UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA

DESARROLLO DE UN MODELO DE LOCALIZACIÓN DE SERVICIOS BINIVEL Y SU ALGORITMO DE SOLUCIÓN

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE

MAESTRA EN INGENIERÍA

CAMPO DE CONOCIMIENTO: INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

P R E S E N T A :

ZAIDA ESTEFANÍA ALARCÓN BERNAL

TUTOR:

DR. RICARDO ACEVES GARCÍA

2012

JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dra. Idalia Flores de la Mota

Secretario: Dra. Mayra Elizondo Cortés

Vocal: Dr. Ricardo Aceves García

1er Suplente: M. I. Isabel Patricia Aguilar Juárez

2do Suplente: Dr. Servio Tulio Guillén Burguete

Lugar donde se realizó la tesis: México, Distrito Federal

TUTOR DE TESIS:

Dr. Ricardo Aceves García

____

FIRMA

CONTENIDO

RESUMEN

En esta tesis se presenta un modelo de localización de servicios en redes para un tipo de problema que ha sido planteado originalmente como uno con múltiples objetivos, denominado problema multinivel.

La estrategia para resolver los problemas multiobjetivo, ha sido útil en situaciones donde se tiene más de un objetivo y que en muchos casos pueden ser contradictorios. Este planteamiento ha fallado porque no considera la importancia de cada objetivo con respecto al otro, por lo cual, surge la programación multinivel, la cual permite jerarquizar a los objetivos y resolver los problemas por etapas, priorizando cada objetivo acorde con las necesidades del tomador de decisiones.

En un problema de localización de servicios, el modelo contempla dos objetivos principales de distribución en redes: inversión mínima en el menor tiempo posible de distribución; de los cuales el primero tiene prioridad, por lo que se considera un problema jerarquizado, el cual puede resolverse mediante programación multinivel.

Para su resolución, se utiliza un algoritmo de separación y relajación para programación binivel entera binaria con la intención de encontrar una solución exacta al modelo planteado.

Se utiliza la formulación del modelo de localización en redes binivel para un caso de estudio, aplicado a las unidades médicas del Instituto de Salud del Estado de México, ubicadas en la jurisdicción Teotihuacan del Estado de México, con la finalidad de mostrar cómo funciona el modelo.

INTRODUCCIÓN

Numerosas organizaciones enfocan algunas decisiones en la localización estratégica de sus instalaciones, de tal manera que se optimicen los beneficios, tanto para quienes reciben el servicio, como para quienes lo ofrecen. Muchos sistemas operacionales pueden modelarse como redes y en algunos casos, el problema involucra la ubicación de algún servicio para satisfacer la demanda de uno o varios clientes.

En modelos de transporte, los arcos de la red representan caminos; en modelos de comunicación, corresponden a canales de comunicación y en modelos de operaciones pueden denotar secuencias de tareas (Handler, 1979). Los nodos pueden ser puntos de demanda, de oferta o de conexión en el caso de modelos de transporte; en modelos de comunicaciones, pueden ser individuos o estaciones; en modelos operacionales, pueden ser operaciones secuenciadas.

En un modelo de localización, el objetivo es ubicar un conjunto de servicios que abastecen a un conjunto de clientes dispersos en una región. Los problemas de localización pueden ser clasificados de diferentes maneras: de acuerdo al criterio de optimalidad, tipos de redes, localización simple o de múltiples instalaciones y combinaciones de éstos.

Sin embargo, la mayoría de los trabajos encontrados sobre teoría de localización, se enfocan a la solución del problema enfatizando en un sólo criterio, que generalmente se refiere a la minimización de distancias (costos, tiempos de viaje, distancia física, etcétera) o múltiples criterios considerados con la misma importancia.

Los problemas con múltiples objetivos son útiles para resolver situaciones con más de un objetivo. El incluir múltiples criterios presenta dos grandes avances respecto a la modelación tradicional: se puede visualizar una mayor cantidad de alternativas para la toma de decisiones y se considera más realista la percepción del problema que está siendo modelado.

La planeación multiobjetivo falla porque no toma en cuenta la importancia de cada criterio con respecto a los otros. Es por ello que surge la programación multinivel. Los problemas multinivel jerarquizan los objetivos, y permiten resolver los problemas por etapas, priorizando cada objetivo acorde a las necesidades del tomador de decisiones. Un caso particular de la programación multinivel, es la programación binivel.

El modelo de programación binivel tratacon problemas de optimización jerárquicos, que tienen un segundo problema de optimización (seguidor) como parte de sus restricciones. En todos los casos, el problema de “nivel superior” o “líder”, se usa para reflejar el objetivo de alcanzar cierta meta que no se puede realizar, sin considerar la reacción del problema seguidor (Dempe, 2002).

En el presente trabajo, se propone la utilización de un modelo de localización de servicios en redes con dos objetivos, considerando que se tiene una jerarquía en los mismos y uno depende de la solución del otro. El modelo contempla dos objetivos principales: satisfacción de demanda y mínima inversión.

El objetivo de este trabajo es modelar como programa binivel, un problema de localización de servicios en redes planteado originalmente como uno con múltiples objetivos y utilizar un algoritmo que permita resolver el problema con esta estructura para encontrar una solución óptima para cada decisor bajo cada criterio considerado.

La tesis se encuentra estructurada de la siguiente manera: en el capítulo 1 se presenta una reseña histórica de los principales trabajos que sirvieron como base para el desarrollo del modelo. En el capítulo 2 se presentan problemas de localización de servicios en redes y la formulación de los mismos. Debido al planteamiento del modelo como binivel, en este capítulo también se introducen conceptos sobre programación multinivel, con la finalidad de entender las herramientas que se utilizarán para la formulación y solución del modelo.

Para conocer el algoritmo de solución, en el capítulo 3 se presentan dos métodos existentes para resolver programas binivel discretos. Con el fin de formalizar el problema considerado, en el capítulo 4 se presenta el modelo matemático de localización de servicios binivel en redes aplicado a un caso de estudio, así como la solución al mismo. El trabajo finaliza con las conclusiones de los resultados obtenidos.

CAPÍTULO I

ANTECEDENTES

La teoría de localización se centra en las preguntas dónde y por qué localizar determinado servicio en alguna región. El problema de localización de servicios es muy antiguo en la literatura matemática, sin embargo, se dice que la teoría de localización moderna inicia con Alfred Weber (1929), que presentó una caracterización de la localización triangular y la discusión del concepto del punto mínimo.

En 1956 Ealter Isard (1956), menciona el problema considerando una fuente para cada área de demanda; y es hasta los trabajos de Kuhn y Kuenne (1962), que el problema se considera tratado y resuelto.

Al problema de localización se le ha vinculado fuertemente con las técnicas de optimización debido a los contextos en los que surge, pudiéndose utilizar para su análisis y solución, programación lineal, programación entera, programación no lineal, etcétera.

En los modelos de localización, hay ocasiones en los que se presenta más de una función objetivo. Los problemas con múltiples criterios son útiles para resolver situaciones con más de un objetivo. Este tipo de modelación presenta dos grandes avances respecto a la modelación tradicional: se puede visualizar una mayor cantidad de alternativas para la toma de decisiones y se torna más realista la percepción del problema que está siendo modelado.

El trabajo realizado por Sang Lee (1981), presenta un análisis del modelo de localización de servicios con objetivos múltiples y conflictivos, el cual fue resuelto como un problema de programación por metas.

Otra estrategia para plantear y resolver los problemas de localización de servicios considerando múltiples objetivos y además, tomando en cuenta la prioridad de los mismos, es la programación multinivel.

Un caso especial de la programación multinivel, son los problemas de programación binivel (BLPP), donde se tratan problemas jerárquicos de dos niveles, es decir, problemas de optimización que tienen un segundo problema de optimización como parte de sus restricciones. En todos los casos, el problema de “nivel superior” o “líder”, se usa para reflejar el objetivo de alcanzar cierta meta y el sentido de la programación binivel es que, no se puede lograr el objetivo, sin considerar la reacción de la parte subalterna de las decisiones (problema de nivel inferior o seguidor).

Este tipo de modelos surge de dos fuentes principales: una extensión de la programación matemática y la generalización de un problema particular de la teoría de juegos: el juego de Stackelberg.

El modelo de Stackelberg es un juego estratégico en economía, en el cual, el primer jugador realiza un movimiento y el siguiente jugador reacciona racionalmente a la elección del primero. El modelo recibe el nombre de quien lo propuso, Heinrich Freiherr von Stackelberg, en su libro *Market Structure and Equilibrium* (Stackelberg, 1934).

Este juego posee una estructura jerárquica similar a los problemas de programación binivel. En este caso, la ganancia de un jugador no implica la pérdida del otro, los jugadores toman decisiones en un orden específico, el segundo jugador reacciona racionalmente a la decisión del primero y ambos jugadores tienen información perfecta sobre estrategias y pagos.

El planteamiento como programa matemático, aparece inicialmente en los trabajos de Bracken y McGill (1973) y se consideraron como problemas matemáticos con problemas de optimización en las restricciones. Como programas binivel y multinivel, fueron introducidos por Candler y Norton (1977). Pero fue hasta la de década de 1980 que se empezó a prestar atención a este tipo de problemas.

Basándose en el juego de Stackelberg, la formulación general de un problema de programación binivel, apareció por primera vez en la publicación de Aiyoshi y Shimizu en 1981 (Aiyoshi, 1981). A partir de entonces, varios autores han estudiado y contribuido al desarrollo de la programación binivel, desarrollando múltiples trabajos, entre éstos destacan: Bard y Falk, Bialas, Karwan y Shawn, Candler, Fortuny-Amat, McCarl, Norton y Townley y Wen.

A través de la literatura, se han sugerido muchas condicionantes de optimalidad para los BLPP. Bard (1984) propuso una equivalencia con los programas matemáticos de un nivel, obteniendo un conjunto infinito y paramétrico de restricciones, lo que llevó a que los algoritmos basados en las condiciones sugeridas no convergieran.

Algunos autores, como Chen y Florian (1991), Ishizuka (1988), Ye y Zhu (1993), Outrata (1993) y Dempe (1992) usaron un análisis de funciones no diferenciables; Bi y Calamai (1991) analizaron la relación entre el BLPP y una función de penalización exacta asociada. Ambos caminos derivaron en condiciones de optimalidad necesarias y suficientes, adicionales a las propuestas por Bard.

Considerando la geometría en la estructura del problema, Savard y Gauvin (1990) han propuesto condiciones de optimalidad basadas en el concepto de la dirección de descenso más pronunciada. Vicente y Calamai (Vicente, 1994), han propuesto condiciones de optimalidad, basadas en la geometría del BLPP, que son generalizaciones de las condiciones de primer y segundo orden de la programación matemática.

En cuanto a la complejidad, es suficiente con observar la versión más simple de un BLPP. Para el BLPP lineal. Jeroslow (1985) mostró que es NP-Hard. Años después, Bard (1991) y Ben-Ayed y Blair (1990) confirmaron este resultado haciendo pruebas más cortas. El resultado más acertado, en cuanto a complejidad, se debe a Hansen, Jaumard y Savard (1992), donde se establece que el BLPP lineal es fuertemente NP-Hard.

Los algoritmos presentados para resolver el BLPP lineal pueden dividirse en cinco clases: algoritmos de punto extremo, de ramificación y acotamiento, métodos de descenso, métodos de función de penalización y algoritmos de complementariedad con pivoteo (Vicente, 1994). Más recientemente se han sugerido métodos de aproximación para resolver problemas de programación binivel, incluso utilizando algún tipo de software (Colson, 2002).

La estructura particular de los programas binivel y multinivel, facilita la formulación de un gran número de problemas prácticos, que involucran un proceso de decisión jerárquico. Algunos ejemplos de las aplicaciones de la programación multinivel son el problema de diseño de una red (LeBlanc, 1986) y problemas de demanda estimada de viajes (Chen, 1991); coordinación de firmas multidivisionales (Bard, 1983) y la aplicación de políticas agrícolas (Candler, 1981).

La programación binivel representa un campo muy amplio e interesante de la programación matemática. A pesar de tener importantes resultados y avances, éstos se dirigen principalmente al BLPP continuo, lo que la vuelve un área muy fértil para la investigación.

CAPÍTULO II

LOCALIZACIÓN DE SERVICIOS Y PROGRAMACIÓN BINIVEL

En la práctica, frecuentemente aparecen problemas que se refieren a como atender a un conjunto de usuarios. Lo que se desea determinar es el número, localización y tamaño de las fuentes de servicio que puedan servir a los usuarios más económicamente, además, el considerar sólo un criterio para tomar una decisión, resulta insuficiente. Sin embargo, la posibilidad de considerar múltiples criterios que incluso pueden ser jerarquizados, de acuerdo a la importancia dada por el tomador de decisiones, permite construir un modelo matemático más cercano a un problema real.

2.1 LOCALIZACIÓN DE SERVICIOS

En esta sección se presentan tres tipos de problemas de localización de servicios con su formulación matemática, con la finalidad de entender las herramientas que se utilizarán para la formulación y solución del modelo.

2.1.1 TEORÍA DE LOCALIZACIÓN

La Teoría de Localización es una rama de la Investigación de Operaciones que propone modelos matemáticos y desarrolla modelos específicos para resolver problemas de ubicación geográfica. Esta teoría proporciona a los decisores herramientas cuantitativas, para encontrar la mejor ubicación donde establecer uno o más servicios, de tal manera que se optimice algún criterio. Estos criterios generalmente están relacionados con la distancia y el tiempo, que se utilizan como medidas de costo.

A lo largo de la historia, las personas han “formulado” problemas de cómo localizar algunas instalaciones, con relación a otros establecimientos y los usuarios a los que van a servir. Sin embargo, la utilización de modelos abstractos para la solución de este tipo de problemas es relativamente reciente, y se estudian a través de la teoría de localización (Colebrook, 2006).

Los problemas de localización, en forma general, se pueden describir como un conjunto de clientes distribuidos espacialmente, que demandan un producto o servicio determinado. La demanda de los clientes debe ser cubierta por una o varias instalaciones al menor costo posible.

En términos más formales, el problema general de localización de servicios, se puede establecer como: dada la localización de cada usuario, su demanda y los costos (tiempo, distancia, utilidad, presupuesto, etc.) de transporte, determinar el número de servicios, la ubicación geográfica y la capacidad de cada uno de ellos, de tal forma que, se optimicen costos de transporte, de funcionamiento, costos fijos de instalación, etcétera (Aceves, 1994).

Al final del proceso de decisión se establece, dónde se deben ubicar las instalaciones, tomando en cuenta los requerimientos de los clientes y las restricciones del problema planteado.

En los problemas de localización usualmente se da un conjunto $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$ de clientes y se buscan las localizaciones para un conjunto de nuevas instalaciones $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. La solución se puede evaluar por una función que relaciona a A y a X que puede escribirse como $c(A, X)$, esta función expresa tiempo, distancia, costo, preferencias, etcétera. Y la función objetivo a ser optimizada depende del vector $c(A, X)$ (Nickel, 2005).

Para el estudio del problema antes planteado, se ha desarrollado una teoría, en la cual se proponen tres áreas de investigación:

Localización continua. Las ubicaciones se encuentran en un espacio continuo, usualmente, en un espacio euclideo.

En este contexto, los conjuntos A y X definidos anteriormente, tienen el siguiente significado: A es un conjunto de m puntos en $\mathbb{R}^n$, X es un conjunto de n puntos en $\mathbb{R}^n$ y $c(A,X)$ se expresa en términos de medidas de distancias ponderadas de A a X.

Localización discreta. Se especifican a priori un número finito de posibles localizaciones en el espacio. También se denomina localización-asignación.

Los modelos de localización discreta involucran conjuntos finitos de ubicaciones candidatas y un número finito de clientes los cuales deben ser satisfechos cubriéndolos con las instalaciones.

En este caso, se define un conjunto $A = \{1, \dots, m\}$ de sitios candidatos y se construye una matriz de costos $C = [c_{kj}]_{k,j=1,\dots,m}$, donde c_{kj} es el costo de satisfacer el total de la demanda del cliente k por la instalación localizada en j.

Localización en redes. Son problemas que se plantean sobre redes, entendiendo a una red como un conjunto de nodos unidos por un conjunto de aristas, que representan conexiones entre esos puntos.

Para este modelo los conjuntos A y X definidos inicialmente, representan lo siguiente:A es un conjunto de vértices de la gráfica y X es un conjunto de p puntos donde se localizarán las nuevas instalaciones. La función $c(A,X)$ se expresará en términos de distancias ponderadas de A a X.

Para el desarrollo de la tesis se planteará un modelo matemático, que en una parte de su estructura, está planteado como un problema de localización en redes.

2.1.2 LOCALIZACIÓN EN REDES

Muchos sistemas de la vida real pueden ser modelados como redes. Por ejemplo, en los modelos de transporte los arcos representan calles y los nodos son puntos de demanda, de suministro o de intercambio de mercancía.

Para modelar adecuadamente problemas reales, se deben colocar los parámetros que sean necesarios en los nodos de la red (demanda, importancia, número de clientes, etc.) y en las aristas (distancia, tiempo, costo de tránsito, etc.), por eso al momento de modelar es importante considerar varios criterios.

Los objetivos que pueden perseguirse en un modelo de localización en redes (Handler, 1979) y que en consecuencia, pueden estar sujetos a análisis, pueden clasificarse de acuerdo con:

- La Función Objetivo
  - Optimizar el comportamiento promedio.
  - Minimizar el peor comportamiento posible.
  - Multicriterio.
- Número de Instalaciones
  - Única
  - Múltiples
- Tipo de Red
  - Determinista o probabilista.
  - Orientada o no orientada.
  - Cíclica o acíclica.
- Puntos de Demanda
  - Sólo en los nodos.
  - Cualquier lugar en la red.
- Sitios Factibles para las instalaciones
  - Restringidos a un conjunto de puntos discretos.
  - Cualquier lugar en la red.

El criterio más común es, optimizar la función objetivo. Este criterio también tiene algunas variantes según el objetivo que se persiga. En un problema de medianas el objetivo es, minimizar la suma de los costos de suministro a todos clientes, desde las instalaciones en los sitios seleccionados.

En un problema de centros, el objetivo es minimizar el costo máximo de suministro a un cliente, de entre todos los sitios seleccionados y sobre todos los clientes. El objetivo centdian, es una combinación convexa de los objetivos de medianas y centros y su objetivo involucra ambos, costo total y costo máximo minimizado.

Los modelos de localización en redes, tienen una estructura que se puede adaptar a un gran número de aplicaciones y son fácilmente conceptualizados. Además, la media de distancia utilizada es la denominada ruta más corta, lo cual se aplica a un gran número de problemas.

2.1.2.1 CRITERIO P-MEDIANA

Un criterio apropiado puede ser, minimizar la función de costos relacionando los tiempos de viaje y las distancias, y posiblemente otros atributos del viaje. Este tipo de criterios se conoce como medianas, donde un conjunto dado de centros de localización cubre a cada centro de demanda en el sistema y un conjunto óptimo minimiza el efecto negativo del viaje. Las localizaciones que optimizan un criterio como éste, se refieren a medianas en redes.

2.1.2.1.1 Modelo General

Supóngase que se tiene una red de transporte G dada, para la cual el conjunto de nodos V consiste en $\{v_1, v_2, \dots v_n\}$. Cada arco (i, j) de la red tiene un peso asociado $c(i, j)$. Los pesos son fijos si se trata de valores deterministas y aleatorios si se trata de una red probabilista.

En la mayoría de los problemas de localización de medianas, la red se construye de tal manera que, los centros de demanda están ubicados en los nodos, por lo que cada nodo

v_i tiene asociada una tasa de demanda $g(i)$. Las tasas de demanda pueden ser: frecuencias, como número de llamadas por día o probabilidades, como la probabilidad de que se reciba una llamada en un tiempo determinado.

Las tasas de demanda pueden normalizarse de la siguiente forma:

$$g(1) + g(2) + \cdots + g(n) = 1$$

Es decir, la probabilidad condicional de que la llamada sea del nodo v_1 dado que se recibió una llamada.

Si se considera que el centro de oferta está localizado en el punto $x \in G$, entonces, para redes deterministas, el tiempo promedio del centro de oferta a la solicitud aleatoria en la red es:

$$\sum_{i=1}^{n} g(i)t(x,i)$$

Donde $t(x,i)$ se refiere al tiempo de viaje más corto de $x \in G\ a\ v_i \in G$.

Una mediana absoluta de una red determinista es, la localización x^* que minimiza el tiempo promedio de viaje. También pueden usarse otras funciones para el peso de los arcos. Por ejemplo $d(x,i)$ como la distancia más corta entre el centro de oferta y los centros de demanda.

Los atributos de viaje bajo consideración y la función objetivo, dependen de la aplicación del modelo y los criterios de optimización de los tomadores de decisiones.

Cuando se trata de una red con pesos de tipo probabilista la expresión se vuelve:

$$\sum_{i=1}^{n} g(i)\bar{t}(x,i)$$

Donde $\bar{t}(x,i)$ es el tiempo esperado más corto de $x \in G\ a\ v_i \in G$.

Una formulación más general del problema de medianas, es aplicable para sistemas y problemas más complejos. Si se tienen p centros de oferta para ser localizados, se deben determinar p localizaciones óptimas, este problema se conoce como problema p-mediana.

En ocasiones, minimizar el tiempo promedio puede no ser adecuado cuando el costo de viaje no es necesariamente una función lineal. En algunos problemas muchos atributos son importantes para el sistema, en estos casos, el objetivo a optimizar con el problema de localización, puede ser maximizar la utilidad esperada de todos los viajes en el sistema.

Las funciones de utilidad para los atributos de viaje son cóncavas (o las funciones de costo son convexas), por lo que en condiciones generales, un conjunto de localizaciones puede alcanzar el óptimo.

Formulación del problema p-mediana

Sea $N = \{1, \dots, n\}$ el conjunto de índices para las localizaciones potenciales de las medianas y $A = \{1, \dots, m\}$ el conjunto de índices para los centros de demanda. Para cada $(i, j), i \in N, j \in A$, sea c_{ij} el costo de asignación del cliente j a la mediana ubicada en la localización i.

Para el problema se definen las siguientes variables de decisión:

$$y_i = \begin{cases} 1 & Si\ se\ ubica\ la\ mediana\ en\ la\ localización\ i \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & Si\ el\ centro\ de\ demanda\ j\ se\ asigna\ a\ la\ mediana\ ubicada\ en\ i \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

$$i \in N, j \in A$$

El problema puede formularse como:

$$Min \sum_{i \in N} \sum_{j \in A} c_{ij} x_{ij} \tag{1.1}$$

sujeto a

$$\sum_{i \in N} x_{ij} = 1 \;\; \forall\, j \in A \tag{1.2}$$

$$\sum_{i \in N} y_i = p \tag{1.3}$$

$$x_{ij} \leq y_i \;\; \forall\, j \in A, i \in N \tag{1.4}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, y_i \in \{0,1\} \,\forall\, j \in A, i \in N \tag{1.5}$$

La restricciones (1.2) garantizan que cada cliente sea asignado a un centro de distribución. La restricción (1.3) asegura que se seleccionen exactamente p localizaciones para las medianas. Las restricciones (1.4) aseguran que los clientes se asignen a una mediana sólo si ésta ha sido seleccionada. Las restricciones (1.5) especifican que las variables de decisión son binarias.

2.1.2.2 CRITERIO P-CENTRO

Si el criterio es, minimizar la máxima distancia que un cliente debe recorrer, para llegar a la localización más cercana, se trata de un problema de centros. En estos problemas sólo se consideran a los clientes potenciales, y no el costo para otros individuos en el sistema. Las localizaciones que optimizan un criterio como éste, se conocen como centros en redes.

Los objetivos de un problema de centros, pueden ser apropiados para planear la localización de instalaciones. Informalmente, el objetivo es localizar una o más instalaciones, tales que, el nivel de servicio en el peor de los casos sea el mejor posible.

El criterio es apropiado para servicios de emergencia, para los cuales siempre existe un umbral de respuesta debido al instante de ocurrencia de algún evento, a partir del momento en el cuál puede ocurrir un desastre, si el servicio no está a la mano.

En este criterio se consideran dos tipos de problema. El primero consiste en localizar un número fijo de instalaciones, donde el objetivo es minimizar la máxima distancia entre un incidente aleatorio y la localización más cercana al mismo. El segundo problema es, determinar el número mínimo de instalaciones así como su localización, sujetos a un límite superior de la distancia entre un incidente aleatorio y la instalación más cercana.

2.1.2.2.1 Formulación del problema p-centro

Para la formulación del problema, se debe considerar que la red está representada por una gráfica no orientada G, donde el conjunto finito de nodos $A = \{a_1, \dots, a_m\}$ representa un conjunto de m puntos de demanda, $N = \{1, \dots, n\}$ un conjunto de localizaciones candidatas. Asociado con cada arista $(i, j) \in A$, se tiene un peso no negativo $c(i, j)$. Aquí el objetivo es, determinar el conjunto $X = \{x_1, \dots, x_p\}$ de localizaciones, de tal forma que, se minimice el máximo costo:

Sean

$$y_i = \begin{cases} 1 & Si\ se\ ubica\ la\ instalación\ en\ la\ localización\ i \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & Si\ el\ centro\ de\ demanda\ j\ se\ asigna\ a\ la\ instalación\ ubicada\ en\ i \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

$$i\ \in N, j \in A$$

El problema se formula como:

$$\min_{x_2,\dots,x_p} z = \{\max_{i=1,\dots,m} \{\min_{v_j \in X} c_{ij}\}\} \tag{2.1}$$

sujeto a:

$$\sum_{j=1,..,n} x_{ij} = 1, \qquad i = 1, \dots, m \tag{2.2}$$

$$x_{ij} \leq y_j, \qquad i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, m \tag{2.3}$$

$$\sum_{j=1,..,n} y_j = p, \tag{2.4}$$

$$\sum_{j=1,..,n} c_{ij} x_{ij} \leq z, \qquad i = 1, \dots, m \tag{2.5}$$

$$x_{ij}, y_j \in \{0,1\}; \;\; i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n \tag{2.6}$$

Donde las restricciones (2.2) garantizan que todos los clientes son cubiertos por alguna instalación. Las restricciones (2.3) aseguran que los clientes se asignen a una instalación sólo si ésta ha sido seleccionada. La restricción (2.4) asegura que se seleccionen exactamente p localizaciones para las instalaciones. Las restricciones (2.5) aseguran que se minimice el máximo de los costos. Las restricciones (2.6) especifican que las variables de decisión son binarias.

2.1.2.3 CRITERIO P - CENTDIAN

En este problema, se buscan puntos en una red con la intención de minimizar una función de distancia, que depende de puntos dados (Pérez, 2000). El problema consiste en minimizar los objetivos de los problemas de medianas y centros. La función objetivo es una combinación convexa de las funciones objetivo de los criterios p-mediana y p-centro.

2.1.2.3.1 Formulación del problema p - centdian

Dada λ, $0 \leq \lambda \leq 1$, el problema generalizado $\lambda - Centdian$ es encontrar las localizaciones que minimicen la función objetivo, dada por:

$$f_\lambda = \lambda * f_m + (1 - \lambda) * f_c$$

Donde f_my f_c son las funciones objetivo de los problemas de medianas y centros. El valor de λ es el peso asignado a la función de mediana respecto a la función de centro. Cuando$\lambda = 0$, el problema es de centro, cuando $\lambda = 1$ el problema es de mediana.

2.2 PROGRAMACIÓN BINIVEL

En esta sección, se presenta un caso especial de la programación multinivel, la programación binivel, la cual admite considerar dos objetivos para plantear el modelo y además, la estructura permite jerarquizarlos de acuerdo a su importancia.

Los problemas de programación binivel son problemas jerárquicos (problemas de optimización que tienen un segundo problema –paramétrico- de optimización como parte de sus restricciones).

En todos los casos, el problema de "nivel superior" o problema "líder", se usa para reflejar el objetivo de alcanzar cierta meta; y el sentido de la programación binivel, es que se debe considerar la reacción del problema seguidor. Desde el punto de vista matemático, los problemas de programación binivel son problemas NP-Hard.

Como ejemplo (Dempe, 2002), se parte de un modelo de transporte en el cual, los dueños de una línea de transporte tienen la capacidad de modificar los costos de peaje en los caminos de una red.

Tomando en cuenta que los usuarios de la red desean minimizar los costos de viaje, una programación de tarifas debe ser tal, que los niveles de peaje no sean tan elevados. Una estructura importante de este problema es, la relación jerárquica entre dos tipos de tomadores de decisiones.

En un estado previo, el objetivo de los administradores de la línea es maximizar las ganancias. Se denotará por $\mathcal{A}$ el conjunto de arcos de la red, y por $\bar{\mathcal{A}}$ el subconjunto de arcos con tarifa.

Esto corresponde al programa matemático:

$$\max_{T,x} \sum_{a \in A} T_a x_a$$

sujeto a:

$$l_a \leq T_a \leq u_a \ \forall a \in \bar{A}$$

Donde T_a denota la tarifa y $x_a$el flujo por el arco a, con l_a la cota inferior de la tarifa y u_a la cota superior.

Para el caso de los usuarios, el problema puede resolverse como un problema de flujo en redes; donde la solución coincide con el flujo que minimiza el costo total del sistema. El vector de flujos f es solución al problema lineal:

$$\min_{f,x} \sum_{a \in A} c_a x_a + \sum_{a \in \bar{A}} T_a x_a$$

sujeto a:

$$\sum_{p \in P_{rs}} f_p^{ij} = d_{ij} \ \ \forall \, i,j \in \mathrm{N}$$

$$x_a = \sum_{i,j \in N} \sum_{p \in P_{ij}} \delta_{a,p}^{ij} f_p^{ij} \quad \forall a \in A$$

$$f_p^{ij} \geq 0 \ \forall p \in P_{ij} \ \forall i,j \in \mathrm{N}$$

Donde:

N: Conjunto de nodos en la red

P_{ij}: Conjunto de caminos que conecta a los puntos i y j.

c_a: Costos de viaje distintos a la tarifa.

f_p^{ij}: Flujo entre los nodos i y j por el camino $p \in P_{ij}$.

$$\delta_{a,p}^{ij} = \begin{cases} 1 & si\ un\ camino\ p \in P_{ij}\ usa\ el\ arista\ a \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

La función objetivo pretende minimizar la suma del costo resultante de las tarifas y de otros costos (duración, distancia, etc.). La primera restricción representa la satisfacción de la demanda. En el sentido en que, para dados un par origen-destino, la suma de los flujos de todos los caminos que conecten al par de nodos, sea igual a la demanda de viaje.

Ambos programas matemáticos están conectados, ya que usan las mismas variables. Además, la utilidad del administrador de la red no puede ser calculada hasta que los flujos sean conocidos; estos flujos no están bajo control directo del administrador. Entonces el problema tiene la siguiente formulación binivel:

$$\max_{T,x} \sum_{a \in A} T_a x_a$$

sujeto a:

$$l_a \le T_a \le u_a\ \forall a \in \bar{A}$$

$$(f,x) \in arg \min_{f,x} \sum_{a \in A} c_a x_a + \sum_{a \in \bar{A}} T_a x_a$$

sujeto a:

$$\sum_{p \in P_{rs}} f_p^{ij} = d_{ij}\ \ \forall i,j \in \mathrm{N}$$

$$x_a = \sum_{r,s \in \mathrm{N}} \sum_{p \in P_{ij}} \delta_{a,p}^{ij} f_p^{ij}\quad \forall a \in A$$

$$f_p^{ij} \ge 0\ \forall p \in P_{ij}\ \forall i,j \in N$$

La relación jerárquica, se encuentra reflejada relacionando el comportamiento de los usuarios como parte de las restricciones del administrador. Esta es la estructura principal de los programas binivel: incluyen dos programas matemáticos de los cuales, uno es parte de las restricciones del otro.

La mayoría de las investigaciones sobre programación binivel se centra en la versión lineal del problema, que se conoce también como el juego lineal del Stackelberg.

2.2.1 DEFINICIÓN

Los problemas de programación binivel son problemas de programación matemática donde el conjunto de todas las variables es particionado entre dos vectores x y y; x se elegirá como una solución óptima del segundo problema parametrizado en y.

Estos problemas son jerárquicos en el sentido, que sus restricciones están definidas, en parte, por el segundo problema de optimización, llamado problema de nivel inferior, éste puede ser visto como:

$$\min_{x}\{f(x,y): g(x,y) \leq 0, h(x,y) = 0\}$$

Sea $\Psi\ (y)$ el conjunto de soluciones del problema anterior para una y fija. Se denotará un elemento de $\Psi\ (y)$ como $x\ (y)$ y se asumirá que esta elección es única para todas las y posibles.

Entonces, el objetivo del problema binivel es, seleccionar un vector de parámetros y a través del cual, el problema de nivel inferior alcance un óptimo. Es decir, la selección de y conduce a minimizar una función objetivo $F(x\ (y), y)$ y satisfacer las restricciones:

$$G(x(y), y) \leq 0, H(x(y), y) = 0$$

El problema de determinar la mejor solución y^*, puede ser descrito como, encontrar un vector y^* de parámetros para el problema inicial, que con la variable $x\ (y)$, cumplan las restricciones y sean los valores que optimicen a la función $F(x\ (y), y)$. Esto es:

$$\min_{y}\{F(x(y), y): G(x(y), y) \leq 0, H(x(y), y) = 0, x(y) \in \Psi(y)\}$$

Este es el problema de programación binivel. La función F se llama objetivo de nivel superior y las funciones G y H se llaman restricciones de nivel inferior.

La optimización binivel se distingue de la optimización bicriterio porque en el segundo problema, ambos objetivos se consideran con la misma prioridad. En estos casos lo que se requiere es, encontrar la mejor solución para los dos objetivos.

2.2.2 NOTACIÓN

(Bard, 1998)

Para $x \epsilon X \subset \mathbb{R}^n$,$y \in Y \subset \mathbb{R}^m F: X \times Y \to \mathbb{R}$ y $f: X \times Y \to \mathbb{R}$, el problema general de programación binivel (BLPP) puede ser escrito como:

$$\min_{x \in X} F\,(x, y) = c_1 x + d_1 y \qquad (3.1)$$

sujeto a:

$$A_1\, x + B_1 y \leq b_1 \qquad (3.2)$$

$$\min_{y \in Y} f\,(x, y) = c_2 x + d_2 y \qquad (3.3)$$

sujeto a:

$$A_2 x B_2 y \leq b_2 \qquad (3.4)$$

Donde	$c_{1,}c_2 \in \mathbb{R}^n$	$A_1 \in \mathbb{R}^{pxn}$
	$d_{1,}d_2 \in \mathbb{R}^m$	$B_1 \in \mathbb{R}^{pxm}$
	$b_1 \in \mathbb{R}^p$	$A_2 \in \mathbb{R}^{qxn}$
	$b_2 \in \mathbb{R}^q$	$B_2 \in \mathbb{R}^{qxm}$

Los conjuntos X y Y adicionan restricciones como cotas superiores o inferiores o requisitos de integralidad. Una vez que el problema líder selecciona una x, el primer término de la función objetivo del problema seguidor, se vuelve una constante y puede quitarse del problema, en este caso $f(x,y)$ se convierte en $f(y)$. La secuencia de las decisiones implica que, y puede ser vista como una función de x, es decir $y = y\,(x)$.

2.2.2.1 DEFINICIONES

a) Región de restricciones del BLPP:

$$S \triangleq \{(x,y): x\epsilon X, y\epsilon Y, A_1x + B_1y \le b_1, A_2\,x + B_2\,y \le b_2\}$$

b) Región factible del problema seguidor para cada $x\epsilon X$ fija:

$$S\,(x) \triangleq \{y\epsilon Y: B_2\,y \le b_2 - A_2x\}$$

c) Proyección de S sobre el espacio de decisión del problema líder:

$$S\,(X) \triangleq \{x\epsilon X = y\epsilon Y, A_1x{+}B_1y \le b_1, A_2\,x + B_2y \le b_2\}$$

d) Reacción racional del problema inferior para $y\epsilon\; S\,(x)$:

$$P\,(x) \triangleq \{\, y\epsilon Y : y \in argmin\,[\, f\,(x,G) = \hat{y} \in S\,(x)]\}$$

e) Región inducible:

$$Q \triangleq \{(x,y): (x,y) \in S, y \in P\,(x)\}$$

Para asegurar lo anterior, se asume que S es no vacío y compacto y para todas las decisiones tomadas por el líder, el inferior tendrá un conjunto de respuestas, es decir, $P\ (x) \neq \emptyset$.

El conjunto $P\ (x)$ define la reacción, mientras la región Q representa el conjunto sobre el cual el líder alcanzará el óptimo. En estos términos, el BLPP puede escribirse como:

$$min\ \{ \mathrm{F}\ (\mathrm{x}, \mathrm{y}) : (\mathrm{x}, \mathrm{y}) \in \mathbb{R} \}\ (4.1)$$

Donde el problema (4.1) puede no tener solución. Esto es, si $P(x)$ no tiene un valor único para cada x, el líder no podrá alcanzar su mínimo pago sobre Q.

2.2.3 PROPIEDADES

El BLPP es NP-Hard (Bard, 1998).

La región inducible puede ser escrita de forma equivalente como una restricción formada por algunos hiperplanos de S. El BLPP es equivalente a minimizar F sobre una región factible, compuesta de restricciones lineales. Por lo que una solución para el BLPP lineal, ocurre en un vértice de Q.

La solución (x^*, y^*) del BLPP lineal, ocurre en un vértice de S. Si x es punto extremo de Q, también es un punto extremo de S.

Una condición necesaria para que (x^*, y^*) resuelva el BLPP lineal, es que existan vectores renglón u^* y v^*, tales que, el vector (x^*, y^*, u^*, v^*) resuelva

$$\min cx + d_1 \tag{5.1}$$

sujeto a:

$$A_1 + B_1 y \leq b_1 \tag{5.2}$$

$$uB_2 - v = -d_2 \tag{5.3}$$

$$u(b_2 - A_2 x - B_2 y) + vy = 0 \tag{5.4}$$

$$A_2 x + B_2 y \leq b_2 \tag{5.5}$$

$$x \geq 0, y \geq 0, u \geq 0, v \geq 0 \tag{5.6}$$

2.2.4 PROGRAMACIÓN LINEAL BINIVEL CON VARIABLES DISCRETAS

En muchos problemas de optimización, algunos subconjuntos están restringidos a tomar valores enteros. En ocasiones es deseable incluir restricciones adicionales para las variables, tales como cotas superiores e inferiores.

2.2.4.1 PROPIEDADES DEL BLPP LINEAL BINARIO

Se considerará al problema con la siguiente formulación:

$$\min_{x \in X} F(x, y) = c_1 x_1 + d_1 y \tag{6.1}$$

sujeto a:

$$A_1 x + B_1 y \leq b_1 \tag{6.2}$$

$$\min_{y \in Y} f(y) d_2 y \tag{6.3}$$

sujeto a:

$$A_2 x + B_2 y \leq b_2 \tag{6.4}$$

Donde $c_1 \in \mathbb{R}^n$, d_1, $d_2 \in \mathbb{R}^m, b_1 \in \mathbb{R}^p, b_2 \in \mathbb{R}^q A_1 \in \mathbb{R}^{p\times n}, B_2 \in \mathbb{R}^{p\times m}, A_2 \in \mathbb{R}^{q\times n}, B_2 \in \mathbb{R}^{q\times m}, X \subset \mathbb{R}^n$ $y\, Y \subset \mathbb{R}^m$.

Sean: $S_l\,(y) = \{x \in X\colon A_2x \leq b_2 - B_2y\}$ para todo $y \in Y$ y $S_u = \{(x.y)\colon A_1x + B_1y \leq b_1\}$ para cada $x \in X$.Se debe asumir que la solución óptima al problema de nivel inferior es única.

Considerando que$X = \mathbb{R}^n$ y$Y = \mathbb{R}^m$ en el problema binivel lineal (L-BLPP), se tienen los siguientes modelos:

- Problema binivel lineal discreto (DL-BLPP) donde $X = \mathbb{Z}^n$ y $Y = \mathbb{Z}^m$
- Problema binivel lineal discreto-continuo (DCL-BLPP) donde $X = \mathbb{Z}$ y $Y = \mathbb{R}^m$
- Problema binivel lineal continuo-discreto (CDL-BLPP) donde $X = \mathbb{R}^n$ y $Y = \mathbb{Z}^m$

La existencia de soluciones óptimas para estos problemas, depende de la presencia o ausencia de restricciones para el problema superior.

La figura siguiente muestra las regiones inducibles para cada tipo de problema binivel, considerando las restricciones de integralidad. En la Figura 2.1se muestra el problema con ambos programas continuos. En la Figura 2.2se muestra la región cuando ambos problemas son enteros. En la Figura 2.3 sólo el nivel superior es discreto y en la Figura 2.4 sólo el nivel inferior lo es.

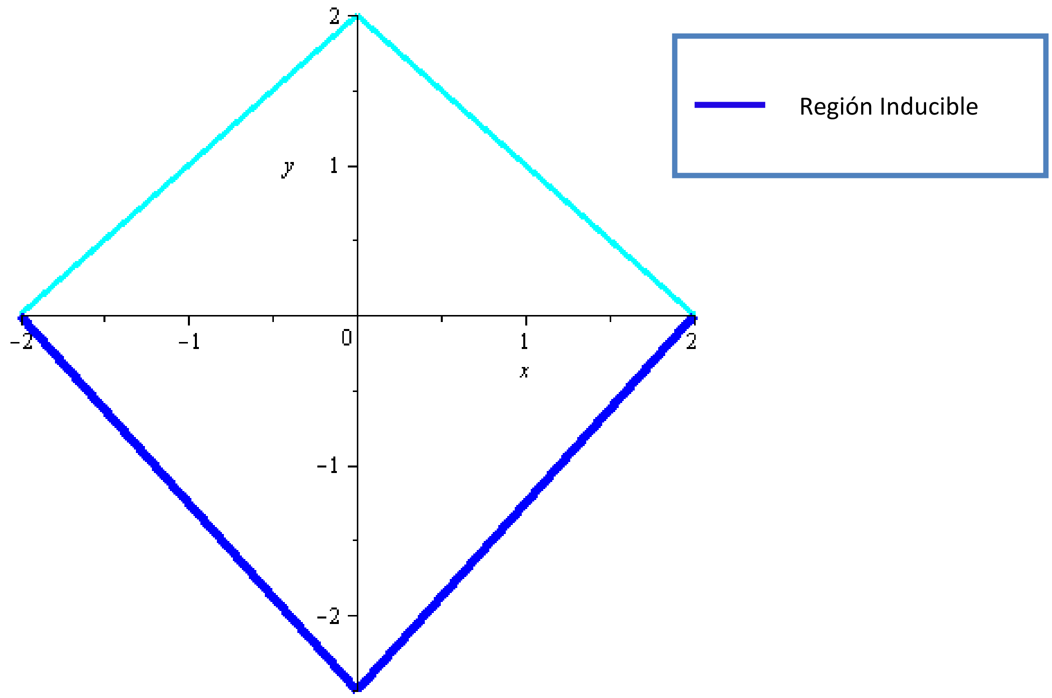

Figura 2.1 Región inducible para un problema binivel continuo

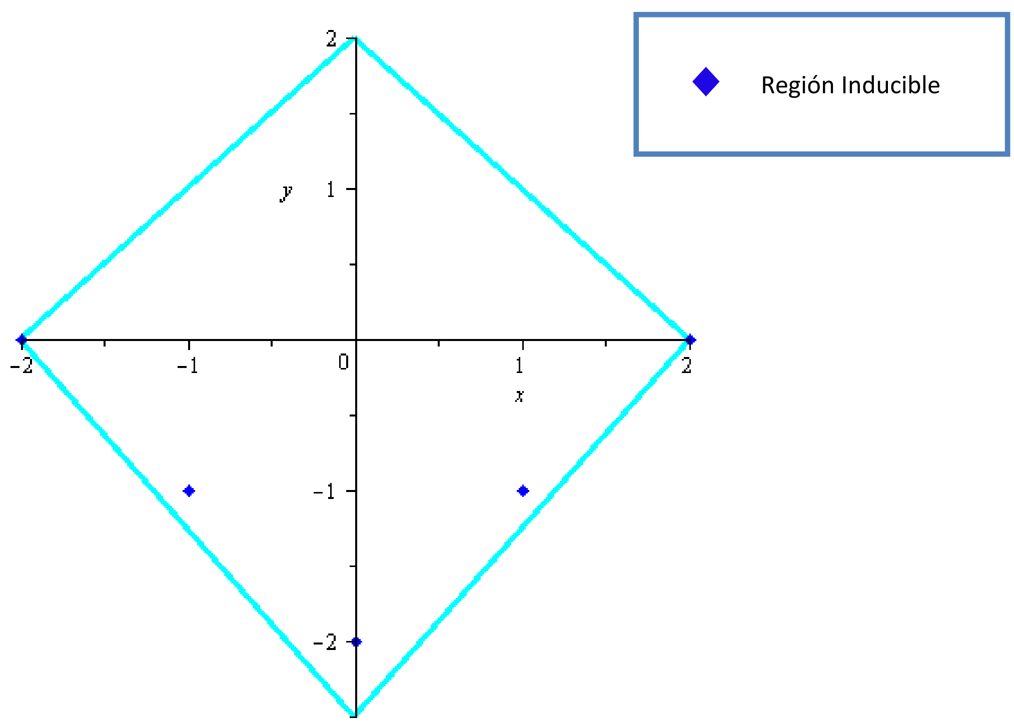

Figura 2.2 Región inducible para un problema binivel discreto

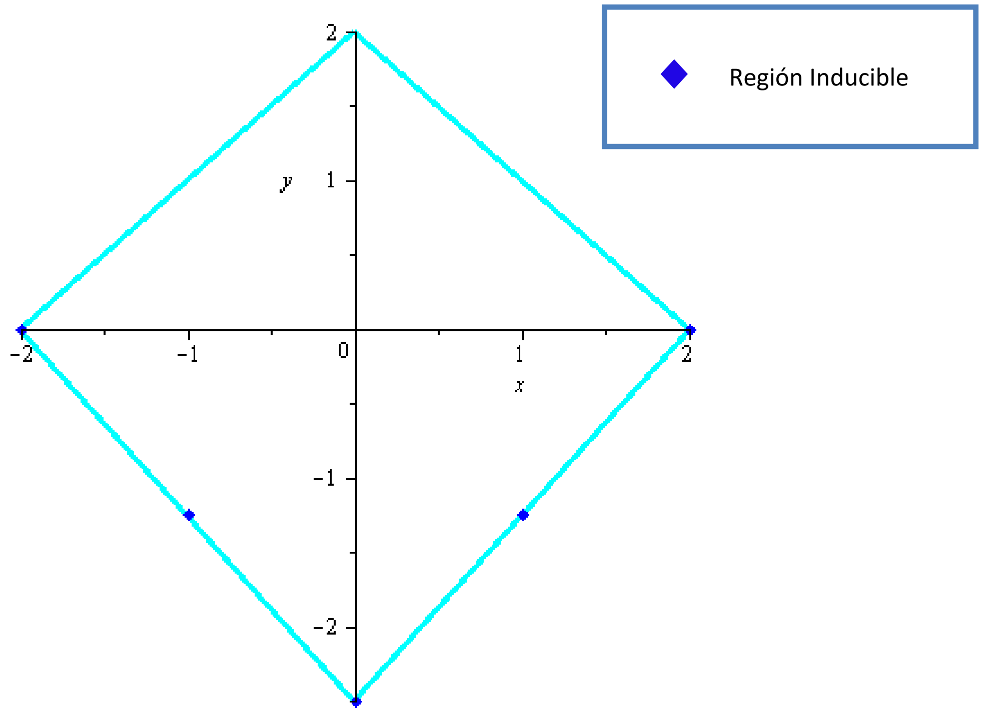

Figura 2.3 Región inducible para un problema binivel discreto en el nivel superior y continuo en el inferior

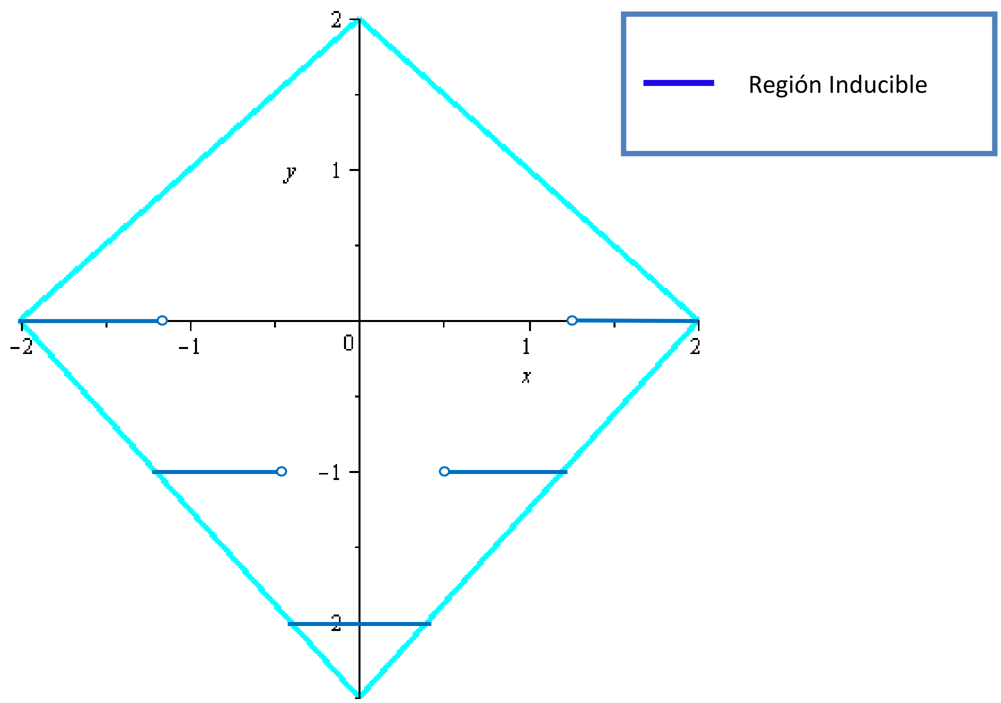

Figura 2.4 Región inducible para un problema binivel continuo en el nivel superior y discreto en el inferior

Con base en la información presentada a lo largo del capítulo, es posible construir un modelo que permita localizar servicios en redes, de tal manera que se pueda considerar más de un objetivo y además, ordenar éstos considerando su prioridad. En el siguiente capítulo se desarrolla un modelo de localización de servicios binivel conjuntando algunos de los conceptos aquí presentados.

CAPÍTULO III

FORMULACIÓN DE UN PROBLEMA DE LOCALIZACIÓN BINIVEL

En la primera sección de este capítulo se presenta la formulación matemática de un modelo de localización de servicios en redes binivel. Posteriormente se presenta un algoritmo de solución para modelos binivel discretos, el cual puede utilizarse para la solución del modelo propuesto.

3.1 FORMULACIÓN MATEMÁTICA

El modelo describe una red con centros productores, centros de distribución y zonas de clientes considerando un SKU (*Stock Keeping Unit*). La red está estructurada de tal manera que, los centros productores sólo sirven a los distribuidores y estos a su vez sólo sirven a los clientes. Las plantas se asumirán como capacitadas, no así los almacenes.

Sean los parámetros

$i \in P$	Conjunto de plantas distribuidoras.
$j \in A$	Conjunto de zonas candidatas para almacenes.
$k \in F$	Conjunto de clientes.
M	Número de almacenes a ser localizados.
f_j	Costo fijo de operación si se localiza un almacén en j.
C_i	Capacidad de la planta i.
d_k	Demanda del cliente k.
c_{ij}	Costo de trasporte por unidad de producto de la planta i a el almacén j.

s_{jk}	Costo de trasporte por unidad de producto del almacén localizado en j al cliente k.
t_{jk}	Tiempo de entrega del almacén localizado en j al cliente k.

Variables de decisión:

x_{ij}	Cantidad de SKUs a ser trasportados de la planta i al centro de distribución localizado en j

$$y_{jk} = \begin{cases} 1 & si\ el\ cliente\ k\ es\ atendido\ por\ el\ almacén\ localizado\ en\ j \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

$$z_j = \begin{cases} 1 & si\ el\ almacén\ se\ localiza\ en\ j \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

3.2 MODELO GENERAL

$$\text{Min}\, z = \sum_{i \in P} \sum_{j \in A} x_{ij} c_{ij} + \sum_{k \in F} \sum_{j \in A} d_k s_{jk}\, y_{jk} + \sum_{j \in A} f_j z_j \tag{7.1}$$

sujeto a:

$$\sum_{j \in A} x_{ij} \leq C_i \quad \forall i \in P \tag{7.2}$$

$$\sum_{i \in P} x_{ij} \geq \sum_{k \in F} d_k y_{jk} \quad \forall j \in A \tag{7.3}$$

$$\sum_{j \in A} z_j \leq M \tag{7.4}$$

$$x_{ij} \in \mathbb{Z}^+ \tag{7.5}$$

$$Min \sum_{k \in F} \sum_{j \in A} t_{jk} y_{jk} \tag{7.6}$$

sujeto a:

$$\sum_{j \in A} y_{jk} = 1 \quad \forall\, k \in F \tag{7.7}$$

$$y_{jk} \le z_j \quad \forall j \in A, \forall k \in F \tag{7.8}$$

$$y_{jk} \in \{0,1\}, \qquad z_j \in \{0,1\} \tag{7.9}$$

En la función objetivo del problema líder se busca minimizar los costos de transporte, desde las plantas a los almacenes en el primer sumando. En el siguiente término, se busca minimizar los costos de transporte desde los almacenes hasta los clientes. Y el último término se refiere a los costos de localización del almacén si se ubica en j.

Con la restricción (7.2) se garantiza que el número de productos enviados no supere la capacidad de la planta. En (7.3) se asegura que lo que sale de los almacenes no es mayor a lo que llega a los mismos. Con la desigualdad (7.4) se garantiza que el número de almacenes establecidos sea menor o igual al número de almacenes solicitados (medianas). Y (7.5) establece la integralidad para x. La función objetivo del problema seguidor es (7.6), en la que se pretende minimizar el tiempo de entrega, desde los almacenes hasta los clientes. Con (7.7) se garantiza que sólo un almacén entrega a cada cliente. En (7.8) se asegura que un almacén j puede entregar a un cliente k si el almacén fue localizado en j. Con (7.9) se restringe a las variables $y_{jk},\ z_j$ a ser binarias.

De esta manera, queda planteado un problema de localización en redes que involucra dos objetivos jerarquizados, considerando esta última relación en la formulación.

3.3 ALGORITMOS DE SOLUCIÓN

En general, existen tres diferentes tipos de algoritmos para resolver el BLPP que son funcionales. El primero es una forma de enumeración de vértices como un tipo de método simplex: Candlery Townsley (Citados por Bard, 1988), desarrollaron un algoritmo que explora sistemáticamente bases óptimas para el problema seguidor para una x fija y luego, regresa al problema líder con la variable básica y correspondiente. Bialas y Karwar (Citados por Bard, 1998), proponen un enfoque diferente que explora los vértices, empezando con una base asociada con la solución óptima para el problema creado, al remover la función objetivo de nivel inferior.

El segundo método más popular se conoce como enfoque de Kuhn-Tucker y toma como base, la propiedad de un BLPP en la que se pueden agregar multiplicadores adicionales a las restricciones que facilitan la solución del problema. La idea fundamental es, usar una estrategia de ramificación y acotamiento.

La tercera estrategia está diseñada para resolver problemas con restricciones de integralidad, en general, se basan en técnicas de separación y relajación, esto para construir cotas para la solución (Bard, 1998).

Las técnicas de separación, se usan colocando restricciones contradictorias para una variable entera. Este enfoque se utiliza directamente con los problemas de programación binivel enteros mixtos. La relajación consiste en quitar las restricciones de integralidad de las variables.

El problema planteado, considera restricciones de integralidad, por lo que las primeras dos técnicas no son aplicables. Para resolver el problema de localización binivel, se utilizará una técnica de separación y relajación, reescribiendo las variables y replanteando el problema de tal manera que pueda ser escrito como uno lineal.

3.4 ALGORITMO PARA EL PROBLEMA LINEAL DE PROGRAMACIÓN BINIVEL DISCRETA

El algoritmo que se presenta a continuación fue desarrollado por Bard y Moore (Bard, 1998), para resolver problemas binivel enteros con restricciones binarias en las variables. El problema puede verse como:

$$\underset{x,y}{Min}\, F(x,y) = c_1x + d_1y \tag{8.1}$$

sujeto a:

$$A_1x + B_1y \leq b_1 \tag{8.2}$$

$$x \in \{0,1\}^n \tag{8.3}$$

$$\min_y f(y) = d_2y \tag{8.4}$$

sujeto a:

$$A_2x + B_2y \leq b_2 \tag{8.5}$$

$$y \in \{0,1\}^m \tag{8.6}$$

Donde $c_1 \in \mathbb{R}^n$, $d_1, d_2 \in \mathbb{R}^m, b_1 \in \mathbb{R}^p, b_2 \in \mathbb{R}^q, A_1 \in \mathbb{R}^{p\times n}, B_1 \in \mathbb{R}^{p\times m}, A_2 \in \mathbb{R}^{q\times n}, B_2 \in \mathbb{R}^{q\times m}$.

La clave del algoritmo está, en el reconocimiento de que cada solución para el problema binario debe, tener una solución para y en el conjunto de reacciones racionales. Limitando de esta manera la búsqueda, es posible cubrir fácilmente los puntos de la región inducible. Lo anterior se logra formulando y resolviendo el siguiente programa parametrizado (Roodman, 1972):

$$Min\, f(y) = d_2 y \tag{9.1}$$

sujeto a:

$$A_1 x + B_1 y \leq b_1 \tag{9.2}$$

$$A_2 x + B_2 y \leq b_2 \tag{9.3}$$

$$F(x, y) = c_1 x + d_1 y \leq \alpha. \tag{9.4}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \geq \beta \tag{9.5}$$

$$x \in X, \qquad y \in Y \tag{9.6}$$

Donde los parámetros α y β inicialmente toman valores de ∞ y 0 respectivamente. La restricción (9.4) fuerza a una compensación entre las dos funciones objetivo. La desigualdad (9.5), restringe la suma de las variables controladas por el líder y aunque no es estrictamente necesaria, es una forma efectiva de seleccionar variables de ramificación.

3.4.1 ALGORITMO

Para resolver el problema binario, se usa una enumeración implícita centrada en las variables de decisión del líder y aplicada al problema (9). La idea consiste en examinar puntos que satisfagan las restricciones (9.2 a 9.6), fijar x y sus valores correspondientes y luego volver a resolver para obtener un nuevo punto en la región inducible. Ajustando α y β en cada iteración, el algoritmo continuamente disminuye el valor de la función objetivo líder, hasta que el problema se vuelve no factible.

Sean $W = \{1, \ldots, n\}$, en la k-ésima iteración del algoritmo. Un conjunto W_k es el conjunto de variables asignadas durante la iteración k. Se define un vector de camino P_k de longitud $\ell = |W_k|$ correspondiente a una asignación de $x_j = 0$ o $x_j = 1$ para $j \in W_k$. El vector P_k identifica una solución parcial para las variables controladas por el líder en el nivel ℓ-ésimo del árbol de búsqueda, además indica el orden en que las variables fueron establecidas.

Sean:

$$S_k^+ = \{j: j \in W_k \; y \; x_j = 1\}$$

$$S_k^- = \{j: j \in W_k \; y \; x_j = 0\}$$

$$S_k^0 = \{j: j \notin W_k\}$$

Después de k iteraciones, sea $\mathcal{R}^k$ el conjunto de puntos cubiertos de la región inducible, y sea $\bar{F}$ la cota superior asociada con la función objetivo del líder. Es decir $\bar{F} = \min\{F(x,y) : (x,y) \in \mathcal{R}^k\}$. Al inicio del algoritmo $\bar{F} = \infty$.

Considerando lo anterior, el algoritmo de solución queda como sigue:

Paso 0 Inicialización. Sea $k = 0$, $S_k^+ = \emptyset$, $S_k^- = \emptyset$, $S_k^0 = \{1, \dots, n\}$, $\alpha = \infty$, $\beta = 0$, $\bar{F} = \infty$.

Paso 1 Iteración general. Sea $x_j = 1$ para $j \in S_k^+$ y $x_j = 0$ para $j \in S_k^-$. Para los valores actuales de α y β, intentar encontrar una solución factible al problema (7.1 a 7.6). Si se encuentra una solución, hacer $k = k + 1$, etiquetar la solución como (x^k, y^k) e ir al paso 2; en otro caso explorar el nodo actual e ir al paso 6.

Paso 2 Acotamiento. Fijar x en x^k, relajar (7.4) y (7.5), y resolver (7.1 a 7.3 y 7.6) para obtener un punto $(x^k, \hat{y}^k)$ y actualizar $\bar{F}$ como $\bar{F} = min\{\bar{F}, F(x^k, \hat{y}^k)\}$.

Paso 3 Sea $J = \{j \in S_{k-1}^0 : x_j^k = 1\}$. Si $J = \emptyset$, entonces $S_k^+ = S_{k-1}^+$, $S_k^- = S_{k-1}^-$, $S_k^0 = S_{k-1}^0$, $P_k = P_{k-1}$ e ir al paso 5, en otro caso ir al paso 4.

Paso 4 Ramificación. Crear $|J|$ nuevos nodos de la siguiente manera: añadir $j \in J$ a P_{k-1} en orden ascendente, uno por uno, para obtener los siguientes nodos y el camino P_k; hacer $S_k^+ = S_{k-1}^+ \cup J$, $S_k^- = S_{k-1}^-$, $S_k^0 = S_{k-1}^0 \setminus J$. El nuevo camino P_k se extiende por

$|J|$ y lleva dela raíz al nuevo nodo.

Paso 5 Sea $\alpha = \bar{F} - 1$ y $\beta = 1 + |S_k^+|$. Ir al paso 1.

Paso 6 Regreso. Si no existen nodos disponibles, ir al paso 7. En otro caso, regresar del nodo actual (se denotará el índice de la variable como j'), ramificar en su complemento haciendo $x_{j'}^k = 0$, y actualizar S_k^+, S_k^-, S_k^0 y P_k. Hacer $\beta = 0$ e ir al paso 1.

Paso 7 Terminación. Si $\bar{F} = \infty$, no hay solución factible. En otro caso se declara el punto factible asociado con $\bar{F}$ la solución óptima.

En el paso 0 del algoritmo se crea un nodo raíz para el árbol de búsqueda. En el paso 1 se busca un nuevo punto potencialmente factible para el problema binivel, aunque esta solución no está necesariamente en la región inducible. El contador se incrementa sólo si la búsqueda resulta satisfactoria. En el paso dos se fija x en x^k, se relajan las restricciones parametrizadas y se resuelve el problema resultante para obtener un punto en la región inducible. Si se encuentra una mejora se actualiza el valor de $\bar{F}$.

En el paso 3, el conjunto J identifica las variables de ramificación. Si J es vacío, el control pasa al paso 5 donde β se vuelve uno más el número de elementos de S_k^+. Luego el algoritmo vuelve al paso 1. Cualquier solución factible encontrada en este paso estará acompañada por un $J \neq \emptyset$.

En el paso 4 se ramifica y se actualizan S_k^+, S_k^-, S_k^0 y P_k. En el proceso, todas las variables libres de x iguales a uno se fijan en la solución del paso 1 y un número correspondiente de nuevos nodos, se crea en el árbol de búsqueda.

En el paso 5, α se establece en el valor de $\bar{F}$ menos uno. Esto garantiza que cuando el algoritmo regrese al paso 1, si se encuentra una solución factible al problema (7.1-7.6) como (x^k, y^k), tendremos $F(x^k, y^k) < \bar{F}$. β se establece en la suma de las variables controladas por el líder y se incrementa en uno. Esto asegura que al menos un elemento del conjunto S_k^0 tiene valor uno en la iteración k, esto da una variable de ramificación en el paso 4 en el siguiente paso.

Si el problema es no factible en el paso 1, el algoritmo manda al paso 6, donde se realiza un retorno. En este paso se regresa a los nodos no explorados para buscar una ramificación por los complementos.

En caso de no haber nodos no explorados y $\bar{F} = \infty$ el problema binivel no tiene solución. Si $\bar{F} \neq \infty$ entonces la solución óptima se encuentra en el valor alcanzado por F en los vectores correspondientes (Figura 3.1).

3.4.2 ALGORITMO ALTERNATIVO

Cuando m es más grande que n, resulta más eficiente un procedimiento diferente para verificar que el punto obtenido en el paso 1 está en la región inducible.

Proposición 3.1. Sea $(\bar{x}, \bar{y})$ un punto que resuelve el problema (9.1 – 9.6). $(\bar{x}, \bar{y})$ está en la región inducible si

$$c_1 x + \sum_{j=1}^{m} (d_{1j} - \min\{d_{1j}, 0\}) \leq \alpha$$

El algoritmo alternativo queda de la siguiente manera (Figura 3.2):

Paso 0 Inicialización. Sea $k = 0$, $S_k^+ = \emptyset$, $S_k^- = \emptyset$, $S_k^0 = \{1, \dots, n\}$, $\alpha = \infty$, $\beta = 0$, $\bar{F} = \infty$.

Paso 1 Iteración general. Sea $x_j = 1$ para $j \in S_k^+$ y $x_j = 0$ para $j \in S_k^-$. Para los valores actuales de α y β, intentar encontrar una solución factible al problema (9.1 a 9.6). Si se encuentra una solución, hacer $k = k + 1$, etiquetar la solución como (x^k, y^k) e ir al paso 2a; en otro caso explorar el nodo actual e ir al paso 6.

Paso 2a Acotamiento. Verificar que (x^k, y^k) está en la región factible utilizando la proposición 3.1. Si el punto está, ir al paso 2b; en otro caso, fijar x en x^k, relajar (9.4) y (9.5), y resolver (9.1-9.3 y 9.6) para obtener un punto $(x^k, \hat{y}^k)$ en la región factible.

Paso 2b Calcular $F(x^k, \hat{y}^k)$ y hacer $\bar{F} = min\{\bar{F}, F(x^k, \hat{y}^k)\}$.

Paso 3 Sea $J = \{j \in S_{k-1}^0 : x_j^k = 1\}$. Si $J = \emptyset$, entonces $S_k^+ = S_{k-1}^+$, $S_k^- = S_{k-1}^-$, $S_k^0 = S_{k-1}^0$, $P_k = P_{k-1}$ e ir al paso 5, en otro caso ir al paso 4.

Paso 4 Ramificación. Crear $|J|$ nuevos nodos de la siguiente manera: añadir $j \in J$ a P_{k-1} en orden ascendente, uno por uno, para obtener los siguientes nodos y el camino P_k; hacer $S_k^+ = S_{k-1}^+ \cup J$, $S_k^- = S_{k-1}^-$, $S_k^0 = S_{k-1}^0 \setminus J$. El nuevo camino P_k se extiende por $|J|$ y lleva dela raíz al nuevo nodo.

Paso 5 Sea $\alpha = \bar{F} - 1$ y $\beta = 1 + |S_k^+|$. Ir al paso 1.

Paso 6 Regreso. Si no existen nodos disponibles, ir al paso 7. En otro caso, regresar del nodo actual (se denotará el índice de la variable como j'), ramificar en su complemento haciendo $x_{j'}^k = 0$, y actualizar S_k^+, S_k^-, S_k^0 y P_k. Hacer $\beta = 0$ e ir al paso 1.

Paso 7 Terminación. Si $\bar{F} = \infty$, no hay solución factible. En otro caso se declara el punto factible asociado con $\bar{F}$ una solución óptima.

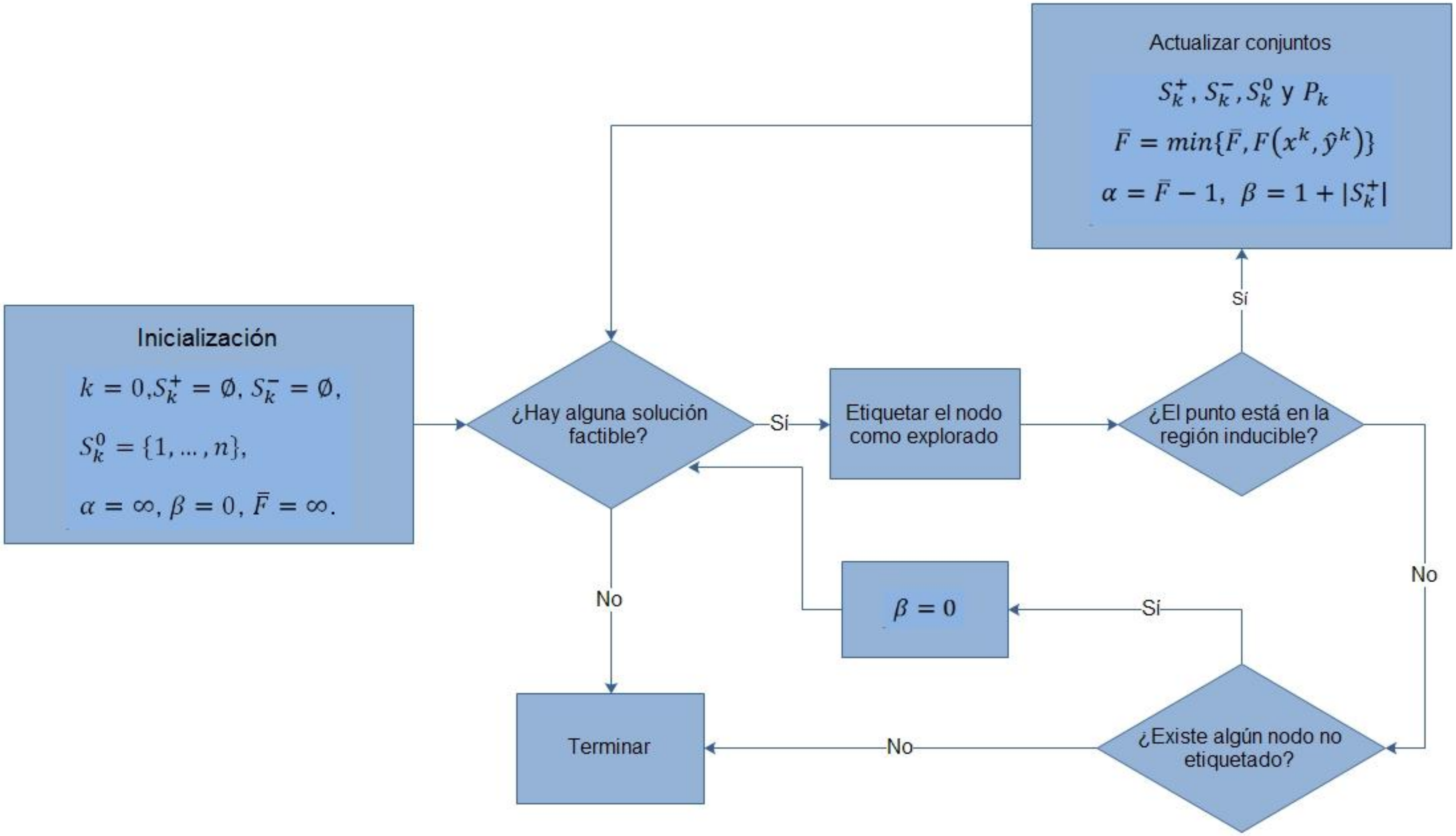

Figura 3.1Algoritmo de solución para problemas binivel discretos binarios

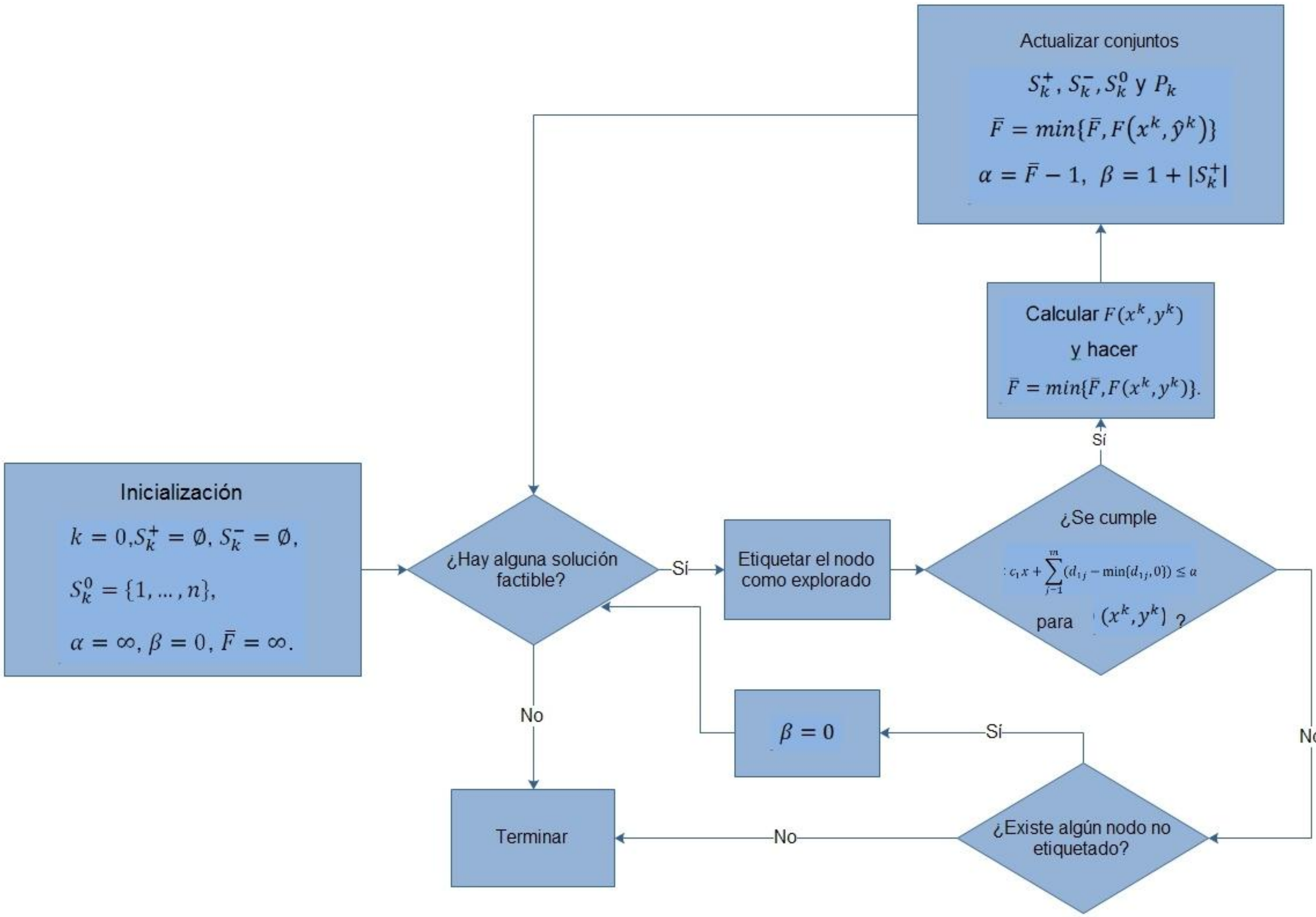

Figura 3.2 Algoritmo alternativo de solución para problemas binivel discretos binarios

A continuación se presenta un ejemplo para mostrar como funciona el primer algoritmo.

Sean $x \in \mathbb{R}^1$ y $y \in \mathbb{R}^1$.

$$\min_{x \geq 0} F(x, y) = x + y \tag{10.1}$$

$$\min_{y \geq 0} f(x, y) = -5x - y \tag{10.2}$$

Sujeto a:

$$-2x - y \leq -4 \tag{10.3}$$

$$-x + 4y \leq 8 \tag{10.4}$$

$$2x + y \leq 16 \tag{10.5}$$

$$x - 2y \leq 4 \tag{10.6}$$

Sin considerar las restricciones de integralidad, la solución al problema es $(x^*, y^*) = (\frac{8}{9}, \frac{20}{9})$, con $F = \frac{28}{9}$.

Si se restringen los valores de x y y a valores enteros, una formulación binaria se obtiene haciendo: $x = x_1 + 2x_2 + 4x_3$ y $y = y_1 + 2y_2$, donde $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2 \in \{0,1\}$. Entonces el problema queda planteado como:

$$\min_{x \in X} F(x, y) = x_1 + 2x_2 + 4x_3 + y_1 + 2y_2$$

$$\min_{y \in Y} f(x, y) = -5x_1 - 10x_2 - 20x_3 - y_1 - 2y_2$$

Sujeto a:

$$-2x_1 - 4x_2 - 8x_3 - y_1 - 2y_2 \leq -4$$

$$-x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 4y_1 + 8y_2 \leq 8$$

$$2x_1 + 4x_2 + 8x_3 + y_1 + 2y_2 \leq 16$$

$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 2y_1 - 4y_2 \leq 4$$

El subproblema parametrizado puede verse como:

$$\min_{y \in Y} f(y) = -y_1 - 2y_2$$

Sujeto a:

$$\begin{array}{ll} & -2x_1 - 4x_2 - 8x_3 - y_1 - 2y_2 \le -4 \\ & -x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 4y_1 + 8y_2 \le 8 \\ & 2x_1 + 4x_2 + 8x_3 + y_1 + 2y_2 \le 16 \\ & x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 2y_1 - 4y_2 \le 4 \\ F(x,y) = & x_1 + 2x_2 + 4x_3 + y_1 + 2y_2 \le \alpha \\ & x_1 + x_2 + x_3 \ge \beta \end{array}$$

Después de inicializar en el paso 0, utilizando *Lingo 11.0*pararesolver, el algoritmo encuentra el punto $(4,3)$,como la suma de la descomposición de las variables en binarios (Figura 3.3),el cual se verifica que está en la región factible en el paso 2, resolviendo el problema relajando las restricciones correspondientes.

Variable	Value	Reduced Cost
Y1	1.000000	-1.000000
Y2	1.000000	-2.000000
X1	0.000000	0.000000
X2	0.000000	0.000000
X3	1.000000	0.000000

Figura 3.3. Solución al subproblema inicial

Después de la primera iteración, $\bar{F} = 7$, $S_1^+ = \{3\}$, $S_1^- = \emptyset$, $S_1^0 = \{1,2\}$, $P_1 = (3)$, $\alpha = 6$ y $\beta = 2$. En la siguiente iteración, resolviendo el subproblema completo se obtiene el punto $(5,1)$ (Figura 3.4).

Variable	Value	Reduced Cost
Y1	1.000000	-1.000000
Y2	0.000000	-2.000000
X1	1.000000	0.000000
X2	0.000000	0.000000
X3	1.000000	0.000000

Figura 3.4 Solución al subproblema en la iteración 2

En el paso 2 $(x^2, \hat{y}^2) = (5,3)$ y $F(x^2, \hat{y}^2) = 8$, entonces $\bar{F} = 7$.

Variable	Value	Reduced Cost
Y1	1.000000	-1.000000
Y2	1.000000	-2.000000
X1	1.000000	0.000000
X2	0.000000	0.000000
X3	1.000000	0.000000

Figura 3.5 Solución para la verificación del punto en la región inducible

Actualizando los conjuntos y parámetros $S_2^+ = \{1,3\}$, $S_2^0 = \{2\}$, $P_2 = (3,1)$, $\alpha = 6$ y $\beta = 3$.

En la iteración 3, en el paso 1, se encuentra una solución no factible, así que el algoritmo marca el nodo. La información que regresa es: $S_2^+ = \{3\}$,$S_2^- = \{1\}$, $S_2^0 = \{2\}$, $\underline{P_2 = (3,1)}$, $\alpha = 6$ y $\beta = 0$.

Regresando al paso 1, en la cuarta iteración, se encuentra el punto $(x^3, y^3) = (4,2)$.

Variable	Value	Reduced Cost
Y1	0.000000	-1.000000
Y2	1.000000	-2.000000
X1	0.000000	0.000000
X2	0.000000	0.000000
X3	1.000000	0.000000

Figura 3.6 Solución al subproblema en la iteración 4

En el paso 2 se obtiene el punto $(x^3, \hat{y}^3) = (4,3)$ con $F(x^3, \hat{y}^3) = 7$. Como $S_2^0 = \{2\}$ y $x_2^3 = 0$, en el paso 3 $J = \emptyset$, entonces $S_3^+ = S_2^+ = \{3\}$. En el paso 5 $\beta = 1 + |S_3^+| = 2$. Siguiendo este proceso, la solución óptima para el ejemplo es $(x^*, y^*) = (1,2)$ con $F^* = 3$. La Figura 3.7 muestra el camino seguido en cada iteración.

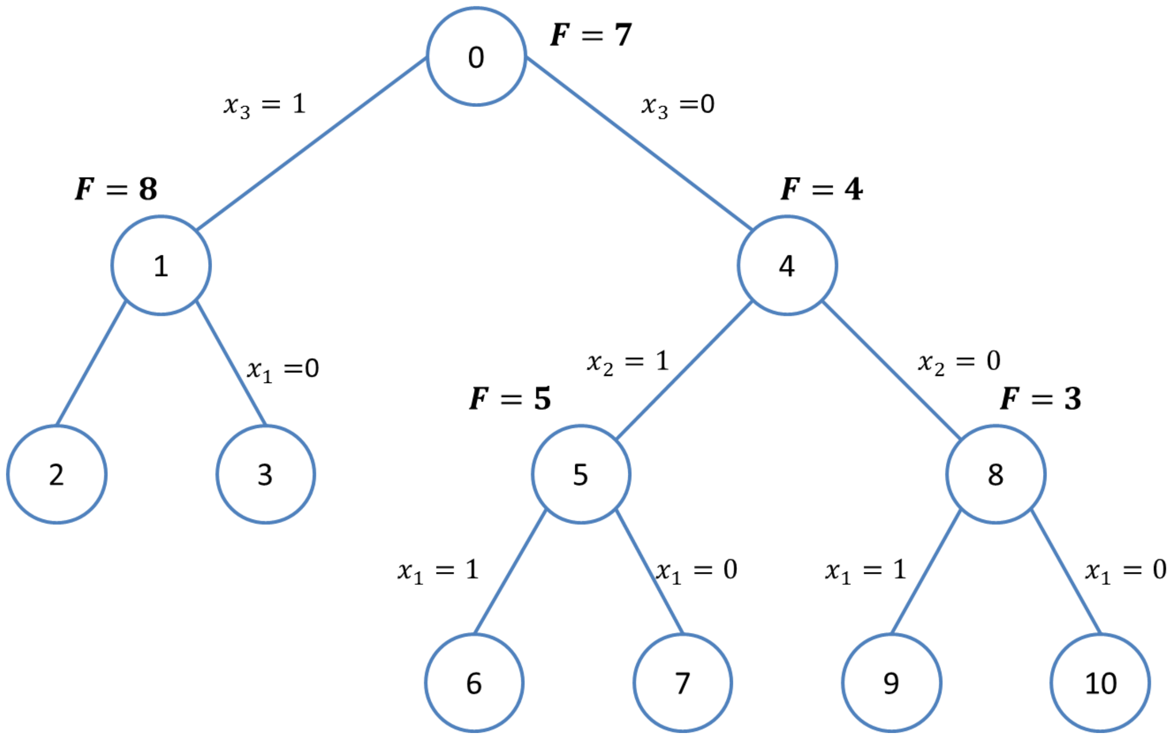

Figura 3.7 Árbol de búsqueda para el ejemplo

3.5 PLANTEAMIENTO DE UN PSEUDOCÓDIGO PARA ALGORITMO DE SOLUCIÓN

Con base en el primer algoritmo de solución, y con la intención de probar el modelo propuesto en un caso de estudio, se propone un pseudocódigo que de solución a un problema general planteado como binivel entero binario. Es importante recordar que para utilizar el algoritmo es necesario replantear el problema, de tal manera que quede como uno lineal con restricciones adicionales a las iniciales.

1. Definición del problema P como función objetivo y restricciones.
2. Inicialización

   $S_0^+ = \emptyset, S_0^- = \emptyset, S_0^0 = \{1, \dots, n\}$
   $\alpha = 1000000, \beta = 0, \bar{F} = 1000000$
   $n = tamaño\ x, m = 2^n$

$$P_0 = \emptyset$$

3. Para $k = 0\!:m$

   Para $j = 1\!:n$
   Si$j \in S_k^+, x_j = 1$
   En otro caso, si $j \in S_k^-, x_j = 0$
   Terminar

   a. Resolver P' como entero binario, este problema consiste de Pagregando las variables con los valores asignados en el paso anterior como restricciones.
   b. SiP' es no factible

      Si $S_k^0 = \emptyset$

      Si $\bar{F} = \infty$, no hay solución factible

      En otro caso (x^k, y^k) es la solución al problema binivel.

      Terminar

      En otro caso

      Para $j = 1\!:n$

      Si $x_j^k = 1$

      Asignar $x_j^k = 0$

$$S_k^- = S_k^- \cup \{j\}$$
$$S_k^+ = S_k^+ \setminus \{j\}$$
$$P_k = P_{k-1}$$
$$\beta = 0$$

      En otro caso

      Salir

      Terminar

      Terminar

      Terminar

   En otro caso

$$k = k + 1$$
$$x = x^k$$

   Resolver P'' que consiste del problema reducido.

$$Solución = (x^k, \hat{y}^k)$$
$$\bar{F} = \min\{\bar{F}, F(x^k, \hat{y}^k)\}$$

Para $j = 1{:}\, n$
Si $(x_j^k = 1 \; y \; j \in S_{k-1}^0)$
$$J = J \cup \{j\}$$
En otro caso
Salir
Terminar
Si $J = \emptyset$
$$S_k^+ = S_{k-1}^+, S_k^- = S_{k-1}^-, S_k^0 = S_{k-1}^0, P_k = P_{k-1}$$
En otro caso
$$P_k = P_{k-1}$$
Para $r = 1{:}\, |J|$
$$P_k = P_k \cup \{r\}$$
$$S_k^+ = S_{k-1}^+ \cup J$$
$$S_k^- = S_{k-1}^-$$
$$S_k^0 = S_{k-1}^0 \setminus J$$
Terminar
$\alpha = \bar{F} - 1, \beta = 1 + |S_k^+|$
Terminar
Terminar
Terminar

CAPÍTULO IV

CASO DE ESTUDIO

En este capítulo se presenta y analiza una problemática presentada en el área farmacéutica del Instituto de Salud del Estado de México, particularmente en la jurisdicción Teotihuacan del Estado de México, a partir de la cual se planteará un problema, que por sus características, puede ser escrito como un problema de localización binivel y se resolverá mediante el algoritmo presentado en el capítulo anterior.

4.1 PROBLEMÁTICA

El Instituto de Salud del Estado de México (ISEM) es un organismo dependiente de la Secretaría de Salud que se encarga de prestar, administrar, regular y supervisar los servicios de salud en el Estado de México.

Un servicio importante es el abastecimiento de medicamentos y material de curación dentro de las unidades médicas, así como su distribución hacia los pacientes, mediante farmacias establecidas en cada localidad. Esta tarea la realiza una empresa farmacéutica que debe encargarse de abastecer, distribuir, administrar y almacenar los productos farmacéuticos.

Para cumplir con el servicio la empresa debe contar, al menos, con un almacén que cumpla con las características determinadas por el ISEM, ubicado en el Estado de México o el Distrito Federal. Además el contrato especifica el inventario que debe mantener cada farmacia (centro de demanda), así como el tiempo de entrega en caso de que ocurra una emergencia, la cual ocurre cuando el centro de demanda solicita de forma inusual, un producto y éste no está disponible. En caso de incumplir con el tiempo establecido, el Instituto sanciona a la farmacéutica con una multa.

La distancia de las zonas de clientes al almacén general, no permite que la demanda de medicamentos y material de curación en casos de emergencia sea satisfecha, por lo que se pretenden establecer tres microalmacenes que permitan cumplir con dicha tarea.

La localización de los microalmacenes es un problema complejo, ya que podrían considerarse muchos aspectos para decidir que espacios son los mejores candidatos, tomando en cuenta que los intereses de la empresa son principalmente, minimizar costos en el tiempo mínimo de entrega.

4.1.1 UNIDADES MÉDICAS

Debido a la extensión de la entidad federativa, el Estado de México se subdivide en delegaciones para prestar servicios públicos. En este trabajo se considerara la jurisdicción de Teotihuacan que comprende los municipios de Acolman, Axapusco, Nopaltepec, Otumba, San Martín de las Pirámides, Temascalapa y San Juan Teotihuacan.

Las unidades médicas se clasifican de acuerdo a su tamaño, los servicios que prestan y las atenciones que brindan. En la entidad federativa se cuenta con:

- Hospital de especialidad
- Hospital integral (Comunitario)
- Centros Especializados de Atención Primaria a la Salud (C.E.A.P.S.)
- Unidades de Consulta externa

Los hospitales especializadose integrales deben brindar atención médica integral, proporcionando servicios de consulta externa, general y de especialidad. Las unidades de consulta externa prestan servicios de atención primaria. Los CEAPS son unidades que prestan servicios de atención de salud pública y de consulta general, odontológica y de especialidad obstétrica y pediátrica (ISEM, 2010).Las unidades médicas de la región se distribuyen como se muestra en laFigura 4.1:

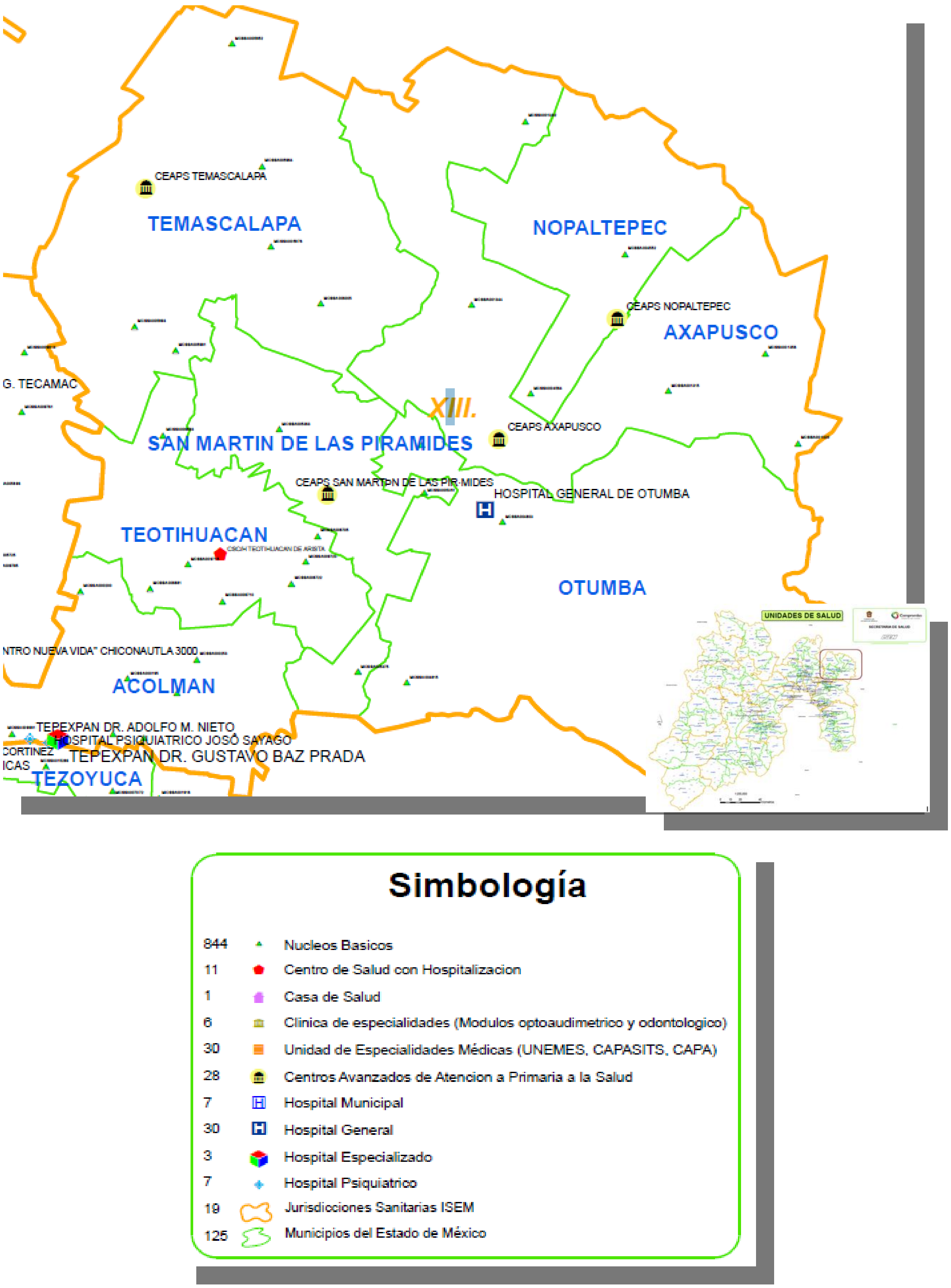

Figura 4.1 Ubicación de unidades médicas. Fuente: Directorio de Unidades IMSS e ISEM

De acuerdo con las atribuciones y el tamaño de cada unidad, se determina el número de SKUs necesarios de medicamentos y material de curación por urgencia. Los SKUs incluyen los productos más demandados. Con esta información se determina la periodicidad de entrega.Las demandas promedio diarias de SKUs en las zonas de clientes, se muestran en la tabla 2:

Tabla 4.1 Demanda promedio diaria en las zonas de clientes

Unidad de Consulta Externa	Demanda promedio/día
Acolman	110
Axapusco	110
Nopaltepec	70
Otumba	60
San Martín de las Pirámides	80
Temascalapa	120
Teotihuacan	110

Fuente: Elaboración propia con base en información proporcionada por las unidades médicas

Para la repartición en general, se lleva a cabo una planeación mensual para distribución y almacenamiento de los productos, con el fin de cumplir con las normas respecto a inventarios; sin embargo, debido a que la demanda de medicamentos en cada centro de salud es aleatoria, se hace un ajuste diariamente de la siguiente manera:

1. Si la farmacia de la unidad médica no cuenta con un producto pero ésta no es urgente, se hace una solicitud al departamento de planeación.
2. El departamento de planeación, concentra todas las solicitudes y diseña un plan de entrega para el día siguiente y lo envía al almacén. Si algún producto es insuficiente, el mismo departamento lo pide al fabricante y éste lo envía al almacén.
3. Cada día se hacen las entregas de acuerdo con el plan mensual, y posteriormente se entregan los productos solicitados extraordinariamente.

En caso de urgencia, la farmacia hace una solicitud a planeación, pero si este departamento lo solicita al almacén general, el SKU se entregará al día siguiente; así que éste se solicita a una farmacia de otra unidad médica cercana que surta al sitio de la urgencia, lo que propicia un desabasto en otro centro de demanda.

El sistema utilizado por la empresa resulta ineficiente en el momento que ocurre una urgencia, ya que se desajustan los inventarios del resto de las farmacias, pudiendo ocasionar otra urgencia y con eso, la planeación inicial se vuelve inservible. Se requerirán una nueva programación y una nueva distribución que generan nuevos gastos.

Por lo anterior, la farmacéutica plantea la opción de colocar tres microalmacenes (como máximo) cercanos a las unidades médicas, que se encarguen de atender los casos de urgencia, con la intención de reducir los costos que genera el desabasto en el sistema y los tiempos de atención en caso de urgencia. Los microalmacenes deben colocarse en las unidades médicas de mayor tamaño, ya que éstos cuentan con el espacio disponible para la instalación, éstos se muestran en laTabla 4.2.

Tabla 4.2 Unidades médicas candidatas para la instalación de microalmacenes.

Unidad Médica	Tipo	Ubicación
Dr. Gustavo Baz	Hospital Especializado	Tepexpan
Hospital Municipal Bicentenario	Hospital Integral	Otumba
Psiquiátrico Dr. Adolfo Nieto	Hospital Psiquiátrico	Tepexpan
Carlos María de Bustamante	CEAPS	Nopaltepec

Fuente: Elaboración propia con base en la información de la Secretaría de Salud

El objetivo principal de la farmacéutica es, minimizar los costos de envío tanto del almacén hacia los microalmacenes como de los últimos a las farmacias, así como los costos de establecimiento y operación. Como objetivo secundario se pretenden minimizar los tiempos de entrega con el fin de cumplir con la limitante para los mismos.

Para resolver el problema se considerará la siguiente información:

- Se cuenta sólo con una planta distribuidora (el almacén general) con una capacidad de envío adicional de 700 unidades de medicamentos.
- Los lugares candidatos para colocar un microalmacén tienen las siguientes características:

Tabla 4.3 Costos de operación de las localizaciones candidatas

Unidad Médica	Costos fijos de operación por mes
Dr. Gustavo Baz	$ 583.74
Hospital Municipal Bicentenario	$ 583.74
Psiquiátrico Dr. Adolfo Nieto	$ 1,652.43
Carlos María de Bustamante	$ 1,752.43

Fuente: Elaboración propia con base en la información proporcionada por la farmacéutica

- Se requieren localizar al menos tres microalmacenes en la zona.
- Los costos de transporte del almacén general a cada localización candidata son:

Tabla 4.4 Costos de envío desde el almacén principal hasta las localizaciones candidatas

Origen	Destino	Costo de envío por día	Costo marginal
San Martín Obispo	Dr. Gustavo Baz	$ 585.47	$0.84
San Martín Obispo	Hospital Municipal Bicentenario	$ 673.46	$0.96
San Martín Obispo	Psiquiátrico Dr. Adolfo Nieto	$ 582.72	$0.83
San Martín Obispo	Carlos María de Bustamante	$ 709.99	$0.83

Fuente Elaboración propia con base en la información proporcionada por la farmacéutica

- La demanda (dada como el promedio de las demandas históricas por tipo de unidad médica) por día por municipio (incluyendo a todas las unidades médicas del mismo) es:

Tabla 4.5 Demanda diaria promedio por zona de clientes

Unidad de Consulta Externa	Demanda
Acolman	110
Axapusco	110
Nopaltepec	70
Otumba	60
San Martín de las Pirámides	80
Temascalapa	120
Teotihuacan	110

Fuente Elaboración propia con base en la información proporcionada por la farmacéutica

- Los tiempos y costos de entrega son:

Tabla 4.6 Tiempo de recorrido de microalmacenes a centros de demanda

Origen	Destino	Tiempo (min)	Tiempo Marginal
Dr. Gustavo Baz	Acolman	96	0.4
Dr. Gustavo Baz	Axapusco	231	1.8
Dr. Gustavo Baz	Nopaltepec	82	0.7
Dr. Gustavo Baz	Otumba	68	0.5
Dr. Gustavo Baz	San Martín de las Pirámides	84	0.6
Dr. Gustavo Baz	Temascalapa	267	2.4
Dr. Gustavo Baz	Teotihuacan	122	0.8
Hospital Municipal Bicentenario	Acolman	211	1.7
Hospital Municipal Bicentenario	Axapusco	117	0.7
Hospital Municipal Bicentenario	Nopaltepec	40	0.3
Hospital Municipal Bicentenario	Otumba	27	0.1
Hospital Municipal Bicentenario	San Martín de las Pirámides	44	0.3
Hospital Municipal Bicentenario	Temascalapa	256	1.8

(Continúa)

Tabla 4.6 Tiempo de recorrido de microalmacenes a centros de demanda (continuación)

Origen	Destino	Tiempo (min)	Tiempo Marginal
Hospital Municipal Bicentenario	Teotihuacan	121	0.7
Psiquiátrico Dr. Adolfo Nieto	Acolman	142	0.7
Psiquiátrico Dr. Adolfo Nieto	Axapusco	242	1.8
Psiquiátrico Dr. Adolfo Nieto	Nopaltepec	95	0.8
Psiquiátrico Dr. Adolfo Nieto	Otumba	81	0.6
Psiquiátrico Dr. Adolfo Nieto	San Martín de las Pirámides	100	0.7
Psiquiátrico Dr. Adolfo Nieto	Temascalapa	241	2.2
Psiquiátrico Dr. Adolfo Nieto	Teotihuacan	154	0.9
Carlos María de Bustamante	Acolman	303	2.4
Carlos María de Bustamante	Axapusco	104	0.6
Carlos María de Bustamante	Nopaltepec	12	0.1
Carlos María de Bustamante	Otumba	57	0.4
Carlos María de Bustamante	San Martín de las Pirámides	87	0.6
Carlos María de Bustamante	Temascalapa	266	1.6
Carlos María de Bustamante	Teotihuacan	188	1.3

Fuente: Elaboración propia

El modelo para el problema de la farmacéutica queda formulado como:

$$Min\, z = \sum_{j=1}^{4} x_j c_j + \sum_{k=1}^{7} \sum_{j=1}^{4} d_k s_{jk}\, y_{jk} + \sum_{j=1}^{4} o_j z_j \tag{11.1}$$

sujeto a:

$$\sum_{j=1}^{4} x_{ij} \leq 700 \tag{11.2}$$

$$x_j - \sum_{k=1}^{7} d_k y_{jk} \geq 0, \qquad j = 1, \dots, 4 \tag{11.3}$$

$$\sum_{j=1}^{4} z_j \leq 3 \tag{11.4}$$

$$x_j \in \mathbb{Z}^+ \tag{11.5}$$

$$Min \sum_{j=1}^{4} \sum_{k=1}^{7} t_{jk} y_{jk} \tag{11.6}$$

sujeto a:

$$\sum_{j=1}^{4} y_{jk}, \quad k = 1, \dots, 7 \tag{11.7}$$

$$y_{jk} \leq z_j \quad j = 1, \dots, 4; k = 1, \dots, 7 \tag{11.8}$$

$$y_{jk} \in \{0,1\}, z_j \in \{0,1\} \tag{11.9}$$

donde

$j \in A$	Conjunto de zonas candidatas para almacenes.
$k \in F$	Conjunto de clientes.
f_j	Costo fijo de operación si se localiza un almacén en j.
d_k	Demanda del cliente k.
c_{ij}	Costo de trasporte por unidad de producto de la planta i al almacén j.
s_{jk}	Costo de trasporte por unidad de producto del almacén localizado en j al cliente k.
t_{jk}	Tiempo de entrega del almacén localizado en j al cliente k.

Variables de decisión:

x_j Cantidad de SKUs a ser trasportados de la planta al centro de distribución localizado en j

$$y_{jk} = \begin{cases} 1 & si\ el\ cliente\ k\ es\ atendido\ por\ el\ almacén\ localizado\ en\ j \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

$$z_j = \begin{cases} 1 & si\ el\ almacén\ se\ localiza\ en\ j \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

Para la formulación anterior se consideraron las localizaciones candidatas y las zonas de clientes en el orden presentado en las tablas.

Resolviendo el modelo planteado utilizando como herramientas los paquetes LINDO y Maple se obtuvieron los siguientes resultados:

La solución óptima al problema binivelse alcanza en los puntos:

$$x = (300, 400)$$

$$y_1 = (1,0,0,0,1,0,1)$$

$$y_2 = (0,1,1,1,0,1,0)$$

$$y_3 = (0,0,0,0,0,0,0)$$

$$y_4 = (0,0,0,0,0,0,0)$$

$$z = (1,1,0,0)$$

Con $\bar{F} = 2223$ y $\bar{f} = 742$.

Con los resultados obtenidos se cumple el objetivo de optimizar el número de microalmacenes así como la forma en que deben ser abastecidos y estableciendo que farmacias deben atender.

Un resultado importante fue que es suficiente localizar dos microalmacenes en la zona, no tres como se había sugerido. El número de microalmacenes de logró optimizar al modificar la restricción de medianas en el problema de localización considerando una desigualdad.

Los centros de distribución deben ser localizados uno en el Hospital Dr. Gustavo Baz en Tepexpan y otro en el Hospital Municipal Bicentenario en Otumba (candidatas 1 y 2).

Tabla 4.7 Resultados

Unidad Médica	Se establece almacén	SKUs enviados desde la planta
Dr. Gustavo Baz	Sí	300
Hospital Municipal Bicentenario	Sí	400
Psiquiátrico Dr. Adolfo Nieto	No	0
Carlos María de Bustamante	No	0

Fuente: Elaboración propia con base en los resultados de la aplicación del modelo y su solución

El primer almacén distribuirá a las unidades médicas ubicadas en Acolman, San Martín de las Pirámides y Teotihuacan; el segundo a Axapusco, Nopaltepec, Otumba y Temascalapa. Lo anterior con un costo de $2,223.00.

La empresa farmacéutica considera la prioridad de la función de costos un punto clave dentro del desarrollo de la solución, por lo que el planteamiento del modelo matemático como multinivel permitió que la solución fuera más cercana a la realidad.

CONCLUSIONES

En el presente trabajo, con base en los postulados de la teoría de localización, en particular de localización en redes, fue posible construir un modelo discreto para localizar servicios en una red, de tal manera que se pueda considerar más de un objetivo y además, ordenar éstos de acuerdo a su importancia, utilizando como base la programación binivel. Con lo que se desarrollo un modelo de localización de servicios binivel, considerando un problema de nivel superior y uno más de nivel inferior, que forma parte de las restricciones del primero.

La estructura particular de los programas binivel y multinivel, facilita la formulación de un gran número de problemas prácticos, que involucran un proceso de decisión jerárquico. En primer lugar, involucran más de un objetivo, lo que permite considerar al menos dos metas para cada problema; además consideran que la respuesta de los objetivos está sujeta a la reacción de otro con mayor importancia.

El planteamiento de un problema con múltiples objetivos vinculándolos de acuerdo con una relación jerárquica, acerca más a los modelos de programación matemática a la realidad, que es lo que pretende emular.

La programación binivel representa un campo muy amplio e interesante de la programación matemática. A pesar de tener importantes resultados y avances, en cuanto al estudio de su estructura, condiciones de optimalidad y métodos de solución, éstos se dirigen principalmente al problema de programación binivel continuo, lo que la vuelve un área muy fértil para la investigación en el caso discreto.

Los principales algoritmos de solución para los problemas discretos son métodos de enumeración exhaustiva y de separación y relajación. El algoritmo utilizado y propuesto para la solución de un problema de localización binivel como el que se presenta, es uno de separación y relajación. La separación, consiste en escribir el problema binivel como uno, de un solo nivel, manipulando la estructura del problema para agregar la función objetivo de nivel superior como una restricción acotada y con su relajación verificar que cada solución sea factible.

En cuanto a la experiencia computacional, utilizando MAPLE 13 para resolver el caso de estudio, el tiempo máximo para correr el algoritmo, fue de dos minutos con 40 variables, 12 de la función líder (descompuesta en binarios) y 28 de la función seguidora. Sin embargo con un lenguaje más adecuado pueden mejorarse los tiempos de solución.

En general, el algoritmo encuentra buenas soluciones rápidamente al ramificar varias veces por iteración, esto permite descartar soluciones no factibles rápidamente, ya que ramificar una variable a la vez, incrementa significativamente el esfuerzo computacional.

Se utilizó un caso de estudio para mostrar la aplicación del modelo desarrollado y su solución a través del algoritmo propuesto. En el caso de estudio, la empresa farmacéutica, que se encarga de planear la distribución de medicamentos a una serie de unidades médicas, ésta considera como prioridad minimizar los costos de entrega de una unidad de productos, sin dejar de considerar que el tiempo de entrega debe de ser el mínimo. La prioridad de la función de costos es un punto clave dentro del desarrollo de la solución, por lo que el planteamiento del modelo matemático como binivel, permitió que la solución fuera más cercana a la realidad.

Y como resultado adicional se puede considerar a esta tesis, una propuesta para plantear problemas considerando dos objetivos en modelos de localización en redes, que tradicionalmente se han planteado con sólo un objetivo.

La programación binivel es un caso particular de la programación multinivel, sin embargo, la complejidad de estos problemas se incrementa significativamente cuando el número de niveles aumenta, debido a que a cada punto factible del problema líder le corresponde una región inducible en el nivel inferior, a su vez, a cada punto factible de esta región le corresponde una subregión de puntos en el siguiente nivel y así sucesivamente. En este sentido, la programación multinivel ha empezado a ser estudiada.

Debido a la complejidad de los problemas, las principales herramientas para encontrar soluciones, son los métodos heurísticos y en este sentido va la investigación sobre los algoritmos de solución para los problemas multinivel.

Además, la estructura particular de los problemas binivel y multinivel, facilita la formulación de muchos problemas prácticos que involucran decisiones jerárquicas, pero no necesariamente con información suficiente, por lo que se ha utilizado con métodos difusos.

REFERENCIAS Y BIBLIOGRAFÍA

- Aiyoshi, E. and Shimizu. "Hierarchical decentralized systems and its new solution by barrier method". IEEE Transactions on systems, Man and Cybernetics. Volume 11, pags. 444-448. 1981.
- Bard, J. "An investigation of the linear three level programming problem". IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, 14:711-717, 1984.
- Bard, J. "Coordination of a multidivisional organization through two levels of management". OMEGA, volume 11, pags. 457-468, 1983.
- Bard, J. "Optimality conditions for the bilevel programming problem". Naval Research Logistics Quarterly, volume 31, pags. 13-26, 1984.
- Bard, J. "Some properties of the bilevel programming problem". Journal of Optimization Theory and Applications, volume 68, pags. 371-378, 1991. Technical note.
- Bard, Jonathan. *Practical Bilevel Optimization. Algorithms and Applications*. Kluwer Academic Publishers; United States of America. 1998.
- Ben-Ayed, O. y C. Blair. "Computational difficulties of bilevel linear programming". Operations Research, volume 38, pags. 556-560, 1990.
- Benson, H." On the structure and properties of a linear multilevel programming problem". Journal of Optimization Theory and Applications, 60:353-373, 1989.
- Bi, Z. y P. Calami. "Optimality conditions for a class of bilevel programming problems". Technical Report #191-O-191291, Department of Systems Design Engineering, University of Waterloo, 1991.
- Braken, J and J. McGill. "Mathematical programs with optimization problems in the constraints". Operations Research. Volume 21, pags. 21:37. 1973.
- Candler, W. and R. Norton. "Multilevel programming". Technical Report 20, World Bank Development Research Center, Washington D. C. 1977.

- Candler, W., J. Fortuny-Amat y B. McCarl. The potential role of multilevel programming in agricultural economics". American Journal of Agricultural Economics, volume 63, pags. 521-531, 1981.
- Chen, Y. y M. Florian. "The nonlinear bilevel programming problem: a general formulation and optimality conditions". Technical Report CRT-794, Centre de Recherché sur les Transports, 1991.
- Colebrook, Marcos, Joaquín Sicilia; "Localización de servicios en redes". Dpto. Estadística, Investigación Operativa y Computación. Universidad de La Laguna. 2006.
- Colson, B. "BIPA (Bilevel Programming with Approximation methods): software guide and test problems". Technical Report CRT-2002-38, Centre de Recherche sur les Transports, Université de Montréal, Montréal, QC, Canada. 2002.
- Daskin, Mark S. *Network and discrete location: models, algorithms, and applications*. Wiley. New York 1995.
- Dempe, S. "A necessary and sufficient optimality condition for bilevel programming problems". Optimization, Volume 25, pags. 341-354, 1992.
- Dempe, S. "Annotated bibliography on bilevel programming and mathematical programs with equilibrium constraints". Optimization, volume 52, pags. 333-359. 2003.
- Dempe, Stephan. "Discrete Bilevel Optimization Problems". Institut für Wirtschaftsinformatik, Universität Leipzig, Alemania, 2001.
- Dempe, Stephan; *Foundations of Bilevel Programming*; Kluwer Academic Publishers; United States of America. 2002.
- Florian, M. y Y. Chen. "A bilevel programming approach to estimating O-D matrix by traffic counts". Technical Report CRT-750, Centre de Recherché sur les Transports, 1991.
- Handler, Gabriel; Pitu Mirchandi. *Location on networks theory and algorithms*. The Massachusetts Institute of Technology. United States of America. 1979.

- Hansen, P., B. Jaumard y G. Savard. "New branch and bound rules for linear bilevel programming". SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing, volume 13, pags. 1194-1217, 1992.
- Huang, Bo; Nan Liu; "Bilevel Programming Approach to Optimizing a Logistics Network with Balancing Requirements". Applications of Advanced Technologies in Transportation Engineering. Proceedings of 8th International Conference on Applications of Advanced Technologies in Transportation Engineering 2004.
- Isard, E. Location and Space Economy. MIT Press, Cambridge, Mass. 1956.
- Ishisuka, Y. "Optimality conditions for quasi-differentiable programs with applications to two-level optimization". SIAM Journal on Control and Optimization, Volume 26, pags. 1388-1398, 1988.
- Jan, R. and M. Chem. "Multi-level nonlinear integer programming". 1990. (Preprint from the Department of Computer and Information Science, National Chiao Tung University).
- Jaumard, B., G. Savard y J. Xiong. "A new algorithm for the convex bilevel programming problem". Draft paper, École Polytechnique de Montréal. 2000
- Jeroslow, R. "The polynomial hierarchy and simple model for competitive analysis for competitive analysis". Mathematical Programming, volume 32, pags 146-164, 1985.
- Kuhn, H. W. y R. E. Kuenne. "An Efficient Algorithm for the Numerical Solution of the Generalized Weber Problem in Spatial Economics". Journal of Regional Science, volume 4, Pags. 21-33. 1962.
- LeBlanc, L. y D. Boyce. "A bilevel programming algorithm for exact solution of the network design problem with user-optimal flows". Transportation Research, 20 B: 259-265, 1986.
- Lee,S., Gary I. Green, Chang S. Kim. "A multiple criteria model for the location-allocation problem". Computers & Operations Research. Volume 8, pags. 1–8. 1981.

- Marcotte, P. y G. Savard. "Bilevel programming: A combinatorial perspective". Avis D., Hertz A., Marcotte O. (eds) Graph Theory and Combinatorial Optimization. Kluwer Academic Publishers, Boston. 2005.
- Mirchandani, Pitu; Richard Francis; *Discrete Location Theory*. Wiley-Interscience. Canadá. 1990.
- Outrata, J. "Necessary optimality conditions for Stackelberg problems". Journal of Optimization Theory and Applications, volume 76, pags. 305-320, 1993.
- Pérez, Dionisio; José Moreno. "The Generalized p-centdian on netwoks". Universidad de la Laguna. España.
- Savard, G. J. Gauvin. "The steepest descent direction for the nonlinear bilevel programming problem". Technical Report G-90-37, Groupe d'Études et de Recherche en Analyse des Décisions, 1990.
- Stackelberg, H., *Market Structure and Equilibrium*. Springer-Verlag Wien, New York, 1934.
- Stackelberg, H., *The Theory of the Market Economy*. Oxford University Press, 1952.
- Vicente, L. P. Calamai. "Geometry and local optimality conditions for bilevel programs with quadratic strictly convex lower levels". Technical Report #198-O-150294, Department of Systems Design Engineering, University of Waterloo, 1994.
- Weber, A. *On the Location of Industries*. University of Chicago Press, Chicago, 1929.
- Xiangrong, Liu; Hande Benson. "On the solution of a discrete bilevel programming problem in biofuel production". Decisions Sciences Institute. 2008.
- Ye, J. y D. Zhu. "Optimality conditions for bilevel programming problems". Technical Report DMS-618-IR, Deparment of Mathematics and Statistics, University of Victoria, 1993.