdy J, Nieto J A and Szekely E M (1967)**, "Dynamic Response of Bases of Arbitrary Shape Subjected to Periodical Vertical Loading", *Proc. Int. Stmp. Wave Prop. and Dyn. Rep. Earth Mat.*, University of New Mexico, Albuquerque, 105-21.

- Elsabee F y Morray J P (1977)**, "Dynamic Behavior of Embedded Foundations", *Research Report R77-33*, MIT.
- Fotopoulou M (1989)**, "Rocking Damping of Arbitrarily Shaped Embedded Foundations", *Journal of Geotechnical Engineering*, ASCE, 115.
- Gazetas G (1975)**, "Dynamic Stiffness Functions of Strip and Rectangular Footings on Layered Soil", *S.M. Thesis*, MIT.
- Gazetas, G (1980)**, "Static and Dynamic Displacements of Foundations on Heterogeneous Multilayered Soils", *Geotechnique*, 30, No. 2, 159.
- Gazetas, G (1981a)**, "Strip Foundations on Cross-Anisotropic Soil Layer Subjected to Static and Dynamic Loading", *Geotechnique*, 31, No. 2, 161.
- Gazetas, G (1981b)**, "Machine Foundations on Deposits of Soft Clay Overlain by a Weathered Crust", *Geotechnique*, 31, No. 3, 387.
- Gazetas, G (1983)**, "Analysis of Machine Foundation Vibrations: State of Art", *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, Vol.2, No.1.
- Gazetas, G (1984)**, "Seismic Response of End-bearing Single Piles", *International Journal of Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, Vol.3.
- Gazetas G (1991)**, "Foundation Vibrations", *Foundation Engineering Handbook*, Ed. H Fang, Van Nostrand Reinhold, Nueva York.
- Gazetas G y Roesset J M (1976)**, "Forced Vibrations of Strip Footings on Layered Soils", *Methods of Structural Analysis*. ASCE, Vol.1, 115.
- Gazetas G y Roesset J M (1979)**, "Vertical Vibrations of Machine Foundations", *Journal of Geotechnical Engineering Division*, ASCE, 105, GT12, 1435.
- Gazetas G y Dobry R (1984)**, "Horizontal Response of Piles in Layered Soils", *Journal of Geotechnical Engineering*, ASCE, 110.
- Gazetas G, Dobry R y Tassoulas J L (1985)**, "Vertical Response of Arbitrarily Shaped Embedded Foundations", *Journal of Geotechnical Engineering*, ASCE, 111.
- Gazetas G y Tassoulas J L (1987)**, "Horizontal Stiffness of Arbitrarily Shaped Embedded Foundations", *Journal of Geotechnical Engineering*, ASCE, 113.
- Gazetas G y Makris N (1990)**, "Dynamic Pile-Soil-Pile Interaction, I: Analysis of Axial Vibration", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 18.
- Hadjian A H y Luco J E (1977)**, "On the Importance of Layering on Impedance Functions", *Proceedings, 6<sup>th</sup> World Conference of Earthquake Engineering*, New Delhi.
- Hsieh T K (1962)**, "Foundation Vibrations", *Proc. Inst. Civil. Engrs*, 22,211
- Iguchi M y Luco J E (1981)**, "Dynamic Response of Flexible Rectangular Foundations on an Elastic Halfspace", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*. 9, 239.
- Jakub, M y Roesset, J M (1977)**, "Nonlinear Stiffness of Foundations", *Research Report R77-35*, MIT.
- Johnson G R, Christiano P y Epstein H I (1975)**, "Stiffness Coefficients for Embedded Footings", *Journal of Geotechnical Engineering Division*, ASCE, 101.
- Kagawa T y Kraft L M (1980)**, "Lateral Load-Deflection Relationships of Piles Subjected to Dynamic Loading", *Soils & Foundation*, 20, No. 4, 19.
- Karasudhi P, Keer L M y Lee S L (1968)**, "Vibration Motion of a Body on an Elastic Half Space", *Journal of Applied Mechanics*, ASME, No.35E, 697.
- Kausel E (1974)**, "Forced Vibrations of Circular Foundations on Layered Media", *Research Report R74-11*, MIT.
- Kausel E (1981)**, "An Explicit Solution for the Green Functions for Dynamics Loads in Layered Media", *Research Report R81-13*, MIT
- Kausel E, Roësset J M and Waas G (1975)**, "Dynamic Analysis of Footings on Layered Media", *Journal of Engineering Mechanics Division*, ASCE, Vol.101, No.EM5, 679-693.

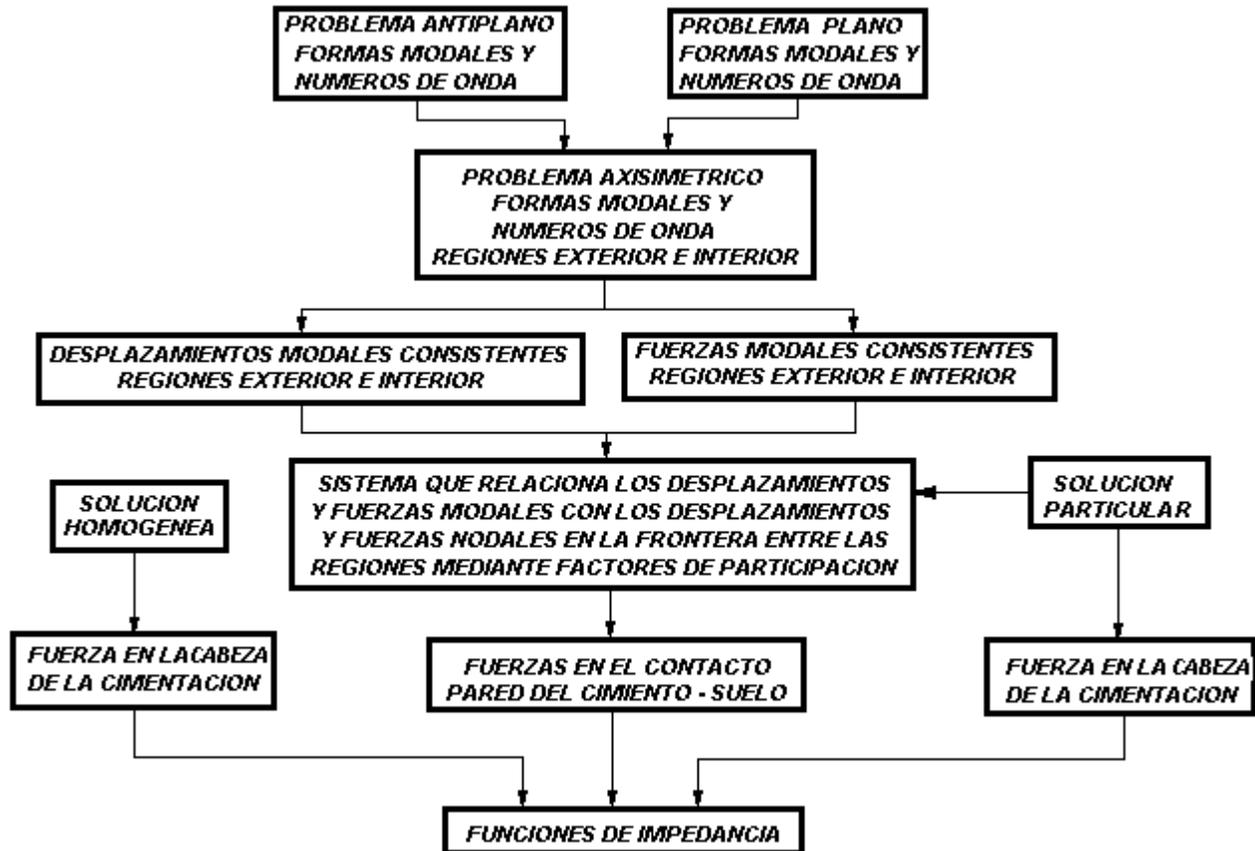
- Kausel E y Roësset J M (1977)**, "Semianalytic Hyperelement for Layered Strata", *Journal of Engineering Mechanics Division*, ASCE, Vol.103, No.EM4, 569-588.
- Kausel E, Whitman R, Morray J y Elsabee F (1978)**, "The Spring Method for Embedded Foundations", *Nuclear Engineering and Design*, Vol.48, 377-392.
- Kausel E y Ushijima, R A (1979)**, "Vertical and Torsional Stiffness of Cylindrical Footings", *Research Report R76-6*, MIT.
- Kaynia A y Kausel E (1982)**, "Dynamic Behavior of Pile Groups", *2<sup>nd</sup> International Conference of Numerical Methods Offshore Piling*, Austin, Texas, 509-532.
- Kitamura, Y y Sakurai, S (1979)**, "Dynamic Stiffness for Rectangular Rigid Foundations on a Semi-Infinite Elastic Medium", *International Journal of Analysis Numerical Methods in Geomechanics*.
- Kuhlemeyer R (1969)**, "Vertical Vibrations of Footings Embedded en Layered Media", *Ph.D. Thesis*, University of California, Berkeley.
- Lin, Y J (1978)** "Dynamic Response of Circular Plates on Viscoelastic Halfspace", *Journal of Applied Mechanics*, ASME, 45E, 379.
- Luco J E (1973)**, "Vibrations of Embedded Footings and Structures", *ASCE National Structure Engineering Meeting*. Reprint 2029.
- Luco J E (1974)**, "Impedance Functions for a Rigid Foundation on a Layered Medium", *Nucl. Engrg. Des.*, 31, 204.
- Luco J E (1976)**, "Vibrations of a Rigid Disc on a Layered Viscoelastic Medium", *Nucl. Engrg. Des.*, 36, 325.
- Luco J E y Westmann R A (1968)**, "Dynamic Response of Rigid Footing Bonded to an Elastic Halfspace", *Journal of Applied Mechanics Division*, ASCE, No.35E, 697.
- Luco J E y Westmann R A (1971)**, "Dynamic Response of Circular Footing", *Journal of Engineering Mechanics Division*, ASCE, Vol.97, No.EM5, 1381.
- Lysmer J (1965)**, "Vertical Motions of Rigid Footings", *Ph.D. Thesis*, University of Michigan, Ann Arbor.
- Lysmer J (1970)**, "Lumped Mass Method for Rayleigh Waves", *Bulletin of Seismological Society of America*, Vol.60, No.1, 89-104.
- Lysmer J y Drake L A (1971)**, "The Propagation of Love Waves across Nonhorizontally Layered Structures", *Bulletin of Seismological Society of America*, Vol.61, No.5, 1233-1251.
- Lysmer J y Waas G (1972)**, "Shear Waves in Plane Infinite Structures", *Journal of Engineering Mechanics Division*, Vol.98, No.EM1, 85-105.
- Lysmer J, Udaka T, Seed H B y Hwang R (1974)**, "LUSH a Computer Program for Complex Response Analysis of Soil-Structure Systems", *Report EERC 74-4*, University of California, Berkeley.
- Lysmer J, Udaka T, Tsai C-F y Seed H B (1975)**, "FLUSH a Computer Program for Approximate 3-D Analysis of Soil-Structure Interaction Problems", *Report EERC 75-30*, University of California, Berkeley.
- Lysmer J, Tabatabaie R M, Tajirian F, Vahdani S y Ostadan F (1981)**, "SASSI-A System for Analysis of Soil-Structure Interaction", *Research Report*, GT81-02, University of California, Berkeley.
- Meek J W y Veletsos A S (1973)**, "Simple Models for Foundations in Lateral and Rocking Motions", *Proceedings, 5<sup>th</sup> World Conference on Earthquake Engineering*, Rome, paper 331.
- Nikolaou S, Mylonakis G, Gazetas G y Tazoh T (2001)**, "Kinematic Pile Bending During Earthquakes: Analysis and Field Measurements", *Geotechnique* 51, No.5, 425-440.
- Nogami T (1979)**, "Dynamic Group Effect of Multiple Piles Under Vertical Vibration", *Proceedings, Engineering Specialty Conference*, ASCE.

- Novak M (1974)**, "Dynamic Stiffness and Damping of Piles", *Canadian Geotechnic Journal.*, No.11, 574.
- Novak M (1977)**, "Vertical Vibration of Floating Piles", *Journal of Engineering Mechanics Division*, ASCE, Vol.103.EM5, 153.
- Novak M (1987)**, "State of the Art in Analysis and Design of Machine Foundations, Soil-Structure Interaction", *Elsevier/CML Publ.* New York.
- Novak M y Aboul-Ella F (1978)**, "Impedance Functions for Piles in Layered Media", *Journal of Engineering Mechanics Division*, ASCE.
- Novak M, Nogami T y Aboul-Ella F (1978)**, "Dynamic Soil Reactions for Plane Strain Case", *Journal of Engineering Mechanics Division*, ASCE 104.
- Poulos H G (1968)**, "Analysis of the Settlement of Pile Group". *Geotechnique* 18, No.4, 449-471.
- Poulos H G (1971)**, "Behavior of Laterally-Loaded Piles II: Pile Groups". *Soil Mechanics Foundations Division*, ASCE 97, SM5, 733-751.
- Quinlan P M (1953)**, "The Elastic Theory of Soil Dynamics", *Symposium of Dynamic Test of Soils*, ASTM STP, No.156, 3-34.
- Reissner E (1936)**, "Stationare, Axialsymmetrische, Durch Eine Schut-Telnde Masse Erregte Schwingungen Eines Homogenen Elastischen Halbraumes", *Ing. Arch.*, 7, 381.
- Richart F E y Whitman R V (1967)**, "Comparison of Footing Vibration Test with Theory", *Journal of Soil Mechanics and Foundations Engineering Division*, ASCE.
- Roesset J M (1980a)**, "Stiffness and Damping Coefficients in Foundations". *Dynamic Response of Pile Foundations*, Ed. O'Neil M y Dobry R, ASCE.
- Roesset J M (1980b)**, "The use of Simple Models in Soil-Structure Interaction". *Civil Engineering and Nuclear Power*, ASCE No.1/3.
- Roesset J M (1984)**, "Dynamic Stiffness of Pile Groups". *Pile foundations*. New York:ASCE.
- Rosenblueth E y Reséndiz D (1988)**, "Disposiciones reglamentarias de 1987 para tener en cuenta la interacción dinámica suelo-estructura". *Series del Instituto de Ingeniería*, No.509.
- Sánchez-Salineró I (1982)**, "Static and Dynamic Stiffness of Single Piles". *Research Report GR82-31*, University of Texas at Austin.
- Sánchez-Salineró I (1983)**, "Dynamic Stiffness of Pile Groups: Approximate Solutions". *Geotechnical Engineering Report GR83-5*, University of Texas at Austin.
- Savidis, S A (1977)**, "Analytical Methods for the Computation of Wevefields", *Dyn. Meth. Soil Rock Mech.*, 1, 225.
- Sung T Y (1953)**, "Vibration in Semi-Infinite Solids due to Periodic Surface Loading". *Sc.D. Thesis*, Harvard University.
- Tassoulas J L (1981)**, "Elements for the Numerical Analysis of Wave Motion in Layered Media", *Research Report R81-2*, MIT.
- Tassoulas J L and Kausel (1983)**, "Elements for the Numerical Analysis of Wave Motion in Layered Media", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 19.
- Veletsos A S y Wei Y T (1971)**, "Lateral and Rocking Vibrations of Footings", *Journal of Soil Mechanics and Foundations Division*, ASCE, Vol.97, No.SM9, 1227.
- Veletsos A S y Verbic B (1973)**, "Vibration of Viscoelastic Foundations", *International Journal of Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, No.2, 87.
- Velez A, Gazetas G y Krishnan R (1983)**, "Lateral Dynamic Response of Constrained-Head Piles", *Journal of Geotechnical Engineering*, 109.
- Waas G (1972)**, "Linear Two-Dimensional Analysis of Soil Dynamics Problems in Semi-Infinte Layered Media", *Ph.D. Thesis*, University of California at Berkeley, California.
- Werkle H y Waas G (1986)**, "Dynamic Stiffness of Foundations on Inhomogeneous Soils", *Proceedings, 8<sup>th</sup> European Conference on Earthquake Engineering*, Lisbon, 2.

- Whittaker, W L y Chritiano, P (1978)**, "Dynamic Response of Plate on Elastic Halfspace", *Journal of Engineering Mechanics Division, ASCE*, Vol.108, EM1, 133.
- Wolf J P (1985)**, *Dynamic Soil-Structure-Interaction*, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.
- Wolf J P (1988)**, *Soil-Structure-Interaction Analysis in Time Domain*, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.
- Wong, H L y Luco, J E (1976)**, "Dynamic Response of Rigid Foundations of Arbitrary Shape", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, No.4, 579.
- Wong, H L y Luco, J E (1985)**, "Tables of Impedance Functions for Square Foundations in Layered Media", *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 4.

## SISTEMA MATRICIAL INTEGRAL

Las etapas en que se compone el método de análisis propuesto, se muestran en el siguiente diagrama:



El sistema matricial integral que asocia los desplazamientos y fuerzas nodales consistentes entre las regiones  $[A]$ , con las amplitudes modales de desplazamientos y fuerzas  $\{B\}$  a través de los factores de participación  $\{\Gamma\}$  se representa como,

$$[A]\{\Gamma\} = \{B\}$$

La matriz global  $[A]$  se constituye por cinco matrices identificadas como:

1. Matriz de desplazamientos modales en la región exterior  $[WE]$ ,
2. Matriz de ceros asociada con la profundidad de enterramiento de la cimentación  $[0]$ ,
3. Matriz de desplazamientos modales en la región interior  $[WI]$ ,

4. Matriz de fuerzas modales en la región exterior  $[PE]$  y
5. Matriz de fuerzas modales en la región interior  $[PI]$ .

Los elementos que constituyen a estas matrices se determinan a partir de las expresiones indicadas en el Capítulo IV. Por otra parte, los elementos del vector global  $\{B\}$  se obtienen de la solución particular para el modo de vibración estudiado en el Capítulo V (verticales, horizontales o torsionales), dividiéndose en tres vectores definidos como,

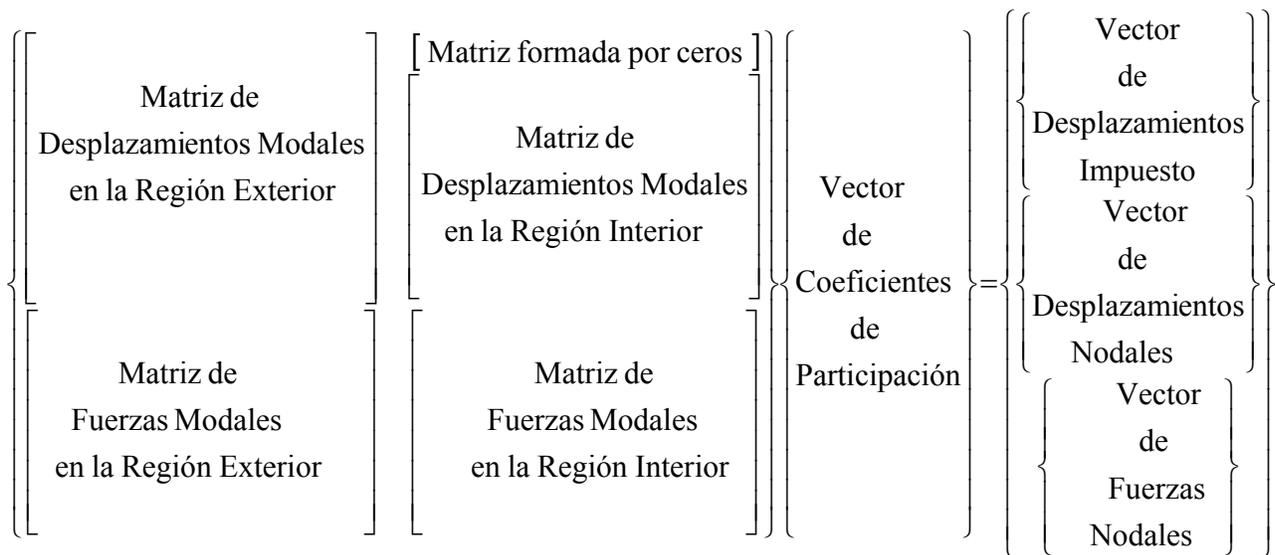
1. Vector de desplazamientos impuesto  $\{I\}$ ,
2. Vector de desplazamientos nodales a partir del movimiento impuesto  $\{\Delta\}$  y
3. Vector de fuerzas nodales a partir del movimiento impuesto  $\{F\}$ .

Al resolver el sistema se obtiene el vector de factores de participación  $\{\Gamma\}$ .

La posición de estos arreglos en el sistema integral se muestra en la figura A.1, y sus dimensiones para cada tipo de vibración en la tabla A.1. Nóte que para las vibraciones verticales y torsionales el tamaño de las matrices y vectores se ha reducido, ya que sólo participan los casos plano y antiplano, respectivamente.

Se debe considerar que en el sistema matricial los renglones se asocian consecutivamente con las componentes  $u, w, v$  correspondientes a las direcciones radial, vertical y tangencial, respectivamente, relacionando cada paquete de tres renglones con cada nodo, definidos por los substratos que forman al depósito. Adicionalmente, las columnas del sistema coinciden con los modos de vibración para las regiones exterior e interior, donde implícitamente participan los modos del problema plano y antiplano.

Se señala que al incluir las matrices de fuerzas modales  $[PE]$  y  $[PI]$  en el sistema integral, los elementos involucrados corresponden a los que se localizan por debajo del nivel de enterramiento de la cimentación.



**Figura A.1 Composición del sistema matricial integral**

**Tabla A.1 Dimensiones de matrices y vectores**

<i>Arreglo</i>	<i>Vibraciones Verticales</i>	<i>Vibraciones Horizontales</i>	<i>Vibraciones Torsionales</i>
[WE]	$2N \times 2N$	$3N \times 3N$	$N \times N$
[WI]	$(2N - 2Df) \times (2N - 2Df)$	$(3N - 3Df) \times (3N - 3Df)$	$(N - Df) \times (N - Df)$
[0]	$2Df \times (2N - 2Df)$	$3Df \times (3N - 3Df)$	$Df \times (N - Df)$
[PE]	$(2N - 2Df) \times (2N - 2Df)$	$(3N - 3Df) \times (3N - 3Df)$	$(N - Df) \times (N - Df)$
[PI]	$(2N - 2Df) \times (2N - 2Df)$	$(3N - 3Df) \times (3N - 3Df)$	$(N - Df) \times (N - Df)$
{1}	$2Df \times 1$	$3Df \times 1$	$Df \times 1$
{Δ}	$(2N - 2Df) \times 1$	$(3N - 3Df) \times 1$	$(N - Df) \times 1$
{F}	$(2N - 2Df) \times 1$	$(3N - 3Df) \times 1$	$(N - Df) \times 1$
[A]	$(4N - 2Df) \times (4N - 2Df)$	$(6N - 3Df) \times (6N - 3Df)$	$(2N - Df) \times (2N - Df)$
{B}	$(4N - 2Df) \times 1$	$(6N - 3Df) \times 1$	$(2N - Df) \times 1$
{Γ}	$(4N - 2Df) \times 1$	$(3N - 3Df) \times (3N - 3Df)$	$(2N - Df) \times 1$

## DESARROLLOS MATEMÁTICOS DEL MÉTODO

### B.1 VIBRACIONES VERTICALES

Las acciones originadas por las vibraciones verticales en la placa rígida que constituye la cabeza del elemento de cimentación se relacionan con la fuerza vertical, representada por la ecuación:

$$F_z = -2\pi \int_0^{r_0} \sigma_z|_{z=0} r dr \quad (\text{B.1.1})$$

siendo  $\sigma_z$  la amplitud del esfuerzo vertical, definido como

$$\sigma_z = (\lambda_j + 2G_j) \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda_j \left[ \frac{u}{r} + \frac{\partial u}{\partial r} \right] \quad (\text{B.1.2})$$

A partir de estas expresiones y para las condiciones de frontera establecidas se determinan las soluciones particular y homogénea para obtener la solución general. En ellas se deben mantener las condiciones de continuidad y frontera como se indica en el Capítulo V.

#### • Solución particular

La solución que satisface las condiciones de frontera inhomogéneas del sistema, donde se induce un desplazamiento vertical  $\Delta z = 1$ , se puede encontrar al utilizar en la ec.B.1.2 las relaciones siguientes:

$$u(r, z) = 0 \quad (\text{B.1.3})$$

$$w(r, z) = W(z)$$

resultando que el esfuerzo vertical  $\sigma_z$ , se define como,

$$\sigma_z = \frac{dW}{dz} (\lambda_j + 2G_j) \quad (\text{B.1.4})$$

que al sustituir en la ec.B.1.1, la expresión para determinar la fuerza vertical del sustrato  $j$  se define como ,

$$F_z = -2\pi \int_0^{r_0} \frac{dW}{dz} (\lambda_j + 2G_j) r dr \quad (\text{B.1.5})$$

obteniendo que la fuerza vertical total para esta solución, en la cabeza de la cimentación se determina por

$$F = -\pi \frac{dW}{dz} (\lambda_j + 2G_j) r^2 \quad (\text{B.1.6})$$

correspondiendo el subestrato  $j$  con el nivel de desplante  $Df$ .

### • Solución homogénea

La solución homogénea, donde se establece que  $\Delta z = 0$ , se puede determinar al sustituir en la ec.B.1.2 las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} u(r, z) &= kU(z)J'_0(kr) \\ w(r, z) &= -ikW(z)J_0(kr) \end{aligned} \quad (\text{B.1.7})$$

obteniendo que la ecuación de esfuerzo  $\sigma_z$  queda representada por

$$\sigma_z = -kJ_0(kr) \left[ i \frac{dW}{dz} (\lambda_j + 2G_j) + kU(z)\lambda_j \right] \quad (\text{B.1.8})$$

a partir de las relaciones

$$J'_0(kr) = -J_1(kr) + \frac{0}{kr} J_0(kr) \quad (\text{B.1.9})$$

$$J'_1(kr) = J_0(kr) - \frac{1}{kr} J_1(kr) \quad (\text{B.1.10})$$

Al sustituir la ec.B.1.8 en la ec.B.1.1 se tiene que la expresión de fuerza asociada al desplazamiento vertical, queda definida por,

$$Fz = -2\pi \int_0^{r_0} \left( kJ_0(kr) \left[ i \frac{dW}{dz} (\lambda_j + 2G_j) + kU(z)\lambda_j \right] \right) r dr \quad (\text{B.1.11})$$

donde al considerar que

$$\int_0^{r_0} J_0(r) r dr = \frac{1}{k} \int_0^{r_0} J_0(kr) r dr = \frac{r_0}{k} J_1(kr_0) \quad (\text{B.1.12})$$

la fuerza vertical para el estrato  $j$  coincidente con la posición de la cabeza de la cimentación resulta ser,

$$F_z = 2\pi r_0 J_1(kr_0) \left[ kU(z)\lambda_j + i \frac{dW}{dz} (\lambda_j + 2G_j) \right] \quad (\text{B.1.13})$$

Además de las acciones en la cabeza de la cimentación, se tienen las acciones generadas en el contacto pared del cemento-suelo. La fuerza asociada al desplazamiento vertical para este tipo de movimiento, se establece considerando que se trata de vibraciones simétricas con número de Fourier  $n = 0$ , obteniendo que la componente en esta dirección esta representada por:

$$F_z = F_j(w) \cos(n\theta) = F_j(w) \quad (\text{B.1.14})$$

con ello, la integración de las fuerzas verticales  $F_j(w)$  asociadas al desplazamiento en el nodo  $j$ , se obtiene a partir de,

$$F_z^j = - \int_0^{2\pi} F_j(w) d\theta \quad (\text{B.1.15})$$

resultando que la fuerza vertical para el sustrato  $j$  en todo el perímetro de la cimentación es

$$F_z^j = -2\pi F_j(w) \quad (\text{B.1.16})$$

y la fuerza total para todos los sustratos involucrados desde la superficie y hasta la profundidad de enterramiento se expresa como

$$F_z = -2\pi \sum_{j=1}^{Df} F_j(w) \quad (\text{B.1.17})$$

## B.2 VIBRACIONES HORIZONTALES

Las acciones en la cabeza de la cimentación debidas a vibraciones de tipo horizontal corresponden a la fuerza horizontal  $F_x$  y al momento acoplado por cabeceo  $M$ , las que se definen a través de las siguientes relaciones:

$$F_x = -\pi \int_0^{r_0} \bar{\tau}_{zr} \Big|_{z=0} r dr - \pi \int_0^{r_0} \bar{\tau}_{\theta z} \Big|_{z=0} r dr \quad (\text{B.2.1})$$

$$M = \pi \int_0^{r_0} \sigma_z \Big|_{z=0} r^2 dr \quad (\text{B.2.2})$$

donde las amplitudes de los esfuerzos involucrados se expresan como,

$$\begin{aligned}\bar{\tau}_{zr} &= G_j \left[ \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial r} \right] \\ -\bar{\tau}_{\theta z} &= -G_j \left[ \frac{\bar{w}}{r} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right]\end{aligned}\quad (\text{B.2.3})$$

$$\bar{\sigma}_z = \left[ \lambda_j \bar{\varepsilon} + 2G_j \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right]$$

con

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} + \frac{\bar{u}}{r} - \frac{\bar{v}}{r} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z}\quad (\text{B.2.4})$$

La solución general del sistema se construye con las soluciones particular y homogénea, cuyo desarrollo se muestra en los siguientes párrafos, donde se deben mantener las condiciones de continuidad y frontera como se indica en el Capítulo IV.

• ***Solución particular***

La solución que satisface las condiciones de frontera inhomogéneas del sistema donde  $\Delta_x = 1$  y  $\phi = 0$ , se puede encontrar al sustituir  $\bar{u}$ ,  $\bar{w}$ ,  $\bar{v}$  de las ecuaciones B.2.3 y B.2.4 por

$$\begin{aligned}\bar{u}(r, z) &= U(z) \\ \bar{w}(r, z) &= 0 \\ \bar{v}(r, z) &= U(z)\end{aligned}\quad (\text{B.2.5})$$

resultando que para los esfuerzos involucrados en la fuerza horizontal,

$$\bar{\tau}_{zr} = \bar{\tau}_{\theta z} = G_j \frac{dU}{dz}\quad (\text{B.2.6})$$

Al sustituir B.2.6 en B.2.1, se obtiene la fuerza  $F_x$  mediante la ecuación:

$$F_x = -\pi \int_0^{r_0} G_j \frac{dU}{dz} r dr - \pi \int_0^{r_0} G_j \frac{dU}{dz} r dr\quad (\text{B.2.7})$$

resultando que,

$$F_x = -\pi r_0^2 G_j \frac{dU}{dz} \quad (\text{B.2.8})$$

donde al considerar la profundidad de desplante de la cimentación coincidente con el sustrato de apoyo de la cabeza del elemento, se tiene que  $j = Df$

• **Solución homogénea**

La solución para el caso donde  $\Delta_x = 0$  y  $\phi = 0$ , se puede determinar al sustituir en las ecs.B.2.3 y B.2.4 las variables  $\bar{u}, \bar{w}, \bar{v}$  por las expresiones que corresponden a los problemas plano y antiplano.

Para el problema plano se debe utilizar:

$$\begin{aligned} \bar{u}(r, z) &= kU(z)J_1'(kr) \\ \bar{w}(r, z) &= -ikW(z)J_1(kr) \\ \bar{v}(r, z) &= \frac{1}{r}U(z)J_1(kr) \end{aligned} \quad (\text{B.2.9})$$

de donde las ecuaciones de esfuerzo resultantes se definen como,

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_{\theta z} &= \frac{1}{r}J_1(kr)G_j \left( \frac{dU}{dz} - ikW(z) \right) \\ \bar{\tau}_{zr} &= kJ_1'(kr)G_j \left( \frac{dU}{dz} - ikW(z) \right) \\ \bar{\sigma}_z &= -kJ_1(kr) \left[ kU(z)\lambda_j + i \frac{dW}{dz} (\lambda_j + 2G_j) \right] \end{aligned} \quad (\text{B.2.10})$$

en ellas se consideró que

$$\bar{\varepsilon} = -kJ_1(kr) \left[ kU(z) + i \frac{dW}{dz} \right] \quad (\text{B.2.11})$$

Al aplicar las expresiones que definen a los esfuerzos  $\bar{\tau}_{\theta z}$  y  $\bar{\tau}_{zr}$ , se tiene que la fuerza horizontal ante este tipo de vibraciones queda establecida por la ecuación:

$$F_x = -\pi \int_0^{r_0} \left( G_j k J_1'(kr) \frac{dU}{dz} - i G_j k^2 W J_1'(kr) \right) r dr - \pi \int_0^{r_0} \left( \frac{1}{r} G_j J_1(kr) \frac{dU}{dz} - \frac{i}{r} G_j k W J_1(kr) \right) r dr \quad (\text{B.2.12})$$

donde al considerar que

$$J_1'(kr) = J_0(kr) - \frac{1}{kr} J_1(kr) \quad (\text{B.2.13})$$

$$\int_0^{r_0} J_0(r) dr = \frac{1}{k} \int_0^{r_0} r J_0(kr) dr = \frac{r_0}{k} J_1(kr_0) \quad (\text{B.2.14})$$

se obtiene que

$$F_x = -\pi r_0 J_1(kr_0) G_j \left( \frac{dU}{dz} - ikW(z) \right) \quad (\text{B.2.15})$$

donde  $j$  se asocia con el sustrato donde se ubica la cabeza de la cimentación.

Por otra parte, al sustituir el esfuerzo  $\sigma_z$  en la ecuación B.2.2, se tiene que el momento por cabeceo asociado se calcula al resolver

$$M = \pi \int_0^{r_0} \left( -kJ_1(kr) \left[ kU(z)\lambda_j + i \frac{dW}{dz} (\lambda_j + 2G_j) \right] \right) r^2 dr \quad (\text{B.2.16})$$

donde al considerar que,

$$\int_0^{r_0} r^2 J_1(r) dr = \frac{1}{k} \int_0^{r_0} r^2 J_1(kr) dr = \frac{r_0^2}{k} J_2(kr_0) \quad (\text{B.2.17})$$

se obtiene que

$$M = -\pi r_0^2 J_2(kr_0) \left[ kU(z)\lambda_j + i \frac{dW}{dz} (\lambda_j + 2G_j) \right] \quad (\text{B.2.18})$$

Para el problema antiplano  $\bar{u}, \bar{w}, \bar{v}$  se definen como

$$\begin{aligned} \bar{u}(r, z) &= \frac{1}{r} V(z) J_1(kr) \\ \bar{w}(r, z) &= 0 \\ \bar{v}(r, z) &= kV(z) J_1'(kr) \end{aligned} \quad (\text{B.2.19})$$

resultando que  $\bar{\varepsilon} = 0$  y por tanto,

$$\bar{\tau}_{zr} = \frac{1}{r} J_1(kr) \frac{dV}{dz} G_j$$

$$\bar{\tau}_{\theta z} = k J_1'(kr) \frac{dV}{dz} G_j \quad (\text{B.2.20})$$

$$\bar{\sigma}_z = 0$$

Sustituyendo  $\bar{\tau}_{\theta z}$  y  $\bar{\tau}_{zr}$  en la ec.B.2.1, la fuerza horizontal se define como

$$F_x = -\pi \int_0^{r_0} J_1(kr) \frac{dV}{dz} G_j dr - \pi \int_0^{r_0} k J_1'(kr) \frac{dV}{dz} G_j r dr \quad (\text{B.2.21})$$

de donde al utilizar nuevamente las ecs. B.2.13 y B.2.14, se obtiene que

$$F = -\pi r_0 J_1(kr_0) \frac{dV}{dz} G_j \quad (\text{B.2.22})$$

Adicionalmente, al sustituir  $\sigma_z$  en la ec.B.2.2, se tiene que

$$M = 0 \quad (\text{B.2.23})$$

Por otra parte, al considerar las vibraciones simétricas para el número de Fourier  $n = 1$ , las fuerzas asociadas a las direcciones  $r, \theta, z$  en el contacto pared de cimentación-suelo se representan como,

$$F_r = F_j(u) \cos \theta$$

$$F_{r\theta} = F_j(v) \text{sen} \theta \quad (\text{B.2.24})$$

$$F_z = F_j(w) \cos \theta$$

donde  $F_j(u), F_j(v), F_j(w)$  indican las fuerzas que corresponden al nodo  $j$  en las direcciones radial, tangencial y vertical, respectivamente.

Bajo estas condiciones y tomando en cuenta la proyección de las fuerzas  $F_r, F_{r\theta}$  en la dirección  $x$ , la fuerza horizontal en la pared de la cimentación para el substrato  $j$  resulta de la siguiente integración

$$F_x^j = \int_0^{2\pi} F_j(u) \cos^2 \theta d\theta + \int_0^{2\pi} F_j(v) \text{sen}^2 \theta d\theta \quad (\text{B.2.25})$$

que al resolverla se tiene que,

$$F_x^j = -\pi(F_j(u) + F_j(v)) \quad (\text{B.2.26})$$

Al involucrar todos los nodos hasta la profundidad de desplante, la fuerza horizontal total en el contacto pared de la cimentación-suelo, se expresa como

$$F_x = -\pi \left( \sum_{j=1}^{Df} F_j(u) + \sum_{j=1}^{Df} F_j(v) \right) \quad (\text{B.2.27})$$

Adicionalmente, el momento por cabeceo generado por las fuerzas en la pared de la cimentación se obtiene a partir de la ecuación siguiente:

$$M^j = (z_{Df} - z_j) \left\{ \int_0^{2\pi} F_j(u) \cos^2 \theta d\theta + \int_0^{2\pi} F_j(v) \sin^2 \theta d\theta \right\} + (R \cos \theta) \left\{ \int_0^{2\pi} F_j(w) \cos \theta d\theta \right\} \quad (\text{B.2.28})$$

siendo que para el substrato  $j$ , tal momento se representa por

$$M^j = -\pi \left\{ (z_{Df} - z_j) (F_j(u) + F_j(v)) + R F_j(w) \right\} \quad (\text{B.2.29})$$

Incluyendo todos los substratos hasta la profundidad donde se ubica el desplante de la cabeza de la cimentación  $z_{Df}$ , el momento total se evalúa por la siguiente expresión

$$M = -\pi \left[ (z_{Df} - z_j) \left( \sum_{j=1}^{Df} F_j(u) + \sum_{j=1}^{Df} F_j(v) \right) + R \sum_{j=1}^{Df} F_j(w) \right] \quad (\text{B.2.30})$$

### B.3 VIBRACIONES TORSIONALES

Las vibraciones torsionales se relacionan con el momento ocasionado por el giro de la cabeza de la cimentación alrededor del eje vertical, representado por la siguiente ecuación:

$$M = -2\pi \int_0^{r_0} \tau_{\theta z} \Big|_{z=0} r^2 dr \quad (\text{B.3.1})$$

donde la amplitud del esfuerzo  $\tau_{\theta z}$  se define como

$$\tau_{\theta z} = G_j \frac{\partial v}{\partial z} \quad (\text{B.3.2})$$

Con base en estas expresiones y para las diferentes condiciones de frontera se determinan las soluciones particular y homogénea con el fin de obtener la solución general. En ellas se deben mantener las condiciones de frontera y continuidad, como se indica en el Capítulo V.

• **Solución particular**

La solución que satisface las condiciones de frontera inhomogéneas del sistema, donde se establece que  $\phi = 1$ , se encuentra al aplicar la relación

$$v(r, z) = rV(z) \quad (\text{B.3.3})$$

en la ecuación de esfuerzo  $\tau_{\theta z}$  (ec.B.3.2), obteniendo que,

$$\tau_{\theta z} = rG_j \frac{dV}{dz} \quad (\text{B.3.4})$$

Al introducir esta relación en la ec.B.3.1, se tiene que la expresión para evaluar el momento en el substrato  $j$  queda establecida como,

$$M = -2\pi \int_0^{r_0} G_j \frac{dV}{dz} r^3 dr \quad (\text{B.3.5})$$

obteniendo que el momento en la cabeza de la cimentación se cuantifica mediante

$$M = -\frac{\pi}{2} G_j \frac{dV}{dz} r^4 \quad (\text{B.3.6})$$

donde el substrato  $j$  corresponde con el nivel de desplante de la cabeza del elemento  $Df$ .

• **Solución homogénea**

Para esta solución, donde  $\phi = 0$ , se recurre a la superposición de modos, sustituyendo en la ec.B.3.2 la relación siguiente:

$$v(r, z) = kV(z)J'_0(kr) \quad (\text{B.3.7})$$

obteniendo que al remplazarla en la ecuación de esfuerzo,  $\tau_{\theta z}$  queda definido como

$$\tau_{\theta z} = kJ'_0(kr) \frac{dV}{dz} G_j \quad (\text{B.3.8})$$

Incluyendo esta expresión en la ec.B.3.1 se tiene que la expresión de fuerza asociada al giro, se define por,

$$M = -2\pi \int_0^{r_0} G_j kJ'_0(kr) \frac{dV}{dz} r^2 dr \quad (\text{B.3.9})$$

donde al considerar que

$$J'_0(kr) = -J_1(kr) + \frac{0}{kr} J_0(kr) \quad (\text{B.3.10})$$

$$\int_0^{r_0} J_1(kr)r^2 dr = \frac{1}{k} \int_0^{r_0} J_1(kr)r^2 dr = \frac{r_0^2}{k} J_2(kr_0) \quad (\text{B.3.11})$$

el momento resultante para el estrato  $j$  coincidente con el desplante de la cimentación se representa por,

$$M = 2\pi r_0^2 J_2(kr_0) \frac{dV}{dz} G_j \quad (\text{B.3.12})$$

Además de las acciones en la cabeza de la cimentación, se tienen las acciones generadas en el contacto pared del cimiento-suelo. La fuerza asociada al giro por torsión para este tipo de movimiento, se establece considerando que se trata de vibraciones antisimétricas y con número de Fourier  $n = 0$ , obteniendo que la componente única distinta de cero en la dirección de interés esta representada por:

$$F_{r\theta} = F_j(v) \cos(n\theta) = F_j(v) \quad (\text{B.3.13})$$

con ello, la integración de las fuerzas tangenciales  $F_j(v)$  asociadas a la torsión en el nodo  $j$ , se obtiene a partir de,

$$F_{r\theta}^j = - \int_0^{2\pi} F_j(v) d\theta \quad (\text{B.3.14})$$

resultando que la fuerza tangencial para el sustrato  $j$  en todo el perímetro de la cimentación es,

$$F_{r\theta}^j = -2\pi F_j(v) \quad (\text{B.3.15})$$

y la fuerza total para todos los sustratos involucrados desde la superficie y hasta la profundidad donde se ubica la cabeza de la cimentación se expresa como

$$F_{r\theta} = -2\pi \sum_{j=1}^{Df} F_j(v) \quad (\text{B.3.16})$$

## NOTACIÓN

La notación empleada para este proyecto de investigación es la siguiente:

$j$	=	índice correspondiente al número de estrato
$l$	=	índice correspondiente al modo
$N$	=	número de substratos del depósito
$M$	=	número de estratos del depósito
$\rho$	=	densidad de masa
$\mu$	=	relación de Poisson
$\beta$	=	velocidad de propagación de ondas de corte
$G, \lambda$	=	módulos de Lamé para un sólido con comportamiento viscoelástico
$G', \lambda'$	=	módulos de Lamé para un sólido con comportamiento elástico
$\zeta$	=	amortiguamiento material del suelo, en fracción del crítico
$h_j$	=	espesor del substrato $j$
$h, H$	=	espesor del depósito
$r_0, R$	=	radio de la cimentación
$d$	=	diámetro de la cimentación
$z_{df}, D$	=	profundidad de desplante del cimiento
$\tilde{A}^j, \tilde{B}^j, \tilde{G}^j, \tilde{M}^j$	=	matrices para el estrato $j$ en función de su geometría y propiedades
$\tilde{A}, \tilde{G}, \tilde{M}$	=	matrices ensambladas del sistema
$\omega$	=	frecuencia de excitación
$\eta$	=	$\omega d / \beta$ frecuencia adimensional
$t$	=	tiempo
$k$	=	número de onda
$n$	=	número de Fourier, orden de una ecuación
$x, y, z$	=	coordenadas del sistema cartesiano
$r, \theta, z$	=	coordenadas del sistema cilíndrico
$v$	=	componente de desplazamiento en dirección $y$
$u$	=	componente de desplazamiento en dirección $x$
$w$	=	componente de desplazamiento en dirección $z$
$\tau$	=	amplitud de esfuerzo cortante
$\sigma$	=	amplitud de esfuerzo normal
$V$	=	amplitud modal del desplazamiento en dirección $y$
$U$	=	amplitud modal del desplazamiento en dirección $x$
$W$	=	amplitud modal del desplazamiento en dirección $z$
$\tilde{\Delta}$	=	vector de amplitudes de desplazamiento

$\tilde{F}$	=	vector de amplitudes de esfuerzo
$\tilde{U}$	=	vector de desplazamientos nodales
$\tilde{W}$	=	matriz de amplitudes modales
$\tilde{\Gamma}$	=	vector de factores de participación modal
$P^j$	=	fuerza nodal
$N^j$	=	función de forma para el nodo $j$
$\tilde{P}$	=	vector de fuerzas modales
$\Psi, \Phi$	=	matrices relacionadas con las amplitudes modales
$\tilde{F}$	=	fuerzas nodales consistentes
$C_n$	=	solución a la ecuación de Bessel de orden $n$
$\gamma$	=	argumento en la solución a la ecuación de Bessel
$J_n$	=	función de Bessel de orden $n$
$H_n^2$	=	función de Hankel de segunda especie y orden $n$
$\phi$	=	amplitud de la rotación del cimientto
$M$	=	momento en cimentación por rotación
$\Delta_z$	=	amplitud de la traslación vertical del cimientto
$\Delta_x$	=	amplitud de la traslación horizontal del cimientto en la dirección $x$
$F_x$	=	fuerza horizontal del cimientto en la dirección $x$
$F_z$	=	fuerza vertical en la cimentación
$\bar{u}, \bar{w}, \bar{v}$	=	amplitudes de desplazamiento en las direcciones radial, axial y tangencial para los casos plano y antiplano
$F_{Df}$	=	esfuerzo generado en la base del cimientto
$M_{Df}$	=	momento generado en la base del cimientto
$F_{CABEZA}$	=	fuerza total en la cabeza del cimientto
$F_{PARED}$	=	fuerza total actuando en la pared de la cimentación
$M_{PARED}$	=	momento total generado por las fuerzas en la pared de la cimentación
$M_{CABEZA-1}$	=	momento en la cabeza del cimientto evaluado por solución particular
$M_{CABEZA-2}$	=	momento en la cabeza del cimientto evaluado por superposición modal
$F_{CABEZA-1}$	=	fuerza en la cabeza del cimientto evaluado por solución particular
$F_{CABEZA-2}$	=	fuerza en la cabeza del cimientto evaluado por superposición modal
$F_{CABEZA-2P}$	=	fuerza total en la cabeza del cimientto para el problema plano
$M_{CABEZA-2P}$	=	momento total en la cabeza del cimientto para el problema plano
$F_{CABEZA-2A}$	=	fuerza total en la cabeza del cimientto para el problema antiplano
$M_{CABEZA-2A}$	=	momento total en la cabeza del cimientto para el problema antiplano
$p(t)$	=	$Pe^{i\omega t}$ excitación armónica
$x(t)$	=	$Xe^{i\omega t}$ respuesta en estado estacionario

$K, C, M$	=	rigidez, amortiguamiento y masa de un sistema de un grado de libertad
$k, c$	=	coeficientes dinámicos de rigidez y amortiguamiento
$\omega_0$	=	frecuencia natural del sistema de un grado de libertad
$\xi$	=	amortiguamiento del sistema de un grado de libertad
$\tilde{K}, K$	=	rigidez dinámica o función de impedancia
$K^0$	=	rigidez estática
$e$	=	2.7182.... base del logaritmo natural
$i$	=	$\sqrt{-1}$ unidad imaginaria
$\nabla^2$	=	operador Laplaciano
$\varepsilon$	=	amplitud de la dilatación
$\infty$	=	valor numérico infinito
$\pi$	=	relación genérica entre la circunferencia y diámetro de un círculo
$\text{Re}[\bullet]$	=	parte real
$\text{Im}[\bullet]$	=	parte imaginaria