Apéndice A

Materiales Elásticos

A. MATERIALES ELASTICOS

A.1. INTRODUCCIÓN

Por definición un material elástico es aquel que recobra su tamaño y su forma originales cuando deja de actuar sobre el una fuerza deformante[1]. En este apéndice se hará un breve resumen de las ecuaciones necesarias para obtener desplazamientos elásticos lineales en los muros utilizando el concepto de la columna ancha

A.2. PRINCIPIOS DE ELASTICIDAD

En 1676, el ingles Robert Hooke estableció una relación de un resorte considerándolo material elástico con su desplazamiento, esta relación se establece como:

$$K = \frac{F}{s} \tag{A.1}$$

Donde **F** es la fuerza ejercida **s**, su desplazamiento y **K** la relación proporcional entre estas (rigidez).

Para 1807, Thomas Young formó con estos principios, una relación basada en la deformación unitaria de varios materiales, la cual se le conoce como modulo de Young (E).

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon} = \frac{F/_{A}}{\Delta L/_{L}} \tag{A.2}$$

En donde σ es la relación de la fuerza sobre un área, y ε es la deformación unitaria de un elemento.

Con estas bases pudo delimitar la etapa elástica de materiales, que es donde se cumple dicha relación.

[1] Tippens Fisica, Elasticidad pag. 290.

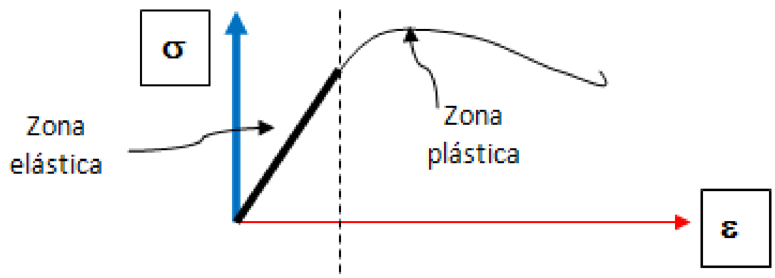

Fig. AP.1. Regiones elásticas y plásticas, en una grafica esfuerzo deformación.

Pero no todo puede ser líneas y resortes en la generalidad de materiales existentes, por lo que para plantear estas relaciones en volúmenes de materiales se llego a el modulo de Poisson (υ), en honor al francés Simeón Denis Poisson.

Establece que entre la deformación unitaria ocasionada por un esfuerzo axial existe una relación con las deformaciones unitarias laterales.

$$\epsilon_Z = -\upsilon\epsilon_x \qquad \upsilon = -\frac{\epsilon_z}{\epsilon_x} \tag{A.3}$$

$$\epsilon_Z = -\upsilon\epsilon_y \qquad \upsilon = -\frac{\epsilon_z}{\epsilon_y} \tag{A.4}$$

si

$$\epsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} \tag{A.5}$$

por lo tanto

$$\epsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\upsilon\sigma_x}{E} - \frac{\upsilon\sigma_x}{E} \tag{A.6}$$

La ecuación A.6 se refiere a un análisis tridimensional, pasándolo a un análisis plano tendríamos:

Donde

$$\sigma z = \sigma y > \sigma x \tag{A.7}$$

entonces

$$\epsilon_z = \frac{\sigma_z}{E}(1-\nu) \tag{A.8}$$

Pero no solo existen deformaciones ortogonales a la aplicación de esfuerzo. Existe también un esfuerzo que se basa en solo los giros sobre las caras de este cubo de esfuerzos, este esfuerzo se le llama esfuerzo cortante. El cual se define como:

$$G = \frac{\tau}{\gamma} \tag{A.9}$$

Donde τ es el esfuerzo cortante, γ es el ángulo de giro y **G** la componente elástica al corte, o modulo de cortante.

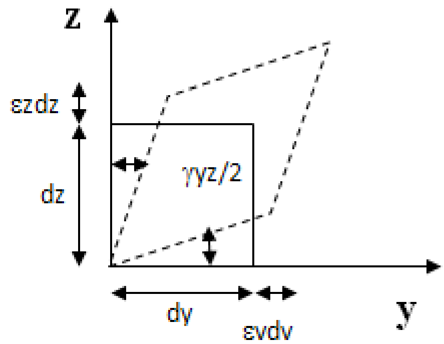

Fig. AP.2. Deformación por cortante en un plano.

Si un material es homogéneo e isotrópico, la deformación por cortante se distribuirá uniformemente, como lo muestra la figura AP.2. En un cuerpo con cortante pura, su deformación unitaria máxima seria:

$$\epsilon_{MAX} = \frac{\gamma_{zy}}{2} \tag{A.10}$$

Con la ecuación A.9 de cortante tendríamos que la deformación máxima seria:

$$\epsilon_{MAX} = \frac{\tau_{zy}}{2G} \tag{A.11}$$

Si un cuerpo es sometido a esfuerzo de cortante puro, sin que influyan en el esfuerzo axial, su deformación máxima en un plano seria:

$$\epsilon_{MAX} = \frac{\tau_{zy}}{E}(1+\nu) \tag{A.12}$$

Igualando A.11 en A.12 se tiene que:

$$\epsilon_{MAX} = \frac{\tau_{zy}}{2G} = \frac{\tau_{zy}}{E}(1+\nu) \tag{A.13}$$

Obteniéndose la relación:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{A.14}$$

Para el caso tridimensional, el valor de υ esta acotado por el índice volumétrico ó modulo de compresibilidad volumétrica, que es la aplicación de un esfuerzo ortogonal (en la que todos los esfuerzos son iguales) en la ecuación A.6, de forma que la deformación que se obtenga sea la volumétrica.

El modulo al que se llega es:

$$Kv = \frac{E}{3(1-2\nu)} \tag{A.15}$$

Con esto el término υ tiene como máximo 0.5, lo que indicaría que Kv tiende al infinito. El valor de υ que se asocia a materiales como la mampostería es **0.25 considerándolo elástico**, y es comúnmente aceptado en los cálculos teóricos.

A.3. RIGIDEZ DEBIDO A CORTANTE Y FLEXION EN COLUMNA ANCHA

Para calcular desplazamiento en general, por conservación de energía utilizando el método de trabajo virtual tenemos:

$$\Delta = \int \frac{nN}{AE}dx + \int \frac{mM}{EI}dx + \int \frac{vV}{GA_C}dx + \int \frac{tT}{GJ}dx \tag{A.16}$$

Se omiten las deformaciones por esfuerzo axial y torsionante:

$$\Delta = \int \frac{mM}{EI}dx + \int \frac{vV}{GA_C}dx \tag{A.17}$$

Calculando desplazamiento lateral para un elemento empotrado con longitud H, al que se le aplica una carga P lateralmente.

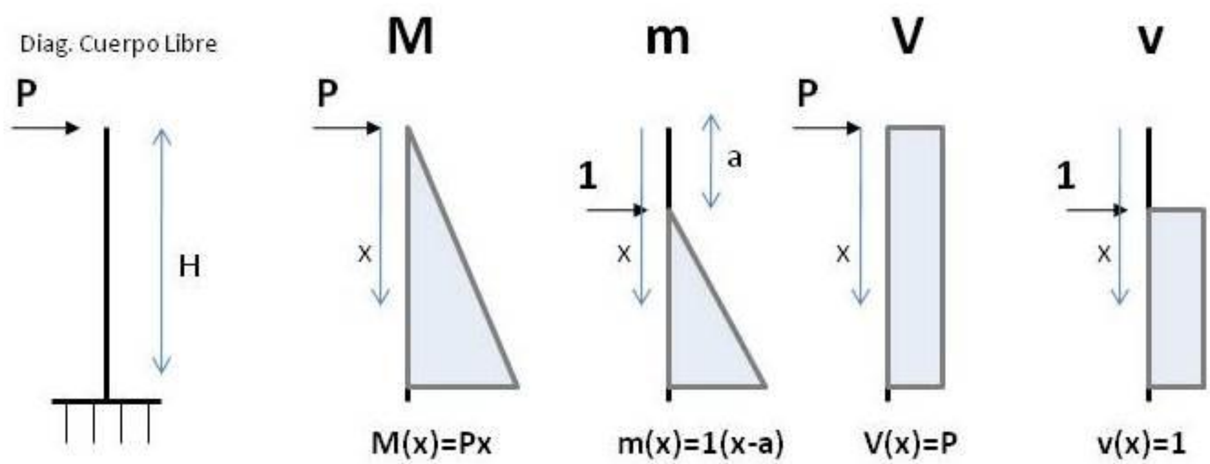

Fig. AP.3. Viga en cantiléver, y sus componentes mecánicas de momento y cortante.

Debido al momento flexionante, tenemos su desplazamiento lateral a lo largo del elemento, utilizando la integración con trabajo virtual.

$$\Delta_{flexion} = \int_a^H \frac{mM}{EI} dx \tag{A.18}$$

$$\Delta_{flexion} = \int_a^H \frac{(x-a)(Px)}{EI} dx = \frac{P}{EI}\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2 a}{2}\right]_a^H \tag{A.19}$$

$$\Delta_{flexion} = \frac{P}{EI}\left[\left(\frac{H^3}{3} - \frac{H^2 a}{2}\right) - \left(\frac{a^3}{3} - \frac{a^3}{2}\right)\right] = \frac{P}{EI}\left(\frac{a^3}{6} - \frac{H^2 a}{2} + \frac{H^3}{3}\right) \tag{A.20}$$

Finalmente se obtiene, que los desplazamientos laterales por flexión son:

$$\Delta_{flexion} = \frac{P}{6EI}(a^3 - 3H^2 a + 2H^3) \tag{A.21}$$

Donde **a**, es una posición con respecto a la altura de la columna.

Para el desplazamiento lateral a causa de la fuerza cortante, utilizamos nuevamente la integración por trabajo virtual.

$$\Delta_{Cortante} = \int_a^H \frac{vV}{GA_c} dx \tag{A.22}$$

$$\Delta_{Cortante} = \int_a^H \frac{(1)(P)}{GA_c} dx = \frac{P}{GA_c}[x]_a^H \tag{A.23}$$

Finalmente, el desplazamiento lateral por cortante será.

$$\Delta_{Cortante} = \frac{P}{GA_c}(H - a) \tag{A.24}$$

Con los desplazamientos por flexión y cortante, se tiene el desplazamiento total para un columna en cantillver.

$$\Delta_{cantiliver} = \Delta m + \Delta v \tag{A.25}$$

$$\Delta_{cantiliver} = \frac{P}{6EI}(a^3 - 3H^2 a + 2H^3) + \frac{P}{GA_C}(H - a) \tag{A.26}$$

Recordemos que la integral de trabajo virtual es una analogía de la doble integración para encontrar desplazamiento debido a momento y cortante. Para el ángulo de giro suponemos la siguiente integral sencilla.

$$\theta_{Cantiliver} = \int_a^H \frac{M}{EI} dx \tag{A.27}$$

$$\theta_{Cantiliver} = \int_a^H \frac{Px}{EI} dx = \frac{P}{EI}\left(\frac{x^2}{2}\right)_a^H \tag{A.28}$$

$$\theta_{Cantiliver} = \frac{P}{EI}\left[\frac{H^2}{2} - \frac{a^2}{2}\right] \tag{A.29}$$

Cabe señalar que por cortante en el elemento idealizado como columna no se tienen componentes de momento para suponer giro, por lo que el giro por cortante es cero. Su giro seria:

$$\theta_{Cantiliver} = \frac{P}{2EI}(H^2 - a^2) \tag{A.30}$$

Pensando en un elemento doble empotrado, que se desplaza en un extremo, se restringe el giro en a=0,

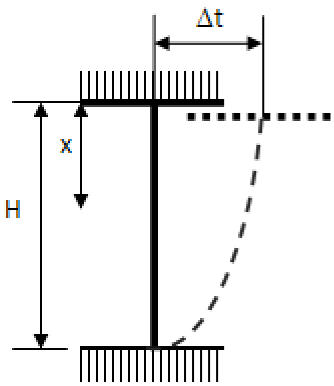

Fig. AP.4. Elemento en doble empotrado.

Se genera un giro de empotramiento (θ_e), al que le correspondería:

$$\theta_{Cantiliver} + \theta_{empotrado} = 0 \tag{A.31}$$

Este giro de empotramiento es causado por un momento de empotramiento Me, del cual obtenemos el desplazamiento debido a la acción de este giro, valuado en la altura H.

$$\theta_{empotrado} = \int^H \frac{M_e}{EI} dx \tag{A.32}$$

$$\theta_{empotrado} = \frac{M_e H}{EI} \tag{A.33}$$

Con la ecuación A.31 y la A.30 en x=0, sustituyendo el valor de empotramiento de A.33.

$$\left[\frac{P}{2EI}(H^2 - a^2)\right]_{en\ x=0} + \frac{M_e H}{EI} = 0 \tag{A.34}$$

$$Me = -\frac{PH}{2} \tag{A.35}$$

En este caso la componente de cortante es nula ya que no existe fundamento de cortante.

$$\Delta t = \int_a^H \frac{M_e(x)}{EI} dx = \int_a^H -\frac{PH(x)}{2EI} dx \tag{A.36}$$

$$\Delta t = \frac{PH}{4EI}(H - a)^2 \tag{A.37}$$

Asi, para un elemento doble empotrado se tiene:

$$\Delta_{em} = \Delta_{cantiliver} - \Delta t \xi \tag{A.38}$$

Al termino Δt se le agrego el termino ξ, esto para referenciar la ecuación de desplazamiento en si es cantiléver ξ=0, y si es doble empotrado ξ=1.

$$\Delta_{TOTAL} = \frac{P}{6EI}(a^3 - 3H^2 a + 2H^3) + \frac{P}{GA_C}(H - a) - \frac{PH}{4EI}(H - a)^2 \xi \tag{A.39}$$

De acuerdo a la ley de Hooke, la rigidez de un material esta dada por la relación de una fuerza con un desplazamiento. Para obtener la rigidez lateral debida a la carga P, tenemos:

$$K = \frac{P}{\Delta_{TOTAL}} \tag{A.40}$$

El desplazamiento en a=0, seria:

$$\Delta_{TOTAL}(a = 0) = \frac{PH^3}{12EI}(4 - 3\xi) + \frac{PH}{GA_C} = P\left[\frac{H^3}{12EI}(4 - 3\xi) + \frac{H}{GA_C}\right] \tag{A.41}$$

Por lo tanto:

$$K = \frac{P}{P\left[\frac{H^3}{12EI}(4-3\xi)+\frac{H}{GA_C}\right]} \tag{A.42}$$

Y finalmente tenemos la ecuación de rigidez ante cargas laterales de un material, con la referencia ξ, para cantiléver y doble empotrado.

$$K = \left[\frac{H^3}{12EI}(4-3\xi)+\frac{H}{GA_C}\right]^{-1} \tag{A.43}$$

El concepto de la columna ancha aborda la relación de aspecto de la geometría del material, con el comportamiento que tenga en proporción por flexión y cortante. Debido a que si a un elemento con una sección transversal constante se le varia su longitud, y se le aplican cargas similares, el porcentaje que tomen los desplazamientos por cortante y por flexión variaran. Entre menor sea la longitud con respecto a su área transversal el elemento se regirá por cortante, y entre mayor longitud se regirá por flexión.

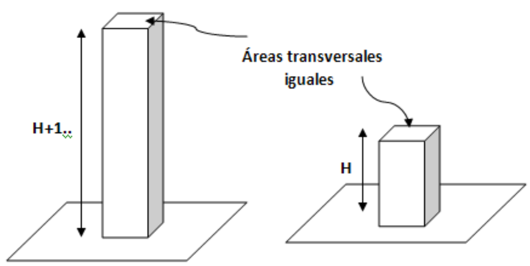

Fig. AP.5. Ejemplo de columnas de misma área transversal y diferente altura.

A la relación de la longitud del material con su área transversal se le llama relación de aspecto. Normalmente se toma solo un elemento del área transversal, por ejemplo en muros de mampostería es la altura del muro entre su ancho (H/b).

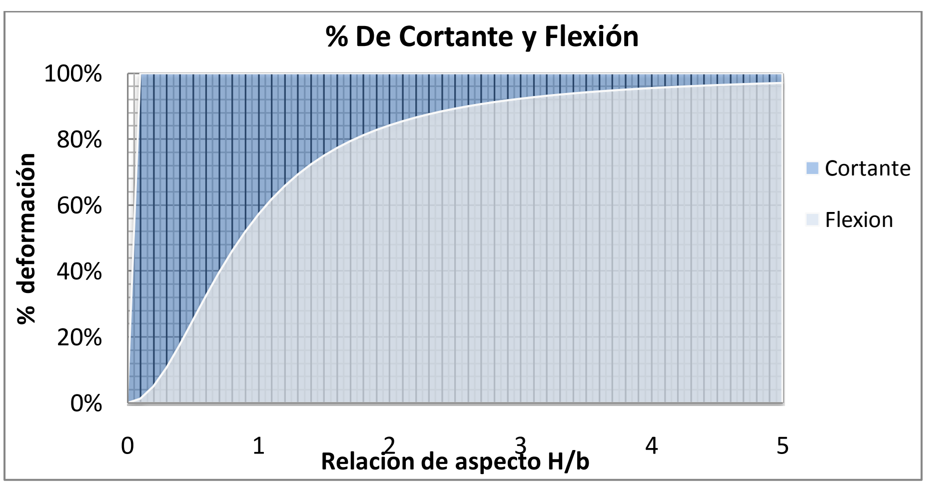

Fig. AP.6. porcentaje de deformación que toma un material con respecto a su relación de aspecto.

Esto nos dice que para elementos con relación de aspecto menor a 1, tiene una gran relevancia la deformación por cortante.

A.4. CONSIDERACIONES PARA MATERIAL COMPUESTO.

Cuando un elemento esta compuesto por varios tipos de materiales se busca una relación en los materiales para convertirlos en uno y proceder a los análisis. Para el caso de los muros de mampostería utilizaremos la siguiente expresión que relaciona los módulos de elasticidad de materiales que la conforman.

$$n = \frac{E_1}{E_2} \qquad \text{(A.44)}$$

Donde E_1 y E_2 son los módulos de elasticidad de los materiales y n su relación.

Que se obtiene de la igualación de energía en el área transversal de un material sometido a momento flexionante. Se utiliza el modulo elástico de la mampostería como base y se transforma el área del material compuesto al área equivalente si solo fuera de mampostería.

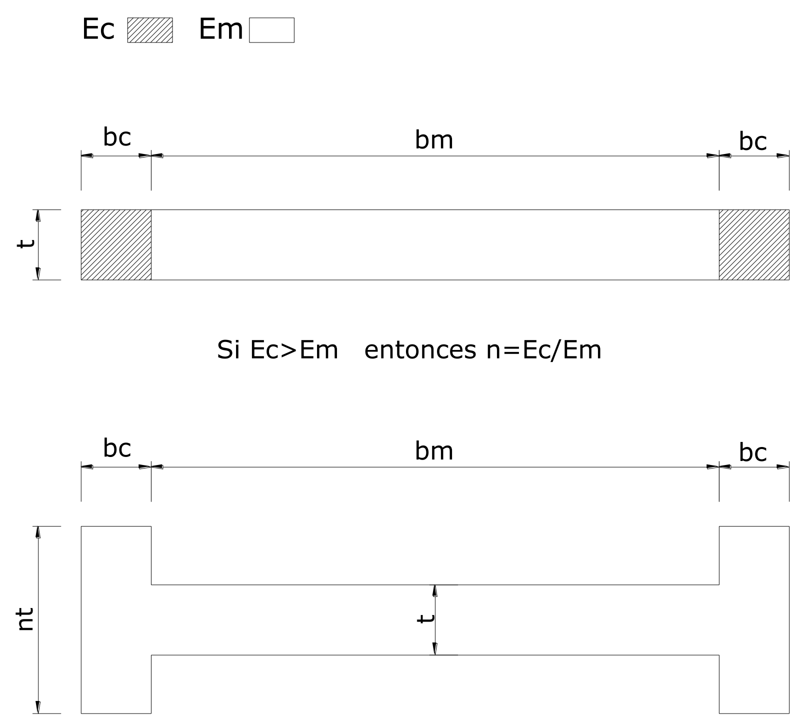

Fig. AP.7. Área Transformada de una sección compuesta de mampostería.

Con este cambio de sección se pueden obtener los datos de área transversal,

$$A = 2ntbc + tbm \qquad \text{(A.45)}$$

Y para inercia usando ejes paralelos.

$$I = \frac{tbm^3}{12} + 2\left[\frac{ntbc^3}{12} + ntbc\left(\frac{bm + bc}{2}\right)^2\right] \quad \text{(A.46)}$$

Otra consideración que se toma es el factor de forma de cortante, al que generalmente se le escribe:

$$k = \frac{A}{I^2}\int_A \frac{Q(y)^2}{t(y)^2}\, dA \quad \text{(A.47)}$$

Donde Q, es el momento estático de la sección
t, espesor de la sección
A, área de la sección transversal
I, momento de inercia de la sección

Y el area de cortante se escribe como:

$$A_C = \frac{A}{kf} \quad \text{(A.48)}$$

De acuerdo a la recomendación hecha por Taveras 2004 en su tesis de maestría, en la que incita utilizar la siguiente aproximación del factor de forma en mampostería:

$$kf = \frac{6}{5}[1 + \alpha(n - 1)] \quad \text{(A.49)}$$

Donde n, es la relación n=Ec/Em
α, es la relación α=bc/bm