1. METODOLOGÍA

1.1. Conceptos básicos de probabilidad y estadística en hidrología

Los procesos hidrológicos evolucionan en el espacio y en el tiempo, y el diseño y la planeación de las obras hidráulicas están ligados a eventos futuros; es por esto que la probabilidad y la estadística son una herramienta muy importante en los análisis hidrológicos, ya que permiten mediante principios matemáticos correlacionar valores observados y realizar pronósticos.

Muchos procesos en Hidrología pueden ser analizados y explicados con base en la ciencia probabilística, dada su aleatoriedad. Los métodos estadísticos permiten presentar, organizar y reducir datos para facilitar su interpretación y evaluación, para que de esta manera sea posible predecir una avenida o una precipitación. Estos fenómenos hidrológicos se desarrollan de manera parcialmente predecible, o determinística y parcialmente aleatoria, por lo cual se modelan como procesos estocásticos.

Para trabajar con la información hidrológica se deben describir las variables aleatorias X con una función que determine la posibilidad de que una *observación* x de la variable caiga en el rango específico. Las probabilidades estimadas, utilizando la información medida, son aproximadas debido a que dependen de valores específicos de las observaciones en una muestra. Es conveniente que después de ajustar la información a una función de distribución de probabilidad se determinen las probabilidades de los eventos utilizando esa función de distribución.

Para determinar la función de densidad de probabilidad se lleva a cabo el siguiente proceso,

a) Primero las observaciones de una muestra tomada aleatoriamente se ordenan para formar un histograma de frecuencia; después se calcula la función de frecuencia relativa $f_s(x)$ dividiendo el número de observaciones n_i en el intervalo i, que cubre el rango $[x_i - \Delta x, x_i]$, donde Δx es el intervalo utilizado para construir el histograma de frecuencia, entre el número total de observaciones n,

$$f_s(x_i) = \frac{n_i}{n} \tag{1.1}$$

   Esta ecuación representa una estimación de la probabilidad real asociada a la ocurrencia de un determinado evento. Para poder hacer inferencias probabilísticas en relación con alguna variable hidrológica de interés, es necesario estudiar primero la forma de caracterizar a las poblaciones de las que la muestra analizada puede formar parte.

b) Segundo, la suma de los valores de las frecuencias relativas hasta un punto dado es la función de frecuencia acumulada $F_s(x)$

$$F_s(x_i) = \sum_{j=1}^{i} f_s(x_j) \qquad (1.2)$$

La gráfica que resulta se denomina "curva de frecuencias acumuladas"

Estas curvas son una representación gráfica de las características fundamentales de una muestra. Las frecuencias relativas asociadas a los valores de la variable que se estudia son una aproximación de la probabilidad de que dicha variable tenga valores comprendidos en un cierto intervalo.

c) Tercero, la función de distribución de probabilidad $F(x)$ es el límite de la función de frecuencia acumulada ya que esta función se extrapola para toda la población.

$$F(x) = \lim_{n\to\infty \ \Delta x\to 0} F_S(x) \qquad (1.3)$$

La función de distribución de probabilidad de la población de valores posibles de una variable cualquiera, X, $F_x(x)$, corresponde a la idea de frecuencia relativa acumulada asociada a los valores de una muestra, **y mide la probabilidad de que X tome valores menores o iguales que un valor especificado x**.

d) Para finalizar, la función de densidad de probabilidad es el valor de la pendiente de la función de distribución para un valor especifico de x.

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} \qquad (1.4)$$

Esta función corresponde a la idea de frecuencias relativas asociada al caso de una muestra.

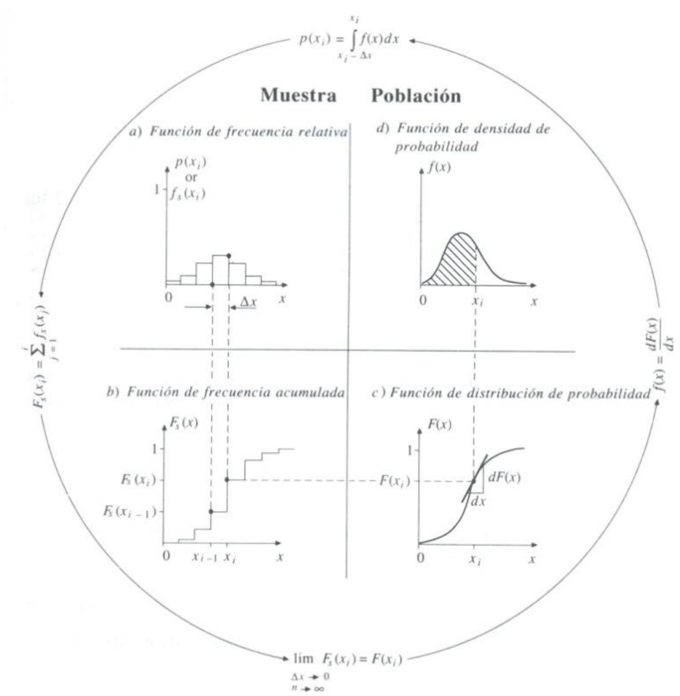

Figura 1.1. Funciones de frecuencia para la información de muestra y funciones de probabilidad para la población

El ajuste de un conjunto de datos hidrológicos a una distribución permite que una gran cantidad de información probabilística en la muestra pueda ser representada por una función dentro de ciertos parámetros. Para poder correlacionar dicha muestra a la distribución de probabilidad, se requiere de un método de estimación de parámetros la cual permita relacionar la información muestral con de la población, los métodos de estimación de parámetros que se emplearon en este estudio son:

- ✓ Método de momentos: consiste en igualar los valores de los parámetros estadísticos de la muestra con los de la población, es decir, que la media, variancia y asimetría (primero, segundo y tercer momentos respectivamente) de la muestra sean iguales a los de la función de distribución de probabilidad.
- ✓ Máxima Verosimilitud. supone que los mejores parámetros de una función deben ser aquellos que maximizan la probabilidad conjunta de ocurrencia de la muestra observada también llamada verosimilitud. La ecuación de verosimilitud es:

$$L = \prod_{i=1}^{n} f(x_i) \tag{1.5}$$

- ✓ Mínimos cuadrados. minimiza la suma de los cuadrados de todas las desviaciones entre los valores calculados y observados. Para el ajuste con el criterio de mínimos cuadrados se establece la función:

$$Z = \sum_{i=1}^{n} \left(P(x_i) - F(x_i)\right)^2 \tag{1.6}$$

donde:
x_i son los valores de los datos de la muestra
$P(x_i)$ es la frecuencia relativa acumulada correspondiente a cada valor x_i
$F(x_i)$ es el valor de la función de distribución asociada a x_i (este valor depende de los parámetros que se busca ajustar)

Definida Z, se encuentran los valores de los parámetros que la hacen mínima, mediante un proceso iterativo.

Existe una amplia variedad de funciones de distribución de probabilidad, sin embargo sólo algunas se apegan a las variables hidrológicas. Las funciones de densidad de probabilidad más comunes son:

- ✓ Distribución Normal
- ✓ Distribución Lognormal
- ✓ Distribución Exponencial
- ✓ Distribución Gamma
- ✓ Distribución Pearson tipo III (gamma de tres parámetros)
- ✓ Distribución Logpearson tipo III
- ✓ Distribución General de Valores Extremos I (Gumbel)
- ✓ Distribución Gumbel de dos poblaciones (Doble Gumbel)

Los ajustes de los valores medidos de gastos y lluvias que se realizaron en este estudio se llevaron a cabo empleando las funciones de densidad de probabilidad “Gumbel y Gumbel de dos poblaciones”, ya que estas funciones se apegan a valores extremos, lo que quiere decir que es adecuado emplearlas para determinar valores máximos. En el caso de los gastos, representan la probabilidad de que se presenten grandes avenidas con las cuales se diseñan y proyectan las obras hidráulicas.

A continuación se definen las funciones que se aplicaron en este trabajo.

✓ Distribución General de Valores Extremos I (Gumbel)

Si se tienen N muestras, cada una de las cuales tiene un número n de eventos, y si se selecciona el máximo x de los n eventos de cada muestra, se ha demostrado que, a medida que n aumenta, la función de distribución de probabilidad de x tiende a:

$$F(x) = e^{-e^{-\alpha(x-\beta)}} \tag{1.7}$$

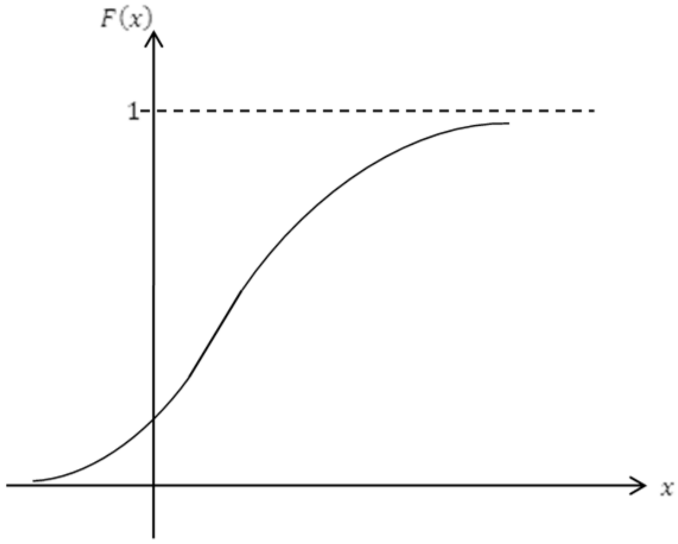

Figura 1.2. Función de distribución Gumbel

Por lo que la función de densidad de probabilidad es:

$$f(x) = \alpha e^{\left[-\alpha(x-\beta)-e^{-\alpha(x-\beta)}\right]} \tag{1.8}$$

donde:
α es el parámetro de forma,
β es el parámetro de escala, y
x es la variable aleatoria

Los parámetros α y β se estiman por el método de momentos como:

$$\alpha = \frac{1.2825}{S} \tag{1.9}$$

$$\beta = \bar{x} - 0.45\, S \tag{1.10}$$

Por el método de máxima verosimilitud, los parámetros se estiman resolviendo las ecuaciones:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i e^{-\alpha x_i} - \left(\bar{x} - \frac{1}{\alpha}\right)\sum_{i=1}^{n} e^{-\alpha x_i} = 0 \tag{1.11}$$

$$\beta = \frac{1}{\alpha} ln \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} e^{-\alpha x_i}} \tag{1.12}$$

Para poder dibujar la gráfica que permita comparar los valores medidos con los de la función de distribución es conveniente despejar el término $\alpha(x-\beta)$ de la función de distribución aplicando el logaritmo natural dos veces a ambos lados de la ecuación, como se muestra a continuación:

$$ln\big(F(x)\big) = ln\left(e^{-e^{-\alpha(x-\beta)}}\right)$$

$$ln\big(F(x)\big) = -e^{-\alpha(x-\beta)}$$

$$ln\left(\frac{1}{F(x)}\right) = e^{-\alpha(x-\beta)}$$

$$lnln\left(\frac{1}{F(x)}\right) = ln\big(e^{-\alpha(x-\beta)}\big)$$

$$lnln\left(\frac{1}{F(x)}\right) = -\alpha(x-\beta)$$

$$-lnln\left(\frac{1}{F(x)}\right) = \alpha(x-\beta) \qquad (1.13)$$

De esta forma se demuestra que la función tiende a ser una recta, colocando en el eje de las abscisas el valor de $Z = -lnln\left(\frac{1}{F(x)}\right)$ y en el eje de las ordenadas los valores de x, tal como se muestra en la siguiente figura:

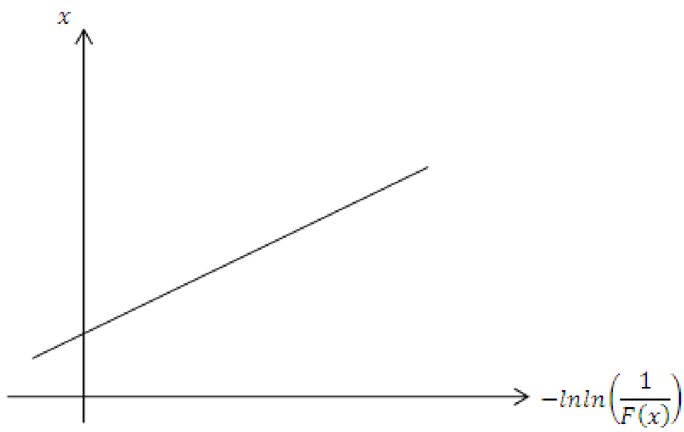

Figura 1.3. Función de distribución Gumbel con la variable reducida Z

- ✓ Distribución Gumbel de dos poblaciones (Doble Gumbel)

En muchos lugares, específicamente en las zonas costeras de México, los gastos máximos anuales pertenecen a dos poblaciones diferentes: la primera está conformada por los gastos producidos por precipitaciones relacionadas con los fenómenos meteorológicos dominantes en la región en estudio, y la segunda son los gastos producidos por precipitaciones ciclónicas, normalmente de mayor magnitud a los de la primera población.

Se ha demostrado (González, V. F. *Contribución al Análisis de frecuencias de valores extremos de los gastos máximos en un río*, 1970) que en estos casos, la función de distribución de probabilidad se puede expresar como:

$$F(x) = F_1(x)[p + (1-p)F_2(x)] \qquad (1.14)$$

donde $F_1(x)$ y $F_2(x)$ son, respectivamente, las funciones de distribución de probabilidad de los gastos máximos anuales no producidos por tormentas ciclónicas y de los producidos por ellas, y p es la probabilidad de que en un año cualquiera el gasto máximo no sea producido por una tormenta ciclónica.

En la práctica, la función 1.14 se ha simplificado separando la contribución de cada población; en el caso de gastos o lluvias máximas anuales esto se justifica además porque dichos máximos ocurren solo una vez por año y necesariamente pertenecen a una u otra de las poblaciones; la función de distribución queda entonces de la forma:

$$F(x) = pF_1(x) + (1 - p)F_2(x) \tag{1.15}$$

Dado que $F_1(x)$ y $F_2(x)$ son del tipo Gumbel, la función de probabilidad queda así:

$$F(x) = e^{-e^{-\alpha_1(x-\beta_1)}}p + (1 - p)e^{-e^{-\alpha_2(x-\beta_2)}} \tag{1.16}$$

donde α_1 y β_1 son los parámetros correspondientes a la población no ciclónica y α_2 y β_2 corresponden a la ciclónica. Para estimar estos parámetros se recomienda minimizar el error cuadrático

$$Z = \left[\sum_{i=1}^{n}(x_i - \hat{x}_i)^2\right]^{1/2} \tag{1.17}$$

donde x_i y $\hat{x}_i$ son los valores medidos y los valores estimados con la función de distribución de probabilidad respectivamente, y n es el número de valores que contiene la muestra.

Seleccionando un valor especifico de p se encuentran por mínimos cuadrados los valores de α_1, β_1, α_2 y β_2. Dada la experiencia que se tiene de otros estudios de hidrología de la República Mexicana, donde se ha empleado esta función de probabilidad, se recomienda hacer los ajustes de los valores medidos a esta función usando una probabilidad $p = 0.84$, ya que con este valor los ajustes dan valores razonables. Al emplear esta probabilidad se supone que, aproximadamente cada 6 años, se presentan las avenidas producidas por tormentas ciclónicas.

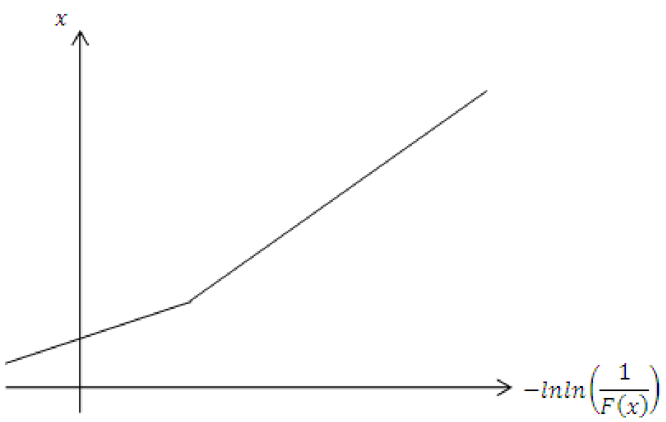

Figura 1.4. Función de distribución Doble Gumbel

Periodo de retorno

Los sistemas hidrológicos son afectados algunas veces por eventos extremos, tales como tormentas severas, crecientes o sequías. La magnitud de un evento extraordinario está inversamente relacionada con su frecuencia de ocurrencia. Mediante un análisis de frecuencia, empleando las funciones de distribución de probabilidad, se pueden relacionar la magnitud de los eventos extraordinarios con la frecuencia con la que son igualados o superados. Para llevar a cabo este análisis es necesario suponer que la información hidrológica analizada está idénticamente distribuida y es independiente. Para cumplir con la independencia y distribución idéntica de la información hidrológica es conveniente seleccionar los valores máximos anuales (ya sea de escurrimientos o precipitación).

El análisis de frecuencia de flujo de crecientes es bastante empleado en la ingeniería para el diseño de presas, estructuras de control de crecientes y puentes, por mencionar las obras donde se aplica este análisis con frecuencia, para determinar el beneficio económico de proyectos de control de avenidas y delimitar planicies de inundación.

El periodo de retorno de un evento con una magnitud dada puede definirse como el intervalo de recurrencia promedio entre eventos que igualan o exceden una magnitud especifica. Supóngase que por definición un evento extremo ocurre si una variable aleatoria X es mayor o igual a un cierto nivel x_T, el intervalo de recurrencia τ es el tiempo entre ocurrencias de $X \geq x_{Tr}$. El periodo de retorno Tr de un evento $X \geq x_{Tr}$ es el valor esperado de τ, $E(\tau)$, es decir, su valor promedio medido sobre un número de ocurrencias suficientemente grande.

La probabilidad $p = P(X \geq x_{Tr})$ de ocurrencia del evento $X \geq x_{Tr}$ en cualquier observación puede relacionarse con el periodo de retorno de tal modo que para cada observación existen dos resultados posibles: “éxito” $X \geq x_{Tr}$ (probabilidad p) o “falla” $X < x_{Tr}$ (probabilidad $1-p$). Debido a que las observaciones son independientes, la probabilidad de un intervalo de recurrencia de duración τ es el producto de las probabilidades de $\tau - 1$ fallas seguidas por un éxito, es decir, $(1-p)^{\tau-1}p$ y el valor esperado para τ está dado por:

$$E(\tau) = \sum_{\tau=1}^{\infty} \tau(1-p)^{\tau-1}p \tag{1.18}$$

desarrollando la suma, la expresión tiene la forma de una serie de potencias y puede reescribirse y simplificarse de tal modo que:

$$E(\tau) = \frac{1}{p} \tag{1.19}$$

lo que quiere decir que la probabilidad de ocurrencia de un evento en cualquier observación es el inverso de su periodo de retorno: $P(X > x_{Tr}) = {}^{1}/_{Tr}$

Por lo que $P(X \leq x_{Tr}) = 1 - {}^{1}/_{Tr}$

El periodo de retorno se puede relacionar con la función de distribución de probabilidad de la siguiente forma:

$$Tr = \frac{1}{1-F(x)} \tag{1.20}$$

Despejando $F(x)$ de la expresión anterior se llega a:

$$F(x) = \frac{Tr-1}{Tr} \qquad \rightarrow \qquad \frac{1}{F(x)} = \frac{Tr}{Tr-1} \tag{1.21}$$

Cuando los periodos de retorno están asociados a variables aleatorias que se miden anualmente, ya sean de gastos o precipitaciones máximas, la unidad de tiempo en la cual se calculan los periodos de retorno es en años y estos se pueden relacionar con las funciones de la distribución de probabilidad. En el caso de la función Gumbel a la relación que se llega es la siguiente:

$$-lnln\left(\frac{1}{F(x)}\right)=\alpha(x-\beta) \qquad \rightarrow \qquad -lnln\left(\frac{Tr}{Tr-1}\right)=\alpha(x-\beta) \tag{1.22}$$

Con la relación anterior se pueden dibujar las gráficas de cada uno de los ajustes colocando en el eje de las abscisas el valor de $-lnln\left(\frac{Tr}{Tr-1}\right)$ en años, y en el eje de las ordenadas los gastos o precipitaciones medidas y calculadas. Por medio de la representación gráfica de los resultados se puede determinar qué función de distribución de probabilidad se apega mejor a los datos medidos.

Todos los ajustes presentados en este trabajo de las funciones de distribución de probabilidad Gumbel y Doble Gumbel a gastos y precipitaciones, asociados a diferentes periodos de retorno, se calcularon con el programa *AX*.

El programa *AX* ajusta diferentes funciones de distribución a series de datos, estimando valores para diferentes periodos de retorno y calcula el error estándar de cada ajuste. Las funciones de distribución de probabilidad con las que trabaja este programa son: Normal, Log-normal, Gumbel, Exponencial, Gamma y Doble Gumbel. Para determinar los parámetros de las funciones de distribución de probabilidad los métodos empleados por el programa son: máxima verosimilitud y momentos, en el caso de las funciones Gamma y Log-normal los parámetros pueden calcularse para dos o tres parámetros; el método utilizado en la función Doble Gumbel es el de mínimos cuadrados.

1.2. Análisis estadístico de escurrimientos

Al aplicar la metodología de ajustar una función de distribución de probabilidad a una serie de gastos, se obtienen los valores de gastos asociados a diferentes periodos de retorno, los cuales se emplean para dimensionar los hidrogramas de cada uno de los ríos, para después llevar a cabo un transito de avenida que permita determinar la altura óptima de los puentes ferroviarios y en el caso de que esta altura sea mayor a la del puente en la realidad, se deben determinar las medidas necesarias para proteger los puentes de las avenidas extraordinarias.

Los registros máximos anuales de gastos con los cuales se realizó el análisis son gastos instantáneos anuales y gastos medios anuales.

El gasto medio anual se selecciona del registro diario de gastos medios tomando el valor máximo de estos de cada año de registro. Los gastos medios se determinan como un promedio de las n mediciones que se hayan realizado en un día.

A diferencia del gasto medio, el gasto instantáneo es el valor máximo de los n registros tomados cada día, gasto instantáneo anual es el valor máximo del registro de los gastos instantáneos de todo un año.

A los dos grupos de registros de gastos se les debe de ajustar una función de distribución de probabilidad, ya sea la función Gumbel o la Doble Gumbel, que mejor represente la tendencia de los gastos, para poder estimar los gastos de diseño asociados a diferentes periodos de retorno y dimensionar los hidrogramas de diseño para cada río.

En los ríos grandes el gasto máximo instantáneo puede ser apenas algo mayor que el máximo gasto medio diario. En corrientes pequeñas el gasto máximo instantáneo es por lo general muchísimo más grande que el gasto máximo medio diario.

La relación Q_{inst} / Q_{medio} es útil para estimar cual ha sido el comportamiento histórico de la forma del de las avenidas del río.

1.3. Estimación de hidrogramas

Un hidrograma es la representación gráfica del escurrimiento de una corriente en el tiempo, en la cual se pueden observar las variaciones del flujo en el tiempo cronológicamente. En general para expresar el flujo se emplea el gasto.

Para este estudio los hidrogramas que se tienen que generar deben ser aislados ya que se busca representar como es el comportamiento de los ríos dada una o varias tormentas consecutivas, cuando se presentan los gastos máximos anuales.

La forma de los hidrogramas varía según la cuenca y las tormentas, pero en general se pueden distinguir las siguientes partes:

- ✓ Escurrimiento directo: está constituido por el escurrimiento superficial que se encuentra relacionado con una tormenta en particular y proviene de la precipitación en exceso o efectiva; el escurrimiento superficial es el que llega más rápido a la salida de la cuenca.
- ✓ Escurrimiento base: difícilmente se le puede relacionar con una tormenta particular; se produce cuando el nivel del agua en el cauce está abajo del nivel freático y es el único que alimenta las corrientes cuando no hay lluvias.
- ✓ Punto de levantamiento (A): indica el inicio del escurrimiento directo producto de una tormenta.
- ✓ Punto de pico (B): es el gasto máximo que se produce por la tormenta; para fines de diseño es el punto más importante del hidrograma.
- ✓ Punto de inflexión (C): indica el fin del escurrimiento por las laderas, el agua restante escurre por los canales de la cuenca y como escurrimiento subterráneo.
- ✓ Final del escurrimiento directo (D): a partir de este punto el escurrimiento solo será de origen subterráneo.
- ✓ Rama ascendente (A-B): abarca desde el inicio del escurrimiento directo hasta que este alcanza su valor máximo.
- ✓ Rama descendente (C-D): es la parte del hidrograma que indica el vaciado del escurrimiento directo producido por la tormenta.
- ✓ Tiempo de pico (t_p): es el tiempo transcurrido desde el punto de levantamiento hasta el punto de pico.
- ✓ Tiempo base (t_b): es el tiempo que dura el escurrimiento directo, comienza en el punto de levantamiento y culmina en el punto final del escurrimiento directo.

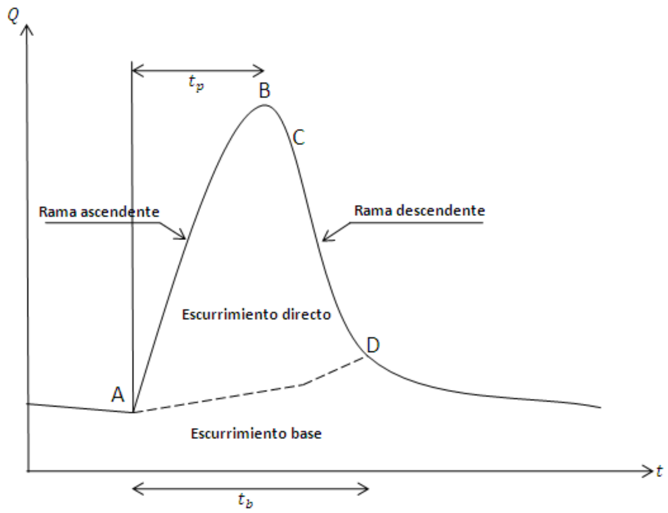

Figura 1.5. Hidrograma

1.4. Relación entre precipitación y escurrimiento

Cuando se presenta el caso de que exista poca o ninguna información de escurrimientos, o que esta sea de mala calidad, se debe recurrir a estimar mediante modelos matemáticos la historia de los escurrimientos del sitio de interés, a partir de los datos de precipitación.

Los modelos que permiten estimar los escurrimientos a partir de las características de la lluvia, deben tomar en cuenta las condiciones y características de la cuenca, así como la distribución de la lluvia en la cuenca y en el tiempo. Las propiedades de la cuenca más importantes que intervienen en este análisis son el área, la altura total de la precipitación y las características generales o promedio de la cuenca (forma, pendiente, tipo y uso de suelo, longitud del cauce, etc.).

Se han desarrollado una gran cantidad de métodos para relacionar la lluvia con el escurrimiento. La mayoría de los modelos empíricos que se han desarrollado se basan en los datos particulares de alguna región, sin embargo estas metodologías se pueden extrapolar a cuencas que no tienen información de gastos y sólo se conocen las características físicas de la cuenca así como los registros de precipitaciones.

1.4.1. Fórmula Racional

La fórmula racional es uno de los métodos más empleados para modelar la relación lluvia-escurrimiento. Dicha metodología considera que el gasto máximo se alcanza cuando la precipitación se mantiene con una intensidad constante durante un tiempo igual al tiempo de concentración. Este modelo toma en cuenta la intensidad de precipitación, además del área de la cuenca.

Con este modelo se supone que si en una cuenca impermeable se hace caer uniformemente una lluvia de intensidad constante durante largo tiempo, al principio el gasto que sale de la cuenca será creciente con el tiempo hasta que se alcance un punto de equilibrio, que será cuando el volumen que entra por unidad de tiempo por la lluvia sea igual al gasto de salida de la cuenca.

El tiempo de concentración t_c es el tiempo que tarda el agua en pasar del punto más lejano hasta la salida de la cuenca, este tiempo se toma desde que inicia la lluvia hasta que se establece el gasto de equilibrio. El tiempo de concentración depende de la longitud máxima que debe de recorrer el agua hasta la salida de la cuenca y de la velocidad que adquiere. La velocidad depende de la pendiente del terreno, los cauces y la rugosidad de estos. El tiempo de concentración se puede estimar mediante la fórmula de Kirpich:

$$t_c = 0.000325\left(\frac{L}{\sqrt{S}}\right)^{0.77} \tag{1.23}$$

donde t_c es el tiempo de concentración en h, S la pendiente del cauce principal y L la longitud del cauce principal de la cuenca en m.

Si se acepta que en una cuenca no impermeable, sólo un parte de la lluvia con intensidad i escurre directamente hasta la salida y que la capacidad de infiltración es constante. El gasto pico Q_p se puede determinar mediante la fórmula racional de la siguiente manera:

$$Q_p = CiA_c \tag{1.24}$$

Donde C es el coeficiente de escurrimiento, la cual representa la fracción de lluvia que escurre de forma directa y Q_p es el gasto máximo posible que puede producirse con una lluvia de intensidad i en una cuenca de área A_c y coeficiente de escurrimiento C.

Si se considera un hidrograma como él de la figura se tiene que:

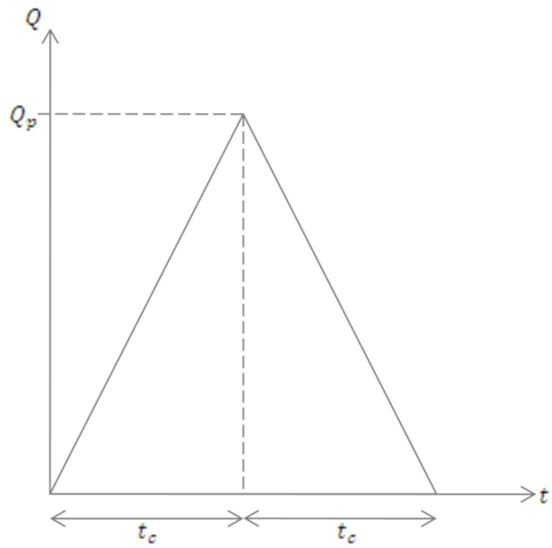

Figura 1.6. Hidrograma

el volumen del hidrograma se determina como:

$$V = \frac{1}{2}\left(2t_c \times Q_p\right) = t_c \times Q_p \tag{1.25}$$

Por otro lado se sabe que ese mismo volumen está en función de la lluvia efectiva que cae uniformemente sobre toda la superficie de la cuenca por lo que:

$$V = P_e \times A_c = (C \times P) \times A_c \tag{1.26}$$

Si se igualan las últimas dos ecuaciones y se despeja al gasto pico Q_p se tiene que:

$$Q_p = \frac{C \times P \times A_c}{t_c} = CiA_c \tag{1.27}$$

que es la fórmula racional, donde i es la intensidad de la lluvia, igual a P/t_c.

El coeficiente de escurrimiento C toma valores entre 0 y 1 y varía considerablemente de una cuenca a otra y de una tormenta a otra debido a las condiciones de humedad iníciales. Sin embargo, es común adoptar valores de C representativos, de acuerdo con ciertas características de las cuencas, como se muestra en la siguiente tabla.

Tabla 1.1. Valores del coeficiente de escurrimiento

Tipo de Área Drenada	Coeficiente de Escurrimiento	
	Mínimo	Máximo
Zonas Comerciales		
Zona comercial	0.70	0.95
Vecindarios	0.50	0.70
Zonas Residenciales		
Unifamiliares	0.30	0.50
Multifamiliares, espaciados	0.40	0.60
Multifamiliares, compactos	0.60	0.75
Semiurbanas	0.25	0.40
Casas Habitación	0.50	0.70
Zonas Industriales		
Espaciado	0.50	0.80
Compactado	0.60	0.90
Cementerios, Parques	0.10	0.25
Campos de Juego	0.20	0.35
Patios de Ferrocarril	0.20	0.40
Zonas Suburbanas	0.10	0.30
Calles		
Asfaltadas	0.70	0.95
De concreto hidráulico	0.70	0.95
Adoquinadas	0.70	0.85
Estacionamientos	0.75	0.85
Techados	0.75	0.95
Praderas		
Suelos arenosos planos (pendientes 0.02 o menos)	0.05	0.10
Suelos arenosos con pendientes medias (0.02-0.07)	0.10	0.15
Suelos arcillosos escarpados (0.07 o más)	0.15	0.20
Suelos arenosos planos (pendientes 0.02 o menos)	0.13	0.17
Suelos arcillosos con pendientes medias (0.02-0.07)	0.18	0.22
Suelos arcillosos escarpados (0.07 o más)	0.25	0.35

Un método más completo es el del United States Soil Conservation Service (USSCS), del que de manera simplificada se ha derivado el método de los números de escurrimiento. Este último método tiene la ventaja de que no se requiere tener registros de gastos y se puede determinar la altura de lluvia efectiva a partir de la total y de las características de la cuenca. La altura de lluvia total P se relaciona con la altura de lluvia efectiva P_e mediante la siguiente ecuación:

$$P_e = \frac{\left[P - \frac{508}{N} + 5.08\right]^2}{P + \frac{2032}{N} - 20.32} \tag{1.28}$$

donde N es el número de escurrimiento, cuyo valor depende del tipo de suelo, la cobertura vegetal, la pendiente del terreno y la precipitación antecedente, entre otros factores; P y P_e deben darse en cm.

El coeficiente de escurrimiento se calcula con la siguiente ecuación:

$$C_e = \frac{P_e}{P} \tag{1.29}$$

1.4.2. Hidrograma unitario

El hidrograma unitario tradicional asociado a una duración d, se define como el hidrograma de escurrimiento directo que produce una precipitación efectiva unitaria (la unidad más empleada es el milímetro), distribuida uniformemente en la cuenca y en el tiempo d. Una vez conocido el hidrograma unitario para la duración dada -el hidrograma que producirá la lluvia de cualquier magnitud, pero de la misma duración- puede calcularse multiplicando las ordenadas del hidrograma unitario por la magnitud de la lluvia efectiva.

La lluvia efectiva debe de estar distribuida uniformemente en la superficie de la cuenca y en toda su duración.

El hidrograma unitario se basa en las siguientes hipótesis:

1) Tiempo base constante: para una cuenca dada, para todas las tormentas con la misma duración de lluvia efectiva, independientemente del volumen escurrido, el tiempo base o la duración total de escurrimiento directo será el mismo. Todo hidrograma unitario está relacionado con una duración de la lluvia en exceso.
2) Linealidad o proporcionalidad: las ordenadas de todos los hidrogramas de escurrimiento directo con el mismo tiempo base son directamente proporcionales al volumen total de escurrimiento directo, es decir, al volumen total de lluvia efectiva. Como consecuencia, las ordenadas de dichos hidrogramas son proporcionales entre sí.
3) Superposición de caudas y efectos: el hidrograma que resulta de un periodo de lluvia dado puede superponerse a hidrogramas resultantes de periodos lluviosos precedentes.

Hidrograma unitario sintético

Los hidrogramas unitarios sintéticos permiten estimar aproximadamente la forma de los hidrogramas. El hidrograma unitario triangular se emplea cuando se cuenta con poca información y no se requiere precisar la forma del hidrograma de escurrimiento.

El **hidrograma triangular** desarrollado por Mockus es como el que se muestra en la siguiente figura. Del análisis de varios hidrogramas se determinó que el tiempo base y el tiempo de pico se relacionan mediante la expresión:

$$t_b = 2.67 t_p \tag{1.30}$$

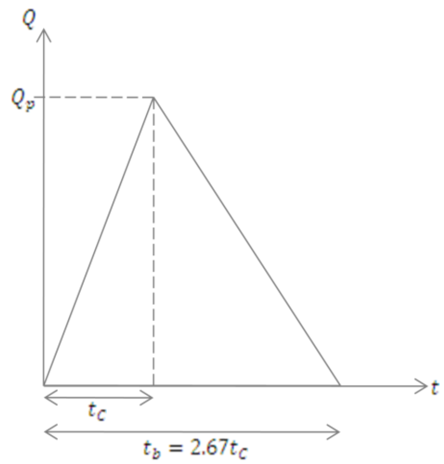

Figura 1.7. Hidrograma Unitario Sintético Triangular

el volumen del hidrograma se calcula con la siguiente ecuación:

$$V = \frac{t_b \times Q_p}{2} \tag{1.31}$$

Dado que el hidrograma es unitario el volumen también se puede determinar de la siguiente manera:

$$V = 1mm \times A_c \tag{1.32}$$

Igualando las dos ecuaciones para obtener el volumen en m^3 se tiene que:

$$\frac{t_b \times 3600 Q_p}{2} = 0.001 \times 1000000 A_c \tag{1.33}$$

donde t_b se mide en h, A_c en km^2 y Q_p en m^3/s

despejando el gasto pico:

$$Q_p = \frac{(1000 \times 2)A_c}{3600 t_b} = \frac{0.555 A_c}{t_b} = \frac{0.555 A_c}{2.67 t_c} \tag{1.34}$$

El **hidrograma unitario adimensional** se emplea cuando la extensión de la curva de recesión del hidrograma afecta el diseño, este hidrograma se obtuvo a partir de varios hidrogramas registrados en una gran variedad de cuencas. Para aplicar el método se necesita calcular el gasto y el tiempo de pico con las expresiones siguientes:

$$q_u = \frac{A_c}{4.878 t_p} \tag{1.35}$$

$$t_p = \frac{d_e}{2} + t_r \tag{1.36}$$

donde q_u es el gasto pico en m^3/s, A_c es el área de la cuenca en km^2, t_p es el tiempo de pico, d_e es la duración en exceso, y t_r es el tiempo de retraso, los últimos tres en h.

El tiempo de retraso se estima mediante el tiempo de concentración como:

$$t_r = 0.6 t_c \tag{1.37}$$

La duración en exceso se selecciona de acuerdo con la información disponible de lluvia.

Conocidos el gasto pico y el tiempo de pico, el hidrograma se obtiene de la figura 1.8, con el apoyo de la tabla 1.2 que define los pares ordenados de la figura, para cada relación t/t_p se obtiene la relación q/q_p y se halla un valor de q, puesto que q_p es conocido; análogamente, se deduce el valor de t, puesto que t_p es conocido. Este procedimiento se aplica tantas veces como sea necesario para que el hidrograma quede bien definido.

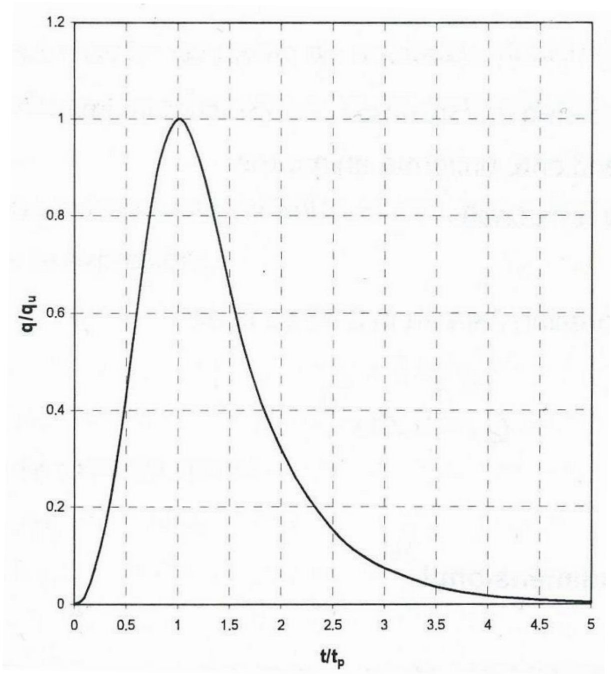

Figura 1.8. Hidrograma Unitario Adimensional

Tabla 1.2. Valores del Hidrograma Unitario Adimensional

t/t_p	q/q_p
0	0
0.1	0.015
0.2	0.075
0.3	0.16
0.4	0.28
0.5	0.43
0.6	0.6
0.8	0.89
1	1
1.2	0.92
1.4	0.75
1.6	0.56
1.8	0.42
2	0.32
2.2	0.24
2.4	0.18
2.6	0.13
2.8	0.098
3	0.075
3.5	0.036
4	0.018
4.5	0.009
5	0.004

1.5. Análisis estadístico de lluvias

El análisis estadístico de las tormentas es más confiable que el de las avenidas debido a que las estaciones climatológicas se encuentran distribuidas en la cuenca, además, generalmente, los registros de lluvia son más antiguos que los de gastos. Si se conoce la relación entre precipitación y escurrimiento, las características estadísticas de las avenidas se pueden estimar indirectamente a partir de las tormentas.

El análisis estadístico de lluvias se debe realizar primeramente en forma individual para cada una de las estaciones seleccionadas. Al igual que con los registros de gastos, se debe de ajustar una función de distribución de probabilidad a los registros históricos. Las funciones que se emplean también son la Gumbel y la Doble Gumbel, ya que con estas funciones se puede estimar adecuadamente si la región en estudio se ve afectada por eventos ciclónicos y se puede evaluar que tanto estos eventos afectan las zonas en estudio. Las estaciones a las cuales se les ajusta la función de distribución de probabilidad deben de tener como mínimo 10 años de registros.

A partir de los registros diarios de lluvia se extraen los valores máximos anuales, que son los valores a los cuales se les debe de ajustar la función de distribución de probabilidad, este procedimiento se lleva a cabo empleando el programa *AX*.

Del análisis estadístico se obtienen los valores de lluvia asociados a diferentes periodos de retorno; la mejor manera de interpretar que tan representativo es el ajuste de la función de distribución de probabilidad es dibujando una gráfica.

El objetivo principal del análisis de precipitaciones en este estudio, está enfocado a estimar mediante un modelo de lluvia-escurrimiento los hidrogramas de las cuencas que no cuentan con registros de gastos.

Una desventaja del análisis individual es que una sola estación no representa adecuadamente a toda la cuenca y las mediciones de lluvia son puntuales, por lo que es conveniente efectuar un análisis regional y de simultaneidad que tome en cuenta la influencia de todas las estaciones que están dentro de la cuenca de modo que se obtengan los factores que homogenicen todos los registros de la región.

1.5.1. Regionalización

La regionalización es un proceso que integra una nueva muestra representativa para toda una región para poder hacer inferencias estadísticas más confiables, de esta forma se evita la falta de uniformidad e incongruencias en el estudio de los registros aislados.

El enfoque regional incorpora los datos de varias estaciones climatológicas en una sola muestra; de esta forma, al estimar las precipitaciones en un sitio donde la información es escasa, el resultado es más confiable que el que se obtendría estudiando cada estación por separado.

En la mayoría de los casos los datos de las estaciones que se pretenden agrupar tienen diferencias intrínsecas en algunos aspectos, por lo que antes de considerar que pertenecen a una sola población se emplea una función de transformación con la que se busca eliminar dichas diferencias. Para cada estación m, se transforman las lluvias máximas diarias P_i^m registrados en el año i, a una nueva variable reducida $P_{i,}^R$, representativa de toda la región, en la que se ha eliminado el efecto de las características individuales de cada estación. La variable reducida en función del promedio de las lluvias diarias máximas anuales se calcula con la ecuación siguiente:

$$P_i^R = \frac{P_i^m}{\bar{P}^m} \tag{1.38}$$

donde $\bar{P}^m$ es el promedio de las lluvias diarias máximas anuales, en la estación m y P_i^R es la lluvia máxima diaria regionalizada registrada en el año i.

Al obtener el registro único homogéneo, se procede a la construcción de la función de distribución regional mediante un análisis estadístico empleando el programa *AX*. Con los valores obtenidos para distintos periodos de retorno, se procede a dibujar una gráfica que contiene los factores de la precipitación extrapolada y los datos de precipitación estandarizados para la región.

Con los valores obtenidos en la curva regional se procede a estimar las precipitaciones correspondientes para cada una de las estaciones, efectuando una transformación inversa, que consiste en multiplicar la media de los registros máximos anuales de cada estación por el valor estimado en la curva regional para los diferentes periodos de retorno.

Dado que la muestra homogénea tiene un número mayor de valores, se puede apreciar con claridad si la cuenca ha sido afectada por eventos ciclónicos y si estos representan una parte significativa del registro total.

Para comparar los ajustes obtenidos con la curva regional con los valores calculados individualmente se dibujan gráficas con los valores extrapolados y los calculados individual y regionalmente.

1.5.2. Simultaneidad

Dado que el análisis estadístico se realiza con los valores máximos anuales de cada estación, y considerando que estrictamente estos registros no ocurren al mismo tiempo, es conveniente llevar a cabo un análisis de simultaneidad, con el cual se busca obtener los valores máximos de las lluvias registradas por varias estaciones de la misma cuenca al mismo tiempo, donde se tenga el compromiso de tener el mayor número de registros en el máximo número de años.

El problema básico es que para usar un modelo lluvia-escurrimiento se requiere trabajar con lluvias medias en la cuenca y si se trata de un diseño para un periodo de retorno más o menos grande (por ejemplo 100 años), generalmente el cálculo con valores simultáneos se basa en pocos años de registro con un número suficiente de estaciones, por eso se acostumbra trabajar con cada estación por separado y después afectar el resultado con un factor de ajuste que se obtiene para un tiempo de retorno chico.

Para relacionar las lluvias registradas en cada una de las estaciones consideradas para este análisis es necesario calcular la lluvia media diaria para cada uno de los años con registro simultáneo, para lo cual se emplean los métodos de promedio aritmético o de polígonos de Thiessen, dependiendo del número de estaciones que registraron dicha lluvia en cada año. Con los datos resultantes de la lluvia media se debe de llevar a cabo un análisis estadístico para determinar la función de distribución que mejor se ajuste a las lluvias simultáneas máximas anuales para toda la región.

Adicionalmente, se determinan los factores de reducción por área para cada una de las cuencas en estudio, factores que dependen de que tan simultáneos sean los registros de las estaciones que están dentro de las cuencas. Para calcular estos factores se divide el valor de la lluvia media simultánea asociada a cierto periodo de retorno entre la lluvia media de los registros individuales de esas mismas estaciones obtenidos con la curva regional para ese mismo periodo de retorno seleccionado.

$$Fa = \frac{\bar{h}_{p_{simult\ \acute{a}nea}}}{\bar{h}_{p_{regional\quad individual}}} \tag{1.39}$$

La aplicación del factor de reducción por área asegura que la magnitud de la precipitación empleada en el modelo lluvia-escurrimiento no esté sobre estimada y por ende que los gastos, con los cuales se modelan los hidrogramas sean conservadores.

Mientras más grande sea el área de la cuenca en la cual se aplica esta metodología el factor de reducción por área será más pequeño ya que los registros son menos homogéneos que en cuencas de área pequeña.