



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO**

---

**PROGRAMA DE MAESTRIA Y DOCTORADO EN  
INGENIERIA**

UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTONOMA DE  
MEXICO

**TEORÍA CONSTRUCTAL APLICADA A UN  
COLECTOR SOLAR**

**T E S I S**

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

**DOCTOR EN INGENIERÍA**

MECANICA - TERMOFLUIDOS

P R E S E N T A :

**M. en C. JORGE ARMANDO OJEDA SÁNCHEZ**



TUTOR:

**DR. FEDERICO MÉNDEZ LAVIELLE**

2012

**JURADO ASIGNADO**

Presidente: Dr. Jaime Gonzalo Cervantes de Gortari

Secretario: Dr. Francisco Javier Solorio Ordaz

Vocal: Dr. Federico Méndez Lavielle

1er. Suplente: Dr. Oscar Eladio Bautista Godínez

2do. Suplente Dr. Rogelio González Oropeza

Lugar donde se realizó la tesis:

DEPARTAMENTO DE TERMOFLUIDOS, FACULTAD DE INGENIERIA, UNAM

**TUTOR DE TESIS:**

DR. FEDERICO MÉNDEZ LAVIELLE

---

**FIRMA**

*"Hay una fuerza motriz más poderosa que el vapor, la electricidad y la energía atómica: la voluntad".*

Albert Einstein

***Mis más sinceros agradecimientos:***

A la **Universidad Nacional Autónoma de México** por permitirme estudiar en sus aulas

A la dirección General de Asuntos del Personal Académico, por el apoyo brindado mediante el proyecto PAPIIT bajo el contrato IN102209-3

Al CONACYT por el apoyo brindado mediante el proyecto de investigación bajo el contrato 79811

A la Coordinación de Estudios de Posgrado (CEP) de la UNAM por la beca otorgada para realizar los estudios de Doctorado

Al Dr. Federico Méndez Lavielle por su valioso apoyo, tiempo y su amistad.

Al Dr. Oscar Eladio Bautista por su apoyo y amistad

A Nancy por su paciencia, amor y cariño

A mi Madre por su apoyo y cariño

A mis compañeros de Posgrado Oscar, Israel, Rafa, Ares

Al Departamento de Termoenergía y Mejoramiento Ambiental, de la Facultad de Ingeniería UNAM, por brindarme los recursos necesarios para la realización de este trabajo.

# Índice

<b>Resumen</b>	<b>v</b>
<b>Nomenclatura</b>	<b>vii</b>
<b>1 Introducción</b>	<b>1</b>
1.1 Generalidades . . . . .	1
1.2 Antecedentes . . . . .	3
<b>2 Planteamiento del problema</b>	<b>11</b>
2.1 Consideraciones generales y modelo físico . . . . .	11
2.2 Tiempo de enfriamiento para un colector solar . . . . .	13
2.2.1 Modelo de distribución de temperatura en la dirección horizontal . . . . .	13
2.2.2 Modelo de distribución de temperatura en la cavidad . . . . .	16
<b>3 Colector solar en forma de disco</b>	<b>21</b>
3.1 Primer elemento de construcción . . . . .	21
3.1.1 Resistencia térmica del primer elemento constructal . . . . .	27
3.2 Segundo elemento de construcción . . . . .	29
3.3 Red de tuberías para n ramificaciones . . . . .	32
<b>4 Red de tuberías con dicotomía</b>	<b>37</b>
4.1 Consideraciones generales . . . . .	37
4.1.1 Primer elemento de construcción . . . . .	38
4.1.2 Resistencia térmica adimensional . . . . .	40
4.1.3 Potencia adimensional . . . . .	41
4.1.4 Segundo elemento de construcción . . . . .	43
4.1.5 Tercer elemento de construcción . . . . .	45
4.1.6 Expresiones generales . . . . .	47
4.2 Modelo simplificado de Phan-Thien & Tanner . . . . .	49
4.2.1 Resistencia térmica adimensional . . . . .	52
4.2.2 Potencia adimensional . . . . .	54
<b>5 Resultados</b>	<b>55</b>
5.1 Tiempos mínimos de enfriamiento . . . . .	56
5.2 Resistencia térmica en una red geométrica de disco. . . . .	64

5.3	Resistencia térmica, $n$ -ramificaciones. . . . .	68
5.4	Resistencia térmica, dicotomía . . . . .	73
5.5	Resistencia térmica, modelo de SPTT . . . . .	77
5.5.1	Límite del número de Deborah $De \ll 1$ . . . . .	79
5.5.2	Límite del número de Deborah $De \gg 1$ . . . . .	85
5.5.3	Comparación de la resistencia térmica . . . . .	89
<b>6</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>91</b>
	<b>Apéndice A</b>	<b>101</b>
	<b>Apéndice B</b>	<b>105</b>
	<b>Apéndice C</b>	<b>107</b>
	<b>Apéndice D</b>	<b>109</b>
	<b>Apéndice E</b>	<b>115</b>
	<b>Apéndice F</b>	<b>119</b>

# Resumen

En el presente trabajo se lleva a cabo un estudio teórico sobre la transferencia de calor en un dispositivo de colección solar, determinando los elementos necesarios que permitan obtener un proceso de calentamiento óptimo a partir de la generación de redes de tubos por donde fluye un fluido. Dichas redes son optimizadas a partir de las ideas de la teoría constructal. La teoría constructal fue propuesta por A. Bejan y básicamente establece que las formas y las estructuras en la naturaleza son producto de un diseño óptimo para privilegiar un factor físico determinado, necesario para la subsistencia de un sistema determinado. Las redes generadas por esta teoría se pueden describir mediante los mismos principios físicos del problema, que generalmente queda condicionado por las restricciones locales y globales propias del mismo problema. Esta teoría, en el caso que nos ocupa, se aplica concretamente a la generación de una red de tuberías por donde circula un fluido que se calienta mediante la presencia externa al sistema anterior, de una señal transitoria senoidal que puede modelar, en una primera aproximación, la señal solar a lo largo del día.

El objetivo de este trabajo no es describir propiamente la construcción de un dispositivo de colección solar, ni comparar los resultados con un modelo o prototipo existente. En este trabajo se plantea un dispositivo de colección solar óptimo que pueda atender a la naturaleza dinámica de la captación solar, de manera que pueda ser adaptativo en el tiempo de exposición; lo anterior se logra mediante la aplicación de la teoría constructal. Se exploran teóricamente los diferentes enfoques de una teoría constructal aún en desarrollo, para obtener diferentes metodologías óptimas de colección solar, que representan una primera aproximación a una solución viable para entender y optimizar ciertos dispositivos ingenieriles a partir de la forma y la estructura. En nuestro caso y apoyado por recientes descubrimientos en la dinámica capilar de los vasos sanguíneos, en el presente trabajo se hace uso del concepto de la angiogénesis; la posibilidad de controlar y adaptar el esfuerzo cortante en las paredes de las redes constructales para permitir la modificación del flujo másico y por consiguiente, el control de la transferencia de calor.

A partir de lo anterior, se generan los elementos necesarios para describir los procesos de transferencia de calor en las redes de tuberías generadas a partir de la teoría constructal. La adaptabilidad ante el cambio de la radiación recibida se basa en los materiales termotrópicos y cromogénicos, que tienen la propiedad de permitir el paso de cierta cantidad de luz y radiación, utilizados frecuentemente en el confort de espacios para uso humano.

Tomando en cuenta los comentarios generales anteriores, la estructura del presente trabajo de tesis se lleva a cabo mediante el plan siguiente: en la primera parte de este trabajo se realiza la formulación de un primer elemento fundamental de construcción, para obtener la solución analítica de los perfiles de temperatura, considerando que la parte superior del elemento se modela como una cavidad rectangular llena de aire, donde los procesos convectivos libres pueden, en general, llevarse a cabo por efecto del calentamiento externo que recibe la cavidad como resultado de una señal transitoria de transporte de energía. En este primer elemento, la sustancia que se llega a calentar por su interacción térmica con la cavidad, circula dentro de una tubería con dimensiones conocidas. Como resultado del proceso anterior, se pueden determinar los tiempos característicos de enfriamiento de la cavidad.

En la segunda parte se desarrolla una formulación de la red de tuberías en un dispositivo de colección solar circular. El sistema anterior se define mediante un sector circular como primer elemento de construcción, el fluido a calentar se distribuye en un arreglo de tuberías desde el centro a la periferia del sector circular. El arreglo de tuberías se ramifica en  $n$  tubos, a partir de considerar las fracciones del área ocupada por dicha red y el área total circular del colector. En particular, se obtienen resultados de la resistencia térmica total del elemento y de la relación de diámetros, en función de parámetros físicos y geométricos del elemento de construcción.

A partir de la formulación anterior se desarrolla una red constructal considerando que la potencia necesaria para transportar al fluido del centro del círculo a un número determinado de puntos en la periferia, considerando el cálculo del número de Nusselt en cada nivel de ramificación. En el presente trabajo se supone que la construcción de la red de tuberías obedece a la Ley de Murray (dicotomía), la cual establece que a partir del mínimo trabajo utilizado para el transporte de fluido, se obtiene una relación de diámetro entre los vasos sanguíneos; dicha ley, a su vez es un resultado obtenido por la teoría constructal a partir de aplicar el principio de optimización y que establece que en un sistema de tamaño finito que persiste en el tiempo, debe desarrollarse de una manera tal que proporcione un fácil acceso a las corrientes impuestas que fluyen a través del sistema.

En esta formulación se estudian dos casos, la red de tuberías modelada con un fluido newtoniano y un fluido no newtoniano. En este último caso, se utiliza como modelo reológico el de Phan-Thien & Tanner, el cual resulta muy apropiado para entender la dinámica de los fluidos viscoelásticos. La adaptación del colector solar se realiza a partir de proponer un modelo del parámetro elongacional del modelo reológico como función del tiempo.

Finalmente se presentan los resultados de las resistencia térmica en función de la potencia, así como los ángulos óptimos y relaciones de longitud para cada etapa de ramificación de la red. Se presenta una propuesta de control para obtener que el fluido siempre capte la mayor cantidad de calor. Los resultados obtenidos demuestran que es posible obtener una menor resistencia térmica del sistema, para un fluido no newtoniano y así obtener una capacidad óptima para la captación de calor.

# Nomenclatura

$A$	área del elemento constructal	$[\text{m}^2]$
$a$	espesor del elemento constructal	$[\text{m}]$
$C_p$	calor específico	$\left[\frac{\text{J}}{\text{kg K}}\right]$
$D$	diámetro de tubería	$[\text{m}]$
$H$	altura del elemento de construcción	$[\text{m}]$
$L$	longitud del elemento de construcción	$[\text{m}]$
$\dot{m}$	flujo másico	$\left[\frac{\text{kg}}{\text{s}}\right]$
$N$	número de sectores	$[-]$
$n$	número de ramificaciones	$[-]$
$n_0$	número de tubos iniciales	$[-]$
$R$	Radio del sector cilíndrico	$[\text{m}]$
$R_T$	Resistencia térmica	$[-]$
$T$	Temperatura	$[\text{K}]$
$t$	tiempo	$[\text{s}]$
$u$	velocidad	$\left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]$
$\tilde{W}$	Potencia adimensional	$[-]$

## Subíndices

0	primer elemento
1	primera construcción
<i>c</i>	característica
<i>i</i>	nivel de construcción
max	máximo
<i>prom</i>	promedio
<i>tot</i>	total

## Símbolos griegos

$\alpha$	ángulo del sector	
$\beta$	coeficiente de expansión térmica	
$\beta_m$	valores propios	
$\gamma$	parámetro físico	
$\varepsilon$	relación de esbeltez	
$\phi$	relación de aspecto del elemento constructal	
$\mu$	coeficiente de viscosidad	$\left[ \frac{\text{kg}}{\text{m s}} \right]$
$\theta$	temperatura adimensional	
$\rho$	densidad	$\left[ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right]$
$\tau$	variable de tiempo adimensional	
$\omega$	frecuencia de la señal solar	$\left[ \frac{1}{\text{s}} \right]$

# 1

## Introducción

### 1.1 Generalidades

En el presente trabajo se desarrolla un estudio teórico sobre las características principales de la transferencia de calor para un dispositivo que requiere para su desempeño adecuado coleccionar alguna forma de energía transitoria externa. El sistema anterior se puede optimizar mediante el empleo de un sistema de redes de tuberías que se modelan con ayuda de la teoría constructal propuesta originalmente por A. Bejan [1]. Para propósitos prácticos, en este trabajo se supone que la señal externa transitoria de energía que recibe el sistema constructal se representa mediante una señal senoidal.

La teoría constructal establece que es posible la generación de redes optimizadas para el transporte más adecuado de los fluidos y calor, a partir de principios físicos, aplicando para ello, restricciones locales y globales a cada nivel de construcción, dando como resultado la forma y la estructura de la red de tuberías optimizadas. La teoría constructal ha establecido los métodos para generar redes de forma reticular y dendrítica, de tal manera que uno de los resultados son las relaciones geométricas de tamaño, tanto en longitud como en diámetros entre cada una de las etapas de construcción.

La motivación principal del presente trabajo se concentra en el planteamiento y desarrollo de la teoría constructal aplicada a un sistema de colección de energía fluctuante en el tiempo. Particularmente, el método desarrollado se orienta al diseño de un dispositivo de colección solar mediante una serie de herramientas teóricas propias de la teoría constructal, con el objetivo final de analizar las posibilidades reales de optimización. Cabe mencionar que el dispositivo de colección desarrollado no descansa en los principios fundamentales de los colectores solares planos, sino mas bien en comprender las características óptimas de operación, tomando en cuenta la naturaleza dinámica de la captación solar. Para obtener lo anterior se plantean diferentes metodologías para desarrollar un dispositivo adaptativo en el tiempo.

La teoría constructal establece en primera instancia que mediante las leyes de conservación propias del problema físico, se puede plantear un elemento rectangular para determinar un tiempo de enfriamiento óptimo del primer elemento de construcción con un fluido newtoniano que circula por la tubería central y posteriormente desarrollar una red dendrítica con múltiples ramificaciones sobre un primer elemento de construcción en forma de disco.

De esta manera se desarrolla una red dendrítica, con la característica de ser dicotómica para un fluido newtoniano y un fluido no-newtoniano en función de la potencia para el transporte del fluido, elemento que es necesario contemplar, ya que al incrementarse la complejidad geométrica, se demuestra que disminuye la resistencia térmica, aunado a la necesidad de determinar la potencia necesaria. Esta última formulación, considera el cálculo del número de Nusselt en cada etapa de construcción, así como la variación de los parámetros propios del fluido no newtoniano modelado con el modelo reológico simplificado de Phan-Thien & Tanner (SPTT).

Los diferentes planteamientos teóricos se desarrollan en los capítulos correspondientes, los resultados y gráficas se presentan en el capítulo de Resultados, definiendo las consideraciones y condiciones correspondientes a cada planteamiento de optimización.

## 1.2 Antecedentes

La energía solar puede considerarse como una fuente de energía que es una opción viable y adecuada para superar la escasez de energía limpia, con el consecuente ahorro en otros energéticos, especialmente los de origen fósil. La cantidad de insolación que recibe una cierta región del planeta depende fuertemente de la geografía, meteorología y topografía entre otros factores. México cuenta con una de las insolaciones más intensas del mundo, la mitad del país recibe  $1764 \text{ J/cm}^2$  por día tal como lo reportaron Almanza, R. *et al.* [2], lo que significa que el uso de la energía solar representa una fuente importante de energéticos para el futuro.

Los colectores solares pueden dividirse en tres clases: colectores solares planos, concentradores estacionarios y concentradores de enfoque que siguen al sol. En los desarrollos siguientes se hace énfasis en los colectores solares planos. Los colectores solares planos, los que tienen generalmente como principal objetivo calentar agua. Su uso se ha popularizado y es frecuente encontrar aplicaciones prácticas en el acondicionamiento del aire en edificios, centros habitacionales e industriales mediante el empleo de diferentes arreglos y módulos de colectores. Estos sistemas están constituidos básicamente de un cristal esmaltado, una placa absorbente sobre la que están colocados una serie de tubos de cobre conectados en forma de alambre por donde circula agua. El calentamiento de agua se da por efectos de transferencia de calor debido a la radiación solar y convección natural, principalmente. Los elementos básicos de un colector solar plano se muestran en la siguiente Figura 1.1.

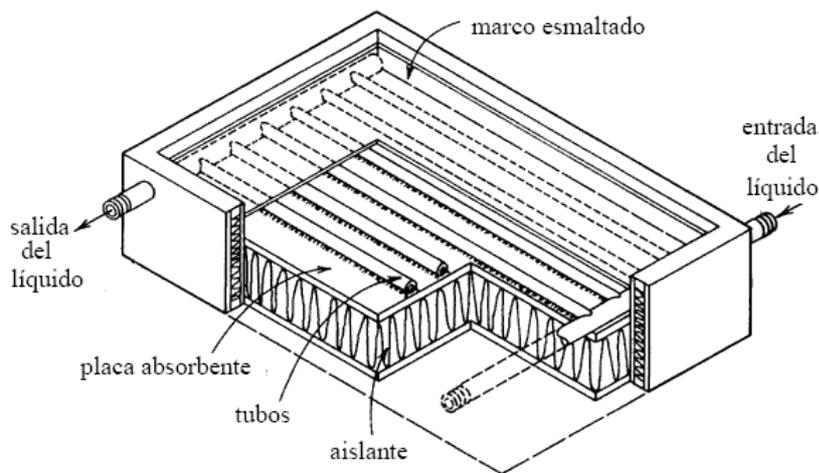


Figura 1.1: Colector solar plano

Los márgenes de operación y rendimiento de dichos sistemas dispositivos de colección solar son generalmente bajos. Son varios los aspectos que se reportan para la optimización de dichos dispositivos. En este contexto, los siguientes trabajos presentan diferentes métodos y modelos para optimizar el rendimiento de un colector solar.

Zsargut, J. *et al.* [3] reportaron que es posible mejorar el desempeño de un colector solar, tomando en cuenta los parámetros geométricos que son elementos importantes para el diseño, como son el diámetro de la tubería, la longitud de los tubos, así como el número de tubos; estos factores son utilizados para definir un análisis de optimización económica a partir de considerar los parámetros anteriores como variables de decisión. Otros factores geométricos que consideran es el área activa del colector por unidad de demanda anual de calor, son elementos que se consideran para obtener una optimización económica. Lo reportado por este trabajo, muestra la importancia de los elementos de diseño en un colector solar, dichos parámetros de diseño no son únicos, por lo que en este trabajo se consideran otros parámetros de diseño.

Entre las herramientas para la optimización de un colector solar, Kalgirou, S., [4] reportó la aplicación de técnicas de optimización como las redes neuronales y algoritmos genéticos, propias de la inteligencia artificial. Los métodos de simulación aplicados permiten obtener la correlación entre el área del colector y el tamaño de almacenaje en la energía auxiliar requerida por el calentador del sistema. Posteriormente aplica un algoritmo genético para estimar el tamaño óptimo de los parámetros anteriores para obtener un mayor ciclo de vida del dispositivo, maximizando los beneficios económicos del sistema. Kacan, E. *et al.* [5] reportan valores de los diámetros de los tubos y la distancia entre cada uno para encontrar la máxima eficiencia mediante un modelo matemático, demostrando que el número óptimo depende de encontrar la longitud de los tubos y de las aletas que participan en la transferencia de calor.

Por otro lado, Badescu, V., [6] generó un modelo matemático para un colector solar del tipo *open loop* que considera la implementación de una base de datos meteorológicos locales, con lecturas directas de los coeficientes principales del modelo físico dependientes del tiempo; tomando como parámetro de control el flujo másico de agua. Con ayuda de un análisis energético, identifica las partes ineficientes y condiciones de operación óptimas. Los resultados de este análisis arrojan que al considerar flujo másico constante se obtiene una eficiencia exergética cercana a los datos experimentales previos con los que se pueden establecer las condiciones de operación de dicho modelo matemático. Paralelamente en este trabajo también se formula su vez una teoría de control óptima para el colector solar desarrollado.

La optimización del colector solar ha sido reportada también a partir de la implementación de un análisis exergético, por ejemplo Torres, E. *et al.* [7] reportaron el uso del método de minimización de generación de entropía durante la captación de energía solar para los requerimientos de mínima exergía y localización establecidos; determinando números de generación de entropía y criterios para la operación termodinámica óptima bajo condiciones no isotérmicas; así como los números adimensionales correspondientes al flujo óptimo de fluido de trabajo en función del área de colección. La identificación de las relaciones adimensionales son usadas para caracterizar el desempeño de un colector solar.

En esta misma dirección, Torres, E. *et al.* [8], realizaron la aplicación de una optimización termodinámica basada en la minimización de la entropía, reportando en sus resultados la influencia de las superficies para un arreglo específico entre la placa absorbente y los tubos donde se transporta el fluido; haciendo énfasis en la necesidad de considerar la mecánica de los fluidos, la transferencia de calor, la geometría involucrada, así como los materiales del dispositivo empleado.

La adaptación del dispositivo solar en el proceso de colección puede verse influenciado por el uso de materiales adaptativos, generalmente utilizados en la arquitectura para el confort humano o bien en el almacenamiento de calor. Para obtener lo anterior es deseable un modelo teórico de las propiedades del material como función de la temperatura, con el objetivo de ser utilizado mediante el método de optimización definido por la teoría constructal.

Para el almacenamiento de calor, Alghoul, M. *et al.* [9] reportaron materiales utilizados en un colector solar, destacando la importancia de diversos parámetros de diseño en cuanto al uso de materiales para la capa antireflectora, el grosor del esmalte del cristal receptor, así como el material de aislamiento. Estos autores reportan el uso de materiales de cambio de fase (PCM, Phase Change Materials) como una opción de almacenamiento de energía, obteniendo una mayor eficiencia en la colección solar.

Entre los materiales que presentan una capacidad de adaptación son los utilizados para el control de luminosidad, principalmente para uso de espacios comunes como pueden ser oficinas y casas habitación. Nitz, M. *et al.* [10] reportaron los principios básicos de materiales cristalinos, como la capacidad de cambiar sus propiedades ópticas activa o pasivamente, dependiendo de los diferentes parámetros de control con el fin de tener el control del paso de la luz y el flujo de energía a través del material. El control del paso de la luz consiste en capas cambiantes del material que se adaptan dinámicamente a las condiciones climáticas o a las demandas del usuario; el cambio interno de dicho material cristalino, se promueve mediante la aplicación de una corriente eléctrica, provocando un cambio en el arreglo interno del cristal.

Los materiales se dividen en termotrópicos y termocrómicos, los primeros se refieren a la capacidad del material de dispersar la luz ante los cambios de temperatura, el segundo se refiere a la capacidad de cambiar de tonalidad, dicho cambio se presenta de la frecuencia de la luz relacionada al infrarrojo. Los materiales termotrópicos reportados por Lampert, C., [11] son los denominados de separación de fases, el mecanismo de cambio se presenta cuando el material presenta una temperatura característica y uno o más componentes se separan de la matriz, provocando así la dispersión de la luz.

Los sistemas con materiales de cambio de fase, PCM, son utilizados como almacenadores de calor, debido a la alta capacidad para almacenar calor al llegar proceso de fusión del material. Algunos de estos materiales son policristalinos en el estado sólido, la luz es dispersada por cristales, una vez presentando una temperatura crítica, entonces el material se presenta difuso, debajo de dicha temperatura, el material se presenta como transparente, tal como lo reporta Granqvist, C. *et al.*, [12].

Una aplicación de los materiales de cambio de fase fue documentada por Haillot, D. *et al.* [13]. Dicho material se utiliza en colectores solares con el fin de almacenar el calor captado por la tubería para un colector solar parabólico. Los materiales utilizados son parafina y grafito natural comprimido. El grafito rodea a la tubería por donde circula el fluido a calentar y este arreglo a su vez es rodeado de parafina.

En el trabajo anterior se reportó un modelo teórico de la temperatura del sistema involucrando un cambio de fase. Los resultados indican que el arreglo de materiales parafina-grafito natural presenta un mayor gradiente de temperatura del exterior al interior del arreglo cilíndrico. El uso del material de cambio de fase puede brindar la posibilidad del cambio de geometría para obtener un mayor desempeño en la transferencia de calor.

En cuanto a otros materiales utilizados para el control de temperatura, Reim, M. *et al.* [14,15] reportaron experimentos de un material nanoestructurado granulado, denominado sílica-aerogel, con una alta transmitancia y una baja conductividad térmica, principalmente usado para uso habitacional en colectores solares y control de temperatura. La aplicación para un colector solar es rellenando el espacio del colector con gránulos de este material y gas a presión (dióxido de carbono, argón) sobre los tubos conductores por donde circula el fluido a calentar. Este material solo es factible para controlar las condiciones externas al medio circundante.

De los trabajos anteriores no se conocen aún modelos teóricos de alguna propiedad física en función de la temperatura, para que pueda ser utilizada en un modelo teórico de un colector solar adaptativo en el tiempo. El colector solar a desarrollar se propone a partir de la aplicación de la teoría constructal. Esta teoría fue desarrollada por A. Bejan [16], y establece que las formas geométricas en la naturaleza son producto de privilegiar uno o varios elementos físicos para obtener un punto óptimo de desempeño. Las geometrías más comunes en la naturaleza son las redes en forma de "árboles" o también denominadas dendríticas, presentes en los ríos, vasos sanguíneos, redes alveolares pulmonares, entre otros ejemplos. Considerando que el transporte de cantidad de movimiento y energía puede obedecer en circunstancias a un principio de minimización, no es aventurado decir que muchos de los desarrollos ingenieriles en la historia humana se han generado con la ayuda de mínimos costos de operación.

En esta dirección, la teoría constructal establece que la forma y la estructura de un sistema complejo es consecuencia de que el transporte de calor, nutrientes o fluido, se lleva a cabo por aquella trayectoria que oponga la mínima resistencia y sujeta a las leyes físicas que gobiernen el fenómeno de transporte. Sin embargo, es importante destacar que Bejan hace una clara diferencia entre la teoría constructal y la teoría de los fractales, ya que esta última es solamente descriptiva, más no predictiva. Como bien es conocido, un fractal, según su descubridor B. Mandelbrot [17], es un ente matemático generado mediante la repetición de un algoritmo basado en postulados de reglas de similitud geométrica. El algoritmo utilizado en la teoría de los fractales es obligado a interrumpir la secuencia, para así poder obtener una forma que es adecuada para describir un comportamiento físico. La teoría constructal establece que el óptimo acceso a un determinado factor físico como el calor, fluidos, sustancias nutrientes, etc., persiste en el tiempo como una característica particular. Por lo tanto, la teoría constructal establece el siguiente enunciado: *Un sistema de tamaño finito que persiste en el tiempo, debe desarrollarse de una manera tal que proporcione un fácil acceso a las corrientes impuestas que fluyen a través del sistema.*

Como consecuencia del postulado anterior, los principios de minimización para construir conductos de forma dendrítica son utilizados para el transporte de calor entre puntos discretos (fuentes y sumideros) y un número finito de puntos (líneas, áreas y volúmenes). Los elementos de construcción se optimizan en su forma, de manera que la longitud del conducto de flujo que conecta a un punto discreto, área o volumen, pueda ser optimizada.

Esta teoría considera un primer elemento volumétrico de un material de tamaño finito que es optimizado en su forma haciendo que la resistencia del primer elemento de construcción sea mínima, consecuentemente la solución óptima obtenida se incluye en la siguiente construcción a optimizar, en una secuencia que comienza con un primer bloque o sistema elemental para después proceder con mas elementos que consideran una o mas ramificaciones de la red, la optimización del primer elemento da como resultado la proporción del tamaño óptimo. La forma total dendrítica de la red, es producto de la optimización geométrica de cada bloque que lo conforma, pudiendo determinarse el número y arreglo de ramificaciones en cada nivel de ensamble [18].

Se han documentado redes generadas por la teoría constructal en diferentes configuraciones geométricas, tanto en redes reticulares como de forma dendrítica, tanto para la distribución de fluidos como para el transporte de calor de un volumen finito. Bejan, A. [19], reportó el enfriamiento de un volumen con un elemento de generación de calor mediante una red de forma reticular de alta conductividad térmica.

La red generada se construye a partir de optimizar la transferencia de calor en la direcciones horizontal y vertical. Dicho proceso se aplica en cada etapa de construcción, de tal manera que se minimiza la resistencia térmica total generando así una red conformada por bloques optimizados. Los resultados obtenidos son las relaciones geométricas en los espesores del inserto de material de alta conductividad térmica, así como la relación de aspecto de cada bloque que conforma la red para el desalojo de calor, teniendo una influencia importante de los parámetros adimensionales, tanto físicos como geométricos en los resultados finales reportados.

Wechsato, *et al.* [20], reportaron una red dendrítica en un cuerpo de forma discoidal, con un punto de entrada hacia el perímetro, con tubos que distribuyen el fluido a puntos situados en la periferia del disco, incorporando circuitos de tuberías y reportando la relación geométrica de todo el arreglo, así como la resistencia al flujo.

Desde las consideraciones constructales iniciales que se hacen para los elementos de construcción hasta la forma final de las redes, las geometrías no se limitan necesariamente a formas reticulares, tal como se reporta en [21]. En este último caso y con el objetivo de obtener la mínima resistencia al flujo entre el centro del disco y un número finito de puntos situados equidistantes en la periferia del disco, este trabajo muestra la generación de una red dendrítica de tubos por donde circula un fluido newtoniano en un cuerpo de forma discoidal. El fluido es considerado newtoniano, laminar y totalmente desarrollado; el primer elemento fundamental de construcción es un sector de radio  $R$ , describiendo en cada etapa de construcción la longitud de los tubos de la red, los ángulos que guardan entre si cada arreglo de tubos. En este trabajo se demuestra que el número de tubos iniciales que entran al elemento de forma discoidal es igual a 3, ya que para este número de tubos iniciales se presenta la mínima resistencia al flujo. La red de tuberías desarrolladas en este trabajo presenta la característica de dicotomía; es decir, el tubo anterior se ramifica en dos tuberías de menor tamaño, al cociente de los diámetros anterior y posterior de las tuberías es conocido como la ley de Murray [22,23]. El resultado anterior fue obtenido por Murray C.D. en 1926, como resultado de la aplicación del criterio de mínimo trabajo utilizado para el transporte de fluido en un sistema vascular. Posteriormente, A. Bejan obtiene el mismo resultado a partir de los principios de optimización propios de la teoría constructal para el óptimo transporte de fluidos en redes reticulares [16].

En el contexto de la aplicación de redes para el óptimo transporte de calor, Rocha, L. *et al.* [24] reportaron la aplicación de la teoría constructal para el enfriamiento de un volumen de forma de disco, desde la periferia al centro del disco, con un elemento de generación de calor mediante una red de forma dendrítica, considerando un primer elemento fundamental cilíndrico. Los procesos de transferencia de calor son por conducción para dos materiales con diferentes conductividades térmicas, definiendo la resistencia térmica total, que tras el proceso de optimización se obtiene el tamaño óptimo del elemento cilíndrico. Los resultados reportados son las relaciones geométricas de cada elemento, la resistencia térmica en función del número de ramificaciones y parámetros, tanto físicos como geométricos. Se determina además la distribución radial de los insertos, siendo que la temperatura decrece desde el centro del disco hacia el perímetro, conforme aumenta el número de ramificaciones de la red.

El efecto del tiempo en los principios de optimización de la teoría constructal, fue reportado por Dan, N. *et al.* [25], donde estudiaron el problema de enfriamiento de un volumen con generación de calor, mediante una red de un material de mayor conductividad que conduce el calor colectado de todo el elemento a un punto de desalojo de calor. Cabe mencionar que dicho trabajo, es el único que reporta el uso del tiempo entre las variables a optimizar. En principio los planteamientos fundamentales de la teoría constructal no contemplan el uso del tiempo como variable a optimizar. Los resultados reportados son el tiempo de enfriamiento mínimo en una distribución óptima de material de alta conductividad de la red, así como para diferentes valores de la relación de conductividades térmicas de los materiales. En el presente trabajo, la variable temporal tiene una importancia fundamental ya que la radiación solar recibida por el colector solar se modela mediante una señal senoidal.

La aplicación específica de la teoría constructal a un dispositivo de colección solar, fue reportada por Miguel, A. [26], para el uso de un sistema de calentamiento para uso habitacional con arreglos de tubos, optimizando el diámetro de un tubo con la longitud en un área fija, para diferentes regímenes de flujo. Este trabajo no considera entre las variables los tiempos característicos de la captación solar, así como no genera una red de tubos optimizada en su forma y tamaño. Básicamente solo se reporta la distribución de espacio y el tamaño de los tubos receptores de la radiación solar.

Los métodos de la teoría constructal proporcionan una herramienta de optimización que ha demostrado su efectividad en los trabajos previamente publicados sobre diferentes dispositivos para transporte de fluidos o desalojo de calor. Las herramientas de optimización desarrolladas por la teoría constructal podrían utilizarse para la optimización de un dispositivo de colección mediante la adaptabilidad de los materiales involucrados en el proceso de colección. Sin embargo, los resultados anteriores son básicamente evidencias experimentales.

En el cuerpo humano se presenta un fenómeno de adaptabilidad en la red de vasos capilares sanguíneos, que hacen la función de tuberías transportando principalmente oxígeno y nutrientes, así como el desalojo de productos propios de la actividad del tejido. La capacidad de adaptación viene dada a partir de la modulación del esfuerzo cortante en la pared. Como consecuencia fundamental se tiene un aumento en el área de difusión de oxígeno, una disminución de la longitud promedio de difusión y un incremento en el tiempo de difusión entre la sangre y el tejido, [27,28]. Para satisfacer la demanda de nutrientes, la red capilar sanguínea tiene la capacidad de generar nuevos vasos sanguíneos a partir del esfuerzo cortante en la pared, a este proceso se le conoce como angiogénesis [29].

Por los comentarios anteriores, se puede aventurar que la información proporcionada en la literatura especializada sobre el empleo de materiales que intervienen en la colección de energía solar no se documenta aún un modelo teórico que contemple la posibilidad de que dichos materiales puedan modificar o controlar sus propiedades. El espíritu del presente trabajo y siguiendo los fundamentos y métodos de la teoría constructal, es justamente desarrollar el concepto de adaptabilidad (basado en la adaptabilidad de los vasos capilares sanguíneos) de un fluido reológico que permita la adaptabilidad de al menos una de sus propiedades. Esta idea y aportación central del presente trabajo se desarrollará con mayor detalle en el capítulo 4. Es importante mencionar que en el desarrollo del modelo matemático se hará uso del modelo reológico Phan-Thien & Tanner.

La ecuación constitutiva de Phan-Thien & Tanner fue propuesto principalmente por Phan-Thien a partir de consideraciones de la teoría de redes poliméricas, [30,31]. Este modelo es usado generalmente para describir el comportamiento de soluciones concentradas y poliméricas que presenten un comportamiento viscoelástico [32]. Una de las características principales de este modelo es considerar que los efectos elongacionales y elásticos se reflejen en parámetros que permiten definir diferentes comportamientos del fluido no newtoniano ante diferentes circunstancias de flujo.

El modelo simplificado de Phan-Thien & Tanner fue reportado por Oliveira, O. *et al.* [33], donde desarrollan las ecuaciones para el flujo de un fluido no newtoniano en canales y tuberías; definiendo las relaciones del esfuerzo cortante en función del número adimensional de Deborah y el parámetro elongacional, parámetros característicos del modelo reológico. El modelo anterior se aplica también para la descripción de las propiedades dependientes de un fluido viscoelástico. Nobrega, F. *et al.* [34] reportaron las ecuaciones necesarias para la descripción de la variación de sus propiedades y su influencia en la transferencia de calor.

En base a los antecedentes anteriores, el objetivo de la presente tesis es obtener y analizar los diferentes planteamientos teóricos para la optimización de un dispositivo de colección solar a partir de la aplicación de los principios de la teoría constructal, considerando los elementos geométricos, físicos, así como las simplificaciones para la generación de una red de tuberías que optimice el proceso de calentamiento de un fluido.

Los resultados obtenidos son la obtención de un tiempo mínimo de enfriamiento para el problema físico que presenta un colector solar, posteriormente la optimización y generación de una red de tuberías por donde circula un fluido newtoniano, con un número finito de ramificaciones basado en la optimización del área ocupada de la red de tuberías en el elemento de forma discoidal, y por último la generación de una red de forma dendrítica a partir de considerar un flujo de fluido newtoniano. Finalmente, se lleva a cabo también la aplicación de un modelo reológico para describir un fluido viscoelástico; en estas últimas formulaciones se considera el efecto de la resistencia térmica del arreglo de tuberías en función de la potencia de bombeo, aplicando los métodos de optimización propios de la teoría constructal.



## 2

# Planteamiento del problema

## 2.1 Consideraciones generales y modelo físico

La teoría constructal exige el planteamiento de un primer elemento fundamental en el que se establecen las variables físicas involucradas, así como las restricciones locales. Este primer elemento toma en cuenta las características convectivas que comúnmente se presentan en un colector. Cabe mencionar que este primer elemento de construcción no es en sí mismo el modelo del colector solar final. Para modelar dicho elemento mediante la teoría constructal, es necesario hacer simplificaciones de un colector solar real. El primer elemento fundamental de construcción con las variables físicas consideradas y dimensiones se puede apreciar en la Fig. 2.1.

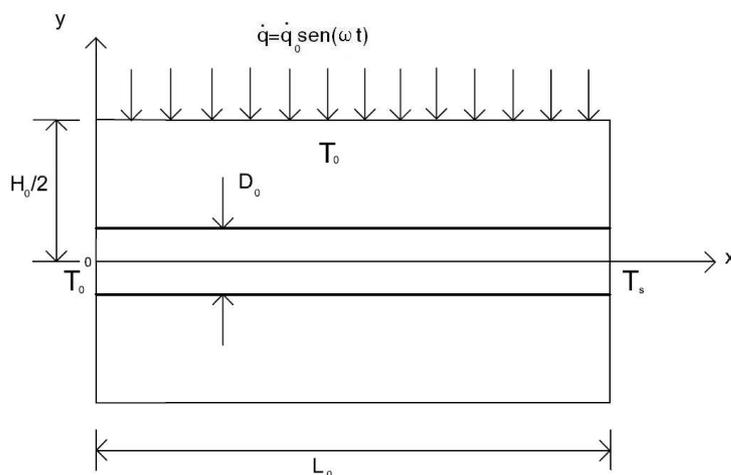


Figura 2.1: Primer elemento constructal

En este primer elemento y como ocurrirá en construcciones sucesivas, se considera por simplicidad que las variaciones longitudinales de temperatura en el fluido son más importantes que las transversales, como se demostrará más adelante, se obtiene considerando la teoría de la aleta, en este caso, se obtiene una aleta térmica de fluido. En cambio en la región de la cavidad dicha hipótesis se invierte. Lo anterior, es parte de las simplificaciones de la teoría constructal. El origen de coordenadas está situado a la entrada del primer elemento de construcción; es decir, el origen de coordenadas coincide con el centro del área circular de la tubería, en  $y = 0$ . El primer elemento tiene una altura total de  $H_0$ , el área  $A_0 = H_0 L_0$  y al igual que el volumen  $V$ , son considerados como constantes. A lo largo del eje  $x$  se tiene un tubo de radio  $R_0$  y longitud  $L_0$ . La temperatura inicial de todo el sistema es  $T_0$ ; el sistema se encuentra inicialmente en equilibrio termodinámico y se considera por facilidad en el cálculo que la parte superior del elemento y la parte intermedia están separadas por una pared de tamaño infinitesimal con una conductividad térmica despreciable.

En la dirección vertical, en  $y = H_0/2$ , el elemento constructal recibe la energía externa transitoria, que podría entre otros casos, modelar de manera sencilla el flujo de calor solar radiativo y representado mediante una señal dada por  $\dot{q} = \dot{q}_0 \text{sen}(\omega t)$ , donde  $\dot{q}_0$  es el valor de referencia o amplitud de la señal periódica de la señal solar,  $\omega$  es la frecuencia y  $t$  es el tiempo físico.

El espacio entre la recepción de la señal solar y el tubo horizontal de radio  $R_0$ , se considera como una cavidad llena de aire. En el interior de dicha cavidad se puede presentar, en general, movimientos convectivos libres debido a la distribución no uniforme de la temperatura. Sin embargo, como se demostrará más adelante, los patrones convectivos serán despreciables debido a las escalas de tiempo características de los procesos involucrados. Dentro de la tubería circula un fluido en estado permanente, dicha hipótesis también se demostrará más adelante.

El fluido se considera newtoniano, totalmente desarrollado y entra al elemento a una temperatura  $T_0$  y sale a una temperatura  $T_s$  debido al proceso de calentamiento. La temperatura del fluido  $T_f$  y la temperatura de la cavidad  $T_a$ , son desconocidas y son parte de la solución del problema. En la formulación siguiente, mediante la aplicación de la teoría constructal se determinan los tiempos mínimos de enfriamiento de la cavidad, debido al paso del fluido por la tubería en el primer elemento constructal. Para obtener lo anterior, es necesario definir las expresiones teóricas necesarias para definir dichos tiempos mínimos.

## 2.2 Tiempo de enfriamiento para un colector solar

### 2.2.1 Modelo de distribución de temperatura en la dirección horizontal

Para determinar los tiempos mínimos de enfriamiento, es indispensable llevar a cabo un balance de energía en el sistema y consecuentemente la determinación de los perfiles de temperatura. Una vez determinado el campo de temperatura del primer elemento constructal, compuesto de los perfiles en las direcciones vertical y horizontal, se calcula el tiempo mínimo de enfriamiento a partir de una temperatura mínima dada para condiciones geométricas y físicas establecidas, que se definirán más adelante. A lo largo del eje longitudinal del elemento constructal, se realiza un balance de energía en el tubo de diámetro  $D_0$ , donde fluye un fluido newtoniano a lo largo del elemento constructal; se considera que parte del calor que se percibe en la parte superior del elemento constructal es transmitido hacia el fluido mediante procesos de conducción y convección. El balance de energía se puede apreciar en la Figura 2.2.

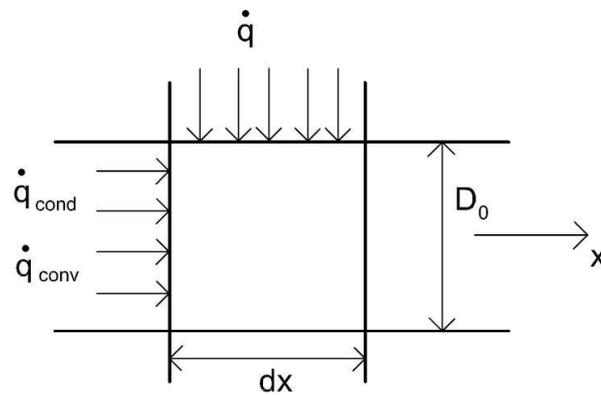


Figura 2.2: Balance de energía en la tubería

Por los comentarios anteriores, el balance de energía se puede expresar mediante la siguiente expresión

$$\dot{q}_c \pi R_0^2 + \dot{q}_{conv} \pi R_0^2 + \dot{q}_{cav} 2\pi R_0 dx = \left( \dot{q}_c + \frac{\partial \dot{q}_c}{\partial x} dx \right) \pi R_0^2 + \left( \dot{q}_{conv} + \frac{\partial \dot{q}_{conv}}{\partial x} dx \right) + \rho C_P \frac{\partial T}{\partial t} \pi R_0^2 dx, \quad (2.1)$$

donde  $\dot{q}_c = -k_f \frac{\partial T_f}{\partial x}$  y  $\dot{q}_{conv} = \rho C_P u_x T_f$ , representan las contribuciones de calor debidas a la conducción y convección en el elemento diferencial considerado.

Es importante mencionar que para la obtención de la ecuación anterior, se está considerando que las variaciones de temperatura en la dirección longitudinal son más importantes que las correspondientes en la dirección transversal. Lo anterior es considerado, ya que el elemento constructal exige tener una geometría esbelta. Dicha hipótesis se conoce ampliamente en la literatura especializada y se reconoce como la teoría de aletas delgadas (véase Bird [57]).

En la Ec.(2.1), el término  $\dot{q}_{cav}$  es el calor que se transfiere verticalmente por conducción desde la cavidad llena de aire calentada por la señal externa, considerando que la pared infinitesimal que separa ambas regiones, tiene una conductividad térmica despreciable. El término de calor anterior se define de la siguiente manera,  $\dot{q}_{cav} = -k \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0}$ . El fluido que circula en la tubería se considera homogéneo, totalmente desarrollado e incompresible y la velocidad  $u_x$  es la solución al flujo totalmente desarrollado, la metodología para obtener dicha solución puede consultarse en el Apéndice A.

Realizando las simplificaciones necesarias en la Ec.(2.1), se obtiene la siguiente expresión;

$$-k_f \frac{\partial^2 T_f}{\partial x^2} dx + \rho C_P u_x \frac{\partial T_f}{\partial x} dx + \rho C_P \frac{\partial T_f}{\partial t} dx = -\frac{2}{R_0} k \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} dx. \quad (2.2)$$

La velocidad  $u_x$  es la solución para un flujo totalmente desarrollado en una tubería de diámetro  $D_0$ . La ecuación anterior se puede simplificar considerablemente si se integra sobre la variable radial  $r$ , desde  $r = 0$  hasta  $r = R_0$  y utilizando el perfil de velocidad en una tubería, se puede demostrar fácilmente que,

$$-k_f \frac{\partial^2 T_f}{\partial x^2} + \rho C_P \left[ \frac{R_0^2}{4\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \left( \frac{2}{3} \right) \right] \frac{\partial T_f}{\partial x} + \rho C_P \frac{\partial T_f}{\partial t} = -\frac{2}{R_0} k \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0}. \quad (2.3)$$

En la ecuación anterior el valor de la velocidad se puede expresar en términos de la velocidad promedio de Poiseuille,  $U_{prom}$  :

$$-k_f \frac{\partial^2 T_f}{\partial x^2} + \rho C_P \left[ \frac{4}{3} U_{prom} \right] \frac{\partial T_f}{\partial x} + \rho C_P \frac{\partial T_f}{\partial t} = -\frac{2}{R_0} k \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0}. \quad (2.4)$$

El cálculo de la velocidad promedio, como el perfil de velocidades del flujo totalmente desarrollado para una geometría cilíndrica, así como su equivalencia con la velocidad promedio de Poiseuille puede consultarse en el Apéndice A. En la ecuación anterior,  $\rho$ ,  $C_P$  representan la densidad y el calor específico del fluido, respectivamente.

Para simplificar el número de variables involucradas, se utilizan las siguientes variables adimensionales.

$$\chi = \frac{x}{A_0^{\frac{1}{2}}}, \quad \eta = \frac{y}{A_0^{\frac{1}{2}}}, \quad \tau = \frac{t}{A_0/\alpha}, \quad \theta_f = \frac{T_f - T_0}{\Delta T}, \quad \theta = \frac{T - T_0}{\Delta T}, \quad (2.5)$$

donde  $A_0$  es el área del elemento constructal y se define como  $A_0 = H_0 L_0$ .

El tiempo característico del problema se define con el tiempo difusivo de la cavidad de convección libre. Dicho tiempo se determina más adelante mediante un análisis de orden de magnitud.

Sustituyendo las variables adimensionales anteriores en la Ec.(2.4), se obtiene la siguiente ecuación diferencial:

$$\kappa \frac{\phi_0 \hat{H}_0 \bar{\alpha}}{4} \frac{\partial^2 \theta_f}{\partial \chi^2} - \frac{2}{3} \frac{\partial \theta_f}{\partial \chi} + \frac{\alpha}{\alpha_f} \frac{\phi_0 \hat{H}_0}{4Pe} \frac{\partial \theta_f}{\partial \tau} + \kappa \bar{\alpha} \left( \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right)_{\eta=0} = 0. \quad (2.6)$$

En la expresión anterior, el término de acumulación de calor esta multiplicado por el término,  $\frac{\alpha}{\alpha_f} \frac{\phi_0 \hat{H}_0}{4Pe} \sim 10^{-8}$ , al ser de un orden de magnitud muy pequeño, el término del tiempo puede ser despreciado,  $Pe$  es el número de Péclet, definido de la siguiente manera,  $Pe = U_{prom} R_0 / \alpha_f$  y representa la razón entre la energía mecánica necesaria para provocar una deformación en el fluido y la energía térmica del fluido asociada a la difusividad de la sustancia;  $\alpha$  y  $\alpha_f$  son las difusividades térmicas del aire y del fluido, respectivamente.

En la Ec.(2.6) aparece la relación del tamaño del primer elemento constructal,  $\hat{H}_0$ , dicha variable representará la razón de tamaño del primer elemento constructal. También se define la relación geométrica entre el diámetro y la altura del elemento constructal,  $\phi_0$ . La variable adimensional  $\kappa$ , representa la relación de conductividades térmicas del aire y el fluido con la particularidad de incluir el efecto del número de Péclet. Los parámetros adimensionales anteriores se definen de la siguiente manera,

$$\hat{H}_0 = \left( \frac{H_0}{L_0} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \phi_0 = \frac{R_0}{H_0}, \quad \kappa = \frac{k_f / Pe}{k}, \quad \bar{\alpha} = \frac{k}{k_f}. \quad (2.7)$$

Las respectivas condiciones de frontera de la Ec.(2.6) son las siguientes:

$$\begin{aligned} \chi = 0 & & : & & \theta_f = 0, \\ \chi = \frac{1}{\hat{H}_0} & & : & & \frac{\partial \theta_f}{\partial \chi} = 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Aplicando las condiciones de frontera, dadas por las Ecs.(2.8), es posible determinar fácilmente la solución a la Ec.(2.6) aplicando el método de superposición para la solución de ecuaciones diferenciales de orden superior [35], el resultado se puede escribir de la siguiente manera,

$$\theta_f(\chi) = \frac{9}{16} \kappa^2 \phi_0 \hat{H}_0 \bar{\alpha}^2 \left( \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right)_{\eta=0} e^{-\frac{8}{3} \frac{1}{\kappa \phi_0 \hat{H}_0^2 \bar{\alpha}}} \left( e^{\frac{8}{3} \frac{1}{\kappa \phi_0 \hat{H}_0 \bar{\alpha}} \chi} - 1 \right) + \frac{3}{2} \kappa \bar{\alpha} \left( \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right)_{\eta=0} \chi. \quad (2.9)$$

La Ec.(2.9) representa el perfil de temperaturas en la dirección horizontal en la tubería; posteriormente se incorpora este resultado en las condiciones de frontera necesarias para la resolución de la

ecuación diferencial correspondiente a la cavidad llena de aire, de tal forma que al definir el perfil de temperatura vertical, se esta incluyendo el perfil de temperaturas en la dirección horizontal. Los análisis y consideraciones para obtener la ecuación diferencial de la cavidad, se definen a continuación.

### 2.2.2 Modelo de distribución de temperatura en la cavidad

Para determinar el perfil de temperatura, resulta indispensable realizar un análisis de orden de magnitud. Lo anterior, se puede llevar a cabo partiendo de las ecuaciones fundamentales de conservación, i.e., la ecuación de conservación de masa, de cantidad de movimiento en ambas direcciones y la conservación de la energía dadas por:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (2.10)$$

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (2.11)$$

$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = g(\rho - \rho_0) + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (2.12)$$

y

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right). \quad (2.13)$$

El término  $g(\rho - \rho_0)$  de la Ec.(2.12), se puede simplificar mediante la aproximación de Boussinesq, [39]. Dicha aproximación puede aplicarse si los cambios en la presión y temperatura son muy pequeños por lo que los cambios en la densidad serán a su vez muy pequeños. Considerando entonces que la variación de la densidad es despreciable excepto en el término de flotación, [40], entonces se puede escribir el término anterior, mediante la siguiente aproximación:

$$(\rho - \rho_0) \simeq \rho_0 \beta (T - T_0), \quad (2.14)$$

donde  $\beta$  es el coeficiente de expansión térmica.

La ecuación de cantidad de movimiento en la dirección  $y$  se puede escribir entonces de la siguiente manera,

$$\left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = g\beta (T - T_0) + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right). \quad (2.15)$$

Las escalas utilizadas para las variables físicas involucradas son las siguientes:

$$u \sim U_{cav}, \quad v \sim V_{cav}, \quad x \sim L_0, \quad y \sim \frac{H_0}{2}, \quad T - T_0 \sim \Delta T, \quad t \sim \frac{1}{\omega} \quad (2.16)$$

donde  $T$  es la temperatura en la parte superior de la cavidad, en  $y = H_0/2$ .

De la ecuación de continuidad, obtenemos el siguiente orden de magnitud en la cavidad,

$$\frac{U_{cav}}{L_0} \sim \frac{V_{cav}}{H_0/2}, \quad (2.17)$$

De la ecuación de cantidad de movimiento en  $y$ , se comparan el término de flotación y el de viscosidad en la dirección vertical,

$$\frac{\omega V_{cav}}{L_0}, \frac{V_{cav}^2}{L_0 H_0/2} \sim \frac{g\beta}{L_0} \Delta T, \nu \frac{V_{cav}}{L_0 H_0^2/4}, \nu \frac{V_{cav}}{L_0^3}. \quad (2.18)$$

El orden de magnitud obtenido de la velocidad en la dirección  $y$ ,  $V_{cav}$ , es el siguiente,

$$V_{cav} \sim \frac{g\beta \Delta T}{4\nu} H_0^2, \quad (2.19)$$

donde  $\nu$  es la viscosidad cinemática del aire.

A partir de la Ec. de continuidad, Ec.(2.10) se determina el orden de magnitud de la velocidad de la cavidad en la dirección  $x$

$$U_{cav} \sim \frac{L_0 g\beta H_0 \Delta T}{2\nu}. \quad (2.20)$$

Las velocidades características anteriores, se pueden definir en términos del número de Rayleigh. Para ello, se define la diferencia de temperatura  $\Delta T$ , en términos del calor que se transfiere de la señal transitoria exterior al interior de la cavidad que se transmite por conducción  $\dot{q}_0 \sim k \frac{\Delta T}{H_0}$ . El orden de magnitud es el siguiente:

$$\Delta T \sim \frac{\dot{q}_0 H_0}{k}. \quad (2.21)$$

Sustituyendo la Ec.(2.21) en las Ecs.(2.19) y (2.20), se puede entonces definir las velocidades características en los órdenes de magnitud de las velocidades en términos del número de Rayleigh y que se define como,

$$Ra = \frac{g\beta \dot{q}_0 H_0^4}{\alpha k \nu}. \quad (2.22)$$

Las velocidades de la cavidad resultan ser

$$V_{cav} \sim \frac{\alpha}{H_0} Ra \quad (2.23)$$

y

$$U_{cav} \sim \frac{\alpha L_0}{H_0^2} Ra. \quad (2.24)$$

Con ayuda del análisis del orden de magnitud, la escala de tiempo adimensional del problema, se determina al comparar el tiempo característico solar  $t_{car\ solar} = \frac{1}{\omega}$ , con el tiempo de difusión,  $t_{dif} = A_0/\alpha$ , encontrando así que el cociente de estas dos escalas,  $\frac{1}{\omega}/(A_0/\alpha) \ll 1$ . De esta forma para entender el proceso transitorio en la cavidad resulta que la escala de tiempo difusiva es la más apropiada para adimensionalizar las ecuaciones.

En consecuencia, los órdenes de magnitud de las ecuaciones de cantidad de movimiento en las direcciones horizontal y vertical, junto con la ecuación de la energía, son los siguientes:

$$\frac{\omega}{\nu} A_0 \epsilon, \frac{\alpha}{\nu} Ra \sim 1, \epsilon^2, 1, \quad (2.25)$$

$$\alpha Ra \epsilon, \alpha Ra^2 A_0 \sim \frac{\epsilon^3 \Delta P}{\alpha \rho}, \epsilon Ra, Ra \quad (2.26)$$

y

$$1, Ra, Ra \sim \epsilon^2, 1. \quad (2.27)$$

De las ecuaciones anteriores, el término  $\epsilon$  se define como la relación de esbeltez  $\epsilon = H_0/L_0$ , la que se considera muy pequeña, ya que el primer elemento constructural se considera esbelto.

A partir del análisis anterior, se definen las siguientes variables adimensionales,

$$\chi = \frac{x}{L_0}, \quad \eta = \frac{y}{A_0^{\frac{1}{2}}}, \quad \tau = \frac{t}{A_0/\alpha}, \quad \bar{u} = \frac{u}{U_{cav}}, \quad \bar{v} = \frac{v}{V_{cav}}, \quad \theta = \frac{T - T_0}{\Delta T}. \quad (2.28)$$

Sustituyendo las variables adimensionales y realizando las simplificaciones necesarias, obtenemos la siguiente ecuación diferencial para predecir la distribución de temperatura,

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \bar{u} Ra \frac{\partial \theta}{\partial \chi} + \bar{v} Ra \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = \epsilon^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial \chi^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2}. \quad (2.29)$$

En la Ec.(2.29), los términos convectivos están multiplicados por el número de Rayleigh, que en situaciones reales para cavidades de geometría esbelta, suele presentar un valor muy pequeño.

A partir de los comentarios anteriores es posible despreciar los términos convectivos de la Ec.(2.29) obteniendo la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} = 0, \quad (2.30)$$

con sus respectivas condiciones de frontera;

$$\begin{aligned} \tau = 0 & : & \theta = 0, \\ \eta = 0 & : & \frac{\partial \theta}{\partial \eta} - \frac{16}{9} \frac{\hat{H}_0}{\kappa \bar{\alpha}^2 \phi_0} \left[ \kappa \bar{\alpha} \phi_0 \hat{H}_0^2 \left( e^{-\frac{8}{3\kappa \bar{\alpha} \phi_0 \hat{H}_0^2}} - 1 \right) + \frac{8}{3} \right]^{-1} \theta = 0, \\ \eta = \frac{\hat{H}_0}{2} & : & \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = \gamma \text{sen}(\beta \tau). \end{aligned} \quad (2.31)$$

La condición de frontera en la parte superior de la cavidad; en  $\eta = \frac{\hat{H}_0}{2}$  se tiene la señal transitoria externa definida como una función senoidal, donde los parámetros adimensionales  $\gamma$  y  $\beta$  se definen de la siguiente manera,  $\gamma = q_0 A_0^{\frac{1}{2}} / k T_0$  y  $\beta = \omega A_0 / \alpha$ . Para definir la condición de frontera en la coordenada  $\eta = 0$  se considera el perfil de temperatura a lo largo de la tubería evaluado en  $\chi = \frac{1}{\hat{H}_0}$ , una vez realizado lo anterior es posible despejar la derivada de la temperatura con respecto a la dirección vertical  $\left(\frac{\partial \theta}{\partial \eta}\right)_{\eta=0}$ .

La solución de la Ec. (2.30) junto con las condiciones de frontera definidas anteriormente, se determina a partir de aplicar el teorema de Duhamel, [42], la solución se puede escribir mediante la siguiente expresión,

$$\begin{aligned} \theta_f(\eta, \tau) = & \left[ \eta + \frac{9}{16} \frac{\kappa \bar{\alpha}^2 \phi_0}{\hat{H}_0} \left( \kappa \bar{\alpha} \phi_0 \hat{H}_0^2 \left( e^{-\frac{8}{3\kappa \bar{\alpha} \phi_0 \hat{H}_0^2}} - 1 \right) + \frac{8}{3} \right) \right] \gamma \text{sen}(\beta \tau) + \\ & 4 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\gamma \beta \beta_m \cos(\beta_m \hat{H}_0 / 2 - \beta_m \eta)}{\beta_m \hat{H}_0 + \text{sen}(\beta_m \hat{H}_0)} \left[ \frac{\beta_m^2 \cos(\beta \tau) + \beta \text{sen}(\beta \tau)}{\beta_m^4 + \beta^2} - \frac{\beta_m^2 e^{-\beta_m^2 \tau}}{\beta_m^4 + \beta^2} \right] * \\ & \text{sen}(\beta_m \hat{H}_0 / 2) \left\{ \frac{\cos(\beta_m \hat{H}_0 / 2) - 1}{\beta_m^2} - \frac{9}{16} \frac{\kappa \bar{\alpha}^2 \phi_0}{\beta_m \hat{H}_0} \left( \kappa \bar{\alpha} \phi_0 \hat{H}_0^2 \left( e^{-\frac{8}{3\kappa \bar{\alpha} \phi_0 \hat{H}_0^2}} - 1 \right) + \frac{8}{3} \right) \right\}. \quad (2.32) \end{aligned}$$

La aplicación del teorema anterior implica utilizar el método de separación de variables donde es necesario definir con ayuda de las condiciones de frontera, una ecuación característica para determinar los valores propios  $\beta_m$  que exige el método de solución. La ecuación característica se define mediante la siguiente ecuación transcendental,

$$\beta_m \tan\left(\beta_m \frac{\hat{H}_0}{2}\right) - \frac{16}{9} \frac{\hat{H}_0}{\kappa \bar{\alpha}^2 \phi_0} \left[ \kappa \bar{\alpha} \phi_0 \hat{H}_0^2 \left( e^{-\frac{8}{3\kappa \bar{\alpha} \phi_0 \hat{H}_0^2}} - 1 \right) + \frac{8}{3} \right]^{-1} = 0. \quad (2.33)$$

La Ec.(2.32) con ayuda de la Ec.(2.33), definen la temperatura en la cavidad de convección libre. Dicha solución incluye el perfil de temperatura a lo largo del primer elemento de construcción. Los resultados y metodología para determinar los tiempos mínimos de enfriamiento se presentan en la sección de resultados del presente trabajo.



# 3

## Colector solar en forma de disco

### 3.1 Primer elemento de construcción

A partir de los resultados obtenidos en la sección anterior y con el objetivo de describir de manera sencilla la generación y optimización de una red de tuberías para el transporte de calor en un colector solar plano, se desarrollan los métodos de optimización, propios de la teoría constructal sobre un elemento constructal en forma de disco. Dicha metodología ha sido reportada principalmente para procesos de transferencia de calor, en enfriamiento de elementos volumétricos mediante insertos de material de alta conductividad térmica, [20,21,24]. Cuando se utilizan elementos de construcción en forma sectores de una geometría de disco, se puede exigir la optimización del tamaño del elemento constructal, lo anterior define la resistencia térmica de dichos sectores, sujeto a restricciones locales y globales, de tal forma que es posible definir una red de tuberías optimizada entre el centro y un número de puntos en la periferia del disco, para uno o más niveles de ramificación. Un ejemplo de una red de tuberías en una geometría en forma de disco, se puede apreciar en la siguiente Figura 3.1.

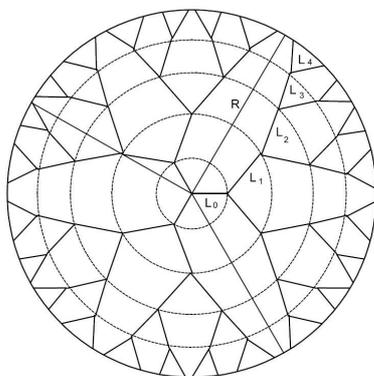


Figura 3.1: Arreglo de tuberías en una geometría de disco

Por otro lado, a partir de uno de los resultados obtenidos en el capítulo anterior, se determinó que la temperatura en la pared de la tubería de diámetro  $D_0$ , es una fracción de la temperatura que se tiene en la parte superior del elemento constructal rectangular, en  $\eta = \hat{H}_0/2$  como se puede observar en la Figura 3.2. El resultado anterior es fundamental para establecer una simplificación sobre los elementos constructales: la energía asociada a la señal transitoria, que bien puede modelar la energía solar, entra directamente al elemento constructal sin precalentar la zona de la cavidad, como una primera aproximación. La consideración anterior es estrictamente válida cuando  $\phi_0 \rightarrow 0$ , hipótesis fácilmente aplicable dentro del contexto de la teoría constructal. Por lo tanto, esta hipótesis de trabajo se mantendrá a lo largo del desarrollo del elemento constructal en forma de disco.

A partir de los comentarios anteriores, se considera una geometría de disco donde el primer elemento constructal se modela como un sector cilíndrico con un tubo de diámetro  $D_0$  en el centro; dicho sector se considera esbelto, por lo que es posible definir su área como la de un triángulo isósceles. La demostración de lo anterior puede consultarse en el apéndice B. La radiación solar recibida, modelada con una señal senoidal transitoria, es perpendicular al elemento constructal. El elemento constructal tiene un área y volumen constantes y se considera que se encuentra en equilibrio termodinámico a una temperatura  $T_0$ .

En la siguiente Figura 3.2 se puede apreciar uno de los resultados del capítulo anterior para la diferencia de temperaturas que se tiene entre la parte superior del elemento,  $\eta = \hat{H}_0/2$  ( $y = H_0/2$ ) y la temperatura en el radio de la tubería,  $\eta = \phi_0 \hat{H}_0$ , ( $y = R_0$ ).

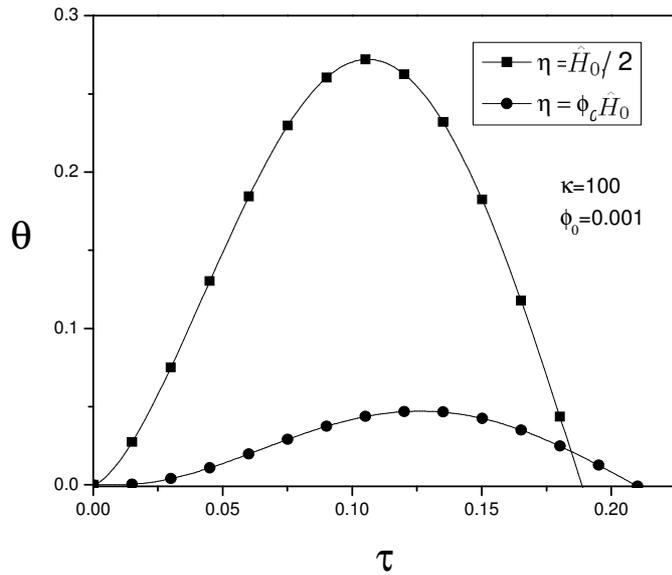


Figura 3.2: Comparación de las temperaturas en la parte superior, evaluadas en  $\eta = \hat{H}_0/2$  y  $\eta = \phi_0 \hat{H}_0$

Para modelar una red de tuberías en una geometría de disco, se define primer elemento constructal, tal como se puede observar en la Figura 3.3, donde se muestran las dimensiones de dicho elemento, el sistema de referencia esta ubicado a la entrada de la tubería, por lo que el origen de coordenadas se encuentra en el centro del disco. A partir de dicho origen, se define la altura  $H_0$  y la longitud del elemento constructal, en este primer elemento la longitud  $L_0$  de la tubería es igual al radio  $R$  del sector.

El fluido circula en la dirección positiva del eje  $x$ , entra a una temperatura  $T_0$  y sale a una temperatura  $T_f$ ; se considera que los límites del elemento constructal estan a una temperatura  $T_m$ , la tubería tiene un diámetro  $D_0$ ,  $\dot{q}_s$  es el calor debido a la señal transitoria externa.

La teoría constructal exige definir los perfiles de temperatura en la cavidad llena de aire y en el fluido que circula en la tubería de diámetro  $D_0$ , dichos perfiles definen la resistencia térmica del elemento. La importancia de obtener la resistencia térmica radica en que define, entre otros resultados, las dimensiones óptimas del elemento constructal. En la Figura 3.3 se muestra el primer elemento fundamental de construcción en forma de disco.

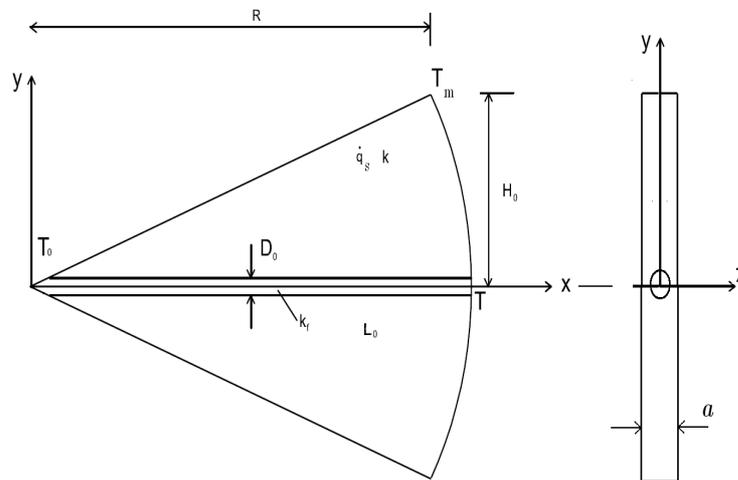


Figura 3.3: Primer elemento constructal para un colector solar en forma de disco.

Antes de obtener los perfiles de temperatura, es necesario definir la escala de tiempo característico del problema. Como se mencionó anteriormente, la resistencia térmica de la cavidad no juega, en primera aproximación, un efecto importante de calentamiento en esta. De ahí que el tiempo difusivo no sea la escala más apropiada. Además, por las características físicas del mismo fenómeno se tienen dos escalas adicionales de tiempo: la asociada a la señal misma,  $t_{car\ solar} = 1/\omega$  y la asociada al tiempo de residencia del fluido,  $t_{res} = L_0/U_{prom}$ . Los valores de la frecuencia de la señal transitoria y de la velocidad promedio del fluido, se obtuvieron de datos reportados de mediciones en dispositivos de colección para uso habitacional [58].

El valor de la frecuencia de la señal solar es  $\omega \cong 8 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$  y la velocidad promedio característica presenta el siguiente valor  $U_{prom} \cong 6.301 \times 10^{-3} \text{ ms}^{-1}$ , [2]. La comparación de dichos tiempos es la siguiente,

$$\frac{t_{res}}{t_{car \ solar}} = \frac{\frac{L_0}{U_{prom}}}{\frac{1}{\omega}} = \frac{\omega L_0}{U_{prom}} \approx 1 \times 10^{-4}. \quad (3.1)$$

Dado que la comparación anterior presenta un valor muy pequeño, resulta conveniente definir la escala de tiempo mediante el tiempo característico solar  $t_{car \ solar}$ .

Para definir la resistencia térmica adimensional son necesarios los perfiles de temperatura en el elemento constructal. A partir de un balance de energía en la parte superior del elemento se obtiene la expresión para la temperatura en la dirección vertical,

$$\frac{L_0}{2} dy d\dot{Q}_s + \dot{q}_y L_0 dz = \left( \dot{q}_y L_0 dz + \frac{\partial \dot{q}_y}{\partial y} L_0 dy dz \right) + \rho C_P L_0 dy dz \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.2)$$

donde  $\dot{Q}_s$  y  $\dot{q}_y$  son las contribuciones del calor proveniente de la radiación solar por conducción. La ecuación anterior también se puede escribir como,

$$\frac{1}{2} \frac{d\dot{Q}_s}{dz} dz = \frac{\partial \dot{q}_y}{\partial y} dz + \rho C_P \frac{\partial T}{\partial t} dz. \quad (3.3)$$

Integrando sobre la variable  $z$ , desde  $z = 0$  hasta  $z = a$ , considerando que  $a$  es el espesor del elemento constructal se obtiene que,

$$\frac{1}{2} \frac{d\dot{Q}_s}{dz} a + k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} a = \rho C_P \frac{\partial T}{\partial t} a. \quad (3.4)$$

El término  $\frac{d\dot{Q}_s}{dz}$  es la variación del calor proveniente de la radiación solar con respecto a la dirección  $z$  del elemento constructal; dicho término puede aproximarse de la siguiente manera,

$$\frac{1}{2} \frac{d\dot{Q}_s}{dz} \cong \frac{\dot{q}_s}{a} \quad \left[ \frac{\text{W}}{\text{m}^3} \right], \quad (3.5)$$

donde  $\dot{q}_s$  es la señal transitoria externa del flujo de calor recibido por el elemento constructal y se define mediante de la siguiente manera,  $\dot{q}_s = \dot{q}_0 \text{sen}(\omega t)$ .

En consecuencia, la ecuación diferencial de la temperatura en la parte superior del elemento constructal se puede escribir como:

$$\frac{\dot{q}_s}{a} + k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \rho C_P \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (3.5)$$

Para resolver la ecuación diferencial anterior, se definen las condiciones de frontera a continuación,

$$\begin{aligned} t = 0 & : T = T_0, \\ y = 0 & : T = T_f |_{x=L_0}, \\ y = H_0 & : \frac{\partial T}{\partial y} = 0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Además, se pueden utilizar las siguientes variables adimensionales para expresar con mayor sencillez el problema:

$$\chi = \frac{x}{A_0^{1/2}}, \quad \eta = \frac{y}{A_0^{1/2}}, \quad \theta = \frac{T - T_0}{T_0}, \quad \tau = \omega t. \quad (3.7)$$

Sustituyendo las variables adimensionales anteriores, la Ec. (3.5), queda expresada de la siguiente manera

$$1 + \alpha \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} = \tilde{\beta} \frac{\partial \theta}{\partial \tau}, \quad (3.8)$$

donde los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  se definen de la siguiente manera;  $\alpha = \frac{kT_0 a}{\dot{q}_0 \text{sen}(\omega t) A_0}$  y  $\tilde{\beta} = \frac{\rho C_P T_0 \omega}{\dot{q}_s}$ .

En la Ec.(3.8), el parámetro adimensional  $\tilde{\beta} \sim 10^{-6}$ , por lo que puede despreciarse el término temporal. Las correspondientes condiciones de frontera, expresadas en variables adimensionales son las siguientes;

$$\begin{aligned} \tau = 0 & ; \theta = 0, \\ \eta = 0 & ; \theta = \theta_f |_{\chi=1/\hat{H}_0}, \\ \eta = \hat{H}_0 & ; \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

La solución a la Ec.(3.8), se obtiene fácilmente aplicando las condiciones de frontera anteriores, obteniendo el perfil de temperatura en la dirección vertical,

$$\theta(\eta) = \frac{1}{\alpha} \left( \hat{H}_0 \eta - \frac{\eta^2}{2} \right) + \theta_f |_{\chi=1/\hat{H}_0}. \quad (3.10)$$

Para determinar el perfil de temperaturas en la dirección  $x$ , se realiza un balance de energía en la tubería, similar al considerado en capítulo 2, tomando en cuenta que el calor recibido en la parte superior,  $\dot{q}_s H_0 dx$ , del elemento constructal, es el mismo que el recibido a lo largo de la tubería,  $\dot{q}_s 2\pi R_0 dx$ .

A partir de un balance de energía, en la tubería de diámetro  $D_0$ , se llega a la siguiente expresión;

$$\dot{q}_c \pi R_0^2 + \dot{q}_{conv} \pi R_0^2 + \dot{q}_s 2\pi R_0 dx = \left( \dot{q}_c + \frac{\partial \dot{q}_c}{\partial x} dx \right) \pi R_0^2 + \left( \dot{q}_{conv} + \frac{\partial \dot{q}_{conv}}{\partial x} dx \right) \pi R_0^2 + \rho C_P \frac{\partial T}{\partial t} \pi R_0^2 dx, \quad (3.11)$$

donde  $\dot{q}_c = -k_f \frac{\partial T}{\partial x}$  y  $\dot{q}_{conv} = \rho C_P u_x T$ , son las contribuciones de calor debido a la conducción y convección, respectivamente; entonces la ecuación anterior se puede reescribir como,

$$\dot{q}_0 \text{sen}(\omega t) 2\pi R_0 dx = -k_f \frac{\partial T^2}{\partial x^2} \pi R_0^2 dx + \rho C_P u_x \frac{\partial T}{\partial x} \pi R_0^2 dx + \rho C_P \frac{\partial T}{\partial t} \pi R_0^2 dx. \quad (3.12)$$

La expresión anterior se puede escribir de la siguiente manera,

$$\frac{2\dot{q}_0 \text{sen}(\omega t)}{\rho C_P R_0} = -\frac{k_f}{\rho C_P} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \left[ \frac{4}{3} U_{prom} \right] \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (3.13)$$

Por otro lado se definen las siguientes variables adimensionales,

$$\chi = \frac{x}{A_0^{1/2}}, \quad \theta_f = \frac{T_f - T_0}{T_0}; \quad (3.14)$$

entonces la Ec.(3.13), se puede expresar de la siguiente manera,

$$\frac{\phi_0}{Pe} \hat{H}_0 \frac{\partial^2 \theta_f}{\partial \chi^2} - \frac{4}{3} \frac{\partial \theta_f}{\partial \chi} + \tilde{\epsilon} \frac{\partial \theta_f}{\partial \tau} + \gamma_0 = 0; \quad (3.15)$$

donde el término  $\tilde{\epsilon}$  se define de la siguiente manera  $\tilde{\epsilon} = \frac{\omega A_0^{1/2}}{U_{prom}} \sim 10^{-8}$ , por lo que el término asociado a la variación temporal, puede ser despreciado.

Por otro lado, los parámetros adimensionales se definen de la siguiente manera;

$$Pe = \frac{U_{prom} R_0}{\alpha_f}, \quad \phi_0 = \frac{R_0}{H_0}, \quad \hat{H}_0 = \left( \frac{H_0}{L_0} \right)^{1/2}, \quad \gamma_0 = \frac{2\dot{q}_0 \text{sen}(\omega t) A_0^{1/2}}{k_f T_0 Pe}. \quad (3.16)$$

El parámetro adimensional  $Pe$  es el número de Péclet,  $\alpha_f$  es la difusividad del fluido y  $\phi_0$  es una relación geométrica.

A partir de las simplificaciones anteriores, la Ec.(3.15) se puede escribir como,

$$\frac{\phi_0}{Pe} \hat{H}_0 \frac{\partial^2 \theta_f}{\partial \chi^2} - \frac{4}{3} \frac{\partial \theta_f}{\partial \chi} + \gamma_0 = 0. \quad (3.17)$$

La Ec.(3.17), queda sujeta a las siguientes condiciones de frontera;

$$\begin{aligned} \chi &= 0 & : & \theta = 0, \\ \chi &= \frac{1}{\hat{H}_0} & : & \frac{\partial \theta_f}{\partial \chi} = 0. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Finalmente, la solución de la Ec.(3.17) se puede escribir mediante la siguiente expresión,

$$\theta_{f-0}(\chi) = \frac{9}{16} \frac{\phi_0 \hat{H}_0}{Pe} \gamma_0 e^{-\frac{4}{3} \frac{Pe}{\phi_0 \hat{H}_0^2} \chi} \left( 1 - e^{-\frac{4}{3} \frac{Pe}{\phi_0 \hat{H}_0} \chi} \right) + \frac{3}{4} \gamma_0 \chi. \quad (3.19)$$

### 3.1.1 Resistencia térmica del primer elemento constructal

Los métodos de optimización de la teoría constructal exigen definir una resistencia térmica adimensional para un problema donde se vean involucrados procesos de la transferencia de calor. En este caso, será indispensable determinar los perfiles de temperatura en las direcciones  $x$  y  $y$  del elemento constructal, de tal manera que a partir de la resistencia térmica sea posible obtener resultados como las dimensiones óptimas del elemento constructal en función de parámetros físicos y geométricos. La resistencia térmica global se define mediante la siguiente expresión,

$$\tilde{R}_0 = \frac{(T_m - T_0) k}{\dot{q}_0 A_0^{1/2}} = \frac{\theta_m T_0 k}{\dot{q}_0 A_0^{1/2}}. \quad (3.20)$$

La temperatura adimensional,  $\theta_m$ , se determina con ayuda de las Ecs.(3.10) y (3.19) ya que permite definir la temperatura del elemento constructal a partir de sumar las diferencias de temperatura en las direcciones  $\chi$  y  $\eta$ .

En la dirección horizontal, la diferencia de temperatura se define mediante la temperatura entre la salida de la tubería, en  $\chi = 1/\hat{H}_0$  y la entrada a la tubería, en  $\chi = 0$ ; en la dirección vertical, la diferencia de temperatura se define mediante la temperatura del punto mas alejado del elemento, en  $\eta = \hat{H}_0$  y la temperatura a la salida de la tubería, en el punto de coordenadas  $\eta = 0, \chi = 1/\hat{H}_0$ .

Por los comentarios anteriores, la temperatura adimensional  $\theta_m$  se expresa de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} \theta_m &= \left[ \theta_{f-0}(\chi = 1/\hat{H}_0) - \theta_{f-0}(\chi = 0) \right] + \left[ \theta(\eta = \hat{H}_0) - \theta(\eta = 0) \right] = \\ &= \frac{\dot{q}_0 \text{sen}(\tau) A_0 \hat{H}_0^2}{k T_0 a} \frac{\hat{H}_0^2}{2} + \frac{9}{16} \frac{\phi_0 \hat{H}_0}{Pe} \gamma_0 e^{-\frac{4}{3} \frac{Pe}{\phi_0 \hat{H}_0^2}} \left( 1 - e^{-\frac{4}{3} \frac{Pe}{\phi_0 \hat{H}_0}} \right) + \frac{3}{4} \frac{\gamma_0}{\hat{H}_0}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Es importante mencionar que para la obtención de la ecuación anterior se hace uso de la hipótesis de que el elemento constructal es esbelto, situación que ya se comentó detalladamente en el capítulo anterior.

Una vez definida la temperatura del elemento constructal, la resistencia térmica puede expresarse mediante la siguiente expresión,

$$\tilde{R}_0 = \frac{\bar{a}_0 \text{sen}(\tau)}{2} \hat{H}_0 + \frac{9}{8} \bar{k} \text{sen}(\tau) \phi_0 \hat{H}_0 e^{-\frac{4}{3} \frac{Pe}{\phi_0 \hat{H}_0^2}} \left( 1 - e^{-\frac{4}{3} \frac{Pe}{\phi_0 \hat{H}_0^2}} \right) + \frac{3 Pe \bar{k} \text{sen}(\tau)}{2 \hat{H}_0}; \quad (3.24)$$

donde  $\bar{a} = H_0/a$ , es un parámetro geométrico adimensional y los parámetros adimensionales se definen a continuación  $\bar{\alpha} = k/k_f$ ,  $\bar{k} = \bar{\alpha}/Pe^2$ .

A partir de la resistencia térmica adimensional, es entonces posible determinar una expresión para la relación geométrica adimensional óptima del tamaño del elemento constructal,  $\hat{H}_0$ . Derivando la Ec.(3.24) con respecto a  $\hat{H}_0$  y considerando que el término exponencial es muy pequeño, esto es,  $e^{-\frac{4}{3} \frac{Pe}{\phi_0 \hat{H}_0^2}} \ll 1$ ; la relación óptima del tamaño del primer elemento constructal para un arreglo radial de tubería se puede escribir como,

$$\hat{H}_{0 \text{ opt}} = \left[ \frac{3Pe\bar{k}}{\bar{a}_0 - \frac{9}{8}\bar{k}\phi_0} \right]^{1/2}. \quad (3.25)$$

Con el valor óptimo anterior, es posible definir la resistencia térmica óptima,

$$\tilde{R}_{0 \text{ opt}} \sim \text{sen}(\tau) \left[ \frac{3Pe\bar{k}}{\bar{a}_0 - \frac{9}{8}\bar{k}\phi_0} \right]^{1/2} \left( \bar{a}_0 - \frac{27}{16}\bar{k}\phi_0 \right). \quad (3.26)$$

De la definición del área del elemento  $A_0$  y a partir de la definición de  $\hat{H}_0$ , se puede definir las dimensiones del primer elemento constructal;

$$H_{0 \text{ opt}} = \left[ \frac{3Pe\bar{k}}{\bar{a}_0 - \frac{9}{8}\bar{k}\phi_0} \right]^{1/2} A_0^{1/2}; \quad (3.27)$$

y para la longitud óptima del primer elemento de construcción, se tiene que,

$$L_{0 \text{ opt}} = \left[ \frac{(\bar{a}_0 - \frac{9}{8}\bar{k}\phi_0)}{3Pe\bar{k}} \right]^{1/2} A_0^{1/2}. \quad (3.28)$$

Con los resultados anteriores, se puede definir el número de sectores en el disco  $N$  y en el caso de un primer elemento de construcción, la longitud del elemento es igual al radio del sector circular, esto es:

$$N = \frac{2\pi L_0}{2H_0} = \frac{\pi}{\hat{H}_{0 \text{ opt}}^2}. \quad (3.29)$$

En la Ec.(3.29), se sustituyen las dimensiones óptimas obtenidas anteriormente, por lo que puede expresarse mediante la siguiente expresión;

$$N_{\text{opt}} = \frac{\pi \left( \bar{a} - \frac{9}{8} \bar{k} \phi_0 \right)}{3Pe\bar{k}}. \quad (3.30)$$

La metodología anterior permite definir las dimensiones óptimas del primer elemento de construcción. Considerando que dicho número de sectores para el disco, contiene cada uno, un tubo inicial de entrada de diámetro  $D_0$  sin tomar en cuenta la resistencia al flujo que presenta el fluido, el número mínimo de tubos iniciales para un mínimo valor de la resistencia al flujo de fluido es tres, [21]. Posteriormente se aplicara este criterio, para determinar el ángulo óptimo del sector inicial. Las expresiones anteriores, son resultado de la aplicación del método de optimización propio de la teoría constructal.

## 3.2 Segundo elemento de construcción

Una de las características de las redes en la naturaleza es la ramificación en una ó mas ramas para el transporte de nutrientes, calor ó fluidos, presentando características geométricas complejas. En esta sección se define la resistencia térmica para un número  $n$  de elementos constructales de área  $A_1 = H_1 L_1$ , sujeta a restricciones locales de área y volumen constante. Además, el número de ramas no esta definido y dicho número de ramificaciones es parte del problema de optimización. El segundo elemento de construcción se define como la continuación de un sector principal de área  $A_0$ . En este segundo nivel de construcción se aplica la teoría constructal para determinar el tamaño del elemento; es decir, la relación de aspecto  $\hat{H}_1$ , con el objetivo de describir las características geométricas de la ramificación. La configuración geométrica del arreglo puede apreciarse en la Figura 3.4.

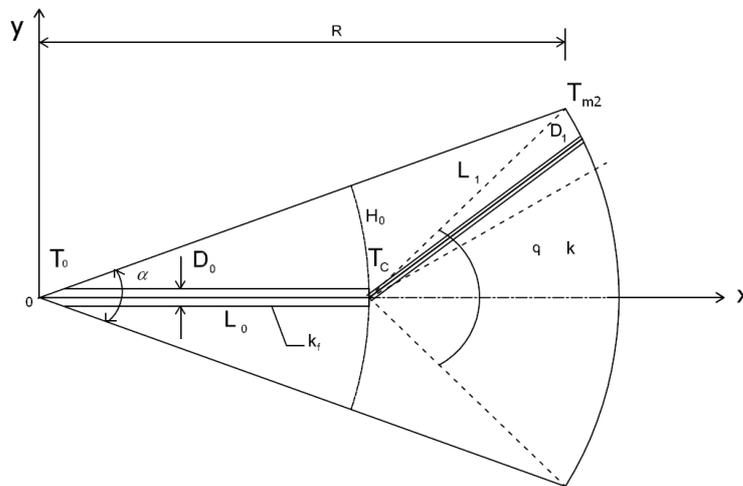


Figura 3.4: Segundo elemento de construcción

Para obtener la resistencia térmica del elemento constructal de área  $A_1$ , necesaria para definir la relación de aspecto  $\hat{H}_1$ , se determinan las diferencias de temperatura siguiendo la misma metodología que en la sección 3.1 anterior. La resistencia térmica del segundo elemento constructal se define mediante la siguiente expresión,

$$\tilde{R}_1 = \frac{\bar{a}_1 \text{sen}(\tau)}{2} \hat{H}_1 + \frac{9}{8} \bar{k} \text{sen}(\tau) \phi_1 \hat{H}_1 e^{-\frac{4}{3} \frac{Pe}{\phi_1 \hat{H}_1}} \left( 1 - e^{-\frac{4}{3} \frac{Pe}{\phi_1 \hat{H}_1^2}} \right) + \frac{3}{2} \frac{Pe \bar{k} \text{sen}(\tau)}{\hat{H}_1}; \quad (3.31)$$

donde los parámetros adimensionales son los siguientes,  $\bar{a}_1 = H_1/a$ ,  $\bar{\alpha} = k/k_f$  y  $\bar{k} = \bar{\alpha}/Pe^2$ .

Como se puede fácilmente apreciar la relación de aspecto obtenida es idéntica a la del primer elemento, dado que una de las características de los métodos de optimización de la teoría constructal, es su aplicación recursiva en cada etapa de construcción.

En esta formulación obtener dicha relación permite hacer simplificaciones para describir la resistencia térmica total de un sector central de  $A_0$ , y un número  $n$  de sectores de área  $A_1$ . En consecuencia se tiene que,

$$\hat{H}_{1 \text{ opt}} = \left[ \frac{3}{2} \frac{Pe \bar{k}}{\bar{a}_1 - \frac{9}{8} \bar{k} \phi_1} \right]^{1/2}. \quad (3.32)$$

De la Ec.(3.32), se pueden definir las dimensiones del segundo elemento de construcción,

$$H_{1 \text{ opt}} = \left[ \frac{3}{2} \frac{Pe \bar{k}}{\bar{a}_1 - \frac{9}{8} \bar{k} \phi_1} \right]^{1/2} A_1^{1/2}. \quad (3.33)$$

La longitud óptima del segundo elemento de construcción se define también por la siguiente expresión,

$$L_{1 \text{ opt}} = \left[ \frac{2}{3} \frac{(\bar{a}_1 - \frac{9}{8} \bar{k} \phi_1)}{Pe \bar{k}} \right]^{1/2} A_1^{1/2}. \quad (3.34)$$

Se define a su vez, el número de sectores óptimos de área  $A_1$ ;

$$N_{\text{opt}} = \frac{2\pi R}{2H_1} = \frac{2^{1/2} \pi R (\bar{a}_1 - \frac{9}{8} \bar{k} \phi_1)^{1/2}}{A_1^{1/2} (3Pe \bar{k})^{1/2}}. \quad (3.35)$$

El ángulo que comprende el sector, que contiene a un tubo de diámetro  $D_0$  y un número de ramificaciones de un subsector de área  $A_1$ , es denominado  $\alpha$ . Dicho ángulo, de una manera general se construye a partir del número de sectores  $N$  y el número de elementos de entrada o de salida  $n$  y se define mediante la siguiente expresión:

$$\alpha = \frac{2\pi n}{N_{\text{opt}}} = \frac{2^{\frac{1}{2}} n (3Pe\bar{k})^{1/2}}{\tilde{R} (\bar{a}_1 - \frac{9}{8}\bar{k}\phi_1)^{\frac{1}{2}}}, \quad (3.36)$$

donde  $\tilde{R} = R/A_1^{1/2}$ , es el radio adimensional y el ángulo  $\alpha$  permite definir el área  $A_0$  en términos de parámetros físicos y geométricos del segundo elemento de construcción.

Para definir entonces el área  $A_0$ , se considera que el elemento constructal es lo suficientemente esbelto para aproximar su área al área de un triángulo isósceles, de tal manera que la tangente del ángulo  $\alpha$  puede como:

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{H_0}{L_0}, \quad (3.37)$$

Si el elemento, al presentar una geometría esbelta, presenta un ángulo  $\alpha$  muy pequeño, se puede demostrar fácilmente que aplicando la serie de Taylor para la función tangente, la siguiente aproximación,

$$\frac{\alpha}{2} \approx \frac{H_0}{L_0}. \quad (3.38)$$

Sustituyendo  $H_0$  a partir de la definición del área  $A_0$  en la Ec. (3.38) y el ángulo  $\alpha$ , se puede definir una primera expresión para el área  $A_0$  en función de los parámetros geométricos y físicos del problema,

$$A_0 = \frac{\alpha}{2} L_0^2 \approx \frac{n (3Pe\bar{k})^{1/2} \tilde{R} A_1}{2^{\frac{1}{2}} (\bar{a}_1 - \frac{9}{8}\bar{k}\phi_1)^{\frac{1}{2}}} L_0^2. \quad (3.39)$$

En la Ec.(3.39), la longitud  $L_0$  puede aproximarse como,  $L_0 \cong R - L_1$ ; por lo que es posible sustituir la longitud óptima  $L_{1 \text{ opt}}$ . El área  $A_0$  puede definirse entonces mediante la siguiente expresión;

$$A_0 \cong \frac{n (3Pe\bar{k})^{1/2} \tilde{R} A_1}{2^{\frac{1}{2}} (\bar{a}_1 - \frac{9}{8}\bar{k}\phi_1)^{\frac{1}{2}}} \left[ 1 - \frac{2^{\frac{1}{2}} (\bar{a}_1 - \frac{9}{8}\bar{k}\phi_1)^{\frac{1}{2}}}{\tilde{R} (3Pe\bar{k})^{1/2}} \right]^2. \quad (3.40)$$

Con la definición del área  $A_0$  en términos del segundo elemento constructal, se puede entonces obtener una expresión para la resistencia térmica con un número  $n$  de sectores ramificados de área  $A_1$ . Lo anterior se lleva a cabo con el objetivo de describir el comportamiento de la resistencia térmica del sector cilíndrico para un número  $n$  de ramificaciones.

### 3.3 Red de tuberías para $n$ ramificaciones

Para modelar la red de tuberías con  $n$  ramificaciones, es necesario definir los perfiles de temperatura del sector cilíndrico, de tal manera que se considere las  $n$  áreas del segundo elemento de construcción. A partir de un balance de energía en la parte superior del elemento constructal, se obtiene que el perfil de temperatura en la dirección  $y$  presenta el mismo comportamiento que el obtenido en la Ec.(3.10). Por otro lado se puede realizar un balance de energía a la salida de la tubería de diámetro  $D_0$ , donde se presentan las  $n$  ramificaciones, obteniendo la misma ecuación diferencial, definida por la Ec.(3.17).

La ecuación diferencial en la tubería, expresada en variables adimensionales, se puede escribir mediante la siguiente expresión,

$$\frac{\phi_0 \hat{H}_0}{Pe} \frac{\partial^2 \theta_f}{\partial \chi^2} - \frac{4}{3} \frac{\partial \theta_f}{\partial \chi} + \gamma_0 = 0. \quad (3.41)$$

Las condiciones de frontera a las que queda sujeta la ecuación diferencial anterior, incluyen el efecto de las ramificaciones de la tubería, en un número  $n$  de ramificaciones.

A la salida del tubo se realiza un balance de energía y de esta manera se determina la condición de frontera a la salida del tubo de diámetro  $D_0$ , el resultado de dicho balance de energía es el siguiente,

$$n\dot{q}A_1 \cong k_f \pi R_0^2 \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=L_0}. \quad (3.42)$$

Las condiciones de frontera en variables adimensionales, son las siguientes,

$$\begin{aligned} \chi &= 0 & : & \theta_f = 0, \\ \chi &= \frac{1}{\hat{H}_0} & : & \frac{\partial \theta_f}{\partial \chi} = \frac{n\dot{q}_0 \text{sen}(\tau) A_1 A_0^{1/2}}{k_f \pi T_0 R_0^2}. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Aplicando las condiciones de frontera, definidas en la ecuación anterior, es posible determinar fácilmente la solución a la Ec.(3.41), y esta definida mediante la siguiente expresión;

$$\theta_f(\chi) = \frac{3}{4} \left( \frac{n\dot{q}_0 \text{sen}(\tau) A_1 A_0^{1/2}}{k_f \pi T_0 R_0^2} - \frac{3}{4} \gamma_0 \right) \frac{\phi_0 \hat{H}_0}{Pe} e^{-\frac{4}{3} \frac{Pe}{\phi_0 \hat{H}_0^2} \chi} \left( e^{\frac{4}{3} \frac{Pe}{\phi_0 \hat{H}_0^2} \chi} - 1 \right) + \frac{3}{4} \gamma_0 \chi, \quad (3.44)$$

donde el parámetro  $\gamma_0$  se define como  $\gamma_0 = \frac{2\dot{q}_0 \text{sen}(\omega t) A_0^{1/2}}{k_f T_0 Pe}$ .

Con ayuda entonces de la Ec.(3.44), se puede evaluar fácilmente la temperatura a la salida del tubo y tomando en cuenta que el valor del término exponencial es muy pequeño esto es  $e^{-\frac{4}{3} \frac{Pe}{\phi_0 \hat{H}_0^2}} \ll 1$ , entonces se tiene que la temperatura a la salida del tubo se puede escribir como,

$$\theta_f \left( \chi = \frac{1}{\hat{H}_0} \right) = \frac{3}{4} \frac{\dot{q}_0 \text{sen}(\tau) A_0^{1/2}}{k_f T_0} \left( \frac{n A_1}{\pi R_0^2} - \frac{3}{2Pe} \right) \frac{\phi_0 \hat{H}_0}{Pe} + \frac{3}{4} \frac{1}{\hat{H}_0} \frac{2 \dot{q}_0 \text{sen}(\tau) A_0^{1/2}}{k_f T_0 Pe}, \quad (3.45)$$

y la diferencia de temperatura a lo largo del elemento, determinada por  $\theta_f \left( \chi = 1/\hat{H}_0 \right) = \theta_c$  puede escribirse con ayuda de la siguiente expresión:

$$\theta_c - \theta_0 = \frac{3}{4} \frac{\dot{q}_0 \text{sen}(\tau) A_0^{1/2}}{k_f T_0} \left[ \frac{\phi_0 \hat{H}_0}{Pe} \left( \frac{n A_1}{\pi R_0^2} - \frac{3}{2Pe} \right) + \frac{2}{\hat{H}_0 Pe} \right] \quad (3.46)$$

En este caso de  $n$  ramificaciones, el método desarrollado permite definir la diferencia de temperatura en la parte superior del segundo elemento de construcción. De esta manera, se puede definir la resistencia térmica, dejando el efecto de las ramificaciones en la diferencia de temperaturas longitudinal.

La diferencia de temperaturas en la dirección vertical se puede definir mediante una ecuación diferencial que presenta la misma forma que la obtenida en la Ec.(3.10). La diferencia de temperatura vertical se define como la diferencia entre la temperatura del punto mas alejado del elemento,  $T_{m2}$  y la temperatura  $T_c$ , en esta diferencia se puede sustituir la relación de aspecto  $\hat{H}_{1 \text{ opt}}$  obtenida anteriormente. De esta manera, la diferencia de temperatura vertical puede escribirse mediante la siguiente expresión:

$$\theta_{m2} - \theta_c = \frac{\dot{q}_0 \text{sen}(\tau) A_1}{k T_0 a} \frac{\hat{H}_1^2}{2} = \frac{\dot{q}_0 \text{sen}(\tau) A_1}{2k T_0 a} \left[ \frac{3}{2} \frac{Pe \bar{k}}{\bar{a}_1 - \frac{9}{8} \bar{k} \phi_1} \right]. \quad (3.47)$$

Por tanto la resistencia térmica se puede definir con ayuda de la siguiente expresión,

$$\frac{(\theta_{m2} - \theta_0) T_0 k}{\dot{q}_0 A_1^{1/2}} = \frac{\text{sen}(\tau) A_1^{1/2}}{2a} \left[ \frac{3}{2} \frac{Pe \bar{k}}{\bar{a}_1 - \frac{9}{8} \bar{k} \phi_1} \right] + \frac{3}{4} \frac{\bar{\alpha} \text{sen}(\tau)}{Pe} \left( \frac{A_0}{A_1} \right)^{1/2} \left[ \frac{n A_1}{\pi R_0^2} \phi_0 \hat{H}_0 + \frac{2}{\hat{H}_0} \right]; \quad (3.48)$$

donde los parámetros adimensionales  $\bar{\alpha}$ ,  $\bar{k}$  se definen como  $\bar{\alpha} = k/k_f$ ,  $\bar{k} = \bar{\alpha}/Pe^2$  y la resistencia térmica para  $n$  ramificaciones, definida mediante la Ec.(3.48), puede expresarse en términos de la relación de tamaño óptimo del primer elemento constructal,  $\hat{H}_{0 \text{ opt}}$  y el área  $A_0$ , definida en la Ec.(3.39).

La resistencia térmica, sustituyendo las cantidades óptimas anteriores, se obtiene con ayuda de la siguiente expresión;

$$R_0^* = \frac{\text{sen}(\tau)A_1^{1/2}}{2a} \left[ \frac{3}{2} \frac{Pe\bar{k}}{\bar{a}_1 - \frac{9}{8}\bar{k}\phi_1} \right] + \frac{3}{4} \frac{\bar{\alpha}\text{sen}(\tau)}{Pe} \left( \frac{A_0}{A_1} \right)^{1/2} \left[ \phi_0 \hat{H}_0 \left( \frac{nA_1}{\pi R_0^2} - \frac{3}{2} \frac{1}{Pe} \right) + \frac{2}{\hat{H}_0} \right]. \quad (3.49)$$

Realizando las simplificaciones algebraicas necesarias podemos expresar la ecuación anterior en términos de los parámetros adimensionales de cada nivel de construcción,

$$R_0^* = \frac{\text{sen}(\tau)\bar{a}_1}{2} \left[ \frac{3}{2} \frac{Pe\bar{k}}{\bar{a}_1 - \frac{9}{8}\bar{k}\phi_1} \right]^{1/2} + \frac{3}{4} \frac{\bar{\alpha}\text{sen}(\tau)}{Pe} \left[ \frac{2^{1/2}n}{\pi\phi_1\tilde{D}} \frac{(\bar{a}_1 - \frac{9}{8}\bar{k}\phi_1)^{1/2}}{(3Pe\bar{k})^{1/2}} - \frac{3}{2^{3/2}} \frac{\phi_1\tilde{D}(3Pe\bar{k})^{1/2}}{(\bar{a}_1 - \frac{9}{8}\bar{k}\phi_1)^{1/2}} + 2^{3/2} \frac{(\bar{a}_0 - \frac{9}{8}\bar{k}\phi_0)^{1/2}}{(3Pe\bar{k})^{1/2}} \left( \frac{A_0}{A_1} \right)^{1/2} \right] \quad (3.50)$$

donde  $\tilde{D}$  es la relación de diámetros de las tuberías de cada nivel de construcción,  $\tilde{D} = D_0/D_1$ , que se definirá más adelante en términos de la relación que guarda el área ocupada de la red ramificada y el área total del disco.

A partir de la Ec.(3.40), se define la relación entre las áreas de los elementos constructales, dicha relación se define mediante la siguiente expresión

$$\left( \frac{A_0}{A_1} \right)^{1/2} = \frac{n^{1/2} (3Pe\bar{k})^{1/4} \tilde{R}^{1/2}}{2^{1/4} (\bar{a}_1 - \frac{9}{8}\bar{k}\phi_1)^{1/4}} \left[ 1 - \frac{2^{1/2} (\bar{a}_1 - \frac{9}{8}\bar{k}\phi_1)^{1/2}}{\tilde{R} (3Pe\bar{k})^{1/2}} \right]. \quad (3.51)$$

Por otro lado, la relación de las áreas ocupadas por la red de tuberías de diámetro  $D_1$ , el número de sectores centrales con un tubo de diámetro  $D_0$  y el área total del disco, se define mediante la siguiente expresión:

$$\Phi = \frac{A_p}{A_{\text{sector}}} = \frac{\frac{\pi}{4} (ND_1L_1 + \frac{N}{n}D_0L_0)}{\pi R^2}, \quad (3.52)$$

donde  $N$  es el número de sectores y  $n$  es el número de ramificaciones hacia la periferia.

La Ec.(3.52) puede definirse en términos de los parámetros geométricos y físicos del problema a partir de sustituir la definición del número de sectores  $N$ , ecuación que puede expresarse de la siguiente manera,

$$\Phi = \frac{2\phi_1}{\tilde{R}} \left[ \frac{(\bar{a}_1 - \frac{9}{8}\bar{k}\phi_1)^{1/2}}{(3Pe\bar{k})^{1/2}} + \frac{\tilde{D}}{n} \left( \tilde{R} - \frac{(\bar{a}_1 - \frac{9}{8}\bar{k}\phi_1)^{1/2}}{(3Pe\bar{k})^{1/2}} \right) \right]. \quad (3.53)$$

Considerando la relación de áreas  $\Phi$  como un parámetro, se puede entonces expresar la variable  $\tilde{D}$  en términos de parámetros adimensionales,

$$\tilde{D} = n \left[ \frac{\Phi \tilde{R}}{2\phi_1} - \frac{(\bar{a}_1 - \frac{9}{8}\bar{k}\phi_1)^{\frac{1}{2}}}{(3Pe\bar{k})^{1/2}} \right] \left[ \frac{(3Pe\bar{k})^{1/2}}{\tilde{R} (3Pe\bar{k})^{1/2} - (\bar{a}_1 - \frac{9}{8}\bar{k}\phi_1)^{\frac{1}{2}}} \right]. \quad (3.54)$$

La resistencia térmica dada por la Ec.(3.1) puede expresarse en términos de parámetros adimensionales anteriormente definidos y del número  $n$  de ramificaciones, con ayuda de las ecuaciones 3.51 y 3.54.

La Ec.(3.54) es un resultado relevante en esta formulación, ya que representa la proporción de tamaño óptima entre los diámetros en una red de tuberías en función de parámetros adimensionales propios del problema físico. La relación de diámetros es un resultado que ha sido previamente reportado por la teoría constructal, para el caso de una red reticular con flujo de un fluido. El análisis anterior conduce a una ley de potencia, resultado conocido ampliamente en la fisiología humana como la ley de Murray, [1].

Los resultados de la resistencia térmica para  $n$  ramificaciones, así como el comportamiento de la relación de diámetros  $\tilde{D}$ , se presentan en la sección de resultados del presente trabajo.



## 4

# Red de tuberías con dicotomía

## 4.1 Consideraciones generales

El modelo de una red de tuberías por donde circula un fluido newtoniano para enfriar un volumen finito y que recibe una cantidad de calor determinada, presenta dos problemas centrales: el primero es que la resistencia térmica presente el mínimo valor posible a partir de determinado valor de los parámetros geométricos y físicos, el segundo, es la resistencia al flujo y que al igual al primer caso, presente el menor valor posible. La disyuntiva se presenta porque a un mayor número de ramificaciones, se tiene una menor resistencia térmica, pero implica una mayor resistencia hidráulica. El objetivo entonces es encontrar el punto óptimo de funcionamiento, a partir de las condiciones de flujo del fluido por la tubería. Bejan, A. [44] reportó el problema en un intercambiador de calor de geometría rectangular para un fluido newtoniano, con la particularidad de definir la resistencia térmica en función de la potencia necesaria para desplazar al fluido.

En el modelo desarrollado en esta sección, se incluye la temperatura de pared de la tubería, en cada nivel de construcción en un colector solar en forma de disco y la diferencia de temperatura en este punto, forma parte de la descripción de temperaturas del elemento constructal; de igual manera, al tomar en cuenta las diferencias de temperatura, permite definir la resistencia térmica total. Lo anterior se define mediante el calor transferido por convección desde la parte superior del elemento de construcción, y la pared de la tubería por donde circula un fluido newtoniano. En este sentido y para simplificar el problema, se considera que el diseño de la red obedece el principio de dicotomía; es decir, la ramificación de la tubería anterior, en dos tubos posteriores de diferente diámetro al primero; la razón de crecimiento de los diámetros obedece a una ley de potencia. Lo anterior se conoce como la Ley de Murray [22] y fue reportado por A. Bejan como un resultado de la aplicación de la teoría constructal al modelado de redes que transportan fluidos [16]. En este último trabajo únicamente se obtienen las dimensiones de los elementos de construcción para redes reticulares a partir del óptimo flujo de fluido por la tubería, sin describir los ángulos entre tuberías y otras características geométricas.

La ley de Murray tiene su origen en el análisis del transporte en flujo sanguíneo y considerando el principio del mínimo trabajo utilizado para el transporte del fluido en una tubería, [22,23]. La obtención de la ley de Murray por la teoría constructal fue ampliamente documentada por Bejan, A. [46], dicha ley se expresa en terminos del subíndice  $i$ , que es el nivel de construcción y la ley de potencia que obedece la relación de diámetros para un arreglo dicotómico de tuberías, se puede escribir mediante la relación siguiente,

$$\frac{D_i}{D_{i+1}} = 2^{\frac{1}{3}}. \quad (4.1)$$

Un elemento importante para definir la red de tuberías, es la definición de las longitudes óptimas en cada nivel de construcción. Este resultado se puede obtener a partir de la optimización de la resistencia al flujo en la tubería. En este capítulo se obtienen las expresiones teóricas, así como los ángulos óptimos que guardan entre si cada una de las tuberías ramificadas. El resultado es la descripción geométrica óptima de los elementos de construcción y de manera general, toda la red de tuberías ramificadas, así como la resistencia térmica en función de los parámetros propios de la resistencia hidráulica. La presente formulación de la red de tuberías en un colector solar en forma de disco, es más completa que la formulación anterior, basada en un número de ramificaciones  $n$  y en la relación de áreas ocupadas entre el arreglo de tuberías y el área del sector, ya que la formulación del capítulo anterior no permitía describir los ángulos que guardan entre sí las tuberías ramificadas. La descripción de la resistencia térmica total se obtiene a partir de considerar la analogía eléctrica, de tal manera que se considera la resistencia térmica de cada nivel de ramificación como una resistencia eléctrica.

#### 4.1.1 Primer elemento de construcción

La definición de la resistencia térmica en el primer elemento de construcción, requiere de las diferencias de temperatura vertical y horizontal. En la formulación desarrollada en el presente trabajo se considera el mismo elemento constructal, que es un sector cilíndrico. El sector que corresponde a este primer elemento, se considera con área constante, además de suponer que es de forma esbelta y el área puede considerarse como la de un triángulo isósceles. La metodología para obtener los perfiles de temperatura en el elemento constructal es la misma que la aplicada en el capítulo anterior, con la diferencia de que las variables adimensionales utilizadas para las longitudes  $x$  y  $y$  son las siguientes,

$$\chi = \frac{x}{L_0}, \quad \eta = \frac{y}{H_0}. \quad (4.2)$$

El perfil de temperatura a lo largo de la coordenada  $\eta$  presenta la misma forma que la obtenida en el capítulo anterior y puede ser expresada de la siguiente manera,

$$\theta(\eta) = \frac{\dot{q}_0 \text{sen}(\omega t) H_0^2}{k T_0 a} \left( \eta - \frac{\eta^2}{2} \right) + \theta_f \Big|_{\chi=1} \quad (4.3)$$

Las dimensiones y consideraciones del primer elemento de construcción se pueden apreciar en la Figura 4.1.

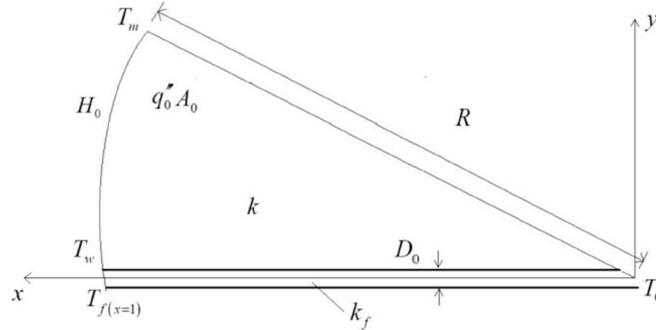


Figura 4.1: Primer elemento de construcción considerando dicotomía

La temperatura en la dirección longitudinal se define mediante la siguiente expresión,

$$\theta_f(\chi) = \frac{9}{16} \frac{\varepsilon}{Pe} \gamma_0 e^{-\frac{4}{3} \frac{Pe}{\varepsilon} \chi} \left( 1 - e^{-\frac{4}{3} \frac{Pe}{\varepsilon} \chi} \right) + \frac{3}{4} \gamma_0 \chi. \quad (4.4)$$

donde  $\varepsilon$  es una relación de esbeltez definida como  $\varepsilon_0 = R_0/L_0$  y a su vez el parámetro adimensional  $\gamma_0$  se define de la siguiente manera  $\gamma_0 = \frac{2\dot{q}_0 \text{sen}(\tau) L_0}{T_0 k_f Pe}$ .

Las diferencias de temperatura en la dirección vertical se definen a partir de la Ec.(4.3), la primera diferencia de temperatura es entre el punto más alejado del sector  $T(y = H_0) = T_m$  y la temperatura de pared  $T(y = R_0) = T_w$ ; la diferencia de temperatura se define en variables adimensionales mediante la siguiente expresión,

$$(\theta_m - \theta_w) = \frac{\dot{q}_0 \text{sen}(\tau) H_0^2}{k T_0 a} \left[ \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{R_0^2}{H_0^2} \right) - \frac{R_0}{H_0} \right]. \quad (4.5)$$

La diferencia de temperatura en la dirección longitudinal del elemento de construcción, esta dada por la temperatura a la salida de la tubería,  $\theta_f(\chi = 1)$  y la temperatura de entrada al primer elemento de construcción,  $\theta_f(\chi = 0)$ , dicha diferencia de temperatura se define en variables adimensionales con ayuda de la Ec.(4.4)

$$\theta_{f(\chi=1)} - \theta_0 \cong \frac{3}{2} \frac{\dot{q}_0 \text{sen}(\tau) L_0}{T_0 k_f Pe} - 0. \quad (4.6)$$

En la ecuación anterior, se omite el efecto de la exponencial debido a que presenta un valor muy pequeño, a partir de los resultados de las formulaciones anteriores muestran que el perfil de temperaturas es esencialmente lineal a lo largo del eje longitudinal  $\chi$ .

La simplificación anterior facilita a su vez la obtención de una expresión que define al número adimensional de Nusselt. Dicho número adimensional mide la transferencia de calor desde una superficie por la que circula el fluido comparada con la transferencia de calor si esta ocurriera solamente por conducción. El desarrollo algebraico para definir dicho grupo adimensional, puede consultarse en el Apéndice C al final del presente trabajo. El número de Nusselt promedio puede expresarse de la siguiente manera,

$$Nu_{prom} = \frac{2}{3}Pe \frac{D_0}{L_0} \ln \left[ \frac{\theta_w}{\theta_w - \frac{3}{2} \frac{\dot{q}_0 \overline{sen}(\tau) L_0}{T_0 k_f Pe}} \right]. \quad (4.7)$$

Sustituyendo la temperatura  $\theta_w$ , correspondiente a la coordenada  $\eta = \phi_0(y = R_0)$ , se obtiene la expresión del número de Nusselt promedio,

$$Nu_{prom} = \frac{4}{3} \varepsilon_0 Pe \ln \left[ 1 + \frac{3}{2} \frac{\bar{a}_0 \bar{\alpha}}{\varepsilon_0 Pe} \frac{1}{(2 - \phi_0)} \right], \quad (4.8)$$

donde  $\bar{a}_0$  representa la relación geométrica entre la altura y el espesor del elemento estructural definida de la siguiente manera  $\bar{a}_0 = H_0/a$ .

A partir de la consideración de que el calor que se transfiere por convección es el mismo que se transfiere al fluido a la salida del elemento estructural por conducción, es posible definir la diferencia de temperatura entre la pared y el fluido mediante la siguiente expresión,

$$\theta_w - \theta_{f(\chi=1)} = \frac{\dot{q}_0 \overline{sen}(\tau) D_0}{T_0 k_f Nu_{prom}}. \quad (4.9)$$

Sustituyendo el número de Nusselt promedio definido en la Ec.(4.8) y la temperatura en la pared  $\theta_w$  en la Ec.(4.9) se define la siguiente diferencia de temperatura,

$$\theta_w - \theta_{f(\chi=1)} = \frac{\dot{q}_0 \overline{sen}(\tau) D_0}{T_0 k_f} \left[ \frac{4}{3} \varepsilon_0 Pe \ln \left( 1 + \frac{3 \bar{a}_0}{\varepsilon_0 Pe} \frac{\bar{\alpha}_0}{2 - \phi_0} \right) \right]^{-1}. \quad (4.10)$$

#### 4.1.2 Resistencia térmica adimensional

Una vez establecida las diferencias de temperatura del primer elemento estructural, la definición de la resistencia térmica se expresa de igual manera mediante la Ec.(3.20), considerando las diferencias de temperatura definidas por las Ecs.(4.5),(4.6) y (4.10). La resistencia térmica se define mediante la siguiente expresión,

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{T-0} = & \pi_1 \overline{sen}(\tau) \left[ \frac{1}{2} (1 + \phi_0^2) - \phi_0 \right] + \frac{3}{4} \pi_2 \frac{\bar{\alpha} \overline{sen}(\tau)}{\varepsilon_0 Pe} \left[ \ln \left( 1 + \frac{3 \bar{a}_0}{\varepsilon_0 Pe} \frac{\bar{\alpha}_0}{2 - \phi_0} \right) \right]^{-1} \\ & + \frac{3}{2} \pi_3 \frac{\bar{\alpha} \overline{sen}(\tau)}{Pe}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

En la expresión anterior, los términos  $\pi_1, \pi_2$  y  $\pi_3$  son parámetros adimensionales definidos como  $\pi_1 = H_0^2/A_0$ ,  $\pi_2 = D_0 a/A_0$ ,  $\pi_3 = aL_0/A_0$ . En la resistencia térmica definida anteriormente, la longitud  $H_0$  se puede definir a partir del número inicial de tubos que entran al volumen en forma de disco. Rocha, L.A.O., *et al.* [24] reportaron que el mínimo número de tubos iniciales  $n_0$  que entran a un elemento constructal en forma de disco es  $n_0 = 3$ , ya que para dicho número de tubos se presenta una resistencia hidráulica mínima, además de definir las dimensiones del primer elemento constructal. A partir de los comentarios anteriores la longitud  $H_0$  se define mediante la siguiente expresión,

$$H_0 = \frac{2\pi L_0}{n_0}. \quad (4.12)$$

Sustituyendo la definición anterior en la Ec.(4.11) y con ayuda de la definición del área del elemento constructal  $A_0 = H_0 L_0$ , se puede expresar la resistencia térmica de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{T-0} = & \frac{2\pi}{n_0} \text{sen}(\tau) \left[ \frac{1}{2} (1 + \phi_0^2) - \phi_0 \right] + \frac{3}{4} \frac{n_0 \bar{b}_0 \phi_0}{\pi} \frac{\bar{\alpha} \text{sen}(\tau)}{\varepsilon_0 Pe} \left[ \ln \left( 1 + \frac{3\bar{\alpha}_0}{\varepsilon_0 Pe} \frac{\bar{\alpha}_0}{2 - \phi_0} \right) \right]^{-1} + \\ & \frac{3}{4} \frac{n_0 \bar{b}_1}{\pi} \frac{\bar{\alpha} \text{sen}(\tau)}{Pe}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

donde el parámetro adimensional  $\bar{b}_0$  se define como  $\bar{b}_0 = a/L_0$ .

Cabe mencionar que para un primer elemento constructal con un arreglo de tuberías radial, la longitud del elemento  $L_0$  coincide con el radio del sector  $R$ . Lo anterior no es aplicable en construcciones sucesivas donde la red de tuberías presenta la condición de dicotomía. Una vez definida la resistencia térmica adimensional de una configuración radial del tubo de diámetro  $D_0$  se define la potencia necesaria para desplazar al fluido en el arreglo de tuberías radial.

### 4.1.3 Potencia adimensional

Para obtener una expresión de la potencia adimensional es necesario asumir lo siguiente: el volumen de la tubería es fijo, la relación del volumen ocupado por la tubería y el área del disco es muy pequeña. La potencia se puede definir con ayuda de la resistencia al flujo para un fluido newtoniano expresada para un arreglo de tuberías radial. Dicha resistencia al flujo se define mediante la siguiente expresión, [44]:

$$\frac{\Delta P}{\dot{m}} = \frac{128\nu R}{\pi n_0 D_0^4}. \quad (4.14)$$

La potencia puede definirse de manera general como el producto de una fuerza por una velocidad,

$$\dot{W} = FV = (\Delta PA) V. \quad (4.15)$$

De la Ec.(4.14) se puede despejar  $\Delta P$  y sustituir en la expresión anterior. De esta manera la velocidad puede escribirse en términos del flujo másico  $\dot{m}$ ,

$$\dot{W} = \Delta P \frac{\dot{m}}{\rho} = \frac{128\nu R}{\pi n_0 D_0^4} \frac{\dot{m}^2}{\rho}. \quad (4.16)$$

El flujo másico se puede expresar en términos del número de tubos iniciales  $n_0$ , considerando la definición de la velocidad promedio reportada por Bird, R. *et al.* [57], se obtiene la siguiente expresión para el arreglo de tubos radial,

$$\dot{m} = n_0 \rho U_{prom} \frac{\pi}{4} D_0^2. \quad (4.17)$$

Sustituyendo la Ec.(4.17) en la Ec.(4.16) y manipulando algebraicamente para obtener la potencia en términos de parámetros adimensionales, se llega a la siguiente expresión,

$$\dot{W} = 8\pi n_0 \frac{\mu R \alpha_f^2}{R_0^2} P e^2. \quad (4.18)$$

donde  $\alpha_f$ , es la difusividad del fluido.

La potencia adimensional para un arreglo de tuberías radial puede entonces expresarse como:

$$\tilde{W} = \dot{W} \frac{R_0^2}{8\mu R \alpha_f^2} = \pi n_0 P e^2. \quad (4.19)$$

La metodología para definir la potencia adimensional es recursiva en cada nivel de construcción. A partir de la Ec.(4.19) se puede despejar el número de Péclet para sustituirse en la resistencia térmica adimensional, Ec.(4.1), definiendo así una relación que involucra la resistencia térmica adimensional en función de la potencia necesaria para un arreglo de tuberías radial.

La resistencia térmica en función de la potencia adimensional para un arreglo radial de tuberías se expresa de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{T-0} = & \frac{2\pi}{n_0} sen(\tau) \left[ \frac{1}{2} (1 + \phi_0^2) - \phi_0 \right] + \frac{3}{4} \frac{n_0^{\frac{3}{2}} \bar{b}_0 \phi_0}{\pi^{\frac{1}{2}}} \frac{\bar{\alpha} sen(\tau)}{\varepsilon_0 \tilde{W}^{\frac{1}{2}}} \left[ \ln \left( 1 + \frac{3(\pi n_0)^{\frac{1}{2}} \bar{a}_0}{\varepsilon_0 \tilde{W}^{\frac{1}{2}}} \frac{\bar{\alpha}_0}{2 - \phi_0} \right) \right]^{-1} + \\ & \frac{3}{4} \frac{n_0^{\frac{3}{2}} \bar{b}_0}{\pi^{\frac{1}{2}}} \frac{\bar{\alpha} sen(\tau)}{\tilde{W}^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

La ecuación anterior permite definir el comportamiento de la resistencia térmica en función de la potencia adimensional para diferentes valores de los parámetros físicos adimensionales.

#### 4.1.4 Segundo elemento de construcción

Para el segundo elemento de construcción se considera la condición de dicotomía, que como se explicó anteriormente es la ramificación de un tubo de diámetro  $D_0$  en dos tuberías de diferente diámetro  $D_1$ . La relación de los diámetros se describe mediante la Ec.(4.1) conocida como la ley de Murray. El sector cilíndrico esta compuesto de un sector central de área  $A_0$  y dos sectores de área  $A_1$ . Las dimensiones del elemento constructal se puede apreciar en la Figura 4.2.

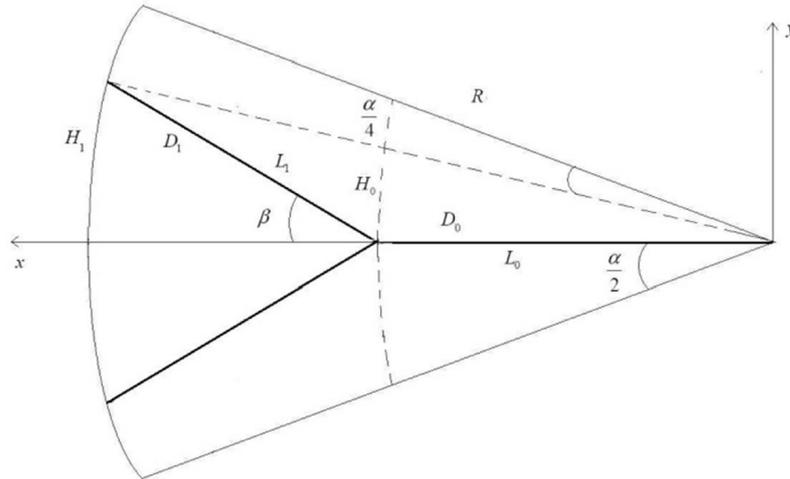


Figura 4.2: Segundo elemento de construcción con dicotomía

Al considerar la condición de dicotomía se genera un ángulo  $\beta$ , que es el ángulo comprendido entre las tuberías ramificadas, dicho ángulo puede ser optimizado como se demostrará mas adelante.

La definición de la resistencia térmica del segundo elemento constructal requiere de los perfiles de temperatura en la dirección horizontal y vertical, por lo que se aplica la misma metodología descrita en el primer elemento constructal para un arreglo radial. El número de Nusselt es calculado para el segundo elemento de construcción, considerando el perfil de temperaturas a lo largo de la tubería de diámetro  $D_1$ , el número de Nusselt presenta la misma forma que la Ec.(4.8). La resistencia térmica del segundo elemento constructal se define mediante la siguiente ecuación,

$$\tilde{R}_{T-1} = \frac{2\pi}{n_0} \text{sen}(\tau) \left[ \frac{1}{2} (1 + \phi_1^2) - \phi_1 \right] + \frac{3}{4} \frac{n_0 \bar{b}_1 \phi_1}{\pi} \frac{\bar{a} \text{sen}(\tau)}{\varepsilon_1 Pe} \left[ \ln \left( 1 + \frac{3\bar{a}_1}{\varepsilon_1 Pe} \frac{\bar{a}_1}{2 - \phi_1} \right) \right]^{-1} + \frac{3}{4} \frac{n_0 \bar{b}_2}{\pi} \frac{\bar{a} \text{sen}(\tau)}{Pe}. \quad (4.21)$$

La ecuación anterior queda en función de parámetros adimensionales como  $\phi_1$ ,  $\bar{a}_1$ , que son relaciones geométricas que se definen de la siguiente manera  $\phi_1 = R_1/H_1$  y  $\bar{a}_1 = H_1/a$ .

Para el segundo elemento constructal se define la potencia a partir de la caída de presión del arreglo de tuberías ramificado, con la restricción de que el volumen de dicho arreglo es constante. En la expresión siguiente es posible definir el volumen como función del diámetro  $D_0$  mediante la ley de Murray, obteniendo así la siguiente expresión;

$$V_1 = \frac{\pi}{4} (D_0^2 L_0 + 2D_1^2 L_1) = \frac{\pi}{4} D_0^2 \left( L_0 + 2^{\frac{1}{3}} L_1 \right). \quad (4.22)$$

La caída de presión del arreglo dicotómico se expresa mediante la siguiente ecuación,

$$\Delta P_{R-1} = \Delta P_0 + \Delta P_1 = \frac{128\nu \dot{m}}{\pi n_0} \left( \frac{L_0}{D_0^4} + \frac{1}{2} \frac{L_1}{D_1^4} \right). \quad (4.23)$$

En la Ec. (4.23) se sustituye la ley de Murray expresando la caída de presión de la siguiente manera,

$$\Delta P_{R-1} = \frac{128\nu \dot{m}}{\pi D_0^4 n_0} \left( L_0 + 2^{\frac{1}{3}} L_1 \right). \quad (4.24)$$

De la Ec.(4.22) se despeja el diámetro  $D_0$  y se sustituye en la ecuación anterior. La expresión resultante queda en función del volumen y de las longitudes del arreglo de tuberías,

$$\Delta P_{R-1} = \frac{\pi 8\nu \dot{m}}{V_1^2 n_0} \left( L_0 + 2^{\frac{1}{3}} L_1 \right)^3. \quad (4.25)$$

Por otro lado, la expresión para la potencia adimensional del segundo elemento constructal puede definirse siguiendo los mismos pasos que se aplican en el primer elemento constructal con un arreglo radial,

$$\tilde{W} = \pi n_0 P e^2 \left( \hat{L}_0 + 2^{\frac{1}{3}} \hat{L}_1 \right), \quad (4.26)$$

donde  $\hat{L}_0$  y  $\hat{L}_1$  son longitudes adimensionales que se definen de la siguiente manera  $\hat{L}_0 = L_0/R$  y  $\hat{L}_1 = L_1/R$ .

Sustituyendo la Ec.(4.26) en la Ec.(4.1) se expresa la resistencia térmica como función de la potencia adimensional,

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{T-1} = & \frac{2\pi}{n_0} \text{sen}(\tau) \left[ \frac{1}{2} (1 + \phi_1^2) - \phi_1 \right] + \frac{3}{4} \frac{n_0^{\frac{3}{2}} \bar{b}_2 \phi_0}{\pi^{\frac{1}{2}}} \frac{\bar{\alpha} \text{sen}(\tau)}{\varepsilon_1 \tilde{W}^{\frac{1}{2}}} \left[ \ln \left( 1 + \frac{3 (\pi n_0)^{\frac{1}{2}} \bar{a}_1}{\varepsilon_1 \tilde{W}^{\frac{1}{2}}} \frac{\bar{\alpha}_1}{2 - \phi_1} \right) \right]^{-1} + \\ & \frac{3}{4} \frac{n_0^{\frac{3}{2}} \bar{b}_2}{\pi^{\frac{1}{2}}} \frac{\bar{\alpha} \text{sen}(\tau)}{\tilde{W}^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Las longitudes adimensionales pueden expresarse como función de los ángulos del segundo elemento constructal considerando al radio del elemento  $R$  como constante. Las longitudes se pueden definir de la siguiente manera,

$$\hat{L}_0 = \cos\left(\frac{\alpha}{4}\right) - \hat{L}_1 \cos(\beta), \quad \hat{L}_1 = \frac{\text{sen}\left(\frac{\alpha}{4}\right)}{\text{sen}(\beta)}. \quad (4.28)$$

Para determinar el ángulo  $\beta$  óptimo, se sustituyen las definiciones anteriores en la Ec.(4.25), derivando con respecto al ángulo  $\beta$  se obtiene el valor de dicho ángulo para el que la caída de presión es mínima. El ángulo  $\alpha$  se define en términos del número de tubos iniciales  $n_0$  y se define como  $\alpha = 2\pi/n_0$ . El valor del ángulo  $\beta$  óptimo presenta un valor de  $37.4673^\circ$ .

#### 4.1.5 Tercer elemento de construcción

El tercer elemento constructal consta de un segundo nivel de ramificación con una tubería de diámetro  $D_2$  y longitud  $L_2$ . Las dimensiones y el arreglo dicotómico se puede observar en la Figura 4.3.

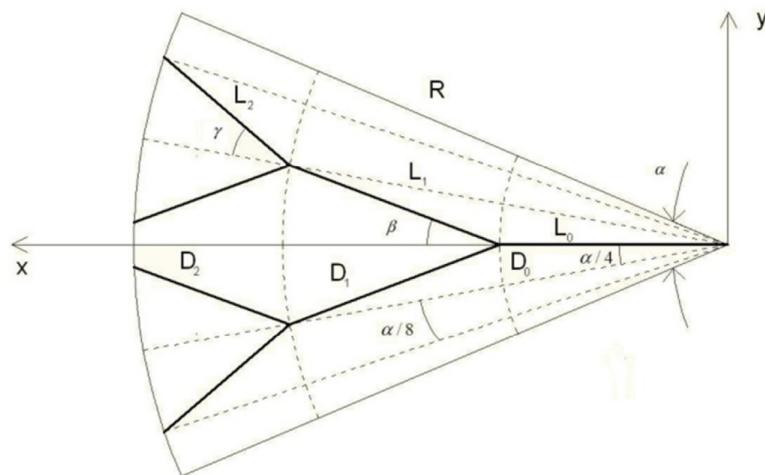


Figura 4.3: Tercer elemento de construcción, segundo nivel de ramificación

De igual manera que en los elementos constructales anteriores, es necesario definir la resistencia térmica a partir de las temperaturas en el elemento constructal. Los métodos de optimización de la teoría constructal son recursivos en cada nivel de ramificación.

La resistencia térmica correspondiente al segundo nivel de ramificación se define mediante la siguiente expresión,

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{T-2} = & \frac{2\pi}{n_0} \text{sen}(\tau) \left[ \frac{1}{2} (1 + \phi_2^2) - \phi_2 \right] + \frac{3}{4} \frac{n_0 \bar{b}_2 \phi_2}{\pi} \frac{\bar{\alpha} \text{sen}(\tau)}{\varepsilon_2 Pe} \left[ \ln \left( 1 + \frac{3\bar{a}_2}{\varepsilon_2 Pe} \frac{\bar{\alpha}_2}{2 - \phi_2} \right) \right]^{-1} + \\ & \frac{3}{4} \frac{n_0 \bar{b}_2}{\pi} \frac{\bar{\alpha} \text{sen}(\tau)}{Pe}. \end{aligned} \quad (4.29)$$

La potencia adimensional del segundo nivel de ramificación se define a partir de aplicar la ley de Murray por lo que es posible definir dicha potencia de la siguiente manera,

$$\tilde{W} = \pi n_0 Pe^2 \left( \hat{L}_0 + 2^{\frac{1}{3}} \hat{L}_1 + 2^{\frac{2}{3}} \hat{L}_2 \right). \quad (4.30)$$

donde  $\hat{L}_0$ ,  $\hat{L}_1$  y  $\hat{L}_2$  son longitudes adimensionales.

Las longitudes de las tuberías en función de los ángulos de ramificación del elemento constructal ramificado son las siguientes;

$$\hat{L}_0 = \left[ \cos \left( \frac{\alpha}{8} \right) - \frac{\text{sen} \left( \frac{\alpha}{8} \right)}{\tan(\gamma)} \right] \left( \cos \left( \frac{\alpha}{4} \right) - \text{sen} \left( \frac{\alpha}{4} \right) \tan(\beta) \right), \quad (4.31)$$

$$\hat{L}_1 = \frac{\text{sen} \left( \frac{\alpha}{4} \right)}{\text{sen}(\beta)} \left( \cos \left( \frac{\alpha}{8} \right) - \frac{\text{sen} \left( \frac{\alpha}{8} \right)}{\tan(\gamma)} \right), \quad (4.32)$$

$$\hat{L}_2 = \frac{\text{sen} \left( \frac{\alpha}{8} \right)}{\text{sen}(\gamma)}. \quad (4.33)$$

Las longitudes del segundo nivel de ramificación presentan una forma diferente al nivel de construcción anterior, lo anterior es debido a que en cada nivel de ramificación es necesario considerar la proyección de las longitudes de construcciones anteriores.

A partir de la caída de presión para el segundo nivel de ramificación y mediante las expresiones anteriores, se pueden obtener los ángulos  $\beta$  y  $\gamma$  óptimos para los que se presenta una mínima caída de presión. Dicha caída de presión se define de la siguiente manera,

$$\Delta P_{R-2} = \frac{8\pi\nu}{V_2^2} \frac{\dot{m}}{n_0} \left( L_0 + 2^{\frac{1}{3}} L_1 + 2^{\frac{2}{3}} L_1 \right)^3. \quad (4.34)$$

Los valores de los ángulos óptimos obtenidos a partir de la Ec.(4.34) son los siguientes: el ángulo presenta el mismo valor que el obtenido en la construcción anterior,  $\beta = 37.4673^\circ$ , el ángulo  $\gamma$  presenta un valor de  $78.3352^\circ$ .

Con los resultados anteriores, es posible entonces definir la resistencia térmica en función de la potencia adimensional, las longitudes y ángulos óptimos. Esta expresión se puede definir de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{T-2} = & \frac{2\pi}{n_0} \text{sen}(\tau) \left[ \frac{1}{2} (1 + \phi_2^2) - \phi_2 \right] + \frac{3 n_0^{\frac{3}{2}} \bar{b}_3 \phi_2 \bar{\alpha} \text{sen}(\tau)}{4 \pi^{\frac{1}{2}} \varepsilon_3 \tilde{W}^{\frac{1}{2}}} \left[ \ln \left( 1 + \frac{3 (\pi n_0)^{\frac{1}{2}} \bar{a}_2}{\varepsilon_3 \tilde{W}^{\frac{1}{2}}} \frac{\bar{\alpha}_2}{2 - \phi_2} \right) \right]^{-1} + \\ & \frac{3 n_0^{\frac{3}{2}} \bar{b}_3 \bar{\alpha} \text{sen}(\tau)}{4 \pi^{\frac{1}{2}} \tilde{W}^{\frac{1}{2}}} \end{aligned} \quad (4.35)$$

#### 4.1.6 Expresiones generales

Las resistencias térmicas obtenidas en cada nivel de construcción pueden ser definidas mediante una expresión general, debido a que la metodología para obtener las resistencias térmicas es recursiva entre niveles de ramificación. En la formulación de cada una de las resistencias no se contempla el efecto del elemento constructal anterior, ya que al definir la resistencia térmica total es necesario describir la diferencia de temperatura entre el punto más alejado del elemento y la temperatura de entrada al elemento, los efectos de las ramificaciones anteriores queda en términos de parámetros adimensionales que hacen poco significativa su influencia. Cabe mencionar que en este sentido la teoría constructal no reporta en las diferentes referencias sobre redes en geometrías de forma de disco la formulación matemática detallada de la resistencia total de un arreglo de tuberías bifurcado en un nivel de ramificación mayor a dos, únicamente se reporta de manera gráfica el comportamiento de la resistencia térmica en función de la potencia adimensional para diferentes niveles de ramificación [44].

En una primera aproximación se define la resistencia térmica total del sector cilíndrico a partir de considerar la analogía eléctrica de las resistencias térmicas. La aplicación de lo anterior fue reportado por Kou, J, *et al.* [47]. En este trabajo se reporta la transferencia de calor de redes dendríticas de tuberías asimétricas en longitud y diámetro para enfriar un volumen finito rectangular, de tal manera que para describir la resistencia térmica total consideran la resistencia térmica de cada tubería como una resistencia eléctrica. La resistencia térmica total de la red se expresa como un arreglo de resistencias eléctricas en serie y en paralelo. El método anterior fue reportado por Peng, Xu, *et al.* [48] en redes con dicotomía para describir las relaciones de conductividad eléctrica y térmica para redes de material sólido descritas a partir de relaciones fractales.

La resistencia térmica total en el de dos niveles de ramificación se define de la siguiente manera,

$$\tilde{R}_{tot} = \tilde{R}_{T-0} + \frac{1}{\tilde{R}_{T-1}} + \frac{1}{\tilde{R}_{T-2}} = \frac{2 + \tilde{R}_{T-0} \tilde{R}_{T-1}}{\tilde{R}_{T-1}}. \quad (4.36)$$

La expresión anterior puede ser generalizada para definir la resistencia térmica en cada nivel de construcción,

$$R_{tot} = \tilde{R}_{T-0} + \sum_{i=0}^p \frac{1}{\tilde{R}_{T-i}} \quad (4.37)$$

donde  $i$  es el nivel de ramificación de la red con dicotomía.

A su vez también es posible definir la potencia adimensional en cada nivel de ramificación siguiendo el método descrito en los subcapítulos anteriores, la expresión general de la potencia adimensional se define mediante

$$\tilde{W} = \pi n_0 P e^2 \sum_{i=0}^p \left( 2^{\frac{i}{3}} \hat{L}_i \right), \quad (4.38)$$

donde  $\hat{L}_i$  es la longitud adimensional de la tubería de cada nivel de ramificación.

Como se ha presentado en cada una de las construcciones, las longitudes adimensionales no presentan un patrón para poder ser definidas en una expresión generalizada en función del índice de construcción  $i$ . Además de que para las longitudes de la construcción mas alejadas del centro del elemento se definen en términos del ángulo del sector ramificado, considerando las diferencias de longitud entre las proyecciones de las longitudes de la construcción anterior. Cabe mencionar que en cada etapa de construcción se sustituyen las longitudes adimensional óptimas en la resistencia térmica correspondiente a cada nivel de construcción.

Por otro lado es posible definir las distancias que se guardan entre las ramificaciones en cada nivel de ramificación, la suma de dichas distancias es el radio del sector cilíndrico. Para determinar la expresión general que define las distancias entre ramificaciones, es necesario realizar una suma a partir de los puntos en el perímetro del sector cilíndrico. En la Figura 4.4 se puede apreciar las ramificaciones en la periferia del sector cilíndrico.

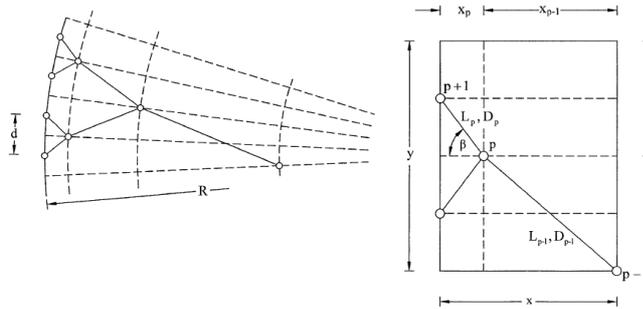


Figura 4.4: Ramificaciones en el perímetro del sector

La expresión de la suma de las longitudes entre construcciones, se define a partir de expresar la suma de dichas distancias desde un nivel de construcción  $i$  hasta  $i = p$ , donde  $p$  es el nivel último de construcción. La suma total da como resultado el radio del sector y se define mediante la siguiente expresión,

$$R = \sum_{i=0}^p x_i = \frac{x_p \left[ 1 - \left( \frac{x_p}{x_{p-1}} \right)^{p+1} \right]}{\left( 1 - \frac{x_p}{x_{p-1}} \right) \left[ \frac{x_p}{x_{p-1}} \right]^p}. \quad (4.39)$$

Con las expresiones anteriores se definen ciertos aspectos geométricos de una red generalizada para cualquier nivel de ramificación, a diferencia de las longitudes óptimas y ángulos en cada nivel de construcción. Además, la expresión anterior puede resultar muy útil para definir una longitud característica global del sistema que pudiera incidir en la construcción de otros parámetros adimensionales, como es el caso de un número de Nusselt global.

## 4.2 Modelo simplificado de Phan-Thien & Tanner

En la revisión de los antecedentes sobre materiales adaptativos con aplicaciones en la captación solar, no se encontraron modelos teóricos que describan las propiedades de materiales adaptativos que permitieran aplicarse a los métodos de optimización de la teoría constructal. Basados en la idea de la adaptación de la sangre en las redes capilares humanas [27], en el presente trabajo se aplica un modelo reológico que permita modificar sus propiedades físicas del fluido de tal manera que se pueda definir un dispositivo de colección que atienda a la naturaleza dinámica de la señal transitoria. En este sentido se hizo uso del modelo reológico de Phan-Thien & Tanner para fluidos viscoelásticos, que tiene su origen en el modelado de soluciones poliméricas y fue reportado por Phan-Thien, N, [30,31]. Dicho modelo reológico permite describir el comportamiento del fluido a partir de parámetros adimensionales tales como el número de Deborah y el parámetro elongacional. Las ecuaciones constitutivas de dicho modelo permiten describir tanto el perfil de velocidades en una tubería así como el esfuerzo cortante, de tal manera que para diferentes valores de los parámetros mencionados anteriormente se tienen diferentes comportamientos del fluido no newtoniano.

El modelo simplificado de Phan-Thien & Tanner (SPTT) fue reportado por Oliveira, O. *et al.* [33], en dicho trabajo se realizó la simplificación del modelo general de Phan-Thien & Tanner omitiendo el parámetro relacionado con la velocidad de la red molecular a partir de considerar que todas las moléculas de la red polimérica tienen movimientos afines, generando así un modelo con menos parámetros característicos. Por otro lado, Pinho, F. *et al.* [36] reportaron el modelo simplificado para el flujo de fluido en geometrías como canales y tuberías, destacando los métodos de solución para determinar el gradiente de presión en función de una relación de velocidades promedio.

El modelo simplificado de Phan-Thien & Tanner (SPTT) se define con ayuda de la notación indicial, mediante la siguiente expresión;

$$Y(\tau_{kk}, T) \tau_{ij} + \lambda \left( \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial t} + \frac{\partial (u_k \tau_{ij})}{\partial x_k} \right) = \tilde{\eta} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \left( \tau_{jk} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \tau_{ik} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) \quad (4.40)$$

donde  $\lambda$  es el tiempo de relajación del material y  $\tilde{\eta}$  es el coeficiente de viscosidad.

El desarrollo para determinar el perfil de velocidades y el esfuerzo cortante a partir del modelo simplificado de Phan-Thien & Tanner, se describe a detalle en el Apéndice D. Por consiguiente, el perfil de velocidad obtenido, proviene de considerar el modelo anterior para el caso en que el fluido es hidrodinámicamente desarrollado, y se define mediante la siguiente expresión,

$$u^* = 2 [1 - \tilde{r}^2] \left( \frac{\bar{u}_N}{\bar{u}} \right) \left[ 1 + 16 \varepsilon^* De^2 \left( \frac{\bar{u}_N}{\bar{u}} \right)^2 [1 + \tilde{r}^2] \right]. \quad (4.41)$$

En la Ec.(4.41), el término  $\bar{u}_N/\bar{u}$  se refiere a la relación de las velocidades promedio entre un fluido no newtoniano y un fluido newtoniano. Los resultados derivados del perfil de velocidades pueden expresarse en términos de la relación anterior, que a su vez esta definida como función de los parámetros propios del modelo reológico como es el parámetro elongacional  $\varepsilon^*$  y el número de Deborah  $De$ .

El número de Deborah es una medida del nivel de elasticidad en el fluido, ya que es la relación del tiempo característico del fluido y la escala de tiempo del flujo del fluido, este número adimensional se define de la siguiente manera;

$$De = \frac{\lambda \bar{u}}{R}. \quad (4.42)$$

La relación de velocidades se obtiene a partir de resolver una ecuación algebraica de tercer grado a partir de considerar que el gradiente de presión es desconocido. La relación de velocidades se define mediante la siguiente expresión;

$$\frac{\bar{u}_N}{\bar{u}} = \frac{(432)^{\frac{1}{6}} \left[ \left\{ \sigma_2^{\frac{1}{2}} + 3^{\frac{3}{2}} \sigma_1^{\frac{1}{2}} \right\} - 2^{\frac{2}{3}} \right]}{6 \sigma_1^{\frac{1}{2}} \left[ \sigma_2^{\frac{1}{2}} + 3^{\frac{3}{2}} \sigma_1^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{3}}} \quad (4.43)$$

donde  $\sigma_1 = \varepsilon^* De^2$  y  $\sigma_2 = 27\sigma_1 + 4$

El estudio del esfuerzo cortante en el flujo de un fluido no newtoniano fue reportado por Atalik, K. *et al.* [37], donde se realizó un estudio de la respuesta no lineal de fluidos poliméricos en pruebas experimentales con esfuerzos oscilatorios de gran amplitud.

El análisis teórico reporta el comportamiento del fluido entre dos placas paralelas; el fluido es caracterizado mediante dos ecuaciones constitutivas. Los resultados para un esfuerzo cortante dado son básicamente, el efecto adelgazante sobre el fluido y la elasticidad, que conlleva a un comportamiento armónico en el esfuerzo cortante como función del tiempo, permitiendo caracterizar al fluido polimérico.

La modulación del esfuerzo cortante puede definirse a partir de asignar diferentes valores de los parámetros elongacionales del modelo reológico, de tal manera que para diferentes condiciones de captación de la señal transitoria se pueda determinar un punto óptimo de comportamiento del fluido. Así mediante la circulación del fluido en la red, la adaptación del dispositivo solar se puede optimizar a partir de controlar o modular los parámetros del fluido no newtoniano (véase el Apéndice F para comprender una hipotética propuesta de control sobre el fluido). El esfuerzo cortante se define mediante la siguiente expresión,

$$\bar{\tau} = \frac{\tau_{rz}}{4\bar{\eta}/R} = \left( \frac{\bar{u}_N}{\bar{u}} \right) \tilde{\tau}. \quad (4.44)$$

La modulación del esfuerzo cortante en el tiempo se propone a partir de plantear una función del parámetro elongacional; el parámetro elongacional puede ser definido mediante pruebas experimentales de la medición de la viscosidad extensional y la viscosidad para un flujo de corte, al cociente de ambas viscosidades se le conoce como la viscosidad de Trouton [51]. Por otro lado, Pinho, F., *et al.* [36], reportaron un análisis de transferencia de calor de convección forzada en tuberías con un fluido no newtoniano modelado con el modelo de Phan-Thien & Tanner, donde destaca la importancia de dicho parámetro elongacional ya que al modificar su valor cambia considerablemente las características de la transferencia de calor, dicho parámetro tiene una fuerte influencia en el comportamiento del fluido. Dados los comentarios anteriores la función que proponemos para el parámetro elongacional como función del tiempo, se define mediante de la siguiente relación de prueba,

$$\varepsilon^* = \varepsilon_0^* (1 + \beta \text{sen}(\omega t)) \quad (4.45)$$

donde  $\varepsilon_0$  y  $\beta$ , son el valores de referencia y la amplitud de la señal senoidal.

Una vez que se ha definido el perfil de velocidades en la tubería se define la resistencia térmica mediante la metodología desarrollada anteriormente.

### 4.2.1 Resistencia térmica adimensional

La metodología para obtener las diferencias de temperatura en el primer elemento de construcción es la misma que la aplicada para tuberías con la condición de dicotomía, se considera como primer caso un elemento constructal con una tubería radial que transporta al fluido no newtoniano del centro a la periferia del sector cilíndrico; la temperatura en la parte superior del elemento de construcción se define mediante un balance de energía en la parte superior del elemento, que puede apreciarse en la Figura 4.1, ya que se considera el mismo elemento constructal que para el caso de un fluido newtoniano, la temperatura en la parte superior del elemento es la siguiente expresión,

$$\theta(\eta) = \frac{\dot{q}_0 \text{sen}(\omega t) H_0^2}{k T_0 a} \left( \eta - \frac{\eta^2}{2} \right) + \theta_f |_{\chi=1}. \quad (4.46)$$

A partir de un balance de energía en la tubería, se define la siguiente ecuación diferencial,

$$-\frac{\varepsilon}{Pe} \frac{\partial^2 \theta_f}{\partial \chi^2} + A^* \frac{\partial \theta}{\partial \chi} + \frac{\omega L_0}{\bar{u}} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \gamma, \quad (4.47)$$

donde  $\varepsilon = \frac{R_0}{L_0}$ ,  $Pe = \frac{\bar{u} R_0}{\alpha_f}$ , es una relación de esbeltez y el número de Péclet, respectivamente.

En la ecuación diferencial anterior el término  $A^*$  es el perfil de velocidad de un fluido no newtoniano, evaluada a lo largo del radio de la tubería y definida mediante la siguiente expresión,

$$A^* = \frac{4}{3} \left( \frac{\bar{u}_N}{\bar{u}} \right) + \frac{128}{5} \varepsilon^* De^2 \left( \frac{\bar{u}_N}{\bar{u}} \right)^2. \quad (4.48)$$

El término temporal esta multiplicado por  $\omega L_0 / \bar{u}$  que es del orden de  $\sim 10^{-8}$ , por lo que al igual que en las formulaciones anteriores, puede ser despreciado.

La ecuación diferencial (4.47), esta sujeta a las siguientes condiciones de frontera,

$$\begin{aligned} \chi = 0 & : \theta = 0, \\ \chi = 1 & : \frac{\partial \theta}{\partial \chi} = 0. \end{aligned} \quad (4.49)$$

La solución de la ecuación diferencial anterior del perfil de temperaturas en la dirección longitudinal, evaluado a la salida del elemento de construcción se puede escribir como,

$$\theta_f(\chi) \approx \left\{ \frac{4}{3} \left( \frac{\bar{u}_N}{\bar{u}} \right) + \frac{128}{5} \varepsilon^* De^2 \left( \frac{\bar{u}_N}{\bar{u}} \right)^2 \right\}^{-1} \frac{2 \dot{q}_0 \text{sen}(\tau) L_0}{T_0 k_f Pe} \frac{1}{\chi}, \quad (4.50)$$

Evaluando en  $\chi = 1$ , la temperatura adimensional  $\theta_f$ , se define mediante la siguiente expresión,

$$\theta_f(\chi = 1) \approx \left\{ \frac{4}{3} \left( \frac{\bar{u}_N}{\bar{u}} \right) + \frac{128}{5} \varepsilon^* D e^2 \left( \frac{\bar{u}_N}{\bar{u}} \right)^2 \right\}^{-1} \frac{2\dot{q}_0 \text{sen}(\tau) L_0}{T_0 k_f P e}. \quad (4.51)$$

Con la expresión anterior, se define el número de Nusselt en el primer elemento de construcción; siguiendo la misma metodología descrita en el Apéndice C.

$$Nu_{prom} = A^* \varepsilon P e \ln \left[ 1 + \frac{8\bar{a}_0 \bar{\alpha}}{A^* \varepsilon P e} \frac{1}{(2 - \phi_0)} \right]. \quad (4.52)$$

Las diferencias de temperatura necesarias para describir la resistencia térmica del elemento se definen con ayuda de las Ecs.(4.50),(4.46) y (4.52), después de ciertas simplificaciones se pueden escribir mediante las siguientes expresiones:

$$\theta_m - \theta_w = \frac{\dot{q}_0 \text{sen}(\tau) H_0^2}{k T_0 a} \left[ \frac{1}{2} (1 + \phi_0^2) - \phi_0 \right], \quad (4.53)$$

$$\theta_w - \theta_{f(\chi=1)} = \frac{2\dot{q}_0 \text{sen}(\tau) D_0 \varepsilon}{T_0 k_f P e} \frac{1}{A^*} \left\{ \ln \left[ 1 + \frac{8\bar{a}_0 \bar{\alpha}}{A^* \varepsilon P e} \frac{1}{(2 - \phi_0)} \right] \right\}^{-1} \quad (4.54)$$

y

$$\theta_{f(\chi=1)} - \theta_0 = \frac{1}{A^*} \frac{2\dot{q}_0 \text{sen}(\tau) L_0}{T_0 k_f P e}. \quad (4.55)$$

La resistencia térmica se define mediante la siguiente expresión,

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{T-0} = & \frac{2\pi \text{sen}(\tau)}{n_0} \left[ \frac{1}{2} (1 + \phi_0^2) - \phi_0 \right] + \frac{2an_0 \varepsilon^2 \bar{\alpha} \text{sen}(\tau)}{\pi L_0^2 A^* P e} \left\{ \ln \left[ 1 + \frac{1}{A^*} \frac{4\bar{\alpha}}{\varepsilon P e} \frac{an_0}{\pi L_0} \left( \frac{2}{2 - \phi_0} \right) \right] \right\}^{-1} + \\ & \frac{1}{A^*} \frac{an_0}{\pi L_0} \frac{\bar{\alpha} \text{sen}(\tau)}{P e}. \end{aligned} \quad (4.56)$$

La resistencia térmica de cada nivel de construcción presenta la misma forma que la Ec.(4.11); las longitudes y los ángulos correspondientes son los mismos que los definidos en el capítulo anterior, ya que para su determinación, no influye la naturaleza del fluido que circula por la tubería del elemento de construcción; la definición de la resistencia total, a su vez, será la misma expresión del análogo de las resistencias, definida en la Ec.(4.37).

### 4.2.2 Potencia adimensional

La potencia adimensional para un fluido no newtoniano definido mediante el modelo simplificado de Phan-THien & Tanner, sigue la misma metodología utilizada en el capítulo anterior, con la diferencia de que ahora el perfil de velocidades es una función de los parámetros propios del modelo. A continuación se presentan las expresiones de la potencia adimensional para el primer elemento de construcción,

$$\tilde{W}_0 = \left( \frac{\pi n_0}{\hat{L}_0} \right)^{\frac{1}{2}} Pe. \quad (138)$$

Las expresiones de la potencia adimensional del segundo y tercer nivel de construcción se definen mediante las siguientes expresiones,

$$\tilde{W}_1 = \frac{(\pi n_0)^{\frac{1}{2}} Pe}{\left( \hat{L}_0 + 2^{\frac{2}{3}} \hat{L}_1 \right)^{\frac{1}{2}}} \quad (140)$$

y

$$\tilde{W}_2 = \frac{(\pi n_0)^{\frac{1}{2}} Pe}{\left( \hat{L}_0 + 2^{-\frac{2}{3}} \hat{L}_1 + 2^{-\frac{4}{3}} \hat{L}_2 \right)^{\frac{1}{2}}} \quad (141)$$

Los resultados de la resistencia adimensional en función de la potencia adimensional se presentan en el capítulo correspondiente al fluido no newtoniano definido con el modelo simplificado de Phan-Thien & Tanner.

## 5

# Resultados

En este capítulo se presentan las gráficas y resultados de cada planteamiento teórico desarrollado anteriormente. Los resultados principales son los perfiles de temperatura, comportamiento del número de Nusselt. Los valores de los parámetros adimensionales utilizados a lo largo de este trabajo están calculados para valores de constantes físicas de la sustancia [57], así como de valores característicos para dispositivos de colección convencionales tales como la velocidad y diámetro de tubería, [58]. Algunos de los valores utilizados de dichas cantidades físicas y mediciones son los que se muestran a continuación.

$k_f$	Conductividad del fluido	$0.58 \left[ \frac{\text{W}}{\text{mK}} \right]$
$k$	Conductividad del aire	$0.02605 \left[ \frac{\text{W}}{\text{mK}} \right]$
$\alpha_f$	Difusividad del fluido	$1.38656 \times 10^{-7} \left[ \frac{\text{m}^2}{\text{s}} \right]$
$\alpha$	Difusividad del aire	$0.22160 \times 10^{-4} \left[ \frac{\text{m}^2}{\text{s}} \right]$
$u_x$	Velocidad en la tubería del colector	$6.3081 \times 10^{-3} \left[ \frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$
$D_0$	Diámetro de la tubería del colector	$0.116 \text{ [m]}$
$\dot{q}_0$	Flujo de calor característico	$184.9188 \left[ \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \right]$
$\omega$	Frecuencia de la señal senoidal	$1.15 \times 10^{-5} \left[ \text{s}^{-1} \right]$

## 5.1 Tiempos mínimos de enfriamiento

Los perfiles de temperatura en el primer elemento de construcción se generan a partir de considerar que la relación de aspecto,  $\hat{H}_0$  del primer elemento presenta un valor fijo de 0.7. Además se fijaron los valores de los parámetros adimensionales  $\kappa = 100$  y  $\phi_0 = 0.1$ , definidos en la Ec.(2.7) para diferentes valores de la variable temporal  $\tau$  con el objetivo de generar las curvas de las temperaturas en las direcciones  $\chi$  y  $\eta$ . Para generar las gráficas anteriores es necesario determinar los valores propios con la ayuda de la Ec.(2.33), la solución de la ecuación anterior es fácilmente determinada mediante la aplicación del método de Newton-Rhpson [43]. Para los valores de los parámetros adimensionales dados, los valores propios presentan la siguiente relación  $\beta_m = (2m - 1)\beta_1$  donde  $\beta_1$  es el primer valor propio. La relación anterior esta determinada por la periodicidad de la función tangente que define los valores propios característicos del problema. En la Figura 5.1, se muestra la temperatura adimensional del fluido  $\theta_f$ , a lo largo de la longitud adimensional del elemento para diferentes valores de la variable temporal.

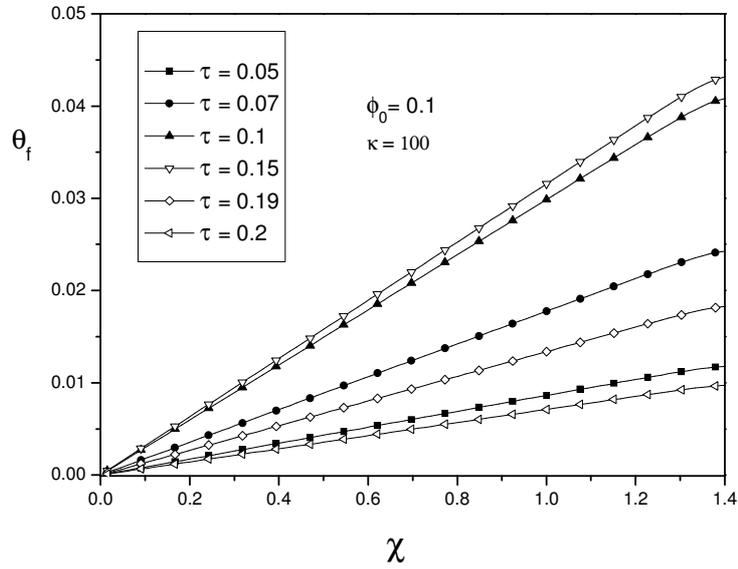


Figura 5.1: Temperatura  $\theta_f$  como función de la variable dimensional  $\chi$ , para diferentes valores de la variable temporal  $\tau$ .

De la figura anterior se puede observar la temperatura del fluido presenta un comportamiento oscilatorio en el tiempo. Como ilustración, para tiempos característicos de  $\tau = 0.05$  y el  $\tau = 0.2$ , los perfiles de temperatura presentan además del mismo comportamiento valores muy semejantes; este comportamiento es una consecuencia directa de la señal solar periódica que tiene lugar en la cavidad rectangular del elemento constructal.

Podemos apreciar de la figura anterior que para un valor fijo de la variable temporal  $\tau$  la temperatura adimensional a lo largo de la coordenada adimensional  $\chi$  se incrementa a través del elemento constructal como consecuencia del calentamiento del fluido. Con el fin de mostrar la influencia que tiene el parámetro geométrico  $\phi_0$ , en la Figura 5.2 se le asigna un valor diferente; en este caso  $\phi_0 = 0.001$ . Los valores de la temperatura adimensional son ligeramente mayores que los presentados en la Figura 5.1 para valores de  $\tau < 0.1$ . A su vez para tiempos  $\tau \geq 0.1$ , se presentan valores mayores; este comportamiento esta ligado a que el parámetro  $\phi_0$  es una relación del diámetro y la altura del elemento constructal. El volumen de la tubería puede expresarse en función de  $\phi_0$  de la siguiente manera,  $V = \pi R_0^2 L_0 = (\pi H_0^2 L_0) \phi_0^2$ . Como se mostrará mas adelante, dicho parámetro adimensional tiene una influencia notoria en la cavidad de convección del elemento constructal.

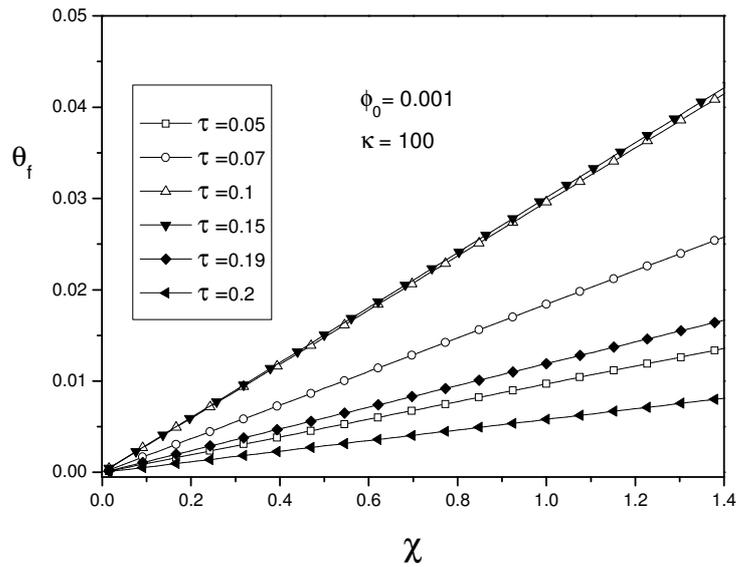


Figura 5.2: Temperatura  $\theta_f$  como función de  $\chi$ , para diferentes tiempos  $\tau$  y un valor de  $\phi_0 = 0.001$

De las figuras anteriores se usó un valor fijo del parámetro  $\kappa$ . En este parámetro como se recordará, incluye la relación de las conductividades térmicas del fluido y del aire, junto con el número de Péclet; ahora bien para un valor de  $\kappa = 100$  y  $k_f/k \sim 1$ , entonces se tiene un número de Péclet pequeño. Este número adimensional al definirse como una función de la velocidad en el tubo, puede entonces ocasionar que el fluido fluya más lentamente, facilitando la transferencia de calor como se verá más adelante. Similarmente, el comportamiento de la temperatura en el fluido, a lo largo de la longitud adimensional  $\chi$ , presenta el mismo comportamiento periódico, siendo imperceptible la influencia del parámetro geométrico  $\phi_0$ .

En las Figuras 5.3 y 5.4 se muestra el carácter transitorio de los perfiles de temperatura en la cavidad del primer elemento de construcción y concretamente evaluados en la parte superior de dicho elemento en  $\eta = \tilde{H}_0/2$ . En ambas Figuras se muestra el comportamiento de la temperatura de la cavidad llena de aire a lo largo de un día de exposición solar, señal modelada de la siguiente manera  $\dot{q} = \dot{q}_0 \text{sen}(\omega t)$ . Cada figura presenta dos gráficas, a) y b). En la Figura 5.3 a) se aprecia la temperatura adimensional de la cavidad  $\theta$ , como una función de la variable temporal  $\tau$ , para diferentes valores del parámetro  $\kappa$ , mientras que en la 5.3 b) se presenta un acercamiento del recuadro indicado en la Figura 5.3 a) con el fin de apreciar las diferencias de los perfiles de temperatura.

En la Figura 5.3 a) se presenta el comportamiento de la temperatura adimensional para un valor del parámetro geométrico de  $\phi_0 = 0.1$ . En esta figura se tiene que para un valor del tiempo  $\tau \sim 0.11$ , la temperatura decrece para completar un ciclo de calentamiento-enfriamiento de la cavidad llena de aire. En la Figura 5.3 b) se aprecia que para el intervalo de  $1 \leq \kappa \leq 10$ , el perfil de temperatura tiene una variación muy pequeña, en cambio para un valor de  $\kappa = 100$  la temperatura presenta un valor mayor.

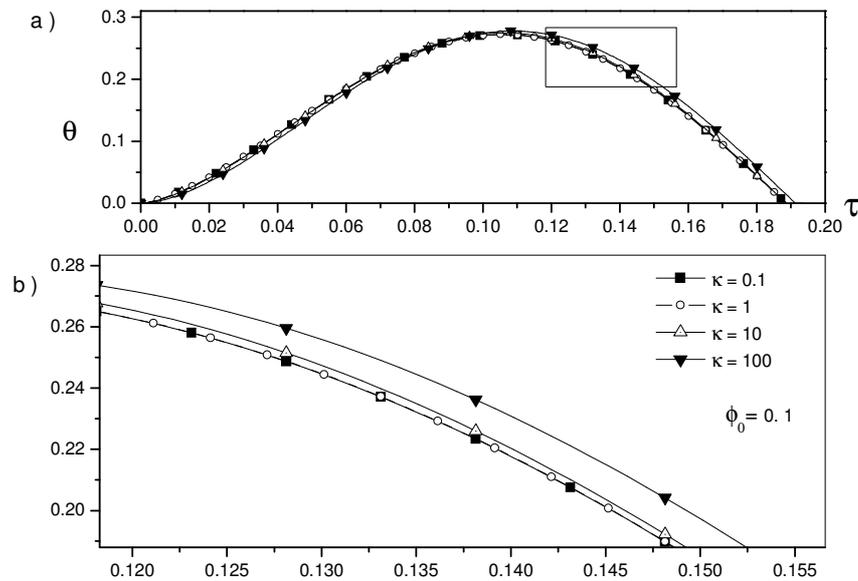


Figura 5.3: Temperatura adimensional del aire,  $\theta$  en función de la variable temporal  $\tau$ , a) perfil de temperatura completo, b) detalle de la temperatura donde se evidencia el efecto del parámetro  $\kappa$

Se observa la influencia que tiene el número de Péclet en el parámetro  $\kappa$ , ya que al presentarse un  $Pe \ll 1$ , se obtendrá un valor de  $\kappa$  mayor, para un valor muy pequeño del  $Pe$ , se tendría la situación de un fluido prácticamente estático y el acumulamiento de calor por parte del fluido es mayor. En este se cumple la situación de enfriamiento de la cavidad, a partir de variar el parámetro  $\kappa$ .

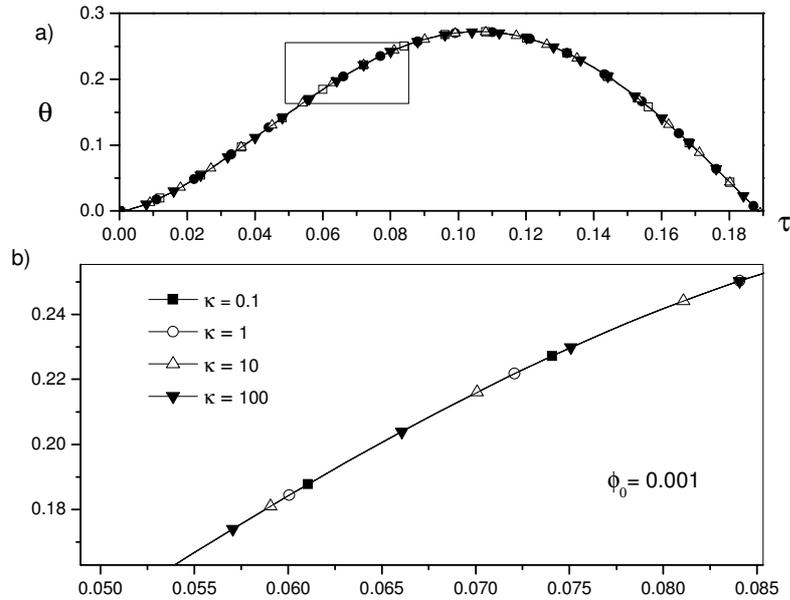


Figura 5.4: Temperatura adimensional del aire,  $\theta$  en función de la variable temporal  $\tau$ , a) perfil de temperatura completo, b) detalle de la temperatura donde se evidencia el efecto del parámetro  $\kappa$

En las Figuras 5.4 a) y b) se presentan los perfiles de temperatura en la cavidad para un valor de  $\phi_0 = 0.001$  y diferentes valores de  $\kappa$ ; el perfil de temperatura no presenta diferencias significativas para diferentes valores de  $\kappa$ . En la Figura 5.4 b) se puede apreciar que las diferencias son prácticamente nulas.

El comportamiento de la temperatura es una consecuencia directa de la influencia del parámetro  $\phi_0$ , ya que se presenta una cavidad con mayor volumen las variaciones de temperatura no se ven influenciadas por el efecto del paso del fluido que circula en la tubería de diámetro  $D_0$ . A diferencia de un valor mayor de  $\phi_0$ , que como se mostro anteriormente, las diferencias de temperatura son mucho mayores, este efecto puede prevalecer en cada nivel de construcción de la red, determinando su tamaño óptimo a partir de la variación de los parámetros característicos del problema.

En las figuras siguientes se presenta el comportamiento para el perfil de temperaturas en la tubería, para diferentes valores del parámetro  $\kappa$ , se presentan también diferencias para diferentes valores del parámetro  $\phi_0$ .

En las Figuras 5.5 y 5.6 se presentan el perfil de temperatura en la tubería evaluado en la coordenada adimensional  $\chi = 1/\tilde{H}_0$  ( $x = L_0$ ), coordenada que coincide con la salida del elemento constructal, para valores del parámetro geométrico adimensional de  $\phi_0 = 0.1$  y  $\phi_0 = 0.001$ . En la Figura 5.5 a) se aprecian los perfiles de temperatura en el tiempo para diferentes valores de  $\kappa$ . Específicamente para un valor de  $\kappa = 100$  se observa que hay una diferencia mayor en el valor de la temperatura respecto a los otros valores del parámetro  $\kappa$ . En la Figura 5.5 b) se observa un acercamiento del recuadro en la Figura 5.5 a), donde claramente se aprecia un incremento de la temperatura en un tiempo  $\tau \sim 0.025$ .

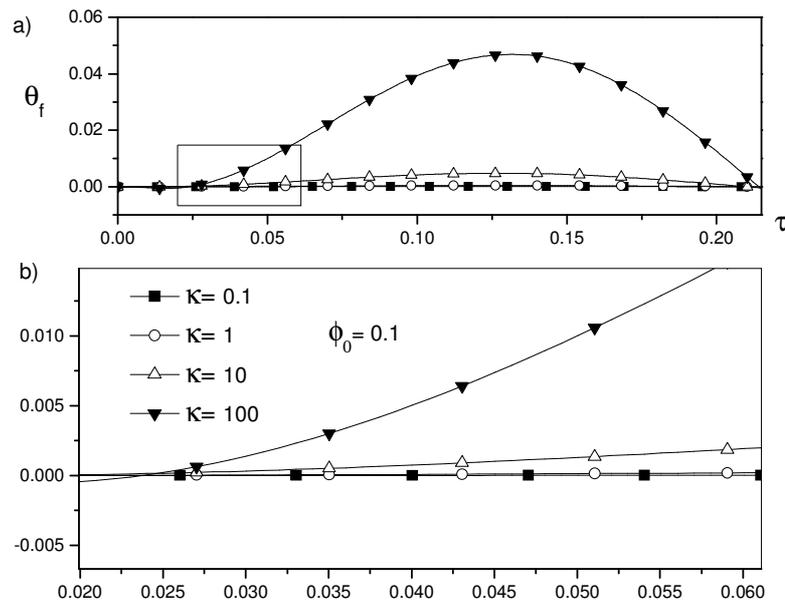


Figura 5.5: Temperatura adimensional del fluido como función de la variable adimensional temporal  $\tau$ , para  $\phi_0 = 0.1$  y diferentes valores del parámetro  $\kappa$

La importancia física del parámetro  $\kappa$  se refleja a través de que para valores grandes de este parámetro es equivalente a la inclusión de insertos de alta conductividad efectiva representada por este parámetro. En este caso se refleja directamente en que el fluido que circula por la tubería de diámetro  $D_0$ , con conductividad térmica diferente a la de la cavidad y cinemáticamente identificado con una velocidad característica, deja ver la influencia de los insertos como una herramienta efectiva para el enfriamiento de un elemento volumétrico. Los resultados obtenidos en el fluido, para valores determinados de los parámetros  $\kappa$  y  $\phi_0$ , son consistentes con las Figuras 5.3 y 5.4 y dichos resultados de temperatura a la salida del primer elemento pueden considerarse como un criterio de diseño para obtener un valor máximo de temperatura, que es la función principal de un colector solar.

En la Figura 5.6 se puede apreciar un comportamiento similar a la figura anterior. En esta aparece un incremento de temperatura para un valor de  $\kappa = 100$ , con un valor fijo de  $\phi_0 = 0.001$ . De lo anterior se puede decir que la influencia del parámetro  $\phi_0$ , es prácticamente irrelevante para el comportamiento de la temperatura en el fluido, ya que dicho parámetro está definido como  $\phi_0 = R_0/H_0$  y en este caso, siempre se cumple que la longitud  $H_0$  siempre es mayor que  $R_0$ .

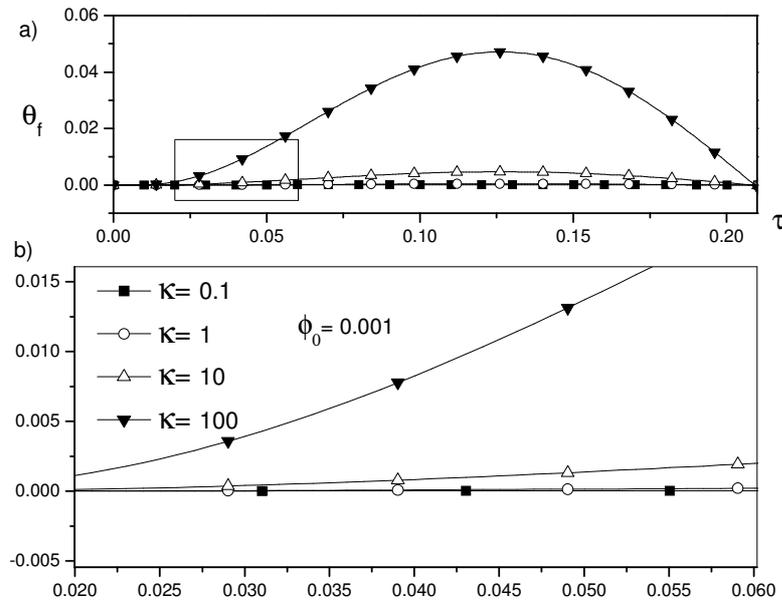


Figura 5.6: Temperatura adimensional del fluido como función de la variable adimensional temporal  $\tau$ , para  $\phi_0 = 0.001$  y diferentes valores del parámetro  $\kappa$

Con el fin de encontrar un tiempo óptimo de calentamiento-enfriamiento para diferentes valores de  $\hat{H}_0$ , se considera que la temperatura toma un valor muy pequeño. Los resultados se muestran en Figura 5.7, se aprecia el comportamiento de la variable temporal  $\tau$  para valores de  $\hat{H}_0$ . El valor particular considerado de la temperatura es denotado por  $\theta = \varepsilon_1$  y se basa en el carácter periódico de la señal. Por consiguiente, es indispensable encontrar el tiempo mínimo de enfriamiento-calentamiento, para valores determinados de  $\hat{H}_0$  para que la temperatura de la cavidad en la parte superior,  $\theta_{\text{sup}} = \theta(\hat{H}_0, \tau)$ , sea prácticamente nula, esto significa que la temperatura de la cavidad  $T_a$ , tienda al valor de la temperatura inicial de todo el elemento de construcción,  $T_0$ , para valores específicos de  $\hat{H}_0$ . Cabe mencionar que para cada valor de  $\hat{H}_0$ , es necesario determinar los valores propios, definidos mediante la Ec.(2.33), la solución de dicha ecuación trascendental se obtiene a partir de aplicar el método de Newton-Rhapson.

En la Figura 5.7 se puede apreciar el tiempo mínimo de enfriamiento para un valor de  $\phi_0 = 0.001$ . Como se puede observar, la curva del tiempo presenta un mínimo con respecto a la variable geométrica  $\hat{H}_0$ , para un valor de  $\hat{H}_0 \approx 0.1275$  se tiene un valor de  $\tau_{\min} \approx 2 \times 10^{-4}$ .

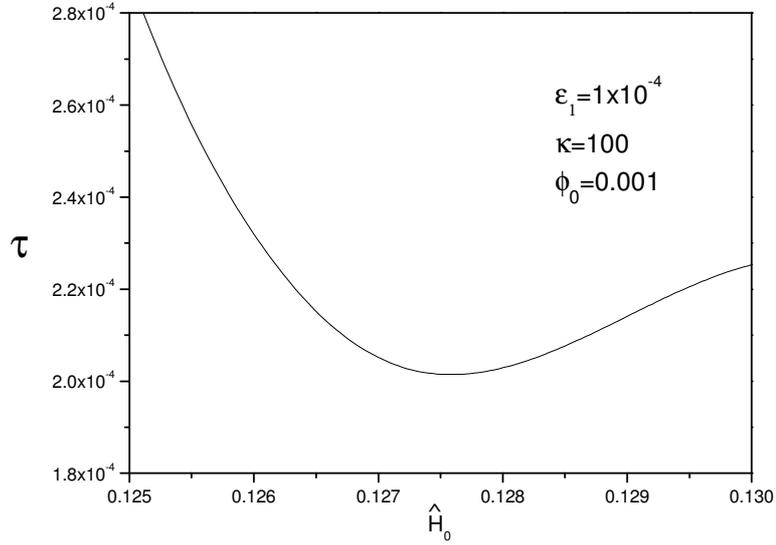


Figura 5.7: Tiempo mínimo de enfriamiento para un valor de  $\phi_0 = 0.001$

En la Figura 5.8 se puede observar un patrón similar del tiempo para un valor diferente del parámetro  $\phi_0$ . En este caso, el tiempo mínimo de enfriamiento presenta un valor de  $\tau \approx 1 \times 10^{-4}$  para un valor de  $\hat{H}_0 \sim 0.350$ , con la particularidad de que el tiempo mínimo prevalece para el intervalo utilizado sobre  $\hat{H}_0$  y que se asocia al tamaño del primer elemento de construcción. Comparando las últimas dos figuras se puede percibir claramente que para valores pequeños del parámetro  $\phi_0$  se reduce también el valor del parámetro  $\hat{H}_0$  ya que el tiempo mínimo no sufre cambios importantes. Matemáticamente esto es equivalente a encontrar las raíces de la relación entre la variable temporal  $\tau$  y  $\hat{H}_0$ , pero la parte más relevante radica en que los tiempos de enfriamiento o calentamiento son insensibles a la geometría local aquí representada por el parámetro  $\phi_0$ , no así a la escala geométrica global denotada por el parámetro  $\hat{H}_0$ .

Este criterio de minimizar el tiempo, reportado en [25] y mencionado en los antecedentes, no ha sido totalmente desarrollado por la teoría constructal. El criterio anterior permite la optimización de sistemas dinámicos, con lo que hace posible entonces determinar un primer elemento constructal optimizado, para el que se puede obtener información fundamental de los tiempos óptimos, tamaños, y permitiendo la modulación del proceso de desalajo de calor modificando los elementos que fluyen en la tubería en el primer elemento constructal.

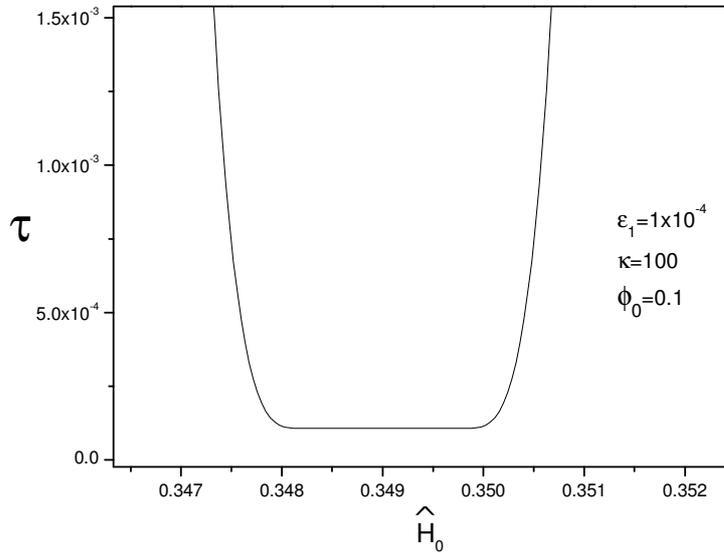


Figura 5.8: Tiempo mínimo de enfriamiento para un valor de  $\phi_0 = 0.1$

Además este enfoque o punto de vista muestra la posibilidad de aplicar una técnica de optimización completamente diferente a lo que se ha reportado con respecto a la teoría constructal. Los resultados del tiempo mínimo de enfriamiento son producto de un proceso numérico, en el que se calcula para cada situación los valores propios determinados por la ecuación trascendental, siendo este un proceso complejo de optimización dada la naturaleza de la solución obtenida.

## 5.2 Resistencia térmica en una red geométrica de disco.

En esta sección se presentan los resultados de las distribuciones de temperatura en la dirección vertical y horizontal, además de la resistencia térmica para una geometría de disco en un arreglo radial, en esta formulación no se ha reportado una metodología para determinar las resistencias térmicas de arreglos para mas de un nivel de ramificación y que permita a su vez estimar la resistencia total del arreglo. La teoría constructal exige definir la resistencia térmica a partir de los perfiles de temperatura en la dirección  $x$ ,  $y$  del primer elemento constructal, para una configuración geométrica de disco con un arreglo radial de tuberías se presentan a continuación los perfiles de temperatura en ambas direcciones. La Figura 5.9 muestra la distribución de la temperatura en la dirección horizontal del elemento constructal y tomando en cuenta que el perfil de temperaturas se define por la Ec.(3.19).

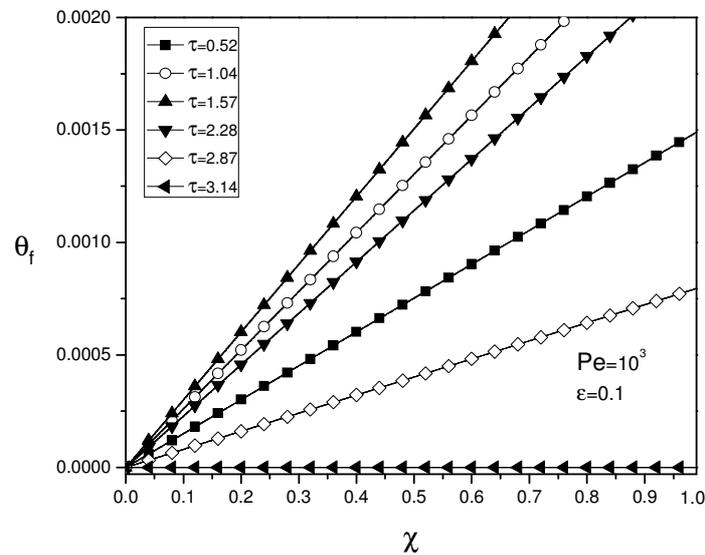


Figura 5.9: Perfil de temperaturas del fluido, en la dirección  $\chi$  para diferentes valores de la variable temporal  $\tau$

En esta figura se aprecia la variación de la temperatura en la dirección longitudinal  $\chi$  para diferentes valores de la variable temporal  $\tau$ , un valor del número de Péclet de  $Pe = 10^3$  y un valor de la relación de esbeltez de  $\varepsilon = 0.1$ . También, se puede observar que la temperatura presenta un comportamiento oscilatorio. Este comportamiento es similar a los resultados anteriores de un elemento constructal rectangular y el aumento de la temperatura máxima se presenta para un tiempo  $\tau = 1.57$ , que coincide con el valor máximo de la señal transitoria. Conforme se avanza en la longitud del tubo se presenta un incremento de la temperatura de la entrada a la salida del elemento.

La Figura 5.10 muestra la distribución de temperaturas en la dirección vertical y definida mediante la Ec.(3.10). Dado que esta ecuación proporciona, la temperatura de la cavidad a lo largo de la dirección vertical, considerando la temperatura del fluido, evaluado a la salida del elemento constructal de sección circular, el comportamiento de la temperatura en la cavidad presenta un caracter oscilatorio debido a la señal transitoria.

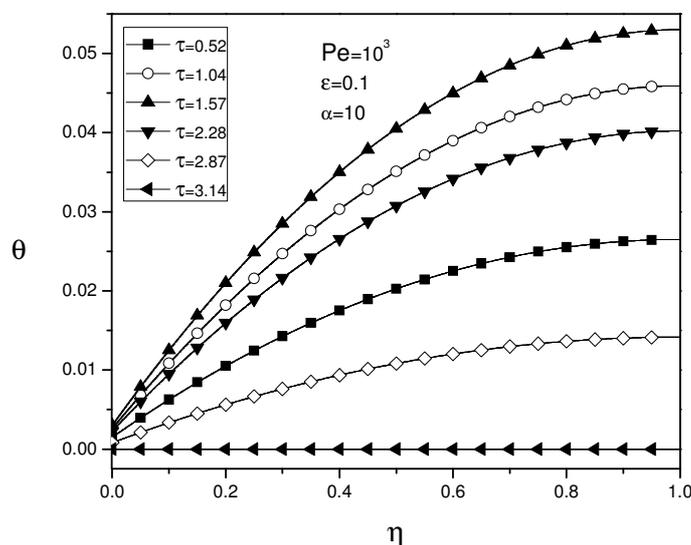


Figura 5.10: Distribución de temperaturas en la dirección vertical  $\eta$  para diferentes valores de  $\tau$

En las Figuras 5.9 y 5.10, se observa un aumento en la temperatura para ambas coordenadas. El comportamiento de los perfiles de temperatura, prevalecen en cada una de las consideraciones teóricas desarrolladas en los capítulos siguientes para un elemento constructal en forma de disco. Es decir, el principio de definición de la resistencia térmica es aplicado para los diferentes desarrollos teóricos. La teoría constructal presenta la característica de ser recursiva en sus métodos de optimización.

La resistencia térmica de un arreglo radial en función de los parámetros adimensionales característicos del problema se define mediante la Ec.(3.24), en esta expresión la resistencia térmica esta evaluada en los limites del elemento constructal, de tal manera que los perfiles de temperatura son evaluados en la coordenada  $\chi = 1/\hat{H}_0, \eta = \hat{H}_0$ . El comportamiento de la resistencia térmica para un arreglo radial en función del número de Péclet, se puede observar en la Figura 5.11, se puede apreciar que la resistencia térmica decrece conforme aumenta el número de Péclet hasta un valor de la resistencia térmica de  $\tilde{R}_0 \sim 0.03$ , en una primera aproximación la resistencia térmica no presenta un valor mínimo para el arreglo radial de tuberías. Una de las ventajas de la presente formulación es que permite definir resultados teóricos como la relación de aspecto del elemento constructal en función de los parámetros físicos y geométricos propios del problema.

Esta primera formulación no contempla el efecto de la resistencia hidráulica en el transporte del fluido que circula en la tubería de diámetro  $D_0$ , la resistencia hidráulica es un elemento importante a considerar dado que lo deseable es tener una menor resistencia térmica a partir de incrementar la complejidad geométrica de la red de tuberías, pero lo anterior implica un aumento en la resistencia hidráulica.

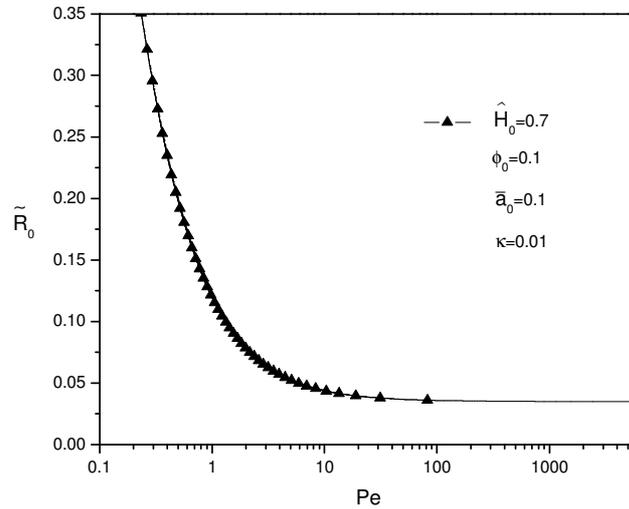


Figura 5.11: Resistencia térmica para un arreglo radial, para un valor de  $\hat{H}_0 = 0.7$

La formulación básica para una geometría de disco permite definir a partir de la resistencia térmica un valor óptimo de la razón de aspecto  $\hat{H}_{0 \text{ opt}}$  del elemento constructal; con este resultado teórico se puede definir una resistencia térmica óptima en función de los parámetros adimensionales del problema, definida mediante la Ec. (3.26). Tal como se puede apreciar en la Figura 5.12, el comportamiento de la resistencia térmica óptima aumenta conforme aumenta el número de Péclet. Sustituir el resultado teórico  $\hat{H}_{0 \text{ opt}}$  en la expresión correspondiente a la resistencia térmica no implica obtener un valor óptimo de la resistencia térmica. En este caso, el comportamiento deseable de la resistencia térmica es que presente un valor decreciente ante el aumento del número de Péclet.

En esta formulación, se presenta el resultado de la relación de aspecto óptima  $\hat{H}_{0 \text{ opt}}$ , este resultado se ha reportado que es ya en sí un resultado óptimo, puesto que únicamente cumple con ser una relación de aspecto muy pequeña, que cumple con la condición de esbeltez del primer elemento de construcción, además de no ser reportado el comportamiento de la resistencia térmica óptima respectiva, lo anterior puede ser consultado en las siguientes referencias [20,21,24].

En el presente desarrollo se define la resistencia térmica únicamente para un elemento constructal con un arreglo de tuberías radial. Con ayuda de la resistencia térmica se definen resultados como la razón de aspecto óptimo y el número de sectores en función de los parámetros adimensionales del problema.

La figura correspondiente a la resistencia térmica óptima para el resultado teórico de  $\hat{H}_{0 \text{ opt}}$ , es la siguiente;

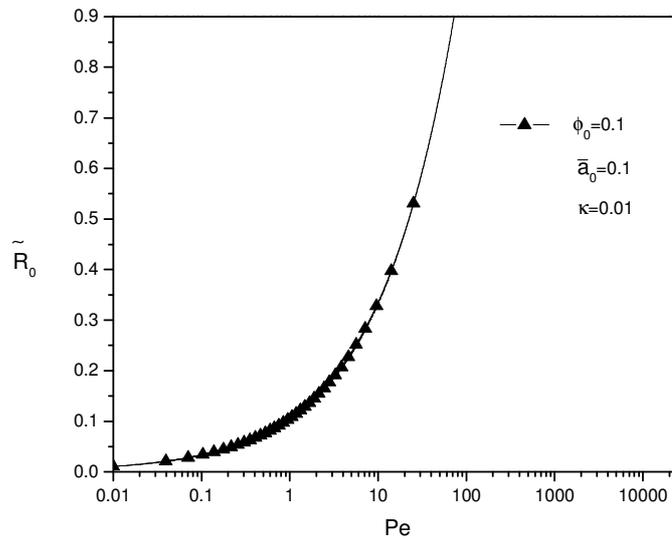


Figura 5.12: Resistencia térmica óptima para el resultado teórico de  $\hat{H}_{0 \text{ opt}}$

La definición de una red de tuberías optimizada necesita incluir diversos elementos como el número de tubos iniciales que entran al dispositivo de colección, los ángulos entre tuberías y la potencia necesaria para desplazar al fluido en el elemento constructal. La potencia definirá la resistencia hidráulica, elemento que es fundamental para arreglos geométricos de tuberías mas complejos. En la siguiente sección de resultados se va a explorar la influencia de un número finito  $n$  de ramificaciones para un primer nivel de ramificación, transportando al fluido desde el centro del elemento en forma de disco, hasta un número finito de puntos en la periferia. Posteriormente se desarrollará los elementos necesarios para definir una red constructal con un nivel de ramificaciones mayor incluyendo la resistencia hidráulica.

### 5.3 Resistencia térmica, $n$ -ramificaciones.

El arreglo de ramificaciones en una geometría de disco consta de un sector central de área  $A_0$ , con una tubería central de diámetro  $D_0$ , que se ramifica en sectores de área  $A_1$ , en un número  $n$  de tubos de diámetro  $D_1$ . Los resultados obtenidos para un número  $n$  de ramificaciones, son la resistencia térmica en función del parámetro geométrico  $\phi_1$ , que es la relación geométrica entre el ancho del sector y el radio del tubo del segundo elemento de construcción. La resistencia térmica varía conforme se varía el número de ramificaciones,  $n$ ; cabe mencionar que la resistencia térmica en esta formulación, resulta ser muy sensible a los valores paramétricos, por lo que las figuras siguientes, se obtuvieron a partir de determinar valores fijos de dichos parámetros.

Se presentan los resultados de la resistencia térmica, definida por la Ec.(3.1), para diferentes valores de ramificaciones  $n$ , en función de  $\phi_1$ .

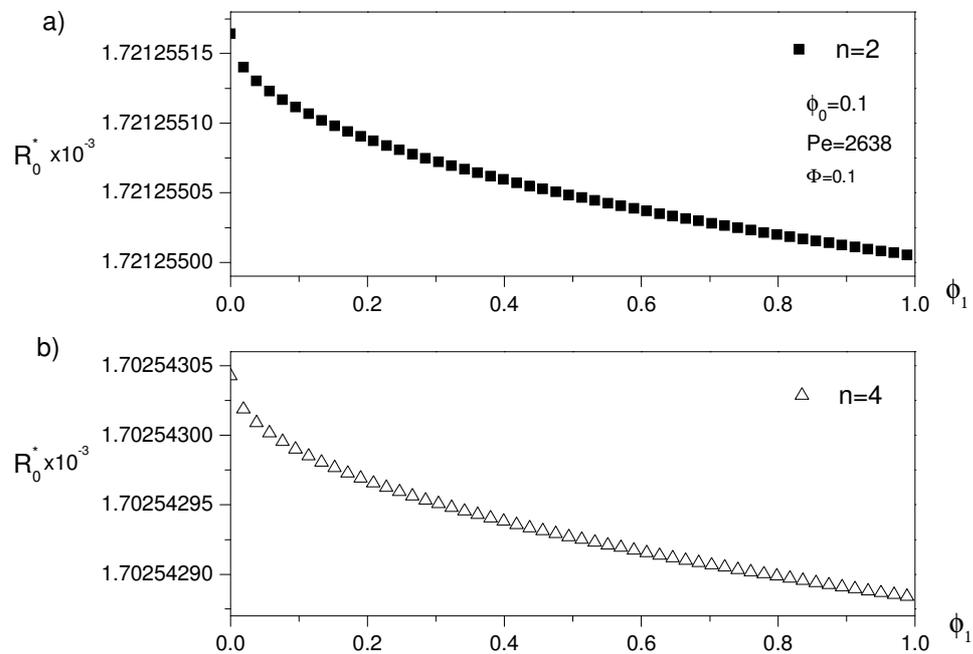


Figura 5.13: Variación de la resistencia Térmica  $R_0^*$  con respecto a  $\phi_1$ , a) para  $n = 2$  b) para  $n = 4$

En la Figura 5.13 se muestra la resistencia térmica correspondientes a un valor de  $n = 2$  y  $n = 4$ ; ambas curvas se obtuvieron con los valores fijos de  $\phi_0 = 0.1$ ,  $\Phi = 0.1$  y  $Pe = 2638$ , el valor del número de Péclet se calculó a partir de datos generales de la velocidad en una tubería de un colector solar plano convencional.

En la Figura 5.13 a), se observa que la resistencia térmica presenta un valor aproximado de  $1.72125510 \times 10^{-3}$ , para  $\phi_1 \cong 0.2$ , conforme aumenta dicha variable, la resistencia térmica decrece. El mismo comportamiento se observa para una ramificación de cuatro ramas,  $n = 4$ , como se puede apreciar en Figura 5.13 b), el valor de la resistencia térmica tiende asintóticamente a un valor aproximado de  $1.702 \times 10^{-3}$  para un valor de  $\phi_1 \cong 0.2$ . En la Figura 5.14 se observa el mismo comportamiento asintótico de la resistencia térmica adimensional  $R_0^*$ , conforme aumenta el número de ramificaciones  $n$ , la resistencia térmica presenta valores cada vez menores. Cabe mencionar que obtener el comportamiento de la resistencia térmica para valores de  $\phi_1$  mayores a la unidad, carece de sentido físico, ya que significaría que para un valor de  $\phi_1$ , mayor a la unidad, se tendría un tubo de radio  $R_1$ , mayor al ancho  $H_1$  del segundo elemento de construcción. En la Figura 5.14 a), se observa que para  $n = 6$ , se tiene un valor de la resistencia térmica para  $\phi_1 = 0.5$  de  $\sim 1.67973 \times 10^{-3}$  que comparado con la la Figura 5.14 b), correspondiente a  $n = 8$ , es mucho mayor.

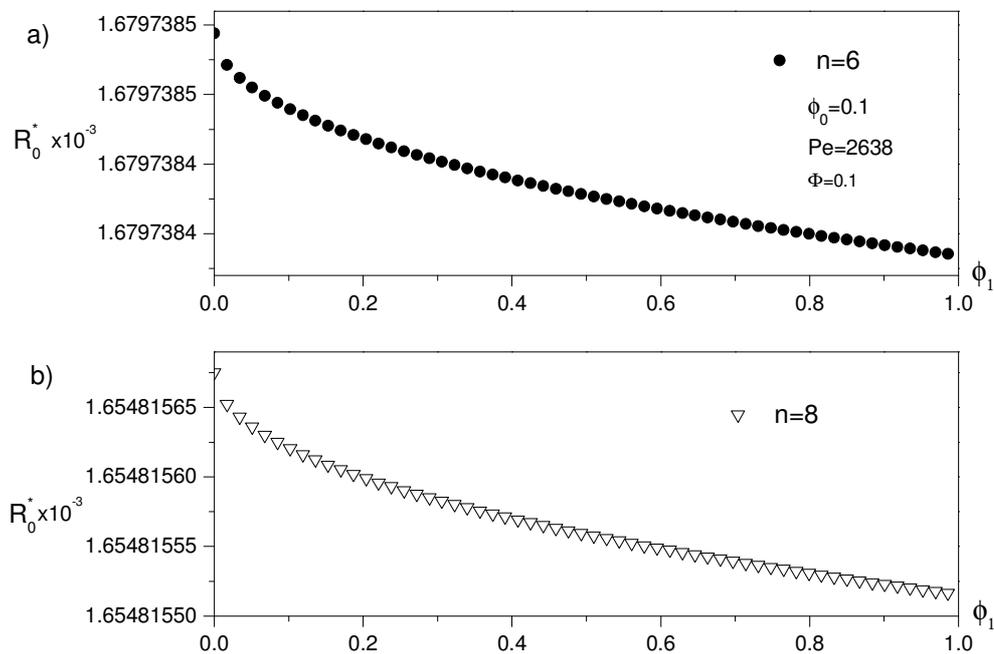


Figura 5.14: Variación de la resistencia térmica  $R_0^*$ , en función de  $\phi_1$ , para a)  $n = 6$  y b)  $n = 8$

Para un mayor número de ramificaciones, la resistencia térmica presenta siempre un valor decreciente, esta formulación permite definir un primer nivel de ramificación incrementando la de la red, esta formulación no contempla la resistencia hidráulica pero presenta la ventaja de definir una relación de crecimiento entre los diámetros en función de los parámetros adimensionales característicos del problema diferente al resultado conocido como la ley de Murray [22].

En la Figura 5.15, se muestran los resultados de la resistencia térmica para un número de ramificaciones mayor respecto al caso anterior. En la Figura 5.15 a) se aprecia que el valor de la resistencia térmica presenta un valor mucho menor que para el caso de  $n = 8$ . Por otro lado, en la Figura 5.15 b), con un número mayor ramificaciones ( $n = 12$ ), se presenta de igual manera, valores cada vez menores de la resistencia térmica.

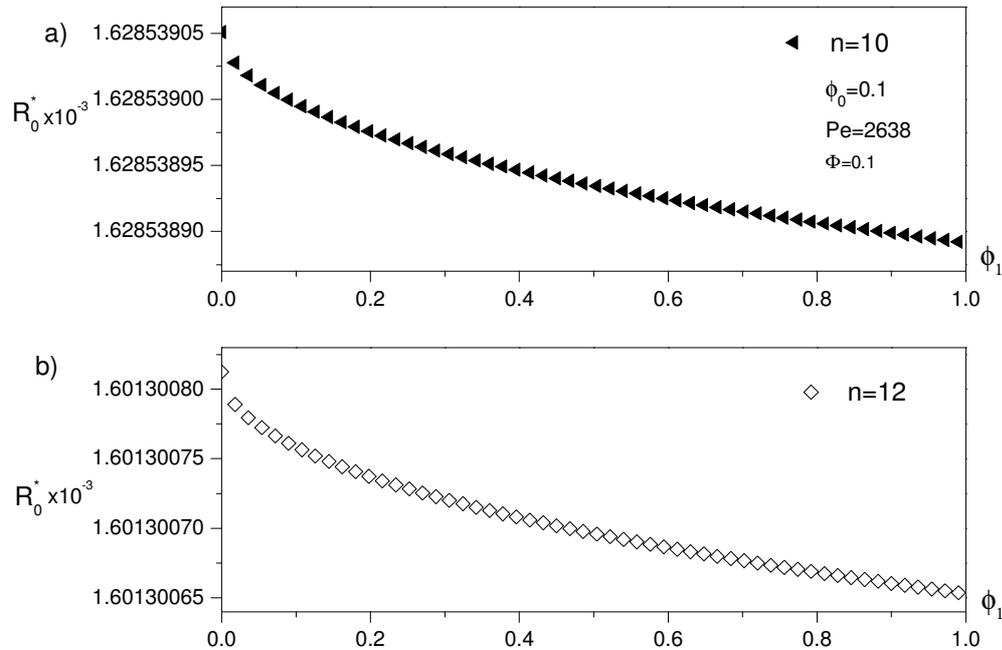


Figura 5.15: Variación de la resistencia Térmica  $R_0^*$  con respecto a  $\phi_1$ , para un número de ramificaciones  $n$ , a)  $n = 10$  y b)  $n = 12$

El decremento de la resistencia térmica se da por la influencia del número de ramificaciones, ya que para incrementos de  $\Delta n = 2$ , se presentan decrementos de la resistencia térmica  $\Delta R_0^* \cong 0.02$ . Como se puede observar, en los resultados anteriores, el comportamiento asintótico es una característica central de la resistencia térmica. Un resultado que puede definirse en esta formulación basada en el área ocupada por el arreglo de tuberías y el área del sector, es el comportamiento de la resistencia térmica en función del número de ramificaciones  $n$ , que puede apreciarse en la Figura 5.16.

En la Figura 5.16, se observa que para un valor fijo de  $\phi_0 = 0.1$ , la resistencia térmica en función del número de ramificaciones  $n$ , presenta valores crecientes hasta  $n = 1$  y para valores mayores a este valor de  $n$  siempre es decreciente. Es importante mencionar que obviamente valores de  $n$  menores a 1 no tienen significado físico. De ahí que la región de valores crecientes de la resistencia pueden ser eliminados de la discusión. Aún cuando no se presenta gráficamente en la Figura 5.16, la tendencia matemática de la resistencia térmica adimensional llega a tomar un valor nulo alrededor de  $n = 115$ . Sin embargo, dicho número como se verá en la siguiente figura aparentemente carece de significado físico, pues por las relaciones obtenidas en esta formulación se tiene que la relación de diámetros,  $\tilde{D}$ , es una función de  $n$ . La Figura 5.16, muestra únicamente la resistencia térmica en un intervalo del número de ramificaciones de  $0 \leq n \leq 20$ .

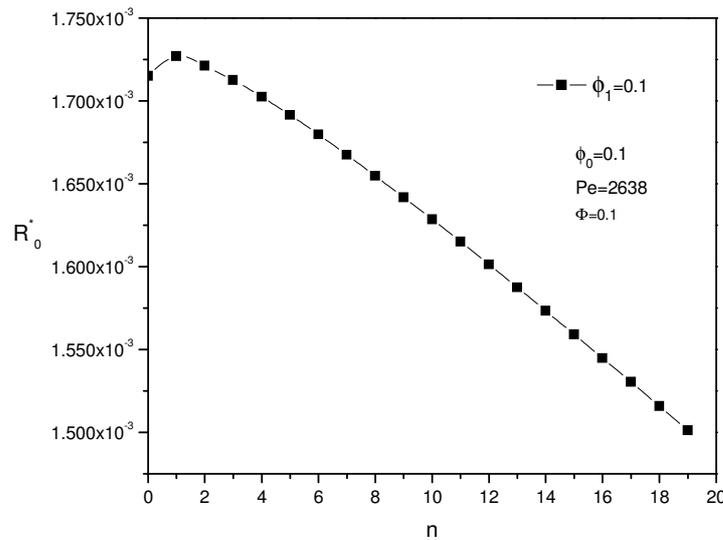


Figura 5.16: Variación de la resistencia térmica  $R_0^*$ , con respecto al número de ramificaciones  $n$

Cabe mencionar que para valores de  $n$  muy grandes se presentan valores decrecientes de la resistencia térmica, aunque un número muy grande de ramificaciones presenta limitaciones físicas en el tamaño de los elementos de construcción. La relación de los diámetros definida en el presente desarrollo, presenta una característica ya que la proporción entre los diámetros anterior y posterior es una expresión en función de parámetros propios del problema y el número de ramificaciones  $n$ . La relación anterior esta definida mediante la Ec.(3.54), esta expresión, a diferencia de la ley de Murray, presenta mas grados de libertad, ya que además de estar en función del número de ramificaciones, esta en función del número de Péclet y de parámetros físicos.

La variación del diámetro adimensional,  $\tilde{D}$ , con la variable  $\phi_1$  se presenta en la Figura 5.17, donde se aprecia que conforme aumenta el número de ramificaciones  $n$ , la relación adimensional  $\tilde{D}$  tiende a un valor asintótico. Es muy interesante observar que la relación adimensional,  $\tilde{D}$ , tiende a tomar el valor del número de ramificaciones; es decir, para un valor de ramificación,  $n = 2$ , la relación de diámetros  $\tilde{D}$ , tiende a un valor de  $\tilde{D} \cong 2$ . Dicha gráfica se obtuvo fijando los siguientes valores de los parámetros adimensionales,  $\Phi = 0.1$ ,  $\phi_0 = 0.1$  y  $Pe = 2638.38$ . En consecuencia los resultados de esta figura permiten afirmar que casos críticos de ramificaciones tan grandes como  $n = 115$  como el que se comentó previamente, pueden limitar geoméricamente el sistema.

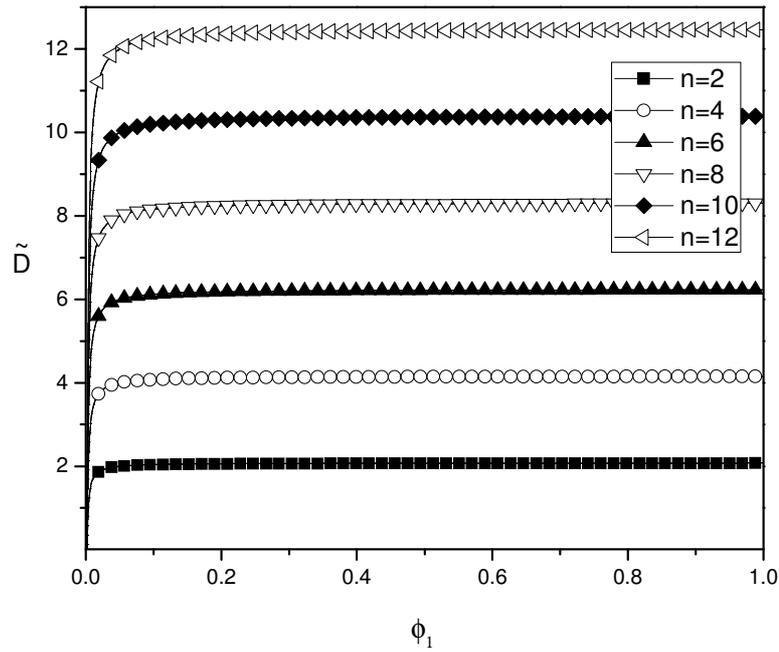


Figura 5.17: Variación de la relación adimensional  $\tilde{D}$  con respecto a  $\phi_1$ , para diferentes valores del número de ramificaciones  $n$

## 5.4 Resistencia térmica, dicotomía

En esta sección se presentan los resultados obtenidos de asumir un colector solar en forma de disco, con una red de tuberías que presenta la condición de dicotomía; es decir, que el tubo inicial de diámetro  $D_0$ , se ramifica en otros dos tubos de diámetro  $D_1$ ; aplicando a su vez la ley de Murray, que como se mencionó en el capítulo correspondiente, es un resultado que obtiene la teoría constructal a partir de la optimización de redes de tuberías para el transporte de un fluido. Los resultados de la temperatura en la dirección horizontal y vertical, son los mismos que los obtenidos en la primera formulación de la geometría de disco, por lo que se presentan únicamente los resultados referentes a la resistencia térmica adimensional y la potencia para diferentes niveles de ramificación.

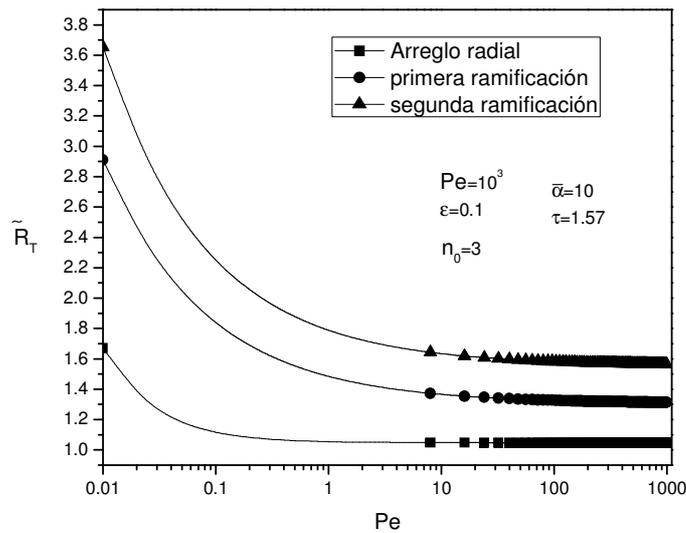


Figura 5.18: Resistencia térmica para diferentes niveles de ramificación sin considerar la analogía eléctrica

Las resistencias que se presentan en la Figura 5.18 se definen a partir de las expresiones de la resistencia térmica para cada nivel de construcción y definidas por las Ecs.(4.11), (4.21), (4.35). En cada una de las ecuaciones que definen la resistencia térmica se incluyen las expresiones de las longitudes óptimas definidas a partir de la optimización de la resistencia al flujo de cada nivel de ramificación. Como se puede apreciar en la Figura 5.18, la resistencia térmica para un arreglo radial es menor que la resistencia asociada a los diferentes niveles de ramificación. Considerando el comportamiento de cada resistencia por separado, se observa un aumento en el valor de la resistencia térmica, presentando un comportamiento asintótico conforme aumenta el número de Péclet. Cada resistencia térmica presentada en esta sección contempla el efecto del número de Nusselt promedio, pues con ayuda de este se definió una de las diferencias de temperatura necesarias para definir la resistencia térmica adimensional.

El número de Nusselt promedio, definido mediante la Ec.(4.8), presenta un aumento en su valor conforme aumenta el número de Péclet, tal como se puede apreciar en la Figura 5.19.

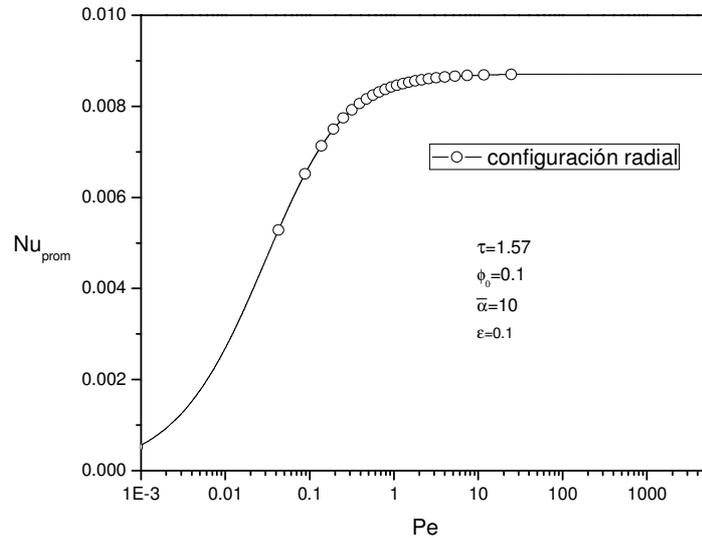


Figura 5.19: Número de Nusselt promedio en función del número de Péclet para una configuración radial de tuberías

En esta figura se observa que conforme aumenta el número de Péclet, el número de Nusselt promedio presenta un aumento gradual. Es importante mencionar que a partir de un valor de Péclet del orden de 5 o mayor el número de Nusselt ya no cambia y alcanza aproximadamente un valor asintótico de 0.009.

Los resultados obtenidos a partir de considerar la red de tuberías como un arreglo de resistencias que preservan la analogía eléctrica, [47,48], se presentan en la Figura 5.20. Aquí la resistencia térmica total de cada uno de los niveles de ramificación presenta valores diferentes para los diferentes niveles de ramificación. En particular se presenta un aumento con la resistencia térmica total para un primer nivel de ramificación y a su vez para un segundo nivel de ramificación, la resistencia disminuye. Es importante recordar, aún cuando ya se mencionó anteriormente, que en la figura anterior se tomaron en cuenta los efectos de los ángulos que comprenden cada una de las ramificaciones así como las longitudes óptimas definidas en las ecuaciones correspondientes a cada nivel de construcción. Esta característica es deseable, ya que al aumentar la complejidad del arreglo de tuberías se presenta una menor resistencia térmica, una vez definidas las resistencias térmicas, se puede entonces considerar el efecto de la potencia adimensional en cada arreglo de tuberías.

En la Figura 5.20, se considera que el número de tubos iniciales que entran al dispositivo de colección, es de  $n_0 = 3$  y un tiempo adimensional de  $\tau = 1.57$ , correspondiente al tiempo adimensional con mayor incidencia de la radiación solar. Los efectos del nivel de complejidad de la red de tuberías se reflejan en un valor de la resistencia térmica menor, tal como se puede observar para un segundo nivel de ramificación.

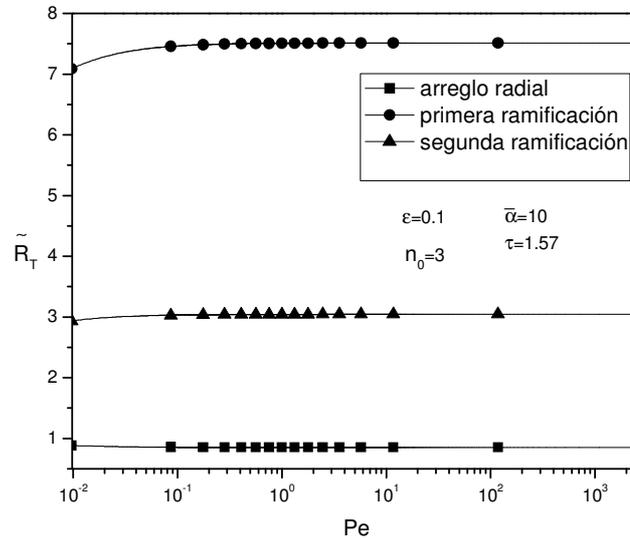


Figura 5.20: Resistencia térmica para diferentes niveles de ramificación para un fluido newtoniano para una configuración de red dicotómica

La potencia adimensional se presenta en la siguiente Figura 5.21, considerando la resistencia total mediante el uso de la analogía eléctrica. Como se puede apreciar en esta figura el comportamiento físico es el mismo que la figura anterior.

En estas curvas se incluyen el efecto de las longitudes óptimas y por tanto la ley de Murray que fue una condición necesaria para la optimización de dichas longitudes a partir de la optimización de la resistencia al flujo, definida en la Ec.(4.30); es decir, las expresiones de la potencia adimensional de cada nivel de construcción, son ya resultados óptimos para el transporte del fluido newtoniano, que a su vez estas expresiones se pueden sustituir en las correspondientes ecuaciones que describen la resistencia térmica adimensional de cada nivel de ramificación. Cabe mencionar que se incluyen los valores óptimos de cada una de las ramas de cada nivel de ramificación, de manera que la resistencia térmica puede expresarse en función de la potencia por medio del número de Péclet, mediante el método descrito en el subcapítulo 4.1.3.

En la figura correspondiente de la resistencia térmica contra potencia adimensional, se puede apreciar de forma sencilla el efecto que tiene la potencia adimensional necesaria para desplazar al fluido a lo largo de los diferentes arreglos de tuberías, siendo que presentan un valor constante conforme aumenta el número de Péclet.

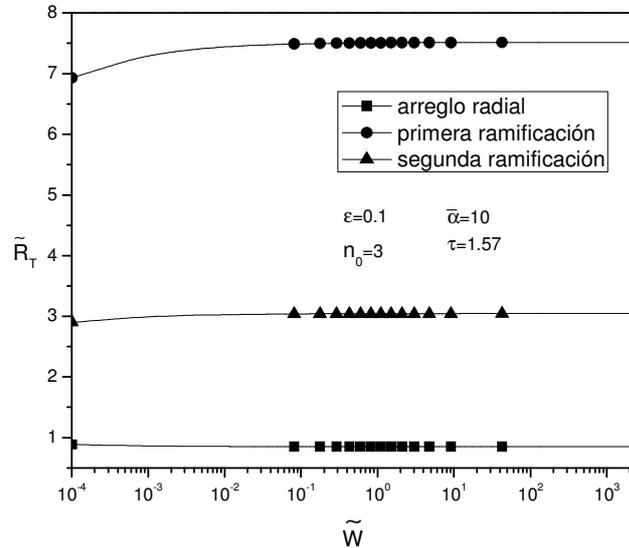


Figura 5.21: Resistencia térmica para diferentes niveles de construcción en función de la potencia adimensional

Asumir la condición de dicotomía en el arreglo de tuberías permite obtener para una geometría de disco la resistencia térmica y comportamiento ante la variación de la potencia en cada nivel de construcción. Lo anterior permite definir para una red de tuberías la obtención de expresiones para el tamaño óptimo del elemento de construcción y a su vez definir expresiones concretas de la resistencia térmica para cada arreglo de tuberías.

Una vez establecidas la metodología para definir la red de tuberías para diferentes niveles de ramificación, es posible aplicar un modelo reológico que permita dotar al colector solar de la capacidad de adaptabilidad ante la dinámica solar, que en primera aproximación se modela mediante una señal senoidal. Mediante el modelo simplificado de Phan-Thien & Tanner, se propone la adaptación del fluido no-newtoniano ante el cambio de uno de los parámetros propios del modelo reológico, dicho modelo permite definir mediante una ecuación constitutiva, un perfil de velocidad que puede ser implementado en el perfil de velocidad, que a su vez es parte de la definición de los perfiles de temperatura.

## 5.5 Resistencia térmica, modelo de SPTT

El modelo simplificado de Phan-Thien & Tanner (SPTT) define el comportamiento de un fluido viscoelástico y es posible con dicho modelo definir un perfil de velocidades para un fluido no newtoniano, a partir de considerar las simplificaciones pertinentes. Una de las ventajas que ofrece este modelo es definir los resultados relevantes como son el perfil de velocidad y el esfuerzo cortante en función de parámetros propios del modelo reológico como son el parámetro elongacional,  $\varepsilon^*$  y el número de Deborah,  $De$ ; de manera que al variar dichos parámetros, principalmente el número de Deborah, se tienen diferentes comportamientos del fluido no newtoniano. Los detalles de la obtención del perfil de velocidades, así como del esfuerzo cortante, se pueden consultar en el Apéndice D.

En la Figura 5.22 se presenta la solución para la resistencia mínima global después de una exhaustiva y detallada búsqueda numérica (véase el Apéndice E para mayores detalles sobre el análisis paramétrico) para la selección más apropiada de estos valores como una función del número de Péclet. Básicamente, los valores de los parámetros anteriores se determinaron explorando la influencia de estos parámetros sobre la resistencia térmica para obtener el valor mínimo. El parámetro elongacional  $\varepsilon_0^*$  y definido por la Ec.(4.45); varía en el siguiente rango,  $0.001 \leq \varepsilon_0^* \leq 1$  y a su vez el parámetro de la amplitud de la señal,  $\beta$ , varía en el siguiente rango,  $0.001 \leq \beta \leq 100$  y el rango del número de Deborah, está en  $0.001 \leq De \leq 100$ . Las figuras correspondientes a cada uno de los valores mínimos de la resistencia térmica pueden ser consultados en el Apéndice E. Las figuras siguientes, resumen las curvas mínimas de cada rango de variación de los parámetros; para dos valores del número de Deborah, para números de Deborah mayores a la unidad y para números menores a la unidad.

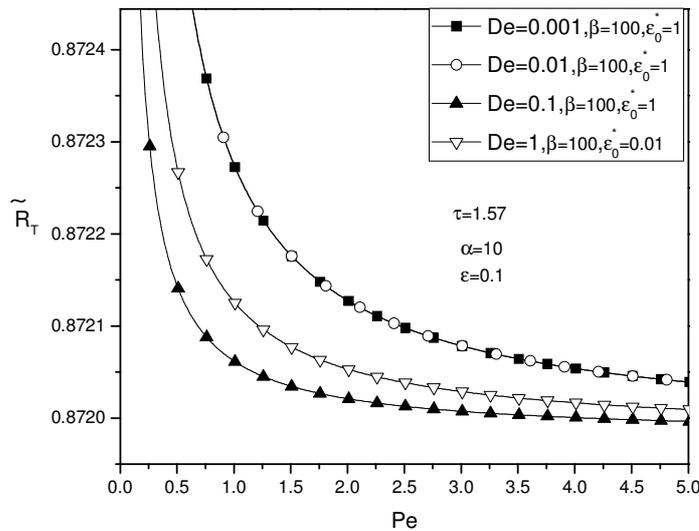


Figura 5.22: Comparación de la resistencia térmica para diferentes valores de los parámetros  $\beta$ ,  $\varepsilon_0^*$ . Para números de Deborah menores a la unidad

Como se puede observar en la Figura 5.22, la curva que presenta un valor menor ante la variación de  $\beta$  y  $\varepsilon_0^*$  es para  $De = 0.1, \beta = 100$  y  $\varepsilon_0^* = 1$ ; las curvas presentan un valor asintótico conforme aumenta el valor del número de Péclet y el valor de la asíntota al que tienden es aproximadamente de  $\tilde{R}_T \sim 0.87$ . Este comportamiento es característico de la resistencia térmica; en este caso, es relevante los valores de la mínima curva de la resistencia térmica, pues a partir de dichos valores se generan las curvas correspondientes a la resistencia térmica de los diferentes niveles de ramificación y esfuerzo cortante en la pared.

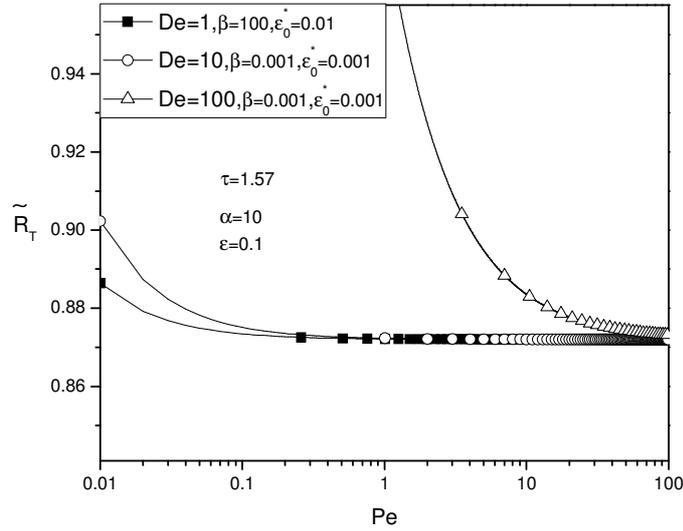


Figura 5.23: Comparación de la resistencia térmica para diferentes valores de los parámetros  $\beta, \varepsilon_0^*$ . Para números de Deborah mayores a la unidad

En la Figura 5.23 se presentan las curvas para diferentes valores del número de Deborah y diferentes valores de los parámetros  $\beta$  y  $\varepsilon_0^*$ . La curva que siempre presenta valores mínimos de la resistencia en su comportamiento corresponde a la triada  $De = 1, \beta = 100$  y  $\varepsilon_0^* = 1$ . Comparando con la figura anterior, se puede apreciar cualitativamente que la influencia del número de Deborah se refleja en mayores incrementos de la mínima resistencia global para valores crecientes del número de Deborah. Podemos asumir dos casos para observar las diferencias de cada uno de los resultados mínimos, el primer juego de valores es para un número de Deborah,  $De = 0.1, \beta = 100$  y  $\varepsilon_0^* = 1$  y para un segundo juego de valores, para un  $De \gg 1, De = 10, \beta = 0.001$  y  $\varepsilon_0^* = 0.001$ . Con el objetivo de mostrar las diferencias, se escoge la triada de valores correspondientes a  $De = 10$ , con el objetivo de observar las diferencias entre cada una de las situaciones del valor del número de Deborah, ya que para  $De \ll 1$ , se tiene el comportamiento de un fluido y a su vez, para  $De \gg 1$ , se tiene el comportamiento de un sólido, [32].

Una vez definidos los valores de los parámetros adimensionales, a partir del modelo simplificado de Phan-Thien Tanner, se define el perfil de velocidades y el esfuerzo cortante en la pared. Mediante los principios de la teoría constructal, se definen los perfiles de temperatura necesarios para obtener la resistencia térmica correspondiente a cada nivel de ramificación.

### 5.5.1 Límite del número de Deborah $De \ll 1$

El número de Deborah define dos límites esenciales para la descripción de un fluido no newtoniano. Para el límite asintótico de  $De \ll 1$ , se tiene el comportamiento de un fluido; en esta sección se presentan los resultados propios de este límite y se definen los diferentes perfiles de temperatura, tanto vertical como longitudinal, así como el número de Nusselt para un fluido no newtoniano; los resultados anteriores son esenciales para describir las resistencias térmicas correspondientes a cada uno de los niveles de ramificación. Las resistencias térmicas reportadas están en función del número de Péclet y la potencia adimensional.

El comportamiento de la temperatura en la dirección vertical no presenta mayores cambios ante la inclusión de un fluido no newtoniano. El perfil de temperaturas en la dirección vertical incluye el efecto de la velocidad de un fluido no newtoniano definido por el modelo SPTT evaluado en  $\chi = 1$ ; dicho perfil de temperaturas está definido por la Ec.(4.51). Los perfiles de temperatura para un número de Deborah de 0.1, se puede apreciar en las siguientes figuras.

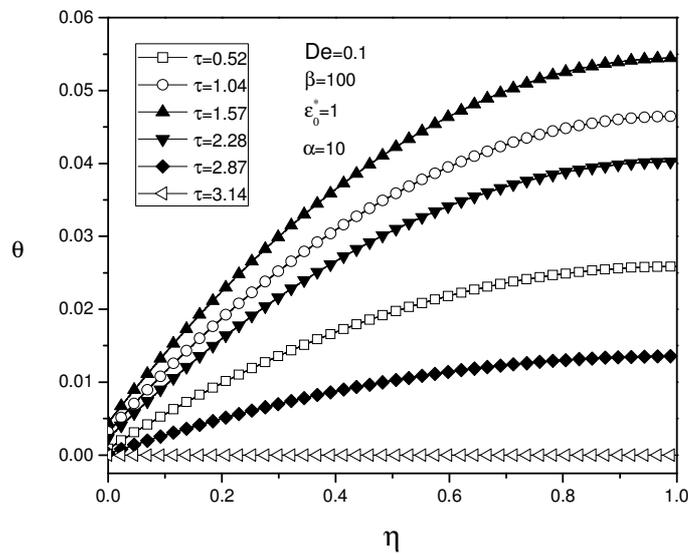


Figura 5.24: Perfil de temperaturas para la parte vertical, para los siguientes valores  $De = 0.1, \beta = 100, \varepsilon_0^* = 1$

En la Figura 5.24 se muestra el perfil de temperaturas en la dirección vertical, donde presenta un comportamiento oscilatorio debido a la función senoidal; presentando un máximo de temperatura de  $\theta_{m\acute{a}x} = 0.055$  para un tiempo  $\tau = 1.57$ . La temperatura en la parte superior del elemento presenta un enfriamiento, dado que para  $\eta = 1$ , que define la frontera de la parte superior del elemento constructal, se tiene la temperatura máxima. Para un valor de  $\eta = 0$ , la temperatura decrece; es decir, la parte inferior se está enfriando.

El perfil de temperaturas en la dirección longitudinal para un valor de  $De = 0.1$ , se muestra en la Figura 5.25. En esta se observa que el comportamiento de la temperatura adimensional es oscilatorio, presentando un valor ascendente desde el tiempo  $\tau = 0.52$ , hasta el tiempo  $\tau = 1.57$ . El comportamiento de la temperatura es ascendente conforme se avanza a lo largo de la longitud del tubo de diámetro  $D_0$ ; es decir, se presenta un calentamiento del fluido conforme se avanza en la dirección longitudinal. Las curvas obtenidas se obtienen para un valor del número de Péclet de  $Pe = 10^3$ , considerando valores de la velocidad de un colector solar plano comercial [58], y para valores fijos de los parámetros del modelo reológico,  $De = 0.1$ ,  $\varepsilon_0^* = 1$  y  $\beta = 100$ .

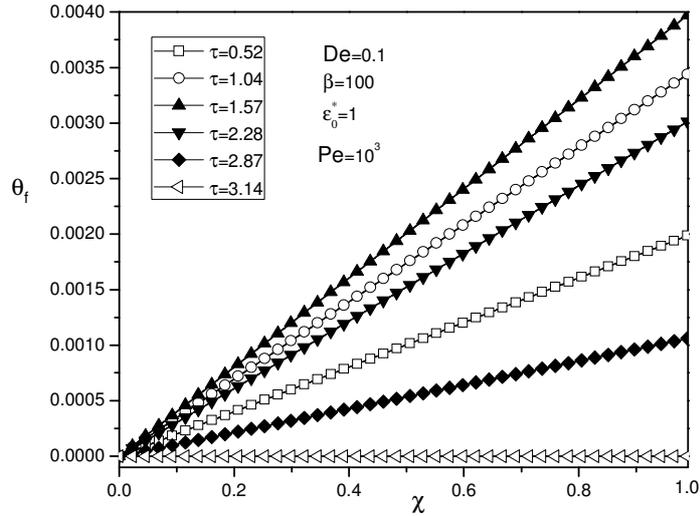


Figura 5.25: Perfil de temperaturas en la dirección longitudinal, para los siguientes valores  $De = 0.1$ ,  $\beta = 100$ ,  $\varepsilon_0^* = 1$

Con la definición del perfil de temperaturas en la dirección longitudinal, es posible definir el número de Nusselt promedio para un fluido newtoniano, que es dado por la Ec.(4.52). En la Figura 5.26 se presentan las curvas para los números de Nusselt para un fluido no newtoniano y un fluido newtoniano; donde se aprecia que existe una diferencia notable en el valor del número de Nusselt promedio. Para valores fijos de los parámetros anteriores del modelo reológico, se observa que aproximadamente para valores mayores de  $Pe \cong 10$ , el número de Nusselt promedio correspondiente a un fluido no newtoniano tiende a un valor asintótico de 0.017 aproximadamente, en comparación con el valor del Nusselt para un fluido newtoniano, que tiende a un valor de 0.008. De las diferencias entre las curvas se puede inferir que al presentar un número de Nusselt promedio mayor, se tiene una mejor transferencia de calor por convección, que esta dada por la diferencia de temperatura entre la temperatura de la pared y la temperatura del fluido; como el número de Nusselt para un fluido no newtoniano es incluido en las diferencias de temperatura necesarias para definir las correspondientes resistencias térmicas de cada nivel de ramificación de la red de tuberías, este comportamiento influye en la resistencia térmica y su dependencia con el número de Péclet.

El número de Nusselt promedio, tanto para un fluido newtoniano, como para uno no newtoniano, esta en función del número de Péclet; de tal forma que la inclusión del Nusselt en la definición de la resistencia térmica, presenta una influencia notable; por lo que es posible también expresar la resistencia térmica total en función de la potencia con la ayuda del número de Péclet.

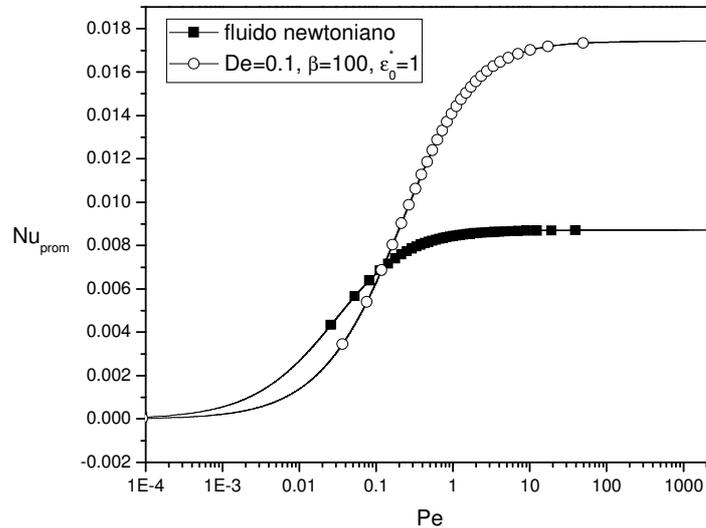


Figura 5.26: Número de Nusselt para un fluido newtoniano y no newtoniano,  $De = 0.1, \beta = 100, \varepsilon_0^* = 1$

Dependiendo del nivel de ramificación también se incluyen los efectos de cada una de las longitudes óptimas; a su vez, asumir la analogía eléctrica para definir la resistencia térmica total; una vez definidos cada uno de los elementos es posible determinar las expresiones correspondientes a la resistencia térmica total de cada arreglo geométrico. La resistencia térmica para un fluido no newtoniano, se define a partir de la Ec.(4.56), las resistencias térmicas correspondientes se definen para dos casos, en función del número de Péclet y de la potencia adimensional, para los valores de los parámetros del modelo reológico, definidos anteriormente. Las correspondientes resistencias térmicas se realizaron para un valor de la variable temporal de  $\tau = 1.57$ , donde se tiene la mayor cantidad de radiación solar.

Aplicar la analogía eléctrica a las resistencia térmica de cada uno de los niveles de ramificación, permite generar curvas del comportamiento de los diferentes arreglos geométricos, las figuras siguientes muestran el comportamiento en función del número de Péclet y posteriormente de la potencia necesaria para desplazar al fluido en el arreglo de tuberías.

La Figura 5.27, muestra el efecto de la resistencia térmica adimensional para diferentes configuraciones geométricas. La resistencia térmica adimensional para un arreglo radial de tuberías, presenta un comportamiento similar a la formulación presentada para un fluido newtoniano. Cabe mencionar que para cada nivel de ramificación se asume la analogía eléctrica para definir la resistencia térmica total. Las diferencias entre los diferentes niveles de ramificación se presentan para valores pequeños del número de Péclet, presentando el mismo comportamiento que el caso de un fluido newtoniano, un segundo nivel de ramificación presenta un valor menor de la resistencia térmica comparado con un arreglo radial de tuberías.

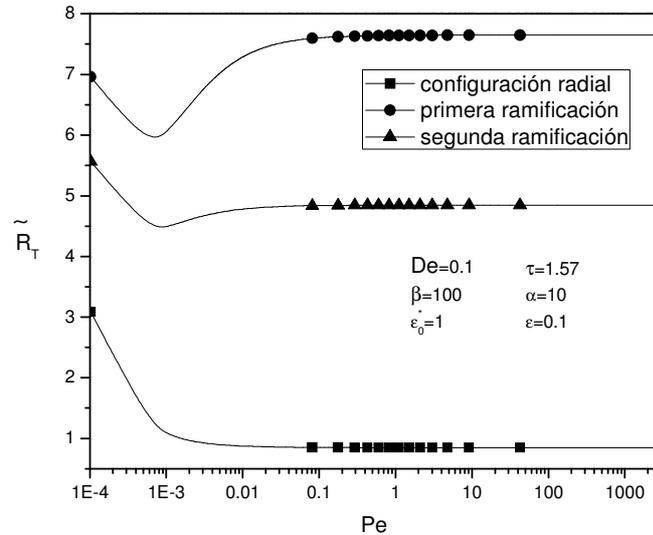


Figura 5.27: Resistencia térmica para un fluido no newtoniano, para diferentes niveles de ramificación

La resistencia térmica adimensional del segundo nivel de ramificación para el caso newtoniano, mostrado en la Figura 5.20, presenta un valor mayor comparado con el mismo nivel de ramificación para el caso no newtoniano.

La metodología para definir la resistencia térmica en función de las longitudes óptimas, los ángulos óptimos y la potencia adimensional, es la misma que la que se definió para el caso de un fluido newtoniano. Las curvas correspondientes a la resistencia térmica en función de la potencia adimensional presentan un comportamiento asintótico para los diferentes niveles de ramificación. Al igual que para el caso newtoniano, la definición de la resistencia térmica y la potencia adimensional, se sigue la misma metodología. La figura siguiente muestra a detalle el comportamiento de la resistencia térmica conforme varía la potencia adimensional.

Se observa en la Figura 5.28, la resistencia térmica para el segundo nivel de ramificación presenta una tendencia a un valor de la resistencia térmica  $\tilde{R}_T \sim 5$ , comparando con la correspondiente gráfica para el caso de un fluido newtoniano, Figura 5.21 presenta un valor mayor que el caso newtoniano. La Figura 5.28, resume de manera práctica el comportamiento para diferentes niveles de ramificación en función de la potencia para los diferentes valores de los parámetros físicos y geométricos de cada arreglo constructal.

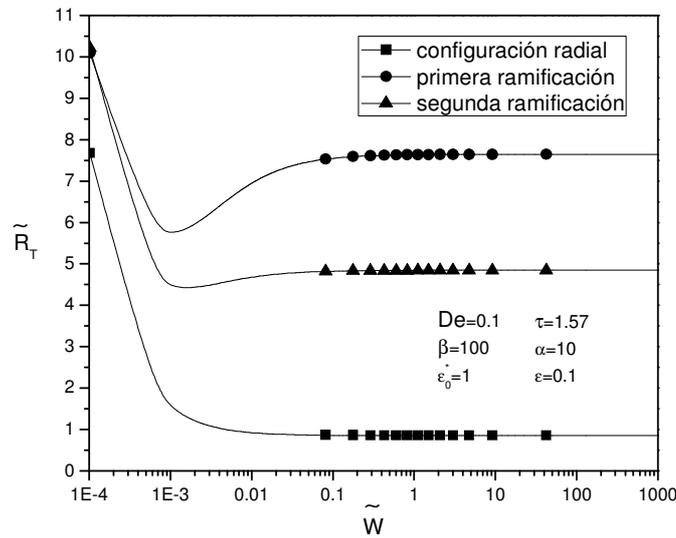


Figura 5.28: Resistencia térmica en función de la potencia, para un fluido no newtoniano

Los resultados obtenidos de la resistencia térmica adimensional muestran que para una condición geométrica más compleja definida mediante la teoría constructal, se obtiene una menor resistencia térmica total, de tal manera que los resultados obtenidos permiten de manera sencilla observar el comportamiento conforme aumenta el número de Péclet, o bien la potencia adimensional; las diferentes curvas de cada nivel de ramificación presentan un comportamiento asintótico, dado que la potencia adimensional  $\tilde{W}$  y las longitudes óptimas correspondientes a cada nivel de construcción, son resultados de optimizaciones del flujo. Se asume que la resistencia térmica es una resistencia óptima para el arreglo geométrico correspondiente a cada nivel de construcción.

Una vez determinadas las curvas anteriores, se define el comportamiento del esfuerzo cortante con los valores de los parámetros del modelo reológico anteriormente utilizados y que se obtuvieron a partir de graficar el comportamiento de la resistencia térmica para una gama de valores del número de Deborah,  $De$ , parámetro elongacional de referencia,  $\varepsilon_0^*$ , y la amplitud de la señal senoidal,  $\beta$ . Con dichos valores fijos, se define la relación de velocidades, definida en la Ec.(4.43), que a su vez, ayuda a definir el esfuerzo cortante en la pared, definido mediante la Ec.(4.44).

Para el esfuerzo cortante en la pared es deseable que para una condición dada de captación de energía durante el ciclo solar, el esfuerzo cortante presente un valor máximo cuando la cantidad de calor es menor. Así conforme la radiación solar aumenta al aproximarse al medio día, el esfuerzo cortante del fluido no newtoniano modelado con el modelo SPTT, presente un valor menor del esfuerzo cortante, que se opone al flujo del fluido, para así captar la mayor cantidad de calor. El esfuerzo cortante adimensional, se presenta en la Figura 5.29,

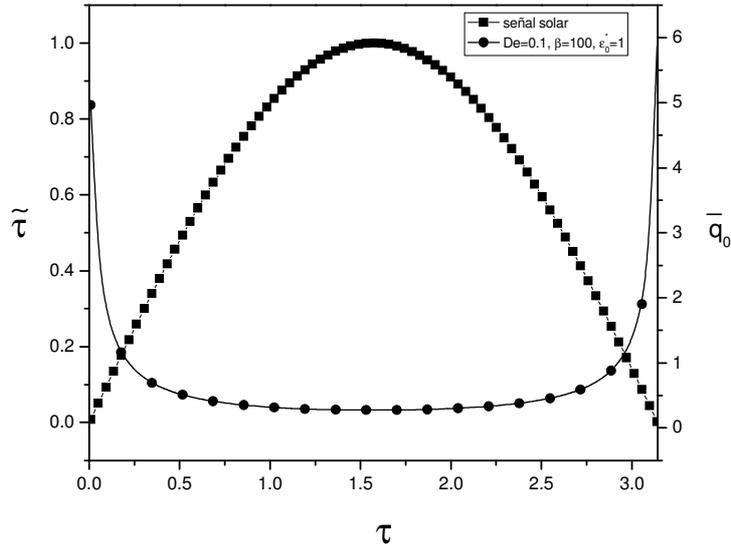


Figura 5.29: Comparación del esfuerzo cortante adimensional para el límite  $De \ll 1$  y la señal solar

La figura anterior se lee de la siguiente manera: en la escala vertical de la izquierda, se presentan los valores del esfuerzo cortante adimensional, en la escala vertical de la derecha se presentan los valores de la señal solar; la escala horizontal es el tiempo adimensional. Como se puede apreciar en la figura, el esfuerzo cortante para valores de la señal solar cercanos a cero, presenta un valor muy alto, cercano a  $\tilde{\tau} \sim 0.9$ . A su vez, cuando se tienen la condición de máxima cantidad de calor, se tiene que el esfuerzo cortante presenta un valor aproximado de  $\tilde{\tau} \sim 0.01$ ; conforme decrece la señal solar, que es cercano a el ocultamiento del sol y el esfuerzo cortante vuelve a presentar un valor muy alto, de tal manera que para los parámetros definidos del modelo reológico, y del modelo propuesto del parámetro elongacional, se llega a modular el esfuerzo cortante mediante parámetros propios que describen al fluido mediante el modelo simplificado de Phan-Thien Tanner.

### 5.5.2 Límite del número de Deborah $De \gg 1$

Con el fin de describir los resultados obtenidos para el límite de un número de Deborah muy grande,  $De \gg 1$ , se presentan los resultados para los siguientes valores fijos  $De = 10$ ,  $\beta = 0.001$ ,  $\varepsilon_0^* = 0.001$ , obtenidos a partir de las curvas mínimas presentadas en la Figura 5.23. Como se reporta en la literatura especializada, el límite para un  $De \gg 1$  corresponde el comportamiento del fluido al de un sólido y el modelo SPTT permite obtener las relaciones de velocidad y esfuerzo cortante en función del número de Deborah y demás parámetros. En este caso, son parámetros definidos para un modelo propuesto del parámetro elongacional con el objetivo de modular el esfuerzo cortante.

Se presentan los resultados principales como son el perfil de temperatura en la dirección longitudinal, el número de Nusselt, la resistencia térmica en función de la potencia y el esfuerzo cortante, para los valores establecidos de los parámetros anteriormente mencionados. En la Figura 5.30, se muestra el perfil de temperaturas en la dirección longitudinal, para diferentes valores de la variable temporal  $\tau$ .

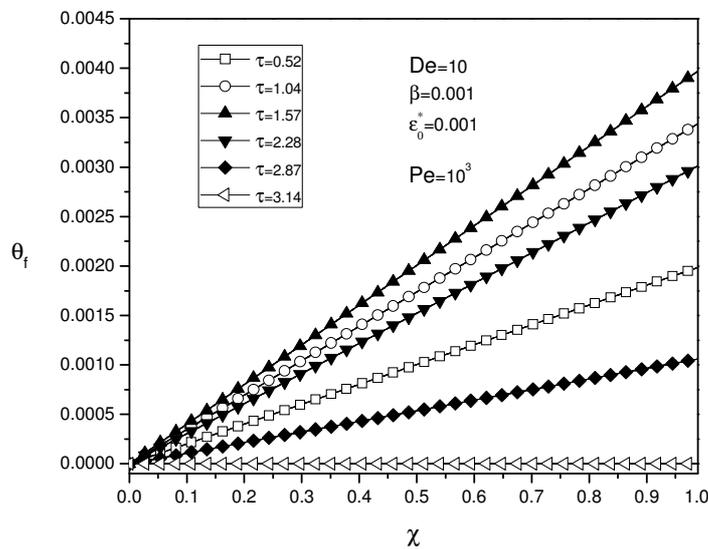


Figura 5.30: Perfil de temperaturas para un fluido no newtoniano, para una condición de  $De \gg 1$

Como se puede apreciar, el perfil de temperaturas tiene un comportamiento oscilatorio, presentando para un valor del tiempo adimensional  $\tau = 1.57$ , correspondiente a la máxima cantidad de energía de la señal solar, un valor máximo del perfil de temperatura, el fluido se está calentando a lo largo de la longitud del tubo. Con respecto al caso anterior, para un número de Deborah  $De = 0.1$  y para el valor de la variable temporal mencionado, el valor de la temperatura presenta diferencias muy pequeñas.

Con respecto al número de Nusselt se puede hacer la comparación de ambos límites del número de Deborah y el caso del fluido newtoniano, con el fin de comparar los resultados obtenidos. En la Figura 5.31, se observa que para un número de  $De = 10$ ,  $\beta = 0.001$  y  $\varepsilon_0^* = 0.001$ , el valor del número de Péclet, tiende a un valor asintótico antes que el caso para un número de Deborah menor a la unidad, aproximadamente en un valor del número de Péclet de  $6 \times 10^{-4}$ , el número de Nusselt tiende a aumentar su valor hasta tender al valor aproximado de 0.017, en comparación del caso para un Deborah,  $De = 0.1$ , que la tendencia a aumentar se presenta en un valor de  $Pe \sim 0.1$ .

En ambos casos, tienden al valor asintótico de  $Nu_{prom} \sim 0.017$ ; en comparación con el caso para un fluido newtoniano, que tiende a un valor de 0.008. Del resultado que presente el número de Nusselt a presentar un valor mas alto para el limite de  $De \gg 1$ , se concluye que el proceso de transferencia de calor por convección, presentando una influencia en los parámetros del modelo reológico, únicamente en números de Péclet muy pequeños; es decir, a velocidades características muy bajas, de tal manera que ambos límites del número de Deborah y valores de dichos parámetros, tienden a un valor asintótico conforme aumenta el número de Péclet.

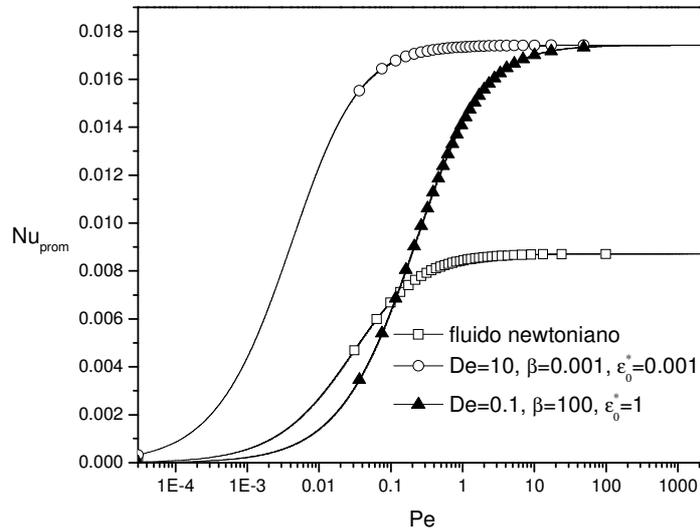


Figura 5.31: Comparación del número de Nusselt para  $De = 0.1$ ,  $De = 10$  y un fluido newtoniano

La resistencia térmica adimensional en función de la potencia  $\tilde{W}$ , se obtiene con ayuda del número de Péclet, de tal manera que la expresión final de cada resistencia térmica incluye el efecto de las longitudes óptimas correspondientes a cada arreglo geométrico de tuberías, como de los ángulos óptimos entre ramas de tuberías. La siguiente figura muestra el efecto de la resistencia térmica para diferentes niveles de ramificación como función de la potencia adimensional, para diferentes valores de los parámetros físicos y geométricos característicos del problema.

El comportamiento de la resistencia térmica tiende a un valor asintótico en cada uno de los niveles de ramificación, agrupando información de manera sencilla en una sola gráfica, tal como se puede apreciar en la Figura 5.32.

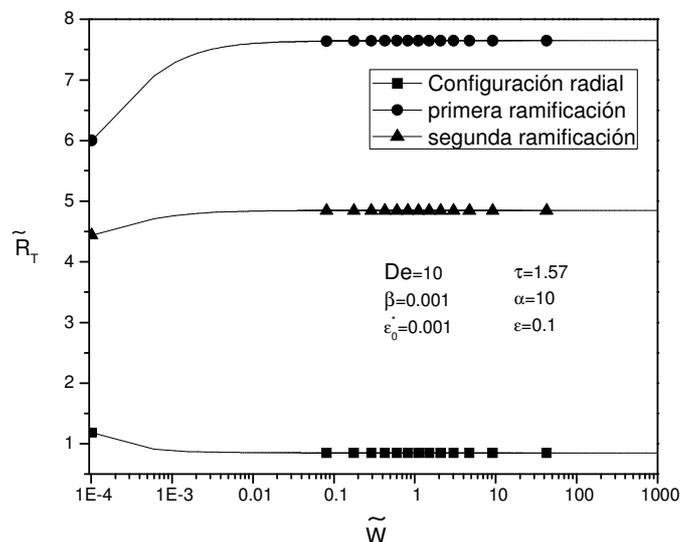


Figura 5.32: Resistencia térmica en función de la potencia adimensional para el límite de  $De \gg 1$

La resistencia térmica para un segundo nivel de ramificación presenta un valor menor al valor que presenta la primera ramificación, conservando el comportamiento que para el caso del límite de un número de Deborah menor a la unidad; las diferencias entre ambos casos para un segundo nivel de ramificación son muy pequeñas, ya que con respecto a la Figura 5.28, el valor al que tiende la segunda ramificación para el caso de  $De \ll 1$ , es aproximadamente de 4.84, que es prácticamente el mismo que para el caso de  $De \gg 1$ . A diferencia del caso anterior,  $De \ll 1$ , las curvas de cada una de las ramificaciones, tienden más rápido a un valor asintótico, aproximadamente en  $Pe \sim 1 \times 10^{-3}$ .

Los resultados presentados en ambas curvas, confirman de manera directa la información referente a cada uno de los diferentes niveles de ramificación, de tal manera que la resistencia térmica de cierto modo es optimizada a partir de la inclusión de las longitudes, y a su vez de los ángulos óptimos obtenidos a partir de optimizar la resistencia al flujo en cada nivel de construcción. El modelo reológico aquí utilizado, permite definir una expresión para el esfuerzo cortante en función de los parámetros adimensionales del problema; la figura siguiente muestra el comportamiento del esfuerzo cortante para un valor del número de Deborah grande.

La condición deseable para el esfuerzo cortante, es presentar un valor muy alto cuando empieza el calentamiento del fluido, previo al medio día o el punto de mayor cantidad de calor, presente un valor muy pequeño. En la figura siguiente se presenta el comportamiento del esfuerzo cortante comparado con la señal solar.

En la Figura 5.33, se presenta el esfuerzo cortante en la pared, para el límite de  $De \gg 1$ , comparado con la señal solar. Se puede apreciar que para tiempos muy pequeños, el esfuerzo cortante presenta un valor aproximado de 1.878, en cambio para un tiempo de  $\tau = 1.57$ , el esfuerzo cortante ha disminuido a un valor aproximado de 1.8566, de tal manera que la permanencia del fluido en el punto de mayor captación solar, es muy corta.

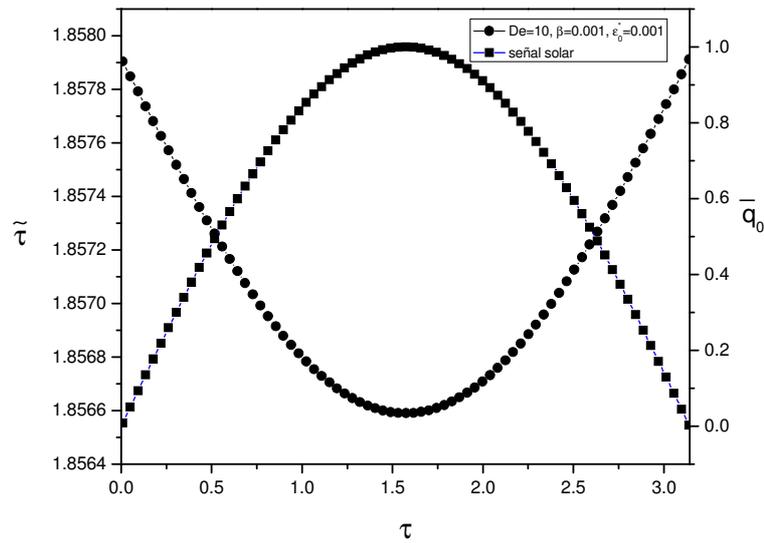


Figura 5.33: Comparación del esfuerzo cortante en la pared con la señal solar para el caso de  $De \gg 1$

Una vez definidos los resultados de cada nivel de construcción para cada límite del número de Deborah, así como del esfuerzo cortante, se puede observar que existen diferencias notables en cuanto al comportamiento del esfuerzo cortante en la pared, dado que para un  $De \ll 1$ , el esfuerzo cortante prácticamente tiende a cero cuando se tiene la condición de mayor captación solar, a diferencia del caso de  $De \gg 1$ , donde la curva del esfuerzo cortante es mucho mayor. A partir de los resultados obtenidos, se puede definir una conclusión para cada sección del presente trabajo.

### 5.5.3 Comparación de la resistencia térmica

En esta sección se presenta en la Figura 5.34 la resistencia térmica para un segundo nivel de ramificación, ya que es el resultado que presenta una menor ramificación ante la complejidad geométrica del arreglo de tuberías. Como se puede apreciar se presentan las curvas de la resistencia térmica para un fluido newtoniano y los límites del fluido no newtoniano y dados por el número de Deborah,  $De \ll 1$  y  $De \gg 1$ . En el detalle de la figura, se puede observar que la resistencia térmica para el caso de  $De \ll 1$ , presenta un valor ligeramente mayor que el caso newtoniano. A su vez la resistencia térmica para una condición de  $De \gg 1$ , presenta un valor mucho mayor que el caso para un fluido newtoniano, con este resultado y el esfuerzo cortante obtenido para un  $De \ll 1$ , se puede concluir que la mejor modulación del esfuerzo cortante se da para el caso de  $De = 0.1$ ,  $\beta = 100$  y  $\varepsilon_0^* = 1$ .

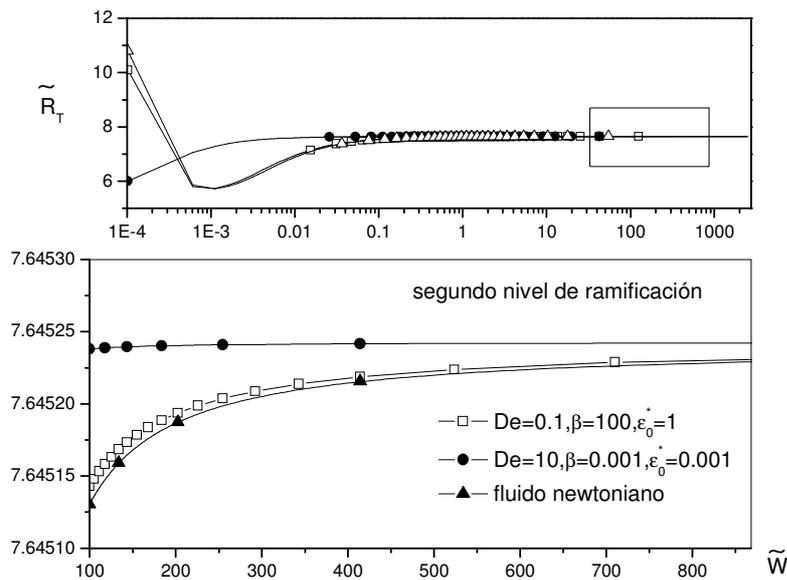


Figura 5.34: Comparación de la resistencia térmica para un fluido newtoniano y los límites del número de Deborah, para un fluido no newtoniano



## 6

# Conclusiones

En el presente trabajo se desarrollaron diferentes enfoques teóricos propios de la teoría constructal, para obtener la optimización de un dispositivo de colección solar, con el objetivo de privilegiar el calentamiento óptimo del fluido a partir de desarrollar un dispositivo que atienda a la naturaleza dinámica de la radiación solar mediante la generación de redes de tuberías optimizadas en su forma. Las formulaciones desarrolladas a partir de los principios de la teoría constructal, establecen la necesidad de definir un primer elemento constructal, que cabe mencionar que dicho elemento geométrico no es la representación final del colector solar, el primer elemento constructal es una herramienta que ayuda a definir las restricciones locales y globales del problema físico. Los diferentes desarrollos teóricos permiten explorar diferentes soluciones a la optimización de un dispositivo de colección, mediante diferentes consideraciones geométricas principalmente. Cabe mencionar que la teoría constructal es una teoría en desarrollo, por lo que algunos de los métodos de optimización aplicados no presentan resultados óptimos que puedan definir situaciones particulares para un problema físico.

Los resultados obtenidos en el primer capítulo, la formulación y resolución de la ecuación diferencial que define la temperatura en la cavidad de convección libre, cuya solución fue obtenida a partir de la implementación del teorema de Duhamel. Esta formulación permite definir tiempos mínimos de enfriamiento, la inclusión del tiempo, como variable a optimizar no ha sido reportado ampliamente en la literatura especializada sobre la teoría constructal. Las curvas que definen los tiempos mínimos de enfriamiento exigen definir para cada punto los valores propios y a su vez resolver la Ec.(2.32) para una condición donde la temperatura de la cavidad presenta un valor mínimo, dicha situación representa un problema numérico complejo; siendo entonces un proceso complicado para definir una red de tuberías en un elemento constructal rectangular. De esta formulación, la importancia de los parámetros adimensionales, como son el parámetro  $k$ , que incluye el efecto de la relación de conductividades, así como del número de Péclet, presenta una influencia en el enfriamiento de la cavidad de convección libre, a su vez el parámetro geométrico  $\phi_0$  influye notablemente en los perfiles de temperatura. Los resultados de los tiempos mínimos, son relevantes ya que la optimización de la variable temporal no es un elemento fundamental en los diferentes planteamientos de la teoría constructal.

Los resultados obtenidos de la formulación del capítulo 2, permitieron definir un modelo simplificado de un dispositivo de colección a partir de considerar un primer elemento constructal en forma de un sector cilíndrico, de tal manera que en dicho elemento se desarrolle una red de tuberías por donde circula un fluido newtoniano. En este caso, los resultados teóricos obtenidos, presentan la posibilidad de definir el tamaño del elemento mediante una relación de aspecto  $\hat{H}_0$ , que esta en función de los parámetros físicos y geométricos del problema físico. El proceso de optimización permite conocer el tamaño de cada elemento constructal que se tiene en cada nivel de construcción; a su vez se define la resistencia térmica de todo el elemento constructal, de tal manera que se genera una resistencia térmica por cada nivel de construcción.

A partir de la resistencia térmica, con el objetivo de estudiar el comportamiento de la geometría del primer elemento, se propuso un valor para  $\hat{H}_0$ . Los resultados obtenidos muestran que el comportamiento de la resistencia térmica disminuye conforme aumenta el número de Péclet; a su vez si se utiliza el resultado teórico de  $\hat{H}_0$ , obtenido a partir de la resistencia térmica, el comportamiento que se presenta es que la resistencia térmica aumenta en lugar de disminuir a un valor determinado. Esta formulación no define en que situaciones el resultado teórico obtenido es óptimo, además de depender de múltiples parámetros físicos y geométricos, en la literatura especializada se asume que el resultado teórico obtenido es ya un resultado óptimo. La formulación del tamaño óptimo del elemento constructal no define de manera clara el método para definir las relaciones matemáticas de longitud y ángulo de ramificación que deben de guardar las diferentes ramificaciones, además de no considerar el efecto hidrodinámico debido al paso del fluido que circula en las tuberías. En este sentido las formulaciones anteriores presentan limitaciones teóricas para abordar el estudio de sistemas físicos más complejos.

Con el objetivo de estudiar el efecto de las ramificaciones para el transporte de fluido, se desarrolla para la misma geometría de disco, el caso de un número  $n$  de ramificaciones a partir del tubo inicial de entrada al elemento constructal, definiendo la resistencia térmica para valores fijos de los parámetros, tanto físicos como geométricos y diferentes valores de  $n$ , tal como se puede observar, principalmente en las Figuras 5.13 y 5.14, donde se aprecia una tendencia de la resistencia térmica a disminuir su valor. Esta formulación esta basada en la relación de áreas, entre el área ocupada por el arreglo de tuberías ramificadas con respecto al área total del disco, de tal manera que los resultados estan referidos a los tamaños de los elementos ramificados, definido por los parámetros geométricos  $\phi_0$  y  $\phi_1$ . La tendencia de la resistencia térmica a disminuir conforme aumenta el número de ramificaciones, se puede apreciar en la Figura 5.16, este resultado describe claramente que la resistencia térmica, tiende a un valor cada vez menor, de tal manera que la resistencia presenta un valor nulo para un número de ramificaciones de  $n = 115$ ; es decir conforme aumenta el número de ramificaciones, la resistencia térmica decrece. Lo anterior demuestra que al incrementar la complejidad geométrica del arreglo de tuberías, decrece la resistencia térmica, en este sentido esta formulación no contempla el efecto de la resistencia hidrodinámica debido al aumento en la complejidad de la tubería por donde circula un fluido newtoniano.

El resultado de  $n = 115$  ramificaciones, no es posible integrar lo anterior a un resultado coherente con la red de tuberías, puesto que esta formulación no contempla la proporción del tamaño de la tubería entre niveles de ramificación, aún si se considera el caso en que el diámetro de las tuberías ramificadas es el mismo que la tubería inicial, se llegaría a un límite físico, es decir una porción del área quedaría cubierta por un número muy grande de tuberías, en este punto la relación de

diámetros posterior y anterior juega un papel fundamental para describir el comportamiento ante la variación del número de ramificaciones. La relación de diámetros se define a partir del área ocupada por el arreglo de tuberías, se define mediante  $\tilde{D}$  que esta en función de los parámetros físicos y geométricos del problema físico, dicha expresión esta dada por la Ec.(3.54), al graficar dicha expresión se obtiene un comportamiento asintótico, de tal manera que para diferentes valores del número de ramificaciones  $n$ , la relación de diámetros  $\tilde{D}$  presenta un valor del mismo orden que el valor de  $n$ . La información que se obtiene de graficar la variable  $\tilde{D}$  no es determinante para definir el tamaño de una red que se bifurca desde el centro del elemento hacia un número de puntos en la periferia. Cabe mencionar que la relación de diámetros obtenida, es un resultado adicional al resultado previamente reportado por la teoría constructal conocido como la ley de Murray.

Para considerar la resistencia hidráulica en la red de tuberías, se incluyo la potencia necesaria para desplazar al fluido en la red de tuberías. Para lograr lo anterior se definió la resistencia hidráulica y a partir de esta, se obtienen las longitudes óptimas y ángulos entre tuberías, incluir el efecto de la potencia adimensional en la resistencia térmica genera un nuevo enfoque para abordar problemas de enfriamiento por el paso de un fluido en una red de tuberías. Cabe mencionar que dicha formulación, aunque presenta ventajas, no describe con claridad como definir la resistencia total del arreglo geométrico, para definir lo anterior, se hizo uso de la analogía eléctrica para las resistencias eléctricas. Una de las ventajas de esta formulación es la aplicación de la ley de Murray, ya que incluye un resultado obtenido por la teoría constructal a partir de la optimización de las redes optimizadas para un fluido, además de describir el problema de manera mas sencilla.

Esta formulación presenta varias ventajas, ya que esta formulación exige definir los ángulos y longitudes óptimas del arreglo de tuberías, además de definir las dimensiones del elemento constructal en función del número de tubos iniciales que entran al dispositivo de colección en forma de disco. Los resultados de las resistencias térmicas para distintos niveles de ramificación muestran que para un segundo nivel de ramificación, la resistencia térmica presenta un valor menor comparado con la resistencia térmica de un primer nivel de ramificación, presentando un comportamiento asintótico, al incrementar la complejidad geométrica, se reduce la resistencia térmica, ahora incluyendo el efecto de la potencia.

Con la formulación anterior exige definir el número de Nusselt, el comportamiento de este número presenta una tendencia a un valor asintótico, a partir de un número de Péclet igual a la unidad por lo que se puede inferir que a mayor número de Nusselt, predomina el proceso de transferencia de calor por convección en el elemento constructal; la gráfica de este comportamiento puede apreciarse en la Figura 5.19. Cabe mencionar que esta formulación permite definir muchos resultados generales, tales como la potencia adimensional, resistencia total térmica y las longitudes que guardan cada una de las ramificaciones, Ec.(4.39); no siendo así para las longitudes entre cada uno de los niveles de ramificación, aunque la definición de dichas longitudes se da por un ejercicio trigonométrico, no presentan una forma general que pueda ser generalizada, por lo que cada juego de longitudes y ángulos óptimos tiene que ser definido para cada uno de los niveles de ramificación.

Uno de los objetivos de este trabajo es describir la adaptabilidad del colector solar ante la dinámica solar, al no encontrar modelos de propiedades adaptativas, que puedan ser implementadas mediante la teoría constructal se asumió que la adaptabilidad fuera parte del fluido mismo, a partir de un cambio en las propiedades reológicas del fluido se optimice la transferencia de calor

en el dispositivo de colección. Para cumplir dicho objetivo se utilizó el modelo simplificado de Phan-Thien & Tanner (SPTT) para fluidos viscoelásticos dicho modelo presenta la ventaja de describir el perfil de velocidades y el esfuerzo cortante a partir de los parámetros propios del modelo reológico. Para modular al fluido ante los cambios de la captación solar se propone una función senoidal del parámetro elongacional definida mediante la Ec.(4.45). La función propuesta del parámetro elongacional exige definir el valor óptimo del número de Deborah,  $De$ , del parámetro elongacional de referencia y la amplitud de la función senoidal,  $\beta$ , por lo que se definen dos juegos de valores, que contemplan dos límites, el comportamiento como un fluido,  $De \ll 1$  y el comportamiento como un sólido,  $De \gg 1$ . Los resultados obtenidos a partir del juego de valores anteriores, se obtienen las resistencias térmicas respectivas, presentando pocas diferencias entre sí; tal como se puede apreciar en las Figuras, 5.28 y 5.32. Los resultados de las resistencias térmicas de cada nivel de construcción, presentan el mismo comportamiento que para un caso newtoniano, conforme aumenta la complejidad de la red de tuberías, la resistencia térmica disminuye en su valor.

El número de Nusselt para un fluido no newtoniano, presenta un valor mayor al del caso de un fluido newtoniano, por lo que se puede inferir que se mejora la transferencia de calor por convección, cabe mencionar que la formulación con el modelo Phan-Thien & Tanner presenta el mismo problema para la generalización de las longitudes óptimas, la única diferencia entre los resultados es la inclusión de la velocidad para un fluido no newtoniano. El modelo reológico ofrece la ventaja de describir, tanto la velocidad como el esfuerzo cortante en función de los parámetros del modelo reológico; en este sentido, el esfuerzo cortante que cumple con la modulación ante la señal solar, es para el caso de un número de Deborah  $De \ll 1$ , tal como se puede apreciar en la Figura 5.29. La figura anterior muestra que es posible modular el esfuerzo cortante para determinados valores de los parámetros reológicos, a su vez, en la Figura 5.33, para el caso de  $De \gg 1$ , el esfuerzo cortante presenta valores muy altos, para la mayor incidencia de calor debido a la señal transitoria. A partir de lo anterior, se puede concluir que, a pesar del arduo ejercicio numérico para determinar el juego de valores de los parámetros reológicos, es posible modular el esfuerzo cortante a partir de la modificación de las propiedades del fluido no newtoniano, siendo en este caso más conveniente para el dispositivo de colección solar, un número de Deborah muy pequeño.

De manera complementaria, en el apéndice F se incluye una propuesta de control de las propiedades del fluido no newtoniano, tomando en cuenta que son variables en el tiempo, de tal manera que atiendan la dinámica de la señal transitoria, proporcionando así como trabajo a futuro los elementos básicos necesarios para definir un control y las características mínimas de operación. La aplicación del modelo reológico permite dotar al dispositivo de colección solar de un rango muy amplio de acción de manera que pueda optimizarse un dispositivo que generalmente es pasivo ante los cambios en la radiación solar.

La teoría constructal ha demostrado ser una herramienta de optimización en diversos sistemas físicos. Dicha teoría presenta diferentes formulaciones para el óptimo transporte (desalajo) de calor, no todas las formulaciones parten de la misma idea a optimizar, existen diferentes planteamientos para un mismo objetivo, obteniendo así diferentes parámetros significativos para las diferentes suposiciones teóricas; las simplificaciones que exige el método hacen una aproximación práctica del problema para su optimización, lo que hace muy sencilla su aplicación.

La teoría constructal es aun una teoría en desarrollo, que contempla diferentes formas de optimizar la forma y la estructura, no estableciendo un método fundamental para estudiar un problema determinado. La aplicación de la teoría constructal a la resolución de problemas propios de la ingeniería presenta ciertas ventajas, ya que se puede definir una solución más aproximada a un punto óptimo de funcionamiento a partir de manipular esencialmente la estructura y la forma.

En este sentido la teoría constructal tiene limitaciones en cuanto a su aplicación, dado que la literatura recientemente publicada sobre la teoría constructal sugiere que es una herramienta universal para desarrollar y entender sistemas en la naturaleza, resultando que de algun modo, la naturaleza siempre trabaja en el punto óptimo. El desarrollo diversos fenómenos de la naturaleza obedece a multiplicidad de factores, como pueden ser biológicos, atmosféricos, fisiológicos, ambientales, etc. La teoría constructal supone que un sistema físico que se estudie con dicha teoría, como resultado, es un sistema óptimo y este a su vez es una conclusión de que el fenómeno estudiado trabaja entonces, en un punto óptimo. Esta idea no es precisamente cierta, a partir de la aplicación y desarrollo de diferentes planteamientos únicamente de la transferencia de calor, deja la impresión de ser una herramienta que no es concluyente en sus resultados, es decir, no se esta garantizando que el resultado obtenido sea precisamente el óptimo, además de tener soluciones multiparámétricas que pueden generar una serie de escenarios a partir de combinaciones de valores de dichos parámetros.

La complejidad de ciertos fenómenos requieren que para su análisis y estudio se utilicen herramientas teóricas mas completas, de tal forma que pueda obtenerse una solución más cercana a la realidad. Los problemas físicos son complejos, aun más son los problemas sociales o de caracter organizacional de algun tipo de proceso donde se involucre al ser humano, si bien existen expresiones empíricas, aun no han sido desarrolladas las leyes de conservación de dichos fenómenos, a lo anterior se tiene que agregar que no hay un modelo que pueda integrar los intereses y voluntad del individuo en un fenómeno o problematica social.

Si partimos de la aplicación del principio fundamental de la teoría constructal [1], que se enuncia en el capítulo de antecedentes del presente trabajo, se entiende que dicho principio obedece a un acercamiento al estudio de fenómenos físicos donde se involucra el flujo de un elemento físico, en el que se provee el camino con menor resistencia por donde pueda fluir mas fácilmente en el sistema y persistir en el tiempo, dicho principio, como lo muestra la literatura, puede ser aplicable a una serie de ejemplos como la distribución de calles, para el óptimo transporte de vehiculos, el flujo de un fluido en una red reticular, la generación de una red de material de alta conductividad para enfriar un volumen dado, es decir, se entiende que se puede aplicar dicho principio a elementos que *fluyen* y que es necesaria esta característica para persistir en el tiempo. La aplicación de dicho principio a un sistema social que es considerado, a grandes rasgos como un conjunto de sistemas, con jerarquias que fluyen mediante una organización y patrones, en una dirección en el tiempo [59], simplemente es forzar el entendimiento de dichos problemas mediante una herramienta que no esta diseñada para ello.

Las leyes de la naturaleza estan presentes en cada fenómeno observable, acercarnos a su estudio y realizar simplificaciones para acercarnos a una solución y un entendimiento no implica que las leyes de la naturaleza no esten presentes, plantear la teoría constructal como una herramienta unica para acercarnos a cualquier fenómeno, como una *ciencia de la arquitectura del flujo* es simplificar el conocimiento y entendimiento de la naturaleza.

La esencia misma de los fenómenos físicos es ya en sí una complejidad que no se puede obviar, la teoría constructal es una herramienta simple para obtener soluciones inmediatas de problemas físicos, más no es ni la solución última, ni explicación final de un fenómeno natural. La teoría constructal tiene un merito por ser una herramienta para optimizar sistemas físicos y el principio fundamental puede ser aplicado de manera práctica en la ingeniería, de manera que se obtiene una solución a partir de la manipulación de la forma y la estructura.

En particular, al aplicar la teoría constructal en mis estudios previos y ahora en el presente trabajo, la impresión que deja manejar los diferentes desarrollos, es que todos los desarrollos tienen limitaciones teóricas, al ser aplicados a problemas mas complejos, la teoría constructal no ofrece aun soluciones generales para determinar resultados coherentes, los resultados obtenidos estan sujetos a parámetros y restricciones físicas. Cabe mencionar que dichos métodos, al ser aplicados a consideraciones físicas mas complejas, los resultados no son precisamente óptimos o bien carecen de significado físico.

Lo deseable al aplicar la teoría constructal es que pase de un modelo teórico a la materialización como proyecto de investigación, con el objetivo de verificar si es una opción viable tecnologica y económicamente. Para lograr lo anterior, es necesario contemplar diferentes aspectos de un colector solar adaptable ante los cambios de las condiciones climatológicas, la inclusion de un fluido reológico hace necesario implementar un control, en el apéndice F, se describen los elementos necesarios a considerar para el desarrollo de un control del fluido reológico. En un trabajo a futuro se observan muchos retos como son la construcción, caracterización de un fluido no newtoniano como fluido de trabajo, la implementación de un control para el fluido, como para el dispositivo de colección solar, el diseño del almacenamiento del calor colectado a lo largo del día.

# Referencias

- [1] Bejan, A. *Shape and Structure, from Engineering to Nature*. 2a ed, Cambridge, U.K., Cambridge University Press, 2000
- [2] Almanza, R., Muñoz, F., *Ingeniería de la Energía Solar*. Colegio Nacional, México. 1994
- [3] Zsargut, J., Stanek, W., *Thermo-ecological optimization of a solar collector*. Energy, 32, pp.584-590, 2007
- [4] Kalgirou, S., *Optimization of a solar systems using, artificial neural networks and genetic algorithms*. Applied Energy, 77, pp.383-405, 2004
- [5] Kacan, E., Ulgen, K., *A new approach to flat plate solar collectors*. Ege University Solar Energy, Institute Energy Research Group. 2005
- [6] Badescu, V., *Optimal control of flow in solar collectors for maximum exergy extraction*. Int. J. of Heat and Mass Transfer. 50, 21-22, pp.4311-4322, 2007
- [7] Torres, E., Cervantes de Gortari, J., Ibarra-Salazar, B.A., Picon, M., A., *A design method of flat-plate solar collectors based on minimum entropy generation*. Exergy, 1, pp. 46- 52 ,2001
- [8] Torres, E., Navarrete, J., Cervantes de Gortari, J., *Thermodynamic optimization as an effective tool to design solar heating systems*. Energy, 29, pp. 2305- 2315, 2004
- [9] Alghoul, M., Sulaiman, B., Azmi, B., *Review of materials for solar thermal collectors*. Anti-corrosion Methods and Materials. 52, 4, pp. 199-206, 2005
- [10] Nitz, P., Hartwig, H., *Solar control with thermotropic layers*. Solar Energy, 79, pp. 573-582, 2005
- [11] Lampert, C., *Chromogenic smart materials*. Materials Today. 7, 3, pp. 28-35. 2004
- [12] Grandqvist, C., Wittwer, V., *Materials for solar energy conversion: an overview*. Solar Energy Materials and Solar Cells. 54, pp. 39-48, 1998
- [13] Hailot, D. Py, X. FGOetz, V., Benabdelkarim, M. *Storage composites for the optimization of solar wave heating systems*. Chemical Engineering Research and Design. 86, pp. 612-617, 2008.
- [14] Reim, M., Körner, W., Manara, J., *Silica aerogel granulate material for thermal insulation and daylighting*. Solar Energy. 79, pp. 131-139, 2005

- [15] Reim, M., Reichenauer, G., Körner, W. *Silica aerogel granulate-structural, optical and thermal properties*. J. of Non-Crystalline Solids, 350, pp. 358-363, 2004
- [16] Bejan, A., *Advanced Engineering Thermodynamics*. 2a ed. John Wiley and Sons, 1997
- [17] Mandelbrot, Benoit B., *The fractal geometry of nature*. W.H. Freeman and Company, New York, 1977
- [18] Bejan, A. *Constructal Theory: from thermodynamic and geometric optimization to predicting shape in nature..* Energy Convers. Mgmt., 39, 16-18, pp. 1705 -1718, 1998
- [19] Bejan, A. *Constructal theory network of conduction paths for cooling heat generating volume*. Int. J. of Heat and Mass Transfer. 40, pp.799-816,1997
- [20] Wechsatoł, W., Lorente, S., Bejan, A., *Tree-shaped networks with loops*. Int. J. of Heat and Mass Transfer. 48, pp.573-583, 2005
- [21] Wechsatoł, W., Lorente, S., Bejan, A., *Optimal tree-shaped networks for fluid flow in a disc-shaped body*. Int. J. of Heat and Mass Transfer. 45, pp.4911-4924,2002
- [22] Murray, C.D., *The physiological principle of minimum work. 1. The Vascular system and the cost of blood volume*. Physiology. 12, pp. 207-214.1926
- [23] Sherman, T., *On connecting large vessels to small. The meaning of Murray's law*. J. Gen. Physiol. 78. pp. 431-435, 1981
- [24] Rocha, L.A.O., Lorente, S., Bejan, A., *Constructal design for cooling a disc shaped area by conduction*. Int. J. of Heat and Mass Transfer, 45, pp. 1643- 1652, 2002
- [25] Dan, N., Bejan, A., *Constructal tree networks for the time-dependent discharge of a finite size volume to point*. Int. J. of Applied Physics, 84, pp. 3042- 3050, 1998
- [26] Miguel, A.F., *Constructal design of a solar energy-based systems for buildings*. Energy and Buildings. 40, pp. 1020-1030, 2008
- [27] Davies, P.F., *Flow-mediated endothelial mechanotransduction*. Physiological Reviews, 75, num. 3, pp.519-560, 1995
- [28] Secomb, T.W., Hsu, R., Pries, A.R., *Motion of red blood cells in capillary with and endothelial surface layer: Effect of endothelial surface layer*, Microcirculation, 9, pp. 189-196, 2002
- [29] Prior, B.M., Yang, H.T., Terjung, R.L., *What makes vessels grow with exercise training?* J. Appl. Physiology. 97, pp.1119-1128, 2004
- [30] Phan-Thien, N., Tanner, R.I., *A new constitutive equation derived from network theory*. J. of Non-newt. Fluid Mech.2, pp. 353-365 1977
- [31] Phan-Thien N., *A nonlinear network viscoelastic model*, J. of Rheology, 22, pp. 259-283, 1978
- [32] Phan-Thien, N., *Understanding Viscoelasticity*. Basics of Rheology, Springer, Germany, 2002
- [33] Oliveira, P.J., Pinho, F.T., *Analytical solution for fully developed channel and pipe flow of Phan-Thien—Tanner fluids*. J. of Fluid Mech. 387, pp. 271-280, 1999

- [34] Nobrega, F.T., Pinho, P.J., Oliveira, O.S., *Accounting for temperature dependent properties in viscoelastic flows*, Int. J. of Heat and Mass Transfer, 47, pp.1141-1158, 2004
- [35] Zill, G. Dennis, *Ecuaciones Diferenciales*. International Thomson Editores, 6 Ed. México, 1997
- [36] Pinho, F.T., Oliveira, P.J., *Analysis of forced convection in pipes and channels with the simplified Phan-Thien—Tanner fluid*, Int. J. of Heat and Mass Transfer, 43, pp. 2273-2287, 2000
- [37] Atalik, K., Keunings, R., *On the occurrence of even harmonics in the shear stress response of viscoelastic fluids in large amplitude oscillatory shear*. J. of Non-Newtonian Fluid Mech. 122, pp.107-116, 2004
- [38] Hasemabadi, S.H., Etemad, S.Gh., Thibault, J., Golkar, M.R., *Analytical solution for dynamic pressurization of viscoelastic fluids*. Int. J. of Heat and Fluid Flow, 24, pp. 137-144, 2003
- [39] Cess, D.R., *Free convection boundary-layer heat transfer*. en Rohsenow, V.M., Hannett, J.P., *Handbook of Heat Transfer.*, 1985
- [40] Martynenko, O.G., Khramtsov, P.P., *Free-Convection Heat Transfer*, Springer, New York, 2005
- [41] Bejan, A., *Heat Transfer*, Wiley Interscience New York,N.Y., 1993
- [42] Özisik, M., *Heat Conduction*, Wiley, New York, N.Y., 1993
- [43] Hoffman, J.D., *Numerical Methods for Engineers and Scientist*. 2nd Ed. New York, Marcel Dekker Inc. 1992
- [44] Bejan, A. *Design with Constructal Theory*, John Wiley & Sons Inc., New Jersey, 2008
- [45] Bird, B.R.,Armstrong, R.C., Hassager, O., *Dynamics of Polymeric Liquids: Fluid Mechanics*. Vol 1, John Wiley and Sons, E.U.A., 1977
- [46] Bejan, A., Rocha, L., Lorente, S., *Thermodynamic optimization of geometry: T-Y shaped constructs of fluid streams.*, Int. J. of Heat and Mass Transfer, 45, pp. 4911-4924, 2002.
- [47] Kou, Jian-Long, Lu Hang-Jun, Wu Feng-Min, Xu You-Sheng, *Analysis of thermal conductivity in tree-like branched networks* Chinese Physics B, 18, num. 4, pp. 1553-1559, 2009
- [48] Peng, Xu, Bomng, Yu, *The scaling laws of transport properties for fractal-like tree networks*, J. of Appl. Physics, 100, pp. 104906-1–104906-8, 2006
- [49] Nickalls, R.W.D., *A new approach to solving the cubic: Cardan´s solution revealed*, The Mathematical Gazzete, 77, 480, pp.354-359, 1993
- [50] Ogata, K., *Dinámica de Sistemas*. Prentice Hall, México, 1987
- [51] Barnes, H.A., *A Handbook of Elementary Rheology*. University of Wales, Inglaterra, 2000
- [52] Larson, R.G., *The Structure and Rheology of Complex Fluids*. Oxford University Press, New York, 1999

- [53] Kulicke, W.M., Clasen, C., *Viscosimetry of Polymers and Polyelectrolytes*. Springer, Alemania, 2004
- [54] VanDoren, V.J., *Techniques for Adaptive Control*, Butterworth-Heinemann, Elsevier Science, 2003
- [55] Tewarim A., *Model Control Design. with MATLAB and SIMULINK*. John Wiley and Sons. Inglaterra. 2002
- [56] Zhang, G.H, Zhao, C.Y., *Thermal and Rheological properties of microencapsulated phase change materials*. Renewable Energy, 36, pp. 2959-2966, 2011
- [57] Bird, B.R., *Fenómenos de Transporte*, Reverté, México, 2004
- [58] Eicker, U., *Solar Technologies for Buildings*, John Wiley & Sons, 2003
- [59] Bejan, A. Merckx, G.W., *Constructal Theory of Social Dynamics*, Springer, Estados Unidos, 2007

# Apéndice A

## Análisis de Orden de Magnitud

Para definir el perfil de velocidades de un fluido newtoniano con flujo totalmente desarrollado, homogéneo, incompresible en una tubería de radio  $R_0$ , se realiza un análisis de orden de magnitud. Una vez definida la expresión del perfil de velocidades en la tubería, puede ser utilizada en el proceso de optimización de la teoría constructal. Las ecuaciones necesarias para el orden de magnitud son las siguientes,

Ecuación de continuidad

$$\frac{1}{r} \frac{\partial r v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

Ecuación de cantidad de movimiento en coordenadas cilíndricas en la dirección  $r$ ,

$$\rho \left( v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{2\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \left( \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) \right] + \mu \frac{\partial}{\partial z} \left[ \left( \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) \right]$$

Ecuación de cantidad de movimiento en el eje longitudinal  $z$ ,

$$\rho \left( v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) = -\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \left( \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) \right] + 2\mu \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}$$

Las escalas utilizadas son las siguientes

$$r \sim R_0 \quad z \sim L_0 \quad v_z \sim U_c \quad v_r \sim V$$

$$P \sim P_e - P_s \equiv \Delta P$$

donde  $R_0$  y  $L_0$  son el radio y la longitud de la tubería respectivamente,  $V$  es la velocidad en la dirección radial.

A partir de la ecuación de continuidad y empleando las relaciones anteriores se obtiene la siguiente expresión:

$$V \sim U_c \frac{R_0}{L_0}$$

donde  $U_c$  es una velocidad característica en la dirección longitudinal de la tubería.

Utilizando las escalas definidas anteriormente en las ecuaciones de cantidad de movimiento en las direcciones  $r$  y  $z$  se obtiene los siguientes órdenes de magnitud;

$$\text{Re } \epsilon^3 \sim 1, 2\epsilon^2, \epsilon^2, \epsilon^4$$

$$\text{Re } \epsilon \sim 1, \epsilon^2, 1, 2\epsilon$$

Los términos de la izquierda se refieren a los términos inerciales, los elementos de la derecha, al gradiente de presión y los términos viscosos, respectivamente. En ambas expresiones  $\text{Re}$  es el número de Reynolds, definido de la siguiente manera  $\text{Re} = \frac{\rho U_c R_0}{\mu}$ , y  $\epsilon$  es una relación de esbeltez definida como  $\epsilon = \frac{R_0}{L_0}$ .

La velocidad característica  $U_c$  se define a partir de la ecuación de cantidad de movimiento en la dirección  $z$ , considerando que el término viscoso correspondiente al cambio de la velocidad longitudinal en la dirección radial es del mismo orden de magnitud que la fuerza de presión. Entonces el orden de magnitud de la velocidad característica,  $U_c$  puede definirse mediante la siguiente expresión,

$$U_c \sim \left[ \frac{\Delta P R_0^2}{\mu L_0} \right].$$

#### Ecuaciones Adimensionales

Para obtener las ecuaciones adimensionales para la tubería, se usan los resultados anteriores, definiendo las siguientes las variables adimensionales,

$$\chi = \frac{z}{L_0}, \quad \eta = \frac{r}{R_0}, \quad \bar{v}_z = \frac{v_z}{U_c}, \quad \bar{v}_r = \frac{v_r L_0}{U_c R_0}$$

$$\Psi = \frac{P - P_1}{P_e - P_1}.$$

La ecuación de continuidad de forma adimensional queda de la siguiente manera,

$$\frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} (\eta \bar{v}_r) + \frac{\partial}{\partial \chi} (\bar{v}_z) = 0.$$

Las ecuaciones de cantidad de movimiento en las direcciones  $r$  y  $z$  obtenidas son las siguientes:

$$\text{Re } \epsilon^3 \left( \bar{v}_r \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial \eta} + \bar{v}_z \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial \chi} \right) = -\frac{\partial \Psi}{\partial \eta} - 2\epsilon^2 \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \eta \left( -\frac{\partial \bar{v}_r}{\partial \eta} \right) \right] + \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial \chi} \left[ \left( -\frac{\partial \bar{v}_z}{\partial \eta} - \epsilon^2 \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial \chi} \right) \right],$$

$$\text{Re } \epsilon \left( \bar{v}_r \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial \eta} + \bar{v}_z \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial \chi} \right) = -\frac{\partial \Psi}{\partial \chi} - \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \eta \left( -\frac{\partial \bar{v}_z}{\partial \eta} - \epsilon^2 \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial \chi} \right) \right] + 2\epsilon \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \left( -\frac{\partial \bar{v}_z}{\partial \chi} \right) \right].$$

La velocidad del fluido en una tubería de un dispositivo de colección solar, la velocidad promedio es del orden de  $10^{-4}$ , el orden de magnitud del número de Reynolds, es de  $Re \sim 10^{-2}$ , por otro lado considerando que la relación de esbeltez tiene un valor muy pequeño, en una primera aproximación los términos inerciales se pueden considerar despreciables. Las expresiones para la Ec. de continuidad y de cantidad de movimiento pueden expresarse de la siguiente manera:

$$\frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} (\eta \bar{v}_r) + \frac{\partial}{\partial \chi} (\bar{v}_z) = 0, \quad (\text{a1})$$

$$0 = -\frac{\partial \Psi}{\partial \eta}, \quad (\text{a2})$$

$$0 = -\frac{\partial \Psi}{\partial \chi} - \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \eta \left( -\frac{\partial \bar{v}_z}{\partial \eta} \right) \right]. \quad (\text{a3})$$

De la Ec.(a3), se puede apreciar que la velocidad en la dirección  $\chi$ , puede obtenerse en términos del gradiente de presión y de la coordenada radial, dicha ecuación diferencial queda sujeta a las siguientes condiciones de frontera,

$$\begin{aligned} \eta &= 1 & ; & & \bar{v}_z &= 0, \\ \eta &= 0 & ; & & \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial \chi} &= 0. \end{aligned}$$

El perfil de velocidad a lo largo del eje de la tubería es una función de la variable radial,

$$\bar{v}_z = \frac{1}{4} \frac{\partial \Psi}{\partial \chi} (1 - \eta^2). \quad (\text{a4})$$

La ecuación anterior representa el perfil de velocidades en una tubería de diámetro  $D_0$ .

La teoría constructal requiere de definir el perfil de temperaturas en la tubería mediante un balance de energía, por lo que es necesario calcular el valor de la velocidad a lo largo del radio de la tubería. El perfil de velocidad se expresa en variables dimensionales, ya que es así como se presenta en el balance de energía, dicho perfil se puede expresar de la siguiente manera,

$$v_z = \bar{v}_z U_c = \frac{R_0^2}{4\mu} \frac{\partial P}{\partial z} \left( 1 - \left( \frac{r}{R_0} \right)^2 \right). \quad (\text{a5})$$

Integrando la ecuación anterior con respecto a la variable  $r$ ,

$$\tilde{v}_z = \int_0^{R_0} v_z dr = \frac{R_0^2}{4\mu} \frac{\partial P}{\partial z} \left( \frac{2}{3} R_0 \right). \quad (\text{a6})$$

Por otro lado, la velocidad media de Poiseuille se define mediante la siguiente expresión;

$$U_{prom} = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^R \bar{v}_z r dr d\theta}{\int_0^{2\pi} \int_0^R r dr d\theta} = \frac{R_0^2}{8\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \quad (\text{a7})$$

Se puede apreciar a partir de la Ec.(a7) que la Ec.(a6) puede expresarse en términos de la velocidad promedio de la siguiente manera,

$$\tilde{v}_z = 2U_{prom} \left( \frac{2}{3} R_0 \right) = \frac{4}{3} U_{prom} R_0. \quad (\text{a8})$$

La ecuación anterior es un resultado que se utiliza en los diferentes planteamientos teóricos de la teoría constructal desarrollados en el presente trabajo.

# Apéndice B

Área del primer elemento constructal en forma de disco considerado como el área de un triángulo isósceles.

El primer elemento constructal puede considerarse lo suficientemente esbelto para aproximar su área al área de un triángulo isósceles, en la Figura 1, se observan las dimensiones del elemento de construcción en forma de disco, donde  $H_0$ ,  $L_0$  son la altura y el largo del primer elemento.

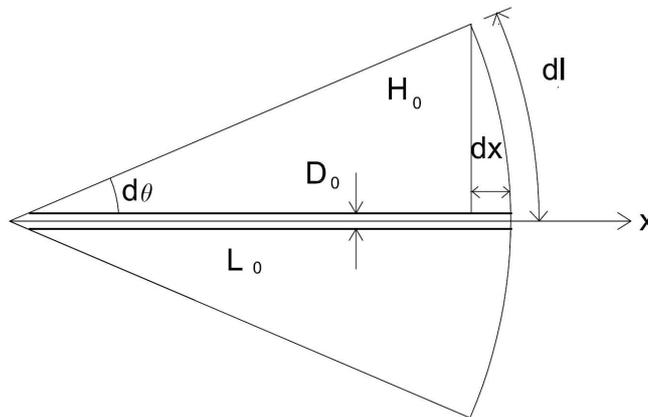


Figura 1: Elemento constructal en forma de disco

Por otro lado la longitud de arco, se define de la siguiente manera,

$$dl = L_0 d\theta$$

A partir del triángulo formado por  $dx$  y  $H_0$ , y de considerar que  $dx$  y  $d\theta$  son muy pequeños, se obtiene la siguiente expresión,

$$dl = \sqrt{dx^2 + H_0^2} = \sqrt{H_0^2 \left[ \left( \frac{dx}{H_0} \right)^2 + 1 \right]} \cong H_0$$

Por el resultado anterior se puede considerar el área del elemento constructal como el área de un triángulo  $A_0 = \frac{2H_0L_0}{2} = H_0L_0$ . Este resultado permite realizar las simplificaciones necesarias para desarrollar un primer elemento constructal para generar una red de tuberías en un sector cilíndrico.

# Apéndice C

## Número de Nusselt

El número de Nusselt mide la transferencia de calor de forma adimensional, en este caso se considera la diferencia de temperatura entre la pared de la tubería y el fluido a la salida del elemento de construcción. Para definir el número de Nusselt, se considera que el calor que sale del elemento, es el mismo calor que se transfiere por un proceso de convección a través del fluido,

$$\dot{q}_s = \dot{q}_0 \text{sen}(\omega t) = h(x)(T_w - T(x)) \quad (\text{c-1})$$

donde  $h(x)$ , es el coeficiente convectivo, en este caso, varia conforme la coordenada  $x$  dada la colección de calor a lo largo del eje longitudinal.

El número de Nusselt asociado al diámetro de la tubería, como longitud característica se define mediante la siguiente expresión;

$$Nu = \frac{hD_0}{k_f} \quad (\text{c-2})$$

Sustituyendo el coeficiente convectivo  $h$  de la Ec.(c-1) en la Ec.(c-2) se obtiene la siguiente expresión en función de las diferencias de temperatura,

$$Nu_x = \frac{\dot{q}_0 \text{sen}(\tau) D_0}{k_f T_0 (\theta_w - \theta(\chi))} \quad (\text{c-3})$$

De la Ec.(c-3) y con ayuda de la temperatura en la dirección  $\chi$ , Ec.(4.4); se obtiene un número de Nusselt promedio definido mediante la siguiente integral,

$$Nu_{prom} = \frac{\dot{q}_0 \text{sen}(\tau) D_0}{k_f T_0} \int_0^1 \frac{1}{\left(\theta_w - \frac{3}{2} \frac{\dot{q}_0 \text{sen}(\tau) L_0}{T_0 k_f Pe} \chi\right)} d\chi \quad (\text{c-4})$$

La solución a la integral anterior, es la siguiente;

$$Nu_{prom} = \frac{2}{3} Pe \frac{D_0}{L_0} \ln \left[ \frac{\theta_w}{\theta_w - \frac{3}{2} \frac{\dot{q}_0 \text{sen}(\tau) L_0}{T_0 k_f Pe}} \right] \quad (\text{c-5})$$

En la Ec.(c-5) se sustituye la temperatura adimensional de la pared a partir de la Ec.(4.3) en la coordenada correspondiente a la pared de la tubería  $\eta = \phi_0(y = R_0)$  definiendo la siguiente expresión para el número de Nusselt promedio,

$$Nu_{prom} = \frac{4}{3}\varepsilon_0 Pe \ln \left[ 1 + \frac{3}{2} \frac{\bar{a}_0 \bar{\alpha}}{\varepsilon_0 Pe} \frac{1}{(2 - \phi_0)} \right] \quad (c-6)$$

donde  $\bar{a}_0$  la relación geométrica entre la altura y el espesor del elemento constructal definida de la siguiente manera  $\bar{a}_0 = H_0/a$ .

# Apéndice D

## Modelo Simplificado de Phan-Thien & Tanner (SPTT)

El modelo simplificado de Phan-Thien & Tanner (SPTT), fue reportado por Oliveira, P.J., *et al.* [33] para flujo de fluidos en tuberías y canales, Pinho, F.T., *et al.* [36], reportaron su aplicación para la descripción de convección forzada mediante un fluido modelado por el modelo SPTT. El modelo simplificado de Phan-Thien & Tanner se define mediante la siguiente expresión;

$$Y(\tau_{kk}, T) \tau_{ij} + \lambda \left( \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial t} + \frac{\partial (u_k \tau_{ij})}{\partial x_k} \right) = \tilde{\eta} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \left( \tau_{jk} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \tau_{ik} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right), \quad (\text{D-1})$$

donde  $\lambda$ , es el tiempo de relajación del material,  $\tilde{\eta}$  es el coeficiente de viscosidad.

La función  $Y(\tau_{kk}, T)$ , esta asociada a la destrucción de las uniones de la red molecular [30], por lo que puede ser definida como el producto de dos funciones, como se describe a continuación;

$$Y(\tau_{kk}, T) = \phi(T) f(\tau_{kk}). \quad (\text{D-2})$$

La función  $\phi(T)$  se considera arbitrariamente igual a la unidad, a la temperatura de referencia del material a la que los parámetros del material son determinados y por tanto el efecto térmico no es considerado en la función de esfuerzos [31]. La función dependiente de los esfuerzos,  $f(\tau_{kk})$ , donde  $\tau_{kk}$  es la traza del tensor de esfuerzos, presenta una forma exponencial, que puede ser linearizada cuando el argumento de la función exponencial es muy pequeño; dicha función se define de la siguiente manera;

$$f(\tau_{kk}) = \exp\left(\frac{\varepsilon^* \lambda}{\tilde{\eta}} \tau_{kk}\right),$$

donde  $\varepsilon^*$  es un parámetro asociado al comportamiento elongacional del fluido.

La simplificación antes mencionada fue reportada por Nobrega, J.M. *et al.* [34], la cual es adecuada para pequeñas deformaciones moleculares que se presentan en flujos débiles, así como en flujos de Couette en tuberías en estado permanente.

La simplificación de la función exponencial, se define de la siguiente manera;

$$f(\tau_{kk}) = 1 + \frac{\varepsilon^* \lambda}{\tilde{\eta}} \tau_{kk}. \quad (\text{D-3})$$

A la expresión anterior se aplican las condiciones del esfuerzo cortante para el flujo axisimétrico que circula en la tubería, se considera que el perfil de velocidades depende unicamente de la variable radial,  $u_z = u_z(r)$ ,  $u_r = u_\theta = 0$ . Aplicando dichas condiciones, se obtienen tres ecuaciones características;

$$\left(1 + \frac{\varepsilon^* \lambda}{\tilde{\eta}} \tau_{kk}\right) \tau_{zz} = 2\lambda \tau_{rz} \frac{\partial u_z}{\partial r}, \quad (\text{D-4})$$

$$\left(1 + \frac{\varepsilon^* \lambda}{\tilde{\eta}} \tau_{kk}\right) \tau_{rr} = 0, \quad (\text{D-5})$$

$$\left(1 + \frac{\varepsilon^* \lambda}{\tilde{\eta}} \tau_{kk}\right) \tau_{rz} = \tilde{\eta} \frac{\partial u_z}{\partial r} + \lambda \tau_{rr} \frac{\partial u_z}{\partial r}. \quad (\text{D-6})$$

La Ec.(D-5) esta igualada a cero, en el caso de que la función de esfuerzos sea nula,  $1 + \frac{\varepsilon^* \lambda}{\tilde{\eta}} \tau_{kk} = 0$ , implicaría que la traza del esfuerzo cortante es nula, esto implica que no se tendría un tensor de esfuerzo, la situación anterior no es posible, por lo que se concluye que el esfuerzo cortante en la dirección radial  $\tau_{rr}$  es nulo. A partir de lo anterior es posible definir la traza del tensor de esfuerzos, de la siguiente manera;

$$\tau_{kk} = \tau_{zz}. \quad (\text{D-7})$$

Las ecuaciones características anteriores, se definen entonces de la siguiente manera,

$$\left(1 + \frac{\varepsilon^* \lambda}{\tilde{\eta}} \tau_{zz}\right) \tau_{zz} = 2\lambda \tau_{rz} \frac{\partial u_z}{\partial r}, \quad (\text{D-8})$$

$$\left(1 + \frac{\varepsilon^* \lambda}{\tilde{\eta}} \tau_{zz}\right) \tau_{rr} = 0, \quad (\text{D-9})$$

$$\left(1 + \frac{\varepsilon^* \lambda}{\tilde{\eta}} \tau_{zz}\right) \tau_{rz} = \tilde{\eta} \frac{\partial u_z}{\partial r}. \quad (\text{D-10})$$

Hashemabadi, S. H., *et al.* [38], reportaron que es posible aplicar el modelo simplificado de Phan-Thien & Tanner para un flujo de fluido laminar, homogéneo, incompresible, considerando la condición de no deslizamiento en las paredes. Dicho autor utiliza la ecuación de cantidad de movimiento y considera que en el flujo en una tubería, para un fluido con las características mencionadas anteriormente, es esencialmente la competencia entre dos fuerzas elementales, el gradiente de presión que promueve o incita el movimiento del fluido y la resistencia al movimiento del fluido, que es manifiesta mediante el esfuerzo cortante.

La idea anterior puede expresarse, en coordenadas cilíndricas de la siguiente manera;

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\frac{1}{r} \frac{\partial (r\tau_{rz})}{\partial r}, \quad (\text{D-11})$$

$$\frac{\partial P}{\partial r} = 0. \quad (\text{D-12})$$

En este planteamiento, se considera que la Ec.(D-11), a diferencia de un fluido newtoniano, es desconocido, mas adelante, en la obtención del perfil de velocidades de un fluido no newtoniano mediante el modelo simplificado de Phan-Thien & Tanner, permite definir el gradiente de presión en términos de los parámetros que describen las características del fluido no newtoniano, como el parámetro elongacional  $\varepsilon$  y el número de Deborah  $De$ . A partir de la Ec.(D-11) es posible resolver la ecuación diferencial para obtener una expresión para el esfuerzo cortante en la pared,  $\tau_{rz}$ , las condiciones de frontera, son las siguientes,  $r = 0$ ,  $\tau = 0$ ;  $r = R$ ,  $\tau = \tau_{rz}$ ,

$$\tau_{rz} = \frac{r}{2} \left( \frac{\partial P}{\partial z} \right). \quad (\text{D-13})$$

La Ec.(D-13), se sustituye en la Ec.(D-8); obteniendo la siguiente expresión;

$$\left( 1 + \frac{\varepsilon^* \lambda}{\tilde{\eta}} \tau_{zz} \right) \tau_{zz} = -\lambda r \left( \frac{\partial P}{\partial z} \right) \frac{\partial u_z}{\partial r}. \quad (\text{D-14})$$

De la Ec.(D-10), se despeja  $\frac{\partial u_z}{\partial r}$  y se sustituye en la ec(D-14), y a partir de la definición del esfuerzo cortante  $\tau_{rz}$  y algunas simplificaciones algebraicas, se obtiene la siguiente expresión;

$$\tau_{zz} = -\frac{\lambda r^2}{2\tilde{\eta}} \left( \frac{\partial P}{\partial z} \right)^2 \quad (\text{D-15})$$

Una vez definidos los esfuerzos cortantes,  $\tau_{rz}$  y  $\tau_{zz}$ , y a partir de la Ec.(D-10), se obtiene la expresión necesaria para definir el perfil de velocidad en la tubería para un fluido no newtoniano;

$$\frac{\partial u_z}{\partial r} = -\frac{r}{2\tilde{\eta}} \left( \frac{\partial P}{\partial z} \right) - \frac{\varepsilon^* \lambda^2 r^3}{4\tilde{\eta}^3} \left( \frac{\partial P}{\partial z} \right)^3 \quad (\text{D-16})$$

Aplicando la siguiente condición de frontera para resolver la Ec.(D-16);  $r = R$ ;  $u_z = 0$ ; y simplificando se obtiene el perfil de velocidades,

$$u_z(r) = \frac{1}{4\tilde{\eta}} \left( \frac{\partial P}{\partial z} \right) (R^2 - r^2) \left[ 1 + \frac{\varepsilon^* \lambda^2}{16\tilde{\eta}^3} \left( \frac{\partial P}{\partial z} \right)^2 (R^2 + r^2) \right]. \quad (\text{D-17})$$

En la expresión anterior, es conveniente trabajar con la velocidad promedio, este paso es necesario para definir el gradiente de presión en términos de los parámetros propios del modelo reológico. La velocidad promedio esta dada por la definición del flujo reportada por Bird, R. *et al.* [45];

$$\bar{u} = \frac{1}{R^2} \int_0^R 2ru_z(r) dr. \quad (\text{D-18})$$

El resultado de la integración, define una expresión directa de la velocidad promedio, para un gradiente de presión;

$$\bar{u} = \frac{1}{4\tilde{\eta}} \left( \frac{\partial P}{\partial z} \right) \left( \frac{R^2}{2} \right) + \frac{\varepsilon^* \lambda^2}{16\tilde{\eta}^3} \left( \frac{\partial P}{\partial z} \right)^3 \left( \frac{2}{3} R^4 \right). \quad (\text{D-19})$$

La velocidad promedio obtenida para un fluido no newtoniano, evaluada en  $r = R$ , puede ser adimensionalizada a partir de calcular la velocidad promedio para un fluido newtoniano, aplicando la definición de la velocidad promedio anterior, dicha velocidad promedio se define de la siguiente manera;

$$\bar{u}_N = \frac{R^2}{8\tilde{\eta}} \left( \frac{\partial P}{\partial z} \right). \quad (\text{D-20})$$

La relación entre las velocidades newtoniana y no newtoniana, se define a partir del cociente de las Ecs.(D-19) y (D-20); la expresión que se obtiene, esta en función del gradiente de presión, el tiempo característico  $\lambda$ , el coeficiente de viscosidad  $\tilde{\eta}$  y el parámetro elongacional  $\varepsilon$ ,

$$\frac{\bar{u}_N}{\bar{u}} = \frac{1}{1 + \frac{\varepsilon^* \lambda^2}{3\tilde{\eta}^2} \left( \frac{\partial P}{\partial z} \right)^2 R^2}. \quad (\text{D-21})$$

Con la ayuda de la ecuación anterior y realizando el cociente de la velocidad  $u_z(r)$ , con la velocidad promedio, se obtiene la velocidad adimensional;

$$u^* = \frac{u_z(r)}{\bar{u}} = 2 \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right] \left( \frac{\bar{u}_N}{\bar{u}} \right) \left\{ 1 + 16 \frac{\varepsilon^* \lambda^2 \bar{u}^2}{R^2} \left( \frac{\bar{u}_N}{\bar{u}} \right)^2 \left[ 1 + \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right] \right\}. \quad (\text{D-22})$$

En la expresión anterior, se sustituyen las siguientes variables adimensionales;

$$\tilde{r} = \frac{r}{R}, \quad De = \frac{\lambda \bar{u}}{R}. \quad (\text{D-23})$$

El número de Deborah,  $De$ , es la relación entre el tiempo característico del material y el tiempo característico del fluido, que en este caso es el tiempo de residencia, el número de Deborah representa la naturaleza del flujo, con respecto a la escala de tiempo del fluido; en esencia es una medida del nivel de elasticidad del material. El número de Deborah definido anteriormente, esta basado en la velocidad promedio  $\bar{u}$ . El número de Deborah, en la teoría de fluidos viscoelásticos se define que para tiempos de observación muy grandes, para  $De \ll 1$ , el material se comporta como un fluido, para una situación de un tiempo de observación muy pequeño,  $De \gg 1$ , el material se comporta como un sólido, [32]. Sustituyendo las variables adimensionales anteriores en la Ec.(D-23), la velocidad adimensional puede expresarse de la siguiente manera;

$$u^* = \frac{u_z(r)}{\bar{u}} = 2 [1 - \tilde{r}^2] \left( \frac{\bar{u}_N}{\bar{u}} \right) \left[ 1 + 16\epsilon^* De^2 \left( \frac{\bar{u}_N}{\bar{u}} \right)^2 [1 + \tilde{r}^2] \right]. \quad (\text{D-24})$$

La expresión anterior sera tulizada en las ecuaciones correspondientes a los correspondientes balance de energía en la generación de redes modelada por la teoría constructal para un fluido no newtoniano. En esta formulación se considera que el gradiente de presión es desconocido, una forma de determinarlo es definiendo el término  $\frac{\bar{u}_N}{\bar{u}}$ , que a su vez es función del gradiente de presión, tal como se puede apreciar, en la Ec.(D-21); mas adelante se describe un método para obtener una expresión para el cociente de velocidades anterior, a partir de la solución de una ecuación algebraica de tercer grado para el cociente de velocidades mencionado, la solución queda en términos de los parámetros adimensionales propios del modelo reológico, el desarrollo de este método esta ampliamente documentado por Pinho, P. *et al.* [36].

Para determinar dicha relación de las velocidades, en función de los parámetros propios del modelo reológico, se evalúa la velocidad adimensional en  $r = 0$ ; donde la velocidad  $u_z(r = 0) = \bar{u}$ .

$$u^* = \frac{\bar{u}}{\bar{u}} = 1 = 2 \left( \frac{\bar{u}_N}{\bar{u}} \right) \left[ 1 + 16\epsilon^* De^2 \left( \frac{\bar{u}_N}{\bar{u}} \right)^2 \right]. \quad (\text{D-25})$$

La ecuación algebraica para  $\frac{\bar{u}_N}{\bar{u}}$ ; la solución de la ecuación algebraica de tercer grado se obtiene a partir de la formula de Cardano-Tartaglia, [36], [49], y puede expresarse de la siguiente manera;

$$2 \left( \frac{\bar{u}_N}{\bar{u}} \right) + 32\epsilon^* De^2 \left( \frac{\bar{u}_N}{\bar{u}} \right)^3 - 1 = 0. \quad (\text{D-26})$$

La solución se define de la siguiente manera;

$$\frac{\bar{u}_N}{\bar{u}} = \frac{(432)^{\frac{1}{6}} \left[ \left\{ \sigma_2^{\frac{1}{2}} + 3^{\frac{3}{2}} \sigma_1^{\frac{1}{2}} \right\} - 2^{\frac{2}{3}} \right]}{6 \sigma_1^{\frac{1}{2}} \left[ \sigma_2^{\frac{1}{2}} + 3^{\frac{3}{2}} \sigma_1^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{3}}}, \quad (\text{D-27})$$

donde  $\sigma_1 = \varepsilon^* De^2$  y  $\sigma_2 = 27\sigma_1 + 4$ .

La relación de velocidades  $\frac{\bar{u}_N}{\bar{u}}$  queda en función de los parámetros adimensionales, lo anterior presenta una ventaja, ya que el esfuerzo cortante en la pared  $\tau_{rz}$ , puede definirse en función del cociente de velocidades anterior, es posible explorar el comportamiento del esfuerzo cortante para diferentes valores de  $\varepsilon^*$ ,  $De$  con el objetivo de determinar un esfuerzo cortante que sea modulado para obtener la mayor cantidad de calor a lo largo del día. Para una condición de la señal solar con una baja intensidad de calor, el esfuerzo cortante se requiere que sea alto, para coleccionar la mayor cantidad de calor, por otro lado, cuando se tiene la máxima intensidad de calor, el esfuerzo cortante debe presentar un valor muy pequeño. El esfuerzo cortante, definido en la Ec.(D-13), puede ser expresado en términos de la velocidad promedio newtoniana, despejando el gradiente de presión de la expresión de la velocidad promedio para un fluido newtoniano, Ec.(D-20); de tal manera que el esfuerzo cortante puede expresarse de a siguiente manera,

$$\tau_{rz} = r \frac{4\tilde{\eta}}{R^2} \bar{u}_N. \quad (\text{D-28})$$

Con la expresión anterior, se puede adimensionalizar el esfuerzo cortante al incluir la relación de velocidades, definida en la Ec.(D-27), sustituyendo la relación anterior, el esfuerzo cortante adimensional se expresa de la siguiente manera;

$$\bar{\tau} = \frac{\tau_{rz}}{4\tilde{\eta}/R} = \left( \frac{\bar{u}_N}{\bar{u}} \right) \tilde{r} \quad (\text{D-29})$$

El modelo de Phan-Thien Tanner, permite definir, tanto la velocidad adimensional, como el esfuerzo cortante, en términos del parámetro elongacional  $\varepsilon$  y el número de Deborah, de tal manera que se pueda modular el esfuerzo cortante a partir de plantear que el parámetro elongacional varía con el tiempo, de tal manera que pueda modularse a su vez el esfuerzo cortante en la tubería del arreglo de tuberías, optimizado geoméricamente mediante la teoría constructal, el parámetro elongacional propuesto se define mediante la siguiente expresión;

$$\varepsilon^* = \varepsilon_0^* (1 + \beta \text{sen}(\omega t)) \quad (\text{D-30})$$

El parámetro elongacional, puede ser obtenido a partir de mediciones de la viscosidad elongacional ajustados a las predicciones del modelo general de Phan-Thien & Tanner, [31].

Definido lo anterior es posible aplicar la teoría constructal para la generación de redes con un fluido no newtoniano, modulado a partir de la función propuesta, Ec.(D-30) de un elemento constructal en forma de disco mediante el modelo reológico anterior para definir un fluido viscoelástico.

# Apéndice E

Las gráficas 5.22 y 5.23 resumen las curvas mínimas de la resistencia térmica para los diferentes valores del número de Deborah, del parámetro elongacional de referencia y de la amplitud del modelo propuesto para el parámetro elongacional. En las gráficas siguientes se fija el número de Deborah y el parámetro elongacional de referencia variando la amplitud denominada por  $\beta$ , como resultado se obtiene una familia de curvas de la resistencia térmica. Posteriormente, después de hacer un barrido en los valores de los parámetros adimensionales, se toma las curvas que presenten un menor valor de cada grupo de valores de los parámetros adimensionales, que básicamente se dividen en números de Deborah muy grandes y números de Deborah pequeños, de tal manera que se puedan resumir en una sola gráfica las curvas mínimas de la resistencia térmica; las Figuras 5.22 y 5.23 resumen la situación anterior y pueden apreciarse en el capítulo de resultados. Algunas de las figuras siguientes se realizaron por separado en favor de apreciar mejor las diferencias entre las curvas de la resistencia térmica. Las gráficas obtenidas son las siguientes:

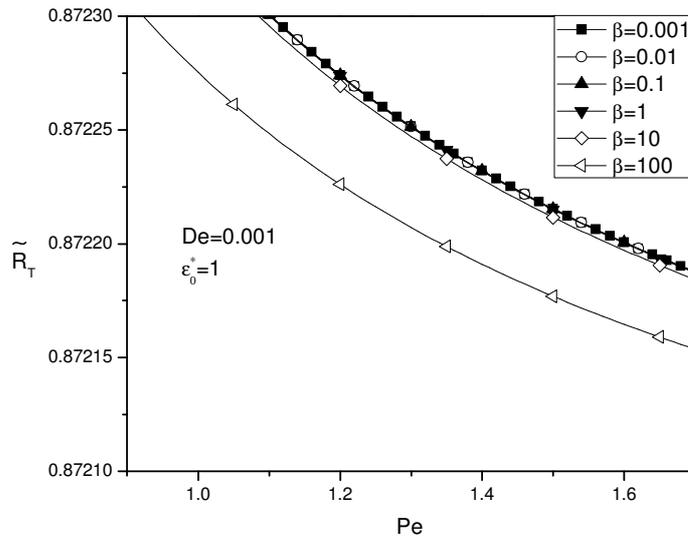


Figura 2:  $De = 0.001$ , la curva mínima se da para  $\beta = 100, \varepsilon_0^* = 1$

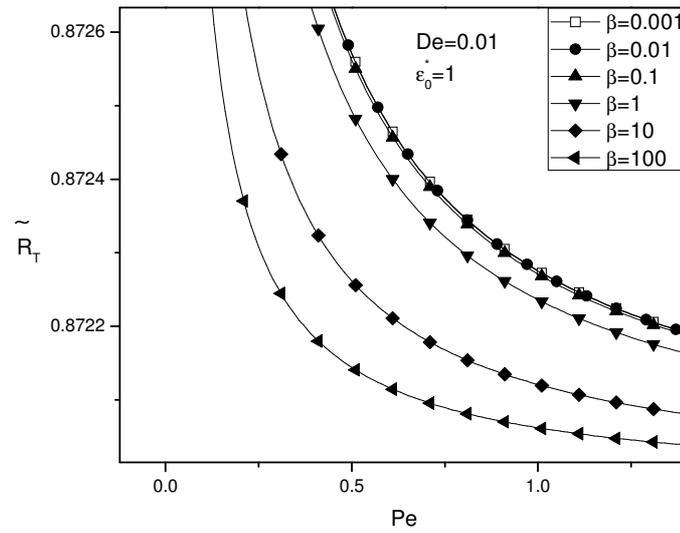


Figura 3: Curva mínimas para  $De = 0.01$ ,  $\beta = 100$ ,  $\varepsilon_0^* = 1$

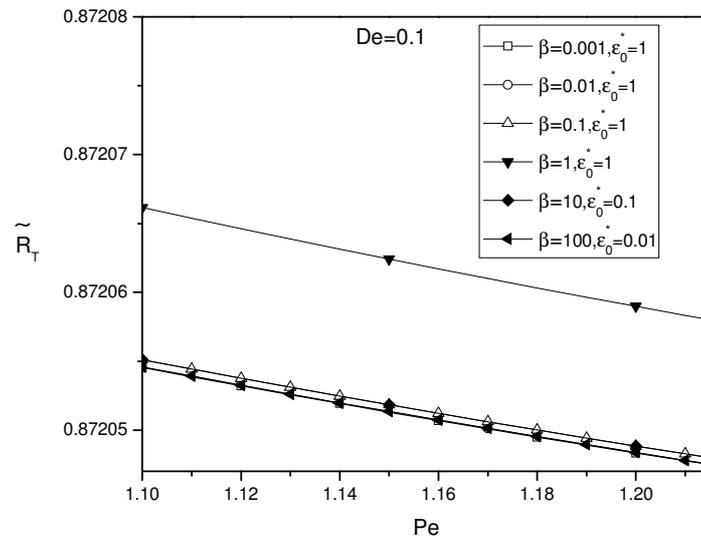


Figura 4: Curva mínima para  $De = 0.1$ ,  $\beta = 100$ ,  $\varepsilon_0^* = 1$

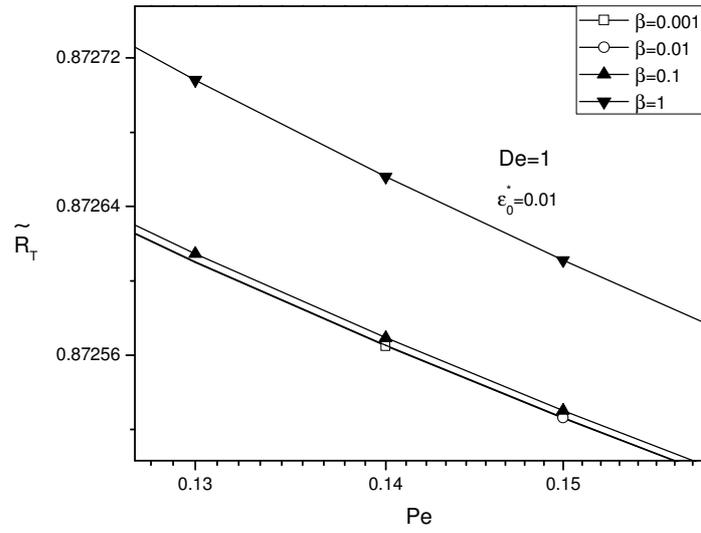


Figura 5: Curva mínima para  $De = 1$ ,  $\beta = 100$ ,  $\varepsilon_0^* = 0.01$

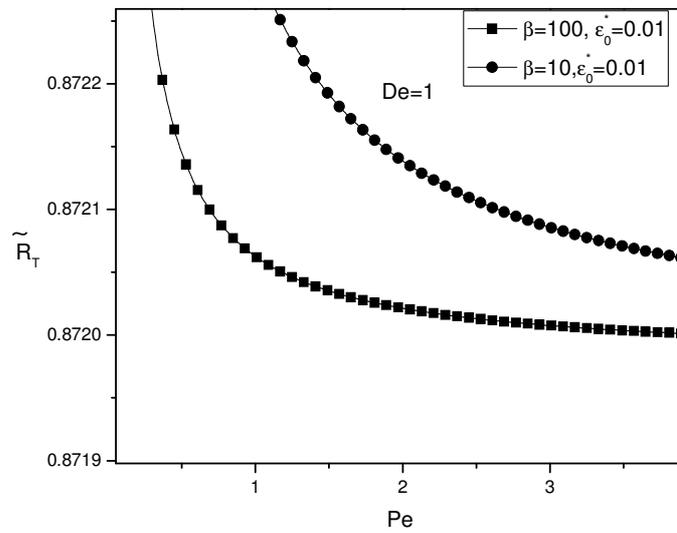


Figura 6: Curva mínima para  $De = 1$ ,  $\beta = 100$ ,  $\varepsilon_0^* = 0.01$

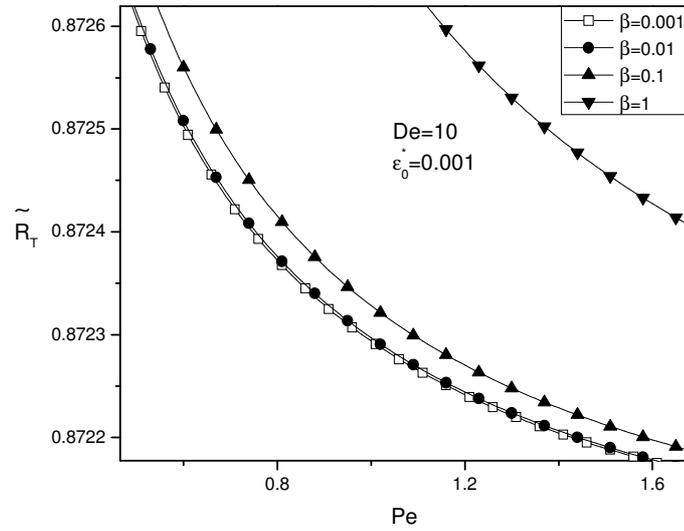


Figura 7: Curva mínima para  $De = 10$ ,  $\beta = 0.001$ ,  $\varepsilon_0^* = 0.001$

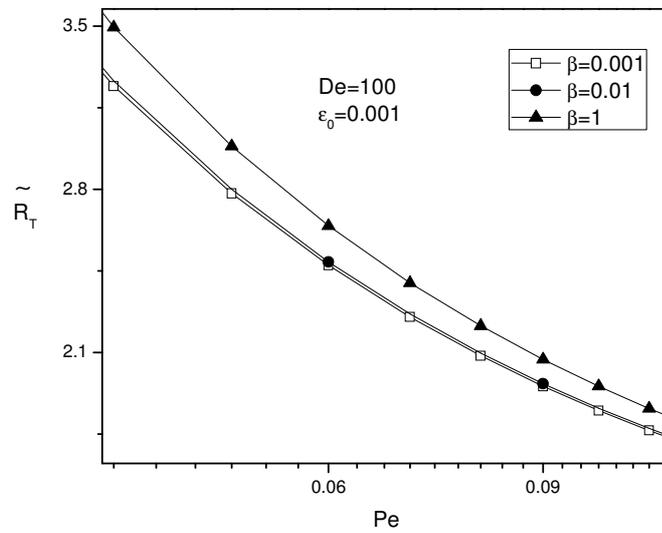


Figura 8: Curva mínima para  $De = 100$ ,  $\beta = 0.001$ ,  $\varepsilon_0^* = 0.001$

# Apéndice F

## Propuesta de Control

En este capítulo se describe de manera general una técnica de control para la adaptación del fluido ante el cambio de la señal senoidal durante el día. Dado que no es la intención de este trabajo de tesis desarrollar la construcción del dispositivo de colección solar, ni el método de control, dada su complejidad práctica y teórica; se describe una metodología de control general en el proceso de adaptación del fluido durante la dinámica solar. De manera formal un *sistema* es una combinación de componentes que actúan conjuntamente para alcanzar un objetivo específico, a su vez un componente es una unidad particular con una función en un sistema [50]. Los sistemas de control presentan una característica de control realimentado que los hace más exactos y por tanto de interés para el problema de control de la adaptabilidad del fluido viscoelástico mediante sus propiedades físicas; los sistemas de control realimentado se refiere a una operación que en presencia de perturbaciones o cambios, tiende a reducir la diferencia entre la salida de un sistema y alguna entrada de referencia y que actúa sobre la base de esta diferencia. Este método de control contempla las perturbaciones o cambios impredecibles, puesto que las perturbaciones predecibles pueden compensarse dentro sistema mismo.

En una primera aproximación, las perturbaciones o cambios pueden ser originados por la dinámica solar y atendiendo al cambio de la propiedad del fluido, el dispositivo de colección sujeto a control puede encontrarse en la situación de un día soleado y al acercarse al medio día, nublarse completamente. En esta situación es necesario definir los elementos de control para atender la adaptación mediante una metodología de control. Los sistemas de control pueden expresarse en forma de diagrama de bloques, de manera gráfica se expresan las funciones realizadas por cada componente, flujo de entradas y salidas. En este capítulo se presenta por simplicidad un diagrama de bloques en el que se definen las variables necesarias para el control del dispositivo, y los elementos a considerar para la caracterización y control del fluido no newtoniano. El diagrama de bloques únicamente indica la información elemental de las variables de control, las funciones de transferencia en función del tiempo, serán definidas en un ejercicio de control adecuado que atienda las necesidades de cada elemento del control aquí propuesto. La generación de las funciones de transferencia, así como la implementación mediante elementos como actuadores, sensores, etc. son parte de un trabajo a futuro para desarrollar un sistema de colección solar adaptativo en el tiempo.

El primer elemento a considerar es la naturaleza del fluido no newtoniano, caracterizado como un fluido viscoelástico mediante el modelo de Phan-Thien & Tanner. Para obtener lo anterior es necesario determinar el valor del parámetro elongacional  $\varepsilon^*$ , para cada condición temporal de la dinámica solar.

Otro parámetro a caracterizar es la constante de relajación  $\lambda$  ya que con este valor se define el número de Deborah,  $De = \lambda \bar{u}/R$ ; dicho parámetro adimensional es deseable que presente un valor menor a la unidad preferentemente, dado los resultados obtenidos para esta situación. En este sentido se puede hablar de modificar directamente al fluido mediante la adición de diversos materiales poliméricos para modificar sus propiedades reológicas siempre y cuando se mantenga el carácter viscoelástico del fluido.

El modelo de Phan-Thien & Tanner esta basado en la teoría de redes moleculares poliméricas, asumiendo diferentes aproximaciones de diversos trabajos reportados por Phan-Thien, [30]. El autor reportó el modelo para fluidos débiles, en este caso la influencia del parámetro elongacional  $\varepsilon^*$  no es significativa. Un flujo débil es aquel que no presenta una deformación muy fuerte, como es el caso de un flujo de corte, [31]. Por otro lado los flujos fuertes son aquellos donde el fluido se ve fuertemente deformado, situación característica de los flujos extensionales. En este último trabajo se desarrolla un método para describir las características del fluido a partir de mediciones experimentales y el resultado fundamental es que el valor del parámetro elongacional es inversamente proporcional a la viscosidad de Trouton.

La viscosidad de Trouton es la relación entre la viscosidad extensional y la viscosidad obtenida para un flujo de corte, por lo que es posible describir este comportamiento mediante pruebas experimentales de la viscosidad con respecto a la rapidez de deformación,[51]. La información obtenida a partir de las pruebas experimentales anteriores, se puede utilizar esta información para describir el valor del parámetro elongacional, así como su coeficiente de viscosidad. Phan-Thien especifica que los fluidos no newtonianos que presentan una mayor deformación son los mas relevantes dadas las aplicaciones industriales, específicamente en polimeros en estado liquido. Los resultados obtenidos de la viscosidad extensional, necesaria para definir la viscosidad de Trouton se comparan con la viscosidad de un flujo cortante y eso define el valor del parámetro elongacional.

El tiempo de relajación  $\lambda$  puede ser determinado a partir de pruebas experimentales sobre el fluido con viscosímetros, de tal manera que se pueda obtener una serie de datos experimentales de la viscosidad contra la rapidez de deformación, a partir de la aplicación de un esfuerzo de corte. La determinación del tiempo de relajación del fluido no newtoniano, en una primera aproximación se describe como el inverso de la rapidez de deformación aplicada; por lo que es posible definir un modulo de relajación  $G$ . Con ayuda del modelo de Maxwell [52], se puede definir la viscosidad para un esfuerzo cortante nulo, de tal manera que el esfuerzo cortante es proporcional al modulo de relajación en un periodo de tiempo determinado.

Hasta este punto se ha descrito los elementos principales para obtener las constantes del modelo reológico. Es importante mencionar que para la descripción del fluido, debe adecuarse ante el cambio en el tiempo de la variación solar por lo que el control del dispositivo solar debe de contemplar la posibilidad de cambiar las propiedades del fluido, para poder atender la característica de adaptación.

Ante esta idea es posible considerar entonces que el fluido puede modificar su estructura básica para diferentes momentos del día y así adaptarse ante los cambios externos. El esquema de control propuesto expresado en diagrama de bloques, se puede observar en la Figura 9.

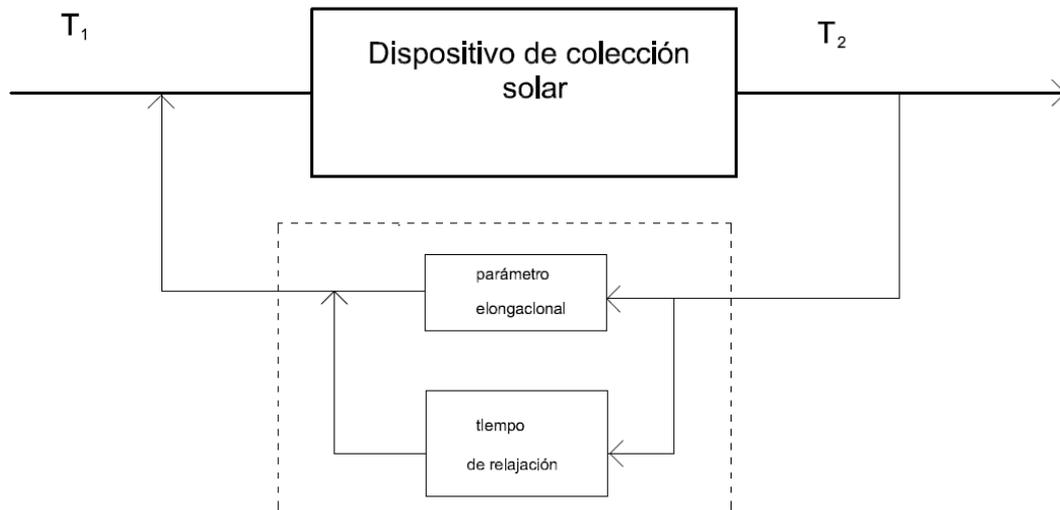


Figura 9: Esquema de control para un dispositivo de colección solar

El esquema de control tal como se puede apreciar en la figura anterior, sugiere un proceso de realimentación constante, proceso también conocido como *feedback*. En la figura se observa que para mantener la temperatura  $T_2$ , conforme transcurre el tiempo de exposición, se pueden adecuar los parámetros reológicos. Lo anterior representa un problema de determinación constante del parámetro elongacional y del tiempo de relajación, por lo que dicho módulo en la etapa de realimentación puede ser caracterizado previamente en trabajo de laboratorio, mediante técnicas de viscosimetría ampliamente reportada en la literatura, [53].

En esencia un proceso de control se refiere a los mecanismos que se llevan a efecto para automáticamente mantener las condiciones de procesos mecánicos, químicos o eléctricos a niveles específicos para así contractuar ante las perturbaciones aleatorias provocadas por fuerzas externas. En este sentido un proceso puede ser cualquier colección de objetos o materiales con características medibles y modificables. Las condiciones de cada proceso son generalmente medidas en términos de procesos de variable continua. La idea básica de un proceso adaptativo de control inicia con la medición de un sensor que mide la variable de proceso, una computadora controla otra serie de procesos para corregir el error entre la medición actual y la deseada; posteriormente un actuador lleva a cabo el proceso para que la variable cambie de valor, [54].

De manera general la respuesta de un sistema de control, no es inmediata debido a las características inherentes de los sistemas prácticos que incluyen disipación y almacenamiento de energía [55]. La modificación del fluido durante el proceso de colección requiere de modificar las propiedades del fluido, a reserva de las pruebas necesarias para determinar los parámetros reológicos. Zhang, G. *et al.* [56] reportaron un material de cambio de fase microencapsulado que es diluido en el fluido, la propiedad principal de los materiales de cambio de fase es el almacenamiento de calor, por lo que este material puede ser utilizado como almacenamiento de energía. Los resultados que reporta este trabajo son de carácter experimental, la solución del fluido con el material microencapsulado es considerado como un fluido newtoniano describiendo la conductividad térmica antes del punto de fusión del material, así como la viscosidad para diferentes temperaturas. La conclusión principal es que este material puede ser utilizado en aplicaciones pasivas de transferencia de calor, o en combinación de sistemas de enfriamiento; este trabajo aporta un enfoque diferente en la fabricación de materiales con microencapsulados en un fluido, descrito como una melaza que tiene un potencial como medio de transferencia de calor, así como de almacenamiento de energía.

Existen los elementos necesarios, aún en desarrollo, para poder implementarse en un dispositivo adaptativo, de tal manera que se presenta un campo mayor de aplicaciones que podrían permitir el desarrollo de nuevos dispositivos ingenieriles más eficientes ante la aplicación de nuevos materiales complejos. El control de un dispositivo de colección solar adaptable en el tiempo presenta diferentes retos a ser desarrollados; la teoría constructal permite definir la forma y la estructura de la red de tuberías, condición necesaria para que circule el fluido, el uso de un modelo reológico deja claro los elementos y parámetros físicos a ser considerados en una teoría de control.