



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN
INGENIERÍA

FACULTAD DE INGENIERIA

**CONTROLADORES POR MODOS DESLIZANTES
ADAPTABLES DE ORDEN ARBITRARIO**

T E S I S

QUE PARA OBTAR POR EL GRADO DE:

MAESTRO EN INGENIERÍA
INGENIERIA ELECTRICA - CONTROL

P R E S E N T A

DANIEL YITZJAK NEGRETE CHÁVEZ

DIRIGIDA POR:

DR. LEONID FRIDMAN

Ciudad Universitaria
20-noviembre-2012

JURADO ASIGNADO

Presidente: Dr. Gerardo René Espinosa Pérez

Secretario: Dr. Luis Agustín Alvarez Icaza Longoría

Vocal: Dr. Leonid Fridman

1^{er}. Suplente: Dr. Tang Xu Yu

2^{do}. Suplente: Dr. Jaime Alberto Moreno Pérez

Lugar donde se realizó la tesis: CIUDAD UNIVERSITARIA, MÉXICO, D.F.

TUTOR DE TESIS:

DR. LEONID FRIDMAN

FIRMA

Índice general

Simbología	3
1. Introducción	5
1.1. Motivación	6
1.2. Planteamiento del problema	8
1.3. Estado del arte	9
1.3.1. Controladores por modos deslizantes adaptable (CMDA) con cota conocida de la perturbación	9
1.3.2. Controladores por modos deslizantes adaptable con cota des- conocida de la perturbación	10
1.4. Objetivo general	11
2. Antecedentes	12
2.1. Controladores por modos deslizantes (CMD)	13
2.2. Control equivalente	14
2.3. Controlador por modos deslizantes adaptable basado en funciones de Lyapunov	14
3. Algoritmo de adaptación basado en control equivalente	18
3.1. Descripción del sistema	18
3.2. Descripción del algoritmo de adaptación	20
3.3. Análisis de convergencia de la variable $\delta(t)$	21
4. Controladores por modos deslizantes adaptables de segundo y cuar- to orden	23

4.1. Controlador por modos deslizantes adaptable de segundo orden . . .	23
4.1.1. Controlador twisting adaptable (CTWA)	24
4.1.2. Controlador terminal adaptable (CTEA)	28
4.1.3. Controlador sub-óptimo adaptable (CSA)	31
4.2. Control por modos deslizantes adaptable de cuarto orden	34
4.3. Comparación de un controlador por modos deslizantes de orden au- mentado (CMDOA) con un controlador por modos deslizantes adaptable	39
4.4. Controlador por modos deslizantes de orden aumentado (CMDOA) con ganancia adaptable	41
5. Resultados experimentales	44
5.1. Controlador twisting adaptable (CTWA)	45
5.2. Controlador terminal adaptable (CTEA)	46
5.3. Controlador sub-óptimo adaptable (CSA)	48
5.4. Controlador por modos deslizantes adaptables (CMDA) de cuarto orden	49
6. Conclusiones	52
Bibliografía	54

- $a(t)$: Perturbación $a_1(t)$: Perturbación en un sistema de primer orden.
 $a_2(t)$: Perturbación para un sistema de segundo orden.
 $a_s(t)$: Perturbación acotada con cota desconocida.
 A : Cota de la perturbación $a(t)$.
 L : Cota de la derivada de la perturbación $a(t)$.
 A_s : Cota desconocida de la perturbación a_s .
 A_1 : Cota de la perturbación a_1 .
 A_2 : Cota de la perturbación a_2 .
 k_1 : Ganancia fija de un controlador de primer orden.
 k_2 : Ganancia variable de un controlador de segundo orden.
 k_{max} : Valor máximo de la ganancia adaptable.
 k_{min} : Valor mínimo de la ganancia adaptable.
 $k_s(t)$: Ganancia variable.
 $u_1(x)$: Control discontinuo con ganancia fija para un sistema de primer orden.
 $u_2(x, y)$: Control discontinuo con ganancia fija para un sistema de segundo orden.
 $u_s(x, y, k(t))$: Control discontinuo de segundo orden con ganancia adaptable.
 $u(t, x_i, x_n)$ Control discontinuo con ganancia adaptable.
 $w_2(x, y)$: Algoritmo de segundo orden que obliga al sistema a entrar y permanecer en modo deslizante.
 $w(x, y)$ Algoritmo de de control por modo deslizante.
 $x(t)$: Variable de estado.
 $x_i(t)$: Variable de estado i .
 $x_n(t)$: Variable de estado n .
 x_p : Variable de estado.
 x_q : Variable de estado.
 x_s : Variable de estado.
 y_p : Variable de estado.
 y_q : Variable de estado.
 y_s : Variable de estado.
 $y(t)$: Variable de estado.
 $z(t)$: Vector de estados.
 α : Proporción deseada entre la ganancia del controlador y magnitud de la perturba-

ción.

β : Parámetro del algoritmo twisting.

γ : Ganancia del algoritmo adaptable.

$\delta(t)$: Diferencia entre la proporción deseada entre ganancia y perturbación y proporción real.

$\eta(t)$: Función a tramos que define una cierta ganancia del controlador sub-óptimo.

η^* : Parámetro del controlador sub-óptimo mayor o igual a uno.

ρ : Constante mayor a uno.

$\sigma(x_i, x_n)$: superficie deslizando.

τ : Constante de filtro de primer orden.

ψ : Algoritmo de control por modo deslizando de orden arbitrario.

Capítulo 1

Introducción

En el problema de control robusto se busca diseñar controladores que soporten factores que impiden realizar los objetivos de control. Un controlador robusto es aquel control que es insensible a perturbaciones e incertidumbres mostrando ciertas características deseadas. En la implementación real de controladores, los controladores robustos son indispensables para garantizar un determinado desempeño deseado.

Los controladores por modos deslizantes (CMD) surgen de la necesidad de crear controladores robustos. Los CMD son una clase de controladores robustos que proporcionan tanto convergencia de las variables de estado en tiempo finito a una vecindad del origen como insensibilidad con respecto a incertidumbres y perturbaciones acopladas. La idea de los CMDs es obligar al sistema a entrar y permanecer en una variedad llamada superficie deslizante por medio de un controlador discontinuo. Una vez alcanzada la superficie deslizante el controlador conmuta con una frecuencia infinita provocando que los estados del sistema permanezcan en ella todo tiempo futuro después de haber sido alcanzada. Al modo en el que el sistema se encuentra al alcanzar la superficie deslizante se le denomina modo deslizante.

El problema de adaptación consiste en modificar la ley de control, en base a la información disponible, para enfrentar el hecho de que los parámetros del sistema con inciertos. El control adaptable implica mejorar las características dinámicas del sistema mientras los parámetros de la planta varían. La necesidad de adaptación

surge de la necesidad de la mejora del desempeño de los controladores. En los CMD se han implementado diversos tipos de ganancias variables con el objetivo de mejorar el desempeño del controlador al producir una disminución en la amplitud de la señal de control que lleva a la disminución de la amplitud del chattering. Una manera de variar la ganancia de los CMDs es adaptarla a una cierta señal.

En los CMD, el control equivalente es conocido como la señal de control necesaria para garantizar la permanencia del sistema en el modo deslizantes. Esta señal es cierta forma es una copia de la señal de la perturbación. La adaptación de la ganancia de los CMDs se puede lograr basándose en la señal de control equivalente, de tal manera que varié con respecto a la perturbación.

En el primer capítulo de esta tesis se presenta el planteamiento del problema, así como el estado del arte, la motivación y el objetivo general. En el segundo capítulo se presentan los antecedentes en donde se introducen los CMDs de orden arbitrario, así como el concepto de control equivalente y un mecanismo de adaptación de ganancias de CMD basado en funciones de Lyapunov. En el tercer capítulo se presenta la descripción del algoritmo adaptable basado en control equivalente que es el resultado principal de esta tesis. En el cuarto capítulo se presentan las implementaciones de CMD cuyas ganancias se adaptan por medio del algoritmo adaptable basado en control equivalente, así como una comparación de los CMDs con ganancia adaptable con un método para atenuar la amplitud del chattering. En el quinto capítulo se presentan los resultados experimentales de implementar CMDs con ganancia adaptable a un sistema de masa-resorte-amortiguador. En el capítulo 6 se presentan las conclusiones de esta tesis.

1.1. Motivación

La principal desventaja de los CMDs es el denominado fenómeno de *chattering*. El chattering es un fenómeno oscilatorio de alta frecuencia que sufren los estados del sistema cuando se encuentran en la superficie deslizante, causado por la naturaleza de conmutación infinita del controlador, restringiendo las posibilidades de aplicación

de CMD de primer orden en hardware. **En esta tesis el argumento (t) de todas las variables de estado es omitido por simplicidad.**

Se considera el siguiente sistema de primer orden

$$\begin{aligned} \dot{x}_p &= a_1(t) + u_1(x_p) \\ u(x_p) &= -k_1 \text{sign}(x_p) \\ |a_1(t)| &\leq A_1, \quad k_1 > 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

donde $a_1(t)$ es una perturbación desconocida acotada por la constante A_1 . Si la ganancia k_1 es mayor a la cota de la perturbación A_1 , el controlador puede compensar la perturbación y la variable de estado x_p converge a una vecindad del origen.

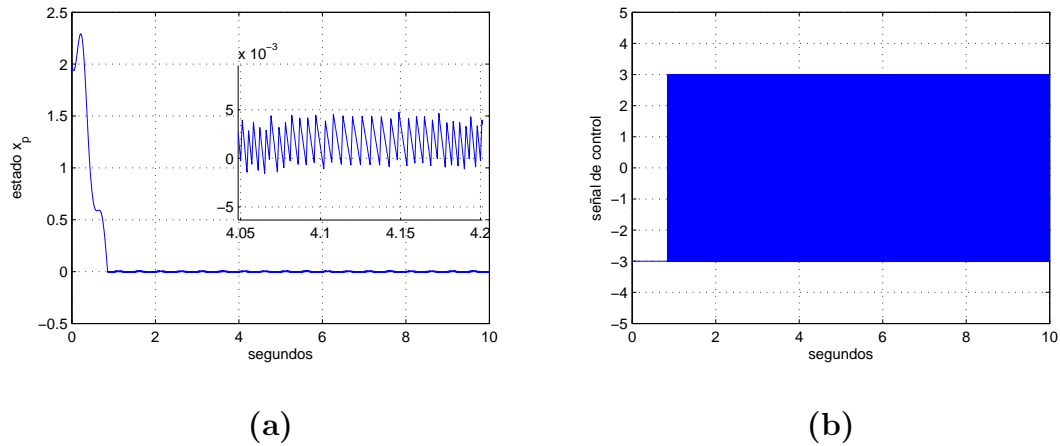


Figura 1.1: Estado x (a) y señal de control (b)

En la figura (1.1(a)) se observa que la trayectoria del estado x_p converge al modo deslizante y permanece él para todo tiempo futuro al mismo tiempo que permanece en una vecindad del origen. En la figura (1.1(b)) se observa la señal de control discontinua que conmuta alrededor del origen produciendo el fenómeno de chattering que se observa en la figura (1.1(a)).

La amplitud del chattering es proporcional a la ganancia del controlador. En los

CMDs convencionales el valor de ganancia del controlador es un valor constante mayor que la cota de la perturbación de modo que la perturbación se puede compensar, por lo tanto la amplitud del chattering es constante. De esta manera el controlador demanda una cantidad constante de energía que puede no ser necesaria para mantener al sistema en el modo deslizante. También se debe considerar que una amplitud constante del chattering puede causar serios daños al actuador y la planta ya que el control inyecta una señal discontinua de alta frecuencia cuya amplitud es constante.

1.2. Planteamiento del problema

Para plantear el problema se considera el siguiente sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_q &= y_q \\ \dot{y}_q &= a_2(t) + u_2(k_2(t), x_q, y_q)\end{aligned}\tag{1.2}$$

el control es definido por

$$u_2(k_2(t), x_q, y_q) = k_2(t)w_2(x_q, y_q)\tag{1.3}$$

y $|a_2(t)| \leq A_2$ es una función acotada por la constante A_2 .

La función $w_2(x_q, y_q)$ se considera como un algoritmo de segundo orden que obliga al sistema a entrar y permanecer en modo deslizante siempre y cuando se cumpla que la ganancia $k_2(t)$ sea mayor a la cota de perturbación A_2 .

El problema es diseñar un mecanismo adaptable para la ganancia $k_2(t)$ de tal manera que su dinámica dependa de la dinámica de la perturbación $a_2(t)$ logrando una variación en la ganancia directamente proporcional a la variación de la perturbación.

Adaptando la ganancia del controlador con respecto a la perturbación se logra una reducción en la cantidad de energía demandada por el actuador, previniendo que

el exceso de energía demandado por el controlador dañe la planta y/o al actuador. Además se genera un ahorro considerable en la cantidad de energía demandada por el controlador.

1.3. Estado del arte

1.3.1. Controladores por modos deslizantes adaptable (CMDA) con cota conocida de la perturbación

Los controladores por modos deslizantes adaptables (CMDA) son técnicas que son útiles para estimar perturbaciones e incertidumbres con el fin de compensarlas mientras se reduce la amplitud del chattering. CMDAs con la cota de la perturbación conocida se han aplicado satisfactoriamente a control de robots con dinámicas no modeladas (18), identificación y compensación de fricción (16) y para identificación y compensación en giroscopios MEM (17). Los CMDAs con cota desconocida para la perturbación mencionado en (14) incluye:

- Un algoritmo de adaptación en un controlador por modos deslizantes de segundo orden que permite lograr una mejora en la precisión de la variable deslizante típica de un controlador por modos deslizantes de tercer orden (1),
- CMDAs que han sido aplicados para estimación y compensación de perturbaciones en el sensor y perturbaciones externas actuando en la planta con aplicaciones aeroespaciales (2; 10),
- Técnicas de CMDAs con lógica difusa, pero usualmente solo se puede garantizar una zona de convergencia (3),
- Un método de CMDA propuesto en(4; 5; 12) permite adaptar la ganancia de CMD. La idea se basa en estimar el control equivalente: una vez que el sistema alcanza el modo deslizante la señal de control equivalente se asemeja a la

perturbación, por lo tanto la perturbación puede ser evaluada y compensada de manera exacta por el controlador. Este enfoque requiere del conocimiento de la cota de la perturbación y de su derivada y el uso de un filtro paso bajas para obtener el control equivalente.

- El controlador con modelo de referencia y retroalimentación de salida para sistemas lineales multivariables basado en control adaptable y en un enfoque de vector unitario es presentado en (6). La matriz de alta frecuencia de la planta se asume no conocida.

1.3.2. Controladores por modos deslizantes adaptable con cota desconocida de la perturbación

En (14) se mencionan técnicas de CMDA con cotas desconocidas de las perturbaciones. Este caso es muy importante para desarrollar nuevas técnicas de CMDA desde un punto de vista teórico y práctico. Estos CMDAs incluyen

- Un CMDA se presenta en (8), donde la dinámica de la ganancia depende directamente de la variable deslizante: la ganancia del controlador se incrementa hasta que el modo deslizante sea establecido. Ya que se ha establecido el modo deslizante la dinámica de la ganancia es igual a cero. La principal desventaja de este enfoque es la sobre estimación de la ganancia con respecto a la cota de la perturbación.
- Un control adaptable continuo con modo deslizante asintótico que es robusto ante fallas en el actuador, perturbaciones no lineales y perturbaciones externas acotadas con cotas desconocidas se presenta en (7).
- Una técnica de adaptación para ganancias para CMD tradicionales que no sobre estima la ganancia del controlador se ha propuesto y aplicado a un actuador electro-neumático en (9).

- Una técnica para adaptar ganancias de CMD de segundo orden que no sobre estima la ganancia del controlador se ha propuesto en (11).
- Un algoritmo adaptable/suave convergente en tiempo finito para CMD de segundo orden se ha propuesto en (10).

1.4. **Objetivo general**

El objetivo general de esta tesis es diseñar un algoritmo para adaptar la ganancia de controladores por modos deslizantes de orden superior (CMDOs) con el fin de reducir la amplitud del chattering generado por la naturaleza conmutativa de los CMDOs, así como lograr una reducción en la energía demandada por el controlador.

Capítulo 2

Antecedentes

Los CMD han sido actualizados y mejorados con el pasar del tiempo. Inicialmente se planteó la idea de conmutar la señal de control con el fin de obligar a un estado a permanecer en una vecindad del origen. Posteriormente se introdujeron los CMD de segundo orden con los que se garantiza la convergencia de los estados a una vecindad del origen en tiempo finito mostrando insensibilidad del controlador con respecto a perturbaciones e incertidumbres. Se observó que el hecho de aumentar el orden del controlador se reduce el efecto del chattering en los estados. El primer CMD de segundo orden fue el llamado twisting ((19)).

En ((26)) se introduce el concepto de control equivalente, que es un concepto fundamental en el control por modos deslizantes. Se puede pensar en el control equivalente como el "promedio" de la entrada de control cuando el sistema se encuentra en el modo deslizante, de tal manera que la señal de control equivalente es una aproximación a la señal de la perturbación.

En este capítulo se presentan ciertos antecedentes fundamentales de los CMD, así como un control por modos deslizantes con ganancia adaptable diseñado recientemente y descrito en ((13)).

2.1. Controladores por modos deslizantes (CMD)

Los CMD convencionales presentan las siguientes ventajas

- compensación exacta con respecto a perturbaciones e incertidumbres acotadas y acopladas,
- Tiempo de convergencia finito a la superficie deslizante.

Sin embargo los CMD también presentan las siguientes desventajas

- chattering
- solo las perturbaciones e incertidumbres acopladas pueden ser compensadas
- la variable deslizante converge en tiempo finito, sin embargo, las variables de estado solamente convergen de manera asintótica
- el diseño de la superficie deslizante está restringido a tener grado relativo uno con respecto al control.

Con el fin de superar el problema del chattering en los CMD, el concepto de modo deslizante de segundo orden se introdujo en la tesis de doctorado de Arie Levant en donde se presenta la siguiente definición

El punto $(x_L, \dot{x}_L) = (0, 0)$ es llamado un punto del modo deslizante de segundo orden si es una solución del sistema

$$\ddot{x}_L = f(t, x_L, \dot{x}_L) + g(t, x_L, \dot{x}_L)u \quad x_L(t), f(t), g(t) \in \mathbb{R} \quad (2.1)$$

en el sentido de Filippov ((28)).

El primer y más sencillo CMD de segundo orden es el llamado "algoritmo twisting" ((19)), con el que se asegura la convergencia exacta de las variables de estado en tiempo finito. Por lo tanto el algoritmo twisting se dice ser un CMD de segundo orden ya que proporciona la existencia de un modo deslizante de segundo orden en el origen. Una gran ventaja de este algoritmo es que no se requiere del diseño de una superficie deslizante.

Bajo ciertas suposiciones relacionadas con la suavidad del sistema, el algoritmo twisting se ha usado para atenuar la amplitud del chattering en sistemas de grado relativo uno incluyendo un integrador en la entrada de control. De esta manera la entrada de control real es absolutamente continua.

Otros CMD de segundo orden se han introducido como el algoritmo terminal ((20)) y el algoritmo sub-óptimo ((21)).

También se ha presentado un CMD de orden arbitrario en ((24)).

2.2. Control equivalente

En los CMDs la señal de control generada cuando el sistema se encuentra en el modo deslizante es aquella señal necesaria para compensar la perturbación y garantizar la permanencia del sistema en modo deslizante. La señal de control generada por un CMD en el modo deslizante es una señal equivalente a la señal de la perturbación, esta señal es conocida como control equivalente (22). El control equivalente se obtiene de filtrar la componente de alta frecuencia de la señal de control por medio de un filtro paso-bajas mientras el sistema se encuentra en modo deslizante obteniendo así una señal continua equivalente a la señal de la perturbación.

2.3. Controlador por modos deslizantes adaptable basado en funciones de Lyapunov

Recientemente en (13) se ha propuesto un algoritmo de adaptación basado en funciones de Lyapunov. La idea es diseñar una función de Lyapunov y definir una curva de nivel dentro de ella de tal manera que la ganancia del controlador se reduzca cuando la norma euclidiana de los estados sea menor a la norma euclidiana de la curva de nivel y se incremente cuando la norma euclidiana de los estados sea mayor a la de la curva de nivel. Por lo tanto los estados del sistema permanecerán en una vecindad de la curva de nivel.

2.3. Controlador por modos deslizantes adaptable basado en funciones de Lyapunov

Se considera el siguiente sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= a_s(t) + u_s(k_s(t), x, y)\end{aligned}\quad (2.2)$$

donde $x, y \in \mathbb{R}$ y $a_s(t)$ es una perturbación acotada,

$$|a_s(t)| \leq A_s \quad (2.3)$$

con la cota A_s desconocida.

Se considera una versión del llamado *algoritmo twisting* (19)

$$u_s(k_s(t), x, y) = k_s(t) (\text{sign}(x) + 0,5\text{sign}(y)) \quad (2.4)$$

si $k_s(t) > 2A_s$ se cumple, el sistema entra en modo deslizante y las trayectorias del sistema convergen a una vecindad del origen.

La idea de adaptación para la ganancia $k_s(t)$ del controlador (2.4) es incrementarla hasta que las trayectorias del sistema converjan a un dominio $M : \{x, y : V_0(x, y) \leq \mu\}$ donde $\mu > 0$ y

$$V_0(x, y) = k_s^2 x^2 + \gamma |x|^{\frac{3}{2}} \text{sign}(x)y + k_s |x|y^2 + \frac{1}{4}y^4. \quad (2.5)$$

La ganancia se incrementa si $V_0(x, y) > \mu$ y decrece cuando $V_0(x, y) < \mu$, por lo tanto las trayectorias del sistema permanecen en una vecindad de la curva de nivel definida por $V_0(x, y) = \mu$.

El algoritmo de adaptación para $k(t)$ está descrito por

$$\dot{k}_s(t) = \begin{cases} \omega_1 \sqrt{\frac{\gamma_1}{2}} \text{sign}(V_0(x, y) - \mu), & \text{si } k_s(t) \geq k_{min} \\ \nu, & \text{si } k_s(t) < k_{min} \end{cases} \quad (2.6)$$

con $\nu, \omega_1, \gamma_1 > 0$.

Se ha probado en (13) que con el algoritmo (2.6) se garantiza que el sistema entra en modo deslizante y sus trayectorias convergen a una vecindad del origen que abandonan y retoman según sea la dinámica de la perturbación.

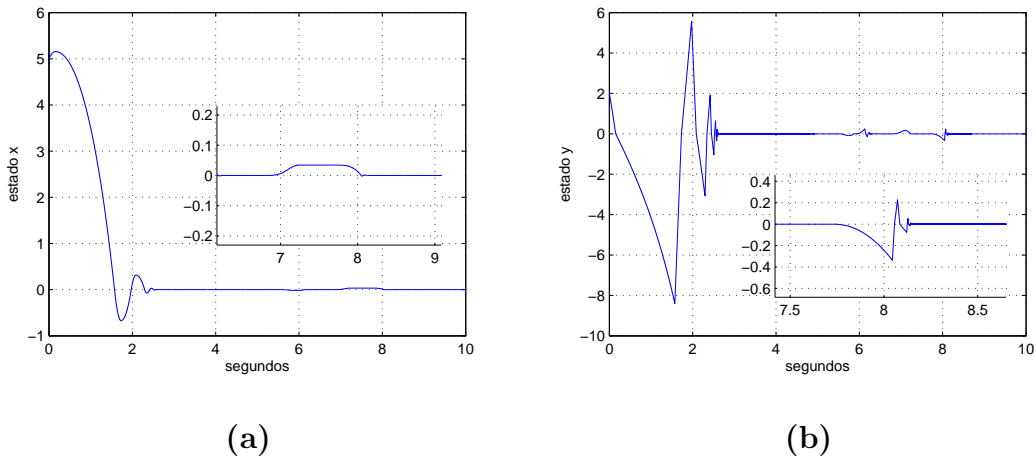


Figura 2.1: Estado x (a) y estado y (b)

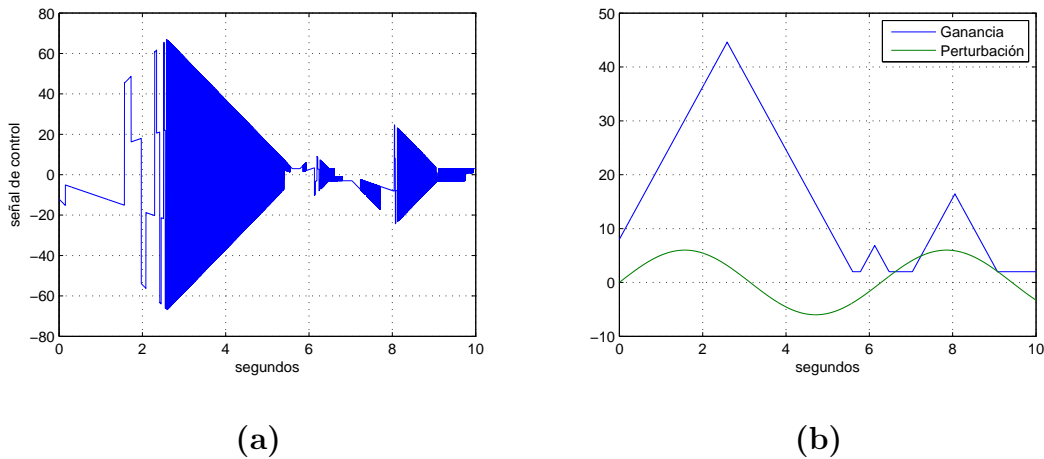


Figura 2.2: Señal de control $u_s(k_s(t), x, y)$ y ganancia $k_s(t)$ /perturbación (b)

En la figura (2.1) se muestran los estados del sistema. Se observa que en el segundo

2.3. Controlador por modos deslizantes adaptable basado en funciones de Lyapunov

7.8 el sistema sale del modo deslizante debido a la reducción de la ganancia que se incrementa posterior a la pérdida del modo deslizante logrando una recuperación del mismo.

En la figura (2.1) se observa la señal de control y la ganancia del controlador que se reduce en una cierta ventana de tiempo hasta que se pierde el modo deslizante y se incrementa hasta recuperar el modo deslizante y nuevamente se comienza a disminuir.

La desventaja principal de este algoritmo es la necesidad de la destrucción del modo deslizante para lograr la adaptación de la ganancia.

Capítulo 3

Algoritmo de adaptación basado en control equivalente

En (12) se ha propuesto una técnica de adaptación para ganancias de CMDs basada en la señal de control equivalente. La idea es variar la ganancia del controlador de manera similar a la variación de la señal del control equivalente. De cierta forma se busca hacer depender la dinámica de la ganancia del controlador de la dinámica de la perturbación por medio del control equivalente, logrando así que el actuador solo demande la cantidad necesaria de energía para lograr compensar la perturbación y garantizar la permanencia del sistema en el modo deslizante. Se desea lograr que la ganancia del controlador *siga* de manera proporcional a la perturbación usando al control equivalente como intermediario.

3.1. Descripción del sistema

Se considera el siguiente sistema

$$\dot{z}(t) = f(z(t)) + g(z(t))u_t(z(t)), \quad (3.1)$$

donde

$$\begin{aligned} z &\in \mathbb{R}^n \\ f &: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_t &: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \\ g &: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

Para el sistema (3.1) se asume que

- Existe un difeomorfismo $T(z(t)) = x(t)$ que transforma el sistema (3.1) en la forma

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= x_{i+1} \\ \dot{x}_n &= f(t, x) + a(x) + u(k(t), x) \\ i &= 1, 2, \dots, n-1 \end{aligned} \tag{3.2}$$

donde

$$\begin{aligned} a &: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \\ f &: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \\ u &: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \\ x(t) &\in \mathbb{R}^n \end{aligned} \tag{3.3}$$

- El control

$$u(k(t), x) = -k(t)w(x) \tag{3.4}$$

con ganancia adaptable

$$0 < k_{min} \leq k(t) \leq k_{max} \tag{3.5}$$

obliga al sistema a entrar y permanecer en modo deslizante en la superficie $\sigma(x_i, x_n) = 0$ ($\sigma(x_i, x_n) \in C^1$).

- La función desconocida, suave y acotada $f(t, x)$ satisface las siguientes condiciones:

$$|f(t, x)| < A < k_{max} \tag{3.6}$$

$$|\nabla f(t, x)\dot{x}(t)| < L \tag{3.7}$$

- El control equivalente $u_{eq}(t, x)$ está disponible y se puede obtener mediante el filtrado de la componente de alta frecuencia de la función discontinua $u(k(t), x)$ por medio del filtro paso-bajas

$$\tau \dot{u}_{eq}(t, x) + u_{eq}(t, x) = u(k(t), x), \quad u_{eq}(0) = 0 \quad (3.8)$$

con una constante $\tau > 0$ lo suficientemente pequeña y como salida la función $u_{eq}(t, x)$.

Se observa que el sistema (3.2) es una cadena de n integradores donde la condición de acoplamiento se cumple, es decir, la señal de control y las perturbaciones e incertidumbres se encuentran en el mismo canal.

3.2. Descripción del algoritmo de adaptación

Considerando el sistema(3.2), la ley de adaptación para la ganancia del controlador (3.4) se describe como

$$\begin{aligned} \dot{k}(t) &= \begin{cases} \gamma k_{max} + M(k(t)), & \text{si } \sigma(x_i, x_n) \neq 0 \\ \gamma k(t) \text{sign}(\delta) + M(k(t)), & \text{si } \sigma(\sigma(x_i, x_n)) = 0 \end{cases} \\ M(k(t)) &= \begin{cases} -\gamma \rho k(t), & \text{si } k(t) > k_{max} \\ \gamma \rho k(t), & \text{si } k(t) < k_{min} \\ 0, & \text{si } k_{min} \leq k(t) \leq k_{max} \end{cases} \\ \delta(t) &= \frac{|u_{eq}(t, x_i, x_n)|}{k(t)} - \alpha \end{aligned} \quad (3.9)$$

donde $\rho > 1$, γ son constantes y $\alpha \in (0, 1)$ es la proporción deseada entre la magnitud de perturbación $f(t, x)$ y la magnitud de la ganancia $k(t)$. Los valores k_{min} y k_{max} son valores mínimo y máximo respectivamente de la ganancia $k(t)$ previamente seleccionados. El valor mínimo k_{min} es definido para garantizar una respuesta rápida por parte del controlador de tal manera que se encuentre siempre activo para

entregar una respuesta rápida. El valor máximo k_{max} es definido por las limitantes de potencia del actuador, es obvio que el actuador tenga un límite de potencia máxima que puede entregar.

La idea del algoritmo adaptable es incrementar la ganancia $k(t)$ mientras el sistema entra en modo deslizante. Ya que el sistema se encuentra en modo deslizante la dinámica de la ganancia depende del signo de la función $\delta(t)$ donde la magnitud de la ganancia $k(t)$ se adapta para lograr que el cociente entre la magnitud de la perturbación y la magnitud de la ganancia sea α y permanezca con ese valor para todo tiempo futuro. La ganancia decrece si $|u_{eq}/k(t)| < \alpha$ y crece si $|u_{eq}/k(t)| > \alpha$ hasta que $\delta(t) = 0$, logrando adaptar la ganancia del controlador a la magnitud de la perturbación en una proporción α .

3.3. Análisis de convergencia de la variable $\delta(t)$

El proceso de adaptación termina cuando se alcanza la proporción deseada entre la magnitud de la perturbación y la magnitud de la ganancia, es decir, $\delta(t) = 0$. Para demostrar que la variable $\delta(t)$ converge a cero en tiempo finito se considera la siguiente función de Lyapunov

$$V(\delta(t)) = \frac{\delta^2(t)}{2} \quad (3.10)$$

su derivada temporal se calcula de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \dot{V}(\delta(t)) &= \delta(t)\dot{\delta}(t) = \delta(t) \left(\frac{d|f(t, x)|}{dt} \frac{1}{k} - \frac{\dot{k}}{k^2} |f(t, x)| \right) \\ &= -\frac{1}{k} \left(\gamma |\delta(t)| |f(t, x)| - \frac{d|f(t, x)|}{dt} \delta(t) \right) \\ &\leq \frac{-|\delta(t)|}{k} \left(\gamma |f(t, x)| - \frac{d|f(t, x)|}{dt} \right) \\ &< \frac{-|\delta(t)|}{k} (\gamma |f(t, x)| - L) \end{aligned} \quad (3.11)$$

dado que la ganancia del controlador requiere de adaptación solo cuando la magnitud de la perturbación es mayor a αk_{min} , existirá adaptación cuando $|f(t, x)| > \alpha k_{min}$, por lo que

$$\dot{V}(\delta(t)) < -\frac{|\delta(t)|}{k} (\gamma \alpha k_{min} - L) \quad (3.12)$$

si

$$\gamma > \frac{L}{\alpha k_{min}} \quad (3.13)$$

entonces $\delta(t)$ converge a cero y la proporción entre la magnitud de la perturbación y la ganancia es α , i.e. $\frac{|f(t,x)|}{k} = \alpha$. Además si (3.13) se cumple, entonces

$$\dot{V}(\delta(t)) \leq -\sqrt{2} \frac{\gamma \alpha k_{min} - L}{\alpha k_{min}} \sqrt{V(\delta(t))} \quad (3.14)$$

$$0 \leq \sqrt{V(\delta(t))} \leq \sqrt{V(\delta(0))} - \frac{\gamma \alpha k_{min} - L}{\sqrt{2} \alpha k_{min}} t \quad (3.15)$$

Es evidente de la solución de la desigualdad diferencial (3.14) que $\sqrt{V(\delta(t))} = 0$ por lo menos después de que

$$t_f = \frac{k_{max}}{\gamma \alpha k_{min} - L} \sqrt{2V(\delta(0))} = \frac{\alpha k_{min}}{\gamma \alpha k_{min} - L} |\delta(0)| \quad (3.16)$$

y, como resultado, $\delta(t)$ es cero en un tiempo finito menor o igual a t_f . 4

Capítulo 4

Controladores por modos deslizantes adaptables de segundo y cuarto orden

4.1. Controlador por modos deslizantes adaptable de segundo orden

Se considera el siguiente sistema de segundo orden (los argumentos de $x(t)$ y $y(t)$ se omiten por simplicidad)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= u_2(k(t), x, y) + a(t) \\ u_2(k(t), x, y) &= -k(t)w(x, y), 0 < k_{min} \leq k \leq k_{max}\end{aligned}\tag{4.1}$$

donde $a(t)$ es una perturbación acotada por la constante A

$$|a(t)| \leq A < k_{max}\tag{4.2}$$

y

$$\left| \frac{d|a|}{dt} \right| < L \quad (4.3)$$

Se asume que el control $u_2(k(t), x, y)$ obliga al sistema a entrar en modo deslizante en tiempo finito mostrando propiedades de insensibilidad ante perturbaciones e incertidumbres. El problema es adaptar la ganancia $k(t)$ del controlador $u_2(k(t), x, y)$ mediante el algoritmo (3.9) con el fin de disminuir la energía demandada por el controlador así como el chattering.

El algoritmo (3.9) se ha implementado en el sistema (4.1) con los siguiente CMDs de segundo orden

- Algoritmo twisting (19)
- Algoritmo terminal (20)
- Algoritmo sub-optimo (21)

El sistema (4.1) se ha simulado con los CMDs mencionados con ganancia adaptable regida por el algoritmo (3.9). Los resultados de dichas simulaciones se presentan en este capitulo al igual que los resultados de las simulaciones del sistema (4.1) con los CMDs mencionados con ganancia fija para realizar una comparación observar el beneficio de usar una ganancia adaptable.

4.1.1. Controlador twisting adaptable (CTWA)

El algoritmo twisting (19),(23) es históricamente el primer CMD de segundo orden presentado. Considerando el sistema (4.1), el algoritmo twisting esta definido por la siguiente formula

$$w(x, y) = \text{sign}(x) + \beta \text{sign}(y), \beta \in (0, 1). \quad (4.4)$$

Se ha probado en (19),(23) que bajo la suposición de que $k(t)$ es mayor a la cota de la perturbación A en una proporción β , es decir $k(t) > \beta A$, el algoritmo proporciona la existencia de un modo deslizante de segundo orden en el origen en tiempo finito mostrando insensibilidad ante perturbaciones e incertidumbres. Una de las grandes ventajas del algoritmo twisting es que no es necesario el diseño de una superficie

deslizante para garantizar la convergencia del sistema a modo deslizante la superficie se define como $\sigma = x, \dot{\sigma} = y$.

Los parámetros usados para la simulación del CTWA son $\beta = 0,5, k_{min} = 1, k_{max} = 15, \alpha = 0,45, \tau = 0,01, \gamma = 2\pi$. La ganancia fija usada en la simulación del controlador twisting de ganancia fija es $k = 5$. Las condiciones iniciales se definieron como $x(0) = 3, y(0) = 1, k(0) = 7$.

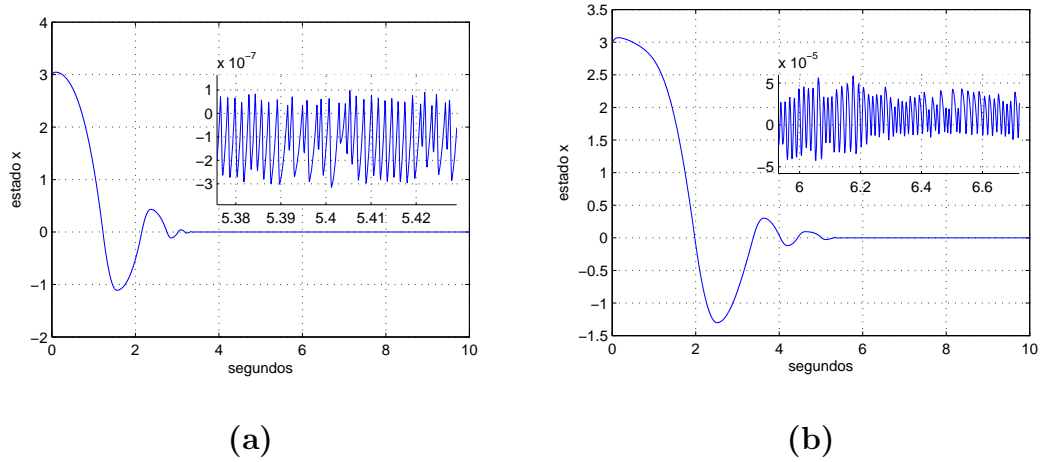
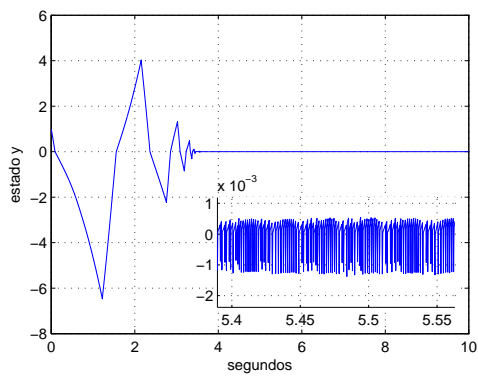
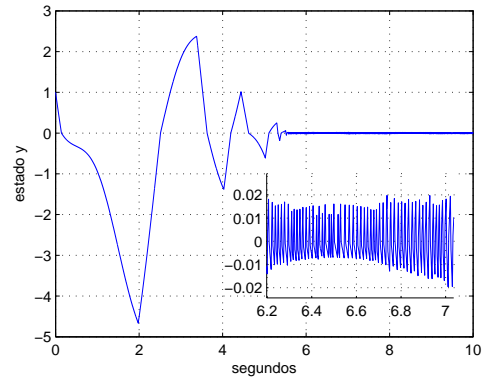


Figura 4.1: Estado x con adaptación(a) y estado x sin adaptación(b)

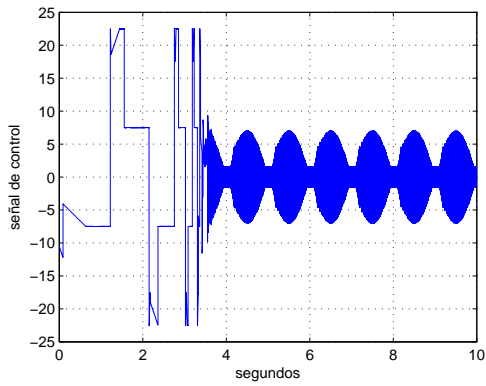


(a)

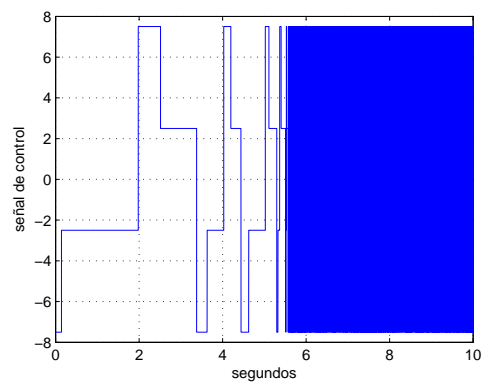


(b)

Figura 4.2: Estado y con adaptación(a) y estado y sin adaptación(b)



(a)



(b)

Figura 4.3: Señal de control con adaptación (a) y señal de control sin adaptación (b)

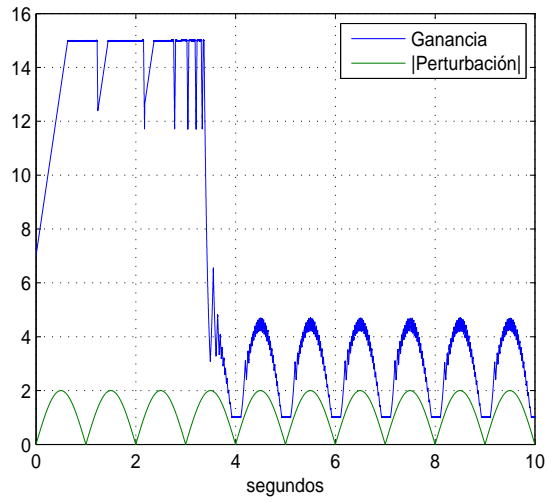


Figura 4.4: Ganancia con adaptación y perturbación

4.1.2. Controlador terminal adaptable (CTEA)

Se considera el sistema (4.1) donde la función $w(x, y)$

$$w(x, y) = \text{sign}(y + |x|^{1/2} \text{sign}(x)) \quad (4.5)$$

es una versión del llamado algoritmo terminal, que a su vez es un caso de segundo orden del algoritmo anidado de orden arbitrario propuesto por Levant ((24)). Los parámetros usados para la simulación son $\gamma = 1, k_{min} = 1, k_{max} = 15, \alpha = 0,9, \tau = 0,01, \gamma = 2\pi$. La ganancia fija usada en la simulación del controlador twisting de ganancia fija es $k = 4$. Las condiciones iniciales son $x(0) = 3, y(0) = 1, k(0) = 7$

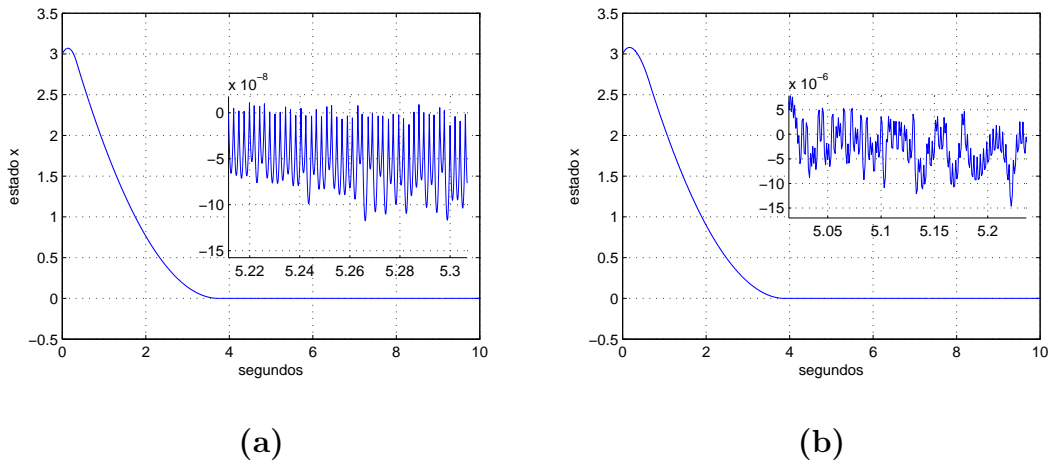


Figura 4.5: Estado x con adaptación(a) y estado x sin adaptación (b)

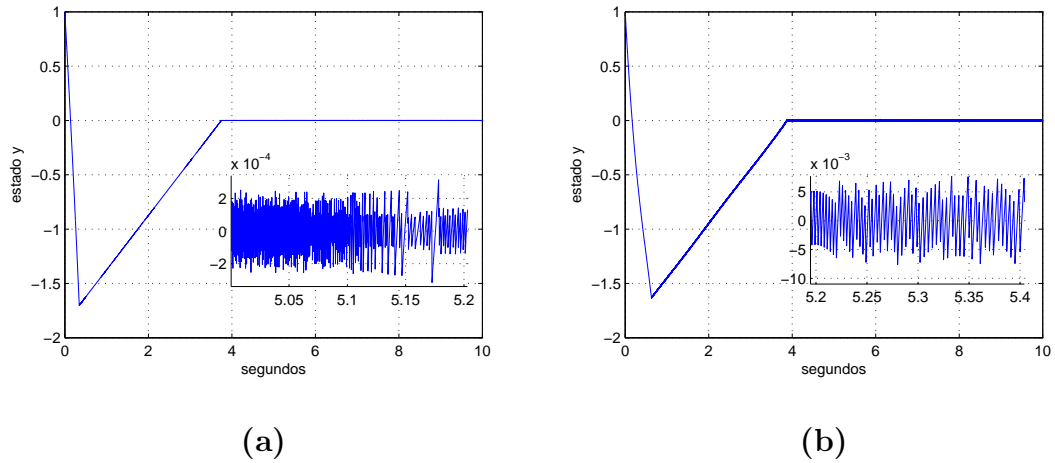


Figura 4.6: Estado y con adaptación (a) y estado y sin adaptación (b)

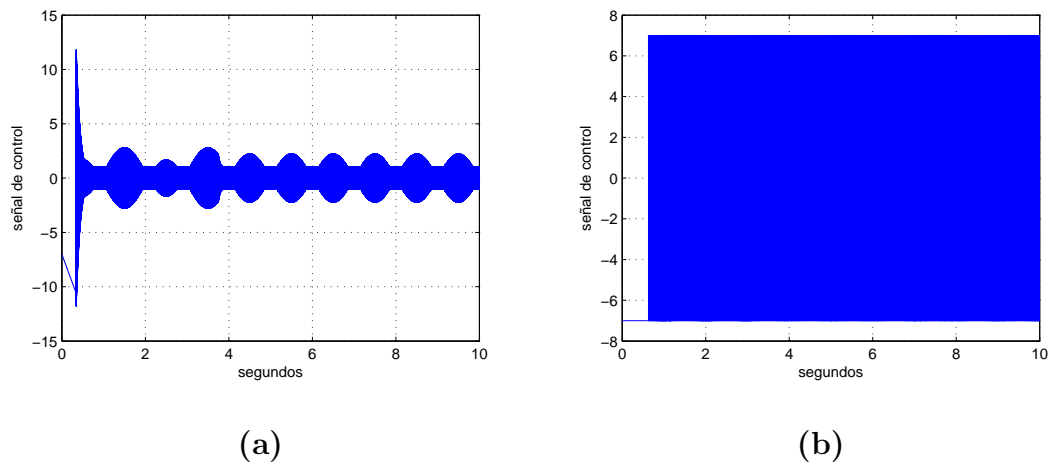


Figura 4.7: Señal de control con adaptación(a) y señal de control sin adaptación (b)

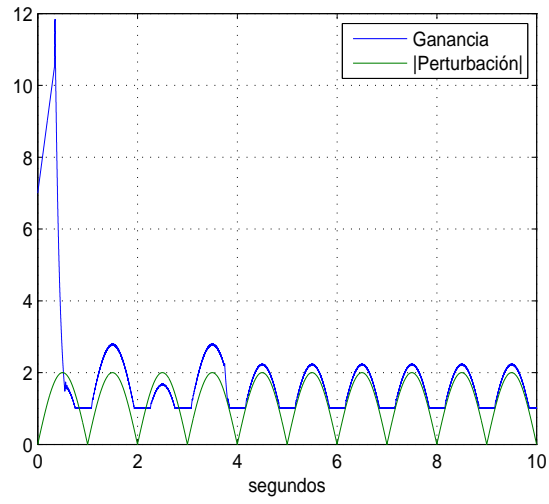


Figura 4.8: Ganancia con adaptación y perturbación

4.1.3. Controlador sub-óptimo adaptable (CSA)

Se considera el sistema (4.1) donde

$$w(x, y) = \eta(t) \text{sign}(x - \beta x_m(t)) \quad (4.6)$$

y

$$\eta(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } x_m(t)(x(t) - \eta(t)x_m(t)) \geq 0 \\ \eta^*, & \text{si } x_m(t)(x(t) - \eta(t)x_m(t)) < 0 \end{cases} \quad (4.7)$$

donde $\eta^* \geq 1$ y $x_m(t)$ es una función a tramos que representa el valor del último punto singular de $x(t)$, es decir el valor mas reciente de x cuando $y = 0$.

El algoritmo (4.6,4.7) es el llamado algoritmo sub-óptimo (ASO). El ASO permite garantizar la convergencia exacta en tiempo finito, una vez que el parámetro η^* se ha elegido lo suficientemente grande. Los parámetros usados para la simulación son: $\eta^* = 3$, $k_{min} = 1$, $k_{max} = 15$, $\alpha = 0,95$, $\tau = 0,01$, $\gamma = 2\pi$. La ganancia fija usada en la simulación del controlador twisting de ganancia fija es $k = 4$. Las condiciones iniciales son $x(0) = 3$, $y(0) = 1$, $k(0) = 7$.

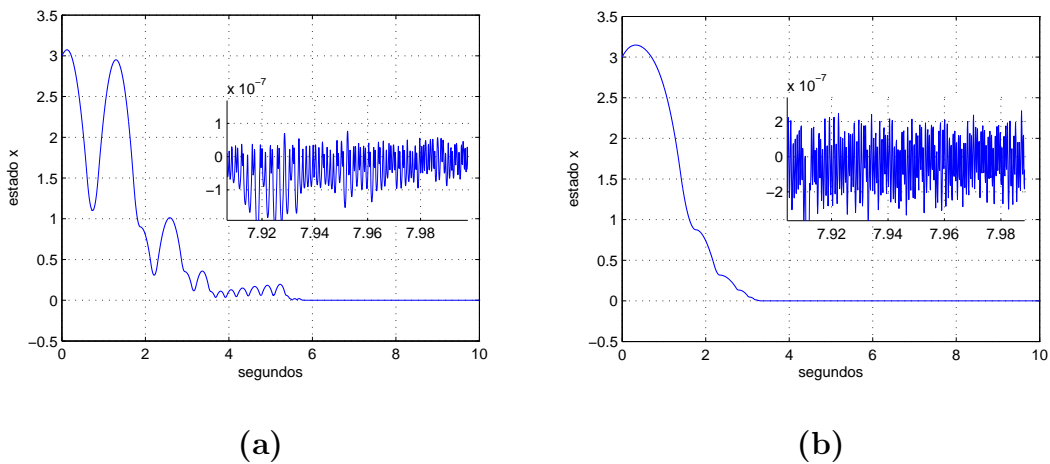
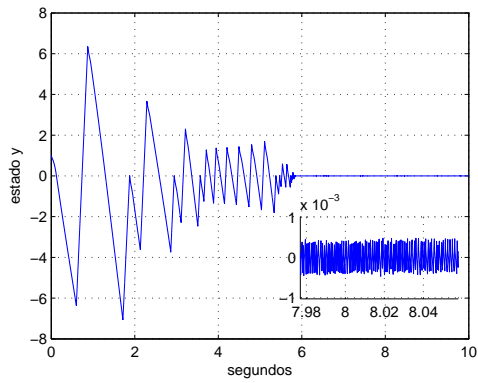
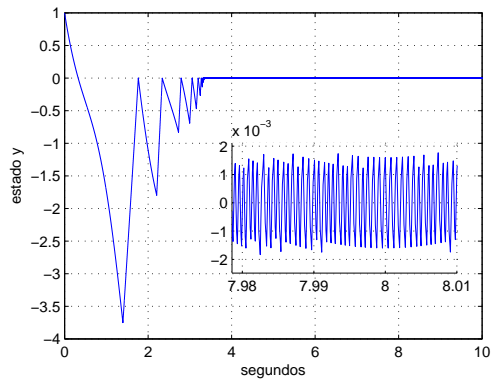


Figura 4.9: Estado x con adaptación(a) y estado x sin adaptación (b)

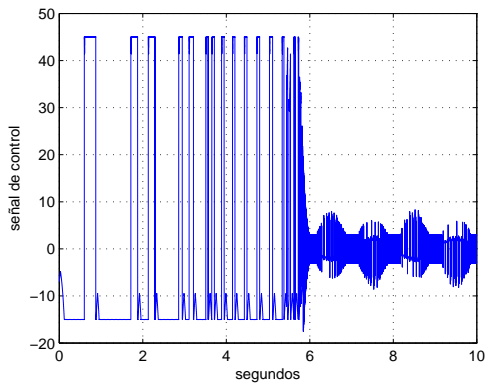


(a)

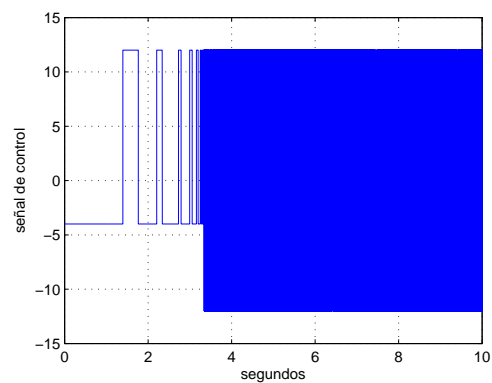


(b)

Figura 4.10: Estado y con adaptación(a) y estado y sin adaptación (b)



(a)



(b)

Figura 4.11: Señal de control con adaptación (a) y señal de control sin adaptación (b)

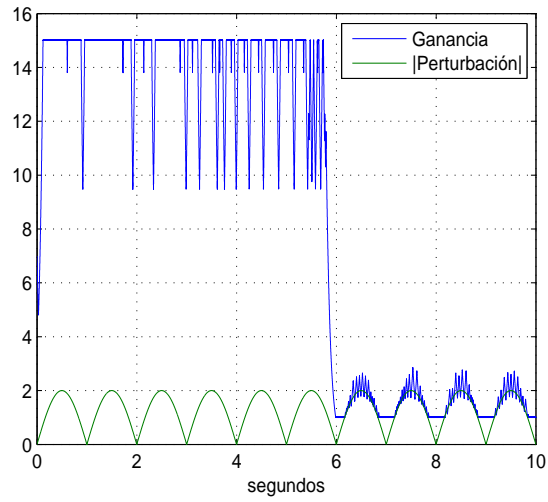


Figura 4.12: Ganancia con adaptación y perturbación

4.2. Control por modos deslizantes adaptable de cuarto orden

En (24) un CMD de orden arbitrario es presentado. Se considera el sistema (3.2) y la ley de control (3.4), sea la función $w(x_i, x_n)$ un algoritmo para CMD de orden n definido como el siguiente procedimiento recursivo *nested n-sliding controller*(24)

$$\begin{aligned}
 w(x_i, x_n) &= \psi_{n-1,n}(x_i, x_n) \\
 \psi_{0,n} &= \text{sign}(x_1) \\
 \psi_{i,n} &= \text{sign}(x_i + \beta_i N_{i,n} \psi_{i-1,n}) \\
 N_{i,n} &= (|x_1|^{p/n} + |x_2|^{p/(n-1)} + \dots + |x_{i-1}|^{p/(n-i+1)})^{\frac{n-i}{p}} \\
 i &= 1, 2, \dots, n-1
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

donde p es el mínimo común múltiplo de $1, 2, \dots, n$. La dinámica de la ganancia $k(t)$ se define por el algoritmo (3.9).

Se ha probado en (25) que eligiendo apropiadamente los valores de las ganancias β_i el algoritmo (4.8) garantiza la convergencia del sistema (3.2) al modo deslizante en tiempo finito siempre y cuando se cumpla la condición

$$k(t) > f(t, x). \tag{4.9}$$

donde $f(t, x)$ es una perturbación acotada.

Con el algoritmo adaptable propuesto (3.9) se garantiza que $k(t) > \alpha f(t, x)$, por lo tanto la condición (4.9) se cumple.

Se considera el sistema (3.2) y el control (3.4), donde $w(x_i, x_n)$ es definido por(4.8)

con $n = 4$

$$w(x_i, x_n) = \text{sign}(x_4 + \beta_1 (x_3^6 + x_2^4 + |x_1|^3)^{1/12} \text{sign}[x_3 + \beta_2 (x_2^4 + |x_1|^3)^{1/6} \text{sign}(x_2 + \beta_3 |x_1|^{3/4} \text{sign}(x_1))]) \quad (4.10)$$

en (24) los valores para las ganancias se proponen como $\beta_1 = 3, \beta_2 = 1, \beta_3 = 0,5$. Los parámetros usados para la simulación son : $k_{min} = 1, k_{max} = 25, \alpha = 0,95, \tau = 0,01, \gamma = 2\pi$. La ganancia fija usada en la simulación del controlador twisting de ganancia fija es $k = 7$. La condiciones iniciales son $x_1(0) = 0,3, x_2(0) = 2, x_3(0) = 0,1, x_4(0) = 1, k(0) = 7$.

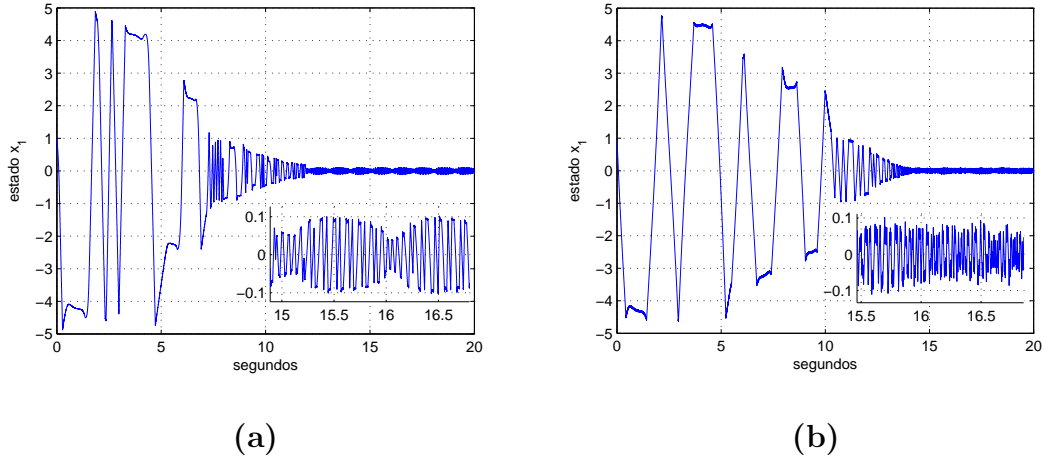


Figura 4.13: Estado x_1 con adaptación(a) y estado x_1 sin adaptación (b)

Análisis de resultados Se han comparado los resultados de implementar en un CMD una ganancia adaptable y una ganancia fija. La mejora es significativa con respecto a la amplitud del chattering que se puede observar comparando las figuras (4.1a, 4.2a, 4.5a, 4.6a, 4.9a, 4.10a, 4.13a, 4.14a, 4.15a, 4.16a) con las figuras(4.1b, 4.2b, 4.5b, 4.6b, 4.9b, 4.10b, 4.13b, 4.14b, 4.15b, 4.16b). En las figuras (4.1a, 4.2a, 4.5a, 4.6a, 4.9a, 4.10a, 4.13a, 4.14a, 4.15a, 4.16a) se puede observar que la ganancia aumenta hasta su máximo valor antes de lograr el modo deslizante. Una vez que se ha alcanzado el modo deslizante el proceso de adaptación comienza sin perder en

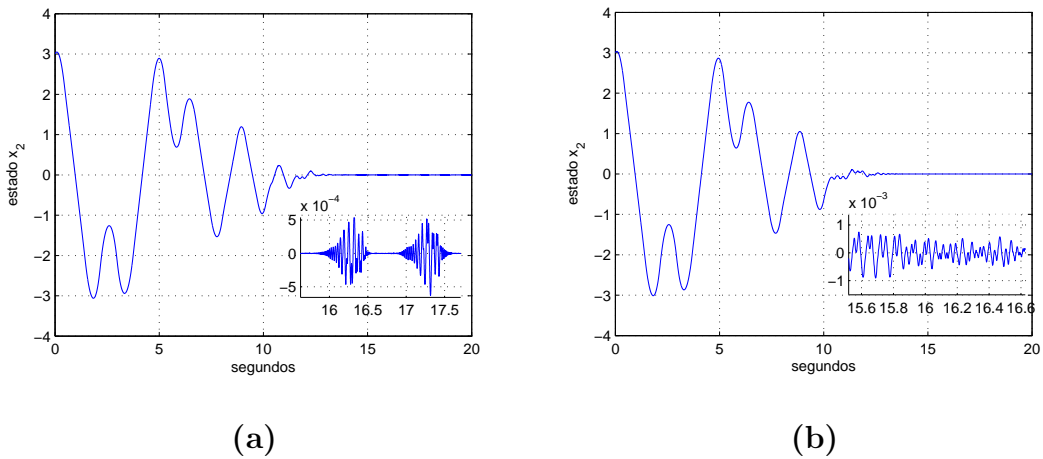


Figura 4.14: Estado x_2 con adaptación(a) y estado x_2 sin adaptación (b)

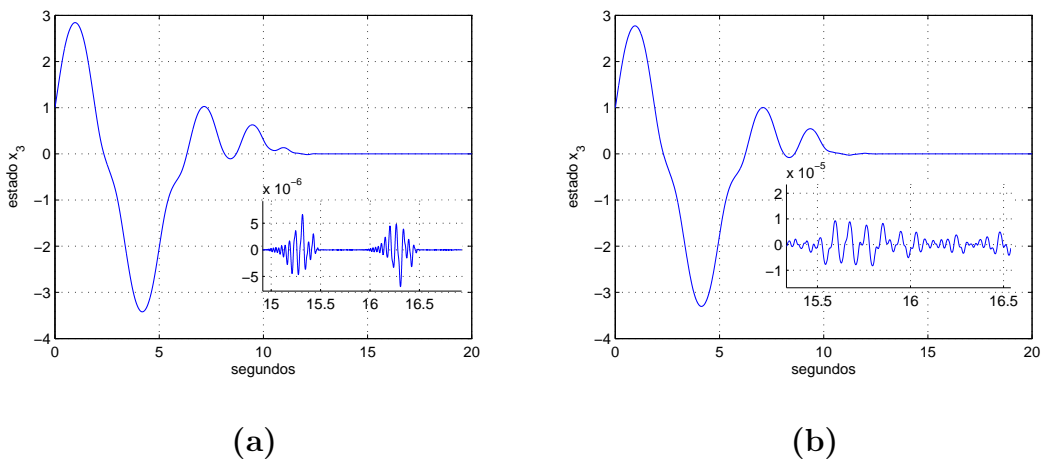


Figura 4.15: Estado x_3 con adaptación(a) y estado x_3 sin adaptación (b)

ningún momento las propiedades de los CMDs.

Al comparar las figuras (4.3a, 4.7a, 4.11a, 4.17a) con las figuras (4.3b, 4.7b, 4.11b, 4.17b) se observa que el control se suaviza de tal manera que el actuador no realiza cambios tan bruscos como si lo fuera un control discontinuo evitando así daños en el actuador y en la misma planta. Se observa la disminución de la amplitud de la señal de control que conduce a una disminución en la energía demandada por el controla-

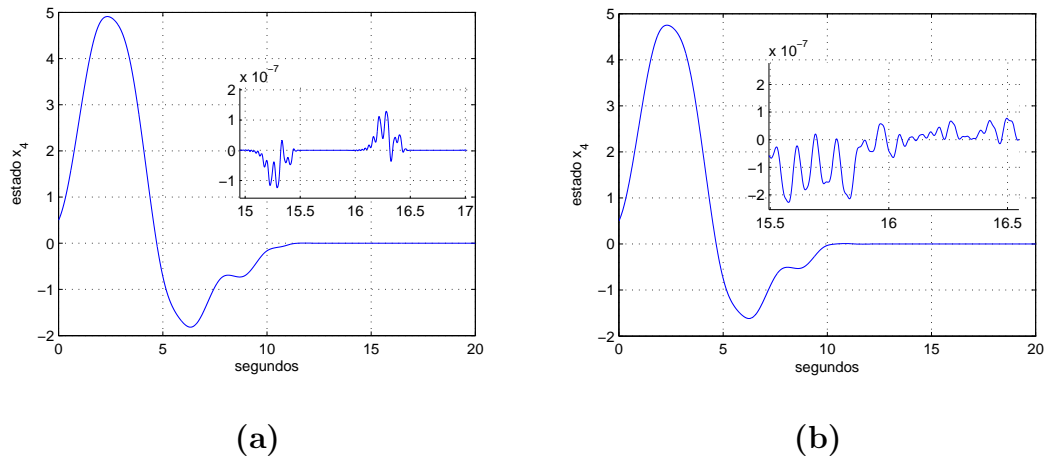


Figura 4.16: Estado x_4 con adaptación(a) y estado x_4 sin adaptación (b)

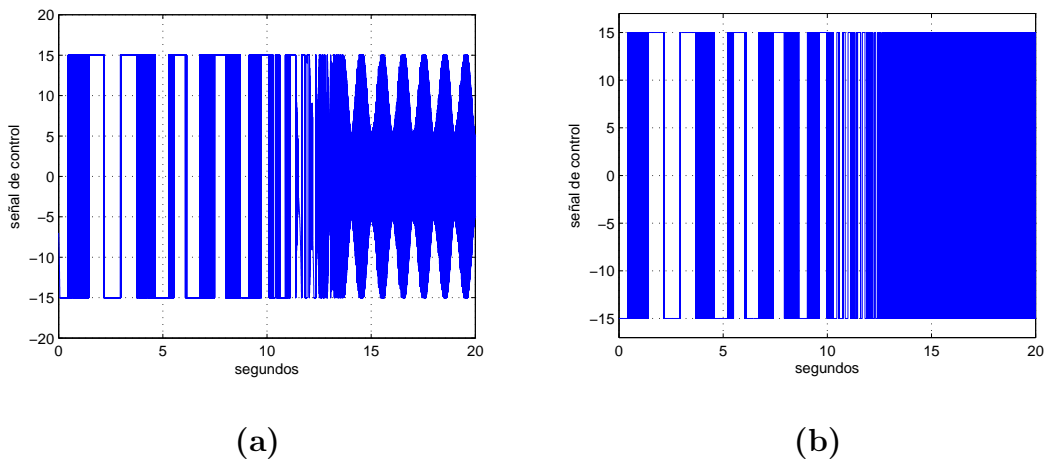


Figura 4.17: Señal de control con adaptación (a) y señal de control sin adaptación (b)

dor.

En las figuras (4.1.1, 4.8, 4.12, 4.18) se observa la trayectoria de la ganancia comparada con la trayectoria de la perturbación, es evidente que la dinámica de la ganancia es muy similar a la de la perturbación pero la ganancia es siempre mayor en una cierta proporción α a la perturbación, de tal manera que se garantiza que el

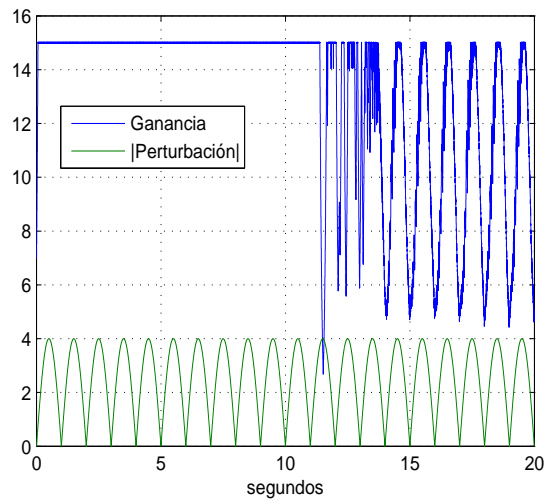


Figura 4.18: Ganancia con adaptación y perturbación

controlador siempre podrá compensar los efectos de la perturbación sobre el sistema.

4.3. Comparación de un controlador por modos deslizantes de orden aumentado (CMDOA) con un controlador por modos deslizantes adaptable

Se considera el sistema 4.1. Se agrega un estado virtual para obtener el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_a &= y_a \\ \dot{y}_a &= z_a \\ \dot{z}_a &= \frac{dp_a(t)}{dt} + u_a(t, x_a, y_a, z_a)\end{aligned}\quad (4.11)$$

donde $u_a(t, x_a, y_a, z_a)$ es un controlador de tercer orden anidado((24))

$$u_a(t, x_a, y_a, z_a) = -n_a \left(z_a + 2 (|y_a|^3 + |x_a|^2)^{1/6} \text{sign}(y_a + |x_a|^{2/3} \text{sign}(x_a)) \right) \quad (4.12)$$

y $|p_a(t)| < A_t$, $\frac{dp_a(t)}{dt} < D_t$ es una perturbación acotada por la constante A_t con su derivada también es acotada por la constante D_t y n_a es la ganancia fija del controlador. La ganancia n_a es mayor a la cota de la derivada de la perturbación D_t .

Se desean controlador los estados x_a y y_a mediante la integral de la señal de control $u_a(t, x_a, y_a, z_a)$, por medio del estado virtual z_a obteniendo una señal de control suave que lleva a los estados x_a y y_a al modo deslizante. Se usa un controlador de tercer orden con el fin de forzar al modo deslizante no solo los estados x_a y y_a sino que también el estado z_a . De esta manera la perturbación es compensada por la integral del control $u_a(t, x_a, y_a, z_a)$ obligando al sistema a entrar en modo deslizantes, aplicando una señal de control suave al sistema real y como consecuencia reducir el chattering, así como la energía demandada por el controlador.

Este proceso se realiza con el objetivo de comparar los resultados de implementar un CMDA de segundo orden donde se suaviza la señal de control por medio de la adaptación de la ganancia y la implementación de un CMDOA donde la señal de

control se suaviza por medio de aumentar el orden del sistema agregando una variable virtual.

El sistema (4.11) con el control (4.12) se ha simulado con el valor de ganancia $n_a = 15$ y comparado con el sistema (4.1) con el CTEA mencionado anteriormente (4.5). Las condiciones iniciales $x_a(0) = 3, y_a(0) = 1, z_a(0) = 1$. A continuación se realiza una comparación del desempeño del controlador de orden aumentado (4.12) y el controlador (4.5-4.1) presentado anteriormente en un sistema equivalente al presentado en este capítulo.

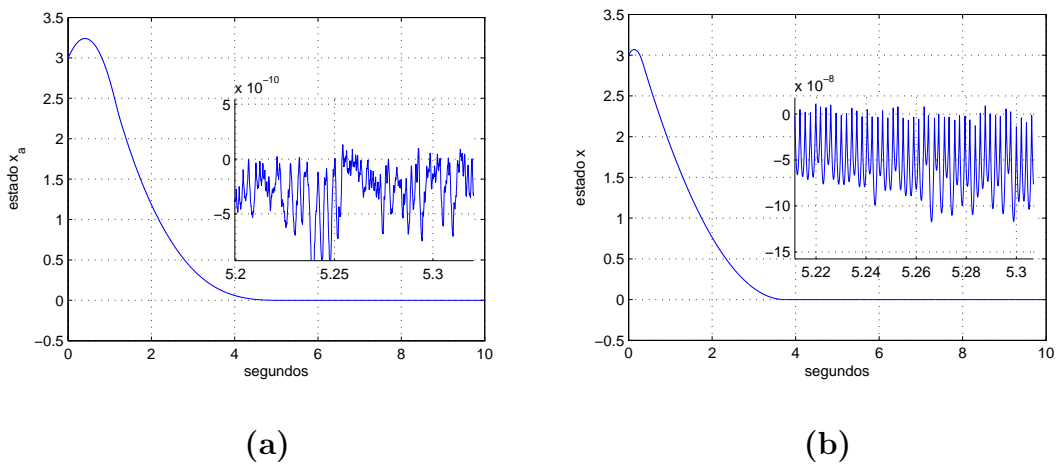


Figura 4.19: Estado x_a con un CMD de orden aumentado (a) y estado x con un CMD de ganancia adaptable(b)

Se observa en las figuras (4.19,4.20) que el CMDOA atenúa mejor la amplitud del chattering que el CTEA. En la figura (4.21) se observa que la señal de control del CTEA orden demanda mayor energía que la del CMDOA, por lo que se deduce que el CMDOA es una mejor técnica de reducción de amplitud de chattering y de disminución en la demandada de la energía por parte del controlador.

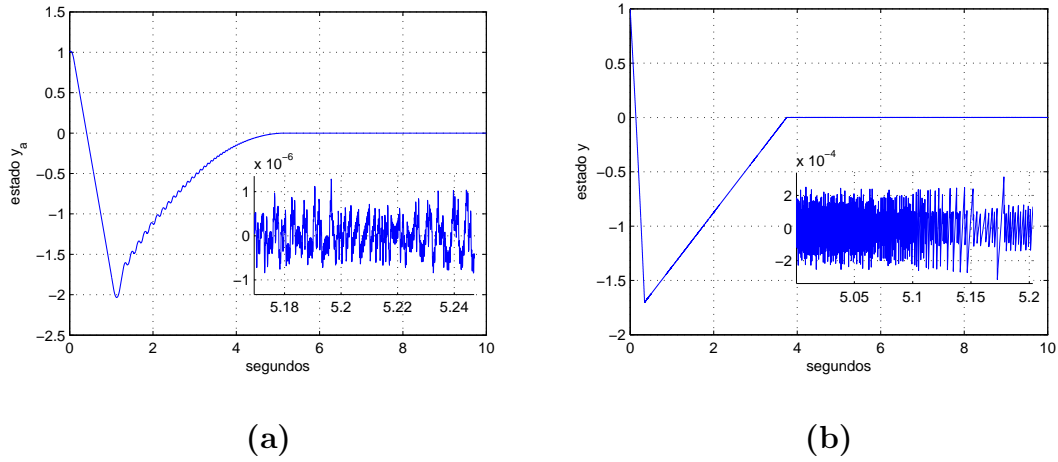


Figura 4.20: Estado x_a con un CMD de orden aumentado (a) y estado x con un CMD de ganancia adaptable(b)

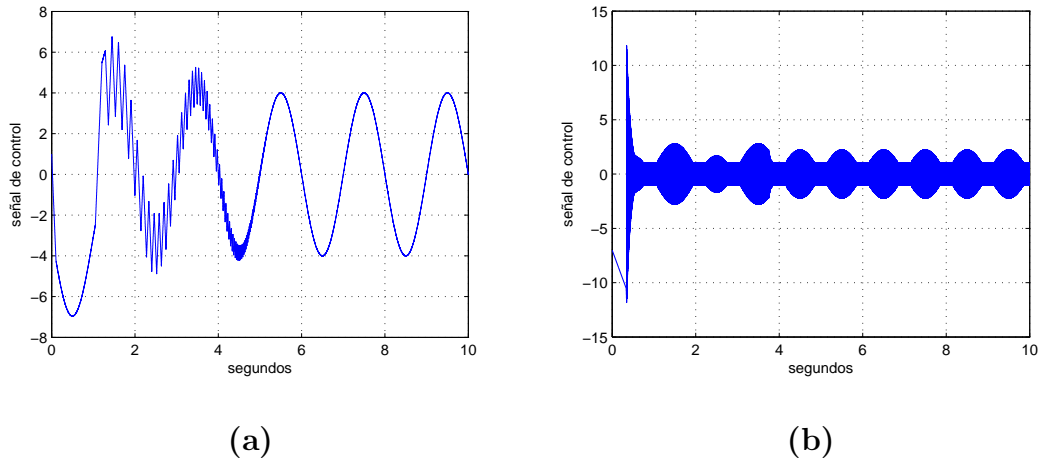


Figura 4.21: Estado x_a con un CMD de orden aumentado (a) y estado x con un CMD de ganancia adaptable(b)

4.4. Controlador por modos deslizantes de orden aumentado (CMDOA) con ganancia adaptable

Se considera el sistema (4.11) y el controlador (4.12) en el que la ganancia fija n_a es intercambiada por la ganancia adaptable $k(t)$ cuya dinámica se describe por

el algoritmo (3.9). El sistema se ha simulado con las condiciones iniciales $x_a(0) = 3, y_a(0) = 1, z_a(0) = 1, k(0) = 7$.

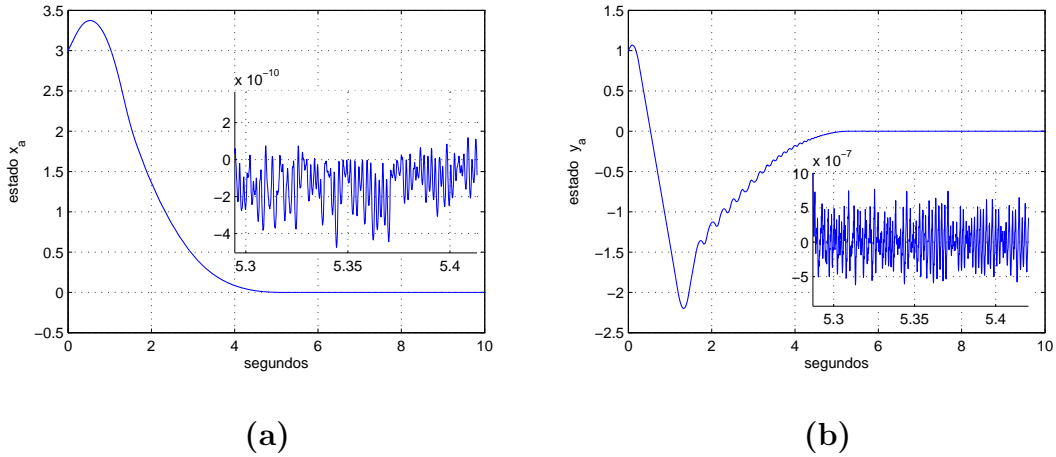


Figura 4.22: Estado x_a con un CMD de orden aumentado (a) y estado x con un CMD de ganancia adaptable(b)

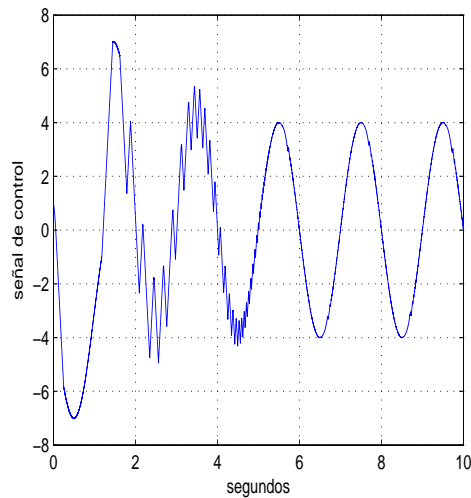


Figura 4.23: Ganancia adaptable y perturbación

Realizando una comparación de las figuras (4.19,4.20, 4.22), se observa que el CMDOA con ganancia adaptable reduce aún más la amplitud del chattering que un

CMDOA con ganancia fija y aún más que un CTEA. Se observa en las figuras (4.21, 4.23) que la reducción en la energía demandada por el controlador se conserva al implementar una ganancia adaptable en un CMDOA.

Capítulo 5

Resultados experimentales

Los CMDAs presentados anteriormente se han implementado en un sistema masa-resorte-amortiguador (MRA). En la figura (5.1) se muestra el sistema. Se pueden consultar los videos de dichos experimentos en la página *negrete.webs.net*.

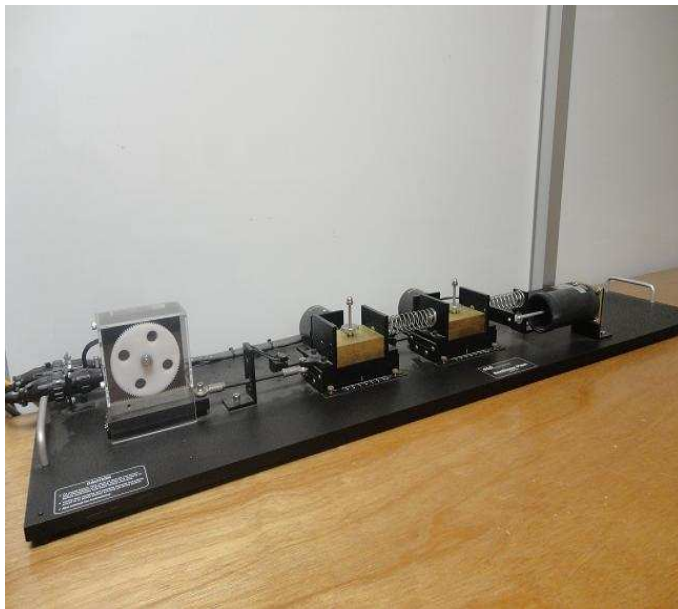


Figura 5.1: Sistema masa-resorte-amortiguador

El siguiente sistema de segundo orden se considera como un modelo para la planta en la que se implementó un CMDA. Se considera una masa con posición $x_i m$ medida

en centímetros y velocidad y_{im} medida en centímetros/segundos

$$\begin{aligned} \dot{x}_{imp} &= y_{imp} \\ \dot{y}_{imp} &= a_i(t) + u_{imp}(k(t), x_{imp}, y_{imp}) \end{aligned} \quad (5.1)$$

donde las incertidumbres del sistema y las perturbaciones a la que se somete se consideran en la función $a_i(t) < A_i$ acotada por la constante A_i .

El control $u_{imp}(k(t), x_{imp}, y_{imp})$ es un CMD de segundo orden con ganancia adaptable descrita por descrita por el algoritmo (3.9). Los resultados de cada CMDA se presentan a continuación.

5.1. Controlador twisting adaptable (CTWA)

Se considera el sistema (5.1), donde

$$u_{imp}(k(t), x_{imp}, y_{imp}) = -k(t) (\text{sign}(x_{imp}) + 0,5\text{sign}(y_{imp})) \quad (5.2)$$

donde la dinámica de la ganancia $k(t)$ está descrita por el algoritmo (3.9). Los parámetros usados para la implementación son $\beta = 0,5, k_{min} = ,01, k_{max} = 15, \alpha = 0,49, \tau = 0,01, \gamma = 3\pi$.

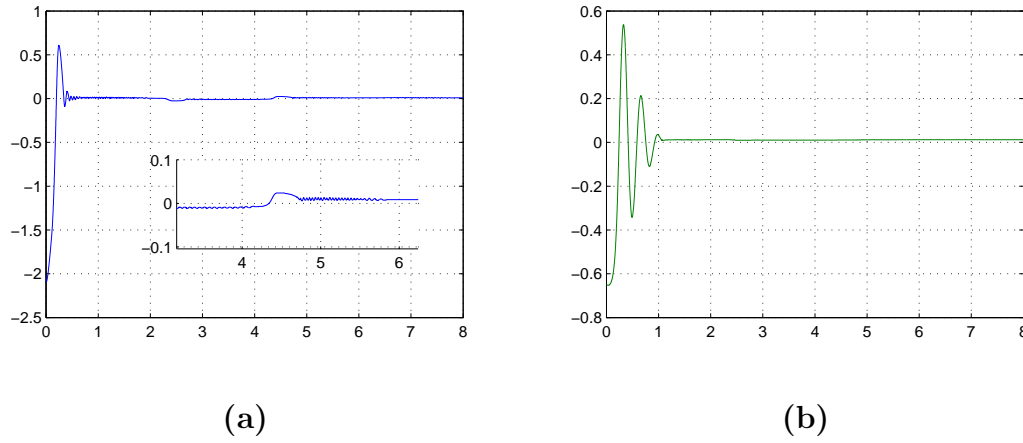


Figura 5.2: Estado x (a) y estado y (b)

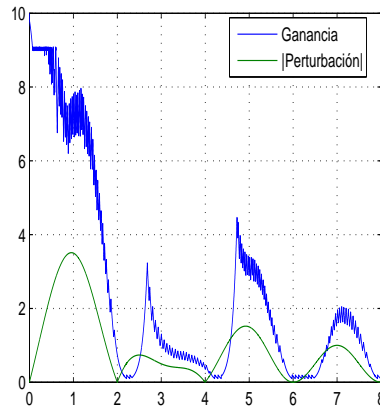


Figura 5.3: Ganancia adaptable y perturbación

5.2. Controlador terminal adaptable (CTEA)

Se considera el sistema (5.1), donde

$$u_{imp}(k(t), x_{imp}, y_{imp}) = -k(t) \left(w(x_{imp}, y_{imp}) = \text{sign} \left(y_{imp} + |x_{imp}|^{1/2} \text{sign}(x_{imp}) \right) \right) \quad (5.3)$$

y la dinámica de la ganancia $k(t)$ está descrita por el algoritmo (3.9).

Los parámetros usados para la implementación son : $k_{min} = ,01, k_{max} = 15, \alpha = 0,95, \tau = 0,01, \gamma = 3\pi$.

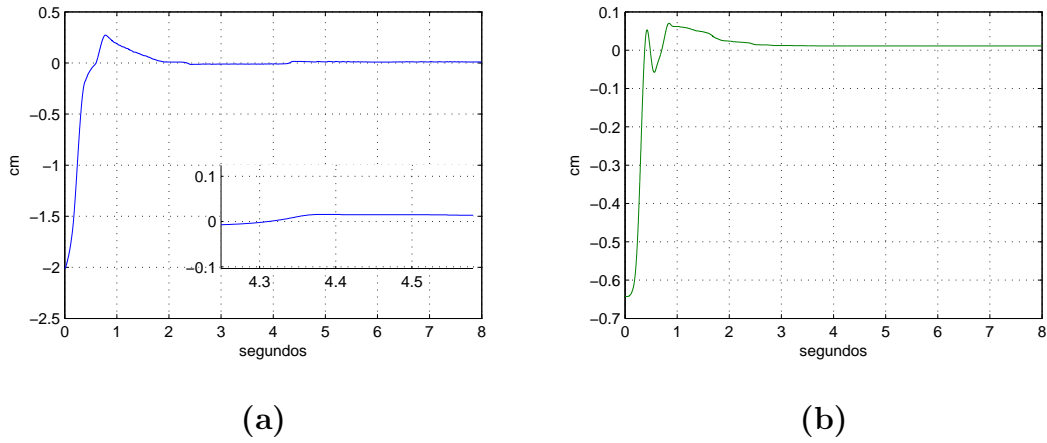


Figura 5.4: Estado x (a) y estado y (b)

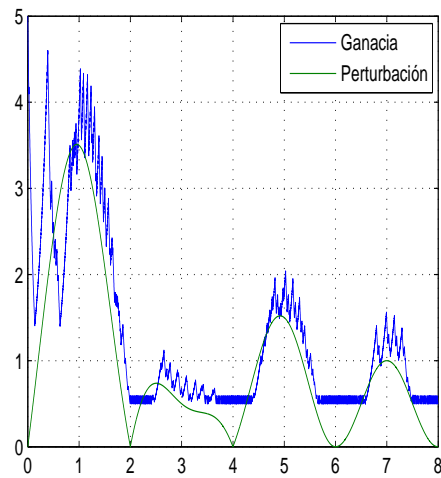


Figura 5.5: Ganancia adaptable y perturbación

5.3. Controlador sub-óptimo adaptable (CSA)

Se considera el sistema (5.1) donde

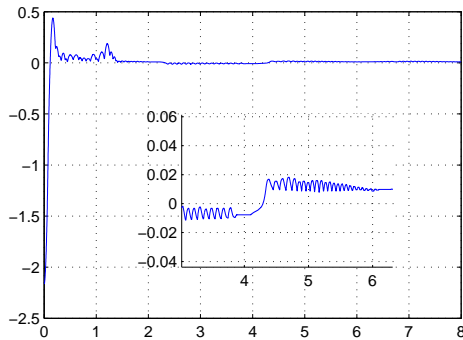
$$u_{imp}(k(t), x_{imp}, y_{imp}) = -k(t) (\eta(t) \text{sign}(x_{imp} - \beta x_{im}(t))) \quad (5.4)$$

y

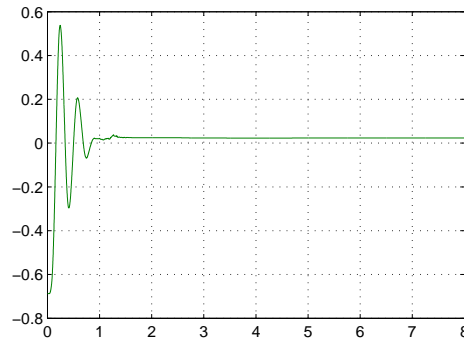
$$\eta(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } x_{im}(t)(x_{imp}(t) - \eta(t)x_{im}(t)) \geq 0 \\ \eta^*, & \text{si } x_{im}(t)(x_{imp}(t) - \eta x_{im}(t)) < 0 \end{cases} \quad (5.5)$$

donde $x_{im}(t)$ es una función a tramos que representa el valor del último punto singular de x_{imp} , es decir, el valor mas reciente de x_{imp} cuando $y_{imp} = 0$ y la dinámica de la ganancia $k(t)$ está descrita por el algoritmo (3.9).

Los parámetros usados para la implementación son : $k_{min} = ,01, k_{max} = 15, \alpha = 0,95, \tau = 0,01, \gamma = 2,5\pi$.



(a)



(b)

Figura 5.6: Estado x (a) y estado y (b)

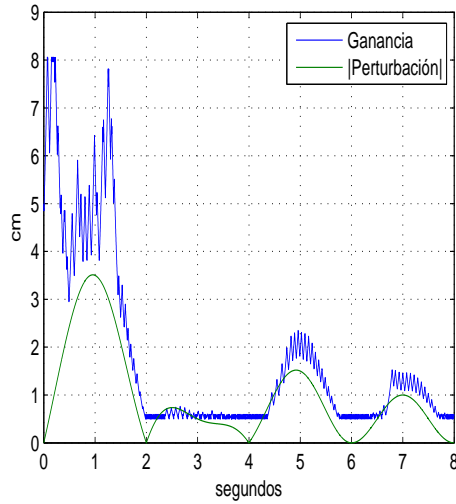


Figura 5.7: Ganancia adaptable y perturbación

5.4. Controlador por modos deslizantes adaptables (CMDA) de cuarto orden

Se considera el siguiente modelo cuarto orden para modelar la planta de dos masas en la que para la masa 1 x_{1i} es su posición medida en centímetros y x_{2i} su velocidad medida en centímetros/segundo. De manera similar para la masa 2 su posición es representada por x_{3i} medida en centímetros y su velocidad x_{4i} medida en centímetros/segundo

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_{1i} &= x_{2i} \\
 \dot{x}_{2i} &= x_{3i} \\
 \dot{x}_{3i} &= x_{4i} \\
 \dot{x}_{4i} &= b_i(t) + u_{2i}(t, x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}, x_{4i})
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

donde las incertidumbres del sistema y perturbaciones a la que está sometido se consideran en la función $b_i(t)$.

El control u_{2i} (por simplicidad los argumentos de $u_{2i}(t, x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}, x_{4i})$ se han omi-

tido) es el algoritmo 4.8 con $n = 4$

$$u_{2i} = k(t) \left(\text{sign}(x_{4i} + \beta_1 (x_{3i}^6 + x_{2i}^4 + |x_{1i}|^3)^{1/12} \right. \\ \left. \text{sign}[x_{3i} + \beta_2 (x_{2i}^4 + |x_{1i}|^3)^{1/6} \right. \\ \left. \text{sign}(x_{2i} + \beta_3 |x_{1i}|^{3/4} \text{sign}(x_{1i})) \right) \quad (5.7)$$

con una ganancia $k(t)$ adaptable cuya dinámica está descrita por (3.9). En (24) los valores para las ganancias se proponen como $\beta_1 = 3, \beta_2 = 1, \beta_3 = 0,5$. Los parámetros usados para la implementación son : $k_{min} = 1, k_{max} = 25, \alpha = 0,95, \tau = 0,01, \gamma = 2\pi$ con la condiciones iniciales $x_{1i}(0) = 0,3, x_{2i}(0) = 2, x_{3i}(0) = 0,1, x_{4i}(0) = 1, k(0) = 7$

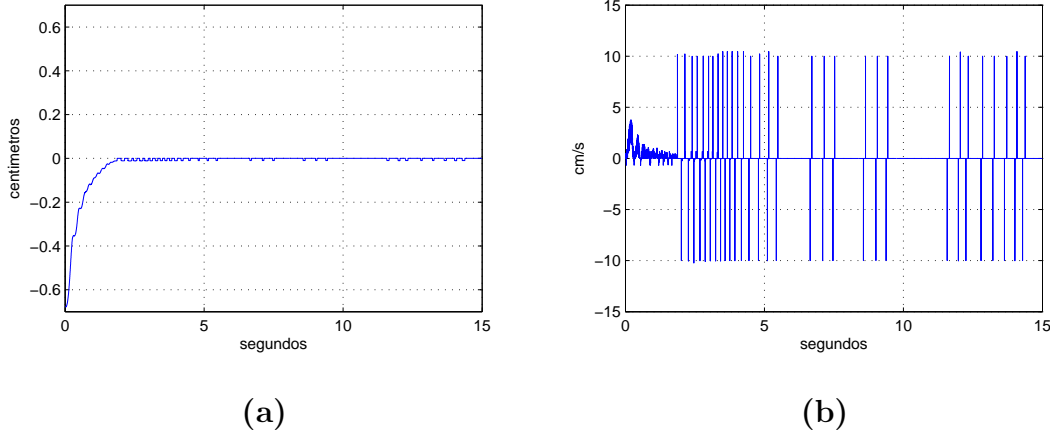


Figura 5.8: Estado x_1 (a) y estado x_2 (b)

Análisis de resultados Al implementar los algoritmos en un sistema físico se puede observar que las dinámica y el comportamiento es muy similar a los resultados observados en las simulaciones. Se observa en las figuras (5.3, 5.3, 5.7, 5.10) que la ganancia presenta una dinámica similar a la perturbación solo que con un retraso que provoca que por ciertas ventanas de tiempo la perturbación sea mayor a la ganancia. El retraso es causado por el tiempo que toma filtrar la señal. En las figuras (5.2, 5.4, 5.6, 5.8, 5.9) se observa que el retraso en la ganancia causa una perdida del modo deslizante, que posteriormente se retoma. En las mismas figuras se puede observar que la perdida del modo deslizante es muy pequeña, por ejemplo en la implementación del algoritmo twisting el estado x se desvía solo una fracción de milímetro.

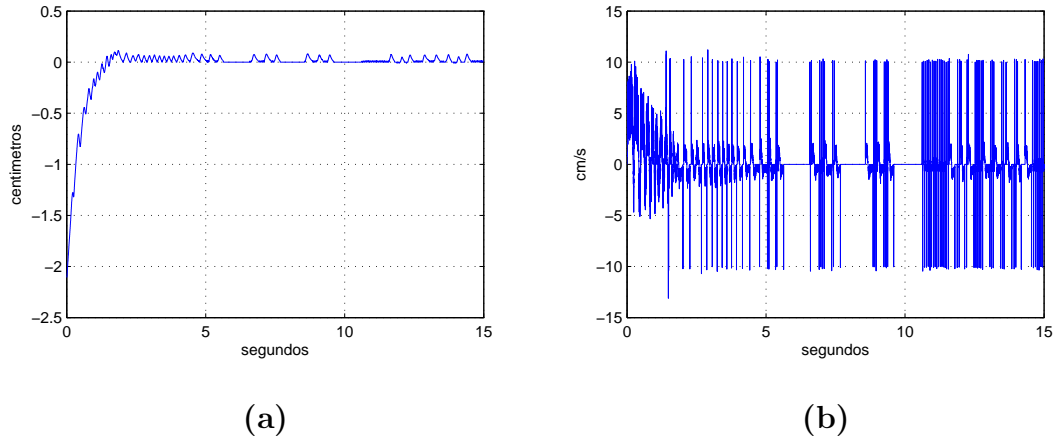


Figura 5.9: Estado x_3 (a) y estado x_4 (b)

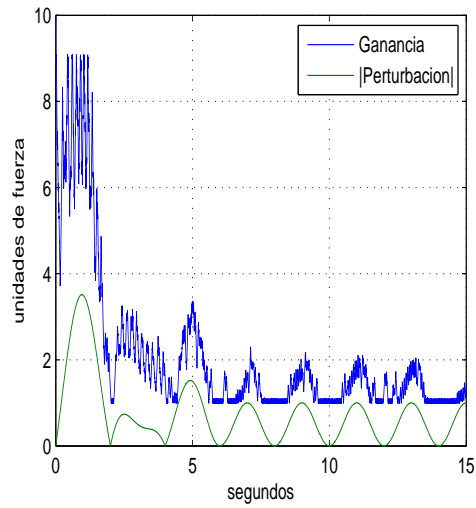


Figura 5.10: Ganancia adaptable y perturbación

Capítulo 6

Conclusiones

Un mecanismo de adaptación para ganancias de CMDOS se ha propuesto. Mediante dicho algoritmo se ha logrado reducir la ganancia del controlador así como la amplitud del chattering y la energía demandada por el controlador.

Las características de los CMDs se conservan al simular la implementación del CMDA. Debido a que el algoritmo adaptable requiere de filtrar una señal discontinua, en la implementación real se presenta un retraso que en ocasiones provoca la pérdida de modos deslizantes por un pequeño lapso de tiempo. Este retardo es proporcional a la constante del filtro usado para obtener el control equivalente, por lo tanto la precisión del algoritmo depende de la elección de la constante del filtro.

La conclusión principal de esta tesis es que para todo CMD, aumentar el orden del controlador, es decir, integrar la señal de control o filtrar un componente de ella, produce una señal más suave. A medida que el orden se aumenta el control es más suave de tal manera que se produce una disminución en la amplitud del chattering. En esta tesis se ha presentado la comparación entre un CMD con ganancia adaptable y un CMDOA, en los resultados se observó que la dinámica es muy similar solo que al implementar los algoritmos en un sistema físico real la adaptación presenta un retardo que termina resultando en la pérdida momentánea del modo deslizante. Más aún, el CMDOA atenúa mejor la amplitud del chattering que el CMD con ganancia adaptable. Por otro lado la demanda de energía por parte del CMD con ganancia

adaptable es superior a la demanda de energía por parte del CMDOA.

Se ha presentado un CMDOA con ganancia adaptable de tal manera que al adaptar la ganancia del controlador se reduce aún más la amplitud del chattering. Se concluye que el mejor desempeño se obtiene aumentando el orden del controlador por medio de un estado virtual y la ganancia del mismo. El número de veces que se integre la señal de control por medio de estados virtuales, es decir, que se aumentado el orden un determinado número de veces, debe ser igual al número de ganancias que se deben adaptar de manera paralela al orden del controlador.

Para mejorar mejorar la idea de adaptación presentada en esta tesis, se debe construir un observador que pueda reemplazar a la señal de control equivalente de tal manera que el retardo provocado por el filtro se omita. Esta idea se desarrollará en un trabajo futuro con un enfoque de funciones de Lyapunov.

Bibliografía

- [1] Bartolini, G., Levant, A., Pisano, A., Usai, E.: 2-sliding mode with adaptation. In: Proceedings of the Seventh IEEE Mediterranean Conference on Control and Systems (1999)
- [2] Hall, C., Shtessel, Y.: Sliding mode disturbance observer-based control for a reusable launch vehicle. *AIAA J. Guidance, Control and Dynamics* 29(6), 1315-1328 (2006)
- [3] Lin, W.S., Chen, C.S.: Robust adaptive sliding mode control using fuzzy modeling for a class of uncertain MIMO nonlinear systems. *IEE Proceedings of Control Theory Applications* 149, 193-201 (2002)
- [4] Bartolini, G., Ferrara, A., Pisano, A., Usai, E.: Adaptive reduction of the control effort in chattering free sliding mode control of uncertain nonlinear systems. *Journal of Applied Mathematics and Computer Science* 8(1), 51-71 (1998)
- [5] Lee, H., Utkin, V.: Chattering suppression methods in sliding mode control systems. *Annual Reviews in Control* 31, 179-188 (2007)
- [6] Paulo, J., Cunha, V.S., Hsu, L., Costa, R., Lizarralde, F.: Output-feedback modelreference sliding mode control of uncertain multivariable system. *IEEE Transactions on Automatic Control* 48(12), 2245-2250 (2003)
- [7] Mirkin, B., Gutman, P.O., Shtessel, Y.: Adaptive continuous control with sliding mode for plants under nonlinear perturbations, external disturbances and actuator failures. In: Proceedings of VSS, pp. 250-255 (2010)

-
- [8] Huang, Y.J., Kuo, T.C., Chang, S.H.: Adaptive sliding-mode control for nonlinear systems with uncertain parameters. *IEEE Trans. Syst. Man, and Cybernetics-Part B: Cybernetics* 38(2), 534-539 (2008)
- [9] Bregeault, V., Plestan, F., Shtessel, Y., Poznyak, A.: Adaptive sliding mode control for an electropneumatic actuator. In: *Proceedings of VSS*, pp. 260-265 (2010)
- [10] Shtessel, Y., Edwards, C., Spurgeon, S., Kochalummoottil, J.: Adaptive continuous finite reaching time control and second order sliding modes. In: *Proceedings of VSS*, pp. 266-271 (2010)
- [11] Shtessel, Y., Moreno, J., Plestan, F., Fridman, L., Poznyak, A.: Super-twisting adaptive sliding mode control: a Lyapunov design. In: *49th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 5109-5113 (2010)
- [12] Utkin, Vadim I.; Poznyak, Alex S.; Ordaz, Patricio; , .^adaptive super-twist control with minimal chattering effect,”*Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC), 2011 50th IEEE Conference on* , vol., no., pp.7009-7014, 12-15 Dec. 2011 doi: 10.1109/CDC.2011.6160720
- [13] Kochalummoottil, J.; Shtessel, Y.B.; Moreno, J.A.; Fridman, L.; , .^adaptive twist sliding mode control: A Lyapunov design,”*Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC), 2011 50th IEEE Conference on* , vol., no., pp.7623-7628, 12-15 Dec. 2011 doi: 10.1109/CDC.2011.6160982
- [14] Bartolini, G., Levant, A., Pisano, A., Usai, E.: 2-sliding mode with adaptation. In: *Proceedings of the Seventh IEEE Mediterranean Conference on Control and Systems* (1999)
- [15] V.I. Utkin, J. Guldner, and J. Shi. *Sliding Mode Control in Electromechanical Systems*. Taylor and Francis, London, UK, 1999.
- [16] Song, G., Cai, L., Wang, Y., Longman, R.: A sliding mode based smooth adaptive robust controller for friction compensation. *Int. J. Robust Nonlinear Control* 8, 725-739 (1998)

-
- [17] Fei, J., Batur, C.: Adaptive sliding mode control with sliding mode observer for a microelectro- mechanical vibratory gyroscope. Proceedings of the Institution of mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering 222(8), 839-847 (2008)
- [18] Zhihong, M., O'day, M., Yu, X.: A robust adaptive terminal sliding mode control for rigid robotic manipulators. J. Intell. Robotics Syst. 24(1), 23-41 (1999)
- [19] Levant, A.: Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control. International Journal of Control 58(6), 1247-1263 (1993)
- [20] Man Z., A.P. Paplinski and H.R. Wu (1994). A robust MIMO terminal sliding mode control for rigid robotic manipulators. IEEE Trans. Automat. Control, 39, No. 12, 2464-2468.
- [21] Bartolini, G., Ferrara, A. and Usai, E. (1998). Chattering avoidance by second-order sliding mode control, IEEE Trans. Automat. Control, 43, No.2, 241-246.
- [22] Utkin, V. I, Sliding Modes in Control and Optimization, Springer-Verlag, 1992.
- [23] Emelyanov, S.V., Korovin, S.K., Levantovsky, L.V.: Second order sliding modes in controlling uncertain processes. Soviet Journal of Computer and System Science 24(4), 63-68 (1986)
- [24] Levant, A.: Higher-order sliding modes, differentiation and output-feedback control. International Journal of Control 76(9/10), 924-941 (2003)
- [25] Levant, A., Michael, A.: Adjustment of High-Order Sliding-Modes, Int.Journal of Robust and Nonlinear Control, 19(15), 1657 - 1672, 2009
- [26] Utkin, V.: Sliding modes and their application in variable structure systems. Mir, Moskow (1978)
- [27] Emelyanov, S.V., Korovin, S.K., Levantovsky, L.V.: Second order sliding modes in controlling uncertain processes. Soviet Journal of Computer and System Science 24(4), 63-68 (1986)

- [28] Filippov, A.: Differential equations with discontinuous right-hand side. Kluwer, London (1960)