

## IV CURSO INTERNACIONAL DE INGENIERIA SISMICA

### DISEÑO SISMICO DE EDIFICIOS

FECHA	HORARIO	TEMA	PROFESOR
24 de julio	17 a 18:30	Comportamiento de materiales y elementos estructurales ante cargas repetidas	DR. ROBERTO MELI P.
26 de julio	17 a 18:30	Características del comportamiento de materiales que definen la respuesta sísmica de las estructuras. Concreto simple y acero de refuerzo. Concreto reforzado y presforzado. Acero estructural. Mampostería. Madera	
24 de julio	18:30 a 20 h	Análisis de estructuras ante cargas laterales	M. EN I. ENRIQUE BAZAN ZURITA
26 de julio	18:30 a 20 h		
28 de julio	18:30 a 20 h	Análisis de marcos. Repaso de métodos simplificado y métodos 'exactos' de análisis. Análisis de sistemas marco-muro. Efectos de esbeltez.	
28 de julio	17 a 18:30 h	Criterios de diseño sísmico	DR. LUIS ESTEVA MARABOTO
31 de julio	17 a 18:30	Filosofía del diseño sísmico. Factores que definen la acción de los sismos en las estructuras. Espectros y coeficientes sísmicos de diseño. Requisitos generales de diseño sísmico de edificios.	
31 de julio	18:30 a 20 h	Estructuración de edificios en zonas sísmicas	M. EN C. ENRIQUE DEL VALLE C.
2 de agosto	18:30 a 20 h	Sistemas estructurales para edificios: marco, marco-muro, muro y fachadas rigidizadas. Recomendaciones sobre distribución de rigideces, sobre uniones y detalles. Elementos no estructurales. Interacción con la cimentación.	

FECHA	HORARIO	TEMA	PROFESOR
Agosto 2, 4, 7 y 9	17 a 18:30 h cada día	Estructuras de concreto. Comportamiento y análisis de estructuras hiperestáticas de concreto. Revisión de métodos de diseño de vigas y columnas de concreto. Sistemas losa plana-columna. Diseño de muros de concreto. Requisitos para refuerzo de marcos dúctiles de concreto. Uniones y detalles. Ejemplos.	DR. ROBERTO MELI P.
Agosto 4, 7, 9, 11, 14 y 16	18:30 a 20 h cada día	Ejemplos de análisis sísmico de edificios  Método simplificado, estático, modal y paso a paso. Ejemplos de análisis y diseño según el nuevo reglamento de construcción para el Distrito Federal.	Dr. Octavio A. Rascón Chávez M. en I. Enrique Bazán Zurita
Agosto 11, 14 y 16	17 a 18:30 h cada día	Estructuras de acero.  Análisis elástico y plástico de estructuras de acero. Criterios de estructuración. Criterios de diseño de vigas y columnas. Uniones. Procedimientos constructivos.	Ing. Oscar de Buen y López de Heredia
Agosto 18	17 a 20 h	Estructuras de mampostería y madera  Empleo estructural de muros de mampostería. Estructuración y refuerzo de muros. Métodos de diseño sísmico de estructuras con muros de mampostería. Formas estructurales de madera. Comportamiento sísmico observado y criterios de diseño.	Dr. Roberto Meli P.

DIRECTORIO DE PROFESORES  
DISEÑO SISMICO DE EDIFICIOS

M. EN I. ENRIQUE BAZÁN ZURITA  
INVESTIGADOR  
INSTITUTO DE INGENIERIA, UNAM  
CIUDAD UNIVERSITARIA  
MEXICO 20, D.F.  
TEL: 548. 97. 94

ING. OSCAR DE BUEN Y LOPEZ DE HEREDIA  
JEFE DEL DEPARTAMENTO DE INGENIERIA CIVIL  
FACULTAD DE INGENIERIA, UNAM  
CIUDAD UNIVERSITARIA  
MEXICO 20, D.F.  
TEL: 548. 29. 35

DR. LUIS ESTEVA MARABOTO  
INVESTIGADOR  
INSTITUTO DE INGENIERIA, UNAM  
CIUDAD UNIVERSITARIA  
MEXICO 20, D.F.  
TEL: 548.97.94

DR. ROBERTO MELI PIRALLA  
JEFE DE LA SECCION DE ESTRUCTURAS  
INSTITUTO DE INGENIERIA, UNAM  
CIUDAD UNIVERSITARIA  
MEXICO 20, D.F.  
TEL: 548. 97.94

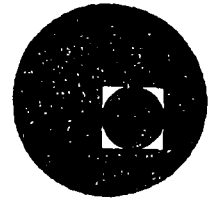
DR. OCTAVIO A. RASCON CHAVEZ  
INVESTIGADOR  
INSTITUTO DE INGENIERIA, UNAM  
CIUDAD UNIVERSITARIA  
MEXICO 20, D.F.  
TEL: 550. 52. 15 ext. 4473

M. EN C. ENRIQUE DEL VALLE CALDERON  
ASESOR  
INGENIERIA DE SISTEMAS DE TRANSPORTE METROPOLITANO  
LEGARIA No. 252  
COL. PENSIL  
MEXICO 17, D.F.  
TEL: 399. 47.10





centro de educación continua  
división de estudios superiores  
facultad de ingeniería, unam



IV CURSO INTERNACIONAL DE INGENIERIA SISMICA

DISEÑO SISMICO DE EDIFICIOS

TEMA I: COMPORTAMIENTO DE MATERIALES Y ELEMENTOS  
ESTRUCTURALES ANTE CARGAS REPETIDAS

DR. ROBERTO MELI PIRALLA

JULIO, 1978.

## DISEÑO SISMICO DE EDIFICIOS

TEMA 1: Comportamiento de materiales y elementos estructurales ante cargas repetidas (Texto: Capítulo 13 de la Ref 1 pp 381 a 422)

### GUIA DE ESTUDIO-1978

#### 1. Características que definen la respuesta sísmica

La respuesta sísmica de una estructura depende de sus características carga-deformación ante cargas dinámicas alternadas.

La filosofía implícita en los reglamentos de diseño admite que las estructuras sobrepasen las etapas de comportamiento elástico bajo el efecto del sismo de diseño. Interesa por tanto el comportamiento hasta la ruptura.

La respuesta de la estructura completa depende de la de los elementos que la componen y esta de la de las secciones y materiales. También depende de las características de las conexiones entre los distintos elementos. Una relación carga-deformación típica ante carga monotónicamente creciente se muestra en la fig 1. Los parámetros de la curva que interesan son rigidez, resistencia, ductilidad. De la rigidez dependen no solo las deformaciones que va a presentar la estructura bajo una acción dada, sino también la magnitud de la acción sísmica que va a tener que soportar. De la ductilidad depende esencialmente la capacidad de disipar la energía del sismo. Para muchos materiales es válida una idealización elastoplástica de la relación carga-deformación.

El factor de ductilidad  $\Delta_u / \Delta_y$  es la medida más común de la ductilidad; un material frágil tiene factor de ductilidad cercano a uno, por ejemplo el concreto no reforzado sujeto a tensión; el acero de grado estructural puede alcanzar factores de ductilidad del orden de 20.

La ductilidad de una estructura en su conjunto es generalmente mucho menor que la ductilidad local que puede desarrollar una sección: depende del número de secciones que entran en fluencia antes del colapso de la estructura, fig 1b. El tener modos de falla dúctiles es particularmente importante en zonas sísmicas.

Ante repeticiones de cargas alternadas la relación carga-deformación se modifica en forma más importante mientras más se sobrepase el intervalo "elástico" de comportamiento fig 2. Las curvas descendentes (de descarga) difieren cada vez más de las de carga y se forman "lazos", ciclos histeréticos. La respuesta sísmica depende fundamentalmente del área bajo las curvas carga-deformación (define la capacidad de energía) y del área incluida en los lazos histeréticos (define el amortiguamiento histerético) (fig 3).

La respuesta sísmica se ve afectada en forma importante por el deterioro: pérdida de rigidez y resistencia ante las repeticiones de carga alternada. Ejemplos de materiales que sufren deterioro importante.

Idealizaciones de las curvas cíclicas para fines de análisis (fig 4). La elastoplástica y sus modificaciones para considerar deterioro. El modelo de Masing. Estos modelos son útiles para realizar análisis paso a paso de sistemas de un grado de libertad ante historias de aceleraciones conocidas. Sirven para estudiar

el efecto del comportamiento inelástico en la espuesta.

Comportamiento ante cargas dinámicas y estáticas. La mayoría de las propiedades se han estudiado ante pocos ciclos de carga estática alternadas. Se ha considerado siempre que esto es conservador con respecto al comportamiento ante cargas dinámicas, aunque hay algunos casos en que parece no ser así.

## 2. Comportamiento de materiales (medido en especímenes estándar)

### a) Concreto simple (ref 2 pp 65 a 150)

Curva  $\sigma - \epsilon$  en compresión y tensión, fig 5. Comportamiento frágil en ambos casos. Deformaciones máximas. El micro-agrietamiento causa desviaciones de la linealidad a partir de  $0.4 f'_c$  y produce deformaciones irreversibles.

Efecto de la velocidad de carga, fig 6. Aumenta la resistencia y la rigidez pero disminuye las deformaciones de falla, y vuelve más frágil el comportamiento.

Efecto del confinamiento en el concreto (ver ref 3 pp 20 a 30). Concreto bajo esfuerzos triaxiales ( $f_{cc} = f'_c + 4.1 f_1$ ). Al aumentar el esfuerzo de confinamiento aumentan tanto la resistencia como la capacidad de deformación. Confinamiento por medio de refuerzo transversal: espiral y estribos; diferencia en el efecto de ambos (fig 7). Con espiral puede incrementarse resistencia y ductilidad; con estribos solo ductilidad.

Efecto de la repetición de cargas, fig 8. Sólo cargas de compresión. Para esfuerzos altos el concreto no confinado se deteriora rápidamente.



b) Acero estructural, de refuerzo y de presfuerzo (ref 4 pp 42 a 64)

La curva esfuerzo-deformación del acero depende de su composición química y del tratamiento a que haya sido sometido. El módulo de elasticidad es constante. El esfuerzo de fluencia (real o aparente) aumenta con el contenido de carbono y puede incrementarse por una reducción de área o por torcido efectuado en frío, fig 9. La meseta de fluencia se pierde a medida que aumenta  $f_y$  y si se trabaja en frío. La relación  $f_u/f_y$  y la  $\epsilon_u$  disminuyen al aumentar  $f_y$ . Los factores de ductilidad son siempre grandes, exceden de 10 aún para los aceros menos dúctiles.

El efecto de la velocidad de carga en la resistencia y en la ductilidad es poco importante.

Ante el efecto de cargas alternadas que exceden la fluencia, el límite de proporcionalidad se reduce y la  $\sigma - \epsilon$  se hace más redondeada (efecto de Bauschinger); los ciclos son muy estables y no muestran deterioro (fig 10).

c) Otros materiales

En los metales el comportamiento es cualitativamente como el del acero.

En la mampostería varía mucho según los materiales que la compongan (piezas y morteros). La fig 11 muestra algunas curvas típicas para mampostería, ref 5. El comportamiento en general muy frágil, especialmente cuando se emplean materiales de alta resistencia. El comportamiento ante cargas alternadas muestra un deterioro total a menos que se cuente con un refuerzo adecuado.

Las propiedades de la madera varían según la especie, la densidad, el contenido de humedad y son muy sensibles a la velocidad de aplicación de la carga, fig 12. El modo de falla del material es muy frágil aunque las estructuras de madera pueden tener alta disipación de energía si se detallan adecuadamente las uniones (ver capítulo correspondiente).

### 3. Comportamiento de elementos estructurales

#### 3.1 Vigas y columnas de concreto reforzado (ver ref 3 pp 195 a 269)

a) **Flexión:** La relación momento-curvatura de secciones de concreto reforzado se obtiene a partir de las hipótesis básicas del comportamiento del concreto en flexocompresión. Las curvas de la fig 13 muestran la influencia en la resistencia y la ductilidad de las cuantías de acero de tensión y compresión en su relación con la cuantía balanceada. Se concluye que si la cuantía de refuerzo de tensión es muy inferior a la balanceada se obtienen grandes ductilidades (comparables a las del acero). El refuerzo de compresión es de gran ayuda en incrementar la ductilidad. El efecto del refuerzo transversal en la relación momento curvatura de vigas se ve en la fig 14. El confinamiento que este proporciona aumenta la ductilidad cuando la falla es cercana a la balanceada.

b) **Flexocompresión:** La relación momento curvatura puede calcularse con el mismo procedimiento que para elementos en flexión. La ductilidad depende del nivel de carga axial (fig 15). Para falla de compresión la ductilidad es casi nula a menos que se cuente con confinamiento importante, fig 16. Para falla de tensión se tiene cierta ductilidad, pero solo para cargas axiales muy pequeñas esta es importante.

c) Efecto de cargas repetidas en elementos en flexocompresión:

En flexión simple y con cuantías bajas de acero el comportamiento es cualitativamente como el del acero: gran ductilidad y poco deterioro; efecto de Bauschinger. Puede predecirse con buena aproximación empleando las hipótesis para concreto en flexocompresión. La degradación ocurre solo para deformaciones muy altas debido al pandeo del acero de compresión. La degradación es mucho mayor cuando hay esfuerzos cortantes altos en las secciones críticas (articulaciones plásticas) o también cuando hay posibilidad de deslizamiento de las barras por adherencia, ver fig 17. Importantes estudios al respecto han sido realizados en Berkeley (ref 6). Se recomienda estribos poco espaciados para evitar pandeo de barras y para confinar el concreto, altas cuantías de acero de compresión y despreciar la contribución del concreto a la resistencia en cortante; limitar el esfuerzo cortante actuante a  $\sqrt{f'_c}$ . En el tema de estructuras de concreto se tratará con mayor detalle este punto.

Cuando hay efecto de compresión la ductilidad es baja y el deterioro ante repetición de cargas es importante, fig 17c.

d) Cortante, torsión y adherencia. El modo de falla ante cortante y torsión es netamente frágil; aún cuando exista refuerzo transversal se gana poca ductilidad y el deterioro es muy rápido. Algo similar es el comportamiento cuando hay problema de adherencia. Por tanto debe tomarse factores de seguridad mayores contra estos efectos que contra flexión.

### 3.2 Elementos de concreto presforzado (ver ref 7 pp 49 a 81)

Su comportamiento no difiere mucho del reforzado: pueden alcanzarse las mismas ductilidades siempre que la cuantía de refuerzo sea baja ( $\rho \leq 0.2$ ) y el nivel de carga vertical también. El admitir la fluencia del acero de presfuerzo es debatable, porque si fluye se pierde el presfuerzo y es difícil restaurarlo.

Ante cargas repetidas el comportamiento es distinto: fig 18; se tiene mucha menos disipación de energía, por tanto para resistir un mismo sismo se requiere mayor resistencia o mayor deformación inelástica que en concreto reforzado, fig 19.

El empleo de elementos continuos presforzados es poco usual.

### 3.3 Elementos de acero estructural (ver ref 8 pp 125 a 159)

El comportamiento en flexión es sumamente dúctil, pero la ductilidad puede verse afectada por pandeo local o pandeo lateral después de la fluencia; fig 20. El efecto de Bauschinger suaviza el acero y lo hace más propenso al pandeo. Hay que restringir las dimensiones de las secciones para asegurar la plastificación total sin que ocurra pandeo o colocar atizadores poco espaciados. Secciones compactas. En columnas de capacidad de rotación es muy reducida. La práctica es de sobrediseñar las columnas de manera que las articulaciones plásticas se formen en las vigas.

Ante cargas alternadas los ciclos son muy estables (si no hay problemas de pandeo) y hay gran disipación de energía, fig 21.

Hay que tener cuidado con las uniones: deben sobrediseñarse porque normalmente son menos dúctiles que las secciones de las vigas.

### 3.4 Muros

Son elementos que proporcionan gran rigidez a las estructuras y frecuentemente se requieren en edificios de mediana o gran altura para limitar las deflexiones a valores admisibles.

- a) Muros de concreto: (ver ref 3 pp 610 a 660). Su comportamiento depende esencialmente de su relación altura a longitud  $H/L$  (o más correctamente de  $\frac{M}{VL}$ ). Usualmente  $H/L > 2$  y son por lo tanto elementos de flexión con bajos niveles de carga axial. Se comportan como vigas; mucha ductilidad, fig 22. Ante cargas alternadas su absorción de energía es alta y su deterioro bajo, si rige flexión, fig 23. Si rige cortante mucho deterioro, figs 24. En muros bajos rige cortante casi siempre y la falla es poco dúctil y hay mucho deterioro. Problemas en las vigas que acoplan los muros entre sí o con marcos (se verán con más detalle en el tema de Estructuras de Concreto).
- b) Muros de mampostería: (ver ref 9). Son elementos rígidos y frágiles; aceptan muy poca deformación lateral. Requieren de confinamiento y/o refuerzo para tener cierta ductilidad, fig 25. Mucho deterioro especialmente si las piezas son huecas. Pueden diseñarse para que rija flexión, entonces el comportamiento puede ser mucho más favorable, fig 26.

## REFERENCIAS

1. N M Newmark y E Rosenblueth "Fundamentals of Earthquake Engineering" Prentice Hall, 1971
2. A M Neville "Properties of Hardend Concrete" En Reinforced Concrete Engineering Vol 2 Cap 3. Editado por B Bresler Vol 1, Cap 3, J Weley 1974
3. R Parks y T Paulay "Reinforced Concrete Structures" J Wiley 1975
4. J F McDermott "Reinforcing Steel" Cap 2 de "Reinforced Concrete Engineering" Editado por B Bresler, J Wiley, 1974
5. R Meli y A Reyes "Propiedades Mecánicas de la Mampostería" Instituto de Ingeniería, Informe No. 288 Jul 1971
6. V V Bertero y E P Popov "Hysteretic Behavior of Ductile Moment-Resisting Reinforced Concrete Frame Components" Report. No. EERC 75-16 Univ of California, Berkeley, 1975
7. R W G Blakeley "Prestressed Concrete Design" en Structural Design for Earthquakes, publicado por Centre for Continuing Education, The University of Auckland N. Zelanda 1972.
8. G W Butcher "Steel Design" en Structural Design for Earthquakes publicado por Centre for Continuing Education, Univ of Auckland, N Z 1972
9. R Meli "Comportamiento sísmico de muros de mampostería" Instituto de Ingeniería informe No. 352 Abr 1975

## REFERENCIA ADICIONAL

J A Blume, N M Newmark y L H Corning "Design of Multistory Reinforced Concrete Building for Earthquake Motions" Portland Cement Association, 1961

D J Dowrick "Eathquake Resistant Design" J Wiley, 1977

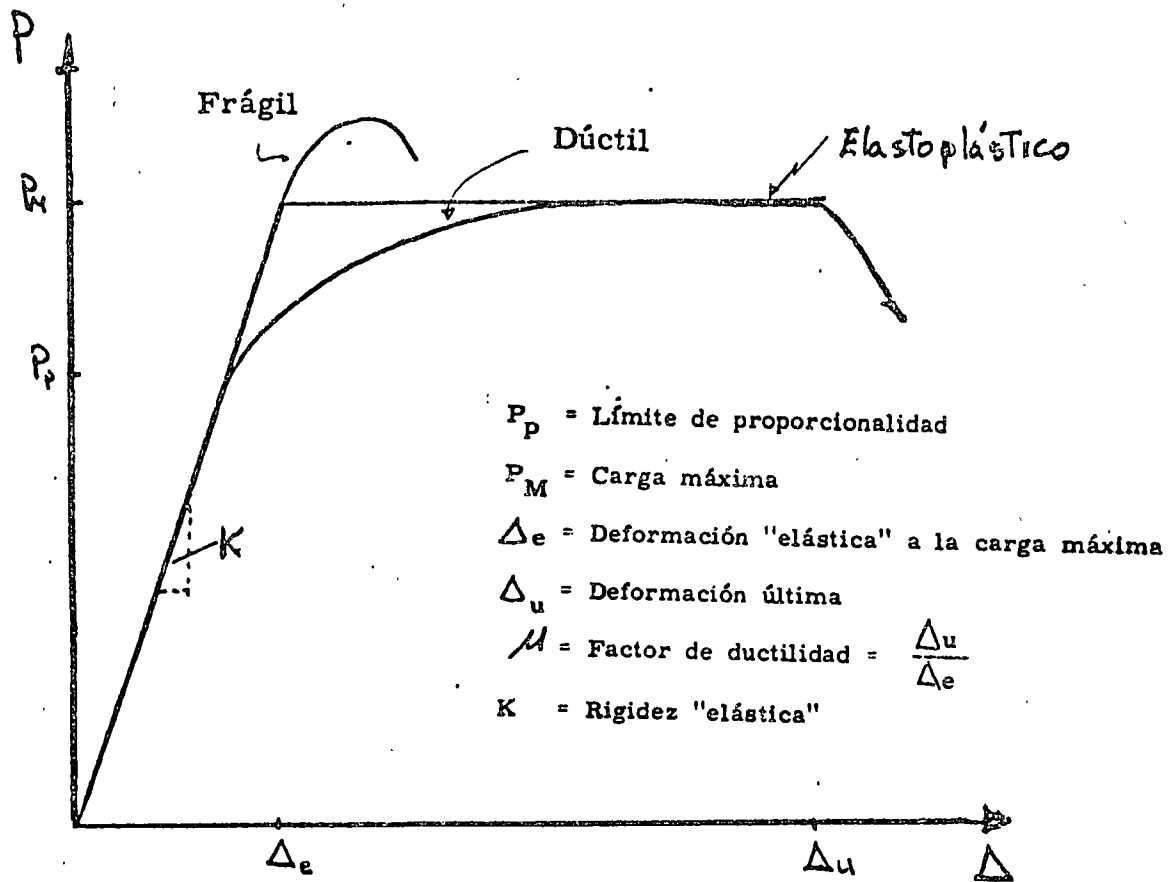
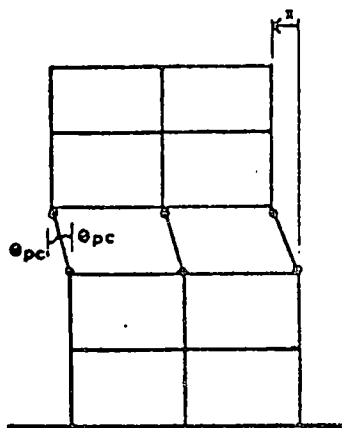
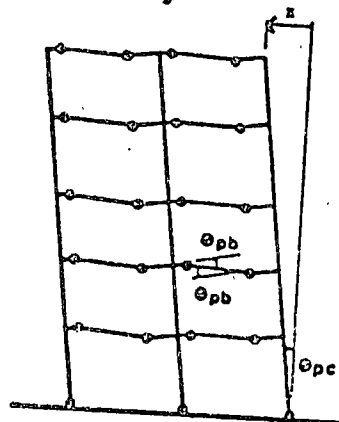


Fig 1 CURVA TIPICA CARGA-DEFORMACION



para  $x_u/x_y = 4$

$$\theta_u/\theta_y = 122$$



$$\mu = \frac{x_u}{x_y}$$

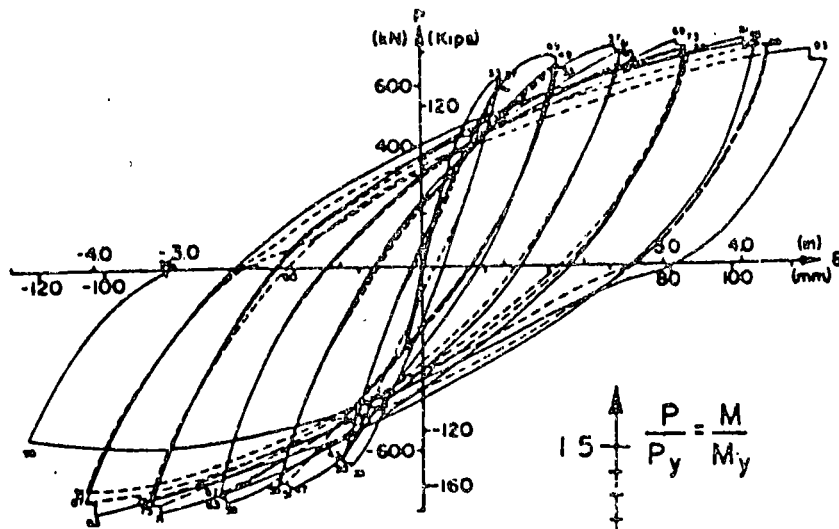
$x_u$  = Ultimate deflection

$x_y$  = Deflection at first yield

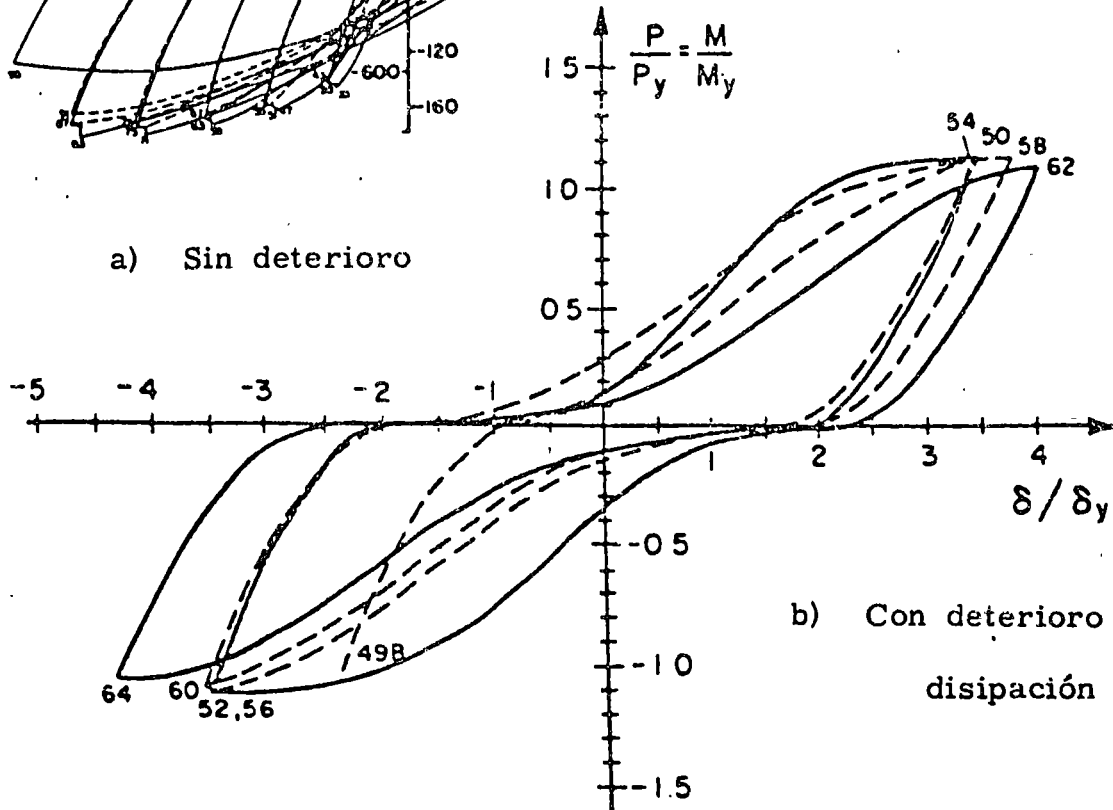
para  $x_u/x_y = 4$

$$\theta_u/\theta_y = 18$$

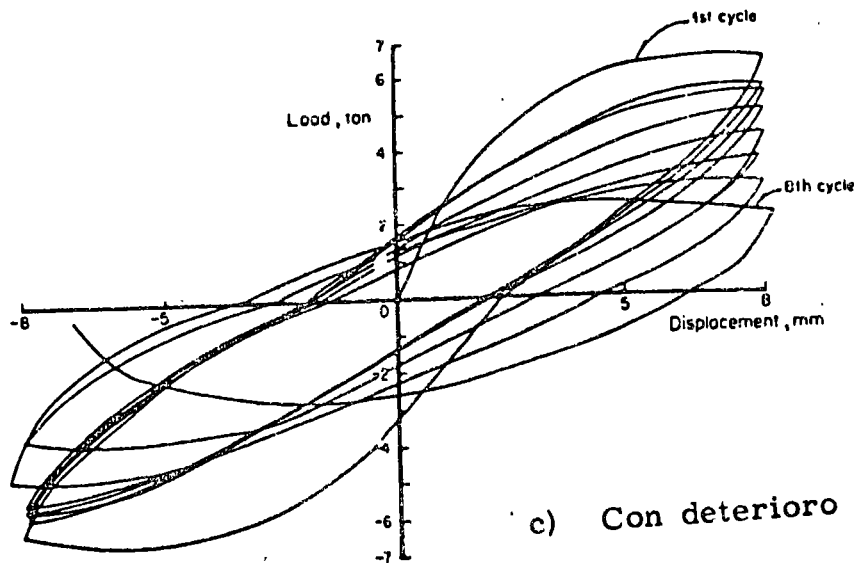
Fig 1b Ductilidad local y ductilidad global



a) Sin deterioro



b) Con deterioro de rigidez y disipación de energía



c) Con deterioro de resistencia

Fig 2 Curvas típicas ante ciclos de carga alternada



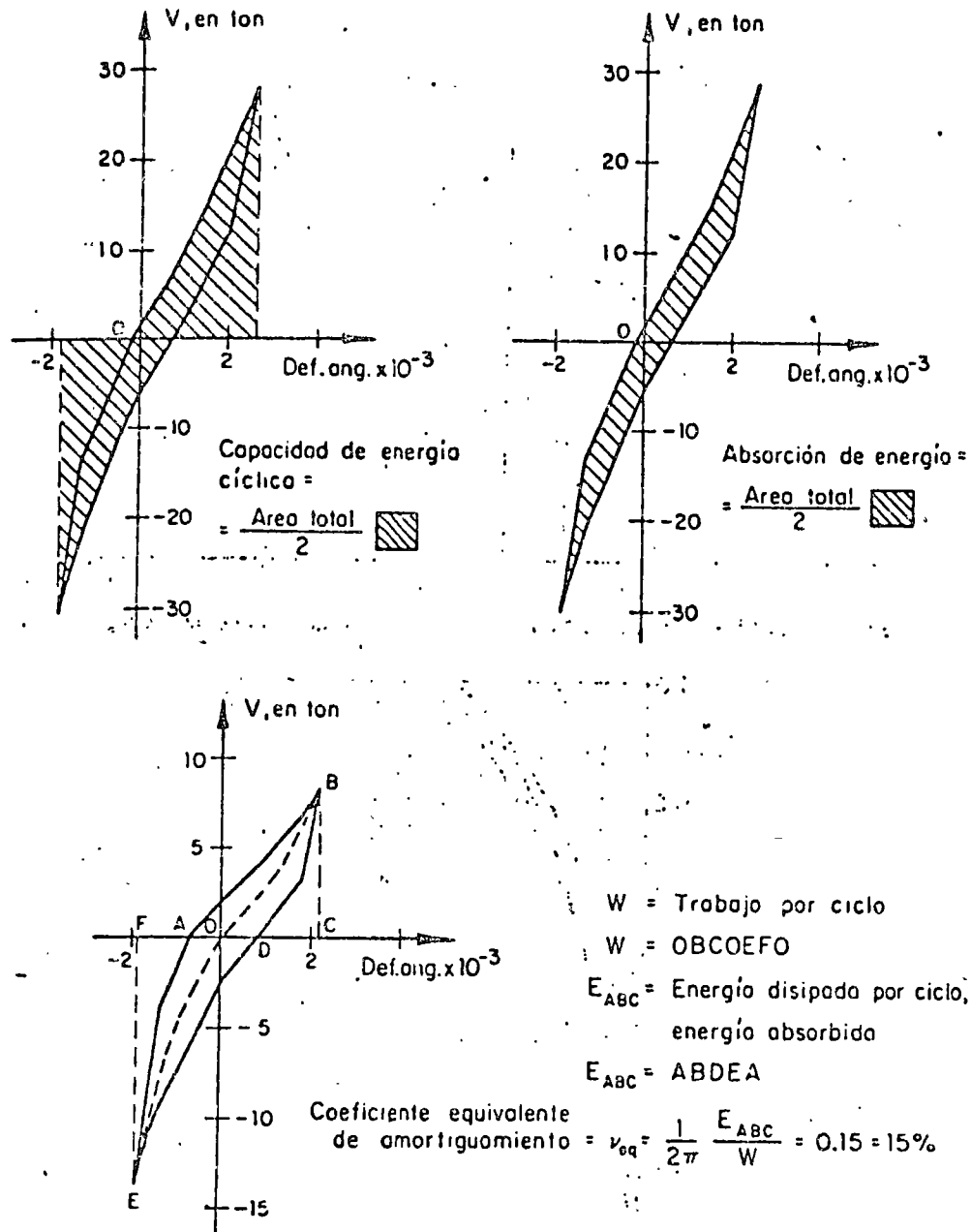
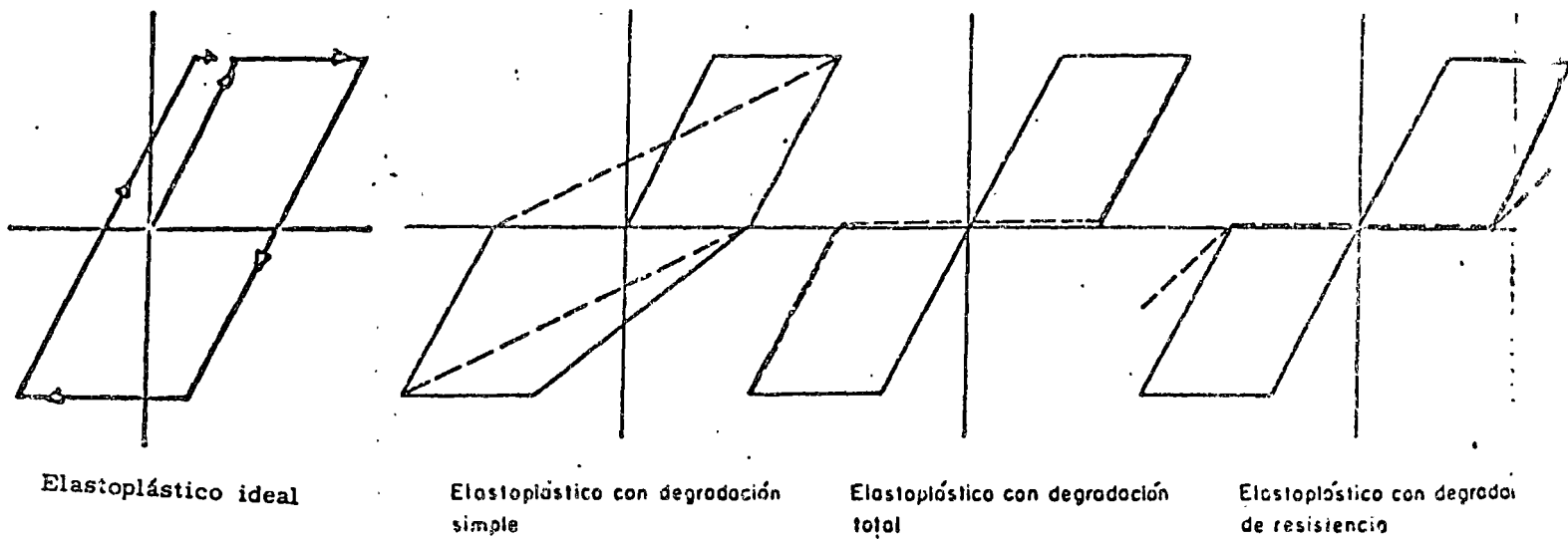
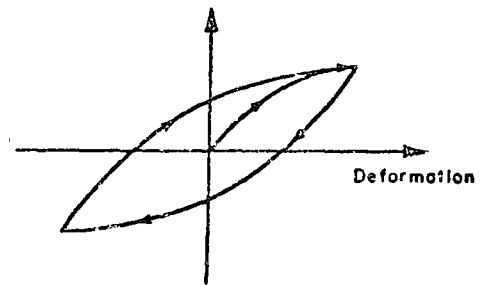
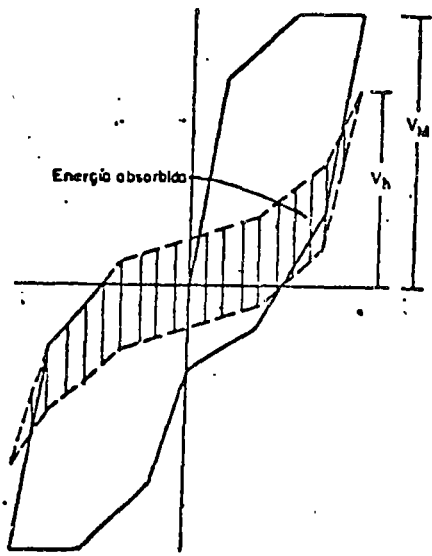


Fig 3 Definición de términos relacionados con la capacidad de disipación de energía



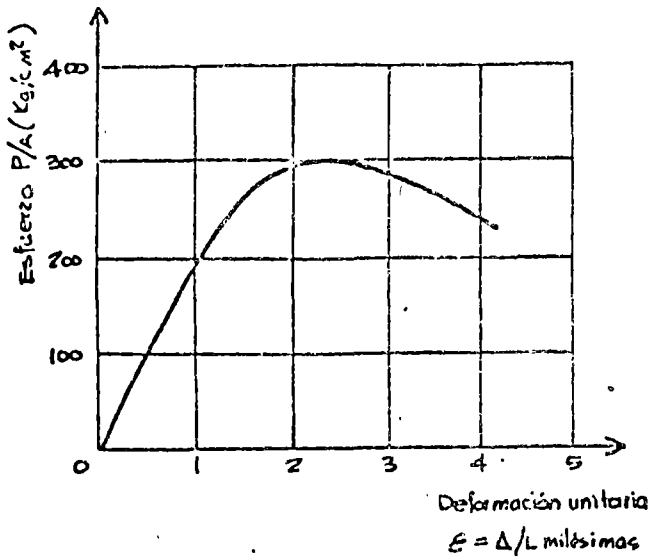
a) Modelos derivados del elastoplástico



b) Modelo resultante de la superposición de varios modelos básicos

c) Modelo de Masing

Fig 4 Modelos de comportamiento histerético



CURVA ESFUERZO-DEFORMACION DEL CONCRETO EN COMPRESION

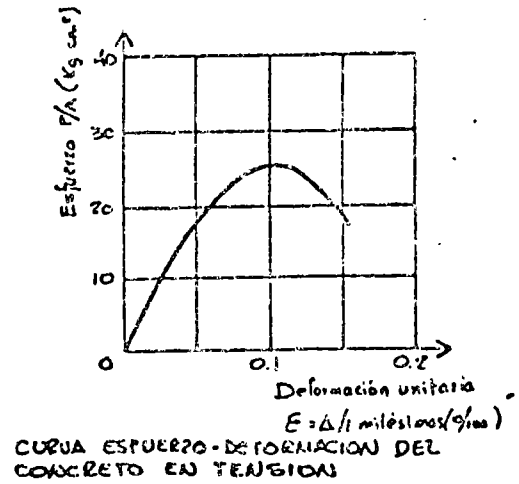


Fig 5 Curvas esfuerzo deformación del concreto simple

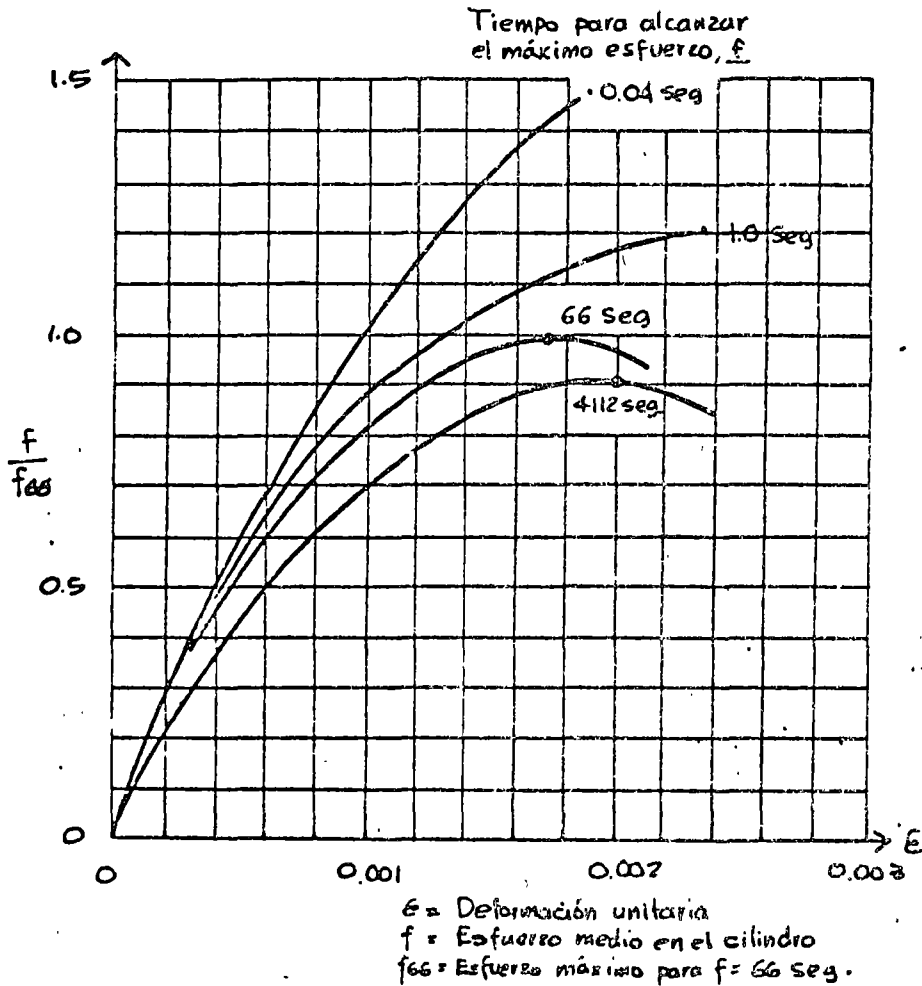
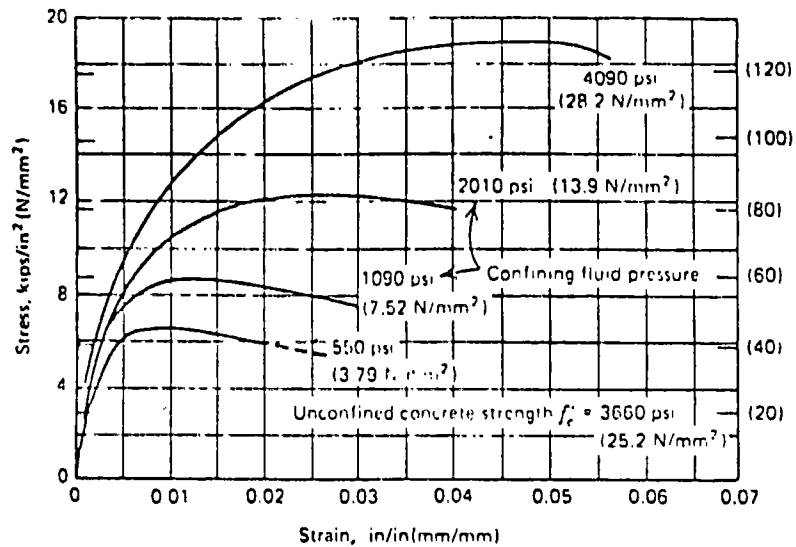
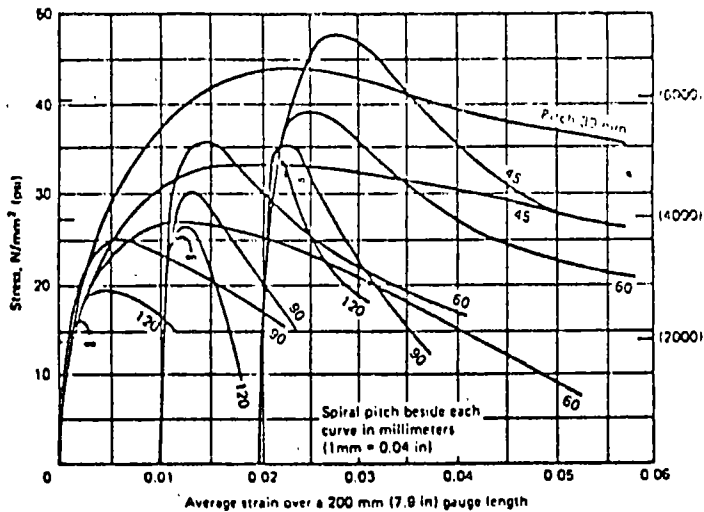


Fig 6 EFECTO DE LA VELOCIDAD DE CARGA (Hatano<sup>2,1</sup>)

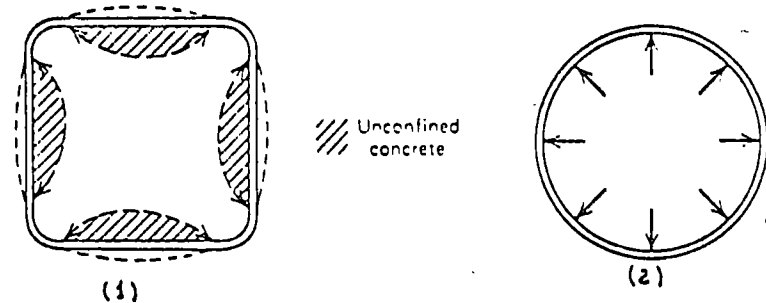


$$f'_{cr} = f'_c + 4.1f_l$$

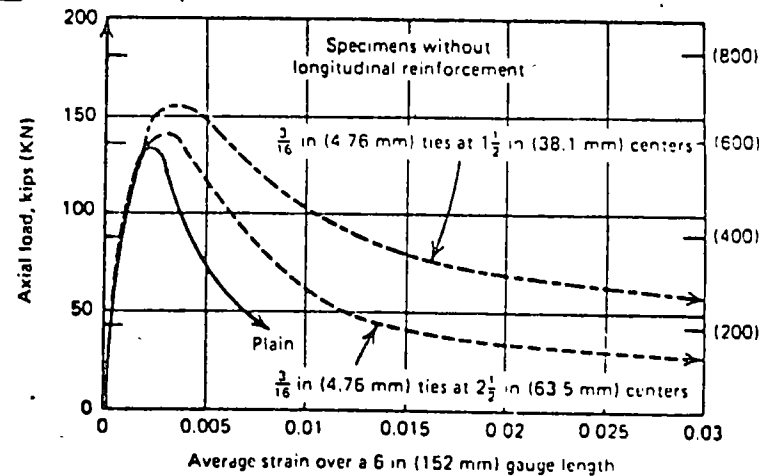
a) Resultados de ensayos a compresión triaxial



c) Curvas esfuerzo deformación de cilindros de concreto reforzados con hélices 6.5 mm de diámetro, de acero grado estructural y distintos espaciamientos



b) Confinamiento proporcionado por estribos (1) y por hélices (2)



d) Curvas esfuerzo deformación de prismas de concreto con diversos contenidos de estribos

Fig 7 Efecto del confinamiento en la curva esfuerzo deformación del concreto

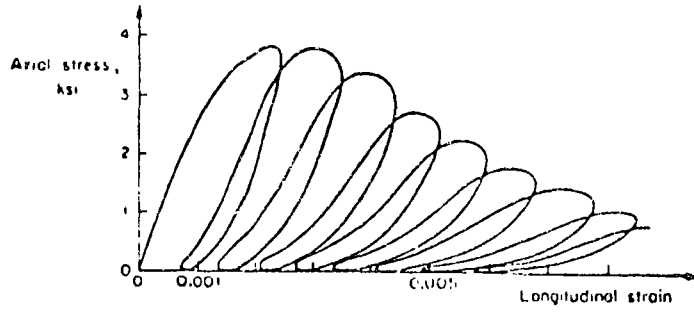


Fig 8 Efecto de la repetición de esfuerzos de compresión en el concreto simple

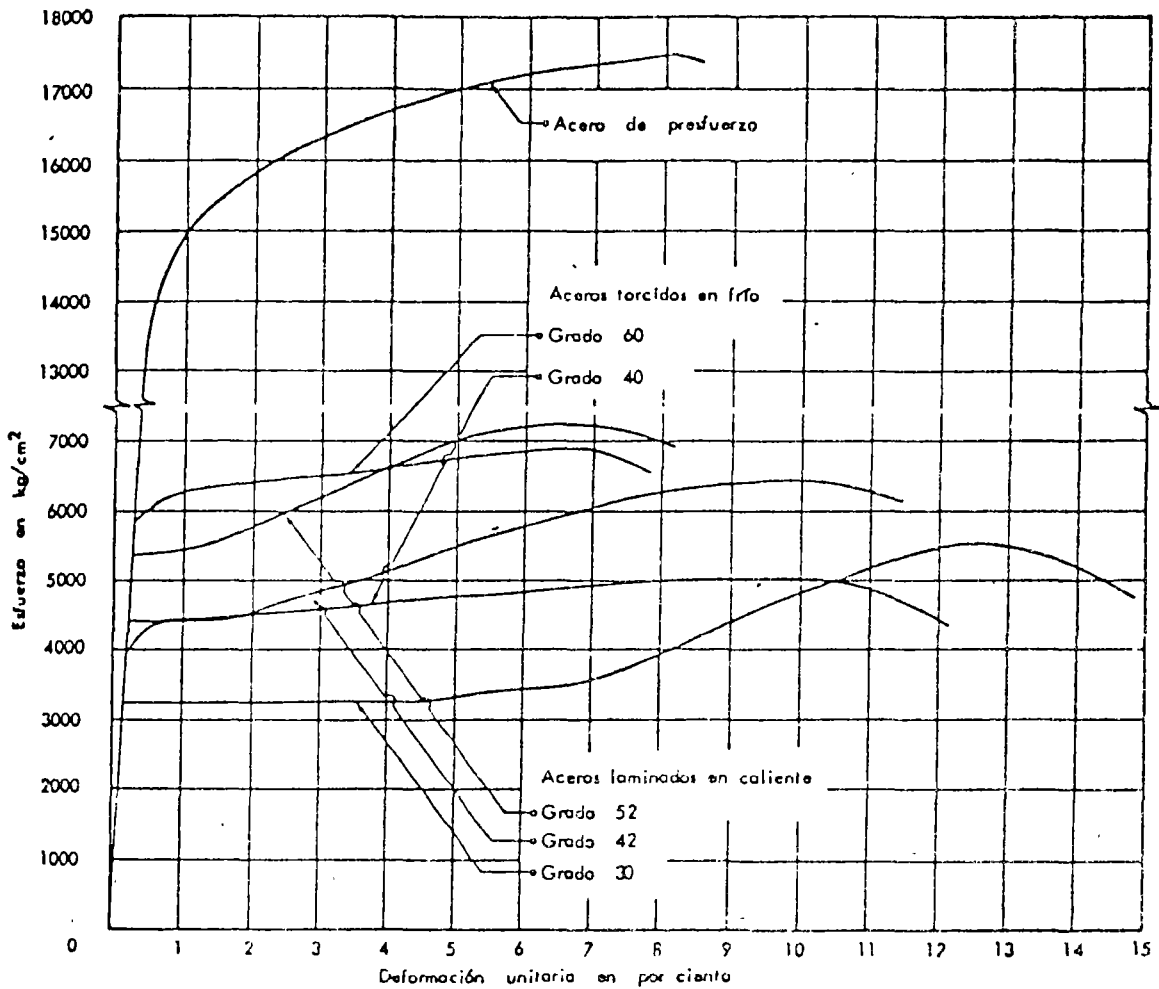


Fig 9 Curvas típicas esfuerzo-deformación para distintos tipos de acero de refuerzo

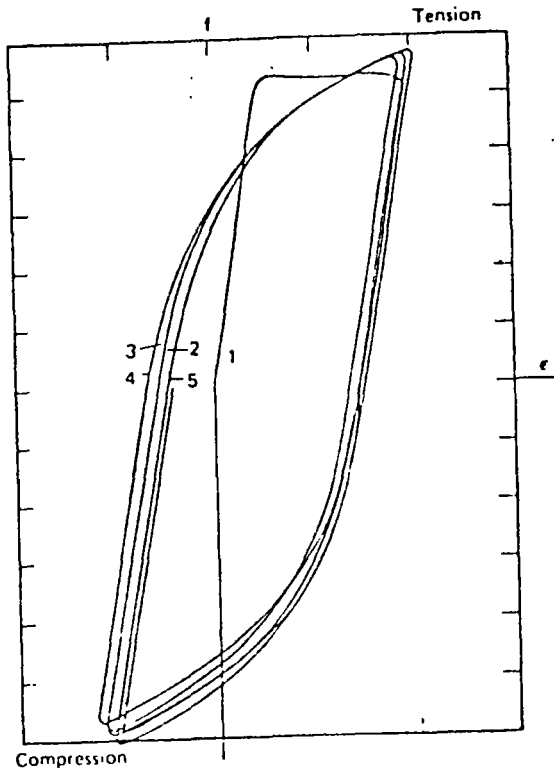


Fig 10 Ciclos histeréticos en una barra de refuerzo

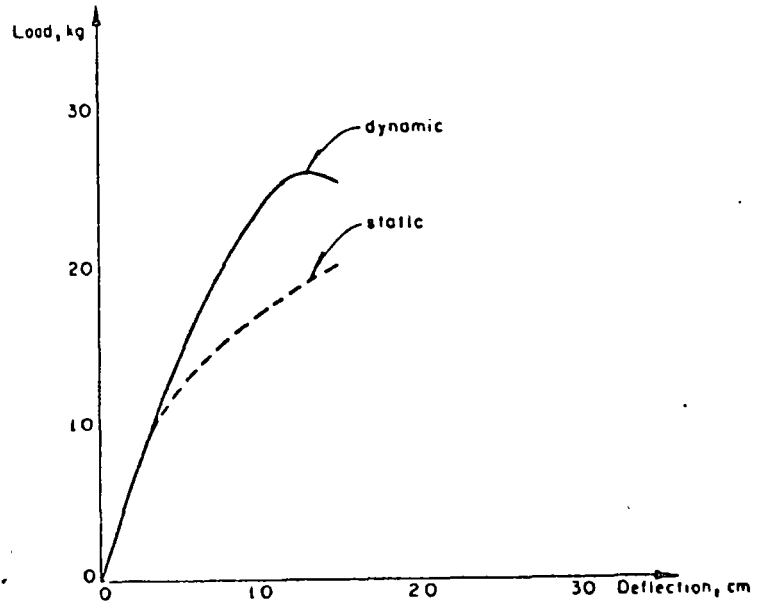


Fig 12 Curvas carga-deformación estática y dinámica para la madera

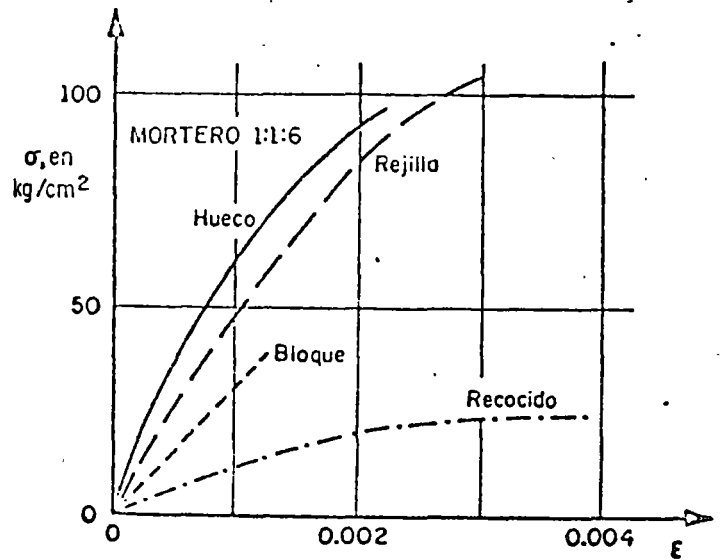
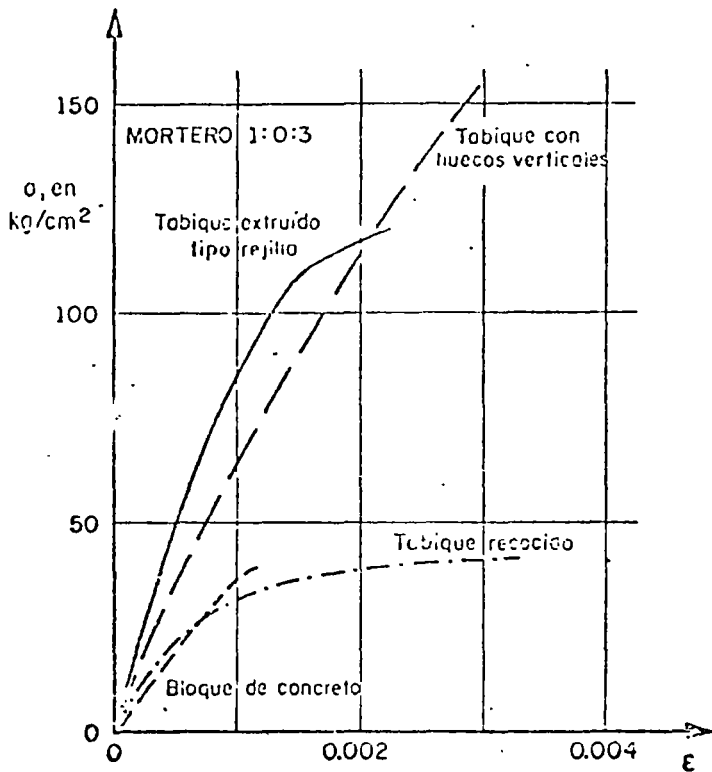


Fig 11 Curvas carga-deformación para mampostería en compresión

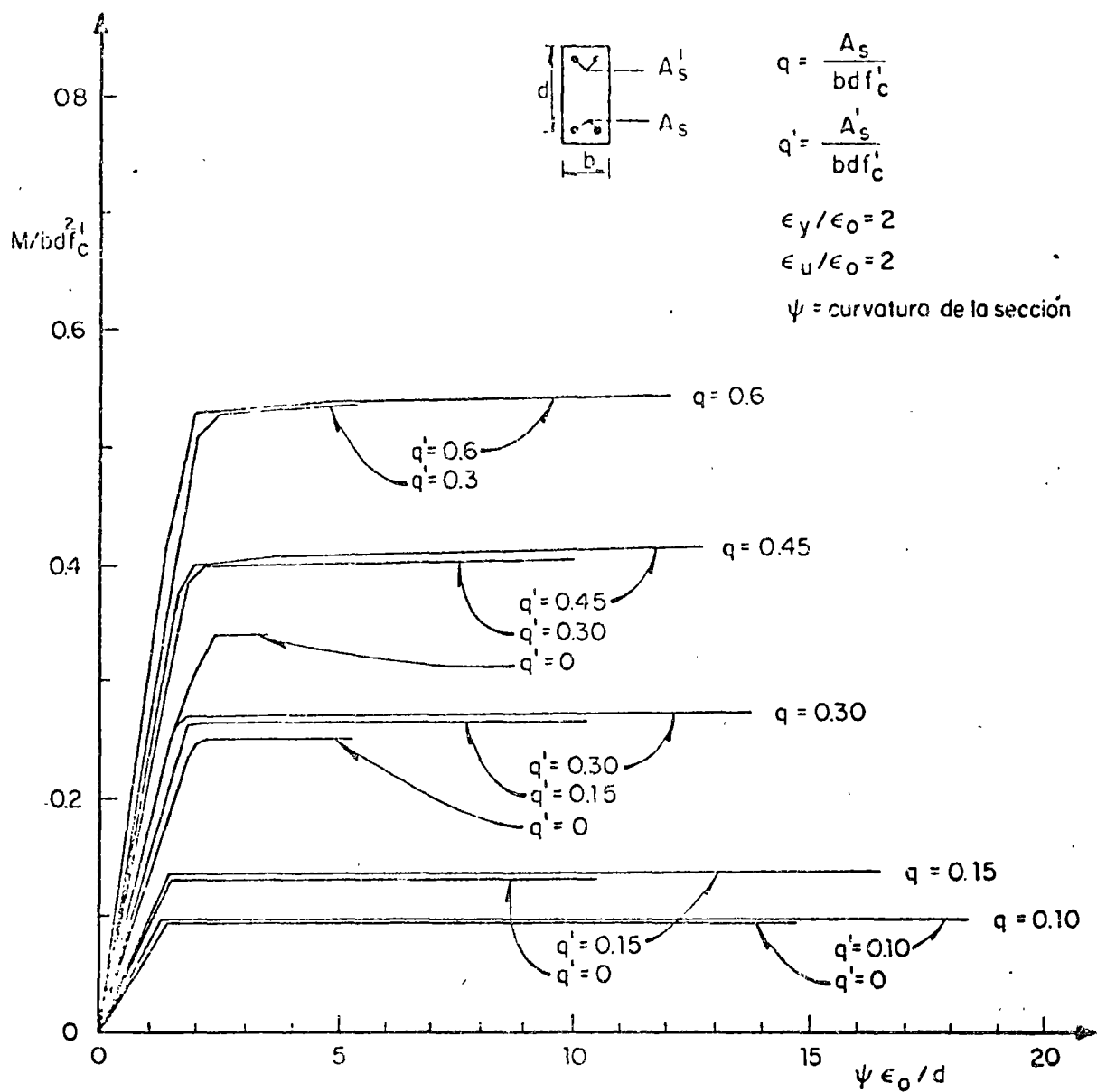
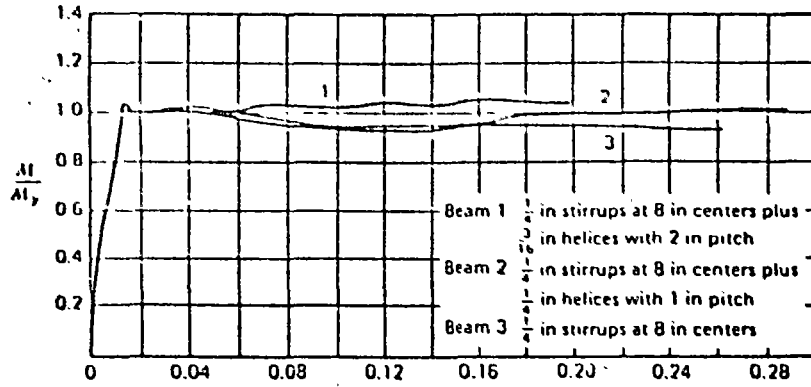
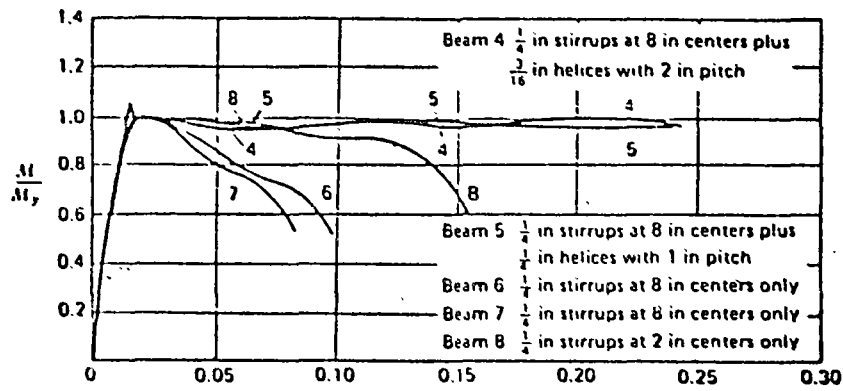


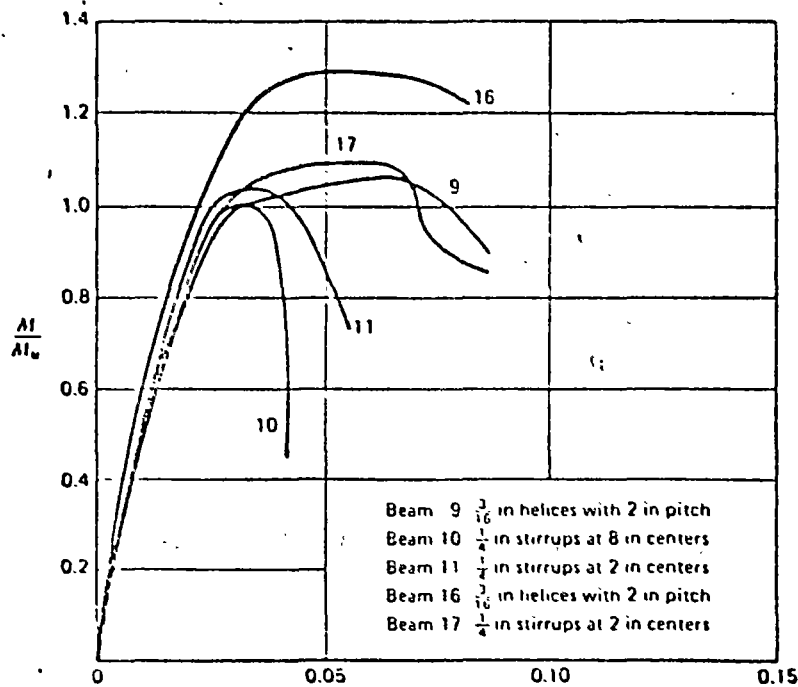
Fig 13 Relaciones Momento-Curvatura para secciones de concreto reforzado sujetas a flexión



a) Vigas subreforzadas



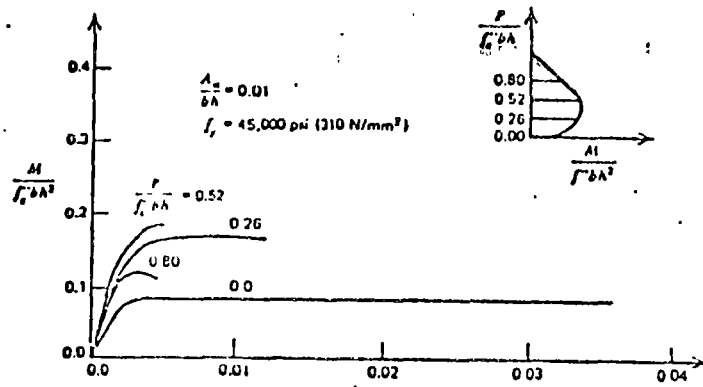
b) Vigas con falla balanceada



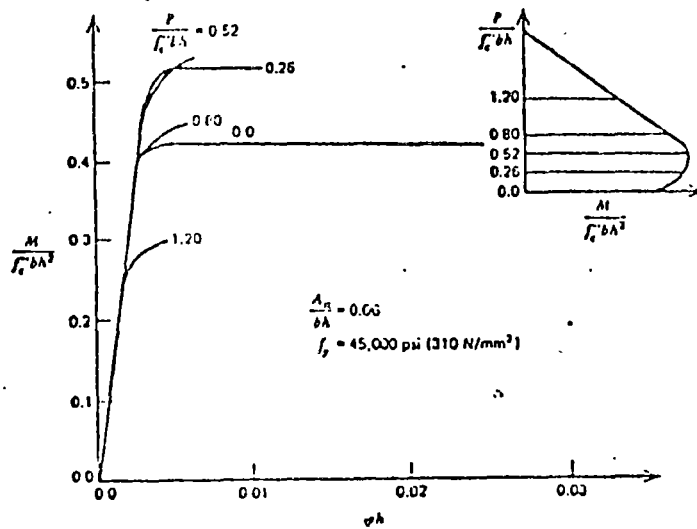
c) Vigas sobreforzadas

Fig 14 Efecto del refuerzo transversal en la relación momento-curvatura de concreto reforzado sujeto a flexión





a) Columna con baja cantidad de refuerzo



b) Columna con alta cantidad de refuerzo

Fig 15 Relaciones momento-curvatura de secciones de concreto sujetas a flexocompresión

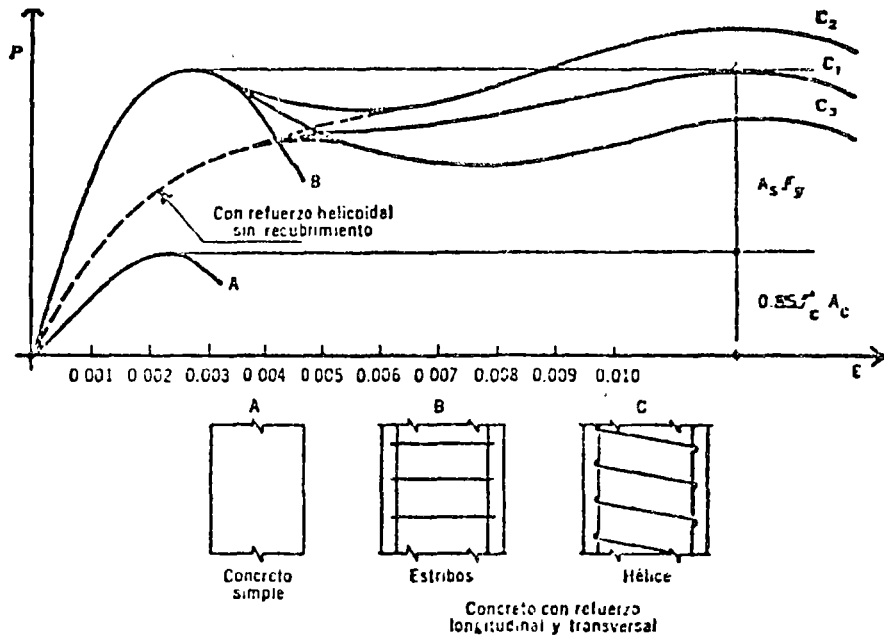
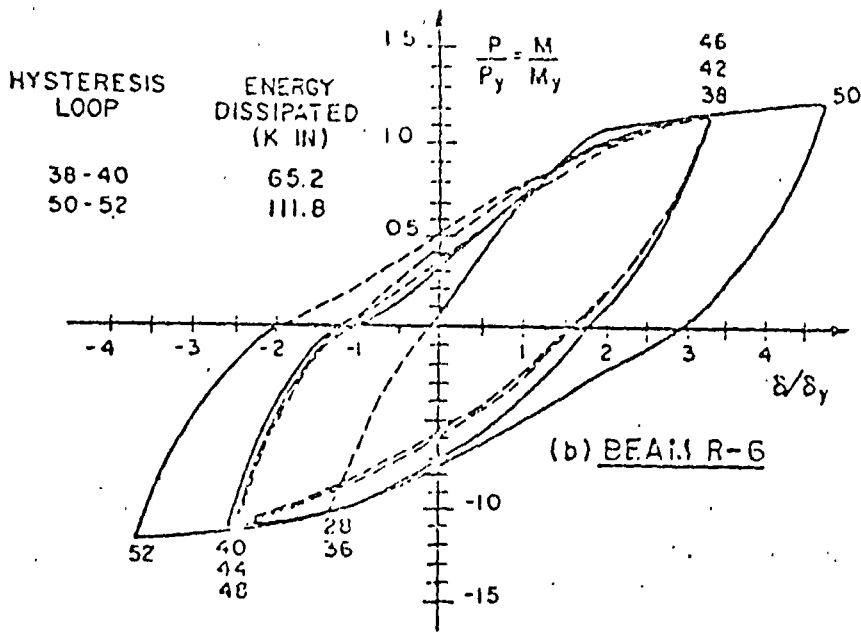
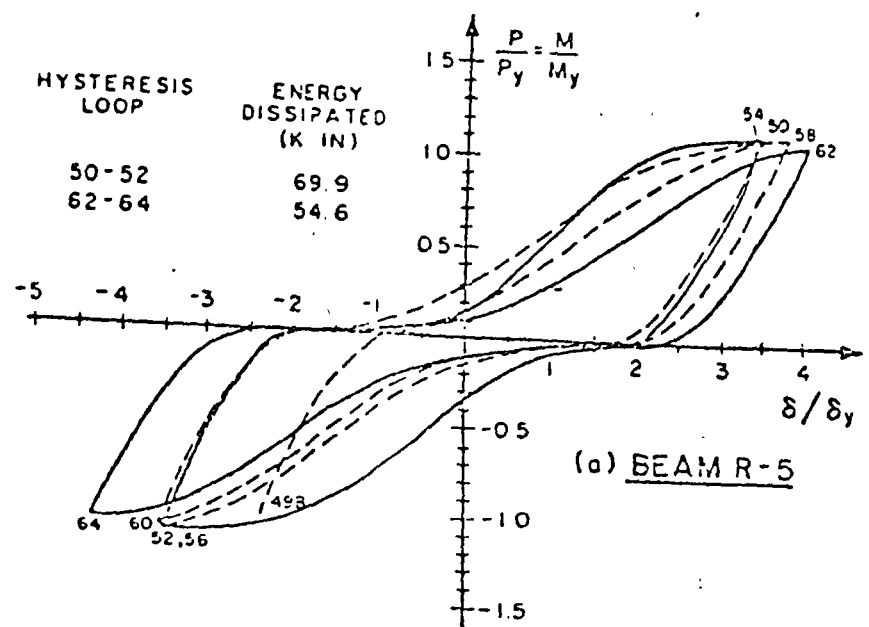


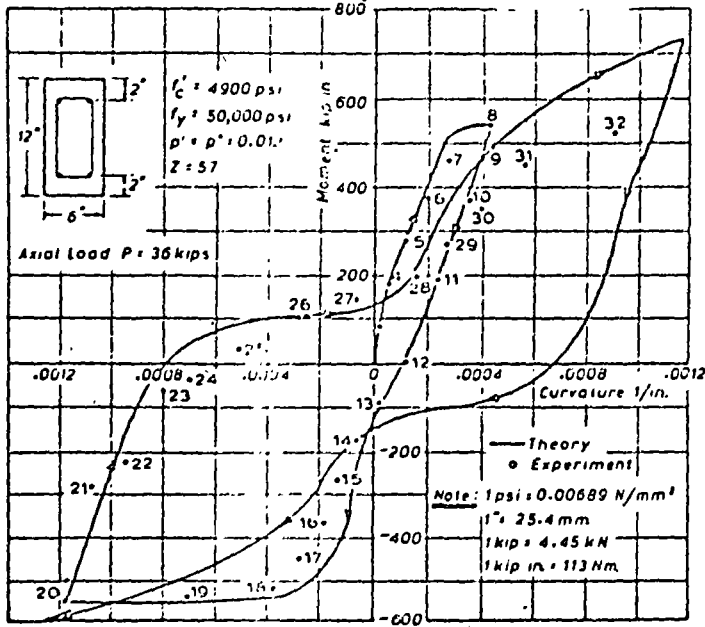
Fig 16 Efecto de confinamiento en la ductilidad de columnas



a) Falla por flexión con esfuerzos cortantes bajos

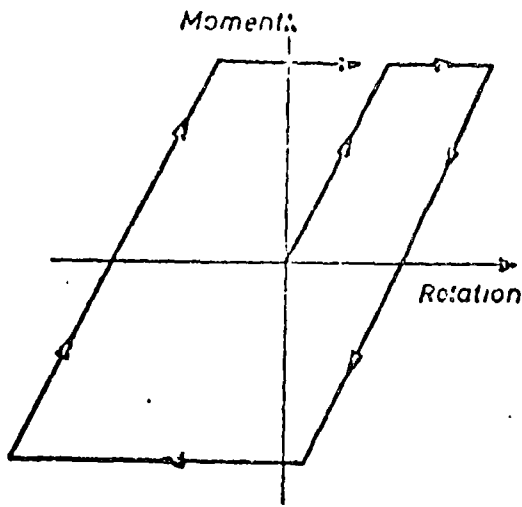


b) Falla por flexión con esfuerzos cortantes altos

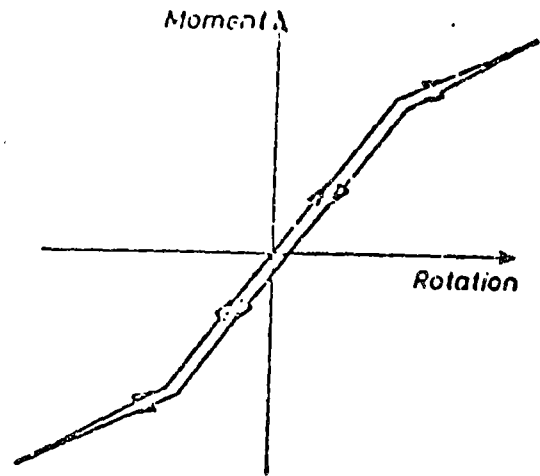


c) Columna con carga axial baja

Fig 17 Comportamiento histerético de secciones de concreto reforzado



a) Concreto reforzado



b) Concreto presforzado

Fig 18 Comparación del comportamiento histerético del concreto reforzado y presforzado

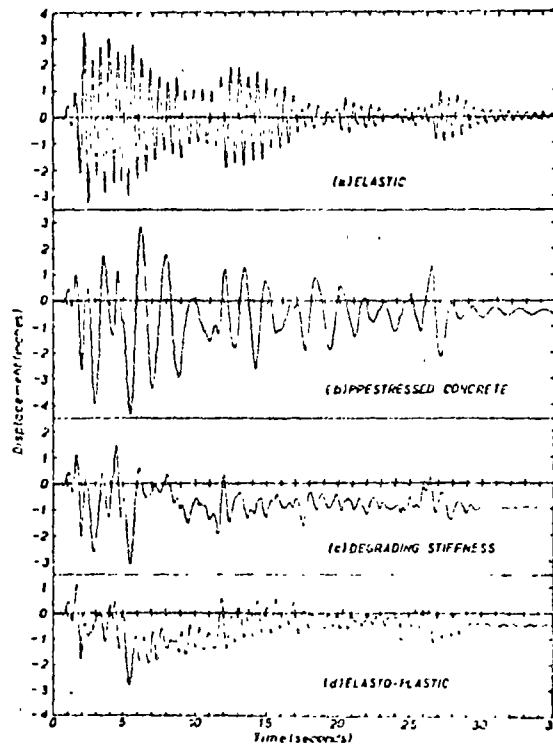
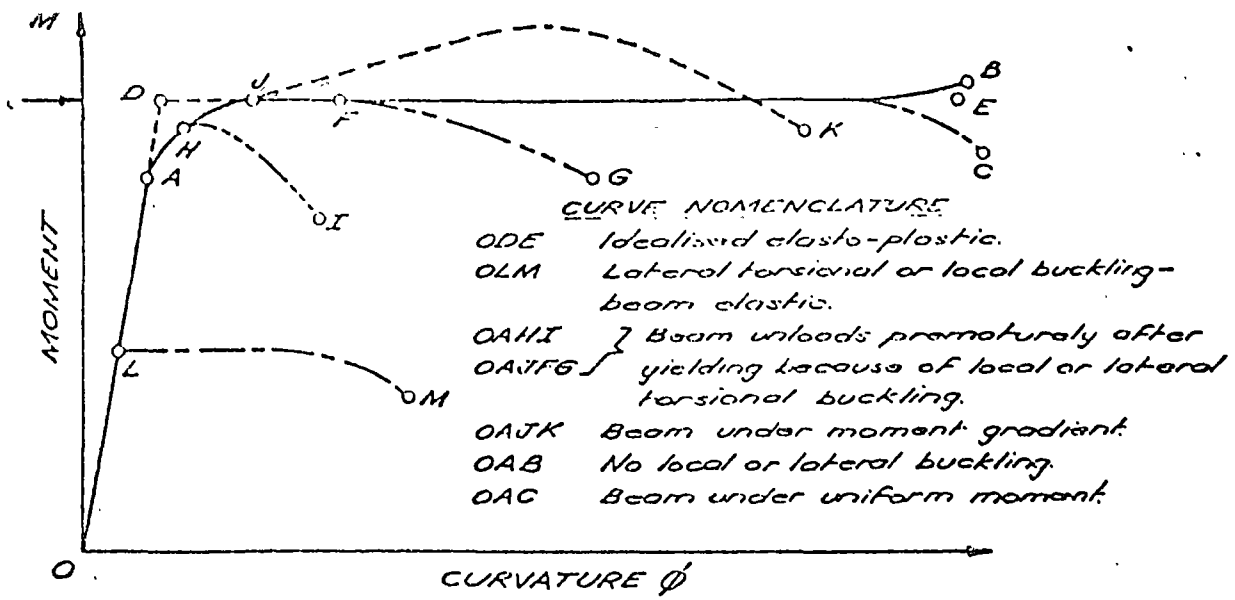
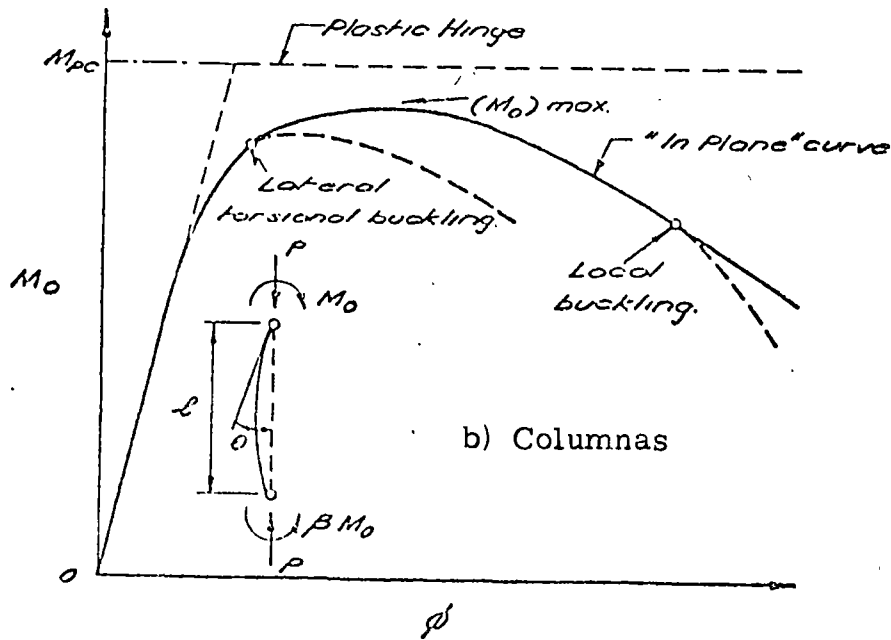


Fig 19 Comparación de deformaciones ante un sismo de un elemento de concreto reforzado y uno presforzado



a) Vigas



b) Columnas

Fig 20 Relaciones momento-curvatura idealizadas en elementos de acero estructural

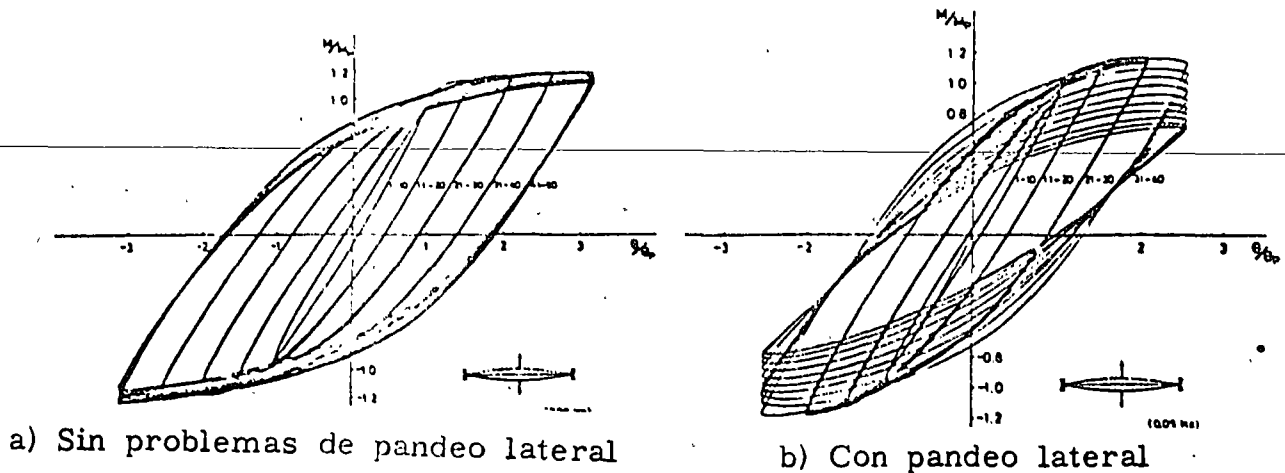
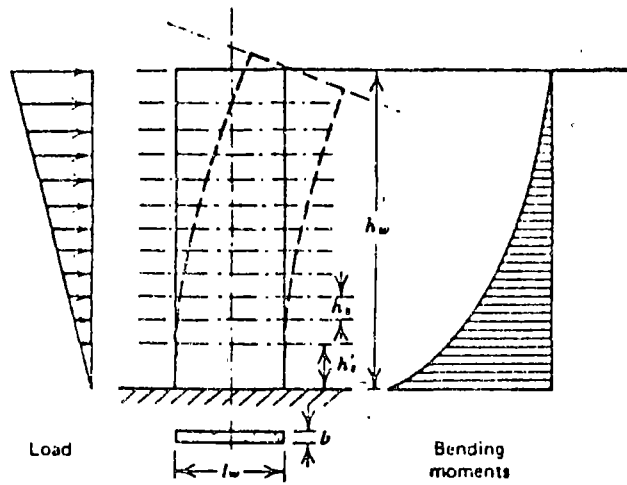
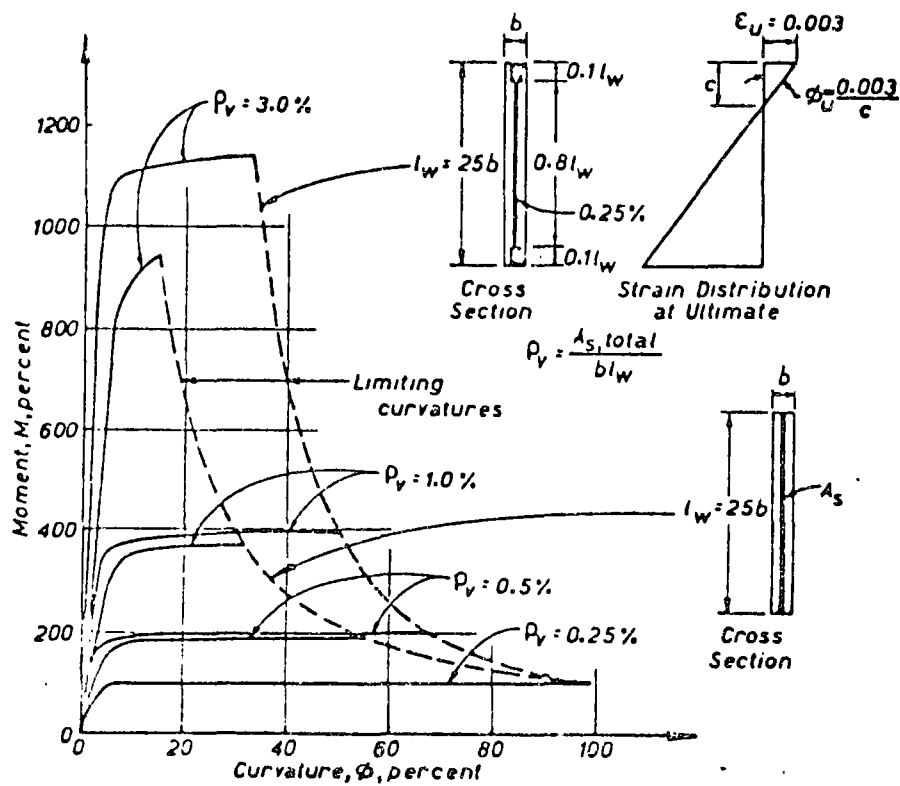


Fig 21 Comportamiento histerético de elementos de acero estructural

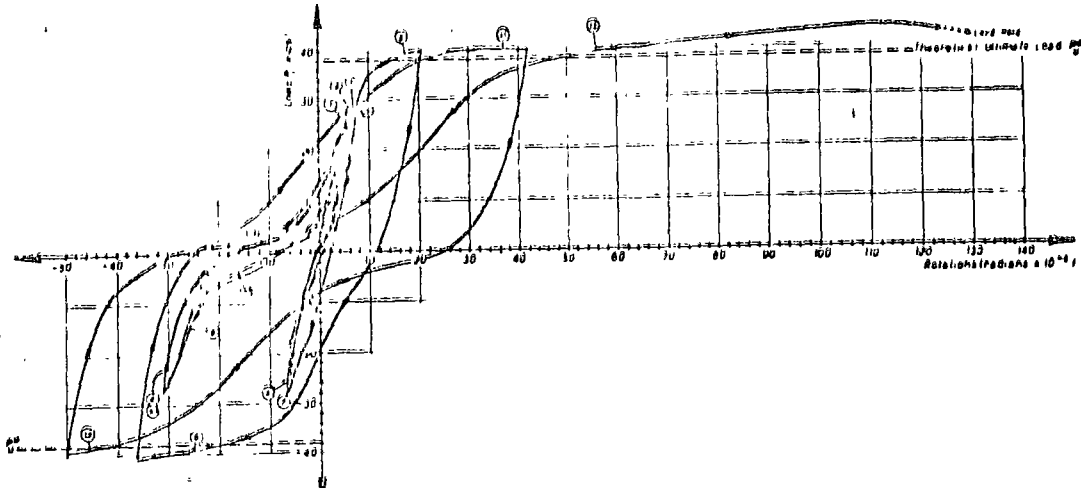


a) Deformaciones

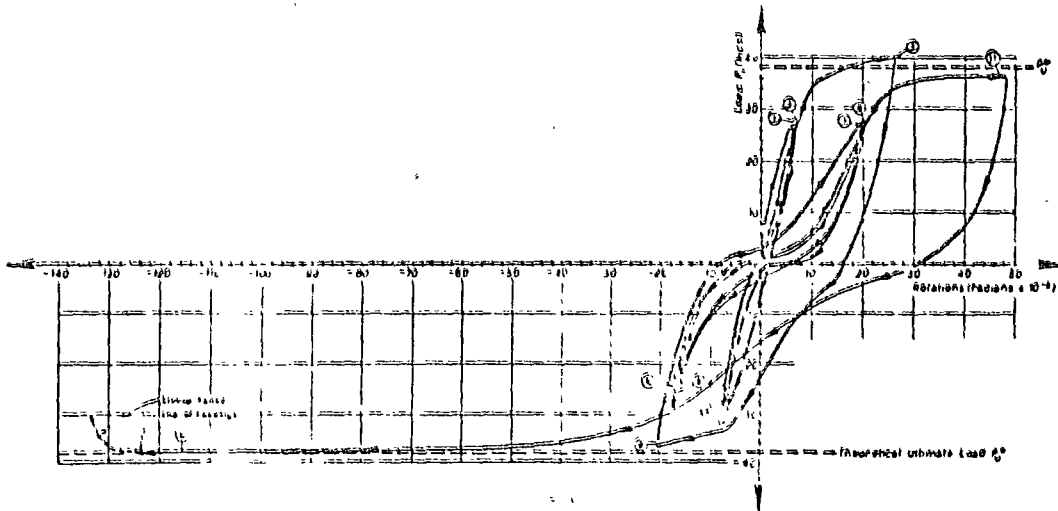


b) Relación momento-curvatura para distintas cuantías de refuerzo

Fig 22 Comportamiento de muros altos sujetos a cargas laterales

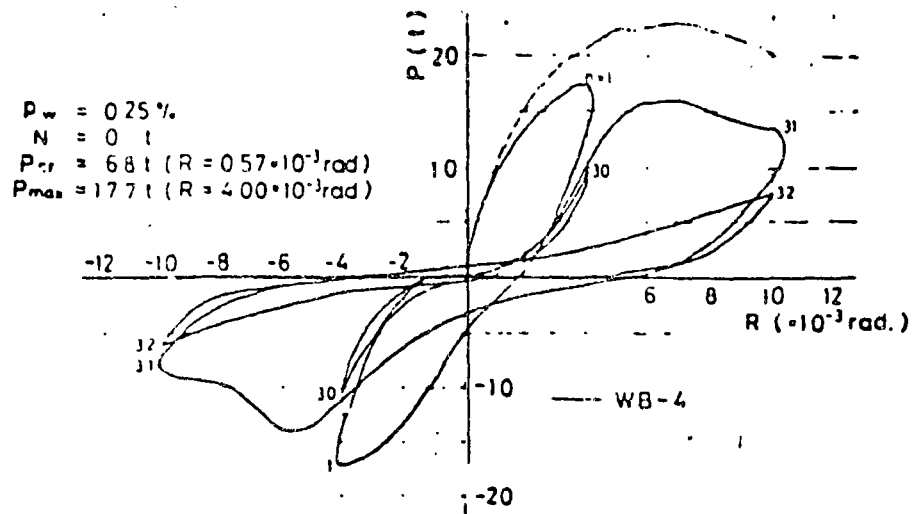


a) Falla por flexión sin agrietamiento diagonal

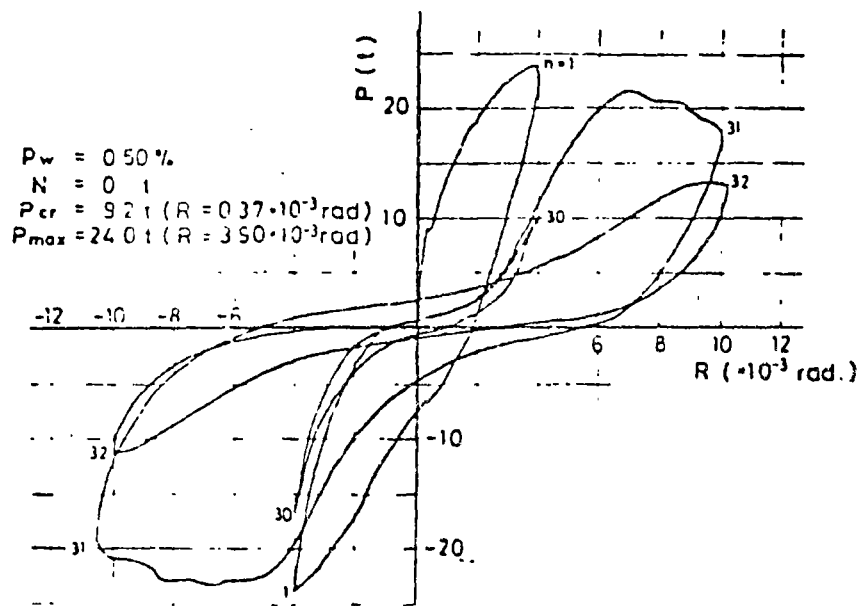


b) Falla por flexión después de agrietamiento diagonal

Fig 23 Ciclos histéricos para muros cortos con falla por flexión

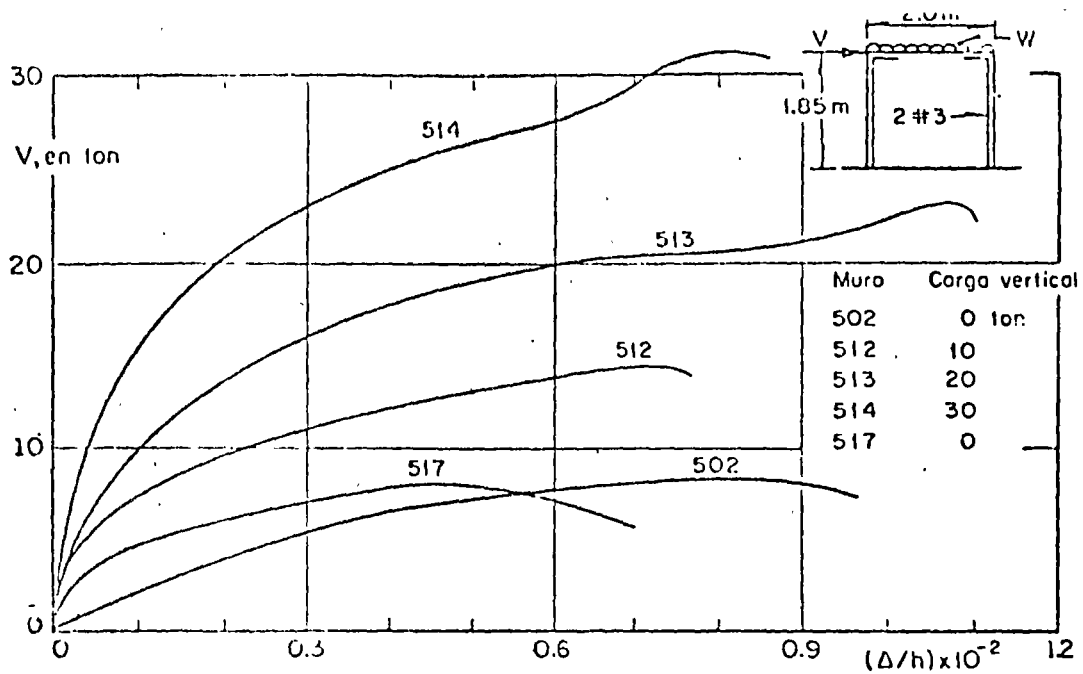


a) Cuantía de refuerzo horizontal 0.25%

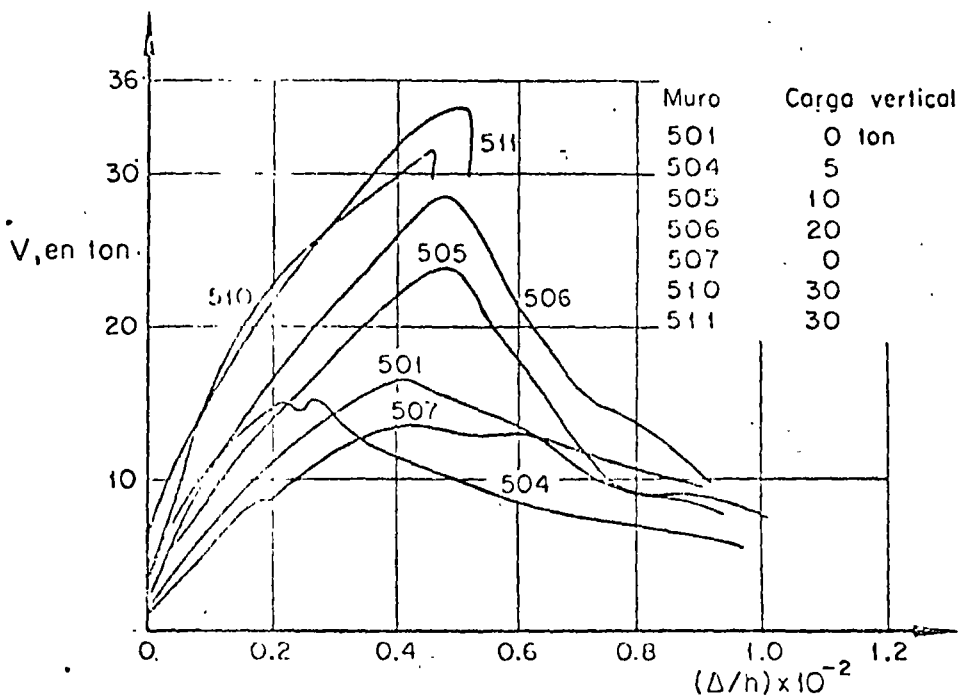


b) Cuantía de refuerzo horizontal 0.50%

Fig 24 Ciclos histeréticos en muros cortos con falla por cortante



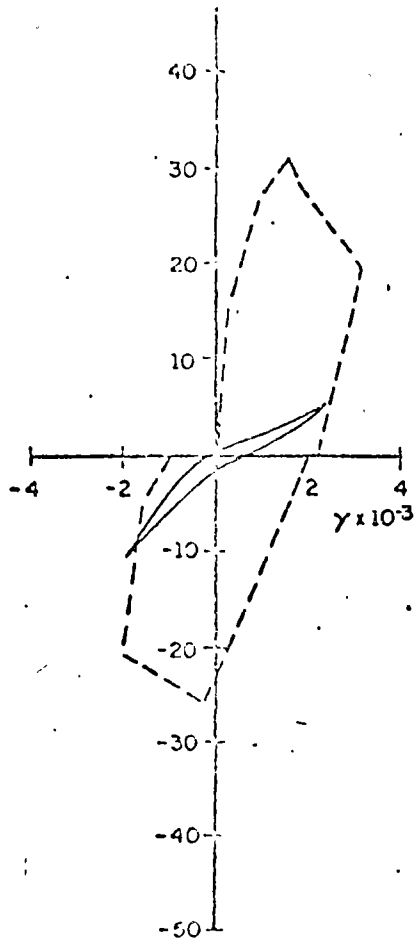
Muros de bloque de concreto. Fallo en flexión. Efecto de la carga vertical



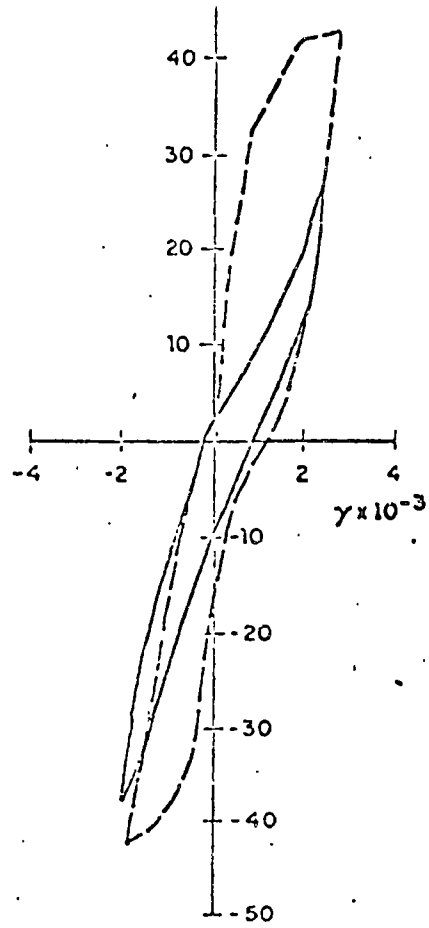
Muros de bloque de concreto. Fallo en tensión diagonal. Efecto de la carga vertical

Fig 25 Curvas Carga deformación para muros de mampostería



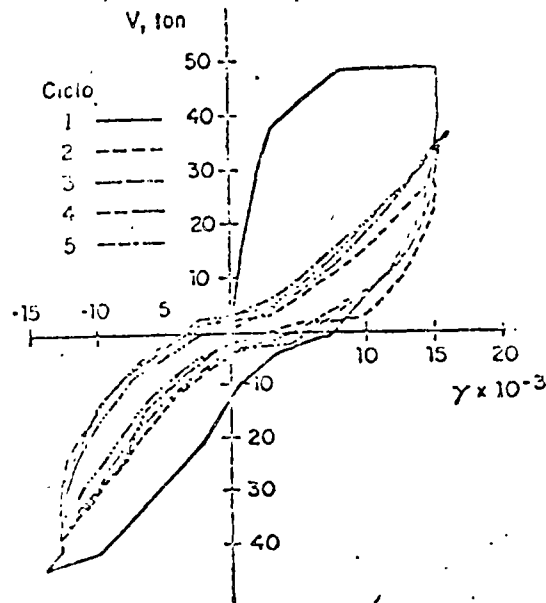


a) Sin carga vertical



b) Carga vertical ( Esfuerzo de compresión 4.5 kg/cm<sup>2</sup>)

a) Efecto de la carga vertical en el deterioro. Ensayes en voladizo. Muros con refuerzo interior. Falla de cortante<sup>1</sup>

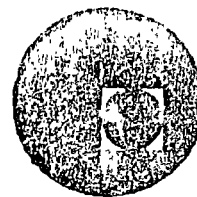


b) Comportamiento histerético de muro con marco

Fig 26 Ciclos histeréticos para muros de mampostería



centro de educación continua  
división de estudios superiores  
facultad de ingeniería, unam



IV CURSO INTERNACIONAL DE INGENIERIA SISMICA

DISEÑO SISMICO DE EDIFICIOS

COMPORTAMIENTO Y ANALISIS DE ESTRUCTURAS  
HIPERESTATICAS DE CONCRETO

DR. ROBERTO MELI PIRALLA

AGOSTO, 1978

# CURSO DE DISEÑO SISMICO DE EDIFICIOS

## Tema: ESTRUCTURAS DE CONCRETO

### GUIA DE ESTUDIO

R. Meli

#### 1 COMPORTAMIENTO Y ANALISIS DE ESTRUCTURAS HIPERESTATICAS DE CONCRETO (ver ref 1 pp 496 a 515)

En las estructuras isostáticas la distribución de fuerzas internas (momentos, cortantes etc) está determinada por condiciones de equilibrio y no depende de las propiedades del material. En las hiperestáticas depende de las rigideces de los elementos y más propiamente de las características momento-curvatura ( $M-\psi$ ) de las secciones. Como la relación  $M/\psi$  puede variar con el nivel de carga, también la distribución de fuerzas internas varía. La relación  $M-\psi$  para una sección de concreto puede idealizarse como trilineal (fig 1a). Si una sección se agrieta el elemento pierde rigidez y la distribución de momento cambia. Una redistribución mucho mayor ocurre si una sección llega a su momento de fluencia y se forma una "articulación plástica", (fig 1b). Los momentos en las distintas secciones pueden variar al hacerlo las rigideces de los elementos; lo que se mantiene constante son ciertas relaciones entre los momentos y las cargas que se deben cumplir por equilibrio. Por ejemplo el momento isostático en vigas

$(\frac{wl^2}{8} \text{ o } \frac{PL}{4})$  según el tipo de carga) debe ser equilibrado por la relación  $\frac{1}{2}(M_I^- + M_D^-) + M^+$  (ver fig. 2a). El momento de entrepiso

en un marco sujeto a cargas laterales (VH) debe ser equilibrado por la suma de momentos en las columnas (ver fig 2b). Si las secciones tienen la suficiente capacidad de rotación, no importa cuáles sean los momentos resistentes en cada sección, si su suma cumple con el mismo momento isostático se tendrá la misma carga resistente. En este principio se basan los métodos de análisis plástico (al límite) de estructuras de concreto (ver ref 1 pp 516 a 544).

En estructuras de concreto la resistencia puede variarse de sección modificando la cantidad o la posición de refuerzo y puede hacerse que el diagrama de momentos resistentes se ajuste prácticamente a cualquier diagrama de momentos actuantes. Esto hace que si se proporciona el refuerzo para resistir momentos proporcionales a los que resultan de un análisis elástico, todas las secciones pasarán simultáneamente de una etapa del comportamiento a otra y no habrá prácticamente redistribución de momentos. Todas las articulaciones plásticas necesarias para que se forme el mecanismo ocurrirán al mismo tiempo (teóricamente). Si se refuerza para resistir momentos distintos de los que resultan del análisis elástico, pero que dan lugar al mismo momento isostático (o sea a una configuración de momentos en equilibrio bajo la misma carga última) se tendrá la misma carga de

falla, aunque algunas secciones hayan llegado prematuramente a la fluencia dando lugar a redistribuciones de momentos. Para que esto sea cierto se requiere comprobar que ninguna articulación plástica de ba, para la formación del mecanismo, tener rotaciones mayores que las que es capaz de soportar. La dificultad de esta comprobación es la razón principal de que los métodos de análisis plástico no se empleen en la práctica para estructuras de concreto.

Si la distribución de momentos no difiere mucho de la elástica las ro taciones necesarias para la formación del mecanismo serán pequeñas y las secciones que cumplan con los requisitos reglamentarios podrán soportarlas.

De lo anterior se deduce que el diagrama de momentos a la falla se ajustará a aquel según el cual se ha dimensionado la estructura y se rá independiente de las rigideces relativas de los elementos. Es muy conveniente, sin embargo, reforzar la estructura según el diagrama de momentos "elástico" ya que con ello se tendrá un mínimo de deformaciones inelásticas y agrietamientos antes de la falla y un comportamiento óptimo en condiciones de servicio.

Los reglamentos admiten, "redistribuir" los momentos elásticos en distintas proporciones. Los ensayos de Mattock (ref 2) ilustrados en la fig 3 muestran muy claramente que, en una viga sub reforzada, redistribuciones de momentos de 25% no producen cambios

de comportamiento ni a la falla ni en condiciones de servicio.

En dichos ensayos la viga NR1 se reforzó de acuerdo con el diagrama de momento elástico; la viga R1 se reforzó para resistir un diagrama de momentos en que el negativo en el apoyo interior se habrá reducido en 25%; mientras que los positivos en el dentro del claro se incrementaron en 12.5% para mantener el mismo momento isostático resistente. La viga R2 se reforzó para el mismo diagrama de momentos que la R1 pero empleando acero con esfuerzo de fluencia de  $4000 \text{ kg/cm}^2$  en lugar de  $2800 \text{ kg/cm}^2$ .

Se aprecia como las tres vigas soportaron muy aproximadamente la misma carga máxima, fig 3i, y que las deflexiones y los agrietamientos bajo carga de servicio fueron similares. Al observar las gráficas de momentos medidos se aprecia como en la viga NR1 se obtuvo casi simultáneamente la fluencia del refuerzo negativo y el positivo, mientras que en la R1 el negativo fluyó prematuramente obligando a que el momento en el apoyo se mantuviera constante mientras que el positivo aumentaba mucho más rápidamente hasta alcanzar la fluencia y la falla por formación de mecanismo.

Los reglamentos difieren en el porcentaje de redistribución que admiten; el del Distrito Federal admite 30% para vigas (dúctiles) mientras que el ACI71 hace variar la redistribución admisible según la cuantía de refuerzo, según la fórmula

$$\% \text{ redistribución} = 20 \left( 1 - \frac{e - e'}{e_b} \right)$$

Las ventajas de aprovechar la redistribución no son muy grandes. La principal es de poder simplificar la distribución del refuerzo y descongestionar zonas en que se acumulen muchas barras (por ejemplo en uniones viga-columna). Cuando se deba diseñar para la envolvente de distintas combinaciones de cargas, esta envolvente puede reducirse aprovechando la redistribución.

El saber que se puede contar con cierta redistribución da confianza en el uso de propiedades geométricas y mecánicas de la estructura que pueden determinarse con muy poca precisión, como el módulo de elasticidad del concreto y el momento de inercia efectivo de las secciones. El cometer un error en estos parámetros dará lugar a una distribución de momentos distinta a la que se va a presentar inicialmente, pero a la cual tenderán los momentos debido a la redistribución.

Para el análisis sísmico se suelen considerar las propiedades "estáticas" de los materiales; para el módulo de elasticidad una buena estimación se obtiene con la expresión  $E = 15000 \sqrt{f'_c}$  (ACI71) aunque para los concretos del Distrito Federal se obtienen valores mucho menores que corresponden a la expresión  $E = 10000 \sqrt{f'_c}$  (Reglamento D.F. 76).

Para los momentos de inercia hay criterios muy distintos. El más

razonable es el de considerar el momento de inercia de la sección bruta para las columnas y los elementos que es de esperarse no estén agrietados en condiciones de servicio.

Para los elementos de flexión parece mejor emplear el momento de inercia de la sección agrietada transformada el cual para cuantías normales de refuerzo corresponde aproximadamente a 60% de el de la sección bruta.

La fig 4 ilustra cuál es la diferencia en los momentos resultantes según se defina el momento de inercia de las secciones. Solo gracias a la redistribución de momentos, estructuras analizadas con tan distintos criterios pueden tener un comportamiento aceptable.

La capacidad de que las secciones sostengan grandes rotaciones y que pueda haber redistribuciones de momentos es particularmente importante en estructuras que deben soportar sismo. Como se ha explicado en otros temas de este curso, las fuerzas que pueden introducirse en una estructura en un sismo son muy superiores a las que los reglamentos especifican para un diseño estático, por ejemplo; esto implica que para disipar la energía de un sismo intenso la estructura debe entrar en un intervalo inelástico de esfuerzos y se requiere de ella gran capacidad de deformación y de disipación de energía.

En la situación descrita, un análisis elástico solo puede servir para apreciar donde se presentan las mayores fuerzas internas antes de que la



estructura entre en un comportamiento inelástico. Nuevamente hay una ventaja importante en reforzar una estructura para un diagrama de momento proporcional al que resulta de un análisis elástico. Todas las secciones llegarán aproximadamente al mismo tiempo a la fluencia y se requerirá en ellas un mínimo de deformación inelástica.

Hay que tomar en cuenta que si no todas las articulaciones plásticas ocurren simultáneamente, se requieren en las secciones que fluyen primero, factores de ductilidad locales muy altos para obtener un factor de ductilidad aceptable para la estructura en su totalidad (ver ref 1 pp 547 a 562). Lo anterior se ilustra en la fig 5 de la que se deduce que para tener un factor de ductilidad de 4 en un marco de 10 pisos se requiere un factor de ductilidad de 125 en las columnas de un piso cualquiera si ocurre un mecanismo de falla que involucre a las columnas y un factor de ductilidad de 8 si ocurre un mecanismo de falla de viga.

Lo anterior recalca la importancia de tener una distribución uniforme de resistencias en todos los elementos y la inconveniencia de tener zonas sobre-diseñadas y otras subdiseñadas.

2. DISEÑO DE VIGAS, COLUMNAS Y UNIONES EN MARCOS DE CONCRETO (ver ref 3 pp 393 a 432)

El marco continuo ha sido el sistema más empleado en estructuras de concreto ya que aprovecha el monolitismo y la continuidad que se pueden lograr fácilmente en este material para obtener una estructura hiperestática eficiente. La principal ventaja de este sistema en zonas sísmicas es la gran ductilidad con que puede contarse si se toman algunas precauciones en cuanto a la disposición del refuerzo. Una limitación que presenta es su poca rigidez ante cargas laterales que hace difícil mantener las deflexiones laterales dentro de los límites admisibles en edificios de varios pisos.

La capacidad de disipación de energía y la ductilidad de los marcos dependerán de las características de los tres elementos que los forman vigas, columnas y uniones viga-columna. Como se ha visto en temas anteriores, en concreto reforzado solo pueden lograrse grandes ductilidades en elementos en que rige la flexión (vigas); por tanto habrá que diseñar de manera que las articulaciones plásticas se formen en las vigas, aunque conviene que en los tres elementos se trate de lograr la máxima ductilidad.

Los reglamentos modernos incluyen disposiciones de refuerzo para lograr ductilidad y así poder diseñar para fuerzas sísmicas reducidas, tomando en cuenta que la estructura es capaz de disipar energía

con deformaciones inelásticas. Los requisitos más completos al respecto son los contenidos en el apéndice A del reglamento ACI-71, los cuales se comentarán aquí, junto con recomendaciones de otras fuentes. En cuanto a los requisitos de tipo general se especifica que deben emplearse concretos con  $f'_c \geq 200 \text{ kg/cm}^2$  y aceros con  $f_y \leq 4200 \text{ kg/cm}^2$ . Este último requisito pretende asegurar que el acero sea muy dúctil.

a) Diseño de vigas. Además de diseñar para las fuerzas que resultan del análisis sísmico hay que cumplir con los requisitos siguientes:

- . Cuantía máxima de refuerzo igual a 50% de la balanceada; ver valores en la tabla de la fig 6
- . Tener un refuerzo mínimo positivo y negativo en todas las secciones ( $\rho_{min} = 14/f_y$ ); mínimo dos barras en cada fecho
- . Colocar en los extremos refuerzo positivo que proporcione un momento resistente igual por lo menos a la mitad del negativo
- . Por lo menos una tercera parte del refuerzo negativo debe extenderse hasta un cuarto del claro y una cuarta parte debe ser continua en todo el fecho superior
- . No cortar refuerzo en zonas de posibles articulaciones plásticas (a 2d del apoyo); si no pueden evitarse traslapes deberán colocarse estribos a lo largo de los mismos
- . Estribos, mínimo #3, a d/2 en toda la viga y a d/4 en una distancia de 4 peraltes a partir del apoyo. En esta zona  $A_v \geq 0.15A_s \frac{s}{d}$  ó  $0.15A_s \frac{s}{d}$
- . En la zona de articulación plástica (2d del apoyo) las barras que deban trabajar en compresión deberán estar confinadas por estribos (mínimo #3) a una separación no mayor de 16Ø ni 30 cm.
- . Debe diseñarse para la fuerza cortante que se presenta en la viga cuando se alcanzan los momentos últimos en los extremos, fig 7. Esto es con la finalidad de que pueda desarrollarse un mecanismo de falla por flexión.

Con estos requisitos se asegura un factor de ductilidad del orden de

10 en las vigas. Algunos autores (ref 4) hacen recomendaciones más conservadoras, como son estribos de confinamiento separados a no más de  $6\phi$  en los extremos, despreciar la contribución del concreto en la resistencia al corte o aumentar el factor de seguridad para el diseño por cortante.

#### b) Diseño de columnas

Los requisitos se ilustran en la fig 8 y se describen a continuación

- . Cuantía de refuerzo entre 1 y 6%
- . La suma de las capacidades en flexión de las columnas que concurren a una unión debe ser mayor que la suma de capacidades de las vigas que concurren a la misma. Esto tiende a asegurar que las articulaciones plásticas se formen en las vigas. No dice cuánto deben sobrediseñarse las columnas.
- . Si  $P \leq 0.4 P_b$  (carga axial para falla balanceada) deben respetarse en la columna los mismos requisitos que para vigas.
- . Cuando  $P > 0.4 P_b$  hay que confinar el núcleo de la columna por medio de espiral o estribos en una distancia igual a un peralte,  $1/6$  de la altura de la columna o 45 cm (el mayor de los tres) a partir de la cara de la viga.
- . La cuantía de refuerzo espiral será  $\rho_s = 0.45 \left( \frac{A_g}{A_c} - 1 \right) \frac{f'_c}{f_y} \geq 0.12 \frac{f'_c}{f_y}$
- . El área de estribos de confinamiento será por lo menos igual a  $A_{sh} = \frac{l_h \rho_s S_h}{2}$ ;  $S_h$  no mayor que 10 cm.
- . Para reducir la longitud  $l_h$  pueden emplearse ganchos del mismo diámetro que los estribos cuya deformación se requiere restringir
- . Separación máxima de estribos:  $d/2$ ; diseñados para resistir el cortante que se introduce en la columna al formarse las articulaciones plásticas en las vigas.

No hay que olvidar que ante la combinación de carga vertical y sismo

11

las columnas van a estar sujetas a un estado de flexocompresión biaxial para el cual deberán diseñarse.

c) Uniones viga-columna

La falta de anclaje del refuerzo en la conexión y la falta de refuerzo transversal en la misma ha sido una de las causas más frecuentes de fallas de marcos de concreto a raíz de temblores. Solo hasta muy recientemente se ha empezado a estudiar el comportamiento y a desarrollar procedimientos de diseño para estas uniones. El apéndice A del Reglamento ACI 71 contiene disposiciones muy limitadas al respecto. Más recientemente la misma institución ha publicado recomendaciones mucho más completas para el diseño de uniones (ref 5). Estas se presentarán más adelante.

Ante el efecto de carga vertical más sismo la zona de unión está sujeta a las condiciones de esfuerzo que se ilustran en la fig 9 y que introducen en ellas tensiones diagonales que pueden causar la falla. Mucho más grave es la situación de conexiones de extremo en las que se vuelve crítico el anclaje del refuerzo.

Diversos ensayos efectuados muestran que el comportamiento ante cargas alternadas de las conexiones es muy poco favorable cuando se llega cerca de su máxima capacidad de carga; esto lleva a la necesidad de diseñar las juntas de manera que los elementos por ellas conectadas puedan desarrollar toda su resistencia y que puedan formarse arti

culaciones plásticas en las vigas sin que las uniones se dañen. Para ello hay que tener las siguientes precauciones: colocar refuerzo transversal en la junta para que confine al concreto y para que evite falla por cortante y dar al refuerzo el anclaje adecuado.

Las recomendaciones de la ref 5 indican que las uniones de marcos que deben resistir sismo se revisen

1) por confinamiento se deberá proporcionar el mismo refuerzo que en los extremos de la columna: si  $P_u \geq 0.4 P_b$  es piral o zuncho de estribos como se ha descrito en la sección anterior; sin embargo si existen vigas en los cuatro lados de la conexión, la separación de estribos puede aumentarse al doble.

2) por cortante; la fuerza cortante actuante se calculará con el diagrama de cuerpo libre de la fig 9 considerando que el refuerzo longitudinal puede llegar a trabajar a un esfuerzo igual a  $1.25 f_y$  ya que puede entrar en la zona de endurecimiento; esto da lugar a

$$V_u = 1.25 f_y (A_{Sb} + A_{St}) - V_{col}$$

$$V_{col} = (M_{ub} + M_{ut})/H \quad (\text{ver fig 9})$$

La resistencia al corte en la junta se calcula como la suma de una contribución del concreto

$$v_c = 0.9 \gamma \sqrt{f'_c} (1 + 0.03 N_u / A_g)$$

en que  $N_u/A_g$  es el esfuerzo de compresión sobre la columna y  $\gamma = 1.4$  si la unión está confinada normalmente a la dirección del cortante (si hay vigas transversales) y  $\gamma = 1$  si no es así.

La contribución del refuerzo al esfuerzo cortante resistente se calcula como

$$v_s = \frac{A_v f_y d}{s A_{cv}} \quad A_{cv} \text{ es el área del núcleo}$$

En todo caso

$$\frac{2}{3} v_u \leq v_s \leq 4 \sqrt{f'_c}$$

3) por anclaje; no se admiten traslapes en las uniones; las barras deberán tener, a partir del borde del núcleo, una longitud de desarrollo igual a

$$l_s = \frac{0.06 A_b (1.25 f_y - f_h)}{\psi \sqrt{f'_c}} \quad \text{ver fig 10}$$

en que  $\psi$  depende del confinamiento del núcleo y vale normalmente 1.4;  $f_h$  es la fuerza que resiste el gancho estándar, en caso de existir, la cual se calcula como

$$f_h = 185 (1 - 0.012 d_b) \psi \sqrt{f'_c}; \quad d_b \text{ diámetro de la barra}$$

Con los requisitos anteriores se asegura un buen comportamiento de la junta pero a costas de un refuerzo muy elaborado y difícil de colocar, ver fig 11. Hay algunas alternativas para evitar esa cantidad de refuerzo. Por ejemplo el hacer ampliaciones a la sección de la junta o usar anclajes mecánicos o soldados, ver fig 12.

El caso más crítico de uniones son las juntas de rodilla. En las que se presentan esfuerzos críticos tanto ante cargas que tiendan a abrirlas como ante las que tiendan a cerrarias, fig 13 . Se requiere en ellas formas de refuerzo particulares como las mostradas en la fig 13c.

En general parece que las recomendaciones del comité en cuestión son excesivamente severas, muy laboriosas de seguir y dan lugar a un refuerzo en las conexiones que es difícil de ejecutar.



### 3. SISTEMAS LOSA PLANA-COLUMNA

Las losas planas son ampliamente usadas en edificios debido a diversas ventajas como la sencillez de la cimbra y el peralte reducido a que dan lugar. Hay distintas versiones: con o sin capiteles, y macizas o aligeradas, fig 14. Ante cargas verticales su comportamiento está muy estudiado y los procedimientos de diseño muy comprobados, ACI-71.

En lo que respecta a su eficiencia para resistir efectos sísmicos, hay muchas controversias. Las limitaciones se refieren a su escasa rigidez ante cargas laterales y, especialmente, a la poca ductilidad que puede lograrse en este sistema, ya que es difícil evitar que la falla sea regida por cortante en la zona de conexión entre viga y columna. En diversos países, no se permite que se aproveche este sistema para resistir fuerzas sísmicas; cuando se use se requiere que las fuerzas sísm

micas sean tomadas íntegramente por muros de rigidez u otros sistemas. En México, sin embargo, es muy frecuente que el sistema losa plana-columna deba resistir una porción importante de las fuerzas sísmicas.

Para fines de análisis por cargas laterales, la losa se sustituye por una viga de rigidez equivalente; sin embargo, no es aplicable el criterio del ACI-71 en que la viga tiene la rigidez de la losa de centro a centro de claros adyacentes; análisis teóricos indican que ante cargas laterales resulta adecuado el criterio especificado en el Reglamento del D.F., según el cual el ancho de losa que es efectivo para trabajar como viga debe tomarse como, fig 15,

$$L_{eq} = \frac{0.5 L_2}{1 + 0.67 \frac{L_2}{L_1}} + 0.3 c_2$$

Resultados experimentales de Hawkins (ref 6) indican rigideces aún menores que las calculadas con la de esta expresión y considerando el momento de inercia de la sección agrietada.

Por lo anterior la rigidez ante cargas laterales del sistema losa plana-columna suele ser bastante reducida y resulta difícil cumplir con las limitaciones de deflexiones laterales admisibles.

El análisis sísmico, una vez definidas la viga equivalente, se realiza como en un marco y los momentos obtenidos para el marco se distribuyen entre las franjas de columna y central con los mismos coeficien

tes que para los momentos debidos a cargas verticales.

El problema principal en este sistema es la trasmisión del momento de desequilibrio de columnas a viga, fig 16. El momento debido a sismo se trasmite a la losa por una combinación de flexión y cortante. El modo de falla es local y no permite la formación de una articulación plástica; sino que da lugar a una falla local que es muy frágil a menos que se proporcione un refuerzo por cortante. De los diversos procedimientos de refuerzo propuestos (fig 17), el más satisfactorio es el desarrollado por Hawkins que consiste en reforzar vigas ahogadas en el espesor de la losa, en un ancho igual al de la columna más un peralte de la losa, en las cuales puede colocarse abundante refuerzo transversal.

El procedimiento de diseño puede extrapolarse del especificado por el ACI-71 en que se supone que una fracción del momento de desequilibrio (en general 60%) es tomada por momento y el resto por la variación, supuesta lineal, de las fuerzas cortantes en la sección crítica, fig 16.

En cuanto a la resistencia al cortante, el esfuerzo a resistencia del concreto se puede tomar como  $v_c = \sqrt{f'_c}$  (el doble que para vigas) y la contribución de los estribos  $v_s$  se calcula igual que en vigas (fig 18); sin embargo cuando se requiera refuerzo la contribución del concreto debe reducirse a la mitad y no se admite que  $v_u \geq 1.5 \sqrt{f'_c}$ . Aunque el incremento en resistencia por efecto del refuerzo transversal sea limita

do, su presencia es indispensable para dar cierta ductilidad a la falla.

Por lo que se ha descrito es evidente que en caso de emplear este sistema para resistir fuerzas sísmicas las reducciones por ductilidad que deban considerarse son muy inferiores a las que son admisibles para marcos.

#### 4. MUROS DE RIGIDEZ

En edificios de altura mediana o grande resulta antieconómico proporcionar la rigidez ante cargas laterales exclusivamente con marcos; la solución más empleada es que la rigidez y resistencia sísmica estén proporcionadas principalmente por muros de concreto. En temas anteriores se ha descrito el comportamiento de estos elementos ante cargas alternadas distinguiendo los muros altos en que el comportamiento está regido principalmente por los momentos flexionantes y que pueden diseñarse con los mismos procedimientos empleados para vigas, de los muros bajos en las que predomina el efecto de las deformaciones por cortante. En otro tema se ha tratado el análisis sísmico de sistemas con muros de rigidez el cual presenta dificultades mayores que el de sistema base exclusivamente de marcos.

La ductilidad y disipación inelástica de energía que puede lograrse en muros de rigidez es muy variable según rija la flexión o el cortante y según haya o no cargas verticales altas sobre el muro. Sin embargo los reglamentos suelen tratar todos los muros con el mismo criterio fijando factores reductivos por ductilidad mucho menores para estos sistemas que para los marcos.

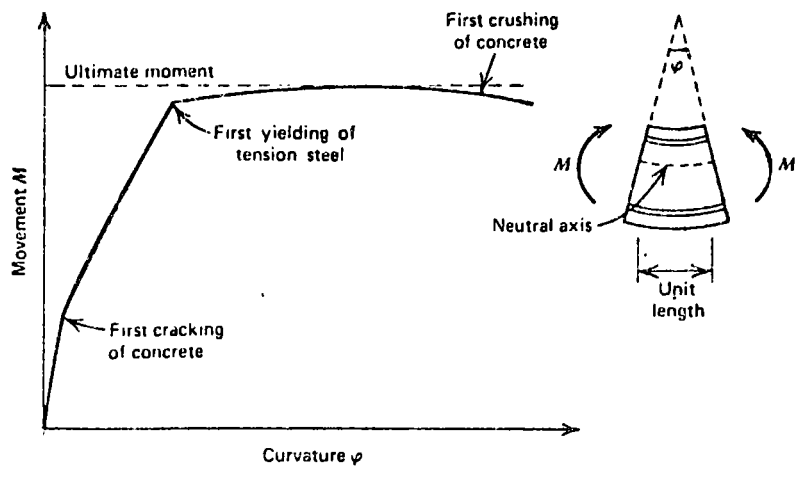
Los procedimientos de diseño de muros están dados, por ejemplo, en el ACI-71; si se trata de muros altos, tanto para flexocompresión como para cortante, se emplean los mismos métodos que para vigas y columnas; en muros cortos la resistencia a cortante es mayor y se dan expresiones particulares. Para refuerzo por cortante se requieren barras horizontales, pero en muros cortos es necesario proporcionar también refuerzo vertical, ver fig 19.

El apéndice A del ACI 71 da requisitos especiales también para muros de rigidez. Se requiere una cuantía mínima de refuerzo de 0.0025 tanto vertical como horizontal. Si la carga axial es menor que 40% de la balanceada se requiere un refuerzo mínimo de flexión de  $14/f_y$ ; si es mayor se exige que se coloquen columnas (elementos de extremos) con la capacidad suficiente para resistir la carga axial total sobre el muro. Esto último con la función de tener confinado el refuerzo de compresión.

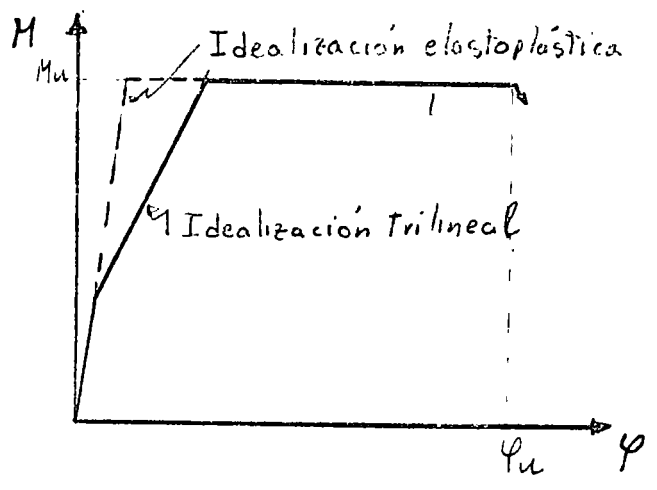
El diseño de estructuras prefabricadas así como el de estructuras especiales de concreto como tanques, chimeneas y muros de retención se trata en forma adecuada en la ref 7.

## Referencias

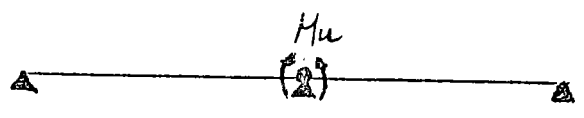
- 1 R Park y T Paulay "Reinforced Concrete Structures" J. Wiley 1975
- 2 A. H. Mattock "Redistribution of bending moments in reinforced concrete continuous beams" Proc The Institution of Civil Engineering" 13 may 1959
- 3 A. T. Derecho y M. Fintel "Earthquake Resistant Structures" Cap 12 de Handbook of Concrete Engineering, editado por M. Fintel, Van Norstrand, 1975
- 4 V. V. Bertero y E. Popov "Hysteretic Behavior of Ductile Moment-Resisting Reinforced Concrete Frame Components" Rep No EERC 75-16 Univ. California Berkeley, 1975
- 5 Comité ACI-ASCE 352 "Recommendations for Design of Beam-Column Joints in Monolithic Reinforced Concrete Structures" Journal ACI, 73, julio 1976
- 6 Comité ACI-ASCE 426 "The Shear Strength of Concrete Members. Slabs" Journal Struct Div ASCE vol 100 ST8, ago 1974 pp 1543-1591
- 7 D J Dowrick "Earthquake Resistant Design" J Wiley, 1977



a) Forma típica de la relación  $M-\varphi$



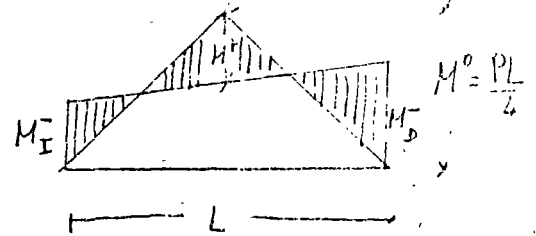
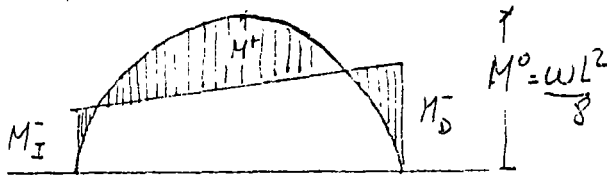
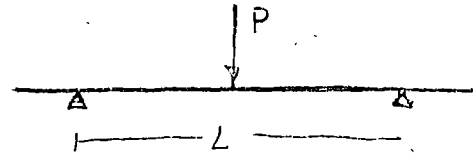
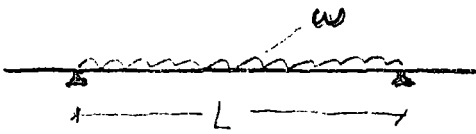
b) Idealizaciones de la  $M-\varphi$



c) Articulación Plástica

Fig 1 Relaciones momento-curvatura en elementos de concreto reforzado



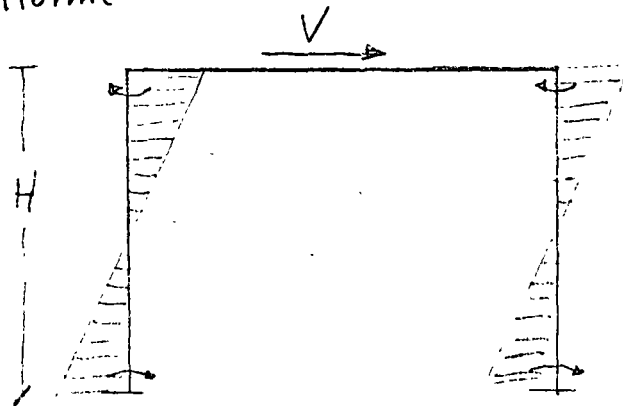


$$M_0 = \frac{M_I^- + M_D^-}{2} + M^+ = \frac{wL^2}{8}$$

$$M_0 = \frac{M_I^- + M_D^-}{2} + M^+ = \frac{PL}{4}$$

a) Viga con carga uniforme

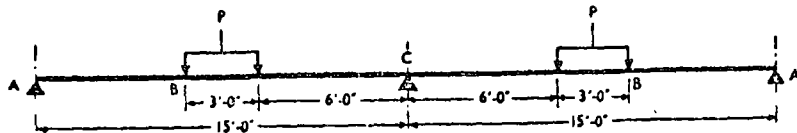
b) viga con carga concentrada



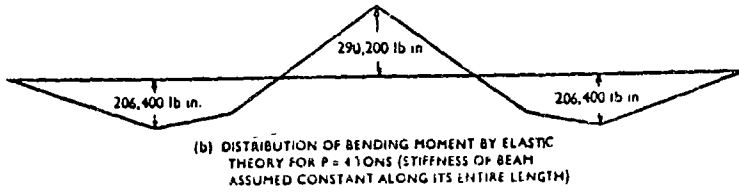
$$\Sigma M_c = V H$$

c) Marco con cargas laterales

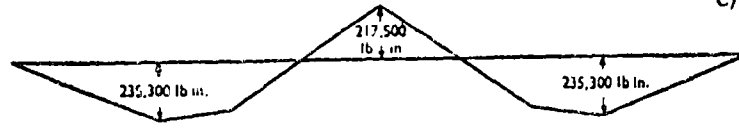
Fig 2 Momentos isostáticos



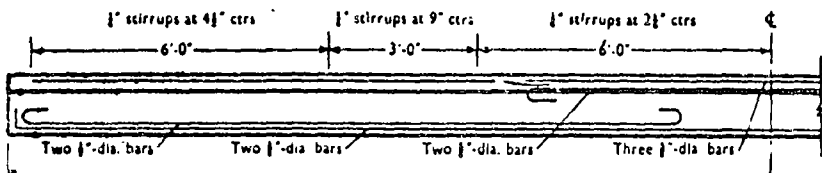
a) Forma de carga



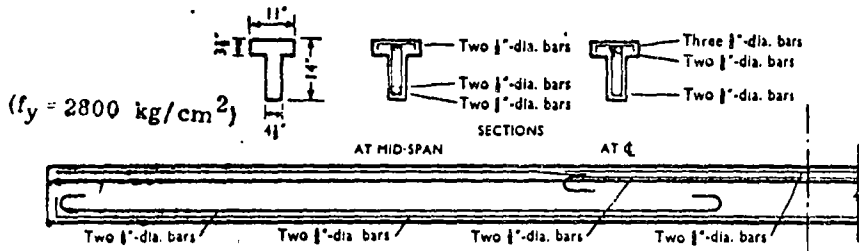
b) Diagrama de momentos según análisis elástico (P = 4 ton)



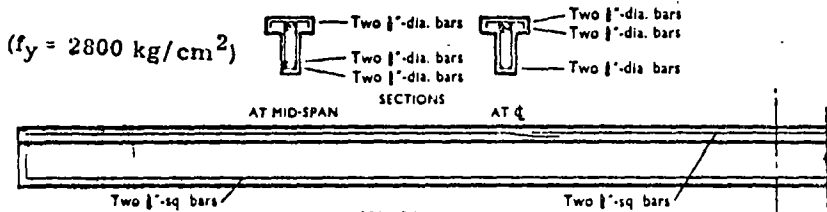
c) Diagrama de momentos considerando una redistribución de momentos de 25%



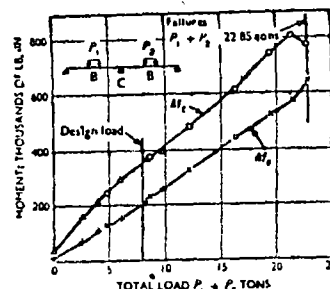
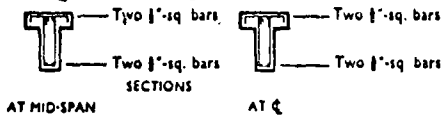
d) Viga NR1 reforzada según el diagrama de la fig b)



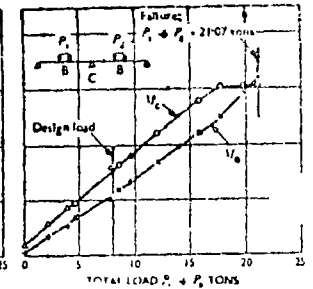
e) Viga R1 reforzada según el diagrama de la fig c)



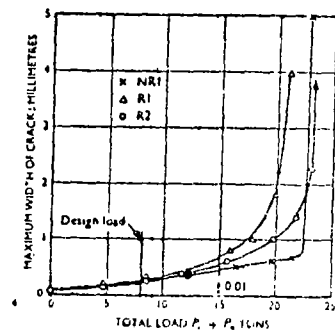
f) Viga R2 reforzada según el diagrama de la fig c) ( $f_y = 4000 \text{ kg/cm}^2$ )



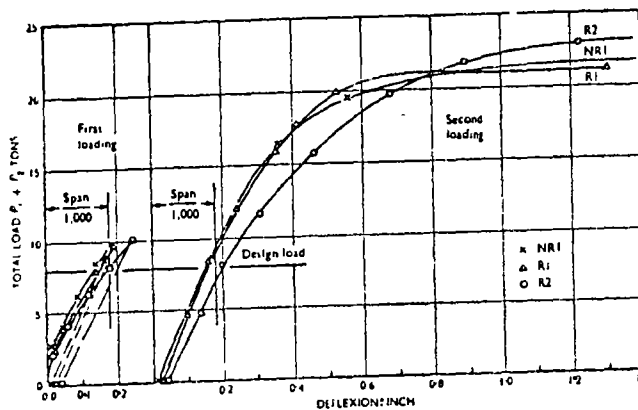
h) Momentos medidos en la viga NR1



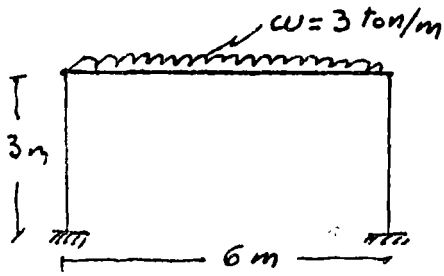
g) Momentos medidos en la viga R1



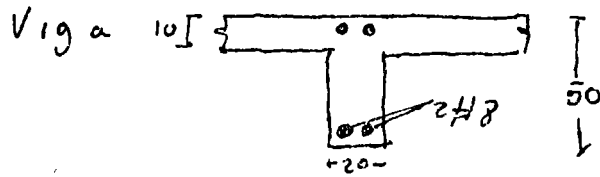
j) Anchos de grietas para las tres vigas



i) Curvas carga deflexión para las tres vigas



Columna : 40 x 40 cm



$I_{columna} = 2.13 \times 10^5 \text{ cm}^4$  (sección bruta)

$I_{viga} =$	{	$2.08 \times 10^5 \text{ cm}^4$	sección bruta de la viga rectangular	
		$4.45 \times \dots$	- - - - - T	
		$1.19 \dots$	- agrietada transformada de la viga rectangular	
		$2.17 \dots$	- - - - - T	

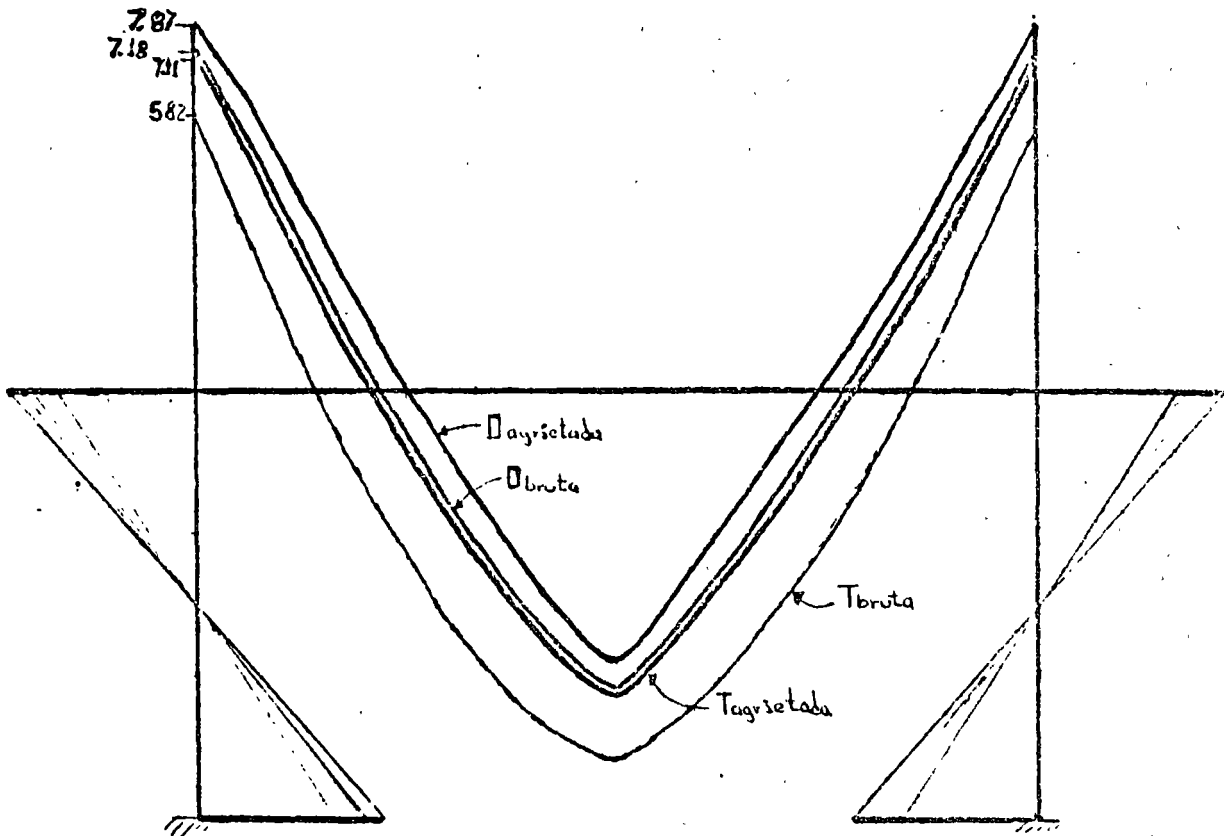
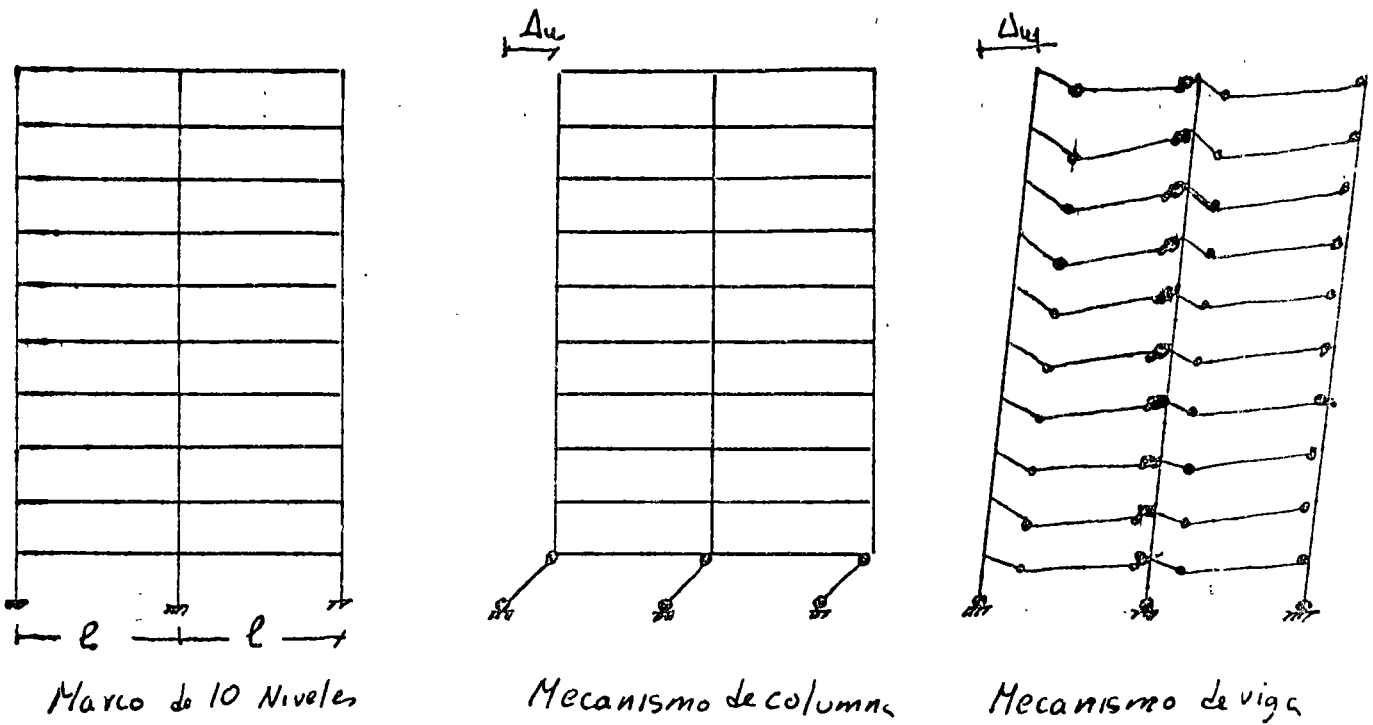


Fig 4 Comparación de diagramas de momentos obtenidos con distintas hipótesis sobre el momento de inercia de las vigas



$M = \frac{\Delta u}{\Delta y}$ , factor de ductilidad global para la estructura

$M' = \frac{\psi_u}{\psi_y}$ , factor de ductilidad local para la sección crítica

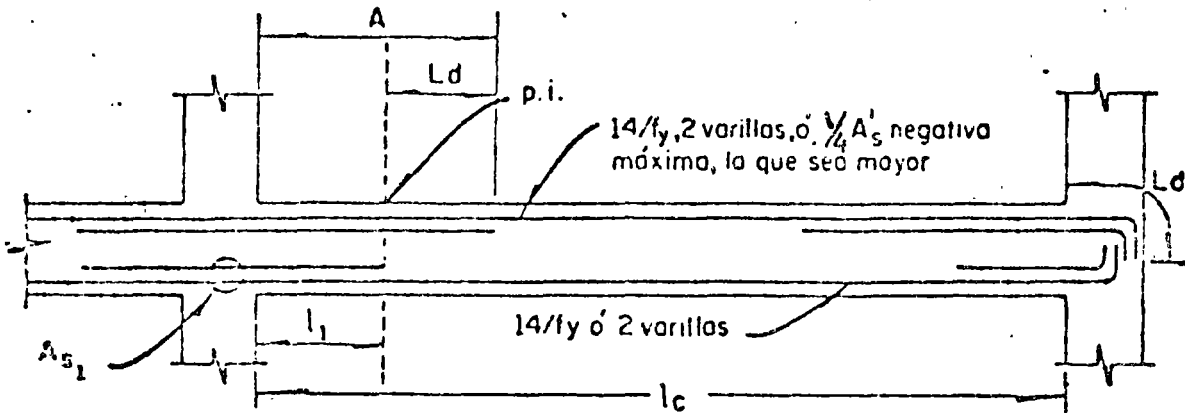
Para lograr  $M=4$  en un marco de  $n$  pisos se requieren los siguientes valores de  $M'$

$n$ de pisos	3	5	10	20
$M'$ para mecanismo de columna	37	62	125	250
$M'$ - - - viga	7.6	8	8.3	8.5

Fig 5 Relación entre ductilidad global y ductilidad local

(No puede cortarse más de la tercera parte del acero negativo en esta longitud que debe ser por lo menos de  $0.25 l_c$ )

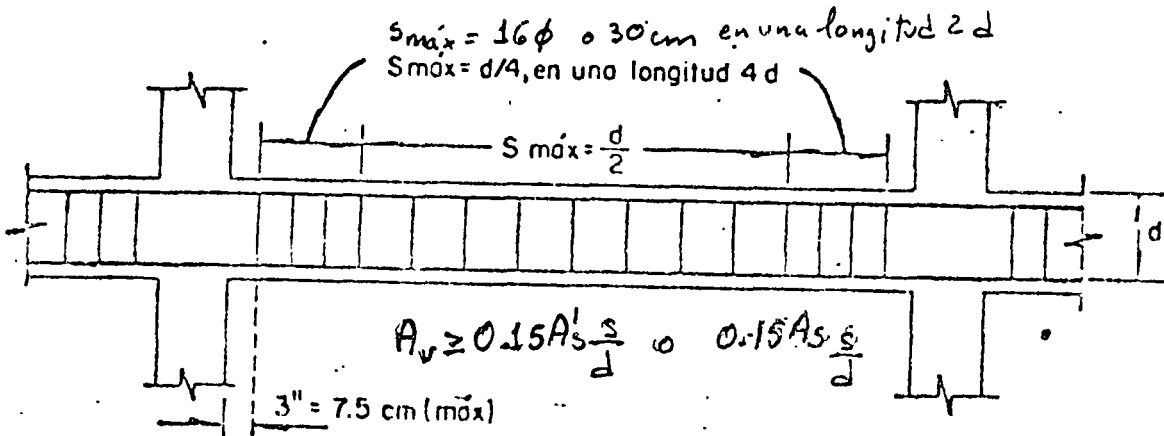
$$\rho \leq 0.5 \rho'_b$$



$A_{s1}$  Esta cantidad de acero debe ser tal que la resistencia por momento positivo sea por lo menos el 50% de la resistencia por momento negativo

$l_1$  Distancia requerida por momento más la longitud de anclaje  
 p.i. Punto de inflexión (posición más desfavorable)

a) Refuerzo longitudinal



b) Refuerzo transversal

Cuantía máxima de refuerzo de tensión para elementos de marcos dúctiles

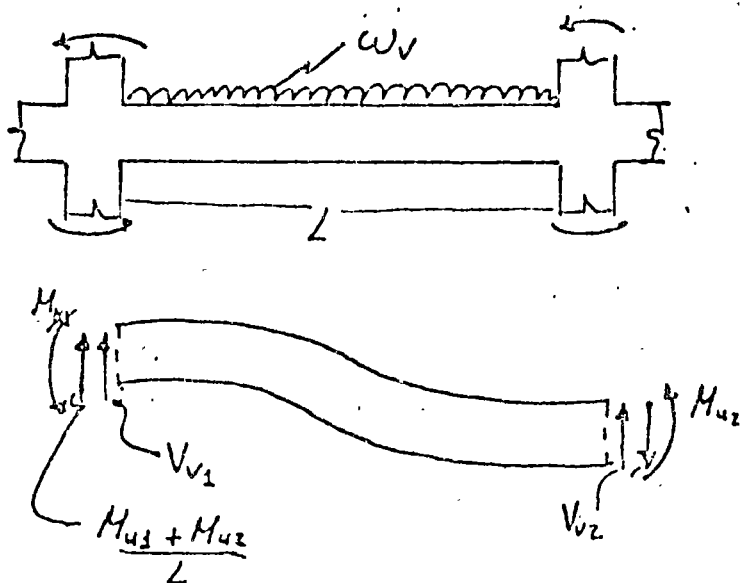
Valor de  $\rho = 0.5 \rho'_b$

$f_v$	$f'_c$	200	280	350
2800		0.0186	0.0247	0.0291
4200		0.0107	0.0143	0.0168

$\rho$  = cuantía de refuerzo de tensión,  $\rho = A_s/bd$   
 $\rho'$  = cuantía de refuerzo de compresión,  $\rho' = A'_s/bd$

c) Cuantías máximas

Fig 6 Refuerzo por ductilidad en vigas



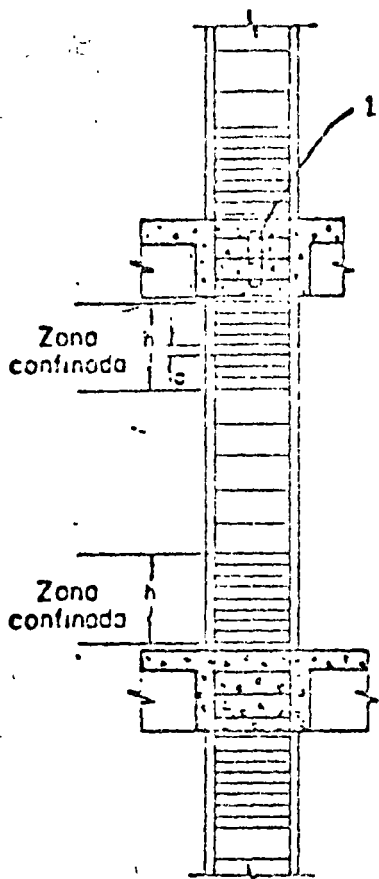
$$V_1 = V_{v1} + \frac{M_{u1} + M_{u2}}{L}$$

$$V_2 = V_{v2} - \frac{M_{u1} + M_{u2}}{L}$$

$M_{u1}, M_{u2}$  momentos últimos resistidos por las secciones

$V_{v1}, V_{v2}$  fuerzas cortantes debidas a las cargas verticales de diseño

Fig 7 Fuerzas cortantes de diseño en vigas



$$0.01 \leq \rho \leq 0.06$$

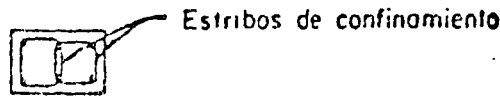
$$\sum M_{Rc} \geq \sum M_{Rv}$$

Si  $P \leq 0.4 P_b$  como vigas

Si  $P > 0.4 P_b$  : confinamiento

1. El refuerzo de la intersección puede separarse  $2a$ , cuando hay vigas en los cuatro lados; para otras condiciones la separación debe ser  $a$

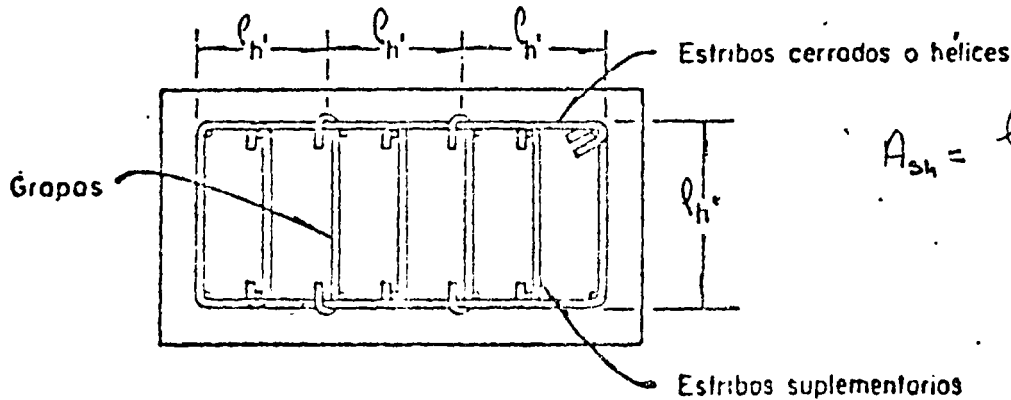
$$\rho_s = 0.45 \left( \frac{A_g}{A_c} - 1 \right) \frac{f'_c}{f_y} \geq 0.12 f'_c / f_y$$



Estribos de confinamiento

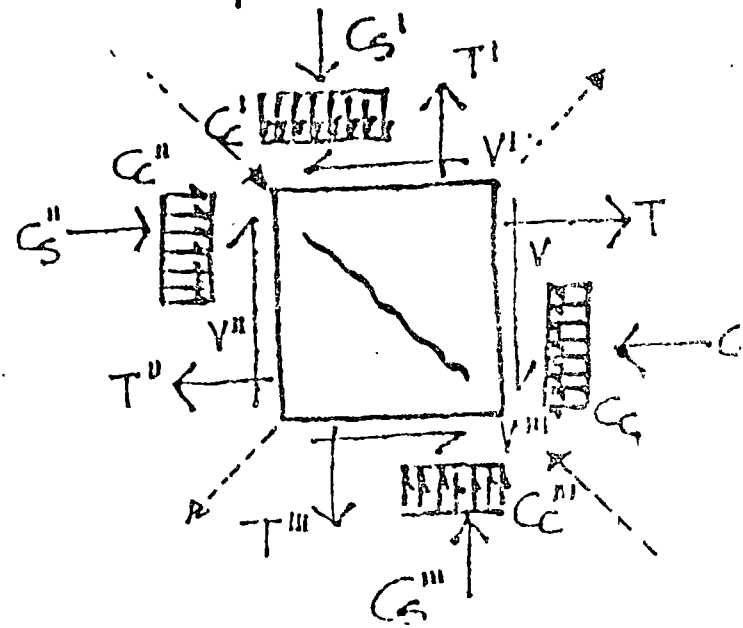
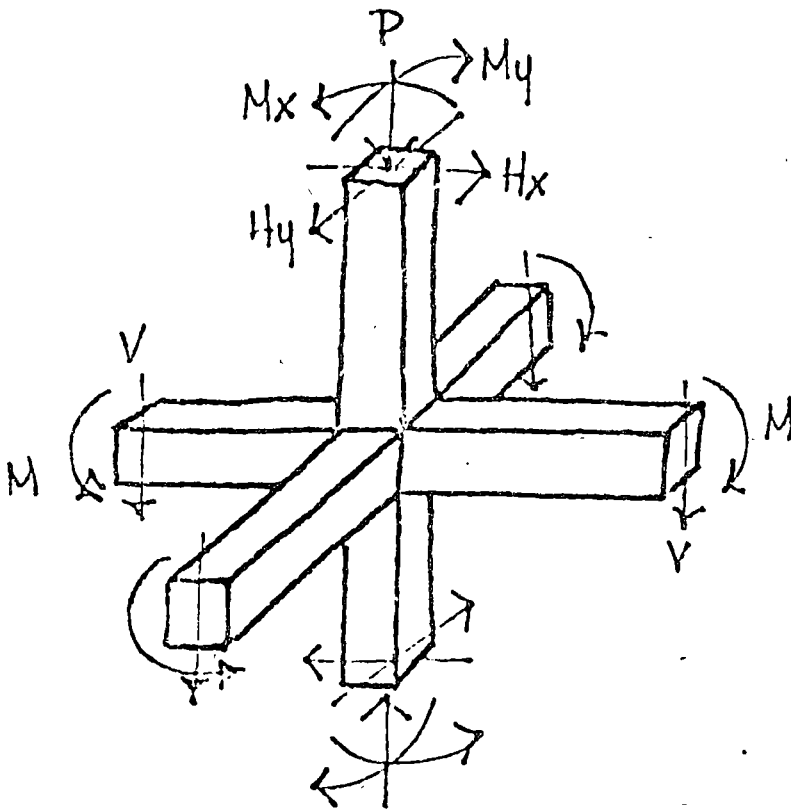
$a$  = Separación del refuerzo transversal

$h$  = Dimensión máxima de la columna, pero no menor de 45 cm, ni de un sexto de la altura libre



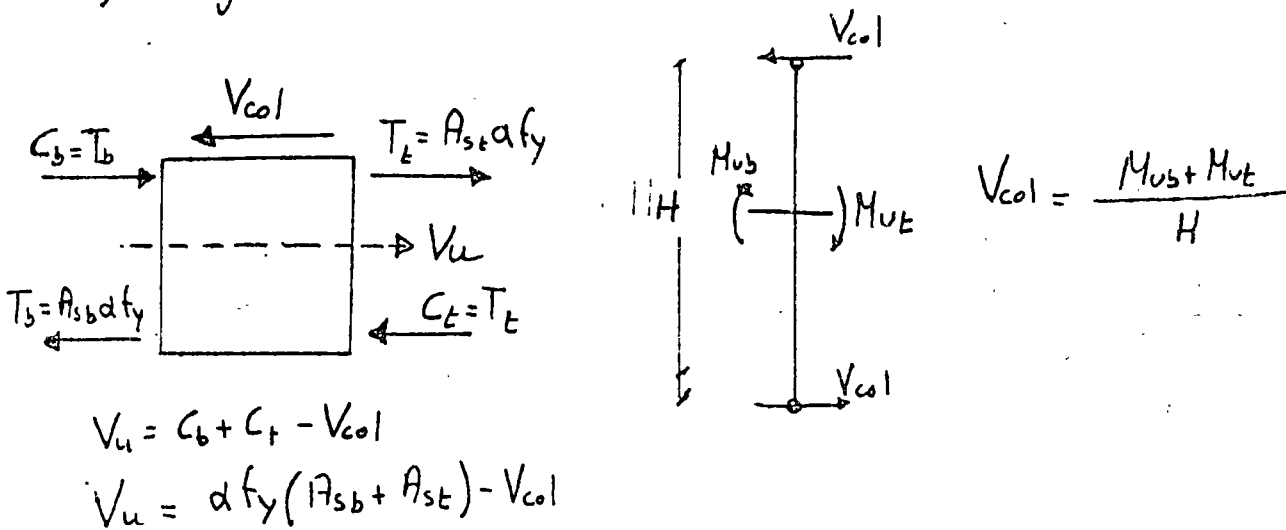
$$A_{sh} = \frac{l_h \cdot l_s \cdot S_n}{z}$$

Fig 8 Refuerzo por ductilidad en columnas



b) Fuerzas aplicadas en la junta  
(con líneas punteadas las resultantes que causan tensión diagonal)

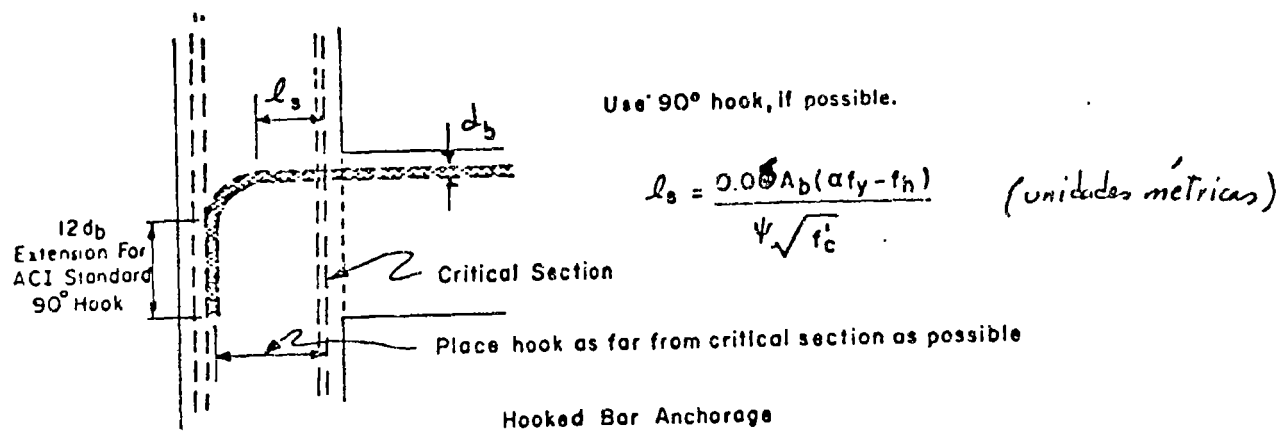
a) Cargas en la conexión



c) Fuerza cortante de diseño en la unión

Fig 9 Diseño por cortante de la unión viga columna





$A_b = \text{área de la barra}$

$\psi = 1.4 \quad (\text{en condiciones usuales})$

$$f_h = 185(1 - 0.012d_b)\psi\sqrt{f'_c}$$

Fig 10 Requisitos de anclaje en la unión

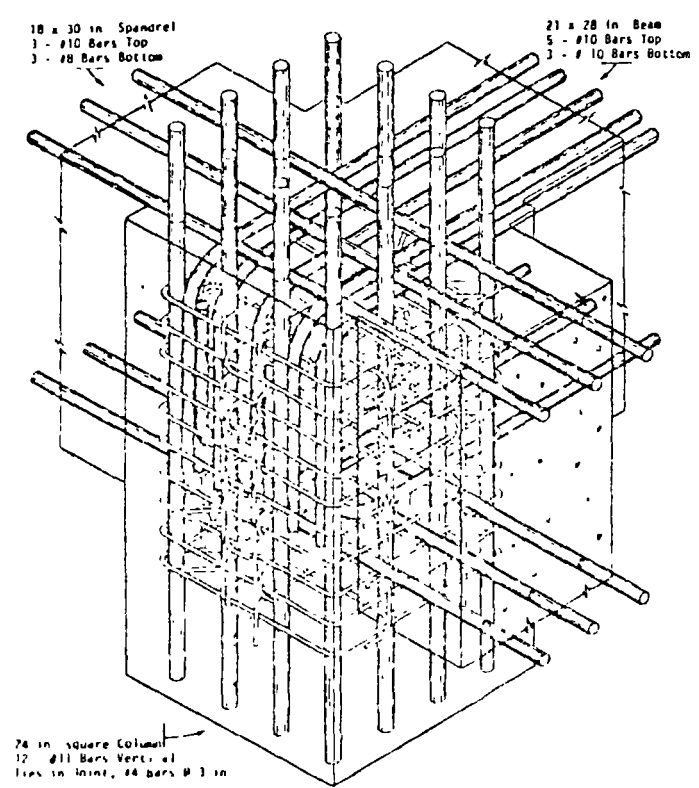


Fig 11 Refuerzo de unión de acuerdo con los requisitos del Com ACI-ASCE 352

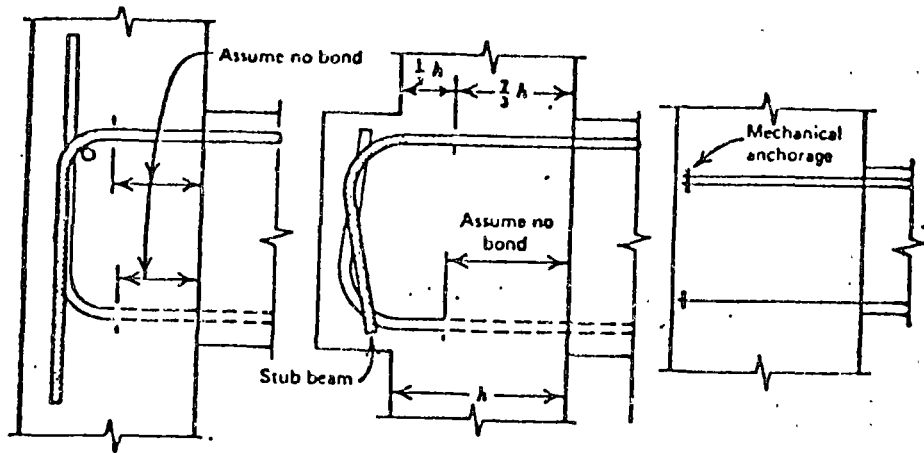
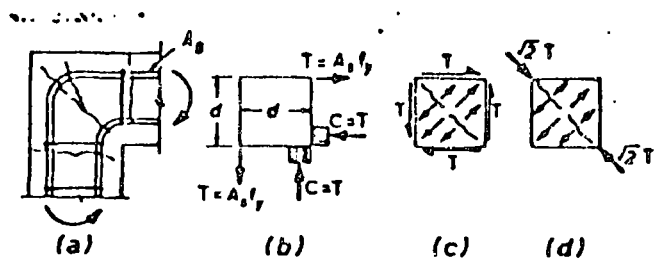
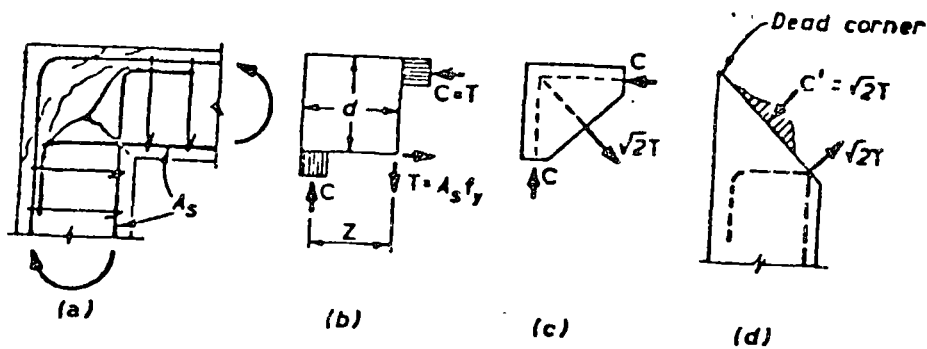


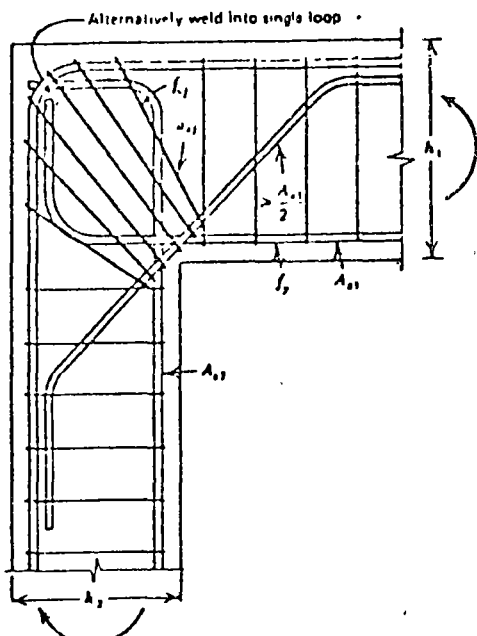
Fig 12 Formas alternativas de anclaje del refuerzo en las uniones



a) estremos al cerrarse la unión



b) retorno al abrirse la unión



c) Refuerzo recomendable en uniones de rodilla para claros grandes

Fig 13 Condiciones de estremos y modalidades de refuerzo en juntas de rodillas

c) fresa plana alinhada

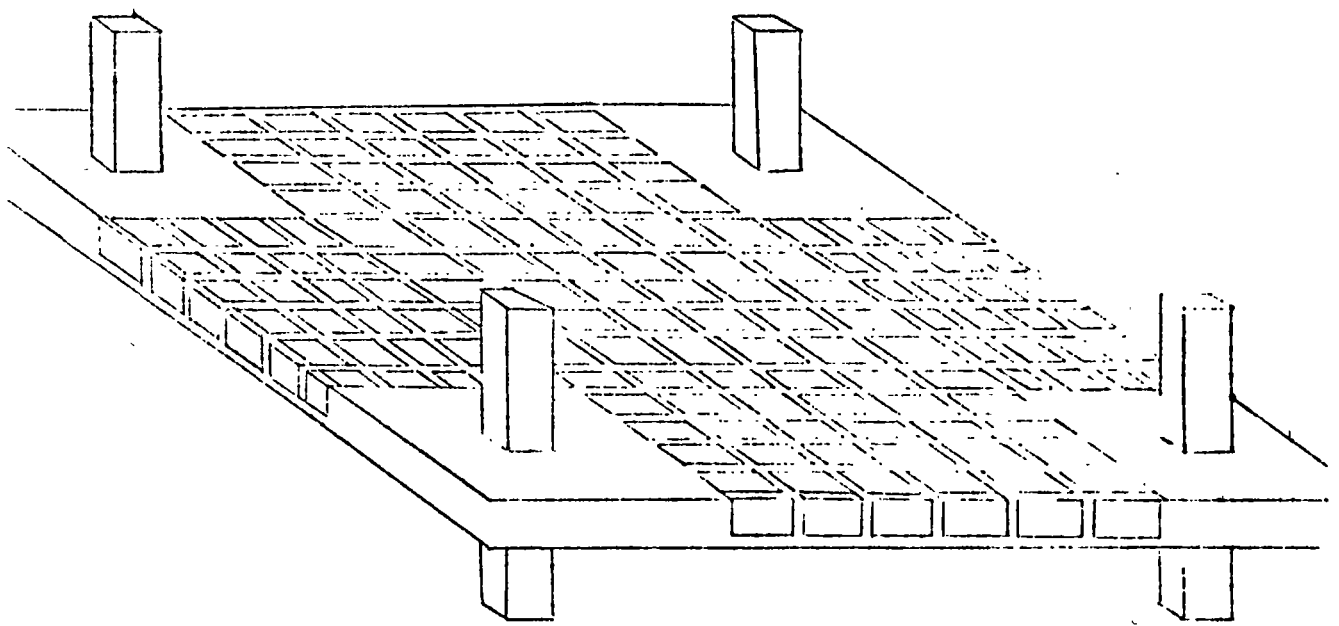
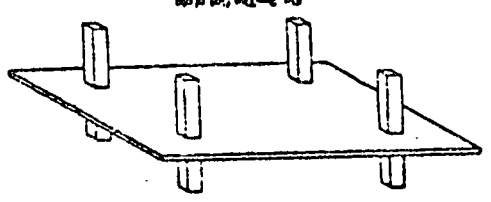
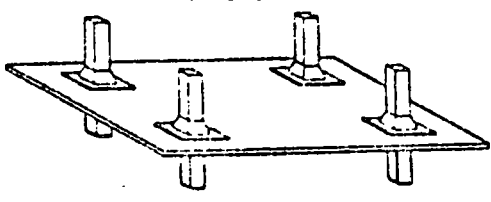


Fig 2 - The first pass

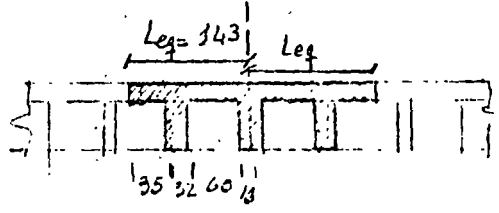
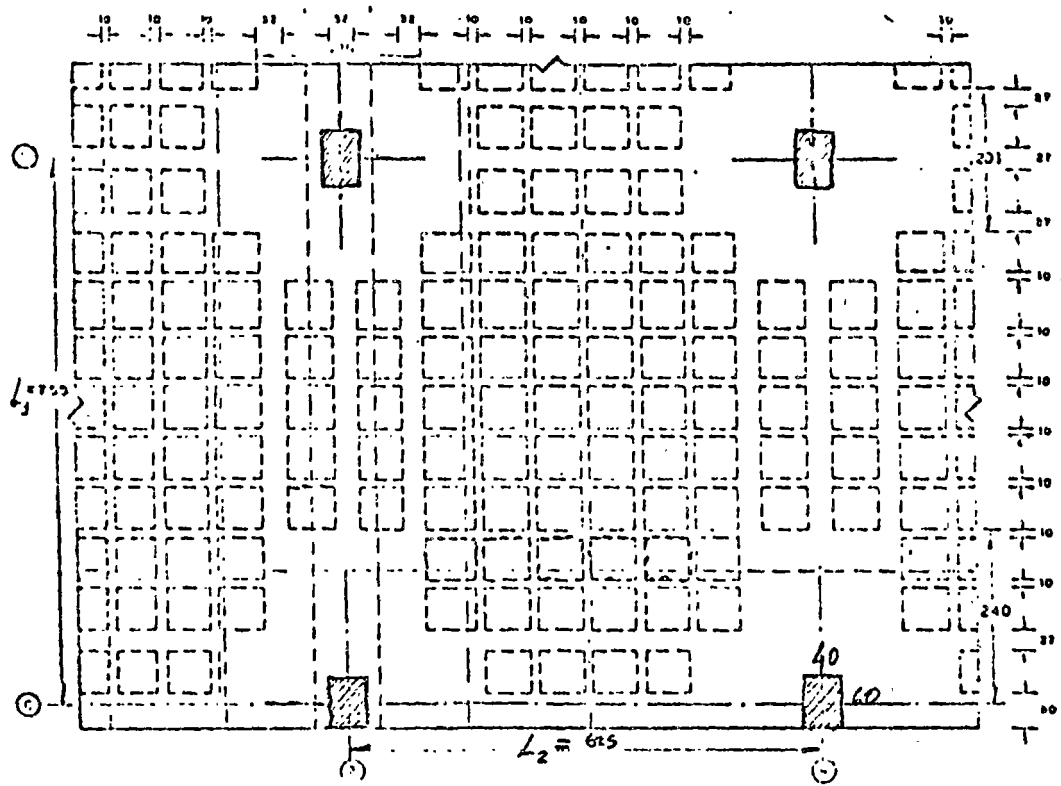


b) Placa plana

Fig 1 - The first tool



a) fresa plana com eixo paralelo

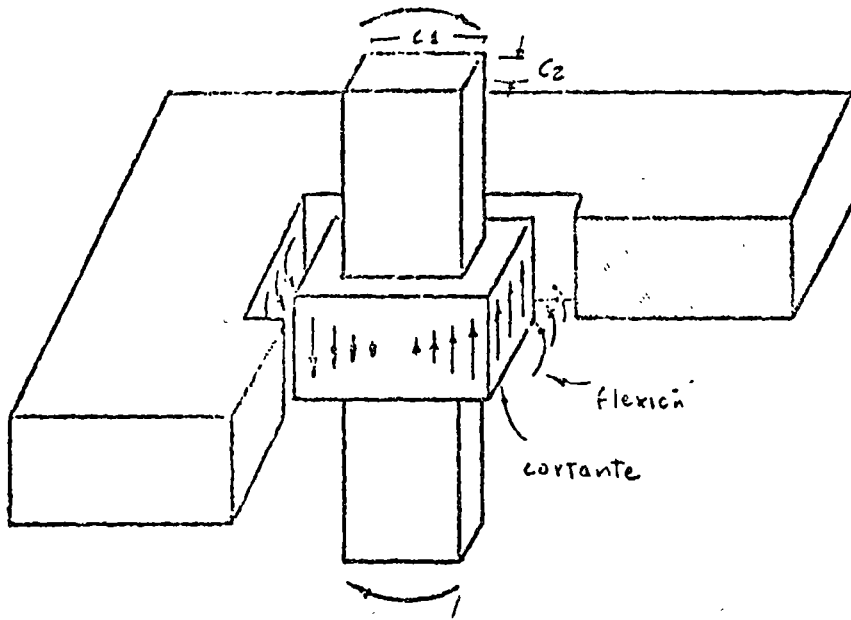


Viga equivalente

$$L_{eq} = \frac{0.5 l_2}{1 + 1.67 l_2 / l_1} + 0.3 c_2$$

$$L_{eq} = \frac{0.5 \times 625}{1 + 1.67 \times \frac{625}{750}} + 0.3 \times 40 = 143 \text{ cm}$$

Fig 15. Viga equivalente para análisis por cargas laterales

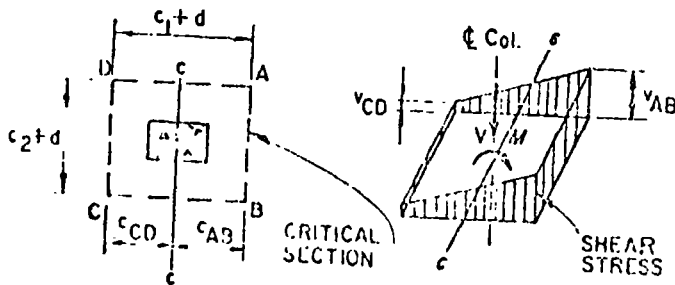


Por cortante  $\alpha M_0$

$$\alpha = 1 - \frac{1}{1 + \frac{2}{3} \sqrt{\frac{c_1 + d}{c_2 + d}}}$$

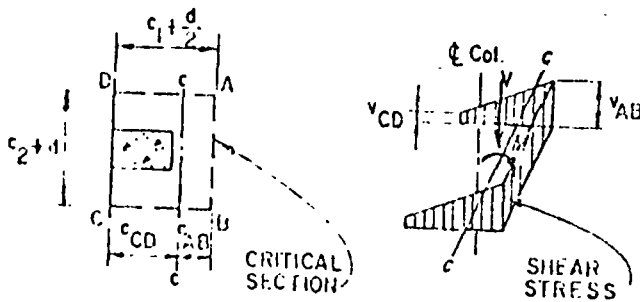
a) Fuerzas en la conexión

Por flexión  $(1 - \alpha)M_0$



(a) INTERIOR COLUMN

$$V_{AB} = \frac{V}{A_c} + \frac{\alpha M c_{AB}}{J_c}$$



(b) EDGE COLUMN

$$V_{CD} = \frac{V}{A_c} - \frac{\alpha M c_{AB}}{J_c}$$

b) Distribución de esfuerzos cortantes en la zona crítica

Fig 16. Transmisión de momentos de columna a losa

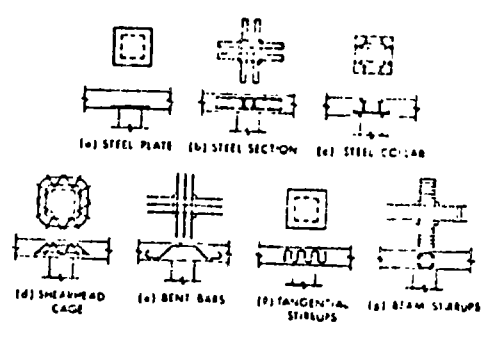
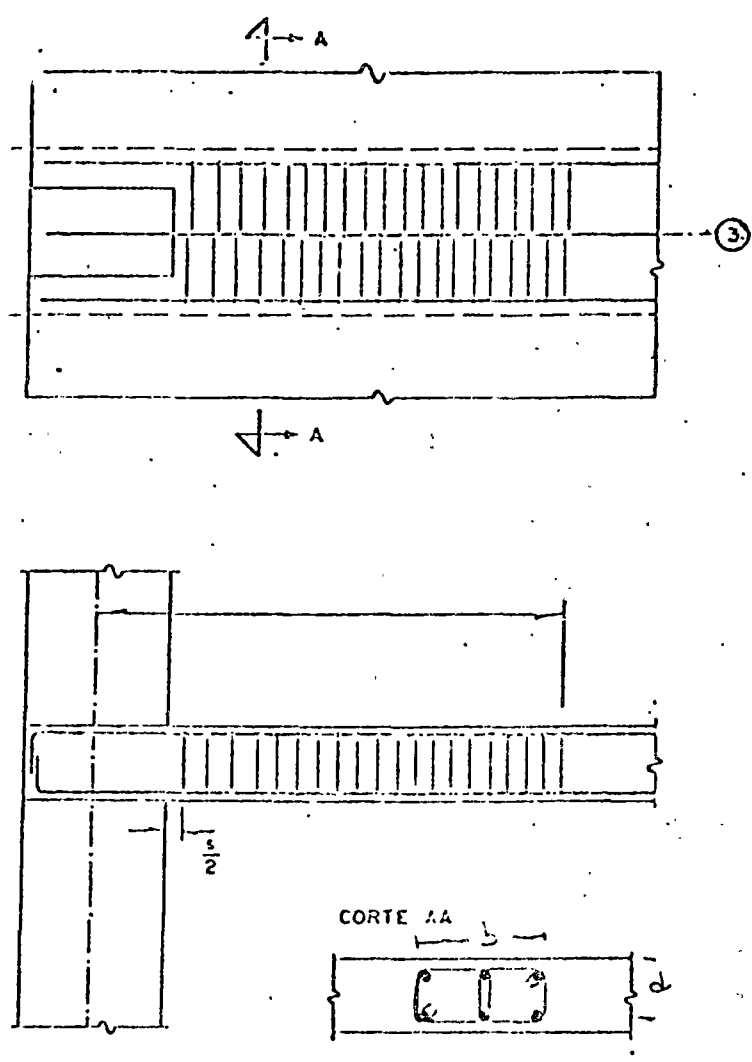


Fig 17 Modularities de refuerzo por constante en losas planas



$$V_u = \frac{V}{A_c} + \frac{\alpha M_c}{Z_c}$$

$$V_c = \sqrt{f_c}$$

si  $V_u > V_c$

Se requiere

$$V_s = V_u - \frac{V_c}{2}$$

$$V_s = \frac{A_s f_y}{s b}$$

No se admite

$$V_u > 1.5 \sqrt{f_c}$$

Fig 18 Diseño de refuerzo por constante en losas planas



centro de educación continua  
división de estudios superiores  
facultad de ingeniería, unam



IV CURSO INTERNACIONAL DE INGENIERIA SISMICA

DISEÑO SISMICO DE EDIFICIOS

EJEMPLOS

DR. ROBERTO MELI

AGOSTO, 1978

EJEMPLO 4

DISEÑO DE UN MURO DE RIGIDEZ

El muro del eje 2 de la estructura mostrada debe ser capaz de resistir en planta baja la siguiente combinación de fuerzas de diseño (últimas)

Por cargas verticales  $P_u = 1970 \text{ ton}$   
 Por mismo  $\begin{cases} P_u = 1710 \text{ ton} \\ M_u = 6630 \text{ ton-m} \\ V_u = 430 \text{ ton} \end{cases}$

$f'_c = 280 \text{ Kg/cm}^2$       $f_y = 4200 \text{ Kg/cm}^2$

La sección propuesta en el análisis es la mostrada en el croquis

a) Diseño de la columna

Si  $P_u > 0.4 P_b$  hay que diseñar las columnas para que tomen toda la carga vertical debida a mismo y proporcionales refuerzo transversal para confinamiento igual al que se requiere para columnas de marcos

La carga axial balanceada puede determinarse en forma aproximada considerando el refuerzo de la columna concentrado en su centroide y despreciando el refuerzo en el muro

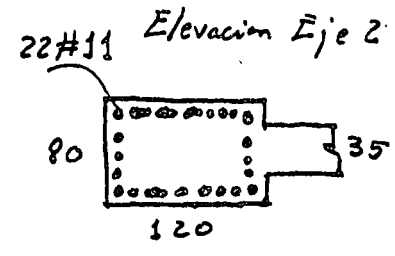
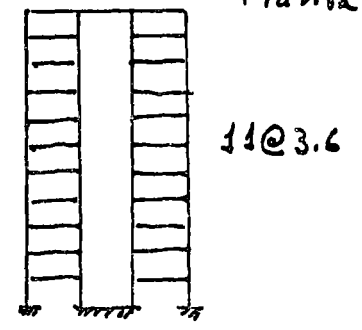
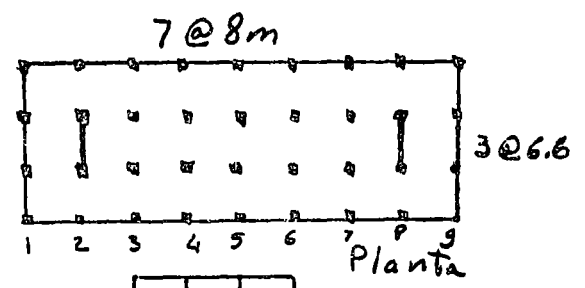
Tanto el refuerzo de tensión como el de compresión fluyen, por tanto  $T_s = -C_s$

$$P_b = C_c = \phi [0.85 f'_c \times 0.85 k_{ud} \times t + 0.85 f'_c \times h(b-t)]$$

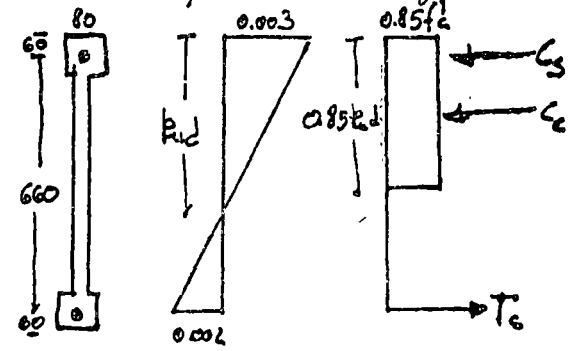
$$k_{ud} = (660 + 60) \frac{3}{5} = 432 \text{ cm}$$

$$P_b = 0.7 [0.85 \times 280 \times 0.85 \times 432 \times 35 + 0.85 \times 280 \times 120(80 - 35)] = 3070 \text{ ton}$$

$$0.4 P_b = 1230 \text{ ton} < P_u \Rightarrow \text{requiere diseño especial}$$



Columna de Confinamiento





Hay que revisar que cada columna sea capaz de resistir la carga axial total debida a carga vertical más sismo  $P_u = 1710 \text{ tm}$

Revisando la capacidad de una columna de  $80 \times 120$  con  $22 \# 11$   
 $A_g = 220 \text{ cm}^2$  y una excentricidad mínima  $e/t = 0.10$

Del diagrama de interacción del 5P-17

para  $g = 0.8$   $e/t = 0.10$   $\rho_c m = \frac{220}{120 \times 80} \frac{4200}{0.85 \times 280} = 0.4$

Resulta  $K = 0.65 \Rightarrow P_R = 0.65 \times 120 \times 80 \times 280 = 1750 \text{ ton} > 1700 = P_u$

b) Refuerzo transversal en la columna

Se requiere una cantidad que sea la menor entre los siguientes

$$\rho_s = 0.45 \left( \frac{A_g}{A_c} - 1 \right) \frac{f'_c}{f_y} = 0.45 \left( \frac{80 \times 120}{73 \times 111} - 1 \right) \frac{280}{4200} = 0.0055$$

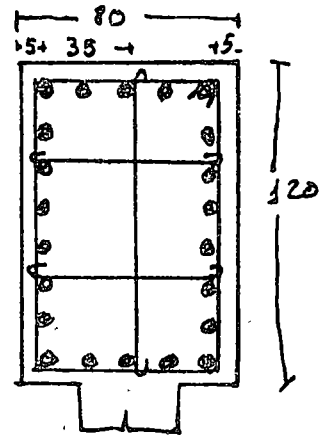
$$\rho_s = 0.12 \frac{f'_c}{f_y} = 0.12 \times \frac{280}{4200} = 0.008 \text{ rige}$$

Usando estribos y ganchos  $\#4$  con la distribución mostrada en la figura de manera que

$$l_n = 35 \text{ cm}$$

$$S_n = \frac{2 A_v}{l_n \rho_s} = \frac{2 \times 1.27}{35 \times 0.008} = 9.5 \text{ cm}$$

Para el estribo usará  $\#4 @ 9$



c) Refuerzo en el muro

Por cortante  $\sigma_u = \frac{V_u}{\phi A_c t} = \frac{430000}{0.85 \times 0.8 (80 + 120) 35} = 23.2 \text{ Kg/cm}^2$

Estuerzo cortante resistente del concreto; el menor entre  $\sigma_c = 0.9 \sqrt{f'_c} + 0.25 \frac{M_u}{t l_w} = 0.9 \sqrt{280} + \frac{0.25 \times 1060000}{35 \times 780}$

$$\sigma_c = 15.1 + 9.7 = 24.8 \text{ Kg/cm}^2$$

Como  $M_u$  es Tama el que corresponde a la combinación que proporciona un valor menor.

$$2) \sigma_c = 0.16 \sqrt{f'_c} + \frac{l_w (0.33 \sqrt{f'_c} + 0.2 \frac{M_u}{t l_w})}{\frac{M_u}{V_u} - \frac{l_w}{2}} = 0.16 \sqrt{280} + 780 \left[ \frac{0.33 \sqrt{280} + 0.2 \times 1060000 / (780 \times 35)}{\frac{6630}{431} - \frac{8.4}{2}} \right] = 2.7 + 9.3 = 12 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\text{rige } \sigma_c = 12 \text{ Kg/cm}^2 < \sigma_u$$

Se requiere refuerzo horizontal por cortante dado por

$$A_v/s = (\sigma_u - \sigma_c) \frac{b_w}{f_y}$$

$$\rho_h = \frac{A_v}{s b_w} = \frac{\sigma_u - \sigma_c}{f_y} = \frac{23.2 - 12}{4200} = 0.00267 > \rho_{min} = 0.0025$$

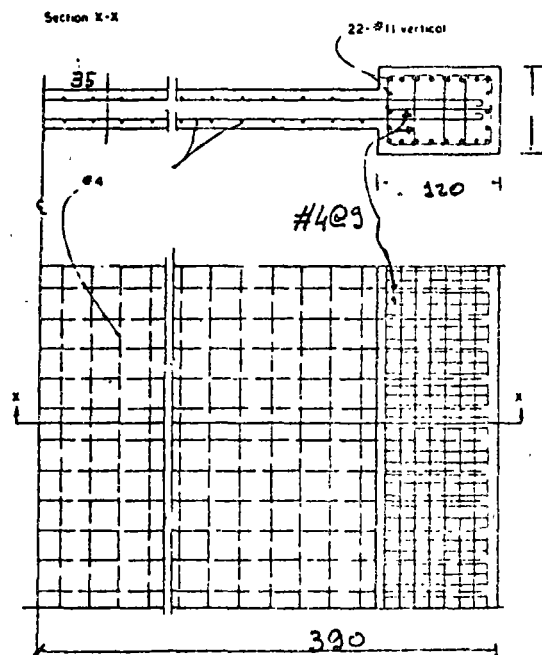
$$\text{Usando una doble malla \#4 } A_v = 2 \times 1.27 = 2.54 \text{ cm}^2$$

$$s = \frac{A_v}{\rho_h b_w} = \frac{2.54}{0.00267 \times 35} = 26.8 \text{ cm}$$

Se empleará 2 #4 @ 25 cm

El mismo refuerzo se colocará en posición vertical donde se requiere  $\rho_v = 0.0025$

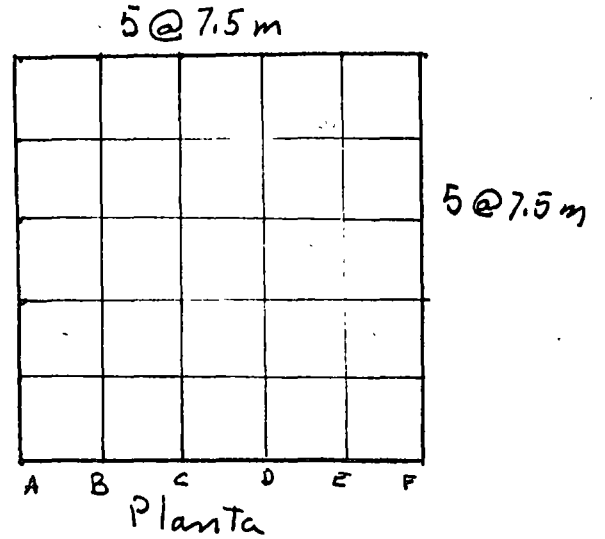
El refuerzo quedará como en la figura



EJEMPLO 5

DISEÑO DE UNA LOSA PLANA ALIGERADA  
 Se requiere el Reglamento D.F. EL ACI  
 no tiene recomendaciones para el diseño  
 por nismo de este sistema constructivo

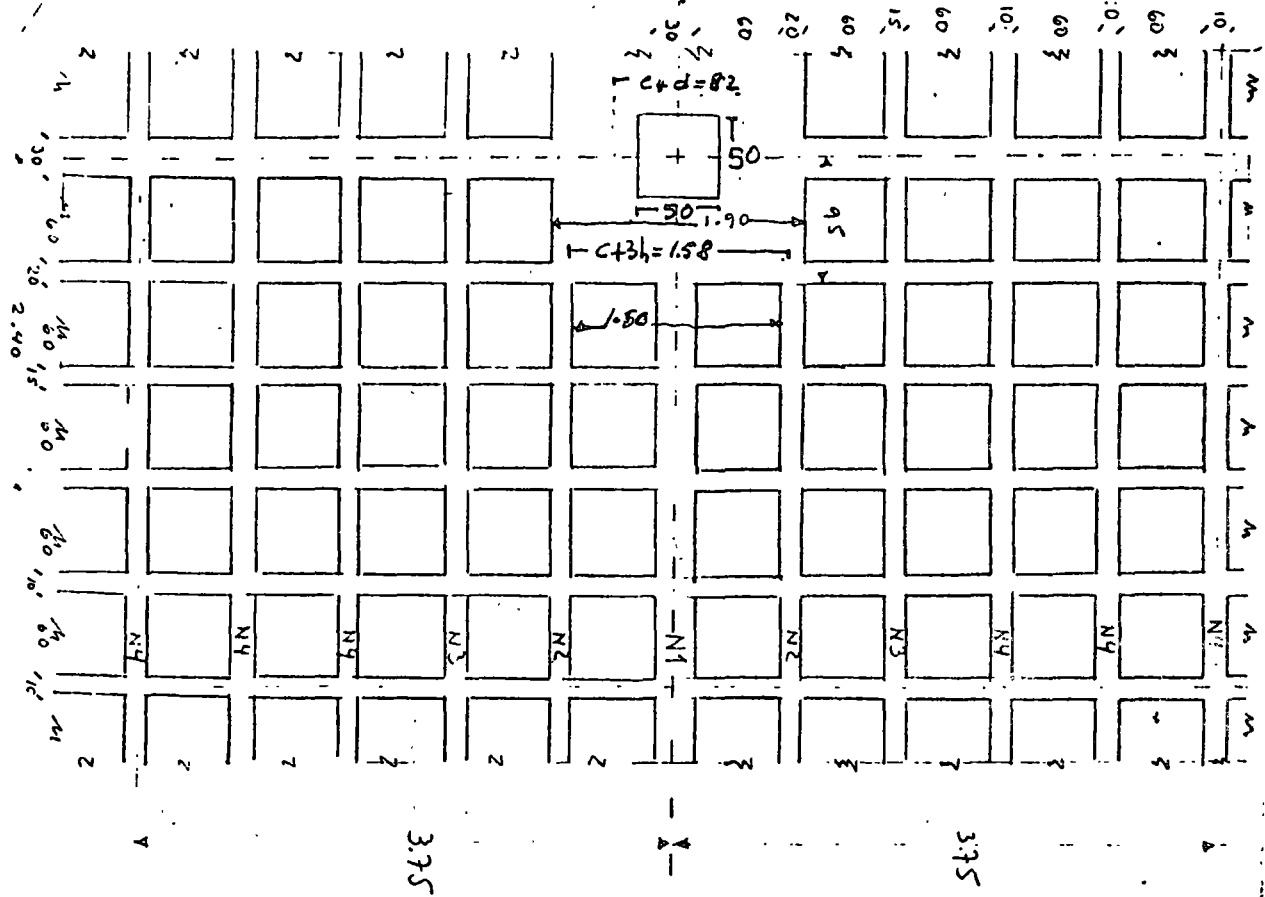
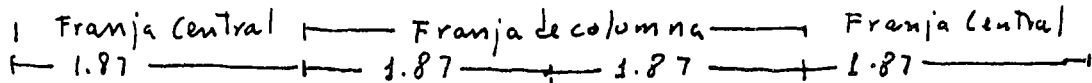
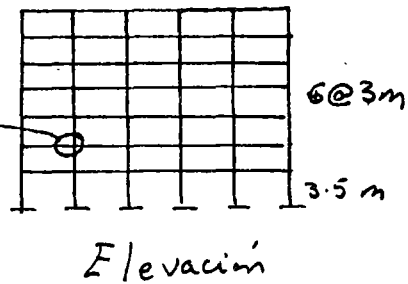
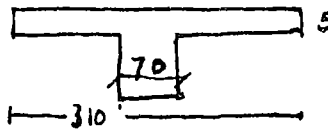
$f'_c = 200 \text{ Kg/cm}^2$      $f_y = 4200 \text{ Kg/cm}^2$   
 Peralte de la losa = 36 cm  
 - efectivo = 32 cm



Viga equivalente para análisis

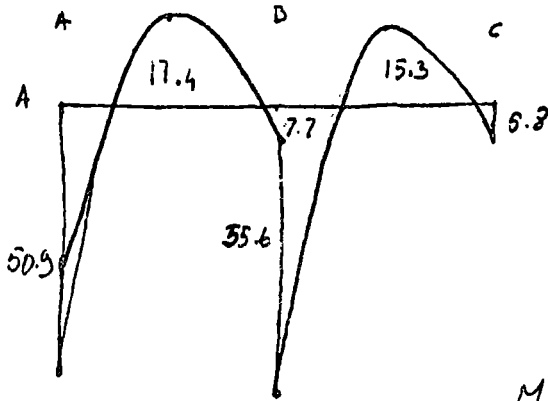
$0.5L_e = \frac{0.5L_c}{1+1.67L_c/L_i} + 0.3C = \frac{0.5 \times 7.5}{1+1.67} + 0.3 \times 5 \text{ Conexión a distan}$

$0.5L_e = 1.55$  ;  $L_e = 3.10$

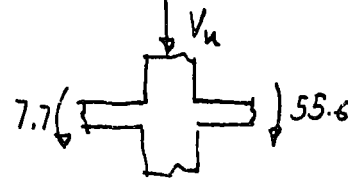


Distribución de nervaduras en un tablero típico

Momentos de diseño (últimos) para la condición carga vertical más sísmica



Fuerzas en la conexión



Resultado  $V_u = 58.9 \text{ Ton}$  Fuerza constante directa

Momento de desbalanceo

$$M_0 = 55.6 - 7.7 = 47.9 \text{ Ton-m}$$

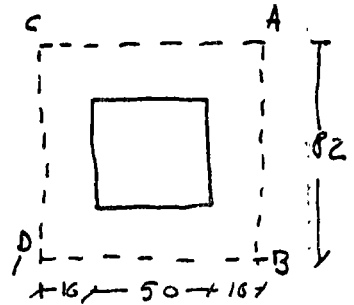
a) Diseño por cortante de la conexión

$$A_c = 4(c+d)d = 4 \times 82 \times 32 = 10500 \text{ cm}^2$$

$$J_c = \frac{2}{3}(c+d)^3 d + \frac{1}{6}(c+d)d^3 = 12,200,000 + 470,000$$

$$J_c = 12.6 \times 10^6 \text{ cm}^4$$

$\alpha = 0.4$  para columnas cuadradas



$$V_{AB} = \frac{V_u}{A_c} + \alpha \frac{M_u}{J_c} \left( \frac{c+d}{2} \right) =$$

$$= \frac{58900}{10700} + 0.4 \times \frac{47.9 \times 10^5}{12.6 \times 10^6} \left( \frac{82}{2} \right) = 5.5 + 6.2 = 11.7 \text{ Kg/cm}^2$$

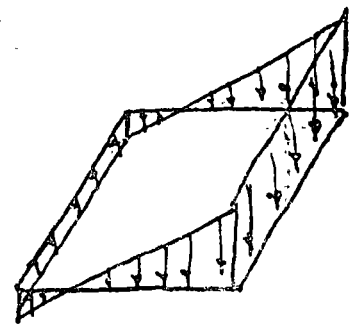
$$V_{CD} = 5.5 - 6.2 = -0.7$$

Esfuerzo resistente del concreto

$$V_c = F_R \sqrt{f_c^*} \quad f_c^* = 0.8 f_c' \quad F_R = 0.8 \text{ para constante}$$

$$V_c = 0.8 \sqrt{160} = 10.1 \text{ Kg/cm}^2 < 11.7 \quad \text{Se requiere refuerzo}$$

El refuerzo se colocará en una viga ahogada en la losa, con un ancho  $c+d$  y un peralte  $d$



La viga deberá ser capaz de resistir una fuerza cortante total

$$V_u = V_{uAB} \cdot d = V_u (c+d) = 11.8 \times 82 \times 32$$

$$V_u = 31 \text{ ton}$$

El concreto de la viga resiste un esfuerzo

$$V_c = 0.5 F_c \sqrt{f_c} = 5.05 \text{ Kg/cm}^2$$

Se requieren estribos para resistir una fuerza

$$V_s = V_u - V_c = 31000 - 5.05 \times 82 \times 32 = 17.8 \text{ ton}$$

Usando E#2.5 de 4 varillas  $A_v = 4 \times 0.49 = 1.96 \text{ cm}^2$

$$s = \frac{F_c A_v t_y d}{V_u - V_c} = \frac{0.8 \times 1.96 \times 4200 \times 32.5}{17800} = 12 \text{ cm}$$

$$s_{\min} = d/2 = 16 \text{ cm} > 12$$

$$s_{\min} = \frac{F_c A_v t_y}{3.5 b} = \frac{0.8 \times 1.96 \times 4200}{3.5 \times 82} = 23 \text{ cm} > 12 \text{ cm}$$

Se usarán E#2.5 de 4 varillas @ 12 cm

b) Diseño por flexión de la losa en la sección del eje B

Se tiene que resistir un momento negativo

$$M_u = 55.6 \text{ ton-m}$$

De este

$$75\% \text{ en franja de columna} = 0.75 \times 55.6 = 41.7 \text{ ton-m}$$

$$25\% \text{ - - - central} = 0.25 \times 55.6 = 13.9 \text{ ton-m}$$

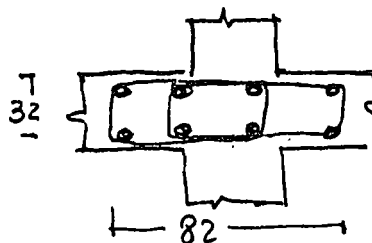
Además en un ancho  $c+3h$  debe resistirse  $(1-\alpha)$  veces el momento de

$$\text{desbalanceo} = 0.6 \times 47.9 = 28.7 \text{ ton-m}$$

La franja  $c+3h = 50 + 3 \times 36 = 158 \text{ cm}$  queda dentro de la zona maciza  
el área de acero necesaria resulta (de gráficas de diseño por flexión)

$$A_s = 25.7 \text{ cm}^2 \quad 9\#6 = 25.7 \text{ cm}^2$$

En el resto de franja de columna debe resistirse  $41.7 - 28.7 = 13 \text{ ton-m}$



Este momento debe ser resistido por las 4 nervaduras de esta zona (2 de 16 cm y 2 de 15 cm)

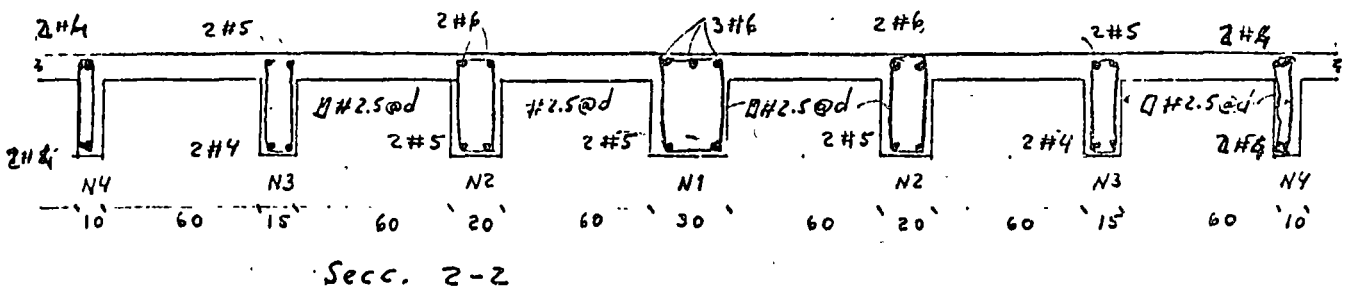
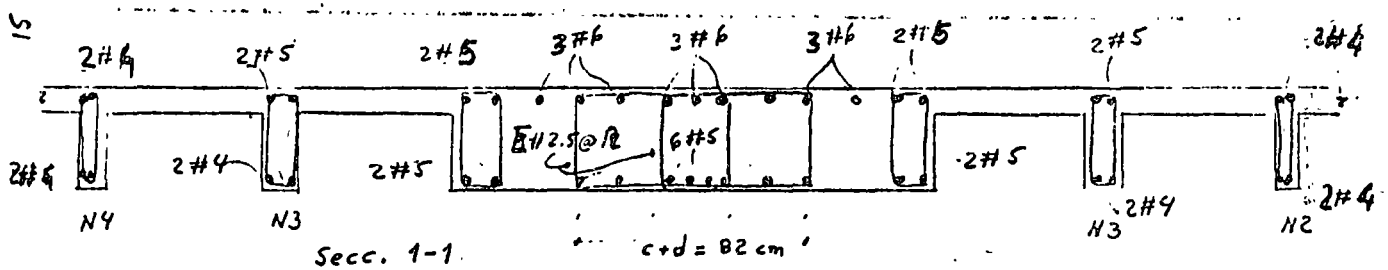
para resistir ese momento se requiere una cantidad de refuerzo de 0.0055 que corresponde a 2.9 cm<sup>2</sup> en las nervaduras de 16 cm  
a 2.7 cm<sup>2</sup> - - - - - 15 cm

En la franja central para resistir el momento negativo de 13.9 ton-m se tienen 5 nervaduras de 10 cm y se requiere una cantidad de refuerzo de  $p = 0.008$ , que equivale a un área de refuerzo en cada nervadura de  $A_s = 0.008 \times 10 \times 32.5 = 2.6 \text{ cm}^2$

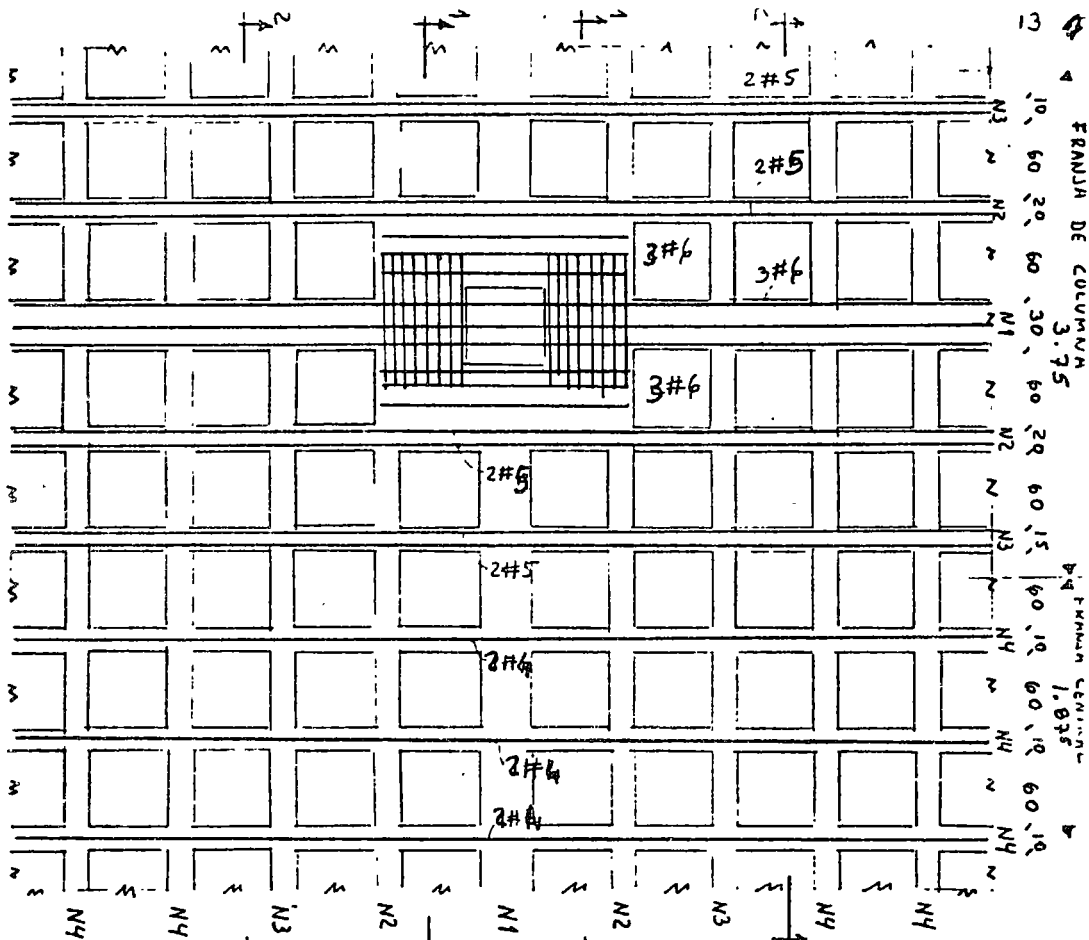
Para el refuerzo de momento positivo en el extremo se colocará 50% del refuerzo negativo, ya que según el diagrama de momentos no aparecen momentos positivos en esa zona.

Para refuerzo de momento positivo en el centro del claro rige la condición carga muerta más carga viva de la que resulta un momento de 23.5 ton-m del que tiene resistirse un 60% en las 6 nervaduras de franja de columna y 40% en las 5 nervaduras de franja central

El refuerzo resultante se muestra a continuación

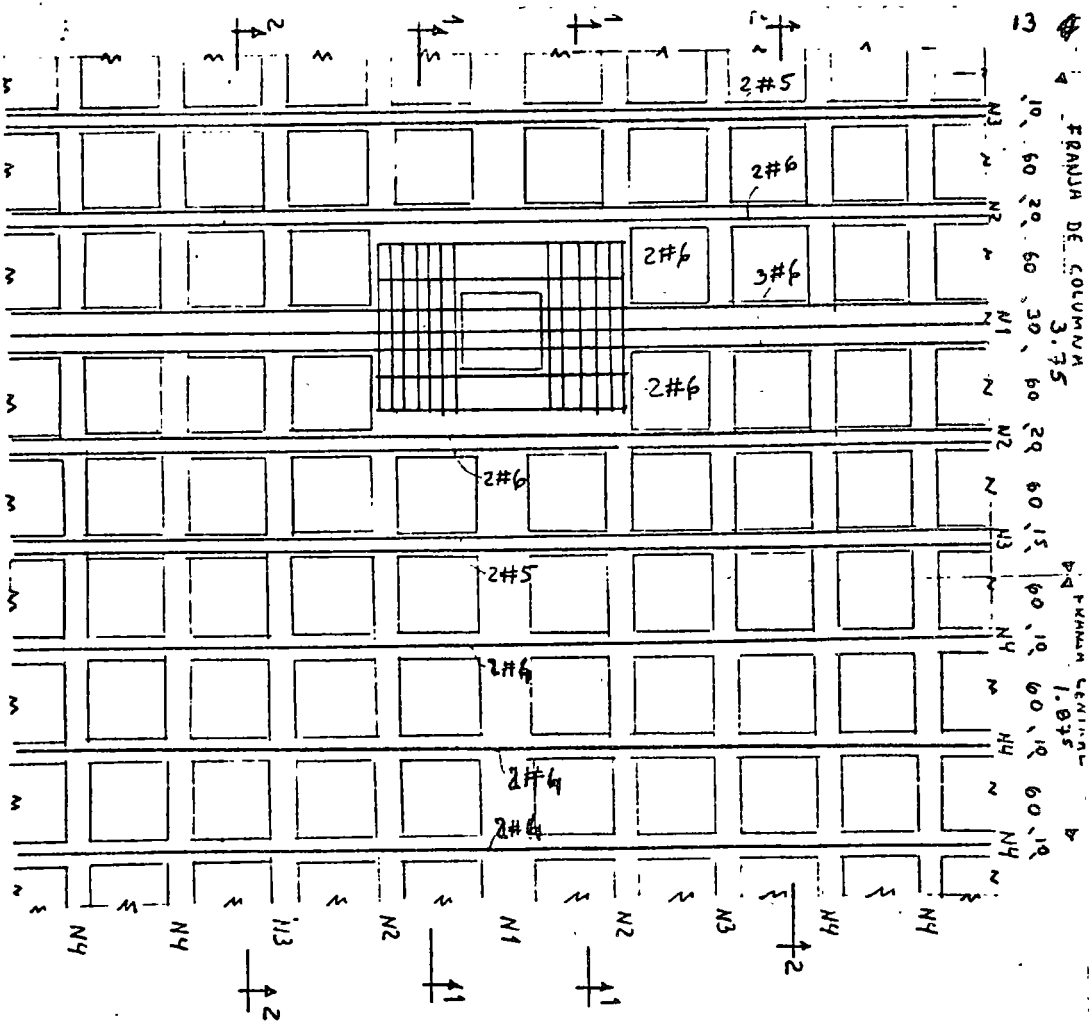


Refuerzo en el apoyo y en el centro del claro



REFUERZO NEGATIVO

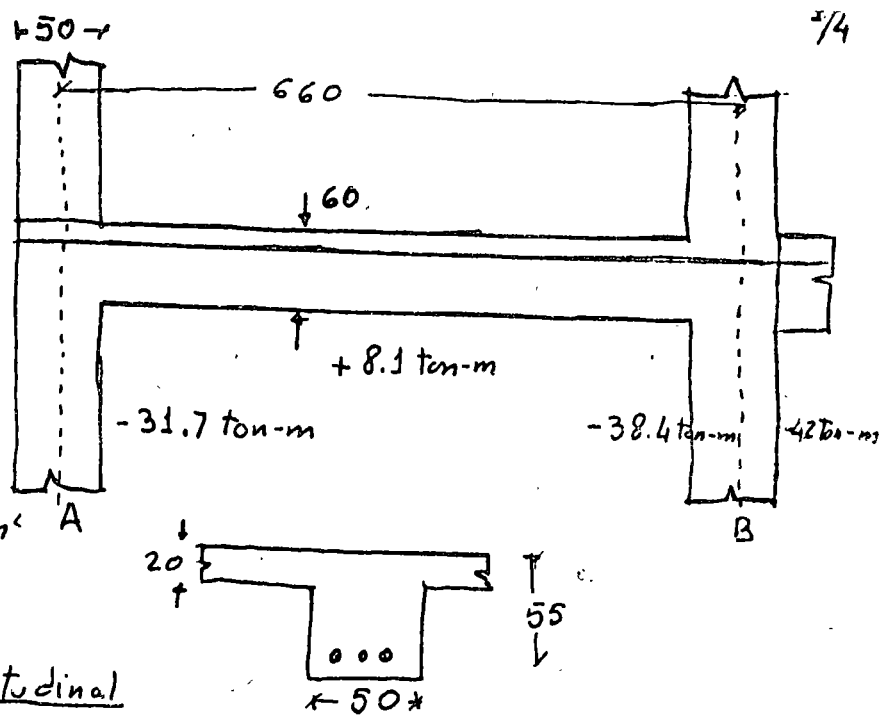
Solo se muestra el refuerzo en una dirección. El refuerzo en la otra dirección es el mismo



REFUERZO POSITIVO

EJEMPLO 1.

Diseñar la viga para los momentos de diseño indicados que incluyen el efecto de sismo y el de una carga vertical de 5.8 ton/m



$f'_c = 280 \text{ Kg/cm}^2$     $f_y = 4200 \text{ Kg/cm}^2$

a) Cuantías límite de refuerzo longitudinal

$\rho - 0.5 \rho' \leq 0.5 \rho_b$    Si se refuerza para  $\rho' = 0.3 \rho$

$0.75 \rho \leq 0.5 \rho_b$     $\rho = \frac{0.5}{0.75} \cdot \frac{0.85 \beta f'_c}{f_y} \cdot \frac{6000}{6000 + f_y} = \frac{0.85 \cdot 0.85 \cdot 280}{4200} \cdot \frac{6000}{10800} = 0.033$

$\rho \geq 14/f_y = \frac{14}{4200} = 0.0033$

$0.0033 \leq \rho \leq 0.033$

b) Refuerzo por flexión

En el extremo B

Se diseñará para el momento de 42 ton-m

$M_u = 42 \text{ ton-m}$

$A_s = \frac{M_u}{\phi F_y j' d}$     $\phi = 0.90$     $j' = 0.9$  (se supondrá y se comprobará posteriormente)

$A_s = \frac{4200000}{0.9 \cdot 4200 \cdot 0.9 \cdot 55} = 22.5 \text{ cm}^2$

Se usarán 3 #30    $A_s = 24.4 \text{ cm}^2$

$\rho = \frac{A_s}{bd} = \frac{24.4}{50 \cdot 55} = 0.0088$

Se encuentra entre  $\rho_{min}$  y  $\rho_{max}$

Comprobación de j

$j' d \geq d - \frac{a}{2}$     $a = \frac{A_s f_y}{0.85 b f'_c} = \frac{24.4 \cdot 4200}{0.85 \cdot 50 \cdot 280} = 8.51 \text{ cm}$

$j' d \geq 55 - \frac{4.2}{2} = 50.8 \text{ cm}$     $j' = \frac{50.8}{55} = 0.92$    se considera adecuado



en el extremo A

Momento negativo  $M_u = 33.7 \text{ ton-m}$

$$A_s = \frac{3170000}{0.9 \times 4200 + 0.92 \times 55} = 16.5 \text{ cm}^2$$

Se usarán 2#10  $A_s = 16.3 \text{ cm}^2$   $\rho = \frac{16.3}{50 \times 55} = 0.0059 > \rho_{min}$

Refuerzo positivo en los apoyos

$$M_u^+ \geq \frac{1}{2} M_u^-$$

en B  $M_u^+ = \frac{42}{2} = 21 \text{ ton-m}$

$$A_s = \frac{2100000}{0.9 \times 4200 + 0.92 \times 65} = 11 \text{ cm}^2$$

Se usarán 4#6  $A_s = 11.4 \text{ cm}^2$

Se prolongarán en todo el claro ya que cubren también el positivo en el centro del claro

c) Longitud de anclaje para la columna exterior

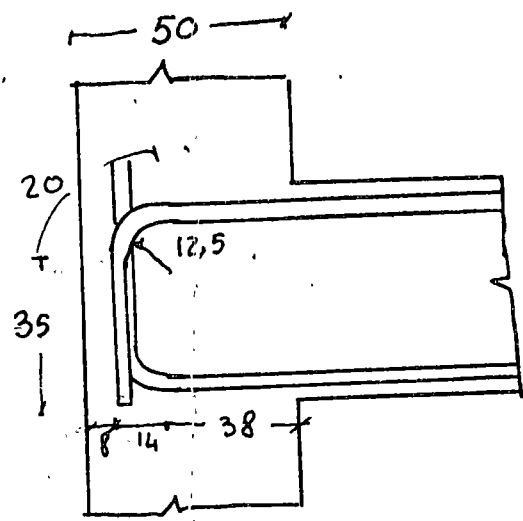
Según el ACI se requiere un gancho estándar y que la longitud a partir del paño sea igual a 2/3 de la longitud de desarrollo dada por

$$l_d = 0.06 \frac{A_b f_y}{\sqrt{f'_c}} \geq 0.0057 d_b f_y$$

$$l_d = \frac{0.06 \times 8.2 \times 4200}{\sqrt{280}} = 123 \text{ cm} > 0.005 \times 3.23 \times 4200 = 77.2 \text{ cm}$$

$$2/3 l_d = 82.3 \text{ cm}$$

En la figura la longitud requerida se da como  
 38 cm en columna  
 20 - - doblar  
 35 - vertical



c') Revisión según el Comité 352

$$l_s = \frac{0.06 A_b (\alpha f_y - f_h)}{\psi \sqrt{f'_c}}$$

$$f_u = 185 (1 - 0.12 d_b) \psi \sqrt{f'_c} = 185 (1 - 0.12 \times 3.23) 1.4 \sqrt{280} = 2650 \text{ Kg/cm}^2$$

$$l_s = 0.06 \times 8.2 (1.25 \times 4200 - 2650) / 1.4 \times \sqrt{280} = 54 \text{ cm}$$

Estos 54 cm son a partir del nucleo y antes del doblaje, por tanto no caben en el ancho de columna.

#### d) Refuerzo por cortante

$$\text{En B } V_u = \frac{M_{Au}^+ + M_{Bu}^-}{L} + \frac{W_u L}{2} = 24.4$$

$$M_{uB}^- = 24.4 \times 4200 \times 0.92 \times 55 = 51.8 \text{ ton-m}$$

$$M_{Au}^+ = \frac{11.4 \times 51.8}{24.4} = 24.2 \text{ ton-m}$$

$$V_u = \frac{24.2 + 51.8}{6.6} + \frac{5.8 \times 6.6}{2} = 11.5 + 19.1 = 30.6 \text{ ton}$$

$$\text{En A } V_u = \frac{M_{Au}^- + M_{Bu}^+}{L} + 19.1$$

$$M_A^- = \frac{16.3}{24.4} \times 51.8 = 34.6$$

$$M_B^+ = M_A^+ = 24.2$$

$$V_u = \frac{34.6 + 24.2}{6.6} + 19.1 = 28 \text{ ton}$$

$$\text{En B } v_u = \frac{V_u}{\phi b d} = \frac{30600}{0.85 \times 50 \times 55} = 13.1 \text{ Kg/cm}^2$$

$$v_c = 0.5 \sqrt{f'_c} = 0.5 \sqrt{280} = 8.4 \text{ Kg/cm}^2 < 13.1$$

Se requieren estribos mínimo #3 dos varnos  $A_v = 2 \times 0.71 = 1.42$

$$s = \frac{A_v f_y}{(v_u - v_c) b} = \frac{1.42 \times 4200}{(13.1 - 8.4) 50} = 25.4$$

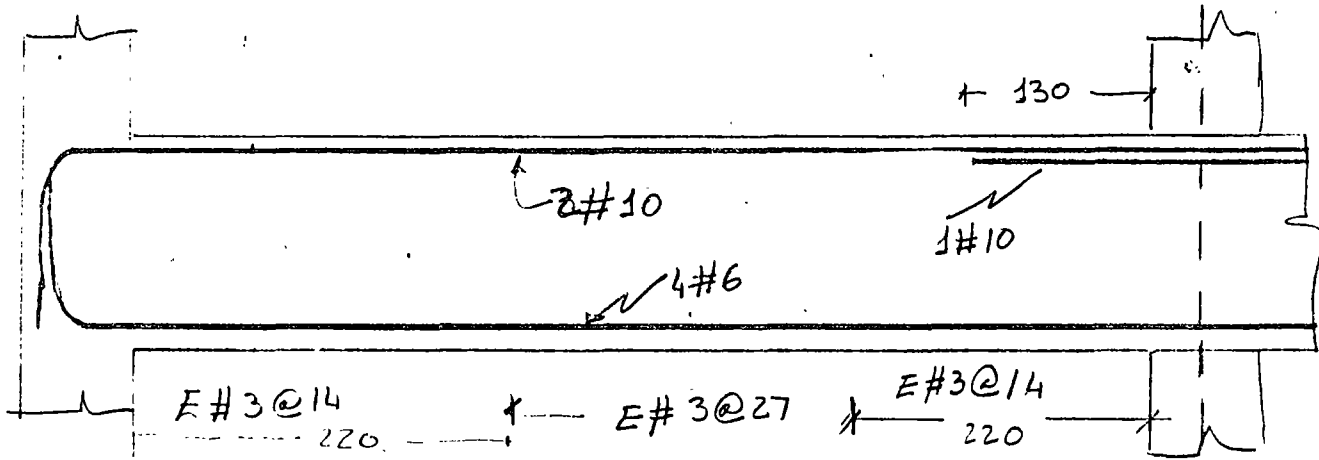
A lo largo de toda la viga se requiere  $s \leq d/2 = 27 \text{ cm}$   
En una distancia de  $4d = 220 \text{ cm}$  se requiere

$$s \leq d/4 = 14 \text{ cm} < \frac{A_s d}{0.15 A_g} = \frac{1.42 \times 55}{0.15 \times 24.4} = 21.3 \text{ cm}$$

Rige en ambos extremos rige  $s = d/4 = 14 \text{ cm}$

e) Corte de barras

No se revisará aquí; resulta que la barra # 10 adicional en el extremo B puede cortarse a 130 cm de la cara del apoyo. El refuerzo queda como se ve en la figura

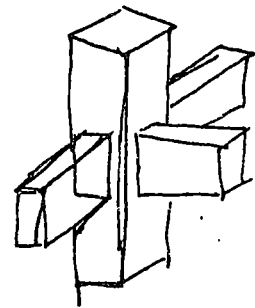


## EJEMPLO 2

Diseñar una columna exterior de un marco.  
Las cargas verticales y de viento producen una combinación crítica que resulte

$$P = 360 \text{ ton} \quad M = 19 \text{ ton}\cdot\text{m}$$

La sección se ha elegido como de  $50 \times 50 \text{ cm}$   
y  $f'_c = 280 \text{ kg/cm}^2$   $f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$



a) Cuantía mínima de refuerzo

$$\rho = 0.01 \quad A_s = 0.01 \times 50 \times 50 = 25 \text{ cm}^2$$

b) Revisión de la capacidad de la columna

Usando las gráficas de interacción construidas con el reglamento ACI  
(Publicación SP-17 Chart No 87)

$$\text{para } f'_c = 40 \text{ ksi} \quad f_y = 60 \text{ ksi} \quad g = 0.8$$

$$K = \frac{P_u}{f'_c b t} = \frac{360000}{280 \times 2500} = 0.50$$

$$\frac{e}{t} = \frac{M}{P e} = \frac{19}{360 \times 0.5} = 0.105$$

$$\text{Se obtiene } \rho_{mín} = 0.09 = \rho \frac{f_y}{.85 f'_c}$$

$$\rho = 0.09 \times \frac{.85 \times 280}{4200} = 0.005 < 0.01$$

Se reforzará por acero mínimo  $\rho = 0.01$

$$\text{Si se usan } 6 \# 8 \quad A_s = 30 \text{ cm}^2$$

$$\rho = \frac{30}{2500} = 0.012$$

c) Revisión de que la suma de capacidades de las columnas es mayor que la de vigas

$$\text{Para la columna } \rho_f m = 0.012 \frac{4200}{.85 \times 280} = 0.21$$

$$\text{para } K = 0.51 \quad \text{resulta de la misma gráfica } \frac{H}{K} = \frac{M}{b^3 f'_c} = 0.08$$

$$M_e = 0.08 \times 50^3 \times 280 = 28 \text{ ton}\cdot\text{m}$$

La viga en dirección  $x$  tiene un momento resistente (supuesto) de 35 ton

por tanto  $\sum M_c = 2 \times 28 = 56 > 35 \text{ ton-m}$

d) Refuerzo por confinamiento

de la gráfica anterior se obtiene  $P_b = 280 \text{ ton}$

$$P_u = 360 \text{ ton} > 0.4 P_b$$

se requiere confinamiento

$$P_s = 0.45 \left( \frac{A_g}{A_c} - 1 \right) \frac{f'_c}{f_y} \geq 0.12 \frac{f'_c}{f_y}$$

$$0.45 \left( \frac{A_g}{A_c} - 1 \right) \frac{f'_c}{f_y} = 0.45 \left( \frac{50^2}{43^2} - 1 \right) \frac{280}{4200} = 0.0114$$

$$0.12 \frac{f'_c}{f_y} = 0.12 \times \frac{280}{4200} = 0.008 < 0.0114$$

Usando barras #4 con la disposición mostrada

$$l_h = 24 \text{ cm} \quad A_{sh} = 1.2 \text{ cm}^2$$

$$S_h = \frac{2 A_{sh}}{l_h P_s} = \frac{2 \times 1.2}{24 \times 0.0114} = 8.85 \text{ cm} < 10 \text{ cm}$$

Estos estribos se requerirán en una longitud a partir del  
paño de  $t, 4s, H/6$  rig  $t = 50 \text{ cm}$

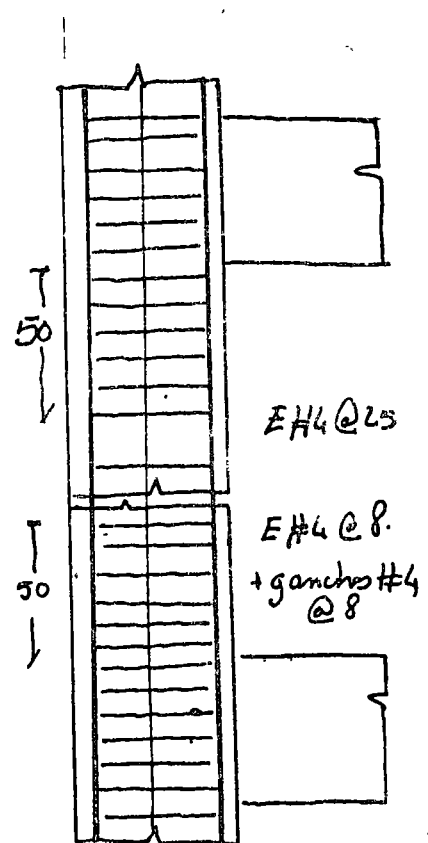
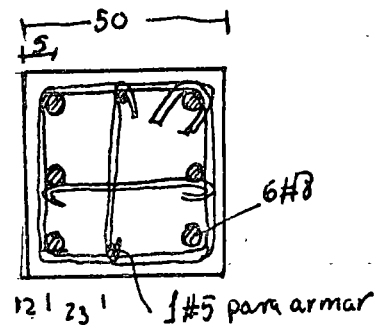
e) Revisión por cortante

$$V_u = \frac{M_v}{H} = \frac{35}{3.6} = 9.7 \text{ ton}$$

$$V_u = \frac{9700}{0.85 \times 50 \times 43} = 5.3 \text{ Kg/cm}^2 < 0.5 \sqrt{f'_c} = 8.4 \text{ Kg/cm}^2$$

No requiere refuerzo transversal, se pondrán estribos a

$$s = d/2 = 28 \text{ cm}$$



## EJEMPLO 3

Diseñar una conexión para marco dúctil para los requisitos del Comité ACI-ASCE 352 (ACI journal jul 1976)

Las vigas y columna tienen el refuerzo indicado en la figura y  $f'_c = 280 \text{ kg/cm}^2$ ,  $f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$

- a) Anclaje de las barras #10 en la columna  
Hay que proporcionar una escuadra estándar y revisar la longitud  $l_s$  dentro de la columna

$$l_s = \frac{0.06 A_b (\alpha f_y - f_h)}{\psi \sqrt{f'_c}}$$

$$\alpha = 1.25; \psi = 1.4; A_b = 8.19 \text{ cm}^2; d_b = 3.18 \text{ cm}$$

$$f_h = 185 (1 - 0.12 d_b) \psi \sqrt{f'_c}$$

$$f_h = 185 (1 - 0.12 \times 3.18) 1.4 \sqrt{280} = 2680 \text{ kg/cm}^2$$

$$l_s = \frac{0.06 \times 8.19 (1.25 \times 4200 - 2680)}{1.4 \sqrt{280}} = 53.9 \text{ cm}$$

Longitud disponible (ver figura)

$$60 - 5 - 5 - d_b - 4d_b = 36 \text{ cm} < l_s$$

No puede realizarse el anclaje adecuado

Hay dos alternativas 1) reducir el diámetro de la barra colocar confinamiento para poder emplear  $\psi = 1.8$

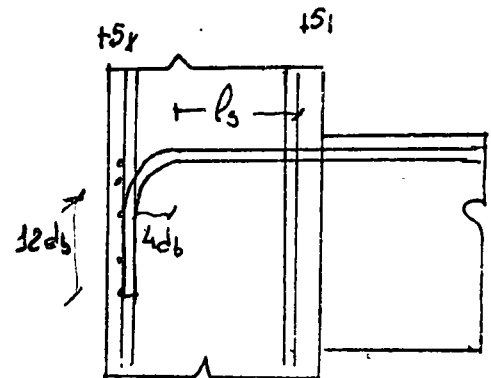
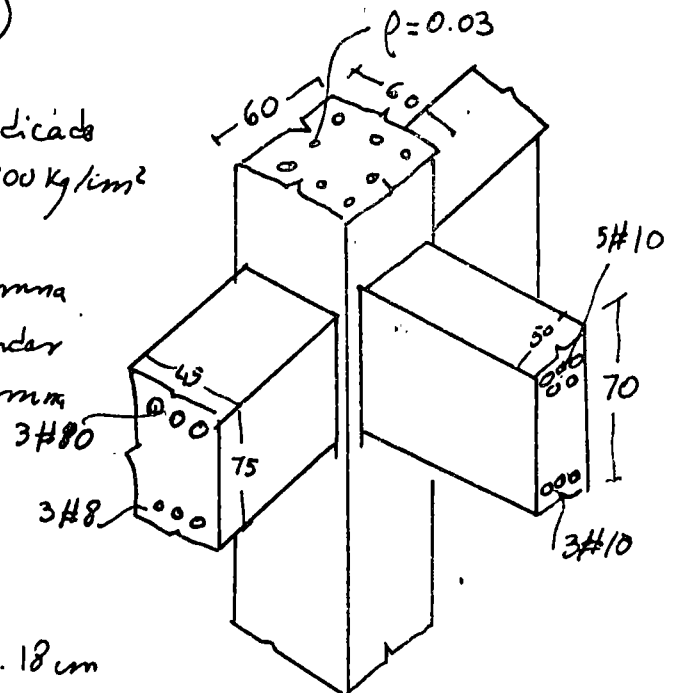
Si se reduce cambia el refuerzo  $\rho \rightarrow$  barras #8

$$A_b = 5 \text{ cm}^2 \quad d_b = 2.5 \text{ cm}$$

$$f_h = 185 (1 - 0.12 \times 2.5) 1.4 \sqrt{280} = 3010 \text{ kg/cm}^2$$

$$l_s = \frac{0.06 \times 5 (1.25 \times 4200 - 3010)}{1.4 \sqrt{280}} = 28.6 \text{ cm}$$

$$\text{Longitud disponible} = 60 - 5 - 5 - 5 \times 2.54 = 37.5 > l_s \text{ O.K.}$$



## b) Revisión del cortante en la unión

Fuerza de diseño en la dirección de la viga principal

$$M_u = \alpha A_s f_y j' d = 1.25 \times 40.9 \times 4200 \times 0.9 \times 62 = 119.8 \text{ ton-m}$$

$$V_{col} = \frac{M_u}{h} = \frac{119.8}{3.6} = 33.3 \text{ ton}$$

$$V_u = \alpha A_s f_y - V_{col} = 1.25 \times 40.9 \times 4200 - 33.9 = 214.7 - 33.3$$

$$V_u = 181.4 \text{ ton}$$

$$v_u = \frac{V_u}{\phi b d} = \frac{181400}{0.85 \times 60 \times 54} = 65.9 \text{ Kg/cm}^2$$

$$(v_u)_{max} = 5 \sqrt{f'_c} = 5 \sqrt{280} = 83.7 \text{ Kg/cm}^2 > 65.9 \text{ O.K.}$$

$$v_c = 0.9 \gamma \sqrt{f'_c} \left(1 + 0.03 \frac{P_u}{A_g}\right)$$

Considerando que la unión se va a confinar  $\gamma = 1.4$   
 Para una carga axial en la condición más desfavorable (mínima)

$$P_u = 120 \text{ Ton}$$

$$v_c = 0.9 \times 1.4 \sqrt{280} \left(1 + 0.03 \cdot \frac{120000}{60 \times 60}\right) = 29.8 \text{ Kg/cm}^2$$

$$v_u - v_c = 65.9 - 29.8 = 36.1 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\frac{A_v}{s} = \frac{(v_u - v_c) b}{f_y} = \frac{36.1 \times 60}{4200} = 0.52$$

Si se emplean 4 ramas de estribos #4

$$A_v = 4 \times 1.26 = 5.08 \text{ cm}^2$$

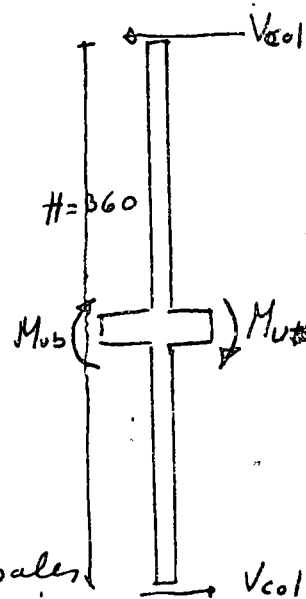
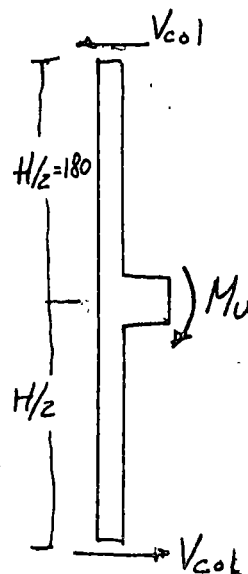
$$s = \frac{A_v}{0.52} = \frac{5.08}{0.52} = 9.8 \text{ cm}$$

Fuerza de diseño en la dirección de las vigas transversales

$$M_{uT} = \alpha A_s f_y j' d = 1.25 \times 3 \times 8.19 \times 4200 \times 0.9 \times 68 = 78.9 \text{ ton-m}$$

$$M_{uB} = - = 1.25 \times 3 \times 5 \times 4200 \times 0.9 \times 68 = 48.4 \text{ ton-m}$$

$$V_{col} = \frac{M_{uT} + M_{uB}}{H} = \frac{78.8 + 48.4}{3.6} = 35.6 \text{ ton}$$



$$V_u = \phi f_y (A_{st} + A_{sb}) = \sqrt{201} = 1.25 \times 4200 (24.5 + 15) = 35.6 = 171.8 \text{ ton}$$

$$V_u = \frac{171800}{0.85 \times 54 \times 60} = 62.3 \text{ Kg/cm}^2 < 5 \sqrt{f'_c}$$

$$V_c = 0.9 \phi \sqrt{f'_c (1 + 0.03 \frac{A_g}{A_g})} \geq$$

en este caso  $\gamma = 1.0$  ya que la unión no está confinada por vigas transversales en ambos lados

$$V_c = 0.9 \sqrt{280 (1 + 0.03 \frac{240}{60 \times 60})} = 21.3 \text{ Kg/cm}^2$$

$$V_u - V_c = 62.3 - 21.3 = 41 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\frac{A_v}{s} = (V_u - V_c) \frac{b}{f_y} = \frac{41 \times 54}{4200} = 0.55$$

con 4 varillas de estribo #4  $A_v = 5.08$

$$s = \frac{5.08}{0.55} = 9.3 \text{ cm} \Rightarrow$$

~~viga en esta condición~~  $s = 9 \text{ cm}$

c) Estribos por confinamiento

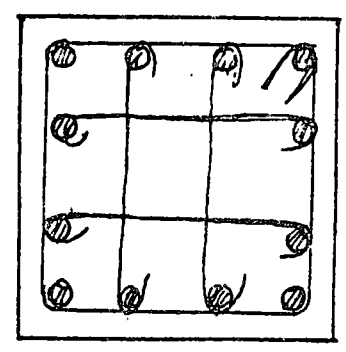
Supóngase que en la condición más desfavorable  $P > 0.4 P_0$

$$A_{sh} = 0.3 l_h s_h \left( \frac{A_g}{A_{ch}} - 1 \right) \frac{f'_c}{f_y} \geq 0.12 \frac{f'_c}{f_y} l_h s_h$$

$$\frac{A_{sh}}{s_h} = 0.3 \times 55 \left[ \left( \frac{60}{53} \right)^2 - 1 \right] \frac{280}{4200} = 0.21 \geq 0.12 \times \frac{280}{4200} \times 55 = 0.44$$

aun considerando la longitud total del estribo la cantidad de refuerzo es menor que la requerida por constante

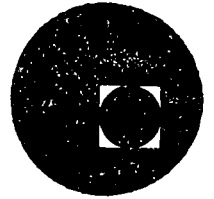
Se usarán E #4 @ 9 cm (4 varillas)







centro de educación continua  
división de estudios superiores  
facultad de ingeniería, unam



IV CURSO INTERNACIONAL DE INGENIERIA SISMICA

DISEÑO SISMICO DE EDIFICIOS

ANALISIS DE ESTRUCTURAS ANTE CARGAS LATERALES

M. EN I. ENRIQUE BAZAN ZURIGA

JULIO, 1978.

### 3. ANALISIS DE ESTRUCTURAS ANTE CARGAS LATERALES

#### 3.1 Análisis de marcos

- a) Métodos exactos                      rigideces (método directo)\*  
flexibilidades
- Formas particulares del                      Cross (relajaciones)  
método de rigideces                      Kani (iteraciones)
- Formas especiales del                      pesos elásticos  
método de flexibilidades                      analogía de la columna
- b) Métodos simplificados                      marco equivalente reducido\*  
(Grinter-Tsao)\*  
portal
- Bowman\*  
Factor  
Fórmulas de Wilbur\*

#### 3.2 Análisis de sistemas marco-muro

- a) Métodos exactos                      rigideces { elementos finitos  
flexibilidades                      } columna ancha\*
- b) Métodos simplificados                      sistema equivalente (reducido)\*  
Khan-Sbarounis  
medio continuo equivalente

#### 3.3 ANALISIS TRIDIMENSIONAL DE EDIFICIOS

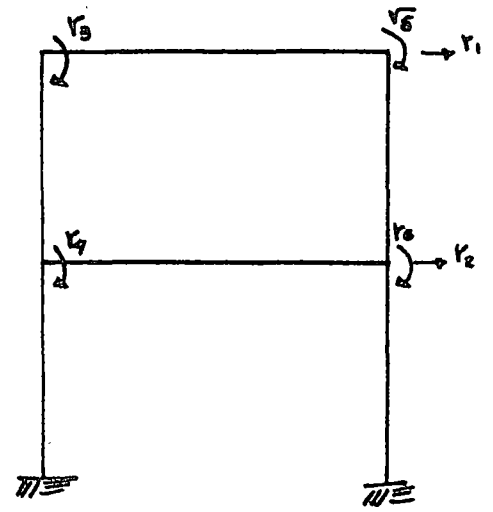
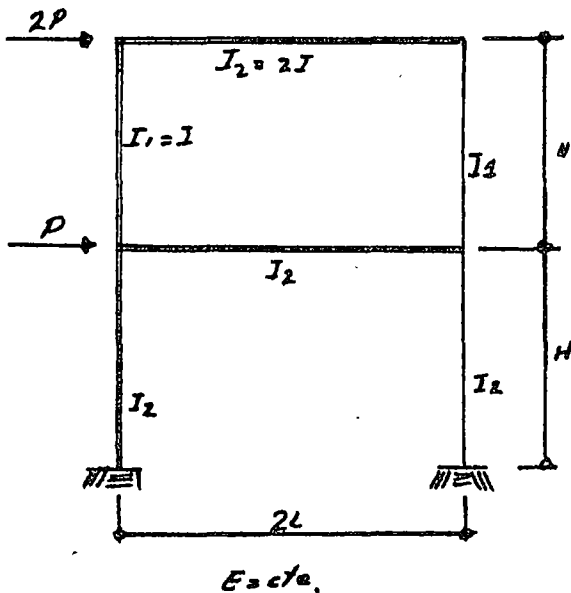
- hipótesis  
método general de rigideces  
método simplificado de rigideces

#### 3.4 EFECTOS DE ESBELTEZ

### 3.1 ANALISIS DE MARCOS ANTE CARGAS LATERALES.

#### (i) Método directo de rigideces

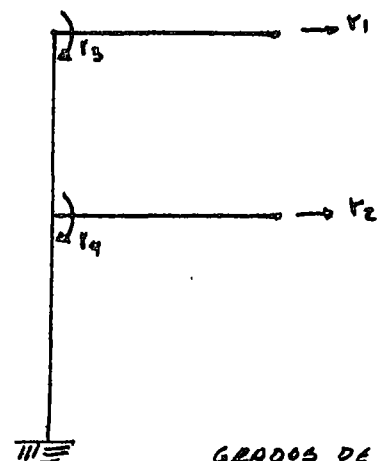
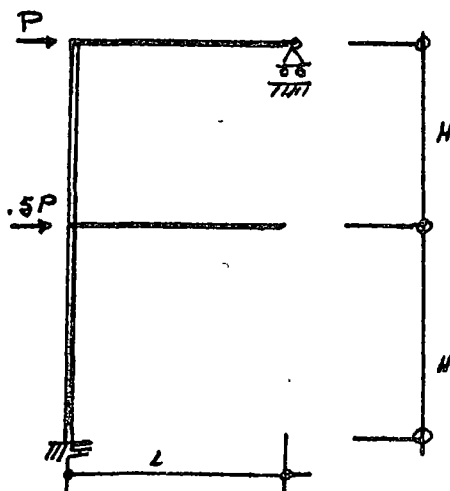
Para ilustrar la operación del método consideramos la siguiente estructura:



*grados de libertad*

Grado de libertad es la potencialidad que tiene un nudo de moverse en forma independiente, en cierta dirección. En marcos los movimientos son giros o desplazamientos (usualmente en los nudos). Si no se consideran las deformaciones axiales de las vigas y columnas la estructura que nos ocupa tiene los seis grados de libertad mostrados en la figura correspondiente.

Aprovechando la simetría, se puede reducir el problema a uno de solo 4 grados de libertad:

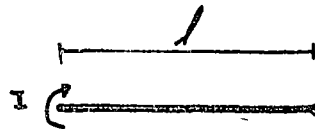


**GRADOS DE LIBERTAD**

En primer lugar es necesario obtener la matriz de rigideces de los elementos (vigas y columnas) que forman la estructura para los grados de libertad que les correspondan.

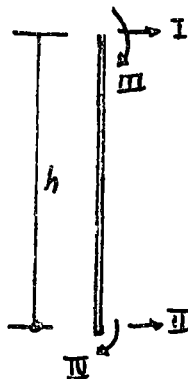
En este ejemplo tenemos:

PARA LAS VIGAS



3 g. de lib.

PARA LAS COLUMNAS



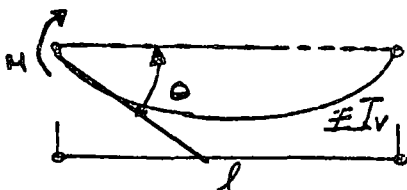
4 g. de lib.

El elemento  $k_{ij}$  de una matriz  $\underline{k}$  de rigideces es la fuerza o momento que se necesita aplicar a la estructura en el sentido del grado de libertad  $i$  para que se produzca un desplazamiento unitario en el sentido del grado de libertad  $j$ .

Las matrices de rigideces son cuadradas, simétricas y su tamaño es igual al número de grados de libertad.

Entonces para las vigas la matriz de rigideces es:

$$K_r = \begin{bmatrix} 3EI/l \\ \end{bmatrix}$$

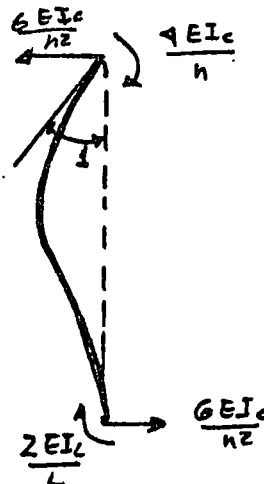
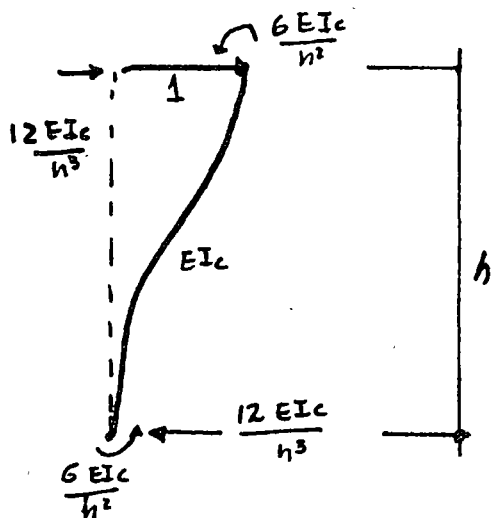


$$\text{Si } \theta = 1, M = K_{11} = \frac{3EI}{l}$$

Para las columnas la matriz de rigideces es:

$$\underline{K}_c = \begin{bmatrix}
 & \text{I} & \text{II} & \text{III} & \text{IV} \\
 \text{I} & 12 \frac{EI_c}{h^3} & -12 \frac{EI_c}{h^3} & -6 \frac{EI_c}{h^2} & -6 \frac{EI_c}{h^2} \\
 \text{II} & -12 \frac{EI_c}{h^3} & 12 \frac{EI_c}{h^3} & 6 \frac{EI_c}{h^2} & 6 \frac{EI_c}{h^2} \\
 \text{III} & -6 \frac{EI_c}{h^2} & 6 \frac{EI_c}{h^2} & 4 \frac{EI_c}{h} & 2 \frac{EI_c}{h} \\
 \text{IV} & -6 \frac{EI_c}{h^2} & 6 \frac{EI_c}{h^2} & 2 \frac{EI_c}{h} & 4 \frac{EI_c}{h}
 \end{bmatrix}$$

Las columnas 1a. y 3a. Se obtuvieron de las figuras siguientes:



La matriz de rigideces de la estructura original es de  $6 \times 6$ , y la de la estructura reducida es de  $4 \times 4$ . Ambas se obtienen sumando los términos de las matrices de rigideces de los elementos en los lugares que les corresponden de acuerdo con la numeración de los grados de libertad. Así, para la estructura reducida se tiene:

$$\underline{K} = \begin{bmatrix}
 \textcircled{1} & & & & \\
 12 \frac{EI_1}{H^3} & -12 \frac{EI_1}{H^3} & 6 \frac{EI_1}{H^2} & -6 \frac{EI_1}{H^2} & \textcircled{1} \\
 & 12 \frac{EI_1}{H^3} + \frac{12EI_2}{H^3} & 6 \frac{EI_1}{H^2} & 6 \frac{EI_1}{H^2} - \frac{6EI_2}{H^2} & \textcircled{2} \\
 & & 4 \frac{EI_1}{H} + \frac{3EI_2}{L} & \frac{2EI_1}{H} & \textcircled{3} \\
 & & & \frac{4EI_1}{H} + \frac{4EI_2}{H} + \frac{3EI_2}{L} & \textcircled{4} \\
 \text{SIMETRICA} & & & & 
 \end{bmatrix}$$

Como  $I_1 = I$ ,  $I_2 = 2I$ , y suponiendo que  $L = 1.5H$  tenemos:

$$\underline{K} = \frac{EI}{H} \begin{bmatrix}
 \frac{12}{H^2} & -\frac{12}{H^2} & \frac{6}{H} & -\frac{6}{H} \\
 & \frac{12}{H^2} + \frac{12 \times 2}{H^2} & \frac{6}{H} & \frac{6}{H} - \frac{6 \times 2}{H} \\
 & & 4 + \frac{3 \times 2}{1.5} & 2 \\
 & & & 4 + 4 \times 2 + \frac{3 \times 2}{1.5}
 \end{bmatrix}$$

o también ;

$$\underline{K} = \frac{EI}{H} \begin{bmatrix}
 \textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{3} & \textcircled{4} & \\
 \frac{12}{H^2} & -\frac{12}{H^2} & -\frac{6}{H} & -\frac{6}{H} & \textcircled{1} \\
 -\frac{12}{H^2} & \frac{36}{H^2} & \frac{6}{H} & -\frac{6}{H} & \textcircled{2} \\
 -\frac{6}{H} & \frac{6}{H} & 8 & 2 & \textcircled{3} \\
 -\frac{6}{H} & \frac{6}{H} & 2 & 16 & \textcircled{4}
 \end{bmatrix}$$

Las cargas también corresponden a los grados de libertad y constituyen el vector de cargas  $\underline{F}$  que para nuestro caso se muestra al lado.

$$\underline{F} = \begin{Bmatrix} P \\ \dots \\ 0.5P \\ \dots \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{Bmatrix}$$

Los desplazamientos, arreglados en el mismo orden constituyen el vector de desplazamiento  $\underline{r}$  :

$$\underline{r} = \begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{Bmatrix}$$

Para conocer  $\underline{r}$  es necesario resolver el sistema de ecuaciones lineales siguientes:

$$\underline{K} \underline{r} = \underline{F}$$

que en forma desarrollada se escribe:

$$\frac{EI}{H} \begin{bmatrix} \frac{12}{H^2} & -\frac{12}{H^2} & -\frac{6}{H} & -\frac{6}{H} \\ -\frac{12}{H^2} & \frac{36}{H^2} & \frac{6}{H} & -\frac{6}{H} \\ -\frac{6}{H} & \frac{6}{H} & 8 & 2 \\ -\frac{6}{H} & -\frac{6}{H} & 2 & 16 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ 0.5P \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (a)$$

Definamos las siguientes matrices y vectores:

$$\underline{K}_{\delta\delta} = \frac{EI}{H} \begin{bmatrix} \frac{12}{H^2} & -\frac{12}{H^2} \\ -\frac{12}{H^2} & \frac{36}{H^2} \end{bmatrix} ; \underline{K}_{\delta\theta} = \frac{EI}{H} \begin{bmatrix} -\frac{6}{H} & -\frac{6}{H} \\ \frac{6}{H} & -\frac{6}{H} \end{bmatrix} ;$$

$$\underline{K}_{\theta\theta} = \frac{EI}{H} \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 16 \end{bmatrix} ; \underline{\delta} = \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{Bmatrix} ; \underline{\theta} = \begin{Bmatrix} \theta_3 \\ \theta_4 \end{Bmatrix} ;$$

$$\underline{P} = \begin{Bmatrix} P \\ 0.5P \end{Bmatrix} ; \underline{0} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

con lo que la expresión (a) se escribe:

$$\begin{bmatrix} \underline{k}_{\delta\delta} & \underline{k}_{\delta\theta} \\ \underline{k}_{\theta\delta}^T & \underline{k}_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\delta} \\ \underline{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{P} \\ \underline{0} \end{pmatrix}$$

y desarrollando el producto del primer miembro:

$$\underline{k}_{\delta\delta} \underline{\delta} + \underline{k}_{\delta\theta} \underline{\theta} = \underline{P} \quad (b)$$

$$\underline{k}_{\theta\delta}^T \underline{\delta} + \underline{k}_{\theta\theta} \underline{\theta} = \underline{0} \quad (c)$$

de (c) despejamos:  $\underline{\theta} = -\underline{k}_{\theta\theta}^{-1} \underline{k}_{\theta\delta}^T \underline{\delta}$  (d)

y reemplazando en (b) obtenemos:

$$\left( \underline{k}_{\delta\delta} - \underline{k}_{\delta\theta} \underline{k}_{\theta\theta}^{-1} \underline{k}_{\theta\delta}^T \right) \underline{\delta} = \underline{P} \quad (e)$$

este procedimiento se conoce como condensación estática y nótese que la matriz original de 4 x 4 se reduce a la matriz de 2 x 2 siguiente:

$$\underline{k}_{\delta\delta}^* = \underline{k}_{\delta\delta} - \underline{k}_{\delta\theta} \underline{k}_{\theta\theta}^{-1} \underline{k}_{\theta\delta}^T \quad (f)$$

$\underline{k}_{\delta\delta}^*$  se denomina matriz de rigideces lateral.

La expresión 9d) se convierte en:

$$\boxed{\underline{k}_{\delta\delta}^* \underline{\delta} = \underline{P}} \quad (g)$$

(matriz de rigideces lateral) x (desplazamientos laterales)  
= (cargas laterales)



se puede calcular ejecutando las operaciones matriciales de la expresión (f), teniendo presente que :

$$\underline{k}_{\theta\theta}^{-1} = \frac{4}{62EI} \begin{bmatrix} -8 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \quad \underline{k}_{\delta\theta} \underline{k}_{\theta\theta}^{-1} \underline{k}_{\theta\delta}^T = \frac{18EI}{31H^3} \begin{bmatrix} 10 & -4 \\ -4 & 14 \end{bmatrix}$$

$$\underline{k}_{\theta\theta}^{-1} \underline{k}_{\theta\delta}^T = \frac{3}{31H} \begin{bmatrix} -7 & 9 \\ -3 & -5 \end{bmatrix} \quad (h)$$

y entonces de (f) se llega a:

$$\underline{k}_{\delta\delta}^* = \frac{12EI}{H^3} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} - \frac{36EI}{31H^3} \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\underline{k}_{\delta\delta}^* = \frac{12EI}{31H^3} \begin{bmatrix} 16 & -25 \\ -25 & 72 \end{bmatrix}$$

Ahora de la expresión (g) se deduce que:

$$\underline{\delta} = \underline{k}_{\delta\delta}^{*-1} \underline{P} \quad ; \text{ es decir}$$

$$\begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{Bmatrix} = \frac{31H^3}{6324EI} \begin{bmatrix} 72 & 25 \\ 25 & 16 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P \\ 0.5P \end{Bmatrix} = \frac{PH^3}{204EI} \begin{Bmatrix} 84.5 \\ 33.0 \end{Bmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} \delta_1 &= \frac{84.5 PH^3}{204 EI} = 0.41422 \frac{PH^3}{EI} \\ \delta_2 &= \frac{33 PH^3}{204 EI} = 0.16176 \frac{PH^3}{EI} \end{aligned} \right\} (i)$$

Conocido el vector  $\underline{\delta}$  podemos, con la expresión (d), calcular

$$\text{el vector } \underline{\theta} = -\underline{k}_{\theta\theta}^{-1} \underline{k}_{\theta\delta}^T \underline{\delta} \quad . \text{ Notando}$$

que ya se ha evaluado en (h) el producto  $\underline{K}_{\theta\theta}^{-1} \underline{K}_{\delta\theta}^T$ , se tiene:

$$\begin{cases} \theta_3 \\ \theta_4 \end{cases} = \frac{PH^2}{2108 EI} \begin{cases} 294.5 \\ 418.5 \end{cases}, \text{ es decir} \quad \left. \begin{aligned} \theta_3 &= 0.13971 PH^2/EI \\ \theta_4 &= 0.19853 PH^2/EI \end{aligned} \right\} (j)$$

Se puede ahora proceder a calcular los elementos mecánicos de cada una de las vigas y columnas, como el producto de la matriz de rigideces (de la viga o columna) por los respectivos desplazamientos, los cuales son ya conocidos.

Así para la viga del primer nivel tenemos:

$$\underline{K}_v = \left[ \frac{3EI}{L} \right] = \left[ \frac{3EI}{1.5H} \right] = \left[ \frac{4EI}{H} \right]$$

el desplazamiento que le corresponde es el giro  $\theta_4$ , entonces:

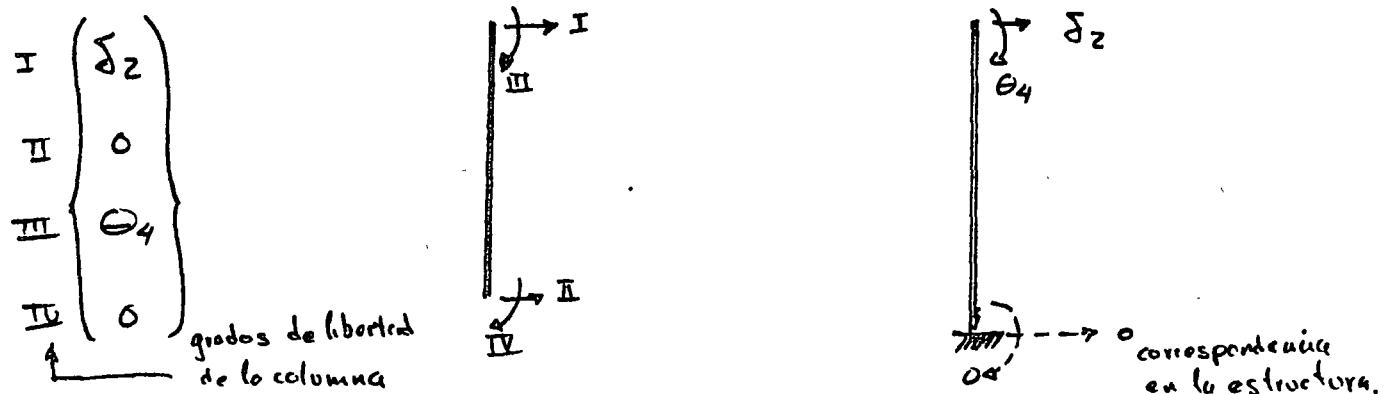
$$\underline{M} = \left[ \frac{4EI}{H} \right] \left[ 0.19853 \frac{PH^2}{EI} \right] = \left[ 0.794 PH \right]$$

Para la columna del primer piso se tiene:

$$\underline{K}_c = \begin{array}{cccc} \left. \begin{array}{l} \frac{24EI}{H^3} \\ -\frac{24EI}{H^3} \\ -\frac{12EI}{H^2} \\ -\frac{12EI}{H^2} \end{array} \right\} \text{I} & \left. \begin{array}{l} -\frac{24EI}{H^3} \\ \frac{24EI}{H^3} \\ \frac{12EI}{H^2} \\ \frac{12EI}{H^2} \end{array} \right\} \text{II} & \left. \begin{array}{l} -\frac{12EI}{H^2} \\ \frac{12EI}{H^2} \\ \frac{8EI}{H} \\ \frac{4EI}{H} \end{array} \right\} \text{III} & \left. \begin{array}{l} -\frac{12EI}{H^2} \\ \frac{12EI}{H^2} \\ \frac{4EI}{H} \\ \frac{8EI}{H} \end{array} \right\} \text{IV} \\ \text{I} & \text{II} & \text{III} & \text{IV} \end{array}$$

orden de los g. de lib.  
de la columna.

y los desplazamientos correspondientes son:

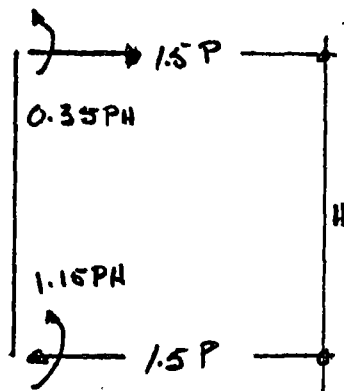


Efectuando el producto  $\underline{K}$  por los respectivos desplazamientos se obtienen los correspondientes momentos y fuerzas cortantes (a un giro le corresponde un momento y a un desplazamiento le corresponde una fuerza cortante). Así se llega a:

$$\begin{pmatrix} V_I \\ V_{II} \\ M_{III} \\ M_{IV} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \times 0.16176 P - 12 \times 0.19853 P \\ -24 \times 0.16176 P + 12 \times 0.19853 P \\ -12 \times 0.16176 PH + 8 \times 0.19853 PH \\ -12 \times 0.16176 PH + 9 \times 0.19853 PH \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.50 P \\ -1.50 P \\ -0.35 PH \\ -1.15 PH \end{pmatrix}$$

Nótese que  $V_{II}$  y  $M_{IV}$  son las reacciones en la base, y que las fuerzas cortantes valen  $1.5P$  lo cual puede deducirse por inspección de la estructura.

Las fuerzas indicadas están en equilibrio.

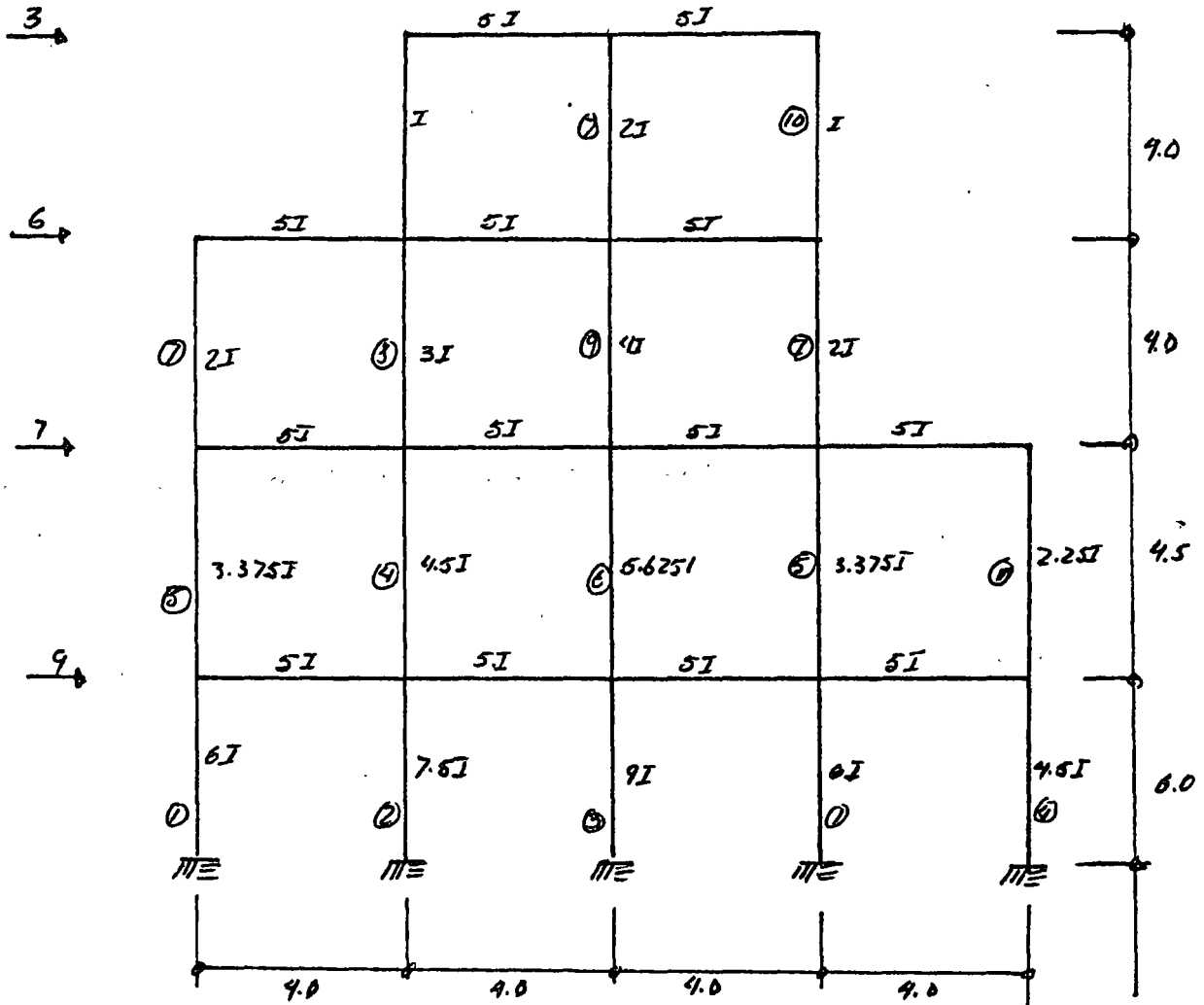


De manera similar se puede proceder con la otra viga y la columna del siguiente nivel.

Las computadoras digitales son muy apropiadas para manejar matrices por lo cual este método es el que usualmente se usa para elaborar programas para análisis de marcos y otros tipos de estructuras; - obsérvese que el procedimiento es sistemático y que las expresiones matriciales son fácilmente generalizables para estructuras más complicadas y para otros casos de carga. Para llevar a cabo eficientemente las operaciones se han desarrollado métodos numéricos especiales, que aprovechan las ventajas de las matrices de rigideces como son la simetría, términos dominantes en la diagonal etc.

Este método permite tomar en cuenta fácilmente las deformaciones axiales y por cortante, zonas de rigidez infinita en los elementos, efectos de esbeltez etc.

El marco mostrado en la figura se ha resuelto con computadora con el método directo de rigideces.

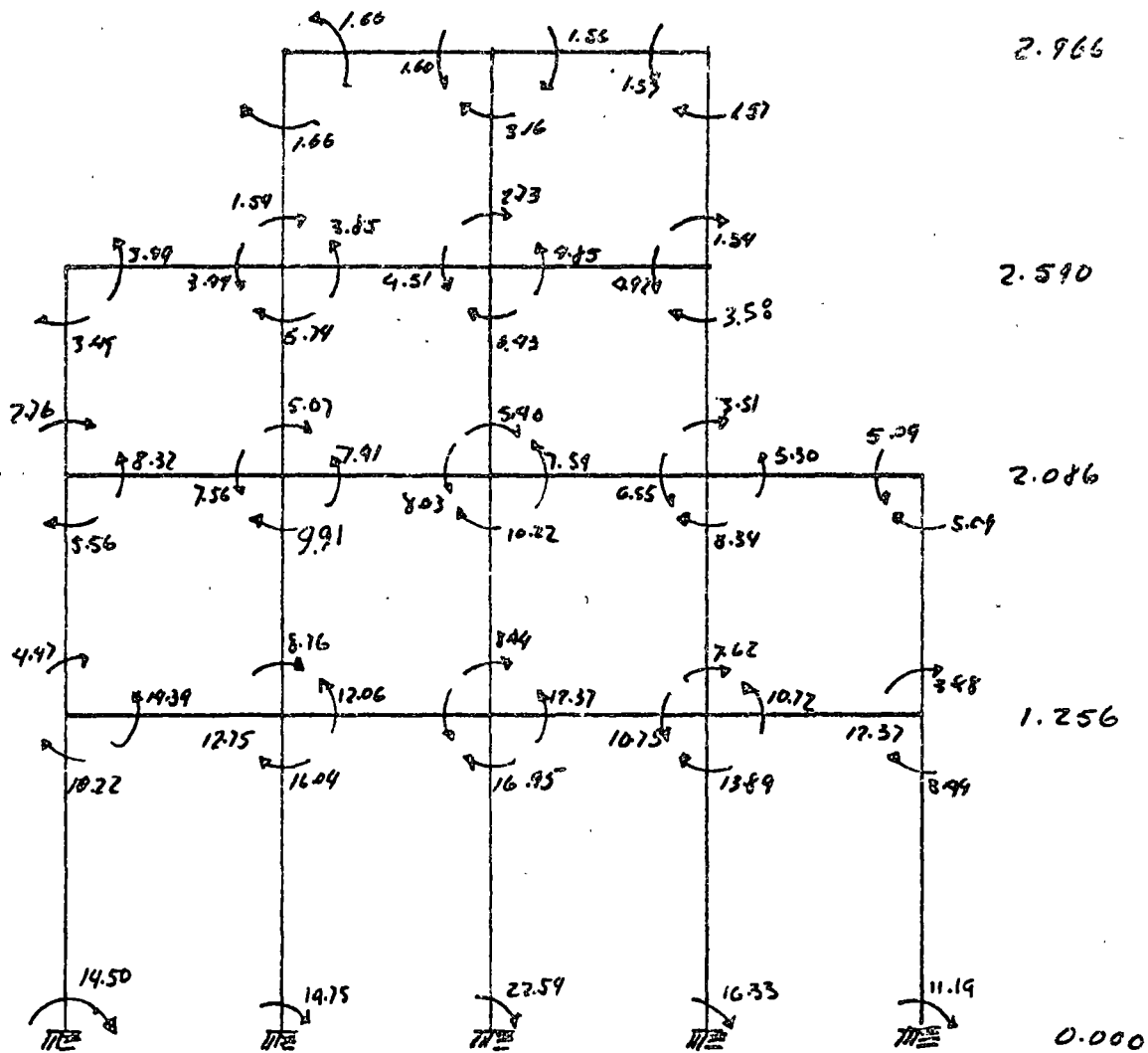


MARCO B DE LA REF 12

Fuerzas en toneladas y longitudes en metros.

$$I = 10.000 \text{ cm}^4$$

$$E = 1500.000 \text{ Kg./cm}^2$$



Momentos flexionantes (Ton - m )      despl.laterales (cm)

NOTA Este ejemplo está resuelto por varios métodos manuales exactos y aproximados en la ref. 12

Verifiquemos el cortante en el entrepiso inferior.

$$V = \frac{\sum M_{col}}{h} = \frac{10.22 + 14.50 + 16.04 + 19.75 + 16.95 + 22.54 + 13.89 + 16.33 + 8.49 + 11.19}{6.0}$$

$$V = 24.98 \approx 25.00 \text{ BIEN}$$

La rigidez de entrepiso es la relación entre la fuerza cortante resistida por un marco, muro o contraviento en un entrepiso y el desplazamiento horizontal relativo entre los dos niveles consecutivos. La rigidez así definida no es independiente del sistema de fuerzas laterales. Cor tanto, para calcularla con rigor debe conocerse tal sistema con anterioridad, lo cual en general no es posible.

En marcos ordinarios de edificios el empleo de sistemas de cargas que no son estrictamente proporcionales al definitivo de análisis introduce errores de poca importancia, y usualmente las rigideces calculadas a partir de hipótesis simplificatorias sobre la forma del sistema de fuerzas laterales son satisfactorias. En muros, contravientos y ciertos marcos es indispensable tener en cuenta la variación de la carga lateral.

En este capítulo se presentan métodos exactos y aproximados para cálculo de rigideces de entrepiso en marcos. El problema de muros y contravientos se trata en el capítulo 2.

1.21 *Fórmulas de Wilbur.* Estas son aplicables a marcos regulares formados por piezas de momento de inercia constante. La versión que aquí se presenta puede derivarse de la primera aproximación en el método de Maney-Goldberg.<sup>10</sup> Las hipótesis son las siguientes:

1. Los giros en todos los nudos de un nivel y de los dos niveles adyacentes son iguales (excepto en el nivel de desplante, en donde puede suponerse empotramiento o articulación según el caso).
2. La fuerza cortante en los dos entrepisos adyacentes al que interesa son iguales a la de éste.

De aquí resultan las siguientes expresiones.

Para el primer entrepiso:

Suponiendo columnas empotradas en la cimentación

$$R_1 = \frac{48E}{h_1 \left[ \frac{4h_1}{\Sigma K_{c,1}} + \frac{h_1 + h_2}{\Sigma K_{t1} + \frac{\Sigma K_{c,1}}{12}} \right]} \quad (1.29)$$

Suponiendo las columnas articuladas en la cimentación

$$R_1 = \frac{24E}{h_1 \left[ \frac{8h_1}{\Sigma K_{c,1}} + \frac{2h_1 + h_2}{\Sigma K_{t1}} \right]} \quad (1.30)$$

Para el segundo entrepiso:

Suponiendo las columnas empotradas en la cimentación

$$R_2 = \frac{48E}{h_2 \left[ \frac{4h_2}{\Sigma K_{c,2}} + \frac{h_1 + h_2}{\Sigma K_{t1} + \frac{\Sigma K_{c,1}}{12}} + \frac{h_2 + h_3}{\Sigma K_{t2}} \right]} \quad (1.31)$$

Suponiendo las columnas articuladas en la cimentación

$$R_2 = \frac{48E}{h_2 \left[ \frac{4h_2}{\Sigma K_{c,2}} + \frac{h_2 + h_3}{\Sigma K_{t2}} + \frac{2h_1 + h_2}{\Sigma K_{t1}} \right]} \quad (1.32)$$

Para entrepisos intermedios:

$$R_n = \frac{48E}{h_n \left[ \frac{4h_n}{\Sigma K_{c,n}} + \frac{h_m + h_n}{\Sigma K_{tm}} + \frac{h_n + h_o}{\Sigma K_{tn}} \right]} \quad (1.33)$$

En estas ecuaciones.

$R_n$  = rigidez del entrepiso en cuestión.

$K_{tm}$  = rigidez (I/L) de traveses del nivel sobre el entrepiso n.

$K_{cn}$  = rigidez (I/L) de columnas del entrepiso n.

$m, n, o$  = índices que identifican tres niveles consecutivos de abajo hacia arriba.

$h_n$  = altura del entrepiso n.

Las fórmulas de Wilbur son aplicables solamente a estructuras de cortante (marcos) y no a estructuras de flexión (muros). Para determinar cuando una cierta estructura puede ser considerada en uno de estos dos tipos es útil evaluar el parámetro  $p$ , denominado índice de rotación, el cual está definido por la relación:

$$p = \frac{\Sigma I_v / L}{\Sigma I_c / H}$$

Si  $p$  es mayor que 0.1 es aceptable suponer que la estructura en cuestión es de cortante.

Para el mano B de la ref 12, tenemos:

$$R_1 = \frac{48 \times 1500000}{600 \left[ \frac{4 \times 600}{550} + \frac{600 + 450}{500 + \frac{550}{12}} \right]} = 19086 \text{ Kg/cm}$$

$$R_2 = \frac{48 \times 1500000}{450 \left[ \frac{4 \times 450}{425} + \frac{600 + 450}{500 + \frac{550}{12}} + \frac{450 + 400}{500} \right]} = 20359 \text{ Kg/cm}$$

$$R_3 = \frac{48 \times 1500000}{400 \left[ \frac{4 \times 400}{275} + \frac{450 + 400}{500} + \frac{400 + 400}{375} \right]} = 18650 \text{ Kg/cm}$$

$$R_4 = \frac{48 \times 1500000}{400 \left[ \frac{4 \times 400}{100} + \frac{400 + 400}{375} + \frac{400}{250} \right]} = 9122 \text{ Kg/cm}$$

Con fórmulas de WILBUR					Método de Eideces	Error %
Nivel o entrepiso	Fuerza	Constante	Desplaz. entrepisos	Desplaz. total		
1	9000	25000	1.310	1.310	1.256	+4.30
2	7000	16000	0.786	2.096	2.086	+0.48
3	6000	9000	0.483	2.579	2.590	-0.42
4	3000	3000	0.329	2.908	2.966	-1.96



Una vez conocidos los desplazamientos se puede usar el método de Croos sin desplazamientos, de la misma manera que se hace con cargas verticales. El efecto de los desplazamientos laterales es producir momentos de empotramiento en las columnas que se calculan con la expresión:

$$M = \frac{12 EI}{H^2} \Delta_i$$

donde  $\Delta_i$  es el desplazamiento del entrepiso al que pertenece la columna.

Después de la distribución, se conocen los momentos en las vigas y columnas. La suma de momentos en todas las columnas de un entrepiso dividida entre la correspondiente altura debería ser igual al cortante actuante en tal entrepiso, pero como los desplazamientos se han calculado de manera aproximada esto en general no ocurrirá y se tendrá, para cada entrepiso una diferencia entre el cortante actuante  $V_i$  y el

cortante  $V_i^* = \frac{\sum M_{col}^i}{H_i}$

Para corregir esta deficiencia se sugiere calcular para cada entrepiso  $i$  la relación

$$\lambda_i = V_i / V_i^* \text{ (que será cercana a 1) y multiplicar los momentos de todas las colum-}$$

nas de ese entrepiso por  $\lambda_i$ . Para que los momentos de las vigas sigan estando en

equilibrio con los de las columnas se sugiere multiplicarlos por  $\frac{\lambda_i + \lambda_j}{2}$  donde

$i$  entrepiso superior

$j$  entrepiso inferior

### 1. MARCOS SUJETOS A FUERZAS LATERALES

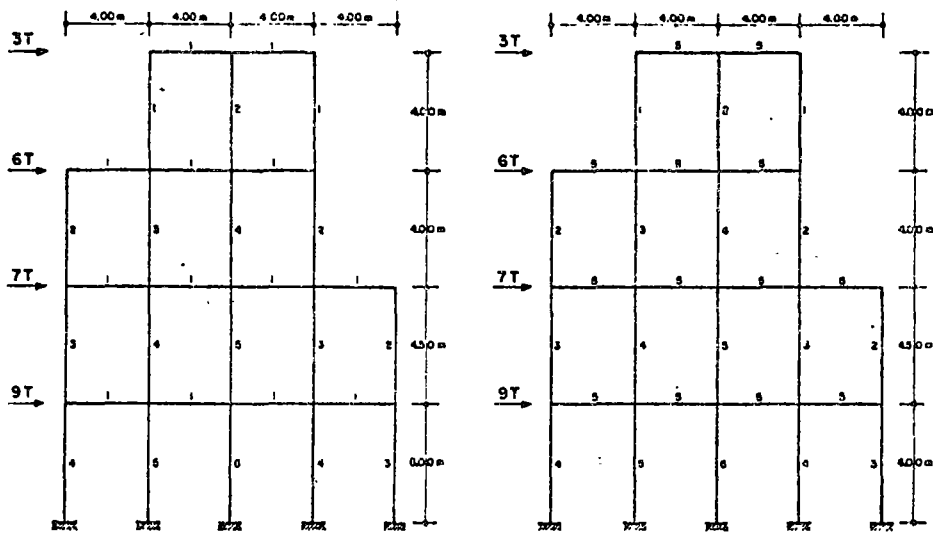
En la práctica revisten importancia el análisis de marcos de edificios sujetos a fuerzas laterales y el cálculo de sus rigideces. Este capítulo describe e ilustra con ejemplos los principales métodos aproximados y exactos, cuya aplicación es práctica en problemas usuales. Se incluye en cada caso un resumen de las hipótesis de partida, a fin de permitir el juicio sobre la aplicabilidad a cada problema concreto.

En la mayor parte de los ejemplos se analizan por cada método propuesto los marcos A y B (fig. 1.1 \*). Estos son idénticos en geometría;

no dan resultados satisfactorios para análisis definitivos. En algunos de los métodos se toman en cuenta las rigideces relativas de las piezas; en otros, los elementos mecánicos se determinan sin atender a consideraciones de deformabilidad.

1.01. Método del portal. Se basa en las siguientes hipótesis.<sup>1,2</sup>

1. Los puntos de inflexión de traveses y de columnas se encuentran en sus puntos medios.
2. La fuerza cortante en cada una de las columnas exteriores de un piso es igual a la mitad de la que corresponde a cada columna interior. Así el problema se torna isostático.



MARCO A  
 MARCO B  
 NOTA: Los números indicados al centro de cada pieza indican los rigideces relativas  
 MARCOS ANALIZADOS EN LOS EJEMPLOS

FIG.1.1

difieren en las rigideces de sus elementos estructurales.

Al tratar los métodos de aproximaciones sucesivas se hace hincapié en la obtención de una primera aproximación de partida, que pueda refinarse hasta la precisión requerida.

#### 1.0. Métodos aproximados

1.00. Generalidades. Los métodos que a continuación se describen son útiles para efectuar el análisis preliminar de algunos marcos. En general

\* En la figura, al igual que en la totalidad de este trabajo, según la práctica de la ref. 3, se entiende por nivel una superficie horizontal en la que se admiten alojados los ejes de traveses; se entiende por entrepiso el espacio comprendido entre dos niveles consecutivos. Se denominará nivel 0 aquel bajo el cual se desprecian las deformaciones laterales de la estructura. Entrepiso 1 será el comprendido entre los niveles 0 y 1.

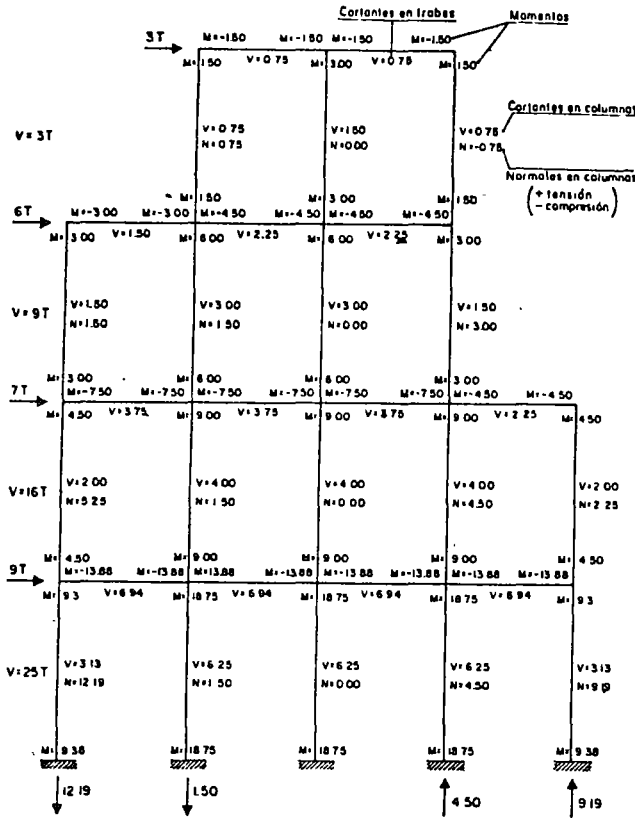
El proceso de cálculo puede resumirse en los siguientes pasos.

1. Determinese la fuerza cortante de cada entrepiso.
2. Obténgase la fuerza cortante en cada columna usando la hipótesis 2.
3. Calcúlense los momentos flexionantes en los extremos de todas las columnas, teniendo en cuenta la hipótesis 1.
4. Obténganse los momentos en los extremos de todas las traveses equilibrando los momentos de las columnas en cada nudo. Para ello es necesario comenzar en nudos que tengan una sola trabe y proseguir recordando que los momentos en los extremos de una misma trabe son iguales entre sí.

5. Obténganse cortantes en las traves a partir de los momentos de sus extremos.
6. Obténganse las fuerzas axiales en las columnas a partir de las cortantes de las traves.

La fig 1.2 resume la aplicación del método a un marco de cuatro pisos.

1.02. Método del voladizo. Se utiliza este método para el análisis preliminar de marcos esbeltos; las hipótesis en que se basa son: <sup>1,2</sup>



METODO DEL PORTAL  
EJEMPLO 1  
FIG.1.2

1. Los puntos de inflexión de traves y columnas se encuentran en sus puntos medios.
2. La fuerza axial en cada columna de un mismo entrepiso es proporcional a su sección transversal y a su distancia al centro de gravedad de las columnas del marco en el entrepiso considerado. (En ocasiones se suponen todas las columnas de igual sección transversal y se calculan las cargas axiales como directamente proporcionales a sus distancias al centro de gravedad del marco.) Esta suposición es la que da su nombre al método.

Los pasos a seguir se resumen a continuación.

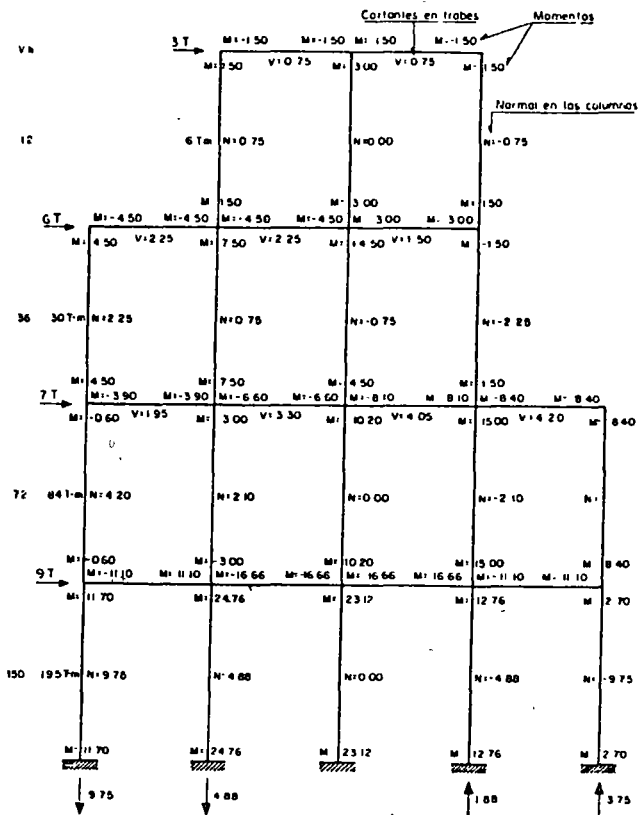
1. Considerando el edificio como un voladizo, determinense los momentos de las fuerzas exteriores con respecto a secciones horizontales que pasen por los puntos de inflexión de las columnas en cada entrepiso.

2. Los momentos así calculados se utilizan para obtener las fuerzas axiales en las columnas aplicando la hipótesis 2.
3. A partir de las fuerzas axiales de las columnas obténganse las cortantes en las traves.
4. Determinense los momentos en traves y columnas aplicando la suposición 1.

Este método se aplica al análisis de un marco en la fig. 1.3.

1.03. Método de Bowman. Como resultado del estudio de un gran número de marcos resueltos por métodos "exactos", se ha propuesto un método aproximado de acuerdo con las siguientes hipótesis: <sup>1,2</sup>

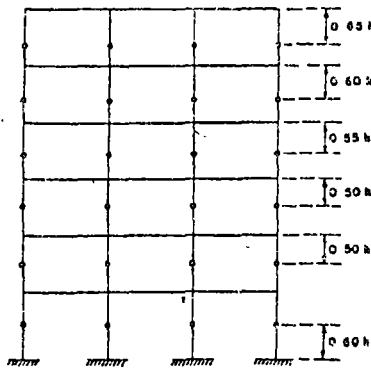
1. Los puntos de inflexión en las traves exteriores se encuentran a 0.55 de su claro, a partir de su extremo exterior. En traves interiores, el punto de inflexión se encuentra al centro del claro, excepto en la crujía central cuando el número de crujías es impar, o en las dos centrales si es par. En estas crujías la posición de puntos de inflexión en las traves está forzada por condiciones de simetría y equilibrio.
2. Los puntos de inflexión en las columnas del primer entrepiso se encuentran a 0.60 de su altura, a partir de la base. En marcos de dos o más, tres o más, o cuatro o más entrepisos, respectivamente, los pun-



METODO DEL VOLADIZO  
EJEMPLO 2  
FIG.1.3

tos de inflexión en las columnas de los entrepisos último, penúltimo y antepenúltimo, respectivamente, se encuentran a 0.65, 0.60 y 0.55 de la altura correspondiente, a partir del extremo superior. En edificios de cinco o más entrepisos, los puntos de inflexión en columnas para las cuales no se ha especificado la posición, se encuentran al centro de su altura.

Esto se resume gráficamente en la fig. 1.4.



Posición de los puntos de Inflexión de las columnas según el método de Bowman

METODO DE BOWMAN  
FIG. 1.4

3. La fuerza cortante de cada entrepiso se distribuye en la forma siguiente. En el primer entrepiso:

Una fuerza cortante igual a

$$V_c = \frac{N - 0.5}{N + 1} V$$

se distribuye directamente entre las columnas proporcionalmente a sus rigideces. La fuerza cortante  $V_i = V - V_c$  se distribuye entre las crujías proporcionalmente a la rigidez de la trabe que la limita en la parte superior. La cortante de cada crujía se distribuye en partes iguales entre las dos columnas que la limitan.

En pisos superiores:

Una fuerza cortante

$$V_c = \frac{N - 2}{N + 1} V$$

se distribuye directamente entre las columnas. La cortante  $V_i = V - V_c$  se distribuye entre las crujías como se hizo para planta baja.

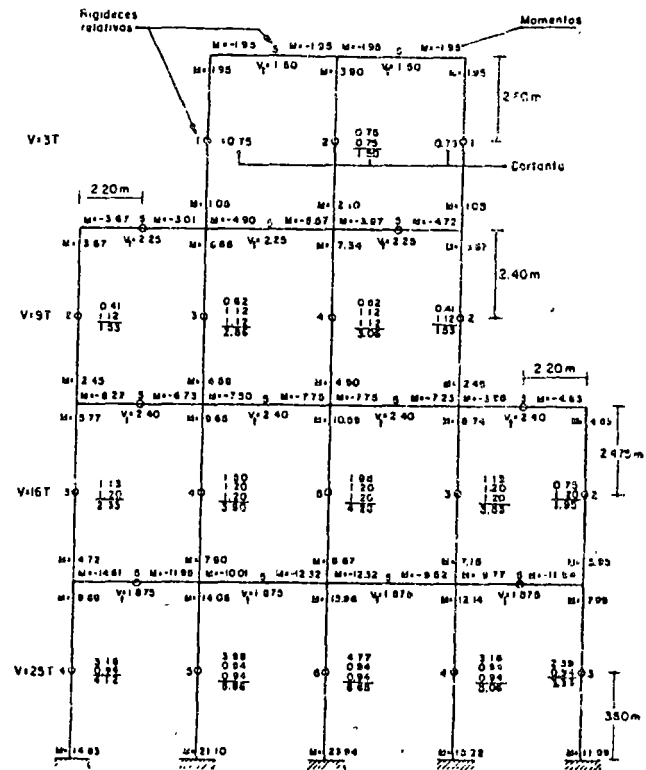
En estas expresiones,

$V_c$  = fuerza cortante total en un entrepiso.

$N$  = número de crujías del marco en el entrepiso considerado.

Una variante del método consiste en respetar los puntos 2 y 3, pero determinar los momentos

en las trabes equilibrando en cada nudo la suma de momentos en los extremos de las columnas con momentos proporcionales a la rigidez angular natural de cada trabe. La fig. 1.5 es la aplicación de este método al análisis del marco B



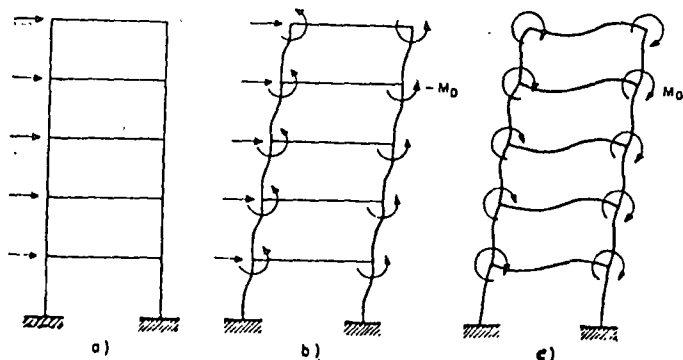
METODO DE BOWMAN (Marco B)  
EJEMPLO 3

FIG. 1.5

1.12. Método de distribución en voladizo (Grin-ter-Tsao). Este método es rigurosamente aplicable sólo a marcos simétricos de una crujía y a aquellos de varias crujías cuyas rigideces guarden relaciones tales que sea posible descomponerlos en varios marcos simétricos de una crujía cada uno<sup>6,7</sup>. Sin embargo, puede aplicarse en forma aproximada al análisis de cualquier marco que se idealice como simétrico y de una crujía, igualando la suma de rigideces de trabes y columnas en cada entrepiso en el marco original y en el idealizado. Esto equivale a suponer que todos los nudos de un mismo nivel sufren la misma rotación.

El método consiste en lo siguiente (fig. 1.12).

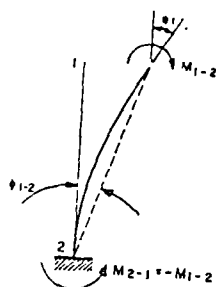
Permitase el desplazamiento lineal de todos los nudos, hasta que se logre el equilibrio de fuerza cortante en cada entrepiso. En esta etapa los momentos exteriores  $-M_0$  impiden el giro de los nudos (fig. 1.12b). Elimínense ahora estos mo-



METODO DE GRINTER - TSAO

FIG. 1.12

mentos permitiendo simultáneamente giros y nuevos desplazamientos lineales sin que se altere la fuerza cortante de cada entrepiso (fig. 1.12c).



DESPLAZAMIENTO SIN CORTANTE  
FIG. 1.13

Considérese una columna (fig. 1.13) a uno de cuyos extremos se permite giro y desplazamiento transversal simultáneo. Partiendo de que es nula la cortante que proviene de esta deformación, las ecuaciones de pendiente-deformación suministran las relaciones

$$M_{12} = 2EK_{12}(2\theta_1 - 3\psi_{12}), \quad (1.9)$$

$$M_{21} = 2EK_{12}(\theta_1 - 3\psi_{12}). \quad (1.10)$$

Al no haber fuerza cortante,

$$M_{21} = -M_{12}. \quad (1.11)$$

De las ecs. 1.9 y 1.11,

$$\theta_1 = 2\psi_{12},$$

$$M_{12} = EK_{12} \theta_1. \quad (1.12)$$

Teniendo en cuenta las ecs. 1.11 y 1.12 y considerando que la deformación de la estructura será antisimétrica se reduce el problema a la solución de la mitad del marco por distribución de momentos. En este proceso las rigideces de las traveses se calculan como  $6EK$ , las de las columnas como  $EK$  y el factor de transporte en las columnas es  $-1$ .

El método se aplica en las figs. 1.14 y 1.15 a idealizaciones de los marcos A y B. La rigidez de cada columna se obtuvo como la suma de rigideces de todas las columnas del entrepiso, y la rigidez de las traveses como  $2 \times 6 = 12$  veces la suma de rigideces de las traveses en el nivel considerado. (El coeficiente 6 toma en cuenta la rigidez modificada y el 2 toma en cuenta la rigidez de cada trabe en sus dos extremos.)

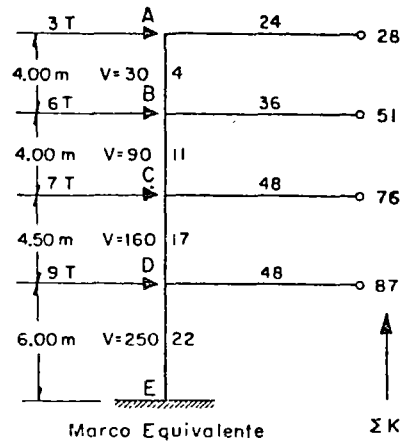
La tabla que aparece en las figs. 1.14 y 1.15 es idéntica a una distribución de momentos por el método de Cross, por lo que no amerita explicación. Obsérvese solamente que los momentos de empujamiento se obtuvieron como el producto de la fuerza cortante en cada entrepiso por la mitad de la altura correspondiente.

Calculados los momentos en la estructura simplificada, es necesario obtener elementos mecánicos, en el marco original. Para ello se distribuyen los que se obtuvieron en aquella proporcionalmente a las rigideces de las piezas de éste. El

resultado de la operación se consigna en el renglón 2 correspondiente a cada pieza en las figs. 1.14b y 1.15b.

Puede verificarse que el equilibrio de cortante en cada entrepiso se satisface. No así el equilibrio de cada nudo, ya que la hipótesis de giros iguales de todos los nudos de un nivel no necesariamente es correcta. En los renglones 3-5 se lleva a cabo una distribución de momentos con los nudos fijos linealmente. En el renglón 6 se anota el resultado final de esta distribución.

Al efectuar la distribución descrita se desequilibran las cortantes de entrepiso. Ello se observa al comparar los valores de  $\Sigma m$  para todas las columnas de un entrepiso con el producto  $Vh$  correspondiente. Los errores son tan pequeños en este caso que no justifican un refinamiento mayor; no obstante, los residuos que aquí se obtienen pueden considerarse como un nuevo sistema de cargas horizontales al cual puede aplicarse el mismo procedimiento.

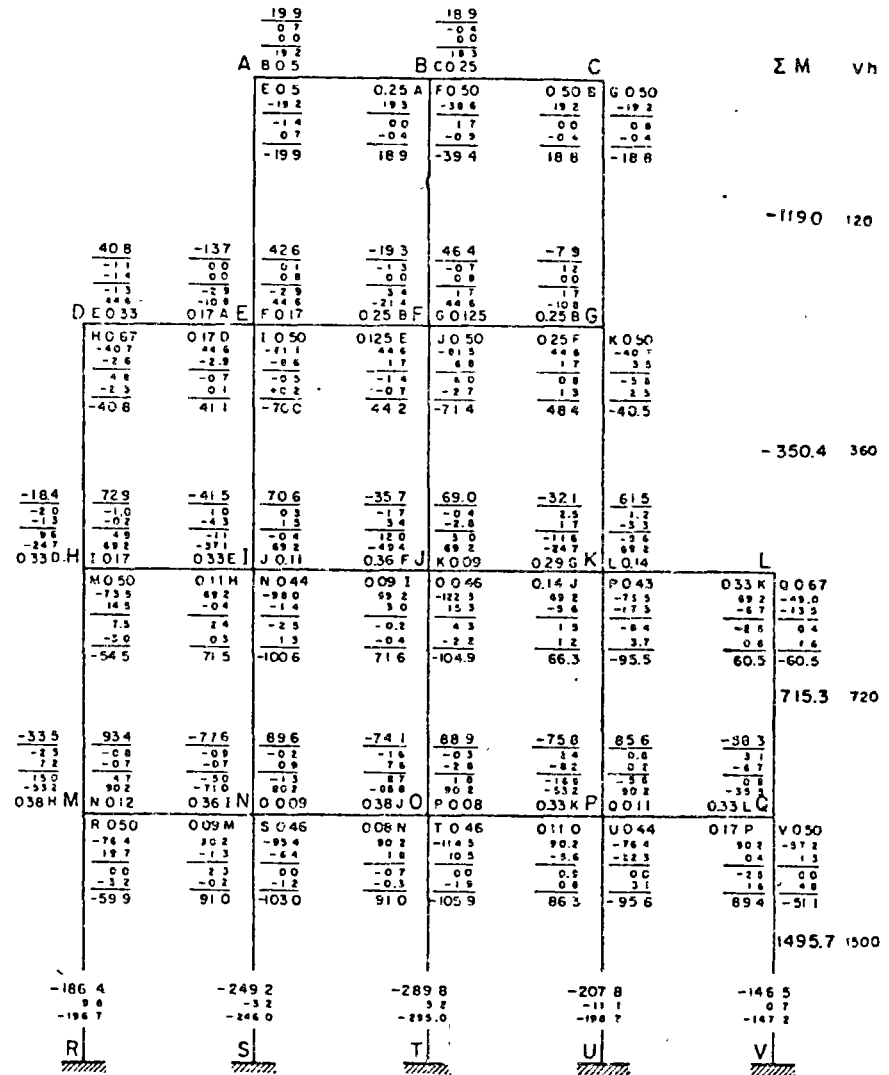


0.143	-6.0
0.079	-6.0
0.216	-18.0
0.145	-18.0
0.224	-36.0
0.195	-36.0
0.253	-75.0
	-75.0

Factores de distribución

Momentos de Empotr. (ton-m)

MIEMBRO	AB	BA	BC	CB	CD	DC	DE	ED
FACTORES DE DISTRIBUCION	0.143	0.079	0.216	0.145	0.224	0.195	0.253	—
MOMS. NUDOS FIJOS	-60	-60	-180	-180	-360	-360	-750	-750
BALANCED	9	19	52	78	121	216	281	—
TRANSPORTE	-19	-9	-78	-52	-216	-121	—	-281
BALANCED	3	7	19	39	60	24	30	—
TRANSPORTE	-7	-3	-39	-19	-24	-60	—	-30
BALANCED	1	3	9	6	10	12	15	—
TRANSPORTE	-3	-1	-6	-9	-12	-10	—	-15
BALANCED	0	1	1	3	5	2	3	—
TRANSPORTE	-1	0	-3	-1	-2	-5	—	-3
BALANCED	0	0	1	0	1	1	1	—
TRANSPORTE	0	0	0	-1	-1	-1	—	-1
BALANCED	0	0	0	0	1	0	0	—
MOMENTOS EN LAS COLUMNAS	-77	-43	-224	-136	-417	-302	-420	-1080
MOMENTOS EN LAS TRABES	77	257	553	722	—	—	—	—



METODO DE GRINTER-TSAO-CROSS  
EJEMPLO-9  
FIG. 1.14

100

### 3.2. ANALISIS DE SISTEMAS MARCO-MURO

Las figuras y tablas siguientes han sido tomadas y adaptadas de la ref 15

Fig. 24. Deformación de una viga adyacente a una columna flexible.

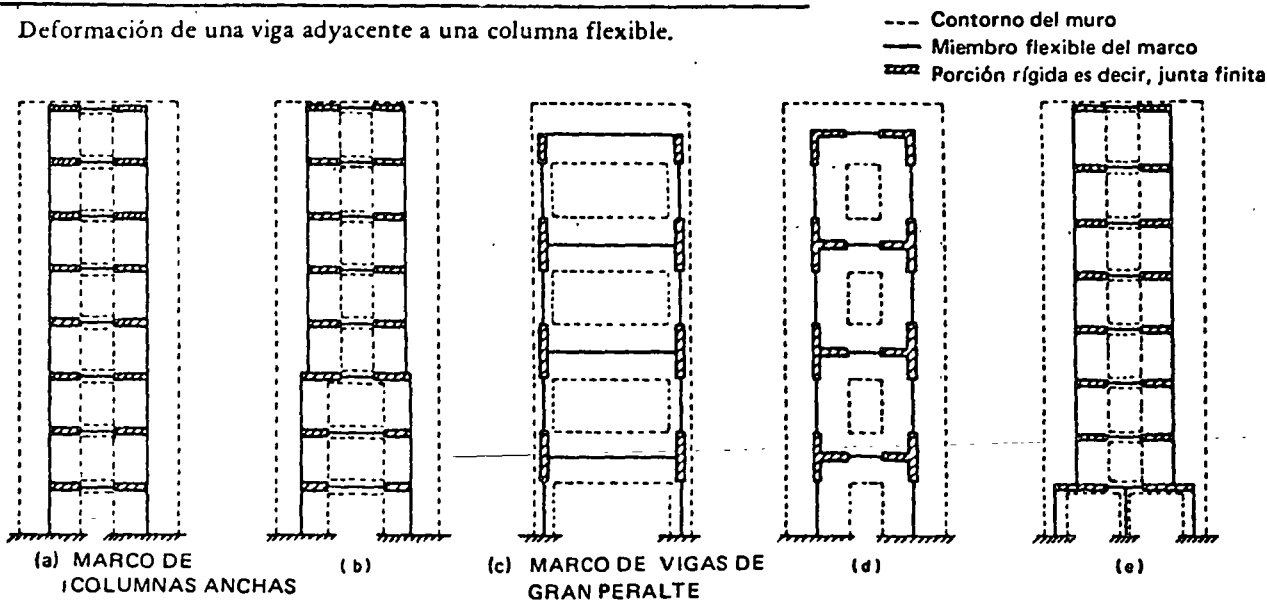


Fig. 25. Marcos con juntas finitas

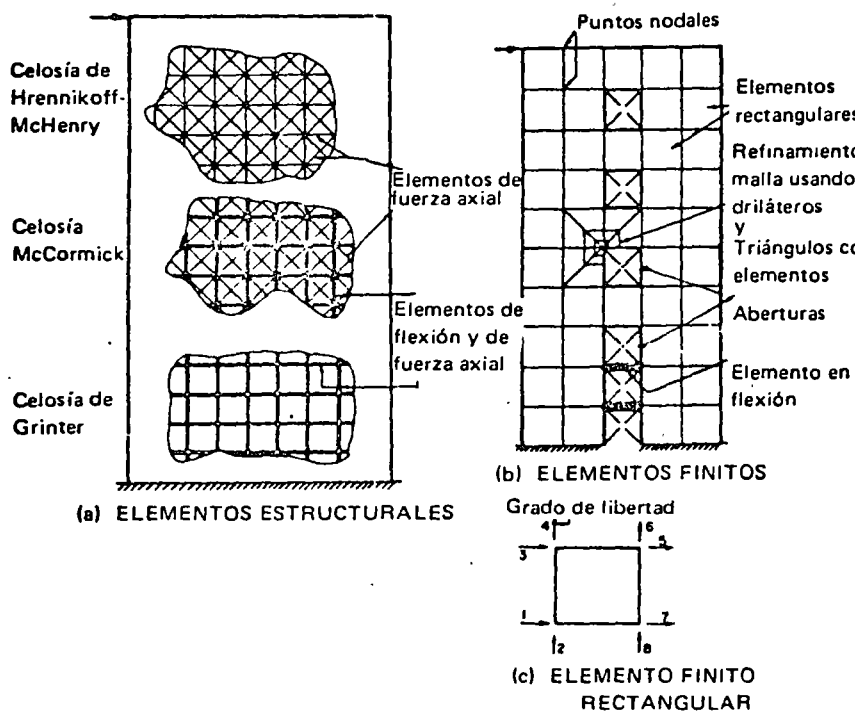


Fig. 26. Estructuras y elementos finitos

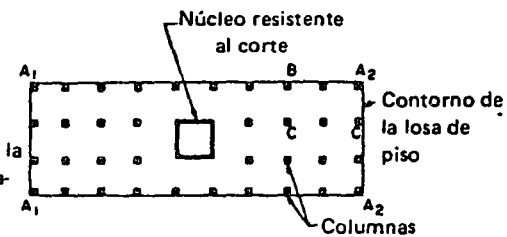


Fig. 27. Planta de una estructura con muchos pisos

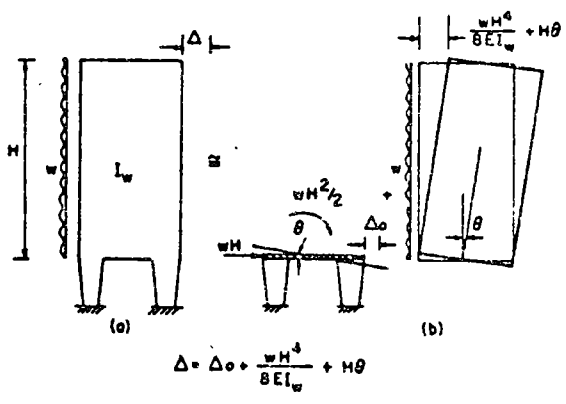


Fig. 17. Muro de cortante apoyado en columnas.

$$\Delta = \Delta_0 + \frac{wH^4}{8EI_w} + H\theta$$

$$\alpha H = H \sqrt{\frac{12I_b}{hb^3} \left[ \frac{I^2}{(I_{C1} + I_{C2})} + \frac{A_1 + A_2}{A_1 A_2} \right]}$$

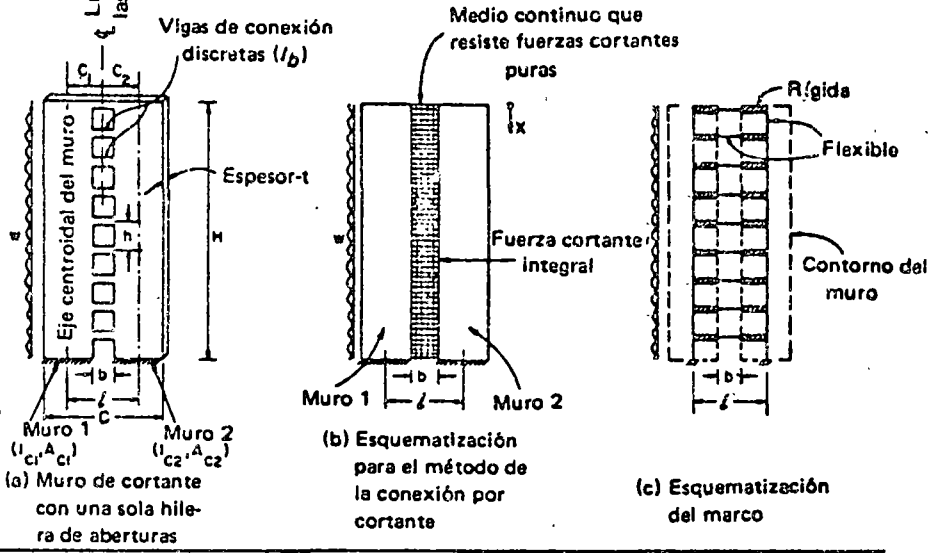


Fig. 18. Esquemización de marcos con aberturas.

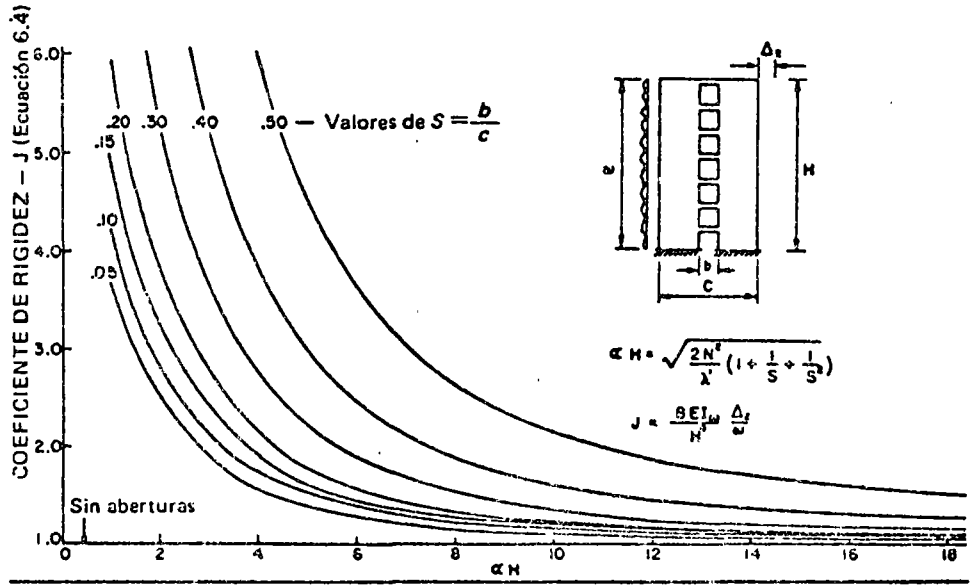


Fig. 19. Variación de la rigidez del muro de cortante con una sola fila de aberturas.

Tabla 3. Comportamiento de los muros de cortante con una sola hilera de aberturas.

$\alpha H^*$	Comportamiento
> 8	Se aproxima al del muro sin aberturas. La deformación axial de las columnas es muy importante en el cálculo de la rigidez.
4-8	Transición
0-4	Dos muros conectados. El comportamiento se aproxima al de un marco rígido.



Tabla 4. Artículos sobre el método de la conexión por cortante.

Referencia	Número de hileras de aberturas		Carga			Condiciones de la cimentación				Variación de las propiedades con la altura			Presentación				Comentarios
	Una sola o dos simétricas	2 o más	Carga concentrada en el extremo superior	Uniformemente distribuida	Triangular	Fija	Elástica	Variación en el piso inferior	Asentamiento diferencial	No varían	Continuamente	Escalonada	Ecua-ciones	Gráficas		Defle-xión	
														Fuerzas cortantes en las vigas	Momen-tos en las columnas		
(14) Beck	X	-	-	X	-	X	-	-	-	X	-	-	X	X	X	X	Notación equivalente $\ddot{a}$ y $aH$
(15, 16) Coull & Choudhury	X	-	X	X	X	X	-	-	-	X	-	-	X	X	X	X	
(17) Magnus	X	-	-	X	-	X	X	-	X	X	-	-	X	X	X	X	Notación equivalente $n\sqrt{ab}$ y $aH$
(18) Eriksson	X	X	-	X	-	X	-	-	-	X	-	-	X	-	-	-	
(19) Rosman	X	-	X	-	-	X	X	X	-	X	-	-	X	-	-	-	
(20) Rosman	X	-	-	X	-	-	-	X	-	X	-	-	X	-	-	-	
(21) Rosman	X	X	X	X	X	X	X	X	-	X	-	-	X	-	-	-	En alemán
(22) Rosman	X	-	X	X	X	X	-	-	-	X	-	-	X	X	X	-	En alemán y en inglés
(23) Rosman	X	-	-	X	-	X	-	-	-	-	-	X	X	-	-	-	En alemán
(24) Coull & Puri	X	-	-	X	-	X	-	-	-	X	-	X	X	-	-	-	Para la variación con la altura, las rigideces de los muros y vigas deben variar proporcionalmente
(25) Traum	X	-	-	X	-	X	-	-	-	-	-	X	X	-	-	-	El método es esencialmente el mismo que en la Ref. 23
(26) Burns	X	-	-	-	X	X	-	-	-	X	X	-	X	X	-	X	Variación parabólica del espesor
(27) Barnard & Schwaighofer	X	-	-	X	-	X	-	-	-	X	-	-	X	-	-	-	Se hacen aproximaciones para reducir el cálculo

x significa SI; - significa NO

- Tso, W. K and Chan H. B. "Dynamic Analysis of Plane Coupled Shear Walls" Journal ASCE Eng. Mech. Div. Feb 1971  
 Tso, W. K and Biswas, J. K. "General Analysis of Nonplanar compled shear Walls" Journal ASC Struct. Div. Marzo 1973  
 Pekan, O. A. and Gocevski, V. "Behaviour of Compled Non-linear Shear Walls" Proc. Central American Conf. on Earth. Eng. San Salvador, 1978

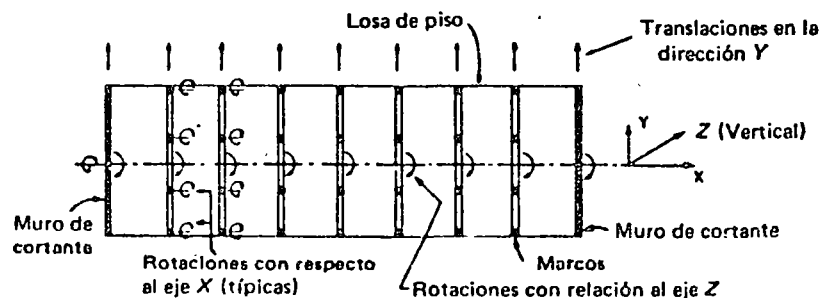


Fig. 30. Planta de estructura mostrando los grados de libertad usados cuando el piso actúa como viga horizontal (referencia 54)

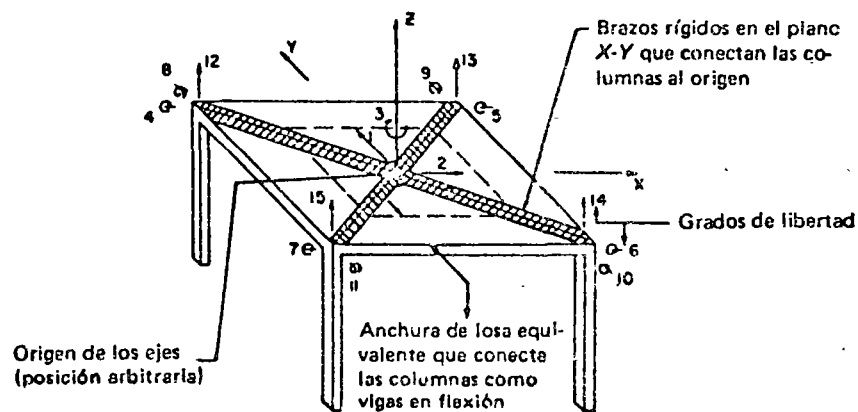
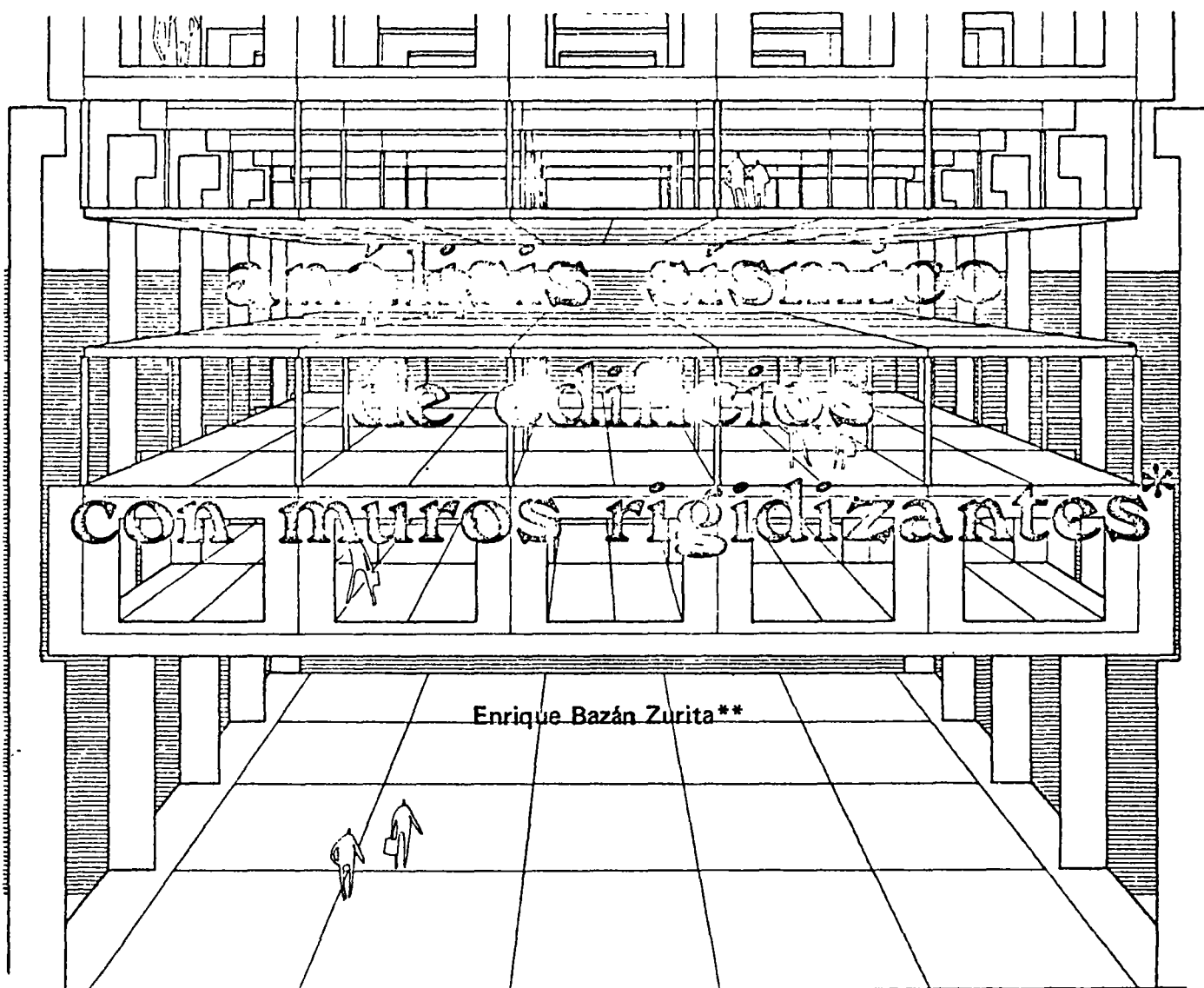


Fig. 31. Estructura con la forma de mesa mostrando los grados de libertad por el método del piso rígido.

Tabla 7. Métodos manuales para el análisis de la interacción de los muros de cortante con marcos.

Referencia	Detalles que se incluyen							Cálculos que se requieren
	Deformación axial de las columnas	Deformación por cortante	Movimiento de la cimentación	Flexión de las vigas adyacentes al muro de cortante	Variación de las propiedades con la altura	Los puntos de inflexión no están a la altura de las columnas	Se dan gráficas para simplificar los cálculos	
(2) Khan & Sbarounis	X	—	X	X	X	X	X	Análisis del marco por Distribución de momentos sin movimiento horizontal o por el método pendiente-deflexión. Cálculo de la deflexión del marco y del muro de cortante. Proceso iterativo.
(3, 65) Parme	—	—	—	—	X	X	X	Conjunto de ecuaciones diferenciales simultáneas de orden igual al número de pisos; la forma de las ecuaciones simplifica la solución.
(66) Gould	—	—	—	X	X	X	—	Como Parme: El método de resolver las ecuaciones no se describe.
(67) Rosenblueth & Holtz	—	X	X	—	X	—	—	Aproximaciones sucesivas para las fuerzas de interacción.
(68) Cardan	—	X	X	X	—	—	—	Substitución en ecuaciones. No se usan ecuaciones simultáneas ni iteración.
(69) Rosman	—	—	X	—	—	—	—	Como Cardan.

—X significa SI; — significa NO



### RESUMEN

*En este artículo se presenta un procedimiento para llevar a cabo el análisis sísmico de edificios con muros rigidizantes, de acuerdo con los requisitos del Reglamento de construcciones para el Distrito Federal de 1976. Se incluye también un método simplificado, pero suficientemente aproximado, para el análisis de marcos y de sistemas marco-muro ante cargas laterales.*

### SUMMARY

*In this article, a method to carry out the seismic analysis of shear wall buildings is presented, in accordance with the requirements of the 1976 Building Code for Mexico City. A simplified but sufficiently approximated method for the analysis of frames and of frames interconnected to shear walls subjected to lateral loads is also included.*

- \* Conferencia dictada en la ciudad de México, el 27 de octubre de 1977, durante el Primer Congreso Nacional de Ingeniería Estructural.
- \*\* Ingeniero Civil, Universidad Nacional de Ingeniería, Lima, Perú. Maestro en Ingeniería-Estructuras, UNAM. Investigador, Instituto de Ingeniería, UNAM.

## 1.-INTRODUCCION

El análisis sísmico estático de los edificios y una variante del análisis dinámico espectral, consisten en:

- 1) Obtener las fuerzas laterales que representan la acción sísmica sobre el edificio en dos direcciones ortogonales.
- 2) Distribuir estas fuerzas entre los elementos resistentes (marcos y/o muros)
- 3) Determinar los elementos mecánicos que se generan en los miembros de cada elemento resistente.

El Reglamento de construcciones para el Distrito Federal (Ref. 1) especifica cómo realizar el paso 1. En este trabajo se presentan procedimientos para efectuar los pasos 2 y 3, satisfaciendo las exigencias de este Reglamento; los mismos métodos pueden aplicarse, casi sin modificaciones, cuando los edificios se encuentren en otros lugares o cuando se trate de cargas laterales distintas de las sísmicas.

La presentación es matricial porque cuando existen muros rigidizantes no es posible usar los procedimientos tradicionales, basados en el concepto de rigidez de entrepiso, que no se pueden definir con precisión en este caso.

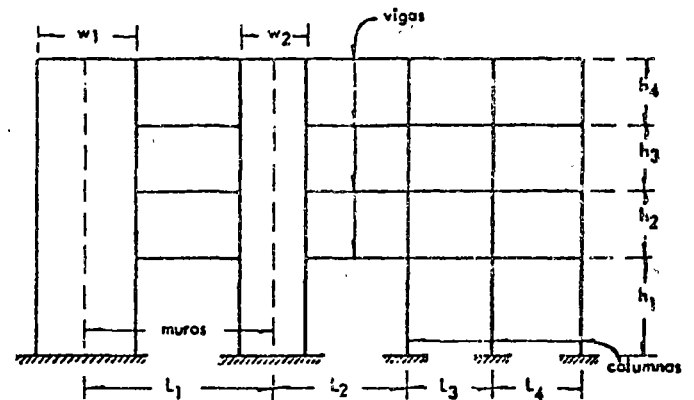


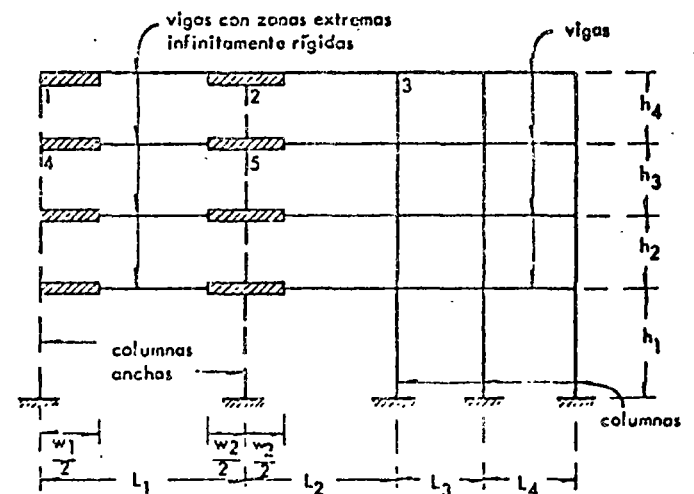
Fig. 1.- Sistema plano rectangular típico.

## 2.-ANALISIS TRIDIMENSIONAL DE EDIFICIOS

Para hacer el análisis tridimensional de edificios se aceptan las siguientes hipótesis:

- i) La estructura tiene un comportamiento elástico lineal.
- ii) El edificio está formado por sistemas planos rectangulares verticales, conectados horizontalmente por los sistemas de piso, en cada uno de los niveles. La Fig. 1 muestra un sistema plano típico.
- iii) La rigidez de los sistemas de piso en su propio plano es infinita, por lo cual funcionan como diafragmas rígidos.
- iv) Los muros se representan adecuadamente como columnas anchas y se considera que las zonas de las vigas que están dentro de ellos no se deforman por flexión (Fig. 2).
- v) Se desprecia la rigidez torsional de vigas, columnas y muros.
- vi) Las fuerzas laterales están aplicadas a nivel de los sistemas de piso.

Fig. 2.- Idealización del sistema plano de la Fig. 1.



Las hipótesis (ii) y (iii) implican que cada sistema plano rectangular tiene sólo un grado de libertad lateral por nivel, y que el edificio completo tiene tres: dos traslaciones en las direcciones de dos ejes ortogonales y una rotación alrededor de un eje normal al piso.

La hipótesis (iv) fue propuesta por Frischman y otros (Ref. 3) y ha sido usada por varios autores (Refs. 4 y 5). En el desarrollo de este trabajo se han comparado sus resultados con soluciones obtenidas con elementos finitos y con métodos aproximados propuestos por Stamato y Stafford-Smith (Ref. 6); las diferencias no fueron significativas en ninguno de los casos estudiados. En una columna ancha, a diferencia de las normales, son significativas las deformaciones debidas a cortante; esto se incluye en el análisis en la forma descrita en el Apéndice A. La manera de tomar en cuenta que una viga tiene zonas indeformables en sus extremos se presenta en este mismo Apéndice.

Con base en las hipótesis mencionadas, el análisis tridimensional de edificios puede hacerse de la siguiente manera:

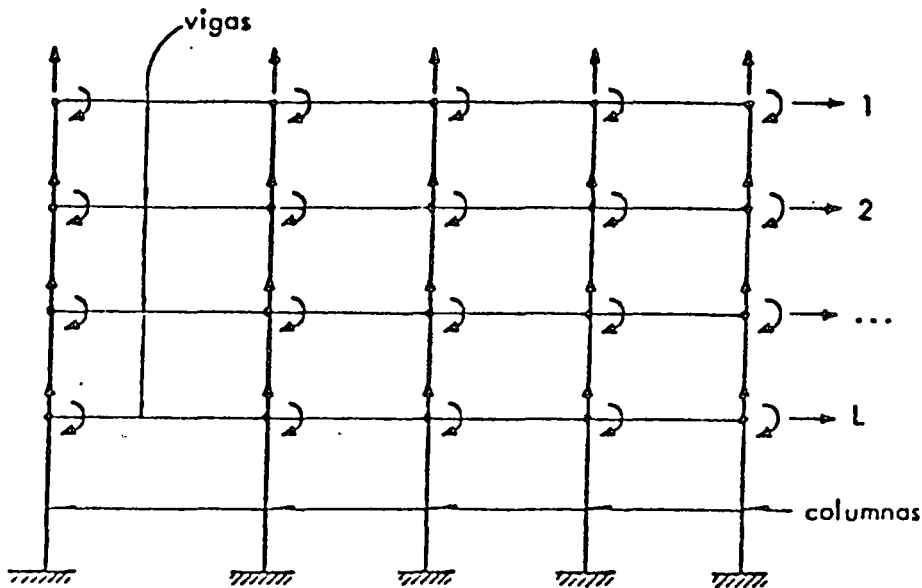
- I) Se calcula la matriz de rigidez lateral  $K_j$  de cada sistema plano  $j$ .
- II) Se calcula la matriz de rigidez del edificio completo  $K$ .
- III) Para cada caso de fuerzas laterales  $F_j$  se calculan los desplazamientos  $U$  del edificio completo, los desplazamientos laterales  $D_j$  de cada sistema plano y los elementos mecánicos de las vigas, columnas y/o muros que los formen.

A continuación se describen dos métodos para ejecutar estos pasos:

### 2.1.- Método General

**Paso I.** En cada sistema plano  $j$  se permiten los siguientes grados de libertad: un desplazamiento vertical y un giro en el plano del sistema por cada nudo y un desplazamiento horizontal por cada nivel, como se ilustra en la Fig. 3. La matriz de rigidez correspondiente a estos grados de libertad se obtiene sumando los aportes de las vigas, que pueden tener extremos infinitamente rígidos, y las columnas, que pueden ser anchas; en el Apéndice A se dan estas matrices. Si se tiene  $N$  nudos y  $L$  niveles, la matriz resultante es de orden  $2N \times L$ , y de ella se eliminan los grados de libertad correspondientes a los nudos para obtener la matriz de rigidez lateral  $K_j$ , en términos de solamente los desplazamientos de los niveles y de orden  $L \times L$ . El proceso de eliminación se denomina condensación estática y la forma eficiente de efectuarlo se describe en la Ref. 10.

**Paso II.** Se expresa la matriz de rigidez lateral  $K_j$  de cada sistema plano en términos de los grados de libertad del edificio completo. Esta transformación se describe en detalle en el Apéndice B, y se llama  $K_j^*$  a la matriz resultante, que es de orden  $3L \times 3L$ . La matriz de rigidez del edificio es:  $K = \sum_j K_j^*$ , también de  $3L \times 3L$ .



Nota: las columnas pueden ser anchas y las vigas pueden tener extremos infinitamente rígidos

Fig. 3.- Grados de libertad en un sistema plano idealizado, para emplear el método general.

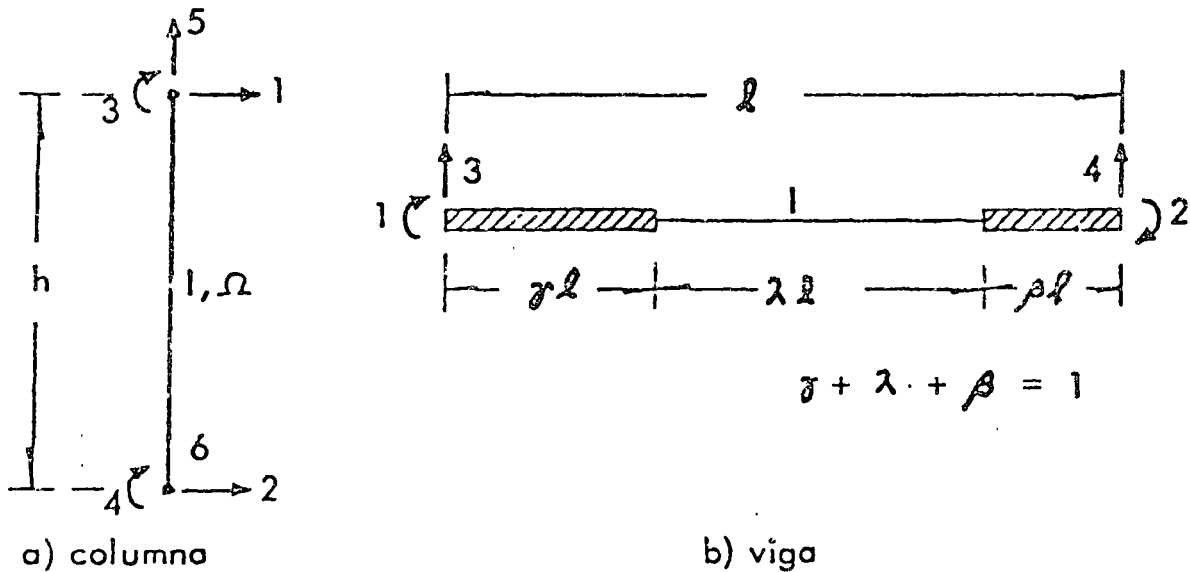


Fig. 4.- Grados de libertad de una columna y de una viga con extremos infinitamente rígidos.

**Paso III.** Para calcular los desplazamientos laterales del edificio completo se resuelve el sistema  $K U = F$ ; en la Ref. 10 se discuten las formas eficientes de hacerlo.  $F$  en general está formado por dos fuerzas ortogonales y un momento torsionante por cada nivel, que corresponden a los tres grados de libertad considerados para el edificio en tal nivel. Empleando las relaciones geométricas entre los desplazamientos laterales  $D_j$  de cada sistema plano y los de los pisos del edificio  $U$ , se calcula  $D_j$  (véase la expresión B 3 del Apéndice B).

Los desplazamientos correspondientes a los grados de libertad eliminados en el Paso I se pueden calcular a partir de  $D_j$  (Ref. 10). Así se conocen todos los desplazamientos de todos los nudos y, usando las matrices de cada viga o columna (Apéndice A), se pueden calcular sus respectivos elementos mecánicos.

**2.2.- Método Simplificado**

**Paso I.** Para determinar la matriz de rigidez lateral de cada sistema plano  $j$  se usa un sistema plano reducido equivalente, que se describe en la Sección 3, y que tiene mucho menos grados de libertad que el sistema original. La simplificación resulta, esencialmente, de que cada elemento del sistema equivalente representa a varios elementos del sistema real.

A partir de las matrices de rigidez lateral de cada sistema plano  $j$ , se pueden efectuar los pasos II y III

de la misma manera que en el método general, hasta el cálculo de  $D_j$ .

Los giros de todos los nudos no fueron considerados en el paso I y, en consecuencia, no es posible calcularlos en forma directa a partir de  $D_j$ . Pero puede usarse el método de distribución de momentos para calcular los momentos flexionantes, partiendo de momentos de empotramiento en las columnas que valen  $\frac{6 E I \delta}{(1 + \alpha) h^2}$ , donde  $\delta$  es el desplazamiento del entrepiso correspondiente.  $E$ ,  $I$ , y  $h$  están definidos en el Apéndice A, en el cual se explica cómo modificar los coeficientes de rigidez y los factores de transporte, para incluir el efecto de las deformaciones por cortante en las columnas y la existencia de zonas extremas infinitamente rígidas en las vigas. Un problema que hay que notar en este procedimiento es que las fuerzas laterales  $E_j$  que actúan en el sistema plano  $j$  valen  $E_j = K_j D_j$ , y producen unos cortantes  $V_j$ ; en los entrepisos, por otro lado, la suma de momentos en columnas sobre las alturas da lugar a unos cortantes  $V_j^*$ , que no serán exactamente iguales a  $V_j$ . Para subsanar esta dificultad se sugiere calcular en cada entrepiso  $i$  la relación  $R_i = V_{ji} / V_{ji}^*$  y multiplicar los momentos de todas las columnas de ese entrepiso por  $R_i$ , a fin de conservar el equilibrio se pueden multiplicar los momentos en las vigas del piso  $i$  por  $\frac{1}{2} (R_i + R_{i+1})$ .

de la misma manera que en el método general, hasta el cálculo de  $D_j$ .

### 2.3.- Observaciones y comentarios

De los métodos propuestos en las secciones 2.1 y 2.2 se puede considerar como "exacto" el método general, en el sentido de que es la forma más precisa de proceder dentro de las limitaciones que imponen las hipótesis generales, por lo que se recomienda usar este método cuando se disponga de la computadora y los programas apropiados, como el que se presenta en la Ref. 9. Cuando no se cuente con tales herramientas, puede usarse el método simplificado.

El procedimiento general de análisis, seguido en ambos métodos, sólo hace compatibles, mediante los pisos rígidos, a los desplazamientos laterales de los niveles de todos los sistemas planos que forman el edificio. Los demás grados de libertad se consideran independientes de un sistema plano a otro, condición que no cumplen los desplazamientos verticales de las columnas que se encuentran en la intersección de dos sistemas planos y pertenecen a ambos. Una forma aproximada de tomar en cuenta este hecho, para fines de diseño, es considerar que la carga axial en tales columnas es igual a la suma de las que se obtienen para ellas en cada uno de los sistemas planos a que pertenecen. También debe notarse que los giros de estas columnas sólo son independientes entre sí cuando los sistemas planos son ortogonales; por esto, los métodos aquí propuestos no deben usarse cuando los sistemas planos que componen un edificio se corten en ángulos muy agudos en planta. Además, cuando los pisos son flexibles en su propio plano, no es válida la suposición de que los sistemas planos están unidos por diafragmas infinitamente rígidos, lo cual invalida los procedimientos aquí propuestos.

En el método simplificado se usan matrices de rigidez lateral obtenidas en forma aproximada; sin embargo, los errores en los valores de los desplazamientos son pequeños (menores que el 3% en todos los casos estudiados). Una limitación más restrictiva de este método es que no toma en cuenta los grados de libertad verticales, lo que implica desprestigiar los efectos de alargamientos y acortamientos de las columnas, que son más importantes en edificios con vigas rígidas y/o gran relación altura/ancho. No se han establecido criterios definitivos para decidir cuándo pueden desprestigiar estos efectos. (La Ref. 11 considera que puede hacerse cuando la relación altura/ancho del edificio sea tres o menor).

Para tener una idea de las diferencias en los resultados entre los métodos general y simplificado se analizó con ambos un edificio de 6 pisos, cuyas características y cargas se dan en la Fig. 8. En la Tabla 1 se comparan los resultados obtenidos para dos sistemas planos de ese edificio, que son los que más se desplazan en las cargas usadas, por lo que en ellos los errores serán más importantes. Nótese que estos últimos son menores que el 1%, aunque hay que señalar que en el método general no se permitieron desplazamientos verticales para que las diferencias se debieran exclusivamente al uso de sistemas planos reducidos.

### 3.- SISTEMA EQUIVALENTE PARA CALCULAR LA RIGIDEZ LATERAL DE UN SISTEMA PLANO

Se trata de calcular la matriz de rigidez lateral de un sistema plano como el mostrado en la Fig. 1. Varios autores han estudiado este problema para proponer formas de determinar los elementos mecánicos correspondientes a los componentes del sistema (muros, vigas y columnas) cuando está sujeto a cargas laterales (Refs. 6, 7 y 8). La citada matriz puede determinarse con el procedimiento descrito en la Sección 2.1, el cual resulta apropiado para programarse en una computadora grande, especialmente si se trata de un sistema plano con muchos nudos. Como no siempre se dispone de tal herramienta, es conveniente contar con un método simplificado que, sin pérdidas exageradas en la precisión, permita obtener la matriz de rigidez lateral con una computadora pequeña, o bien en forma manual. El método que aquí se propone logra este objetivo.

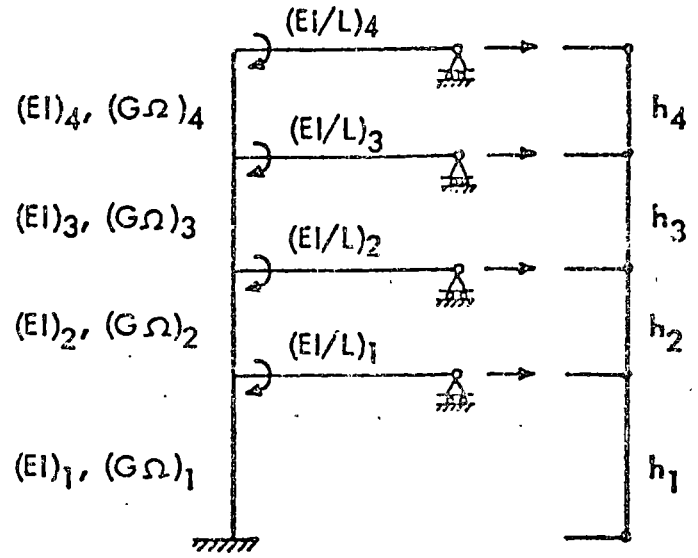
El componente básico del sistema equivalente es el conjunto de vigas y columnas mostrado esquemáticamente en la Fig. 5, en la cual se indican las cantidades que son necesarias para definirlo y los grados de libertad que le corresponden. Las alturas son las del sistema real. Cada columna y cada viga representan, respectivamente, a un conjunto de columnas o vigas del sistema plano real. Si  $E$  es el módulo de elasticidad,  $I$ , el momento de inercia,  $G$ , el módulo de cortante y  $\Omega$ , el área efectiva de cortante de una columna o viga del sistema real, entonces las propiedades en cada nivel  $i$  del componente básico son:

- $(EI)_i$  = Suma de  $EI$  de las columnas de un piso, que representa el componente.
- $(G\Omega)_i$  = Suma de  $G\Omega$  de las columnas de ese piso, que representa el componente.
- $\left(\frac{EI}{L}\right)_i$  = Suma de  $\frac{2EI}{L} \left(\frac{1}{\lambda^3}\right)$  por cada vez que una viga llega a una columna representada en el componente ( $\lambda$  se define en la Fig. 4).

Dentro de las columnas se incluye a los muros. En las columnas de dimensiones normales no es necesario considerar deformaciones por cortante y no se necesita el valor de  $(G\Omega)_i$ , que es indispensable para los muros. Cuando una viga llega a un muro,  $\lambda$  tendrá un valor menor que 1; para las vigas que llegan a columnas normales  $\lambda = 1$ .

Para construir el sistema equivalente se divide a las columnas del sistema plano en grupos tales que cada uno de ellos contenga columnas de propiedades similares. Se ha comprobado en este trabajo que los errores son pequeños si el valor de  $EI$  de la columna más rígida de un grupo no es mayor que ocho veces el de la columna menos rígida de ese mismo grupo. Generalmente son necesarios dos grupos: uno contiene a las columnas normales y el otro a los muros.

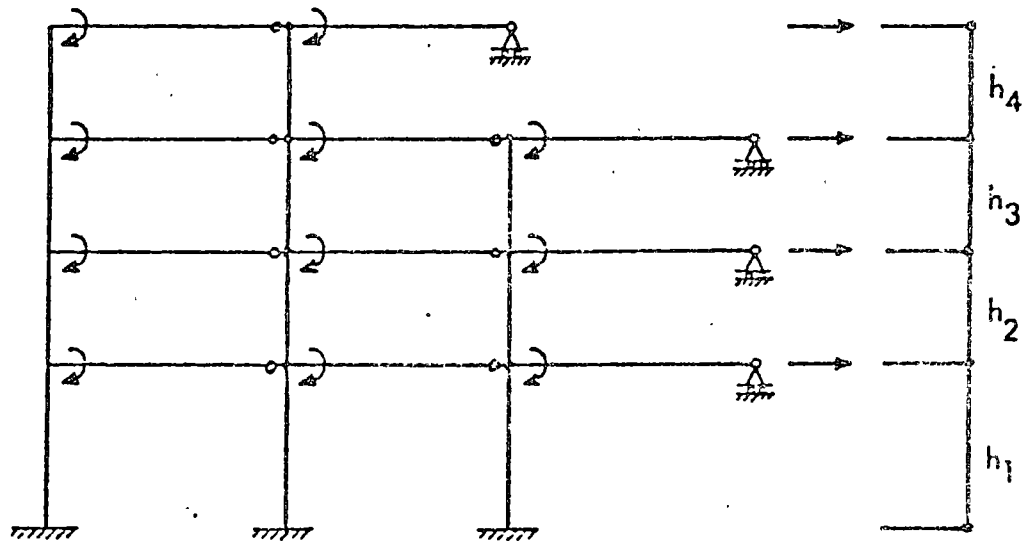
A cada grupo le corresponde un componente básico cuyas propiedades se calculan como ya se ha descrito en esta Sección. Todos los componentes básicos que resulten se acoplan de modo que sus desplazamientos laterales sean los mismos, como se ilustra en la Fig. 6. Nótese que los componentes básicos pueden no tener el mismo número de nive-



**Nota:** las flechas indican los grados de libertad  
 Fig. 5.- Componente básico del sistema equivalente.

les; que puede tratarse de un solo componente, en cuyo caso no se necesita hacer el acoplamiento; y que los giros de un componente son independientes de los giros de los demás.

Se calcula la matriz de rigidez de cada componente, referida a todos sus grados de libertad (Fig. 5) y, por condensación estática (Ref. 10), se eliminan las rotaciones y se obtiene la matriz de rigidez lateral del componente. La matriz de rigidez lateral del sistema equivalente se obtiene sumando las de todos sus componentes básicos. Este procedimiento se ilustra en el Apéndice D.



**Nota:** las flechas indican los grados de libertad

Fig. 6.- Acoplamiento de componentes básicos para formar un sistema equivalente.



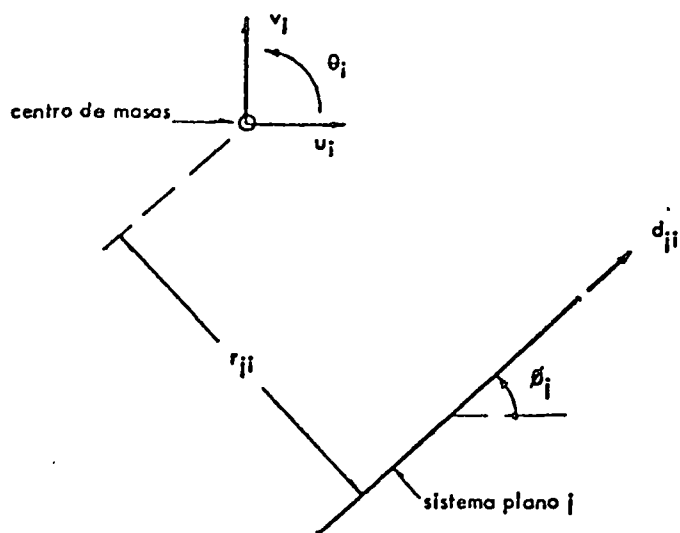


Fig. 7.- Grados de libertad del edificio y del sistema plano j, en el nivel i.

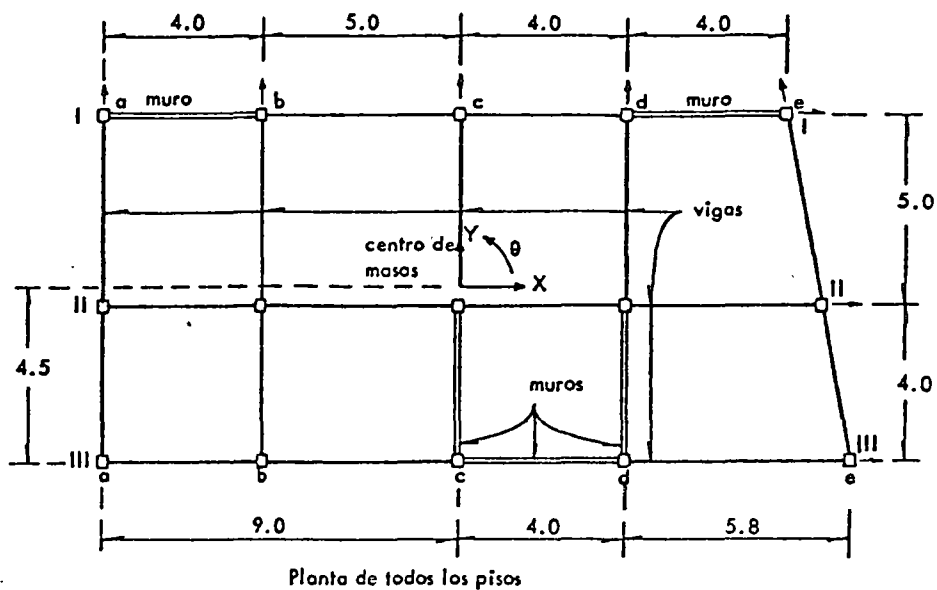


Fig. 8.- Planta, dimensiones, propiedades y cargas laterales del edificio que se usa para comparar los métodos general y simplificado.

Notas: espesor de los muros = 0.15 m  
 módulo de elasticidad de todos los elementos = 2 000 000 ton/m<sup>2</sup>  
 módulo de cortante de todos los elementos = 833 333 ton/m<sup>2</sup>  
 momento de inercia de todas las vigas = 0 00255 m<sup>4</sup>  
 las flechas indican los sentidos positivos de los desplazamientos laterales  
 las distancias están en metros

Fuerzas (ton) y momentos (ton-m)

Nivel	Columnas (m x m)	Altura (m)	Por sismo en X		Por sismo en Y	
			F <sub>x</sub>	M <sub>x</sub>	F <sub>y</sub>	M <sub>y</sub>
1	.40 x .40	4.0	4.51	4.059	4.51	8.479
2	.40 x .40	3.0	7.89	7.101	7.89	14.833
3	.40 x .40	3.0	11.27	10.143	11.27	21.183
4	.30 x .30	3.0	14.65	13.185	14.65	27.542
5	.30 x .30	3.0	18.03	16.227	18.03	33.896
6	.30 x .30	3.0	21.41	19.269	21.41	40.251

#### 4.- PROCEDIMIENTOS PARA EL ANALISIS SISMICO

Los métodos de análisis tridimensional expuestos en la Sección 2 no se pueden usar directamente para el análisis sísmico de edificios de acuerdo con el Reglamento de construcciones para el Distrito Federal que exige, en su artículo 240, considerar dos combinaciones de las excentricidades de las fuerzas cortantes y, en su artículo 237, estipula que se sumen vectorialmente los efectos de un componente del movimiento horizontal del terreno con 0.3 de los del otro. El procedimiento que a continuación se propone permite tomar en cuenta tales requisitos.

Considérese que la matriz de rigidez lateral del edificio  $\underline{K}$  se ha partido en la forma:

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} \underline{K}_{LL} & \underline{K}_{L\theta} \\ \underline{K}_{L\theta}^T & \underline{K}_{\theta\theta} \end{bmatrix}$$

donde los subíndices  $L$  y  $\theta$  se refieren, respectivamente, a los desplazamientos laterales y a los giros de los pisos del edificio. Entonces se pueden seguir los pasos siguientes:

a) Se escogen dos direcciones ortogonales  $X$  y  $Y$  en la planta del edificio.

b) Para cada dirección:

b.1) Se determina la fuerza horizontal aplicada en el centro de masas de cada piso  $i$ , de acuerdo con los artículos 240 o 241 del Reglamento de construcciones para el Distrito Federal. Sea  $\underline{F}$  el vector formado por estas fuerzas.

b.2) Se calculan los desplazamientos laterales  $\underline{\delta}_o$  del edificio, sin permitir giros en los pisos:

$$\underline{\delta}_o = \underline{K}_{LL}^{-1} \underline{F}$$

b.3) Se calculan los momentos debidos a la excentricidad directa, que valen:

$$\underline{M}_d = - \underline{K}_{L\theta}^T \underline{\delta}_o$$

y se les acumula para obtener los momentos torsionantes en los entrepisos  $\underline{M}_d^*$ .

b.4) Se calculan los momentos torsionantes en los entrepisos  $\underline{M}_a^*$ . Para el entrepiso  $i$  se tiene:  $M_{ai}^* = 0.1 b_i V_i$ , donde  $b_i$  es la dimensión máxima de la planta  $i$  del edificio, medida perpendicularmente a la dirección en que están aplicadas las fuerzas sísmicas, y  $V_i$ , el cortante en el entrepiso  $i$ .

b.5) Para cada nivel  $i$  se calculan las siguientes combinaciones de momentos torsionantes:  $M_{1i}^* = 1.5 M_{di}^* + M_{ai}^*$ , y  $M_{2i}^* = M_{di}^* - M_{ai}^*$

b.6) Con los valores obtenidos en el paso anterior se calculan los respectivos momentos en los niveles  $\underline{M}_1$  y  $\underline{M}_2$ , de la misma manera como se pueden calcular las fuerzas aplicadas en los niveles a partir de las fuerzas cortantes en los entrepisos; es decir, que en cualquier nivel el momento aplicado es la diferencia entre el momento torsionante del entrepiso inferior y el del entrepiso superior.

b.7) Se calculan los giros y desplazamientos que producen los momentos  $\underline{M}_1$  y  $\underline{M}_2$  resolviendo los sistemas de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} \underline{K}_{LL} & \underline{K}_{L\theta} \\ \underline{K}_{L\theta}^T & \underline{K}_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\delta}_j \\ \underline{\theta}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\theta} \\ \underline{M}_j \end{bmatrix}, j=1,2$$

b.8) El Reglamento de construcciones para el Distrito Federal exige dos combinaciones de giros y desplazamientos:

Combinación	Desplazamientos	Giros
(1)	$\underline{\delta}_o + \underline{\delta}_1$	$\underline{\theta}_1$
(2)	$\underline{\delta}_o + \underline{\delta}_2$	$\underline{\theta}_2$

Para todos los niveles de cada sistema plano  $m$  se calculan los desplazamientos de entrepiso producidos por estas combinaciones y se escogen los que tengan mayor valor absoluto. Sea  $\underline{z}_m^x$  el vector formado por estos valores cuando el sismo actúa en la dirección  $X$ ; y  $\underline{z}_m^y$  el correspondiente a la dirección  $Y$ .

Tabla 1.- Comparación de desplazamientos laterales (m) de los sistemas planos III III y aa, cuando el sismo actúa en las direcciones X y Y, respectivamente.

Nivel	Sistema plano III III; fuerza sísmica en X			Sistema plano aa; fuerza sísmica en Y		
	MS	MG	error (°/o)	MS	MG	error (°/o)
1	0.000754	0.000756	0.26	0.001358	0.001362	0.29
2	0.001773	0.001778	0.28	0.003176	0.003190	0.44
3	0.003023	0.003033	0.33	0.005383	0.005412	0.54
4	0.004433	0.004449	0.36	0.007902	0.007949	0.59
5	0.005883	0.005908	0.42	0.010477	0.010547	0.66
6	0.007298	0.007334	0.49	0.012969	0.013066	0.74

MS Método simplificado  
 MG Método general

c) Para cada entrepiso i de cada sistema plano m se calculan

$$(z_{mi}^x + 0.3 z_{mi}^y) \text{ y } (0.3 z_{mi}^x + z_{mi}^y).$$

Se utilizará el mayor de estos valores para calcular los elementos mecánicos producidos por el sismo.

En el Apéndice C se presenta un procedimiento eficiente para efectuar las operaciones matriciales necesarias para el cálculo de giros, desplazamientos y momentos torsionantes.

Cuando las fuerzas laterales se determinan por el método dinámico espectral es también útil la matriz de rigidez lateral del edificio  $\underline{K}$ . Si denominamos  $\underline{K}_{xx}$  a la submatriz asociada a los desplazamientos en la dirección X, entonces los vectores modales  $\phi$  y las respectivas frecuencias de vibración  $\omega$  en tal dirección se obtienen resolviendo el problema de valores característicos  $\underline{K}_{xx} \phi = \omega^2 \underline{M} \phi$ , donde  $\underline{M}$  es una matriz diagonal cuyos elementos son las masas concentradas en los niveles. Los métodos para resolver este problema se discuten ampliamente en la Ref. 10. Lo mismo puede decirse para la dirección Y, y si se desea considerar las torsiones en planta debe usarse la matriz  $\underline{K}$  completa.

**APENDICE A.- Matrices de rigidez de una viga con zonas extremas infinitamente rígidas y de una columna incluyendo deformaciones por cortante.**

Para los grados de libertad y los parámetros  $\beta, \gamma, \lambda$  definidos en la Fig. 4b, la matriz de rigidez de una viga con extremos infinitamente rígidos es:

$\frac{EI}{\lambda \ell}$	$4 + 12 \frac{\gamma}{\lambda} (1 + \frac{\gamma}{\lambda})$	simétrica		
	$2 + 6 (\frac{\gamma + \beta}{\lambda}) + 12 \frac{\gamma \beta}{\lambda^2}$	$4 + 12 \frac{\beta}{\lambda} (1 + \frac{\beta}{\lambda})$		
	$-\frac{6}{\lambda \ell} (1 + \frac{2\gamma}{\lambda})$	$-\frac{6}{\lambda \ell} (1 + \frac{2\beta}{\lambda})$	$\frac{12}{\lambda^2 \ell^2}$	
	$\frac{6}{\lambda \ell} (1 + \frac{2\gamma}{\lambda})$	$\frac{6}{\lambda \ell} (1 + \frac{2\beta}{\lambda})$	$-\frac{12}{\lambda^2 \ell^2}$	$\frac{12}{\lambda^2 \ell^2}$

$E$ ,  $I$ ,  $l$  son, respectivamente, el módulo de elasticidad, el momento de inercia y la longitud total de la viga. Para los grados de libertad definidos en la Fig. 4a, la matriz de rigidez de una columna, incluyendo deformaciones por cortante, es:

$\frac{12 EI}{(1+\alpha)h^3}$					
$\frac{12 EI}{(1+\alpha)h^3}$	$\frac{12 EI}{(1+\alpha)h^3}$	simétrica			
$\frac{6 EI}{(1+\alpha)h^2}$	$\frac{6 EI}{(1+\alpha)h^2}$	$\frac{(4+\alpha) EI}{(1+\alpha)h}$			
$\frac{6 EI}{(1+\alpha)h^2}$	$\frac{6 EI}{(1+\alpha)h^2}$	$\frac{(2-\alpha) EI}{(1+\alpha)h}$	$\frac{(4+\alpha) EI}{(1+\alpha)h}$		
0	0	0	0	$\frac{EA}{h}$	
0	0	0	0	$-\frac{EA}{h}$	$\frac{EA}{h}$

el valor de  $\alpha$  es  $\frac{12 EI}{h^2 G \Omega}$

donde  $E$ ,  $I$ ,  $h$  y  $G$  son, respectivamente, el módulo de elasticidad, el momento de inercia, la altura y el módulo de cortante de la columna;  $\Omega$  es su área reducida por cortante; la reducción depende de la distribución del cortante en la sección, el cual a su vez depende de la forma de la sección; para secciones rectangulares  $\Omega = A/1.2$ , donde  $A$  es el área total de la sección de la columna.

En el caso de la viga, nótese que si  $\beta = \gamma = 0$ , es decir, que si no existen extremos rígidos, se tiene  $\lambda = 1$ , y la matriz de rigidez que se obtiene

reemplazando estos valores coincide con la ya conocida para una viga normal.

También en las columnas, si no se desea considerar deformaciones por cortante,  $\alpha = 0$ , y la matriz de rigidez se convierte en la ya conocida para este caso.

De estas matrices pueden obtenerse coeficientes de rigidez y factores de transporte modificados para usar el método de Cross. Por ejemplo, cuando se desea considerar deformaciones por cortante, en lugar de  $\frac{4EI}{h}$  debe usarse  $\frac{(4+\alpha) EI}{(1+\alpha)h}$ , y el factor de transporte en lugar de 0.5, vale:  $\frac{(2-\alpha)}{4+\alpha}$ .

**APENDICE B.— Transformación de la matriz de rigidez lateral de un sistema plano a las coordenadas del edificio.**

En la Fig. 7 se muestra la ubicación del sistema plano  $j$  en la planta del nivel  $i$  del edificio.

Este sistema solamente tiene un desplazamiento lateral  $d_{ji}$  en este nivel, cuya dirección positiva es la indicada por la flecha. También se muestra el centro de masas del nivel  $i$  y las direcciones positivas de los tres grados de libertad que tiene el edificio en tal nivel.

Considerando que el ángulo  $\Theta_i$  es pequeño, la relación entre  $d_{ji}$  y los desplazamientos del edificio se puede escribir como:

$$d_{ji} = \begin{bmatrix} \cos \theta_j & \text{sen } \theta_j & r_{ji} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ \Theta_i \end{bmatrix} \quad \text{B.1}$$

donde  $\theta_j$  es el ángulo que se forma entre la dirección positiva de  $u_i$  y la dirección positiva de  $d_{ji}$ ;  $r_{ji}$  es la distancia del sistema plano  $j$  al centro de masas en el nivel  $i$  y, para saber su signo, se supone que la dirección positiva de  $d_{ji}$  "gira" alrededor del centro de masas; si este "giro" tiene el mismo sentido que  $\Theta_i$ , entonces  $r_{ji}$  es positivo; en caso contrario es negativo. En la Fig. 7, de acuerdo con estas convenciones,  $\theta_j$  y  $r_{ji}$  son positivos.

La expresión B.1 se puede escribir en forma más compacta como:

$$d_{ji} = \underline{b}_{ji} \underline{u}_i \quad \text{B.2}$$

donde:

$$\underline{b}_{ji} = \begin{bmatrix} \cos \theta_j & \text{sen } \theta_j & r_{ji} \end{bmatrix}$$

$$\underline{u}_i = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ \Theta_i \end{bmatrix}$$

si se consideran los  $n$  niveles del edificio, se tiene:

$$\underline{D}_j = \underline{B}_j \underline{U} \quad \text{B.3}$$

donde:

$$\underline{D}_j = \begin{bmatrix} d_{j,1} \\ d_{j,2} \\ \vdots \\ d_{j,n} \end{bmatrix} \quad \underline{U} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

(n elementos)      (3 n elementos)

$$\underline{B}_j =$$

$\underline{b}_{j1}$			
	$\underline{b}_{j2}$		
		• • •	
		• • •	$\underline{b}_{jn}$

(n por 3 n elementos; los no mostrados son ceros)

La expresión B.3 relaciona los desplazamientos de los pisos del edificio con los desplazamientos laterales del sistema plano  $j$ , y la matriz  $\underline{K}_j$  expresada en términos de las coordenadas del edificio es  $\underline{K}_j^* = \underline{B}_j^T \underline{K}_j \underline{B}_j$

### APENDICE C.— Cálculo de desplazamientos en el análisis sísmico.

Efectuando la partición y descomposición de la matriz de rigidez lateral del edificio, se obtiene el producto  $\underline{S}^T \underline{S}$ , donde  $\underline{S}$  es triangular superior:

$$\begin{bmatrix} \underline{K}_{LL} & \underline{K}_{L\theta} \\ \underline{K}_{L\theta}^T & \underline{K}_{\theta\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{S}_{LL}^T & \underline{0} \\ \underline{S}_{L\theta}^T & \underline{S}_{\theta\theta}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{S}_{LL} & \underline{S}_{L\theta} \\ \underline{0} & \underline{S}_{\theta\theta} \end{bmatrix}$$

efectuando el producto del segundo miembro se deduce que:

$$\underline{K}_{LL} = \underline{S}_{LL}^T \underline{S}_{LL}, \underline{K}_{L\theta} = \underline{S}_{LL}^T \underline{S}_{L\theta}$$

$$\text{y } \underline{K}_{L\theta} = \underline{S}_{LL}^T \underline{S}_{L\theta}, \underline{K}_{\theta\theta} = \underline{S}_{L\theta}^T \underline{S}_{L\theta} + \underline{S}_{\theta\theta}^T \underline{S}_{\theta\theta} \quad (C1)$$

El sistema del paso b.1 del procedimiento propuesto en la Sección 4 es:

$$\underline{K}_{LL} \underline{\delta}_o = \underline{S}_{LL}^T \underline{S}_{LL} \underline{\delta}_o = \underline{S}_{LL}^T \underline{Y} = \underline{E} \quad (C2)$$

donde se ha definido el vector  $\underline{Y}$  por:

$$\underline{Y} = \underline{S}_{LL} \underline{\delta}_o \quad (C3)$$

Los vectores  $\underline{Y}$  y  $\underline{\delta}_o$  pueden calcularse fácilmente por ser  $\underline{S}_{LL}^T$  y  $\underline{S}_{LL}$  triangulares.

El vector  $\underline{M}_d$  del paso b.3 vale  $-\underline{K}_{L\theta}^T \underline{\delta}_o$ , y usando las expresiones C1 y C3 se puede escribir:

$$\underline{M}_d = -\underline{S}_{L\theta}^T \underline{S}_{LL} \underline{S}_{LL}^{-1} \underline{Y} = -\underline{S}_{L\theta}^T \underline{Y} \quad (C4)$$

Por otro lado, los sistemas del paso b.7 son:

$$\underline{K}_{LL} \underline{\delta}_j + \underline{K}_{L\theta} \underline{\Theta}_j = \underline{0}$$

$$\underline{K}_{L\theta}^T \underline{\delta}_j + \underline{K}_{\theta\theta} \underline{\Theta}_j = \underline{M}_j, \quad j = 1, 2$$

de la primera de estas ecuaciones se tiene:

$$\underline{\delta}_j = -\underline{K}_{LL}^{-1} \underline{K}_{L\theta} \underline{\Theta}_j \quad (C5)$$

y reemplazando este valor en la segunda ecuación queda:

$$(\underline{K}_{\theta\theta} - \underline{K}_{L\theta}^T \underline{K}_{LL}^{-1} \underline{K}_{L\theta}) \underline{\Theta}_j = \underline{K}_{\theta\theta} \underline{\Theta}_j = \underline{M}_j \quad (C6)$$

Con  $\underline{K}_{\theta\theta}^{\circ} = \underline{K}_{\theta\theta} - \underline{K}_{L\theta}^T \underline{K}_{LL}^{-1} \underline{K}_{L\theta}$ , usando las expresiones C1 y simplificando, se obtiene:

$$\begin{aligned} \underline{K}_{\theta\theta}^{\circ} &= (\underline{S}_{L\theta}^T \underline{S}_{L\theta} + \underline{S}_{\theta\theta}^T \underline{S}_{\theta\theta}) - (\underline{S}_{L\theta}^T \underline{S}_{LL}) \\ &(\underline{S}_{LL}^{-1} \underline{S}_{LL}^T) (\underline{S}_{LL} \underline{S}_{L\theta}) = \underline{S}_{\theta\theta}^T \underline{S}_{\theta\theta} \end{aligned}$$

Esto muestra que ya se tiene la descomposición necesaria para resolver el sistema C6 y conocer  $\underline{\Theta}_j$ . Para encontrar  $\underline{\delta}_j$  se usan las expresiones C1, que permiten escribir C5 en la forma:

$$\underline{\delta}_j = -(\underline{S}_{LL}^{-1} \underline{S}_{LL}^T) (\underline{S}_{LL} \underline{S}_{L\theta}) \underline{\Theta}_j = -\underline{S}_{LL}^{-1} \underline{S}_{L\theta} \underline{\Theta}_j$$

Premultiplicando la última igualdad por  $\underline{S}_{LL}$  queda:

$$\underline{S}_{LL} \underline{\delta}_j = -\underline{S}_{L\theta} \underline{\Theta}_j \quad (C7)$$

cuya solución es directa, puesto que  $\underline{S}_{LL}$  es triangular superior y ya se conoce.

Nótese que para encontrar todos los desplazamientos y giros que requiere el análisis sísmico es necesario descomponer una sola vez la matriz  $\underline{K}$  en el producto de una matriz triangular superior por su transpuesta.

**APENDICE D.- Obtención de la matriz de rigidez lateral de un sistema marco-muro con el método simplificado.**

De acuerdo con la Sección 3, el sistema equivalente correspondiente al sistema plano de la Figura 9 tiene dos componentes básicos. El primero de ellos representa a las columnas de dimensiones normales, y sus propiedades son, en los dos niveles:

$$EI = 5 (2 \times 10^6 \times 0.005) = 50,000 \text{ (columnas)}$$

$$G\Omega = 0 \text{ (columnas)}$$

$$EI/L = 2 (2 \times 10^6 \times 0.001) \left[ \frac{2}{4} + \frac{2}{5} + \frac{1}{5(0.8)^3} + \frac{1}{4(0.75)^3} + \frac{2}{4} + \frac{1}{5(0.7)^3} \right]$$

$$= 11,865 \text{ (vigas)}$$

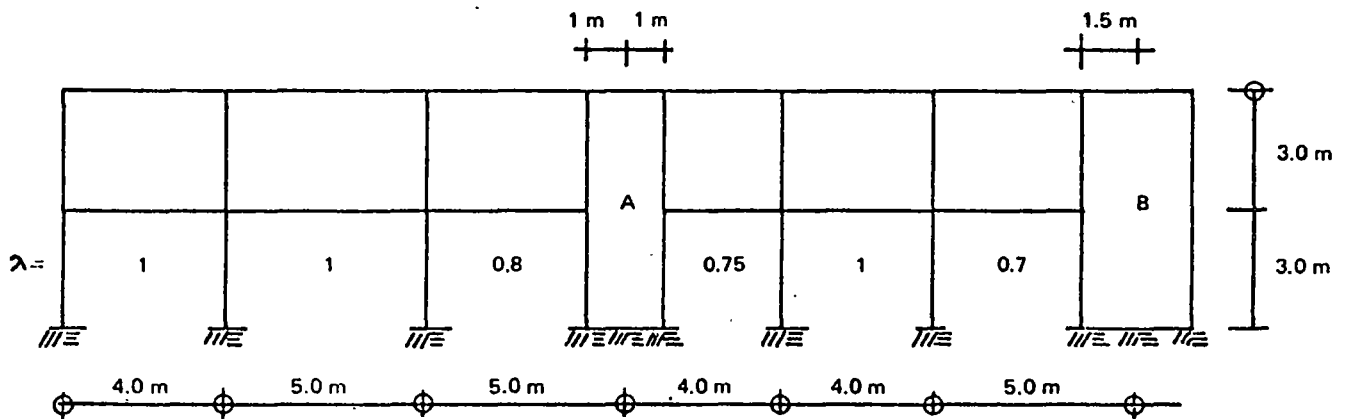
El segundo componente básico representa a los muros y para él se tiene, en los dos niveles:

$$EI = 2 \times 10^6 (0.1 + 0.2) = 600,000 \text{ (columnas)}$$

$$G\Omega = 8 \times 10^5 (0.3 + 0.4) = 560,000 \text{ (columnas)}$$

$$EI/L = 2(2 \times 10^6 \times 0.001) \left[ \frac{1}{5(0.8)^3} + \frac{1}{4(0.75)^3} + \frac{1}{5(0.7)^3} \right] = 6,265 \text{ (vigas)}$$

Fig. 9.- Sistema plano utilizado para ejemplificar el método simplificado.



- Notas: módulo de elasticidad de todos los elementos = 2 000 000 Tm/m<sup>2</sup>  
 módulo de cortante de los muros A y B = 800 000 Tm/m<sup>2</sup>  
 momento de inercia de todas las vigas = 0.001 m<sup>4</sup>  
 momento de inercia de todas las columnas = 0.0005 m<sup>4</sup>  
 momento de inercia del muro A = 0.1 m<sup>4</sup>  
 momento de inercia del muro B = 0.2 m<sup>4</sup>  
 área de cortante del muro A = 0.30 m<sup>2</sup>  
 área de cortante del muro B = 0.40 m<sup>2</sup>

En la Figura 10 se muestra un esquema del sistema equivalente y se ilustran los grados de libertad que tiene cada uno de sus componentes básicos.

La matriz de rigidez de las columnas se proporciona en el Apéndice A. Para el primer componente básico  $\alpha = 0$ ,  $EI = 50,000$ ,  $h = 3$ . Interesan solamente las cuatro primeras filas y columnas de la matriz en cuestión que, efectuando las operaciones, se escriben:

$$\begin{bmatrix} 22,222 & & & \\ -22,222 & 22,222 & & \\ -33,333 & 33,333 & 66,667 & \\ -33,333 & 33,333 & 33,333 & 66,667 \end{bmatrix} \quad \text{simétrica}$$

La rigidez de las vigas es simplemente

$$\frac{3EI}{L} = 3 \times 11,865 = 35,595$$

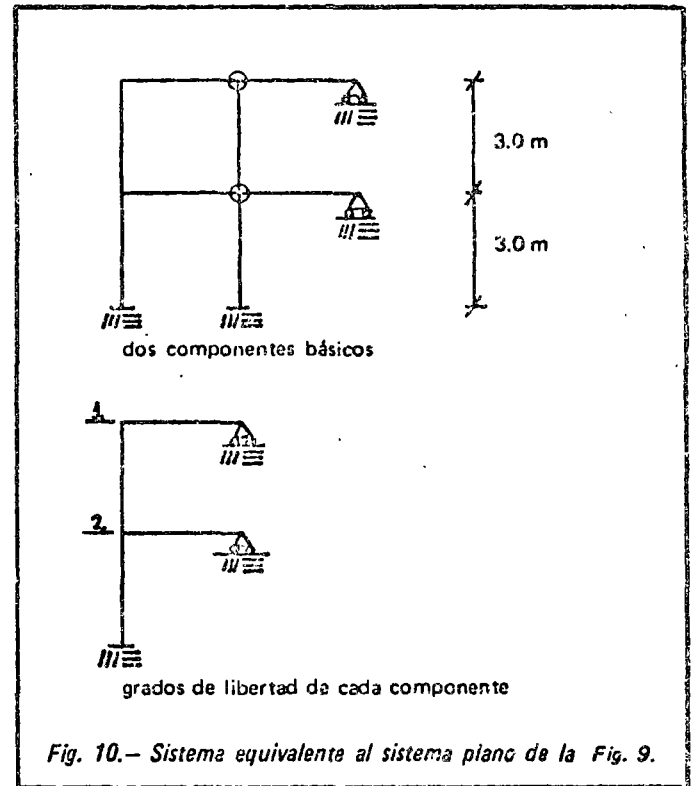
Sumando los respectivos aportes de las vigas y columnas (método directo de rigideces) se obtiene la matriz de rigidez del primer componente básico, que es:

$$\begin{bmatrix} 22,222 & & & & \\ -22,222 & (22,222 + 22,222) & & & \\ -33,333 & 33,333 & (66,667 + 35,595) & & \\ -33,333 & (33,333 - 33,333) & 33,333 & (66,667 + 66,667 + 35,595) & \end{bmatrix} \quad \text{simétrica}$$

$$\begin{bmatrix} 22,222 & -22,222 & -33,333 & -33,333 \\ -22,222 & 44,444 & 33,333 & 0 \\ -33,333 & 33,333 & 102,262 & 33,333 \\ -33,333 & 0 & 33,333 & 168,929 \end{bmatrix}$$

Para obtener la matriz de rigidez lateral  $K_1$  de este componente se eliminan, mediante condensación estática, los últimos dos grados de libertad, y se obtiene así:

$$K_1 = \begin{bmatrix} 22,222 & -22,222 \\ -22,222 & 44,444 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -33,333 & -33,333 \\ 33,333 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 102,262 & 33,333 \\ 33,333 & 168,929 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -33,333 & 33,333 \\ -33,333 & 0 \end{bmatrix}$$





$$\underline{K}_1 = \begin{bmatrix} 8,163 & -12,901 \\ -12,901 & 32,832 \end{bmatrix}$$

La matriz de rigidez lateral del sistema plano marco-muro completo es la suma  $\underline{K}_1 + \underline{K}_2$ , que da:

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} 35,591 & -67,178 \\ -67,178 & 193,880 \end{bmatrix}$$

Con el mismo procedimiento se obtiene la matriz de rigidez lateral  $\underline{K}_2$  del componente 2. La diferencia más importante es que esta vez para calcular la matriz de rigidez de las columnas (Apéndice A) hay que considerar  $\alpha = (12 \times 600,000) / (9 \times 560,000) = 1.429$ . El resultado es:

$$\underline{K}_2 = \begin{bmatrix} 27,428 & -54,277 \\ -54,277 & 161,048 \end{bmatrix}$$

En este ejemplo se tuvieron que invertir dos matrices de 2 por 2. Con el método general se habría necesitado invertir una matriz de 14 por 14. Esto da una idea de las ventajas del método simplificado aquí propuesto.

## RECONOCIMIENTO

Este artículo está basado en el aporte del autor a la Ref. 2, trabajo que fue patrocinado por el INFONAVIT. Se agradece a Roberto Meli la revisión crítica del artículo y a Luis Esteva sus valiosas sugerencias.

## REFERENCIAS

- 1.- "Requisitos de seguridad y servicio para las estructuras, Título IV del Reglamento de construcciones para el Distrito Federal, con comentarios", Informe 400, Instituto de Ingeniería, julio de 1977.
- 2.- Bazán, E. y Barousse, E., "Análisis ante cargas laterales de edificios a base de muros de carga", Informe, Instituto de Ingeniería, junio de 1976.
- 3.- Frischman, W.W., Prabhu, S.S. y Toppler, J.F., "Multi-story Frames and Interconnected Shear Walls, Subjected to Lateral Loads", Concrete and Construction Engineering, 1963.
- 4.- MacLeod, I.A., "Lateral Stiffness of Shear Walls with Openings, in Tall Buildings", Proc. of a Symposium on Tall Buildings, Pergamon Press, 1967.
- 5.- Clough, R.M., King, I.P. y Wilson, E.L., "Structural Analysis of Multi-story Buildings", Proc. ASCE, Vol. 90, 1964.
- 6.- Stamato, M.C. y Stafford-Smith, B., "An Approximate Method for the Three Dimensional Analysis of Tall Buildings", Proc Inst Civ. Engrs., Vol. 43, julio de 1969.
- 7.- Khan, F.R. y Sbarounis, J.A., "Interaction of Shear Walls and Frames", Proc. ASCE, junio de 1964.
- 8.- Rosenblueth, E. y Holtz, J., "Elastic Analysis of Shear Walls in Tall Buildings", Proc. ACI, Vol. 56, junio de 1960.
- 9.- Wilson, E.L. y Dovey, "Three Dimensional Analysis of Building Systems TABS", Publicacion EERC 7-8, University of California, Berkeley, 1972.
- 10.- Bathe, K. J. y Wilson, E., "Numerical Methods in Finite Element Analysis", Prentice Hall, 1976.
- 11.- Comité ACI 442, "Response of Buildings to Lateral Forces", ACI Journal, Vol. 68, febrero de 1971.

### 3.4 EFECTOS DE ESBELTEZ.

Los efectos de esbeltez en edificios se presentan de dos maneras: la primera se puede denominar local y consiste en que en las columnas los momentos flexionantes se ven incrementados por el valor  $Pv$  donde  $P$  es la carga axial y  $v$  es la deformación (elástica) de la columna -- con respecto a su eje originalmente recto; la segunda, que es de conjunto, se refiere a que cuando existe un desplazamiento de entrepiso  $\Delta$  se produce un momento  $P\Delta$  que debe ser resistido por las columnas de tal entrepiso (este efecto se conoce como  $P-\Delta$ ) en la fig. 16 y 17 -- se ilustran los efectos mencionados:

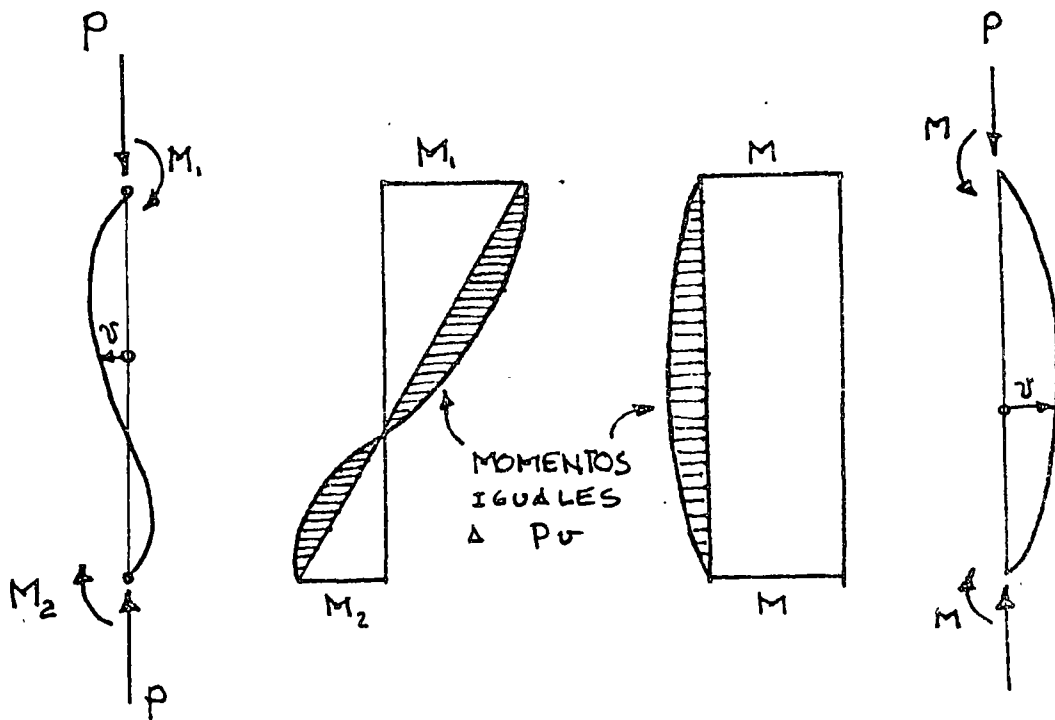


Fig. 16 Efecto local de esbeltez.

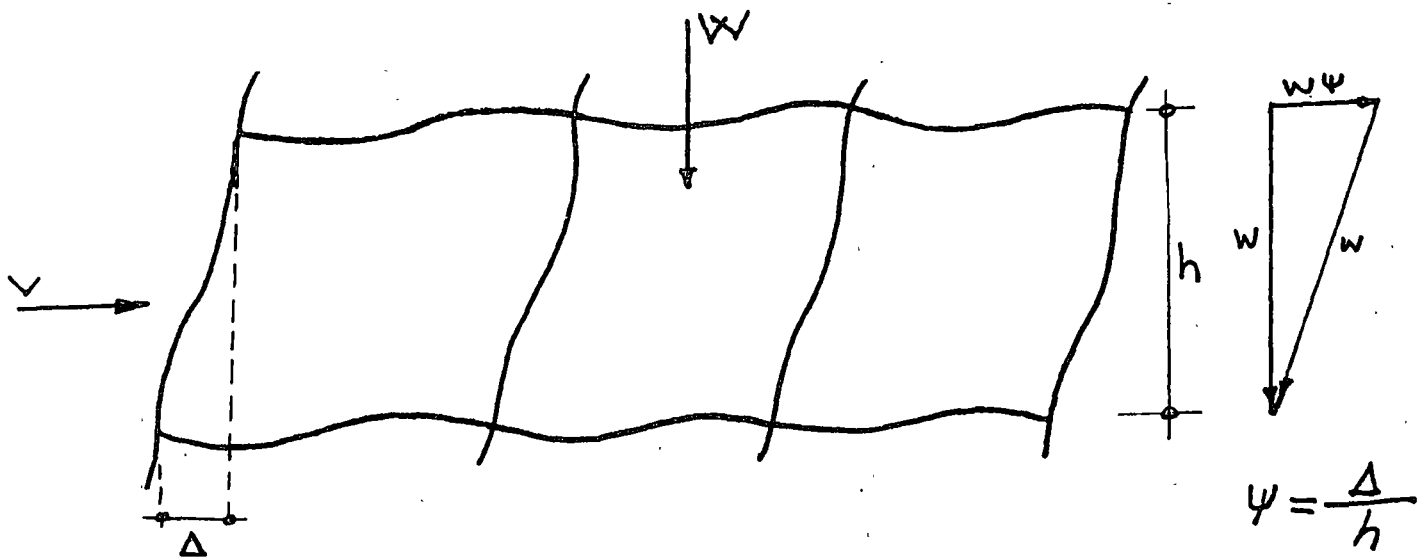


Fig. 17 Efecto de Conjunto

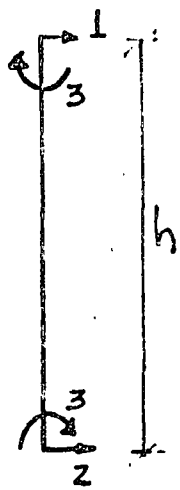
Nótese en la fig. 16 que el efecto local es más importante cuando la columna no tiene punto de inflexión; esto en general no ocurre en marcos sujetos a cargas laterales, salvo tal vez en el piso inferior.

i) Efecto Local.

Además de la amplificación de momentos, el efecto local se refleja en una reducción de la rigidez del elemento (cuando la fuerza axial es de compresión). También se modifican los momentos de empotramiento.

Una forma de considerar estos efectos, que en detalle se presentan en la ref. 22, es mediante las llamadas funciones de estabilidad y de carga, que conducen a expresar la matriz de rigideces de la columna en la forma siguiente:

$2ts(1+c)\frac{EI}{h^3}$	$-2ts(1+c)\frac{EI}{h^3}$	$-s(1+c)\frac{EI}{h^2}$	$-s(1+c)\frac{EI}{h^2}$
	$2ts(1+c)\frac{EI}{h^3}$	$s(1+c)\frac{EI}{h^2}$	$s(1+c)\frac{EI}{h^2}$
		$s\frac{EI}{h}$	$sc\frac{EI}{h}$
			$s\frac{EI}{h}$



Los valores de S, C y t se obtienen planteando la ecuación diferencial de equilibrio de la columna, incluyendo en el momento flexionante el término Pv. Es conveniente expresar estas funciones en términos de la relación adimensional n definida como:

$$\eta = \frac{P}{\left(\frac{\pi^2 EI}{h^2}\right)} ; P = \text{Carga axial actuante.}$$

En la fig. 19 se muestra como varían tales funciones con n ( n positivo corresponde a compresión).

Se muestra también la función m por la cual hay que multiplicar  $\frac{wl^2}{12}$  para obtener el momento de empotramiento modificado por efectos de esbeltez cuando hay una carga uniformemente distribuida perpendicular al eje de la columna.

Nótese que para  $n=0$ ,  $s=4$ ,  $c=0.5$  y  $t=1$  que son los valores correspondientes a vigas prismáticas, cuando se ignoran los efectos de cargas axiales.

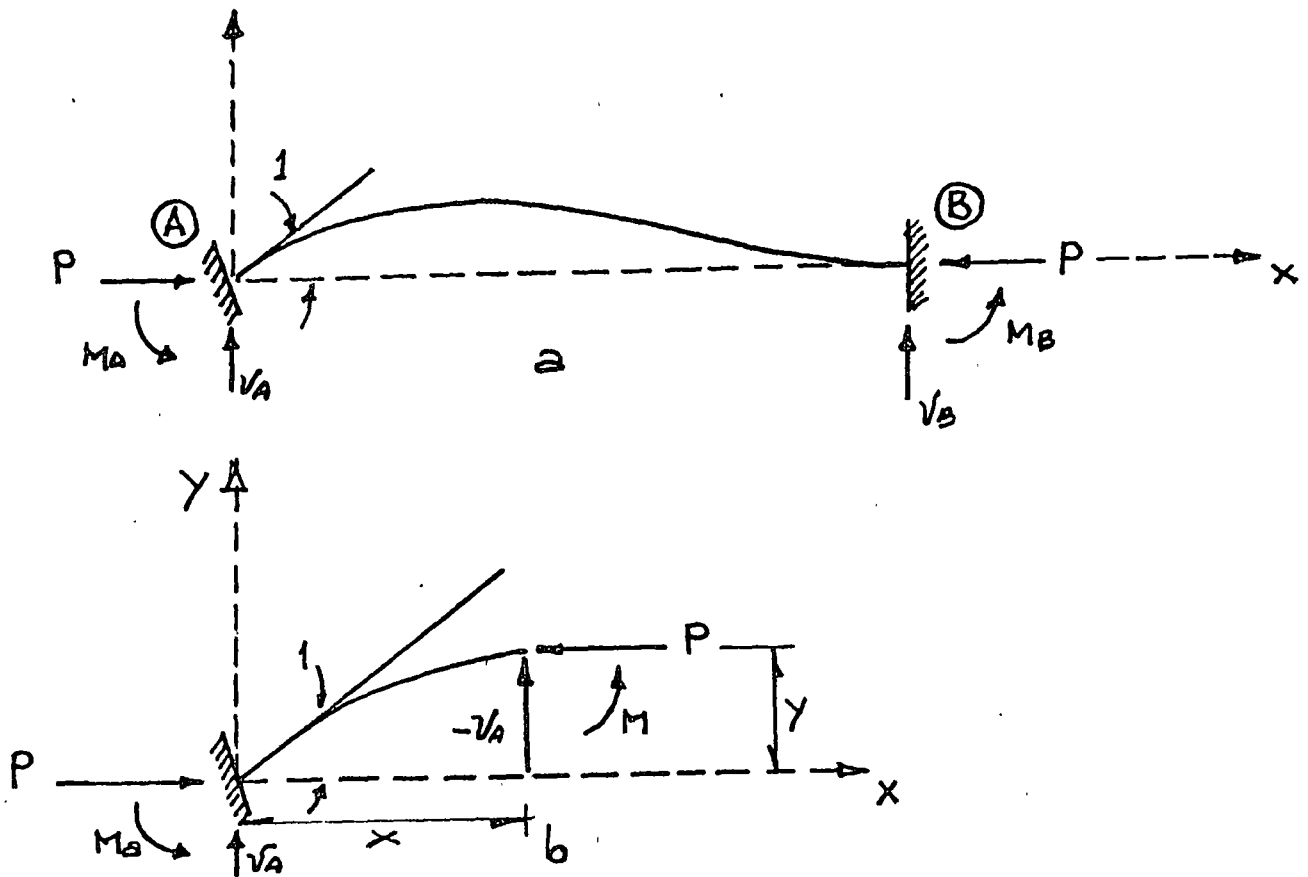


Fig. 18 Obtención de los coeficientes de rigidez para un desplazamiento angular unitario en el extremo A de un elemento prismático .  
 a. Diagrama del elemento. b. Detalle.

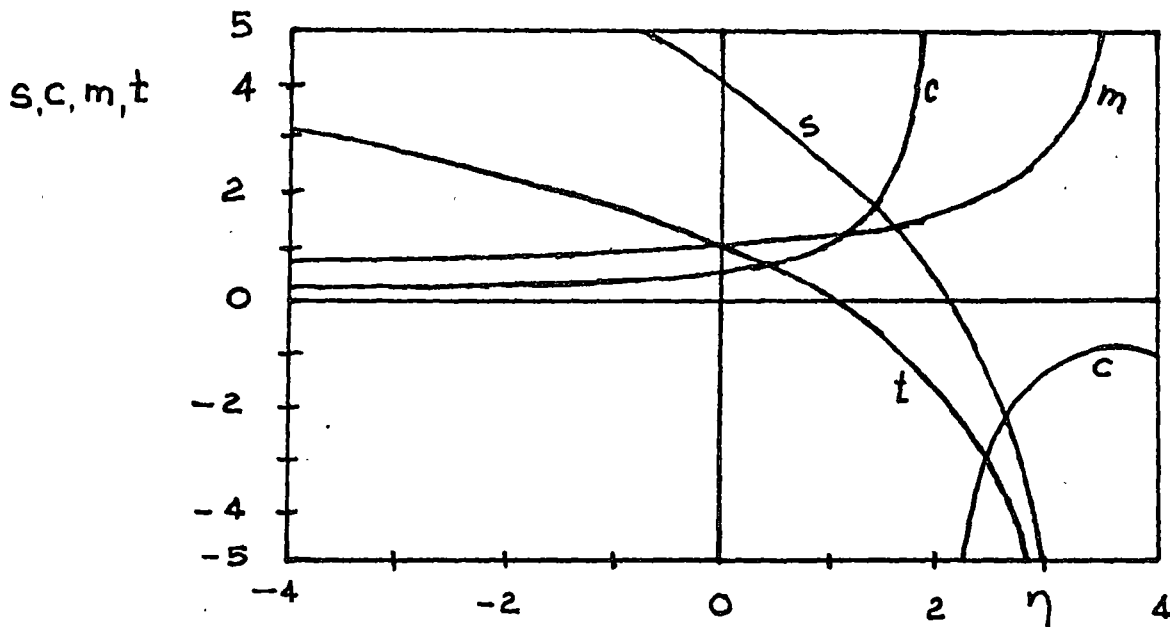


Fig. 19 Funciones de estabilidad y de carga para elementos prismáticos sujetos a carga axial, en términos del parámetro  $n$ .

En el caso de fuerzas de compresión las expresiones que definen a las funciones son:

$$S = \frac{U(\text{sen}U - U\text{cos}U)}{2(1 - \text{cos}U) - U\text{sen}U} \quad ; \quad C = \frac{U - \text{sen}U}{\text{sen}U - U\text{cos}U}$$

$$t = 1 - \frac{\pi^2 n}{25(1+C)} \quad \text{donde} \quad U = \pi\sqrt{n}$$

Si la fuerza es de tensión se reemplaza  $\text{Sen} U$  por  $\text{Senh}U$  y  $\text{cos}U$  por  $\text{cosh}U$ , aunque este no es un caso de interés práctico *en edificios*.

Nótese Fig. (19) que al aumentar las fuerzas no disminuye  $S$ , lo cual físicamente significa que es más fácil, en la fig. (18), dar un giro unitario en el extremo A cuando la fuerza  $P$  está presente. También obsérvese que  $c$ , que es el factor de transporte, aumenta con  $P$  y que puede llegar a ser mayor que 1 o negativo, y además que  $S$  puede hacerse cero o negativo.

Al analizar un marco no se conocen de antemano las cargas axiales en las columnas, por lo que, para considerar su efecto se tiene que seguir un procedimiento iterativo que consiste en analizar el marco sin considerar el efecto de fuerzas axiales, es decir el análisis usual, luego con las fuerzas que así se obtienen modificar las matrices de rigideces y volver a analizar. En este segundo análisis se obtendrán fuerzas axiales diferentes a las obtenidas en el primero y se tendría en rigor que volver a modificar las rigideces y volver a analizar hasta que las cargas axiales no cambien en dos ciclos sucesivos. En la práctica es por lo común suficiente hacer dos análisis, sobre todo cuando las cargas axiales son apreciablemente menores que las cargas de Pandeo de las columnas. ( En estos casos se pueden incluso no considerar estos efectos).

Una forma menos precisa, pero más sencilla de modificar las matrices de ri

gideces de las columnas es la siguiente:

$$\underline{K}_{modif} = \underline{K} - \underline{K}_g$$

Donde  $\underline{K}$  es la matriz correspondiente al caso en que no se consideran fuerzas axiales y  $\underline{K}_g$ , que se denomina matriz de rigideces geométrica, está dada por:

$\underline{K}_g = P$

$\frac{6}{5h}$	$-\frac{6}{5h}$	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{10}$
	$\frac{6}{5h}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$
<i>simétrica</i>		$\frac{2}{15h}$	$-\frac{1}{30h}$
		$\frac{2}{15h}$	

ii) Efecto de Conjunto

Un planteamiento "exacto" de este problema requeriría determinar las ecuaciones de equilibrio sobre la configuración deformada, y esto tendría que hacerse iterativamente, puesto que de las ecuaciones se obtienen los desplazamientos y se usan estos desplazamientos para obtener las ecuaciones. Además tendría que tomarse en cuenta los efectos locales.

Esto exigen las Normas Técnicas Complementarias de la ref. 1 para los casos en que la relación de esbeltez de las columnas sea mayor que 100, y se denomina análisis de segundo orden.

Una forma aproximada de considerar estos efectos, que se desarrollan en la ref. 24, es la que se resume a continuación:

En la fig. 17 el momento total de entrepiso es:

$$M = Vh + W\Delta \quad (2)$$

Sea R la rigidez de entrepiso en el análisis convencional del marco suje-

to a cargas laterales, y suponiendo que los diagramas de momentos en las columnas, debidas a  $W$ , son proporcionales a las que producen esas cargas laterales se tiene que:

$$M = (R\Delta)h \quad (b)$$

$$(R\Delta)h = Vh + W\Delta$$

$$\Delta = \frac{V}{R - (W/h)}$$

$$M = Vh \left[ 1 + \frac{W/h}{R - (W/h)} \right]$$

y los efectos de esbeltez pueden considerarse entonces multiplicando los momentos que producen las cargas laterales por el factor de amplificación:

$$\phi = 1 + \frac{W/h}{R - (W/h)}$$

por este factor se multiplicarán también todas las deformaciones y esfuerzos que producen las cargas laterales.

Con referencia a la fig.17 esto significa que la acción combinada de las cargas verticales y de una fuerza constante  $V$ , equivale a la de una fuerza cortante incrementada  $V+W\psi$

Es necesaria una corrección del factor de amplificación para tomar en cuenta que en realidad las columnas no permanecen rectas, esto es más notable cuando las vigas son infinitamente rígidas, y para este caso es la ref.24 se tiene:

$$M = Vh \left( 1 + \frac{W/h}{R - 1.2 W/h} \right)$$

La ecuación (f) es la que aparece en unos métodos que, para tomar en cuenta efectos de esbeltez, se propone en las Normas Técnicas Complementarias del Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal, con la variante de que en vez de  $R$  se pone  $\frac{R}{Q}$  (esto resulta de que  $V = \frac{RA}{Q}$  para estructuras dúctiles).



La ecuación (e) puede escribirse en forma diferente si consideramos que

$\frac{V}{W} = \frac{R\Delta}{W} = c$  y que  $\frac{\Delta}{h} = \psi$  resulta :

$$\phi = 1 + \frac{(R\Delta/ch)}{R - \frac{R\Delta}{ch}} = 1 + \frac{\psi/c}{1 - \psi/c} \doteq 1 + \frac{\psi}{c}$$

$\psi$  Normalmente viene limitado en los Reglamentos lo mismo que c que es el coeficiente sísmico.

Por ejemplo: si  $\psi = 0.008$  y  $c = 0.08$  entonces:  $\phi = 1.1$

REFERENCIAS (continuación)

- 12. Esteva, L y Rosenblueth, E., "Folleto complementario diseño sísmico de edificios", Ediciones Ingeniería, 1962.
- 13. Wilson, E. L., Hollings, J.P. y Dovey, H. H., "Three dimensional analysis of buildings systems (extended version)", publicación EERC 75-13, University of California, Berkeley, 1975.
- 14. Aranda, R. y Ayala, G., "Análisis tridimensional de edificios (implantación del programa ETABS)", Instituto de Ingeniería, 1976.
- 15. MacLeod, I.A., "Shear wall-frame interaction a design aid with commentary", SP3, Portland Cement Association, 1971. En español LIMUSA 1977
- 16. Burns, R.J., "An approximate method of analyzing coupled shear walls subjected to triangular loading", Proc. Thirth WCEE, Nueva Zelandia, 1965.

17. Allen, F. H. y Darvall P., "Lateral load Characteristics of plate structures", Proc. Fifth Australian Congress on the Mechanics of Structures and Materials, Melbourne, 1975
18. Coull, A. y Choudhury, J. R., "Analysis of coupled shear walls", ACI Journal Vol 64 set 1967
19. López R., J. y De la Orta, S. "Análisis matricial avanzado de estructuras reticulares, Parte 1, Análisis estático" IPN 1977
20. Ghali, A. y Neville, A.M. "Structural Analysis a Unified Classical and Matrix Approach", Intext Educational Publishers, 1972.
21. Smolira, "Analysis of Tall Buildings by the Force-displacement Method", Mc Graw Hill U.K., 1975
22. Beaufait, F., Rowan, W., Hoadley, P. y Hackett, R. "Computer Methods of Structural Analysis", Prentice Hall, 1970
23. Przemienieki, J.S., "Theory of Matrix Structural Analysis", Mc Graw Hill, 1978
24. Rosenblueth, E, "Efectos de esbeltez en Edificios", Revista Ingeniería; Vol XXXV, Num 4, Enero 1965
25. Horne, R.M y Merchant, W, "The stability of frames", Pergamon Press, 1965
26. Desai, C.S y Abel, J.F., "Introduction to the Finite Element Method", Van Nostran Reinhold Company, 1972
27. Zienkiewicz, O.C., "The Finite Element Method in Engineering Science", McGraw Hill, 1971
28. Rubinstein, M.F., "Structural Systems-Statics, Dynamics and Stability" Prentice Hall, 1970
29. Brebia, C.A. and Connor, J.J., "Fundamentals of Finite Element Techniques", Butherwords, 1973
30. Cook, R.D., "Concepts and Applications of Finite Element Analysis" Wiloy, 1974



centro de educación continua  
división de estudios superiores  
facultad de Ingeniería, unam



## IV CURSO INTERNACIONAL DE INGENIERIA SISMICA

DISEÑO SISMICO DE EDIFICIOS

CRITERIOS DE DISEÑO SISMICO

DR. LUIS ESTEVA MARABOTO

AGOSTO, 1978.

### 3. DESIGN: GENERAL

L. Esteva\*

#### 3.1 NATURE AND OBJECTIVES OF EARTHQUAKE RESISTANT DESIGN

Engineering design is rooted on society's need to optimize. It implies considering alternate lines of action, assessing their consequences and making the best choice. In earthquake engineering, every alternate line of action includes the adoption of both a structural system and a seismic design criterion, while assessing consequences implies estimating structural response and hence the expected cost of damage. The choice is based on comparison of initial, maintenance and repair costs for the various alternatives. However obvious these concepts may appear to the authors of design codes, they are often not explicit in those codes and hence they are not always present in the minds of those who apply

---

\* Institute of Engineering, National University of Mexico

2

design prescriptions to practical problems. Equally concealed within the regulations of seismic design codes are the approximations implicit in conventional criteria for the prediction of structural response: the accuracy of their predictions is often strongly dependent on the type of structural system considered. Base shear coefficients and design response spectra are taken as measures of response parameters, as the latter are usually expressed in terms of accelerations and equivalent lateral forces acting on linear systems. But these variables are no more than indirect measures of system performance during earthquakes: they serve to control the values of more significant variables, such as lateral deflections of actual nonlinear systems, global and local ductilities, and safety margins with respect to instability failure (second-order effects). Because the relations of control variables to actual response are affected by the type and features of the structural system, better designs will be obtained if these relations are understood and accounted for, in contrast with blindly applying codified recommendations. In seismic design more than in any other field of engineering, it is easy to fall on a strict—but blind — application of the most advanced regulations and yet to produce a structure bound to perform poorly. This chapter does not intend to summarize modern design specifications; it aims, instead, at discussing the main concepts on which they are based, analyzing their virtues and their weaknesses, and stating the conditions for which acceptable results are to be expected.

## 3.2 STRUCTURAL RESPONSE AND CONTROL VARIABLES

### 3.2.1 Ductility and strength

A structural system is said to be ductile if it is capable of undergoing substantial deformations at nearly constant load, without suffering excessive damage or loss of strength in face of subsequent load applications. Curves 1 and 2 in Fig 3.1 show typical load ( $Q$ ) vs deflection ( $y$ ) relations for first load application in ductile and brittle systems, respectively. Curve 1 corresponds to the response under lateral load of an adequately detailed reinforced concrete frame where slenderness effects are not significant; curve 2 is typical of weakly reinforced hollow block masonry. But when the effect of several loading cycles has to be considered, ductile behavior cannot be inferred from looking only at curves such as these for first load application: damage produced during the first cycles may impair the system's energy absorption capacity for subsequent cycles, and stiffness can degrade, as in Fig 3.2b, typical of plain masonry shear walls confined by reinforced concrete frames<sup>1</sup>. In this case, stiffness degradation is associated with diagonal tension cracking of the infilling wall panel and the ensuing residual strains. Practically stable hysteretic cycles found for structural steel joints<sup>2</sup> as shown in Fig.3.2a are synonymous with negligible damage.

As shown in section 3.2.2, the ability of structural systems to respond to dynamic excitations according to load deflection curves similar to Fig 3.2a provides support to conventional seismic design criteria, which re

Codified values of design intensities and of allowable values of response-control variables stem from formal or informal cost-benefit studies. As implicit in these studies, the general goal of optimization can be expressed in terms of direct, particular objectives: seismic design aims at providing adequate safety levels with respect to collapse in the face of exceptionally intense earthquakes, as well as with respect to damage to adjacent constructions; it also seeks to protect structures against excessive material damage under the action of moderate intensity earthquakes, to ensure simplicity of the required repair, reconstruction or strengthening works in case damage takes place, and to provide protection against the accumulation of structural damage during series of earthquakes. Finally, safety and comfort of occupants and of public in general is to be preserved by ensuring that structural response during moderate intensity earthquakes will not exceed given tolerance levels and that panic will not occur during earthquakes of moderate and high intensity, particularly in buildings where frequent gathering of people is expected.

Achievement of the foregoing objectives requires much more than dimensioning structural members for given internal forces. It implies explicit consideration of those objectives and of the problems related with nonlinear structural response and with the behavior of materials, members, and connections when subjected to several cycles of high-load reversals. It implies as well identifying serviceability conditions and formulating acceptance criteria with respect to them.

quire structures to sustain only a fraction of the lateral forces they should have to resist would they be demanded to remain within their linear range of behavior during strong earthquakes. Thus, safety against collapse can be provided by making a structure strong, by making it ductile, or by designing it for an economic combination of both properties. For some types of materials and structural members, ductility is difficult to achieve, and economy dictates designing for relatively high lateral forces; for others, providing ductility is much cheaper than providing lateral capacity, and design practice reflects this. But material ductility does not necessarily imply system ductility, as  $P - \Delta$  effects (that is, interaction between lateral deflections and internal forces produced by gravity loads acting on the deformed structure) can lead to instability failure when the effective lateral stiffness is too low (see Fig 3.3).

Nonlinear ductile behavior of complex systems usually stems as a consequence of local or concentrated ductile deformations that take place at those particular sections of a given structure where yielding strains are reached (Fig 3.4). Numerically, local ductility can be expressed either as the ratio of total to yield-limit curvatures at a given section or as the ratio of total to yield-limit rotation at a member end<sup>3</sup>. Global or overall ductility is a property of a load-deformation curve expressed in terms of the resultant of external loads acting on a large portion of a given system. For instance, building frames are often dealt with as shear systems for the purpose of estimating their dynamic nonlinear



response to seismic excitation. Global or overall ductilities can then be expressed in terms of the curves tying shear forces with lateral distortions. Numerical values of local ductilities determined by the above alternate criteria do not coincide among themselves, nor does overall ductility at a given story idealized as a segment of a shear beam coincide with the values of concentrated ductilities developed at the corresponding locations of the story, as overall ductility is a function of the ratio of the contributions to story distortion of concentrated ductile deformations and distributed elastic strains. Because beams are usually capable of developing larger ductilities than columns subjected to significant compressive loads, many building frames are designed under the "strong column-weak girder" criterion, according to which different load factors are adopted for different internal forces so as to make yielding much more likely at beam- than at column-ends. Under these conditions, significant coupling is introduced between nonlinear deformations of adjacent stories, and the shear-beam model may cease to apply. Whether the model in question strictly applies or not, nominal story ductilities are only indicators of their local values, and features contributing to ductility concentrations have to be held in mind while designing.

The relation between local and overall ductility is illustrated for a simple frame in Fig 3.4. The top-right portion shows the ideal case where moment-curvature graphs at critical sections are elasto-plastic and

yielding is reached simultaneously at the four column-ends. If the frame is forced to undergo additional deformations at constant load, local curvatures at the yielding locations will increase and the lateral deflection of the frame will grow from  $y_y$  to  $y_m$  (Fig 3.4c). Local ductility can be measured by the ratio of the final and yielding values of the curvatures mentioned. Overall ductility is given by  $y_m/y_y$  and is a function of local ductility and of the lengths of the member segments along which curvatures will be greater than their values at yielding. Those lengths are functions of the type of material, the local details and the relative variation of bending moment ordinates and structural section strength.

Consider now a frame subjected to a constant system of vertical loads  $Q_2$  (Fig 3.5) that produce an initial state of internal forces. If a system  $Q_1$  of lateral loads is gradually applied, the ordinates of bending moment diagrams b and c will be additive at some locations and subtractive at others. Yielding will occur sequentially, say in the order D, C, B, A, giving place to the load-deflection curve shown in Fig 3.5d. Local ductilities will differ at the mentioned locations; they will depend, among other things, on the order in which they reached their yield moments. Where axial loads are important, they can have a significant influence on these moments.

The following sections describe the quantitative relationships tying ductility demands with strength and stiffness in simple structural sys-

tems, as well as some problems found when trying to extrapolate those relationships to complex systems, representative of those encountered by engineers in their design practice.

Dynamic response of simple nonlinear systems

A usual idealization of ductile structures is the elastoplastic system with load-deflection curve as shown in Fig. 3.6b, with stiffness  $k$  in the linear range of behavior, coefficient of viscous damping  $c$ , and top mass  $m$ . When the system responds to a strong earthquake, the maximum relative displacement  $D$  will exceed the yield deformation  $y_y$ , while the maximum lateral force will remain at the yield value  $Q_y$  if  $P-\Delta$  effects are neglected. Failure is said to occur if the ductility demand  $D/y_y$  is greater than the available ductility  $\mu$ . Fig 3.7 is a plot of yield deformations required to make ductility demands equal to available ductility for different values of this parameter, for the range of natural periods (computed in terms of the initial tangent stiffness of the elastoplastic system) most significant in practice, and for damping ratio  $\zeta = 0.5c (km)^{-1/2}$  equal to 0.02. Pseudo-accelerations  $kD/m$  can be read on the proper scale in the same plot. Inspection of these curves shows that, provided the natural period is not too short, required yield deformations — and hence required base shear coefficients — vary inversely with ductility. The same conclusion is reached if one reads along the scale of spectral pseudoaccelerations. But this favorable influence of ductility in reducing the required base-shear coefficient is less pronounced in the range of

short natural periods, say shorter than  $2\pi v/a$ , where  $v$  and  $a$  are peak values of ground velocity and acceleration, respectively: as the system becomes stiffer,  $T$  tends to zero and spectral pseudo acceleration tends to  $a$ , regardless of  $\mu$  — assuming that  $\mu$  has to remain bounded.

Actual values of lateral relative displacements are equal to  $\mu y_y$ , which means that, for moderate and long natural periods, those displacements are nearly insensitive to  $\mu$ , while for very short natural periods they tend to be proportional to  $\mu$ . In few words, the results just described can be expressed as follows: if a simple elastoplastic system with initial natural period  $T$  is to develop a ductility factor  $\mu$  during an earthquake, the required base shear coefficient can be obtained by applying a reduction factor to the corresponding spectral value for an elastic system having equal natural period and damping; for moderate and long values of  $T$ , the reduction factor is approximately equal to  $\mu^{-1}$ , while for short natural periods it will be comprised between  $\mu^{-1}$  and 1; relative displacements will equal  $\mu$  times those of an elastic system subjected to the reduced base shear; that is, they will be approximately equal to those of the elastic system subjected to the actual, unreduced earthquake, if  $T$  is not too short, or to  $\mu$  times the latter values if  $T$  is nearly zero. This is shown by a comparison of the dashed and full lines in Fig.3.7.

Similar conclusions have been derived from other earthquake records obtained on firm ground. Although these conclusions can be expected to be qualitatively valid for soft soil conditions, corresponding approxi

mate quantitative rules are still to be derived.

The foregoing conclusions have to be modified when considering systems whose response cannot be idealized as elastoplastic. Other usual idealizations are depicted in Figs 3.6 e-f. Lateral strengths required for not exceeding given ductility demands in these systems are as a rule greater in 10 to 50 percent than those valid for the conventional elastoplastic system<sup>5-9</sup>. In the asymmetric elastoplastic case, yield strength is different for each direction of load application. It occurs, for instance, as a consequence of gravity loads giving place to increased or decreased lateral capacity of the second story of the system shown in Fig 3.8, depending on whether the vertical reaction to force  $Q_2$ , transmitted to beam AB at O, is directed upwards or downwards. Slip-type curves (Fig 3.9) usually stem as a result of lateral loads being carried by elements such as cross-braces or tie-cables, which can only carry tensile stresses. Yielding elastic curves are close approximations to the behavior of some prestressed concrete beams, subjected to antisymmetric end moments: these curves are often characterized by very narrow hysteretic loops. Degrading curves are frequently found in systems where a significant portion of the lateral capacity is due to members built with brittle materials and where no special precautions have been taken to prevent excessive damage in each cycle of load application. Such is the case, for instance, in masonry shear diaphragms or poorly detailed reinforced concrete frames.

Unstable curves (Fig 3.6d) are produced by the influence of significant vertical loads acting on the displacements of the deformed structure. The influence of instability effects on ductility demands and on safety against collapse can be much more drastic than that associated with the features of the curves previously discussed, and is usually controlled in design practice by the specification of amplification factors for lateral deflections and internal forces that account for increments associated with second order effects.

Ductility demands in complex systems

Local ductility demands vary from point to point. Their distribution depends on that of local strength throughout the system, with significant interaction taking place between energy dissipation at different sections. The general patterns of ductility demands in complex systems have been studied almost exclusively in building frames, idealized either as shear beams or as assemblages of beams and columns where yielding is restricted to occur at plastic hinges located at the bar ends. Some results are plotted in Figs 3.10 and 3.11 for shear beams and frame systems, respectively. Each set of results corresponds to a different set of simulated earthquakes with frequency content similar to that observed under normal conditions on firm ground in the western coast of the United States. Structures were designed for the average ordinates, with respect to each set of motions, of the elastoplastic response spectrum corresponding to a ductility factor of 4. The systems in Fig 3.10

were designed for the contribution of the fundamental mode of vibration alone, while that in Fig 3.11 was designed for the superposition of its four natural modes, in accordance with the criterion of square root of sum of squares advocated in Ref 10. The load factor was in all cases taken as unity. Ductilities were expressed in terms of story sway for the shear beams and of local curvature at hinges for the framed system; thus, their absolute values cannot be compared. Their variability throughout the building is evident, however, as is the occurrence of large ductilities at the upper portion of systems for which the response associated with higher natural modes was neglected.

More pronounced variability in ductility demands has been observed in some shear systems with fundamental periods shorter than the dominant period of the ground motion, and in those whose safety factors with respect to design story shears vary significantly through the building height<sup>11</sup>. Such variability may be a consequence of architectural requirements, which often lead to some stories possessing elements stronger than they need to be in order to comply with the seismic coefficient adopted. When this happens, the relative contribution of each story to the hysteretic dissipation of kinetic energy changes, and those stories possessing the smallest safety factors are subjected to higher ductility demands than if the safety factor were uniform throughout the structure. When these increased ductility demands cannot be met with adequate yielding capacity, the lateral force coefficient has to be raised. Because of the large displacements implied, slenderness effects may become

specially significant.

### 3.2.2 Stiffness and deformations

Structural stiffness controls natural period and hence seismic forces. The latter are lower for longer periods, that is, for small stiffnesses, but then displacements and deformations may become excessive. In addition to ensuring adequate safety factors against collapse, seismic criteria should aim at controlling deformations, because they are directly responsible for damage to nonstructural elements, impact with adjacent structures, panic and discomfort.

Stiffness is also the main variable controlling safety against instability. Lateral displacements and internal forces produced by horizontal ground motion are amplified by interaction between gravity loads and the displacements mentioned. The amplification function varies in a nonlinear fashion with respect to lateral stiffness and reaches very high values when the latter variable approaches a certain critical value. In ductile structures, safety against instability failure is a function of effective stiffness, that is, of the slope of the line joining the origin of the force-deflection graph with the point representing the maximum deflection and the corresponding lateral force (in elastoplastic systems, this is the same as the value of the tangent initial stiffness divided by the ductility factor). The increasing rate of variation of the amplification function mentioned with respect to lateral stiffness when the latter is made to



approach its critical value hinders the possibility of designing for very small lateral forces through the construction of very ductile structures (Fig 3.3).

### 3.2.3 Damage and energy absorption

Ductile hysteretic response provides a manner of transforming and dissipating the kinetic energy imparted to a structure through its base. Such response usually implies some degree of damage, and possibly the deterioration of the system to withstand future severe earthquakes. Damage may accumulate during successive events, and the system's capacity may be seriously impaired. Decisions concerning the extent and level of damage that it is advisable to admit are mostly of economic nature. In general, the degree of structural damage and its harmful effects on future performance can be controlled at some cost through selection of adequate materials and construction details, as described in Chapter 8. Damage to nonstructural members can be prevented through their isolation from the deformations of the structure. However, economy may dictate taking advantage of energy dissipation associated with damage. Architectural elements or ad hoc devices can be used for this purpose (Fig 3.12). In either case, considerations on facility of repair or replacement should form part of design.

The use of metal bands around partitions as shown in Fig 3.12a may serve the purposes of limiting the lateral forces that the structure will transmit to the partitions and at the same time taking advantage of the

capacity of the partitions to resist such forces and making use of the energy absorbing capacity of the bands<sup>10</sup>. In other cases, designing for significant damage on partitions may prove to be attractive.

Anchor bolts that yield during severe ground motion can provide protection to slender chimney stacks against local buckling or overall bending failure<sup>12</sup>, at the expense of nonrecoverable elongations

Adequate performance of anchor bolts during sequences of earthquakes demands adjusting nuts after each event and replacing those bolts for which the sum of previous residual elongations is excessive.

Large concentrated deformations are frequent at <sup>spandrel</sup> ~~spandrel~~ beams connecting coupled shear-walls (Fig <sup>3.16 b</sup> ~~8-12c~~) or at the ends of beams meeting shear-wall edges and hence constitute adequate locations for energy-absorbing devices.

Partial isolation of building foundations from the ground motion has been advocated as a means to control structural response and nonstructural damage<sup>13-15</sup>. Isolating systems may consist of pads of very flexible material, assemblages of rollers or the like. Relative displacements between foundation and ground can be controlled by means of passive energy absorbing devices located at the ground-foundation interface (Fig 3.12<sup>b</sup><sub>g</sub>).

### 3.3 DESIGN PRINCIPLES

#### 3.3.1 Design requirements and basic principles

The art of designing for earthquakes does not consist in producing structures capable of withstanding given sets of lateral forces, although that capability is part of a sound design. It involves producing systems characterized by an optimum combination of properties such as strength, stiffness, energy-absorption, and ductile-deformation capacities that will enable them to respond to frequent, moderate earthquakes without suffering significant damage, and to exceptional, severe earthquakes without endangering their own stability, their contents, or human life and limb. Achievement of this purpose means much more than application of codified rules; it demands understanding of the basic factors that determine the seismic response of structures, as well as ingenuity to produce systems with the required properties.

Codified requirements set optimum design levels in accordance with implicit cost-benefit analyses that balance initial construction costs with expected costs of damage and failure. They also recommend criteria and algorithms deemed adequate for the evaluation of the design actions tied to the optimum design levels. These recommendations serve the purpose of implementing sufficiently simple design criteria at the expense of narrowing the range of conditions where they give place to accurate predictions of response. It is the role of the engineer to recognize the possible deviations and to apply basic principles before

trying to extrapolate general requirements to the particular problem at hand.

Static criteria of seismic design are stated in terms of the coefficients by which the masses of each structure have to be multiplied in order to produce the set of lateral forces to be designed for; but in most cases those coefficients stem from the dynamic response of linear shear beams possessing approximately uniform distributions of mass and stiffness. The meaning of the mentioned lateral forces must be clearly understood: they aim at providing a diagram of story shears that correspond to consistent safety levels; but they fail to predict other significant effects. Thus, reduction factors for overturning moment are required to account for the fact that maximum story shears do not occur simultaneously, and special algorithms have to be used to determine local effects, such as response of appendages and diaphragm stresses in floor systems, corresponding to safety levels consistent with those intended for story shear.

Dynamic criteria of design usually require performing a modal analysis, and hence variability in masses and stiffnesses is accounted for in the computation of the lateral force coefficients; but modal analysis fails to predict the influence of nonlinear behavior except for some simple cases in which hysteretic dissipation of energy is distributed uniformly throughout the system; it is incapable of predicting ductility-demand concentrations and nonlinear interactions for the simultaneous action

of several ground motion components. Whatever design criterion is adopted, departures of actual conditions from those leading to uniform energy dissipation have to be recognized and their possible influence on behavior evaluated.

Given a set of design requirements and response control variables, a criterion of structural analysis capable of predicting with sufficient accuracy those variables must be applied to determine internal forces and deformed configuration. Simultaneous action of the significant components of ground motion has to be considered, including a scaling factor applied to each component in order to account for its probable value when the maximum absolute value of their combination takes place (see Ch. 2). The criterion of structural analysis adopted must be such as to recognize the possible concentrations of nonlinear behavior and to attain a sufficiently low probability that they occur at undesirable locations, as a consequence of inaccuracies of that criterion. This means that prediction of displacements and internal forces must account for stiffness and <sup>continuity</sup>~~contributions~~ including all significant deformations; in particular,  $P - \Delta$  effects must be considered at least by means of an approximate analysis intended to define the desirability of more refined studies. Some building code regulations state simple rules for deciding when  $P - \Delta$  effects can be disregarded<sup>16</sup>. The contribution of the so-called nonstructural elements to stiffness should not be neglected, unless those elements are properly isolated from the structure or it is shown that they can not be harmful to its behavior.

Attention should be given to inertia forces associated with all significant components of local acceleration, namely angular acceleration (rotational inertia) of umbrella-like canopies or segments of stacks and vertical accelerations of long-span girders in bridges or industrial bents. Both types of acceleration are produced by horizontal, vertical, or rotational ground motion.

Adequate stress paths must be provided in order to guarantee that design forces can be transmitted down to the foundation. Deformability of the substructure and of the ground underlying it must be considered when defining the stiffness matrix of the whole system or the support conditions of the superstructure on the foundation. Distribution of contact pressures between ground and substructure should be computed on the bases that no tensile stresses can be transmitted at the interface, unless special provisions are taken, such as the construction of anchors or tension bearing piles.

Safety of structural and nonstructural elements to withstand the effects of local accelerations should be studied; in particular, overturning of walls and parapets produced by forces normal to their planes must be prevented by adequate reinforcement and anchorage.

### 3.3.2 Framing systems

Decisions concerning the selection of a framing system are influenced by many factors. Basic criteria are best illustrated by discussing some

typical problems, as done in what follows.

Stiffening elements

Continuous frames can usually resist seismic forces by developing rather uniform stress paths. Their main asset is that they can easily be designed and built so as to withstand large ductility demands. However, their efficiency, based on the bending capacity of beams and columns, is lower than that of systems that base their strength on that of elements subjected to simple shear or axial forces. Besides permitting the development of larger lateral capacities without excessive costs, stiffening systems can be decisive in the control of damage associated with lateral distortions. But economic and architectural considerations may preclude the use of these elements in some instances, and they may show significant technical disadvantages in others. In tall buildings, enhanced stiffness is usually provided by diaphragms and cross braces; the former built in reinforced concrete or masonry, the latter in reinforced concrete or steel (Fig 3.13). Use of cross bracing is usually to be preferred over that of diaphragms in low buildings and industrial bents, except in those instances where the diaphragms are required for architectural reasons. In intermediate and tall buildings the reverse is usually true, mainly on account of the large cross sectional dimensions that would be required for the bracing members and of the serious problems posed by their anchorage, particularly in reinforced concrete structures.

The efficiency of cross-braced bays and shear walls is reduced as their aspect ratio (height-to-width ratio) increases. The reason for this can be understood from Fig 3.14, which compares the deflected shapes of a braced bay or a wall acting as a flexural beam fixed at its base and a continuous frame acting essentially as a shear beam when both are subjected to a system of lateral forces. For equal top deflections, near the bottom the slopes of the flexural beam will be much smaller than those of the shear beam, but near the top the reverse will be true. The greater the aspect ratio of the flexural beam, the more important will be this effect. It follows that, when a system of lateral forces is resisted by the combination of a continuous frame and a slender wall, the latter will take a significant portion of the total story shear in the lower stories, but will fail to do so in the upper ones, as there the wall will tend to lean on the frame, instead of helping it to withstand the total story shear. The occurrence of large rotations of the wall horizontal sections gives place to excessive local deformations and ductility demands at the ends of beams connected to the wall edges. These problems can be aggravated by the occurrence of significant displacements associated with the flexibility of the foundation at the base of the wall. Adoption of cross sections as shown in Fig. 3.15 can significantly enhance the efficiency of slender shear walls by increasing their flexural stiffness; but the most effective manner of reducing overall bending deflections is to get as wide a portion of a given bay to contribute to overall bending stiffness. In braced systems,



this can be accomplished by adopting configurations as shown in Fig. 3.16a. Where architectural requirements force the adoption of a number of separate walls in the same plane, one solution consists in coupling several of them and making them act together by means of sufficiently stiff and strong spandrel beams (Fig. 3.16b). Then stems the problem of attaining ductile behavior in these beams (see Ch. 5).

Use of stiffening elements may bring about other problems: the flexibility of the foundation and that of the floor diaphragms may be significant in comparison with that of the stiffening elements and have to be accounted for when obtaining the distribution of internal forces. In-plane deformability of horizontal diaphragms may become very important in buildings long in plan where lateral forces are resisted by shear walls located near the ends of the building plan. Not only stiffness, but also strength of the floor diaphragms in their own plane becomes then a relevant variable.

### Symmetry

The distressing influence of asymmetry in structural behavior has been recognized, and perhaps over-emphasized. Efforts to avoid its effects have concentrated on the problem of adjusting stiffnesses so as to avoid torsional eccentricities; but even if computed eccentricities are negligible, important torques can develop, for instance, when high stiffnesses of certain structural members on one end of the building plan are balanced by very dissimilar elements on the other, as the relative values of the

computed stiffnesses may be little reliable. In addition, eccentricities of variable magnitude may occur as a consequence of nonlinear behavior, even in those cases where conventional linear analysis predicts no torsional stresses. For this reason, it is desirable that structures be symmetric not only with respect to stiffnesses, but also to types of structural members.

### Uniformity

Adoption of very different spans in a given frame gives place to high shears and bending moments in the girders covering the shortest spans. These internal forces may reach excessive values in tall buildings, and even give place to objectionable variations on the axial loads of the adjacent columns; those variations can in turn affect foundation design. In low rise buildings these effects may be insignificant; the degree of uniformity which may be desirable in tall buildings may thus be objectionable in the lower ones, if it prevents taking advantage of the irregularly located points put forward by the architect. For instance, in the reinforced concrete frame structure whose floor plan is shown in Fig 3.17a, the arrangement of service walls permits locating columns at points A, B, C, D. Such columns would reduce beam spans, and hence they would be desirable in a two- or five-story building; probably, they would be objectionable in a building having more than eight or ten stories. Nevertheless, it may in some cases be advantageous to locate columns at points that imply marked discrepancies between the spans of

a tall building. It is then advisable to decrease the stiffnesses of the girders connecting those columns, mainly by reducing their depth, as shown in Fig 3.17b.

As a consequence of vertical displacements produced by lengthening and shortening of columns, problems derived from excessive stiffness of short span beams tend to augment. Stiffness reduction called for by a good design for lateral loads might then be inconvenient because of limitations related with vertical load deflections. It is then advisable to project plastic hinges at the ends of the elements under consideration.

~~Buildings having irregular plans that include two or more~~ main sections interconnected by narrow corridors (Fig 3.18) pose special problems of analysis and design: excessive stresses in the corridor diaphragms and significant twisting forces in the building sections can result as a consequence of interaction among those sections; evaluation of these effects is in general a difficult task including explicit consideration of diaphragm deformability. The problem can be successfully handled by means of properly located vertical construction joints.

Staggered lines of defense

A large number of buildings base their lateral strength on the contribution of brittle elements that crack while they absorb energy during the strongest phases of a shock. <sup>Design</sup> Design of such buildings is <sup>often</sup> often done assuming no reduction in the elastic spectral ordinates on account of

ductility, as cracking may be tantamount to collapse. Their performance is greatly improved, and the design forces for a given reliability sharply reduced, however, if the system is provided with a second line of defense, capable of developing a fraction of the lateral strength of the brittle elements and of showing ductile behavior after cracking of the first, stronger and usually stiffer system. This property has been recognized by some building codes<sup>16,20</sup>, which specify nearly equal ductilities for moment resisting structural frames as for dual systems that resist lateral forces by a combination of vertical bracing trusses, reinforced concrete or reinforced masonry shear walls and ductile moment resisting frames, provided the frames ~~take~~<sup>take</sup> at least 25 percent of the prescribed seismic forces.

### 3.3.3 Design for ductility and energy absorption

Neither local nor global ductilities can be ensured by use of a ductile material: both properties depend as well on the types of potential failure modes and on the relative values of the safety factors with respect to each of them. Thus, onset of instability precluded taking full advantage of the ductility inherent in the material used in the structure of Fig 3.3: while the stress-strain law for the material can be represented by Fig 3.6b, the relationship between lateral force and displacement is better described by Fig 3.6d, and this non-ductile curve will dominate system behavior unless the lateral stiffness is increased or the vertical load decreased; only the first of these actions is ordinarily feasible.

Likewise, premature local buckling of a beam-flange may prevent the development of a ductile plastic hinge at the same cross section.

In order to attain ductile behavior, one must identify potential failure modes, determine those characterized by ductile behavior, and adopt a set of safety factors leading to a sufficiently low probability for the event that limit states with respect to brittle modes of behavior will be reached before those associated with ductile modes. For instance, reduction factors for lateral forces specified by Mexico City building code<sup>16</sup> for ordinary moment resisting reinforced concrete frames correspond to an assumed ductility of 4, but <sup>the code</sup> permits that parameter to be taken as 6 if some special requirements are satisfied. Among those requirements, load factors of 1.4 are specified for brittle-failure limit states, such as those associated with shear force, torsion and buckling, for the superposition of permanent loads and earthquake, instead of 1.1, applicable to ductile limit states.

#### Details and connections

Because global ductility of usual structures depends as a rule on local ductilities of small regions, careful design and detailing of those regions is mandatory. In building frames, yielding is usually restricted to occur at plastic hinges located at the sections where the ratios of capacity to action are lowest. As a rule, it is feasible and convenient to have those sections at the member ends. Chapters 4 and 5 deal

with the specific design criteria intended to ensure that sufficiently ductile plastic hinges will form at predetermined locations.

Brittle modes of behavior are often the consequence of exceedance of structural capacity at some particular regions where drastic changes in mechanical properties of the structural members take place. As a rule, brittleness of behavior can in those cases be ascribed to local nonlinear buckling<sup>or</sup> to stress concentrations usually unaccounted for in ordinary design. Typical among the vulnerable regions are connections between structural members. In steel structures, local brittle behavior usually results from local buckling or welding failure, while in reinforced concrete, problems of bond, diagonal tension, and stress transfer between reinforcement of different members dominate. On account of the complexity of the stress patterns usually involved, the problem is in general not only one of brittleness but also one of ignorance or carelessness in the evaluation of the structural capacity of the joint. Practical recom<sup>m</sup>endations for evaluation of this capacity are provided in chapters 4 and 5. The condition that the probability of brittle failure is sufficiently smaller than that of ductile failure is attained by adopting larger safety factors with respect to capacity of the joint than to that of the members it connects; but often the difference in safety factors is insufficient to override the wide uncertainties associated with joint behavior.

### Ductility of members and subsystems

In members and subsystems, ratios of safety factors with respect to brittle and ductile modes depend on the capacities of critical sections with respect to various combinations of internal forces and on the ratios between those internal forces when the member or subsystem deforms beyond the failure limit states of the critical sections. Thus, a reinforced concrete beam acted on its ends by moments  $M_1$  and  $M_2$  produced by permanent loads and by seismic couples  $M'_1$  and  $M'_2$  which grow from zero to their final values, will attain its bending capacity if either  $M_1 + M'_1$  or  $M_2 + M'_2$  reach the corresponding strength. Failure will be ductile if the beam is under reinforced, i.e. if tensile bending failure governs. Brittle failure will take place if the member is over-reinforced or if development of the bending capacity is precluded by premature failure in diagonal tension: as couples  $M'_1$  and  $M'_2$  grow, end shears vary as  $V = V_0 + (M'_1 + M'_2)/L$ , where  $V_0$  is the effect of permanent loads and  $L$  is the member span, and the member fails prematurely in diagonal tension if the shear at either end reaches the beam capacity before moments  $M_1 + M'_1$  and  $M_2 + M'_2$  reach the corresponding bending strengths.

Large values of  $L$  imply small values of the shear force for given values of  $M'_1$  and  $M'_2$ , and bending failure is likely to dominate; ductile behavior will take place at ordinary under-reinforced members. For small values of  $L$  the opposite will be the case: brittle-type diagonal

tension failure will be reached before bending failure, unless special precautions are taken to ensure that the safety factor with respect to the former mode is greater than that applicable to the latter.

The condition is often encountered in buildings with irregular plan, as shown in Fig 3.17a; adoption of a smaller beam depth can lead to a ratio of shear to bending strengths capable of ensuring ductile behavior. The same problem is characteristic of the structural system shown in Fig 3.19, typical of school buildings in some countries: the clear height of some columns is reduced by their interaction with masonry panels lower than the story height. This leads on one hand to shear concentrations and torsional response, and on the other to large ratios of shear force to bending moments, and hence to brittle failure, under usual conditions. All these problems can be avoided if the columns are liberated from restrictions throughout the full story height, either by placing a flexible joint between wall panels and columns, or by locating frame and wall on different, parallel planes. Alternatively, ductile behavior can be accomplished in this case by designing the free-standing portion of a given column for a shear capacity equal to or larger than the sum of the bending capacities at the ends of the mentioned portion divided by its height. Interaction with axial forces must not be forgotten. In the extreme case of very short spandrel beams used for providing coupled action of adjacent shear walls (Fig 3.20), special reinforcement has to be furnished in order to attain ductile behavior



under diagonal tension.

Axial loads reduce available ductility at column ends; the larger the axial stress, the larger the reduction, as shown in Fig 3.21 for a reinforced concrete column of given characteristics. Hence the criterion that suggests that plastic hinges occur at the end of beams, rather than of columns; this can be accomplished with reasonable reliability by adopting slightly higher load factors (say 10 or 20 percent ) for column than for beam design.

The consequences of designing exclusively for strength, with neglect of ductility considerations, can be as serious as displayed in Fig 3.23, which shows the brittle failure of a large number of columns of a building having the cross section shown in Fig 3.22, during the Caracas earthquake of 1967<sup>17</sup>. Axial loads due to gravity forces and to seismic response impaired the capacity of the otherwise strong columns to develop sufficient ductility; the situation may have been aggravated because the upper stories, being much stronger in shear than the lower ones, must have given place to the occurrence of specially higher ductility demands at the columns under consideration.

### 3.4 SAFETY CRITERIA

#### 3.4.1 Structural safety

##### Uncertainty and safety in seismic design

Neither loads acting on buildings nor strengths of structural members can be predicted with sufficient accuracy that uncertainty can be neglected in design. Nominal values of loads and strengths are most unfavorable values only in the sense that the probability that those loads and strengths adopt values more dangerous for the performance of a given system is sufficiently small. If the actual value of the internal force acting on a critical section or subassemblage of a structure exceeds the actual value of the corresponding strength, failure occurs. Structural safety is measured by the probability of survival, that is, ~~failure~~ that failure does not take place; and when only a single load application is contemplated the probability of survival is determined by the probability distributions of load and strength at the instant when the load is applied, provided the safety margin, i. e. the difference between strength and load does not decrease with time; but seismic excitation consists of a random number of events of random intensities taking place at random instants in time, and seismic safety cannot be described by a single probability of survival under a given load application, but rather by a time-dependent reliability function  $L(t)$ , equal to the probability that the structure survives all combinations of dead, live and seismic actions that affect it during an interval of length

t starting at the same time as construction.

Limitation of material losses and other forms of damage is as important an aim of earthquake resistant design as it is safety against collapse. For the sake of simplicity, these two objectives are usually pursued by design codes through the specification of a design earthquake for which collapse safety and deformation restrictions have to be verified. Some special structures are analyzed for two different design earthquakes; safety requirements with respect to collapse limit states are established for an extreme intensity event, while limitation of non structural damage is aimed for through the control of stresses and deformations for shocks of moderate intensity, likely to be exceeded several times during the structure's life.

Complying with collapse safety design conditions does not mean that failure probability is annulled: it is rarely possible to set sufficiently low upper bounds to seismic intensity at a site or to structural response that designing for them will be economical or even feasible. Besides, neither structural strength nor performance for a given intensity can be predicted with certainty. Establishment of design conditions follows cost-benefit studies, where the initial costs required to provide given safety levels and degrees of protection with respect to material losses are compared with the present value of the expected consequences of structural behavior, which is obtained by adding up the costs of failure and damage that may occur during given time

intervals, multiplied by their corresponding probabilities and by actualization factors that convert monetary values at arbitrary instants in the future into equivalent values at the moment of making the initial investment.

Evaluation of failure and damage probabilities implies an analysis of the uncertainties associated with structural parameters, such as mass, strength, stiffness and damping<sup>18</sup>, and with those defining seismic excitation, such as motion intensity and relation of the latter to the ordinates of the response spectra for given periods and damping values, or to other variables closely correlated with structural response. Conversely, attainment of given safety levels and degrees of protection for material losses is accomplished through the specification of nominal values of design parameters used to compute structural capacity and response and of safety factors that must relate the latter variables.

### Optimum safety

The formal application of cost-benefit studies to decision making in earthquake engineering is often hindered by problems that arise in the evaluation of expected performance of structures; prominent among them is the difficulty to express different types of failure consequences in the same unit or, more specifically, to assign monetary values to concepts such as panic, injury, death and even loss of prestige of designers, contractors or regulating agencies responsible for safety

policies. Those difficulties can be overcome through adoption of decision-making models that account for uncertainty in the mentioned concepts and of policies for assessing that uncertainty. An important asset of decision oriented cost-benefit studies, however informal they may be, is their providing of insight into the relevant variables and the manner in which optimum design intensities and safety factors should vary with respect to those variables. Thus, it is concluded that optimum design intensity is an increasing function of the derivative of initial cost with respect to capacity to the expected cost of failure, and is a decreasing function of seismic activity at a site.

The latter conclusion means that the higher the activity the higher the optimum level of risk to be accepted in design<sup>19</sup>. This is often neglected, as it contradicts the widely extended concept that in seismic design consistent safety means design for intensities having a given return period, regardless of initial costs.

The benefits of adopting safety levels that depend on the consequences of failure have been recognized in some modern design regulations.

For instance, structures are classified in Mexico City Building Code<sup>16</sup> in three categories according to their usage, namely provisional, ordinary and specially important; the second category includes apartment and office buildings, and the third includes structures the failure of which would have especially important consequences, the good performance of which is critical just after an earthquake (hospitals,

fire stations), or the contents of which are vary valuable (museums). Structures in the first category do not require formal earthquake resistant design, while those in the third category are designed for 1.3 times the spectral ordinates specified for the second group.

In the recently proposed Recommended Comprehensive Seismic Design Provisions for Buildings<sup>20</sup>, structures are classified into three main groups according to their seismic hazard exposure, that is, the relative hazard to the public based on the intended use of the building. In decreasing order of importance, these groups include, respectively, buildings housing critical facilities which are necessary to post-disaster recovery, those which have a high density of occupancy or which restrict the movements of occupants, and other structures. Seismic design spectra are based in all seismic regions on intensities that may be exceeded with 10 percent probability in 50 years. Differences in the optimum safety levels for different building usages are not recognized in the adoption of different seismic coefficients, but only in the restrictions concerning height and types of structural systems and in the refinement of the criteria for structural analysis and design, which are made to depend on the seismic zone and the seismic hazard exposure.

#### 3.4.2 Design values

Nominal values of design variables and safety factors —and hence of

implicit safety levels — have been traditionally established by trial and error and engineering judgement. Although explicit optimization as described above seems the ideal framework for design, its direct application by designers is at present impractical, with the exception, perhaps, of extremely expensive structures, such as nuclear reactors, or structures built in large numbers from the same design, such as offshore drilling platforms. Design values specified in a building code should be based on optimization studies covering the types of structures contemplated by that code, and optimization should be referred to the expected population of those structures. The fact that explicit optimization is not directly applied to each individual structure implies that we are dealing with suboptimization, that is, optimization within given restrictions: design formats must be kept simple, and the number of relevant variables small. As a consequence, what is optimum for a population of structures may not be optimum for every individual member.

Nevertheless, the theory of structural reliability has provided the framework for recent attempts to attain consistency between those rules and to extrapolate them to more general conditions; simplified formulations derived from the basic concepts have led to design criteria that approach consistency while not departing from the simplicity required for practical applications<sup>21-24</sup>. Nominal values of the design variables are chosen such that the probability that each variable will adopt a more unfavorable value does not exceed a certain limit; often,

the probability limit specification is substituted with a criterion stating a number of standard deviations above or below the mean value of each variable. Consistent safety levels based on cost-benefit studies are approached through proper handling of load factors and strength reduction factors<sup>25</sup>.

### Permanent loads

Dead and live loads affect seismic design conditions in various manners: they give place to internal forces produced by gravity—thus reducing capacity available to resist seismic forces—and they influence seismic response, both with regard to the structure's vibration periods and to the relation between mass, acceleration and force. The influence on natural periods is usually disregarded when specifying design loads, but can be accounted for by stating probable ranges of variation of those periods with respect to their computed values. Because dead loads are essentially constant in time, their design values for the combination of permanent and accidental loads coincide with those valid for the action of the former alone. Design values for live loads to be used in combination with earthquake must be obtained from the probability distributions of their value at an arbitrary instant in time, rather than of their maximum during a relatively long interval; the fact that the cost of failure in case it occurs is a function of the acting live load has been accounted for in some recent cost-benefit studies<sup>26</sup>. These considerations substantiate the requirements



of some design codes that state different design live loads for their combination with permanent and accidental loads or with permanent loads alone<sup>16</sup>.

### Natural periods

Uncertainty in natural periods stems from that associated with mass and stiffness as well as with soil-structure interaction; its significance arises from the sensitivity of spectral ordinates to this parameter. That uncertainty can be taken into account by adopting unfavorable values derived either by applying corrective factors to those computed in terms of nominal values of the relevant parameters or by covering those uncertainties by means of suitable modifications to the ordinates of the nominal design spectra. As a rule, corrective factors greater than unity are applied to periods lying in the ascending branch of the acceleration spectrum, and values smaller than unity are applied otherwise. For instance, fig 3.24 shows design spectra for three microzones in Mexico City both for deterministically known and uncertain natural periods<sup>16</sup>. For multidegree of freedom systems this criterion errs on the safe side, as it neglects probabilistic correlation among natural periods.

### Design spectra

Detailed characteristics of earthquakes are only approximately specified when a design intensity is adopted. Specification of design spectra for

linear systems involves making decisions with respect to the design intensity and to the probability of exceedance of the proposed spectral ordinates given that intensity. Because the frequency content of ground motion varies with magnitude, focal mechanism, and site-to-source distance, earthquake intensity by itself does not determine the probability distribution of spectral ordinates for all ranges of natural periods. Unless seismic risk at a site can be ascribed exclusively to shocks that may generate at the same source, design spectra can not be made to correspond to the "worst probable earthquake" to be expected at the site; rather, they should be obtained from the probability distributions of maximum response for different natural periods, regardless of the seismic source where every particular shock may have originated.

As a rule, the probability distributions of maximum spectral ordinates referred to in the foregoing paragraphs cannot be directly inferred from strong-motion records obtained at the site of interest, as only exceptionally is a large enough sample of those records available for the site. Instead, those distributions are usually generated from stochastic process models of local seismicity in the near-by seismic sources and the transformation of magnitudes and source locations into intensities at the site by means of attenuation laws that relate the pertinent variables with site-to-source distance<sup>27, 28</sup>. Spectral ordinates corresponding to given probabilities of exceedance for a given

magnitude and distance are shown in fig 3.25, obtained from ref 29.

If peak ground acceleration and velocity are given, mean values of  
design spectra <sup>or values corresponding to given exceedance probabilities</sup> for different damping ratios can be readily estimated, as shown in fig 2.1.

Use of elastic spectra on firm ground as the basis for constructing inelastic design spectra is illustrated in fig 2.3'. The solid line represents an elastic design spectrum constructed according to the criterion of ref 30; ordinates are pseudovelocities and abscissas are natural frequencies, and both scales are logarithmic. The dashed line represents the nonlinear spectrum for the same damping as the elastic spectrum and a ductility factor  $\mu$ ; spectral accelerations can be directly read from the dashed-line plot by referring it to an adequate system of straight lines sloping down from the left, and total displacements of the inelastic system are obtained by multiplying those corresponding to the dashed line by the ductility factor  $\mu$  (dash-point line). The relation between the various segments of the reduced acceleration spectrum  $D'V'A'A_0$  and their counterparts for the elastic case is as follows:<sup>30</sup> the extreme right-hand portion of the spectrum, where the response is governed by the maximum ground acceleration, remains at the same acceleration level as for the elastic case, and therefore at a corresponding increased total displacement level; the ordinates of segments D and V in the small and intermediate frequency ranges, respectively, are divided by  $\mu$ , and the ordinates of segment

A are reduced according to an equal-energy criterion, which for elasto-plastic systems is tantamount to dividing by  $\sqrt{2\mu - 1}$ .

The accelerograms of some earthquakes recorded on the surface of thick sediments of soft soil are characterized by their long duration and by their nearly harmonic nature. These properties are reflected in their linear response spectra, which show very narrow and pronounced peaks at one or more dominant periods (fig 3.26). The validity of the foregoing rules for transforming linear spectra into their nonlinear counterparts has not been assessed yet, but some significant features have been qualitatively applied in the formulation of design spectra for the soft soil region in Mexico City: as fig 3.26 shows, the design spectra uncorrected for uncertainty in natural period shows a wide plateau of constant ordinates, which is intended to cover the tendency of structures possessing natural periods shorter than those dominant in the ground motion to show increased responses as their effective periods grow as a consequence of nonlinear behavior.

Fig 3.26 also shows a correction for uncertainty in natural periods on both sides of the region of maximum ordinates; it also shows that on the long period side, specified ordinates are made to decay at a significantly slower rate than in the recorded spectrum. The latter requirement stands for the convenience of covering the decrease in reliability due to the possibility of occurrence of a large number of failure modes, and of providing additional protection with respect to

unfavorable behavior caused by phenomena typical of long period structures and not normally considered in analysis, such as some forms of soil-structure interaction, concentrations of ductility demand, and slenderness effects in excess of computed values.

### Damping and ductility

The recommendations of some modern building codes<sup>16, 20</sup> are formulated as though design spectra were actually based on linear response spectra for 5 to 10 percent viscous damping, with correction factors intended to account for ductilities in the approximate range of 1 to 6. But structural damping at small strains is much smaller than openly recognized in design specifications. Thus, while linear response spectra that provide the basis for the recommendations of ref 16 correspond to a damping ratio of 0.05 of critical, tests on actual structures subjected to small amplitude vibration show that this value should not exceed 2 to 3 percent for reinforced concrete structures or 0.5 to 1 percent for welded steel structures with low density of nonstructural elements. Apparent inconsistencies are rather a matter of tradition and of nomenclature than of actual safety, as most damping, even at low strains, must be ascribed to nonlinear response and deterioration rather than to viscous, non damaging behavior; and nominal ductile capacity for given structures has not been derived from probabilistic analysis of the measured ductilities developed by various structural systems subjected to dynamic excitation, but rather

by semi-empirical adjustment of design coefficients based on engineering judgement, economic considerations, and study of the observed response of structures of known properties to severe ground shaking.

3.4.3 Reliability analysis in seismic design

As mentioned above, the reliability function of a system in a given environment is the probability that the system survives all the actions exerted upon it by the environment during a given time interval. Its computation is based on the probability distribution of the minimum safety margin during the given interval, and this probability is in turn dependent on the probability distributions of system strength and environment action at every instant within the interval. In seismic reliability problems the environment is described by stochastic models of dead, live and seismic loads, while system strength is described by probabilities of occurrence of given failure modes for given combinations of the mentioned loads. Uncertainty in seismic loads arises from randomness in earthquake origin, magnitude, rupture mechanism and wave propagation path, as well as from uncertainty in dynamic response for a given earthquake intensity. A brief description of the basic concepts of seismic reliability analysis is presented in the following, with the intention that it will provide a conceptual framework for the rational determination of safety levels and hence of pertinent design values and safety factors. More complete studies can be found in refs 21, 27 and 30.

## Seismicity

Let  $Y$  be earthquake intensity, expressed in terms of a set of parameters (such as peak ground acceleration or velocity, spectral response for given period and damping) that can be directly correlated with structural response or performance. Seismicity will be described by the stochastic process of occurrence of significant events, that is earthquakes having at the site of interest an intensity sufficiently high as to affect engineering structures, and by the conditional probability distribution of intensity given the occurrence of an event. Let  $T$  be the interval between occurrence of successive significant events,  $T_1$  the time from the instant observations are started to the first event, and  $f(t)$ ,  $f_1(t)$  the respective probability density functions. The probability density function of the time to the  $r$ th significant event is obtained recursively as follows

$$f_r(t) = \int_0^t f_{r-1}(t-z) f(z) dz, \quad r > 1 \quad (3.1)$$

thus, the probability density function of the time to first exceedance of intensity  $y$  equals

$$g_1(t) = \sum_{r=1}^{\infty} f_r(t) P Q^{r-1} \quad (3.2)$$

where  $Q(y)$  (assumed independent of  $t$  and  $r$ ) is the conditional cumulative probability distribution of intensity given that a significant event has occurred, and  $P = 1 - Q$ . The probability density function of the time to failure for a structure having a deterministically known strength  $Y_R$ ,

can be obtained by means of eq 3.2, making  $Q = Q(Y_R)$ .

Different expressions have been proposed for  $f_T$  and  $f_{T_1}$ <sup>28</sup>. The simplest of them, although not the most realistic, assumes significant events to take place in accordance with a Poisson process, that is,

$f_{T_1}(t) = f_T(t) = \nu \exp(-\nu t)$ , where  $\nu$  is the mean rate of occurrence of the mentioned events. Under this assumption, eq. 3.2 leads to

$$g_1(t) = \nu P e^{-\nu P t} \tag{3.3}$$

The discussion that follows will be confined to this assumption. A more general treatment can be found in ref <sup>31</sup>30.

Structural response

Let D be the cost of damage caused by an earthquake on a structure. It can vary between 0 and  $D_0 + A$ , where  $D_0$  is the total cost of the structure and A that of the structure and A that of its contents, as well as all other consequences (such as loss of human lives and indirect effects) expressed in monetary terms, diminished by the salvage value. A probability density function of D conditional to every possible value of intensity can be established<sup>31</sup>. If that function is denoted by  $f_{D|Y}(d|y)$ , the probability density function of D every time a significant event takes place is

$$f_D(d) = \int \frac{dQ(y)}{dy} f_{D|Y}(d|y) dy \tag{3.4}$$



It may be advantageous to express the domain of possible damage levels of a given structure by a set of potential failure modes. If  $p_i(y)$  is the probability of failure in mode  $i$  given an intensity equal to  $y$ , and  $D_i$  is the corresponding cost of damage, then the marginal probability of failure in mode  $i$  given the occurrence of a significant event is

$$\bar{p}_i = \int \frac{dQ(y)}{dy} p_i(y) dy \quad (3.5)$$

and the expected cost of damage for each event is

$$\bar{D} = \sum_i D_i \bar{p}_i \quad (3.6)$$

the  $\bar{p}_i$ 's are functions of acting permanent loads, design parameters, and safety factors with respect to all relevant failure modes. By changing relative values of those safety factors it is possible to make failure modes with the highest consequences (in general, brittle modes) much less likely than those leading to lower damage levels. Thus, adoption of higher load factors for column- than for beam bending moments may be advisable when significant axial loads hinder the development of enough ductile capacity at column ends; or it may be advantageous to make a structure safer with respect to overturning moment than to lateral yielding. Quantitative assessment of adequate increments of load factors can be established from economic considerations within the cost-benefit framework advocated in the sequel.

Optimum design

Let  $C(x_1, \dots, x_n)$  be the initial cost of a given structure, and  $x_1, \dots, x_n$  a set of design parameters (resistances, stiffnesses, ductilities). Optimal values of those parameters are those maximizing the function

$$V = B - C - Z \quad (3.7)$$

where  $B$  and  $Z$ , also functions of the set of design parameters, are present values of the expected benefits and failure consequences, respectively. In other words; if  $b(t)$  is the expected value of benefits at time  $t$  derived from performance of the structure, and  $\gamma$  is a discount rate such that present values of future losses or benefits can be obtained through multiplication of the latter by  $\exp(-\gamma t)$ , then

$$B = \int_0^{\infty} b(t) e^{-\gamma t} L(t) dt \quad (3.8)$$

and

$$Z = \int_0^{\infty} \gamma \bar{D} e^{-\gamma t} L(t) dt \quad (3.9)$$

where  $L(t)$  is the reliability function defined above. The meaning of  $L(t)$  in equations 3.8 and 3.9 is that production of benefits and losses is subjected to the condition that the structure has survived all previous loads. For the case of deterministically known strength  $Y_R$ , eq 3.3 leads to

$$L(t) = \exp(-\gamma P_R t) \quad (3.10)$$

where

$$P_R = P(Y_R)$$

From eqs 3.8, 3.10 and the assumption that  $b(t) = b$  is constant,

$$B = \frac{b}{\gamma + \nu P_R} \quad (3.11)$$

Likewise, from eq 3.9,

$$Z = \frac{\nu \bar{D}}{\gamma + \nu P_R} \quad (3.12)$$

and the expression for utility becomes

$$U = \frac{b}{\gamma + \nu P_R} - C - \frac{\nu \bar{D}}{\gamma + \nu P_R} \quad (3.13)$$

If  $Y_0$  is the minimum intensity of significant events, that is, an intensity below which no damage can occur, then  $\nu$  can be approximately expressed as  $KY_0^{-r}$ , where  $K$  and  $r$  depend on the activity of seismic sources near the site<sup>28</sup>. Under these conditions,  $P_R = (Y_0/Y_R)^r$ .

Expressing  $b$ ,  $P_R$ ,  $C$  and  $\bar{D}$  in terms of the set of design parameters and differentiating with respect to them, a system of equations is obtained from which optimum values of those parameters can be determined.

If structural strength for a given set of design parameters is uncertain, eqs 3.10 and 3.13 become respectively

$$L(t) = E \left[ \exp(-\nu P_R t) \right] \quad (3.14)$$

$$U = E \left[ \frac{b}{\gamma + \nu P_R} - C - \frac{\nu \bar{D}}{\gamma + \nu P_R} \right] \quad (3.15)$$

The expectations in the above equations are taken with respect to the probability density functions of structural strength  $Y_R$ .

Different expressions for  $U$  can be obtained, depending on the policy adopted a priori with regard to repair and reconstruction measures to be taken after every damaging event<sup>30</sup>. Optimum design parameters may be strongly influenced by that policy.

#### Specification of safety in codified design

According to the optimization criteria described above, determination of design resistances, stiffnesses and ductilities is not based on the expected response to a single event, defined by a given spectrum and assumed to correspond to a given return period. Instead, design parameters are optimum in the sense that they lead to the best investment of resources taking into account long term expected behavior under the action of a random number of random loads. However, by comparison with safety requirements for permanent loads, it is usually advantageous to specify seismic safety in terms of a design earthquake, assumed to correspond to a given return period, a set of rules to define minimum probable resistances from their expected values and variation coefficients, and a set of load factors. Safety under the action of the design earthquake is not significant by itself, but because it is an indirect measure of the reliability function  $L(t)$ .

### Member and system reliability

In the applications of the theory of structural reliability to the formulation of consistent safety design criteria for a single load application, nominal capacities of members or critical sections are often defined by either of the following expressions<sup>21, 22</sup>

$$R^* = \bar{R} \exp(-\alpha V_R) \quad (3.16)$$

$$R^* = \bar{R} / (1 + \alpha V_R) \quad (3.17)$$

Here,  $R^*$  denotes nominal value of the random strength  $R$ ,  $\bar{R}$  its expected value,  $V_R$  its coefficient of variation and  $\alpha$  a constant that depends on the probability that  $R$  is smaller than its nominal value. It is clear that the ratio  $R^*/\bar{R}$  is smaller than unity and decreases when  $V_R$  increases.

The capacity with respect to some failure modes in ductile systems can be expressed as the sum of the contributions of the capacities of a number of critical sections. Take for instance the shear capacity of a given story of a frame building and consider that capacity to be made up of the contributions of the moment capacities at all column ends.

The coefficient of variation of the story shear capacity is equal to

$V = \left( \sum_i \sum_j \rho_{ij} V_i V_j \bar{R}_i \bar{R}_j \right)^{1/2} / \sum_i \bar{R}_i$ , where  $R_i$  is the strength at the  $i$ -th critical section,  $\bar{R}_i$  and  $V_i$  respectively its expected value and coefficient of variation and  $\rho_{ij}$  the correlation coefficient between  $R_i$  and  $R_j$ . If the latter variables are stochastically independent,

$V = (\sum_i (V_i \bar{R}_i)^2)^{1/2} / \sum_i \bar{R}_i$ , and if all  $V_i$ 's are equal to  $v$ ,

$V = v (\sum_i \bar{R}_i^2)^{1/2} / \sum_i \bar{R}_i$ ; hence,  $V \leq v$  and the nominal value of  $R$  that

would be obtained by direct application of eqs. 3.1a or b with the adequate value of  $V$  will exceed that obtained by simple addition of the nominal values  $R_i$  of the contributions of all critical sections. This result is an analytical way of expressing an often intuitively derived principle: that under similar safety conditions for individual critical sections the reliability of ductile systems with respect to failure modes that require the development of the capacity of  $n$  critical sections decreases with decreasing  $n$ . Because design criteria for the revision of safety conditions are usually stated in terms of the ratio of structural capacity to internal load at each individual critical section, the effect under study has to be accounted for by making required safety factors vary with the number of critical sections involved in a failure mode. This is the basis for the prescription in the 1976 Mexico City Building Code stating that the generalized force acting on every shear wall or column that takes up more than 20 percent of the story generalized force (shear, torque or overturning moment) be increased 20 percent; or by the prescription concerning nonredundant systems in ATC recommendations<sup>20</sup> stating that when a building system is designed or constructed so that the failure of a single member, connection or component would endanger the stability of the building, that member, connection or component should be provided with a strength at least 50 percent greater than otherwise required.

### Superposition of modal contributions

Maximum contributions of all natural modes to a given response — internal force at a critical section, displacement or deformation — do not take place simultaneously. The design value of a response parameter is assumed proportional to its standard deviation at the end of the earthquake. After some simplifications (10), this criterion leads to the following expression:

$$S = \left( \sum_i \sum_j \frac{S_i S_j}{1 + \varepsilon_{ij}^2} \right)^{1/2} \quad (3.18)$$

in which

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\omega_i' - \omega_j'}{\zeta_i' \omega_i + \zeta_j' \omega_j} \quad (3.19)$$

and  $S_i$  is the maximum absolute value of the contribution of the  $i$ -th mode to the response of interest; it is to be taken with the sign adopted by the unit impulse response function of the response of interest to a ground velocity step-increment when the mentioned function attains its maximum numerical value.

In equation 3.19,  $\omega_i$  = undamped circular frequency of  $i$ -th natural mode,  $\omega_i' = \omega_i \sqrt{1 - \zeta_i'^2}$  = damped circular frequency of  $i$ -th natural mode,  $\zeta_i' = \zeta_i + 2/\omega_i s$ ,  $\zeta_i$  = damping ratio of  $i$ -th natural mode (assumed equal to 0.05 unless a different value is justified), and  $s$  = duration of segment of stationary white noise equivalent to the family of actual design earthquakes;  $s$  may range from 20 to 40 sec for ground

conditions ranging from firm ground to thick deposits of very soft material. The influence of stochastic correlation between the instants when the response associated with each mode reaches its maximum is reflected in equation 3.18 through the participation of  $\epsilon_{ij}$ : when  $\omega_i'$  differs significantly from  $\omega_j'$ ,  $\epsilon_{ij}$  is large and  $S^2$  approaches the sum of the squares of the individual mode contributions,  $\sum_i S_i^2$ ; however, when  $\omega_i'$  is close to  $\omega_j'$ ,  $\epsilon_{ij}$  tends to zero and the cross-product terms  $S_i S_j$ , for  $i \neq j$ , become significant. The fact that each of these terms can be either positive or negative accounts for the possibilities of strongly correlated modal responses taking place with phase angles close to either 0 or 180 degrees.

In buildings, cross-product terms are usually negligible. Exceptions occur, for instance, in the modal analysis of buildings possessing small torsional eccentricities, when torsional degrees of freedom are taken into account, or in the analysis of any type of structure when the response of an appendage (portion characterized by a mass much smaller than the others into which the system has been discretized) is taken as a degree of freedom in the computation of modal shapes and frequencies (16).

#### Superposition of ground motion components

It has been customary to design structures so that they resist the envelope of effects of the various components of earthquake motion as though these components acted one at a time. There is growing



consciousness that design should recognize the simultaneous action of all the components, as a number of conditions have been identified where superposition of those components significantly affects safety. Take, for instance, a building possessing continuous frames in two orthogonal directions, another with an asymmetrical plan, and a long continuous bridge with several supports. If the columns in the first structure are built in reinforced concrete and possess a square cross section, the most unfavorable direction of application of seismic forces will be along their diagonal, rather than parallel to either system of orthogonal frames. In addition, if the nonlinear response of the structure is analyzed and substantial ductility is developed at the column ends, effective stiffnesses of the frames in one direction will depend at any instant on the simultaneous state of deformation of the other system of frames; in other words, significant interaction will exist between ductility demands in both directions. Frames normal to the direction of asymmetry in the second case are subjected to the effects of direct shear produced by the horizontal ground component parallel to them, and to the torsional effects associated with the other horizontal component. Out of phase motion of the various supports in the third structure affect qualitatively and quantitatively the distribution of internal forces.

An approximate criterion to account for the foregoing effects has been recently developed; it evolved from a simplification of a second

moment formulation of structural safety (36), and consists in the following (37).

1. Compute the responses to gravity loads and to the components of ground motion regarded as potentially significant. Let those responses be arranged into vectors  $\underline{R} = \underline{R}_0$  and  $\underline{R}_i$  respectively, with  $i = 1, 2, \dots, n$ .
2. Obtain vectors  $\underline{R} = \underline{R}_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i \underline{R}_i$ , assigning plus and minus signs to  $\alpha_i \underline{R}_i$ , ordering the  $\underline{R}_i$ 's in all possible permutations, and giving the  $\alpha_i$ 's the values in Table 3.1.
3. If the problem is one of analysis, find out whether all points fall within the failure surface. If the problem is one of design, assign the design parameters such values that the safe domain will contain all the points.

In the analysis and design of towers and chimney stacks it is advisable to take  $\alpha_i$  equal to 0.5 instead of 0.3 for  $i \geq 2$ . This recommendation stems from two considerations: in towers having square or rectangular plan supported on four equal columns, application of the foregoing criterion with  $\alpha_2 = 0.3$  to safety checking with respect to axial stresses produced by overturning moment leads to systematic errors on the unsafe side; and in structures nominally having radial symmetry, such as chimney stacks, an apparently insignificant asymmetry causes an appreciable degree of coupling between modes of vibration involving orthogonal horizontal displacements.

#### 3.4.4 Repair and strengthening of existing structures

Historical monuments, damaged structures and those to be remodeled or the use of which is modified, <sup>often</sup> ~~often~~ pose the problem of deciding about adequate safety levels and compliance with current building codes.

In some regions, large portions of important buildings have been designed and built according to standards that were afterwards deemed insufficiently strict, and there are large numbers of unengineered dwelling units.

Adoption of standards applicable to new structures is cumbersome and expensive in most cases mentioned above. The situation must be coped with having in mind that the objective of engineering design is to optimize for society. Decision models dealing with these cases have recently been developed<sup>32</sup>.

## REFERENCES

1. Esteva, L., "Behavior Under Alternating Loads of Masonry Diaphragms Framed by Reinforced Concrete Members", Proc International Symposium on the Effects of Repeated Loading of Materials and Structures, RILEM, Mexico City (1966)
2. Krawinkler, H., Bertero, V.V., and Popov, E.P., "Inelastic Behavior of Steel Beam-to-Column Subassemblages", Earthquake Engineering Research Center, College of Engineering, University of California, EERC 76-22, Berkeley, Cal. (1976)
3. Luyties, W. H., Anagnostopoulos, S., and Briggs, J. M., "Studies on the Inelastic Dynamic Analysis and Design of Multi-story Frames", MIT Department of Civil Engineering, Research Report R76-29 (July, 1976)
4. Haviland, R.W., Biggs, J.M., and Anagnostopoulos, S.A., "Inelastic Response Spectrum Design Procedures for Steel Frames", MIT Department of Civil Engineering Research Report R76-40 (Sept. 1976)
5. Veletsos, A.S., "Maximum Deformations of Certain Nonlinear Systems", Proc. Fourth World Conference on Earthquake Engineering, Santiago, Chile (1969)
6. Bielak, J., "Dynamic Response of Single-Degree-of-Freedom Bilinear Systems", Master's Thesis, Rice University, Houston, Tex. (1966).
7. Spencer, R.A., "The Nonlinear Response of Multistory Prestressed Concrete Structures to Earthquake Excitation", Proc. Fourth World Conference on Earthquake Engineering, Santiago, Chile (1969)
8. Penzien, J., and Liu, S.C., "Nondeterministic Analysis of Nonlinear Structures Subjected to Earthquake Excitations", Proc. Fourth World Conference on Earthquake Engineering, Santiago, Chile (1969).
9. Ramírez, J., "Efectos de Inestabilidad en la Respuesta Sísmica de Estructuras de Cortante Inelásticas", Master's Thesis, Faculty of Engineering, National University of Mexico (1977).
10. Newmark, N.M., and Rosenblueth, E., "Fundamentals of Earthquake Engineering", Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J. (1971)

11. Guerra, O.R., and Esteva, L., "Equivalent Properties and Ductility Requirements in Seismic Dynamic Analysis of Nonlinear Systems", Proc. Sixth World Conference on Earthquake Engineering, New Delhi, India (1977).
12. Rosenblueth, E., "Temblor de Mayo 1970: Sus Efectos en Estructuras Civiles", Ingeniería, 31, 1, México, D.F., (1961).
13. González-Flores, M., "Sistema para Eliminar los Esfuerzos Peligrosos que los Temblores Causan en las Estructuras", Quinto Congreso Mexicano de la Industria de la Construcción, México, D.F. (1964).
14. Skinner, R.I., Kelly, J.M., and Heine, A.J., "Energy Absorption Devices for Earthquake Resistant Structures", Fifth World Conference on Earthquake Engineering, Rome, Italy (1973).
15. Ruiz, S.E., Esteva, L., and Guerra, O.R., "Desarrollo y Evaluación de Sistemas para Limitar las Acciones Sísmicas sobre Edificios", Ingeniería, 47, 2, México, D.F. (1977)
16. "Diseño estructural" Mexico City Building Code, México, D.F. (1977).
17. Esteva, L., Díaz de Cossío, R., and Elorduy, J., "El Temblor de Caracas, Julio de 1967", Ingeniería, 38, 3, México, D.F. (1968)
18. Haviland, R., "A Study of the Uncertainties in the Fundamental Translational Periods and Damping Values for Real Buildings", MIT, Department of Civil Engineering Research Report R76-12 (Feb. 1976).
19. Esteva, L., "Seismic Risk and Seismic Design Decisions", Seminar on Seismic Design of Nuclear Power Plants, MIT Press, Cambridge, Mass (1969).
20. "Recommended Comprehensive Seismic Design Provisions for Buildings", Applied Technology Council, Palo Alto, Calif. (1977).
21. Rosenblueth, E., and Esteva, L., "Reliability Basis for Some Mexican Codes", American Concrete Institute, Special Publication 31 (1971).

22. Meli, R., "Bases para los Criterios de Diseño Estructural del Proyecto del Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal", Institute of Engineering, National University of Mexico, Report 375 (1976).
23. Esteva, L., "Regionalización Sísmica de México para Fines de Ingeniería, Institute of Engineering, National University of Mexico, Report 246 (1970).
24. Rosenblueth, E., "Code Specification of Safety and Serviceability", State of Art Report 2, Technical Committee 10: Structural Safety and Probabilistic Methods, ASCE-IABSE Joint Committee on Planning and Design of Tall Buildings, Fritz Engineering Laboratory, Lehigh University, Bethlehem, Pa. (1972).
25. Lind, N.C., "Deterministic Format for the Probabilistic Design of Structures", in An Introduction to Structural Optimization, Solid Mechanics Division, University of Waterloo, Waterloo, Ont., Canada, SM Study 1 (1969).
26. Rosenblueth, E., and Mendoza, E., "Optimum Seismic Design of Auditoriums", Proc. Fifth World Conference on Earthquake Engineering, 2, Rome, Italy (1973).
27. Esteva, L., "Criterios para la Construcción de Espectros de Diseño Sísmico", Institute of Engineering, National University of Mexico, Report 178 (1968).
28. Esteva, L., "Seismicity", Chapter 6 of Seismic Risk and Engineering Decisions, Edited by C. Lomnitz and E. Rosenblueth, Elsevier, Amsterdam (1976).
29. McGuire, R.K., "Seismic Structural Response Risk Analysis, Incorporating Peak Response Regressions on Earthquake Magnitude and Distance", Ph. D. Thesis, MIT Department of Civil Engineering (1974)
30. Newmark, N.M., and Hall, W.J., "Procedures and Criteria for Earthquake Resistant Design", Building Practices for Disaster Mitigation, Building Science Series 46, National Bureau of Standards Washington, D.C. (1973).
31. Rosenblueth, E., "Optimum Design for Infrequent Disturbances", Proc. ASCE 102, ST9 (Sept. 1976).
32. Rosenblueth, E., "Decisiones Optimas para Estructuras Existentes en Zona Sísmica. Primera etapa Institute of Engineering National University of Mexico (in press).

33. Newmark, N. M., "Current Trends in the Seismic Analysis and Design of High-Rise Structures", in Earthquake Engineering, Edited by R. Wiegel, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N J (1970)
34. Paulay, T., "Coupling Beams of Reinforced Concrete Shear Walls", Proc. ASCE, 97, ST3 (March, 1971)
35. Park, R. and Paulay, T., "Reinforced Concrete Structures", John Wiley and Sons, New York, N Y (1975)
36. Hosefer, A.M. and Lind, N C., "Exact and Invariant Second-Moment Code Format", Proc. ASCE, 100, EM1 (1974)
37. Rosenblueth, E., and Contreras, H., "Approximate Design for Multicomponent Earthquakes", Submitted for Publication in Proc. ASCE, Journal of the Engineering Mechanics Division

Table 3.1. Values of  $\alpha_i$  and maximum errors in amplitude of seismic-response vector (After ref 37).

$i$ or $n$	$\alpha_i$	max error, %	$\alpha_i$	max error safe side, %	max error unsafe side, %
1	1.000	0	1.0	0	0
2	0.335	5.5	0.3	4.4	8.1
3	0.250	8.4	0.3	8.6	7.6
4	0.206	10.4	0.3	12.7	5.0
5	0.179	11.8	0.3	16.6	1.6
6	0.160	13.0	0.3	20.4	-2.1
7	0.146	13.9	0.3	24.1	-5.8
8	0.135	14.7	0.3	27.7	-9.6
9	0.126	15.4	0.3	31.1	-13.3
10	0.118	16.0	0.3	34.5	-17.0

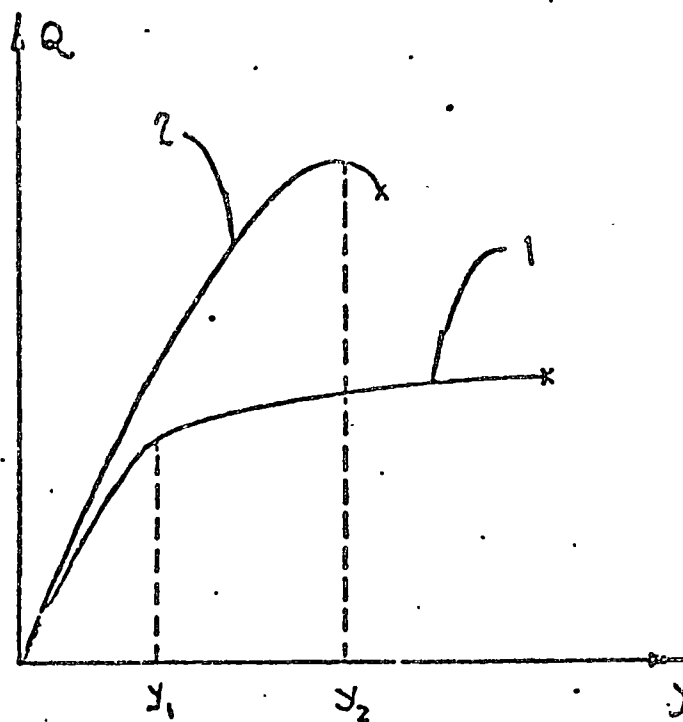


Fig. 3.1 Ductile and brittle systems



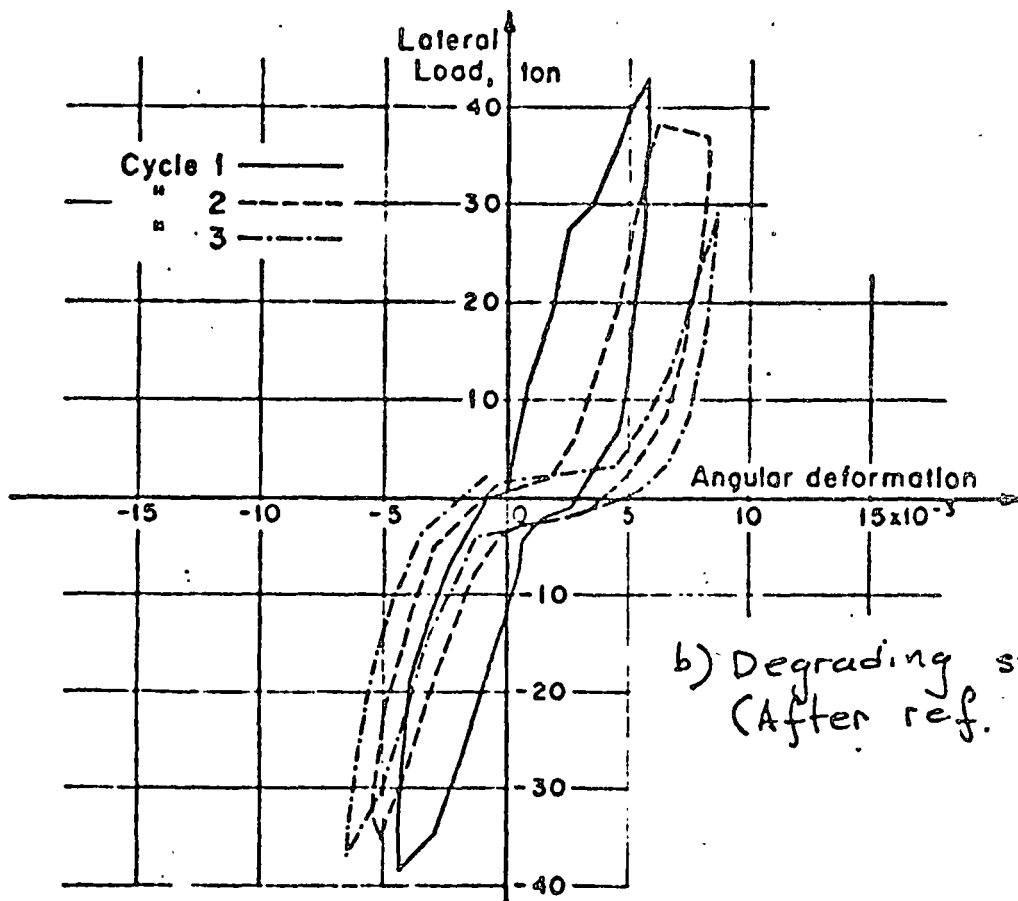
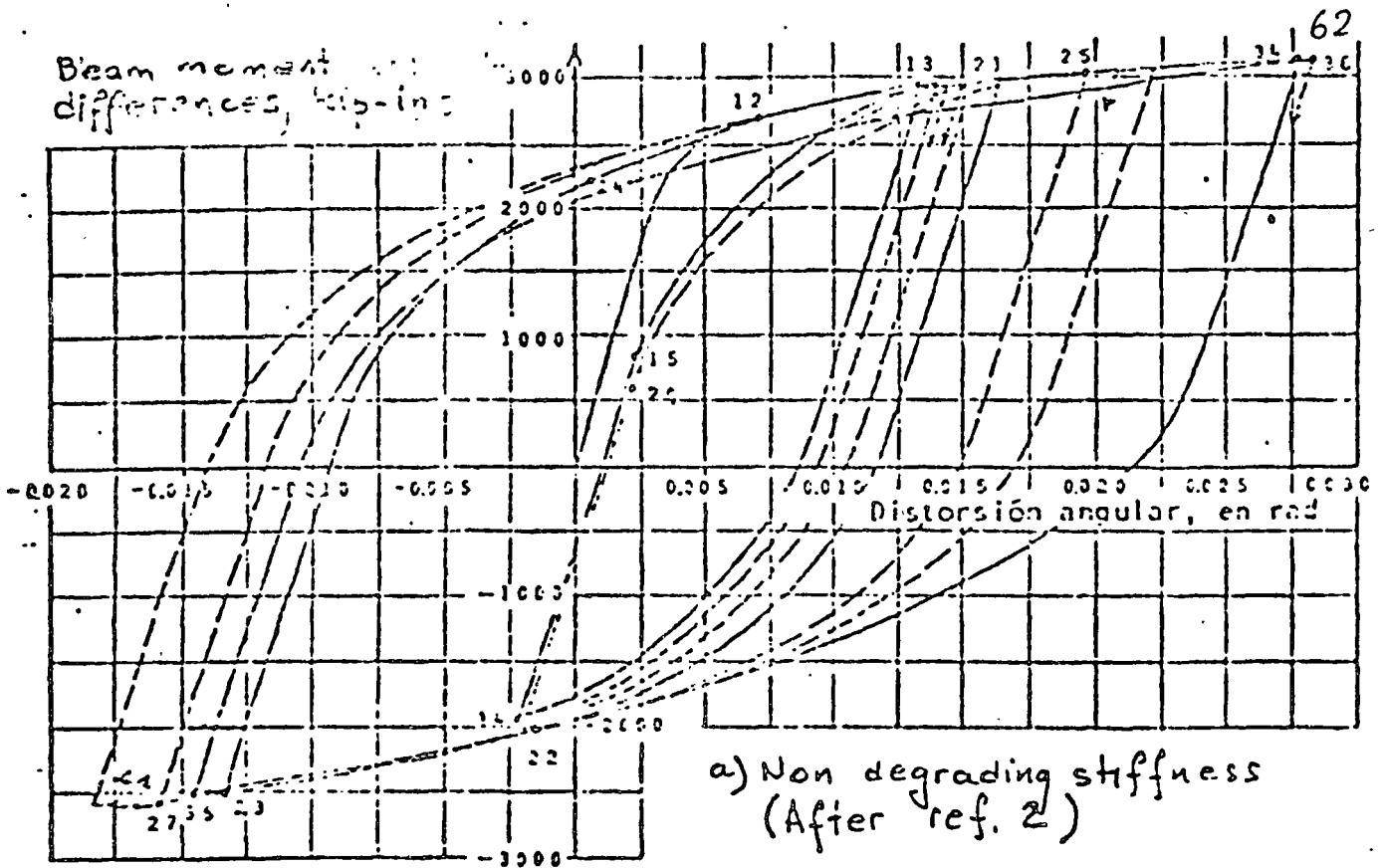


Fig 3.2 Stiffness degradation

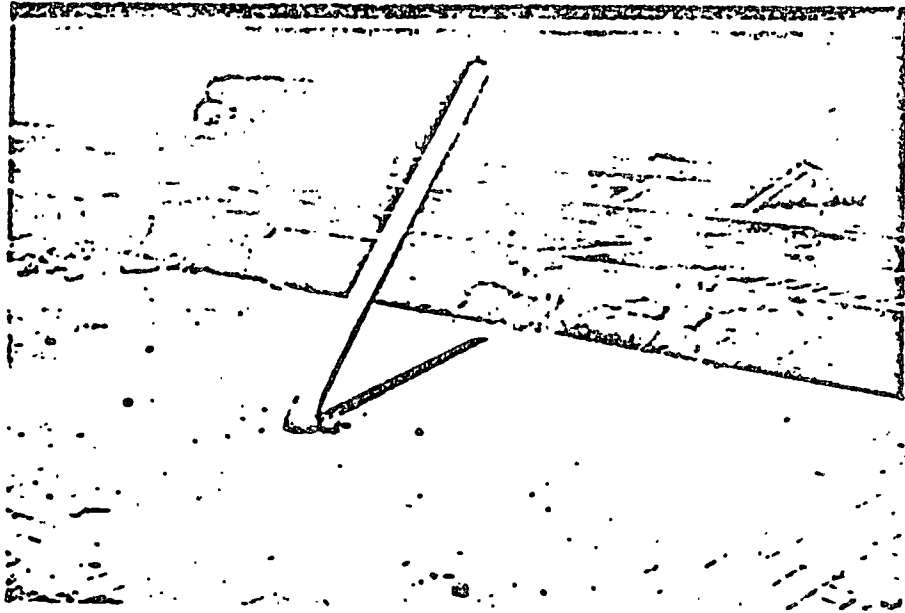
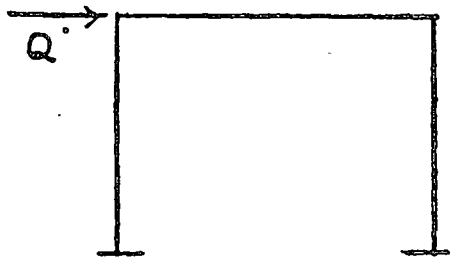
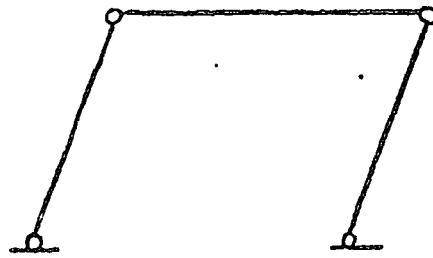


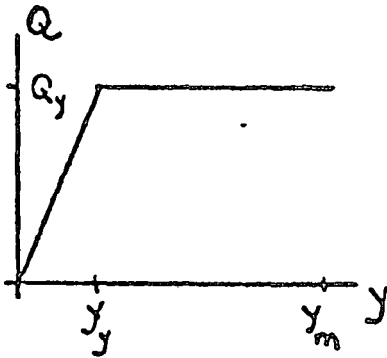
Fig. 3.3 Instability failure



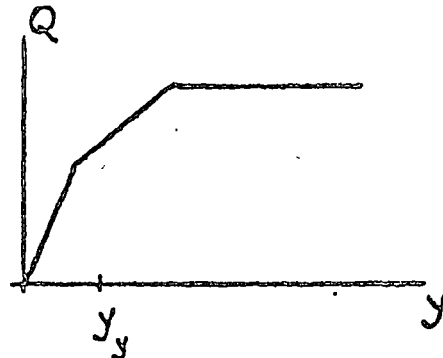
a) Loads



b) Failure mechanism



c) Simultaneous yielding



d) Sequential yielding

Fig. 3.4 Local and general ductility under lateral loads

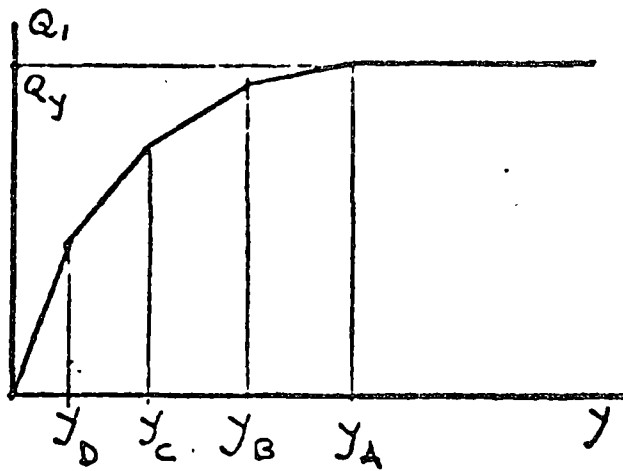
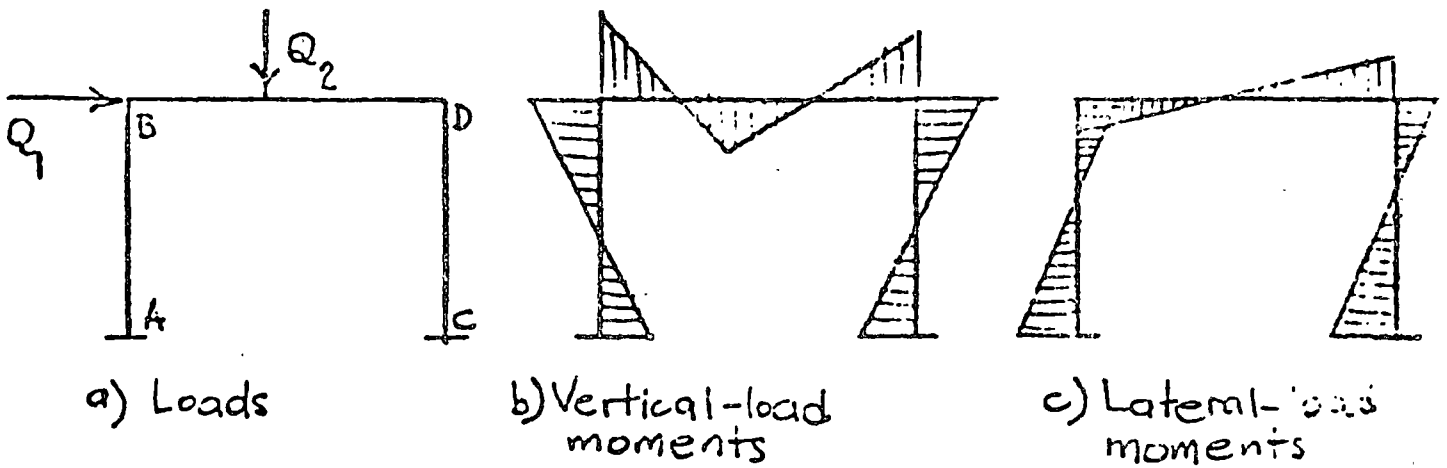
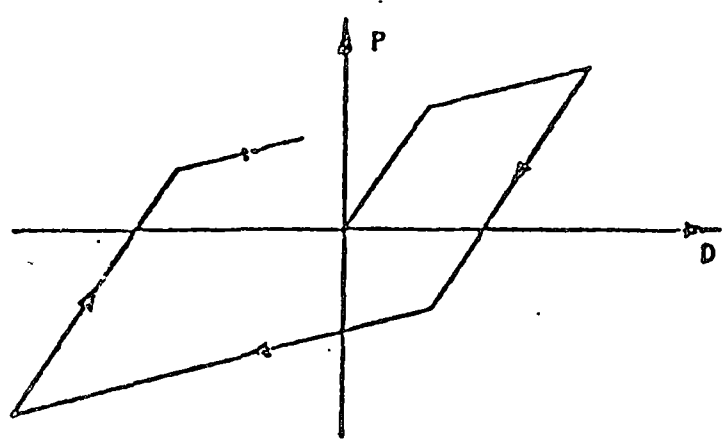
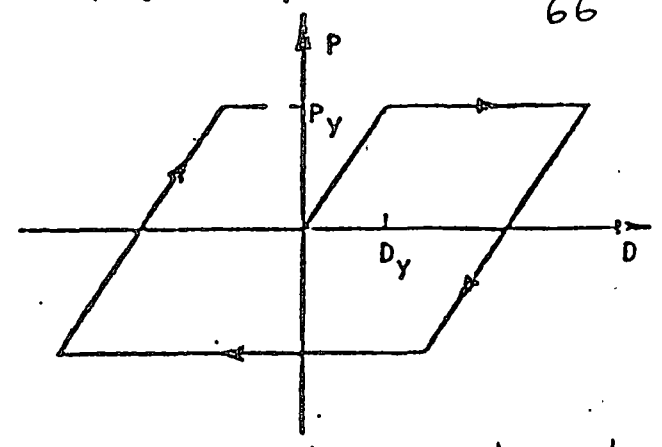


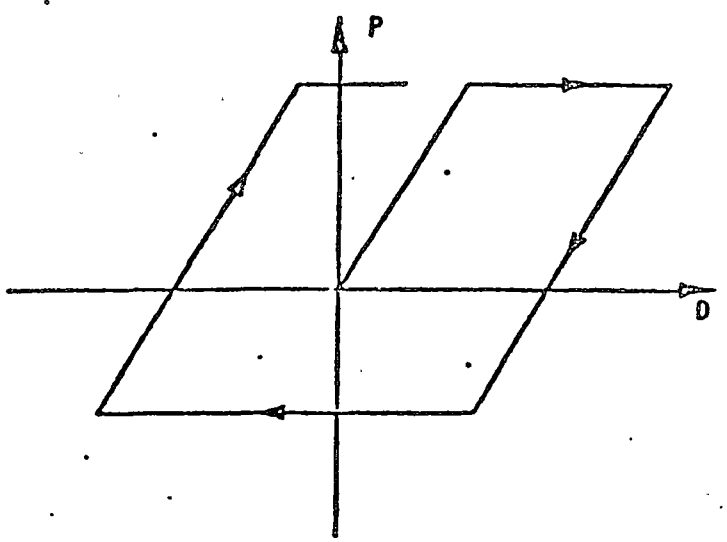
Fig. 3.5 Inelastic behavior under vertical and lateral loads



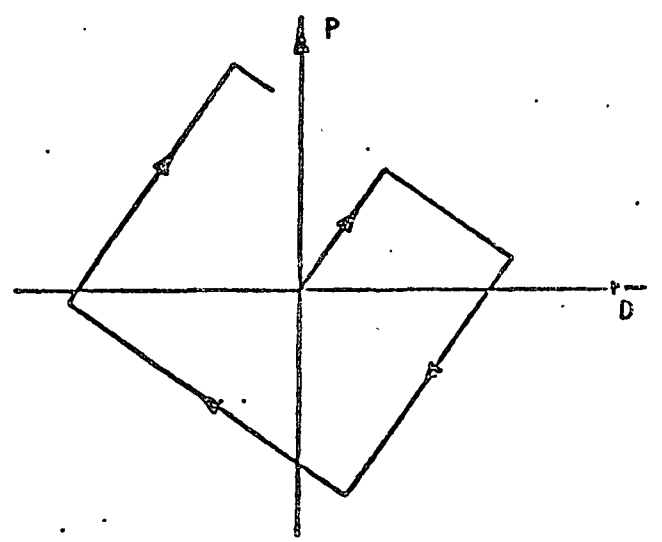
a) Bilinear



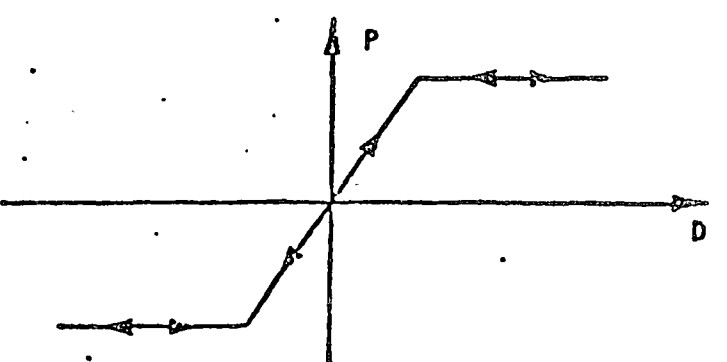
b) Symmetric elastoplastic



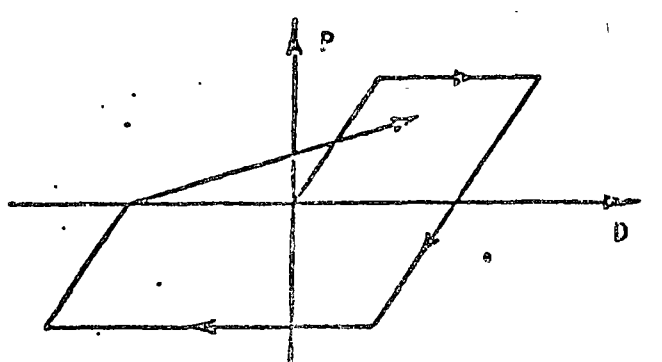
c) Asymmetric elastoplastic



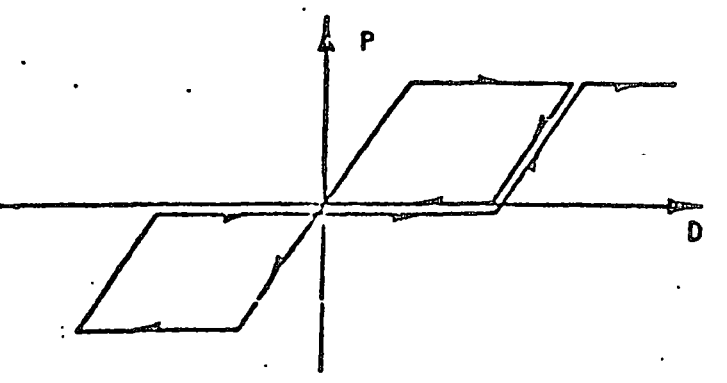
d) Unstable



e) Yielding elastic



f) Degrading



g) Slip type

Fig. 3.6 Models of nonlinear behavior

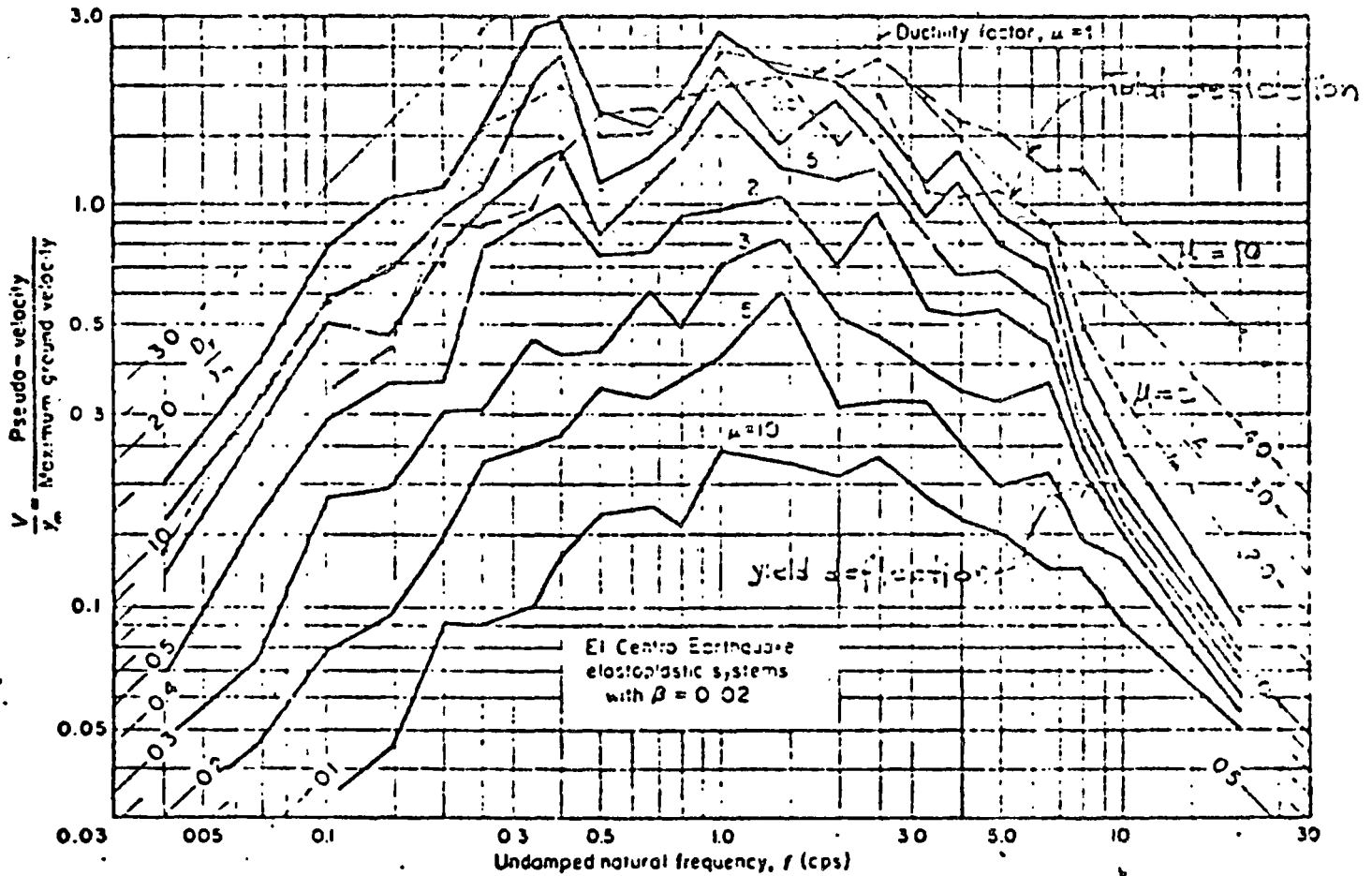


Fig. 3.7 Deformation spectra for elastoplastic systems with 2 percent critical damping subjected to the 1940 El Centro earthquake (ref. 33)

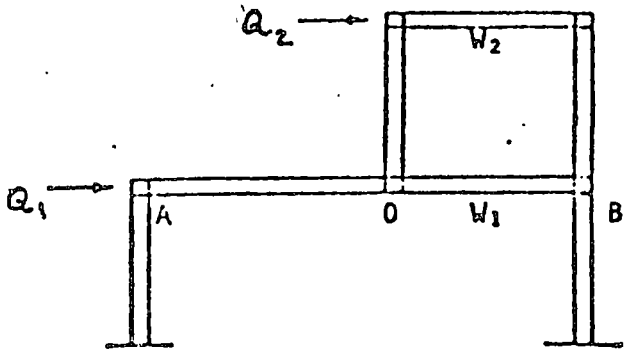
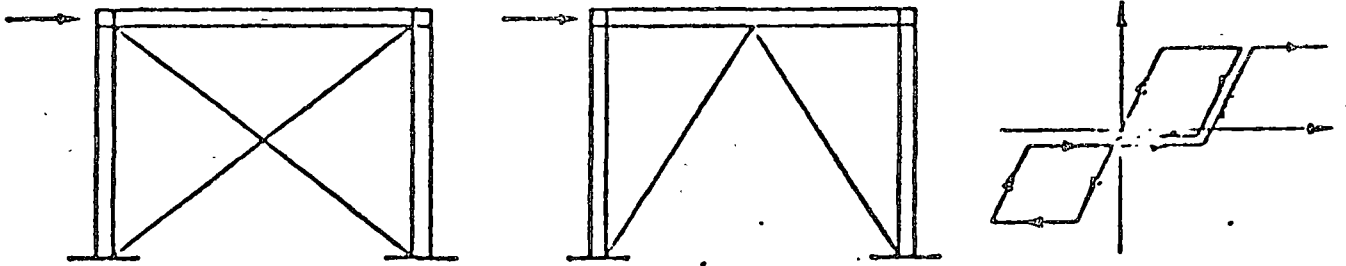
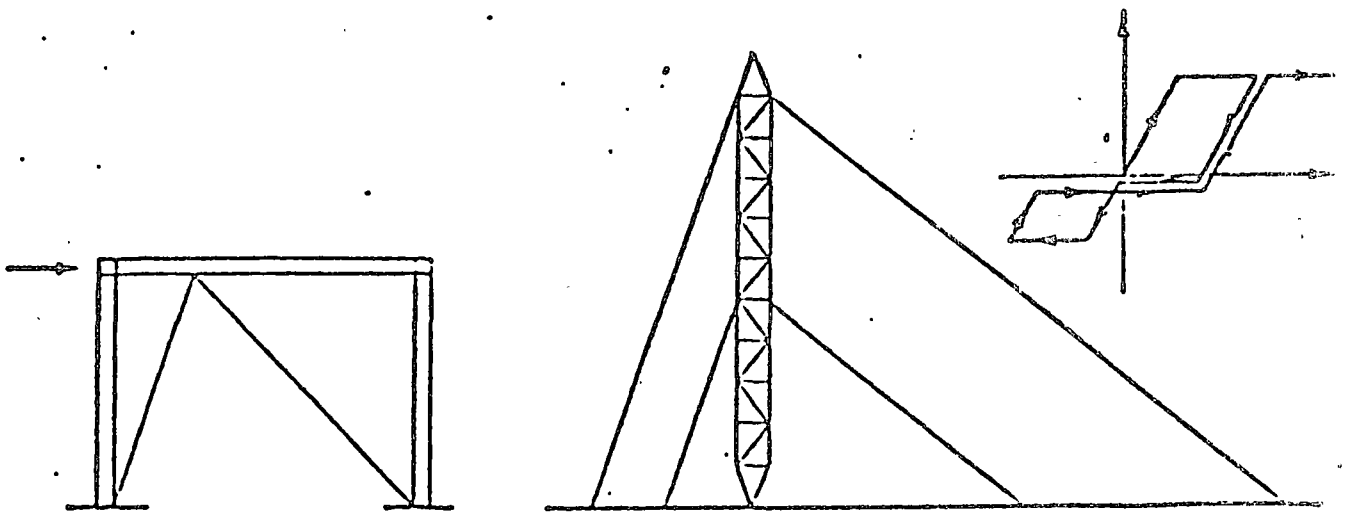


Fig. 3.8 structure with asymmetric load-deflection curve



a) Symmetric



b) Asymmetric

Fig. 3.9 Slip type systems

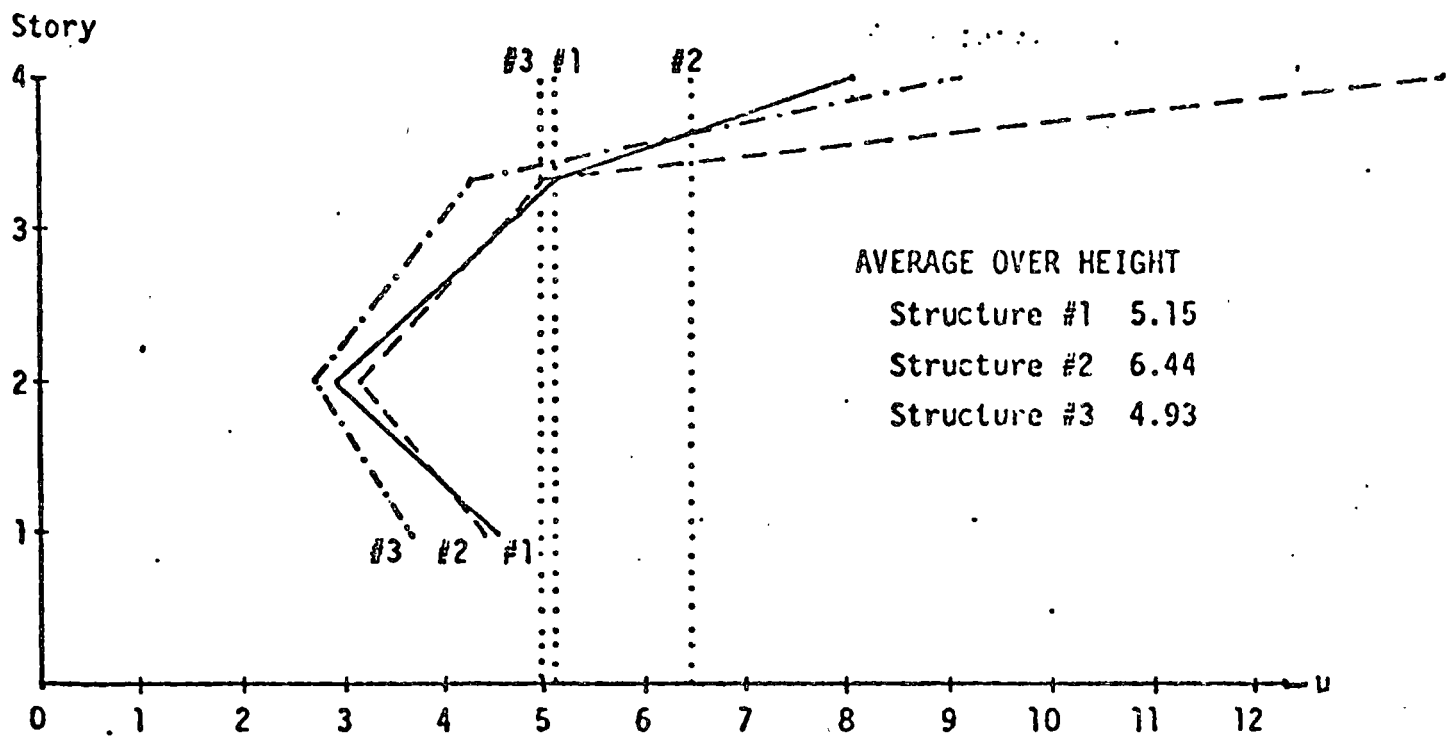
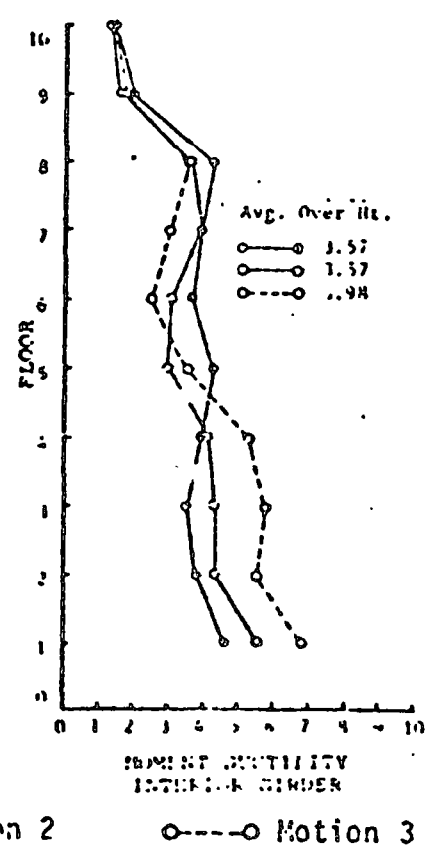
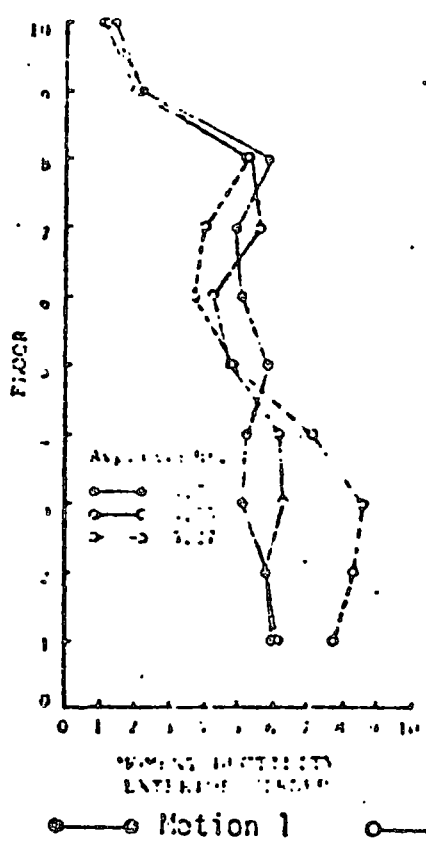
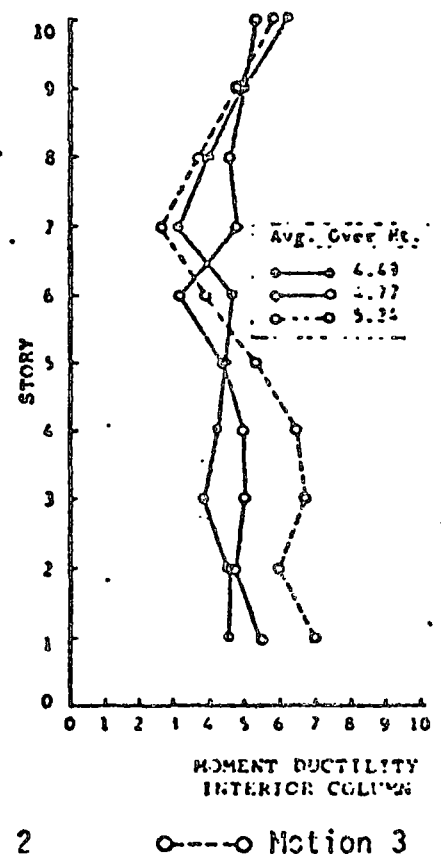
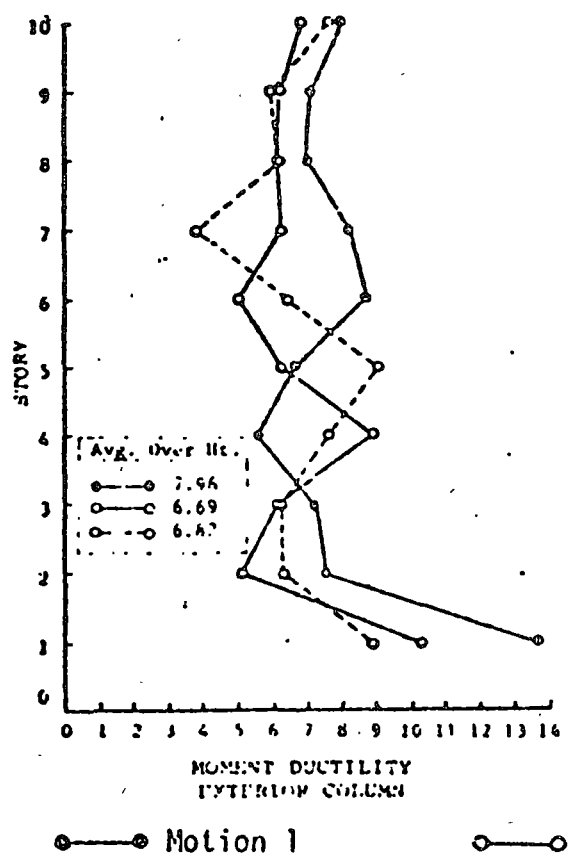


Fig. 3.10 Ductility demands in shear systems subjected to simulated earthquakes (After ref. 3).



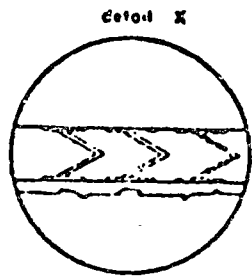
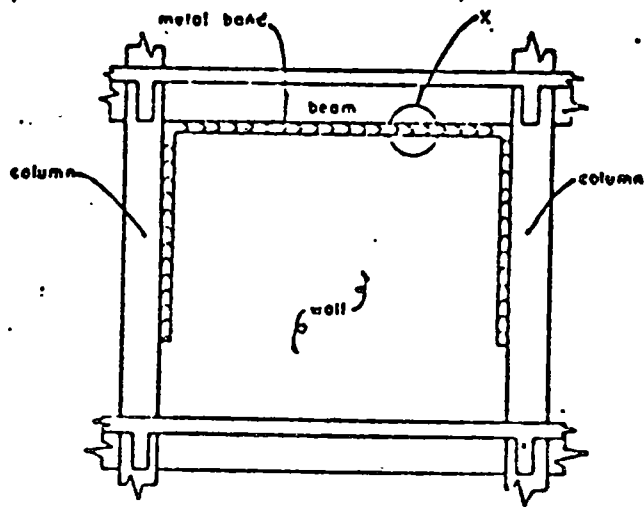


a) Girders

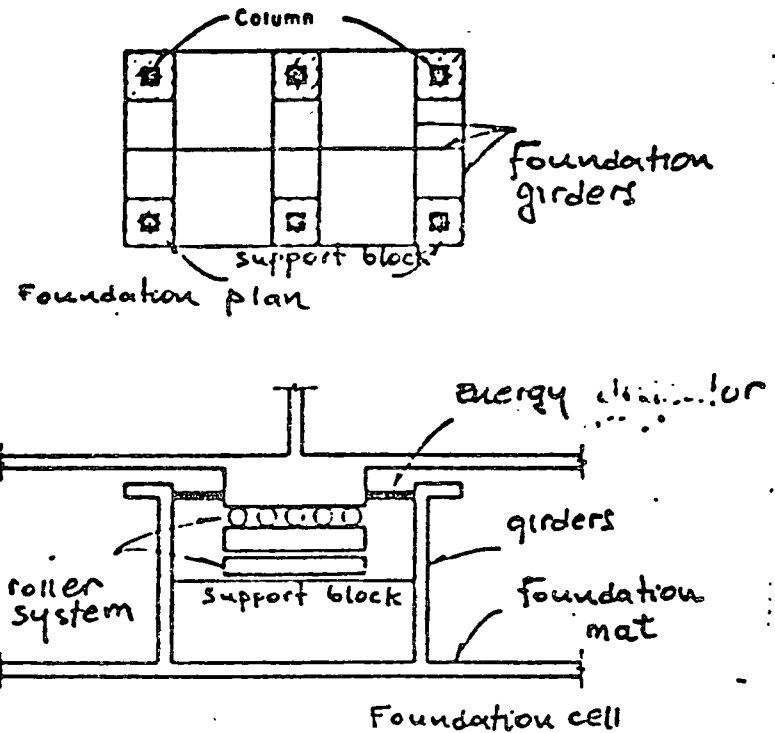


b) Columns

Fig.3.11 Local ductilities in frames subjected to simulated earthquakes (Adapted from ref. 4).

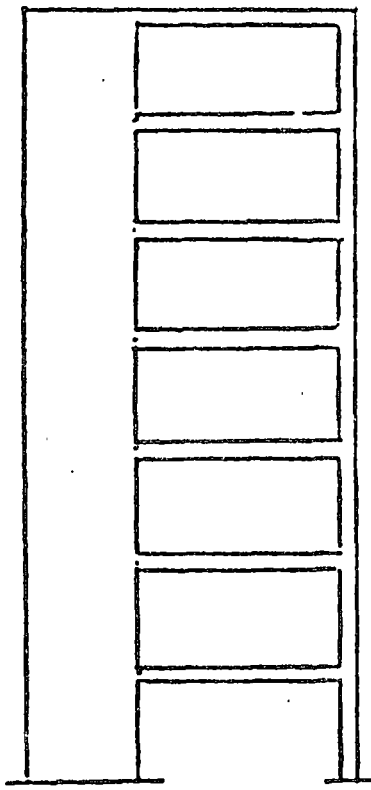


a) Metal band to protect partitions (After ref. 10)

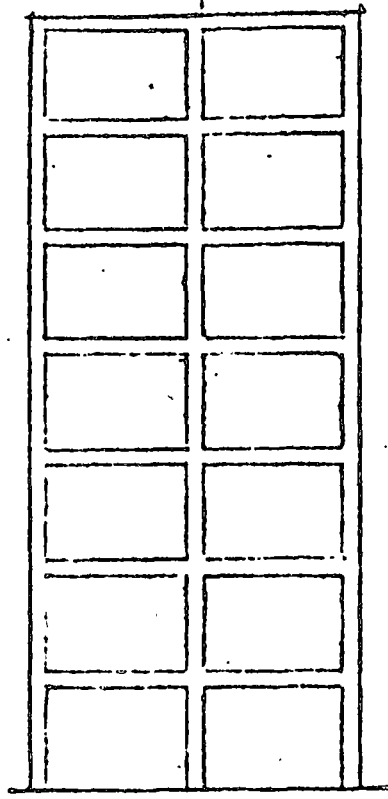


b) Roller support (After ref. 15)

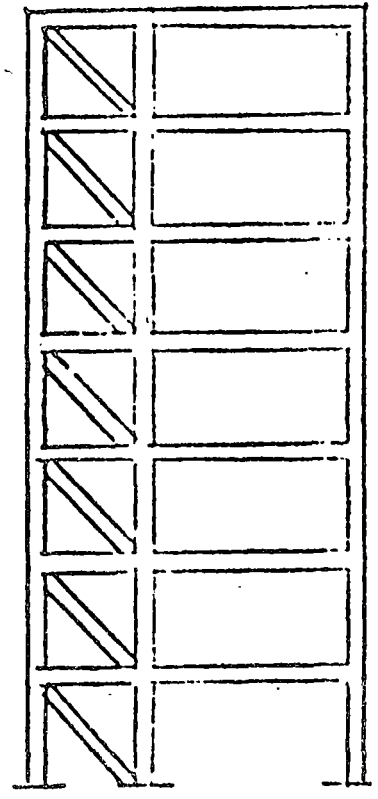
Fig. 3.12 Energy-absorbing and shock-isolating devices



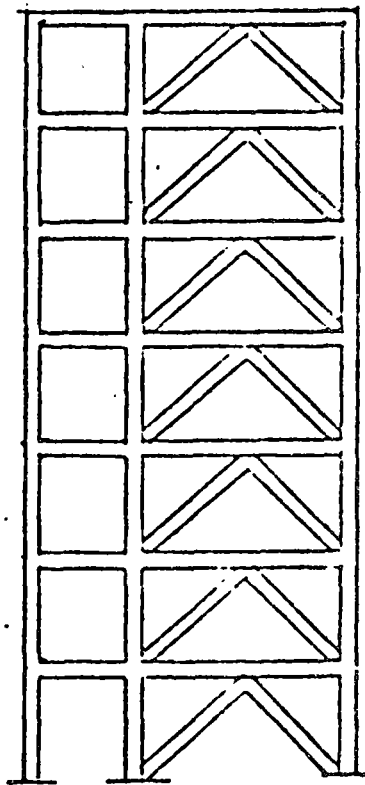
a) Shear wall



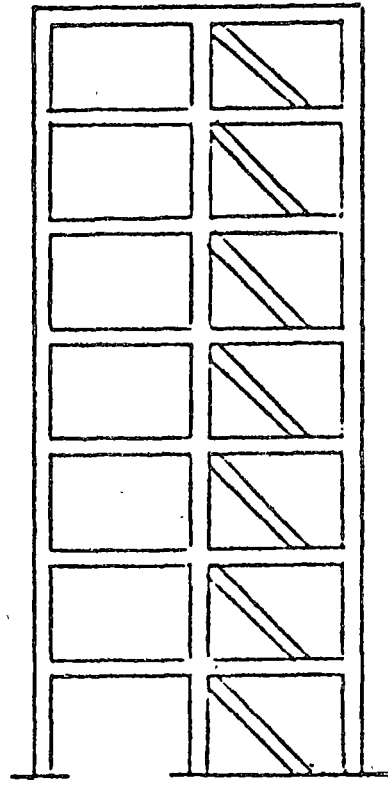
b) Infilled frame



c) Diagonal bracing



d) K-bracing



e) Diagonal-yielding bracing

Fig. 3.13  
Stiffening  
elements

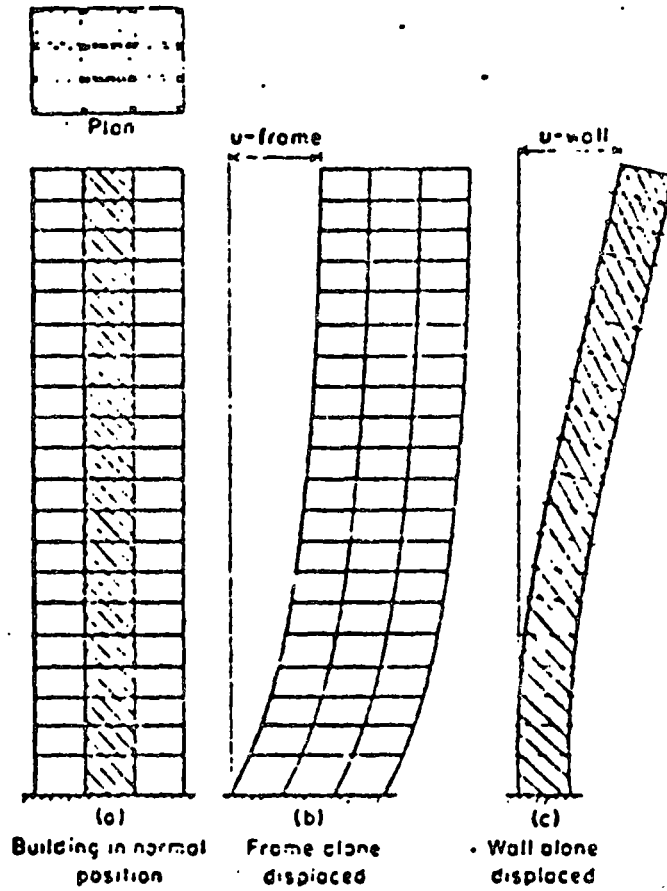


Fig. 3.14 Lateral load response of shear walls and frames (After ref. 33)

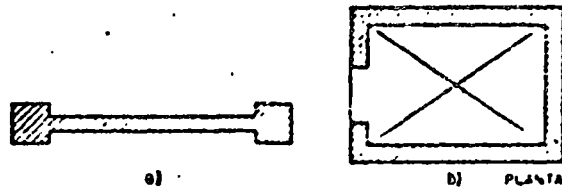
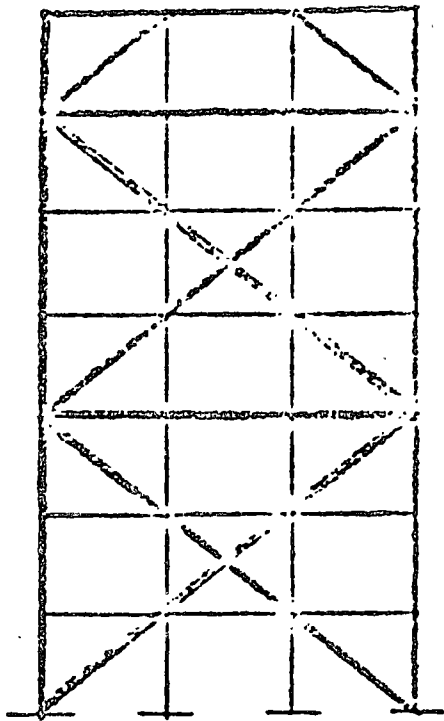
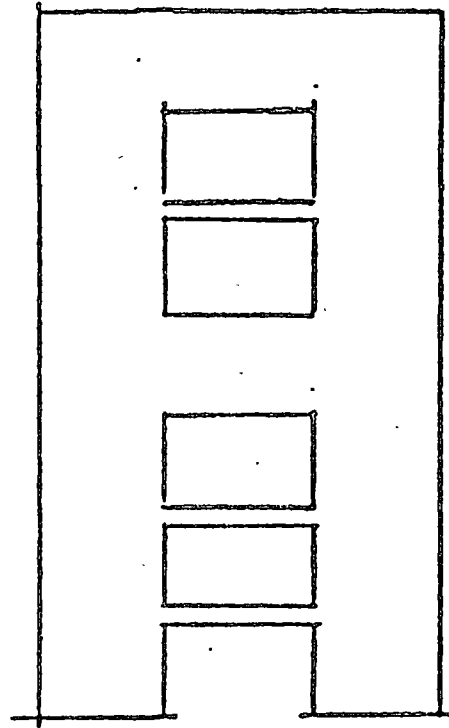


Fig. 3.15 Efficient shear wall sections

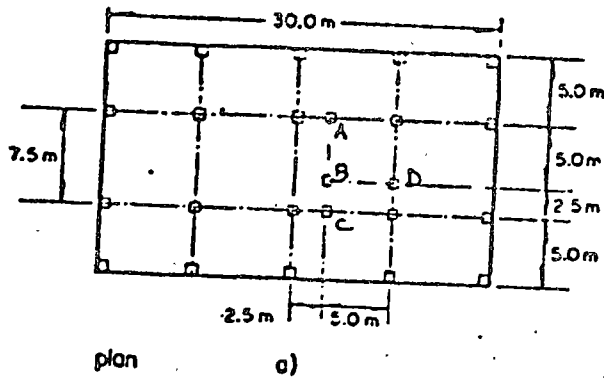


a) Cross braces

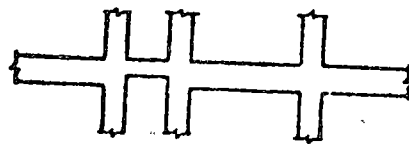


b) Shear walls and spandrel beams

Fig. 3.16 Efficient use of stiffening elements



plan a)



elevation b)

Fig. 3.17 structural solution for building with uneven spans (After ref. 10)

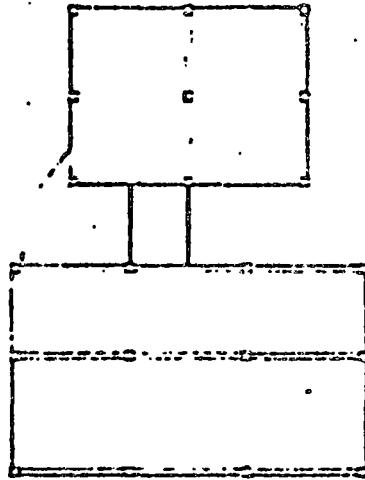


Fig. 3.18 Building sections interconnected by narrow corridors

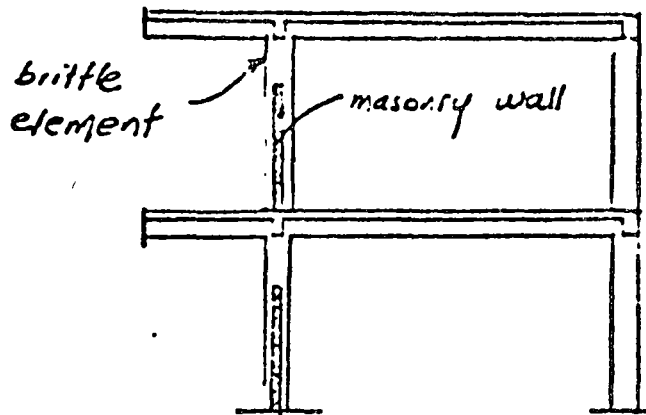


Fig. 3.19 Low ductility structure

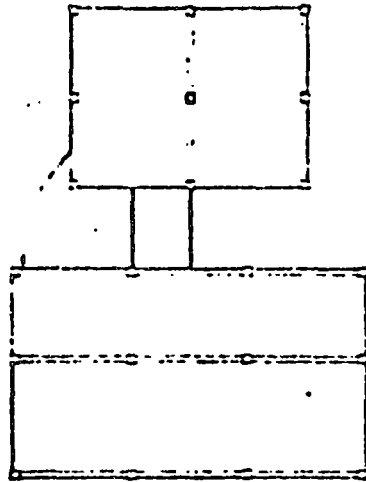


Fig. 3.18 Building sections interconnected by narrow corridors

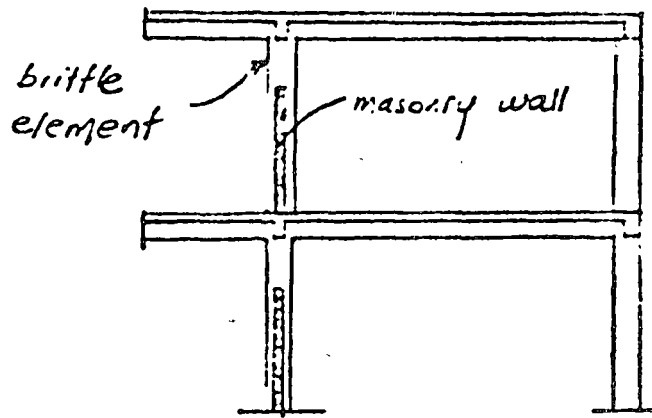


Fig. 3.19 Low ductility structure

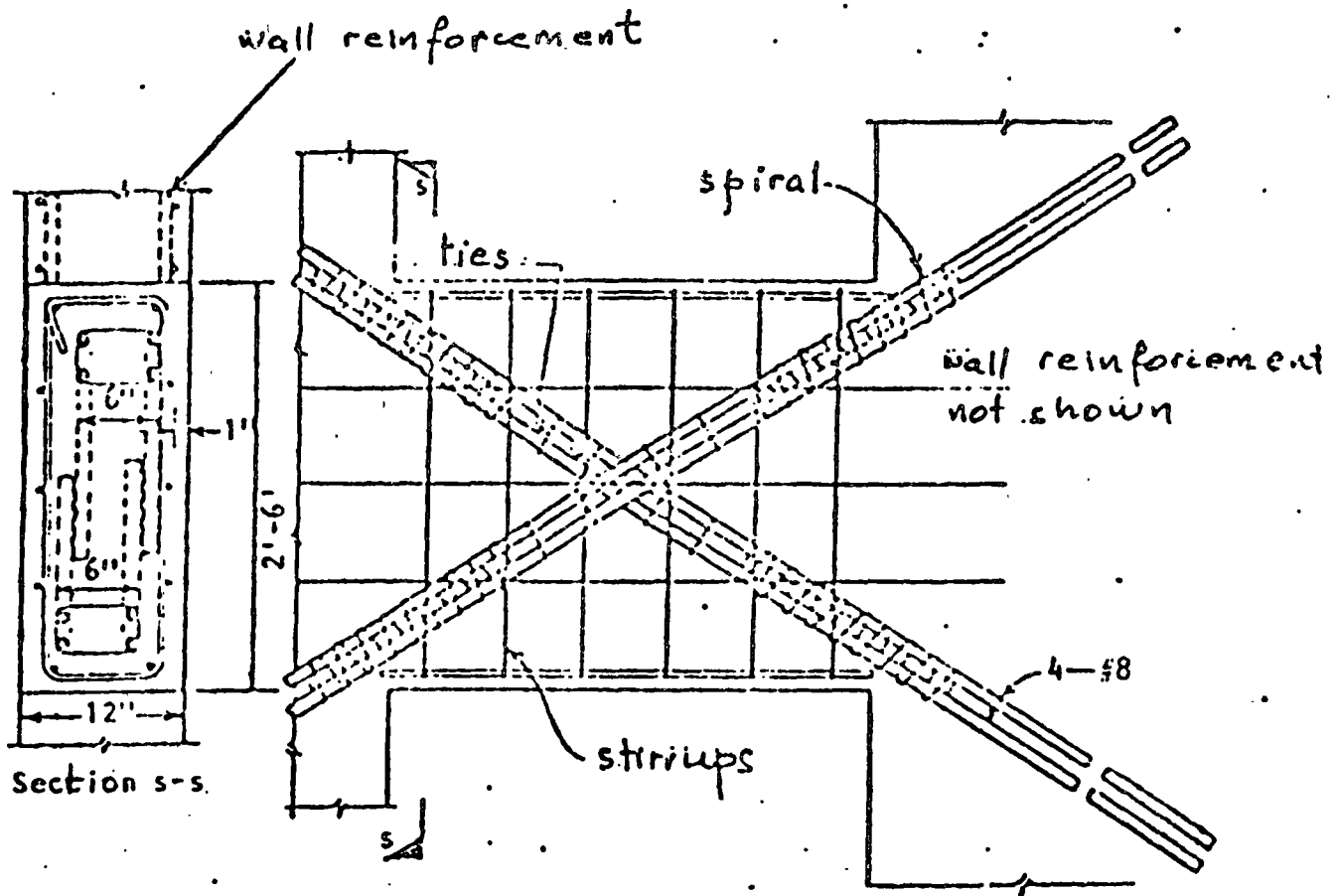
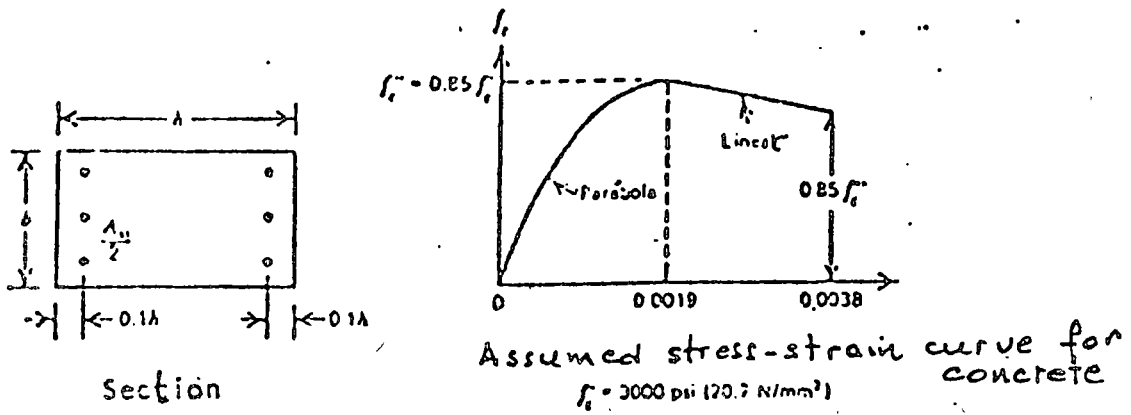
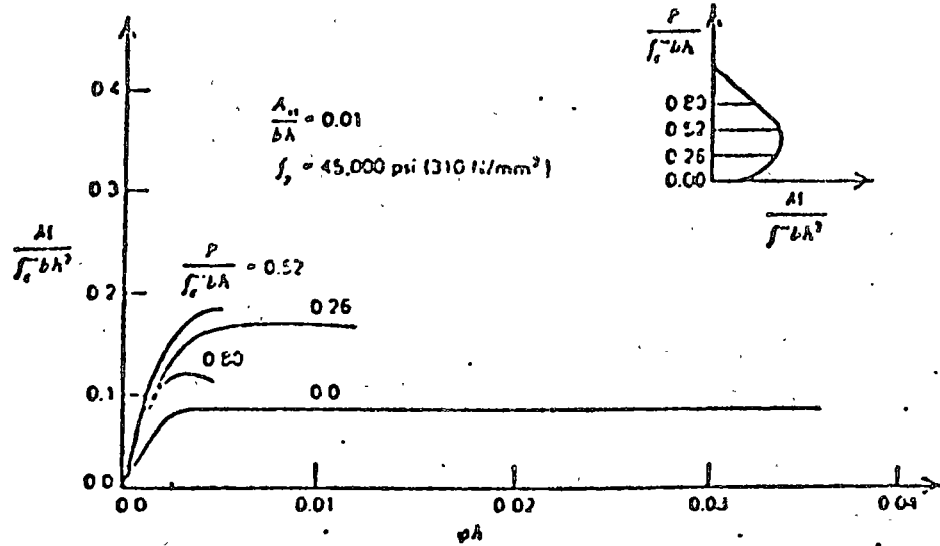


Fig. 3.20. Suggested reinforcement for coupling beam (After ref. 34)

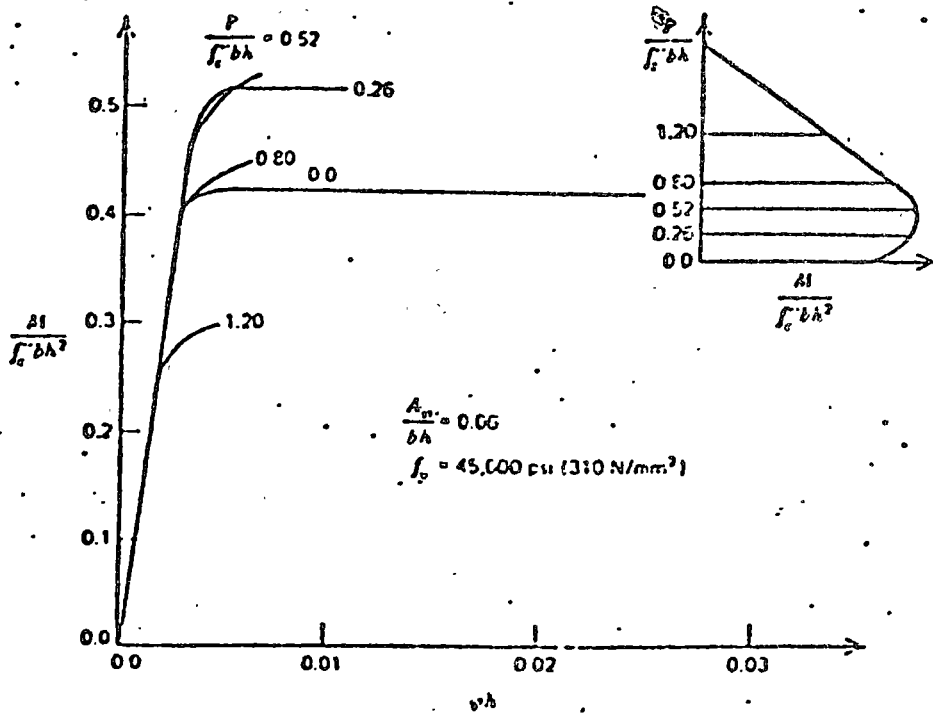




a)



b)



c)

Fig. 3.21 Influence of axial load on column ductility (After ref. 35).

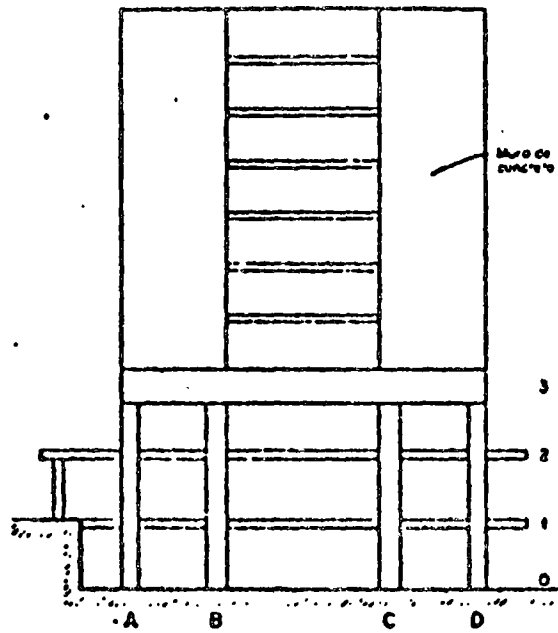


Fig. 3.22 Schematic cross section of building damaged during Caracas 1967 earthquake (After ref. 17).

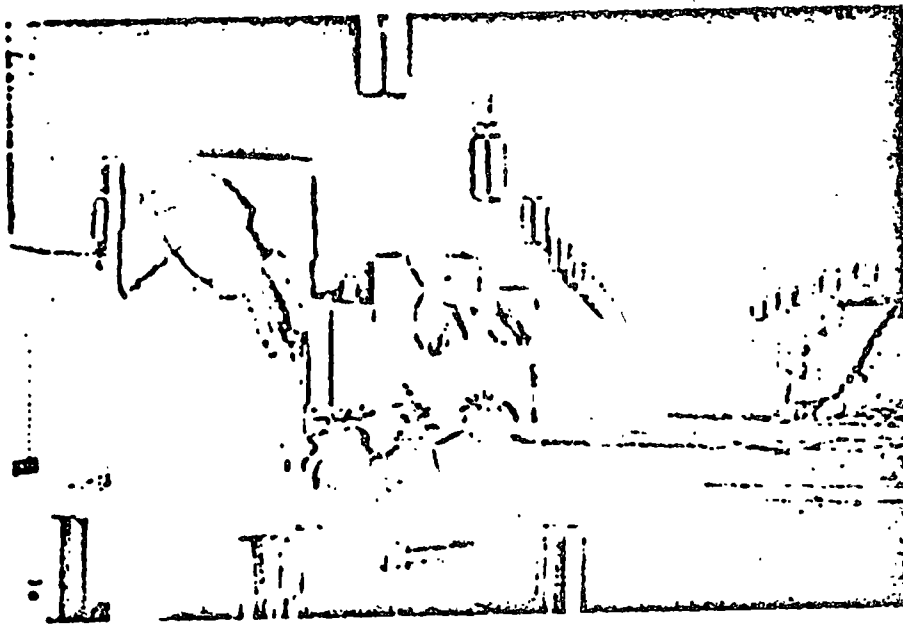


Fig. 3.23 Failure of reinforced concrete columns

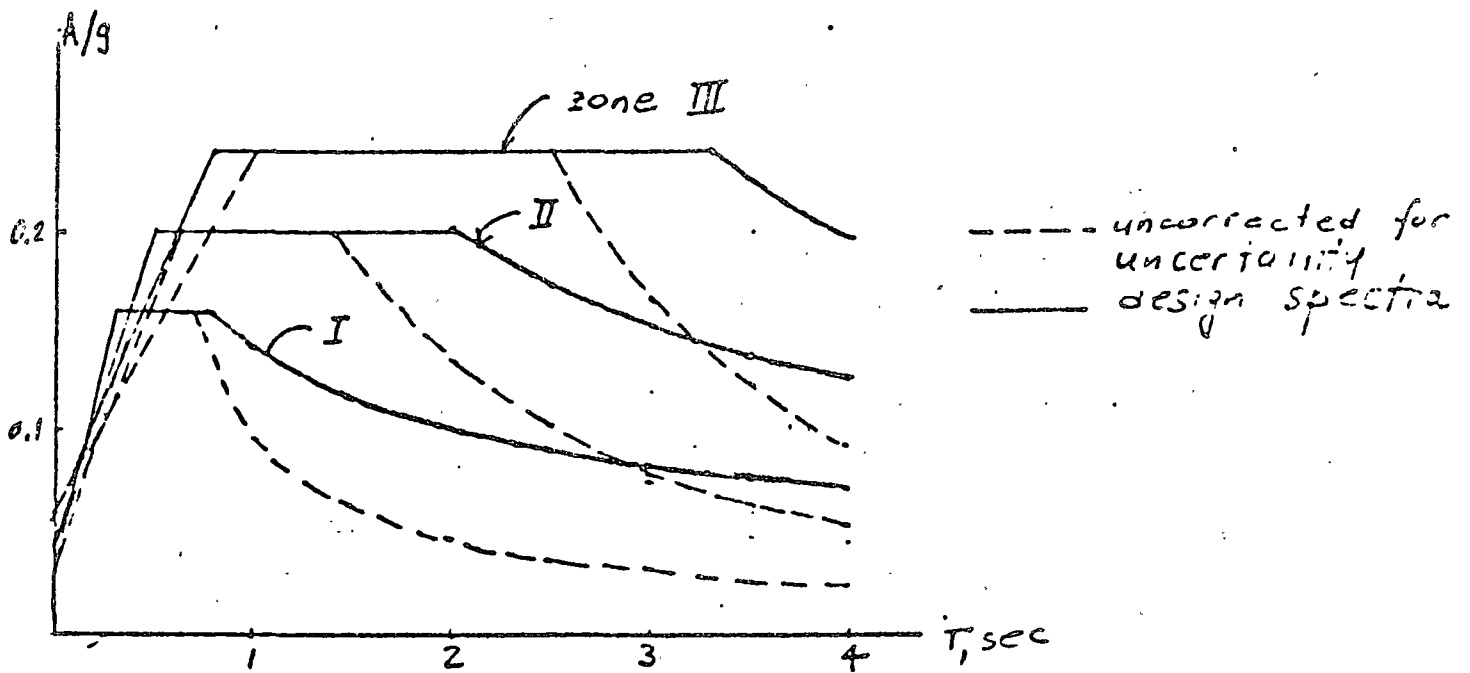


Fig. 324 Design spectra corrected for uncertainty in natural period

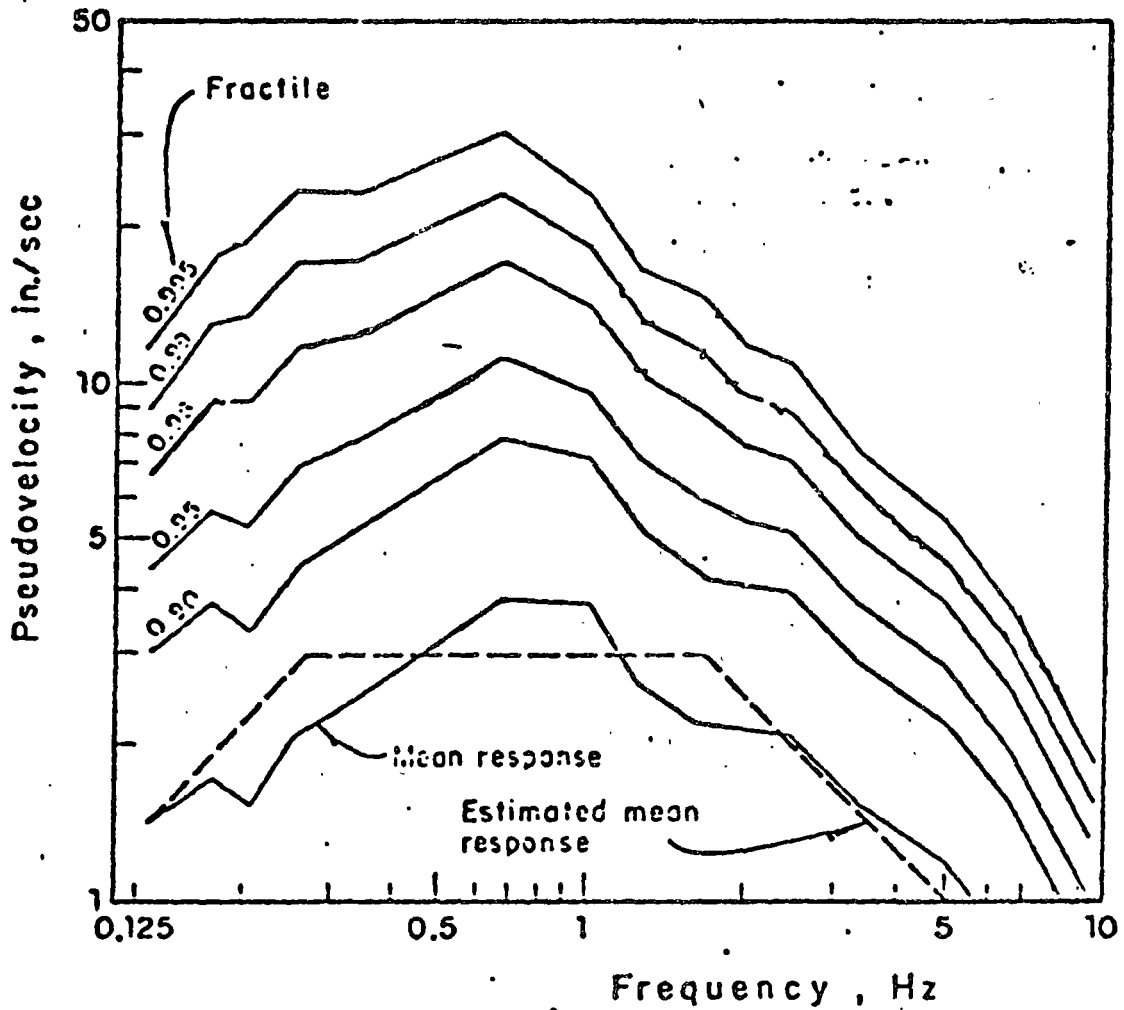


Fig. 3.25 Response spectra for different exceedance probabilities (After ref. 29).

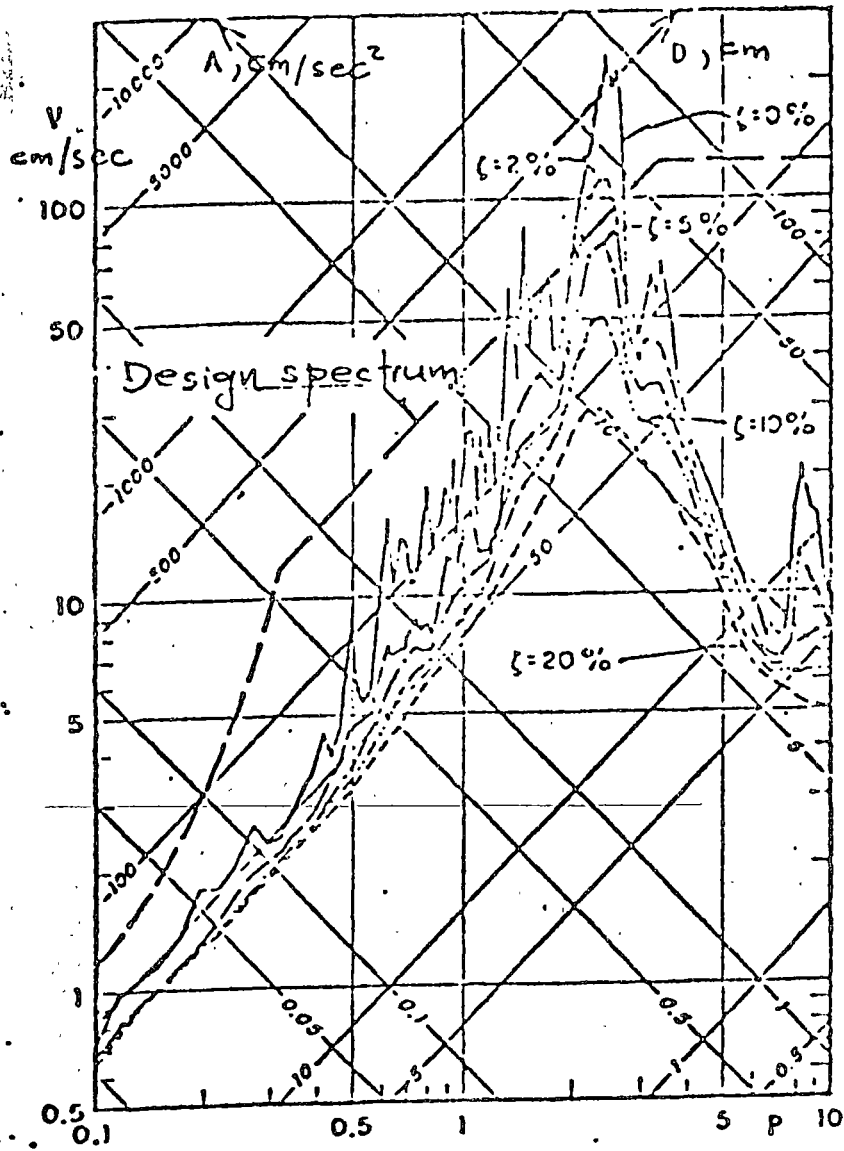
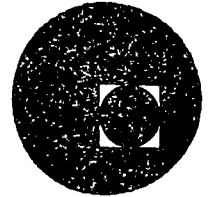


Fig. 3.26 Typical response spectra on soft clay in Mexico City



centro de educación continua  
división de estudios superiores  
facultad de ingeniería, unam



IV CURSO INTERNACIONAL DE INGENIERIA SISMICA

DISEÑO SISMICO DE EDIFICIOS

ESTRUCTURACION DE EDIFICIOS EN ZONAS  
SISMICAS

JULIO, 1978.

# Response of Buildings to Lateral Forces

Reported by ACI Committee 442

**MARK FINTEL**  
Chairman

**INGVAR SCHOUSBOE**  
Secretary

PETER R. BARNARD  
RAY W. CLOUGH  
ARNALDO T. DERECHO  
KURT GERSTLE

CARL B. JOHNSON  
IB FALK JORGENSEN  
NARBY KHACHATURIAN  
FAZLUR R. KHAN  
FRITZ KRAMRISCH

J. G. MACGREGOR  
IAIN A. MACLEOD  
NORBY N. NIELSEN  
RICHARD A. PARMELEE

This report presents a review and evaluation of the various structural systems employed in current building practice, with particular reference to their function in resisting lateral loads. Lateral load analysis and design considerations associated with each of the systems are briefly discussed. The structural systems considered are those consisting of one or more of the following basic units: frames, shear walls, and tubes. A brief discussion of isolation techniques for earthquake resistance, as well as foundation design considerations for lateral forces is also given.

The report is intended as a compact reference source for the practicing engineer who has to design buildings to resist lateral loads.

*Keywords:* blast loads; buildings; computer programs; continuum hypothesis; deflection; drift; ductility; dynamic loads; dynamic structural analysis; earthquake resistant structures; foundations; frames; isolation; lateral pressure; lateral stability; matrix methods; motion perception; multistory buildings; reinforced concrete; serviceability; shear walls; stability; staggered wall beam; strength; structural analysis; structural design; tube-in-tube; walls; wind pressure.

## CONTENTS

<b>1—Purpose</b> .....	<b>82</b>
<b>2—Lateral load categories</b> .....	<b>82</b>
2.1—General	
2.2—Wind loads	
2.3—Earthquake loads	
2.4—Blast loads	
<b>3—Performance criteria</b> .....	<b>85</b>
3.1—Strength and stability	
3.2—Serviceability	
3.3—Ductility	
<b>4—Lateral load resisting units</b> .....	<b>87</b>
4.1—General	
4.2—Frames	
4.3—Shear walls	
4.4—Tubes	

<b>5—Structural systems</b> .....	<b>95</b>
5.1—General	
5.2—Frame buildings	
5.3—Shear wall buildings	
5.4—Staggered wall-beam system	
5.5—Shear walls acting with frames	
5.6—Single framed tube	
5.7—Tube-in-tube	
<b>6—Isolation techniques for earthquake resistance</b> .....	<b>101</b>
<b>7—Foundation design considerations for lateral forces</b> .....	<b>101</b>
7.1—General	
7.2—Soil-structure relationships	
7.3—Resistance to lateral loads	
7.4—Resistance to overturning	
7.5—Selection of type and performance	
<b>8—References</b> .....	<b>103</b>

## 1—PURPOSE

Traditionally, the primary concern of the structural engineer designing a building has been the provision of a structurally safe and adequate system to support the design vertical loads. This is understandable since the vertical load-resisting capability of a building is its reason for existence. Any calculations undertaken to check the adequacy of the design with regard to lateral loads were often cursory in nature and more as an afterthought than as an essential and integral part of the total design effort. This attitude has not appeared to affect the resulting designs significantly as long as the buildings involved were not too tall, were not in seismic zones, or were constructed with adequate built-in safety margins in the form of substantial nonstructural masonry walls and partitions.

With the increasing use of light curtain walls, dry-wall partitions, and high strength concrete and steel reinforcement in tall buildings, the effects of wind loads have become more significant. Also, the increasing understanding of earthquake effects on buildings has brought about a more rational approach to the design of buildings to resist seismic excitations.

The steady progress in our understanding of the behavior of structures and their components under the action of various loads, together with the greater refinement in analysis which the computer has allowed, has led to greater demands on the structural engineer to develop economical designs with more realistic safety factors. In buildings, this trend has resulted in the development of new structural systems and the reexamination of the more conventional structural forms aimed at

achieving greater efficiency with respect to both vertical and lateral load resisting functions.

The purpose of this report is to review and evaluate the use and limitations of, as well as the analysis and design considerations involved in, the various structural systems employed in current building practice, particularly as these relate to their lateral load resisting function. It is hoped that this report will serve as a compact source of information for the practicing structural engineer who has to design buildings to resist lateral forces.

Problems associated with the effects of vertical load, foundation settlement, temperature and creep and shrinkage in tall buildings are pointed out briefly and only as they bear some relation to the subject matter discussed. Certainly these problems deserve a more extended treatment than is possible or proper in this report.

The report has necessarily taken the form of a summary. The literature on structural systems under lateral loads is quite extensive. The selected bibliography accompanying this report indicates only those sources which the committee has found most relevant to the points discussed. A number of noteworthy contributions to this highly interesting field of study may have been omitted. Where this has occurred, the committee would gladly welcome efforts to bring such references to its attention.

## 2—LATERAL LOAD CATEGORIES

### 2.1—General

Three types of lateral load are considered:

- Wind loading
- Earthquake loading
- Blast loading



The usual approach to lateral load analysis starts with an assessment of the magnitude and character of the loads, followed by determination of the response of the structure (including possible inelastic phases) to the loading. This can be done either mathematically or by model analysis or by a combination of both methods. A more rational approach would be to consider the problem from a probabilistic viewpoint, with the aim of arriving at a structure to which a specific probability of performance can be attached. This would require the determination of the separate probability distributions of the loads, and the strengths of the structural elements as well as of the entire structure as starting points. This approach is at present handicapped not only by the complexity of the process itself, but also by the lack of adequate statistical information concerning loads and is therefore given no further consideration in the text which follows.

## 2.2—Wind loads

*Nature of the wind forces*—Wind is the general word for air naturally in motion, and by virtue of the mass and velocity of the moving air, the wind possesses kinetic energy. If an obstacle is placed in the path of the wind so that the moving air is stopped or deflected from its path, then all or part of the kinetic energy of the moving air is transformed into the potential energy of pressure. The intensity of pressure at any point on an obstacle depends on the shape of the obstacle, the angle of incidence of the wind, the velocity and density of the air, and the lateral stiffness of the engaged structure.

*Response of a building*—Under the action of a natural wind a tall building will be continually buffeted by gusts and other aerodynamic forces. Although the structure will tend to deflect toward a mean position, it will oscillate continuously. It has been observed that this oscillating motion will occur primarily at the fundamental period of vibration of the building.<sup>1,2</sup> Thus, the response of the structure to the turbulent wind environment is predominantly in the first mode of vibration. The first or fundamental period of vibration of a multidegree-of-freedom system is the time it takes to complete one full cycle when vibrating in its natural mode having the lowest frequency (the fundamental mode). The fundamental mode of vibration of a vertical structure generally involves displacements of all the masses toward the same side of the original position, while the higher modes involve reversals in the displacements of masses.

*Aerodynamic instability*—If that portion of the wind energy that is absorbed by the structure is larger than that which is dissipated by the structural damping, then the amplitude of oscillation

will continue to increase and will finally lead to destruction. Since all structures exposed to wind will oscillate under some disturbance, the designer must be able to predict the critical wind speed at which the particular structure may become aerodynamically unstable.<sup>3</sup>

The structural forms used today have greater flexibility combined with less mass and damping than those used for the more traditional structures of the recent past. These factors have increased the importance of wind as a design consideration. For estimations of the overall stability of a structure and of the local pressure distribution on the cladding, a knowledge of the maximum steady or time-averaged wind loads is usually sufficient.<sup>4</sup>

*Design forces*—The determination of wind forces on a structure is basically a dynamic problem. However, since the structure as a whole adapts itself as though for quasi-static loads, it has been usual practice to treat the wind as a statically applied pressure and to neglect its dynamic nature.

The designer's source of information on steady wind loads is usually a building code, but the data contained in such codes are of necessity presented in a generalized form and may not be adequate for a special case, especially if the structure departs from the conventional building forms.

Some of the considerations which enter into the choice of a design wind pressure are:<sup>5,6</sup>

- a. The anticipated lifetime of the structure and its relation to the return period of maximum wind velocity
- b. The duration of gusts
- c. The dimensions of gusts
- d. Variation of wind speed with height
- e. Angle of incidence of the wind
- f. Influence of the ground effect
- g. Influence of architectural features
- h. Influence of internal pressures
- i. Lateral resistance of structure

A comprehensive study of existing information on wind forces was made by an ASCE task committee on wind forces, and the final report<sup>7</sup> is a compact source of information which can be of use to the design engineer. Recent studies<sup>8</sup> have shown that an equivalent static design wind load can be obtained from the expression:

$$p = \frac{1}{2} C_s C_a C_g \rho V_h^2 \left( \frac{H}{h} \right)^{2/\alpha} \quad (1)$$

$C_s$  = coefficient dependent on the shape of the structure

$C_a$  = coefficient dependent upon nearby topographic features

$C_g$  = gust coefficient which is dependent upon the magnitude of gust velocities and the size of the structure

- $\rho$  = air density
- $V_h$  = basic design wind velocity at height  $h$
- $H$  = height above ground at which  $p$  is evaluated, or a characteristic height of the structure
- $h$  = height at which base velocity was determined
- $\alpha$  = an exponent for velocity increase with height determined by the surface roughness in the vicinity of the site

The quasi-static approach to wind load design has generally proved sufficient for most structures. However, it is unrealistic in several respects, and a more detailed analysis, including wind tunnel studies, may be appropriate.<sup>9-12</sup> Eq. (1) may not be satisfactory for very tall buildings, especially with respect to the comfort of the occupants and the permissible horizontal movement or drift which might result in cracking of partitions and glass. These important factors are related to the frequency and amplitude of the vibrations, which depend on the natural frequencies of the building and gust fluctuations of the wind rather than a steady wind pressure.

### 2.3—Earthquake loads

The loads or forces which a structure is called upon to sustain due to earthquake motions result directly from the distortions induced in the structure by the motion of the ground on which it rests. This base motion is characterized by displacements, velocities and accelerations which are erratic in direction, magnitude, duration, and sequence.

Uncertainties in the determination of the proper design earthquake loads to be used for a proposed structure arise from a number of factors, among the more important of which are:

1. The difficulty of predicting the character of the earthquake motions (i.e., intensity, duration, frequency characteristic) to which a planned structure may be subjected during its lifetime
2. Where an analytical determination of structural response to a particular earthquake motion is desired and feasible, the difficulty of ascertaining the values of the structural parameters affecting the response (i.e., stiffness and damping), as well as the dynamic properties of the soil or supporting medium

As far as the earthquake motion is concerned, the quantity most often used in analysis is the variation with time of the acceleration in the immediate vicinity of the structure. At any particular point, this may be described by two usually orthogonal horizontal components and a vertical component. Since structures are always constructed over a finite area, rocking and twisting motions characterized by the variations with time of angular displacements about the three perpendi-

cular directions may also be involved. Because buildings are relatively more flexible with respect to horizontal or lateral distortions, it has been the practice in most instances to consider only the structural response to the horizontal components of the earthquake acceleration. The vertical motion (as well as any rocking motion) has either been assumed to be negligible or considered to produce effects which do not materially influence the design of the structure. Here the principal motivation has been simplification and the reduction of the computational effort required, which can be quite substantial even for the horizontal components alone.

In most cases, a further simplification of the true three-dimensional earthquake response of structures is made by assuming the design horizontal acceleration components to act nonconcurrently in the direction of each main axis of a building. It is tacitly assumed that a building designed by this approach will have adequate resistance against the acceleration acting in any direction.

Although both wind and earthquake loads are dynamic in character, a basic difference exists in the manner in which these loads are induced in a structure. Whereas wind loads are external loads applied, and hence proportional, to the exposed surface of a structure, earthquake loads are essentially inertial forces related to the mass of the structure. Inertial forces result from the distortion produced by both the earthquake motion and the inertial resistance of the building. Thus, their magnitude is a function, among others, of the weight (or mass) of the building rather than its exposed surface.

Two approaches to the design of earthquake-resistant structures, particularly as these relate to the determination of earthquake loads, are in present-day use:

#### 1. *The quasi-static approach*

This method, which has been adopted by most building codes, uses a set of statically applied horizontal forces to simulate the effect of earthquake loading. The distribution of these design shears along the height of a structure is similar to that of the maximum shears obtainable from a dynamic analysis. However, their magnitudes are set somewhat arbitrarily, the values chosen being influenced greatly by judgment and experience. The design forces specified by most codes are generally smaller than the corresponding maximum values which would be indicated by an elastic-dynamic analysis.<sup>13-15</sup>

Structures designed to such "scaled-down" forces will generally have some members developing yield stresses under severe earthquake conditions. To safeguard the integrity and stability of a structure when such yielding occurs, provisions are

usually incorporated in the design to insure adequate rotational capacity in regions where yielding is likely to occur. Ductility factors (the term being defined as the ratio of the maximum deformation to the corresponding deflection at yield) of from four to six have been considered adequate for most cases.

This method, though more empirical than rational, is likely to continue in use for the majority of structures in view of its simplicity and the fact that many structures designed on the basis of this method have performed satisfactorily when subjected to severe earthquakes. Reference 16 is the most commonly quoted work on this subject. References 17 and 18 contain some background information and present the basic concepts of earthquake-resistant design for multistory structures.

### 2. Dynamic analysis

This approach requires that the structure be idealized as an assembly of masses interconnected by springs and damping elements. The dynamic response of such a system to a particular earthquake acceleration-time record is obtained most conveniently using an analog or digital computer.<sup>15,19-21</sup>

In most cases, a design for earthquake loading will start with a structure already proportioned to satisfy the requirements of gravity and wind loading. If the earthquake motion is severe, the calculated forces in some portions of such a structure will generally exceed their yield capacity. An analysis which accounts for inelastic response would then be indicated if a good estimate of the required ductility ratios as well as the maximum lateral deflection are to be obtained. Such an analysis, although clearly desirable for large and important structures, is at present not generally practicable due to the limited availability of the necessary computer programs and computers, the relatively great amount of computer time required to undertake the analysis, and the difficulty of predicting the character of the earthquake motion that will occur at a given site.

### 2.4—Blast loads

The general term *blast* refers to both vibrations induced in the soil and to fluctuations of air pressure due to man-made explosions. Blast effects due to soil vibrations may be considered as seismic excitations.

The pressure wave resulting from an explosion near ground consists of an abrupt rise in pressure followed by a decay from which a negative pressure wave results. The shape of the pressure wave is well defined and so its effects on structures can be studied.<sup>22</sup>

A sonic boom can be considered as a type of blast load in which the pressure wave is applied to the exposed surface of the structure.

## 3—PERFORMANCE CRITERIA

### 3.1—Strength and stability

Since publication of ACI 318-63, increasing use has been made of the ultimate strength design method to proportion reinforced concrete sections. By this method, a given section must have an ultimate capacity equal to or greater than a factored combination of the effects due to vertical load, plus either earthquake or wind load effects (whichever produces the more severe condition). The ultimate strength design method for proportioning members is presently used in conjunction with an elastic analysis of the structure to determine the design forces and deformations in the members.

The traditional conventional working stress approach limits the stresses in a member due to working loads (gravity and lateral loads) to an acceptably safe level. The investigation of the collapse load of a structure as a whole, i.e., limit analysis, for practical design purposes has not been used to any appreciable extent in reinforced concrete structures. As a result the committee is not able to recommend design procedures based on such an analysis at present. Experience with steel structures suggests that it is essential to include stability considerations in any such analysis.<sup>23</sup>

The likelihood of low cycle fatigue in structures subjected to high fluctuating loads should also be considered.

### 3.2—Serviceability

In addition to strength and stability requirements, certain serviceability conditions have to be considered in designing for lateral loads. These requirements are intended to ensure the satisfactory performance of the structure under service conditions. The most significant serviceability criteria relate to:

1. Lateral deflection of the structure, particularly as this affects the stability and cracking of members

2. Relative vertical movements between columns, particularly as these affect the cracking of members and partitions

3. Motion of structure as it affects occupant comfort

**3.2.1 Lateral deflection**—The main deflection criterion for high rise buildings is lateral drift. This is the relative magnitude of the lateral displacement at the top of a building with respect to its height\* (sometimes referred to as the "deflection index") and has often been used as a guide in designing for lateral loads. In designing for wind loads, an arbitrary value of this ratio, ranging from about 1/300 to 1/600,<sup>24</sup> depending on the judgment of

\*Or alternatively, the ratio of the relative lateral story displacement to the story height, assuming a more or less uniform story height.

the engineer, has been used as a basis for design. As the determination of the lateral deflection of a multistory structure is a tedious process, simplifying assumptions are often made in the calculations. Therefore, a deflection limitation is meaningful only if specified together with the method of computing the deflection.

Limiting deflections of about 1/300 used several decades ago were computed assuming the wind forces to be resisted by the skeleton alone. In reality, the heavy masonry partitions and exterior cladding common to buildings of that period considerably increased the lateral stiffness of such structures. In contrast, in most buildings that have gone up in recent years, the skeleton alone resists the lateral forces. The dry-wall interior partitions and light curtain wall exterior contribute little to the lateral force resistance of modern buildings.

Reference 28 recommends a deflection limit of 1/500. The performance of modern buildings designed in recent years to meet this criterion appears to have been satisfactory with respect to the following effects of sway under wind loading: (a) the stability of the individual columns as well as the structure as a whole, (b) the integrity of nonstructural partitions and glazing, and (c) the comfort of the occupants of such buildings. It is realized, of course, that the method of calculating the drift, as well as the degree to which the assumptions used in such calculations corresponded to the actual structure, may have varied widely from one building to another.

Reference 16 recommends an allowable drift due to static earthquake forces twice that normally used in designing for wind. Here, a distinction should be made between the drift produced by the "code-forces" and the displacements obtained from a dynamic analysis of the response to a particular earthquake record.

**3.2.2 Relative vertical deflection**—In tall buildings relative vertical movement between exterior and interior columns or between columns and shear or core walls may occur due to:

1. Thermal expansion and contraction of exterior columns<sup>25</sup>
2. Different axial load stresses in columns and shear cores leading to different elastic and creep deformations of these members<sup>26,27</sup>
3. Differential settlement of the foundations for the shear core and adjacent columns

References 25, 26, and 27 present studies and design recommendations for these problems. Generally designs to provide for these effects are adequate with respect to the relative vertical movements due to lateral loads.

**3.2.3 Cracking**—Cracking of nonstructural elements such as partitions, windows, etc., may cause serious maintenance problems (loss of acoustical

properties, leakage, etc). The drift limitation of the previous section should be selected to minimize such cracking.

For cases where excessive drift is expected, floating partitions with a capability of relative movement between skeleton and partition may be required. Floating partitions do not contribute substantially to the lateral rigidity of buildings.

The degree of control of structural cracking under lateral load depends upon the type of loading. For wind loading, the aim should be to keep the cracking within acceptable limits. For severe earthquake loading, buildings may be expected to develop plastic hinging (extensive flexural cracking) in the beams at column faces. The extent and severity of the resulting cracks can be reduced by appropriately placed shear reinforcement.

For structural cracking, Reference 29 gives concise information and an up-to-date bibliography.

#### **3.2.4 Perception of lateral sway in tall buildings**

—The sway motion of a tall building under turbulent wind, if perceptible, may produce psychological effects which render the building undesirable from the user's viewpoint. The reduction of such perceptible motion to acceptable levels thus becomes an important criterion in the design of any tall building. Such a criterion, in order to be applicable, must be expressible in quantitative terms.

The actual mechanism involved in the perception of motion is not yet well understood. It is known that the balance mechanism in the human body, which responds to any sensation of motion, is effected and controlled by the inner ear apparatus. It also appears that motion may be perceived by the general nervous system through muscles of the body. It is apparent that the sensation of motion which can be disturbing to an occupant of a building can result either from the visual perception of relative displacement with respect to some reference object, or, if visual effects are excluded, from the acceleration of the platform on which the observer stands. A number of tests have confirmed the effect of acceleration in producing a sensation of motion. Also, if the acceleration is very small but changes frequently from negative to positive, the rate of change of acceleration, which is commonly known as "jerk," can equally produce the sensation of motion.

The determination of minimum tolerable values of acceleration for the typical or normal person awaits further studies. It is obvious that the acceptability of a design with respect to perception of sway motion can only be assessed through a dynamic analysis of the building under a set of probable range of wind exposures. Because this approach may be justifiable only for the more unusual buildings, simplified procedures to account for this effect need to be developed for the more conventional tall buildings.

### 3.3—Ductility

**3.3.1 Definition of ductility**—Ductility of a structure is its ability to undergo increasing deformation beyond the initial yield deformation while still sustaining load. This is illustrated by the simple load-deflection curve of Fig. 1.

Ductility factor is defined as the ratio of the maximum permissible or useful inelastic deflection or displacement to the initial yield deflection (in Fig. 1, the ductility factor would be the ratio  $b/a$ ). It is obvious that the determination of the value of the ductility factor for a reinforced concrete moment-resisting frame is a complex problem involving bending and shear deformations of heterogeneous members consisting of concrete and ductile reinforcing steel. An excellent treatment of this complex subject is presented in References 16 and 17.

A recommended minimum ductility factor for reinforced concrete buildings in earthquake areas is from four to six.<sup>17</sup> The requirements for design and detailing contained in Reference 16 or Appendix A of Reference 30 will result in minimum ductility factors of this order of magnitude.

**3.3.2 Relationship to energy absorption**—The energy absorption capacity of a member or a structure under load is related to the ductility in that it is equal to the work done in straining or deforming the structure to the limit of useful deflection—and hence, is numerically equal to the area under the load deformation curve. In the case of members in bending, it is equal to the area under the moment-rotation curve up to the limit of useful rotation.

The properties of high ductility and energy absorption capacity are of utmost importance in earthquake zones for two basic reasons:

1. It is economically impractical to design structures to resist the maximum expected earthquake forces within the elastic range of stress.
2. It is difficult to predict the character of the earthquake motion which will occur at a given site. In addition, our knowledge of the response of buildings to earthquake ground motions is far from exact or complete.

In the past, there was resistance to the use of tall concrete buildings in earthquake-susceptible zones because of their supposed lack of ductility. It is now well established, however, that by giving proper attention to detailing, reinforced concrete structures with sufficient ductile properties can be designed.<sup>17</sup>

## 4—LATERAL LOAD RESISTING UNITS

### 4.1—General

Insofar as the lateral load resisting function of tall buildings is concerned, three broad types of units may be distinguished:

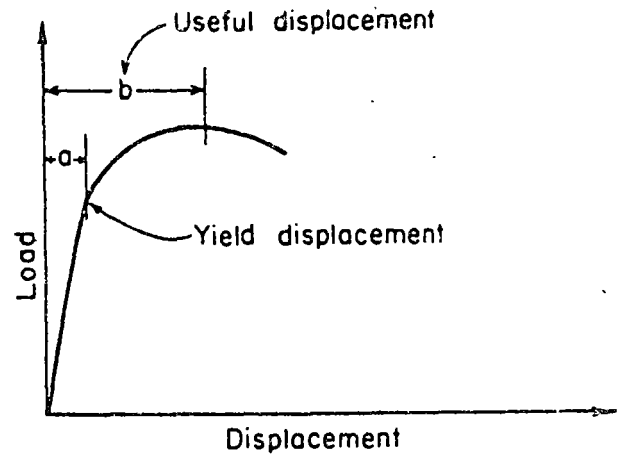


Fig. 1—Load-displacement curve

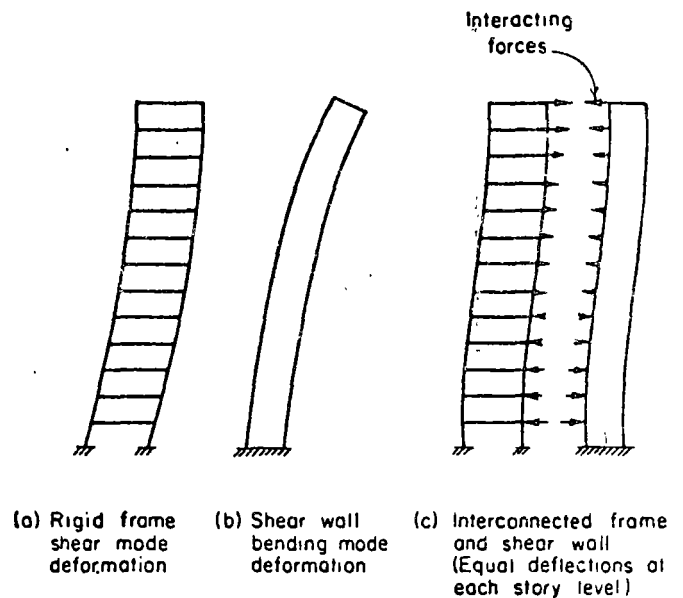


Fig. 2—Deformation modes

Frames  
Walls  
Tubes

Structural systems consist of one or more of the above basic units. The basis of the classification is the mode of deformation of the unit when subjected to lateral loading.

*Frames* deform in a predominantly shear mode where relative story deflections depend on the shear applied at the story level. Shear mode deformation is illustrated in Fig. 2 (a).

*Walls* deform in an essentially bending mode as illustrated in Fig. 2 (b).

*Tubes*, if unperforated, behave in the same way as walls. However, openings which are normally present in units of this type produce a behavior intermediate between that of a frame and a wall. A typical distribution of column axial forces in such a structure is shown in Fig. 3. The effect of shear lag will readily be noted.

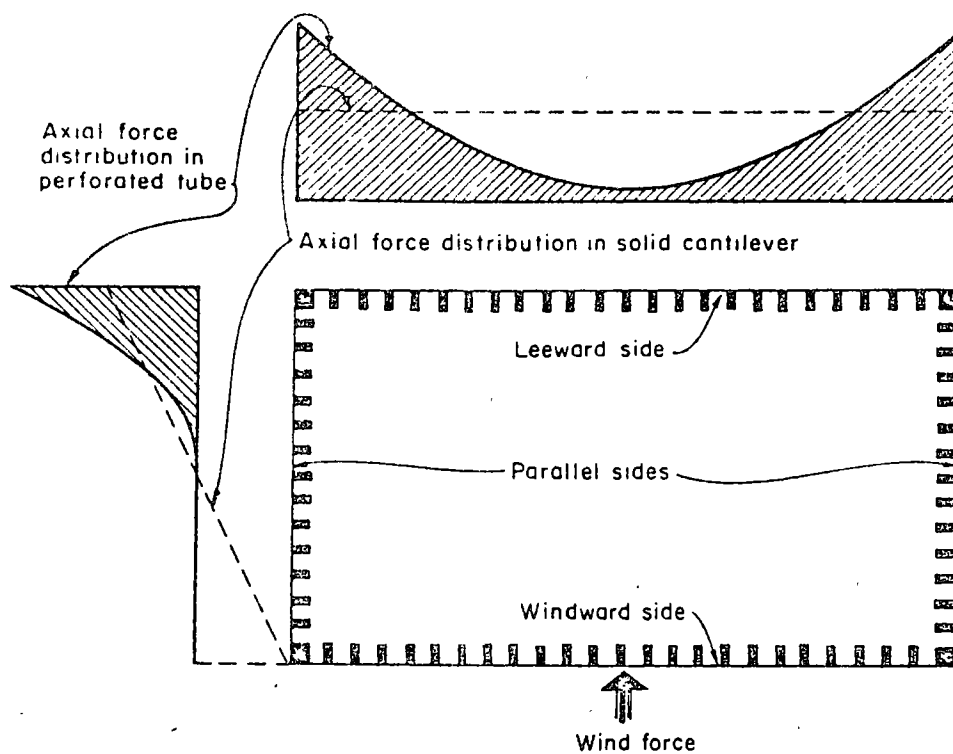


Fig. 3—Typical distributions of axial forces due to wind "perforated tube" type structure

For some units, the difference between these types may be indistinct. As used here, the term, wall, frame or tube refers to a unit whose behavior best approximates the typical behavior as illustrated in Fig. 2 and 3.

The need for defining these types of units is derived from the necessity to simplify the analysis. However, for most computer-aided analyses,\* the distinction between the three types of units is irrelevant.

The degree of sophistication to which a structural analysis is carried out obviously depends on the importance of a project. A wide range of approaches has been used for buildings of varying heights and importance, from simple approximate methods which can be readily carried out manually, or with the aid of a desk calculator, to more refined techniques involving computer solutions, as well as model studies.

A logical procedure for lateral load analysis is:

1. Carry out a simple preliminary analysis by longhand calculations.
2. If necessary, use a computer program to achieve more accurate results.

In view of the increasing availability of computer programs for frame analysis, longhand methods which involve simplifying assumptions and lengthy arithmetical work must be considered as obsolescent.

In this section, behavior and methods of analysis for each of the three types of units are described separately. In Section 5, structural systems composed of these units are discussed.

## 4.2—Frames

**4.2.1 Definition**—The term "frame" denotes a structure which derives its resistance to lateral loading from the rigidity of the component member connections.

**4.2.2 The components of drift**—In a frame-type structure, the lateral displacement (i.e., drift) may be thought of as consisting of two parts: one due to bending in the columns and beams, and the other due to axial deformation of the columns. As the height-to-width† ratio increases, the effect of column axial deformation assumes greater significance.

In addition to these components, yielding in the frame members or the foundation can significantly increase the lateral displacement or drift. The effect of secondary moments caused by the axial forces and the deflections ( $P-\Delta$ ) will also tend to increase the lateral deflection.

**4.2.3 Hand calculation methods**—Simplified methods of analysis for building frames are often used for purposes of preliminary estimating, or for sizing of members in order to obtain dead load forces and stiffness values for use in more refined analysis using computers. Such methods should be able to furnish rough numerical data with a minimum of effort.

Classical methods of analysis, such as the slope-deflection method or the moment distribution

\*Hereafter simply referred to as "computer analysis."  
†Width is dimension of building in the direction of the lateral force.

method and their numerous variants<sup>24,31,33</sup> have been largely superseded by similar but more refined methods using matrix formulation and suitably programmed for the computer. Simplified methods<sup>24,39</sup> used for preliminary design purposes should, in general, reduce a highly statically indeterminate structure to static determinacy by introduction of suitable assumptions on the deformations and internal force distribution, and then proceed to solve for the required member forces by statics. This process is followed in the widely-used "portal method."

The major assumption in the portal method is that points of contraflexure are located at mid-length of all columns and beams. In addition, an assumption concerning the distribution of shears in the columns of a story is made. These assumptions reduce a highly statically indeterminate problem to a statically determinate one. The method neglects the effect of axial deformation in the columns.

The assumptions associated with the portal method lead to geometric incompatibility at the joints of a frame and result in the following errors:

1. In the vicinity of any discontinuity in geometry or stiffness, such as at the base or top of the frame, or at setbacks or locations where significant changes in member stiffnesses occur, large errors in the calculated member moments may be expected. This can be particularly serious in bottom stories, where the combination of large axial forces and moments in the columns can lead to instability problems. This type of error can be partially corrected by performing more exact analyses for the localized discontinuity regions<sup>40-43</sup> or by using tabulated information on the location of inflection points in the bottom stories.<sup>42</sup>

The errors resulting from disregarding column axial deformations increase with the increase in the number of bays and the number of stories in a frame and are reflected most markedly in the moments in the exterior columns and girders of the upper stories of tall frames.<sup>40,43</sup>

2. Drift calculated on basis of moments obtained by the portal method is subject to errors of two types. First, the assumed locations of the points of contraflexure lead to predictions of drift larger<sup>44</sup> than a computer analysis, based on bending deformation only, would predict. This type of error can be partially corrected by an improvement in the column moments as discussed above. The second type of error arises due to the neglect of axial column deformation which is of major importance in tall slender structures. This error can be compensated for by adding the drift due to the column strains calculated from the axial forces in the exterior columns as obtained by the portal method.<sup>45</sup>

Another group of methods aimed at simplifying the numerical work involved in frame analysis consists in lumping the columns and beams so that a frame of several bays is represented and analyzed as a single-bay frame (substitute frame method)<sup>46,47</sup> or as a column with rotational restraints at points where beams frame into the column (equivalent column method).<sup>51,52,54</sup> This device considerably reduces the number of unknowns. These methods give better results than the portal method as far as column moments are concerned, since they require no assumption regarding the location of the points of contraflexure. The accuracy obtained with such methods, when applied to multibay frames, may vary in each case, with larger errors in the distribution of the moments to be expected in frames with widely varying member stiffnesses.

While the use of approximate methods for the lateral load analysis of frames may, by current standards of engineering practice in this country, be adequate for regular frames with a few stories or for the preliminary analysis of tall frames, the increasing availability of computer programs argues against the use of such approximate methods when more reliable solutions are obtainable.

Simplified methods, when used for the preliminary analysis of tall structures, should generally be followed by a computer analysis which includes the effects of column and axial deformations as well as bending.

For major high-rise structures, a computer analysis may be the most economical means of arriving at a reliable design.

**4.2.4 Computer programs**—A large number of digital computer frame programs<sup>48-58</sup> with varying capabilities have been developed in recent years. Some of these<sup>49</sup> which are capable of carrying out elastic analyses of either plane frames or three-dimensional reticulated structures under static loading conditions are well documented and are available from computer manufacturers. Most of the others are available for use on a fee basis or by special arrangements with the developers.

**4.2.4.1 Program features.** The more important frame program features which have relevance to lateral load analysis are discussed below.

**4.2.4.1.1 Axial deformation.** Axial deformation of columns may be important in tall, slender frames or in frames with stiff connecting beams. If axial deformation is negligible, then it is worthwhile to neglect it, both to reduce the size of a problem and to improve the conditioning of equations to be solved. While no definite rules may be given, the effect of column axial deformation will generally be important if the frame height-to-width ratio exceeds about three. Reference 24 suggests a limiting ratio of four. Axial deformation

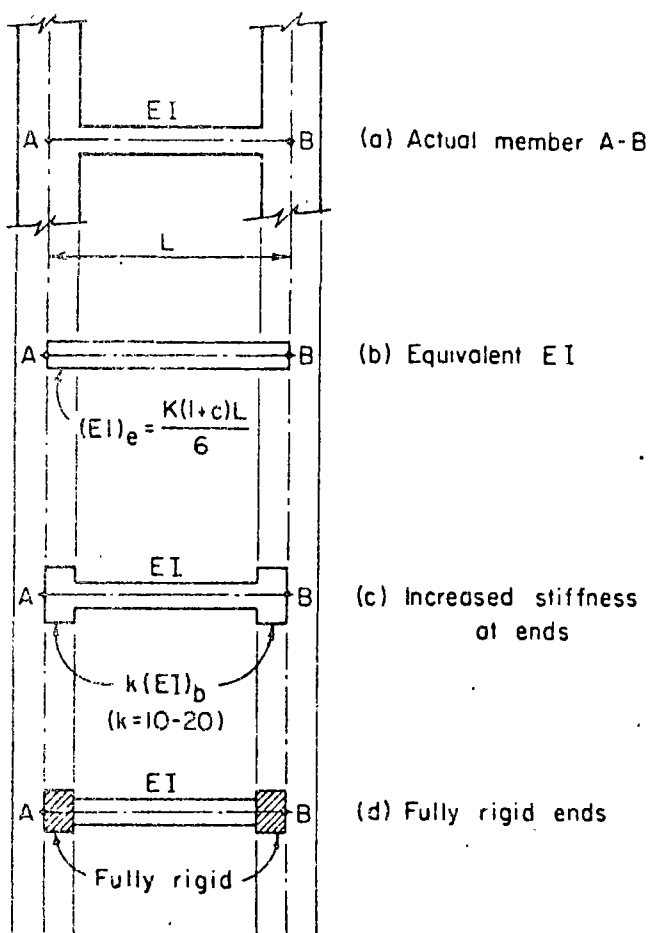


Fig. 4—Treatment of rigid joints

of beams in building frames due to applied loads is always negligible.

4.2.4.1.2 Shear deformation. Shear deformation is normally neglected.

4.2.4.1.3 Finite size of joints between members. In some cases it is realistic to assign a greater stiffness to the area within the joint between beams and columns than that assigned to the connecting members [see Fig. 4(c)]. For some facade frames and shear walls (Section 4.3) this can be more important. Three ways to do this are:

1. For symmetrical members with equal end rotations, an equivalent  $EI$  value can be used [see Fig. 4(b)].<sup>47</sup>

$$(EI)_e = \frac{K(1+C)L}{6}$$

where

- $(EI)_e$  = equivalent  $EI$
- $K$  = end rotational stiffness
- $C$  = carry-over factor
- $L$  = center-to-center span of member

where  $K$  and  $C$  are evaluated for a member with infinite flexural stiffness within the joints.<sup>50</sup>

2. Where a computer program has the capability of considering members with variable moment of inertia, the joint rigidity can be simulated by

beams or column sections as shown in Fig. 4(c). The column or beam section should terminate at the actual junction of the column and beam and a sufficiently higher moment of inertia should be assigned from the edge to the centerline of the intersection. The moments of inertia of the column and beam sections within the joint area should be increased to about 10 or 20 times the nominal column or beam moment of inertia to realistically simulate the joint rigidity. Excessive increase of stiffness in the joint area may lead to significant numerical error in the solution and should be avoided.

3. Possibly the best approach is to treat the ends of the members as being fully rigid, and then calculate the stiffness properties of the combined elements as illustrated in Fig. 4(d) before the frame analysis is undertaken. Some frame programs incorporate a finite joint facility of this type.<sup>51,58</sup>

4.2.4.1.4 Foundation movement. Ability to include elastic spring supports is a useful program feature (especially for shear wall foundations). A semirigid support can be modeled using a fictitious member if spring supports are not allowed.

4.2.4.1.5 Second order geometry effects. Two types of second order effects are:

1. The  $P-\Delta$  effect. When a frame sways laterally by an amount  $\Delta$  it must resist an eccentric moment equal to  $P\Delta$ , where  $P$  is the total vertical load at the level at which  $\Delta$  is measured. This  $P-\Delta$  effect can be significant if nonlinear material behavior is also considered.<sup>60</sup>

The  $P-\Delta$  effect may be included in an analysis using an iterative procedure<sup>61</sup> in which the sum of the  $P-\Delta$  moments in a story is replaced by a statically equivalent set of horizontal shears acting at the floor levels. Generally, the equivalent lateral loads calculated from the  $P-\Delta$  moments are small enough to be ignored, except in the case of tall unbraced frames.

2. Reduction in bending stiffness due to axial load. Axial compression loads in columns reduce their effective bending stiffness as well as increase the fixed-end moments due to lateral loads. In braced multistory reinforced concrete frames of normal proportions, the errors in column moments due to ignoring this effect will generally be less than 5 percent and can be ignored. In frames which are not braced by shear walls or similar elements, the changes in flexural stiffness due to axial loads can result in a significant increase in lateral deflection. Simple rules to determine when these effects should be included in a computer analysis are needed.

A program which includes this effect can be used to investigate the stability of a frame. The requirements of such an analysis are outlined in Reference 62. Normally, such an analysis involves an iterative procedure in the determination of



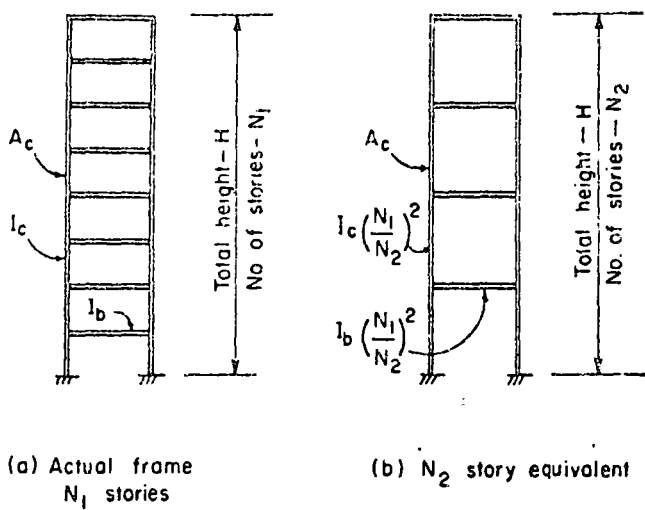


Fig. 5—Reduction in number of stories for analysis

the final frame configuration under a particular loading. This process can be lengthy and may not be justifiable for the majority of structures.

**4.2.4.1.6 Nonlinear behavior.** The consideration of the nonlinear behavior of structures arising from nonlinearity of the stress-strain curve for concrete, particularly under large deformations, may become important in seismic analysis. Nonlinearities in structural response, whether arising from material properties as for concrete, from loading conditions (e.g., axial load effects on bending stiffness) or geometry (e.g.,  $P-\Delta$  moments) are best handled by numerical iterative and/or step-by-step procedures.

**4.2.4.1.7 Dynamic behavior.** See Section 2.3.

**4.2.4.2 Reduction in size for computer analysis.** Even with large-capacity computer programs, some frames require an uneconomically long time to analyze because of a large number of joints. In such cases, it is advisable and reasonably reliable to reduce the number of stories in the analysis as illustrated in Fig. 5.<sup>47</sup> A 50-story building, for example, can often be realistically reduced to an equivalent 10-story building with acceptable results.

Similarly it may be necessary to reduce the number of bays.<sup>32,34</sup> This should not be done if axial deformation is important, however.

**4.2.5 Effect of masonry walls and partitions—**In many frame-type structures, walls and partitions are made of precast or masonry units. Although such elements are often considered to be nonstructural and perhaps—because of very light reinforcement—may not contribute significantly to the ultimate strength of the structure, they generally may be expected to contribute to the lateral stiffness of the structure under working load conditions. Studies<sup>64,66</sup> have indicated the possibility to taking full advantage of these partitions by constructing them to ensure their par-

ticipation in resisting wind loads, with particular reference to the satisfaction of the drift limitation. An approach<sup>63-65</sup> to this problem which lends itself well to currently available computer frame analysis programs considers the contribution of an infilling (or wall enclosed in a frame) as represented by the action of a diagonal across the enclosing frame having an effective width which is a function of the relative stiffness of the enclosing members and the infilling.

The effect of walls and partitions on the response of structures subjected to earthquake motions should likewise be considered. Walls filling the space between frame members not only tend to increase the stiffness (and the damping) of a structure and hence shorten its fundamental period of vibration, but may altogether alter the mode of response of the structure and the resulting distribution of forces among the different frame components. Hence, it may be dangerous to ignore infilled partitions. When the effect of partitions is included in an analysis, however, it is necessary also to consider the behavior of the structure when some or all of the partitions are destroyed.

**4.2.6 Effective width of slab—**In the analysis of a frame, an “effective width” of the slab acting in conjunction with the other elements of the frame is generally assumed.

In a typical frame consisting of columns and beams, with the floor slabs cast monolithically with the beams or united by composite action, the effective width of slab is specified by ACI 318-63.

Structures consisting of flat slabs or plates and columns have been analyzed as frames by considering strips of the slabs joining the columns as beams. The effective width of the slab would appear to be a function of the relative dimensions of the column section with respect to the in-plane, as well as transverse spans of the slab, and the distribution of reinforcement in the slab. ACI 318-63 allows the consideration of the entire slab width (between adjoining bay center lines) as effective.

Relatively little<sup>47</sup> has been done in ascertaining the variation of the effective width of slabs with the pertinent parameters. Further studies in this direction are clearly indicated.

### 4.3—Shear walls

**4.3.1 Reinforced concrete walls** are often introduced into multistory buildings to resist lateral forces when frame systems alone are insufficient or when it is convenient to make partitions load bearing. The calculation of lateral stiffness and stresses in a single shear wall without openings involves simple bending theory only. The term “shear wall” as used here covers elevator shafts, stairwells and central core units, in addition to plane walls.

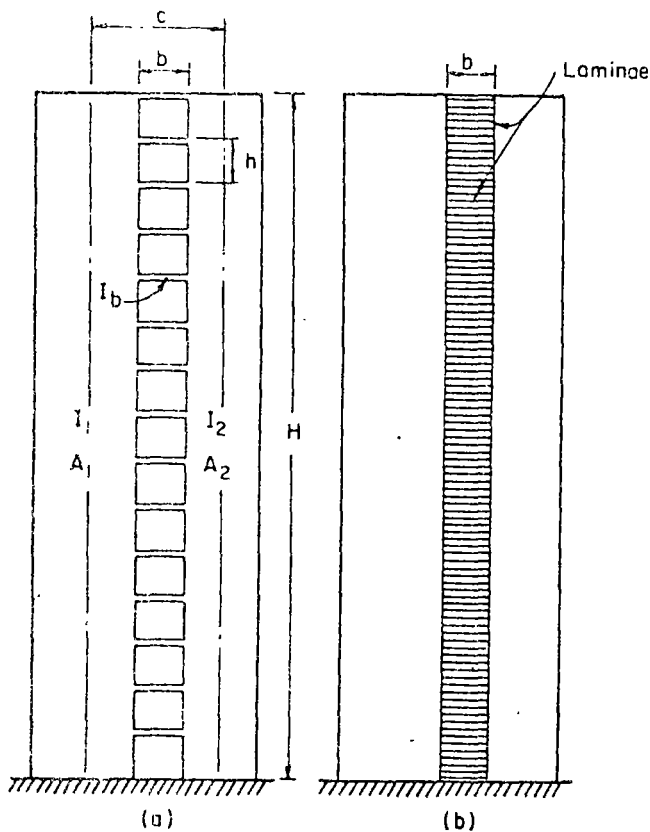


Fig. 6—Coupled shear walls

Walls with openings present a much more complex problem to the analyst. Openings normally occur in vertical rows throughout the height of the wall and the connection between the wall sections is provided by either connecting beams which form part of the wall, or floor slabs, or a combination of both.

The terms "coupled shear walls," "pierced shear wall" and "shear wall with openings" are commonly used to describe such units (Fig. 6).

When does coupling action become important? If openings are very small, their effect on the overall state of stress in a shear wall is minor. Larger openings have a more pronounced effect and, if large enough, result in a system in which typical frame action predominates. The degree of coupling between two walls separated by a row of openings has been conveniently expressed in terms of a geometrical parameter  $\alpha$ ,\* which gives a measure of the relative stiffness of the connecting beams with respect to that of the walls. The parameter  $\alpha$  appears in the basic differential equation of the so-called continuum approach.<sup>68-71</sup> A study by Marshall<sup>67</sup> indicated that when the dimensionless parameter,  $\alpha H$ , ( $H$  being the total height of the walls) exceeds 13, the walls may be analyzed as a single homogeneous cantilever. When  $\alpha H < 0.8$ , the walls may be treated as two separate cantilevers. For intermediate values of  $\alpha H$  (i.e.,  $0.8 < \alpha H < 13$ ), the stiffness of the connecting beams should be considered.

4.3.2. Analytical methods for coupled shear walls and their limitations—Prior to the early 1960's little attention was paid to the development of analytical techniques for shear walls. Early papers by European authors introduced a period of increased activity in shear wall research which led to the first international conference concerned with the subject in 1966. Papers published before 1966 were reviewed for that conference.<sup>72</sup> Since that time, considerably more research information has become available.

#### 4.3.2.1 Continuum approach

1. Description of basic theory. This technique was first applied to the analysis of coupled shear walls by Beck,<sup>55</sup> but probably the most comprehensive treatment has been by Rosman.<sup>60,73,74</sup> While it has many limitations, the continuum approach can be used to illustrate the basic behavior of coupled wall systems. Hand analysis is feasible and it can be programmed for a small computer.

In its most basic form the theory assumes that elastic structural properties of the coupled wall system remain constant throughout, that both walls are founded in a common, stiff footing and that the points of contraflexure of all beams are at midspan.

For this method, the individual connecting beams [Fig. 6(a)] are replaced by a continuous connection of laminae [Fig. 6(b)]. Under horizontal loading, the walls deflect and induce shear forces in the lamina. A second order differential equation is set up and solved to give shears, moments, and deformations throughout the wall. Several papers use this approach with differing choice of variables, all yielding essentially the same results.

2. Limitations and other variables. Very little laboratory test experience is available and is limited to plastic models.<sup>75-79</sup> These tests have generally confirmed the accuracy of the continuum approach for walls conforming to the basic assumptions of the method at least prior to cracking or inelastic action. In practice, many of these assumptions do not hold.

Possible sources of inaccuracies of the method are:

- Local wall deformations<sup>85,86</sup>
- Greatly differing wall stiffnesses<sup>97</sup>
- Reduction in stiffness of coupling beams due to cracking<sup>88</sup>

The method has been modified to account for certain special cases:

- Varied lower story and foundation conditions<sup>69,80</sup>
- Varying wall thickness<sup>81-83</sup>
- Inelastic analysis<sup>77,84</sup>

In other cases, no direct solution is available through the continuum approach.

\*Having units of "1/length."

**Loading:** Solutions are available for uniformly distributed loads, triangularly distributed loads and for concentrated point loads at the top of the building. Perhaps the most readily available and convenient are those developed by Coull and Choudhury.<sup>70,71</sup>

**Inelasticity:** Inelastic theories for the analysis of shear walls have not been fully developed although the potential simplifications and economies are great. In some cases, elastic analysis will result in moments which cannot be developed by beam sections restricted in size by architectural reasons. The possibility of designing the beams for ultimate moments in proportion to the elastic moment distribution has been suggested<sup>77</sup> and recently a theory has been developed for the elasto-plastic analysis of coupled shear walls.<sup>88</sup> An ultimate strength analysis<sup>84</sup> proposed earlier cannot be applied to coupled walls which vary in stiffness because it does not consider compatibility of deflections. The practical application of this latter approach will have to await experimental verification.

**Summary:** The continuum approach has received a great deal of attention and would seem to have reached a stage where further developments in analytical methods, while of theoretical interest, are not likely to result in greatly improved design techniques.

The major limitations of the technique arise from the basic assumptions regarding the regularity of dimensions, opening locations and structural properties throughout the height of the coupled wall system. Whenever the regularity of the wall system is broken, whether through changes in wall thickness or concrete strength, or changes in the number or location of bands of openings, the analysis becomes considerably more complex. Even the basic theory for the simple case shown in Fig. 6(a) is sufficiently lengthy for manual computations that simplifications have been proposed either through the use of graphs<sup>68,70,71,50</sup> or simplifying assumptions concerning the integral shear force<sup>83</sup> or lamina forces.<sup>77</sup>

**4.3.2.2 Frame analysis.** Analytical methods employing computers are not only more accurate but are considerably more flexible and can take into account many more variables than the continuum approach.

For analysis of multistory shear walls, a good computer technique considers a frame with finite joints<sup>78,80</sup> in which the wall is analyzed as a frame except that the finite width of the columns in comparison with the beams is recognized. The analogy, in which the beams are assumed to be infinitely stiff from the centerline of the column (wall) to the edge of the actual opening, is illustrated in Fig. 7(b) (see also Section 4.2.4). The calculation can take into account changes in wall

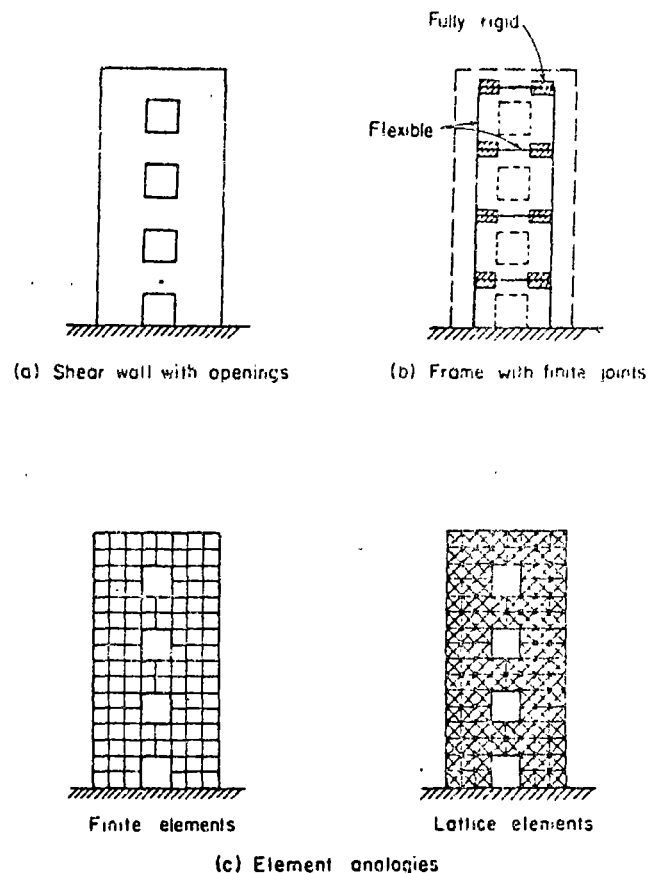


Fig. 7—Element and frame analogies

thickness, story height and concrete strength at various locations within the height of the building.

**4.3.2.3 Element analysis.** The technique known as finite element analysis considers the structure to be divided into a mesh of two dimensional elements in plane stress. By imposing the appropriate boundary conditions, a solution can be obtained by matrix techniques which involve the solution of many simultaneous equations. Generally, the accuracy depends on the fineness of the mesh used. This in turn affects the computer running costs. Numerous finite element programs are in existence and it seems only a matter of time and development effort before their cost and efficiency justify wider use by structural engineers.

Other types of "elements" can also be used for shear wall analysis. Lattice elements, consisting of rods, rather than plates, can be employed using existing computer programs. Again, the better the lattice mesh fits the geometry of the structure being analyzed, the more accurate the analysis, but also, the greater the running costs due to increased computer time.

**4.3.3. Width of slab strip to be considered in frame action—**The designer faces a special problem when designing coupled walls connected by a slab only. What width of the slabs is to be considered effective as the connecting beam?

Little research has been concerned with this important aspect of shear wall design; in fact,

available test experience is contradictory. Values less than the full width,<sup>90</sup> equal to the full width<sup>77</sup> and greater than the full width<sup>79</sup> have all been shown to be valid under different circumstances. Clearly, there are many factors affecting the behavior of more complex wall systems which cannot yet be handled easily by theoretical means. The consequences of choosing an effective width should be fully understood by the designer (see author's closure to discussion of Reference 77).

**4.3.4 Design of shear walls**—All portions of a shear wall should be designed to resist the combined effects of axial load, bending and shear determined from a rational analysis of the structural system.

Flexural reinforcement should be provided in accordance with the requirements of the ACI Building Code.\* Walls with proportions such that a linear strain distribution does not apply should be designed as short cantilevers.

Design of shear walls for shear should be in accordance with Section 11.16, "Special Provisions for Walls," proposed revision of ACI 318-63.<sup>30</sup>

Minimum amounts of reinforcement in both the vertical and horizontal directions should be those required by flexural calculations or those specified in the provisions for shear strength.

In addition to providing the necessary amounts of reinforcement, it is essential that reinforcement details in every shear wall receive careful attention to insure optimum performance.

Contrary to the common opinion and the misleading name, the strength of shear walls is governed by flexure and not by shear, except for very low and long walls. Shear walls of multistory buildings behave like slender cantilevers. Only extremely heavy reinforced columns at the ends of thin shear walls (dumbbells) can force a shear failure under heavy lateral loads. Laboratory tests of shear walls in progress verify the above points.

The tensile forces resulting from the most severe combination of vertical loads and overturning moments due to lateral loads must be anchored into the foundation medium unless they can be overcome by gravity loads mobilized from neighboring elements. This is discussed more fully in Section 7.3.1.

#### 4.4.—Tubes

The type of unit considered here has a closely spaced exterior column system which simulates a perforated rectangular hollow tube and is shown in Fig. 8. This has been called a "framed tube"<sup>91</sup> and this term is adopted here.

**4.4.1 Approximate method of analysis**—In a sufficiently tall structure, say over 30 stories, the framed tube can be approximately analyzed for preliminary design by considering two distinct types of structural behavior as follows:

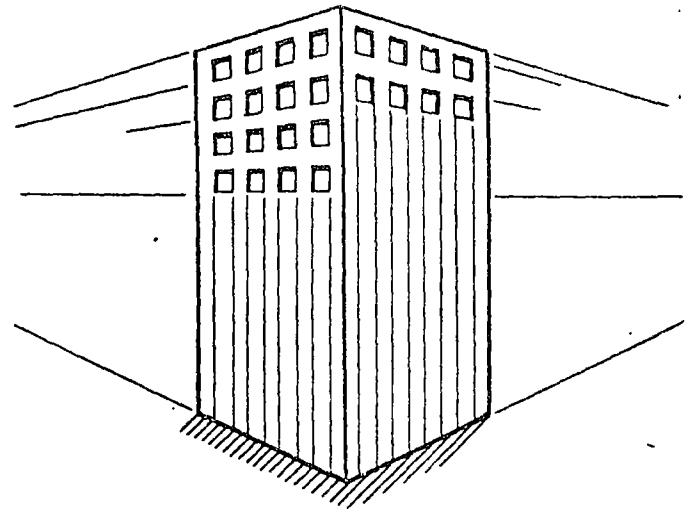


Fig. 8—Framed tube—Perspective view

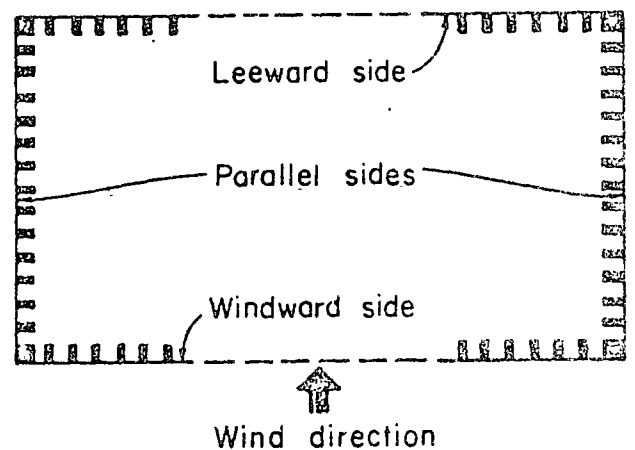


Fig. 9—Assumed wind direction in equivalent framed tube

1. Frame behavior of the two walls parallel to the direction of wind. The framed tube has to resist the shear force due to lateral load through bending of the beams and columns of the two frames parallel to the wind load as shown in Fig. 3. For preliminary analysis the bending moments in these members can be determined by the portal method (Section 4.2.3).

2. Tube behavior of the entire structure. The cantilever tube type behavior becomes apparent in studying the effects of the overturning moments due to lateral load on the whole structure. For this method of analysis the exterior column system can be considered as part of a rigidly diaphragmed hollow tube.

Because of the shear lag across the windward and leeward sides of the tube resulting from the flexibility of the framing elements (see Fig. 3), the columns on these sides, particularly those away from the corners, cannot be considered to be fully effective in resisting the overturning moment. To

\*Chapters 15 and 16 of ACI 318-63 or Chapters 9 and 10 of the proposed revision of ACI 318-63.

account for this, the effective plan configuration of the equivalent tube may be reasonably considered as consisting of two channels, with a certain proportion of the columns in the windward/leeward sides making up the channel "flanges," as shown in Fig. 9. A rule of thumb used by some designers is that for preliminary design, the channel "flanges" should not be more than (1) one-half the depth of the web (walls parallel to wind), (2) one-third the width of the windward-leeward sides, or (3) 10 percent of the height of the building, whichever is smallest.

This approximate rule has generally given reasonable values of shears, moments and axial forces in the exterior columns consistent with those obtained from a theoretically exact computer analysis.

The overturning moment will produce axial forces in the closely spaced columns in the two channels and shear forces in the connecting spandrels. The preliminary analysis for the axial forces in the columns and the shears in the connecting spandrel may be based on classical beam theory.

The shears in the connecting beam as determined by the preliminary design method will generally indicate a reasonably uniform shear force in the spandrel beams along the two exterior walls parallel to the wind force. The moments resulting from these shears may be used for the preliminary design of the spandrel beams. The preliminary design of the closely spaced columns should be based on the known dead load and live load forces together with the axial force due to overturning in combination with the moments caused by story shears.

**4.4.2 Lateral deflection**—The primary resistance to deflection comes from the walls parallel to the wind forces. A usual proportion is 70 percent due to frame action in the parallel walls and 30 percent due to axial forces in the columns.

**4.4.3 Computer analysis**—A more accurate assessment of the force distribution in a framed tube under lateral loads can be obtained by analyzing it as a space frame. Most space frame computer

programs<sup>49</sup> allow for six degrees of freedom per joint and hence axial deformation which is important in this type of structure will be accounted for.

Because the depth-to-span ratio of elements in a framed tube is generally greater than usual, it is advisable to consider the effect of the finite width of the frame members in developing the analytical model (see Section 4.2.4).

## 5—STRUCTURAL SYSTEMS

### 5.1—General

Any of the three types of units described in Section 4, singly or combined, form a *structural system* (for lateral load). Generally, as the height of a building increases, a point is reached beyond which the lateral sway under wind loading, and hence considerations of stiffness and not strength, will govern the design of the structural system. The point, in terms of height or number of stories of average height, at which this condition is reached depends on the type of structural system. Ideally, that system should be chosen which does not require an increase in the sizes of the members beyond that required to support the design vertical loads, i.e., a "premium free"<sup>51</sup> building.

Table 1 is presented to help the designer choose the best structural system for a particular building. The ranges of applicability shown may vary somewhat depending upon the use of the building, the story heights and the design live, wind, and earthquake loadings.

Some features common to the analysis and design of all such systems are listed below.

**5.1.1 In-plane action of floor slabs**—The floor slabs distribute load to the lateral load resisting units, mainly through forces in their own plane. The actual in-plane deformation of the floors will seldom have a significant effect on this distribution and the assumption that the floors are fully rigid in-plane is widely used.

**5.1.2—Out-of-plane bending of floor slabs** can be important. A very small resistance to bending in a

TABLE 1—GUIDE TO SELECTION OF STRUCTURAL SYSTEMS

Structural system	Section in report	Number of stories*		Seismic behavior
		Office buildings	Apartment buildings, hotels, etc.	
Frame	5.2	Up to 15	Up to 20	Very good
Shear wall (egg-crate)	5.3		Up to 150	Good
Staggered wall beam	5.4		Up to 40	Good
Shear walls acting with frames	5.5	Up to 40	Up to 70	Good
Single framed tube	5.6	Up to 40	Up to 60	Very good
Tube-in-tube	5.7	Up to 80	Up to 100	Good

\*The values given here are based on present day practice as well as trends indicated by current practice.

beam connecting two vertical units can have a significant effect on the behavior of the entire system. It is most important to ensure that a connecting member possesses the necessary flexural strength. Slab-column joints in flat-plate structures should be given careful attention.

5.1.3—The effect of torsion should be considered if the layout is unsymmetrical or if the stiff vertical units are located close to the center of the structure. Some earthquake codes require that a structure be capable of resisting a specified torsional loading even if the applied lateral load theoretically does not cause torsion (see Reference 17, p. 71).

Any combination of frames, walls or tubes can be idealized as a space frame. If a space frame computer program which considers all six degrees of freedom at each joint is used in the analysis, any torsional effects will automatically be accounted for. Simplified methods of calculating torsional effects due to actual or accidental<sup>16</sup> eccentricities may also be used.<sup>17</sup>

5.1.4 *Space frame analysis*—One of the main problems here is to idealize the in-plane action of the floor slabs. Four possible approaches are:

1. If a conventional space frame program is used, the floors can be modeled by interconnected members of sufficient stiffness to represent the in-plane action and the out-of-plane bending action. The size of these members could be based on plane stress framework analogies.<sup>92,93</sup> High finite rigidity, however, is a main source of numerical error in the solution.

2. Treat the floor as fully rigid in-plane (i.e., all in-plane floor movements are defined by rigid

body deformations.)<sup>94-96</sup> This device significantly reduces the order of solution and enhances the numerical accuracy.

3. Idealizing the floor slabs as horizontal beams in bending<sup>97</sup> appears to have limited applicability.

4. To divide the floors into finite elements is a possible solution but hardly practical for a multistory structure.

Space frame analysis of multistory buildings can be costly and is presently used only in very unusual cases. The following discussion will be confined to approximate analysis techniques which assume full in-plane rigidity of the floor slabs.

5.1.5—The effect of relative deflections due to temperature and creep can be important, as discussed in Section 3.2.

5.1.6— $P-\Delta$  moments may be significant in tall structures. A method of including these in analyses is described briefly in Section 4.2.4.1.5.

## 5.2—Frame buildings

5.2.1 *Methods of analysis*—If all the plane frames parallel to the direction of loading are the same, the total lateral load in that direction can be distributed equally to each frame. The frames can then be analyzed by the methods discussed in Section 4.2. Alternatively, a distribution of shear to each column based on relative column and beam stiffnesses<sup>98</sup> or column stiffness<sup>47</sup> can be used. Parallel frames (with no torsion) can be idealized in a manner similar to the shear wall-frame method illustrated in Fig. 10.

5.2.2 *Range of applicability of frame-type structures in relation to number of stories*—Although plane frame-type buildings of up to 60 stories have

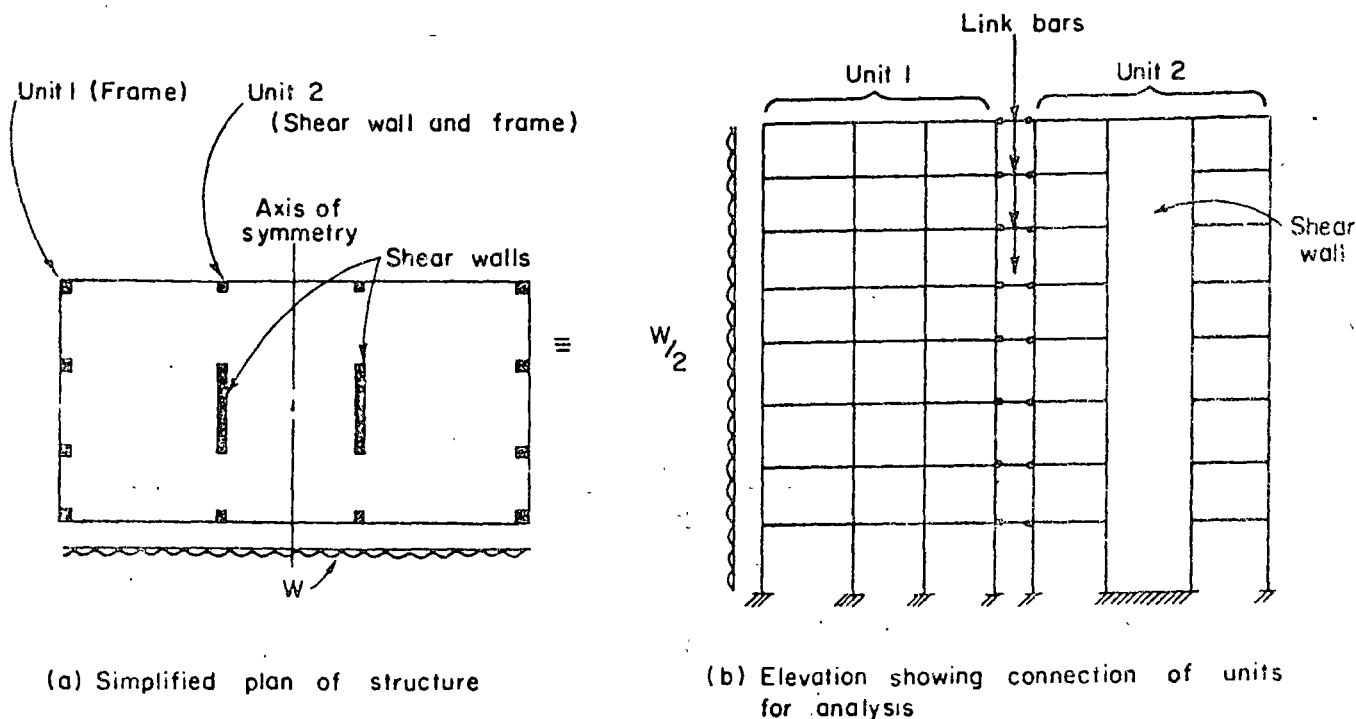


Fig. 10—Idealization for plane frame analysis

been built," economic considerations tend to limit the height of such structures to about 10 to 15 stories.<sup>11</sup> This limitation has become apparent with the increasing use of lightweight elements or glass for walls and partitions. For buildings of greater height, shear walls, acting alone or in conjunction with adjoining frames, generally provide a more efficient solution.

### 5.3—Shear wall buildings

The structural system of a shear wall building (also known as egg-crate or crosswall construction) consists of a series of parallel shear walls which provide both lateral load resistance and support for vertical load (see Fig. 11). Stability in the longitudinal direction is normally provided by elevator shafts, additional shear walls, etc.

**5.3.1 Methods of analysis**—The proportion of the total lateral load which each wall withstands depends on its stiffness relative to that of all walls or coupled wall systems of the building if the relative stiffnesses of the walls remain constant throughout the height of the building. The lateral stiffness of each wall or coupled wall can be based on the deflection at the top when subjected to a uniformly distributed unit lateral loading.<sup>45</sup> Calculation of stiffnesses can be made quickly, through the use of tables.<sup>70,71</sup> The method of distributing the load is described in References 100 and 101.

This procedure may yield inaccurate results when the relative stiffnesses of the walls do not remain constant over the height of the structure.<sup>53,102</sup> Another procedure based on the continuum approach (Section 4.3) has been suggested.<sup>103</sup> The use of a plane frame program with walls connected by "link bars" (as illustrated in Fig. 10) is advantageous for irregular configurations. Once the loading on each wall is determined, wall stresses are calculated (Section 4.3) and thicknesses modified, if necessary.

**5.3.2 Layout**—In apartment, hotel and other residential buildings, walls are customarily spaced between 15 and 24 ft apart with floor slab thicknesses proportioned according to span. Spans up to 32 ft have been used with prestressed concrete slabs.

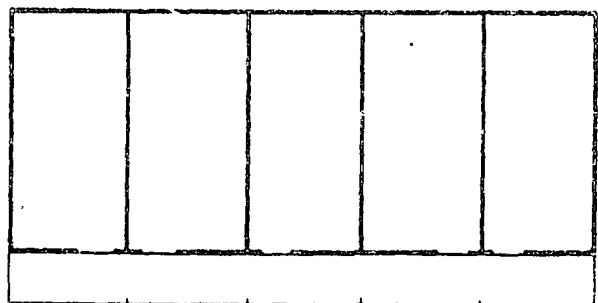
In current North American practice, shear wall buildings are cast-in-place but trends to systems building now becoming evident are leading to an increase in the number of buildings being constructed using large panel, precast components for floors and/or walls. The joint detailing in such precast construction is most important and the possibility of complete structural collapse due to the failure of one joint or element must be considered.<sup>104</sup> The European Concrete Committee has recently issued detailed recommendations for the design of precast shear wall buildings.<sup>105</sup>

**5.3.3 Range of application**—The shear wall structure is used only in buildings where permanent partitions and the lack of flexibility for future modifications can be tolerated. Its major advantages lie in the speed of construction, low reinforcing steel content and acoustical privacy.

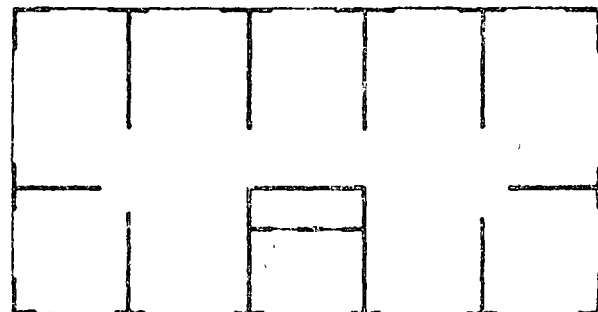
This type of structure is well suited for construction in earthquake areas and has performed well during recent disasters.<sup>106</sup> While costs vary from city to city, shear wall buildings usually become economical as soon as lateral forces affect the design and proportioning of flat plate or beam and column structures. Buildings of up to 70 stories have been built using shear walls.

### 5.4—Staggered wall-beam system

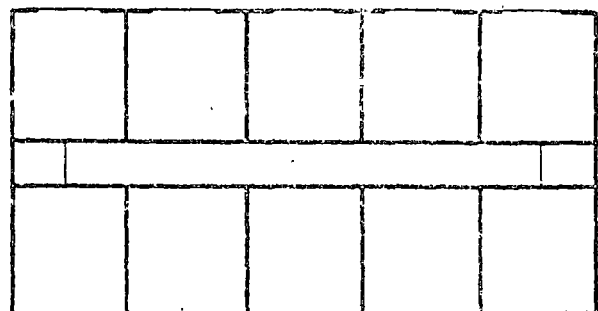
A recently introduced structural framing system is the so-called "staggered wall-beam system."<sup>107,108</sup> The basic concept is illustrated in Fig. 12. The system uses story-high solid or pierced



(a) No openings in walls: access from outside



(b) Coupled walls



(c) Longitudinal corridor walls

Fig. 11—Typical layouts of shear walls

walls extending across the entire width of the building and supported on two lines of columns placed along exterior faces. By staggering the locations of these wall beams on alternate floors, large clear areas are created on each floor, yet the floor slabs span only half the spacing of the wall beams, resting on the top of one and hung from the bottom of the next.

The wall-beam building is suitable for most types of multistory construction having permanent interior partitions, such as, apartments, hotels, student residences, etc.

An advantage of the wall-beam building is the ease with which a large open area can be created in the lower floors when needed for parking, commercial use, or even to allow a highway to pass under the building.

5.4.1—*Method of Analysis*—In the longitudinal direction, the floors act as continuous one-way slabs either resting on or hung from alternate wall beams. The slabs, in combination with the wall beams, form a concrete I-beam.

To understand the behavior of the system under lateral load, it is essential to consider the combined action of adjacent transverse frames as shown in Fig. 13. Assuming that the floor slabs act as infinitely stiff horizontal diaphragms, all points on any one floor will have equal horizontal deflections under a symmetrical loading. Considering each transverse frame separately, it would appear

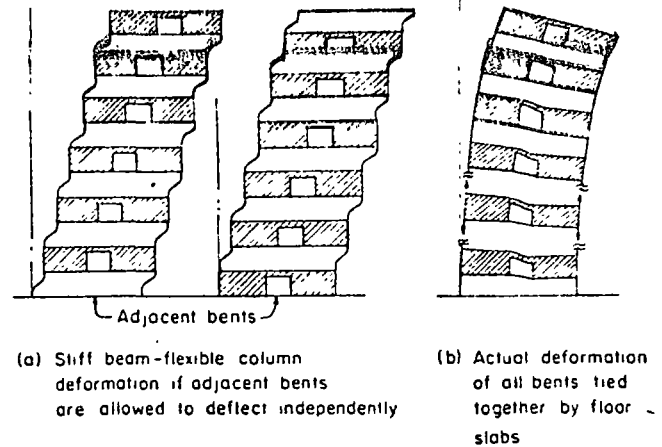


Fig. 13—Deformation of staggered wall-beam frames under transverse lateral load

at first that each bent would undergo the stiff beam-flexible column behavior illustrated in Fig. 13a. However, if the adjacent bents are also considered, the horizontal deflection at each floor level would not be equal, so that this behavior is not possible. The deflected shape must, therefore, be of the form shown in Fig. 13b, which results in equal deflections at each floor with the columns in single curvature—a behavior similar to that of shear walls with openings.

With the staggered wall-beam structure behaving essentially as a vertical cantilever beam under lateral loads, the columns are subjected to a predominantly axial loading. The absence of sizeable bending moment in the columns allows these to be oriented more advantageously by having their longer sides parallel to the long side of the building. Thus oriented, they can offer greater resistance to horizontal loads in the longitudinal direction.

Lateral loads applied in a longitudinal direction of the building can be handled in a number of ways. Together with the floor slabs, the outside columns constitute a frame which would be sufficient to carry the horizontal loading in a building of about 15 stories. For higher buildings, this frame could be stiffened by the introduction of shallow spandrel beams at the column lines or by reinforced concrete utility cores.

### 5.5—Shear walls acting with frames

Since the late 1940's, the use of shear walls to resist lateral load in high-rise buildings has been extensive. Many frame structures cannot be efficiently designed to satisfy lateral load provisions without the aid of shear walls.

The main function of a shear wall for the type of structure being considered here is to increase the rigidity for lateral load resistance. Shear walls also resist vertical load and the difference between a column and a shear wall may not always be ob-

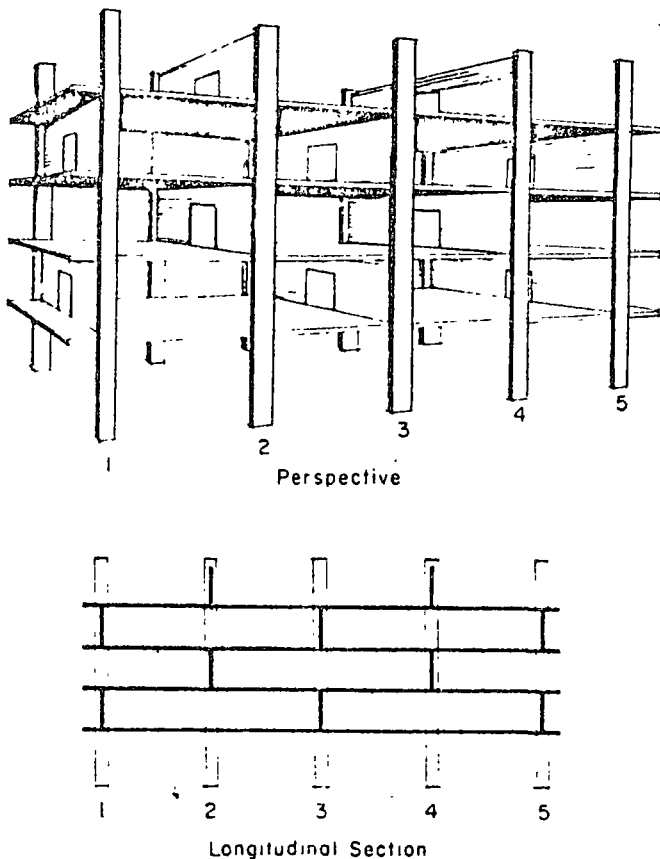


Fig. 12—The staggered wall-beam system



vious. Two distinguishing features are: (1) the shear wall has a much higher moment of inertia (about its major axis) than a column; and (2) the shear wall has a width which is not negligible in comparison with the span of adjacent beams. The moment of inertia of a shear wall would normally be at least 50 times greater than that of a column, and a shear wall would be at least 5 ft wide. 1,50.m

5.5.1 Behavior under lateral loads—The difference in behavior between walls and frames (Section 4.1) results in non-uniform interacting forces between these elements when they are connected together by floor slabs. A common assumption is to neglect the frame and assume that all the lateral load is taken by the shear walls. This may not always be a conservative procedure, and it is recommended that the contribution of the frame be considered in the analysis.

5.5.2 Method of analysis—In Table 2 published methods suitable for hand calculation are listed. Of these methods, the use of the charts of Ref-

ences 47, 109, and 110 or the method described in Reference 45 are the only approaches presently available which are both simple and reasonably flexible. The methods described in References 111 and 112 do not involve lengthy calculations but their limitation to constant properties with height lessens their usefulness. The amount of labor involved in any of the other methods listed in Table 2 makes them impractical for modern use.

If the frames take only a small proportion of the lateral load, a simplified analysis may be adequate. When further analysis is required, a computer program should be used (see Table 3).

Where torsion may be neglected, structures can be idealized as shown in Fig. 10 and a plane frame program used.<sup>10,52,58</sup>

Two important factors with respect to plane frame modeling are:

1. Extremely high moment of inertia of the shear wall. If the shear wall stiffness is extremely high compared to the stiffness of columns of the frames,

TABLE 2—HAND METHODS OF ANALYSIS FOR SHEAR WALL-FRAME INTERACTION

Reference	Features included							Calculations required
	X		X	X	X	X	X	
Khan and Sbarounis <sup>47</sup>	X		X	X	X	X	X	No sway moment distribution or slope deflection analysis of frame; calculation of deflection for frame and shear wall; iterative process
Parme <sup>42, 109, 110</sup>					X	X	X	Set of simultaneous difference equations of order equals number of stories; form equations simplifies the solution
Gould <sup>113</sup>				X	X	X		As Parme: method of solving equations not described
Rosenblueth and Holtz <sup>114</sup>		X	X		X			Successive approximations to interacting forces
Cardan <sup>111</sup>		X	X	X				Substitution in equations; no simultaneous equations or iteration
Rosman <sup>112</sup>			X					As Cardan
McLeod <sup>45</sup>	X		X		X			

X means YES.  
Blank means NO.

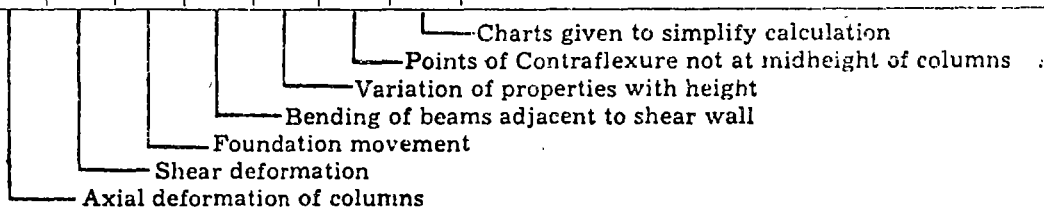


TABLE 3—CLASSIFICATION OF METHODS OF ANALYSIS OF INTERCONNECTED SHEAR WALLS AND FRAMES

Method	In-plane deformation of floors	Solution technique	Reference	Use
Plane frame	Rigid	Hand	See Table 2	Use for preliminary analysis; when there is no torsion or in-plane deformation of floor slabs
		Computer	41, 103	Use when there is no torsion or in-plane deformation of floor slabs
Rigid floor method (with torsion)	Rigid	Computer	84, 85, 86, 104	Use when torsion is important
Floors act as horizontal beams	As beams		87	Use as for space frame; cannot be used with irregular layouts
Space frame	Divide into elements		46	Use when torsion and in-plane deformation of floor slabs are important

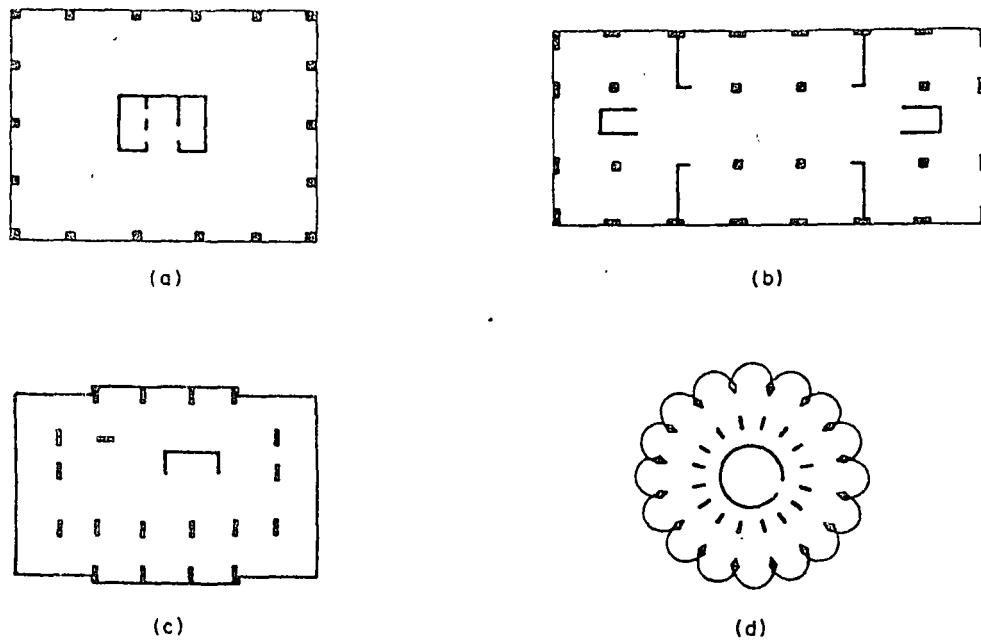


Fig. 14—Typical layouts of high-rise buildings with shear wall-frame interaction

there may be a possibility of ill-conditioned stiffness matrices and significant round-off errors. Here, the number of significant digits used in the calculations is important.

2. It will often be necessary to account for the finite width of the shear wall as described in Section 4.2.4 under "Finite Size of Joints." If torsion is to be considered, a comprehensive space frame program can be used as discussed in Section 5.1.3.

**5.5.3 Layout of frames and shear walls**—For office buildings the most common arrangement is to have a central core for services, elevators, etc., with a column-free interior between the core and the facades [Fig. 14(a)]. Buildings of this general plan which have laterally stiff facades fall under the tube-in-tube classification of Section 5.6. By definition of the system being considered in this section, therefore, the core of the layout in Fig. 14(a) may take a major proportion of the lateral load.

With apartment buildings, the layout, and hence the degree of interaction between frames and walls, can be much more varied [Fig. 14(b), 14(c), and 14(d)].

**5.5.4 Methods of construction**—The requirements of strength, stiffness, and ductility favor cast-in-place construction. The strength of conventional joints between columns and flat plate floors is low and can only be relied on to a limited extent for resisting lateral load, hence the need for shear walls in flat plate buildings of significant height. To enhance this joint stiffness, drop panels or beams can be added or the slab thickness increased throughout. The floor-column joints of lift-slab structures are not normally assumed to participate in lateral load resistance.

Precast systems are attractive from the point of view of fabrication and erection. A common problem is providing adequate continuity between abutting elements.<sup>104</sup> The incorporation of post-tensioning in precast systems can greatly enhance their ability to carry lateral loads.

### 5.6—Single framed tube

This system, described in Section 4.4, was first applied on the design of the 43-story DeWitt Chestnut Apartment Building in Chicago (1963). From the viewpoint of construction economy, the framed tube compares favorably with the normal shear wall type of construction. The closely spaced column system also serves as the window wall system, thus replacing the vertical mullions for the support of the glass windows. The elimination of the need for a separate system of metallic mullions to support the curtain wall can, of itself, often justify the use of this structural system.

In the framed tube system the exterior column spacing generally ranges from 4 ft to a maximum of about 10 ft, center-to-center. The spandrel beams interconnecting these closely spaced columns generally vary from 2 ft to about 4 ft in depths.

As in the design of all framed structures, an optimum ratio of column-to-beam stiffness should be aimed for to achieve an efficient vertical and lateral load resisting system. In the DeWitt Chestnut Apartment Building, the columns were spaced at 5 ft 6 in. on centers and the spandrel beams were 2 ft deep.

**5.6.1 Methods of analysis**—See Section 4.4

**5.6.2 Range of applicability**—A number of framed tube type concrete buildings, ranging from 20 to 50 stories, have been built and have proved to

be architecturally desirable and economically successful. For the framed tube system, experience indicates that the premium, in terms of increased member sizes, to be paid for additional height increases rapidly beyond about 40 stories, in the case of apartment buildings. For taller buildings, it may be more economical to provide additional shear resisting elements, such as interior shear or core-walls. For office buildings, it is generally better to use the tube-in-tube system described in the next section.

### 5.7—Tube-in-tube

For tall office buildings where there is a reasonably large service core, it is generally more advantageous to use a shear wall enclosing the entire service core as part of the lateral load resisting system.

The need for column-free office spaces makes the framed tube with core walls a natural solution. The resulting structural system, consisting of an inner tube formed by the core walls and an outer tube formed by the closely spaced column-spandrel beam grid, may be called the "tube-in-tube" system. In most of the recently built office buildings, the clear span between the core walls and the exterior framed tube varies from 35 to 40 ft.

The tube-in-tube system combines the advantages of both the framed tube structure and the shear wall type structure. The shear wall inner tube greatly enhances the structural characteristics of the exterior framed tube by reducing the shear deflection of the columns in the framed tube. The tube-in-tube system is a refined and unique version of the shear wall frame interaction type structure.

## 6—ISOLATION TECHNIQUES FOR EARTHQUAKE RESISTANCE

Recently, new systems for earthquake resistance have been proposed which are entirely different from the present design philosophy. In contrast to the present philosophy of designing an entire building to withstand the distortions resulting from earthquake motions, the new "adaptive" systems are aimed at isolating the upper portions of a tall structure from destructive vibrations by confining the severe distortions to a specially designed portion at the base of the structure. The concept is discussed in Reference 115, which also describes a possible isolation system in broad terms. The system is intended to accommodate severe earthquake distortions in a "soft" first story of the building, with the structure above subjected only to appreciably lower predetermined forces.

The proposed system limits maximum dynamic response forces to which the superstructure in a multistory building is subjected during an earthquake by designing the columns in the soft story to yield at a predetermined lateral load. By thus

prescribing a maximum yield level in the principal lateral load resisting elements of the shock-absorbing soft story and forcing all inelastic deformations to occur in these elements (columns) the superstructure is effectively isolated or shielded from forces which would otherwise cause inelastic deformation.

With the inelastic deformations confined to the shock-absorbing soft story, the superstructure need no longer be designed for plastic deformations. The superstructure in such a system then needs only to be designed for vertical and wind loads, with special attention for earthquake resistance focused only in the shock-absorbing soft story. This clearly offers economical and technical advantages when compared to the present method of designing a complex structure for earthquake motions and providing for ductile members and connections throughout the entire structure.

For buildings with a sufficiently long period of vibration, the shock absorbing story shields the superstructure from forces higher than its yield capacity, setting an upper limit to the forces that can enter the structure from the foundation. This shielding has been borne out by observations of buildings in earthquake damaged areas, which showed that no serious damage occurred in stories above the level of extensive inelastic deformation. Obviously, it is important to assure that no instability and collapse will result from the large distortions and consequent secondary moments in the first story columns.

An effective isolation system not only allows the structure above the soft story to remain elastic during an earthquake but spares the nonstructural elements from extensive distress. Since the skeleton is only about 20 percent of the total cost of the building, the protection of the remaining 80 percent of the building's value is of utmost importance.

Isolation techniques would reduce the damage during an earthquake and at the same time lead to more economical structures since the special provisions to ensure adequate ductility throughout the entire height, required by present building codes, would no longer be necessary. The cost for details of articulation within the soft story can be kept to a reasonable level.

Other systems for earthquake isolation of multistory buildings have also been suggested such as ball bearings, foundations sliding on tetrafluoroethylene material and others.

## 7—FOUNDATION DESIGN CONSIDERATIONS FOR LATERAL FORCES

### 7.1—General

In the design of foundations, consideration should be given not only to the weight of the structure, including live load, but also to the

transmission of lateral forces and their vertical effects to the ground. Here a distinction should be drawn between externally applied forces and inertia forces resulting from the response of a structure to motions of the subsoil.

Externally applied lateral forces include all static pressures due to water, earth or fill, and all equivalent static forces caused by wind, mechanical equipment, etc., where a gust factor or impact factor is included to account for their dynamic character.

In general, tall structures provide sufficient damping to alter the impact of wind forces, which are generally characterized by longer periods than most tall buildings, into moderate fluctuations of their static pressure. In view of that, it has been common practice to treat their effects as a static problem, for the foundation as well as for the superstructure.

The inertia-induced effects of lateral forces created by earthquakes (or underground explosions) are primarily of dynamic character. Here, the supporting medium not only transmits the motion to the foundation but must also absorb the feedback from the structure. The desire to arrive at a simplified method of structural analysis has resulted here also in reducing the dynamic problem to an "equivalent" static one. In this design approach, which is presently being applied to most cases, the structure is assumed to be fixed to a rigid foundation medium, thus disregarding the dynamic character of the interaction between structure and supporting medium.<sup>16</sup>

Much excellent work has been done, and is in progress, to evaluate the dynamic characteristics of structure and subsoil.<sup>116-118</sup> Although no specific design recommendations concerning soil-structure interaction effects have been made,<sup>16</sup> it is hoped that theoretical and experimental studies in this area<sup>119-123</sup> will ultimately lead to practical methods of assessing the dynamic behavior of soils in relation to the structure they support.

## 7.2—Soil-structure relationships

On the basis of studies and observations relating to the effect of a ground motion to the structural response of a superstructure, the following general observations can be noted, particularly with respect to earthquakes.

1. Buildings having a fundamental period in the same range as characterized by the ground motion will be subject to greater seismic responses than buildings with fundamental periods significantly different from those of the exciting ground motion.<sup>16,17</sup> Recommended ratios between characteristic periods of soil and structure vary from 1.5 to 4.

2. The period and amplitude of a wave motion traveling through the underlying rock or soil gen-

erally increases with increasing density and thickness of the soil material.<sup>116,121</sup> It has to be realized, however, that every seismic ground motion is the result of a complex action resulting from a combination of direct and reflected waves,<sup>125</sup> and is therefore greatly influenced by the geologic structure and configuration of the subsoil at the particular site.<sup>125,1127-131</sup>

3. The foundation represents an important link in the transmission of a shock from the subsoil to the super structure and back. Depending on the type of the foundation and the character of the subsoil, the transmission may vary from a hinged to an almost fully restrained condition.<sup>132</sup>

## 7.3—Resistance to lateral loads

The vertical foundation pressures resulting from lateral loads are usually of short duration and constitute, therefore, but a small percentage of the influence that governs the settlements due to dead load and sustained live load. Temporary overstressing of vertical bearing pressures under the influence of such short-time lateral loads should therefore be considered versus overdesign of certain bearing areas causing differential settlements due to uneven soil pressures under service load conditions.

In general, resistance to differential settlements, due to whatever cause, is important for the foundation design of a tall structure. Where foundations cannot economically be placed on or, extended to firm, "nonyielding" soil or rock, the use of stiff monolithic rafts or mats, floating on softer soil, is indicated.<sup>133</sup> Where differential settlements appear to be unavoidable, provisions for eventual vertical adjustments may have to be considered.

Liquefaction of fine sands in areas with high ground water table, or sudden consolidation of loose soils subjected to jarring motions must be carefully investigated<sup>134</sup> as well as any possible variations in the capacity of friction piles founded in soils of similar type and consistency.

All horizontal pressures due to lateral loads, whether externally applied or internally created by inertial resistance to ground motions, have to be transferred safely to the ground. Static friction between foundation and soil provides "instant" resistance to horizontal displacements, otherwise the lateral support of shallow foundations requires the development of passive earth pressure, frame action with friction at the base, or a combination of both.

Considerable progress has been made in recent years to develop design methods for the lateral resistance of piles and piers under various conditions of soils and loadings.<sup>147, 150</sup> Lateral resistance from passive earth pressure is a powerful reserve, but its somewhat delayed action, after certain move-

ments have taken place, is often not fully realized.<sup>10</sup>

For reasons of serviceability of the superstructure, mobilization of passive resistance over large areas, such as basement walls or especially provided aprons, may be more advisable than individual resistance against smaller independent units, such as foundation piers or piles. At any rate, construction procedures for foundations capable of resisting lateral forces must ascertain that tight contact between soil and substructure is established and maintained. To obtain an even load distribution and common action among independent foundation units, lateral ties (struts) are required between pile caps.<sup>16</sup> Under similar conditions such provisions will also improve the performance of pier and footing foundations.

#### 7.4—Resistance to overturning

Resistance to overturning must be investigated and the safety factor must be within the requirements of the local code. Overturning calculations should be made under complete absence of fill or live load and should be based on a safe (low) estimate of the actual available dead load.<sup>141</sup>

The reference line for establishing the overturning moment should be taken through the centroid of the soil pressure wedge that will ultimately resist the overturning,<sup>142</sup> rather than at the edge of the foundation.

Where the weight of a structure is not sufficient to guard against uplift or overturning, rock or soil anchors must be provided. The effectiveness of such anchors should be based primarily on actual developed weight.<sup>143</sup> Soil shear, friction and similar effects, if available, should be introduced with conservative estimates and under consideration of eventual fissures, moisture, etc., that may interfere with their full development.

#### 7.5—Selection of type and performance

Any type of foundation, with certain modifications, can support tall structures subjected to lateral forces. The performance of the entire structure, however, depends greatly on the selection of the most suitable type of foundation<sup>116,114,145</sup> with regard to soil, structure, and quality of construction. For this reason, not only a properly executed design, but also responsible supervision, reliable testing of materials, and quality of workmanship are essential to achieve the desired performance.

#### REFERENCES

1. Rathbun, J. C., "Wind Forces on a Tall Building," *Transactions, ASCE*, V. 105, 1940, pp. 1-41.
2. Ward, H. S., and Crawford, R., "Determination of the Natural Period of Buildings," *Bulletin, Seismological Society of America*, V. 54, 1964, pp. 1743-1756.

3. Fung, Y. C., *The Theory of Aeroelasticity*, John Wiley and Sons, New York, 1955.

4. Scruton, C., "A Brief Review of Wind Effects on Buildings and Structures," *Journal of the Royal Aeronautical Society (London)*, V. 70, May 1966, pp. 553-560.

5. Scruton, C., "Introductory Review of Wind Effects on Buildings and Structures," *Wind Effects on Buildings and Structures*, V. 1, Her Majesty's Stationery Office, London, 1965, pp. 9-23.

6. Davenport, A. G., "Wind Loading on Tall Buildings," *Proceedings, Symposium on Wind Effects on High-Rise Buildings*, Chicago Committee on High-Rise Buildings, Mar. 1970.

7. "Wind Forces on Structures," *Transactions, ASCE*, V. 126, Part 2, 1961, pp. 1124-1198.

8. Davenport, A. G., "Wind Loads on Structures," *Technical Paper No. 88*, National Research Council of Canada, Ottawa, Mar. 1960, 81 pp.

9. Davenport, A. G., "The Treatment of Wind Loading on Tall Buildings," *Tall Buildings*, Pergamon Press Limited, London, 1967, pp. 3-44.

10. Davenport, A. G., and Isyumov, H., "The Application of the Boundary Layer Wind Tunnel to the Prediction of Wind Loading," *Wind Effects on Buildings and Structures*, V. 1, University of Toronto Press, 1968, pp. 201-230.

11. Cermak, J. E., "Determination of Wind Loading on Structural Models in Wind-Tunnel Simulated Winds," *Proceedings, Symposium on Wind Effects on High-Rise Buildings*, Chicago Committee on High Rise Buildings, Mar. 1970.

12. Robertson, L. R., "On the Design of Tall Buildings Subjected to the Turbulent Winds," *Proceedings, Symposium on Wind Effects on High-Rise Buildings*, Chicago Committee on High-Rise Buildings, Mar. 1970.

13. Clough, R. W., "Dynamic Effects of Earthquakes," *Proceedings, ASCE*, V. 86, ST4, Apr. 1960, pp. 49-65.

14. Housner, G. W., "Behavior of Structures During Earthquakes," *Proceedings, ASCE*, V. 85, EM4, Oct. 1959, pp. 109-129.

15. Clough, R. W.; Benuska, K. L.; and Lin, T. Y., "FHA Study of Seismic Design Criteria for High-Rise Buildings," HUD TS-3, U. S. Department of Housing and Urban Development, Federal Housing Administration, 1966.

16. "Recommended Lateral Force Requirements and Commentary," *Structural Engineers Association of California*, San Francisco, 1967.

17. Blume, J. A.; Newmark, N. M.; and Corning, L. H., *Design of Multistory Reinforced Concrete Buildings for Earthquake Motions*, Portland Cement Association, Skokie, Illinois, 1961, 318 pp.

18. Newmark, N. M., "Current Trends in the Seismic Analysis and Design of High-Rise Structures," *Earthquake Engineering*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs New Jersey, 1970, pp. 403-424.

19. Norris, C. H.; Hansen, R. J.; Holley, M. J.; Biggs, J. M.; Namyet, S.; and Minami, J. K., *Structural Design for Dynamic Loads*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1959, 453 pp.

20. Biggs, J. M., *Introduction to Structural Dynamics*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1964, 375 pp.

21. Hurty, W. C., and Rubinstein, M. F., *Dynamics of Structures*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1964, 455 pp.

22. "Design of Structures to Resist Nuclear Weapons Effects," *Manual of Engineering Practice No. 42*, American Society of Civil Engineers, New York, 1961, 150 pp.

23. "Plastic Design of Steel Structures," *Manual No. 41*, American Society of Civil Engineers, New York, 1970, Chapter 10.
24. "Wind Bracing in Steel Buildings," *Transactions, ASCE*, V. 105, 1940, pp. 1713-1737.
- 25a. Fintel, M., and Khan, F. R., "Effects of Column Exposure in Tall Structures—Temperature Variations and Their Effects," *ACI JOURNAL, Proceedings* V. 62, No. 12, Dec. 1965, pp. 1533-1556.
- 25b. Fintel, M., and Khan, F. R., "Effects of Column Exposure in Tall Structures—Analysis for Length Changes of Exposed Columns," *ACI JOURNAL, Proceedings* V. 63, No. 8, Aug. 1966, pp. 835-842.
- 25c. Fintel, M., and Khan, F. R., "Effects of Column Exposure in Tall Structures—Design Considerations and Field Observations of Buildings," *ACI JOURNAL, Proceedings* V. 65, No. 2, Feb. 1968, pp. 99-110.
26. Fintel, M., and Khan, F. R., "Effects of Creep and Shrinkage in Tall Structures—Prediction of Inelastic Column Shortening," *ACI JOURNAL, Proceedings* V. 66, No. 12, Dec. 1969, pp. 957-967.
27. Fintel, M., and Khan, F. R., "Effects of Creep and Shrinkage in Tall Structures—Analysis for Differential Shortening of Columns and Field Observation of Structures," *Designing for Effects of Creep, Shrinkage, and Temperature*, American Concrete Institute, Detroit (to be published).
28. ACI Committee 435, "Allowable Deflections," *ACI JOURNAL, Proceedings* V. 65, No. 6, June 1968, pp. 433-444.
29. Nawy, E. G., "Crack Control in Reinforced Concrete Structures," *ACI JOURNAL, Proceedings* V. 65, No. 10, Oct. 1968, pp. 825-836.
30. ACI Committee 318, "Proposed Revision of ACI 318-63: Building Code Requirements for Reinforced Concrete," *ACI JOURNAL, Proceedings* V. 67, No. 2, Feb. 1970, pp. 77-186.
31. Frischmann, W. W.; Prabhu, S. S.; and Toppler, J. F., "Multistory Frames and Interconnected Shear Walls Subjected to Lateral Loads—I," *Concrete and Constructional Engineering* (London), V. 43, No. 6, June 1963, pp. 227-234.
32. Lightfoot, E., *Moment Distribution; A Rapid Method of Analysis for Rigid-Jointed Structures*, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1961, 363 pp.
33. Gere, J. M., *Moment Distribution*, D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, New Jersey, 1963, 378 pp.
34. Kloucek, C. V., *Distribution of Deformation*, Artia, Prague, 1955.
35. Southwell, R. V., *Relaxation Methods in Engineering Science*, Oxford University Press, New York, 1940, 260 pp.
36. Kani, G., *Analysis of Multistory Frames*, Frederick Ungar Publishing Company, New York, 1957.
37. Goldberg, J. E., "Wind Stresses by Slope Deflection and Converging Approximations," *Transactions, ASCE*, V. 99, 1934, pp. 962-985.
38. Grinter, L. E., "Wind Stress Analysis Simplified," *Transactions, ASCE*, V. 99, 1934, pp. 610-669.
39. Norris, C. H., and Wilbur, J. B., *Elementary Structural Analysis*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1960, Chapter 11.
40. Interim Report, ACI Committee 443, 1964.
41. Internal Committee Report, ACI Committee 442, by N. Kaachaturian and K. Gerstle.
42. "Frame Constants for Lateral Loads on Multistory Concrete Buildings," *Advanced Engineering Bulletin* No. 5, Portland Cement Association, 1962.
43. Cervenka, V., and Gerstle, K. H., "Approximate Lateral Analysis of Building Frames," Report to ACI Committee 442, 1969.
44. De Veubeke, B. M. F., "Upper and Lower Bounds in Matrix Structural Analysis," *Matrix Methods of Structural Analysis*, AGARDograph 72, Pergamon-Macmillan, New York, 1964.
45. MacLeod, I. A., "Shear Wall-Frame Interaction—A Design Aid," Portland Cement Association, 1970.
46. Wood, R. H., "A Derivation of Maximum Stanchion Moments in Multistory Frames by Means of Nomograms," *The Structural Engineer* (London), V. 31, No. 11, Nov. 1953, pp. 316-328.
47. Khan, F. R., and Sbarounis, J. A., "Interaction of Shear Walls and Frames," *Proceedings, ASCE*, V. 90, ST3, June 1964, pp. 285-335.
48. Eisemann, K.; Woo, L.; and Namyet, S., "Space Frame Analysis by Matrices and Computer," *Proceedings, ASCE*, V. 88, ST6, Dec. 1962, pp. 245-277.
49. *STRESS, A User's Manual*, M. I. T. Press, Cambridge, 1964, 51 pp.
50. Clough, R. W.; Wilson, E. L.; and King, I. P., "Large Capacity Multistory Frame Analysis Programs," *Proceedings, ASCE*, V. 89, ST4, Aug. 1963, pp. 179-204.
51. Clough, R. W.; King, I. P.; and Wilson, E. L., "Structural Analysis of Multistory Buildings," *Proceedings, ASCE*, V. 90, ST3, June 1964, pp. 16-34.
52. Brooks, D. F., and Brotton, D. M., "Computer System for Analysis of Large Frameworks," *Proceedings, ASCE*, V. 93, ST6, Dec. 1967, pp. 1-23.
53. Tezcan, S., "Computer Analysis of Plane and Space Structures," *Proceedings, ASCE*, V. 92, ST2, Apr. 1966, pp. 143-173.
54. Weaver, W. Jr., and Nelson, M. F., "Three Dimensional Analysis of Tier Buildings," *Proceedings, ASCE*, V. 92, ST6, Dec. 1966, pp. 385-404.
55. Jennings, A., and Majid, K., "An Elastic-Plastic Analysis by Computer for Framed Structures Loaded Up to Collapse," *The Structural Engineer* (London), V. 43, No. 12, Dec. 1965, pp. 407-412.
56. Majid, K. I., and Williamson, M., "Linear Analysis of Complete Structures by Computers," *Proceedings, Institution of Civil Engineers* (London), V. 38, No. 2, Oct. 1967, pp. 247-266.
57. "A Computer Program to Analyze the Dynamic Response of High-Rise Buildings to Nuclear Blast Loading: V. 1, Elastic Analysis; V. 2, Nonlinear Analysis," Report No. OCD-OS-63-44, Report to the Protective Structures Division, Office of Civilian Defense, by T. Y. Lin and Associates, Oct. 1963.
58. Gouwens, A. J., "Computer Program for Lateral Load Analysis of Multistory Frames with Shear Walls," Portland Cement Association, 1968.
59. "Handbook of Frame Constants," T-32-2, Portland Cement Association, 1947, 32 pp.
60. Clark, W. J.; MacGregor, J. C.; and Adams, P. E., "Inelastic Behavior of Reinforced Concrete Shear Wall-Frames," *Proceedings, Eighth Congress of the International Association for Bridge and Structural Engineering*, New York, 1968.
61. Guha Majundar, S.; Nikhed, R. P.; Adams, P. F.; and MacGregor, J. G., *Final Publication*, Eighth Congress of the International Association for Bridge and Structural Engineering, New York, 1968.
62. MacGregor, J. G.; Breen, J. E.; and Pfrang, E. O., "Design of Slender Concrete Columns," *ACI JOURNAL, Proceedings* V. 67, No. 1, Jan. 1970, pp. 6-28.
63. Smith, B. S., "Lateral Stiffness of Infilled Frames," *Proceedings, ASCE*, V. 88, ST6, Dec. 1962, pp. 161-181.
64. Smith, B. S., "The Composite Behavior of Infilled Frames," *Tall Buildings*, Pergamon Press Limited, London, 1967, pp. 481-495.

65. Smith, B. S., "Behavior of Square Infilled Frames," *Proceedings, ASCE*, V. 92, ST1, Feb. 1966, pp. 331-403.
66. Fiato, A. E.; Sozen, M. A.; and Gamble, W. L., "Behavior of Five-Story Reinforced Concrete Frames with Filler Walls," Interim Report to the Department of Defense, Office of the Secretary of the Army, Office of Civil Defense, Jan 1968.
67. Marshall, M. G., "The Analysis of Shear Wall Structures," MSc Thesis, University of Waterloo, Waterloo, Ontario, Sept. 1968.
68. Beck, H., "Contribution to the Analysis of Coupled Shear Walls," *ACI JOURNAL, Proceedings*, V. 59, No. 8, Aug. 1962, pp. 1055-1070.
69. Rosman, R., "Approximate Analysis of Shear Walls Subject to Lateral Loads," *ACI JOURNAL, Proceedings* V. 61, No. 6, June 1964, pp. 717-732.
70. Coull, A., and Choudhury, J. R., "Stresses and Deflections in Coupled Shear Walls," *ACI JOURNAL, Proceedings* V. 64, No. 2, Feb. 1967, pp. 65-72.
71. Coull, A., and Choudhury, J. R., "Analysis of Coupled Shear Walls," *ACI JOURNAL, Proceedings* V. 64, No. 9, Sept. 1967, pp. 587-593.
72. Coull, A., and Smith, B. S., "Analysis of Shear Walls (A Review of Previous Research)," *Tall Buildings*, Pergamon Press Limited, London, 1967, pp. 139-155.
73. Rosman, R., "An Approximate Method of Analysis of Walls of Multistory Buildings," *Civil Engineering and Public Works Review* (London), V. 59, 1964, pp. 67-69.
- 74a. Rosman, R., "The Statical Analysis of Shear Walls with Row Openings (Die Statische Berechnung von Hochhauswänden mit Öffnungsreihen)," *Bauingenieur-Praxis*, Heft 65, W. Ernst and Sohn, Berlin, 1965. (in German)
- 74b. Rosman, R., "Tables for the Internal Forces of Pierced Shear Walls Subject to Lateral Loads (Zahlentafeln für die Schnittkräfte von Windscheiben mit Öffnungsreihen)," *Bauingenieur-Praxis*, Heft 66, W. Ernst and Sohn, Berlin, 1966. (in German and English)
- 74c. Rosman, R., "Pierced Shear Walls with Stepped Variation in Cross-Section (Gegliederte Windscheiben mit Stufenartig Veränderlichen Querschnittswerten)," *Bauingenieur-Praxis*, Heft 67, W. Ernst and Sohn, Berlin, 1967. (in German)
75. Naumann, W., and Walter, H., "Stress Analysis of Horizontally Loaded Shear Walls of Tall Buildings," *Der Bauingenieur* (Berlin-Wilmersdorf), V. 36, No. 8, 1961, pp. 311-313. (in German)
76. Rosman, R., "Photoelastic Investigation of a Horizontally Loaded Shear Wall of a Tall Building," *Der Bauingenieur* (Berlin-Wilmersdorf), V. 37, No. 12, 1962, pp. 466-469. (in German)
77. Barnard, P. R., and Schwaighofer, J., "Interaction of Shear Walls Connected Solely Through Slabs," *Tall Buildings*, Pergamon Press Limited, London, 1967, pp. 157-173.
78. MacLeod, I. A., "Lateral Stiffness of Shear Walls with Openings," *Tall Buildings*, Pergamon Press Limited London, 1967, pp. 223-244.
79. Coull, A., "Tests on a Model Shear Wall Structure," *Civil Engineering and Public Works Review* (London), V. 61, No. 722, Sept. 1966, pp. 1129-1133.
80. Magnus, D., "Pierced Shear Walls," *Concrete and Constructional Review* (London), V. 60, 1965, pp. 89-98; 127-136; and 177-185.
81. Burns, R., "An Approximate Method of Analyzing Coupled Shear Walls Subject to Triangular Loading," *Proceedings, Third World Conference on Earthquake Engineering*, New Zealand, 1965.
82. Coull, A., and Puri, R. D., "Analysis of Coupled Shear Walls of Variable Thickness," *Building Science*, V. 2, Pergamon Press, New York, 1967, pp. 181-188.
83. Rosman, R., "Shear Walls with an Arbitrary Number of Rows of Openings," *Deutsche Bauzeitschrift* (Gütersloh), No. 7, 1966, pp. 1311-1314.
84. Winokur, A., and Gluck, J., "Ultimate Strength Analysis of Coupled Shear Walls," *ACI JOURNAL, Proceedings* V. 65, No. 12, Dec. 1968, pp. 1024-1036.
85. Michael, D., "The Effect of Local Wall Deformations on the Elastic Interaction of Crosswalls Coupled by Beams," *Tall Buildings*, Pergamon Press Limited, London, 1967, pp. 253-270.
86. Puri, R., and MacLeod, I. A., Discussion of Reference 74.
87. MacLeod, I. A., "Connected Shear Walls of Unequal Width," *ACI JOURNAL, Proceedings* V. 67, No. 5, May 1970, pp. 408-412.
88. Pauley, T., "The Coupling of Shear Walls," Phd Thesis, University of Canterbury, Christ Church, New Zealand, 1969.
89. Candy, C. F., "Analysis of Shear Wall Frames by Computer," *New Zealand Engineering* (Wellington), V. 19, 1964, pp. 342-347.
90. Quadeer, A., and Smith, B. S., "The Bending Stiffness of Slabs Connecting Shear Walls," *ACI JOURNAL, Proceedings* V. 66, No. 6, June 1969, pp. 464-473.
91. Khan, F. R., "Current Trends in Concrete High-Rise Buildings," *Tall Buildings*, Pergamon Press Limited, London, 1967, pp. 571-590.
92. Yettram, A. L., and Husain, H. M., "Plane Framework Method for Plates in Extension," *Proceedings, ASCE*, V. 92, EM1, Feb. 1966, pp. 157-168.
93. Grinter, L. E., "Statistical State of Stress by Grid Analysis," *Numerical Methods of Analysis in Engineering*, The MacMillan Company, New York, 1949.
94. Weaver, W. J., and Nelson, M. F., "Three Dimensional Analysis of Tier Buildings," *Proceedings, ASCE*, V. 92, ST6, Dec. 1966, pp. 385-404.
95. Webster, J. A., "The Static and Dynamic Analysis of Orthogonal Structures Composed of Shear Walls and Frames," *Tall Buildings*, Pergamon Press Limited, London, 1967, pp. 377-399.
96. Winokur, A., and Gluck, J., "Lateral Loads in Asymmetric Multistory Structures," *Proceedings, ASCE*, V. 94, ST3, Mar. 1968, pp. 645-656.
97. Goldberg, J. E., "Analysis of Multistory Buildings Considering Shear Wall and Floor Deformations," *Tall Buildings*, Pergamon Press Limited, London, 1967, pp. 349-375.
98. "Continuity in Concrete Building Frames," Fourth Edition, Portland Cement Association, 1959.
99. Robertson, L., "On Tall Buildings," *Tall Buildings*, Pergamon Press Limited, London, 1967, pp. 591-607.
100. Benjamin, J. R., *Statically Indeterminate Structures*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1959, 347 pp.
101. Seto, Y., "Analysis of Single Story Shear Wall Structures," *Concrete* (London), V. 1, No. 6, June 1967, pp. 191-196.
102. Khan, F. R., "On Some Special Problems of Analysis and Design of Shear Wall Structures," *Tall Buildings*, Pergamon Press Limited, London, 1967, pp. 321-347.
103. Coull, A., and Irwin, A. W., "Load Distribution in Multistory Shear Wall Structures," *Proceedings, Eighth Congress of the International Association for Bridge and Structural Engineering*, New York, 1968.
104. Griffiths, H., "Report on the Inquiry into the Collapse of Flats at Ronan Point, Canning Town," Minis-

try of Housing and Local Government, Great Britain, 1968.

105. "International Recommendations for Structures Built on Panel Elements," Comité Européen du Béton, Paris, 1969. (in French)

106. Fintel, M., "The Behavior of Reinforced Concrete Structures in the Caracas Earthquake of July 30, 1967," XS6731. Portland Cement Association, 1968, 52 pp.

107. Fintel, Mark, "Staggered Transverse Wall Beams for Multistory Concrete Buildings," *ACI JOURNAL, Proceedings* V. 65, No. 5, May 1968, pp. 366-378.

108. Fintel, Mark; Barnard, Peter R.; and Derecho, A. T., "Staggered Transverse Wall Beams for Multistory Concrete Buildings—A Detailed Study," XS6735, Portland Cement Association, 1968, 20 pp.

109. Parme, A. L., "Design of Combined Frames and Shear Walls," *Tall Buildings*, Pergamon Press Limited, London, 1967, pp. 291-320.

110. "Design of Combined Frames and Shear Walls," *Advanced Engineering Bulletin* No. 14, Portland Cement Association, 1965.

111. Cardan, B., "Concrete Shear Walls Combined with Rigid Frames in Multistory Buildings Subjected to Lateral Loads," *ACI JOURNAL, Proceedings* V. 58, No. 3, Sept. 1961, pp. 299-316.

112. Rosman, R., "Laterally Loaded Systems Consisting of Walls and Frames," *Tall Buildings*, Pergamon Press Limited, London, 1967, pp. 273-289.

113. Gould, P. L., "Interaction of Shear Wall-Frame Systems in Multistory Buildings," *ACI JOURNAL, Proceedings* V. 62, No. 1, Jan. 1965, pp. 45-70.

114. Rosenblueth, E., and Holtz, I., "Elastic Analysis of Shear Walls in Tall Buildings," *ACI JOURNAL, Proceedings* V. 56, No. 12, June 1960, pp. 1209-1222.

115. Fintel, M., and Khan, F. R., "Shock Absorbing Soft Story Concept for Multistory Earthquake Structures," *ACI JOURNAL, Proceedings* V. 66, No. 5, May 1969, pp. 381-390.

116. *Vibration Effects of Earthquakes on Soils and Foundations*, STP-450, American Society for Testing and Materials, Philadelphia, 1969, 267 pp.

117. Seed, H. B., "Soil Problems and Soil Behavior," *Earthquake Engineering*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1970, pp. 227-251.

118. Richart, F. E., Jr.; Hall, J. R. Jr.; and Woods, R. D., *Vibrations of Soils and Foundations*, Prentice-Hall, Inc, Englewood Cliffs, New Jersey, 1970.

119. Wiehle, C. K., "Review of Soil-Structure Interaction," *Proceedings*, Symposium on Soil-Structure Interaction, University of Arizona, Sept. 1964.

120. Parmelee, R. A., "Building-Foundation Interaction Effects," *Proceedings*, ASCE, V. 93, EM2, Apr. 1967, p. 131.

121. Parmelee, R. A.; Perelman, D. S.; Lee, S. L.; and Keer, L. M., "Seismic Response of Structure-Foundation Systems," *Proceedings*, ASCE, V. 94, EM6, Dec. 1968, p. 1295.

122. Agabien, M. E.; Parmelee, R. A.; and Lee, S. L., "A Model for the Study of Soil-Structure Interaction," *Proceedings*, Eighth Congress of the International Association for Bridge and Structural Engineering, New York, 1968.

123. Parmelee, R. A.; Perelman, D. S.; and Lee, S. L., "Seismic Response of Multiple-Story Structures on Flexible Foundations," *Bulletin of the Seismological Society of America*, V. 59, No. 3, June 1969, pp. 1061-1070.

124. Terzaghi, Karl, *Theoretical Soil Mechanics*, John Wiley and Sons, New York, 1943, 510 pp.

125. Leonards, G. A., *Foundation Engineering*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1962, 1146 pp.

126. Gutenberg, B., "Effects of Ground on Earthquake Motion," *Bulletin of the Seismological Society of America*, V. 47, No. 3, July 1957, pp. 221-250.

127. Alcock, E. D., "The Influence of Geologic Environment on Seismic Response," *Bulletin of the Seismological Society of America*, V. 49, No. 1, Feb. 1969, pp. 245-268.

128. Idriss, I. M., and Seed, H. B., "Seismic Response of Horizontal Soil Layers," *Proceedings*, ASCE, V. 94, SM4, July 1968, p. 1003.

129. Seed, H. B., and Idriss, I. M., *Proceedings*, ASCE, V. 95, SM1, Jan. 1969, p. 99.

130. Seed, H. B., "The Influence of Local Soil Conditions on Earthquake Damage," *Proceedings*, Soil Dynamics Specialty Conference, Seventh International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Mexico City, 1969.

131. Tsai, N. C., "Influence of Local Geology on Earthquake Ground Motion," *Research Report*, Earthquake Engineering Research Laboratory, California Institute of Technology, Pasadena, May 1969.

132. Newmark, D. M., "Earthquake-Resistant Building Design," *Structural Engineering Handbook*, E. H. Gaylord and C. M. Gaylord, Editors, McGraw-Hill Book Company, New York, 1968, Section 3.

133. Kramrisch, F., and Rogers, P., "Simplified Design of Combined Footings," *Proceedings*, ASCE, V. 87, SM5, Oct. 1961, p. 19.

134. Seed, H. B., and Idriss, I. M., "Analysis of Soil Liquefaction: Niigata Earthquake," *Proceedings*, ASCE, V. 93, SM3, May 1967, p. 83.

135. Kocsis, Peter, "Lateral Loads on Piles," Bureau of Engineering, Chicago, 1968, 68 pp.

136. Broms, B., "Design of Laterally Loaded Piles," *Proceedings*, ASCE, V. 91, SM3, May 1965, pp. 79-99.

137. Davisson, M. T., "Design of Deep Foundations for Tall Buildings Under Lateral Load," *Proceedings*, Illinois Structural Engineering Conference, College of Engineering, University of Illinois, 1966.

138. Penzien, J.; Scheffey, C. F.; and Parmelee, R. A., "Seismic Analysis of Bridges on Long Piles," *Proceedings*, ASCE, V. 90, EM3, June 1964, pp. 223-254.

139. Parmelee, R. A.; Penzien, J.; Zcheffey, C. F.; Seed, H. B.; and Thiers, G. B., "Seismic Effects on Structures Supported on Piles Extending Through Deep Sensitive Clays," Report No. 64-2, Institute of Engineering Research, University of California, Berkeley, Aug. 1964.

140. Penzien, J., "Soil-Pile Foundation Interaction," *Earthquake Engineering*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1970, pp. 349-381.

141. ACI Committee 318, "Building Code Requirements for Reinforced Concrete (ACI 318-63)," American Concrete Institute, Detroit, 1963, 144 pp.

142. ACI Committee 436, "Suggested Design Procedures for Combined Footings and Mats," *ACI JOURNAL, Proceedings* V. 63, No. 10, Oct. 1966, pp. 1041-1058.

143. Kramrisch, Fritz, "Innovations for Underground Garage," *Civil Engineering—ASCE*, V. 37, No. 12, Dec 1967, p. 44.

144. Zeevaert, L., and Newmark, N.M., "Aseismic Design of Latino Americana Tower in Mexico City," *Proceedings*, World Conference on Earthquake Engineering, Berkeley, California, 1956, pp. 35-1 through 35-11.

145. *Performance of Deep Foundations*, STP-444, American Society for Testing and Materials, Philadelphia, 1969, 399 pp.

This report was submitted to letter ballot of the committee which consists of 15 members; 13 members returned ballots, 12 voting affirmatively and 2 voting negatively.





centro de educación continua  
división de estudios superiores  
facultad de ingeniería, unam



IV CURSO INTERNACIONAL DE INGENIERIA SISMICA

DISEÑO SISMICO DE EDIFICIOS

ARTICULO SOBRE ESTRUCTURACION DE EDIFICIOS

M. EN C. ENRIQUE DEL VALLE CALDERON

AGOSTO, 1978

Journal of the  
**STRUCTURAL DIVISION**  
 Proceedings of the American Society of Civil Engineers

DYNAMIC CHARACTERISTICS OF MULTISTORY BUILDINGS<sup>a</sup>

By John A. Blume,<sup>1</sup> F. ASCE

INTRODUCTION

The reliable prediction of the response of a building to ground motion caused by an earthquake or by an underground nuclear explosion requires knowledge about the dynamic characteristics of the building as well as knowledge about the probable ground motion at the building site as a function of time. With the system defined and with the known or estimated excitation function, response follows from a proper application of theory. However, computed or measured response amplitude does not reveal how much of the motion is a result of various types of freedom such as story shear, joint rotation, over-all flexure and base rocking. Without this information, local distortions cannot be fully identified and therefore stress analysis to relate motion to damage levels of the various members and elements cannot properly be undertaken. It is thus not only important to know the natural periods of vibration, stiffnesses, mode shapes, and participation factors of multistory buildings, but also to know what types of freedom contribute to these values, and in what degree.

An idealized model of a building can be analyzed and its dynamic properties can be obtained according to established theory. Digital computers are of great aid in this; in fact, their use is essential where there are several stories and more freedom is considered than rigid-floor story shear. However, it may be difficult in many cases, if not impracticable, to develop a realistic idealized model from the drawings of a real building. The effective stiffness participation of floor systems, walls, and stairwells may be difficult to determine from the drawings, and the effective dynamic moduli of elasticity may not be known. Another problem is that base movement in the soil is hard

Note.—Discussion open until July 1, 1968. To extend the closing date one month, a written request must be filed with the Executive Secretary, ASCE. This paper is part of the copyrighted Journal of the Structural Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Vol. 94, No. ST2, February, 1968. Manuscript was submitted for review for possible publication on June 27, 1967.

<sup>a</sup> Presented in brief form as part of the Technical Seminar on "Buildings in Earthquake and Wind—Design and Analysis of Their Lateral Resistance," ASCE National Meeting on Structural Engineering, Seattle, Wash., May 8-12, 1967.

<sup>1</sup> Pres., John A. Blume & Assocs. Research Div., San Francisco, Calif.

to model. Moreover, at times there may not be the ready availability of adequate computer capacity to analyze tall multistory buildings with joint rotation, over-all flexure and base rocking as well as shear distortion. The amount of time and labor required to develop member data and to prepare computer data cards for building members when all these stiffness characteristics are considered may be excessive.

An alternate method to that of rigorous analysis of an idealized model developed from a study of the building details is to vibrate a building and to measure its actual periods and mode shapes, to calculate the masses, and then to solve for the stiffnesses using basic dynamic theory. However, there are shortcomings in this method, including the obvious problem that a building not yet constructed, or one that for one reason or another cannot be vibrated and measured, cannot be so analyzed. Another problem is that such testing is costly and slow as an adjunct to an analysis procedure and it is often impossible to excite enough modes to analyze a building with significant joint rotation. In addition, the stiffnesses obtained are not readily identified with story shear, joint rotation, over-all flexure, or base motion, and therefore the measured motion cannot be directly associated with damage thresholds.

Most of the work in the literature has been based upon the rigid-floor shear system generally under the tacit assumption that this single type of freedom effectively models real buildings. Although some buildings, especially the traditional type with short spans and rigid concrete floor systems, may be close to this simple condition, it has been shown (1, 2, 3, 4, 5, 6)<sup>2</sup> that joint rotation may be important. Few investigators have been concerned with axial deformation resulting from over-all flexure (1, 7, 8, 9, 10). It is evident, however, that buildings do tend to bend as a whole in actual earthquakes (11, 12). Several authors have considered ground-structure interaction (1, 7, 13, 8, 14, 15, 16) in one or more of its various phases. Very little has been done, however, with the effect of local base motion in the soil (not to be confused with the vibratory motion of the soil caused by the disturbance) on periods and mode shapes.

Apparently, no prior work has been done where the four types of freedom—story shear, joint rotation, over-all flexure, and base motion—have been considered simultaneously for several buildings and with assigned parameters for each freedom to assess the relative importance of these freedoms under various conditions. The purpose of the study reported partially herein was to explore the possibilities of developing relatively simple methods of determining periods, stiffnesses, and mode shapes of multistory buildings with these various freedom characteristics. The methods developed provide useful estimates of the relative contributions of story shear, joint rotation, over-all flexure and base rocking. This work is limited to elastic state vibrations of buildings having symmetry of mass and stiffness in each story about the main horizontal axes; thus torsional coupling with translational modes is not included. The three lowest horizontal modes are considered. The multistory building types assumed herein are those wherein each floor generally extends over most of the building area and lumped-mass modeling is appropriate. Rigid diaphragms in the plane of the floors and roof are assumed. Only a portion of the comprehensive effort (17) can be covered in this brief paper. Building models and real buildings were analyzed rigorously to explore the effects of parameter variations. Over 100 building models and real buildings

<sup>2</sup> Numerals in parentheses refer to corresponding items in Appendix I.—References.

were utilized together with eight computer programs. New "period synthesis" and "pseudo-stiffness procedures" are proposed to permit the dynamic characteristics of buildings to be obtained using simple rigid-floor, shear analysis while providing for joint rotation, over-all flexure, and base motion in the soil.

TERMS AND PROCEDURE

Tall buildings can generally be modeled by analogy to a mechanical system. The mass of each floor is lumped at a discrete level, usually the floor level. The weight of the walls, partitions, stairways, etc., is also lumped into the same rigid mass according to tributary areas or the manner in which the reactions would occur under assumed lateral forces. This is indeed the most popular concept for high-rise buildings whether the analysis be done by digital computer, electric analog, or by hand calculation. There are some buildings with stiff walls, however, that may be represented as vertical cantilevers with distributed mass (7, 17).

There has been some confusion in the literature regarding the term "shear building." Definitions are provided for the four types of freedom considered in this study:

**Shear Deformation.**--Shear deformation is that deformation parallel to the horizontal or *x*-axis which results from an external force applied to a story while the adjoining stories are prevented from moving, and under the assumptions that the floors are rigid and the joints do not rotate, and that the vertical story members are infinitely rigid insofar as vertical deformations are concerned. The shear deformation is determined according to relative rigidities of all elements and with consideration of both shear deformation and column or pier bending, using shear areas and moments of inertia of the individual vertical elements. This system is termed "closed-coupled."

**Joint Rotation Deformation.**--Joint rotation deformation is that deformation parallel to the *x*-axis obtained in a frame-type building by relaxing the joints; i.e., by removing the rigid-floor restriction under "Shear Deformation" above. In effect, this is assigning real stiffnesses to the girders and effective floor systems rather than assuming them as infinitely rigid. This system is termed "far-coupled." The total *x*-axis frame deformation less that deformation obtained by the rigid floor assumption is the joint rotation contribution.

**Over-all Flexure Deformation.**--Over-all flexure deformation is that deformation parallel to the *x*-axis obtained by relaxing the vertical elements axially; i.e., by removing the restriction under "Shear Deformation," above, that there is no axial deformation in the vertical elements. The actual areas and moduli of elasticity of the vertical members are used. Each element is subjected to axial deformation in accordance with its participation with the other elements in resisting over-all flexure of the building as a vertical cantilever.

**Base Deformation.**--Base deformation is that deformation parallel to the *x*-axis at any story level caused by rocking of the building (assumed to be rigid) about the *z*-axis (the other horizontal axis) through the base of the foun-

ation. The soil is assumed to have elastic properties. Translation in the soil may also be included.

Four freedom conditions or cases will be considered. Subscripts *a*, *b*, *c*, and *d* will be used to identify stiffnesses, deformations, periods, etc., as follows: Case *a*--only shear deformation as defined above is assumed to exist in the building or the system; Case *b*--both shear deformation and joint rotation deformation are assumed to exist; Case *c*--shear deformation, joint rotation deformation, and over-all flexure deformation are assumed to exist; and Case *d*--shear deformation, joint rotation, over-all flexure, and base deformation are assumed to exist.

There is one degree of freedom to be considered parallel to each horizontal axis, *x* and *z*, for each story. There is therefore one natural mode of vibration in each direction for each story, or lumped mass. This is true under Cases *a*, *b*, *c*, or *d*. The lower modes of vibration are the most important in response to ground motion. In this study, only the fundamental, the second, and the third natural modes of vibration in each direction will be considered.

The theory of the vibration of single mass systems is treated extensively in the literature; several authors have considered multimass systems, and some have analyzed multistory buildings *per se* (1, 7, 8, 18, 19, 2, 20, 21, 22). Some of the basic equations used in this study will be presented. It is assumed herein that the resistance of the structure to deformation is linear and stable and also that the motion is so small as to retain these assumed linear and stable characteristics without yield, deterioration, or failure. Rotatory inertia is ignored as negligible except for base rocking. Units are in kips, inches, and seconds, unless otherwise noted.

By Newton's second law and the balance of forces of the system vibrating freely without external force,

$$[M_{jk}] \{\ddot{D}_k\} + [C_{jk}] \{\dot{D}_k\} + [S_{jk}] \{D_k\} = \{0\} \dots \dots \dots (1)$$

in which *D* = the displacement parallel to the *x*-axis; *M* = the story mass; *S<sub>jk</sub>* = the stiffness-influence coefficient defined as the external force on the *j*<sup>th</sup> mass when the *k*<sup>th</sup> mass has a unit displacement and all other masses have zero displacement; *j* and *k* are subscripts referring to the story or lumped mass; and *C* = the damping coefficient defined as the force on the *j*<sup>th</sup> mass exerted by the damping dashpots when the *k*<sup>th</sup> mass has a unit velocity and all other masses have zero velocity.

It can be shown that in a principal mode of vibration, *i*, for the case where there is no damping (damping has a negligible effect on period for the damping values typical of buildings in the elastic range),

$$([S_{jk}] - \rho_i^2 [M_{jk}]) \{D_{M_k}\}_i = \{0\} \dots \dots \dots (2)$$

and, for nonzero displacements, from Cramer's rule,

$$|[S_{jk}] - \rho_i^2 [M_{jk}]| = 0 \dots \dots \dots (3)$$

in which *ρ<sub>i</sub>* = the natural angular frequency of the *i*<sup>th</sup> mode in radians per sec; *ρ<sub>i</sub><sup>2</sup>* = the eigenvalue of the *i*<sup>th</sup> mode; and *D<sub>M</sub>* = the modal displacement or mode shape displacement. Another form of Eq. 3 is

$$\begin{bmatrix} (S_{11} - \rho_i^2 M_1) & S_{12} & S_{13} & \dots & S_{1n} \\ S_{21} & (S_{22} - \rho_i^2 M_2) & S_{23} & \dots & S_{2n} \\ S_{31} & S_{32} & (S_{33} - \rho_i^2 M_3) & \dots & S_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{n1} & S_{n2} & S_{n3} & \dots & (S_{nn} - \rho_i^2 M_n) \end{bmatrix} = 0 \quad (4)$$

The expansion of the determinant in Eq. 4 to obtain a polynomial in powers of the eigenvalues  $\rho_i^2$ , and the solution of the polynomial can be obtained directly or by iteration. The mode shapes  $\{D_M\}_i$  can be found for each  $\rho_i^2$  value by using Eq. 2. The natural period of vibration,  $T_i$ , in seconds, is simply

$$T_i = \frac{2\pi}{\rho_i} \dots \dots \dots (5)$$

The stiffness matrix and the damping coefficient matrix for a close-coupled, or rigid-floor shear system, Case a, is tridiagonal and symmetrical, and there are relationships between the elements as may be seen in Fig. 1. Thus the stiffness matrix may be written directly from known story stiffnesses. The Case a system is by far the simplest with which to work since there are only as many unknowns as there are stories. On the other hand, a far-coupled system, or one that includes joint rotation has a full matrix as shown in Fig. 2. In this case there are  $(n^2 + n)/2$  different elements, or unknowns, in which  $n$  is the number of stories. The far-coupled matrix is full, and thus general. It is applicable to Case c and Case d problems as well as those under Case b.

Various computer programs were developed and employed in the ALGOL language and in FORTRAN II with Burroughs 5500 and IBM 7090 equipment, respectively, at the Stanford University Computation Center. The programs solved the above and other equations with various terms alternately known or unknown. For example, some programs accepted stiffnesses or member properties and also masses, and the output would be natural periods and mode shapes. Others accepted periods, masses and mode shapes to produce stiffness coefficients. Different programs were used for Case a and for the general situation with the full matrix. In solving for stiffnesses or damping coefficients for any case but Case a, it was necessary to use more than one mode shape in order to have sufficient data to obtain solutions. For example, the far-coupled case of Fig. 2 would require at least  $(n + 1)/2$  known modes. This is obviously a serious handicap where there are several stories. A 14- or 15-story building would require eight or more known periods and mode shapes to solve directly for the stiffnesses. The problem of surplus or redundant data in the general programs was handled by taking best least squares solutions.

Many of the models used in this study were selected from the literature so that certain results could be compared to those from entirely independent sources and programs. In all comparisons, output was the same or else the (minor) differences were found not to be the fault of the programs used in this investigation. All programs were carefully verified for their intended purposes and limitations. Some of these limitations were, in themselves, tools in the research effort. The basic procedure was to obtain data for actual and hypothetical building frames and also for complete buildings and to subject these data to analysis in the various programs. By means of cross feeding of ma-

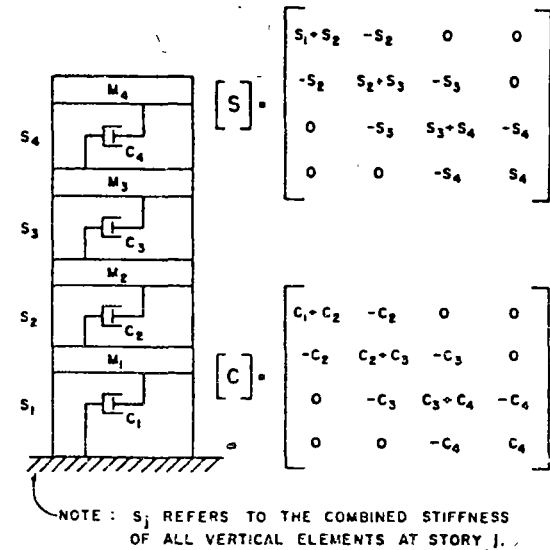


FIG. 1.—A CLOSE-COUPLED SHEAR SYSTEM

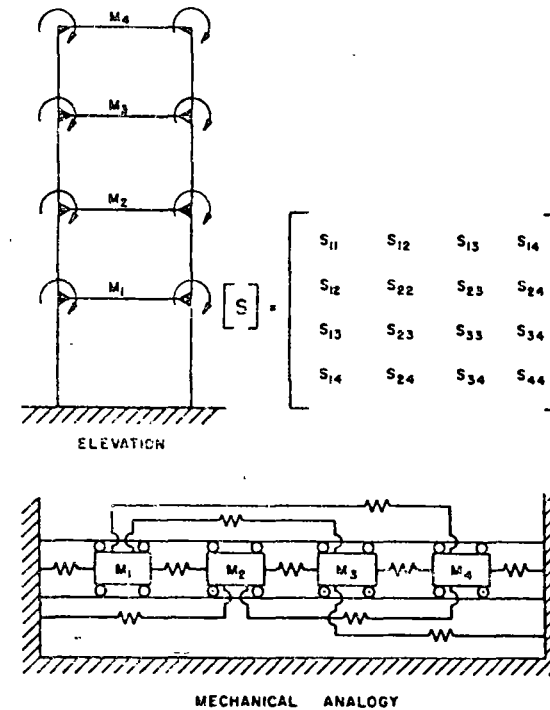


FIG. 2.—A FAR-COUPLED SYSTEM

terial from one type of program to another, a great deal was learned about important parameters that affect periods, mode shapes, stiffnesses, and damping coefficients.

### PERIODS WITH VARIOUS STIFFNESS CHARACTERISTICS

The variations in natural periods of vibration under Case a, Case b, and Case c were explored. A total of 11 Case a models, 26 Case b models, and 26 Case c models were used for this purpose. All the Case a model girders were assigned infinite moment of inertia and their columns infinite gross area for axial loads. However, the columns were allowed to deform laterally in story shear under both flexure and shear in accordance with their actual properties. Case b models were assigned actual stiffness values for all members except that the infinite column areas were retained. Case c models had actual stiffness values for all members. Four of the basic models in this ratio study were assigned various values of the girder moments of inertia to create more models. These are designated by the basic structure number, SN, followed by the average value of the midheight girder moment of inertia, designated  $I_G$ , (inches<sup>4</sup>) shown in parenthesis. For example, basic model SN 11, with  $I_G = 579$  in.<sup>4</sup>, under the three freedom cases, Cases a, b, and c, respectively, would be designated: 11 a; 11 (579) b; 11 (579) c. If  $I_G$  was not varied, no parenthesis designation was used.

The SN 5 series was based on a three-story steel frame used by Schenker (4). It was necessary to assign values for column gross area (for axial resistance) and column shear area,  $A_v$ , for shear resistance. This was done by reference to a handbook of steel rolled shapes. In addition to the basic  $I_G$  value of 1675 in.<sup>4</sup>, other models were created with  $I_G$  values of 503, 838 in.<sup>4</sup>, 1,117 in.<sup>4</sup>, and 1,340 in.<sup>4</sup>, as well as infinity for the Case a condition.

The SN 9 series was based on a four-story steel frame used by Berg (5). The basic frame was SN 9 (290). Other models were created with  $I_G = 217$ , 362 and 434 in.<sup>4</sup>, and infinity. All girders had their moments of inertia changed proportionately to the  $I_G$ -values.

The SN 11 series was based on a three-bay, eight-story model used by Berg (5). In this series, alternate models were made with  $I_G = 290$ , 579, 869, and 1,158 in.<sup>4</sup>, and infinity for Case a. All girders had their moments of inertia changed proportionately to the  $I_G$ -values.

Fig. 3 shows four models, SN 14, 15, 16, and 17, used by Housner and Brady (6). These structures were assumed in this investigation to represent narrow, one-bay wide buildings rather than units of wider buildings. Thus over-all flexure was of considerable importance with the tall models. Only two sets of  $I_G$  values were used—those shown in Fig. 3, and infinity for Case a. Column gross areas and effective shear areas that were reasonably consistent with the column moments of inertia provided by Housner and Brady (6) were used. Complete agreement was not needed, however, since all the models used in this period ratio study are consistent within themselves and not dependent upon any values or data from outside sources.

SN 18 is an 18-story steel building frame as reported by Rubinstein, (3, 9). The author provides data on the frame centerline dimensions, moments of inertia, and column areas, but not the stiffnesses *per se*. It was necessary to estimate column widths and effective shear areas for this study.

The models, SN 61 and 62, represent the two vertical planes of a four-story reinforced concrete test structure at the Atomic Energy Commission's Nevada Test Site (23). The building is 12 ft by 20 ft in plan, and each story is 9 ft, floor to floor. There are four rectangular columns and the floor system is beam and slab. The effective modulus of the concrete was assumed to be 3,000 kips per sq in. The calculated periods agree well with the periods measured under vibration. There are no walls, partitions, or stairways in the building. SN 61 is for the plane parallel to the 20-ft dimension and SN 62 is for the other plane. Only one  $I_G$ -value, besides infinity for Case a, was used with SN 61. However, SN 62 was subjected to a variation of hypothetical  $I_G$ . In addition to the calculated 4,350 in.<sup>4</sup> value and infinity for Case a, arbitrary

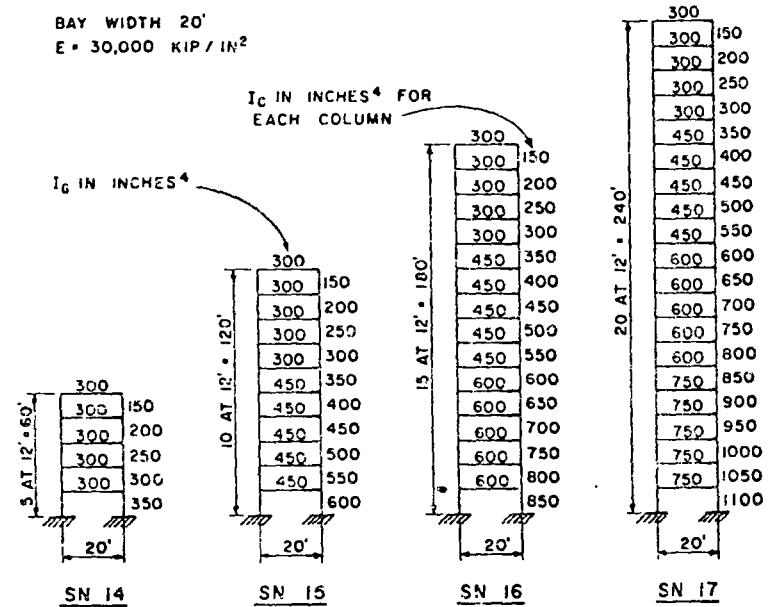


FIG. 3.—FRAMES FOR SN 14, 15, 16 & 17

values of 1,000, 2,000, 8,000, 16,000 and 24,000 in.<sup>4</sup> were used for this portion of the study.

Model SN 68 was developed by analysis of an actual 10-story reinforced concrete building. The building, which is privately owned, is 229 ft long in the direction under consideration. The height of 124 ft is composed of a 16-ft lower story and 9 stories of 12 ft. The modulus of elasticity of the concrete was taken as 2710 kips per sq in. The floor systems of concrete beam and slab were considered fully effective in the moment of inertia computations;  $I_G = 122,000$  in.<sup>4</sup>

Table 1 is a tabulation of the calculated natural periods of vibration for the lowest three modes. All  $I_G$ -values are the average, midheight values as defined. Case a is actually a special condition of Case b, with infinite girder rigidity. The relative periods between Cases a and b are striking. re can

no doubt that joint rotation is important. The effect of joint rotation on period is generally less for the second mode than for the fundamental, and less for the third mode than for the second. Over-all flexure has less effect on period than joint rotation. SN 18 is the only model for which a comparison of

TABLE 1.—MODELS, CONDITIONS, AND NATURAL PERIODS

SN	Number of Stories	Width, in feet	I <sub>G</sub> , in inches <sup>4</sup>	Computed Periods of First Three Modes, in seconds	
				Case a or Case b, as shown	Case c
5	3	60	503	(b) 1.06, 0.35, 0.23	1.06, 0.35, 0.23
			838	(b) 0.96, 0.33, 0.22	0.96, 0.33, 0.22
			1117	(b) 0.92, 0.32, 0.22	0.92, 0.32, 0.22
			1340	(b) 0.90, 0.31, 0.22	0.90, 0.31, 0.22
			1675	(b) 0.87, 0.31, 0.22	0.88, 0.31, 0.22
9	4	60	∞	(a) 0.75, 0.28, 0.21	
			217	(b) 2.12, 0.76, 0.46	2.13, 0.76, 0.46
			290	(b) 2.00, 0.73, 0.45	2.00, 0.73, 0.45
			362	(b) 1.92, 0.71, 0.44	1.92, 0.71, 0.44
			434	(b) 1.86, 0.70, 0.43	1.86, 0.70, 0.43
11	8	60	∞	(a) 1.51, 0.62, 0.40	
			290	(b) 2.86, 1.08, 0.65	2.88, 1.08, 0.65
			579	(b) 2.37, 0.94, 0.57	2.40, 0.95, 0.57
			869	(b) 2.18, 0.89, 0.54	2.21, 0.90, 0.54
			1158	(b) 2.08, 0.86, 0.52	2.11, 0.87, 0.52
14	5	20	∞	(a) 1.72, 0.77, 0.46	
			300	(b) 1.53, 0.50, 0.28	1.54, 0.51, 0.28
15	10	20	∞	(a) 0.91, 0.35, 0.22	
			300	(b) 2.57, 0.92, 0.53	2.66, 0.94, 0.53
16	15	20	∞	(a) 1.40, 0.54, 0.34	
			450	(b) 3.43, 1.27, 0.75	3.77, 1.32, 0.76
17	20	20	∞	(a) 1.79, 0.70, 0.43	
			525	(b) 4.14, 1.55, 0.94	4.84, 1.66, 0.95
18	18	45	∞	(a) 2.12, 0.84, 0.52	
			12480	(b) 3.28, 1.22, 0.73	3.61, 1.28, 0.74
61	4	20	∞	(a) 1.76, 0.71, 0.42	
			9530	(b) 0.35, 0.11, 0.064	0.36, 0.11, 0.064
62	4	12	∞	(a) 0.24, 0.082, 0.054	
			1000	(b) 0.55, 0.15, 0.071	0.56, 0.15, 0.071
			2000	(b) 0.44, 0.13, 0.066	0.45, 0.13, 0.067
			4350	(b) 0.35, 0.11, 0.061	0.36, 0.11, 0.061
			8000	(b) 0.30, 0.10, 0.057	0.31, 0.10, 0.057
58	10	229	16000	(b) 0.26, 0.088, 0.054	0.28, 0.091, 0.054
			24000	(b) 0.25, 0.084, 0.053	0.27, 0.088, 0.053
			∞	(a) 0.22, 0.075, 0.050	
			122000	(b) 0.97, 0.32, 0.19	0.99, 0.32, 0.19
			∞	(a) 0.58, 0.20, 0.12	

over-all flexure effects is possible. Rubinstein (9) obtained an increase in the fundamental period, with column axial freedom, of 10%. The same percentage increase is shown by the period values of T<sub>1b</sub> = 3.28 sec and T<sub>1c</sub> = 3.61 sec in Table 1. The actual period values are slightly different from Rubinstein's, no doubt because of the assumptions made about column width, effective spans

and effective column shear areas; i.e., the models are not quite the same in the two studies. The Southwell-Dunkerley approximation (7, 24) may be used as a basis to isolate the fundamental periods that would exist in pure over-all flexure or in other hypothetical types of isolated freedom. As an example, SN 18 would have the following isolated periods, in seconds, if its freedom parameters could exist alone:

$$T_{1jr} = \sqrt{T_{1b}^2 - T_{1a}^2} = \sqrt{3.28^2 - 1.76^2} = 2.77$$

$$T_{1f} = \sqrt{T_{1c}^2 - T_{1b}^2} = \sqrt{3.61^2 - 3.28^2} = 1.51$$

in which jr refers to joint rotation and f to over-all flexure. Over-all flexure is almost as important in the fundamental mode period as Case a shear for this unusual structure.

*Joint Rotation Index, ρ, for Case b Conditions.*—The stiffness of a frame member in flexure is related to its EI/L ratio, in which L = the member span. The relative flexural stiffness of girders and columns largely determines the importance of Case b versus Case a. The stiffness of a frame can be calculated by any one of many structural procedures. However, what is wanted here is not stiffness per se, but a reasonable and readily obtained index not only for a bare frame but also for later use with entire building assemblies. Let I<sub>G</sub> = the effective moment of inertia of a girder and its connected floor system, and let I<sub>C</sub> = the effective moment of inertia of a column together with any connected materials. Assume that the girder and the column are connected so as to retain the right angle between them under the imposed loading. A joint rotation index, ρ, may then be introduced which is defined as follows:

$$\rho = \frac{\sum_{\text{all}} \frac{I_G}{L_G}}{\sum_1 \frac{I_C}{L_C}} \dots \dots \dots (6)$$

in which the summations for all girders and columns are to be taken across one story of the building for the story columns (and floor system) closest to the midheight of the building. If the girders or columns change at the midheight story, values of the two adjacent stories should be averaged. If different materials are involved, transformed areas with consistent E-units must be used. The I- and L-values must be in consistent units.

The concept of I<sub>G</sub> is then extended to include the contribution of all horizontal members and elements that would resist rotation of the floor system—girders, beams, spandrels, floor or spandrel trusses, joists, slabs, decking, etc. Unless there is reason to expect otherwise, all the members are assumed to contribute to I<sub>G</sub>, and to act as composite elements with a common neutral axis. Likewise the summation of I<sub>C</sub>/L<sub>C</sub> is to include all vertical elements in the story—columns, walls, piers, pilasters, core units (defined as hollow vertical members created by the walls of elevator, stair, and/or utility shafts), etc. The vertical elements may occur at any location of the floor plan so long as there is reasonable symmetry. If the floor system should be very flexible as compared to the vertical or column system, very low ρ-values will result and distributed mass modeling may be preferable to lumped-mass

models (17). A solid wall, with no framing or effective spandrels in the story, is considered to have no  $I_G$  and thus  $\rho = 0$ . A wall with small openings and thus short spandrels and piers may be considered to be a unit member for dynamic analysis rather than a system of many spandrels and piers. Of course, internal stresses in the individual segments would be determined as required for structural purposes.

For the models of Table 1,  $\rho$ -values were calculated and are plotted in Fig. 4 against  $R_{iba}$ , the ratio of  $T_{ib}/T_{ia}$  for the first mode. In order not to make

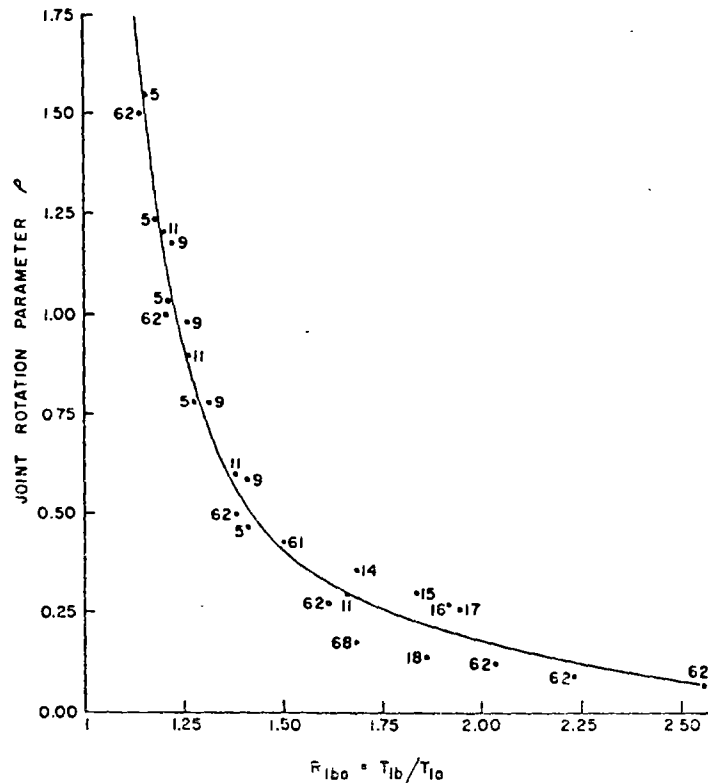


FIG. 4.—EFFECT OF JOINT ROTATION ON FUNDAMENTAL PERIOD  
Numbers alongside points are structure numbers, SN. Where more than one is shown, the model frame,  $I_G$ , was varied. See text and Table 1.

the figure too congested, the  $I_G$ -values are not shown. However, the models can be identified by reference to Table 1. In all cases, the greatest  $\rho$ -values are associated with the greatest  $I_G$ -values. Thus the SN 11 models would be 11(1158), 11(869), 11(579) and 11(290) from the top down. The corresponding  $\rho$ -values are 1.20, 0.902, 0.600, and 0.300.  $R_{iba}$  refers to the period of ratio of mode,  $i$ , under Case b freedom to the same mode  $i$  under Case a freedom. Fig. 4 shows good correlation for the fundamental mode down to  $\rho$ -values of about 0.25. Similar plots have been made for the second and third modes. The

second mode also has good correlation and the third mode is not as good, especially for the lower  $\rho$ -values. The building models for these ratios purposely include a wide range of heights, slenderness ratios, girder spans, column sizes, and other parameters in both steel and concrete construction. Fig. 5 indicates mean values of  $\rho$  versus period ratios,  $R_{iba}$ , for modes 1, 2, and 3.

It is clear that joint rotation is an important factor in determining the periods of buildings, especially contemporary buildings which have longer spans

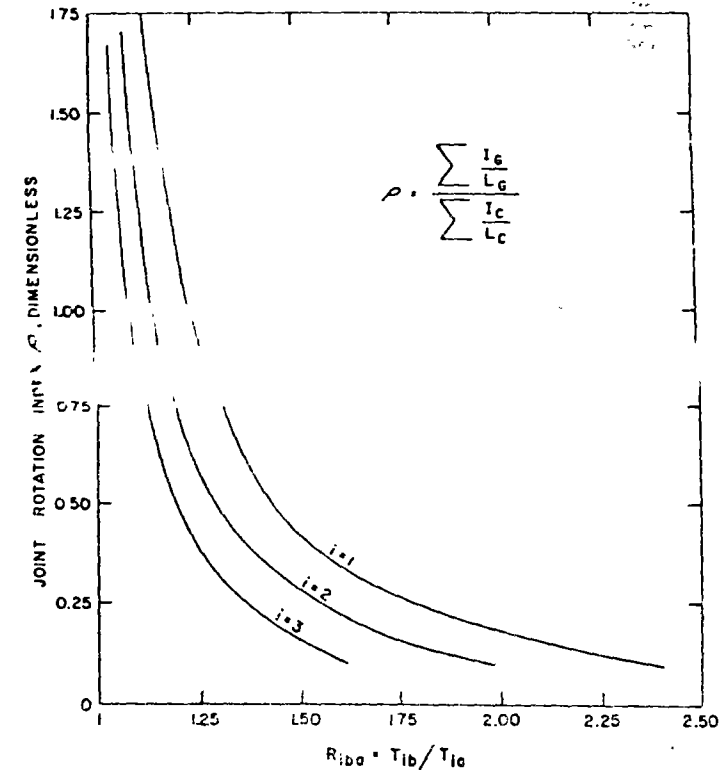


FIG. 5.—JOINT ROTATION INDEX AND  $R_{iba}$   
The value of  $\rho$  is taken at the mid-height story. See text relating to Eq. 6.

and less floor stiffness than traditional buildings (18). Although the importance decreases with increasing mode number, it is still a significant factor at  $\rho$ -values of 1.00 or more. At a  $\rho$ -value of infinity, there would be no joint rotation, and  $R_{iba}$  would be unity. At a  $\rho$ -value of zero, there would be no resistance to joint rotation and  $R_{iba}$  would be infinity, indicating vertical cantilever columns or piers with no moment resistance applied at the girder levels. Fig. 5 may be applied to other framed structures, or to box-like structures the walls of which are so penetrated with large openings, the walls may be analyzed as frames with joint rotation caused by girder structure. Fig.

5 is not intended to provide for solid wall structures or for walls with small openings that could be ignored. If openings are only of nominal size and there are short spans of wall spandrels or piers, a modified  $\rho$  should be employed which introduces shear as well as flexural freedom. Combinations of walls and frames often result in small  $\rho$ -values (17).

*Over-all Flexure Index,  $\Omega'$ , for Case c Conditions.*—It is desirable to have an index to measure the importance of over-all flexural freedom that would

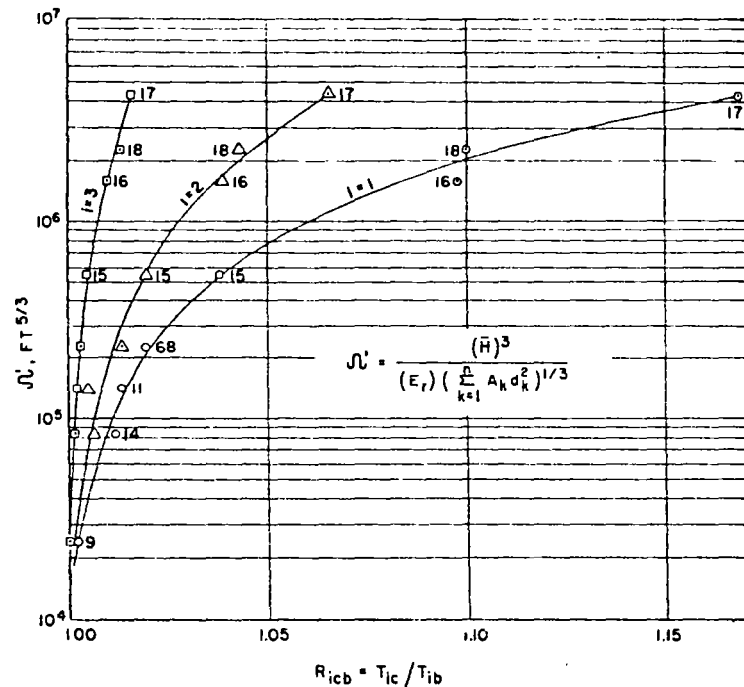


FIG. 6.—OVER-ALL FLEXURE INDEX AND  $R_{1cb}$

be reasonably simple to calculate for actual buildings. A comprehensive study of  $R_{1cb}$  versus various trial relationships led to

$$\Omega' = \frac{(\bar{H})^3}{(E_r) \left( \sum_{k=1}^{\text{all}} A_k d_k^2 \right)^{1/3}} \dots \dots \dots (7)$$

in which  $\Omega'$  is in units of feet<sup>5/3</sup>;  $\bar{H}$  = the height of the building from the base to the roof line, in feet;  $A_k$  = the gross area of a continuous vertical element or member  $k$  (such as columns, piers, pilasters, and walls) at the story closest to the midheight of the building, in square feet (if columns change at the midheight story, the average values of  $A$  from the adjacent stories are used);  $d_k$  = the normal distance in the direction of motion from the center of member  $k$  to the centerline of the floor plan, in feet;  $E_r$  = ratio of the modulus of

elasticity divided by 30,000 kips per sq in. dimensionless. (Example: If material is concrete with  $E_c = 3,000$  kips per sq in.,  $E_r = 3,000/30,000 = 0.1$ .) The value of  $\Omega'$  is to be calculated for only one story, that closest to the mid-height of the building, as for the joint rotation index,  $\rho$ .

Fig. 6 shows  $\Omega'$  plotted against rigorously computed values of  $R_{1cb}$  for the lowest three modes of several building models. There is excellent correlation, with minor exceptions. The smooth curves represent mean values. The over-all flexure contribution to the fundamental period is not great, except for tall, slender models such as SN 16, 17, and 18 with height to depth ratios of 9, 12, and 6.2, respectively. The higher mode periods are affected less, as shown. For the low sensitivity of  $\Omega'$ , Fig. 6 provides satisfactory approximations for the increase in period caused by over-all flexure. It is not intended for use when  $\rho$  is small and girder shear is negligible; then  $R_{1cb}$  would approach unity.

PERIOD SYNTHESIS

Although theory with the aid of digital computers is capable of solving complex problems in multistory building dynamics, there are reasons that indicate less rigorous procedures in many cases. Not the least of these is to avoid the preparation of hundreds or thousands of data cards for large buildings, often under uncertainty as to real member stiffnesses. Two new concepts will be presented—"period synthesis" (PS) for developing periods from building drawings, and "pseudo-stiffness procedures" (PSP) for determining other structural-dynamic characteristics from the design drawings or from measured data. PS and PSP complement and reinforce each other in many situations. This section covers period synthesis and the section following covers PSP. The purpose of period synthesis is to compute or to estimate natural periods of vibration under Case b, Case c, or Case d freedom with the simple procedures associated with rigid-floor, Case a freedom.

*Operations in Period Synthesis.*—The stiffnesses for  $T_{1a}$  and the periods per se are relatively easy to calculate by hand methods or by computer. The close-coupled system with rigid floors provides the easiest form of structural deformation analysis, and computer operations, if used, require minimum storage, time, and data card preparation. In order to retain these advantages and to obtain a reasonable and useful approximation of actual period, ratios are employed together with geometric parameters and semi-theoretical, semiempirical data. The following steps are involved in period synthesis under freedom cases, Cases a, b, and c. Calculate the story weights, the joint rotation index,  $\rho$ , and the over-all flexure index  $\Omega'$ . Calculate the story stiffnesses under the assumption that all floors and the roof system are infinitely rigid. The shear and flexural stiffnesses of all columns, walls, piers, pilasters and other vertical elements are to be included. Calculate the shear system periods  $T_{1a}$ . This may be done by hand if only a few stories are involved, or by computer using simple Case a programs. An iterative method based on rigid-floor conditions—the Holzer-Blume building procedure (25)—is suitable for desk methods. The mode shapes under Case a conditions would be a by-product of these computations. If only the fundamental mode is of interest, the Rayleigh method may be used (25). Obtain  $R_{1ba}$  and  $R_{1cb}$  ratios from Figs. 5 and 6, respectively. Calculate the values of  $T_{1b}$  and  $T_{1c}$  using



$$T_{ib} = T_{ia} \times R_{iba} \dots\dots\dots (8)$$

$$T_{ic} = T_{ia} \times R_{iba} \times R_{icb} = T_{ib} \times R_{icb} \dots\dots\dots (9)$$

These equations are true by definition. If there are reliably measured data available, such as the fundamental mode period, advantage should be taken of the known data. In the event of redundant or surplus information, the measured items are retained. It must be assumed in the absence of other data that the known periods are for the general freedom case, Case d, or Case c if the base conditions are obviously quite rigid.

*Example of Period Synthesis.*—The 8-story building model (5), SN 11 (579), will be used as an example of period synthesis. The ground is assumed to be rigid. Pertinent data are,  $\bar{H} = 102.5$  ft,  $L_c = 150$  in. The midheight story has 3 girders of  $I_G = 579$  in.<sup>4</sup> and  $L_G = 240$  in. The columns must be averaged

TABLE 2.—COMPARISON OF VALUES OBTAINED BY PERIOD SYNTHESIS AND BY EXACT CALCULATION

Parameter	By Period Synthesis	By Exact Calculation
$T_{ia}$	1.72, 0.767, 0.461	1.72, 0.767, 0.461
$T_{ib}$	2.34, 0.943, 0.530	2.37, 0.944, 0.573
$T_{ic}$	2.39, 0.952, 0.530	2.40, 0.949, 0.573

since they change section. There are 2-10 W 72 and 2-10 W 85 below, and 2-8 W 48 and 2-12 W 58 above the midheight level. Therefore

$$\sum \frac{I_G}{L_G} = \frac{3 \times 579}{240} = 7.23$$

$$\sum \frac{I_C}{L_C} = \frac{2}{150} \left( \frac{183.7 + 420.7}{2} + \frac{476.1 + 723.3}{2} \right) = 11.3$$

From Eq. 6,  $\rho = 7.23/11.3 = 0.638$ . Exterior column average area =  $(21.18 + 14.11)/2 = 17.65$  sq in.; interior column average area =  $(24.98 + 17.06)/2 = 21.02$  sq in. Substituting in Eq. 7,

$$\Omega' = \frac{(102.5)^3}{(1) \left( 2 \times \frac{17.65}{144} \times 30^2 + 2 \times \frac{21.02}{144} \times 10^2 \right)^{1/3}} = 172,000 \text{ ft}^{5/3}$$

Case a story stiffnesses,  $S_{aj}$ , based upon equal element heights,  $h_j$ , and rigid but sliding floor systems, may be obtained by

$$S_{aj} = \frac{12 E_f}{h_j} \sum_{k=1}^{\text{all}} \frac{1}{\Phi_k} \dots\dots\dots (10)$$

in which  $\Phi_k = \frac{h_j^3}{I_k} + \frac{30}{A_{vk}} \dots\dots\dots (11)$

in which  $I_k$  = the moment of inertia of vertical element  $k$ , and  $A_{vk}$  = its effective shear area. Units are kips and inches.

Story stiffness values computed for SN 11 (579) are 188, 310, 211, 211, 125,

125, 44.2, 44.2 kips per in. from the first story to the top story. The story weights and rigid-floor stiffnesses were used to compute  $\{T_{ia}\} = 1.720$  sec, 0.767 sec, 0.461 sec. From Fig. 5, using  $\rho = 0.638$ , obtain  $R_{iba} = 1.36, 1.23, 1.15$ . From Fig. 6, using  $\Omega' = 172,000 \text{ ft}^{5/3}$  obtain  $R_{icb} = 1.02, 1.01, 1.00$ .

By Eqs. 8 and 9 and with  $T_{ia}$  from above,  $T_{ib} = (1.720)(1.36) = 2.34$  sec;  $T_{2b} = (0.767)(1.23) = 0.943$  sec;  $T_{3b} = (0.461)(1.15) = 0.530$  sec =  $T_{3c}$ ;  $T_{1c} = (2.34)(1.02) = 2.39$  sec; and  $T_{2c} = (0.943)(1.01) = 0.952$  sec. Comparisons of the values of  $T_{ia}$ ,  $T_{ib}$ , and  $T_{ic}$  obtained by period synthesis and by exact calculation are shown in Table 2. Many real buildings of known periods were subjected to period synthesis with similar comparisons. The accuracy is less, of course, with small  $\rho$ -values.

THE PSEUDO-STIFFNESS CONCEPT AND PROCEDURES

There is only one true vector of story stiffnesses for the Case a rigid-floor, shear system; this applies, of course, to any and all modes. But it has been shown that joint rotation and over-all flexure affect the natural periods of lumped-mass building models, and also that the effect varies from mode to

TABLE 3.—STORY PSEUDO-STIFFNESSES FOR SN 62 (4350) c

Story	Mode 1, in kips per inch	Mode 2, in kips per inch	Mode 3, in kips per inch	Mode 4, in kips per inch
4	148.7	229.3	365.7	514.2
3	179.3	245.7	412.0	565.1
2	198.4	347.1	389.4	549.8
1	318.0	426.7	597.8	809.2
Average	211.1	312.2	441.2	609.6

mode. If a building with more freedom than the Case a condition should be analyzed as though it were a Case a problem, the results would be erroneous. If the analysis input was mass and shear stiffness, the output periods and mode shapes would not represent those for the real structure. If the input should be true masses, periods, and mode shapes, the output story stiffnesses would be false. However, it is desirable—in seeking a simplified method of determining periods, mode shapes, stiffnesses, and the relative distortion contributions of shear, joint rotation, over-all flexure, and base motion—to retain the many advantages of Case a analysis which is a minor effort compared to formal analysis for Case b, c, or d. The pseudo-stiffness concept that follows will use false, or pseudo, story stiffnesses under Case a computations, but will determine how false the stiffnesses are and will apply necessary corrections.

To provide a simple example of false, or pseudo, stiffnesses, SN 62 (4350) c was analyzed as though it had Case a rigid floors. True periods, masses and mode shapes were used as input to obtain the pseudo-stiffnesses listed in Table 3. The stiffnesses increase with mode number because the effects of joint rotation and over-all flexure decrease with the higher modes. The modal data could be pooled in a least squares best solution and this has been done in this work and by Nielsen (26). However, the stiffnesses produced would be

brid values, not identified with the actual freedom conditions and thus not suitable for distortion and stress analysis.

Several buildings and building models with more degrees of freedom than Case a were analyzed, all with similar results—the pseudo-stiffnesses vary with the mode and become greater as the mode becomes higher.

*Development of Pseudo-Stiffness Procedures.*—The pseudo-stiffness concept is proposed to relate the periods and pseudo-stiffnesses of buildings of any type of freedom to the periods and stiffnesses of close-coupled rigid-floor shear systems in consideration of: (1) Modal data if available in sufficient degree; (2) building parameters as set forth under "Period Synthesis," above; or (3) combinations of items 1 and 2. All period and stiffness computations are conducted under simple Case a rigid-floor, shear system conditions regardless of the actual coupling or the type and degrees of freedom in the building. Mode shapes are produced as well as real stiffnesses and periods.

Let  $S_p$  denote pseudo-stiffness. Thus,  $S_{1p}$  refers to a pseudo-stiffness for the first mode;  $S_{2pc}$  the pseudo-stiffness for combined shear, joint rotation, and over-all flexure for the second mode; etc. For a one-mass system, stiffness varies as the inverse of period squared. Given a period,  $T_a$ , for locked joints, and a longer period,  $T_b$ , when the joints are allowed to rotate,

$$\left. \begin{aligned} \frac{S_{pb}}{S_a} &= \frac{T_a^2}{T_b^2} = \frac{1}{(R_{ba})^2} \\ S_{pb} &= \frac{S_a}{(R_{ba})^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

Likewise,  $S_{pc} = \frac{S_a}{(R_{ca})^2} = \frac{S_a}{(R_{cb} \times R_{ba})^2} \dots\dots\dots (13)$

and  $S_{pd} = \frac{S_a}{(R_{da})^2} = \frac{S_a}{(R_{dc} \times R_{cb} \times R_{ba})^2} \dots\dots\dots (14)$

Let  $\{S_{ipx}\}_{av} = \frac{\{S_a\}_{av}}{(R_{ixa})^2} \dots\dots\dots (15)$

in which  $\{S_{ipx}\}$  = the pseudo-stiffness vector for the  $i^{\text{th}}$  mode and for the degree of freedom,  $x$ , which may be Case b, c, or d;  $R_{ixa}$  = the ratio  $T_{ix}/T_{ia}$  for the  $i^{\text{th}}$  mode and freedom index,  $x$ ; and  $\{ \}_{av}$  represents the average value of all the elements in the vector.

In order to test the relationship postulated, the building frames and buildings previously used were utilized in the following manner: The Case c values for period and mode shape calculated rigorously were used, together with the story weights, as input to a close-coupled program. The output of such runs are pseudo-stiffness vectors that are compatible with the correct periods and mode shapes for the actual freedom in the systems. The Case a stiffness vectors were also computed. Then the averages of the elements in the vectors were computed and Eq. 15 was used to solve for  $R_{ica}$  for each of the first three modes. Independent values of  $R_{ica}$  were obtained from the rigorous calculations by simply taking the ratios of Case c periods over Case a periods, or  $R_{ica}$ . The values computed by Eq. 15 are close to the actual in many cases and the worst case, SN 18, has only about 10% error. Since this is an unusual structure with 45-ft spans and a high first story (3), it was decided not to modify the equation by regression analysis or other means.

There are several ways of developing or obtaining story pseudo-stiffnesses. Where measured mode shapes and periods are available, stiffnesses can be obtained by direct computation using a Case a type program. The input period, masses, and mode shapes will be compatible with the output stiffnesses and with the definition—"the false stiffnesses necessary to produce correct dynamic properties using a close-coupled, rigid-floor assumption in calculation." If, for example,  $T_{ia}$  is known,  $\{S_{1pd}\}$  will be obtained. Where period ratios are known or can be estimated, the average pseudo-stiffness can be computed from Eq. 15. With this value, the specific story values can simply be estimated by reference to the building geometry or by reference to the rigid-floor shear values,  $\{S_a\}$ , or by both. A direct and generally satisfactory method is to use the assumption that the story pseudo-stiffnesses are proportional to the average pseudo-stiffnesses, as follows:

$$\frac{\{S_{ipx}\}_{av}}{\{S_a\}_{av}} = \frac{\{S_{ipx}\}_j}{\{S_a\}_j} \dots\dots\dots (16)$$

but by equating equal terms from Eq. 15,

$$\{S_{ipx}\}_j = (R_{iax})^2 \{S_a\}_j \dots\dots\dots (17)$$

Another method of obtaining pseudo-stiffness vectors has application to the fundamental mode. If the deformation of the building is known or can be calculated under assumed static lateral forces or displacements, stiffnesses compatible with the conditions can be computed under the close-coupled assumption. This approximation is especially useful in considering base translation or rocking in the soil.

$$\text{story pseudo-stiffness} = \frac{\text{story shear}}{\text{net story deflection}} \frac{V}{\Delta} \dots\dots\dots (18)$$

*Pseudo-Stiffness Procedure Zero (PSP-0).*—This procedure is for the situation where no field measurements are available on periods or mode shapes. It could apply to calculations for a building not yet constructed, or to one for which it is not feasible to obtain actual vibration data. The design drawings are available and it is desired to estimate the periods and mode shapes for the first three natural modes of a building that is far-coupled and may also have significant over-all flexure. Base rocking will be assumed as insignificant here. The procedure combines period synthesis operations and PSP.

The story weights, the joint rotation parameter,  $\rho$ , and the over-all flexure parameter,  $\Omega$ , are calculated. Eq. 6 is used for  $\rho$ , and Eq. 7 for  $\Omega$ . Values of  $R_{iba}$  are obtained from Fig. 5 and values of  $R_{icb}$  from Fig. 6. The story stiffnesses,  $S_a$ , are then calculated under the assumption that all floors and the roof of the building are infinitely rigid. The shear system periods,  $T_{ia}$ , are obtained with a Case a computer program, or by an iterative procedure such as the Holzer-Blume building procedure (25). The rigid-floor mode shapes are also obtained in this step. The  $T_{ib}$  and  $T_{ic}$  periods are calculated with Eqs. 8 and 9;  $(R_{iax})^2$  is then calculated for each mode and freedom case of interest, and the story pseudo-stiffnesses are obtained from Eq. 17. The story pseudo-stiffnesses are entered into a rigid-floor program, or else calculations may be conducted by iteration, to obtain periods and mode shapes for each mode of interest. The periods should essentially agree with those developed previously by period synthesis. If they do not, the work should be reviewed.

Although the above operations seem long and involved, as for any step-by-step explanation, they really are not, considering the sparse initial data and the fact that a far-coupled system with over-all flexure is analyzed as a simple shear system with close-coupling. If the mode shapes are not required for the Case b and Case c conditions, it is not necessary to proceed beyond the use of Eqs. 8 and 9.

Example of PSP-0 with SN 11 (579)c.—SN 11 ( $U_G = 579$ ) was used previously as an example of period synthesis. These steps constitute the period determination phase of PSP-0. The  $(R_{iax})^2$  values are calculated as follows:

$$(R_{1ab})^2 = \frac{1}{(1.36)^2} = 0.540$$

$$(R_{2ab})^2 = \frac{1}{(1.23)^2} = 0.660$$

$$(R_{3ab})^2 = \frac{1}{(1.15)^2} = 0.758 = (R_{3ac})^2$$

$$(R_{1ac})^2 = \frac{1}{(1.36 \times 1.02)^2} = 0.520$$

$$(R_{2ac})^2 = \frac{1}{(1.23 \times 1.01)^2} = 0.649$$

The story pseudo-stiffnesses are obtained by Eq. 17; they are listed in Table 4. The pseudo-stiffnesses are used to calculate the mode shapes as-

TABLE 4.— SN 11 (579) PSEUDO-STIFFNESSES

Story	$S_{1pb}$ , in kips per inch	$S_{2pb}$ , in kips per inch	$S_{3pb,c}$ , in kips per inch	$S_{1pc}$ , in kips per inch	$S_{2pc}$ , in kips per inch
8	23.8	29.1	33.4	22.9	28.6
7	23.8	29.1	33.4	22.9	28.6
6	68.0	83.2	95.5	65.5	81.8
5	68.0	83.2	95.5	65.5	81.8
4	114	140	161	110	138
3	114	140	161	110	138
2	168	206	236	162	202
1	102	125	143	98.3	123
Average	85.2	104	120	82.1	103

suming a rigid-floor condition. The data shown in Table 4 were used, in this case, in a computer program to obtain periods and mode shapes. The mode shapes of the Case c condition are essentially the same as for the Case b condition, as might be inferred from the low values of  $R_{icb}$ . The mode shapes obtained by PSP-0 are plotted in Fig. 7 alongside the exact mode shapes. The agreement is good. The periods obtained under PSP-0 are shown in Table 5 with the actual periods. The first and second mode periods are in close agreement, and the third mode values are acceptable for practical purposes.

Pseudo-Stiffness Procedure One (PSP-1).—Pseudo-stiffness procedure one (PSP-1) is for the situation where the fundamental mode period and mode shapes are known from reliable field measurements. The building drawings

are also available. It is desired to obtain the periods and mode shapes for the second and third modes and also the shear stiffness vector  $\{S_a\}$  and the story pseudo-stiffnesses for various freedom cases and modes. The basic procedure is similar to PSP-0 except that use is made of known data and the stiffnesses are derived from the mode shape. In cases of surplus data, the measured data are employed.

The story weights, the joint rotation index,  $\rho$ , and the over-all flexure index,  $\Omega'$ , are calculated. The  $S_{ipc}$  pseudo-stiffnesses are computed from the known mode shape, period, and the story weights. A Case a program is used for this purpose. The degree of freedom is assumed to be Case c if the ground is known to be rigid, otherwise it is Case d. Values of  $R_{ixq}$  are obtained from Figs. 5 and 6 with the values of  $\rho$  and  $\Omega'$ . The factor  $(R_{1ca})^2$  is computed, and

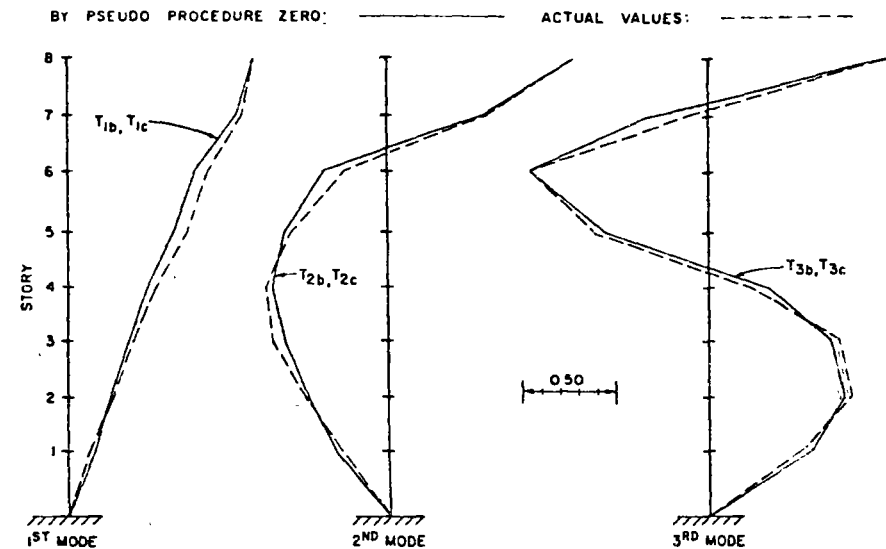


FIG. 7.—SN 11 ( $I_G = 579$ ) NORMALIZED MODE SHAPES

then the  $\{S_a\}$  vector using Eq. 17 with  $(R_{1ca})^2$  and  $\{S_{1pc}\}$ . Using the  $\{S_a\}$  vector as a base, story pseudo-stiffnesses are developed for all other desired mode-freedom cases; Eq. 17 is used. By definition,  $R_{1cx} = T_{1c}/T_{1x}$ ; therefore  $T_{1x} = T_{1c}/R_{1cx}$ , or

$$T_{1x} = (T_{1c}) (R_{1xc}) \dots \dots \dots (19)$$

Other fundamental mode periods (Cases a and b) are obtained by Eq. 19.  $\{S_a\}$  and the pseudo-stiffnesses from above are used to obtain periods for the second and third modes, Cases a and b, and mode shapes. As a comparison and check, the  $T_{2a}$  and  $T_{3a}$  periods may be used with the  $R_{ixa}$  ratios to obtain other periods, as in PSP-0. It is to be noted that the mode shapes for  $T_{1a}$  and  $T_{1b}$  would be the same as the measured shape of  $T_{1c}$  since all pseudo-stiffnesses have been changed proportionately in this procedure. This is approxima-

tion of course, but of minor importance unless  $R_{1ba}$  and  $R_{1bc}$  are exceptionally large.

PSP-2 and PSP-3.—PSP-2 applies where the first and second modes are known from field vibration measurements. The operations are similar to PSP-1 except that advantage is taken of the known data from two modes instead of one. If the field data are equally reliable for the two modes,  $\{S_a\}$  can be derived from each and then averaged, story by story, to obtain best values.

PSP-3 applies where the first, second, and third modes are measured. If the  $\rho$  and  $\Omega'$  parameters indicate very little participation of joint rotation and over-all flexure, respectively, in the third mode, this mode may produce better  $\{S_a\}$  values. Generally, however, it would be desirable to obtain a comparison from all three modes and either average directly or use weighted averages to obtain the best  $S_a$  vector. Possible ill-conditioned modal data may also be a factor in selection of the best values. The mode requiring minor or

TABLE 5.—SN 11 (579), COMPARISON OF PERIODS FROM PSP-0 TO ACTUAL PERIODS

Method	$T_{1b}$ , in Seconds	$T_{2b}$ , in Seconds	$T_{3b}$ , in Seconds	$T_{1c}$ , in Seconds	$T_{2c}$ , in Seconds	$T_{3c}$ , in Seconds
By Eqs. 8 and 9	2.34	0.943	0.530	2.39	0.952	0.530
By PSP-0	2.34	0.944	0.530	2.39	0.952	0.530
Actual	2.37	0.944	0.573	2.40	0.949	0.573

no ill-conditioned data adjustments would be preferred, at least for the stories where the ill-conditioned data exist.

GROUND COMPLIANCE

Case d freedom includes motion of the building base in an assumed elastic material. The motion may be due to translation and to rocking. The latter is considered more significant for most buildings. Since the motion of tall buildings due to soil compliance is a small part of the total motion, little error is introduced in considering the superstructure to have uniform mass and stiffness for the purpose of developing  $R_{1dc}$  (7, 16, 17). Let

$$R_{1dc} = \frac{T_{1d}}{T_{1c}} = \frac{\sqrt{\Delta_c + \Delta_g}}{\sqrt{\Delta_c}} \dots \dots \dots (20)$$

in which  $\Delta_c$  is the static deformation under Case c of the top of the building under given lateral forces, preferably the weight of the structure, inches; and  $\Delta_g$  is the deformation at the same top level due solely to the compliance of the foundation materials under the same lateral forces, in inches.

It is beyond the scope of this paper to provide detailed data for  $\Delta_g$ . Subgrade moduli of the soil are utilized together with the geometric properties of the foundations. Generally it can be assumed that the superstructure so connects the separate foundations as to develop their over-all, or gross, moment of inertia to resist rocking. By definition,

$$T_{1d} = T_{1a} \times R_{1ba} \times R_{1cb} \times R_{1dc} = T_{1c} \times R_{1dc} \dots \dots \dots (21)$$

Rocking may generally be ignored for other than the fundamental mode and it is not very significant for that because poor soil under tall buildings is compensated by lower unit bearing pressures (or perhaps with piles or caissons) and therefore greater base areas (13, 17).

A  $\Delta_g$ -value of 1 in. is arbitrarily assumed for SN 11 (579) as compared to another arbitrary value of 5.84 in. for  $\Delta_c$ . Each deflection would be caused by the same lateral force. Then

$$R_{1dc} = \frac{\sqrt{5.84 + 1.00}}{\sqrt{5.84}} = 1.08$$

Thus the real period,  $T_{1d}$ , would be 8% longer than the period  $T_{1c}$  for assumed rigid soil.

The pseudo-stiffness procedure is readily applicable to the problem of how ground compliance affects dynamic characteristics. Other applications include the determination of actual floor system stiffnesses when measured periods and mode shapes are available, and the analysis of story distortion, which enables meaningful stress analysis and the prediction of possible damage.

STORY DISTORTION AND DAMAGE PREDICTION

There is reason to believe, especially for multistory buildings located a considerable distance from the source of seismic energy, that a great deal of the greatest response motion is essentially harmonic vibration in a low natural period (23). If the building mode shapes are known and if the response is measured or can be estimated in terms of period and relative motion at one or more levels, then the relative motion at all levels can be determined from the mode shape involved. Moreover, if the structure parameters  $\{S_a\}$ ,  $\rho$ ,  $\Omega'$ , and the soil and foundation data are known, the motion can be broken down into types a, b, c, and d. The following expressions are useful:

$$S_{jix} = \frac{V_j}{\Delta_{jix}} \dots \dots \dots (22)$$

in which  $V_j$  = the shear in story  $j$ , and  $\Delta_{jix}$  = the relative story  $j$  deformation in mode  $i$  for freedom case ( $x$ ). It can be shown with Eqs. 17 and 22 that

$$\Delta_{jix} = \frac{V_j}{(R_{iax})^2 \{S_a\}_j} = \Delta_{jia} (R_{iax})^2 \dots \dots \dots (23)$$

As an example, the relative story deformation of a building has been measured or estimated to be 0.50 in. in Case d, fundamental mode. The value of  $S_a$  for the story = 8,800 kips per in., and  $R_{1da} = R_{1ba} \times R_{1cb} \times R_{1dc} = 1.17 \times 1.04 \times 1.08 = 1.32$ . From Eq. 23,  $V = 2,550$  kips and  $\Delta_a = 0.290$  in.,  $\Delta_b = 0.400$  in.,  $\Delta_c = 0.432$  in. and  $\Delta_d = 0.504$  in. The net story distortions for shear, joint rotation, over-all flexure and base rocking are therefore: 0.290 in., 0.110 in., 0.032 in., and 0.072 in., respectively. From these values, unit stresses of interest can be determined and damage, if any, can be predicted. Obviously, erroneous results would be obtained unless the various freedoms are considered. The often used assumption that all story distortion is due to shear would—in this example—lead to story shear unit stresses 72% greater

than the actual value and would neglect other important considerations such as column axial loading.

#### APPLICATION TO REAL BUILDINGS

A simple model has been used for the example problems in this paper, and it is one that was used in deriving the relationships for  $\rho$  and  $\Omega'$ . This has been done only because of space limitations. Real buildings of known (measured) periods and mode shapes were analyzed so that computed data could be compared to the actual. In 22 various period determinations by PS and by PSP methods, the ratios of computed to actual values ranged from 0.93 to 1.18, with a mean of 1.021 and a coefficient of variation of 0.078. Mode shapes compared well, with only minor exceptions. None of the structures had been used in  $\rho$  and  $\Omega'$  evaluations. It is to be recognized that in a completely rigorous analysis of a building, necessary assumptions as to floor stiffness, effective moduli of elasticity, and of the interaction of walls, stairwells and frames may lead to wide variations from the real conditions and values regardless of the scope or the formality of the analysis.

As  $\rho$  decreases below 0.25 there will tend to be less accuracy in PS and PSP results and a rigorous analysis may be desirable. However, very small values of  $\rho$  indicate that distributed mass models may also be used (7, 17).

#### SUMMARY AND CONCLUSIONS

In order to evaluate unit stresses or to estimate possible damage in multi-story buildings from lateral motion it is essential to determine how much of the dynamic response at any story level is due to shear deformation between floors, joint rotation, over-all flexure and ground compliance. Any of these freedoms may be important, especially in contemporary structures, although ground compliance is generally of least significance in the structural-dynamic properties of high-rise buildings.

Simple indices and procedures have been introduced with which the contributions of joint rotation, over-all flexure, and ground compliance in the three lowest modes of vibration may be estimated. Numerical data are provided on the effects of joint rotation and overall flexure in the three lowest modes relative to shear-building freedom over a wide range of building characteristics.

A period synthesis concept and pseudo-stiffness procedures have been proposed to enable the approximate determination of natural periods of vibration, mode shapes and stiffnesses of multistory buildings with consideration of joint rotation, over-all flexure and ground compliance while performing only simple time-saving analyses for assumed rigid-floor shear buildings. The use of the procedures on several real buildings has provided good correlation with measured characteristics.

#### ACKNOWLEDGMENTS

The material presented is a portion of a doctoral dissertation at Stanford University. The writer appreciates the many helpful suggestions of D. H.

Young throughout the work. Walter C. Hurty provided data for one of the building models. The Atomic Energy Commission, Nevada Operations Office, made data available on several of the real buildings employed in the analysis.

#### APPENDIX I.—REFERENCES

1. Blume, John A., and Hesselmeier, Harry L., "The Reconciliation of the Computed and Observed Periods of Vibration of a Fifteen-Story Building," thesis presented to Stanford University, at Stanford, Calif., in 1934, in partial fulfillment of the requirements for the degree of Engineer.
2. Goldberg, Bogdanoff, and Moh, "Forced Vibration and Natural Frequencies of Tall Building Frames," *Bulletin, Seismological Society of America*, Vol. 49, 1959.
3. Rubinstein, Moshe F., and Hurty, Walter C., "Effect of Joint Rotation on Dynamics of Structures," *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, Vol. 87, No. EM6, Proc. Paper 3028, Dec., 1961, pp. 135-157.
4. Schenker, L., "The Dynamic Response of Tall Structures to Lateral Loads," *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, Vol. 82, No. EM2, Proc. Paper 944, Apr., 1956, pp. 944-1-944-13.
5. Berg, Glen V., "Response of Multi-Story Structures to Earthquake," *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, Vol. 87, No. EM6, Proc. Paper 2790, Apr., 1961, pp. 1-16.
6. Housner, G. W., and Brady, A. G., "Natural Periods of Vibration of Buildings," *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, Vol. 89, No. EM4, Proc. Paper 3613, Aug., 1963, pp. 31-65.
7. Jacobsen, L. S., "Natural Periods of Uniform Cantilever Beams," *Transactions, ASCE*, Vol. 104, 1939.
8. Blume, John A., "Period Determinations and Other Earthquake Studies of a Fifteen-Story Building," *Proceedings, 1st World Conference on Earthquake Engineering, Earthquake Engineering Research Institute, held at Berkeley, Calif., June, 1956*.
9. Rubinstein, Moshe F., "Effect of Axial Deformation on the Periods of a Tall Building," *Bulletin, Seismological Society of America*, Vol. 54, No. 1, Feb., 1964.
10. Clough, Ray W., King, Ian P., and Wilson, Edward L., "Structural Analysis of Multistory Buildings," *Journal of the Structural Division, ASCE*, Vol. 90, No. ST3, Proc. Paper 3925, June, 1964, pp. 19-34.
11. Steinbrugge, Karl V., and Flores, Rodrigo A., "The Chilean Earthquakes of May 1960: A Structural Engineering Viewpoint," *Bulletin, Seismological Society of America*, Vol. 53, No. 2, Feb., 1963.
12. Blume, John A., "A Structural-Dynamic Analysis of an Earthquake Damaged Fourteen-Story Building," *The Prince William Sound, Alaska, Earthquake of 1964 and Aftershocks*, Vol. 2, Part A, Publication 10-3, Environmental Science Services Administration, U. S. Department of Commerce, 1967.
13. Merritt, R. G., and Housner, G. W., "Effect of Foundation Compliance on Earthquake Stresses in Multistory Buildings," *Bulletin, Seismological Society of America*, Vol. 44, No. 4, Oct., 1954.
14. Jacobsen, L. S., "Vibrational Transfer from Shear Buildings to Ground," *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, Vol. 90, No. EM3, Proc. Paper 3924, June, 1964, pp. 21-38.
15. Blume, John A., discussion of "Vibrational Transfer from Shear Buildings to Ground," by Lydik S. Jacobsen, *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, Vol. 91, No. EM1, Proc. Paper 4212, Feb., 1965, p. 166.
16. Jacobsen, L. S., and Ayre, Robert S., *Engineering Vibrations*, McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, 1958.
17. Blume, John A., "The Dynamic Behavior of Multistory Buildings with Various Stiffness Characteristics," dissertation presented to Stanford University, at Stan-

- ford, Calif., in 1966, in partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy.
18. Blume, John A., "Structural Dynamics in Earthquake-Resistant Design," Transactions, ASCE, Vol. 125, 1960, pp. 1088-1139.
  19. Tung, T. P., and Newmark, N. M., "Numerical Analysis of Earthquake Response of a Tall Building," Bulletin, Seismological Society of America, Vol. 45, No. 4, Oct., 1955.
  20. Rogers, Grover L., "Dynamics of Framed Structures," John Wiley & Sons, Inc., New York, 1959.
  21. Blume, John A., Newmark, N. M., and Corning, Leo H., "Design of Multi-Story Reinforced Concrete Buildings for Earthquake Motions," Portland Cement Association, 1961.
  22. Hurty, Walter C., and Rubinstein, Moshe F., "Dynamics of Structures," Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1964.
  23. "Progress Report Through Event Corduroy on Structural Response Investigations," Report NVO-99-08, prepared by John A. Blume and Associates Research Division under Contract AT(26-1)-99 with Atomic Energy Commission, 1966.
  24. Timoshenko, S., and Young, D. H., Vibration Problems in Engineering, D. Van Nostrand Co., Inc., Princeton, N.J., 1961.
  25. Blume, John A., discussion of "Earthquake Stresses in Shear Buildings," by M. G. Salvadori, Transactions, ASCE, Vol. 119, 1954, pp. 194-201.
  26. Nielsen, N. Norby, "Dynamic Response of Multistory Buildings," thesis presented to the California Institute of Technology, at Pasadena, Calif., in 1964, in partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy.

---

APPENDIX II.—NOTATION

---

The following symbols are used in this paper:

- $A_k$  = gross area of a continuous vertical element or member,  $k$ , (such as columns, piers, pilasters, and walls) at the story closest to the midheight of the building, in square feet;
- $A_{vk}$  = effective shear area of member  $k$ , in square inches;
- $a, b, c, d$  = subscripts indicating degrees of freedom as defined in text;
- $C$  = damping coefficient;
- $c_{jk}$  = damping coefficient, defined as the force on the  $j$ th mass exerted by the damping dashpots when the  $k$ th mass has a unit velocity and all other masses have zero velocity, in kip seconds per inch;
- $D$  = displacement parallel to the  $x$ -axis, in inches;
- $D_{M_i}$  = modal displacements in the  $i$ th mode; eigenvector;
- $d_k$  = normal distance in the direction of motion from center of member  $k$  to centerline of floor plan, in feet;
- $E$  = modulus of elasticity, in kips per square inch;
- $E_r$  = ratio of modulus of elasticity to 30,000 kips per square in., dimensionless;
- $f$  = subscript indicating flexure;
- $g$  = subscript indicating ground compliance;
- $H$  = height of building from base to the roof line, in feet;
- $I_c$  = moment of inertia of column or pier, in inches<sup>4</sup>; unless otherwise shown,  $I_c$  would be the average effective value at the midheight story level;  $I_k$  refers to  $I$  of member  $k$ ;

- $I_G$  = moment of inertia of girder, spandrel, or of floor system, in inches<sup>4</sup>; unless otherwise shown,  $I_G$  would represent the effective value (at midheight story level) of the girder and its connected floor system;
- $i$  = subscript indicating mode number;
- $j, k$  = lumped-mass or degree of freedom subscripts; in a matrix,  $j$  refers to row number and  $k$  to column number; also,  $k$  is used as a subscript denoting member or element;
- $jr$  = subscript indicating joint rotation;
- $L$  = length of member, in inches;
- $M$  = mass of a story, in kip-seconds<sup>2</sup> per inch;
- $n$  = number of stories or lumped masses;
- $p_i$  = angular frequency of the  $i$ th mode, in radians per second;
- $p_i^2$  = characteristic value, or eigenvalue of the  $i$ th mode, in radians<sup>2</sup> per second<sup>2</sup>;
- $R_{ix\alpha}$  = the period ratio  $T_{ix}/T_{i\alpha}$ , for the  $i$ th mode and freedom index  $x$ , which may be Case a, b, c, or d;
- $S_{jk}$  = stiffness influence coefficient, defined as the external force on the  $j$ th mass of the model when the  $k$ th mass has a unit displacement and all other masses have zero displacement, in kips per inch;
- $S_a$  = Case a story stiffnesses, in kips per inch;
- $S_{jipx}$  = the pseudo-stiffness of story,  $j$ , in mode  $i$  under freedom case  $x$ , in kips per inch;  $x$  may be Case a, b, c, or d;
- $SN$  = structure number, or model number;
- $s$  = a story spring factor; as subscript, indicates shear;
- $T_i$  = natural period of the  $i$ th mode, in seconds;
- $V$  = story shear, in kips;
- $W$  = weight, in kips;
- $\{X\}_{av}$  = average value of quantity  $X$  (or of any other value in the vector bracket);
- $x$  = horizontal axis parallel to motion; also, a variable designation for Case a, b, c, or d;
- $\Delta$  = net story distortion, in inches;
- $\rho$  = joint rotation index;
- $\Phi_k = h_k^2/I_k + 30/A_{vk}$  in inches<sup>-2</sup>;
- $\Omega'$  = over-all flexure index.



centro de educación continua  
división de estudios superiores  
facultad de ingeniería, unam



IV CURSO INTERNACIONAL DE INGENIERIA SISMICA

DISEÑO SISMICO DE EDIFICIOS

ESTRUCTURACION DE EDIFICIOS

M. EN C. ENRIQUE DEL VALLE C.

AGOSTO, 1978.

## STRUCTURAL DYNAMICS OF CANTILEVER-TYPE BUILDINGS

John A. Blume<sup>(I)</sup>

### SYNOPSIS

Structural and dynamic properties of buildings vary with the ratio of the stiffness of the horizontal to the vertical members and elements. Many contemporary buildings have low ratios, and perform more as cantilevers than as frames. Cantilever-type buildings are investigated over the entire range of relative stiffnesses. Traditional design methods may result in serious inadequacies. A Modified Cantilever Method is proposed to determine rapidly the natural periods of buildings having little moment restraint from the floor systems. Useful concepts and structural-dynamic data are provided for cantilever-type buildings, which type has been subject to severe earthquake damage in Chile, Anchorage and Caracas.

### GLOSSARY OF TERMS

- $A_v$  = effective shear area = gross area/ $\alpha$ ; in<sup>2</sup>
- $D_f$  = lateral flexural deflection of top of building loaded laterally with its own weight; inches
- $D_s$  = lateral shear deflection of top of building loaded laterally with its own weight; inches
- $E$  = the effective dynamic modulus of elasticity; kip/in<sup>2</sup>
- $H$  = total height of building, inches
- $I$  = moment of inertia about the axis normal to the plane of loading; in<sup>4</sup>
- $L$  = the member span, center to center of intersecting members;  $L'$  = the clear member span; inches
- $M$  = moment; in-kips (For  $\sum M$  see equation 3)
- ORM = the overall resisting moment provided by axial forces in the vertical members; in-kips
- OTM = overturning moment, or cantilever moment, due to lateral forces; in-kips
- $T_1$  = natural period of mode 1; sec
- $W$  = total weight of the building; kips
- $\alpha$  = factor for effective shear area based upon the shape; (2,3,5)  
dimensionless
- $\beta_1$  = ratio of period 1 computed with tapered flexural stiffness to that computed with average stiffness; dimensionless

---

(I) President, John A. Blume & Associates Research Division, San Francisco, California



- $\lambda$  = ratio of period computed rigorously as a lumped mass system to period by equation 11; dimensionless
- $\rho$  = index of joint rotation, or the ratio of horizontal member stiffness to vertical member stiffness at the midheight story (see equation 1)
- $\rho'$  =  $\rho$  when clear spans are used as per equation 2
- $\Sigma$  = the summation symbol
- $\phi$  = ratio of period for a pure cantilever ( $\rho = 0$ ) computed as lumped massed system to the period computed as a uniform bar

#### Subscripts

- a,b,c refer to case (a), (b), or (c) in Figure 14
- f refers to flexure
- s refers to shear
- C refers to column, or to vertical member or assembly
- G refers to girder, or to horizontal member or assembly

### INTRODUCTION

There are important reasons for considering cantilever-type buildings, including the fact that many contemporary buildings tend to respond to ground motion more as a system of slightly restrained vertical elements than as traditional rigid frames. Another reason is that buildings with spandrel or girder damage or hinging tend to function as pseudo cantilevers in subsequent earthquake response.<sup>(1)</sup> In addition, much can be learned about building dynamics including important new parameters and time-saving methods of analysis.

Whether or not a building tends to perform as a rigid frame, as a vertical cantilever, or as some combination of the two depends upon the relative stiffness and strength of the horizontal and the vertical elements. The horizontal elements may be beams, girders, joists, spandrels, floor slabs, or various combinations. The vertical elements may be columns, piers, pilasters, walls, core units (such as around stairwells and elevator shafts), or various combinations. The tendency in recent years has been to make the horizontal elements much less rigid than the vertical elements. This changes or negates much in accepted structural design practice and certain concepts regarding dynamic properties of buildings. Damage in recent earthquakes indicates that design practices must be improved for cantilever-type buildings or for structures that might become cantilever-type during earthquakes.

## BASIC TERMS AND SYMBOLS

A paper by Jacobsen in 1939<sup>(2)</sup> provided excellent data on distributed mass models of buildings which are constructed essentially of solid walls. These might be termed pure cantilever buildings, the limiting case in a whole spectrum of cantilever types in current building configurations. The other end of the spectrum is the traditional rigid frame building with deep spandrels or girders, often with stiffnesses equal to or greater than column stiffnesses. Stiffness is defined as the ratio  $EI/L$  for each member, under the assumption herein that the members remain normal to each other at the joints. For simplicity,  $E$  can be assumed constant for a building, either because there is only one material or because the analyst can use transformed areas with a single modulus of elasticity. It is necessary to have a simple index to define the degree of horizontal to vertical stiffness in a building. As previously proposed<sup>(3,4)</sup> let

$$\rho = \frac{\sum_{\text{all}} \frac{I_G}{L_G}}{\sum_{\text{all}} \frac{I_C}{L_C}} \quad (1)$$

The summations are taken for all members in the midheight story. If the girders or columns change in that story, average values from the adjacent stories are used. Stiffness ratios vary with height, although not to a great degree in most cases, especially in cantilever-type buildings.  $\rho$  is very easy to obtain and is a most useful index in this problem. If a wall should be solid, or have only insignificant openings, and be the only vertical resisting element,  $\rho$  would not exist and can be considered as zero. This would be a pure cantilever. However, if there should be some horizontal (floor) framing either between walls in the direction under consideration or elsewhere in the story, the numerator would exist and  $\rho$  would have a value other than zero, even though very small.  $\rho$  is always computed for the entire story including all members in that story.

Figure 1 indicates some partial building elevations together with approximate  $\rho$ -values based upon arbitrary assumptions as to the widths (normal to the elevation) of the horizontal and vertical members shown. Elevation (e) represents failed spandrel sections, and (f) represents a contemporary building of wall sections and flat slab floors.

In computing  $\rho$ , the height of the columns, walls, or piers would normally be taken as the full story height floor to floor, and the length of the horizontal elements, center to center of the vertical elements. In a few cases, the walls are punctured with openings of such size as to create short spans for which shear deformations would be significant. In such cases, clear spans would be used in equation 2.

$$\rho' = \frac{\sum \left( \frac{L_C'}{I_C} + \frac{30}{A_{VC} L_C'} \right)}{\sum \left( \frac{L_G'}{I_G} + \frac{30}{A_{VC} L_G'} \right)} \quad (2)$$

$\rho$ -values were computed for many rigid frames and real buildings, (3) and rigorous analyses were conducted with the aid of computer facilities to obtain the relationship of structural and dynamic characteristics to  $\rho$  and other parameters. Buildings may be generally classified as shear, shear-frame, cantilever-frame, framed cantilever, or cantilever depending upon  $\rho$  (or  $\rho'$ ) values and related characteristics. Another paper<sup>(4)</sup> has presented the effects of joint rotation, overall flexure and base compliance for the shear and shear-frame categories, which may generally be considered to have  $\rho$ -values greater than 0.10. This paper is concerned with the three cantilever types of buildings with  $\rho$ -values generally less than 0.10. It also discusses another type of building, the braced frame.

A basic concept in structural engineering is that the algebraic sum of the moments of all forces in a system in equilibrium must be zero, and all points in the system must have a set of forces and stresses that satisfy this law as well as the requirement for the algebraic sum of the forces along each axis to equal zero. The relative amount of moment resistance of any type in a building frame varies as  $\rho$  varies. At any horizontal plane including the base of the building

$$OTM + ORM + \sum M = 0 \quad (3)$$

In this equation, clockwise rotation is considered positive. All moments must, of course, be in consistent units. With this equation it is apparent that for a pure cantilever, ORM would be zero and therefore  $\sum M = -OTM$ . For a rigid frame or for a combination of framing and walls, piers and/or core units -- given a diaphragm rigid in its own plane -- there will be both ORM and  $\sum M$ . The relative amount of each -- and therefore the shears in the girders and the axial forces in the columns -- will vary if  $\rho$  varies.

#### ANALYSIS OF CANTILEVER-TYPE FRAMES

Various cantilever-type frames were analyzed rigorously under static lateral forces to obtain moments, shears, and axial forces, and also natural periods and mode shapes. In some cases girder stiffnesses were varied to obtain various  $\rho$ -values and in other cases column stiffnesses were varied. Figure 2 shows an 8-story frame used for 22 runs with various combinations of column areas and moments of inertia. Figure 3 is a 16-story frame also computed for 22 column conditions. For these models the column properties were assumed constant from top to bottom and for all columns in each run. Column widths were assumed to be 14 inches parallel to the loading.  $\rho$ -values for each frame were varied from 1.50 to 0.0001. For each value, columns were alternately allowed to deform axially (column "shortening") in overall flexure, and not to deform axially. E was taken as 30,000 kip/in<sup>2</sup>.

Structural Variations with  $\rho$ . Figures 4 and 5 show the relationship of  $\rho$  and  $\sum M$  for frames having various values of  $\rho$ , for the 8 and 16-story models. It is apparent that approximate methods of analysis which assume points of inflection at midheight of columns, or even somewhere in the lower story, are quite erroneous for  $\rho$ -values somewhat less than 0.10. Lower, and upper, story moments can be much greater than indicated by approximate methods of rigid frame analysis, as has been previously noted.<sup>(1,6,7)</sup> This is a very important point for buildings with long spans or relatively flexible floor systems; especially in the lower and in the upper stories.

Figure 6 shows the axial force in the exterior column solely from lateral forces for various stories of the 8-story frames. It is to be noted that the lower story is sensitive to  $\rho$  changes even at high values while the other stories (except the second) have essentially constant column axial forces until  $\rho$  becomes less than about 0.01. Below this value the structure is approaching the pure cantilever condition and the column axial forces therefore approach zero. Figure 7 shows similar data for the 16-story frames. The results are similar.

Figure 8 shows the shear in the exterior girder for various floors of the 8-story frames and Figure 9 for the 16-story frames. The lower levels are the most sensitive to  $\rho$ -values over the whole range. Figures 6, 7, 8, and 9 are each for the cases in which the columns are allowed to deform axially. Some of the local variations are due to frame geometry effects such as flexural rotation of the columns distorting girders.

Figure 10 indicates the ratio of the moment resisted by flexure,  $\sum M$ , to the overturning moment, at the base for various  $\rho$ -values. From equation 3, using absolute values for convenience,

$$\frac{ORM}{OTM} = 1.00 - \frac{\sum M}{OTM} \quad (4)$$

The values  $\sum M/OTM$  are plotted directly in Figure 10, and  $ORM/OTM$  may be scaled between the curves and the ratio value of 1.00. Data are shown for the base levels of the 8-story and the 16-story frame. These curves, or similar curves for other structures more representative for specific problems, are useful for various purposes including the consideration of the effects of possible  $\rho$  variations during earthquakes. If the girders should hinge,  $\rho$  would decrease and thus increase the flexural moment demands on the columns or piers while the axial forces, per se, in the vertical members would decrease. On the other hand, if the columns should hinge before the girders,  $\rho$  would increase and the columns would have less flexural moment with increased axial forces to develop the necessary RM values. The relative hazards of one type of failure over another would depend on the particular interaction characteristics of the column section and the numerical values of moment and axial forces.

Dynamic Variations with  $\rho$ . The ratios of natural periods,  $T_1/T_2$  and  $T_1/T_3$ , vary with  $\rho$  as shown in Figure 11. It is apparent that for the very low  $\rho$ -values the system is approaching the classical ratios of 6.27

and 17.6 for uniform cantilever bars in flexure. For high  $\rho$ -values the ratios are approaching the shear bar values of 3 and 5. Joint rotation is reduced with high  $\rho$ -values indicating greater relative girder stiffness; thus story "shear" predominates.(3,4) On the other hand, for buildings with  $\rho$ -values much less than unity the shear building concept (8,9) without correction (3,4,10) involves serious error in period determinations.

Figure 11 indicates the categories of buildings associated with the relative stiffness of the horizontal and the vertical elements. In the upper range where the curves are almost vertical there is the "shear" building. Immediately below this is the "shear-frame" building in which joint rotation plays an important part. In the next range, flexure and shear are both important and there may be no points of inflection in the columns of the lower story or two. This range is designated herein as the "cantilever frame". With lower  $\rho$ -values, overall flexure tends to dominate and there may be no column inflection points in many of the lower stories. This is termed here the "framed cantilever" range. Finally, at very low values of  $\rho$ , the building may be considered a cantilever for most purposes. The divisions between these categories are arbitrary and must be considered as subject to variation, and overlapping, depending upon the particular matter of interest. The popular but misleading term "shear wall" has no relationship to these categories. On the contrary, a building with "shear" walls with or without a frame will have low  $\rho$ -values and will tend to be a cantilever-type wherein flexure will often dominate over shear per se. The " $\rho$ " approach is general.

Only the shear building is subject to analysis by popular, approximate dynamic or static methods. For all others, joint rotation and overall flexure are significant or dominant, and points of column moment inflection may be far from the positions indicated by approximate frame analysis procedures. The dynamic characteristics of building types 1 and 2 have been covered in a separate paper.(4) The other three types are considered herein.

The mode shapes also vary with  $\rho$  as shown in Figure 12 for the fundamental and the second modes of the 16-story frame. The low  $\rho$ -values indicate flexural performance. The second mode nodal point is much higher with the low  $\rho$ -values and the fundamental mode shape is curved from the vertical position as shown. It has been found, however, that a highly tapered shear stiffness from top to bottom can also produce a mode shape as shown (for the low  $\rho$ -values) even in pure shear.(3) Thus a so-called "flexural" curvature of a building may or may not represent dominant overall flexure and low  $\rho$ -values. The  $\rho$ -value, however, is a real indicator of the relative importance of shear and flexure. The participation factors for top story deflection (6) are also shown in Figure 12. There is considerable variation with the  $\rho$ -value.

Error in Approximate Methods of Frame Analysis. The technical literature and most textbooks on structural frame analysis contain considerable data on various approximate methods of stress analysis of rigid frames for

buildings. Probably the most popular for several decades have been the "Portal Method" and the "Cantilever Method", although there are many others. Most of these methods are based upon assumptions as to the locations of points of inflection in girders and columns and/or as to shear distribution or axial forces in the columns. Enough assumptions are made to make indeterminate structures subject to analysis by ordinary equations of equilibrium. These methods have been and still are widely used in building design.

In most cases with traditional type buildings or buildings of the shear or shear-frame types -- in other words, buildings with  $\rho$ -values greater than say 0.10 -- the results obtained are satisfactory. However, with low  $\rho$ -values the results can be seriously in error and dangerous in design as indicated in Figures 4 and 5 where the points of inflection may not exist at all in many stories. This phenomenon, which has been reported previously, (6) occurs in cantilever-type buildings. Low  $\rho$ -values exist where the spans are long and/or the floor systems are shallow, where planned vertical structural members such as core units, walls, piers or massive columns dominate the response, or where non-structural filler walls or partitions are placed in a building in such manner as to dominate the response, at least until damage occurs and possibly allows the frame to act somewhat as the designer intended. However, girder hinging in earthquakes can also cause low  $\rho$ -values and cantilever-type response. (1)

Cantilever-type buildings must be treated as such and either be analyzed by rigorous methods or with proper allowances for the nature of the cantilever-type system. This becomes very important in not only design but in the analysis of existing buildings for resistance to ground motion.

Table I is a comparison of shears, axial forces and moments for the lower stories of the exterior column of the building frame of Figure 2, loaded as shown. The values have been computed by the Portal Method, the Cantilever Method (which bears no relationship to the cantilever considerations of this paper), and by rigorous methods with computer aid. Only the lateral forces of Figure 2 are considered in this analysis. The low  $\rho$ -value column shears are greater than the approximate methods suggest, the axial forces are less, and the column moments are much greater. It would seem that cantilever-type buildings designed under traditional approximate methods can be grossly overstressed, and have been in recent destructive earthquakes. If this overstressing occurs with structures not designed to be ductile, (6) failure can be expected.

#### PERIOD DETERMINATIONS

Natural periods of any category of buildings may be computed by the lumped mass analogy, providing the computations are conducted rigorously and the effects of column or pier width and joint rotation are carefully considered. So-called "shear" methods are not appropriate for any but the shear category in Figure 11. The lumped mass computation may involve

considerable, and sometimes unnecessary, labor for cantilever-type buildings. Even with digital computers it is necessary to prepare data cards for all members.

Pure Cantilevers. If  $\rho$ -values are zero or very close to zero, the structure can be considered a pure cantilever system, and the periods can be readily computed by hand methods. (2,3) The building may consist of several vertical cantilever walls or elements or it may be a single tube or hollow rectangle. The assumption may usually be made that the total mass, shear area, and moment of inertia are uniformly distributed over the height as outlined by Jacobsen. (2) For a pure cantilever with a fixed base

$$T_{1s} = 0.288 \sqrt{D_s}, \text{ sec} \quad (5)$$

$$T_{2s} = T_{1s}/3 \quad (6)$$

$$T_{3s} = T_{1s}/5 \quad (7)$$

$$T_{1f} = 0.258 \sqrt{D_f}, \text{ sec} \quad (8)$$

$$T_{2f} = T_{1f}/6.27 \quad (9)$$

$$T_{3f} = T_{1f}/17.6 \quad (10)$$

$$T_{isf} = \sqrt{T_{is}^2 + T_{if}^2} \quad (11)$$

$$D_s = \frac{WH}{0.8 A_v E} \quad (12)$$

$$D_f = \frac{WH^3}{8 EI} = \frac{A_v H^2 D_s}{(10) I} \quad (13)$$

The above equations are shown for the case of a single vertical element, which may be of any shape. If there should be two or more vertical elements without significant connection between them so that they would bend individually (i.e., develop no significant shear between them due to flexure) and if they participate in parallel, then the sum of their individual  $A_v$  and  $I$  values would be used in the above equations for  $A_v$  and  $I$  respectively. However, if individual vertical elements have sufficient connecting elements to develop flexural shear for the levels of stress involved, then the gross  $I$  value for the composite elements would be employed. In this sense the term gross  $I$  includes the  $Ad^2$  contribution of the combined elements about their common neutral axis. There may be such combined elements in a building together with many individual elements, as for example internal core-wall units and individual building columns. The determination of the effective  $I$  value thus requires considerable judgment. Each case must be considered on its own merits. The decision -- often a difficult one -- must be made whether the analysis is approximate or rigorous.

The periods of several real cantilever buildings were computed as above and the results compared to known measured periods with good agreement, as shown in Table II. The low  $\rho$ -values are due to stiff wall

elements and/or flexible floor systems. There are many buildings with such characteristics. The ones shown in Table II are privately owned and are therefore not identified herein.

Most buildings of the cantilever-type are dominated by vertical walls, piers or core elements that do not tend to vary greatly with height in the building. Thus the assumption of uniform properties is generally acceptable. This may be checked and, if necessary, corrections made by reference to Figure 15 and equation 14.

The Modified Cantilever Method (MCM). In order to explore the effects of moment restraint on the natural periods of framed-cantilever, cantilever-frame, and cantilever buildings, the 8-story and the 16-story frame building models were used as follows. The lowest three natural periods and mode shapes were computed rigorously as lumped mass models with a wide range of  $\rho$ -values. In addition, the periods were computed by equations 8, 9, 10 and 13, ignoring the slight restraint of the relatively flexible girder systems. Shear was also considered but it was found to be negligible.

$$\text{Let } \lambda_1 = \frac{T_i \text{ computed rigorously as a lumped mass system}}{T_{isf} \text{ by equation 11 (or its equivalent)}}$$

Figure 13 shows the values of  $\lambda_1$  versus  $\rho$  for the lowest three modes of both the 8 and the 16-story frames. Some  $\lambda_1$  values are greater than unity. This illustrates a condition that holds for all values, namely that a lumped mass system has different characteristics than a uniformly distributed system. Of course, as the number of masses increases the period ratios would approach unity.

A separate investigation was made as to the difference in periods between a uniform rod in pure flexure and for that same rod modeled by  $N$  equal lumped masses with the masses equally spaced starting at the top of the rod. The latter case, of course, simulates the lumping of a typical building. A building per se is neither a distributed rod nor a lumped system; it falls between these limits. There are several ways to conduct the computations for the lumped mass system representing the rod. Three were employed: (a) rigorous computation, (b) rigorous determination of  $D_f$  as a lumped mass system followed by the use of equations 8, 9 and 10 to get the periods, and (c) determination of story deformations as a flexural rod followed by period computation with lumped masses. The case (b) method gives periods slightly shorter than the rigorous method for a small number of masses. However, this difference is reduced as the number of masses increases. The only difference between procedures (a) and (b) is the assumption about mass distribution in getting the periods from known deformations. The results for all three methods are shown in Figure 14. The values are independent of the mode,  $i$ . The ratios shown in Figure 14, case (a) computation represent the asymptotic  $\lambda$  values as  $\rho$  approaches 0. For example, the 8-story values, for all modes, would approach 1.12, and the 16-story values would approach 1.06.



The 8-story and 16-story frames used for a major part of this study were assigned uniform column moments of inertia -- for each  $\rho$ -value -- over the height of the structure. Since these columns actually represent the core, pier or wall-type members that are usually dominant and essentially uniform in low  $\rho$ -value structures, this assumption best simulates real cantilever-type buildings. The Modified Cantilever Method (MCM) utilizes the midheight characteristic of  $\rho$ ,  $I$ , and  $A_v$  and simulates most real structures with very low  $\rho$ -values. If  $I$  should vary or taper considerably with height, corrections can be applied based upon the results of a study of the stiffness taper parameter. Most tall buildings have essentially uniform weight distribution with height even if the stiffness varies. The reason is that there are many more significant weight contributions than those of the structural members. The assumption of uniform weight distribution -- barring setbacks, of course -- is therefore retained. Very little has been done with the case of variable stiffness and uniform mass. However, Salvadori and Heer provided useful constants for cantilevers of constant mass and linearly varying flexural stiffness. (11) Their data were employed herein in a study that compared the periods of tapered stiffness flexural cantilevers to the periods computed as uniform stiffness cantilevers of average moment of inertia. With the assumption of linearly varying moment of inertia, the midheight value of  $I$  is the same as the average value.

Figure 13 summarizes the results of the tapered stiffness study and provides convenient correction factors,  $\beta_1$ , for the first three modes of vibration. The ratio of the true tapered-stiffness period to the period computed on the basis of assumed uniform moment of inertia,  $\beta_1$ , is plotted against the taper ratio, defined as the moment of inertia at the top of the building divided by that at the base. Assumptions are that  $I$  varies linearly and the mass is uniform. Only flexure is considered.  $\beta_1$  is very close to unity and therefore negligible for the second and third modes except for very highly tapered stiffnesses. The first mode is more sensitive and  $\beta_1$  becomes important for taper ratios less than, say, 0.50.

It has been shown(3,4) that for tall buildings with  $\rho$ -values such as to indicate the shear or shear-frame types (see Figure 11) column axial deformation -- often termed column "shortening" -- may be significant in period determination and in stress analysis. This effect was also investigated for low  $\rho$ -value building frames. As may be expected, the effect of axial deformation becomes less with decreasing  $\rho$ -values. It essentially vanishes if  $\rho$  is less than 0.01 and is generally negligible for  $\rho$ -values less than 0.10. This effect is therefore negligible for cantilever-type buildings.

The Modified Cantilever Method (MCM) provides for the computation of approximate tall-building periods by the simple methods normally used for cantilever beams. It applies to buildings of the cantilever, framed-cantilever, or cantilever-frame types having low  $\rho$ -values.

$$T_1 = (T_{isf}) (\lambda_1) \left(\frac{\rho_x}{\rho_a}\right) (\beta_1)$$

## REFERENCES

- (1) Blume, John A., "A Structural-Dynamic Analysis of an Earthquake Damaged Fourteen-Story Building", The Prince William Sound, Alaska, Earthquake of 1964 and Aftershocks, Vol. II, Part A, U. S. Department of Commerce, ESSA, Publication 10-3, 1967.
- (2) Jacobsen, L. S., "Natural Periods of Uniform Cantilever Beams", Transactions, ASCE, Vol. 104, 1939.
- (3) Blume, John A., "The Dynamic Behavior of Multistory Buildings with Various Stiffness Characteristics", a Ph.D. dissertation, Stanford University, 1966.
- (4) Blume, John A., "Dynamic Characteristics of Multistory Buildings", Proceedings, ASCE, Structural Division, February 1968.
- (5) Timoshenko, S., and D. H. Young, "Theory of Elasticity", McGraw Hill Inc., 1934.
- (6) Blume, John A., N. M. Newmark and Leo H. Corning, "Design of Multistory Reinforced Concrete Buildings for Earthquake Motions", Portland Cement Association, Chicago, Illinois, 1961.
- (7) "Frame Constants for Lateral Loads on Multistory Concrete Buildings", Advanced Engineering Bulletin No. 5, Portland Cement Association, Chicago, Illinois, 1962.
- (8) Salvadori, M. G., "Earthquake Stresses in Shear Buildings", Transactions, ASCE, Vol. 119, 1954.
- (9) Blume, John A., discussion of "Earthquake Stresses in Shear Buildings", Transactions, ASCE, Vol. 119:194-201, 1954.
- (10) Rubinstein, Moshe F. and Walter C. Hurty, "Effect of Joint Rotation on Dynamics of Structures", Proceedings, ASCE, EM 6, December 1961.
- (11) Salvadori, Mario G. and Ewald Heer, "Periods of Framed Buildings for Earthquake Analysis", Proceedings, ASCE, Structural Division, December 1960.

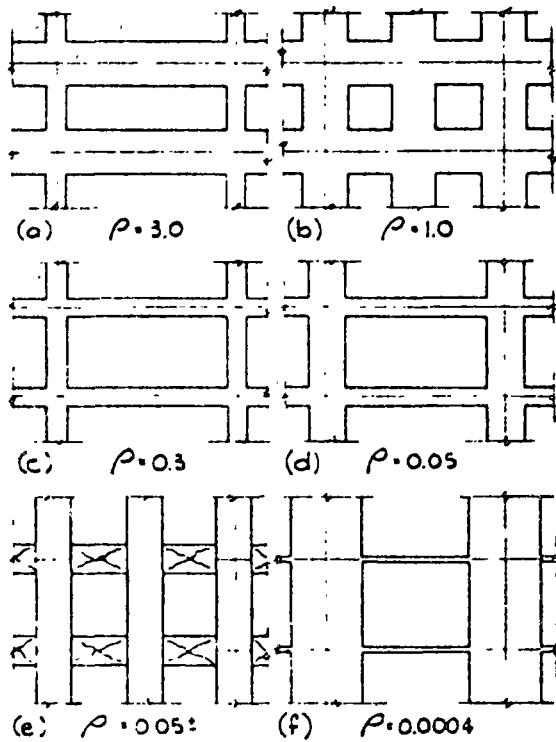
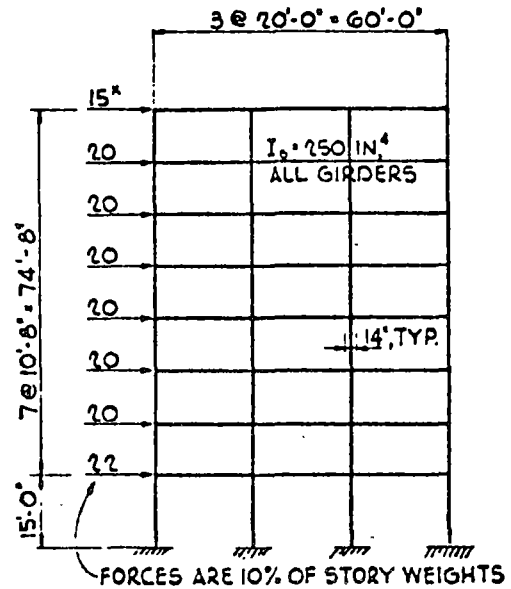


FIG. 1 - PARTIAL ELEVATIONS OF BUILDINGS



COLUMN  $I_c$ 's CONSTANT IN EACH RUN. VALUES VARY FROM 66.7 TO 10<sup>6</sup> IN.<sup>4</sup> FOR VARIOUS RUNS.

FIG. 2 - 8-STORY FRAME

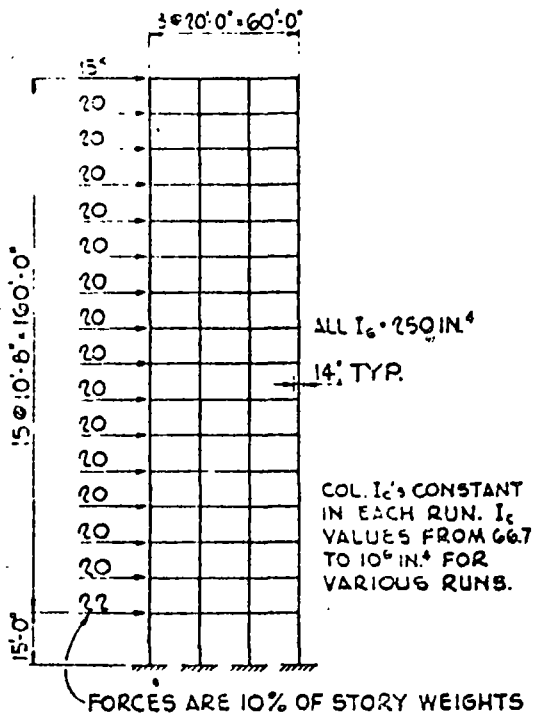


FIG. 3 - 16-STORY FRAME

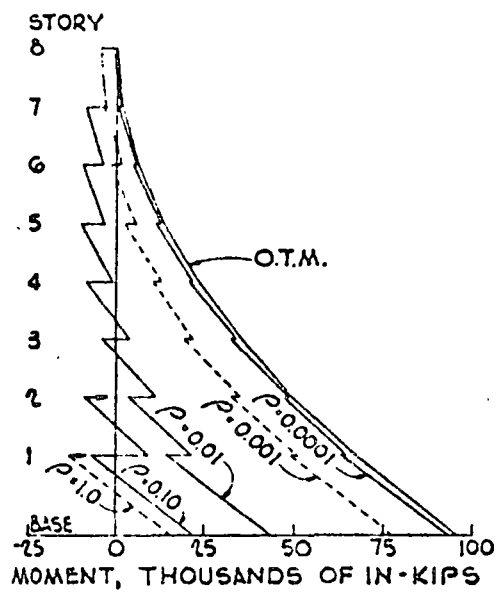


FIG. 4 -  $\Sigma M$  PER STORY, 8-STORY FRAME

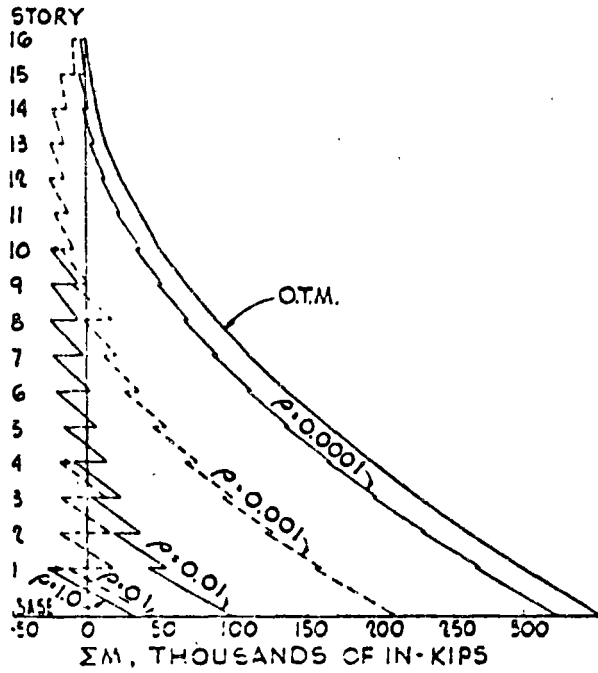


FIG. 5 -  $\Sigma M$  PER STORY, 16-STORY FRAME

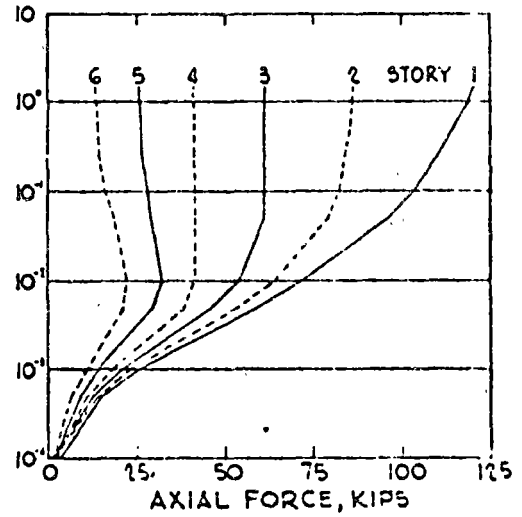


FIG. 6 - AXIAL FORCE IN EXTERIOR COLUMN FROM LATERAL FORCES, 8-STORY FRAME

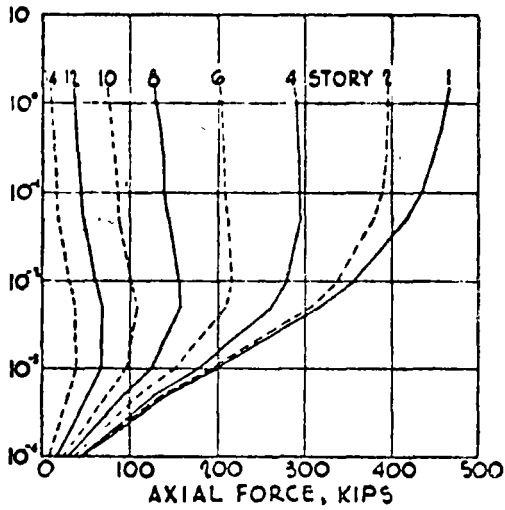


FIG. 7 - AXIAL FORCE IN EXTERIOR COLUMN FROM LATERAL FORCES, 16-STORY FRAME

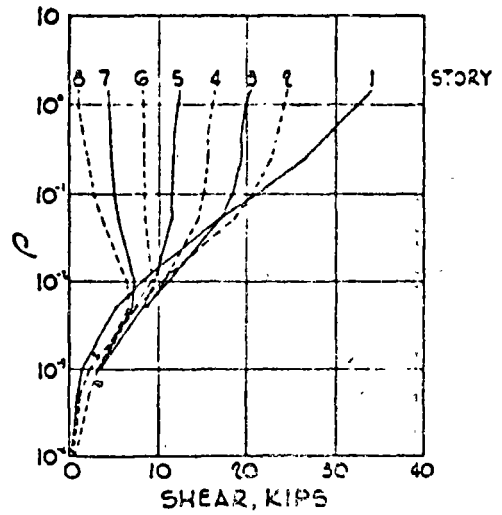


FIG. 8 - SHEAR IN EXTERIOR GIRDER FROM LATERAL FORCES, 8-STORY FRAME

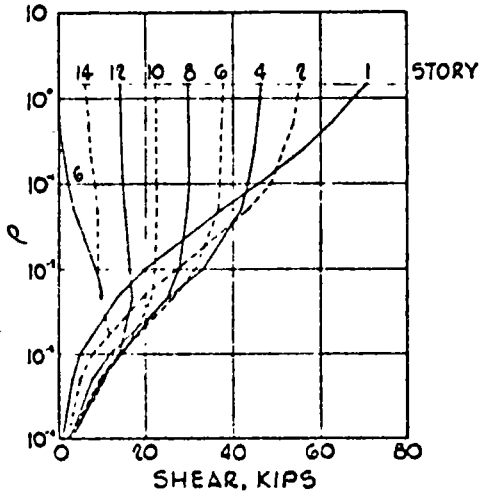


FIG. 9 - SHEAR IN EXTERIOR GIRDER FROM LATERAL FORCES. 16-STORY FRAME

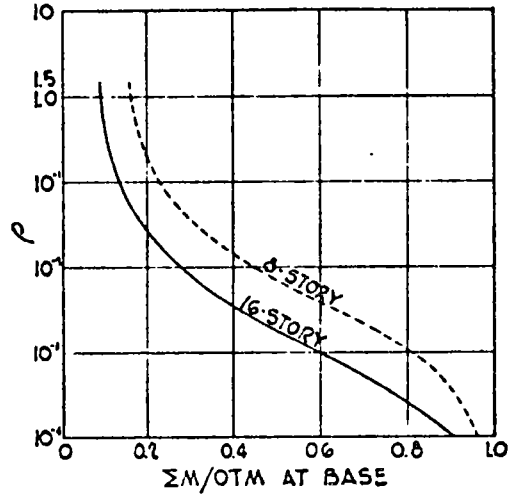


FIG. 10 -  $\rho$  VERSUS RATIO OF FLEXURAL MOMENT TO OVERTURNING MOMENT

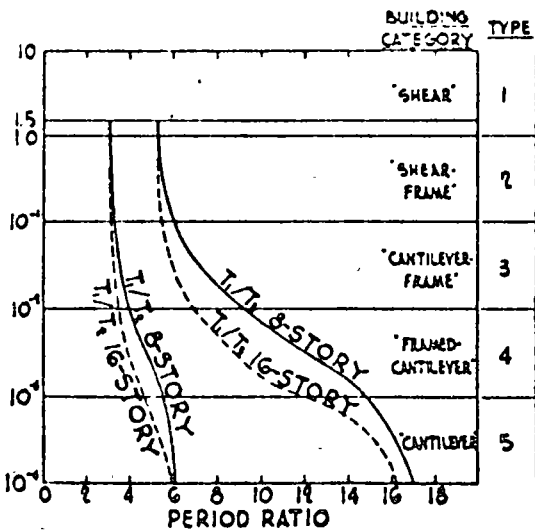
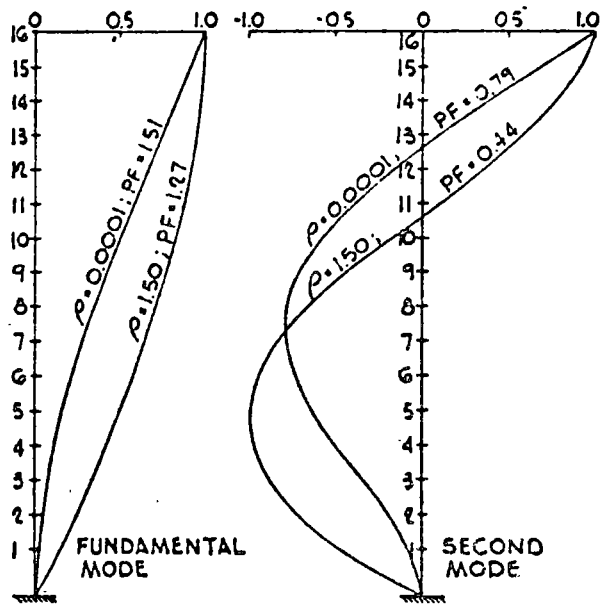


FIG. 11 - PERIOD RATIOS VERSUS  $\rho$



PF REFERS TO PARTICIPATION FACTOR, TOP LEVEL DEFLECTION  
FIG. 12 - MODE SHAPES, 16-STORY FRAME

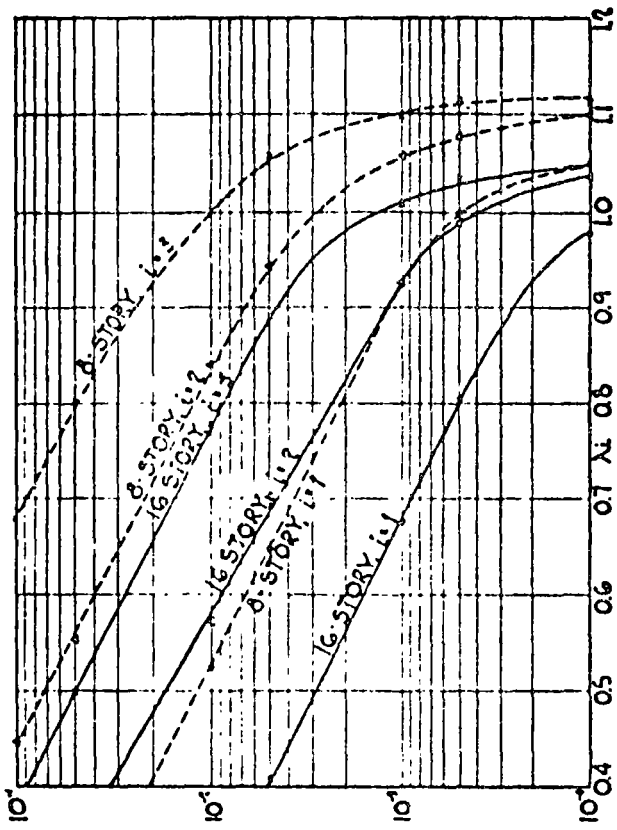


FIG. 13 -  $\rho$  VS.  $\lambda$  FOR 8 & 16-STORY FRAMES

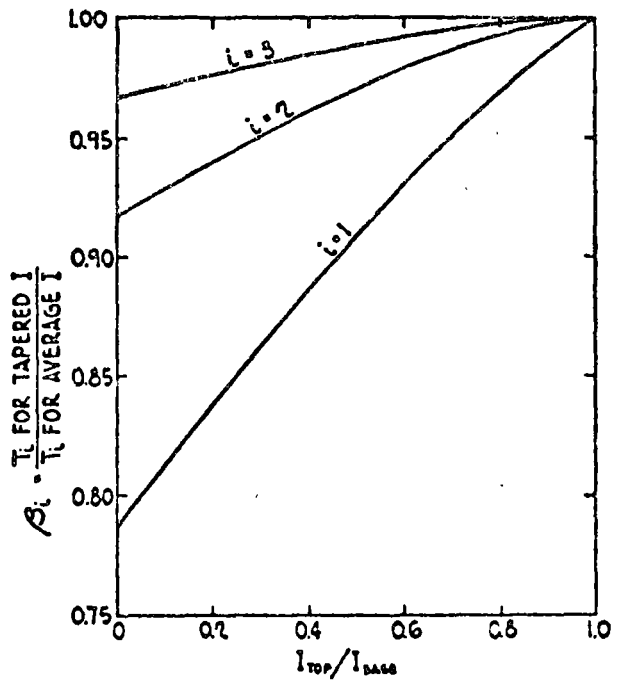


FIG. 15 -  $\beta_i$  VERSUS TAPER RATIO FOR FLEXURAL CANTILEVERS

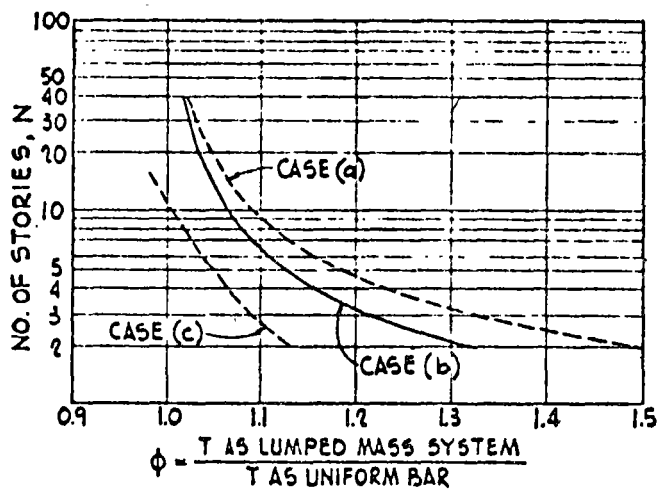


FIG. 14 - CORRECTION FACTOR FOR LUMPING WHEN  $\rho = 0$



centro de educación continua  
división de estudios superiores  
facultad de ingeniería, unam



IV CURSO INTERNACIONAL DE INGENIERIA SISMICA

DISEÑO SISMICO DE EDIFICIOS

EJEMPLO DE ANALISIS MEDIANTE EL  
METODO ESTATICO

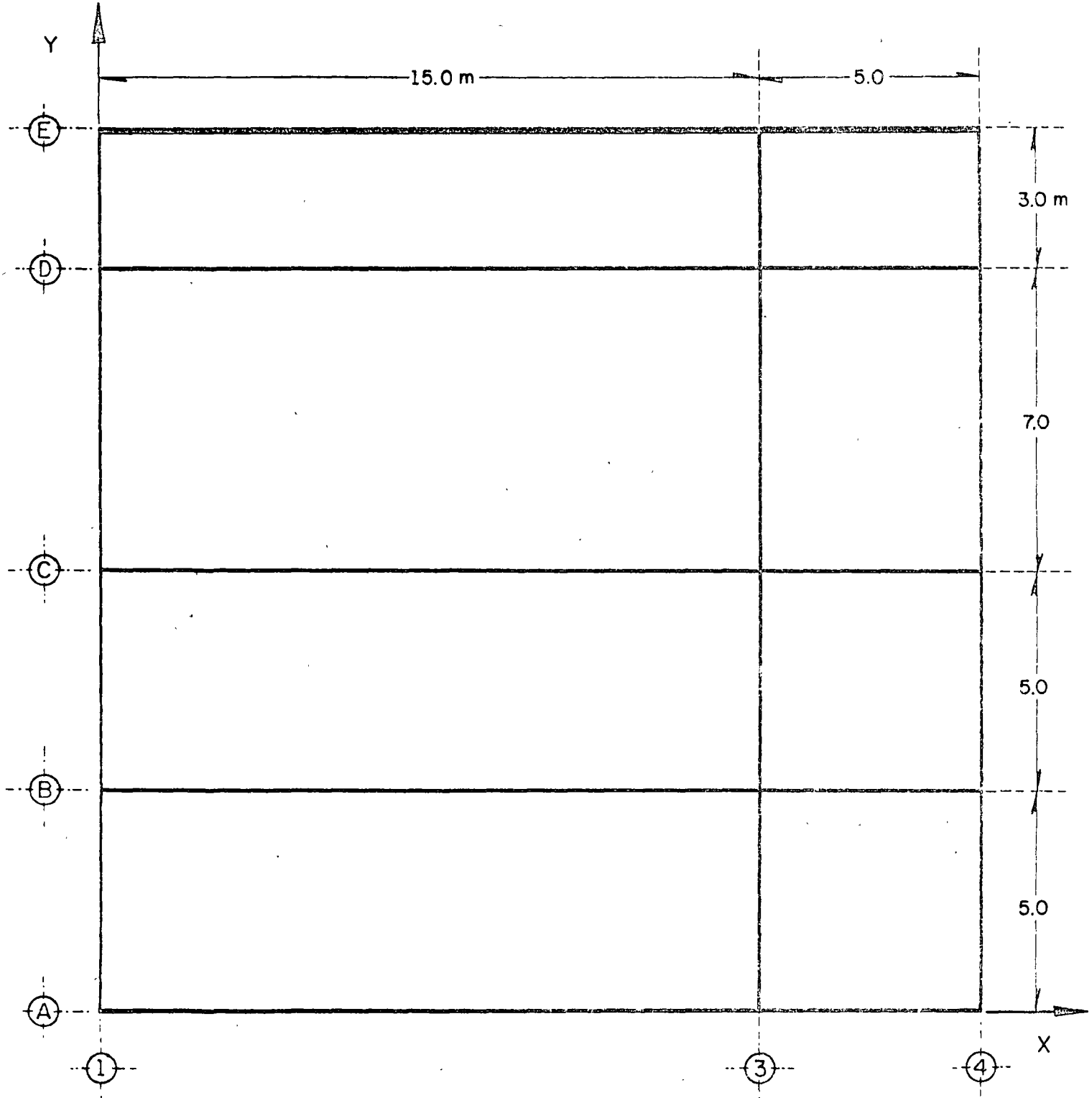
DR. OCTAVIO RASCON CHAVEZ

AGOSTO DE 1978

Dr. Octavio A. Pascón Ch.

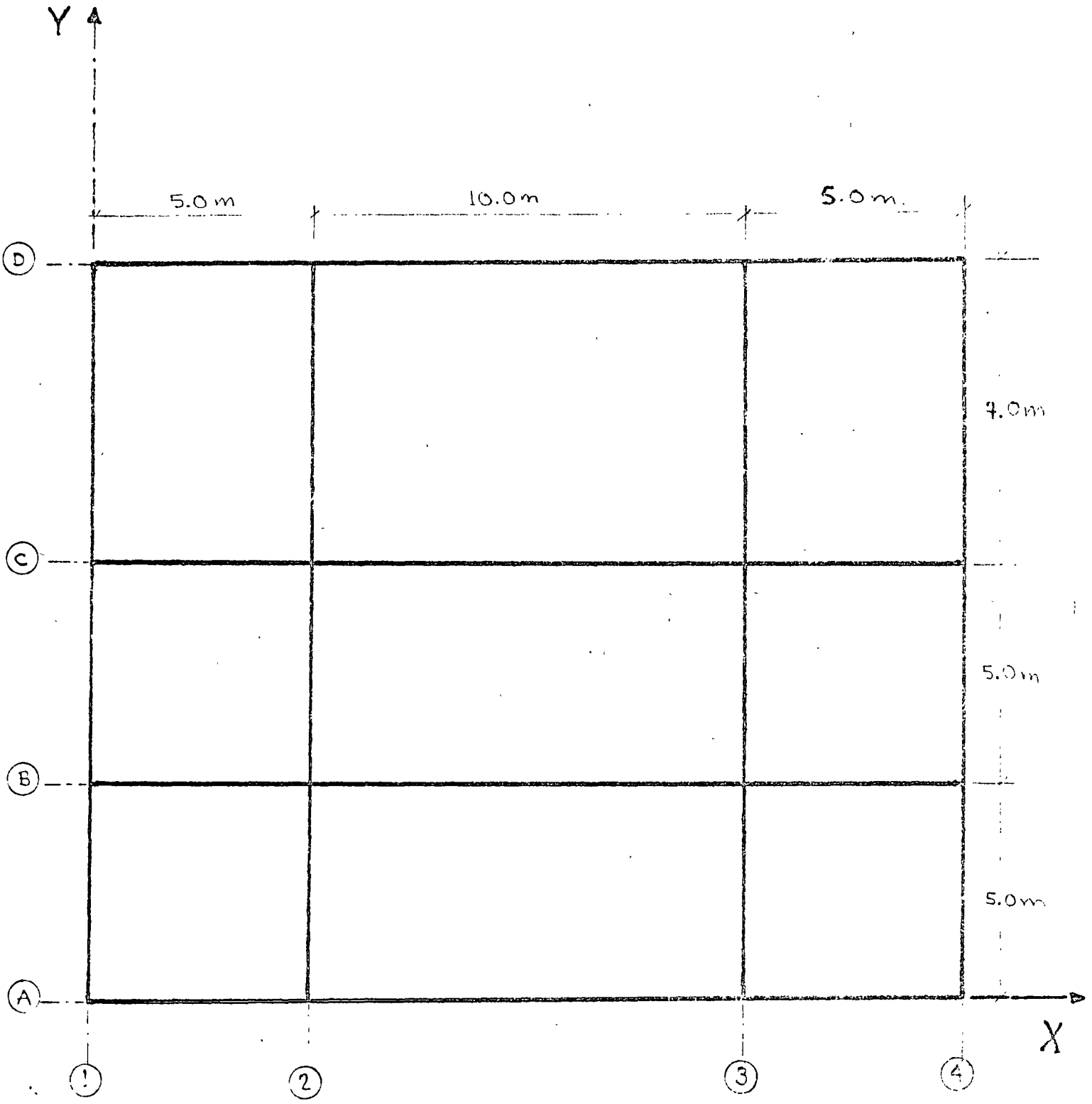
*Ejemplo*

Calcular las fuerzas dinámicas en la siguiente estructura según las disposiciones del Nuevo Reglamento de Construcciones y verificar si se cumplen todas las normas en él contenidas. Utilizar el método estático.



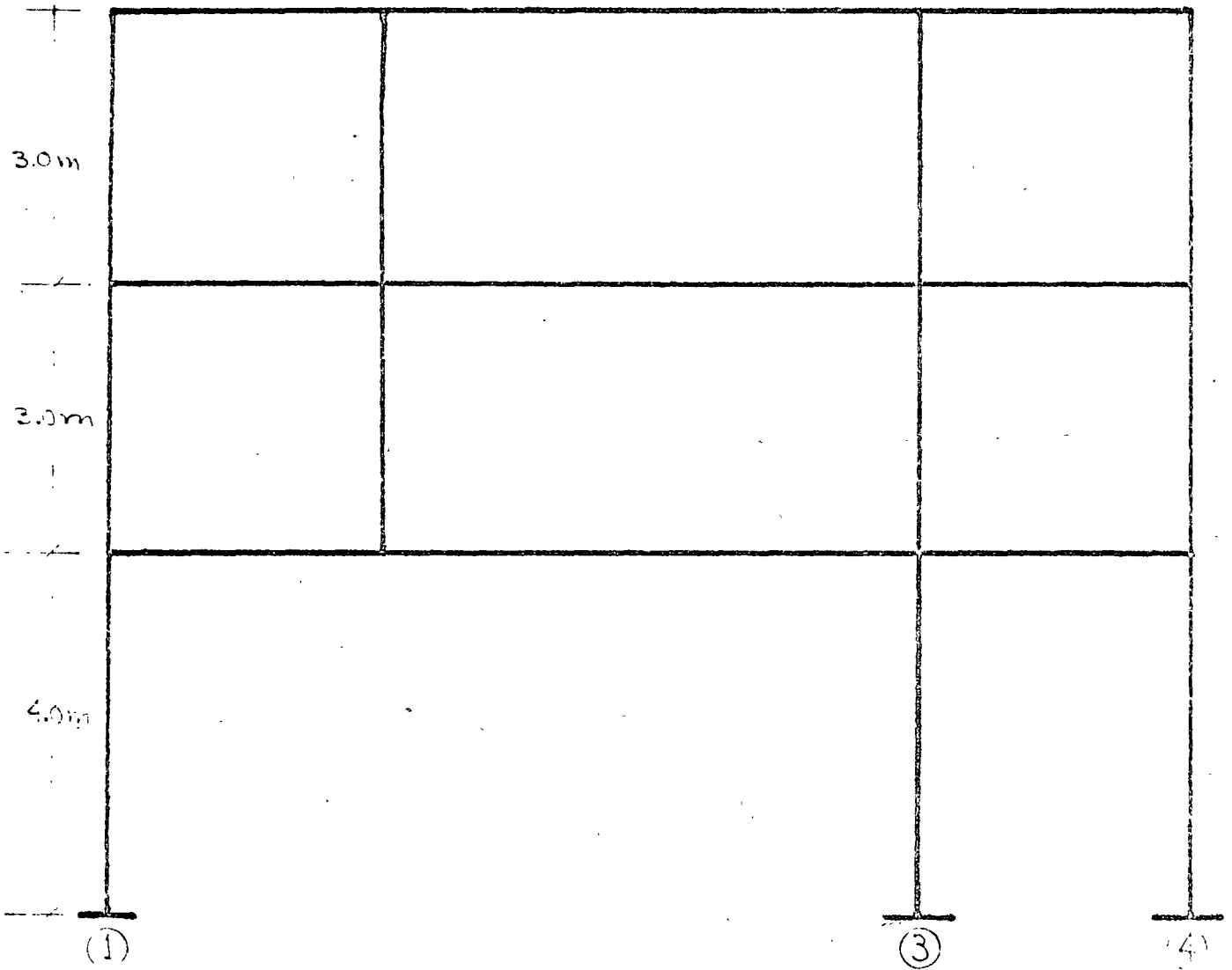
PLANTA BAJA



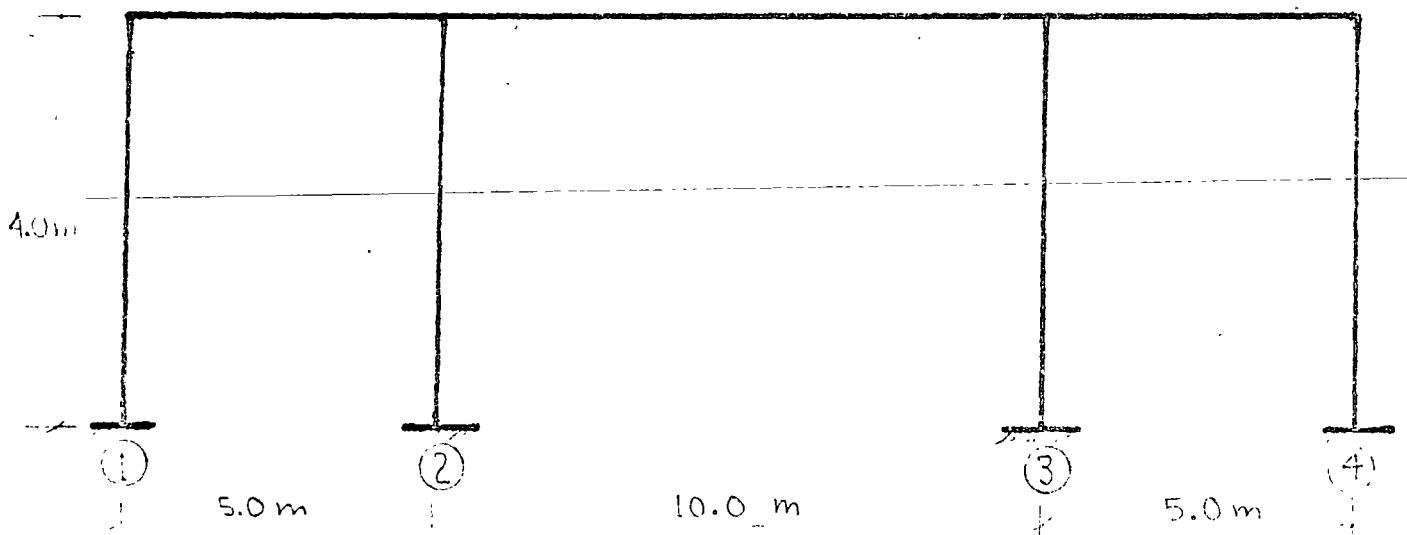


PISOS 1 y 2

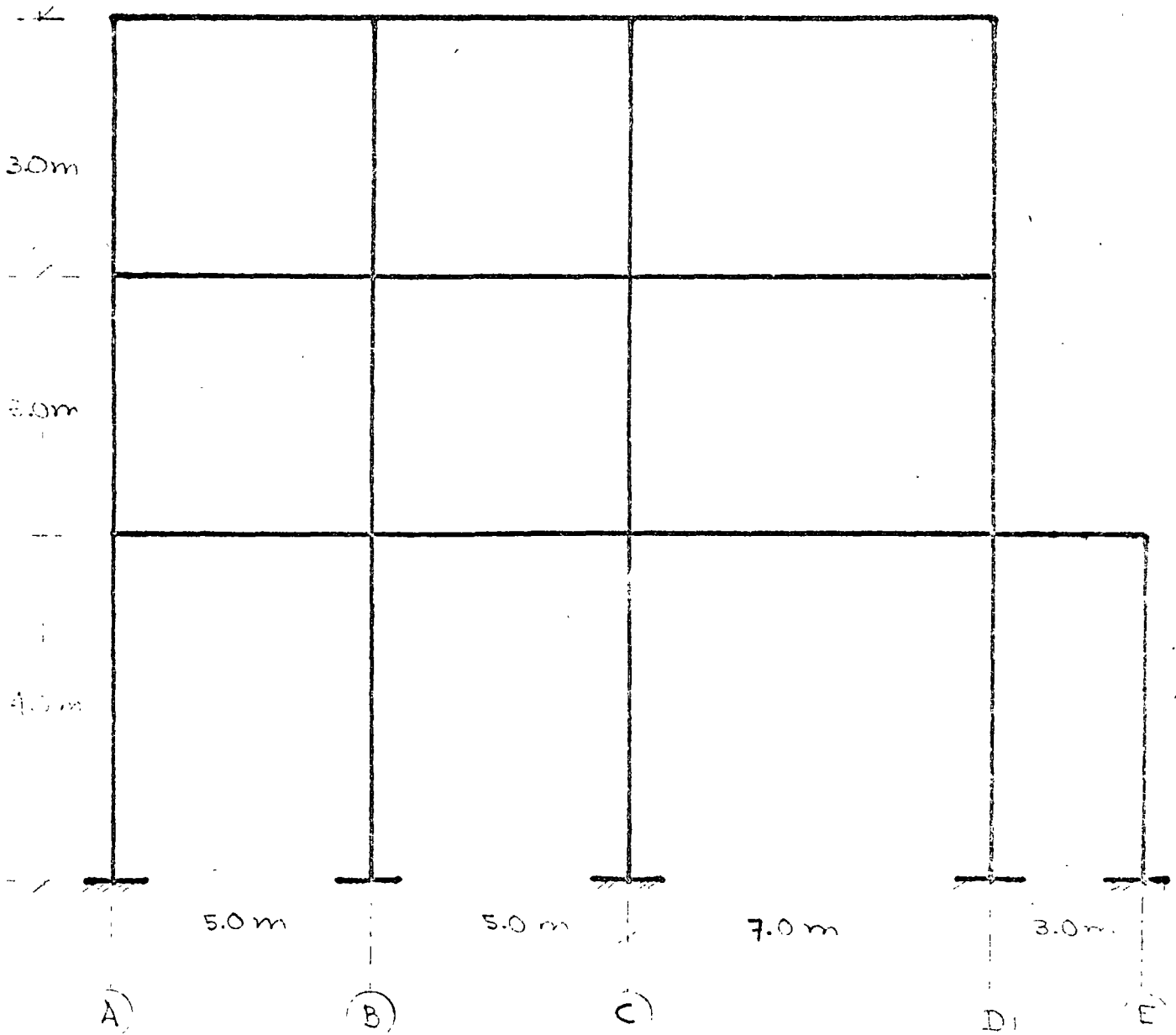
EJES (A), (B), (C) y (D)



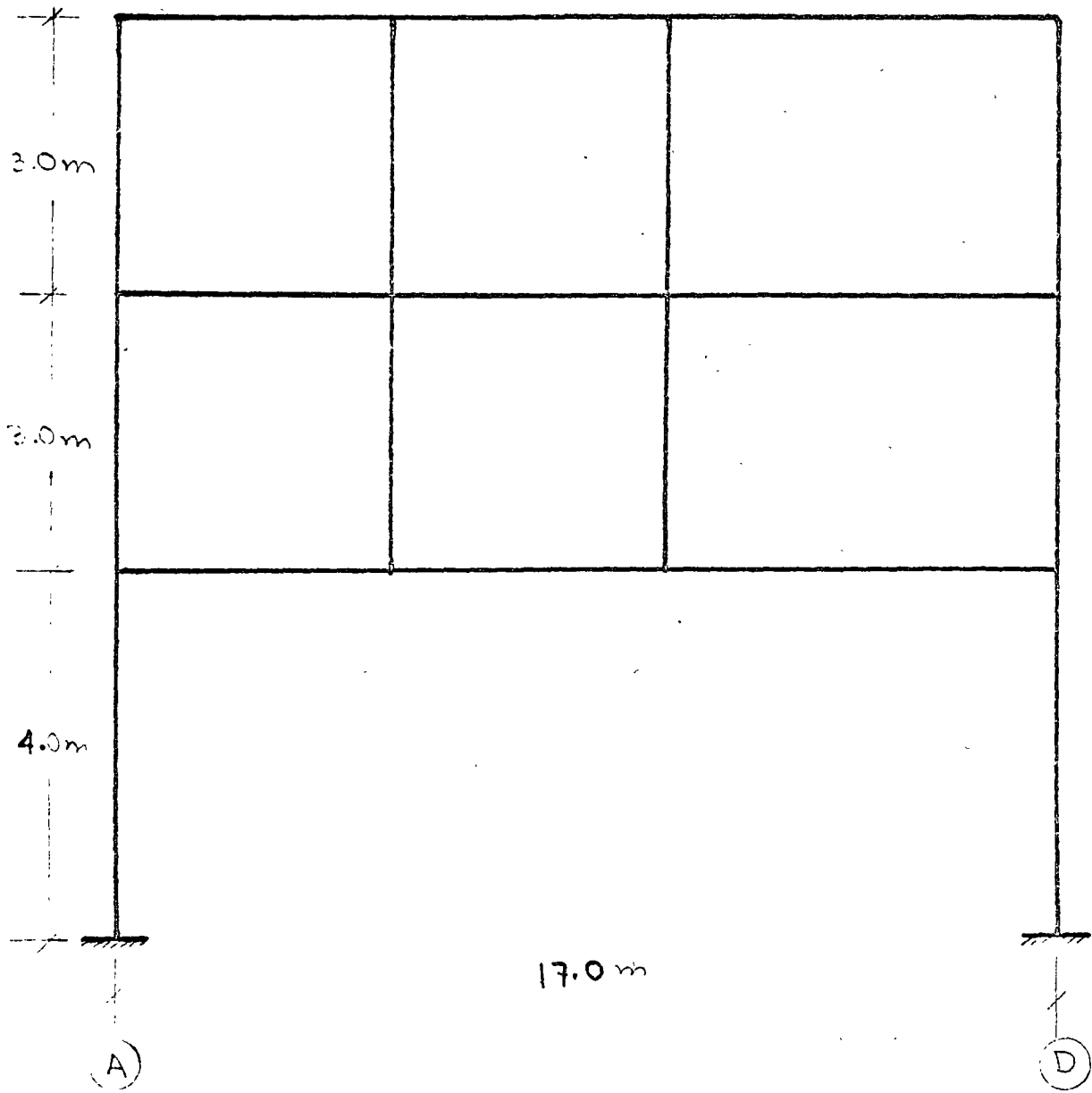
EJE (E)



EJES (1), (3) y (4)



ESE (2)



## 1. Determinación del Coeficiente Sísmico

El artículo 240 especifica que la relación entre la fuerza cortante en la base (V) y el peso total W es igual a  $c/Q$  o  $a_0$ , el que sea mayor. El valor de C se obtiene en la tabla del artículo 234 y el de  $a_0$ , de la tabla del artículo 236.

Para determinar estos valores es necesario clasificar la estructura:

Zona III (terreno compresible)  
Grupo A (museo)  
Tipo 1 (estructuración de muros-marcos)

Coeficiente sísmico:  $C = 0.24 \times 1.3 = 0.312$

Factor de ductilidad: Los detalles constructivos y los materiales que se usarán permiten utilizar  $Q = 4$

Con estos valores podemos calcular la relación V/W

$$S_a = \frac{C}{Q} = \frac{0.312}{4} = 0.078 > 0.06 = a_0$$

$$S_a = 0.078$$

## 2. Determinación de la fuerza horizontal aplicada en el centro de gravedad de cada nivel

Para determinar la fuerza horizontal aplicada en los distintos niveles; necesitamos primero conocer el peso de éstos. Consideraremos que los pesos de la estructura están concentrados en cada nivel, y los calcularemos como la suma del peso del sistema de piso de cada nivel más el peso de los elementos verticales que existan en la mitad de los pisos adyacentes.

Otro criterio que podría utilizarse sería el estimar los pesos en cada nivel, como la suma del peso del sistema de pi-

so en este, más el de los elementos verticales en el entre piso inferior. Este criterio es más conservador que el anterior y en nuestro caso, hemos preferido el primero.

Cálculo del peso concentrado en cada nivel

-Cargas actuantes en los diferentes niveles:

$$N_{1-2} \begin{cases} -\text{Peso propio de la losa } 2400 \text{ kg/m}^3 \times 0.12 \text{ m} = 290 \text{ kg/m}^2 \\ -\text{Piso} & 120 \text{ ''} \\ -\text{Carga viva (pasajes de libre acceso al público)} & 250 \text{ ''} \\ \hline \text{carga total} & 660 \text{ kg/m}^2 \end{cases}$$

$$*N_3 \begin{cases} -\text{Peso propio de la losa} & 290 \text{ kg/m}^2 \\ -\text{Acabados e impermeabilizado} & 70 \text{ ''} \\ -\text{Carga viva (azotea con pendiente no mayor que 5\%)} & 40 \text{ ''} \\ \hline \text{** carga total} & 400 \text{ kg/m}^2 \end{cases}$$

SISTEMA DE PISOS

Nivel	L O S A S					T R A B E S							PESO TOTAL (kg)
	L (m)	b (m)	Area (m <sup>2</sup> )	Carga total (kg/m <sup>2</sup> )	Peso (kg)	Número	b (m)	h (m)	L (m)	Vol. (m <sup>3</sup> )	P.V. (kg/m <sup>3</sup> )	Peso (kg)	
1	20	17	340	660	224400	5	.30	.40	19.1	11.46	2400	27504	291888
	20	3	60	400	24000	3	.30	.40	18.5	6.66	2400	15984	
2	20	17	340	660	224400	4	.30	.40	19.1	9.168	2400	22003	264605
						4	.30	.40	15.8	7.584	2400	18202	
3	20	17	340	400	136000	4	.30	.40	19.1	9.168	2400	22003	176205
						4	.30	.40	15.8	7.584	2400	18202	

\* El tercer nivel no es accesible, no tiene ningún apéndice y se trata de una losa de concreto de 12 cm de espesor.

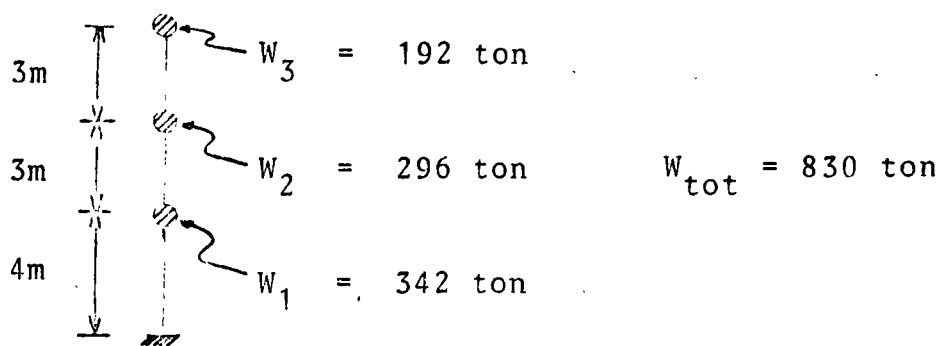
\*\* Este valor corresponde también a una parte del nivel 1

## ELEMENTOS VERTICALES

Nivel	C O L U M N A S							M U R O S						PESO TOTAL (Kg)	
	Número	b (m)	h (m)	L (m)	Volumen (m <sup>3</sup> )	P.V. (kg/m <sup>3</sup> )	Peso (kg)	Número	h (m)	b (m)	L (m)	Volumen (m <sup>3</sup> )	P.V. (kg/m <sup>3</sup> )		Peso (Kg)
1	15	.30	.30	2	2.7	2400	6480	1	2	.12	19.1	4.584	2400	11002	
	16	.30	.30	1.5	2.16	2400	5184	2	2	.15	18.5	11.1	1500	16650	
								2	1.5	.15	15.8	7.11	1500	10665	49981
2	32	.30	.30	1.5	4.32	2400	10368	4	1.5	.15	15.8	14.22	1500	21330	31698
3	16	.30	.30	1.5	2.16	2400	5184	2	1.5	.15	15.8	7.11	1500	10665	15849

Nivel	Sistema de piso (kg)	Elementos verticales (Kg)	Peso total (Kg)
1	291888	49981	341869
2	264605	31698	296303
3	176205	15849	192054

Estos resultados los podemos representar en la forma siguiente



A continuación encontramos el valor de la fuerza lateral en cada nivel de acuerdo con la ecuación:

$$P_i = \frac{W_i \cdot h_i}{\sum W_i \cdot h_i} S_a \cdot \sum W_i$$

Nivel o entrepiso	$W_i$ (ton)	$h_i$ (m)	$W_i h_i$	$P_i$ (ton)	$V_i$ (ton)
3	192	10	1920	23.19	23.19
2	296	7	2072	25.026	48.216
1	342	4	1368	16.523	64.74
Sumas	830		5360		

$$P_i = \frac{0.078 \times 830}{5360} W_i h_i$$

$$P_i = 0.0120783 W_i h_i$$

3. Determinación de la posición de las fuerzas cortantes, los centros de rigidez de cada piso, y los momentos torsionantes.

Las fuerzas en los niveles,  $P_i$ , están ubicadas en los centros de gravedad de las cargas  $W_i$ ; como las fuerzas cortantes son resultado de las fuerzas  $P_i$ , su ubicación estará dada por

$$X_V = \frac{\sum P_j \bar{X}_j}{V} \quad ; \quad Y_V = \frac{\sum P_j \bar{Y}_j}{V}$$

donde  $V = \sum P_j$  (la suma es sólo hasta el nivel en que está aplicada la fuerza  $V$ )

Pero para aplicar estas expresiones, necesitamos primero la localización del centro de gravedad de cargas en cada nivel ( $\bar{X}_i, \bar{Y}_i$ ). Para esto emplearemos los resultados de las tablas anteriores de pesos y, por estática:

$$\bar{X}_i = \frac{\sum W_j X_j}{\sum W_j} \quad ; \quad \bar{Y}_i = \frac{\sum W_j Y_j}{\sum W_j}$$

en donde:

$W_j$  = Peso de cada elemento del nivel

$X_j, Y_j$  = Distancia del centro de gravedad del elemento  $j$   
a los ejes de referencia



Alojando los ejes de referencia en los marcos A y 1

Nivel 3:

$$\bar{X}_3 = \frac{136\,000 \times 10 + 22003 \times 10 + 18202 \left(\frac{1}{4}\right)(40) + 5184 \left(\frac{1}{4}\right)(40) + 10665 \left(\frac{1}{2}\right)(20)}{136\,000 + 22003 + 5184 + 10665 + 18202} =$$

$$= 10 \text{ m}$$

$$\bar{Y}_3 = \frac{136\,000 \times 8.5 + 18202 \times 8.5 + 22003 \left(\frac{1}{4}\right)(32) + 5184 \left(\frac{1}{4}\right)(32) + 10665 \times 8.5}{192054} =$$

$$= 8.43 \text{ m}$$

$$\bar{X}_3 = 10 \text{ m} \quad \bar{Y}_3 = 8.43 \text{ m}$$

Nivel 2:

Por simetría con el Nivel 3, tenemos las mismas coordenadas

$$\bar{X}_2 = 10 \text{ m} \quad \bar{Y}_2 = 8.43 \text{ m}$$

Nivel 1:

$$\bar{X}_1 = \frac{[224400 \times 10 + 24000 \times 10 + 27504 \times 10 + 15984 \left(\frac{1}{3}\right)(35) + 5184 \left(\frac{1}{4}\right)(40) +$$

$$+ 6480 \left(\frac{1}{3}\right)(35) + 11002 \times 10 + 16650 \left(\frac{1}{2}\right)(20) + 10665 \left(\frac{1}{2}\right)(20)]}{341869} = 10.11 \text{ m}$$

$$\bar{Y}_1 = \frac{[224400 \times 8.5 + 24000 \times 18.5 + 15984 \times 10 + 27504 \left(\frac{1}{5}\right)(52) + 5184 \left(\frac{1}{4}\right)(32) +$$

$$+ 6480 \left(\frac{1}{5}\right)(52) + 11002 \times 20 + 16650 \times 10 + 10665 \times 17]}{341869} =$$

$$= 10.162 \text{ m}$$

$$\bar{X}_1 = 10.11 \text{ m} \quad \bar{Y}_1 = 10.162 \text{ m}$$

A continuación presentamos la tabla de cálculo para obtener la posición de la fuerza cortante:

NIVEL	FUERZAS EN DIRECCION X						FUERZAS EN DIRECCION Y				
ENTREPISO	$P_j$	$\bar{Y}_j$	$P_j \bar{Y}_j$	$\Sigma P_j \bar{Y}_j$	V	$Y_v$	$\bar{X}_j$	$P_j \bar{X}_j$	$\Sigma P_j \bar{X}_j$	V	$X_v$
3	23.19	8.43	195.49	195.49	23.19	8.43	10	231.9	239.1	23.19	10.00
2	25.026	8.43	210.97	406.46	48.216	8.43	10	250.26	482.16	48.216	10.00
1	16.523	10.162	167.91	574.37	64.74	8.87	10.11	167.047	649.21	64.74	10.028

El centro de torsión es el punto por el cual debe pasar la línea de acción de la fuerza cortante sísmica para que el movimiento relativo de los niveles que limitan el entrepiso sean exclusivamente de traslación. Si esto no ocurre existen torsión o rotación relativa entre tales niveles. Las expresiones para calcular el centro de torsión será, en cada entrepiso:

$$X_T = \frac{\Sigma(K_y)_i X_i}{\Sigma(K_y)_i} \quad Y_T = \frac{\Sigma(K_x)_i Y_i}{\Sigma(K_x)_i}$$

donde:

$K_x$  = rigideces de entrepiso de los marcos orientados en la dirección Y

$K_y$  = rigideces de entrepiso de los marcos orientados en la dirección X

### Cálculo de las rigideces de entrepiso

Para obtener las rigideces de entrepiso empleamos las fórmulas de Wilbur. El primer paso será calcular la rigidez relativa de cada elemento, sabiendo que esto es igual al momento de inercia de su sección, dividida entre la longitud de la pieza.

Rigideces de columnas:

Momento de inercia de la sección

$$I = \frac{bh^3}{12}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{-Sentido X: } I_Y = \frac{30 \times 30^3}{12} = 67500 \text{ cm}^4 \\ \text{-Sentido Y: } I_X = \frac{30^4}{12} = 67500 \text{ cm}^4 \end{array} \right.$$

Rigideces

$$K = \frac{I}{L}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{-Sentido X} \\ \text{-Sentido Y} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \text{Tercer y segundo entrepiso} = \frac{67500}{300} = 225 \text{ cm}^3 \\ \text{primer entrepiso} = \frac{67500}{400} = 168.75 \text{ cm}^3 \\ \text{Tercer y segundo entrepiso} = \frac{67500}{300} = 225 \text{ cm}^3 \\ \text{primer entrepiso} = \frac{67500}{400} = 168.75 \text{ cm}^3 \end{array} \right.$$

- Rigidez de trabes

Consideremos la sección nominal de las trabes. En un análisis preciso debe considerarse la contribución de la losa o la rigidez de las trabes, de forma tal que trabaje como viga T o L.

Momentos de inercia de la sección

$$I = \frac{bh^3}{12}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{-Sentido X: } I = \frac{30 \times 40^3}{12} = 160,000 \text{ cm}^4 \\ \text{-Sentido Y: } I = \frac{30 \times 40^3}{12} = 160,000 \text{ cm}^4 \end{array} \right.$$

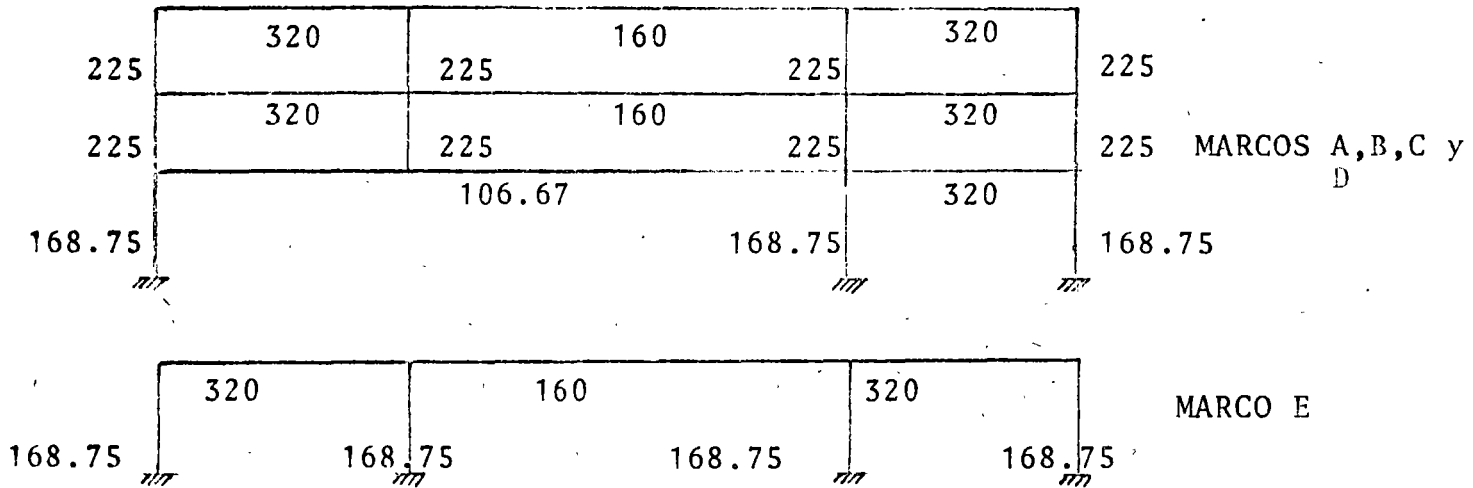
Rigidez

$$K = \frac{I}{L}$$

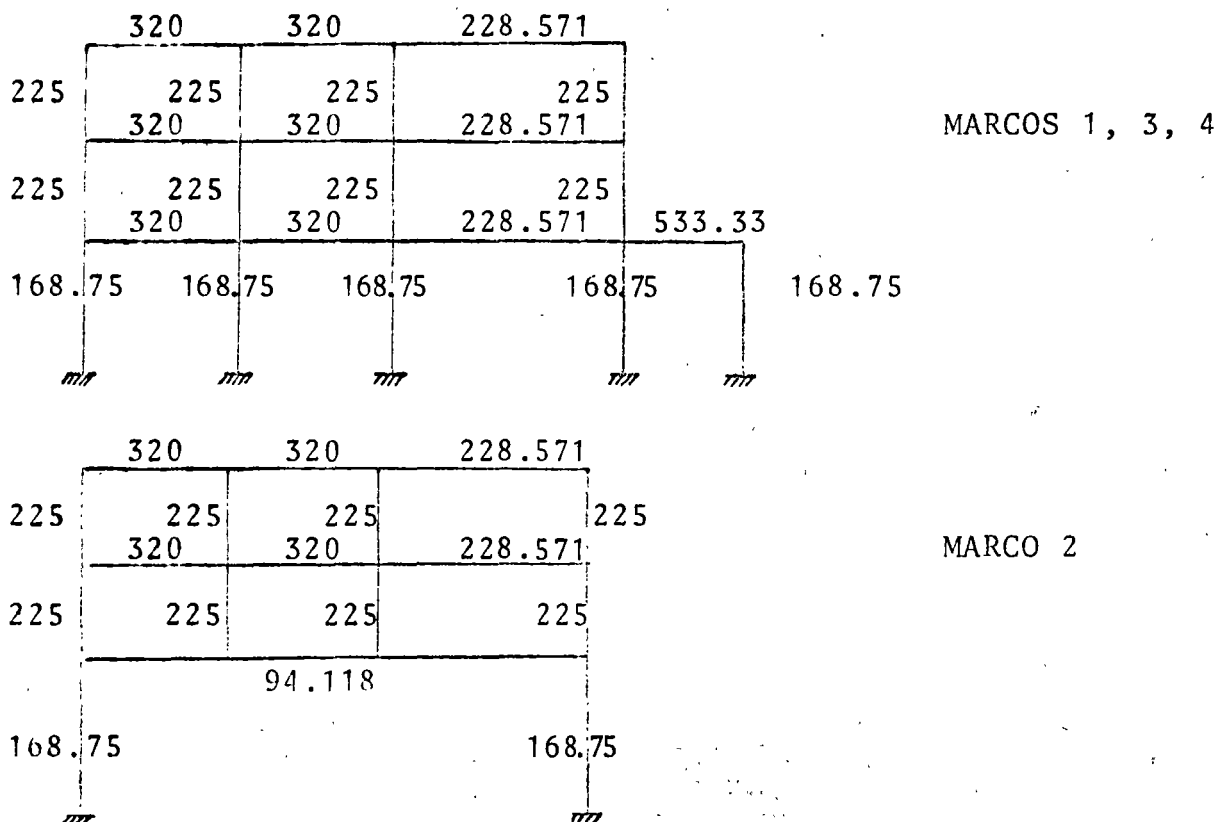
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Sentido X} \\ \text{Sentido Y} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} K_{x1} = \frac{160,000}{1,500} = 106.67 \text{ cm}^3 \\ K_{x2} = \frac{160,000}{500} = 320.00 \text{ cm}^3 \\ K_{x2} = \frac{160,000}{1000} = 160.00 \text{ cm}^3 \\ K_{y1} = K_{x2} = 320.00 \text{ cm}^3 \\ K_{y2} = \frac{160,000}{700} = 228.571 \text{ cm}^3 \\ K_{y3} = \frac{160,000}{300} = 533.33 \text{ cm}^3 \\ K_{y4} = \frac{160,000}{1700} = 94.118 \text{ cm}^3 \end{array} \right.$$

Resumen de los resultados:

- Sentido X:



Sentido Y:



Con las rigideces obtenidas calculamos a continuación las rigideces de entrepiso de los marcos.

El módulo de elasticidad del concreto lo valuamos como:

$$E = 10\,000\sqrt{f'_c} = 10\,000\sqrt{200} = 144\,900 \text{ kg/cm}^2$$

Rigidez de entrepiso:

Sentido X: Usando la fórmula  $R_c = \frac{48E}{h_n \left[ \frac{4h_n}{\sum K_{cn}} + \frac{h_o+h_n}{\sum K_{tn}} + \frac{h_n+h_m}{\sum K_{tm}} \right]}$

donde:  $m, n, o$  = niveles consecutivos, de inferior a superior

$h_m, h_n, h_o$  = alturas de los entrepisos  $m, n$  y  $o$

$K_{cn}$  = rigidez relativa ( $I/h$ ) de la columna del entrepiso  $n$

$K_{tm}, K_{tn}$  = rigidez relativa ( $I/L$ ) de la trabe del entrepiso  $m, n$

MARCO A, B, C, D

$$R_3 = \frac{48 \times 144\,900}{300 \left[ \frac{4(300)}{225 \times 4} + \frac{0 + 300}{320 + 160 + 320} + \frac{300 + 300}{320 + 160 + 320} \right]} = 9430.76 \text{ kg/cm}$$

-Segundo entrepiso:

Usando la fórmula  $R_2 = \frac{48E}{h_2 \left[ \frac{4h_2}{\sum K_{c2}} + \frac{h_1+h_2}{\sum k_{t1} + \frac{\sum K_{c1}}{12}} + \frac{h_2+h_3}{\sum K_{t2}} \right]}$

Esta ecuación es para el caso que se considere que las columnas están empotradas en la cimentación

MARCO A, B, C, D

$$R_2 = \frac{48 \times 144\,900}{300 \left[ \frac{4(300)}{4 \times 225} + \frac{400 + 300}{106.67 + 320 + 3 \times \frac{168.75}{12}} + \frac{300 + 300}{320 + 160 + 320} \right]} = 6,482.64 \text{ kg/cm}$$

- Primer entrepiso

$$\text{Usando la fórmula } R_1 = \frac{48E}{h_1 \left[ \frac{4h_1}{\Sigma K_{c1}} + \frac{h_1+h_2}{\Sigma K_{t1} + \frac{\Sigma K_{c1}}{12}} \right]}$$

Se usa esta expresión cuando se considera que las columnas están empotradas en la cimentación

MARCO A,B,C,D

$$R_1 = \frac{48 \times 144 \ 900}{400 \left[ \frac{4(400)}{3(168.75)} + \frac{400 + 300}{106.67 + 320 + \frac{3(168.75)}{12}} \right]} = 3736.56 \text{ kg/cm}$$

MARCO E

$$R_1 = \frac{48 \times 144 \ 900}{400 \left[ \frac{4(400)}{4(168.75)} + \frac{400}{320 + 160 + 320 + \frac{4(168.75)}{12}} \right]} = 6127.88 \text{ kg/cm}$$

El marco E, tiene muros ligados a la estructura, es decir, muros que aumentan su rigidez.

Utilizaremos la expresión siguiente para la rigidez en muros

$$R_{\text{muro}} = \frac{E}{\frac{3h}{bL} + \frac{1}{b} \left(\frac{h}{L}\right)^3}$$

donde E = módulo de elasticidad  $\left\{ \begin{array}{l} 144 \ 900 \text{ para concreto} \\ 188 \text{ fm para tabique} \\ \text{fm} = \text{resistencia a la compresión} \\ \text{del tabique, tomaremos} \\ 15 \text{ kg/cm}^2 \end{array} \right.$

h = altura del muro

b = espesor del muro (ancho del tabique)

L = longitud del muro

$$R_{\text{muro } E_1} = \frac{144\,900}{\frac{3(400)}{12(500)} + \frac{1}{12} \left(\frac{400}{500}\right)^3} = 597,116 \text{ kg/cm}$$

$$R_{\text{muro } E_2} = \frac{144\,900}{\frac{3(400)}{12(1000)} + \frac{1}{12} \left(\frac{400}{1000}\right)^3} = 1375,633 \text{ kg/cm}$$

Luego la rigidez del marco E es:

$$R_1 = 6127.88 + 2(597,116) + 1375,633 = 2575,993 \text{ kg/cm}$$

DIRECCION Y

- Tercer entrepiso

$$R_3 = \frac{48E}{h_3 \left[ \frac{4h_3}{\Sigma K_{c3}} + \frac{h_4+h_3}{\Sigma K_{t3}} + \frac{h_3+h_2}{\Sigma K_{t2}} \right]}$$

MARCO 1,2,3 y 4

$$R_3 = \frac{48 \times 144,900}{300 \left[ \frac{4(300)}{4(225)} + \frac{300}{320+320+228.571} + \frac{300+300}{320+320+228.571} \right]} = 9784.23 \text{ kg/cm}$$

-Segundo entrepiso

$$R_2 = \frac{48E}{h_2 \left[ \frac{4h_2}{\Sigma K_{c2}} + \frac{h_1+h_2}{\Sigma K_{t1} + \frac{\Sigma K_{c1}}{12}} + \frac{h_2+h_3}{\Sigma K_{t2}} \right]}$$

MARCO 1,3,4

$$R_2 = \frac{48 \times 144,900}{300 \left[ \frac{4(300)}{4(225)} + \frac{400+300}{320+320+228.571+533.33+\frac{5(168.75)}{12}} + \frac{300+300}{320+320+228.571} \right]} = 9275.11$$

MARCO 2

$$R_2 = \frac{48 \times 144 \, 900}{300 \left[ \frac{4(300)}{4(225)} = \frac{400 + 300}{9448 + \frac{2(168.75)}{12}} + \frac{300 + 300}{320+320+228.571} \right]} = 2,997.86 \text{ kg/cm}$$

-Primer entresiso:

$$R_1 = \frac{48E}{h_1 \left[ \frac{4h_1}{\Sigma K_{c1}} + \frac{h_1+h_2}{\Sigma K_{t1} + \frac{\Sigma K_{c1}}{12}} \right]}$$

MARCO 1,3,4

$$R_1 = \frac{48 \times 144,900}{400 \left[ \frac{4(400)}{5(168.75)} + \frac{400 + 300}{320+320+228.571+533.33+\frac{5(168.75)}{12}} \right]} = 7331.1 \text{ kg/cm}$$

MARCO 2

$$R_1 = \frac{48 \times 144,900}{400 \left[ \frac{4(400)}{2(168.75)} + \frac{400 + 300}{94.118+\frac{2(168.75)}{12}} \right]} = 1661.21 \text{ kg/cm}$$

Los marcos 1 y 4 tienen muros ligados a la estructura, es decir, muros que aumentan su rigidez.

Utilizando la ecuación siguiente,  $R_{\text{muro}} = \frac{E}{\frac{3h}{bL} + \frac{1}{b} \left(\frac{h}{L}\right)^3}$

$$R_{m1} = \frac{188 \times 15}{\frac{3(300)}{15(500)} + \frac{1}{15} \left(\frac{300}{500}\right)^3} = 20,982.14 \text{ kg/cm}$$

$$R_{m2} = \frac{2820}{\frac{3(300)}{15(700)} + \frac{1}{15} \left(\frac{300}{700}\right)^3} = 31,002 \text{ kg/cm}$$

$$R_{m3} = \frac{2820}{\frac{3(400)}{15(500)} + \frac{1}{15} \left(\frac{400}{500}\right)^3} = 14,526 \text{ kg/cm}$$



$$R_{m4} = \frac{188 \times 15}{\frac{3(400)}{15(700)} + \frac{1}{15} \left(\frac{400}{700}\right)^3} = 22,253 \text{ kg/cm}$$

$$R_{m5} = \frac{188 \times 15}{\frac{3(400)}{15(300)} + \frac{1}{15} \left(\frac{400}{300}\right)^3} = 6,640 \text{ kg/cm}$$

Con esto obtenemos las siguientes rigideces de entrepiso

-Tercer entrepiso:

MARCO 1,4

$$R_3 = 9784.23 + 2(20982.14) + 31,002 = 82,750.51 \text{ kg/cm}$$

MARCO 2,3

$$R_3 = 9784.23 \text{ kg/cm}$$

-Segundo entrepiso:

MARCO 1,4

$$R_2 = 9275.11 + 2(20982.14) + 31002 = 82241.39 \text{ kg/cm}$$

MARCO 3

$$R_2 = 9275.11 \text{ kg/cm}$$

MARCO 2

$$R_2 = 2997.86 \text{ kg/cm}$$

- Primer entrepiso

MARCO 1,4

$$R_1 = 7331.2 + 2(14526) + 22,253 + 6640 = 65276.2 \text{ kg/cm}$$

MARCO 3

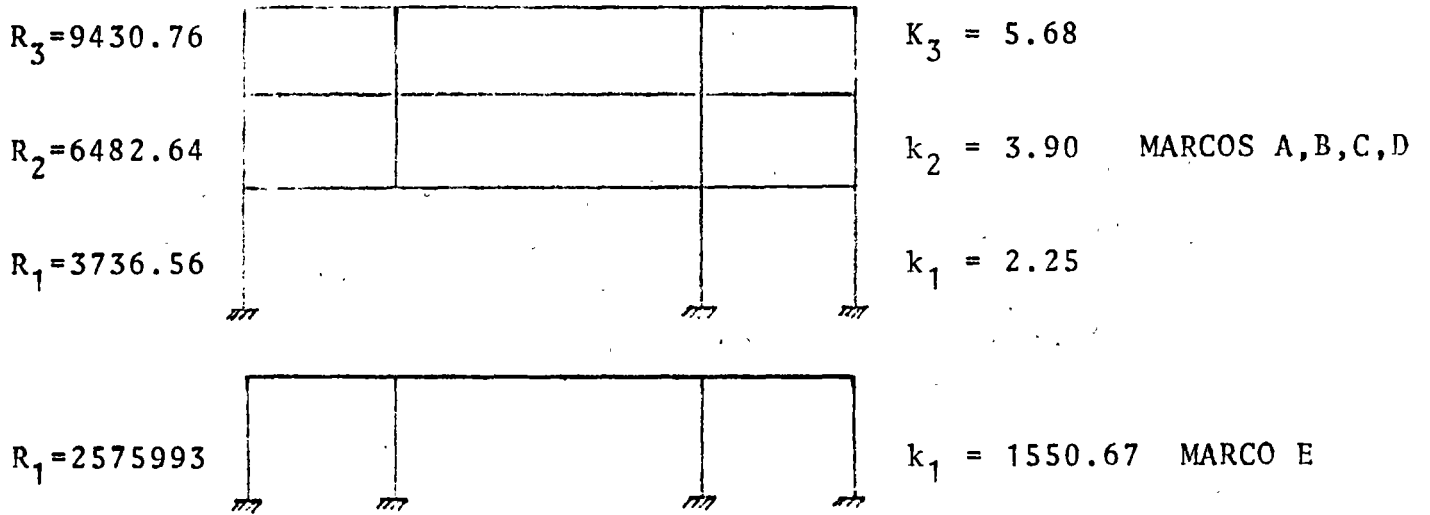
$$R_1 = 7331.2 \text{ kg/cm}$$

MARCO 3

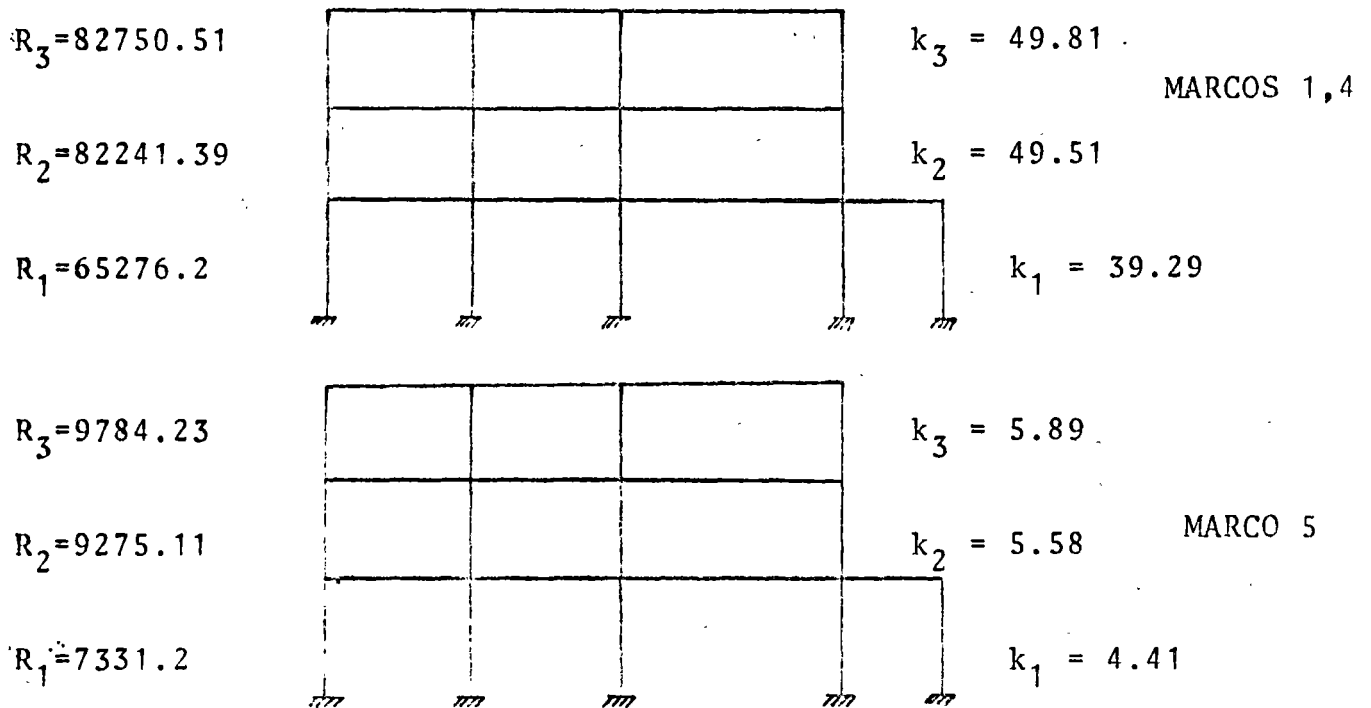
$$R_1 = 1661.21 \text{ kg/cm}$$

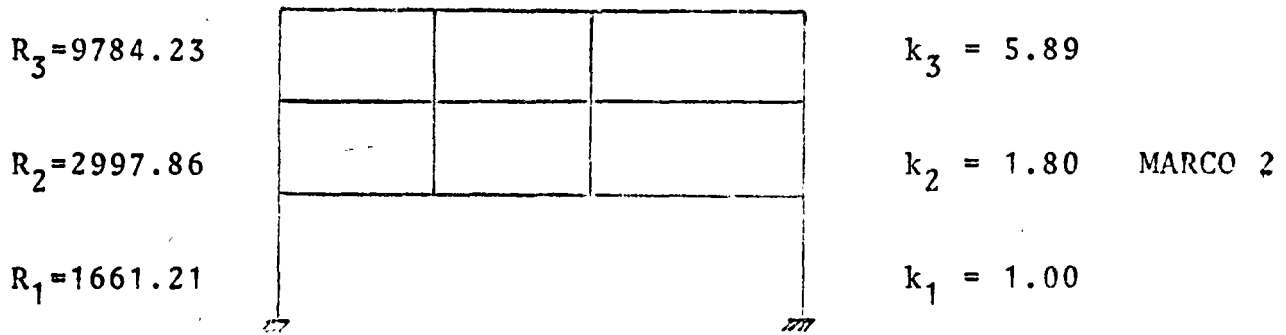
Resumen de los resultados

- Sentido X.-



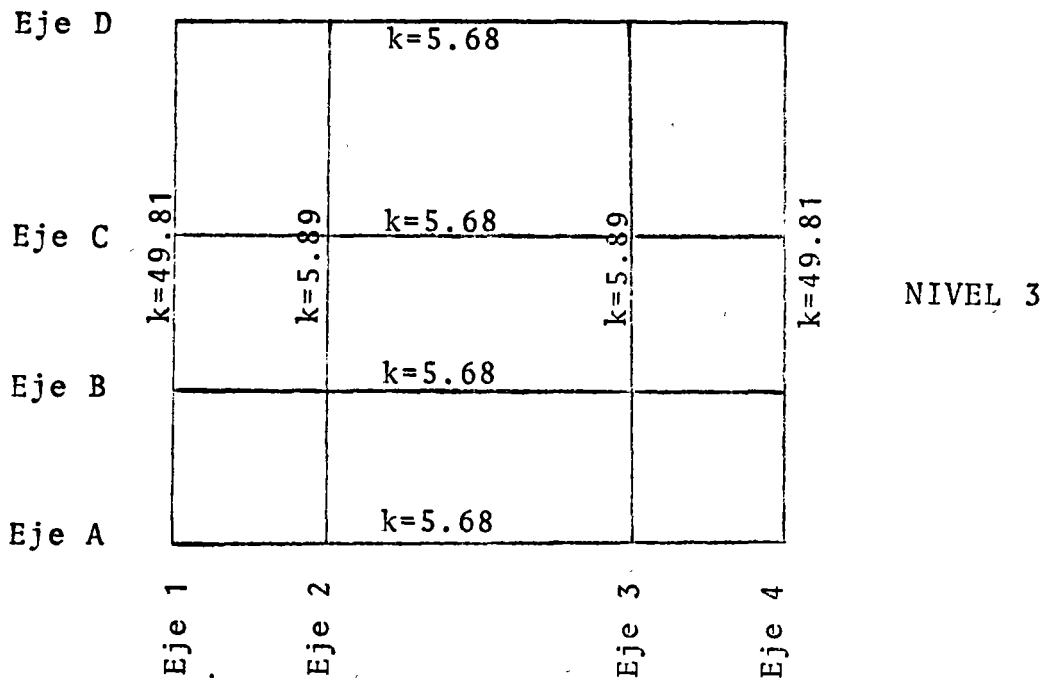
-Sentido Y.-





Los valores de  $k$ , son las rigideces de entrepiso normalizados, es decir, los divididos entre el valor menor (1661.21 kg/cm)

Determinación del centro de torsión.-



Eje D		k=3.90	
Eje C	k=49.51	k=3.90	k=5.58
Eje B	k=1.80	k=3.90	
Eje A		k=3.90	
	Eje 1	Eje 2	Eje 3

NIVEL 2

Eje E	k=1550.67		
Eje D		k=2.25	
Eje C	k=39.29	k=2.25	k=4.41
Eje B		k=2.25	
Eje A		k=2.25	
	Eje 1	Eje 3	Eje A

NIVEL 1

Los cálculos correspondientes se muestran en las siguientes tablas;

## MARCOS EN LA DIRECCION Y

Entre piso	Eje 1		Eje 2		Eje 3		Eje 4		$\Sigma K_y$	$\Sigma K_y X$	$X_T$
	$K_y$	X	$K_y$	X	$K_y$	X	$K_y$	X			
3	49.81	0.	5.89	5.00	5.89	15.00	49.81	20.00	111.40	1114.00	10.00
2	49.51	0.	1.80	5.00	5.58	15.00	49.51	20.00	106.40	1082.90	10.18
1	39.29	0.	-	-	4.41	15.00	39.29	20.00	82.99	851.95	10.27

## MARCOS EN LA DIRECCION X

Entre piso	Eje A		Eje B		Eje C		Eje D		Eje E	
	$K_x$	Y	$K_x$	Y	$K_x$	Y	$K_x$	Y	$K_x$	Y
3	5.68	0.	5.68	5.00	5.68	10.00	5.68	17.00	-	-
2	3.90	0.	3.90	5.00	3.90	10.00	3.90	17.00	-	-
1	2.25	0.	2.25	5.00	2.25	10.00	2.25	17.00	1550.67	20.00

	$\Sigma K_x$	$\Sigma K_x Y$	$Y_T$
3	22.72	181.76	8.00
2	15.60	124.80	8.00
1	1559.67	31085.40	19.93

Cálculo de los momentos torsionantes

Se debe calcular las excentricidades y agregar las amplificaciones de acuerdo con el art. 240 del Reglamento.

Los cálculos se muestran en las siguientes tablas:

Se usaron las expresiones:

$$e_1 = 1.5 e_s + 0.1b$$

$$e_2 = e_s - 0.1b$$

## SISMO EN DIRECCION X

Entre piso	$Y_v$ (m)	$Y_T$ (m)	$e_s = Y_v - Y_T$	$b$ (m)	$e_1$ (m)	$e_2$ (m)	$V_x$ (ton)	$M_{1x}$ (Ton-m)	$M_{2x}$ (Ton-m)
3	8.43	8.00	0.43	17.00	2.35	- 1.27	23.19	54.50	- 29.45
2	8.43	8.00	0.43	17.00	2.35	- 1.27	48.216	113.31	- 61.23
1	10.162	19.93	-9.77	20.00	-12.66	-11.77	64.74	-819.61	-761.99

## SISMO EN DIRECCION Y

Entre piso	$X_v$ (m)	$X_T$ (m)	$e_s = X_v - X_T$ (m)	$b$ (m)	$e_1$ (m)	$e_2$ (m)	$V_y$ (ton)	$M_{1y}$ (ton-m)	$M_{2y}$ (ton-m)
3	10.00	10.00	0.	20.00	2.00	-2.00	23.19	46.38	-46.38
2	10.00	10.18	-0.18	20.00	1.73	-2.18	48.216	83.41	-181.83
1	10.11	10.27	-0.16	20.00	1.76	-2.16	64.74	113.94	-246.11

Distribución de las fuerzas cortantes sísmicas en los marcos

Usaremos las siguientes expresiones:

-Para los marcos paralelos a X:

$$V_x \frac{K_x}{\Sigma K_x} \quad \text{Sismo en X (directo)}$$

$$\frac{M_x K_x \bar{Y}}{R_e} \quad \text{Sismo en X (torsión)}$$

$$\frac{|M_y K_x \bar{Y}|}{R_e} \quad \text{Sismo en Y (torsión)}$$

Para los marcos paralelos a Y:

$$V_y \frac{K_y}{\Sigma K_y} \quad \text{Sismo en Y (directo)}$$

$$\frac{M_y K_y \bar{X}}{R_\theta} \quad \text{Sismo en Y (torsión)}$$

$$\frac{M_x K_x \bar{Y}}{R_\theta} \quad \text{Sismo en X (torsión)}$$

donde :  $R_\theta = \sum K_x \bar{Y}^2 + \sum K_y \bar{X}^2$

$\bar{X}$ ,  $\bar{Y}$ , son las coordenadas de los marcos con respecto al centro de torsión

$$\bar{X} = X - X_T$$

$$\bar{Y} = Y - Y_T$$

Los cálculos respectivos aparecen en las tablas siguientes:

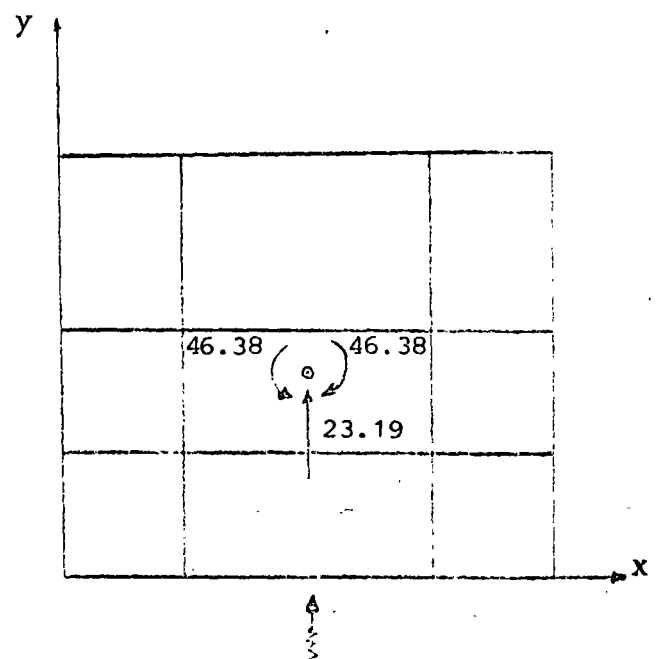
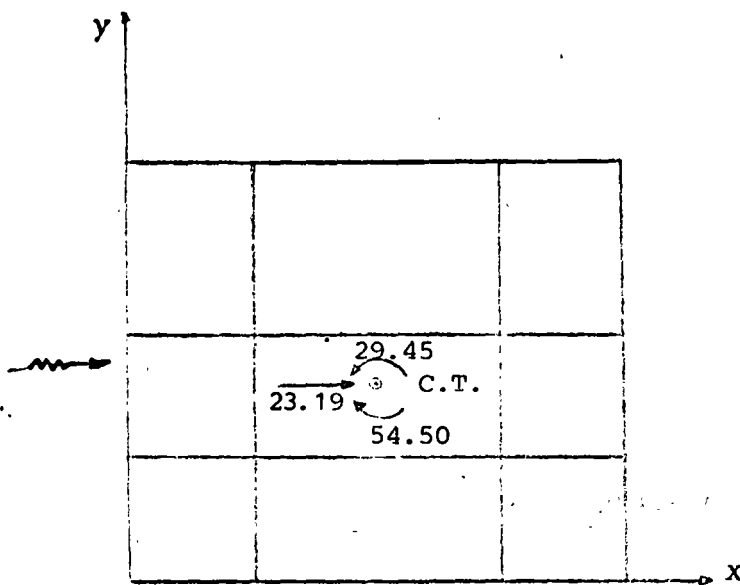
Entrepiso 3:

$$V_x = 23.19$$

$$X_T = 10.00$$

$$V_y = 23.19$$

$$Y_T = 8.00$$



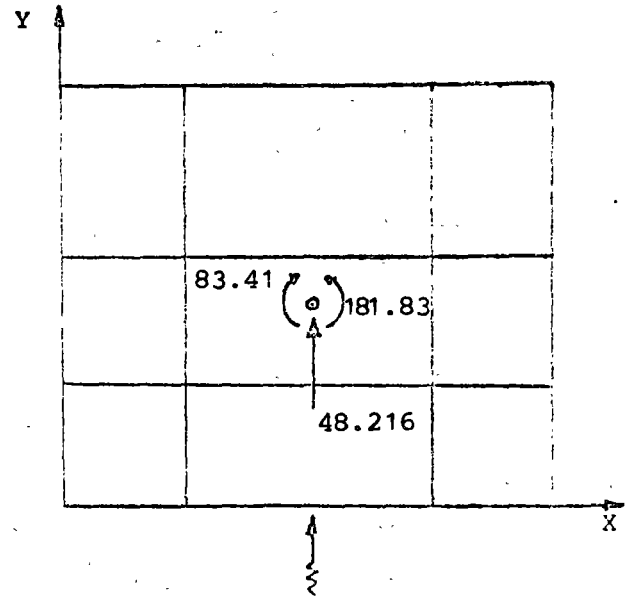
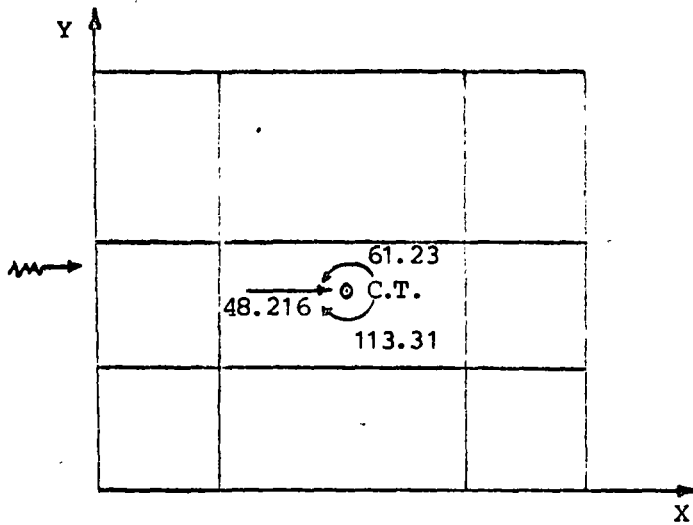
Entrepiso 2:

$$V_x = 48.216$$

$$X_T = 10.18$$

$$V_y = 48.216$$

$$Y_T = 8.00$$



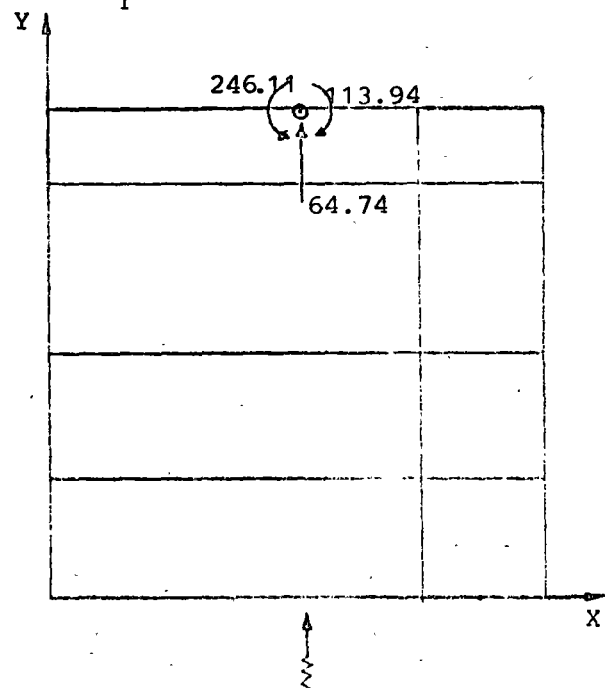
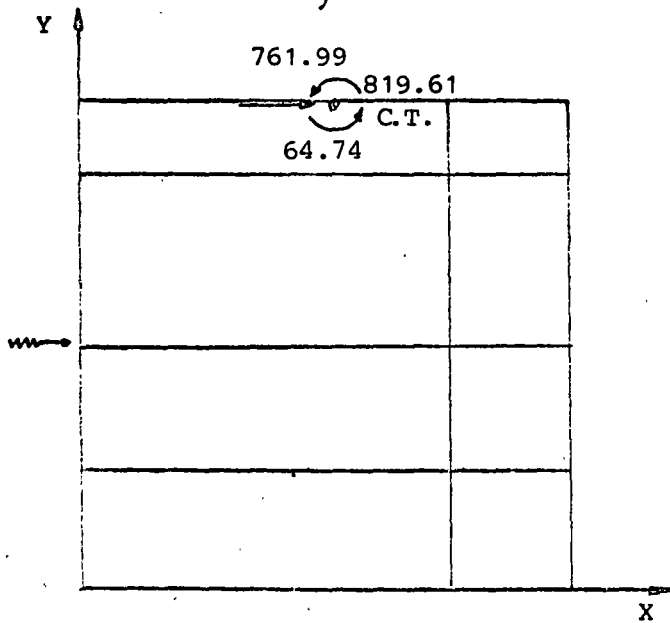
Entrepiso 1:

$$V_x = 64.74$$

$$X_T = 10.27$$

$$V_y = 64.74$$

$$Y_T = 19.93$$





## ENTREPISO 3.-

MARCO	$K_x$	Y	$\bar{Y} = Y - Y_T$	$K_x \bar{Y}$	$K_x \bar{Y}^2$	Sismo en X		en Y Torsión	(X) + 0.30(Y)	0.3(X) + (Y)	V Diseño
						Directo	Torsión				
A	5.68	0.	-8.00	-45.44	363.52	5.80	-0.22	0.19	5.64	1.86	5.64
B	5.68	5.00	-3.00	-17.04	51.12	5.80	-0.08	0.07	5.74	1.79	5.74
C	5.68	10.00	2.00	11.36	22.72	5.80	0.06	0.05	5.88	1.81	5.88
D	5.68	17.00	9.00	51.12	460.08	5.80	0.25	0.21	6.11	2.03	6.11
$\Sigma$	22.72			0.	897.44	23.20					23.37

MARCO	$K_y$	X	$\bar{X} = X - X_T$	$K_y \bar{X}$	$K_y \bar{X}^2$	Sismo en Y		en X Torsión	(X) + 0.30(Y)	0.3(X) + (Y)	V Diseño
						Directo	Torsión				
1	49.81	0.	-10.00	-498.10	4981.00	10.37	2.07	2.43	13.17	6.16	13.17
2	5.89	5.00	-5.00	-29.45	147.25	1.23	0.12	0.14	1.39	0.55	1.39
3	5.89	15.00	5.00	29.45	147.25	1.23	0.12	0.14	1.39	0.55	1.39
4	49.81	20.00	10.00	498.10	4981.00	10.37	2.07	2.43	13.17	6.16	13.17
$\Sigma$	111.40			0.	10256.50	23.20					29.12

$$R_0 = 11 \ 153.94$$

## ENTREPISO 2.-

MARCO	$K_x$	Y	$\bar{Y} = Y - Y_T$	$K_x \bar{Y}$	$K_x \bar{Y}^2$	Sismo en X		en Y Torsión	(x) + 0.30(Y)	0.30(x) + (Y)	V Diseño
						Directo	Torsión				
A	3.90	0.	-8.00	-31.20	249.60	12.05	-0.33	0.53	11.88	4.05	11.88
B	3.90	5.00	-3.00	11.70	35.10	12.05	-0.12	0.20	11.99	3.78	11.99
C	3.90	10.00	2.00	7.80	15.60	12.05	0.08	0.13	12.17	3.77	12.17
D	3.90	17.00	9.00	35.10	315.90	12.05	0.37	0.60	12.60	4.33	12.60
$\Sigma$	15.60			0.	616.20						48.64

MARCO	$K_y$	X	$\bar{X} = X - X_T$	$K_y \bar{X}$	$K_y \bar{X}^2$	Sismo en Y		en X Torsión	(x) + 0.30(Y)	0.30(x) + (Y)	V Diseño
						Directo	Torsión				
1	49.51	0.	-10.18	-504.01	5130.84	22.44	8.57	5.34	14.64	32.61	32.61
2	1.80	5.00	-5.18	-9.32	48.30	0.82	0.16	0.10	0.39	1.01	1.01
3	5.58	15.00	4.82	26.90	129.64	2.53	-0.46	0.28	0.90	2.15	2.15
4	49.51	20.00	9.82	486.19	4774.37	22.44	-8.26	5.15	9.40	15.73	15.73
$\Sigma$	106.40			=0.	10083.15						51.50

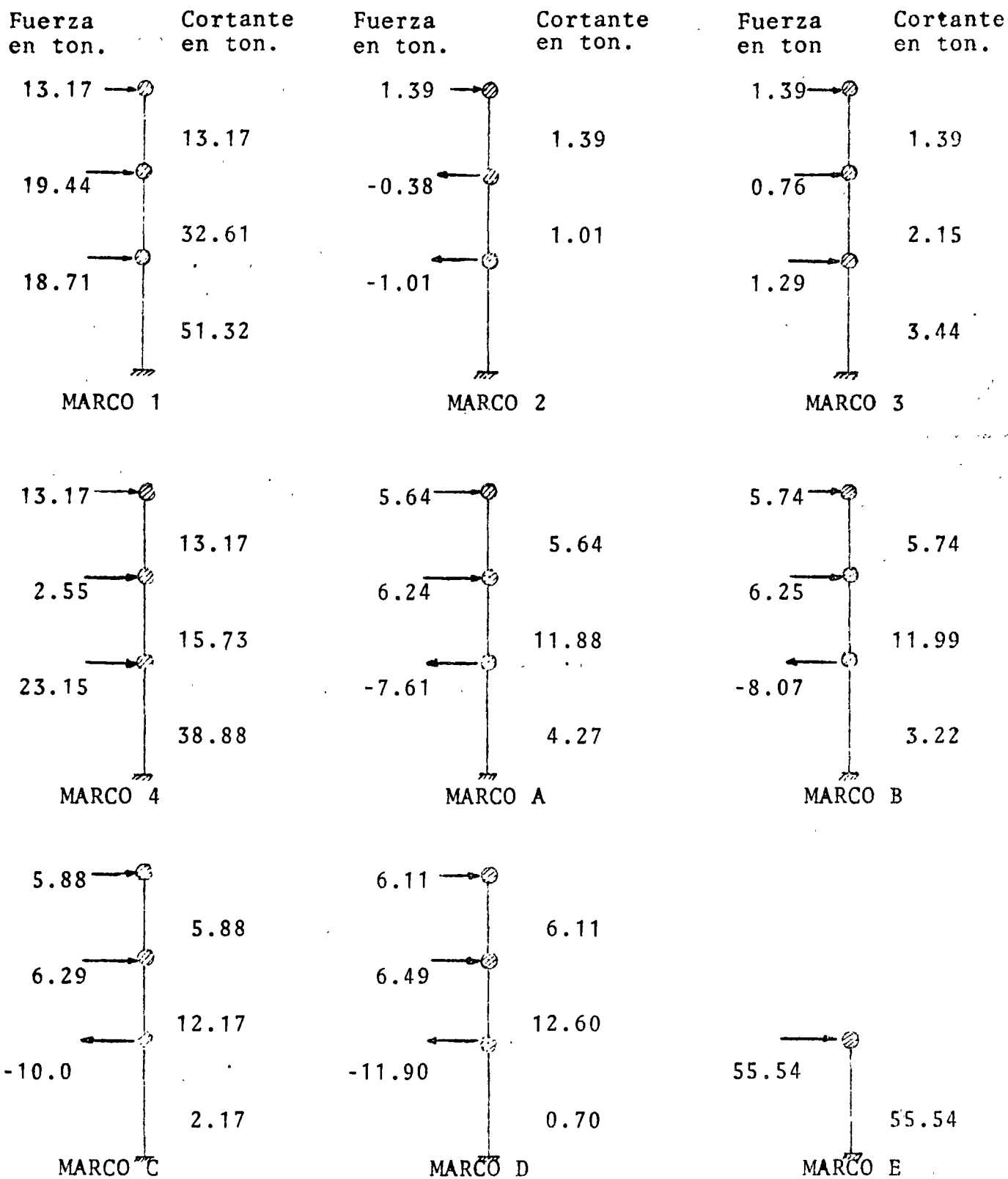
$$R_e = 10\ 699.35$$

## ENTREPISO 1.-

MARCO	$K_x$	Y	$\bar{Y} = Y - Y_T$	$K_x \bar{Y}$	$K_x \bar{Y}^2$	Sismo en X		en Y Torsión	(X) + 0.3(Y)	0.3(X) + (Y)	V Diseño
						Directo	Torsión				
A	2.25	0.0	-19.93	-44.84	893.66	0.09	3.83	1.15	4.27	2.33	4.27
B	2.25	5.0	-14.93	-33.59	501.50	0.09	2.87	0.86	3.22	1.75	3.22
C	2.25	10.00	-9.93	-22.34	221.84	0.09	1.91	0.57	2.17	1.17	2.17
D	2.25	17.00	-2.93	-6.59	19.31	0.09	0.56	0.17	0.70	0.37	0.70
E	150.67	20.00	0.07	108.55	7.60	63.97	-9.26	2.78	55.54	19.19	55.54
$\Sigma$	1559.67			$\approx 0$	1643.91						65.90

MARCO	$K_y$	X	$\bar{X} = X - X_T$	$K_y \bar{X}$	$K_y \bar{X}^2$	Sismo en Y		en X Torsión	(X) + 0.3(Y)	0.3(X) + (Y)	V Diseño
						Directo	Torsión				
1	39.29	0.0	-10.27	-403.51	4144.03	30.65	10.34	34.43	46.73	51.32	51.32
3	4.41	15.0	4.73	20.86	98.66	3.44	-0.53	1.78	2.65	3.44	3.44
4	39.29	20.00	9.73	382.29	3719.70	30.65	-9.79	32.62	38.88	30.65	38.88
	82.99			$\approx 0$	7962.39						93.64

$$R_{\theta} = 9\ 606.30$$



Fuerzas sobre los marcos.

Reducción de las fuerzas cortantes, tomando en cuenta el valor del periodo fundamental.

Para calcular el periodo fundamental, el inciso II del artículo 240 da la expresión

$$T = 6.3 \left\{ \frac{\sum W_i X_i^2}{g \sum P_i X_i} \right\}^{1/2}$$

ENTREPISO O NIVEL	$W_i$ (ton)	$P_i$ (ton)	$K_i$ (ton/cm)	$V_i$ (ton)	$\Delta X_i$ (cm)	$X_i$ (cm)	$X_i^2$	$W_i X_i^2$ (ton-cm <sup>2</sup> )	$P_i X_i$ (ton-cm)
3	192	23.19	22.72	23.19	1.0707	4.1530	17.2475	3311.52	96.3081
2	296	25.03	15.60	48.216	3.0908	3.1323	9.8113	2904.1448	78.4015
1	342	16.52	1559.67	64.74	0.0415	0.0415	0.0017	0.589	0.6856
								6216.254	175.3952

$$T = 6.3 \left\{ \frac{6216.254}{981 \times 175.3952} \right\}^{1/2} = 1.1975$$

$$T_1 = 0.8 < 1.1975 < T_2 = 3.3$$

Este resultado indica que no se efectuarán reducciones en las fuerzas cortantes obtenidas.

### Momentos de Volteo

El factor de reducción de los momentos de volteo está dado

$$F_R = 0.8 + 0.2Z$$

DONDE:

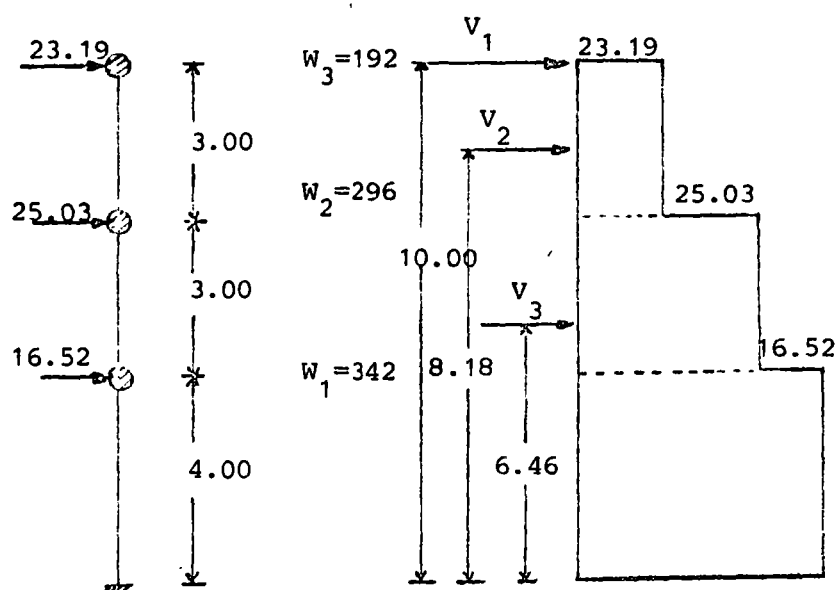
Z = Relación entre la altura a la que se calcula el factor reductivo por momento de volteo y la altura de la construcción

Además:

$$h_{Gj} = \frac{\sum W_i h_i}{\sum W_i}$$

$$d_j = h_{Gj} - h_j$$

Las fuerzas cortantes obtenidas así como las fuerzas correspondientes en los niveles se muestran en la figura:



Los cálculos se muestran en las siguientes tablas:

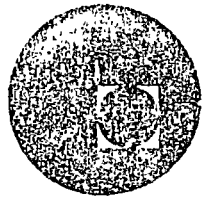
NIVEL i	$W_i$ ton	$\Sigma W_i$ ton	$h_i$ m	$W_i \cdot h_i$ ton-m	$\Sigma W_i \cdot h_i$ ton-m	$h_{Gj}$
3	192	192	10.00	1920.00	1920.00	10.00
2	296	488	7.00	2072.00	3992.00	8.18
1	342	830	4.00	1368.00	5360.00	6.46

NIVEL j	$h_{pj}$ m.	$V_j$ ton	$h_{pj} \cdot V_j$ ton-m	$M_{col}$ ton-m	$h_{Gj}$ m	$h_j$ m	$d_j$ m	$M_1$ ton-m
2	3	23.19	69.57	69.57	10.00	7.00	3.00	69.57
1	3	48.22	144.66	214.23	8.18	4.00	4.18	201.56
0	4	64.74	258.96	473.19	6.46	0.00	6.46	418.22

NIVEL	Z	$F_R$	$M_Z$ ton-m	Momento de Volteo
2	0.7	$0.8 + 0.14 = 0.94$	65.40	69.57
1	0.4	$0.8 + 0.08 = 0.88$	188.52	201.56
0	0.	$0.8 + 0. = 0.80$	378.55	418.22



centro de educación continua  
división de estudios superiores  
facultad de ingeniería, unam



#### IV CURSO INTERNACIONAL DE INGENIERIA SISMICA

### DISEÑO SISMICO DE EDIFICIOS

Ejemplos de Análisis Sísmico de Edificios

Dr. Octavio A. Rascón Chávez.

Agosto, 1978.

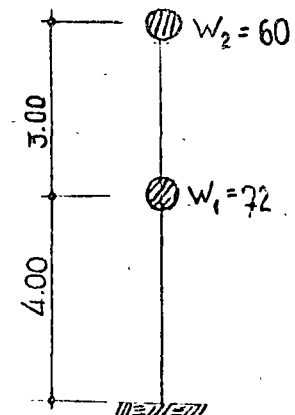
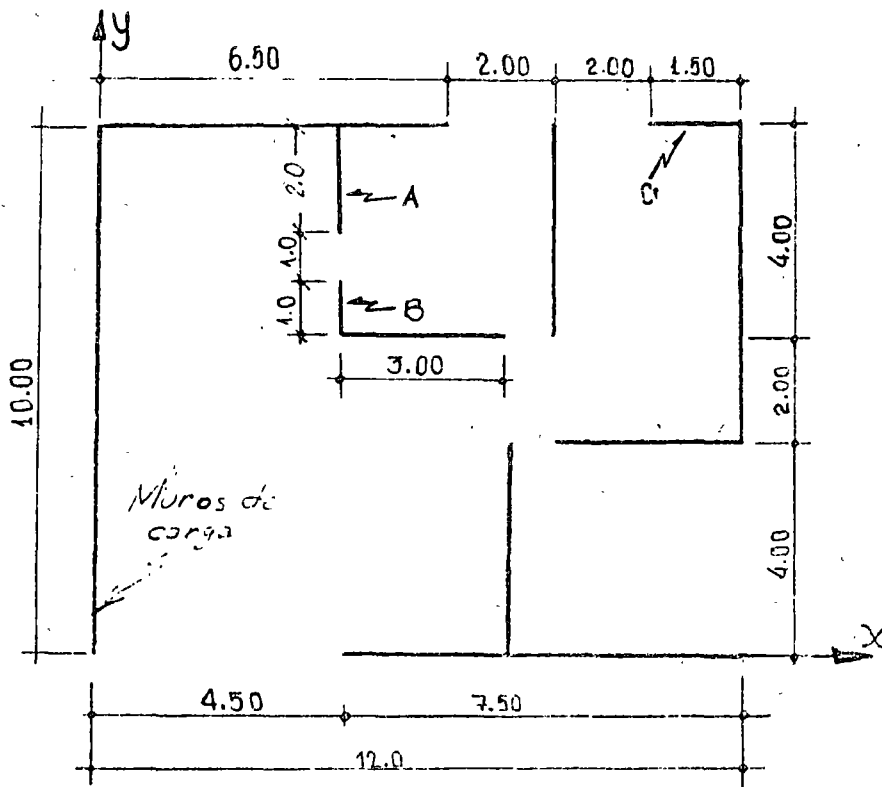


5. EJEMPLOS DE ANALISIS SISMICO DE ACUERDO CON EL REGLAMENTO  
DE CONSTRUCCIONES PARA EL DISTRITO FEDERAL - 1977

*Por Dr Octavio A Rescon de*

5.1 EJEMPLO DEL METODO SIMPLIFICADO

La figura siguiente muestra esquemáticamente las plantas, alturas y pesos de una estructura. Se verificará que se satisfacen las condiciones que se exigen en el artículo 238 y se efectuará el análisis mediante el método simplificado.



Nota: las distancias están en metros y los pesos en toneladas.

Los muros son de tabique recocido, de 14 cm de espesor, cuya resistencia al esfuerzo cortante es  $1.5 \text{ kg/cm}^2$ .

## PLANTA DE LOS DOS PISOS

Observando la planta se puede afirmar que más del 75% de las cargas verticales están soportadas por los muros. Se aprecia también que existen en cada dirección dos muros perimetrales paralelos; las longitudes en que estos muros están ligados a las losas son, en la dirección X: 7.50 m y 6.50 m, mayores que  $0.5 \times 12 = 6.00$  m, y en la dirección Y, 10.00 m y 6.00 m, mayores que  $0.5 \times 10 = 5.00$  m. La relación entre la longitud y anchura de la planta es  $12/10 = 1.2$ , menor que 2.0; la relación entre la altura y la dimensión mínima en planta es  $7/10 = 0.7$ , menor que 1.5 y la altura del edificio es menor que 13 m. En conclusión se puede aplicar el método simplificado en ambas direcciones..

Paso 1. Se determina el coeficiente sísmico de acuerdo con la tabla del artículo 239. Suponiendo que la estructura se edificará en la zona I y teniendo en cuenta que la altura es 7 m, encontramos que el coeficiente sísmico es 0.08

Paso 2. Se calculan las fuerzas y cortantes sísmicas, de la manera especificado en el artículo 240, es decir, como se indica en la tabla siguiente:

Nivel o entrepiso i	$W_i$ ton	$h_i$ m	$W_i h_i$ ton-m	$P_i$ ton	$V_i$ ton
2	60	7	420	6.30	6.32
1	72	4	288	4.32	10.62
Sumas	132		708	10.62	

donde:  $h_i$  es la altura del nivel i respecto a la base,

$$P_i = \frac{W_i h_i (0.08 \Sigma W_i)}{\Sigma W_i h_i} = \frac{W_i h_i (.08 \times 132)}{708} = 0.015 W_i h_i$$

Las fuerzas  $P_i$  actúan en las direcciones X y Y

Paso 3. Se calculan las fuerzas resistentes en las direcciones X, Y. Los muros cuya relación  $\frac{h}{L}$  sea menor que 1.33 tendrán una capacidad de 1.5 kg/cm<sup>2</sup> (sin ninguna reducción), en la planta baja esto ocurre para muros con una longitud mayor que  $4.0/1.33 = 3$  m. En la dirección X hay (6.5+3.0+3.5+7.5) = 20.5 m que cumplen tal condición, y (10.0+4.0+4.0+6.0) = 24 m, en la dirección Y.

Los muros A, B y C tienen  $L < 3.0$  m y sus esfuerzos resistentes se reducen a

$$\sigma_A = 1.5 \left(1.33 \times \frac{2.0}{4.0}\right)^2 = 0.66 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_B = 1.5 \left(1.33 \times \frac{1.0}{4.0}\right)^2 = 0.17 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_C = 1.5 \left(1.33 \times \frac{1.5}{4.0}\right)^2 = 0.37 \text{ kg/cm}^2$$

La resistencia total en la dirección x es:

$$\frac{2050 \times 14 \times 1.5 + 150 \times 14 \times .37}{1000} = 43.83 \text{ ton}$$

y en la dirección Y:

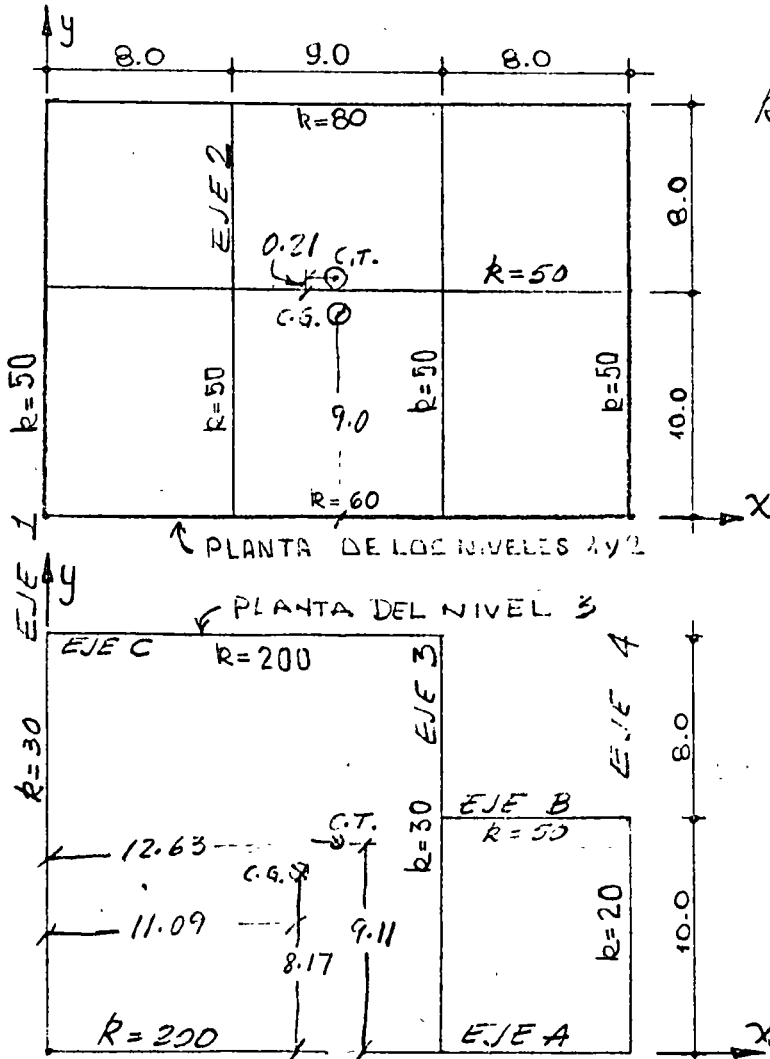
$$\frac{2400 \times 14 \times 1.5 + 200 \times 14 \times 0.66 + 100 \times 14 \times .17}{1000} =$$

52.49 ton

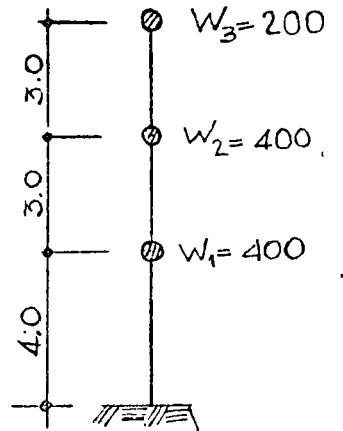
ambas mayores que la fuerza cortante actuante 10.62 ton.

### 5.2 EJEMPLO DE ANALISIS ESTATICO

En las figuras siguientes se muestran la elevación y las plantas esquemáticas de un hospital de tres niveles que se construirá en la zona de terreno firme del Distrito Federal.



*R = rigidez de un piso*



Nota: las distancias están en metros, los pesos en toneladas y las rigideces de entrepiso en toneladas sobre centímetro.

Los detalles constructivos y los materiales que se usarán permiten utilizar  $Q=4$ . Se dan los valores de las rigideces de entrepiso de los marcos, los pesos concentrados en los niveles y las dimensiones. Se determinarán las fuerzas cortantes que correspondan a cada marco utilizando el método estático propuesto en el artículo 240 del Reglamento.

Paso 1. Determinación del coeficiente sísmico; el artículo 240 especifica que la relación entre la fuerza cortante en la base  $V$  y el peso total  $W$  igual a  $\frac{C}{Q}$  o  $a_0$ , el que sea mayor. El valor de  $C$  se obtiene de la tabla del artículo 234 y el de  $a_0$ , de la tabla del artículo 236, y son parte de la definición del espectro de diseño sísmico.

Enseguida se indican los valores correspondientes a la zona de terreno firme (zona I) y a un edificio que se va a usar como hospital (construcción del grupo A, según el artículo 232):

$$a_0 = 0.03, c = 0.16; C=0.16 \times 1.3=0.208$$

$$\text{Usar } \frac{C}{Q} = \frac{0.208}{4} = 0.052 > a_0$$

Paso 2. Cálculo de fuerzas sísmicas en los niveles: según el artículo 240 la fuerza sísmica  $P_i$  en el nivel  $i$  es igual a  $C_i W_i$ , donde  $W_i$  es el peso de tal nivel y  $C_i$  es una constante proporcional a  $h_i$ , que es la correspondiente altura con respecto a la base. Digamos:

$$P_i = C_i W_i = \alpha h_i W_i$$

Para determinar  $\alpha$  se toma en cuenta que

$$\frac{V}{W} = \frac{\sum P_i}{\sum W_i} = \text{coeficiente sísmico} = S_a$$

$$\text{de donde: } \therefore S_a = \frac{\alpha \sum h_i W_i}{\sum W_i} \rightarrow \alpha = \frac{S_a \sum W_i}{\sum h_i W_i}$$

$$P_i = \frac{W_i h_i}{\sum W_i h_i} S_a \sum W_i$$

El cálculo de las  $P_i$  para este ejemplo se presenta en la siguiente tabla

Nivel o entrepiso $i$	$W_i$ (ton)	$h_i$ (m)	$W_i h_i$	$P_i$ (ton)	$V_i$ (ton)
3	200	10	2000	16.25	16.25
2	400	7	2800	22.75	39.00
1	400	4	1600	13.00	52.00
sumas	1000		6400	52.00	

$$S_a = 0.052$$

$$P_i = \frac{0.052 \times 1000}{6400} W_i h_i$$

$$P_i = 0.008125 W_i h_i$$

Paso 3. Determinación de la posición de las fuerzas cortantes, los centros de rigidez de cada piso, y los momentos torsionantes:

Las fuerzas en los niveles  $P_i$  están ubicadas en los centros de gravedad de las cargas  $W_i$ . Como las fuerzas cortantes son resultado de las fuerzas  $P_i$ , su ubicación estará dada por:

$$x_V = \frac{\sum P_j X_j}{V} \quad ; \quad y_V = \frac{\sum P_j Y_j}{V}$$

donde  $V = \sum P_j$  y las sumas son sólo hasta el nivel en que está aplicada la fuerza cortante  $V$ . Supondremos en este ejemplo que los centros de gravedad de las cargas coinciden con el centro de gravedad de las áreas de las plantas, es decir que, con referencia a los ejes indicados en las figuras donde se presentan las plantas, las coordenadas de los puntos de aplicación de las fuerzas sísmicas en los niveles son

Nivel	$X_j$	$Y_j$
j	(m)	(m)
3	11.09	8.17
1,2	12.50	9.00

En la siguiente tabla se muestran los cálculos para determinar la posición de las fuerzas cortantes.

Nivel o entrepiso	FUERZAS EN DIRECCION X						FUERZAS EN DIRECCION Y					
	P <sub>j</sub>	Y <sub>j</sub>	P <sub>j</sub> Y <sub>j</sub>	ΣP <sub>j</sub> Y <sub>j</sub>	V	Y <sub>V</sub>	P <sub>j</sub>	X <sub>j</sub>	P <sub>j</sub> X <sub>j</sub>	ΣP <sub>j</sub> X <sub>j</sub>	V	X <sub>V</sub>
3	16.25	8.17	132.76	132.76	16.25	8.17	16.25	11.09	180.21	180.21	16.25	11.09
2	22.75	9.00	204.75	337.51	39.00	8.65	22.75	12.50	284.38	464.59	39.00	11.91
1	13.00	9.00	117.00	454.51	52.00	8.74	13.00	12.50	162.50	627.09	52.00	12.06

El centro de torsión es el punto por el que debe pasar la línea de acción de la fuerza cortante sísmica para que el movimiento relativo de los niveles que limitan el entrepiso sea exclusivamente de traslación. Si esto no ocurre existe torsión o rotación relativa entre tales niveles. Las expresiones para calcular el centro de torsión será, en cada entrepiso:

$$X_T = \frac{\sum K_Y X}{\sum K_Y} \quad ; \quad Y_T = \frac{\sum K_X Y}{\sum K_X}$$

donde  $K_Y$  son las rigideces de entrepiso de los marcos orientados en la dirección Y, cuya posición está dada por X.  $K_X$  son las rigideces de entrepiso de los marcos orientados en la dirección x, cuya posición está dada por Y. Las sumas se refieren a todos los marcos que hay en el entrepiso en la correspondiente dirección



En la siguiente tabla se muestran los cálculos para el ejemplo que estamos tratando.

MARCOS EN LA DIRECCION Y											
ENTRE PISO	EJE 1		EJE 2		EJE 3		EJE 4		$\Sigma K_Y$	$\Sigma K_Y X$	$X_T$
	$K_Y$	X	$K_Y$	X	$K_Y$	X	$K_Y$	X			
3	30	0	—	—	30	17	20	25	80	1010	12.63
2	50	0	50	8	50	17	50	25	200	2500	12.50
1	50	0	50	8	50	17	50	25	200	2500	12.50

MARCOS EN LA DIRECCION X									
ENTRE- PISO	EJE A		EJE B		EJE C		$\Sigma K_X$	$\Sigma K_X Y$	$Y_T$
	$K_X$	Y	$K_X$	Y	$K_X$	Y			
3	200	0	50	10	200	18	450	4100	9.11
2	60	0	50	10	80	18	190	1940	10.21
1	60	0	50	10	80	18	190	1940	10.21

Para determinar los momentos torsionantes es necesario conocer las excentricidades calculadas de las fuerzas cortantes y añadir las amplificaciones prescritas en el punto VII del art 240. Esto se hace en las siguientes tablas, donde también se calculan los momentos torsionantes.

$$e_1 = 1.5 e_2 + 0.16$$

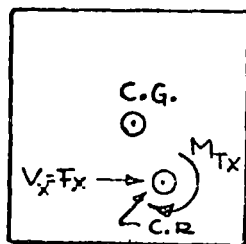
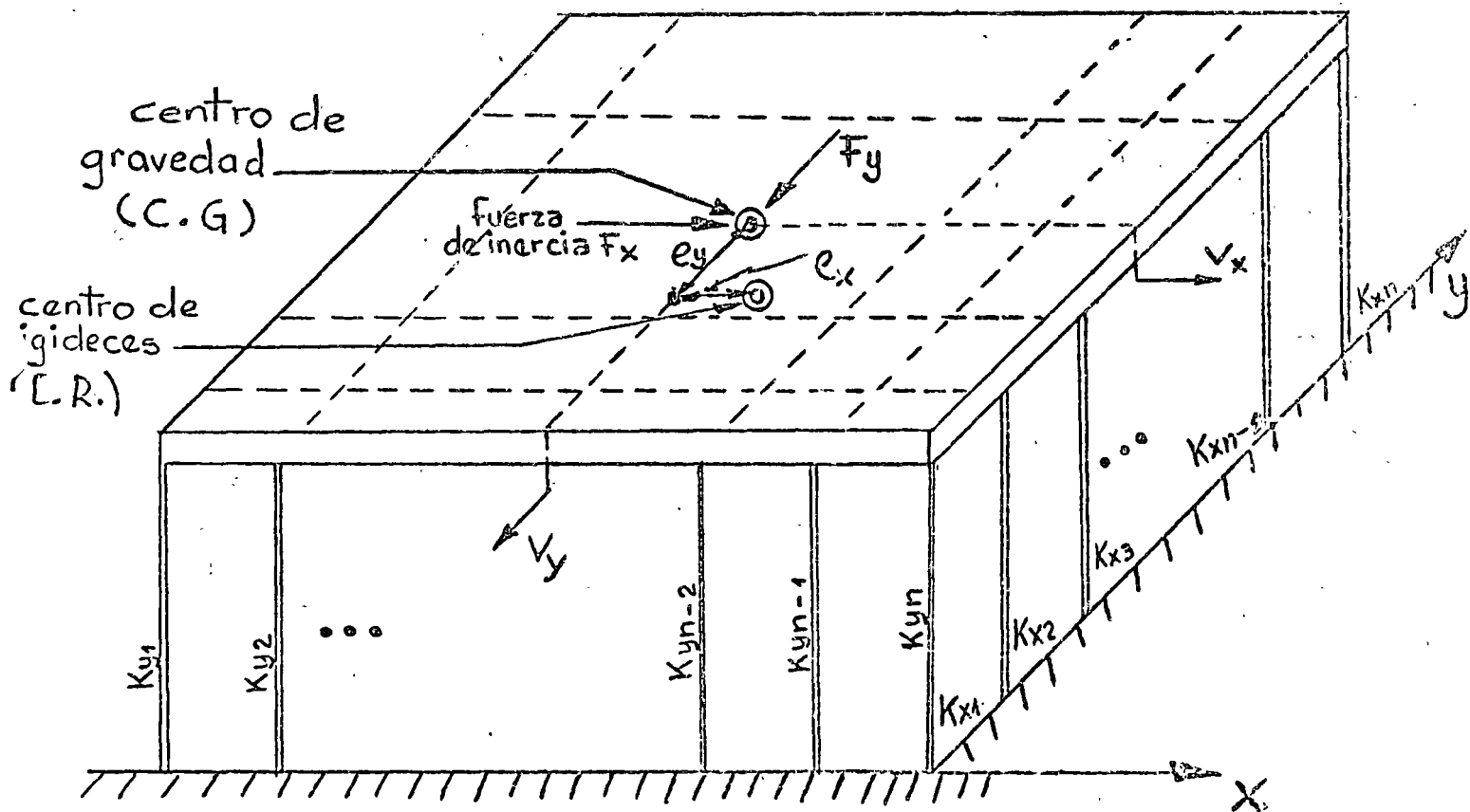
$$e_2 = e_3 - 0.16$$

S I S M O E N D I R E C C I O N X									
ENTRE-PISO	$Y_V$ (m)	$Y_T$ (m)	$e_s = Y_V - Y_T$ (m)	b (m)	$e_1$ (m)	$e_2$ (m)	$V_x$ (m)	$M_{1x}$ (ton-m)	$M_{2x}$ (ton-m)
3	8.17	9.11	-0.94	18.0	-3.21	0.86	16.25	-52.16	13.98
2	8.65	10.21	-1.56	18.0	-4.14	0.24	39.00	-161.46	9.36
1	8.74	10.21	-1.47	18.0	-4.01	0.33	52.00	-208.52	17.16

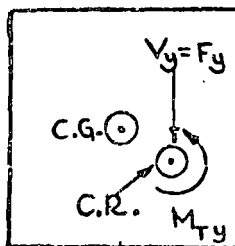
S I S M O E N D I R E C C I O N Y									
ENTRE-PISO	$X_V$ (m)	$X_T$ (m)	$e_s = X_V - X_T$ (m)	b (m)	$e_1$	$e_2$	$V_Y$	$M_{1Y}$	$M_{2Y}$
3	11.09	12.63	-1.54	25.0	-4.81	0.96	16.25	-78.16	15.6
2	11.91	12.50	-0.59	25.0	-3.39	1.91	39.00	-132.21	74.49
1	12.06	12.50	-0.44	25.0	-3.16	2.06	52.00	-164.32	107.12

PASO 4 Distribución de las fuerzas cortantes sísmicas en los marcos. La fuerza cortante que debe resistir un marco cualquiera debe ser la suma de dos efectos: el debido a la fuerza cortante del piso actuando en el centro de rigideces y el debido al momento torsionante del piso. Cuando todos los marcos son paralelos a uno de los ejes X o Y, son válidas las siguientes expresiones:

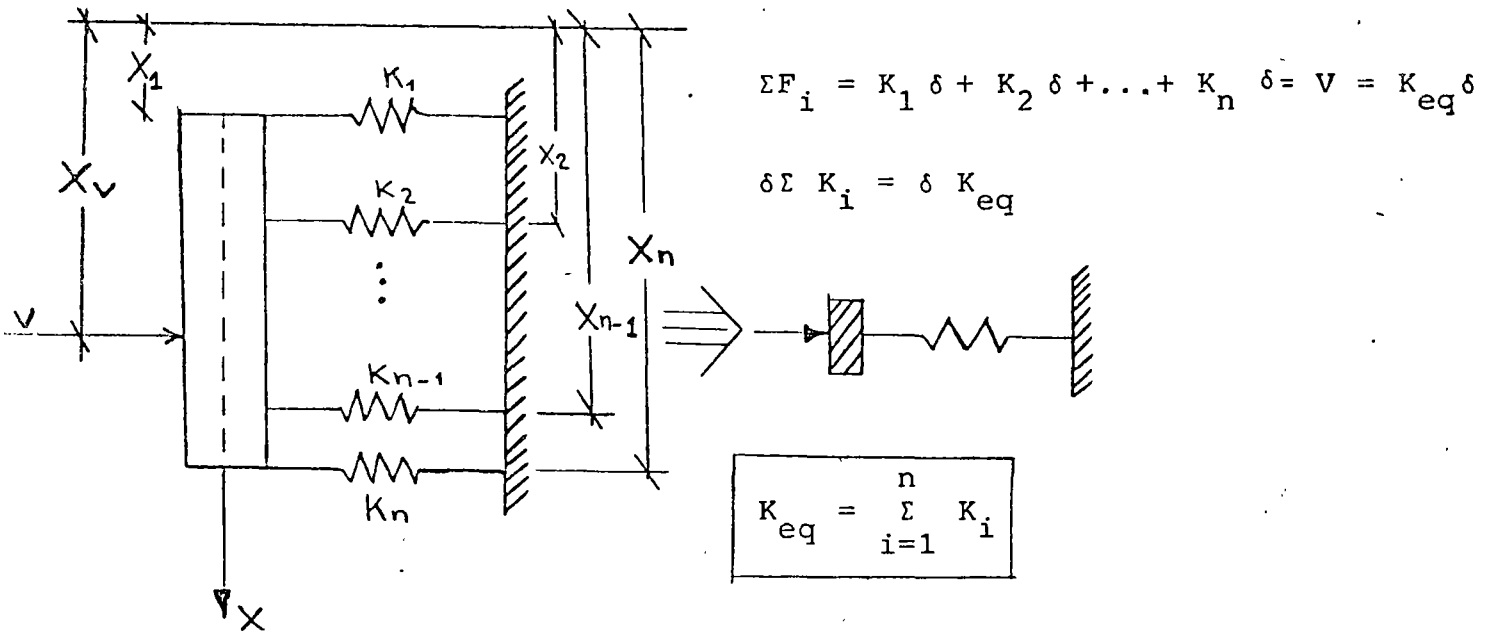
DISTRIBUCION DE FUERZAS CORTANTES DIRECTAS Y POR TORSION



+



DISTRIBUCION DE LAS FUERZAS CORTANTES EN UN ENTREPISO

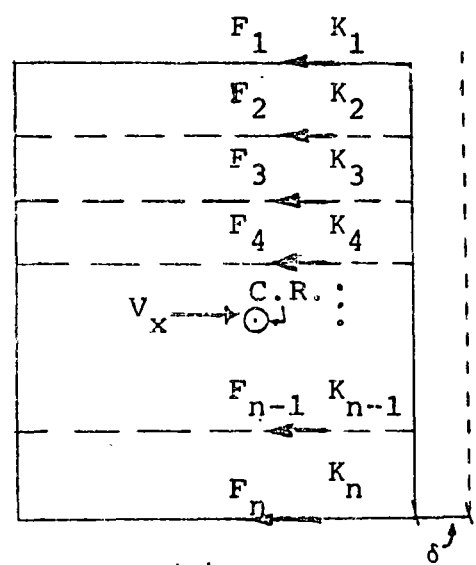


$$X_v = \frac{\sum_{i=1}^n K_i X_i}{\sum_{i=1}^n K_i}$$

$\Sigma M_i = \Sigma F_i X_i = \Sigma K_i \delta X_i = \delta \Sigma K_i X_i = V X_v = K_{eq} \delta X_v$

← POSICION DEL CENTRO DE RIGIDEZES

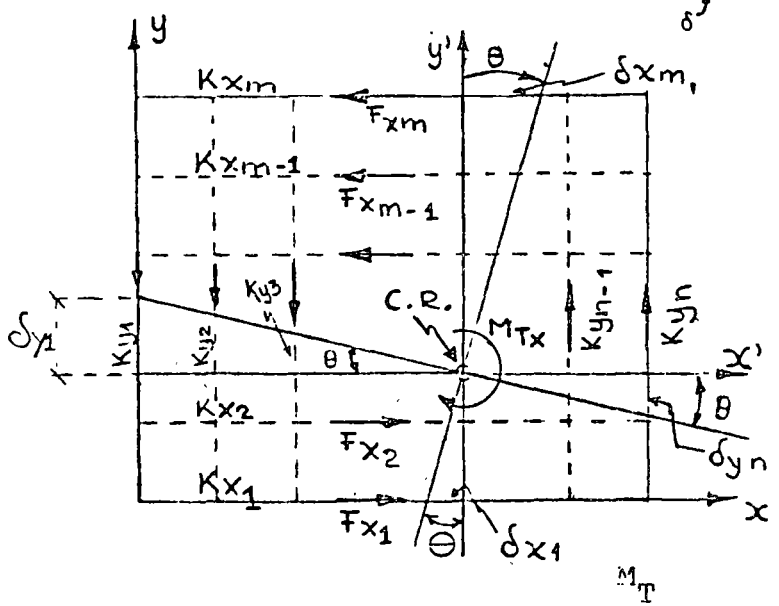
VEAMOS COMO SE DISTRIBUYEN LAS FUERZAS CORTANTES EN LOS MARCOS



$$F_i = K_i \delta$$

$$\sum F_i = \sum K_i \delta = V_x \therefore \delta = \frac{V_x}{\sum K_i}$$

$$F_i = V_x \frac{K_i}{\sum_{i=1}^n K_i}$$



$$F_{x_i} = K_{x_i} \delta x_i = K_{x_i} y'_i \theta$$

$$F_{y_i} = K_{y_i} \delta y_i = K_{y_i} x'_i \theta$$

$$\sum M_{C.R.} = \sum F_{x_i} y'_i + \sum F_{y_i} x'_i$$

$$= \theta (\sum K_{x_i} y_i'^2 + \sum K_{y_i} x_i'^2)$$

$$= M_{T_x}$$

DE DONDE  $\theta = \frac{M_{T_x}}{\sum K_{x_i} y_i'^2 + \sum K_{y_i} x_i'^2}$

POR LO QUE

$$F_{x_i} = M_{T_x} \frac{K_{x_i} y'_i}{\sum K_{x_i} y_i'^2 + \sum K_{y_i} x_i'^2}$$

$$F_{y_i} = M_{T_x} \frac{K_{y_i} x'_i}{\sum K_{x_i} y_i'^2 + \sum K_{y_i} x_i'^2}$$

PARA LOS MARCOS PARALELOS A X

PARA MARCOS PARALELOS A Y

$$1. \quad V_X \frac{K_X}{\Sigma K_X} \quad \begin{array}{l} \text{(Sismo en X)} \\ \text{Directo} \end{array}$$

$$V_Y \frac{K_Y}{\Sigma K_Y} \quad \begin{array}{l} \text{(Sismo en Y)} \\ \text{Directo} \end{array}$$

$$2. \quad \frac{M_X K_X \bar{Y}}{R_o} \quad \begin{array}{l} \text{(Sismo en X)} \\ \text{torsión} \end{array}$$

$$\frac{M_Y K_Y \bar{X}}{R_o} \quad \begin{array}{l} \text{(Sismo en Y)} \\ \text{torsión} \end{array}$$

$$3. \quad \frac{|M_Y K_X \bar{Y}|}{R_o} \quad \begin{array}{l} \text{(Sismo en Y)} \\ \text{torsión} \end{array}$$

$$\frac{|M_X K_Y \bar{X}|}{R_o} \quad \begin{array}{l} \text{(Sismo en X)} \\ \text{torsión} \end{array}$$

$$\text{donde } R_o = \Sigma K_X \bar{Y}^2 + \Sigma K_Y \bar{X}^2$$

$\bar{X}$ ,  $\bar{Y}$  son las coordenadas de los marcos con respecto

$$\text{al centro de torsión: } \bar{X} = X - X_T$$

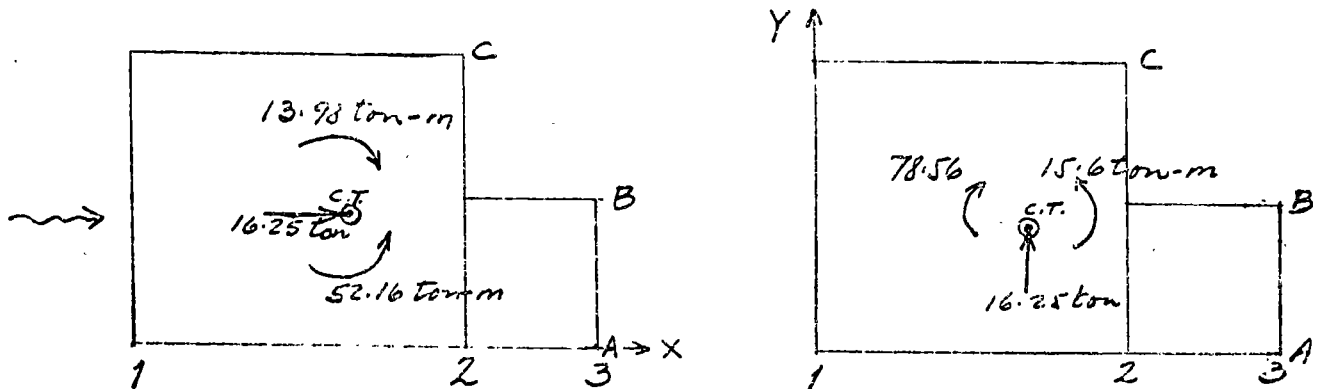
$$\bar{Y} = Y - Y_T$$

Nótese que las contribuciones directas (1) y las de torsión que se producen en los marcos perpendiculares a la dirección del sismo (3) son siempre positivas. La contribución (2) puede ser positiva o negativa. Los valores de  $M_X$  y  $M_Y$  se escogerán, para cada marco, de forma que produzcan la máxima contribución.

El art 237 del Reglamento exige que las estructuras se analicen bajo la acción de dos componentes ortogonales del movimiento del terreno y que en cada sección crítica se sumarán vectorialmente los efectos gravitacionales con los de un componente del movimiento del terreno y, cuando sea significativo, 0.3 de los efectos del otro. En rigor tal combinación debe hacerse a nivel de desplazamiento y de elementos mecánicos, pero es razonable efectuarla a nivel de

fuerzas cortantes, que es como se hace en las siguientes tablas.

ENTRE PISO 3  $V_x = 16.25 \text{ ton}$   $X_T = 12.63 \text{ m}$   
 $V_y = 16.25 \text{ ton}$   $Y_T = 9.11 \text{ m}$



MARCO	$K_x$	Y	$\bar{Y} = Y - Y_T$	$K_x \bar{Y}$	$K_x \bar{Y}^2$	Sismo en X		en Y Tors	1 (X) + .3(Y)	.3(X) + 1 (Y)	V Diseño
						Dir.	Tors				
A	200	0.	-9.11	-1822.	16 598.42	7.22	2.33	3.48	10.59	5.65	10.59
B	50	10.	0.89	44.5	39.61	1.81	0.02	0.09	1.86	0.63	1.86
C	200	18.	8.89	1778	15 806.42	7.22	0.61	3.40	8.85	5.75	8.85
$\Sigma$	450			$\approx 0$	32 444.45	16.25					21.30

MARCO	$K_y$	X	$\bar{X} = X - X_T$	$K_y \bar{X}$	$K_y \bar{X}^2$	Sismo en Y		en X Tors	1 (X) + .3(Y)	.3(X) + 1 (Y)	V Diseño
						Dir.	Tors				
1	30	0	-12.63	-378.9	4785.51	6.09	0.72	0.48	2.52	6.95	6.95
2	30	17.	4.37	131.1	572.91	6.09	0.05	0.17	1.89	6.19	6.18
3	20	25.	12.37	247.4	3060.34	4.07	0.09	0.35	1.34	4.26	4.26
$\Sigma$	80			$\approx 0$	8418.76	16.25					17.39

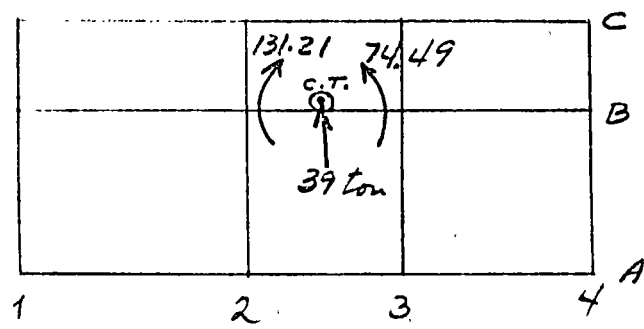
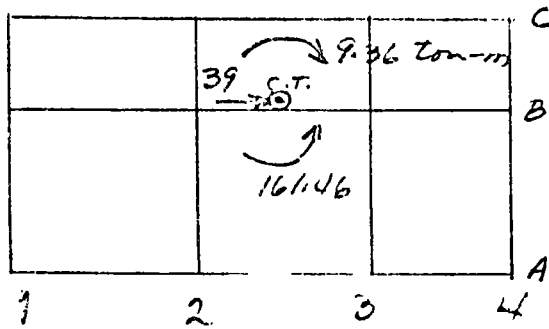
$$\Sigma = 40,863.21$$

Como comprobación la suma de  $K_x \bar{Y}$  y  $K_y \bar{X}$  debe ser cero, la suma de los cortantes directos debe ser igual a los respectivos actuantes y la de los de diseño debe ser mayor que tal valor.

ENTREPISO 2

$V_x = 39.0 \text{ ton}$   $V_y = 39.0 \text{ ton}$

$X_T = 12.50 \text{ m}$   $Y_T = 10.21 \text{ m}$



MARCO	$K_x$	Y	$\bar{Y} = Y - Y_T$	$K_x \bar{Y}$	$K_x \bar{Y}^2$	Sismo en X		en Y Tors	$1(X) + .3(Y)$	$.3(X) + 1(Y)$	V diseño
						Dir	Tors				
A	60	0	-10.21	-612.6	6254.7	12.32	3.44	2.82	16.61	7.55	16.61
B	50	10	-0.21	-10.5	2.2	10.26	0.06	0.05	10.34	3.15	10.34
C	80	18	7.79	623.2	4854.7	16.42	0.20	2.86	17.48	7.85	17.48
$\Sigma$	190			$\approx 0$	11111.6	39.0					44.43

MARCO	$K_y$	X	$\bar{X} = X - X_T$	$K_y \bar{X}$	$K_y \bar{X}^2$	Sismo en Y		en X Tors	$1(X) + .3(Y)$	$.3(X) + 1(Y)$	V diseño
						Dir	Tors				
1	50	0	-12.5	-625	7812.5	9.75	2.87	3.51	7.30	13.67	13.67
2	50	8	-4.5	-225	1012.5	9.75	1.03	1.26	4.49	11.16	11.16
3	50	17	4.5	225	1012.5	9.75	0.58	1.26	4.49	11.16	11.16
4	50	25	12.5	625	7812.5	9.75	1.62	3.56	7.30	13.67	13.67
	200			$= 0$	17650.0	39.0					49.66

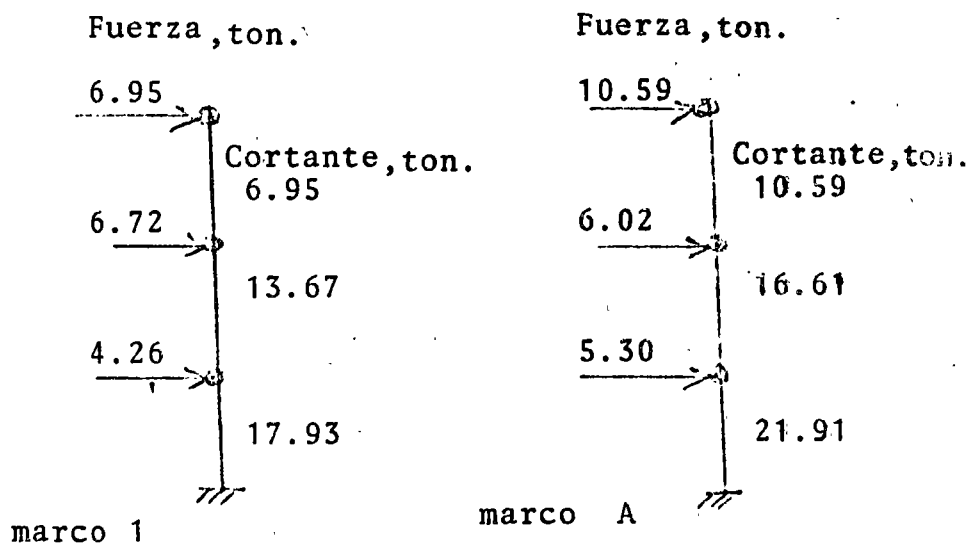
$\Sigma = 28,761.6$



De manera similar resulta para el primer entrepiso:

Marco	A	B	C	1	2	3	4
V diseño	21.91	13.78	23.33	17.93	14.78	14.78	17.93

Al lado se muestran las fuerzas que servirán para analizar los marcos 1 y A



Dividiendo las fuerzas cortantes entre las rigideces de entrepiso se pueden calcular los desplazamientos de entrepiso, para revisar si son o no aceptables; es importante tener presente que deben multiplicarse por Q, puesto que la reducción por ductilidad se aplica sólo a las fuerzas y no a los desplazamientos. Para los marcos 1 y A tenemos:

Entre-piso	Marco 1			Marco A			$\sigma_{\text{máx}}$ (cm)
	V (ton)	K (ton/cm)	$\sigma = Q \frac{V}{K}$ (cm)	V (ton)	K (ton/cm)	$\sigma = Q \frac{V}{K}$ (cm)	
1	17.93	50	1.43	21.91	60	1.46	3.20
2	13.67	50	1.09	16.61	60	1.11	2.40
3	6.95	30	0.93	10.59	200	0.21	2.40

$\sigma_{\text{máx}} = 0.008 h$  (art 242) Todas las deformaciones son aceptables

5.2 EJEMPLO DE REDUCCION DE LAS FUERZAS CORTANTES EN ANALISIS ESTADICO, TOMANDO EN CUENTA EL VALOR DEL PERIODO FUNDAMENTAL.

En la tabla siguiente se muestran los valores de los pesos, rigideces de entrepiso, fuerzas cortantes obtenidas en el ejemplo 5.2.

Para calcular el periodo fundamental, el inciso II del artículo 240 da la expresión:

$$T = 6.3 \left\{ \frac{\sum W_i X_i^2}{g \sum P_i X_i} \right\}^{1/2}$$

donde  $g$  es la aceleración de la gravedad

Los cálculos se presentan en la siguiente tabla:

Entrepiso o nivel	$W_i$ (ton)	$P_i$ (ton)	$K_i$ (ton/cm)	$V_i$ (ton)	$\Delta_i$ (cm)	$X_i$ (cm)	$X_i^2$	$W_i X_i^2$ (ton-cm <sup>2</sup> )	$P_i X_i$ (ton-cm)
3	200	16.25	80	16.25	0.2031	0.6581	.43310	86.620	10.694
2	400	22.75	200	39.00	0.1950	0.4550	.20703	82.810	10.351
1	400	13.00	200	52.00	0.2600	0.2600	.06760	27.040	3.380
$\Sigma$								196.67	24.425

$$T = 6.3 \left\{ \frac{1}{981} \times \frac{196.67}{24.425} \right\}^{1/2} = 0.571 \text{ seg}$$

Para la zona I,  $T_1 = 0.3$  y  $T_2 = 0.8$  seg

Entonces:

$$0.3 < 0.571 < 0.8 \quad , \quad T_1 < T < T_2$$

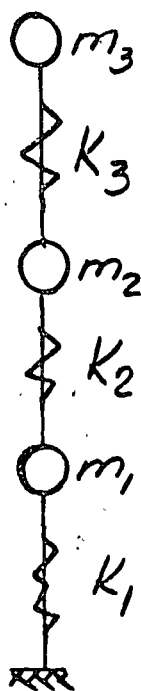
por lo que no se permite reducción en este caso

### 5.3 EJEMPLO DE ANALISIS DINAMICO

El art 241 del Reglamento acepta que el análisis dinámico puede hacerse por el método denominado modal (en realidad debe llamarse modal espectral), y se aplicará este método al edificio del ejemplo 5.2, cuando el sismo actúa en la dirección Y.

PASO 1. Determinación de modos y frecuencias de vibrar.

El Reglamento exige que se consideren todos los modos con período mayor o igual que 0.4 seg, y nunca menos de 3 modos. Cuando se tienen definidas las rigideces de entrepiso y las masas, el edificio se puede idealizar como se ilustra enseguida:



$M_i$  = masa del nivel  $i$

$K_i$  = rigidez del entrepiso  $i$  =  
 $\Sigma$  rigideces de entrepiso de los marcos  
 en esa dirección

En el ejemplo:

$$m_1 = m_2 = \frac{400}{981} = 0.407750 \frac{\text{T} \cdot \text{seg}^2}{\text{cm}}$$

$$m_3 = \frac{200}{981} = 0.203875 \frac{\text{T} \cdot \text{seg}^2}{\text{cm}}$$

$$K_1 = 50 \times 4 = 200 \text{ T/cm} = K_2$$

$$K_3 = 30 + 30 + 20 = 80 \text{ T/cm}$$

Con estos valores se pueden determinar los períodos y modos de vibrar por varios procedimientos de los que ilustraremos dos:

## I. Método matricial

Las matrices de masas y de rigideces del sistema son:

$$\underline{M} = \begin{vmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{vmatrix} ; \quad \underline{K} = \begin{vmatrix} K_1+K_2 & -K_2 & \\ -K_2 & +K_2+K_3 & -K_3 \\ & -K_3 & K_3 \end{vmatrix}$$

$$M = \begin{vmatrix} 0.40775 & 0 & \\ 0 & 0.40775 & 0 \\ 0 & 0 & 0.203875 \end{vmatrix} ; \quad \underline{K} = 80 \begin{vmatrix} 5 & -2.5 & 0 \\ -2.5 & 3.5 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

Necesitamos los valores de  $\omega^2$  que cumplen:

$$(\underline{K} - \omega^2 \underline{M}) \underline{X} = 0 \quad (a)$$

es decir  $|\underline{K} - \omega^2 \underline{M}| = 0$ , o sea:

$$80 \begin{vmatrix} 5 - 0.40775 \frac{\omega^2}{80} & -2.5 & 0 \\ -2.5 & 3.5 - 0.40775 \frac{\omega^2}{80} & -1 \\ 0 & -1 & 1 - 0.203875 \frac{\omega^2}{80} \end{vmatrix} = 0$$

haciendo  $\frac{\omega^2}{80} = y$  y desarrollando el determinante se llega a:

$$y^3 - 25.7539 y^2 + 157.91 y - 184.42 = 0 \quad (b)$$

cuyas soluciones son:

$$y_1 = 1.525$$

$$y_2 = 7.030$$

$$y_3 = 17.190$$

que, teniendo en cuenta que  $T = 2\pi/\omega$ , conducen a:

$$\omega_1^2 = 122.0 \quad , \quad \omega_1 = 11.05 \text{ seg}^{-1} \quad ; \quad T_1 = 0.5686 \text{ seg}$$

$$\omega_2^2 = 562.4 \quad , \quad \omega_2 = 23.71 \text{ seg}^{-1} \quad ; \quad T_2 = 0.2650 \text{ seg}$$

$$\omega_3^2 = 1376.2 \quad , \quad \omega_3 = 37.08 \text{ seg}^{-1} \quad ; \quad T_3 = 0.1694 \text{ seg}$$

Los modos se calculan a partir de la expresión (a), reemplazando los valores correspondientes de  $\omega^2$ . Para  $\omega_1^2 = 122$ , tenemos:

$$\begin{bmatrix} (400 - 122x \cdot 0.40775) & -200 & 0 \\ -200 & (280 - 122x \cdot 0.40775) & -80 \\ 0 & -80 & (80 - 122x \cdot 0.203875) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$350.2545 x_1 - 200 x_2 = 0 \quad + x_2 = 1.751 x_1$$

$$-200 x_1 + 230.2545 x_2 - 80 x_3 = 0$$

$$-80 x_2 + 55.1273 x_3 = 0 \quad + x_3 = 1.45117 x_2$$

Si tomamos  $x_1 = 1$ , entonces:  $x_2 = 1.751$

$$x_3 = 2.541$$

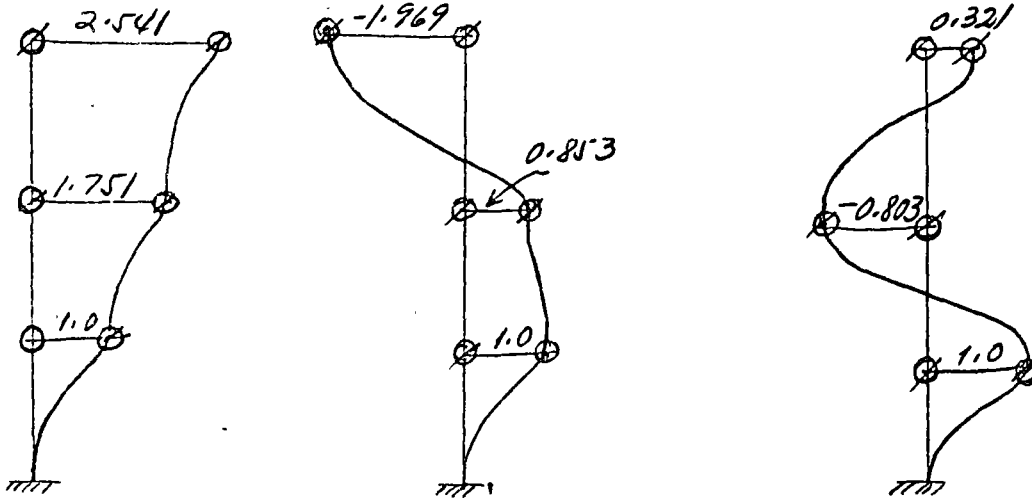
y el vector que corresponde al primer modo es:

$$\underline{\phi}_1 = \begin{bmatrix} 1.000 \\ 1.751 \\ 2.541 \end{bmatrix}$$

Análogamente se obtienen los vectores correspondientes a los modos segundo y tercero:

$$\underline{\phi}_2 = \begin{bmatrix} 1.000 \\ 0.853 \\ -1.969 \end{bmatrix} ; \quad \underline{\phi}_3 = \begin{bmatrix} 1.000 \\ -0.803 \\ 0.321 \end{bmatrix}$$

que dibujados aparecen como:



$$T_1 = 0.5686 \text{ seg}$$

$$T_2 = 0.2650 \text{ seg}$$

$$T_3 = 0.1694 \text{ seg}$$

La matriz modal  $\underline{R}$  es:

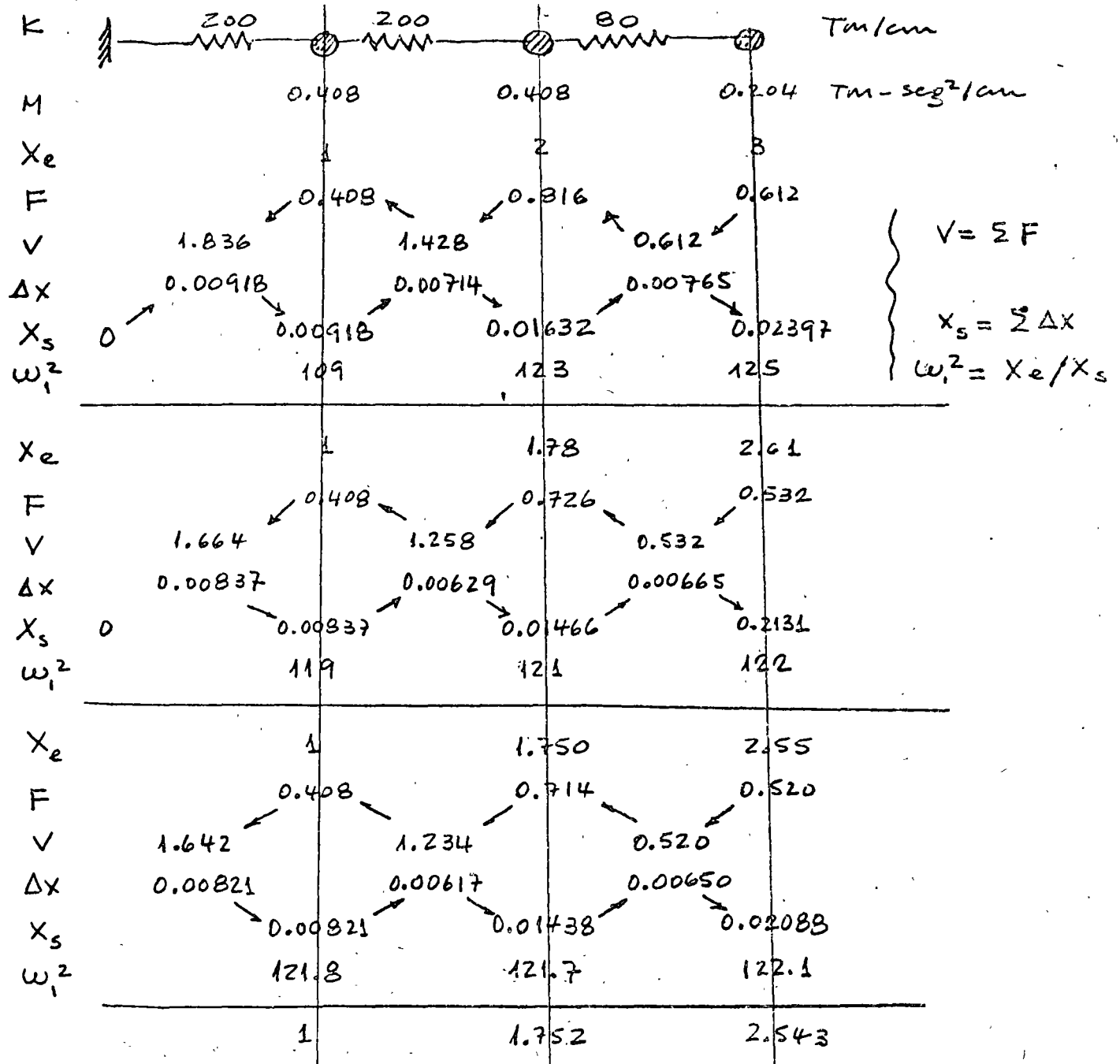
$$\underline{R} = [\underline{\phi}_1 \quad \underline{\phi}_2 \quad \underline{\phi}_3]$$

$$R = \begin{bmatrix} 1.0 & | & 1.0 & | & 1.0 \\ 1.751 & | & 0.853 & | & -0.803 \\ 2.541 & | & -1.969 & | & 0.321 \end{bmatrix}$$

En forma matricial se puede plantear el problema de encontrar los modos y períodos de vibración de estructuras más complejas que la propuesta para este ejemplo. Sin embargo la forma de solución no es desarrollando la ecuación  $|\underline{K} - \omega^2 \underline{M}|$  en expresiones como la (b), sino que se usan métodos numéricos iterativos como el de Jacobi, investigación del determinante, subespacios, etc. Véase por ejemplo: Wilson, E.L., Bathe, K.J. y Peterson, F., "SAP IV A Program for Structure Analysis", EERC Report No. 11-73, Universidad de California, Berkeley, 1973.

## II. Métodos de Stodolla-Neumark y Holzer

Estos métodos son apropiados para usarse en calculadoras de escritorio. El Método de Stodolla-Neumark se presenta a continuación, y sirve para el 1º modo:

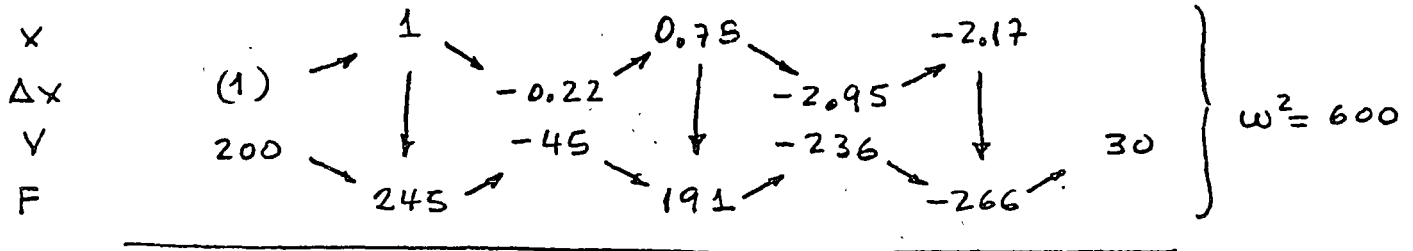
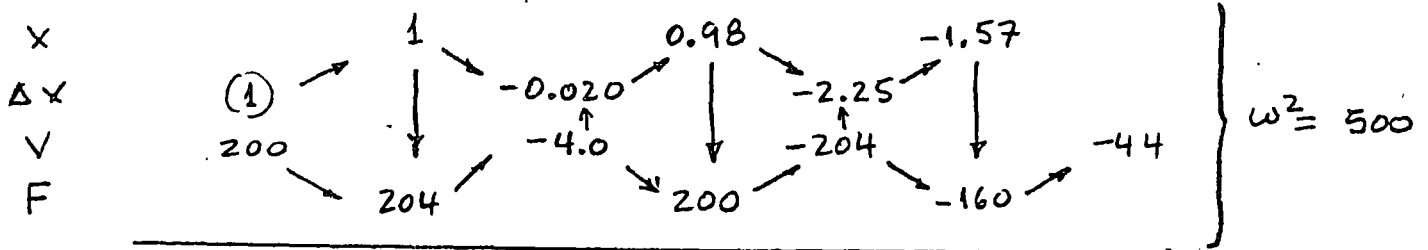
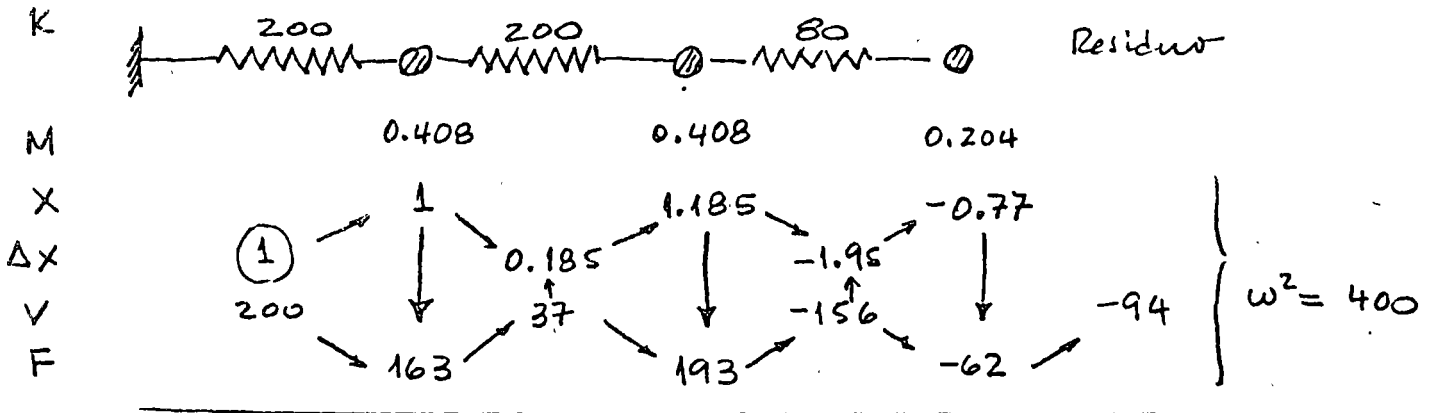


Para  $\omega_1^2$  podemos tomar el promedio del último ciclo:

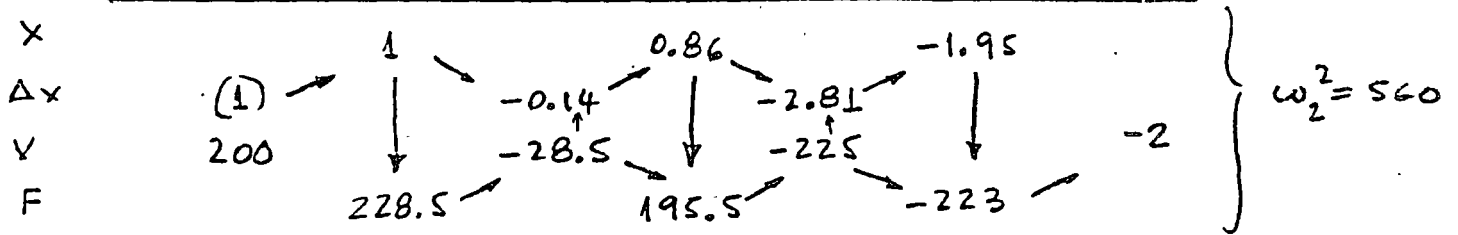
$$\omega_1^2 = 121.9 \text{ seg}^{-2}, \quad \Phi_1 = \begin{Bmatrix} 1.00 \\ 1.752 \\ 2.543 \end{Bmatrix}$$

$$T_1 = 0.5686 \text{ seg}$$

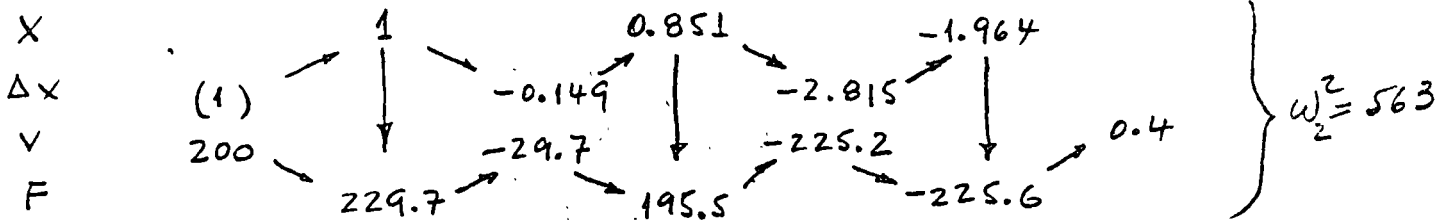
El método de Holzer sirve para los modos superiores y <sup>en</sup> para este ejemplo se aplica como sigue:



El cambio de signo en el residuo indica que  $\omega^2$  está entre 500 y 600; interpolando linealmente obtenemos  $\omega^2 = 600 \times \frac{44}{74} + 500 \times \frac{30}{74} \approx 560$



$$\omega_2^2 = \omega^2 \frac{\sum V \Delta X}{\sum F X} = \frac{200 \times 1 + 28.5 \times 0.14 + 225 \times 2.81}{228.5 \times 1 + 195.5 \times 0.86 + 223 \times 1.95} \times 560 = 563$$

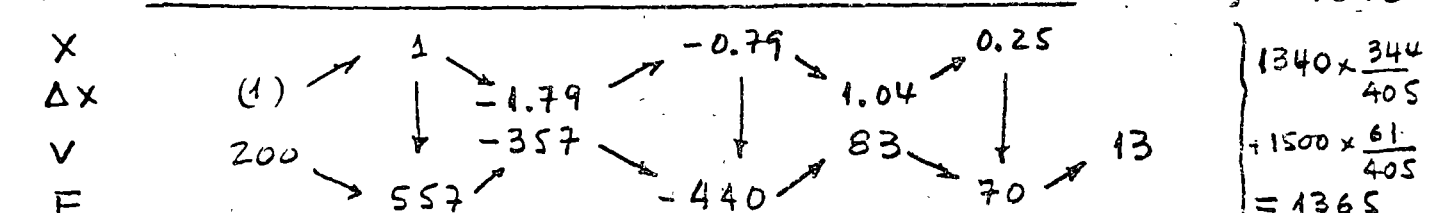
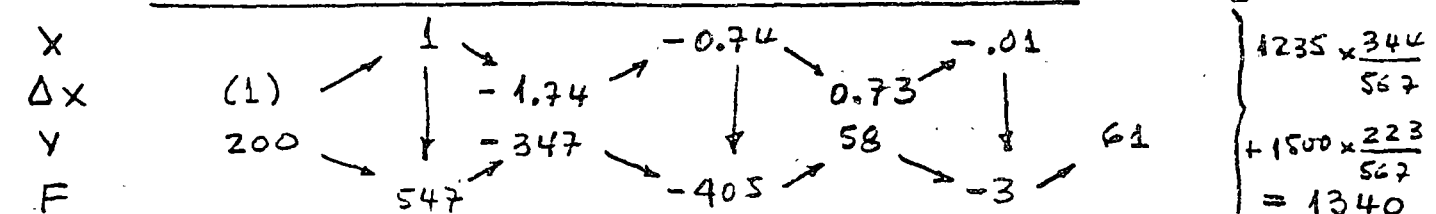
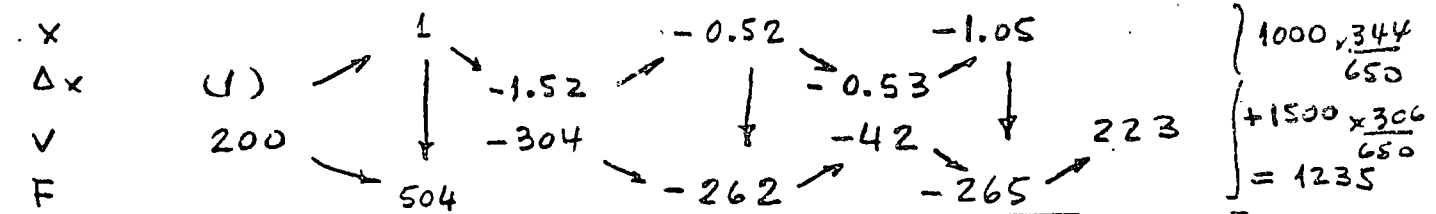
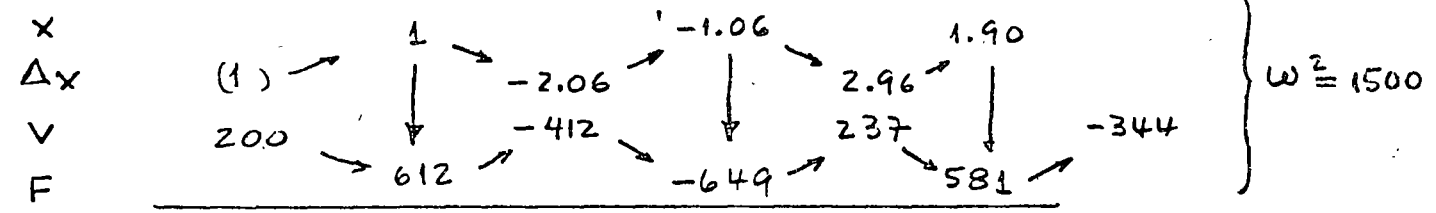
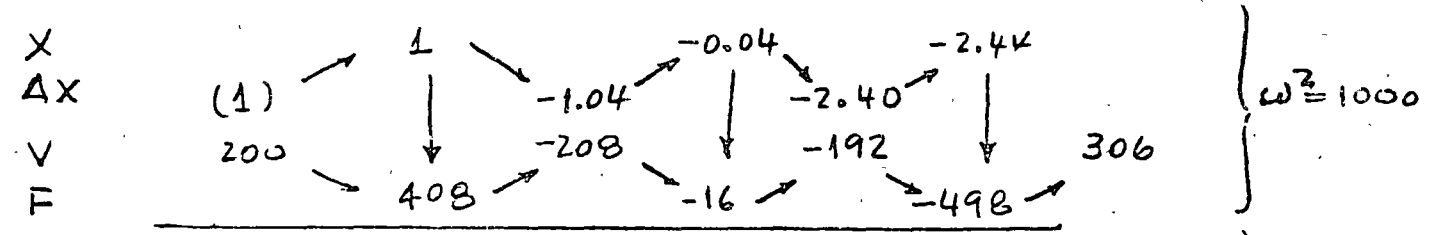
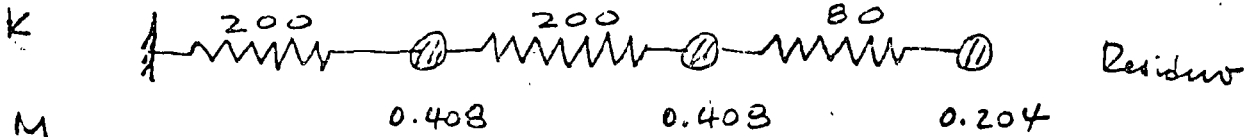




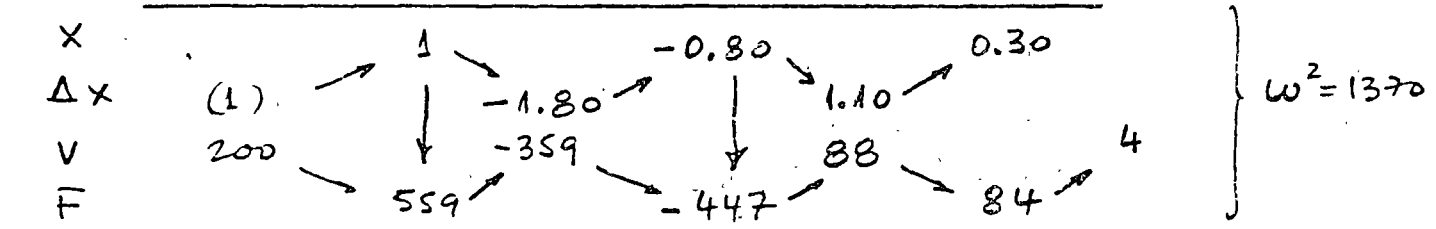
La frecuencia del segundo modo está dada por:

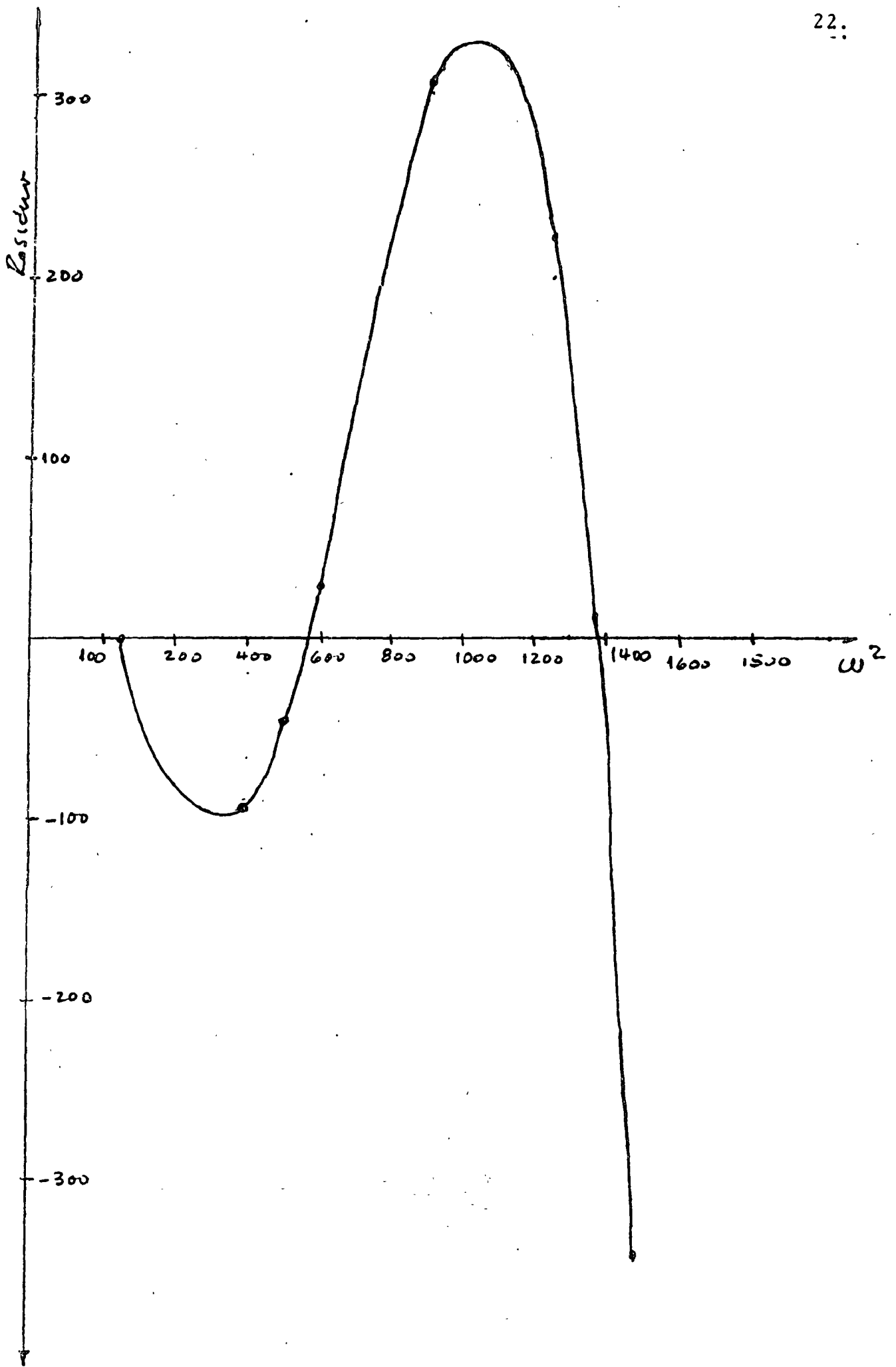
$$\omega_2^2 = \frac{200 \times 1 + 29.7 \times 0.149 + 225.2 \times 2.815}{229.7 + 195.5 \times 0.851 + 225.6 \times 1.964} \times 563 = 562.5$$

$$T_2 = 0.2650 \text{ seg.} \quad \Phi_2 = \begin{Bmatrix} 1.00 \\ 0.851 \\ -1.964 \end{Bmatrix}$$



$$\omega_3^2 = \frac{200 \times 1 + 357 \times 1.79 + 83 \times 1.04}{557 \times 1 + 440 \times 0.79 + 70 \times 0.25} \times 1365 = 1370$$





$$\omega_3^2 = \frac{200 \times 1 + 359 \times 1.8 + 88 \times 1.1}{559 \times 1 + 447 \times 0.8 + 84 \times 0.3} \times 1370 = 1372$$

podemos tomar entonces:

$$\omega_3^2 = 1372$$

$$T_3 = 0.1696$$

$$\underline{\phi}_3 = \begin{Bmatrix} 1.00 \\ -0.80 \\ 0.30 \end{Bmatrix}$$

Estos resultados prácticamente coinciden con los del método matricial.

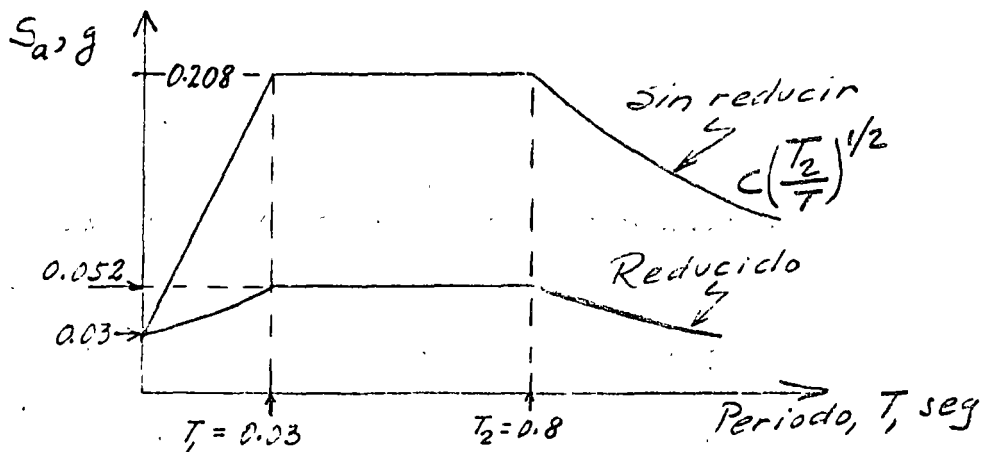
### PASO II Obtención de las ordenadas espectrales de diseño.

El espectro para diseño sísmico está definido en el art 236 (acápito II). La estructura que estamos tratando se encuentra en la zona I, y le corresponden, siendo la estructura del grupo A:

$$\left. \begin{array}{l} a_0 = 0.03 \\ T_1 = 0.3 \\ T_2 = 0.3 \\ r = 1/2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{de la tabla} \\ \text{del art 236} \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} c = 0.16 \times 1.3 \\ = 0.208 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{de la tabla} \\ \text{del art 234} \end{array}$$

y el espectro queda como la siguiente figura:



Tiene que aplicarse luego la reducción por ductilidad que consiste en dividir entre el factor  $Q'$

$$Q' = \begin{cases} Q & \text{si } T > T_1 \\ 1 + (Q-1) \frac{T}{T_1} & \text{si } T \leq T_1 \end{cases}$$

Para el primer modo  $T = 0.5686 > 0.30 = T_1$  entonces  $Q' = 4$  y la ordenada espectral y la aceleración correspondientes valen:

$$S_{a1} = \frac{0.208}{4} = 0.052 \quad , \quad a_1 = 0.052g = 51 \text{ cm/seg}^2$$

Para el segundo modo,  $T = 0.2650 < 0.30$ , por tanto:

$$Q' = 1 + (4-1) \frac{0.2650}{0.3} = 3.650$$

$$S_{a2} = \frac{0.03 + (0.208 - 0.03) \times 0.2650/0.3}{3.65} = 0.051$$

$$a_2 = 0.051g = 50.3 \text{ cm/seg}^2$$

y, para el tercer modo,  $T = 0.1694 < 0.30$ , entonces:

$$Q' = 1 + (4-1) \frac{0.1694}{0.3} = 2.694$$

$$S_{a3} = \frac{0.03 + (0.208 - 0.03) \times 0.1694/0.3}{2.694} = 0.048$$

$$a_3 = 0.48g = 47.5 \text{ cm/seg}^2$$

PASO III Cálculo de las fuerzas cortantes máximas para cada modo de vibración.

La siguiente expresión sirve para calcular los desplazamientos de entrepiso:

$$U_{jm\acute{a}x} = \frac{a_j}{\omega_j^2} C_j \vartheta_j$$

donde  $\omega_j$  es la frecuencia del modo  $j$ ;  $\vartheta_j$  el correspondiente vector modal,  $a_j$ , la ordenada espectral respectiva y  $c_j$ , que se denomina coeficiente de participación del  $j$ -ésimo modo, está dado por:

$$c_j = \frac{\sum_i m_i \vartheta_{ji}}{\sum_i m_i \vartheta_{ji}^2}$$

en esta expresión  $m_i$  es la masa del nivel  $i$ , y  $\vartheta_{ji}$  es la componente  $i$  del vector modal  $j$ .

Los valores de  $C_j$  para los modos 1, 2, 3 son:

$$C_1 = \frac{0.40775 \times 1 + 0.40775 \times 1.751 + 0.203875 \times 2.541}{0.40775 \times 1^2 + 0.40775 \times (1.751)^2 + 0.203875 \times (2.541)^2} = 0.5510$$

$$C_2 = \frac{0.40775 \times 1 + 0.40775 \times 1.751 + 0.203876 \times (-1.969)}{0.40775 \times 1^2 + 0.40775 \times 1.751^2 + 0.203875 \times (-1.969)^2} = 0.2369$$

$$C_3 = \frac{0.40775 \times 1 + 0.40775 \times (-0.803) + 0.203875 \times 0.321}{0.40775 \times 1^2 + 0.40775 \times (-0.803)^2 + 0.203875 \times 0.321^2} = 0.2107$$

y los desplazamientos máximos son:

$$U_1 = \frac{51.0}{122} \times 0.5510 \begin{Bmatrix} 1.000 \\ 1.751 \\ 2.541 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.2304 \\ 0.4035 \\ 0.5855 \end{Bmatrix} ; \Delta \underline{u}_1 = \begin{Bmatrix} 0.2304 \\ 0.1731 \\ 0.1820 \end{Bmatrix}$$

$$\underline{U}_2 = \frac{50.3}{562.4} \times 0.2369 \begin{Bmatrix} 1.000 \\ 0.853 \\ -1.969 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.0212 \\ 0.0181 \\ -.0417 \end{Bmatrix}; \quad \Delta \underline{u}_2 = \begin{Bmatrix} 0.0212 \\ -.0031 \\ 0.0598 \end{Bmatrix}$$

$$\underline{U}_3 = \frac{47.5}{1375.2} \times 0.2107 \begin{Bmatrix} 1.000 \\ -0.803 \\ 0.321 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.0073 \\ -.0058 \\ 0.0023 \end{Bmatrix}; \quad \Delta \underline{u}_3 = \begin{Bmatrix} 0.0073 \\ -.0131 \\ 0.0081 \end{Bmatrix}$$

Los vectores  $\Delta \underline{u}$  son los desplazamientos de entrepiso.

Las fuerzas cortantes se obtienen multiplicando los desplazamientos de entrepiso por la respectiva rigidez, como se hace en la siguiente tabla:

MODO	ENTREPISO	$\Delta$	K	CORTANTE
1	1	0.2304	200	46.08
	2	0.1731	200	34.62
	3	0.1820	80	14.56
2	1	0.0212	200	4.24
	2	-.0031	200	-0.62
	3	0.0598	80	-4.78
3	1	0.0073	200	1.46
	2	-.0131	200	-2.62
	3	0.0081	80	0.65

PASO IV Superposición de los efectos de los modos considerados.

El artículo 241 autoriza, cuando no hay apéndices o no consideran los grados de libertad correspondientes a torsión, que se puede estimar cualquier respuesta de interés R en la expresión

$$R = \sqrt{R_i^2} \quad \text{DONDE } R_i \text{ ES LA RESPUESTA QUE SE OBTIENE EN EL MODO } i,$$

LAS FUERZAS CORTANTES SERIAN ASI:

ENTREPISO	CORTANTE
1	$\sqrt{46.08^2 + 4.24^2 + 1.46^2} = 46.30 \text{ ton}$
2	$\sqrt{34.62^2 + 0.62^2 + 2.62^2} = 34.72 \text{ ton}$
3	$\sqrt{14.56^2 + 4.78^2 + 0.65^2} = 15.36 \text{ ton}$

#### 5.4 EJEMPLO DE CALCULO DEL MOMENTO DE VOLTEO

Se calculará el momento de volteo para el edificio del ejemplo 5.3. De acuerdo con el inciso VI del art 240 del Reglamento, el momento de volteo que se puede obtener integrando el diagrama de cortantes, puede reducirse "tomándolo igual al calculado multiplicado por  $0.8 + 0.2Z$  (siendo Z la relación entre la altura a la que se calcula el factor reductivo por momento de volteo y la altura de la construcción), pero no menor que el producto de la fuerza cortante en el nivel en cuestión multiplicada por el conteo de gravedad de la parte de la estructura que se encuentra por encima de dicho nivel".

Esta última distancia se puede calcular sabiendo que:

$$h_{Gj} = \frac{\sum_i W_i h_i}{\sum_i W_i}$$

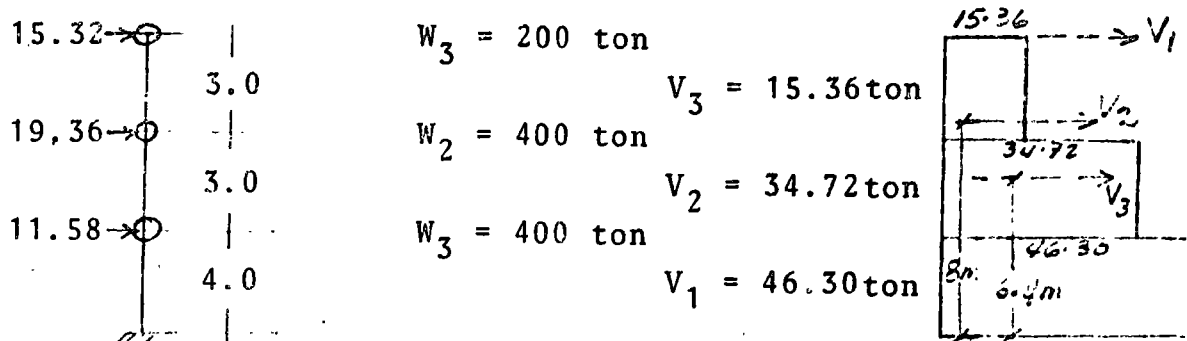
donde  $W_i$  y  $h_i$  son el peso de la altura del nivel  $i$ , y la suma se hace para todos los niveles que estan encima

$$d_j = h_{Gj} - h_j$$

de aquel en el cual se calcula el momento de volteo (nivel  $j$ )

Las fuerzas cortantes obtenidas en el ejemplo 3, así como las fuerzas correspondientes en los niveles se muestran a continuación:

Diagrama de cortantes



En las siguientes tablas se muestran los cálculos necesarios para determinar los momentos de volteo reducidos en los tres niveles

NIVEL	$W_i$ (Ton)	$\Sigma W_i$ (ton)	$h_i$ (m)	$W_i h_i$ (ton-m)	$\Sigma W_i h_i$ (ton-m)	$h_{Gj}$ (m)
3	200	200	10	2000	2000	10.0
2	400	600	7	2800	4800	8.0
1	400	1000	4	1600	6400	6.4

NIVEL j	$h_{Gj}$ (m)	$h_j$ (m)	$h_{pj}$ (m)	$V_j$ (ton)	$h_{pj} V_j$ (ton-m)	Mcal (ton-m)	$d_j$ (ton-m)	$M_1$ (ton-m)
2	10	7	3	15.36	46.08	46.08	3.0	46.08
1	8.0	4	3	34.72	104.16	150.24	4.0	138.88
0	6.4	0	4	46.30	185.20	335.44	6.4	296.32

$$M_{cal} = \Sigma h_{pj} V_j ; M_1 = V_j d_j ; M_2 = M_{cal} \times F$$

NIVEL	Z	Factor reductivo F	$M_2$ (ton-m)	USAR
2	$7/10 = 0.7$	$0.8 + 0.14 = 0.94$	43.32	46.08
1	$4/10 = 0.4$	$0.8 + 0.08 = 0.88$	132.21	138.88
0	$0/10 = 0.$	$0.8 + 0 = 0.80$	268.32	296.32

USAR el mayor entre  $M_1$  y  $M_2$



5.6 EJEMPLO DE REDUCCION DE LAS FUERZAS CORTANTES EN ANALISIS ESTADICO, TOMANDO EN CUENTA EL VALOR DEL PERIODO FUNDAMENTAL.

En la tabla siguiente se muestran los valores de los pesos, rigideces de entrepiso y fuerzas cortantes obtenidas en el ejemplo 5.2.

Para calcular el periodo fundamental, el inciso II del art 240 da la expresi3n:

$$T = 6.3 \left\{ \frac{\sum W_i X_i^2}{g \sum P_i X_i} \right\}^{1/2} \quad \text{donde } g \text{ es la aceleraci3n de la gravedad.}$$

Los c3lculos se presentan en la misma tabla.

Entrepiso o nivel	$W_i$ (ton)	$P_i$ (ton)	$K_i$ (ton/cm)	$V_i$ (ton)	$i$ (cm)	$X_i$ (cm)	$X_i^2$	$W_i X_i^2$ (ton·cm <sup>2</sup> )	$P_i X_i$ (ton·cm)
3	200	16.25	80	16.25	0.2031	0.6581	.43310	86.620	10.694
2	400	22.75	200	39.00	0.1950	0.4550	.20703	82.810	10.351
1	400	13.00	200	52.00	0.2600	0.2600	.06760	27.040	3.380
$\Sigma$								196.67	24.425

$$T = 6.3 \left\{ \frac{1}{981} \times \frac{196.67}{24.425} \right\}^{1/2} = 0.571 \text{ seg}$$

Para la zona I,  $T_1 = 0.3$  y  $T_2 = 0.8$

Entonces:

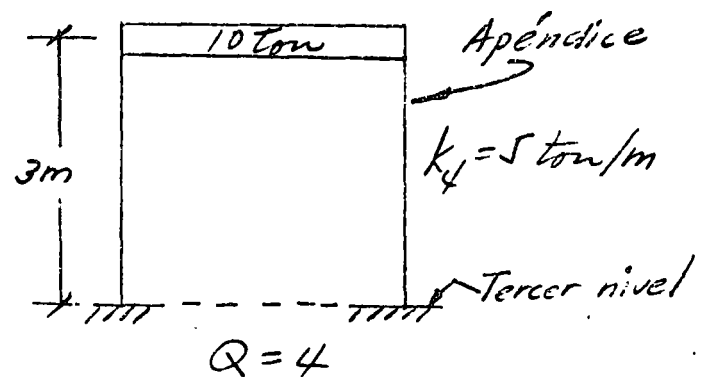
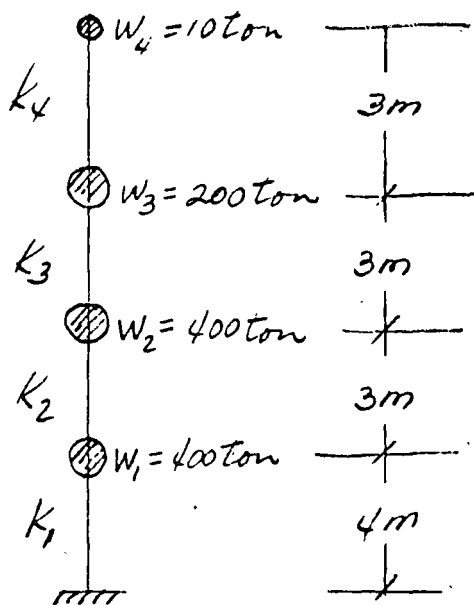
$$3.0 < 0.571 < 0.8, \quad T_1 < T < T_2$$

y no se permite reducci3n en este caso.

### 5.5. EJEMPLO DE UN EDIFICIO CON APÉNDICES

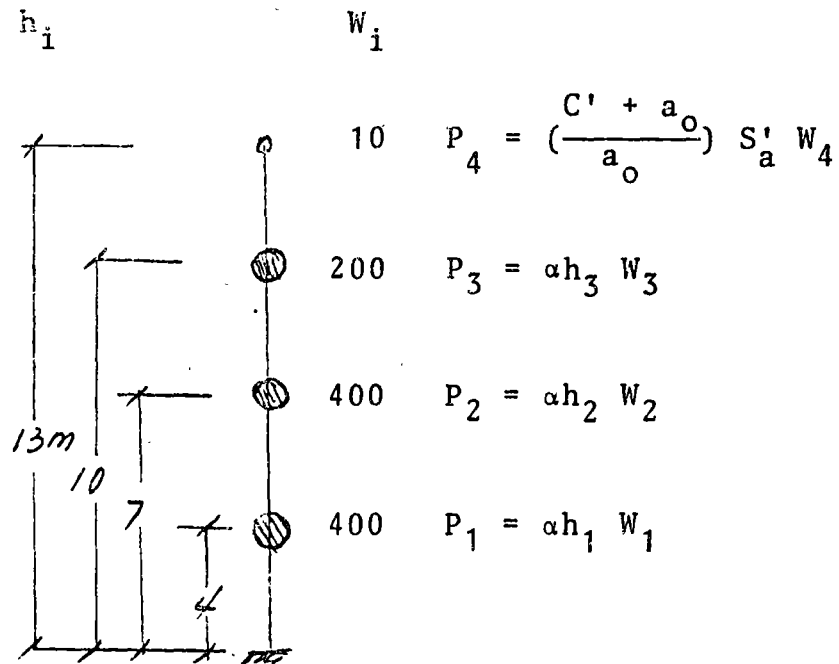
Supóngase que el edificio que se presentó en el ejemplo 5.1 tiene sobre el tercer nivel un tanque de almacenamiento que pesa 10 toneladas y que está soportado por dos marcos que tienen 3 metros de altura sobre el tercer nivel como se indica en la figura. En este ejemplo se calcula la distribución de fuerzas sísmicas que corresponden a este caso, con el método estático del Reglamento.

Esquemáticamente el edificio queda como se muestra en la figura siguiente:



En el inciso V del art 240 del Reglamento<sup>10</sup> establece que debe suponerse que sobre los apéndices actúa la misma distribución de aceleraciones que le correspondería como si estuviese apoyado directamente sobre el terreno, multiplicada por  $\frac{C' + a_0}{a_0}$  donde  $c'$  es el mismo factor por el que se multiplican los pesos a la altura de desplante del apéndice cuando se valúan las fuerzas laterales sobre la construcción.

Recordemos que según el método estático la fuerza sísmica es proporcional a  $W_i h_i$ , <sup>según</sup> ~~que~~ se muestran en la figura.



El factor por el que se multiplica el peso en el nivel de desplante del apéndice es  $\alpha h_3$ , y teniendo presente que para la zona 1 se tiene  $a_0 = 0.03$ , se llega a que:

$$\frac{C' + a_0}{a_0} = \frac{\alpha h_3 + 0.03}{0.03}$$

Si el apéndice estuviese apoyado directamente en el suelo, la ordenada espectral que le correspondería sería el mayor entre  $\frac{C'}{Q}$  y  $a_0$ , que según se vió en el ejemplo 5.4 valen:

$$\frac{C}{Q} = \frac{0.208}{4} = 0.052$$

$$a_0 = 0.03$$

Entonces para el apéndice  
se toma  $S'_a = 0.052$

Para el edificio completo se tiene, también como se vió en el ejemplo 5.1, que

$$S_a = 0.052$$

y para conocer  $\alpha$  debemos tomar en cuenta que:

$$\frac{\sum P_i}{\sum W_i} = S_a$$

Es decir:





$$\alpha(h_1 W_1 + h_2 W_2 + h_3 W_3) + \left(\frac{\alpha h_3 + 0.03}{0.03}\right) S'_a W_4 = S_a (W_1 + W_2 + W_3 + W_4)$$

$$\alpha(4 \times 400 + 7 \times 400 + 10 \times 200) + \frac{\alpha \times 10 S'_a \times 10}{0.03} = S_a (400 + 400 + 200 + 10) - S'_a \times 10$$

reemplazando los valores de  $S'_a$  y  $S_a$  y despejando:

$$\alpha = 0.007911$$

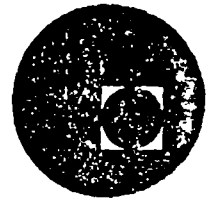
y la distribución de fuerzas es:

	$P_4 = \frac{0.00791 \times 10 + 0.03}{0.03} \times 0.052 \times 10 = 1.89$	cortante 1.89
	$P_3 = 0.007911 \times 10 \times 200 = 15.82$	17.71
	$P_2 = 0.00791 \times 7 \times 400 = 22.15$	39.86
	$P_1 = 0.00791 \times 4 \times 400 = 12.66$	52.52

$$\text{Comprobación: } \frac{52.52}{1010} = 0.052 = S_a$$



centro de educación continua  
división de estudios superiores  
facultad de ingeniería, unam



## DISEÑO SISMICO DE EDIFICIOS

### TEMA 7

### ESTRUCTURAS DE ACERO

O. de Buen

4.1 INTRODUCCION. Toda la energía que recibe un edificio que se comporta elásticamente durante un temblor, cada vez que su base se mueve en un sentido, es almacenada como energía de deformación, y devuelta durante el movimiento en sentido contrario. En cambio, <sup>si</sup> el comportamiento es inelástico, una parte de la energía se disipa en forma de amortiguamiento y flujo plástico, y solamente se almacena el resto.

Puesto que los edificios modernos se diseñan en general tomando como base - respuestas mucho menores que las que corresponden a un comportamiento elástico - ilimitado, bajo sismos intensos sufren deformaciones plásticas en zonas localizadas, en las que se disipa un porcentaje elevado de la energía; además, a diferencia de las construcciones antiguas, carecen casi totalmente de muros divisorios y otros elementos no estructurales, de manera que la estructura propiamente dicha - debe disipar casi toda la energía impartida por los temblores.

Una estructura reticular hiperestática dúctil puede admitir deformaciones - inelásticas importantes, localizadas en las zonas en que las solicitaciones son - máximas, las que se convierten eventualmente en articulaciones plásticas que permiten que haya una redistribución de elementos mecánicos, de manera que en emergencias severas los miembros menos cargados acuden en ayuda de los más cargados, y la resistencia máxima depende del conjunto y no del elemento más débil en el - intervalo elástico. Además, si el número de articulaciones plásticas asociadas con el mecanismo de colapso es elevado, durante su formación y rotación se disipa una gran cantidad de energía, y se reduce considerablemente la demanda de capacidad de absorción en las zonas en que los esfuerzos se mantienen por debajo del límite de elasticidad.

El acero estructural es un material muy dúctil, con el que se pueden obtener estructuras hiperestáticas que llenan los requisitos de los párrafos anteriores; es, por consiguiente, muy adecuado para la construcción en zonas sísmicas. Sin --

embargo, su ductilidad no se conserva necesariamente en las estructuras, por lo que el diseño y la construcción deben hacerse de manera que no se pierda esa propiedad.

#### 4.2 COMPORTAMIENTO DE ESTRUCTURAS DE ACERO DURANTE TEMBLORES DEALES (hojas 2A y 3A)

4.3 MARCOS RIGIDOS. El comportamiento de un marco rígido completo, o de un entropiso de uno de varios niveles, sometido a la acción de cargas verticales constantes y fuerzas horizontales crecientes, queda definido por su gráfica  $Q-\Delta$ , fuerza horizontal-desplazamiento lateral (Fig. 4.4).

Desde que se inicia el proceso de carga, y hasta que se forma la primera articulación plástica, todo el marco está en el intervalo elástico (para simplificar la discusión se están ignorando los esfuerzos residuales y se está suponiendo que el factor de forma de las secciones empleadas en la estructura es igual a 1.0).

Los incrementos adicionales de carga son resistidos por una estructura de rigidez deteriorada por la aparición de la primera articulación plástica, la que experimenta rotaciones crecientes bajo momento flexionante constante, igual al momento plástico resistente de la sección,  $M_p$ , cuando aumentan los desplazamientos laterales.

Cuando aparece la segunda articulación plástica disminuye otra vez la rigidez del conjunto, y el proceso continúa, formándose un número cada vez mayor de articulaciones, hasta que la estructura se convierte en un mecanismo que se desplaza lateralmente mientras disminuye la fuerza horizontal. Todas las articulaciones experimentan rotaciones plásticas, que son generalmente máximas en las que se forman primero y disminuyen de magnitud en las siguientes, mientras los momentos se conservan iguales a los momentos plásticos resistentes de las secciones respectivas.

La que se acaba de describir es la forma de trabajo más eficiente de una estructura de acero, ya que la carga que ocasiona la formación del mecanismo de colapso en la estructura completa es la máxima que puede soportar y a la que corresponde una mayor absorción de energía antes de la falla; sin embargo, hay un número

4.2 COMPORTAMIENTO DE ESTRUCTURAS DE ACERO DURANTE TEMBLORES REALES. El comportamiento de edificios con estructura de acero durante sismos reales ha sido satisfactorio en general, <sup>desde el punto de vista de su resistencia.</sup> Las estructuras han tenido resistencia suficiente aún en edificios de hasta 10 ó 12 pisos diseñados exclusivamente por carga vertical o con juntas flexibles, capaces de transmitir únicamente momentos reducidos. Sin embargo, los muros, cancelos y otros elementos no estructurales han sufrido en ocasiones daños considerables, debido a una rigidez lateral insuficiente.

Sólo dos temblores intensos han afectado ciudades con un número elevado de edificios altos con estructura de acero: el de San Francisco de 1906 (magnitud  $8\frac{1}{4}$ , según la escala de Richter) y el de julio de 1957 en la Ciudad de México, de magnitud 7.5.

En San Francisco, los edificios altos con estructura de acero completa se comportaron satisfactoriamente; algunos de ellos estaban provistos de marcos rígidos o contraventos en diagonal, mientras que otros no tenían más resistencia lateral adicional que la proporcionada por los muros de relleno, omitidos en planta baja en la mayoría de los casos; a pesar de que las juntas viga-columna eran semirígidas, los daños en las estructuras fueron despreciables. Los edificios afectados fueron uno de 19 pisos, uno de 16, ocho entre 11 y 15 y once de 6 a 10 pisos.

Había también un cierto número de construcciones con muros exteriores de carga y marcos interiores de acero, <sup>aunque</sup> sufrieron más daños, no se produjo ningún colapso (ref. 4.1).

En 1957 había en la Ciudad de México un número importante de edificios con estructura de acero de alturas comprendidas entre 10 y 22 pisos; además, un par de años antes se terminó la construcción de uno de 40 pisos; este, la Torre Latinoamericana, es bien conocido por su excelente comportamiento, ya que no sufrió daños de ningún tipo durante el temblor.

Un edificio de 20 pisos, totalmente soldado en taller y en obra, tampoco resintió daños aunque se diseñó para fuerzas horizontales estáticas correspondientes a un coeficiente sísmico de tan sólo 0.025, constante en toda la altura.



En la época en que se construyeron estos edificios se utilizaban exclusivamente métodos elásticos de análisis y diseño, y <sup>no se tomaba</sup> ninguna precaución especial para asegurar un comportamiento adecuado en el intervalo inelástico; sin embargo, conviene señalar que las especificaciones de diseño en vigor llevaban probablemente a estructuras más robustas que las que se obtendrían ahora.

Muchos edificios diseñados exclusivamente para cargas verticales, o con fuerzas horizontales muy reducidas, soportaron el temblor sin daños estructurales, pero con problemas excesivos en muros, cancelas, etc; varios de ellos tuvieron que ser rigidizados posteriormente, y cuando menos uno fué demolido.

El comportamiento descrito pone en evidencia la alta capacidad que tienen las estructuras de acero para resistir temblores de intensidad mucho mayor que la de diseño, aún cuando no se tomen precauciones especiales para aumentar su capacidad de absorción de energía, y la necesidad de utilizar en muchas ocasiones elementos rigidizantes para evitar daños no estructurales excesivos.

Los edificios altos con estructura de acero afectados en temblores posteriores (Anchorage, Alaska, 1964; Caracas, Venezuela, 1967; Managua, Nicaragua, 1972; Ciudad de Guatemala, 1976) han sido pocos, y han tenido también un comportamiento excelente.

ando de factores que pueden hacer que el comportamiento no sea el descrito y que la estructura falle bajo cargas menores que la de colapso plástico.

Los fenómenos más importantes que pueden ocasionar una falla prematura son - los siguientes:

1. Incapacidad de alcanzar el momento plástico resistente en alguna o algunas de las secciones en que deben aparecer articulaciones plásticas.
2. Capacidad de rotación insuficiente.
3. Falla de miembros aislados.
4. Falla de conexiones.
5. Inestabilidad de conjunto de la estructura completa o de parte de ella.

El pandeo local de alguno de los elementos planos que la componen, el pandeo lateral del miembro del que forma parte, o la fractura debida a ductilidad insuficiente del material (algunos aceros de alta resistencia, por ejemplo), o a que la sujeta durante procesos inadecuados de fabricación, por trabajar a temperaturas muy bajas o sometido a estados triaxiales de esfuerzos o a sollicitaciones que ocasionen fatiga, son fenómenos que pueden hacer que una sección falle cuando el momento no llega todavía al plástico teórico, o bajo el momento plástico pero cuando las rotaciones son menores que las necesarias para que se forme el mecanismo de colapso.

La falla de una viga o columna fuera de las articulaciones plásticas puede - deberse a pandeo local o lateral o a una combinación de ambos, y las conexiones - pueden ser incapaces de resistir los elementos mecánicos que les transmiten las vigas y columnas que concurren en ellas.

Finalmente, si la estructura es poco rígida lateralmente los efectos de segundo orden producidos por las cargas verticales al obrar sobre la estructura deformada pueden ocasionar una falla por inestabilidad de conjunto de la estructura completa o de alguno de sus entrepisos, bajo fuerzas horizontales menores que las que ocasionarían la formación del mecanismo de colapso.

Todos los fenómenos anteriores han sido objeto de copiosas investigaciones, teóricas y experimentales, en elementos estructurales y marcos rígidos completos sometidos a cargas que crecen monotónicamente hasta la falla, pero su comportamiento bajo solicitaciones cíclicas se ha empezado a estudiar hace relativamente pocos años, y no se cuenta todavía con información suficiente para conocerlo por completo.

Las estructuras deben diseñarse de manera que las deformaciones plásticas se presenten en zonas en las que las solicitaciones conservan magnitudes elevadas, puesto que el trabajo absorbido es función de las deformaciones y de las fuerzas interiores correspondientes; por este motivo, en los marcos rígidos conviene buscar que las articulaciones se formen en las vigas, que pueden admitir rotaciones importantes cuando actúa en ellas el momento plástico íntegro, y no en las columnas, cuya capacidad de rotación se ve disminuida por fuerza axial y que, aún en los casos en que admiten rotaciones importantes lo hacen bajo un momento reducido,  $M_{pc}$ , que puede ser mucho menor que el plástico completo, sobre todo si la compresión es importante.

Además, debe lograrse un equilibrio entre la rigidez y la resistencia de las diversas partes, porque las más rígidas atraen una porción más elevada de la fuerza sísmica, y si no pueden resistirla constituyen eslabones débiles de la estructura; este aspecto debe tenerse en cuenta durante todo el proceso de diseño, desde que empieza a planearse la estructuración hasta que se dimensionan los últimos detalles.

**4.4 MIEMBROS ESTRUCTURALES. COMPORTAMIENTO Y DISEÑO.** Una curva como la de la Fig. 4.1 contiene toda la información necesaria sobre el comportamiento de un marco bajo cargas verticales constantes y fuerzas horizontales que crecen monotónicamente hasta la falla, pues además de proporcionar su resistencia máxima permite determinar el desplazamiento correspondiente a cualquier intensidad de las fuerzas horizontales y da una medida de su capacidad de absorción de energía. Conocida la curva carga-desplazamiento se puede determinar el coeficiente de seguridad con res-

punto al colapso y la magnitud de los desplazamientos que experimenta el marco bajo cargas de trabajo; si el primero o los segundos no son aceptables se modifican los perfiles, ajustándolos hasta que la curva indique que el comportamiento es el deseado. En marcos de edificios de varios niveles se necesita, en teoría, la curva de cada uno de los entrepisos, pero para fines prácticos de diseño suele bastar con conocer la de un número reducido de ellos, representativos de todos los demás.

El comportamiento de un marco durante un temblor no es igual al que tendría si obraran sobre él fuerzas horizontales de magnitud creciente aplicadas siempre en el mismo sentido, pero las curvas  $Q-\Delta$  que se obtienen en esas condiciones proporcionan una buena indicación de su respuesta bajo sollicitaciones sísmicas. Más adelante se discuten algunos resultados relativos al comportamiento de marcos con cargas -- horizontales cíclicas.

Para obtener la curva  $Q-\Delta$  de una estructura deben conocerse las características de los elementos que la componen, de manera que primero hay que diseñar las -- vigas y columnas y conexiones entre ellas, y determinar después la curva fuerza -- horizontal-desplazamiento, para saber si el trabajo de la estructura en conjunto es adecuado. De aquí la necesidad de estudiar el comportamiento y los métodos de diseño de los elementos que componen la estructura y de las uniones entre ellos.

4.4.1 VIGAS. Las vigas soportan directamente las cargas verticales, vivas y muertas, que obran sobre la estructura, al mismo tiempo que mantienen a las columnas con la configuración necesaria para que puedan resistir fuerzas horizontales (en -- marcos no contraventados) y contribuyen a la rigidez del conjunto. Obran sobre -- ellas fuerzas transversales y momentos aplicados en los extremos que producen flexio -- nes importantes, acompañadas por fuerzas cortantes; las fuerzas normales suelen ser despreciables, excepto cuando las vigas forman parte de crujeas contraventadas. Se tratan básicamente como miembros en flexión, y la fuerza cortante influye en su -- comportamiento sólo en casos poco frecuentes.

Los aspectos fundamentales del comportamiento de las barras flexionadas por momentos de intensidad creciente se determinan estudiando experimentalmente vigas con cargas transversales alojadas en su plano de simetría, que crecen lentamente desde cero hasta llegar a la resistencia máxima de la barra, y trazando las curvas que relacionan las deflexiones en el plano de carga y en planos normales a él con la magnitud de las fuerzas exteriores.

En la Fig. 4.2 se ha dibujado el conjunto de curvas que se obtiene experimentalmente al cargar hasta el colapso la viga mostrada, cuyo tercio central trabaja en flexión pura <sup>42,43</sup>; los puntos de aplicación de las cargas y los apoyos están provistos de soportes que impiden los desplazamientos laterales de los dos patines y la rotación de las secciones transversales alrededor del eje longitudinal.

En la Fig. 4.2 se muestra el comportamiento de la viga en el plano de la flexión y fuera de él, por medio de las curvas momento-deflexión vertical y momento-deflexión lateral de los patines, trazadas para la sección media del tramo central.

La respuesta inicial, elástica lineal, termina al comenzar el flujo plástico, cuando la suma de los esfuerzos residuales y los normales producidos por las cargas llega por primera vez al esfuerzo de fluencia  $\sigma_y$ , en alguna de las secciones del tramo central.

Al fluir plásticamente una porción cada vez mayor del material de la parte de la viga que está en flexión uniforme disminuye su capacidad para soportar incrementos adicionales de carga, hasta que finalmente desaparece, cuando el momento flexionante iguala al plástico resistente de la sección,  $M_p$ ; a partir de ese instante la curva  $M-U$  se hace aproximadamente horizontal, pues la deformación crece sin cambio apreciable en la carga hasta que llega a ser varias veces mayor que la existente — cuando se inicia el flujo plástico.

El patín comprimido del tramo central se empieza a desplazar lateralmente cuando el momento flexionante vale  $M_p$ , y sus deflexiones aumentan gradualmente al mismo

tiempo que crecen los desplazamientos verticales  $V_0$ ; las secciones transversales pierden su forma inicial y se distorsionan como se muestra esquemáticamente en la figura 4.2b.

Finalmente, la resistencia de la viga se agota cuando se pandea localmente el lado crítico del patín comprimido, en la región central.

El comportamiento que se acaba de describir es típico de vigas provistas de contraventeo lateral y formadas por elementos planos con relaciones ancho/grueso adecuadas para posponer la falla por pandeo lateral o local hasta después de que se presenten deformaciones plásticas importantes bajo un momento igual al de plastificación de sus secciones transversales, pero hay otros posibles comportamientos; algunos de ellos se ilustran en la Fig. 4.3, por medio de sus curvas momento-deflexión en el plano de la carga.

La curva <sup>llena</sup> OAB corresponde a vigas que no se pandean lateral ni localmente, cuyo material llega a entrar en el intervalo de endurecimiento por deformación; esto caso es poco frecuente en estructuras reales.

La situación más común, que se describió tomando como base la Fig. 4.2, es la correspondiente a la curva OAC.

OADE corresponde a una viga en la que el momento flexionante varía rápidamente a lo largo del eje; el endurecimiento por deformación en la zona de momento máximo hace que ésta suba por arriba de  $M_p$ ; después la curva desciende, cuando se inician fenómenos de pandeo lateral y local.

Las curvas OAFG, OAHJ y OJK describen fallas por pandeo lateral o local o por combinación de ambos, las dos primeras en el intervalo inelástico y la tercera en el elástico.

La curva OAB representa el mejor comportamiento posible y OAC corresponde a un comportamiento que es también muy satisfactorio, siempre que la zona DN, durante la que se presentan deformaciones crecientes bajo momento  $M_p$  constante, sea de amplitud

suficiente para que la barra tenga la ductilidad necesaria para el trabajo correcto de la estructura de la que forma parte.

PANDEO LATERAL. Las curvas de la Fig. 4.4 muestran esquemáticamente el comportamiento de una viga en flexión; la curva  $M_0-\theta$ , momento-rotación en un extremo, representa el comportamiento en el plano de carga y las curvas  $M_0-u$  ó  $M_0-\phi$ , momento-desplazamiento lateral o momento-rotación alrededor del eje longitudinal, describen el pandeo lateral. Si la viga fuese perfectamente recta y no hubiese ninguna excentricidad en las cargas, las curvas  $M_0-u$  y  $M_0-\theta$  serían como las trazadas con línea llena, y el punto A correspondería a la bifurcación del equilibrio; a partir de él la viga puede, en teoría, admitir momentos mayores manteniéndose en su plano (trayectoria AB) o desplazarse lateralmente bajo momento prácticamente constante, de acuerdo con AC.

En las vigas reales no hay nunca bifurcación del equilibrio, pues las imperfecciones iniciales inevitables hacen que los desplazamientos laterales comiencen desde que se empiezan a aplicar las cargas, y la falla no es por pandeo propiamente dicho; sin embargo, la carga crítica teórica es un límite superior de la resistencia real, que se utiliza con fines de diseño.

Desde el punto de vista de su resistencia al pandeo lateral, una viga de acero en flexión se comporta de alguna de las maneras siguientes: si es muy corta, sus secciones transversales se plastifican por completo antes de pandearse, de manera que resiste el momento  $M_p$  y aún lo supera, gracias al endurecimiento por deformación; si es de longitud intermedia su resistencia disminuye por la plastificación parcial que precede al pandeo, que se inicia en el intervalo inelástico, y si es larga su capacidad de carga queda controlada por pandeo elástico; un mismo perfil puede tener cualquiera de los tres comportamientos, dependiendo de la separación que haya entre las secciones transversales fijadas lateralmente.

Los tres intervalos en que se descompone el comportamiento de las barras -- flexionadas se ilustran en la Fig. 4.5 , en la que se muestran los momentos resistentes en función de las longitudes libres de pandeo. En las zonas en que se produce la formación de articulaciones plásticas correspondientes al mecanismo de colapso, las vigas de marcos rígidos de edificios que se construyan en zonas sísmicas deben estar en el primer intervalo, en el que la inestabilidad lateral no evita que se alcance, o aún sobrepase, el momento plástico resistente, ni reduce sustancialmente la capacidad de rotación del perfil. En zonas alejadas de las articulaciones plásticas pueden estar en cualquiera de los otros dos intervalos, pero deben diseñarse con coeficientes de seguridad adecuados para evitar fallas por inestabilidad antes de que se forme el mecanismo.

INESTABILIDAD DE VIGAS COMPLETAMENTE PLASTIFICADAS. En los perfiles de acero de sección I ó H flexionados alrededor del eje de mayor momento de inercia se presentan dos fenómenos de inestabilidad, pandeo lateral y pandeo local, que constituyen debilidades propias de esos perfiles por lo que aparecen siempre, eventualmente, aunque se tomen precauciones para evitarlos; sin embargo, si las relaciones ancho/grueso de los elementos planos que los constituyen se conservan dentro de ciertos límites, y se coloca un contravanteo lateral adecuado, se logra que las dos formas de pandeo no retrasen lo suficiente para que los perfiles mencionados se comporten satisfactoriamente, tanto bajo cargas estáticas como dinámicas, es decir, para que sean capaces de soportar el momento plástico y de mantenerlo durante rotaciones importantes.

Las curvas de la Fig. 4.6 muestran un comportamiento adecuado y otro inadecuado, desde el punto de vista de la capacidad de rotación de la viga (se supone que ésta puede resistir el momento  $M_p$ , pues de no ser así se tendría una situación más desfavorable que cualquiera de las dos mostradas, y la descarga empezaría antes de que el momento llegase a valor  $M_p$ ).



En un gran número de experiencias (4.3,4.4) realizadas con perfiles H Flexionados alrededor del eje de mayor momento de inercia se ha observado que las deflexiones laterales se inician en cuanto el momento llega a  $M_p$ , independientemente de la distancia entre puntos soportados lateralmente, pero si esa distancia es menor o igual que una cierta longitud crítica el comienzo del pandeo lateral no corresponde a la falla, la que se presenta eventualmente cuando se pandea localmente el patín comprimido, después de que la viga ha experimentado deformaciones laterales importantes sin que disminuya su resistencia.

El comportamiento de las vigas en flexión uniforme es sustancialmente diferente del de las que están sometidas a momentos de intensidad variable a lo largo de su eje. La disminución eventual de resistencia se debe en los dos casos a una combinación de pandeo local y lateral, pero cambia el orden en que se presentan los dos fenómenos; cuando el momento es constante el patín comprimido se plastifica en una longitud considerable, lo que ocasiona una gran pérdida de rigidez que hace que crezcan rápidamente las deflexiones laterales y las compresiones en la zona cóncava del patín, hasta que aparece una onda de pandeo local originada por esfuerzos de compresión de dos tipos, unos uniformes, ocasionados por la flexión en el plano de carga, y otros que crecen linealmente a lo ancho del patín, debidos a la flexión lateral. En cambio, cuando el momento varía a lo largo del eje de la viga la zona plastificada del patín comprimido es de longitud reducida, y conserva una rigidez apreciable que hace que las deflexiones laterales aumenten muy poco; la falla se inicia por pandeo local debido a esfuerzos uniformes en todo el patín, ocasionados exclusivamente por flexión en el plano de carga, y el colapso se produce por pandeo lateral debido a la pérdida de rigidez producida por el pandeo local del patín comprimido. El comportamiento descrito se comprueba con resultados experimentales (4.5) en los que se demuestra que en perfiles H sometidos a flexión bajo momentos que varían rápidamente de intensidad la descarga se debió a desplazamientos laterales grandes, y la importancia de la relación ancho/grueso disminuye drásticamente.

Cuando se forma una articulación plástica en el extremo de una viga de un marco rígido la región plastificada queda sometida a momentos que varían de intensidad rápidamente a lo largo del eje, y las restricciones que hay en sus extremos son elevadas, pues en uno está en contacto con la zona elástica adyacente, bastante más rígida, y en el otro está ligado a la columna; en esas condiciones, se ha demostrado (4.6, 4.7) que para que el patín comprimido se pandeo localmente bajo carga estática, debe plastificarse en una longitud igual a la de una onda de pandeo local, Fig. 4.7.

Si la viga está cargada cíclicamente, de manera que el momento en el extremo conectado con la columna cambia de signo en cada uno de los ciclos, los patines trabajan alternadamente en tensión y compresión; el patín comprimido se pandea localmente cuando las solicitaciones alcanzan un cierto valor, formándose una onda semejante a la que producen las cargas estáticas, Figs. 4.8 y 4.9, la que desaparece cuando cambia el sentido del momento, y se forma en el otro patín; así, las ondas de pandeo en compresión aparecen y desaparecen en cada uno de los ciclos del proceso de carga, y si el pandeo lateral está impedido la falla se inicia eventualmente al formarse una grieta en la zona en que las deformaciones son máximas (ref. 4.8), Fig. 4.8, en la que las severas distorsiones de los patines causan deformaciones inelásticas considerablemente mayores que en el extremo empotrado.

En la ref. 4.8 se resumen los resultados obtenidos cargando cíclicamente vigas en voladizo, por medio de un sistema con el que se controlan los desplazamientos, hacia arriba y abajo, del extremo libre; cuando las deformaciones unitarias en la zona de los patines en contacto con el empotramiento eran de 2.5% no aparecieron grietas en la sección empotrada, y la falla se produjo siempre en la zona de deformaciones máximas de las ondas de pandeo; solamente cuando las deformaciones impuestas

se redujeron a  $\pm 1\%$  no inició la falla por agrietamiento en el empotramiento y no en ondas de pandeo local, después de un número muy elevado de ciclos de carga.

Se deduce de aquí que en estructuras sometidas a solicitaciones que producen condiciones de carga total o parcialmente reversibles el pandeo local es mucho más crítico que la <sup>fatiga de bajo número de ciclos</sup> "fatiga de bajo número de ciclos" del material en sí y, si se evita, aumenta considerablemente el número de ciclos que pueden resistir las vigas bajo una deformación dada.

En la Fig. 4.10 se resumen los resultados de las experiencias mencionadas.

De acuerdo con los resultados anteriores, cuando la relación ancho/grueso de los patines se hace menor que la especificada para carga estática aumenta la vida de los perfiles H cargados cíclicamente, al retrasarse la iniciación del pandeo local, y podría lograrse el mismo objeto colocando atiesadores verticales que impidiesen la distorsión de las secciones transversales críticas. Sin embargo, esta conclusión está en desacuerdo con otros resultados experimentales;

do de desplazamiento  $\Delta/h$  máximo de cada entropiso, bajo el temblor de diseño mas --  
intenso, se limita a 0.03 para evitar problemas con otros resultados experimentales;  
así, en la ref. 4.9 se demuestra que el pandeo local de los patines no ocasiona una  
pérdida inmediata de resistencia, y se indica que al formarse las ondas de pandeo --  
local y distribuirse las deformaciones máximas puede, incluso, aumentar significati-  
vamente la vida de una viga, y en la ref. 4.10 se encuentra que el comportamiento de  
perfiles II cuyos patines tienen una relación ancho/grueso mayor que la especificada  
para diseño plástico bajo carga estática (21 en vez de 17) es satisfactorio, pues --  
aunque el pandeo local se inicia muy pronto no afecta significativamente el comporta-  
miento del marco del que forma parte la viga.

A diferencia de las vigas de la ref. 4.8, las de la ref. 4.10 se cargaron con --  
fuerzas verticales que permanecieron constantes mientras se aplicaban las horizonta-  
les cíclicas, lo que hizo que las ondas de pandeo local no desaparecieran completa-  
mente en cada ciclo; además, estuvieron provistas de contraventeo lateral en puntos  
separados distancias bastante menores que las especificadas en las normas del AISC,  
pero que daban soporte únicamente al patín superior, ya que se trató de reproducir  
las condiciones existentes en estructuras reales, en las que el sistema de piso --  
proporciona soporte lateral continuo a los patines superiores.

En los resultados de ensayos de subconjuntos formados por una columna y dos --  
vigas, <sup>Fig. 4.11,</sup> sometidos a cargas verticales constantes y horizontales cíclicas, reportados  
en la ref. 4.11, se observa que las inversiones de carga acentúan las imperfecciones  
locales y aceleran la iniciación del pandeo local y torsional en las regiones de --  
las vigas en que se forman articulaciones plásticas, haciendo que disminuyan la ---  
resistencia y rigidez de la estructura, lo que lleva a recomendar que se coloque un/  
sistema de contraventeo que proporcione soporte lateral a los patines interiores, --  
comprimidos, de las regiones plastificadas.

En la ref. 4.12 se describen los resultados obtenidos con dos subconjuntos que --  
difieren exclusivamente en las relaciones ancho/grueso de los patines y alas de las

vigas (11.7 y 47 en el primero, 10.2 y 33 en el segundo), provistos de contraventeo lateral, en los patines superiores, con separaciones menores que las especificadas para carga estática; la capacidad de rotación de las vigas del segundo subconjunto <sup>de las vigas</sup> ~~del~~ primero; en éste apareció una onda de pandeo local en el patín comprimido cuando la rotación en la articulación plástica era de  $0.040\text{rad}$ , y el pandeo lateral se presentó, después de varios ciclos, al invertir la rotación a  $-0.028\text{rad}$ , con disminución en la resistencia, mientras que en aquel no hubo pandeo local bajo inversiones de la rotación plástica de  $0.030\text{rad}$  a  $-0.016\text{rad}$ , y aunque se formó una pequeña onda al llegar a  $-0.029\text{rad}$ , el pandeo lateral se inició con rotaciones de  $0.040\text{rad}$ , y aún entonces no influyó en la resistencia del espécimen.

Los resultados anteriores indican que el comportamiento de las estructuras mejora cuando se utilizan vigas con relaciones ancho/grueso, en patines y alma, menores que las especificadas para diseño plástico bajo carga estática, y cuando se coloca más contraventeo lateral; sin embargo, en la ref. 4.4 se sugiere que el índice de desplazamiento  $\Delta/h$  máximo de cada entrepiso, bajo el temblor de diseño más intenso, no limite a  $0.03$  para evitar problemas excesivos de inestabilidad; en ese caso, si se desprecia la contribución al desplazamiento de las deformaciones elásticas o inelásticas de la junta y de las deformaciones elásticas de las columnas y vigas, la capacidad de rotación máxima necesaria en las articulaciones plásticas de los extremos de las vigas puede tomarse conservadoramente igual a  $0.03\text{rad}$ , y aunque los estudios efectuados hasta ahora no permiten asegurarlo de manera definitiva, parece que las vigas que cumplen las relaciones ancho/grueso especificadas para carga estática y que tienen el patín superior soportado lateralmente en forma continua pueden admitir rotaciones de esa magnitud, y aún mayores, sin que disminuya su resistencia.

En resumen, aunque la información experimental con que se cuenta no es del todo concluyente, parece indicar que si las vigas están soportadas lateralmente en forma

ocurda basta con que se cumplan las relaciones ancho/grueso especificadas para -  
isolio plástico bajo carga estática para que su comportamiento bajo carga cíclica sea  
satisfactorio; la situación cambia cuando aumenta la longitud no soportada lateral-  
mente, pues en ese caso el pandeo lateral se inicia poco después que el local, y la  
combinación de ambos ocasiona una falla prematura. En marcos rígidos de edificios  
urbanos es fácil lograr que el sistema de piso proporcione soporte lateral continuo  
al patín superior de las vigas y, si es necesario, el inferior puede fijarse por -  
medio de atiesadores verticales; sin embargo, en estructuras de otros tipos puede -  
ser recomendable escoger límites de las relaciones ancho/grueso y de la separación  
entre soportes laterales más conservadoras que las que se fijan para carga estática.

**CAPACIDAD DE ROTACION.** Cuando no se presentan fallas prematuras, las curvas -  
carga-deformación de las vigas tienen la forma indicada en la Fig. 4.12 , en la -  
que se han tomado el momento y la rotación en el extremo,  $M$  y  $\theta$  , como parámetros  
representativos de los sistemas de cargas y deformaciones.

Llamando  $\theta_u$  a la rotación en el instante en que se inicia la descarga, y  $\theta_p$  a  
la rotación elástica ficticia correspondiente al momento plástico resistente de la  
viga (es decir, el ángulo que habría girado el extremo al llegar el momento a  $M_p$  si  
el comportamiento fuese elástico hasta entonces) la capacidad de rotación de la -  
viga,  $R$ , es, por definición,

$$R = (\theta_u / \theta_p) - 1$$

$R$  es nula cuando el miembro no puede soportar el momento  $M_p$  durante ningún -  
intervalo de rotaciones, pues en ese caso  $\theta_u = \theta_p$  .

El cociente  $\theta_u / \theta_p$  , o  $\delta_u / \delta_p$  , donde  $\delta$  es un desplazamiento lineal -  
cualquiera, es el factor de ductilidad de la viga.

En las refs. 4.6, 4.7 y <sup>4.13</sup> se presentan expresiones que relacionan la capacidad de  
rotación  $R$  de vigas  $H$  bajo momento uniforme o variable, producido por carga estática,

con los distintos parámetros que afectan su comportamiento; con ellas se puede determinar la separación entre puntos soportados lateralmente necesaria para obtener una capacidad de rotación deseada o, inversamente, calcular la capacidad de rotación para una separación dada. Por ejemplo, si la separación entre contraventeos es  $50 r_y$  en una viga H compacta de acero A36 con tramos adyacentes elásticos, bajo momento uniforme, la capacidad de rotación excede de 10.5, y si se desea una R de 3 basta con soportar lateralmente puntos separados distancias iguales a  $60 r_y$ . Bajo momento variable el pandeo lateral es menos importante, y longitudes no contraventeadas del orden de  $75 r_y$  suelen ser adecuadas en la mayoría de los casos.

DISEÑO. En la actualidad no se cuenta con información suficiente sobre la demanda de capacidad de rotación en estructuras sometidas a sismos intensos ni sobre la que éstas pueden proporcionar, por lo que mientras se obtiene mayor información teórica y experimental, en las zonas en que se formarán articulaciones plásticas ligadas con el mecanismo de colapso las vigas de estructuras que se construirán en zonas sísmicas deben satisfacer, cuando menos, los requisitos relativos a relaciones ancho/grueso de patines y almas y a separación entre puntos soportados lateralmente que se exigen en diseño plástico, independientemente de que los métodos empleados para el análisis y diseño sean elásticos, basados en esfuerzos permisibles, o plásticos.

De acuerdo con la ref. 4.15, esos requisitos son

YIELD STRESS (Esfuerzo de fluencia)	MAXIMUM ALLOWABLE WIDTH-TO-THICKNESS RATIOS <sup>1</sup>			MAXIMUM ALLOWABLE LATERALLY UNSUPPORTED DISTANCE <sup>2</sup>	
	FLANGES (PATINES)	WEBS (ALMAS)		$1.0 \geq M/M_p > 0.5$	$0.5 \geq M/M_p > 1.0$
		$P/P_y \leq 0.27$	$P/P_y > 0.27$		
36 ksi (24.84 kN/cm <sup>2</sup> )	17.0	$68.7 - 96.1 P/P_y$	42.8	$63.2 r_y$	$38.2 r_y$
50 ksi (34.50 kN/cm <sup>2</sup> )	14.0	$58.3 - 81.6 P/P_y$	36.3	$52.5 r_y$	$27.5 r_y$
65 ksi (44.85 kN/cm <sup>2</sup> )	12.0	$51.1 - 71.5 P/P_y$	31.9	$46.2 r_y$	$21.2 r_y$

1. Relaciones ancho/grueso máximas admisibles  
 2. Distancias no soportadas lateralmente máximas admisibles

Todas las secciones en que aparezcan articulaciones plásticas asociadas con el mecanismo de colapso deben contraventearse lateralmente en forma adecuada para evitar desplazamientos laterales y torsionales, y la longitud no soportada entre esas secciones y puntos adyacentes contraventeados similarmente no debe sobrepasar la dada en las dos últimas columnas de la tabla, en las que  $r_g$  es el radio de giro del miembro alrededor del eje débil,  $M$  es el menor de los momentos en los extremos del segmento no contraventado y  $M/M_p$ , relación entre momentos en los extremos, es positiva si el segmento se flexiona en curvatura doble y negativa si lo hace en curvatura simple.

El efecto de la fuerza cortante sobre el momento plástico resistente de las vigas es despreciable casi siempre; en la ref. 4.16 se indica que no es necesario modificarlo si la fuerza cortante no excede de  $(\sigma_y/\sqrt{3})wd_w$ , donde  $\sigma_y$  es el esfuerzo de fluencia del acero y  $w$  y  $d_w$  son, respectivamente, el grueso y el peralte del alma.

En los tramos entre articulaciones las vigas se diseñan utilizando métodos plásticos y empleando factores de carga adecuados para evitar fallas prematuras, anteriores a la formación del mecanismo de colapso.

4.4.2 COLUMNAS. Las columnas de los marcos rígidos deben ser capaces de soportar las cargas que les transmiten las vigas adyacentes y los tramos de columnas que se encuentren sobre ellas, llevándolas eventualmente a la cimentación, así como los momentos producidos por cargas verticales que reciben de las vigas; además, deben ayudar a soportar las fuerzas horizontales en marcos contraventados, y resistirlas en su totalidad en los que no tienen contraventeo, y contribuir a darle al marco la rigidez necesaria para evitar problemas de pandeo de conjunto. Trabajan fundamentalmente en flexocompresión, y suelen ser despreciables los efectos que ocasionan en ellas las fuerzas cortantes. En general están sometidas a flexocompresión biaxial, pues forman parte simultáneamente de dos marcos, frecuentemente ortogonales.



Una barra flexocomprimida puede fallar por alguna de las causas que se enumeran a continuación, o por una combinación de dos o más de ellas;

1. Porque se alcance su resistencia máxima bajo momento y fuerza axial combinados, al formarse articulaciones plásticas en la sección o secciones en las que el momento tiene su mayor intensidad.
2. Por inestabilidad en el plano de los momentos ocasionada por exceso de flexión en ese plano, teniendo en cuenta la acción simultánea de la fuerza normal.
3. Por pandeo lateral debido a flexotorsión.
4. Por pandeo debido a compresión axial alrededor de los ejes de menor momento de inercia.
5. Por pandeo local.

Cualquiera de las cuatro últimas formas de falla puede iniciarse en el intervalo elástico o en el inelástico, dependiendo de la mayor o menor esbeltez de la pieza en consideración o de los elementos planos que la forman.

La primera forma de falla es crítica cuando la barra tiene paredes gruesas y sus condiciones de apoyo y carga son tales que pueden formarse articulaciones plásticas en la zona central o en uno o en los dos extremos, producidas por fuerzas de menor intensidad que las que ocasionarían la falla por pandeo; esta condición suele corresponder al colapso de columnas aisladas, pero no necesariamente al de las que forman parte de estructuras reticulares.

La segunda condición es crítica en barras flexionadas alrededor de sus ejes de menor momento de inercia, y también cuando la flexión se presenta en el plano de mayor resistencia pero el pandeo lateral está impedido por las características geométricas de las secciones transversales (tubos, secciones en cajón) o por la presencia de elementos exteriores de contraventeo,

La falla por pandeo lateral (condición 3) se presenta en miembros de sección H o similar, flexionados alrededor de sus ejes de mayor momento de inercia, y desprovistos de elementos exteriores adecuados de contraventeo; se caracteriza por una --

flexión lateral de la barra en un plano perpendicular al de aplicación de los momentos, acompañada por un retorcimiento alrededor del eje longitudinal.

La condición 4 es crítica cuando la fuerza axial es mucho más importante que la flexión y el comportamiento se aproxima al de una columna en compresión axial, y la 5 cuando las relaciones ancho/grueso de patines o alma están por encima de ciertos límites.

La forma de falla más común en columnas de edificios es la correspondiente a la combinación de los dos primeros casos, es decir, por formación de un número de articulaciones plásticas suficiente para que se conviertan en un mecanismo, bajo la acción de las solicitaciones incrementadas por efectos de segundo orden debidos a la interacción de la compresión y los desplazamientos ocasionados por los momentos flexionantes.

El pandeo lateral por flexotorsión puede hacer que disminuya la resistencia, pero las longitudes y las dimensiones de las secciones transversales de las columnas de edificios son tales que ese fenómeno no suele ser crítico, y lo mismo sucede con el pandeo local. Tampoco tiene importancia el pandeo de Euler, ya que la flexión juega un papel importante en la gran mayoría de los casos.

Una columna de un marco provisto de contraventeos o de muros de cortante de rigidez y resistencia adecuadas falla cuando se forman en ella tres articulaciones plásticas, Fig. 4.13 .

El comportamiento de las columnas de marcos no contraventeados es esencialmente diferente. La estabilidad del conjunto depende básicamente de las vigas; si son muy flexibles las columnas actúan esencialmente como cuerpos rígidos, y el desplazamiento horizontal se debe principalmente a la flexión de las vigas; cada entrepiso se convierte en un mecanismo cuando se forman articulaciones en los extremos de todas ellas, con lo que desaparecen las restricciones y los desplazamientos crecen ilimitadamente, Fig. 4.14a .

Si las vigas son rígidas las columnas resisten las deflexiones laterales trabajando en flexión; la condición de colapso se alcanza también cuando el entrepiso se convierte en un mecanismo, al formarse articulaciones plásticas en los dos extremos de todas las columnas (la estabilidad lateral del marco no depende de cada una de ellas en particular, sino del comportamiento de todas las de cada entrepiso, ya que el colapso no se presenta cuando una o más columnas se convierten en mecanismos, pues las restantes siguen proporcionando rigidez lateral al conjunto).

En la Fig. 4.14 b se ha representado el caso teórico de vigas infinitamente rígidas.

Pueden presentarse situaciones intermedias, en las que algunas columnas fallan al formarse articulaciones plásticas en sus dos extremos y otras cuando desaparecen las restricciones proporcionadas por <sup>las</sup> vigas; incluso, hay casos en que las dos situaciones tienen lugar en una misma pieza, en uno y otro de sus extremos.

Cuando en un entrepiso de un marco no contraventeado se utilizan columnas de resistencias muy diferentes, alguna de ellas puede fallar como se muestra en la Fig. 4.13 b, y si las restantes proporcionan resistencia lateral suficiente para posponer la falla del conjunto; sin embargo, esta situación debe evitarse en estructuras construídas en zonas sísmicas, pues se tendrían eslabones débiles que precipitarían la falla.

De acuerdo con la práctica usual, el diseño de estructuras que se construirán en zonas sísmicas se hace de manera que las articulaciones plásticas se formen en las vigas, mientras las columnas se conservan básicamente en el intervalo elástico. Por este motivo se han efectuado menos estudios referentes al comportamiento inelástico de columnas bajo carga cíclica que de vigas en condiciones análogas, pero se cuenta con alguna información, que se discutirá mas adelante.

El comportamiento de una barra recta aislada sometida a la acción simultánea de fuerzas de compresión axial y pares aplicados en los extremos puede representarse por medio de la curva momento-rotación en el extremo, obtenida aplicando primero la

fuerza de compresión y después momentos de intensidad creciente, en uno solo o en ambos extremos, mientras la compresión se mantiene constante.

Los parámetros principales que determinan la respuesta de la pieza son su esbeltez, la magnitud de la fuerza de compresión y la manera en que están aplicados los momentos, que pueden producir curvatura simple o doble; además, el problema se complica si la pieza puede fallar por pandeo lateral o cuando uno de sus extremos se desplaza linealmente respecto al otro.

En la Fig. 4.15 se han trazado en forma cualitativa varias curvas  $M-\theta$ , todas correspondientes a columnas en las que no hay pandeo local ni lateral y cuyos extremos están fijos linealmente; cada colección de curvas ilustra la importancia de uno de los parámetros mencionados arriba.

La Fig. 4.15a corresponde a una columna muy corta, en la que no hay inestabilidad de ninguna clase; cuando la fuerza normal es nula se obtiene la curva  $M-\theta$  característica de una pieza en flexión, que resiste un momento de intensidad máxima igual a  $M_p$  y lo mantiene durante rotaciones importantes, y al crecer  $P$  gradualmente se ven obteniendo curvas semejantes a la primera pero cuya ordenada máxima no es  $M_p$  sino  $M_{pc}$ , momento plástico reducido por efecto de la fuerza normal.

Las otras tres figuras describen el comportamiento de piezas largas. En la b se han trazado varias curvas, obtenidas para valores constantes de  $q$  y de  $L/r$  y para intensidades crecientes de la fuerza axial ( $q$  es el cociente del menor entre el mayor de los momentos en los extremos); al aumentar la compresión disminuye tanto el momento máximo que resiste la pieza como su capacidad de rotación.

Cuando varía  $L/r$ , manteniéndose  $q$  y  $P$  constantes, o cuando la variable es  $q$ , mientras las otras dos cantidades se conservan fijas, el efecto sobre el comportamiento de la columna es análogo: al aumentar la relación de esbeltez, o tender los momentos en los extremos hacia valores iguales que producen curvatura simple en flexión pura, disminuyen tanto la resistencia como la capacidad de rotación (Figs. 4.15c y d).

Cualquiera de las curvas de la Fig. 4.15 puede interrumpirse prematuramente si

se presente un fenómeno de pandeo local o lateral, cuya importancia varía también con los parámetros que caracterizan el problema.

Aún admitida la imposibilidad de que haya pandeo, la resistencia de las barras flexocomprimidas cargadas queda limitada por inestabilidad, como lo demuestra la forma de las curvas de las Figs. 4.15 b, c y d, que tienen una rama ascendente, correspondiente a configuraciones estables, seguida de un punto en el que la pendiente es nula y el equilibrio indiferente (resistencia máxima) y de una rama descendente, característica de estados de equilibrio <sup>inestable</sup> indiferente. La inestabilidad, que se presenta sin que la barra se salga del plano de la flexión, y que no es un fenómeno de pandeo (no hay bifurcación del equilibrio), se debe a la interacción de momentos y fuerza normal y a la disminución de rigidez producida por la plastificación parcial.

La resistencia de una columna flexionada alrededor de su eje de mayor momento de inercia, que se conserva durante todo el proceso de carga en el plano de la flexión, puede determinarse utilizando métodos elásticos o elastoplásticos. En el primer caso se toma como límite de utilidad estructural la aparición del esfuerzo de fluencia en la sección crítica, y no corresponde a la resistencia máxima de la columna, que puede admitir incrementos adicionales de carga hasta su colapso por inestabilidad en el plano de la flexión.

Despreciando los esfuerzos residuales, puede considerarse que el comportamiento elástico termina cuando

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A} + \frac{M_{\max}}{S_x} = \sigma_y$$

En  $M_{\max}$  se incluye el momento producido por la fuerza  $P$  al actual sobre la pieza deformada.

Dividiendo los dos miembros entre  $\sigma_y$ , teniendo en cuenta que  $A\sigma_y = P_y$  y  $S_x\sigma_y = (M_x)_y$ , y expresando el momento máximo como el producto de un factor de amplificación  $\phi$  por el mayor de los momentos aplicados en los extremos, la ecuación anterior se transforma en

$$\frac{P}{P_y} + \varphi \frac{M_o}{(M_x)_y} = 1.0 \quad (1)$$

Las expresiones teóricas exactas de  $\varphi$  resultan inadecuadas para diseño, por lo que la ec. (1) suele sustituirse por las dos ecuaciones aproximadas siguientes, que deben satisfacerse simultáneamente:

$$\frac{P}{P_y} + \frac{C_m}{1-P/P_E} \frac{M_o}{(M_x)_y} \leq 1.0 \quad (2)$$

$$\frac{P}{P_y} + \frac{M_o}{(M_x)_y} \leq 1.0 \quad (3)$$

Con la fórmula (2) se comprueba que los esfuerzos máximos amplificados por -- efectos de segundo orden no exceden el límite de fluencia, y con la (3) se hace la misma comprobación en el extremo de la columna en que actúa el mayor de los momentos exteriores; en los extremos no hay amplificación.

On  $M_o$  es un momento uniforme ficticio aproximadamente equivalente a los momentos reales variables; si los extremos de la columna no se desplazan linealmente  $C_m$  se -- calcula con la expresión  $C_m = 0.6 + 0.4 M/M_o \geq 0.4$ , en la que  $M$  es el menor y  $M_o$  el mayor de los momentos en los extremos, y  $M/M_o$  es positivo cuando la barra -- se flexiona en curvatura simple y negativo cuando la hace en curvatura doble;  $1/(1-P/P_E)$ , donde  $P_E$  es la carga crítica de Euler de pandeo en el plano de la flexión, es un -- factor de amplificación del momento uniforme equivalente  $C_m M_o$ , que tiene en cuenta, aproximadamente, la interacción fuerza axial-momento.

Se cuenta con varios métodos para calcular la resistencia máxima de las columnas en el intervalo inelástico (refs. 4.17 y 4.18), y se han desarrollado procedimientos -- que permiten determinar la curva completa momento-rotación en un extremo (refs. 4.19 a 4.21); esta curva es de importancia fundamental en diseño sísmico, pues con ella se obtienen la capacidad de rotación y de absorción de energía; sin embargo, las curvas -- han sido deducidas para miembros con carga axial constante y momentos aplicados en --

uno o en los dos extremos que crecen monotónicamente hasta la falla, por lo que —  
proporcionan únicamente una indicación cualitativa del comportamiento de columnas —  
sometidas a solicitaciones dinámicas.

En la Fig. 4.16 (ref. 4.21) se muestran tres curvas momento-rotación típicas obtenidas  
para tres columnas iguales, con relación de esbeltez en el plano de flexión  $L/r_x = 30$   
y fuerzas de compresión  $P = 0.30 P_y$ , sometidas a momentos de intensidad creciente  
aplicados en los extremos que guardan entre sí relaciones diferentes en cada caso;  
la columna en curvatura doble es la que se encuentra en la condición más favorable,  
y la más crítica es la flexionada en curvatura simple; los momentos tienen intensi-  
dades iguales en los dos casos.

La columna no puede soportar el momento  $M_p$  completo en ninguno de los casos,  
pues parte de su resistencia debe destinarse a la fuerza de compresión, pero en **a** y  
**b** tiene una capacidad de rotación importante bajo momento constante igual a  $M_{pc}$ ,  
mientras que en **c** los efectos de segundo orden son máximos, el momento resistente  
no llega a  $M_p$  y la capacidad de rotación es muy pequeña; este fenómeno se agudiza  
cuando aumentan  $L/r_x$  y  $P$ , de manera que las columnas esbeltas y con compresión —  
importante resisten un momento máximo apreciablemente menor que  $M_{pc}$ , y tienen una  
capacidad de rotación muy reducida, o aún nula.

Las columnas de edificios construídos en zonas sísmicas son en general poco —  
esbeltas y la flexión suele ser predominante en su diseño, por lo que sus relaciones  
 $P/P_y$  son bajas; además, se flexionan en curvatura doble bajo la acción combinada —  
de fuerzas verticales y solicitaciones sísmicas; por todo ésto, su capacidad de rota-  
ción suele ser importante, del orden de la mitad de la predicha para vigas (ref. 4.21).

Las ecuaciones aproximadas 2 y 3 pueden utilizarse también para describir la  
condición de carga que ocasiona la iniciación del pandeo elástico de una columna, —  
fuera del plano de flexión; para ello, basta sustituir en la ec. 2 a  $P_y$  y  $(M_x)_y$   $\bar{P}$   
por  $P_{cr}$  y  $M_{crx}$ , que representan la carga crítica de Euler para pandeo alrededor  
del eje de menor momento de inercia y el momento crítico de pandeo elástico de la —

barra flexionada uniformemente alrededor de su eje  $y/y$  de mayor momento de inercia; la ec. (3) se conserva sin cambio.

La resistencia de barras flexocomprimidas que fallan por exceso de flexión en el plano de los momentos es relativamente insensible a cambios en las dimensiones de las secciones transversales, por lo que un solo conjunto de curvas correspondiente a una relación  $q$  dada entre momentos extremos es aplicable a todas las secciones H, laminadas o formadas por placas, de dimensiones semejantes a las laminadas; en cambio la resistencia al pandeo lateral depende de manera importante de la sección transversal de la columna.

Se ha determinado (ref. 4.22) que la relación adimensional  $K_T/Ad^2$ , donde  $K_T$  es la constante de torsión de Saint Venant,  $A$  el área y  $d$  el peralte de la sección, constituye el parámetro geométrico principalmente responsable de cambios en el momento crítico, tanto en el intervalo elástico como en el inelástico, y que la resistencia al pandeo lateral es proporcional a él; todas las variables restantes que definen la geometría de las secciones transversales, reducidas a una forma adimensional, son aproximadamente constantes para relaciones  $P/P_y$  y  $L/r_y$  fijas, aún en el intervalo inelástico, de manera que pueden construirse curvas ~~(ref. 4.22)~~ que proporcionan las relaciones de esbeltez límite en función de  $K_T \times 10^6 / Ad^2$  y de  $P/P_y$ , y que son aplicables a todas las secciones H laminadas con aproximación suficiente para diseño.

Los resultados proporcionados por las curvas son conservadores cuando se aplican a columnas de edificios sobre los que actúan cargas horizontales, pues corresponden a piezas libremente apoyadas con momentos iguales en los extremos que las flexionan en curvatura simple, y las columnas mencionadas siempre tienen restricciones en los extremos y, además, se flexionan en curvatura doble; teniendo esto en cuenta, y estudiando las curvas, se concluye que el pandeo lateral por flexotorsión no ocasiona disminuciones en la resistencia de la mayoría de las secciones H que se utilizan en



edificios, cuando actúan sobre ellos cargas verticales y horizontales estáticas.

Si en la ec. (2) se sustituye  $P_y$  por la carga crítica de pandeo inelástico de la columna comprimida axialmente, correspondiente a la relación de esbeltez más grande, y  $(M_x)_y$  por el momento máximo que podría resistir la pieza si estuviese sometida únicamente a flexión, incluyendo efectos de pandeo lateral por flexotorsión cuando sean significativos, se obtiene la ec. (4), que proporciona pares de valores de P y  $M_o$  que ocasionan la falla por inestabilidad; aunque empírica, la ec. (4) — proporciona buena precisión para diseño.

La ec. (3) se sustituye por la (5), que describe la condición correspondiente a la formación de una articulación plástica en un extremo, de manera que cuando se satisface alguna de las ecs. (4) o (5) está a punto de agotarse la resistencia de un miembro sujeto a compresión y a flexión en su plano de mayor resistencia, ya sea por pandeo lateral o por formación de una articulación plástica en uno de sus extremos.

$$\frac{P}{P_{cr}} + \frac{C_m}{1 - P/P_E} \frac{M_o}{M_m} = 1.0 \quad (4)$$

$$\frac{P}{P_y} + \frac{M_o}{1.18 M_p} = 1.0 \quad (5)$$

$M_m$ , momento máximo que puede resistir el miembro en ausencia de fuerza normal, puede calcularse aproximadamente con la expresión empírica (ref. A.15 )

$$M_m = \left[ 1.07 - \frac{(L/r_y) \sqrt{S_y}}{26500} \right] M_p \leq M_p$$

Esta ecuación proporciona un valor aproximado del momento crítico de pandeo lateral para  $\eta = +1.0$ ; cuando los valores de los momentos en los extremos guardan otra relación, puede corregirse utilizando el coeficiente  $C_m$ .

De las ecs. (4) y (5) se obtienen dos valores del momento exterior  $M_o$ ; el menor de ellos es el máximo que resiste la columna en combinación con la fuerza axial P.

$$M_o = \frac{1}{C_m} \left( 1 - \frac{P}{P_E} \right) \left( 1 - \frac{P}{P_{cr}} \right) M_m \quad (4')$$

$$M_0 = 1.18 (1 - P/P_y) M_p \quad (5')$$

FLEXION BIAXIAL. El problema por resolver es determinar la intensidad máxima de las solicitaciones que puede resistir una columna cuando actúan en ella, simultáneamente, una fuerza axial de compresión y momentos aplicados alrededor de los dos ejes centroidales y principales de sus secciones extremas; no es un problema de pandeo por bifurcación del equilibrio, pues las secciones transversales se desplazan lineal y angularmente desde un principio, sino de inestabilidad producida por la interacción de momentos y fuerza axial.

En la ref. 23 se desarrolla un método aproximado para el diseño elástico de columnas de sección transversal H con pares aplicados en los extremos alrededor de los dos ejes centroidales y principales, que constituye la base de las recomendaciones contenidas en las refs. 4.24 y 4.25.

Para que el esfuerzo normal no sobrepase al de fluencia en ningún punto deben satisfacerse simultáneamente las tres condiciones siguientes:

$$\sigma_a + \sigma'_{bx} + \sigma'_{by} \leq \sigma_y \quad (6)$$

$$\sigma_a + \sigma''_{bx} + \sigma''_{by} \leq \sigma_y \quad (7)$$

$$\sigma_a + N_x \sigma_{bx} + N_y \sigma_{by} \leq \sigma \quad (8)$$

$\sigma_a, \sigma_{bx}, \sigma_{by}$  son los esfuerzos normales directos producidos por la fuerza axial y por momentos uniformes ficticios equivalentes aplicados alrededor de  $x$  y  $y$ , que se calculan con las expresiones

$$(M_x)_{eq.} = (1/\sqrt{F})_x M_{ox} \doteq C_{mx} M_{ox}$$

$$(M_y)_{eq.} = (1/\sqrt{F})_y M_{oy} \doteq C_{my} M_{oy}$$

en las que  $M_{ox}$  y  $M_{oy}$  son los momentos mayores alrededor de  $x$  y  $y$  y los factores  $1/\sqrt{F}$ , que están tabulados en la ref. 4.23, son muy semejantes a los coeficientes  $C_m$ , calculados para flexión alrededor de cada uno de los ejes centroidales y princi-

palos.

$\sigma'_{bx}$ ,  $\sigma'_{by}$ ,  $\sigma''_{bx}$  y  $\sigma''_{by}$  son los esfuerzos máximos en los extremos de la columna, calculados con los momentos exteriores aplicados en ellos,  $N_x$  y  $N_y$  son factores de amplificación que se determinan con las fórmulas de la ref. 4.23,

y  $\sigma$  es un esfuerzo normal reducido para tener en cuenta los efectos de las imperfecciones geométricas inevitables en las columnas.

Los esfuerzos en los dos extremos se revisan con las ecs. 6 y 7 y la condición de estabilidad con la ec. 8.

La resistencia máxima real, en el intervalo inelástico, de columnas aisladas de sección H en flexocompresión biaxial, se ha determinado estableciendo su relación carga-deformación completa, por medio de métodos numéricos en los que las cargas exteriores se aplican en una secuencia de incrementos suficientemente pequeños; se han obtenido así ecuaciones de interacción que expresan las condiciones de falla por formación de una articulación plástica en alguna sección transversal, o por inestabilidad de la columna (refs. 4.26 a 4.30).

En secciones contraventeadas (extremos de la columna) debe satisfacerse la condición

$$\left(\frac{M_x}{M_{px}}\right)^{\xi} + \left(\frac{M_y}{M_{py}}\right)^{\xi} \leq 1.0 \quad (9)$$

$M_x$  y  $M_y$  son los momentos que actúan en la sección considerada y  $M_{px}$  y  $M_{py}$  los momentos plásticos, reducidos por fuerza axial, correspondientes a flexión alrededor de  $x$  y  $y$ , que se calculan con las ecuaciones

$$M_{px} = 1.18 M_{px} [1 - (P/P_y)] \leq \bar{M}_{px}$$

$$M_{py} = 1.19 M_{py} [1 - (P/P_x)^2] \leq \bar{M}_{py}$$

en las que  $M_{px}$  y  $M_{py}$  son los momentos plásticos de la sección.

En secciones H en las que la relación del ancho del patín al peralte del alma está comprendida entre 0.5 y 1.0,  $\xi$  está dado por

$$\xi = 1.6 - \frac{P/P_y}{2 \ln(P/P_y)}$$

donde  $\ln$  indica logaritmo natural.

La estabilidad entre puntos contraventeados se comprueba con la ecuación

$$\left( \frac{C_{mx} M_x}{M_{ux}} \right)^\eta + \left( \frac{C_{my} M_y}{M_{uy}} \right)^\eta \leq 1.0 \quad (10)$$

$M_x$  y  $M_y$  son los momentos mayores, aplicados en uno u otro extremo de la columna, y  $M_{ux}$  y  $M_{uy}$  son los momentos resistentes en flexión, disminuidos por pandeo lateral por flexotorsión, cuando éste es crítico.

$$M_{ux} = M_{ox} [1 - (P/P_u)] [1 - (P/P_{ex})]$$

$$M_{uy} = M_{oy} [1 - (P/P_u)] [1 - (P/P_{ey})]$$

$P_u$  es la carga crítica de pandeo inelástico de la columna ( $P_{cr}$  en la ec. 4),  $P_{ex}$  y  $P_{ey}$  las de pandeo elástico,  $M_{ox}$  el momento plástico para flexión alrededor de  $x$ , reducido por pandeo lateral cuando sea necesario (ec. 4'), y el exponente  $\eta$  vale

$$\eta = 0.4 + P/P_y + b_f/d \geq 1.0, \text{ cuando } b_f/d \geq 0.3$$

$$\eta = 1.0, \text{ cuando } b_f/d < 0.3$$

$b_f$  y  $d$  son el ancho del patín y el peralte de la sección I o H.

Para utilizar las ecs. (9) y (10) en el diseño de columnas de marcos no contraventeados ("sway frames") deben determinarse los momentos producidos por la carga última por medio de un análisis de segundo orden en el que se incluya el efecto  $P\Delta$ .

En la ref. 4.30 se recomienda que cuando se utilicen las ecs. 9 y 10 para determinar la resistencia de columnas en flexocompresión biaxial se tengan en cuenta las precauciones siguientes:

1. Las secciones deben dimensionarse de manera que las solicitaciones producidas por viento o sismo, que son reversibles, no ocasionen esfuerzos que sobrepasen el límite de fluencia nominal.

2. Las secciones deben dimensionarse de manera que las solicitaciones variables, ocasionadas por viento o sismo más carga vertical (con un factor de carga de 1.5 multiplicado por 0.7, o algo así, para tener en cuenta la probabilidad de ocurrencia) no ocasionen esfuerzos que excedan del límite de fluencia nominal del material.

3. Debe recordarse que el método se ha desarrollado suponiendo que no hay pandeo local prematuro (secciones compactas).

En la ref. 4.16 se recomienda que la resistencia de las columnas en flexocompresión biaxial, ante fallas por inestabilidad, se determine con la ecuación

$$\frac{P}{P_{cr}} + \frac{C_{mx} M_x}{M_{crx} (1 - P/P_{Ex})} + \frac{C_{my} M_y}{M_{cry} (1 - P/P_{Ey})} \leq 1.0 \quad (11)$$

que es una extensión de la ec. (4).

**COLUMNAS CARGADAS CICLICAMENTE.** La información experimental sobre el comportamiento de elementos flexocomprimidos cargados cíclicamente que se posee en la actualidad es todavía bastante reducida, y se limita a secciones flexionadas alrededor de uno sólo de sus ejes centroidales y principales; se carece totalmente de información relativa a miembros en flexocompresión biaxial.

Se han ensayado especímenes aislados de sección transversal H de los tipos que se muestran en la Fig. 4.17 ; en las experiencias reportadas en las refs, 4.31 a 4.33 se ha utilizado la barra libremente apoyada con una carga aplicada en el centro del claro, y la pieza en voladizo con una fuerza horizontal en el extremo libre se ha empleado en las refs. 4.34 y 4.35; en todos los casos la fuerza transversal Q se aplica cíclicamente mientras la normal P se mantiene constante, cambiando su intensidad de un ensayo a otro para determinar cómo influye en el comportamiento de la columna.

Los incrementos de fuerza axial (que se expresa en general en la forma adimensional  $P/P_y$ ) producen siempre un efecto desfavorable en la respuesta de la columna; si se evitan los desplazamientos laterales, la falla se inicia siempre por pandeo local de los patines, que crece en ciclos sucesivos de carga y se extiende eventualmente al alma; la combinación de las dos formas de pandeo local ocasiona el colapso del miembro, precedido por un retorcimiento alrededor del eje longitudinal.

Los resultados obtenidos en la ref. 431 se resumen en la Fig. 4.18, en la que se muestra la relación entre las amplitudes de las deflexiones y el número de ciclos de carga que resiste la columna hasta la fractura, para dos valores de  $P/P_y$ ; cuando la fuerza axial crece disminuyen las amplitudes de las deflexiones y el número de ciclos que produce la falla.

En la ref. 434 se muestra que la capacidad de rotación disminuye cuando aumentan las relaciones ancho/grueso de patines y alma, o cuando crece la fuerza axial mientras se conservan fijas esas relaciones.

Como los estudios sobre columnas sometidas a cargas cíclicas en el intervalo inelástico distan mucho de ser completas, y no se conoce la influencia de su comportamiento en la respuesta de entrepisos de marcos rígidos, el diseño de éstos se hace, como ya se ha mencionado, de manera que las articulaciones plásticas se formen en las vigas mientras que las columnas se conservan básicamente en el intervalo elástico hasta el colapso. *(la única excepción la constituyen las articulaciones plásticas en sus bases)*; Sin embargo, la respuesta real de una estructura sometida a la acción simultánea de cargas gravitacionales y solicitaciones sísmicas es tan compleja que es imposible asegurar que durante temblores intensos no se formarán articulaciones plásticas en algunas columnas, aunque al hacer el diseño se haya tratado de evitarlas; varios son los factores que pueden ocasionar el comportamiento mencionado:

1. El diseño se hace siempre con las dimensiones de las secciones tabuladas en los manuales y tomando como base el esfuerzo de fluencia nominal del acero, y en los perfiles reales tanto éste como aquellas difieren, a veces sustancialmente, de los valores teóricos; como una consecuencia, las resistencias reales pueden ser bastante

diferencias de las calculadas, y la combinación de un aumento de resistencia en una trabe con una disminución en la columna en que se apoya puede hacer que la articulación que teóricamente debería formarse en la primera aparezca en realidad en la — segunda.

2. En el análisis y el diseño no suelen tenerse en cuenta las aceleraciones — vorticales de las masas del edificio, las que incrementan las fuerzas axiales en — las columnas, con respecto a las calculadas, y hacen que disminuya su capacidad para resistir flexión.

3. Los efectos de los modos superiores de vibración, que suelen despreciarse, pueden también hacer que se formen articulaciones plásticas en algunas columnas.

Los factores mencionados son tan complejos y las <sup>></sup>incertidumbres ligadas con ellos tan grandes que no se puede tenerlos en cuenta explícitamente en el diseño, por lo que es importante reconocer la posibilidad de que se formen articulaciones plásticas en las columnas y prever el comportamiento correspondiente.

En la ref. 4.36 se reportan los resultados obtenidos estudiando experimentalmente seis subconjuntos formados por una columna y las dos vigas que conectan en ella, semejantes a los de las refs. 4.11, 4.12 y 4.37, sometidos a compresión constante y fuerzas — horizontales cíclicas, cuyas vigas se sobrediseñaron deliberadamente para obligar a que las articulaciones plásticas se formasen en los extremos de las columnas; éstas se flexionan alrededor del eje de mayor momento de inercia en cuatro de los subconjuntos y del de menor en los otros dos. Tomando como base el número limitado de — pruebas realizadas, se concluyó que puede admitirse que se formen articulaciones — plásticas en las columnas en las que  $P/P_y$  no excede de 0.5, ya que tienen un comportamiento satisfactorio, gracias en gran parte al endurecimiento por deformación, — pero que deben evitarse cuando la fuerza axial excede de la mitad de  $P_y$ , pues se — observó una disminución drástica de resistencia en especímenes con  $P/P_y$  de 0.6 y — 0.8.

En la ref. 4.10 se llega a conclusiones semejantes en dos marcos, en uno de los cuales las columnas se flexionan alrededor del eje  $x$  mientras que en el otro el eje de flexión fué el  $y$ ; las relaciones  $P/P_y$  fueron 0.20 y 0.41, respectivamente.

En todas las columnas de las estructuras estudiadas en las refs. 4.10, 4.36 se empleó una sección  $W8x48$ , que tiene relaciones ancho/grueso de 14.4 en los patines y 16.3 en el alma; la esbeltez  $L/r_y$  de las columnas de la ref. 4.36 fué mucho menor que la <sup>máxima</sup> admisible para diseño plástico bajo carga estática, pero la de las columnas del marco de la ref. 4.10 flexionadas alrededor de  $x$  fué de 52, valor no muy alejado del máximo admisible en secciones H de acero A36 bajo momento variable producido por carga estática, que es 63.2. Aunque la información reportada es limitada, parece indicar que las columnas con relaciones de esbeltez usuales en edificios, cuyos patines y alma cumplen las relaciones ancho/grueso especificadas para diseño plástico, deben tener un comportamiento adecuado en marcos sometidos a efectos sísmicos, e incluso admitir la formación y rotación de articulaciones plásticas, siempre que la fuerza de compresión no exceda de alrededor del cincuenta por ciento de  $P_y$ .

4.4.3 CONEXIONES. Las conexiones transmiten los elementos mecánicos, momentos flexionantes y fuerzas cortantes y normales, de las vigas a las columnas y viceversa, así como las fuerzas de las diagonales de contraventeo del marco propiamente dicho, con lo que se logra que todos los elementos de la estructura trabajen en conjunto. En este capítulo se considera únicamente el caso en que los marcos están provistos de juntas rígidas entre vigas y columnas, capaces de transmitir de unas a otras los elementos mecánicos íntegros que hay en ellas, de manera que los únicos desplazamientos lineales o angulares relativos entre sus extremos, son los debidos a las deformaciones de la conexión.

En la Fig. 4.19 se muestran tres tipos de conexiones viga-columna que se emplean comúnmente en marcos de edificios, correspondientes al nivel superior, a una columna lateral y a una interior.



Aunque casi todos los estudios que se han realizado hasta ahora corresponden a marcos planos con las vigas unidas a los patines de las columnas (se ha efectuado también un número reducido de pruebas de laboratorio con especímenes en los que llegan al alma), en estructuras reales casi siempre hay tres o cuatro vigas en cada conexión, que llegan a los patines y a los dos lados del alma y que forman parte de los dos marcos planos que se cruzan en la columna.

Si la columna pasa corrida a través de la junta, que es lo más común en marcos de edificios, el diseño de la conexión consiste fundamentalmente en:

1. Proyecto de los <sup>medios de unión</sup> entre traveses y columna para transmitir a ésta los elementos mecánicos que hay en las secciones extremas de cada una de aquéllas, utilizando soldadura o pernos de alta resistencia (los remaches no se usan en estructuras modernas); en juntas soldadas la unión puede realizarse en forma directa o por medio de placas soldadas a los patines, ángulos en el alma, etc.

2. Revisión de la columna para determinar si su resistencia y rigidez son adecuadas para soportar los elementos mecánicos que le transmiten las vigas.

3. Diseño,  
Von su caso, de los refuerzos necesarios (atiesadores, placas dobladas al alma, etc.).

El diseño de conexiones realizado de acuerdo con la práctica norteamericana — (refs 4.6 y 4.6) se basa en los resultados reportados en la ref. 4.38, en la que se determinan los factores que deben tenerse en cuenta, y la manera de satisfacerlos, para lograr un comportamiento satisfactorio de conexiones viga-columna de marcos rígidos con carga estática, diseñados plásticamente.

Se ensayaron conexiones de dos tipos, unas con dos vigas, soldadas a los patines de la columna, y otras con cuatro, que llegan a los patines y al alma. Las vigas se soldaron directamente a la columna en todos los casos, por que estas conexiones tienen ciertas ventajas económicas y funcionales y, además, al suprimir las placas en los patines y las ménsulas de asiento se eliminan algunas variables que dificultarían la determinación de esfuerzos y deformaciones en la zona de la conexión. Sin embargo, las fórmulas desarrolladas pueden utilizarse también cuando las fuerzas en los patines se transmiten a la columna por medio de placas.

Las vigas fueron iguales en todos los especímenes, trece en total, mientras que se variaron los perfiles de las columnas para simular las condiciones existentes en los niveles superiores, intermedios e inferiores; ~~de diez~~ diez especímenes estuvieron formados por un tramo de columna y dos vigas soldadas a sus patines, y 6 algunos de ellos se reforzaron con atisadores horizontales colocados entre los patines de las vigas o con placas verticales adosadas al alma de la columna, o paralelas a ella, mientras que en otros no se colocó ningún refuerzo. Las cargas se aplicaron, en todos los casos, como se muestra en la Fig. 4.20, y se incrementaron lentamente hasta la falla.

Tres de los especímenes se hicieron con cuatro vigas, dos conectadas a uno y otro lado del alma de la columna, pero cada uno de ellos idéntico en todo lo demás a uno de los del primer grupo, pues su objeto fué determinar la influencia de las vigas que llegan al alma; se encontró que las juntas del segundo tipo son más rígidas y resistentes que las del primero.

La compresión axial tuvo poca influencia en el comportamiento de las conexiones, las columnas no mostraron ningún indicio particular de falla bajo cargas de 1.65 veces la de trabajo, ni tampoco cuando al final de cada prueba se aumentaron al doble de las de trabajo, conservando al mismo tiempo las fuerzas finales en las vigas (las cargas de trabajo correspondieron a un esfuerzo axial medio de alrededor de  $1000 \text{ Kg/cm}^2$ ; el acero empleado fué ASTM A7, con un límite de fluencia teórico de  $2520 \text{ Kg/cm}^2$ ).

Una conexión es satisfactoria cuando puede desarrollar el momento plástico de las vigas mientras obra sobre la columna la compresión producida por las cargas correspondientes y tiene, además, capacidad de rotación suficiente para que se forme una segunda articulación plástica en la zona central de las vigas sin que disminuya su resistencia, o resistencia adecuada para permitir en la primera articulación las rotaciones necesarias para que aparezca la segunda.

Para determinar si el comportamiento es satisfactorio deben investigarse los puntos siguientes:

1. Resistencia de las regiones de la columna adyacentes a los patines en tensión y compresión de las vigas, cuando no se colocan atiesadores.
2. Aumento de la resistencia de la conexión debido a la presencia de atiesadores.
3. Posibilidad de falla de la columna ocasionada por una combinación de esfuerzos normales y cortantes.
4. Efecto sobre el comportamiento de la conexión del par de vigas ligadas al alma de la columna.
5. Rotación requerida en las conexiones y capacidad de giro de las mismas.

Del estudio de los resultados experimentales se deduce que puede despreciarse el efecto de la carga axial en la columna, y que se obtienen resultados conservadores analizando y diseñando las conexiones de cuatro vigas como si no existiesen las que llegan por alma, pues éstas proporcionan una acción atiesadora que refuerza la conexión más que lo que la debilitan los esfuerzos triaxiales que se desarrollan en ella.

El punto 5 se ha investigado analítica y experimentalmente, y aunque la rotación requerida varía con la geometría de la estructura y las condiciones de carga, se ha calculado una rotación tipo, mayor que la necesaria en la mayoría de los casos; todas las juntas ensayadas admiten rotaciones más grandes, bajo momento prácticamente constante. Además, si se le dá a la conexión la resistencia adecuada, la rotación necesaria para la formación del mecanismo de colapso se presenta en el extremo de la viga adyacente a ella.

En la Fig. 4.21a se muestran esquemáticamente los momentos y fuerzas existentes en una junta interior de un marco con cargas verticales, y en la Fig. 4.21b se sustituyen los efectos que ocasiona una de las vigas por las fuerzas que aplican sus patines a la columna; se desprecian las fuerzas que actúan en el alma, cuya importancia es secundaria.

Las fuerzas que transmiten los patines a la columna se reparten en un área cada vez mayor, de manera que la intensidad de los esfuerzos disminuye al aumentar la distancia a la cara exterior; puede considerarse que los esfuerzos normales se distribuyen como se muestra en la Fig. 4.21 b, de manera que en la sección donde termina la curva de unión entre el patín y el alma de la columna cada una de las fuerzas es resistida por una porción del alma de longitud  $t_b + 5k_c$ , donde  $t_b$  es el grueso del patín de la viga y  $k_c$  la distancia del exterior de la columna a la sección definida arriba.

Si el producto del esfuerzo de fluencia por el área  $w(t_b + 5k_c)$ , donde  $w$  es el grueso del alma de la columna, es menor que la fuerza  $A_f \sigma_y$  que transmite uno de los patines de la viga cuando se plastifica su sección extrema ( $A_f$  es el área del patín), la columna fluye plásticamente en tensión o compresión frente a los patines de la viga; además, pueden presentarse fallas prematuras por pandeo del alma en la zona comprimida o por fractura de la soldadura del patín en tensión, como se muestra en la Fig. 4.22, en la que se ha dibujado la columna deformada, exagerando, para mayor claridad, la magnitud de las deformaciones.

Para evitar el flujo plástico del alma de la columna frente a cualquiera de los patines de la viga y la posible fractura en la zona de tensión, debe satisfacerse la condición

$$\sigma_y w (t_b + 5k_c) \geq A_f \sigma_y \quad (12)$$

de manera que desde este punto de vista no hacen falta atisadores si

$$w \geq A_f / (t_b + 5k_c) \quad (13)$$

Si las vigas y la columna están hechas de aceros diferentes, sus esfuerzos de fluencia se conservan al pasar de la ec. (12) a la (13).

Además, para evitar el pandeo de la zona comprimida del alma debe cumplirse también la condición expresada por la fórmula (14), ref. 4.15:

$$w \geq d_c \sqrt{\sigma_y} / 150 \quad (14)$$

de es el peralte del alma de la columna, medido entre los bordes de las curvas de transición.

La falla más común frente al patín de tensión suele producirse como se describe a continuación: el patín de la columna está compuesto por dos placas que pueden considerarse empotradas en tres de sus bordes, uno en contacto con el alma y dos normales a ella, a una distancia que se determina experimentalmente, y libre a lo largo del otro, cargadas con la fuerza existente en el patín de la viga, que permanece más o menos uniformemente repartida hasta que las placas alcanzan su resistencia última; cuando esto sucede los bordes exteriores de los patines se curvan hacia fuera, causando una deformación excesiva en la parte central de la soldadura, en la parte central del patín de la columna adyacente a ella y en su unión con el alma, y la falla se presenta eventualmente por agrietamiento de alguna de esas regiones, generalmente la soldadura, cuando se agota su capacidad de fluir plásticamente y no puede seguir la deformación de los patines.

La resistencia total del patín de la columna es aproximadamente igual a la suma de las resistencias de las dos placas y la parte central, rígida, de anchura  $m$  (Fig. 4.22), adyacente al alma, que admite esfuerzos de intensidad  $\sigma_y$ ; teniendo esto en cuenta y haciendo algunas hipótesis conservadoras, se obtiene una expresión con la que se calcula el grueso mínimo del patín de la columna para el que no se necesitan atisadores:

$$t_c = 0.4 \sqrt{A_f} \quad (15)$$

El factor 0.4 se ha obtenido para secciones H laminadas, y puede requerir modificación cuando la ec. (15) se aplique a perfiles hechos con tres placas soldadas.

En resumen, no se necesitan atisadores frente a los patines comprimidos de -

las vigas si se satisfacen simultáneamente las ecuaciones (13) y (14), ni frente a los que están en tensión si se cumple la condición (13) y el grueso del patín de la columna es igual o mayor que el dado por la ec. (15); en caso contrario deben colocarse atiesadores de las dimensiones necesarias para que su resistencia, sumada a la de la columna, iguale a la fuerza aplicada por la viga.

Cuando los momentos en las dos vigas de una conexión interior son de signos contrarios y de magnitudes considerablemente diferentes, o cuando son del mismo signo, como sucede en los niveles inferiores de edificios sometidos a efectos sísmicos, aparecen esfuerzos cortantes elevados en el tablero de alma de la columna comprendido entre los patines de las vigas, que pueden hacer que sea necesario reforzarlo.

En la Fig. 4.23 a se muestran los momentos y fuerzas cortantes y normales que actúan en una conexión interior típica, y en la Fig. 4.23 b se ha dibujado el diagrama de cuerpo libre del atiesador superior; las fuerzas horizontales que obran sobre él son la fuerza cortante en la columna superior,  $V_{col}$ , las que ejercen los patines de las vigas,  $T_b$  y  $T_c$ , que son aproximadamente iguales a los momentos respectivos divididos entre el peralte, y la fuerza cortante en el alma,  $\tau_w d_c$ , que debe resistir a las anteriores.

Por consiguiente,

$$\tau_w d_c = \frac{M_b}{d_b} + \frac{M_c}{d_b} - V_{col}$$

Haciendo  $\tau = \tau_y = \sigma_y / \sqrt{3}$  y despejando  $w$  se obtiene el grueso del alma necesario para resistir las fuerzas cortantes:

$$w = \frac{\sqrt{3}}{\sigma_y d_c} \left( \frac{M_b + M_c}{d_b} - V_{col} \right) \quad (16)$$

Cuando el grueso del alma de la columna es menor que el calculado con la ec. (16), debe reforzarse por medio de placas adosadas o paralelas a ella o con atiesadores en diagonal.

Si la columna es extrema, los momentos  $M_b$  y  $M_c$  se reducen a uno sólo.

En el Comentario de la ref. 4.15 se recomienda que el grueso mínimo del alma para el que todavía no se requiere refuerzo se calcule con la ecuación

$$w = \frac{\sqrt{3}}{G_y} \frac{\Delta M}{0.95 d_b \times 0.95 d_c} \quad (17)$$

Se obtienen espesores 20 a 30 por ciento mayores que con la ec. (16), debido a que en la ec. (17) se incluyen factores de 0.95 en los peraltos de viga y columna y no se tiene en cuenta el efecto benéfico de la fuerza cortante en la columna.

Estudios posteriores han confirmado que las reglas propuestas en las especificaciones AISC (ref. 4.15), que son las que se acaban de desarrollar (con excepción de la ec. 16, que proviene de la ref. 4.16), son adecuadas para diseñar conexiones completamente soldadas, o con soldadura en los patines y ménsula o placas verticales soldadas a la columna y ligadas al alma de la viga con pernos de alta resistencia, cargadas estáticamente; en la ref. 4.39, por ejemplo, se comprueba que las conexiones diseñadas así pueden utilizarse en diseño plástico, pues permiten que se alcance la carga plástica límite de las vigas y tienen rigidez elástica adecuada y capacidad de rotación suficiente.

CONEXIONES VIGA-COLUMNA CARGADAS CICLICAMENTE. Para determinar el comportamiento bajo solicitaciones sísmicas de los diversos medios de unión que se utilizan en conexiones viga-columna, se han efectuado experiencias de laboratorio con vigas en voladizo ligadas en un extremo a una columna y sometidas en el otro a cargas normales a su eje, de magnitud y sentido variables, aplicadas cíclicamente; las uniones se han hecho con soldadura, pernos de alta resistencia o una combinación de ambos, y en las columnas se han utilizado perfiles de resistencia suficiente para que no haya fallas en ellas; en la mayoría de los casos la viga se ha conectado a un patín de la columna, pero en algunos la conexión se ha hecho por el alma (regs. 4.39, 4.40, 4.41 y 4.42).

Se ha estudiado también el comportamiento del tablero de columna comprendido entre los patines de las vigas, en los subconjuntos sometidos a cargas cíclicas de las refs. 4.11, 4.12, 4.36 y 4.37.

En la ref. 4.9 se reportan los resultados obtenidos al ensayar 17 especímenes - de los tipos mostrados en las Figs. 4.24 y 4.25 y 6 especímenes en los que la viga se conecta al alma de la columna.

Las conexiones en que los patines y el alma de la viga están soldados directamente a la columna, los primeros con soldaduras de penetración completa y la segunda con soldaduras de filote, fueron las más satisfactorias.

Se ensayaron además ocho especímenes adicionales, todos con los patines soldados directamente a la columna, dos de ellos con el alma también soldada, cinco con el alma unida por medio de pernos de alta resistencia y uno sin ninguna liga entre el alma de la viga y la columna (refs. 4.40, 4.41); los especímenes con pernos tuvieron por objeto determinar el comportamiento de este tipo de juntas, que se emplean con alguna frecuencia en estructuras reales, y el último, en el que no se conectó el alma de la viga, tuvo un carácter exploratorio.

Las conclusiones generales que se obtienen de las experiencias descritas son:

1. Todas las conexiones, incluyendo la que no se soldó en el alma\*, desarrollaron resistencias superiores a las predichas por la teoría plástica simple, al mismo tiempo que transmitían fuerzas cortantes importantes; el endurecimiento por deformación contribuye significativamente a ese comportamiento muy satisfactorio.

2. Los diagramas histéricos carga-deflexión producidos por cargas repetidas son muy estables en todas las juntas ensayadas, y se conservan sin cambio durante ciclos consecutivos de la misma intensidad, lo que indica que las conexiones son muy

---

\* Esto difiere del comportamiento de una conexión semejante reportada en la ref. 4.39 en que, bajo carga estática exclusivamente, resistió solamente el 51% de la carga máxima predicha por la teoría plástica simple; aunque un solo espécimen no es concluyente, este resultado parece señalar que las juntas cargadas cíclicamente tienen un comportamiento superior al de otras iguales con carga estática.



confiables y absorben una cantidad definida de energía en cada ciclo, para un desplazamiento proscrito (Figs 4.26 y 4.27 ).

3. Las curvas histeróticas de los especímenes conectados con pernos de alta resistencia en patinos y alma tienen una forma característica (Fig. 4.28 ), ocasionada por el deslizamiento de las superficies de falla. También deslizaron los pernos colocados en el alma de juntas con patines soldados.

4. La capacidad de soportar cargas cíclicas severas parece asegurada en conexiones debidamente diseñadas y fabricadas; su capacidad intrínseca de absorción de energía es grande, y pueden resistir con seguridad adecuada un número de ciclos de carga aparentemente mayor que el que puede esperarse durante la vida útil de estructuras reales.

5. La calidad de la mano de obra y la inspección durante y después de la fabricación son de importancia fundamental para obtener buenos resultados; esto fue puesto en evidencia por la falla prematura de dos especímenes con soldaduras defectuosas.

COMPORTAMIENTO DE LA ZONA DE LA COLUMNA COMPRENDIDA ENTRE LAS VIGAS (" PANEL ZONE" ) ( refs. 4.41, 4.42 y 4.42 ). La falla de una junta viga-columna puede deberse a — aplastamiento o pandeo del alma de la columna, a distorsión de sus patines <sup>o</sup> flujo o pandeo por cortante del tablero de alma. Ya se han dado recomendaciones para diseño que evitan las tres primeras formas de falla; aunque deducidas para carga estática, se ha comprobado experimentalmente que las conexiones diseñadas de acuerdo con ellas tienen un comportamiento satisfactorio bajo carga cíclica. En lo que sigue se estudia la última forma de falla, y se dan recomendaciones de diseño para lograr un comportamiento correcto, desde ese punto de vista, en estructuras cargadas cíclicamente.

La respuesta de una junta viga-columna de un marco rígido sometido a la acción combinada de fuerzas verticales y horizontales queda representada adecuadamente por

un diagrama  $\Delta M - \gamma_p^{av.}$ , donde  $\gamma_p^{av.}$  es la distorsión angular media de la conexión y  $\Delta M$  es la suma de los momentos que le transmiten las dos vigas, o la única que llega a la junta en columnas extremas.

La complejidad del problema hace que sea necesario recurrir a simplificaciones para trazar la curva mencionada, conservando únicamente los parámetros más importantes: resistencia al cortante del tablero, incluyendo placas de refuerzo paralelas al alma de la columna cuando las haya, resistencia de los elementos que rodean al tablero (la resistencia a la flexión de los patines de la columna y la rigidez en el plano de las almas de las vigas juegan un papel muy importante en el comportamiento post-elástico de las juntas), efectos benéficos de las fuerzas cortantes en las columnas, que tienen sentido contrario a las producidas por los momentos de las vigas, y efecto de la carga axial en la columna.

No se ha estudiado la influencia de los elementos de unión en el comportamiento del tablero de alma, pues todos los especímenes ensayados se han fabricado con las vigas soldadas a las columnas, en alma y patines.

En las refs. 4.11 y 4.12, en las que se reportan los resultados obtenidos al ensayar ocho subconjuntos formados por una columna y dos vigas, sujetos a cargas cíclicas representativas de temblores severos, se estudia en detalle el comportamiento de los tableros de alma; en todas las conexiones se evitó el aplastamiento del alma de la columna y la distorsión de sus patines diseñándolos según las recomendaciones de las refs. 4.15 y 4.16, y colocando atiesadores horizontales cuando se necesitaron de acuerdo con ellas; el comportamiento de todas las juntas demostró, como se mencionó arriba, que las recomendaciones indicadas son válidas para estructuras cargadas cíclicamente, aunque se dedujeron originalmente para carga estática.

En dos especímenes de características representativas de los pisos superiores se revisó el tablero de alma utilizando el criterio basado en esfuerzos permisibles; de acuerdo con él no se necesitarán refuerzos en el alma, pero sí atiesadores entre los patines superiores e inferiores de las vigas. Debido a distorsiones importantes del alma de la columna por cortante inelástico no se pudieron formar las articulaciones

plásticas de las vigas, lo que hizo que la resistencia lateral de los especímenes fuese baja, pues la junta constituyó un eslabón débil. Otros dos especímenes semejantes, reforzados con placas adosadas al alma de la columna o paralelas a ella, — tuvieron un comportamiento satisfactorio.

Los otros cuatro subconjuntos, característicos de niveles bajos, en los que la rigidez y resistencia de las columnas son grandes respecto a las de las vigas, no requirieron refuerzos de ningún tipo, y las vigas pudieron desarrollar su momento plástico completo.

Las deformaciones excesivas del tablero de alma de las dos primeras conexiones ocasionaron un cambio brusco en la curvatura de la columna al nivel de los atiesadores horizontales, que produjo a su vez dobleces locales en los patines acompañados por concentraciones de esfuerzos elevadas, que llevaron a una fractura del material (Fig. 4.29 ).

En la Fig. 4.30 se reproducen diagramas histeréticos típicos de dos de las juntas; la A1 pertenece a un subconjunto representativo de un nivel superior, y la B1 a uno inferior; se ve en ellos que las conexiones son elementos muy dúctiles y con una gran reserva de resistencia por encima de la iniciación del flujo plástico, que la disminución de rigidez en el intervalo inelástico es pequeña y gradual, y que los ciclos histeréticos son muy estables, aún para distorsiones grandes. Todo esto indica que las juntas detalladas cuidadosamente, en las que se evita el aplastamiento del alma y la distorsión de los patines de la columna por medio de atiesadores adecuados, y en las que todas las soldaduras se hacen correctamente, son elementos con gran capacidad de disipación de energía.

Los experimentos muestran claramente que para desarrollar la capacidad total de carga del subconjunto es indispensable que la resistencia de la junta sea igual o mayor que la requerida para desarrollar la capacidad total de las vigas; sin embargo, conviene hacer el diseño de manera que haya cierta deformación plástica en las juntas mientras los miembros que llegan a ellas alcanzan su capacidad última, ya que es preferible que se presenten deformaciones plásticas reducidas en varios elementos estruc

turales a que se concentren en uno sólo; si las conexiones se hacen demasiado rígidas se obliga a que toda la deformación plástica se presente en las vigas, y su capacidad de rotación puede agotarse antes de tiempo, a menos que las relaciones ancho/grueso de patines y alma sean muy reducidas y las secciones soportadas lateralmente estén muy cerca unas de otras.

En las refs. 4.11 y 42 se propone la ec. 18 para determinar el esfuerzo cortante medio en el tablero de alma:

$$\tau_{av} = \frac{(\Delta M/d_b)(1-P)}{(d_c - t_c)w + 62.4 I_{cf}/d_b^2} \quad (18)$$

$P = V_{cd} \cdot d_b / \Delta M$  corresponde a la acción benéfica de la fuerza cortante en las columnas, arriba y abajo de la junta, y los dos términos del denominador representan las resistencias al cortante del tablero y a la flexión de los patines de la columna; el segundo término es generalmente pequeño comparado con el primero, pero tiene cierta importancia cuando los patines de la columna son gruesos. Se recomienda hacer  $\Delta M$  igual a la suma de los momentos plásticos resistentes de las dos vigas, para garantizar que se alcanzará la resistencia máxima de los miembros individuales antes de que haya una falla de la junta.

El efecto de la fuerza axial se tiene en cuenta, con buena precisión, calculando un esfuerzo de fluencia por cortante reducido, dado por

$$\bar{\tau}_y = \frac{\sigma_y}{\sqrt{3}} \sqrt{1 - \left(\frac{P}{P_y}\right)^2} \quad (19)$$

De acuerdo con los estudios efectuados hasta ahora, esta ecuación es aplicable para  $P/P_y \leq 0.5$ .

Si  $\tau_{av}$  es menor o igual que  $\bar{\tau}_y$  no hay flujo plástico general del tablero y no hace falta reforzarlo; en caso contrario, deben colocarse placas adosadas al alma o paralelas a ella, que resistan el exceso de fuerza cortante.

45 DISEÑO DE MARCOS RIGIDOS. No se puede determinar la cantidad de energía que deberá absorber y disipar una estructura durante el temblor más intenso a que quedará sometida durante su vida útil, ni se sabe el número de ciclos de carga y descarga que tendrá que resistir; tampoco puede conocerse <sup>con exactitud</sup> la capacidad de rotación requerida en sus articulaciones plásticas ni, en general, el factor de ductilidad que deberá desarrollar cada uno de sus miembros.

En esas condiciones, la información con que se cuenta sobre la ductilidad y capacidad de absorción de energía de elementos aislados, vigas, columnas y conexiones, o de subconjuntos o marcos completos, no puede utilizarse en forma directa en el diseño. Sin embargo, sí se pueden diseñar las estructuras de manera que su respuesta ante sollicitaciones sísmicas intensas sea la más adecuada, a la que correspondan la resistencia y capacidad de absorción de energía máximas posibles.

Para ello, cualquiera que sea el método de análisis y diseño, elástico o plástico, los perfiles de vigas y columnas deben escogerse de manera que tengan capacidades de rotación elevadas, y las juntas diseñarse para que no constituyan eslabones débiles; además, se buscará en general que las articulaciones plásticas ligadas con el mecanismo de colapso se formen en las vigas (con excepción de las que aparecen en las bases de las columnas), aunque se tomarán las medidas necesarias para que los extremos de las columnas puedan admitir rotaciones plásticas importantes sin que disminuya su resistencia.

Así, en estructuras en zonas sísmicas no se utilizarán, por ejemplo, trabes armadas aporaltadas formadas por placas delgadas, aunque desde un punto de vista elástico sean muy eficientes.

En todos los casos deben calcularse los desplazamientos relativos de entrepiso producidos por las sollicitaciones de trabajo y la resistencia máxima de la estructura, para saber si los primeros no ocasionar daños excesivos en elementos no estructurales y conocer el coeficiente de seguridad respecto al colapso.

Una manera ~~más~~ conveniente de estudiar el comportamiento de una estructura bajo cargas de trabajo y cerca del colapso es utilizando un método elasto-plástico para determinar las curvas completas fuerza horizontal-desplazamiento correspondientes a los perfiles obtenidos en un diseño preliminar. Se cuenta con varios programas de computadora, algunos muy completos, para resolver el problema; sin embargo, hasta la fecha se han utilizado principalmente procedimientos simplificados, en los que la estructura se descompone en varios subconjuntos sencillos y relativamente fáciles de analizar, y se obtiene su respuesta como la suma de las de esos subconjuntos (refs. 4.43 a 4.45 ).

El método aproximado que más se ha utilizado, y que tiene probablemente más ventajas, es el de las refs. 4.44 y 4.45, con el que se determinan las curvas fuerza horizontal-desplazamiento lateral de entresijos aislados de marcos rígidos; para ello se separa del resto de la estructura el entresijo que se desea estudiar, sustituyendo las columnas superiores por sus acciones sobre los nudos, se descompone en una serie de subconjuntos, formados por una columna y la viga o vigas que llegan a ella, se obtiene la curva fuerza horizontal-desplazamiento de cada subconjunto y, finalmente, se superponen para determinar la del entresijo completo.

En la forma en que <sup>suele</sup> completarse, el método descrito subestima el efecto PA, pues en el cálculo de los desplazamientos laterales no se tienen en cuenta las deformaciones de las juntas; no es difícil incluirlas, sin embargo, ya sea efectuando un estudio preciso (ref. 4.46) o incrementando los desplazamientos  $\Delta$  calculados en forma usual en un cierto porcentaje, que depende de la rigidez al cortante de las juntas.

Si en el diseño de vigas, columnas y conexiones, se tienen en cuenta los aspectos discutidos en las secciones anteriores, en lo que se refieren a relaciones ancho/grueso, contraventeo lateral, refuerzo de las conexiones, etc, el comportamiento bajo sollicitaciones sísmicas de los marcos diseñados siguiendo este camino es satisfactorio, como lo demuestran los resultados experimentales reportados.

En las refs. 4.10 a 4.12, 4.26, 4.27, se comprueba que los subconjuntos y marcos completos diseñados de acuerdo con las normas AISC para diseño plástico, y hechos con juntas

viga-columna totalmente soldadas, son sumamente dúctiles y pueden admitir deformaciones inelásticas muy importantes cuando están sometidos a desplazamientos laterales repetidos y de sentido variable; además, su resistencia máxima bajo cargas verticales constantes y horizontales cíclicas excede considerablemente la que tienen -- cuando las fuerzas horizontales crecen monotónicamente, lo que se debe principalmente al endurecimiento por deformación y al efecto  $P\Delta$  (ref. 447). Por ejemplo, tres de los marcos de la ref. 448 experimentaron deformaciones inelásticas 14 veces mayores -- que las producidas por las cargas de trabajo, que corresponden a un índice nominal de desplazamiento ("nominal drift index") de 0.043. En la ref. 449 se recomienda que el diseño se haga de manera que aún bajo temblores extremos los índices de desplazamiento ("story drifts") permanezcan por debajo de 0.03, para evitar problemas de inestabilidad producidos por el efecto  $P\Delta$ ; para ello se sugiere que tanto las vigas -- como las columnas que concurren en cada nudo sean capaces de resistir el momento -- total que hay en él aumentado en 0.03 Ph, donde P es la fuerza de compresión en la -- columna y h su altura, y se recomienda que se eviten relaciones  $P/R_y$  demasiado altas.

Los ciclos histeréticos carga lateral-desplazamiento son sumamente reproducibles, aún para desplazamientos mucho mayores que los que corresponden a la carga -- máxima.

Es una práctica común limitar los desplazamientos de entrepiso, bajo condiciones de servicio, a valores comprendidos entre 0.0025 y 0.003h, que se pueden incrementar en 50 por ciento, aproximadamente, cuando en los desplazamientos calculados se incluyen las deformaciones de las juntas; los desplazamientos reales suelen ser menores, pues en los cálculos no se incluye generalmente el efecto rigidizador de elementos -- no estructurales como cubos de escaleras, muros divisorios, etc, ni la influencia de las losas u otros sistemas de piso.

Cuando el piso es una losa de concreto u otro sistema rígido y resistente, -- conviene diseñarlo y construirlo para que trabaje en conjunto con las vigas; se -- logra así que aumente la rigidez del sistema y disminuyan los desplazamientos laterales, al mismo tiempo que crece la resistencia de las vigas, cuando menos en algu-

nas secciones.

Al reconocer el trabajo de conjunto de los trabos y el sistema de piso se obtienen estructuras más económicas y se llega a una descripción más realista de su comportamiento; por ejemplo, cambia la posición de algunas articulaciones plásticas, que pueden incluso formarse en las columnas en vez de en las vigas, como parecería si se tomase en cuenta únicamente la resistencia y rigidez de los elementos de acero (ref. 4.48).

**4.6 CONTROL DE DESPLAZAMIENTOS. ("DRIFT CONTROL").** Cualquier control razonable de los desplazamientos de entrepiso evita la falla por inestabilidad de conjunto, aún en el intervalo inelástico, al limitar la intensidad de los momentos  $P\Delta$ ; sin embargo, suele necesitarse un control más estricto para asegurar la integridad de las conexiones y minimizar los daños no estructurales. La conservación de los desplazamientos laterales máximos por debajo de ciertos límites es, pues, esencial para lograr un comportamiento adecuado de cualquier edificio, y al efectuar el diseño debe tenerse en cuenta que la manera en que se controlan los desplazamientos es fundamental para obtener soluciones económicas y eficientes estructuralmente.

Los desplazamientos laterales de entrepiso son producidos por ~~varios~~<sup>cinco</sup> factores principales:

1. Deformación, por flexión y cortante, de las columnas (Fig. 4.31a).
2. Rotación de los nudos, producida por las deformaciones elásticas o inelásticas de las vigas y de los medios de unión entre ellas y las columnas (Fig. 4.31b).
3. Distorsiones del tablero de las juntas (Fig. 4.31c).
4. Flexión de conjunto de la estructura, como un resultado de los cambios de longitud de las columnas.
5. Rotación del edificio como un conjunto.

En el cálculo de los desplazamientos debe incluirse el efecto  $P\Delta$ , tanto bajo condiciones de trabajo como cerca del colapso.

En la Fig. 4.32, tomada de la ref. 4.37, se muestran los desplazamientos totales



de las columnas de dos subconjuntos, y se indican las contribuciones de los tres primeros factores al desplazamiento (el cambio de longitud de la columna no influye en las deformaciones de los subconjuntos ensayados en la referencia mencionada). Las contribuciones  $\Delta_c$ , producidas por la deformación de las columnas, son muy pequeñas porque los especímenes ensayados se diseñaron de manera que las columnas se conservasen en el intervalo elástico durante todo el proceso de carga; en A2, que corresponde a un nivel superior y cuya conexión se diseñó elásticamente, predominan los desplazamientos ocasionados por la deformación de la junta, mientras que en B2, tomado de un nivel inferior, en el que el grueso del alma de la columna es mucho mayor, los desplazamientos más importantes son los producidos por las deformaciones de las vigas.

En los especímenes ensayados en la ref. 4.12 se manifiesta la misma tendencia que en B2, lo que indica que la importancia de los desplazamientos ocasionados por las deformaciones de las juntas disminuye drásticamente cuando se diseñan de manera que se satisfagan las condiciones expresadas por las ecs. 18 y 19.

Si las juntas no están atiesadas correctamente se producirán deformaciones del alma y los patines de las columnas, frente a los patines de las vigas, que sumadas a las deformaciones por cortante harán que aumenten todavía más los desplazamientos de los entrepisos.

Para controlar económicamente los desplazamientos laterales debe estudiarse cual de las componentes puede disminuirse más con la menor cantidad de material <sup>y mano de obra</sup> adicional. *Como los desplazamientos laterales son generalmente casi proporcionales a los cocientes*  $\sqrt{\dots}$  más eficiente reducir los desplazamientos debidos a las deformaciones de las vigas que los ocasionados por las columnas, pero al hacerlo debe tenerse en cuenta que el aumento de resistencia de las vigas puede ser causa de que cuando se exceda la resistencia elástica de la estructura las articulaciones plásticas se formen en las columnas, lo que no suele ser conveniente.

Si se necesita reforzar los tableros de alma de las juntas para reducir su deformación, puede ser económico utilizar columnas más pesadas, con almas más

El de las vigas, suele ser

gruesas, colocar placas de refuerzo.

Una de las variables más importantes en el control de los desplazamientos laterales es el número de columnas que resisten la fuerza cortante total en cada entrepiso; si se aumentan las columnas aumentan también las juntas, pero cada una de ellas requiere menos soldadura, pues los patines de las vigas resultan más delgados; además, al aumentar la cantidad de columnas se reduce la longitud de las trabes y disminuye la componente del desplazamiento debida a sus deformaciones. Estas consideraciones llevan a las estructuras tubulares, con muchas columnas, muy juntas, en el perímetro, ligadas entre sí por vigas cortas y aperaltadas, como una solución adecuada para edificios altos en zonas sísmicas.

En edificios de altura intermedia puede lograrse un control adecuado de los desplazamientos utilizando marcos contraventeados o muros de rigidez.

**4.7 CONTRAVENTEO.** Las estructuras construidas en zonas sísmicas tienen que satisfacer, entre otros, dos requisitos fundamentales: los desplazamientos relativos de entrepiso producidos por sismos de intensidad moderada no deben sobrepasar ciertos límites, y su resistencia máxima tiene que ser la necesaria para que soporten sismos de intensidad elevada sin fallar ni sufrir daños estructurales excesivos; para ello se requiere que se satisfagan dos condiciones, una de rigidez bajo cargas de trabajo y otra de resistencia y capacidad de absorción de energía,

En estructuras formadas por marcos rígidos ordinarios es difícil satisfacer los dos requisitos simultáneamente, pues si se refuerzan hasta que los desplazamientos de entrepiso bajo cargas de trabajo queden dentro de límites admisibles se obtienen resistencias mucho mayores que las necesarias.

448

La rigidez lateral aumenta de una manera económica, sobre todo en edificios de altura media, colocando contraventeos en un cierto número de marcos, compatibles con los requisitos arquitectónicos y funcionales (por ejemplo, en los marcos extremos en que haya muros y en el perímetro del área de elevadores, escaleras y baños); los marcos restantes se apoyan en los contraventeados a través de los diafragma horizontales

tales constituidos por los sistemas de piso. Conviene que los contraventosos se coloquen en toda la altura, ininterrumpidamente, y pueden estar formados por elementos en X, en K o con alguna otra configuración.

Para fines de diseño, los marcos contraventados se suelen tratar como si estuviesen formados por dos sistemas separados: un marco rígido ordinario, que soporte las cargas permanentes, y un sistema vertical de contraventeo que trabaje como una armadura y resista las cargas horizontales, al mismo tiempo que proporciona la rigidez necesaria para evitar la inestabilidad de conjunto; las vigas y columnas de las crujeas contraventadas son comunes a los dos sistemas. El contraventeo <sup>suele</sup> ~~se~~ diseñarse como una armadura vertical con articulaciones en los nudos,

que debe resistir las fuerzas horizontales más el efecto  $PA$ , así como proporcionar rigidez adecuada bajo cargas de trabajo y evitar el pandeo de conjunto cuando actúan sobre la estructura las cargas verticales factorizadas.

En la ref. 4.16 se estudia el contraventeo en X y se proporcionan fórmulas para determinar el área de las diagonales, de manera que satisfagan las condiciones mencionadas, y en la ref. 4.49 se resuelve el mismo problema para contraventeo en K; en las dos referencias se utilizan fuerzas estáticas horizontales equivalentes a las solicitaciones producidas por viento o sismo, y en ninguna de ellas se estudian efectos dinámicos.

Para determinar la respuesta sísmica de un marco contraventado por superposición de la del marco propiamente dicho y la de los elementos de contraventeo se necesita conocer el comportamiento de éstos, por lo que se han realizado experiencias de laboratorio con barras rectas sometidas a tensiones y compresiones alternadas.

En la Fig. 4.33 se describe el comportamiento de una barra de esbeltez moderada articulada en los dos extremos, con una fuerza axial que es inicialmente de tensión, cambia a compresión, y vuelve a ser finalmente de tensión; para trazar la curva se supone que la barra se pandea cuando la compresión alcanza el valor predicho por la teoría de Euler,  $P_{cr}$ , o el límite plástico,  $P_y$ .

Al aplicar una tensión creciente la barra se alarga elásticamente desde el origen hasta 1, y bajo carga  $P_2$  constante hasta 2; después de este punto empieza a disminuir la tensión axial, que llega a cero y se convierte en compresión. El miembro se conserva recto hasta que se pandea elásticamente en 3, y se deforma lateralmente hasta que aparece una articulación plástica en el centro, producida por la acción combinada de la fuerza normal  $P$  y el momento  $PS$ . Los acortamientos posteriores ocasionan aumentos de los desplazamientos laterales y disminución de la fuerza axial necesaria para que la articulación siga girando, curva 4-5; en 5 cambia la dirección de la deformación axial, y el miembro actúa elásticamente hasta llegar a 6, donde la fuerza axial y el momento se anulan, pero subsiste una deformación axial residual debida a que el eje no recupera la forma recta inicial. Al volver a aplicar fuerzas de tensión aumentan los momentos en la barra hasta que se forma de nuevo la articulación plástica, punto 7, ahora en flexo-tensión, que gira mientras la pieza continúa enderezándose, y crece la tensión hasta regresar eventualmente al punto 2.

El comportamiento determinado experimentalmente concuerda bastante bien con el que se acaba de describir, como lo demuestran las curvas de la Fig. 4.34, que se han obtenido con una barra sometida a ciclos consecutivos de fuerzas alternadas de tensión y compresión, en los que se mantienen constantes las deformaciones. <sup>4.51</sup>

Las experiencias realizadas con miembros aislados indican que la fuerza de compresión máxima (carga de pandeo) disminuye al aumentar el número de ciclos, que los miembros cortos tienen mayor capacidad de absorción de energía que los largos y que la respuesta histéresis es casi igual a la estática. <sup>4.51 & 4.53</sup>

En la ref. 4.54 se demuestra que los resultados predichos analíticamente y los obtenidos experimentalmente concuerdan bastante bien en los primeros ciclos de carga, excepto en las regiones en que las fuerzas de tensión y compresión son máximas; además, la precisión de los métodos analíticos disminuye en ciclos subsiguientes, a causa, aparentemente, de las dificultades para tomar en cuenta los cambios de longitud

del espósimon; esto hace pensar que tal vez sea conveniente desarrollar relaciones fuerza-deformación empíricas.

En este campo se necesita considerable trabajo experimental y analítico adicional.

Se han efectuado también estudios sobre contraventeos compuestos por dos diagonales cruzadas y sobre marcos de un piso y una cruzía provistos de contravientos de distintos tipos, con carga vertical constante y horizontal cíclica, para comparar su respuesta con la de marcos similares no contraventeados y determinar las soluciones más eficientes; las relaciones carga-deformación propuestas para contraventeos sencillos pueden aplicarse a los dobles, o a marcos contraventeados, aplicando el método de superposición.

Finalmente, se cuenta con algunas investigaciones analíticas en las que se ha determinado la respuesta elasto-plástica de marcos contraventeados de varios pisos, sometidos a registros de temblores reales; se ha encontrado que en general experimentan desplazamientos menores y menos actividad plástica en vigas y columnas que los no contraventeados, y que las diagonales diseñadas con los métodos recomendados en los códigos resultan demasiado esbeltas y fluyen antes que las vigas, de manera que los marcos contraventeados diseñados en forma usual son muy eficientes para resistir las fuerzas estáticas especificadas en los códigos, pero tienen una capacidad de absorción de energía reducida. Para contrarrestar parcialmente esas desventajas es frecuente que se especifique que las diagonales se diseñen con fuerzas mayores que las calculadas.

Para que los marcos contraventeados tengan capacidad de absorción de energía adecuada debe hacerse un diseño balanceado, que produzca estructuras en las que contraventeos y vigas entren simultáneamente en el intervalo inelástico, con lo que se obtienen las ventajas del contraventoo, mayor rigidez y resistencia con costo reducido, mientras se conserva una capacidad de absorción de energía elevada. Al efectuar el diseño de esta manera los elementos de contraventoo resultan mucho más robustos que los que se obtienen al aplicar las reglas de las refs. 4.45, 4.46 y 4.49.

Para incrementar la capacidad de absorción de energía del sistema se ha propuesto introducir excentricidades calculadas en las uniones de las diagonales, de manera que entre ellas y las columnas queden tramos de viga libres, sometidos predominantemente a flexión, en los que se forman articulaciones plásticas. Todavía no se ha utilizado este método en estructuras reales, <sup>aparentemente,</sup> pero se han efectuado estudios analíticos bastante completos y algunos experimentales, que indican que el concepto es prometedor. 40,462

4.8 DIAFRAGMAS. En algunos edificios construidos en los últimos tiempos en el Reino Unido y en los U.S.A. se ha utilizado la lámina de acero acanalada en fachadas y muros divisorios interiores. Este tipo de construcción presenta ventajas estéticas, de ligereza, economía y facilidad de construcción.

Al menos que se tomen precauciones especiales para desligarlos, la deformación de los cancelos de lámina durante un temblor debe ser compatible con la de la estructura, de manera que reciban una parte de las solicitaciones sísmicas proporcional a su rigidez.

Como la distancia entre columnas suele ser mayor que la altura de entrepiso, las láminas se colocan con las canales en posición vertical, para que resistan las fuerzas normales a su superficie, producidas por el viento, por ejemplo, trabajando en el sentido corto. La conexión con las vigas y columnas de la estructura se hace por medio de elementos perimetrales diseñados para transmitir fuerzas cortantes en el plano del tablero, mientras se reduce a un mínimo la transmisión de fuerzas verticales, para evitar el pandeo por compresión de la lámina de acero. En la Fig. 4.35 se muestra un cancel de lámina, en elevación, y un posible detalle de liga con la viga superior, que trabaja de la manera deseada.

El tablero de lámina se liga a los miembros perimetrales por medio de soldaduras de filote colocadas entre la canal y los elementos planos de la lámina, a uno y otro lado de ésta (o de un solo lado si se emplean ángulos como elementos perimetrales), y las láminas se unen entre sí con soldaduras verticales.

Para valorar la contribución de los canales de lámina a la respuesta sísmica del edificio se necesita contar con métodos para obtener su rigidez y resistencia, de manera que se puedan calcular las fuerzas sísmicas que actuarán en ellos y determinar si pueden soportarlas con un coeficiente de seguridad adecuado contra la falla; como sucede siempre en diseño sísmico, las dos propiedades deben estar adecuadamente balanceadas, para obtener los beneficios máximos sin poner en peligro la estabilidad del elemento.

Se han efectuado estudios teóricos y experimentales para determinar la rigidez y resistencia de los tableros de lámina <sup>4.64 a 4.67</sup> conalada.

La flexibilidad de un diafragma completo es la suma de las flexibilidades debidas a la distorsión de los canales de la lámina, a la deformación por cortante del diafragma y a los movimientos y deformaciones de los elementos de liga con las vigas y columnas del marco, y de las soldaduras que ligan las diferentes láminas entre sí, la falla puede presentarse por desgarramiento de la lámina en las uniones de los bordos, ruptura de las soldaduras en las juntas verticales, flujo plástico, inestabilidad de los elementos perimetrales o falla del tablero por pandeo producido por cortante.

En las refs, 4.64, 4.66 y 4.67 se estudian los distintos factores que intervienen en la flexibilidad y resistencia del conjunto y se dan fórmulas para evaluarlos, y en la ref. 4.65 se investiga el pandeo elástico por cortante y se proporcionan expresiones simplificadas para determinar la resistencia correspondiente. Este tipo de falla es importante porque representa la resistencia máxima que puede proporcionar un diafragma dado, por lo que en muchos casos puede ser conveniente diseñar los elementos de unión de las láminas entre sí y del conjunto con la estructura de manera que no fallen prematuramente, para que la resistencia del diafragma sea la correspondiente al pandeo por cortante.

En la referencia 4.68 se propone que las fuerzas sísmicas sean resistidas por los marcos, haciendo su análisis y diseño en forma ordinaria, y los canales divisorios se empleen únicamente para reducir los desplazamientos laterales a valores -

aceptables; así, la seguridad de la estructura no depende de los cancelos, pero éstos son fundamentales para que su comportamiento en condiciones de servicio sea adecuado; mas adelante, cuando el conjunto diafragma-marco se haya estudiado más a fondo, convendrá seguramente utilizar también la resistencia de los cancelos, para obtener diseños más económicos.

Calculada la rigidez de los cancelos con el método del elemento finito, en la Fig. 4.6 se determinan los desplazamientos producidos por un sistema de fuerzas horizontales en un marco de tres crujeas y veintiseis niveles, suponiendo primero que el marco las resiste en su totalidad y colocando después diafragmas hechos con lámina de tres calibres diferentes, 12, 16 y 20, en el entreje central, en toda la altura. Los diafragmas reducen los desplazamientos laterales a una fracción comprendida entre el 45 y el 65%, aproximadamente, <sup>de</sup> los del marco no rigidizado, que se mantiene prácticamente constante en toda la altura (los desplazamientos horizontales totales del nivel superior son de 10.09" en el marco, 5.89" (56%) cuando se emplea lámina del n° 20, y 5.28" (52%) y 4.74" (47%) cuando las láminas son del calibre 16 y 12, respectivamente).

4.9 OTRAS ESTRUCTURAS. El estudio de su comportamiento bajo temblores locales y las investigaciones teóricas y experimentales realizadas hasta la fecha, indican que los marcos rígidos de acero, contraventados o no, constituyen sistemas estructurales capaces de resistir las sollicitaciones producidas por sismos intensos y de disipar grandes cantidades de energía, gracias principalmente a que pueden admitir deformaciones inelásticas muy importantes sin pérdida de resistencia. Aunque algunos puntos requieren más estudios, todo parece indicar que se obtienen resistencia y ductilidad suficientes analizando los marcos con métodos elásticos o plásticos, diseñándolos de manera que la mayoría de las articulaciones plásticas asociadas con el mecanismo eventual de colapso se formen en las vigas, y cumpliendo los requisitos sobre relaciones ancho/grueso y contravento lateral que se especifican para diseño plástico de estructuras cargadas estáticamente.



Las condiciones mencionadas se pueden satisfacer sin dificultades especiales en edificios urbanos para oficinas o departamentos, pero no en otros tipos de estructuras de acero, tales como tanques elevados o chimeneas.

Los tanques elevados soportados por una estructura tridimensional formada por cuatro o más columnas ligadas entre sí con puntales horizontales y diagonales cruzadas o bobotas, que trabajan únicamente en tensión, constituyen un sistema estructural cuyo comportamiento en temblores pasados ha sido con frecuencia poco satisfactorio; la falla de una de las diagonales o de alguna de sus conexiones, generalmente en la parte superior de la torre, ocasiona una pérdida de simetría en la estructura resistente que origina momentos de torsión importantes y el colapso por flexión de las columnas que limitan el tablero; puesto que en estas estructuras es difícil obtener niveles apreciables de ductilidad, deben diseñarse para que resistan fuerzas sísmicas altas conservándose en el intervalo elástico, y las diagonales y sus uniones deben dimensionarse con coeficientes de seguridad elevados.

En chimeneas y otras torres altas autosoportadas de acero es importante evitar el pandeo de las paredes, que son generalmente de espesor relativamente pequeño. Además, como es probable que las solicitaciones producidas por temblores intensos excedan las utilizadas en el diseño, debe esperarse que partes de la estructura fluyan plásticamente, y conviene concentrar las deformaciones plásticas en elementos que no ocasionen la falla de la estructura y que, en caso necesario, sean fácilmente reemplazables. Los más convenientes son los pernos de enclaje, que deben hacerse de longitud suficiente para permitir deformaciones plásticas bajo las tensiones máximas producidas por el momento de volteo, y que se construyen de manera que puedan ser sustituidos en caso necesario, lo que se logra anclándolos en elementos especiales ahogados en el cimiento de concreto, de los que se desprenden haciéndolos girar.

4.9 FALLA FRÁGIL Y DESGARRAMIENTO LAMINAR ("LAMELLAR TEARING"). La fractura frágil es más frecuente en las estructuras soldadas que en las que se fabrican con conectores mecánicos, debido a una combinación de posibles defectos en las soldaduras, esfuerzos residuales elevados, y discontinuidad, que reduce la posibilidad de que se detenga la propagación de las grietas. Durante la fabricación y el montaje deben tomarse las medidas necesarias para reducir a un mínimo los fenómenos que pueden ocasionar comportamiento frágil, y si las condiciones son especialmente severas deben utilizarse aceros con propiedades adecuadas a bajas temperaturas.

La soldadura de perfiles laminados o de placas para transmitir fuerzas en la dirección perpendicular a su grueso (Fig. 4.36) debe hacerse con especial cuidado, ya que puede producir desgarramiento laminar del material. La resistencia del acero determinada normalmente al grueso es similar a la longitudinal o transversal, pero su capacidad de deformación en esa dirección es frecuentemente tan solo ligeramente superior a la correspondiente al límite de elasticidad.

El desgarramiento laminar se presenta en placas muy restringidas, en la superficie de contacto <sup>entre</sup> inclusiones no metálicas microscópicas y el acero que las rodea, debido a la incapacidad de éste para admitir las deformaciones en la dirección normal al grueso impuestas por la contracción de soldaduras. Puede presentarse en placas de cualquier espesor, pero es mucho más frecuente en las gruesas, porque en ellas se depositan soldaduras más grandes, que se contraen más al enfriarse.

La experiencia enseña que el desgarramiento laminar no aparece casi nunca en placas de gruesos menores de 20 a 25mm, aunque ha habido algunas excepciones (ref. 4.69). La consideración de diseño más importante consiste en reducir a un mínimo las deformaciones normales al grueso de las placas que se presentan en áreas localizadas.

En la Fig. 4.37 se muestran detalles que pueden ocasionar el fenómeno en estudio, y se dan algunas ideas referentes a cómo mejorarlos.

- Yonkalk, H.J., "Design of Earthquake-Resistant Structures - Steel Frame Structures", in Earthquake Engineering, D.L. Wiegel, editor, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J. (1970)
- Galambos, T.V., "Structural Members and Frames", Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J. (1968)
- Lee, G.C., and Galambos, T.V., "Post-Buckling Strength of Wide-Flange Beams", Journal of the Engineering Mechanics Division, Proceedings, American Society of Civil Engineers, Vol. 88, No. EM1 (1962)
- Lee, G.C., Ferrara, A.T., and Galambos, T.V., "Experiments on Braced Wide-Flange Beams", Bulletin No. 99, Welding Research Council, New York (1964)
- Lukley, A.F., Smith, P.J., Hosain, M.U., and Adams, P.F., "Experiments on Wide-Flange Beams under Moment Gradient", Bulletin No. 142, Welding Research Council, New York (1969)
- Lay, H.G., "Flange Local Buckling in Wide-Flange Shapes", Journal of the Structural Division, Proceedings, American Society of Civil Engineers, Vol. 91, No. ST6 (1965).
- Lay, H.G., and Galambos, T.V., "Inelastic Beams under Moment Gradient", J. Str. Div., Proc. ASCE, Vol. 93, No. ST1 (1967).
- Bertero, V.V., and Popov, E.P., "Effect of Large Alternating Strains of Steel Beams", J. Str. Div., Proc. ASCE, Vol. 91, No. ST1 (1965)
- Popov, E.P., and Pinkney, D.B., "Cyclic Yield Reversal in Steel Building Connections", J. Str. Div., Proc. ASCE, Vol. 95, No. ST3 (1969).
- Repenster, L.D., and Lu, L.W., "Reversed and Repeated Load Tests of Full-Scale Steel Frames", Bulletin No. 24, American Iron and Steel Institute, New York (1973).
- Krawinkler, H., Bertero, V.V., and Popov, E.P., "Inelastic Behavior of Steel Beam-to-Column Subassemblies", Report No. EERC 71-7, Earthquake Engineering Research Center, College of Engineering, University of California, Berkeley, Cal. (1971).
- Bertero, V.V., Krawinkler, H., and Popov, E.P., "Further Studies on Seismic Behavior of Steel Beam-Column Subassemblies", Report No. EERC 73-27, Earth. Eng. Res. Center, College of Engin., Univ. of California, Berkeley, Cal. (1973).
- Lay, H.G., and Galambos, T.V., "Inelastic Steel Beams under Uniform Moment", J. Str. Div., Proc. ASCE, Vol. 91, No. ST6 (1965).
- Newmark, N.H., and Rosenbluth, E., "Fundamentals of Earthquake Engineering", Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J. (1971).
- "Specification for the Design, Fabrication and Erection of Structural Steel for Buildings" and Commentary to the Specification, American Institute of Steel Construction (1969), with Supplements No. 1, 2 and 3.

- 4.16 Plastic Design in Steel - A Guide and Commentary, American Society of Civil Engineers, Manual of Engineering Practice No 41, 2<sup>nd</sup> Edition (1971)
- 4.17 Kollar, D.L., "Stability of Beam-Columns above the Elastic Limit", Proceedings ASCE, Vol. 81, Separate No 692 (1955).
- 4.18 Galambos, T.V., and Ketter, D.L., "Columns under Combined Bending and Thrust", Transactions, American Society of Civil Engineers, Vol. 126, Part. 4 (1961).
- 4.19 Galambos, T.V., Lecture 10, "Plastic Design of Multi-Storey Frames - Lecture Notes", Fritz Engineering Laboratory Report No 273.20, Lehigh University, Bethlehem, Pa (1965)
- 4.20 Ojilvo, M., and Fukumoto, Y., "Nomographs for the Solution of Beam-Columns Problems", Bulletin No 28, Welding Research Council, New York (1962)
- 4.21 Galambos, T.V., and Lay, M.G., "Studies on the Ductility of Steel Structures", J. Str. Div., Proc. ASCE, Vol. 91, No 279 (1965)
- 4.22 Galambos, T.V., Adams, P.F., and Fukumoto, Y., "Further Studies on the Lateral-Torsional Buckling of Steel Beam-Columns", Bulletin No 115, Welding Research Council, New York (1966).
- 4.23 Babu, J.F., Horne, M.R., and Heyman, J., "The Steel Skeleton", Vol. 2, Cambridge University Press, Cambridge, England (1956)
- 4.24 "Joint Committee Report on Fully Rigid Multi-Storey Welded Steel Frames", The Institution of Structural Engineers, London, England (1964)
- 4.25 "Joint Committee's Second Report on Fully Rigid Multi-Storey Welded Steel Frames", The Institution of Structural Engineers, London, England (1971).
- 4.26 Santathadaporn, S., and Chen, W.F., "Interaction Curves for Sections under Combined Biaxial Bending and Axial Forces", Bulletin No 148, Welding Research Council, New York (1970).
- 4.27 Chen, W.F., and Atsuta, T., "Interaction Equations for Biaxially Loaded Sections", J. Str. Div., Proc. ASCE, Vol. 98, No ST5 (1972)
- 4.28 Santathadaporn, S., and Chen, W.F., "Analysis of Biaxially Loaded Steel H-Columns", J. Str. Div., Proc. ASCE, Vol. 99, No ST3 (1973)
- 4.29 Tebedgo, N., and Chen, W.F., "Design Criteria for H-Columns under Biaxial Loading", J. Str. Div., Proc. ASCE, Vol 100, No ST3 (1974)
- 4.30 Springfield, J., "Design of Columns Subject to Biaxial Bending", Engineering Journal, American Institute of Steel Construction, Vol. 12, No 3 (1975)
- 4.31 Yamada, M., "Low Cycle Fatigue Fracture Limits of Various Kinds of Structural Members subjected to Alternately Repeated Plastic Bending under Axial Compression as an Evaluation Basis of Design Criteria for Seismic Capacity", Proceedings, Fourth World Conference on Earthquake Engineering, Santiago, Chile (1969).
- 4.32 Yamada, M., "Effect of Cyclic Loading on Buildings", State of Art Report No 3, Technical Committee 18, International Conference on Planning and Design of Tall Buildings, Lehigh University, Bethlehem, Pa (1972).

- Subjected to Repeated Loading", Preprints, Sixth World Conf. on Earth. Eng., New Delhi, India (1972).
- 34 Mitani, I., Kuzuno, M., and Matsui, C., "Influence of Local Buckling on Cyclic Behavior of Steel Beam-Columns", Preprints, Sixth World Conf. on Earthquake Eng., New Delhi, India (1977)
- 35 Kato, B., and Akiyama, H., "Inelastic Bar Subjected to Thrust and Cyclic Bending", J. Str. Div., Proc. ASCE, Vol. 95, No. ST1 (1967).
- 36 Popov, E.P., Bertero, V.V., and Chandramouli, S., "Hysteretic Behavior of Steel Column", Report No. EERC 75-11, Earth. Eng. Res. Center, College of Eng., Univ. of California, Berkeley, Cal. (1975).
- 37 Bertero, V.V., Popov, E.P., and Krawinkler, H., "Beam-Column Subassemblies under Repeated Loading", J. Str. Div., Proc. ASCE, Vol. 98, No. ST5 (1972)
- Graham, J.D., Sherbourne, A.N., Khabboz, R.N., and Jensen, C.D., "Welded Interior Beam-to-Column Connections", American Institute of Steel Construction (1952).
- 39 Parfitt, J., Jr, and Chen, W.F., "Tests of Welded Steel Beam-to-Column Moment Connections", J. Str. Div., Proc. ASCE, Vol. 102, No. ST1 (1976).
- 40 Popov, E.P., and Stephen, R.M., "Cyclic Loading on Full-Size Steel Connections", Report No. EERC 70-3, Earth. Eng. Res. Center, College of Eng., Univ. of California, Berkeley, Cal. (1970).
- Popov, E.P., and Bertero, V.V., "Cyclic Loading of Steel Beams and Connections", J. Str. Div., Proc. ASCE, Vol. 99, No. ST6 (1973)
- 42 Krawinkler, H., Bertero, V.V., and Popov, E.P., "Shear Behavior of Steel Frame Joints", J. Str. Div., Proc. ASCE, Vol. 101, No. ST13 (1975)
- 43 Daniels, J.H., and Lu, L.W., "The Subassembly Method of Designing Unbraced Multi-Storey Frames", Fritz Eng. Lab. Report 273.37, Lehigh University, Bethlehem, Pa. (1966)
- 44 de Bree, O., "A Modification to the Subassembly Method of Designing Unbraced Multi-Storey Frames", Engineering Journal, American Institute of Steel Construction, Vol. 6, No. 4 (1965).
- 45 Powell, G.H., and M. B. El Hafi, "Subassembly Concept for Tall Frame Analysis", J. Str. Div., Proc. ASCE, Vol. 100, No. ST8 (1974)
- 46 Beck, R., "Panel Zone Effect on the Strength and Stiffness of Steel Rigid Frames", Eng. J., AISC, Vol. 12, No. 1 (1975)
- 47 Kato, B., and Lu, L.W., "Instability Effects under Dynamic and Repeated Load" State of Art Report No. 3, Technical Committee 16, International Conference on Planning and Design of Tall Buildings, Lehigh University, Bethlehem, Pa. (1972).

- 4.48 G. Buer, O., "Antiseismic Design of Multi-story Steel Frames by Plastic Method"; Proceedings, Fourth World Conf. on Earth. Eng., Santiago, Chile. (1962)
- 4.49 "Plastic Design of Braced Multi-story Steel Frames", American Iron and Steel Institute, New York (1968)
- 4.50 Wakabayashi, M., "Frames under Strong Impulsive, Wind or Seismic Loading", State of Art Report No 6, Technical Committee No 15, International Conference on Planning and Design of Tall Buildings, Lehigh University, Bethlehem, Pa (1972)
- 4.51 Shibata, M., Nakamura, T., Yoshida, N., Morino, S., Nonaka, T., and Wakabayashi, M., "Elasto-Plastic Behavior of Steel Braces under Repeated Axial Loading", Proceedings, Fifth World Conf. on Earth. Eng., Rome, Italy (1974)
- 4.52 Kohn, L.F., and Hanson, R.D., "Inelastic Cycles of Axially Loaded Steel Members", J. Str. Div., Proc. ASCE, Vol. 102, No ST5 (1976)
- 4.53 Wakabayashi, M., Matsui, C., and Mitani, J., "Cyclic Behavior of a Restrained Steel Brace under Axial Loading", Preprints, Sixth World Conf. on Earth. Eng., New Delhi, India (1977)
- 4.54 Higginbotham, A.B., and Hanson, R.D., "Axial Hysteretic Behavior of Steel Members", J. Str. Div., Proc. ASCE, Vol. 102, No ST7 (1976)
- 4.55 Wakabayashi, M., Nakamura, T., Shibata, M., Yoshida, N., and Masuda, H., "Hysteretic Behavior of Steel Braces Subjected to Horizontal Load due to Earthquake", Preprints, Sixth World Conf. on Earth. Eng., New Delhi, India (1977)
- 4.56 Wakabayashi, M., Matsui, C., Minami, K., and Mitani, J., "Inelastic Behavior of Steel Frames Subjected to Constant Vertical and Alternating Horizontal Loads", Proceedings, Fifth World Conf. on Earth. Eng., Rome, Italy (1974)
- 4.57 Tanabashi, B., Kaneta, K., and Ishida, T., "On the Rigidity and Ductility of Steel Bracing Assemblies", Proceedings, Fifth World Conf. on Earth. Eng., Rome, Italy (1974)
- 4.58 Goel, S.C., and Hanson, R.D., "Seismic Behavior of Multistory Braced Steel Frames", J. Str. Div., Proc. ASCE, Vol. 100, No ST1 (1974)
- 4.59 Anderson, J.C., "Seismic Behavior of K-Braced Framing Systems", J. Str. Div., Proc. ASCE, Vol. 101, No ST10 (1975)
- 4.60 Yamada, M., Tsuji, B., and Nakanishi, S., "Elasto-Plastic Behavior of Braced Frames under Cyclic Horizontal Loading", Preprints, Sixth World Conf. on Earth. Eng., New Delhi, India (1977)
- 4.61 Wyllie, L.A., Jr., and Degenkolb, H.J., "Improving the Seismic Response of Braced Frames", Preprints, Sixth World Conf. on Earth. Eng., New Delhi, India (1977)

3. Kulijian, M.J., "Inelastic Cyclic Response of Split K-Braced Frames", *Proceedings, 8th World Conf. on Earth. Eng., New Delhi, India (1977)*.
4. "Uniform Building Code", 1976 Edition, International Conference of Building Officials, Whittier, Cal. (1976)
5. Bryan, E.P., "The Stressed Skin Design of Steel Buildings", *Constructo Monographs*, Crosby Lockwood Staples, London, England (1972)
6. Easley, J.T., "Buckling Formulas for Corrugated Metal Shear Diaphragms", *J. Str. Div., Proc. ASCE*, Vol. 101, No. ST7 (1975)
7. Davies, J.M., "Calculation of Steel Diaphragm Behavior", *J. Str. Div., Proc. ASCE*, Vol. 102, No. ST7 (1976)
8. El-Dakhkhni, "Shear of Light-Gage Partitions in Tall Buildings", *J. Str. Div., Proc. ASCE*, Vol. 102, No. ST7 (1976)
9. Miller, C.J., "Light Gage Steel Infill Panels in Multistory Steel Frames", *Engineering Journal*, American Institute of Steel Construction, Vol. 11, No. 2 (1974)
10. American Institute of Steel Construction, "Commentary on rigidly Restrained Welded Connections", *Engineering Journal*, American Institute of Steel Construction, Vol. 10, No. 3 (1973) (See also discussion by N.B. Jones and W.D. Hilek, *Eng. J.*, Vol. 12, No. 1 (1975)).

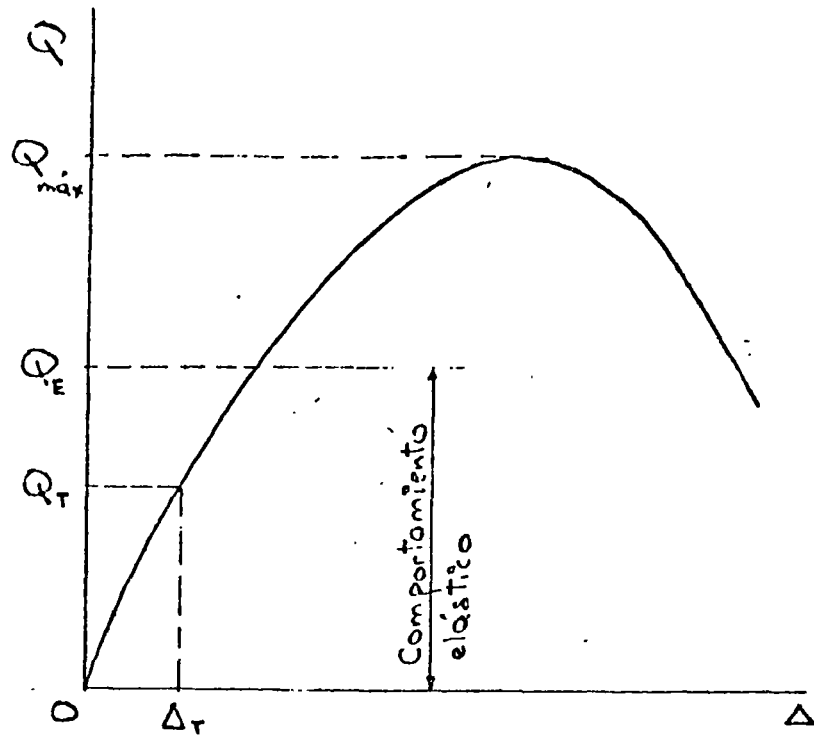


FIG. 4.1 GRÁFICA FUERZA HORIZONTAL-DESPLAZAMIENTO LATERAL ( $Q-\Delta$ ) DE UN ENTREPISO

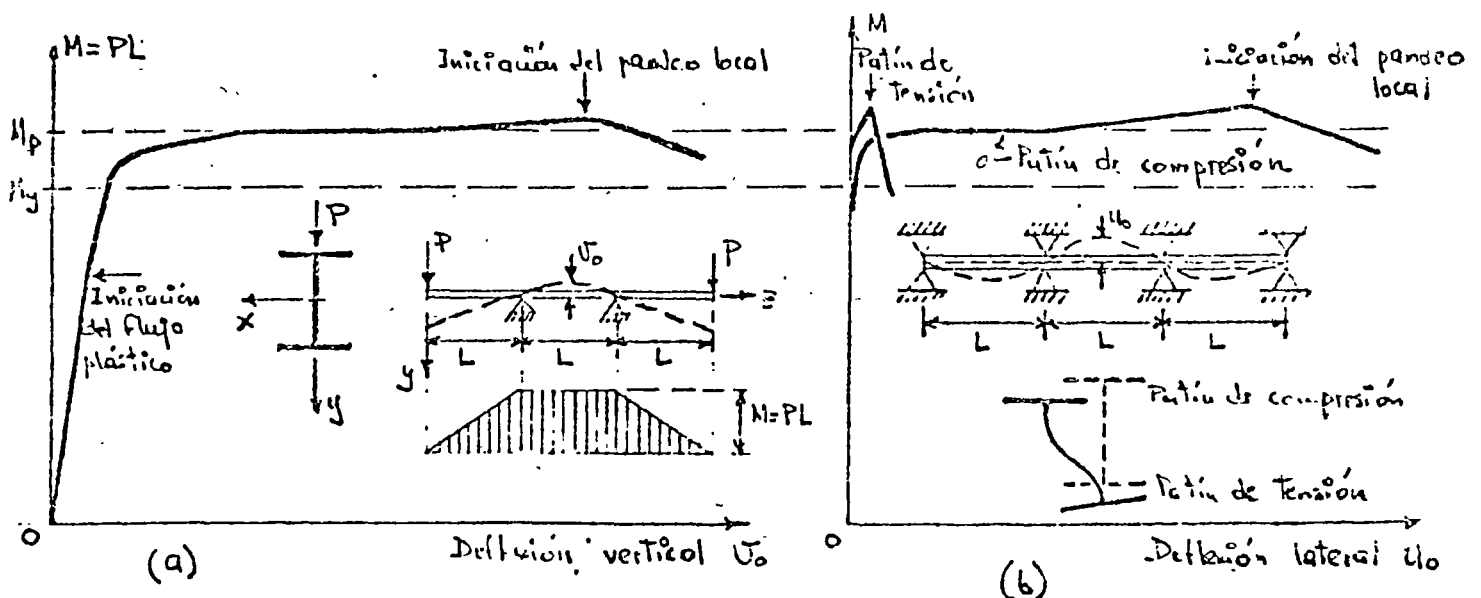
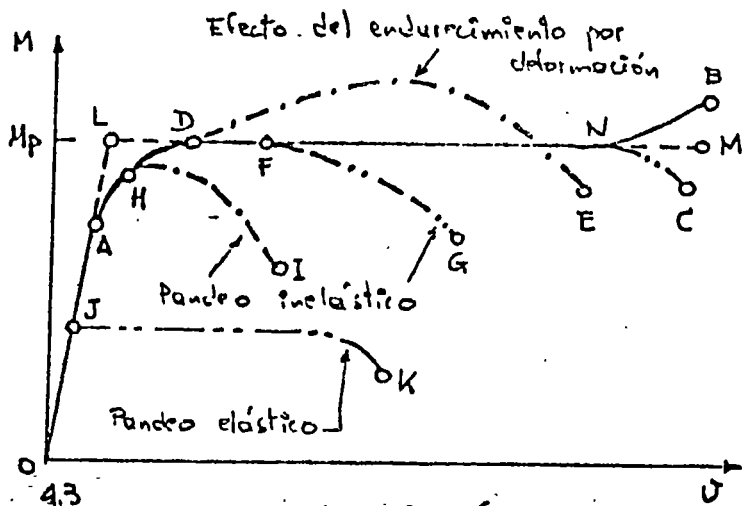
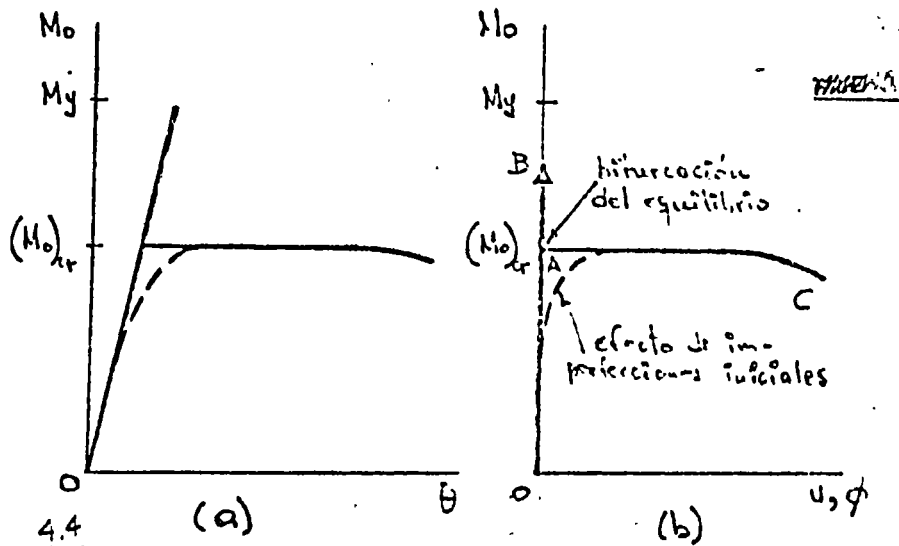


FIG. 4.2 Curvas momento-deflexión de una viga en flexión pura

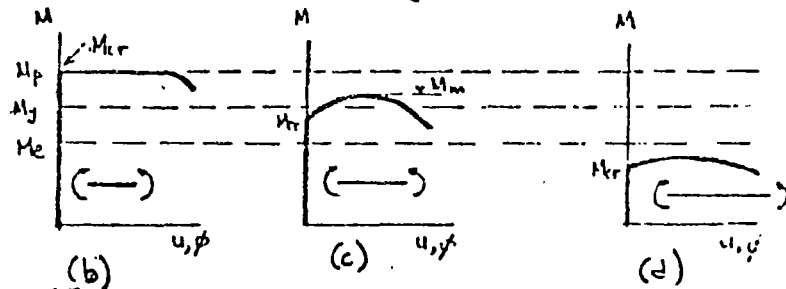
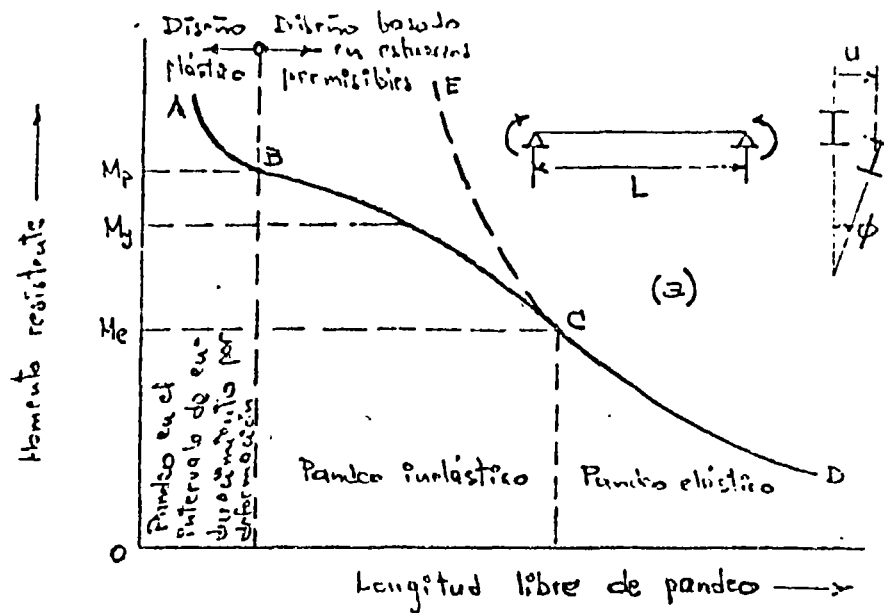




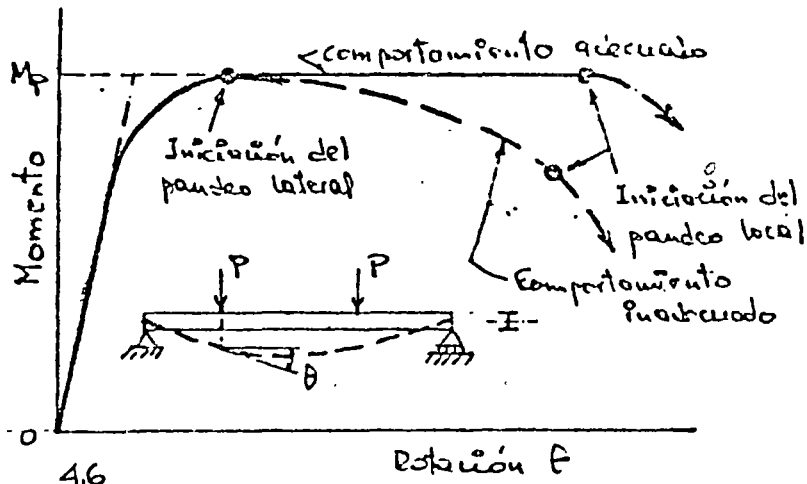
4.3  
 FIG. 4.3. Curvas momento-deflexión de vigas



4.4  
 FIG. 4.4. COMPORTAMIENTO DE UNA VIGA EN FLEXIÓN PURA



4.5. COMPORTAMIENTO DE VIGAS DE DIFERENTES LONGITUDES



4.6. CURVAS MOMENTO-ROTACION DE UN TRAMO DE VIGA EN FLEXIÓN PURA

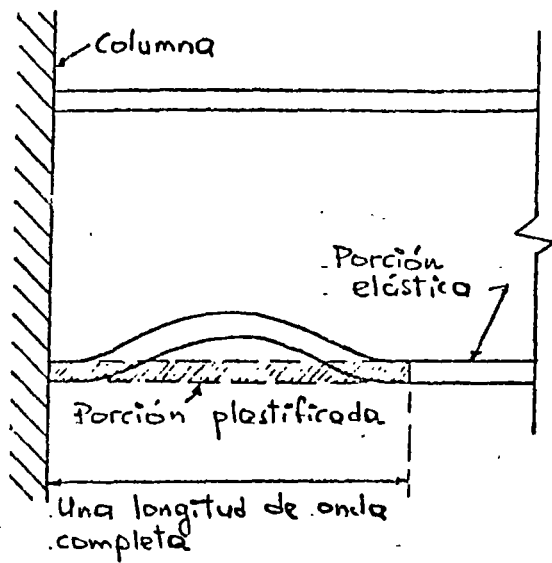
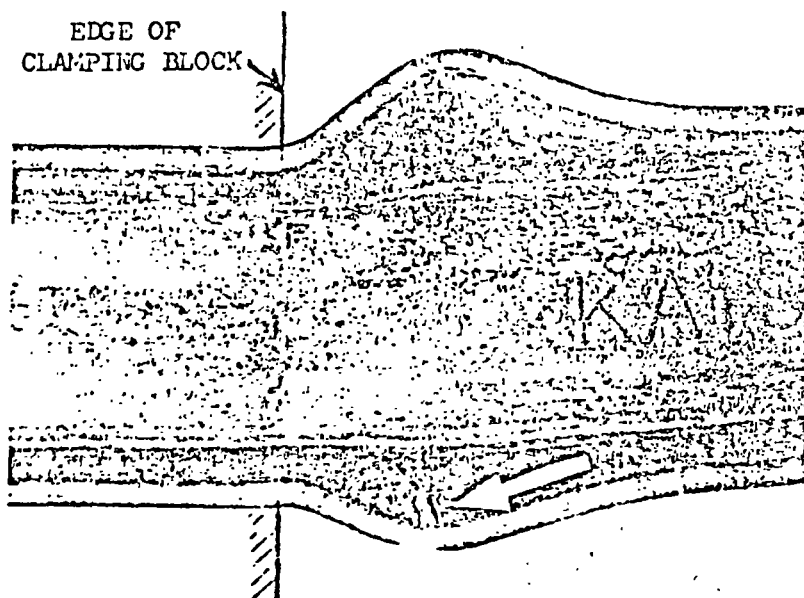


FIG. 4.7 PANDEO LOCAL DEL PATÍN COMPRIMIDO EN EL EXTREMO DE UNA VIGA



4.B 4.8  
FIG. 4.8 -- TYPICAL INITIATION OF FRACTURE

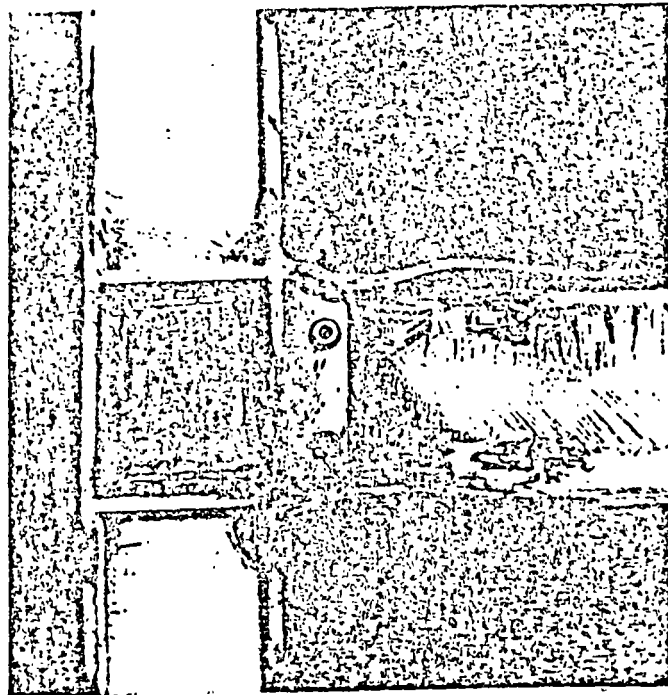


FIG. 4.9 FLANGE BUCKLING IN BEAM<sup>4.10</sup>

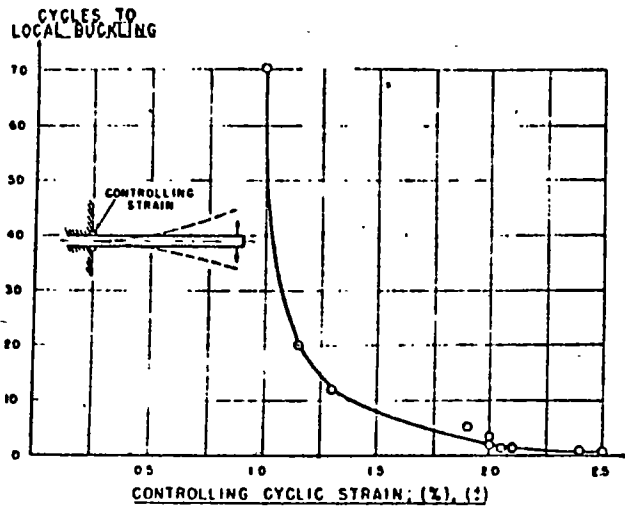
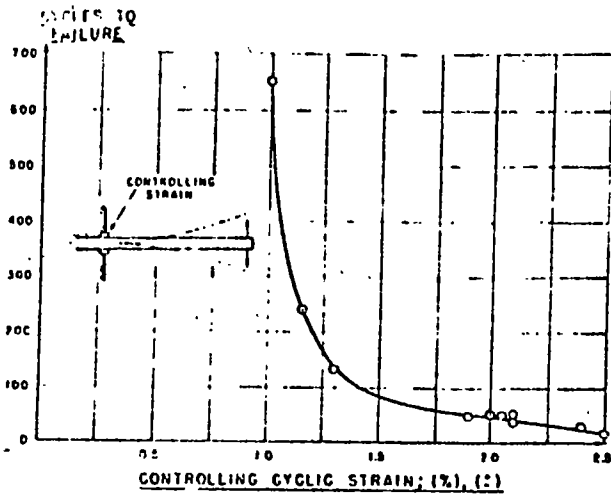


FIG. 4.10. NUMBER OF CYCLES REQUIRED TO ATTAIN FRACTURE OR LOCAL BUCKLING AS A FUNCTION OF THE CONTROLLING CYCLIC STRAIN 48

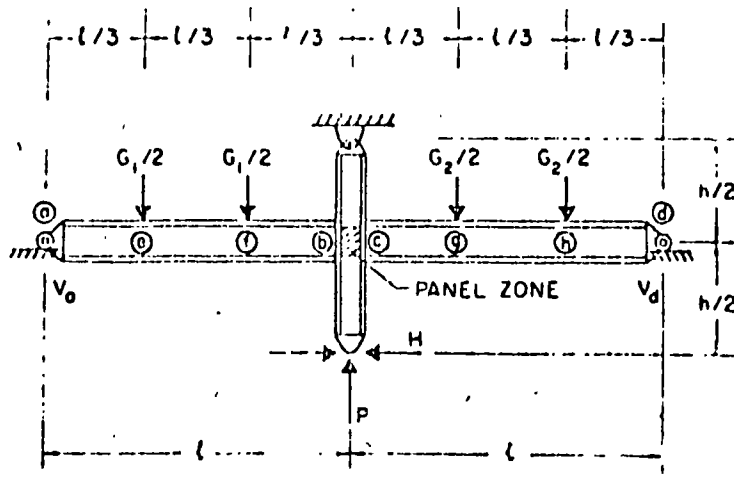


FIG. 4.11

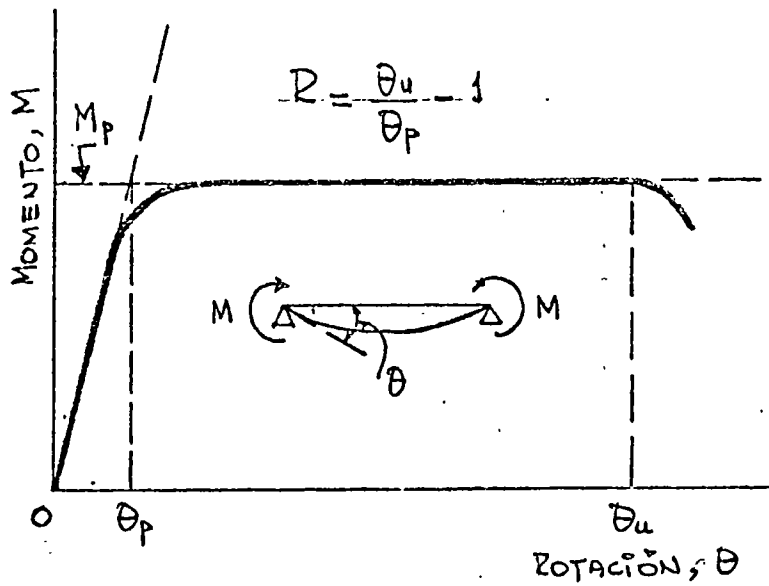
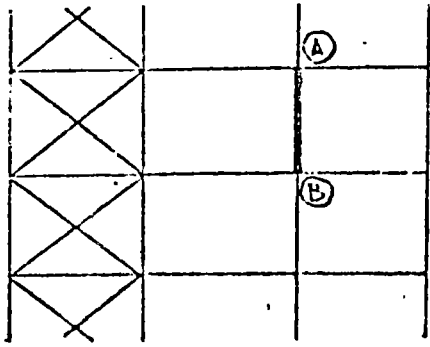
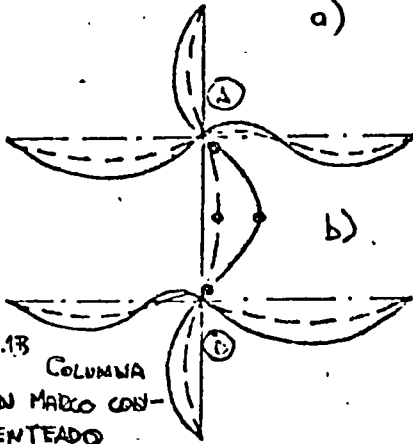


FIG. 4.12 CURVA MOMENTO-ROTACIÓN DE UNA VIGA Y CAPACIDAD DE ROTACIÓN

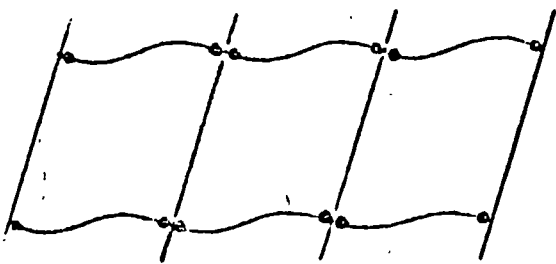


a)

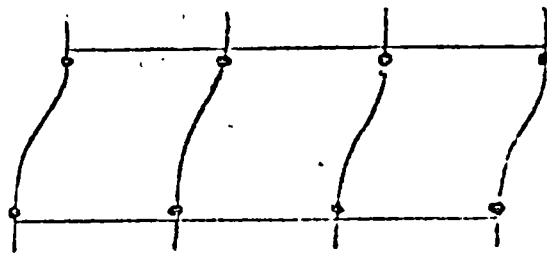


b)

4.13 COLUMNA  
DE UN MARCO CON-  
TRAVENTEADO



(a)



(b)

4.14  
FIG. COLUMNAS DE MARCOS NO CONTRAVENTADOS

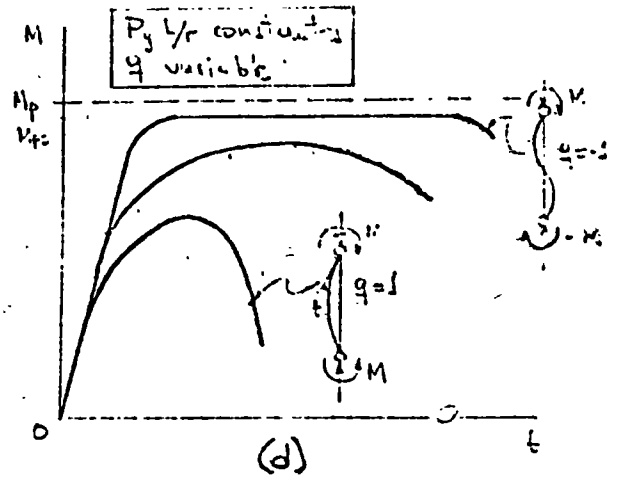
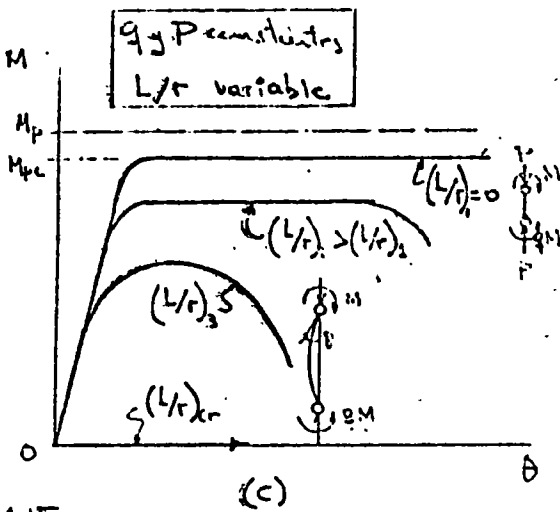
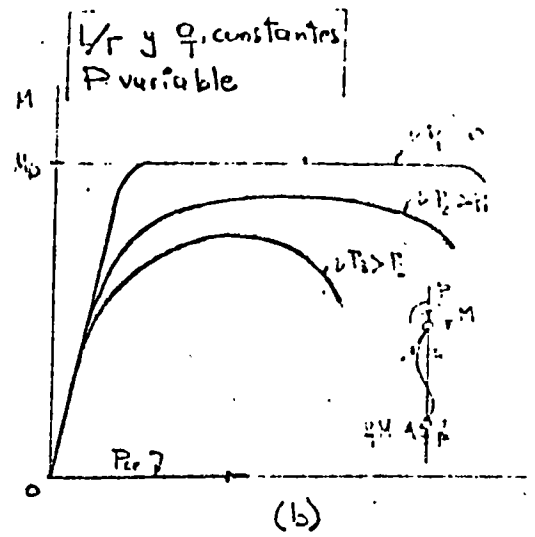
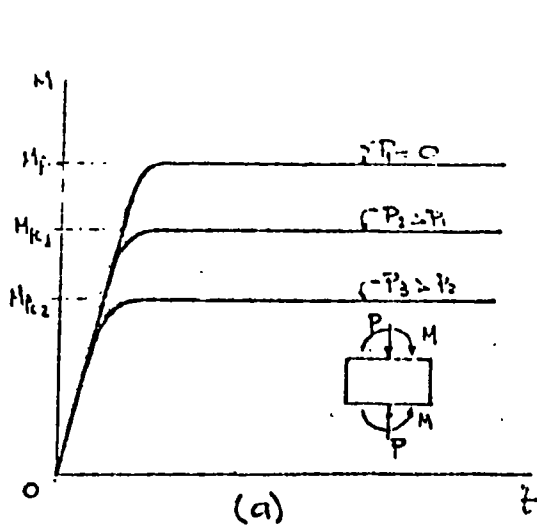
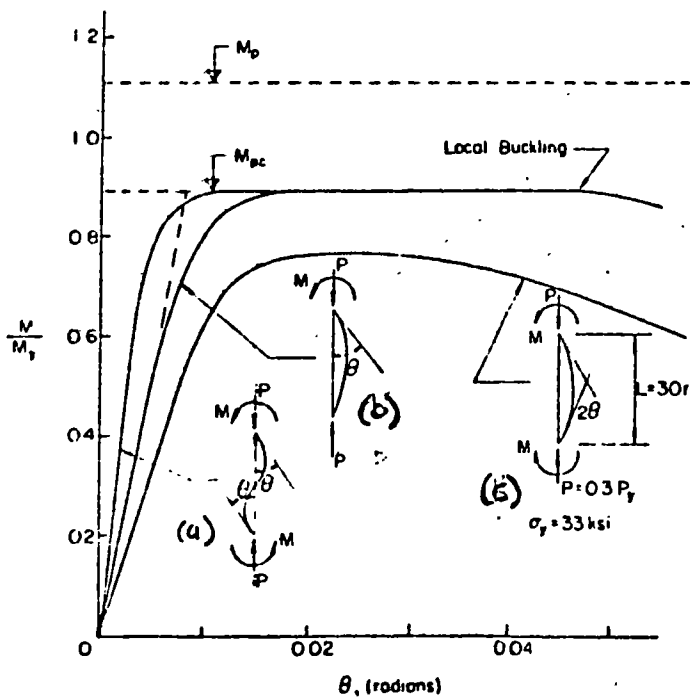


FIG. 4.15 CURVAS MOMENTO-ROTACION DE COLUMNAS QUE FALLAN POR EXCEDO DE FLEXION EN EL PLANO DE LOS MOMENTOS.

Fig. 4.15



4.16  
FIG. 4.16 - TYPICAL BEAM-COLUMN MOMENT ROTATION CURVES 4.21



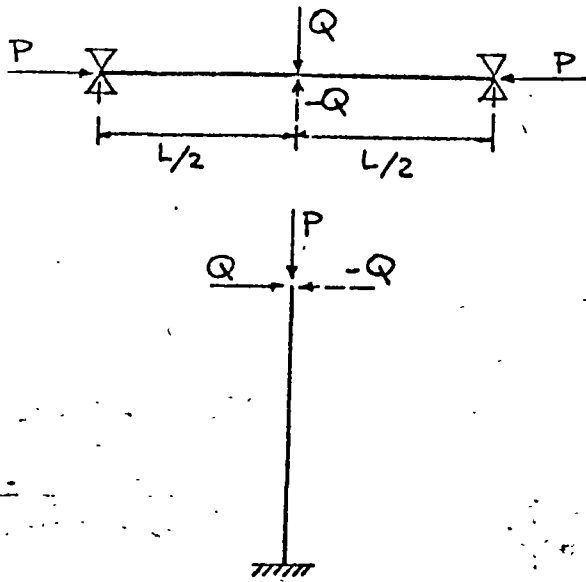
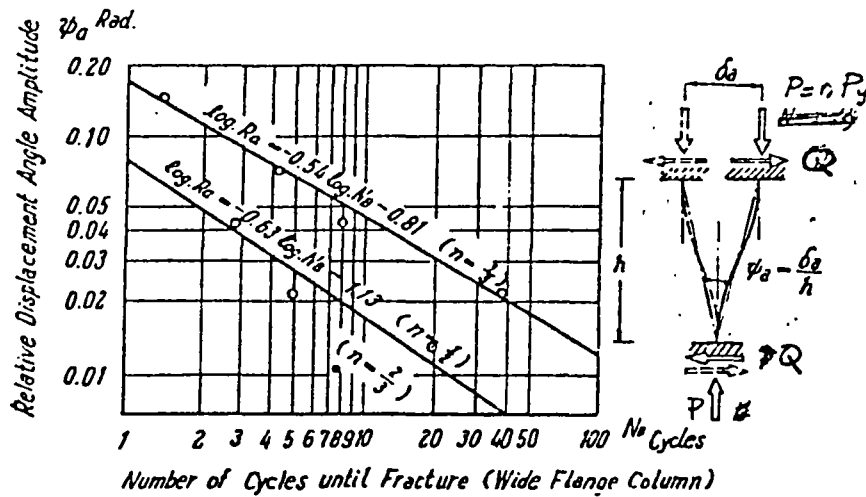


FIG. 4.17 ESPECIMENES UTILIZADOS PARA ESTUDIAR COLUMNAS FLEXOCOMPRESIDAS CARGADAS CICLICAMENTE

Fig. 4.18



4.18

4.31, 4.32

Fig. 4.18 Low Cycle Fracture Limit of Wide Flange Columns (N<sub>f</sub>)

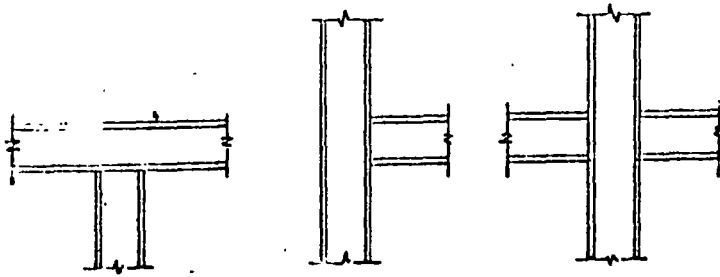


FIG. 1.19 CONEXIONES VIGA-COLUMNA

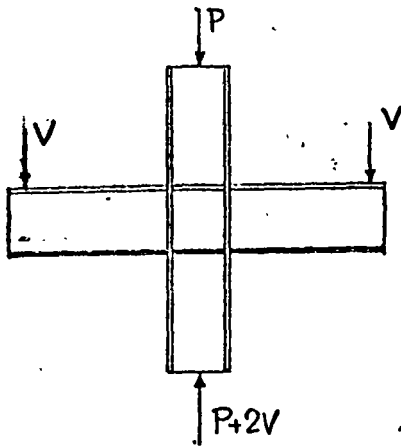


FIG. 4.183 CONDICIÓN DE CARGA DE LOS ESPECÍMENES

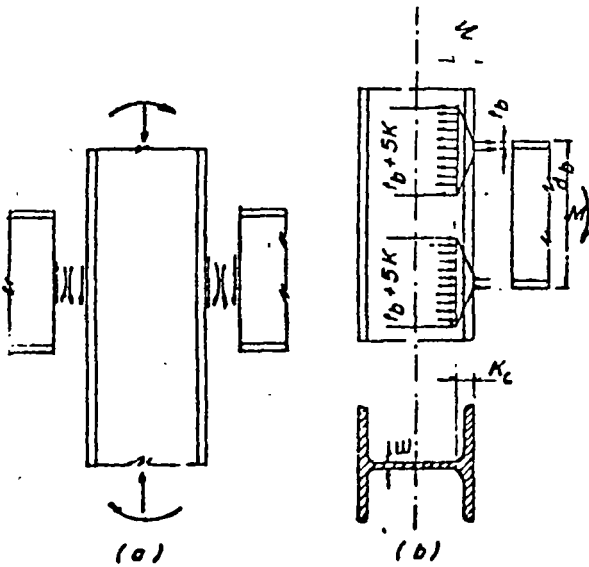


FIGURA 4.21

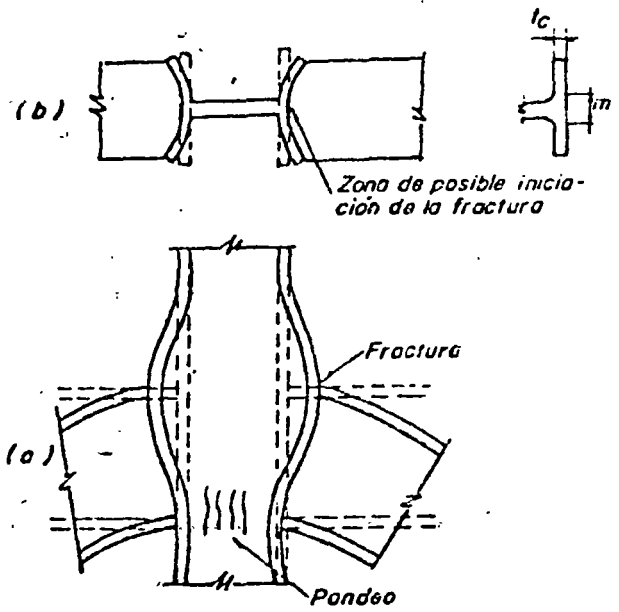


FIGURA 4.22

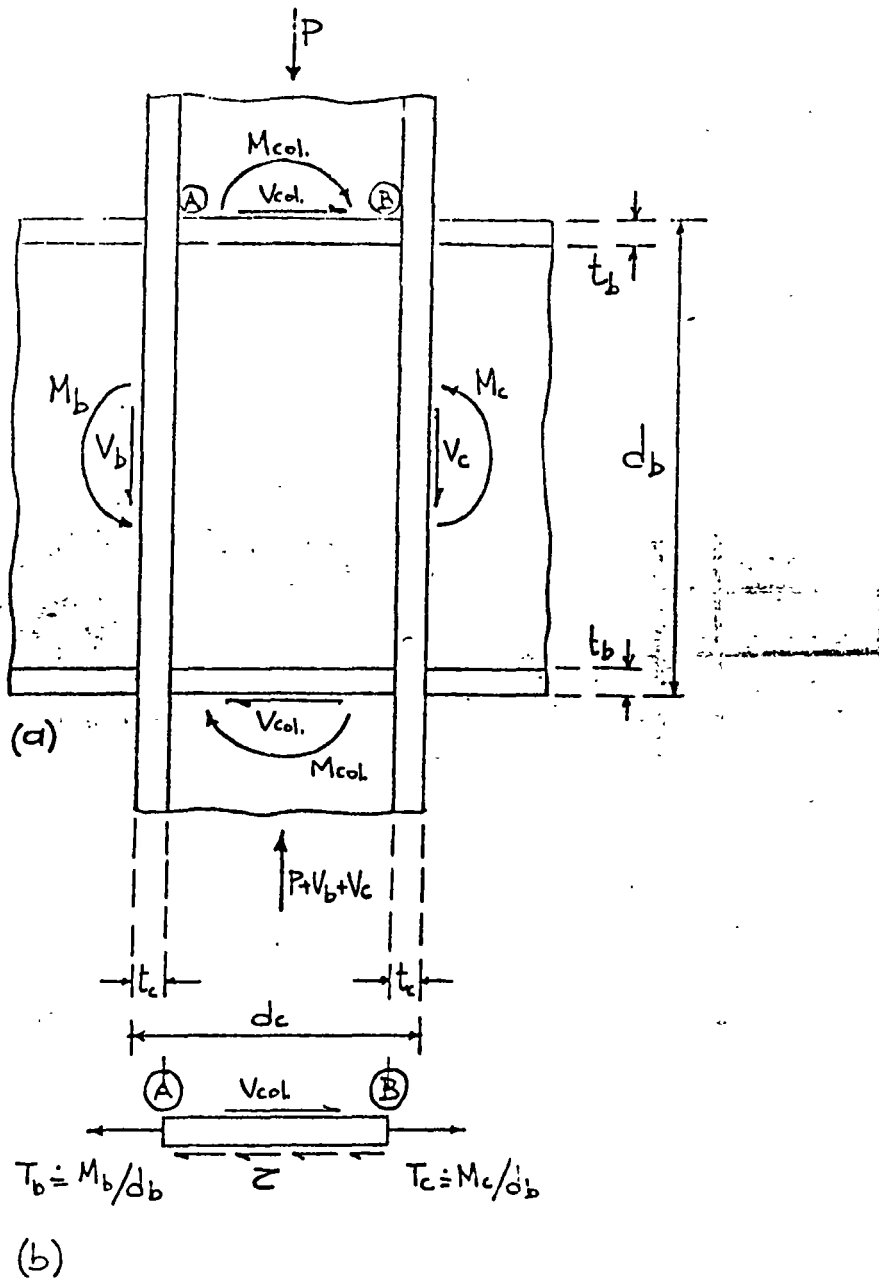
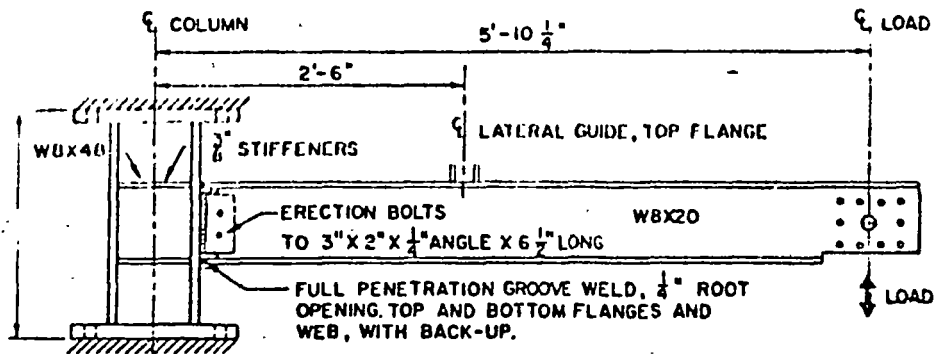


FIG. 4.23 ELEMENTOS MECÁNICOS EN UNA CONEXIÓN VIGA-COLUMNA INTERIOR



4.24 4.9  
Fig. 8. Specimen Type F1.

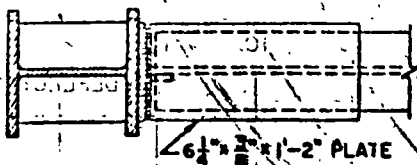
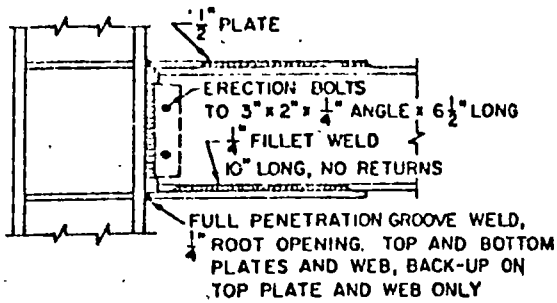
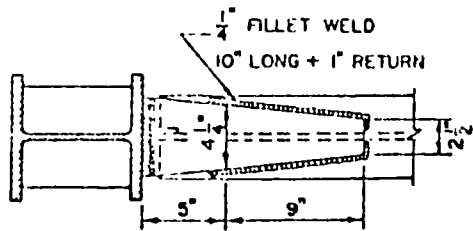


Fig. 2. Connection Type F2.

FIG. 4.25

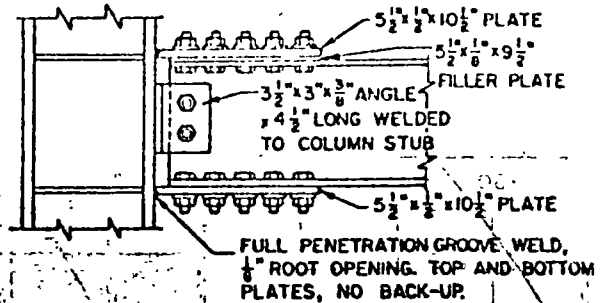
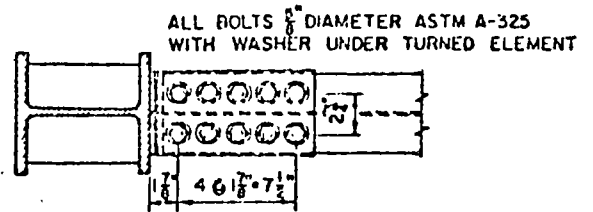


Fig. 3. Connection Type F3.

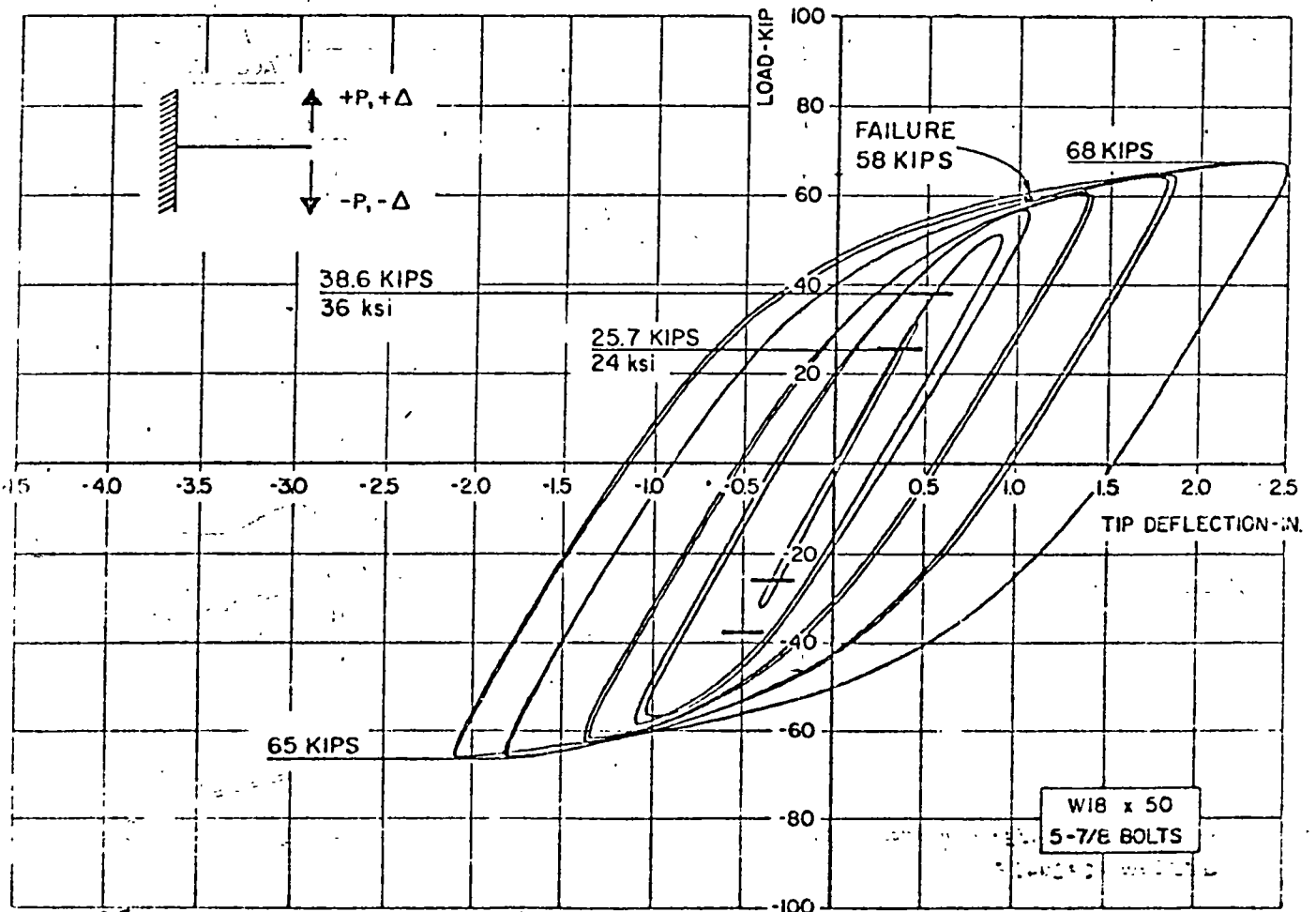


FIGURE 4.26 Load-deflection hysteresis loops for specimen no. 1

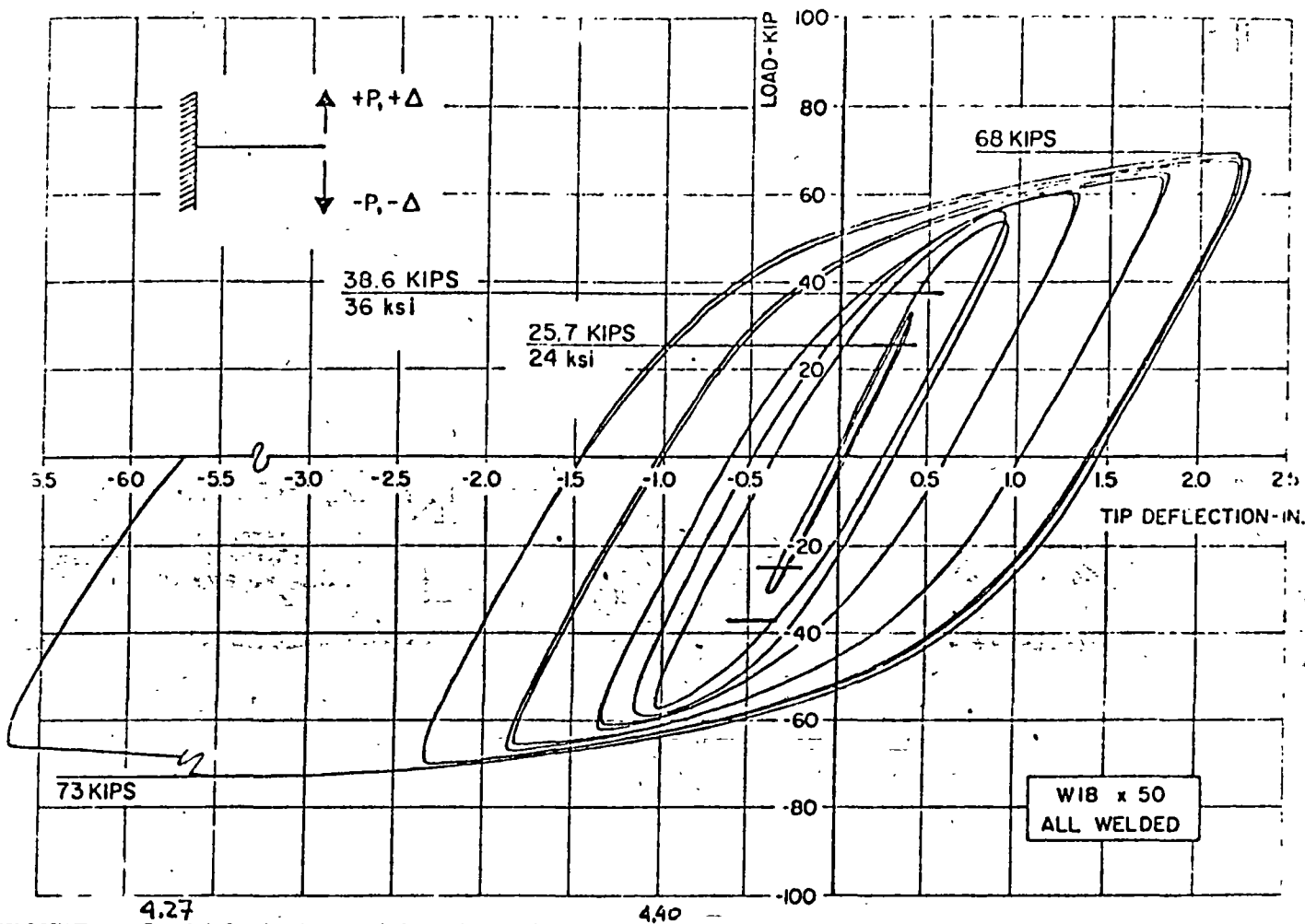
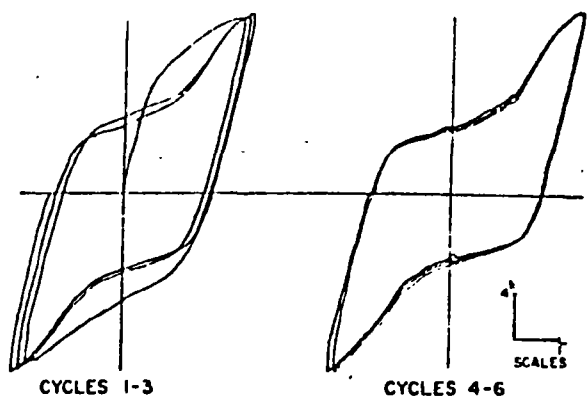


FIGURE 4.27 Load-deflection hysteresis loops for specimen no. 2



4.28 Fig. 8. Experimental Load-Deflection hysteresis loops for Specimen F3-C5. 4.29

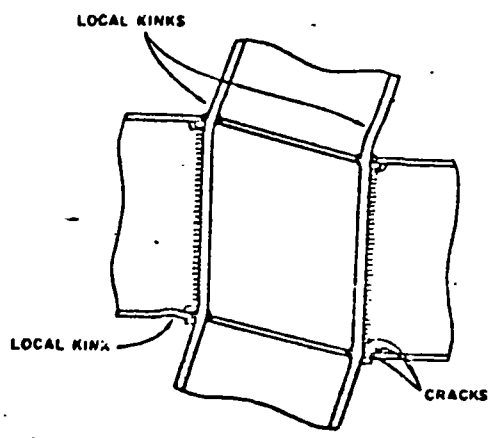
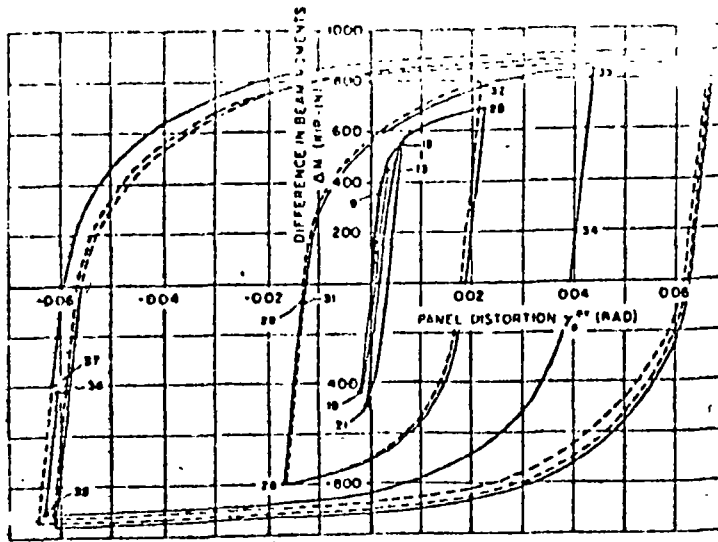
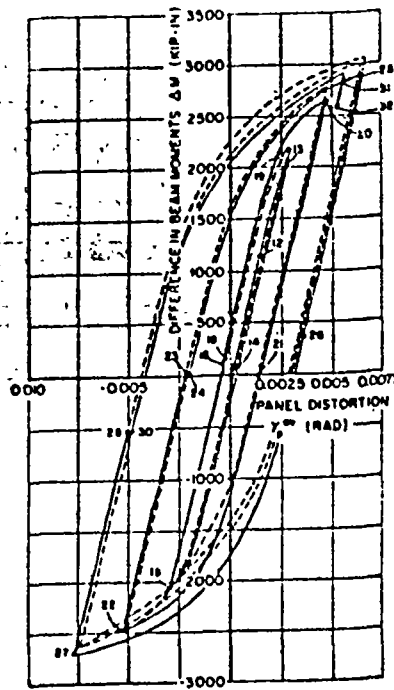


Fig. 4.29 LOCAL EFFECTS CAUSED BY PANEL DISTORTION 4.37



(a) SPECIMEN A-1

FIG. 4.30 4.37



(c) SPECIMEN B-1

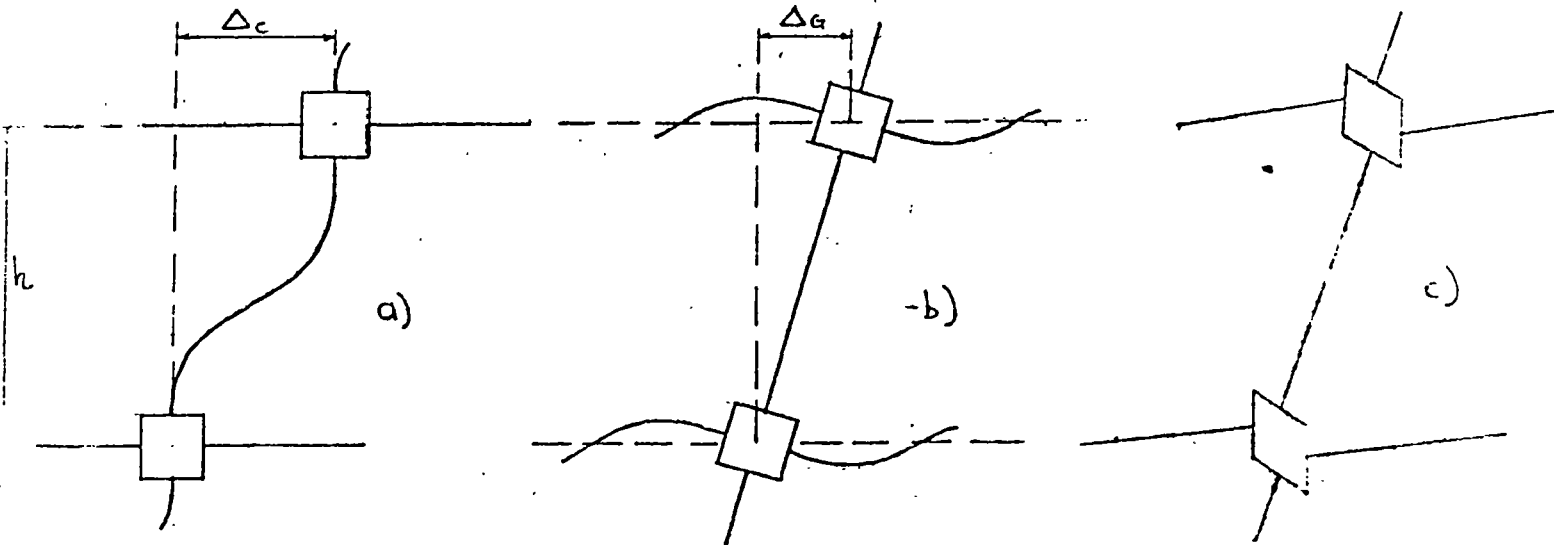
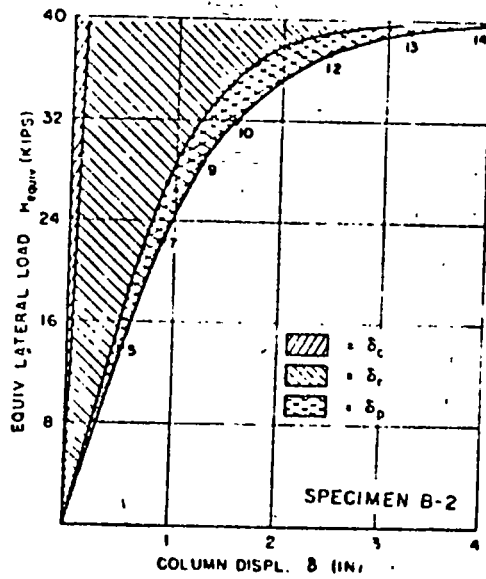
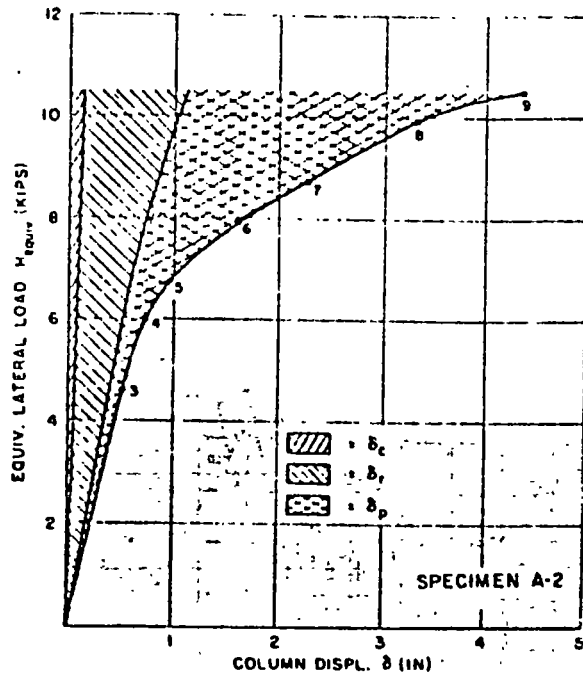


FIG. 4.31 DESPLAZAMIENTOS LATERALES DE ENTREPISO



4.32

FIG. B.--COLUMN DISPLACEMENT COMPONENTS (1 in. = 2.54 cm; 1 kip = 4.448 kN) (ref. 4.32)

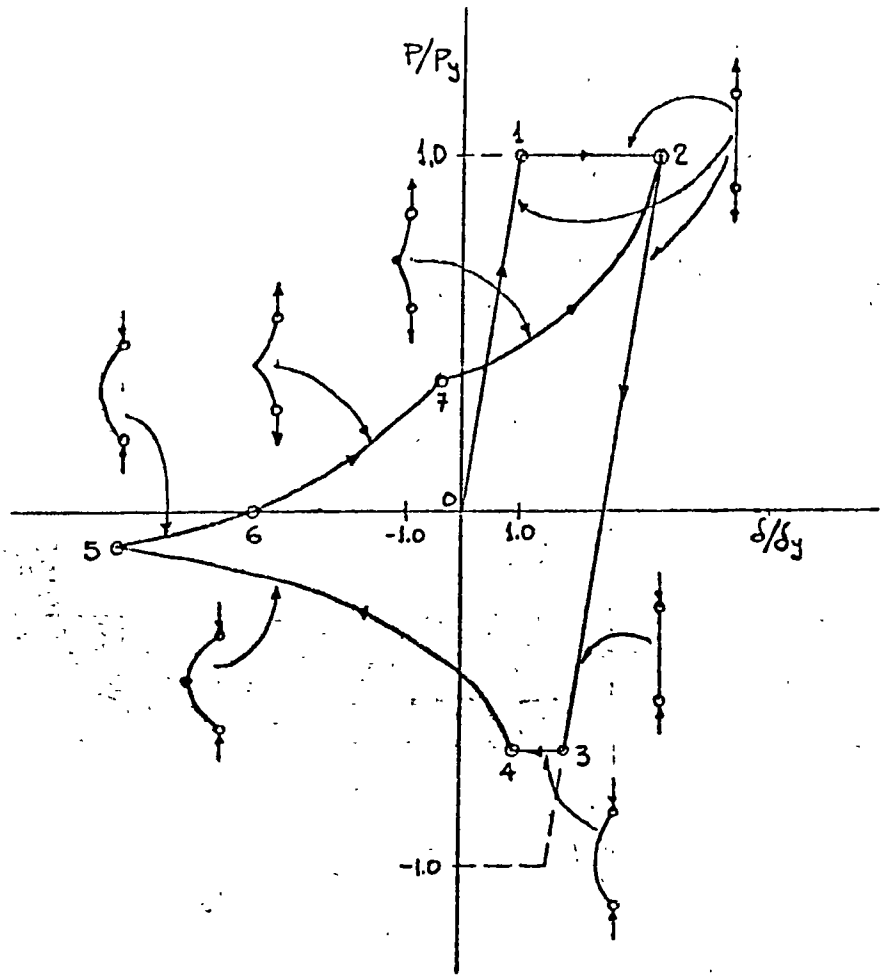


FIG. 4.38. COMPORTAMIENTO DE UNA BARRA EN TENSION-COMPRESION CICLICAS



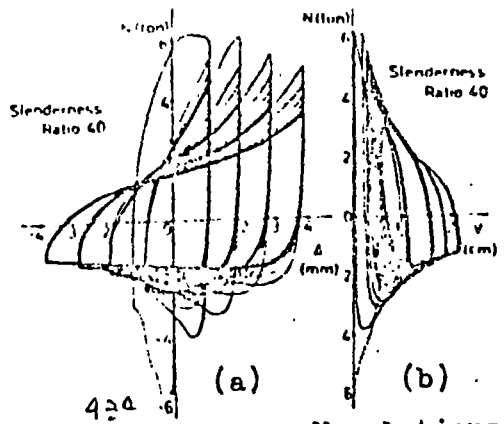


Fig. N- $\Delta$  and N-V relations for slenderness ratio 40.

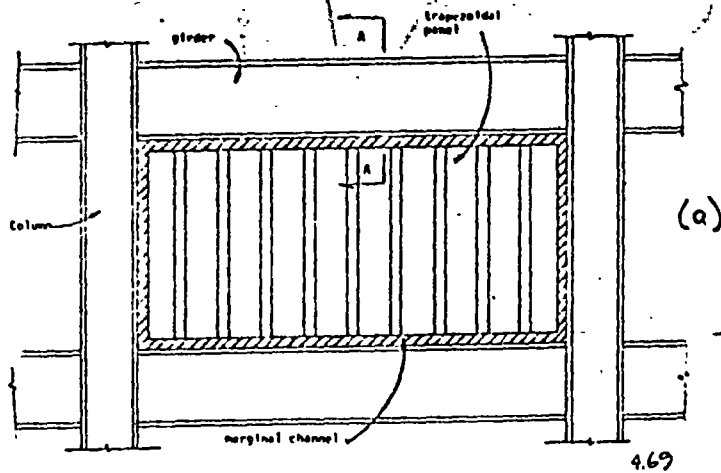


Fig. 4.35 Proposed construction for infilled frames (elevation)

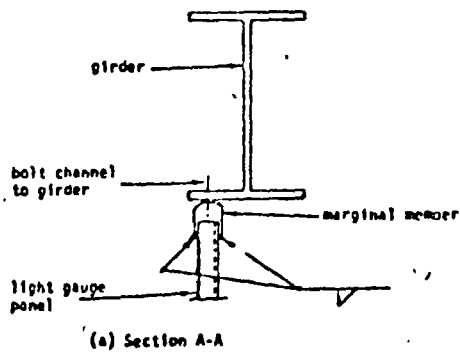
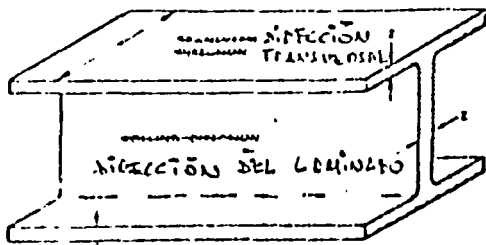


FIG. 4.35. (b)



2-DIRECCION PERPENDICULAR AL GROSOR

Fig. 4.36 Terminología utilizada en la laminación

TERMINOLOGIA RELACIONADA CON LA DIRECCION DEL LAMINADO 4.67

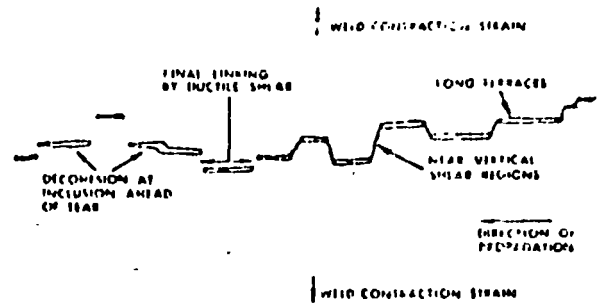
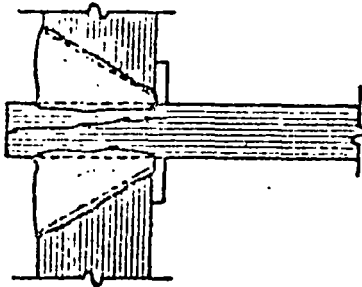
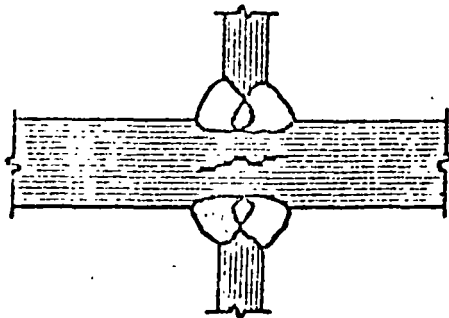


DIAGRAM OF A LAMELLAR TEAR

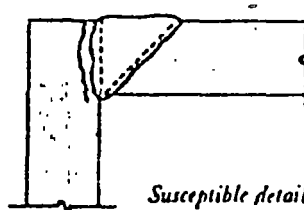
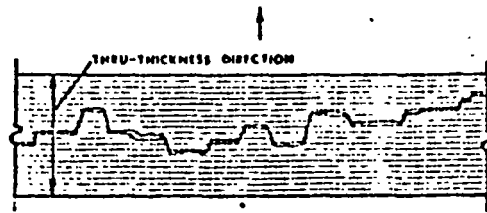
Fig. 7. Diagram of a partially developed lamellar tear



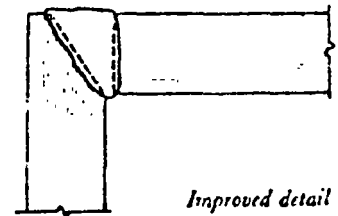
(a)



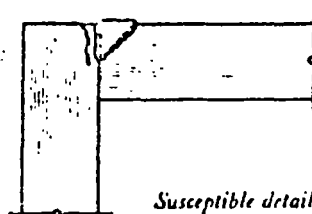
(b)



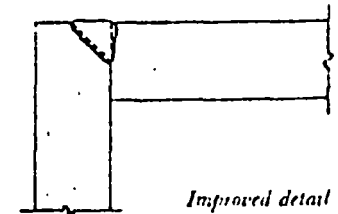
Susceptible detail



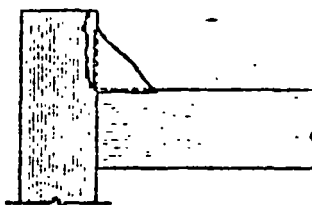
Improved detail



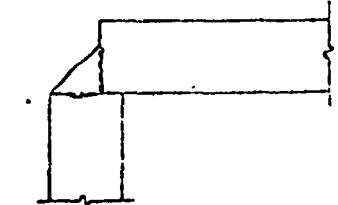
Susceptible detail



Improved detail



Susceptible detail

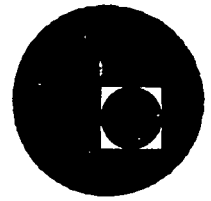


Improved detail

Fig. 4.37



centro de educación continua  
división de estudios superiores  
facultad de ingeniería, unam



### III CURSO INTERNACIONAL DE INGENIERIA SISMICA

## DISEÑO SISMICO DE EDIFICIOS

Estructuras de Acero Ejemplos

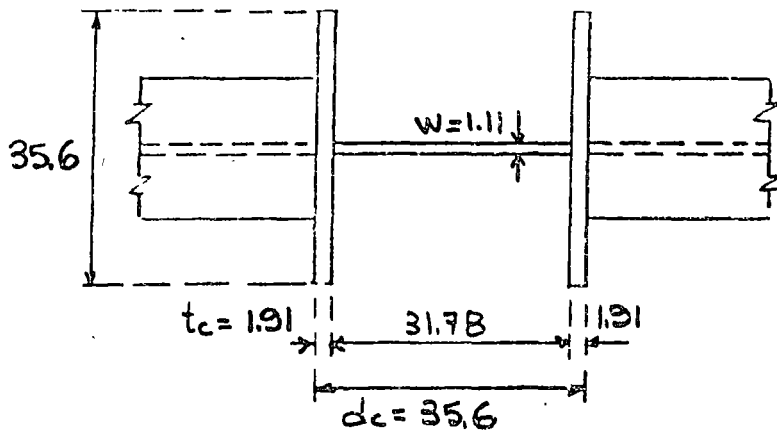
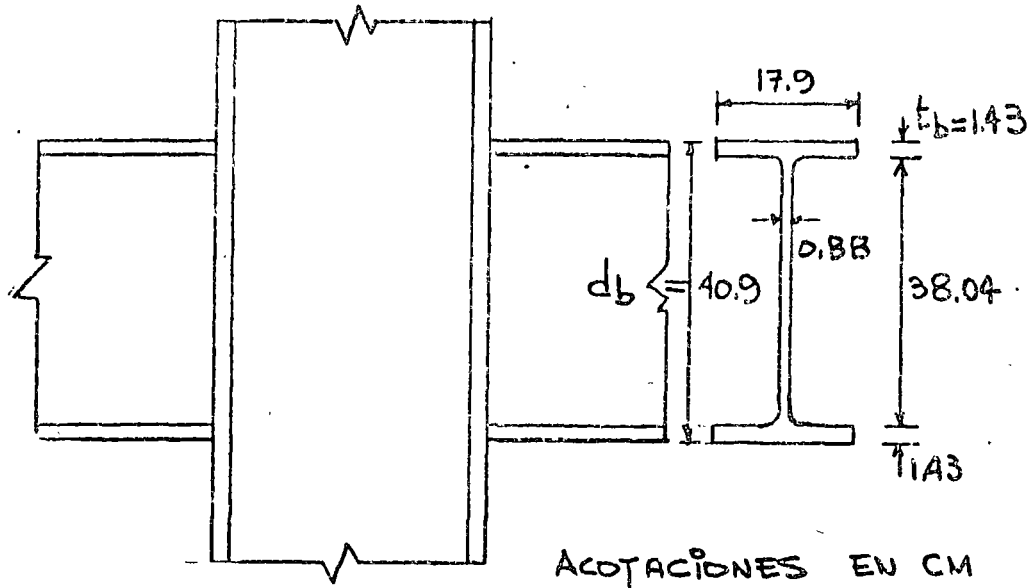
ING. OSCAR DE BUEN LOPEZ DE HEREDIA

JULIO-AGOSTO, 77.

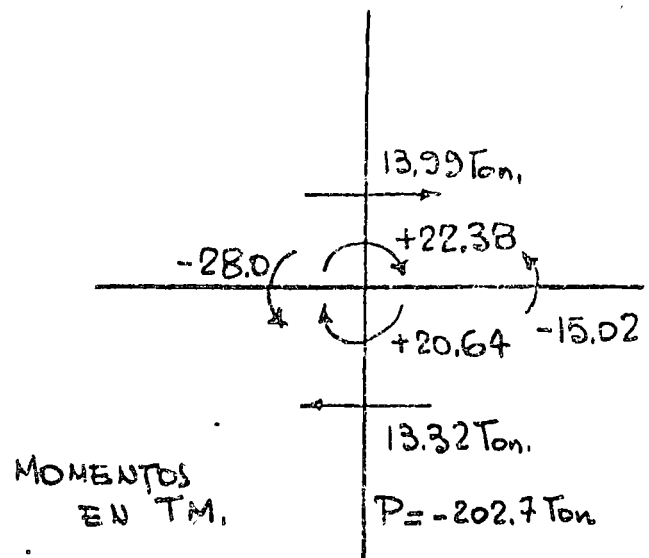
DISEÑO DE UNA CONEXIÓN VIGA-COLUMNA DE UN MARCO RÍGIDO DE EDIFICIO (ACERO A36).

PERFILES. COLUMNA. 1 H 356 MM X 356 MM X 134 KG/M

VIGAS. 1 IPB 16" X 7" X 67.1 KG/M



ELEMENTOS MECÁNICOS POR CARGA VERTICAL + SISMO DE IZQUIERDA A DERECHA :



REVISIÓN DEL GRUESO DEL ALMA DE LA COLUMNA POR CORTANTE  
 CONVIENE EMPEZAR CON ESTA REVISIÓN, PUES SI HACE FALTA  
 AUMENTAR EL GRUESO DEL ALMA DE LA COLUMNA CAMBIA EL  
 COMPORTAMIENTO DESDE EL PUNTO DE VISTA DE LOS ATISADORES  
 HORIZONTALES.

$$\text{Ec. 16. } W_{\text{nec}} = \frac{\sqrt{3}}{\sigma_y d_c} \left( \frac{M_b + M_c}{d_b} - V_{\text{col}} \right) =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2530 \times 35.6} \left( \frac{2238000 + 2064000}{40.9} - 13990 \right) = 1.75 \text{ cm} > 1.11$$

$$\text{Ec. 17. } W_{\text{nec}} = \frac{\sqrt{3}}{\sigma_y} \frac{\Delta M}{0.95 d_b \times 0.95 d_c} = 2.24 \text{ cm} = 1.28 \times 1.75$$

LA EC. 17 INDICA QUE SE REQUIERE UN ALMA 28% MÁS  
 GRUESA QUE LA CALCULADA CON LA EC. 16.

$$\text{Ec. 18. } C_{\text{av.}} = \frac{(\Delta M / d_b)(1 - \rho)}{(d_c - t_c)W + 62.4 I_{cf} / d_b^2}$$

$$(M_p)_V = Z_x \sigma_y = 1343.7 \times 2530 = 3396000 \text{ kg.cm}$$

$$\rho = \frac{V_{\text{col}} d_b}{\Delta M} = \frac{22380 \times 40.9}{3396000 \times 2} = 0.135 ; \quad I_{cf} = \frac{b_c t_c^3}{12} = \frac{35.6 \times 1.91^3}{12} = 20.7 \text{ cm}^3$$

$$C_{\text{av}} = \frac{(6799200 / 40.9)(1 - 0.135)}{(35.6 - 1.91)1.11 + 62.4 \times 20.7 / 40.9^2} = \frac{143797}{37.396 + 0.772} = 3767 \text{ kg/cm}^2$$

$$\text{Ec. 19. } \bar{\sigma}_y = \frac{\sigma_y}{\sqrt{3}} \sqrt{1 - \left( \frac{P}{P_y} \right)^2} ; \quad P_y = A \sigma_y = 171.27 \times 2.53 = 433.31 \text{ TON}$$

$$\bar{\sigma}_y = \frac{2530}{\sqrt{3}} \sqrt{1 - \left( \frac{202.7}{433.31} \right)^2} = 1291 \text{ kg/cm}^2 < 3767$$

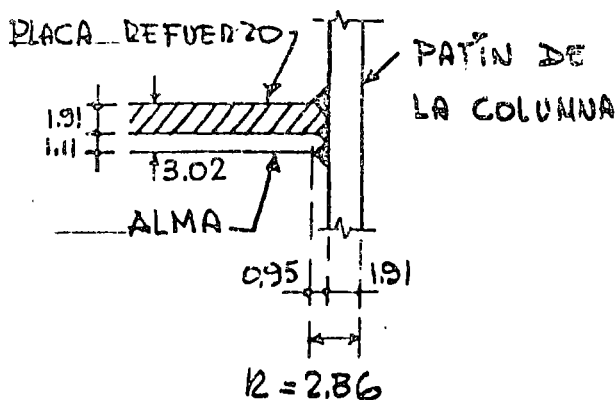
DE ACUERDO CON LAS ECS. 18 Y 19 EL ALMA NECESITA  
 REFUERZO.

DESPRECIANDO LA RESISTENCIA A LA FLEXIÓN DE LOS PATINES DE LA COLUMNA, EL GRUESO DE LA PLACA DE REFUERZO SE CALCULA CON LA EXPRESIÓN

$$t_p = \frac{C_{AV} - \bar{C}_y}{\bar{C}_y} W = \frac{3767 - 1291}{1291} \times 1.11 = 1.92 \text{ cm}$$

SE COLOCARÁ UNA PLACA ADOBADA AL ALMA DE 1.905 CM (3/4")  
(GRUESO TOTAL = 1.905 + 1.11 = 3.02 CM).

EN GENERAL, DEBE REVISARSE QUE LA PLACA ADOBADA NO FALLE POR PANDEO POR CORTANTE.



EN LA ZONA DE LA PLACA DE REFUERZO CONVIENE UTILIZAR SOLDADURAS DE PENETRACIÓN COMPLETA EN ELLA Y EN EL ALMA, PARA DESARROLLAR SU RESISTENCIA ÍNTEGRA, Y REFORZARLA CON

CORDONES PARA AUMENTAR LA DISTANCIA  $r$ .

### ATIESADORES HORIZONTALES

#### 1. FRENTE AL PATÍN COMPRIMIDO

$$\text{Ec. 13. } W_{nec} = \frac{A_f}{t_b + 5r_c} = \frac{17.9 \times 1.43}{1.43 + 5 \times 2.86} = 1.63 \text{ cm} < 3.02$$

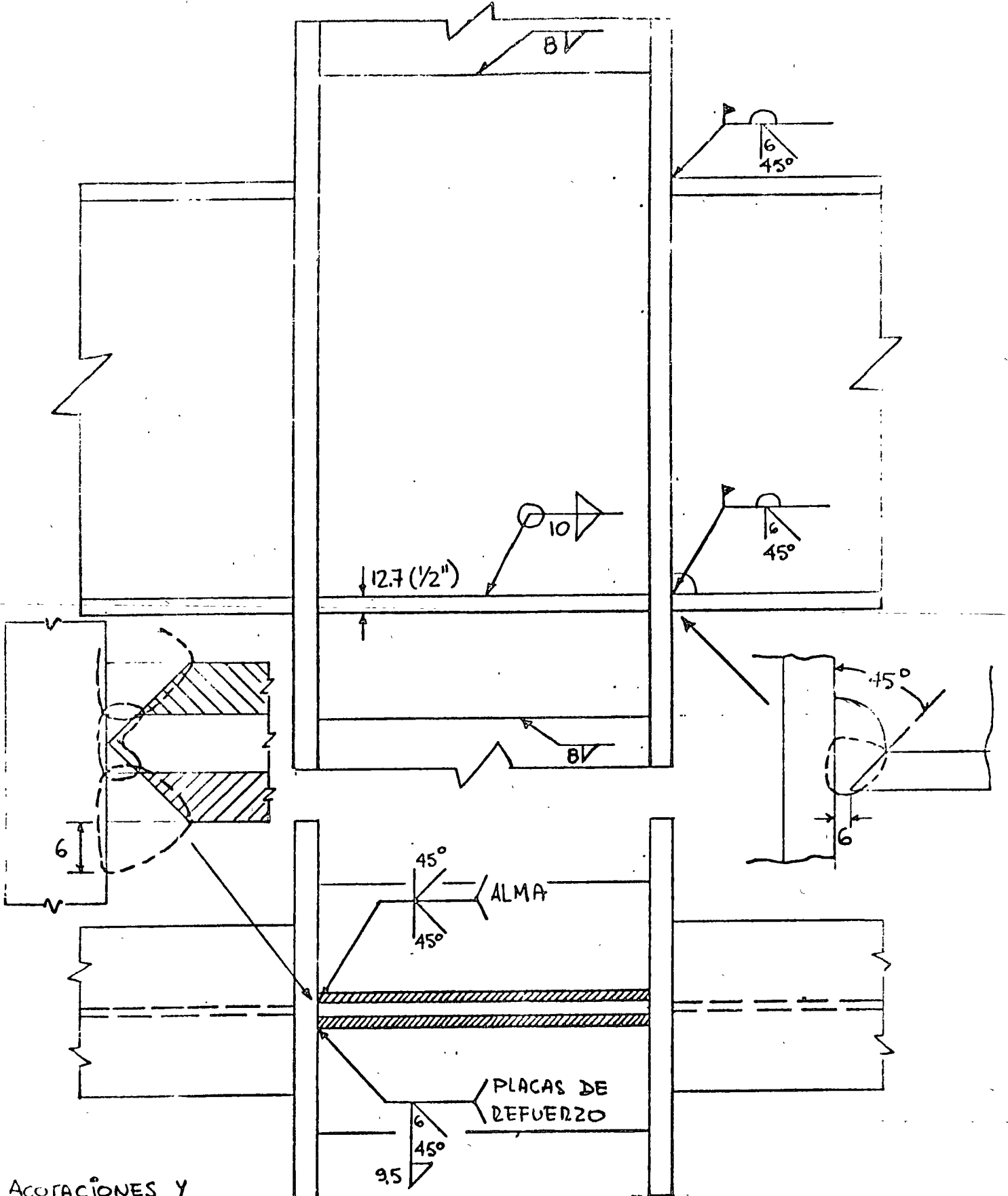
$$\text{Ec. 14. } W \geq d_c \sqrt{f_y} / 1509 = 35.6 \sqrt{2530} / 1509 = 1.19 \text{ cm} < 3.02$$

NO SE NECESITAN ATIESADORES

#### 2. FRENTE AL PATÍN EN TENSIÓN.

$$\text{Ec. 15. } t_c = 0.4 \sqrt{A_f} = 0.4 \sqrt{17.9 \times 1.43} = 2.02 \text{ cm} > 1.91$$

SE NECESITAN ATIESADORES. SE COLOCARÁN DE UN TAMAÑO MÍNIMO, PARA EVITAR LA FLEXIÓN DE LOS PATINES DE LA COLUMNA.



ACOTACIONES Y  
TAMAÑOS DE  
SOLDADURA EN  
MM.

DOS PLACAS DE REFUERZO DE 9.5 MM (3/8") C/U

DISEÑO SISMICO DE EDIFICIOS

ESTRUCTURAS DE ACERO  
(Continuación)

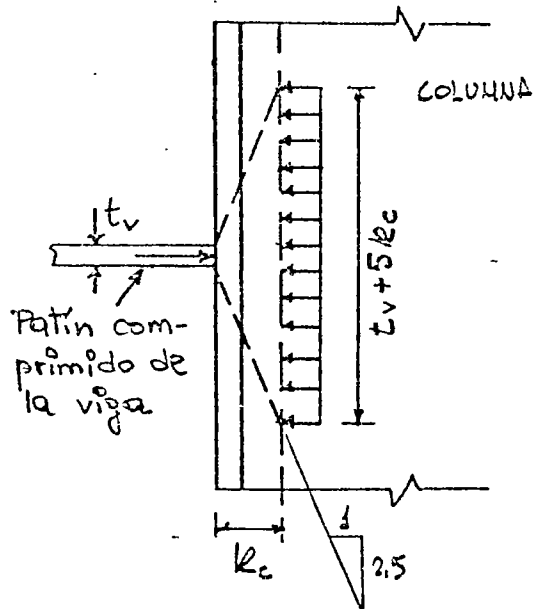
ING. OSCAR DE BUEN Y LOPEZ DE HEREDIA

AGOSTO de 1978.



DISEÑO DE CONEXIONES VIGA-COLUMNA BAJO CARGA ESTÁTICA SIMÉTRICA. No hay momento flexionante en la columna, pues los que transmiten las vigas se equilibran entre sí.

ZONA COMPRIMIDA.



Fuerza en el patín de la viga =  $A_p \sigma_{yv}$

$A_p$  = área del patín,  $\sigma_{yv}$  = est. de fluencia del acero utilizado en él.

Resistencia máxima de la columna =

$$= \sigma_{yc} C (t_v + 5k_c)$$

$C$  = grueso del alma de la columna,  $\sigma_{yc}$  est. de fluencia del acero con que está hecha.

$$A_p \sigma_{yv} = \sigma_{yc} C (t_v + 5k_c) \quad (1)$$

$$\therefore C = \frac{A_p \sigma_{yv}}{(t_v + 5k_c) \sigma_{yc}} = \frac{C_1 A_p}{t_v + 5k_c} \quad (2)$$

$C_1 = \sigma_{yv} / \sigma_{yc}$ ; se reduce a 1.0 si los dos aceros son iguales. Si  $C \geq C_1 A_p / (t_v + 5k_c)$  y el alma no falla por inestabilidad, no requiere refuerzo. En caso contrario se utilizan atiesadores horizontales o placas paralelas o adasadas a ella.

Si la fuerza cortante en el extremo de las vigas es cercana a  $T_y A_a$ , el momento plástico debe ser transmitido a la columna íntegramente por los patines. Entonces, la fuerza en cada uno de ellos es aproximadamente igual a  $M_p / d_v > A_p \sigma_{yv}$ , donde  $d_v$  es el peralte total de la viga.

La ec. 2 no debe utilizarse cuando la fuerza cortante en la viga excede del 60% de la de plastificación del alma. Si es mayor que ese límite,

$$\frac{M_p}{d_v} = \sigma_{yc} C (t_v + 5k_c) \quad (3)$$

$$C = \frac{M_p}{\sigma_{yc} (t_v + 5k_c) d_v} \quad (4)$$

Además de la ec. 2 ó 4, debe cumplirse la condición

$$\frac{h_a}{c} \leq \frac{1510}{\sqrt{\sigma_{yc}}} \quad (5)$$

para evitar el pandeo local del alma de la columna.  $h_a$  es su peralte libre. Si  $h_a/c$  excede el valor dado por la ec. 5, se obtiene una predicción conservadora de la resistencia en compresión del alma con la ec.:

$$P_{cr} = 34380 c^3 \sqrt{\sigma_{yc}} / h_a \quad (6)$$

Tomando  $c$  y  $h_a$  en cm,  $\sigma_{yc}$  en  $\text{kg}/\text{cm}^2$ ,  $P_{cr}$  se obtiene en  $\text{kg}$ .

Si el grueso  $c$  del alma de la columna es igual o mayor que el calculado con la ec. 2 ó 4 y se satisface, además, la ec. 5, no hay que reforzar la zona comprimida de la columna. En caso contrario sí se necesita refuerzo.

ATISADORES HORIZONTALES. (Colineales con los patines de las vigas).

$$A_p \sigma_{yv} = \sigma_{yc} c (t_v + 5k_c) + \sigma_{yat} A_{at}$$

$$\therefore A_{at} = \frac{A_p \sigma_{yv}}{\sigma_{yat}} - \frac{c \sigma_{yc}}{\sigma_{yat}} (t_v + 5k_c) = [C_1 A_p - c (t_v + 5k_c)] C_2 \quad (7)$$

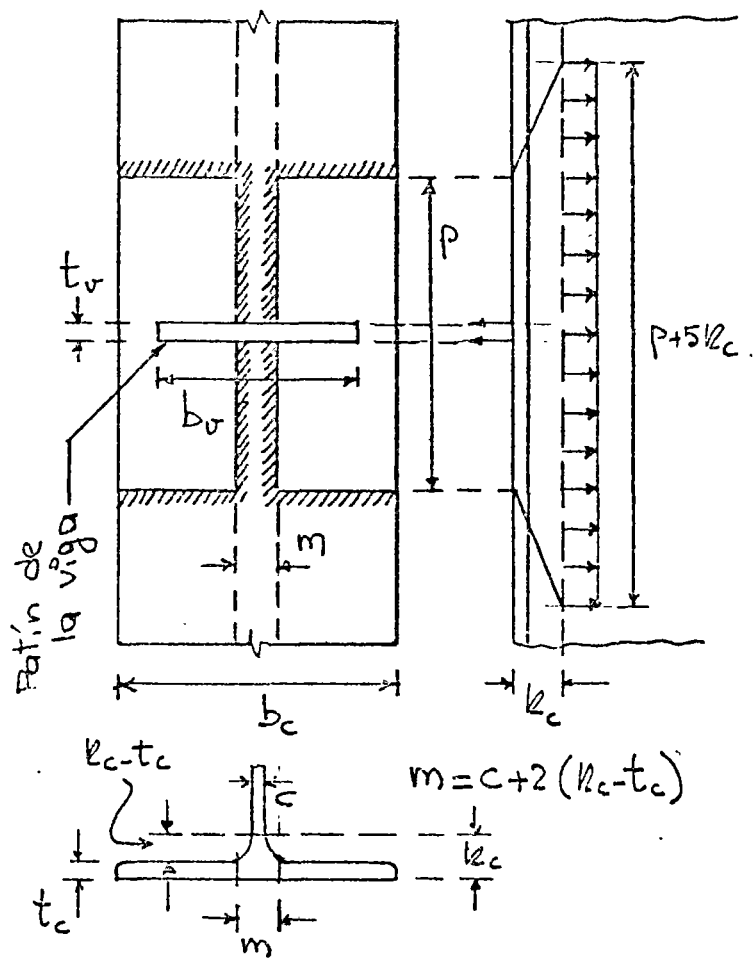
$\sigma_{yv}$ ,  $\sigma_{yc}$  y  $\sigma_{yat}$  son los esfuerzos de fluencia del patín de la viga, alma de la columna y atisadores.  $C_1 = \sigma_{yv} / \sigma_{yc}$ ,  $C_2 = \sigma_{yc} / \sigma_{yat}$ .

El efecto de los atisadores se tiene en cuenta de la misma manera cuando se utiliza la ec. 3 en vez de la ec. 1.

$$(b/t)_{at} \leq 796 / \sqrt{\sigma_y} \quad (15.8 \text{ para acero A36}).$$

Pueden usarse placas verticales, adosadas al alma o paralelas a ella, en lugar de los atisadores horizontales.

ZONA EN TENSION. El patin de la columna se considera formado por dos placas y una zona central rígida, como se ve en la figura.



Resistencia última de cada placa  $P_u = C_1 \sigma_{yc} t_c^2$  (9)

$$C_1 = (4/\beta + \beta/2) / (2 - \eta/\lambda),$$

$$\eta = \beta(\sqrt{\beta^2 + 8\lambda} - \beta) / 4, \quad (\beta = p/q, \lambda = h/q)$$

Si la columna y la viga son perfiles H laminados, puede tomarse conservadoramente  $C_1 = 3.5$ .

Resistencia total del patin de la columna:

$$Q_T = \sigma_{yv} t_v m + 2(3.5 \sigma_{yc} t_c^2) \quad (10)$$

$$A_p \sigma_{yv} = b_v t_v \sigma_{yv} = 0.8 (\sigma_{yv} t_v m + 7 \sigma_{yc} t_c^2) \quad (11)$$

El factor 0.8 se introduce para obtener resultados conservadores

$$\therefore t_c^2 = \frac{b_v t_v}{7} \left(1.25 - \frac{m}{b_v}\right) C_1 \quad (12)$$

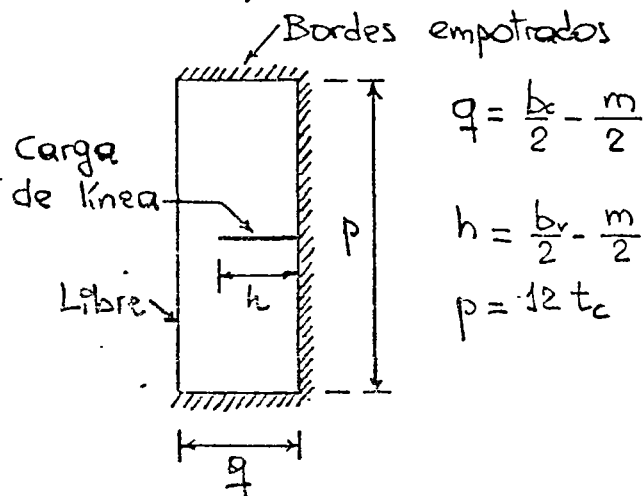
$m/b_v = 0.15$  es un valor conservador para vigas y columnas H laminadas

$$\therefore t_c = 0.4 \sqrt{C_1 A_p} \quad (13)$$

Es decir  $t_c \geq 0.4 \sqrt{C_1 A_p}$  no se necesitan

atrapadores en la zona de tensión. Cuando sí se requirieren se diseñan igual que en la de compresión.

La ec. 13 puede no ser válida para columnas hechas con placas soldados.

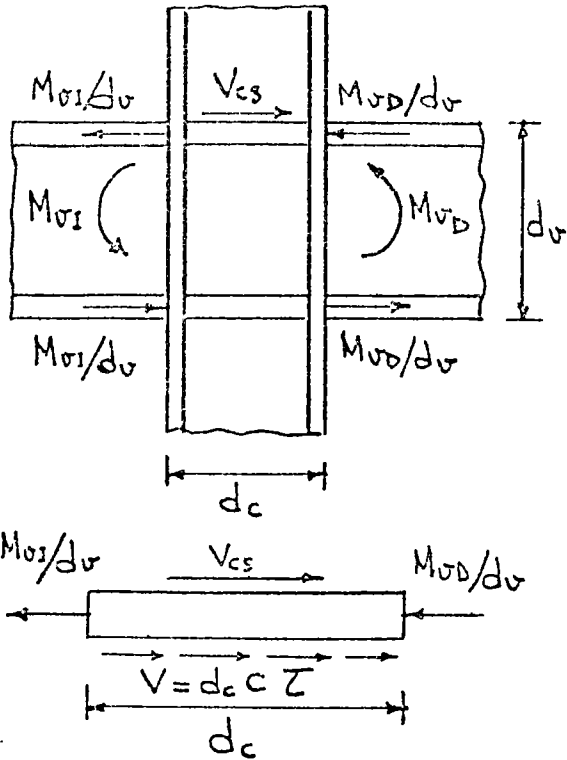


$$q = \frac{b_c}{2} - \frac{m}{2}$$

$$h = \frac{b_v}{2} - \frac{m}{2}$$

$$p = 12 t_c$$

REFUERZO DEL ALMA POR CORTANTE. (CARGA ESTÁTICA)



AISC. Fuerza cortante de plastificación del alma  $V_y = 0.95 d_c C \sigma_y / \sqrt{3}$

Fuerza cortante que aplican las vigas  $T = \Sigma M / 0.95 d_v$

El flujo por cortante del tablero de alma se inicia cuando

$$\frac{\Sigma M}{0.95 d_v} = \frac{0.95 d_c C \sigma_y}{\sqrt{3}}$$

El alma no necesita refuerzo por cortante si  $C \geq \frac{\sqrt{3}}{\sigma_y} \frac{\Sigma M}{(0.95 d_c)(0.95 d_v)}$  (14)

MANUAL 41, ASCE. Del equilibrio del atiesador superior:

$$Z c d_c - \frac{M_{L1}}{d_v} - \frac{M_{R1}}{d_v} + V_{cs} = 0 \quad (15)$$

Sustituyendo Z por  $\sigma_y / \sqrt{3}$ , y despejando c:

$$c = \frac{\sqrt{3}}{\sigma_y d_c} \left( \frac{M_{L1} + M_{R1}}{d_v} - V_{cs} \right) \quad (16)$$

Esta ec. lleva a gruesos c de 15 a 20% menores que los calculados con la ec. (14).

El alma de la columna no se pandea por cortante si  $h_w/c \leq 70$ .

Si se toma en cuenta la compresión en la columna, el esfuerzo cortante de flujo se reduce a  $Z'_y = \frac{\sigma_y}{\sqrt{3}} \sqrt{1 - (P/P_y)^2}$  (20)

Teniendo en cuenta este valor, la ec. 16 se convierte en

$$c = \frac{\sqrt{3} \left( \frac{M_{L1} + M_{R1}}{d_v} - V_{cs} \right)}{\sigma_y d_c \sqrt{1 - (P/P_y)^2}} \quad (21)$$

EJEMPLOS. Revisense las conexiones viga-columna siguientes, y proyectese el refuerzo, en caso de que sea necesario.

		<u>PROPIEDADES DE LOS PERFILES</u>	
	W14x111	W18x50	<u>VIGAS</u> (W18x50), $d_v = 45.7\text{cm}$ ; $b_v = 19.1\text{cm}$ ; $t_v = 1.45\text{cm}$
AB36 en todo.	W14x111		<u>COL</u> (W14x111), $d_c = 36.5\text{cm}$ ; $b_c = 37.1\text{cm}$ ; $t_c = 2.22\text{cm}$ $c = 1.37\text{cm}$ ; $k = 3.97\text{cm}$

ZONA DEL PATÍN COMPRIMIDO.  $\frac{A_p}{t_v + 5k_c} = \frac{19.1 \times 1.45}{1.45 + 5 \times 3.97} = 1.30\text{cm} < 1.37$

No se necesitan atiesadores.

ZONA DEL PATÍN EN TENSION.  $0.4\sqrt{A_p} = 0.4\sqrt{19.1 \times 1.45} = 2.11\text{cm} < 2.22$

Tampoco se necesitan atiesadores.

REVISIÓN DEL ALMA POR CORTANTE. Se considerará la condición más crítica, correspondiente a la formación de articulaciones plásticas en las dos vigas. No se tendrá en cuenta la fuerza normal en la columna.

$$M_{p_v} = Z_{G_y} = 101 \times 36 = 3636 \text{ kin} = 363000 \text{ lbft} = 41.9 \text{ Tm}$$

$$\text{AISC. } c = \frac{\sqrt{3}}{\sigma_y} \frac{\epsilon M}{(0.95d_c)(0.95d_v)} = \frac{1.92 \epsilon M}{\sigma_y d_c d_v} = \frac{1.92 \times 2 \times 41.9 \times 10^5}{2530 \times 36.5 \times 45.7} = 3.81 \text{ cm} > 1.37$$

$$\text{ASCE. } c = \frac{\sqrt{3}}{\sigma_y d_c} \left( \frac{M_{v1} + M_{v2}}{d_v} - V_{cs} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2530 \times 36.5} \left( \frac{2 \times 41.9 \times 10^5}{45.7} \right) = 3.44 \text{ cm} > 1.37$$

Como no se conoce, se ha tomado  $V_{cs} = 0$ .

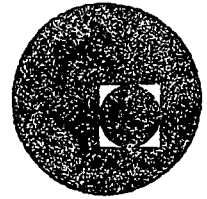
El alma puede reforzarse por medio de dos placas adheridas a ella, de espesor total igual a  $3.44 - 1.37 = 2.07\text{cm}$ .

Se usarán dos placas de  $3/8"$  ( $t = 0.95 \times 2 = 1.90\text{cm} \approx 2.07$ )

Para que no se pandeen localmente, la relación  $h/t$  de cada placa no debe exceder de 70.  $\frac{h}{t} = \frac{d_c - 2k}{t} = \frac{36.5 - 2 \times 3.97}{0.95} = 30.1 < 70$ . Correcto.



centro de educación continua  
división de estudios superiores  
facultad de ingeniería, unam



IV CURSO INTERNACIONAL DE INGENIERIA SISMICA

DISEÑO SISMICO DE EDIFICIOS

ESTRUCTURAS DE MAMPOSTERIA Y MADERA

DR. ROBERTO MELI PIRALLA

AGOSTO, 1978.

DISEÑO SISMICO DE EDIFICIOS  
TEMA: ESTRUCTURAS DE MAMPOSTERIA Y MADERA  
GUIA DE ESTUDIO

R. Meli

A. MAMPOSTERIA

1. INTRODUCCION (ver ref 1)

1.1 Comportamiento sísmico observado

Los daños causados por sismos intensos en construcciones de mampostería han sido con frecuencia muy severos y es común que el desempeño de estas construcciones se compare desfavorablemente con el de estructuras de acero y de concreto.

Hay que tomar en cuenta, sin embargo, que la mayoría de las fallas catastróficas han sido de construcciones de mampostería sin refuerzo que, además, casi siempre adolecían de defectos obvios de estructuración, lo cual refleja el hecho de que usualmente estas construcciones escapan de un diseño cuidadoso como el que es común para estructuras de concreto y acero. Además, si bien es cierto que las estructuras de mampostería, por ser muy rígidas y generalmente frágiles, son particularmente sensibles a los sismos, especialmente cuando estos tienen

epifocos cercanos y superficiales, también se ha comprobado que, con un refuerzo y confinamiento adecuados, puede hacerse que tales estructuras sean capaces de soportar deformaciones apreciables, aunque ello implique cierto agrietamiento de los muros.

Por otra parte los sistemas constructivos a base de muros de carga de mampostería representan, en la mayoría de los casos, la solución más conveniente para construcciones de vivienda económica unifamiliar o multifamiliar, y en general para construcciones de baja o mediana altura en las que se requiera una subdivisión del área total en espacios pequeños.

## 1.2 Sistemas estructurales a base de muros

Los muros de mampostería se emplean en distintas formas estructurales en las que difieren las solicitaciones que los afectan y el tipo de refuerzo; la identificación de los distintos tipos es importante para comprender su comportamiento estructural.

En construcciones cuya estructura principal está constituida por marcos de concreto o acero, es frecuente que existan muros de mampostería, generalmente confinados en todo su perímetro por los elementos de un marco. Ante cargas laterales, marco y muro actúan como una sola unidad estructural en la cual el muro proporciona la rigidez al actuar como diafragma, mientras que el marco tiene la función de resistir las cargas verticales y la flexión general, así como la de confinar el



muro.

En algunos casos el muro puede no tener columnas en sus extremos y estar confinado únicamente por los elementos horizontales del sistema de piso superior e inferior (por ejemplo en cubos de escaleras).

En otros tipos de estructuras los muros constituyen el único elemento vertical resistente y por lo tanto deben soportar el efecto de cargas verticales y laterales. El efecto de las cargas laterales puede visualizarse como la superposición de la flexión general de cada muro, considerado como un solo elemento a lo alto de todos los pisos, más el efecto de las restricciones al desplazamiento y las rotaciones que en él induce el sistema de piso en cada nivel; el resultado son fuerzas cortantes, momentos flexionantes y fuerzas normales de tensión o compresión variables en cada nivel.

En zonas sísmicas es usual, especialmente en México, que los muros de carga estén confinados por elementos de concreto verticales (castillos) y horizontales (dadas) de espesor igual al del muro, con el fin de proporcionar a este un confinamiento que mejore su ductilidad y le permita soportar repeticiones de cargas sin deteriorarse excesivamente.

Para muros de piezas huecas se provee generalmente cierto refuerzo vertical y horizontal en el interior de los huecos con el fin de incrementar la resistencia a esfuerzos de tensión, verticales o diagonales,

y en parte mejorar también la ductilidad del comportamiento. Este re fuerzo interior puede ser adicional al refuerzo exterior a base de castillos y dalas.

## 2. PROPIEDADES DE PIEZAS Y MORTEROS

Las piezas que se usan para mampostería varían en cuanto al material de que están hechas (barro, concreto, etc), en cuanto a la forma (macizas, huecas) y en cuanto a diversas propiedades.

El índice de calidad más empleado para las piezas es su resistencia a compresión; sin embargo otras propiedades tienen gran importancia en el comportamiento de la mampostería: la adherencia con el mortero, la absorción, la estabilidad volumétrica, etc.

Las propiedades de las piezas tienen gran variabilidad. La tabla 1 muestra los resultados de un muestreo realizado en el Distrito Federal. Se aprecia como para materiales de producción artesanal la dispersión es altísima mientras que esta es más reducida en piezas producidas industrialmente. (ver ref 2)

La calidad de los morteros también se mide a través de su resistencia en compresión, aunque probablemente sean más importantes para su comportamiento estructural, la adherencia con la pieza, el módulo de elasticidad y la manejabilidad. La tabla 2 muestra resultados de resistencias de morteros con distintos proporcionamientos. La tabla 3 con

tiene los morteros recomendados en las Normas para Mampostería del Reglamento del Distrito Federal (ref 3); no se admiten morteros a base únicamente de cal y con resistencias inferiores a  $40 \text{ kg/cm}^2$ .

### 3. PROPIEDADES MECANICAS DE LA MAMPOSTERIA

Las propiedades de la mampostería que mas interesan son su resistencia en compresión y en cortante y sus módulos de elasticidad y de cortante. La resistencia en tensión suele considerarse nula para fines de diseño.

La resistencia en compresión depende principalmente de las propiedades de las piezas y en menor medida de las características del mortero que las une.

La resistencia en compresión del conjunto (eliminando efectos de esbeltez y excentricidad) se mide en pequeñas pilas, (ver ref 4) ensayadas en máquina universal. La resistencia aumenta en forma lineal con la de la pieza y es del orden del 50% de esta para las piezas de concreto y 35% para las de barro. Las Normas admiten tres formas para la determinación de este parámetro: directamente a partir del tipo de pieza (tabla 4); a partir de la resistencia medida de las piezas (tabla 5) y a partir de resultados de ensayos en pilas.

Los tres procedimientos están en orden creciente de aproximación.

De las curvas carga-deformación obtenidas en los ensayos

se aprecia que el comportamiento es aproximadamente lineal y frágil. Se define un módulo de elasticidad que puede predecirse aproximadamente con las expresiones

$$E = 600 f_m, \text{ para piezas de concreto}$$

$$E = 400 f_m, \text{ para piezas de barro}$$

La resistencia a fuerzas cortantes está regida por la falla a través de grietas inclinadas debidas a tensiones diagonales. Estas grietas se forman generalmente a lo largo de las juntas, propiciadas por la debilidad de la unión entre piezas y mortero; solo con piezas de baja resistencia y buena adherencia con el mortero, las grietas atraviesan indistintamente piezas y mortero.

La resistencia a este efecto se puede determinar por medio de ensayos de muros sujetos a cargas laterales o por ensayos de muretes a compresión diagonal. Resultados de ensayos de este último tipo han dado lugar a los valores mostrados en la tabla 4 para el esfuerzo cortante resistente. Se aprecia como las resistencias mayores se obtienen para las piezas con mejor adherencia con el mortero. De estos mismos ensayos se determina el módulo de rigidez al cortante el cual resulta aproximadamente igual al 30% del de elasticidad.

#### 4. COMPORTAMIENTO DE MUROS ANTE CARGAS LATERALES

En un muro sujeto a cargas laterales en su plano la falla puede ocurrir por flexión, o por cortante. Cuando la falla es por flexión esta

suele ser bastante dúctil si existe refuerzo vertical adecuadamente colocado y anclado, mientras que si la falla es por cortante esta es frágil aunque puede proporcionarse cierta ductilidad con refuerzo en el interior del muro o en los extremos.

En cuanto al comportamiento ante cargas alternadas este puede ser bastante satisfactorio cuando la falla es por flexión, pero cuando rige el cortante el deterioro es muy notable. Este es más grave cuando solo hay refuerzo en el interior de piezas huecas (fig 1) que cuando hay confinamiento con dalas y castillos (fig 2). Solo se tiene un comportamiento satisfactorio cuando el muro está rodeado por un marco robusto que sea capaz de tomar las fuerzas cortantes que se presentan en las esquinas después del agrietamiento del muro, (fig 3). Es notable el aumento en deterioro que se tiene cuando los muros son de piezas huecas con respecto a los de piezas macizas.

## 5. DISEÑO SISMICO DE MUROS

Nos referiremos a los procedimientos especificados por las Normas del Reglamento del D.F. Se distinguen tres tipos de muros según su es-tructuración (refuerzo): confinados, reforzados interiormente y muros diafragma.

Los muros confinados son los que cuentan con dalas y castillos en cantidad y distribución suficiente como para mantener la capacidad del mu

ro después de su agrietamiento. (ver Anexo)

Los muros con refuerzo interior tienen barras de refuerzo vertical en el interior de los huecos y horizontal en piezas especiales; Con esto se incrementa la resistencia a cargas laterales y se da cierta ductilidad.

Las cuantías de refuerzo que se exigen en esta modalidad son relativamente altas y superiores a las usuales en la práctica en México.

Los muros diafragma son los que poseen columnas y vigas de suficiente rigidez y resistencia para que el muro trabaje como un puntal de compresión.

La fuerza cortante resistente se especifica como

$$V_R = F_R (0.5 v^* A_T + 0.3P) \leq 1.5 F_R v^* A_T$$

en que  $F_R$  es un factor de seguridad (0.6 según el reglamento),  $A_T$  el área transversal bruta,  $P$  la carga axial sobre el muro y  $v^*$  es el esfuerzo cortante resistente según el tipo de mampostería, ver tabla 6.

Para mampostería con refuerzo interior que cumpla con los requisitos prescritos por el Reglamento puede incrementarse en 50% el valor de  $v^*$ . Cuando no se tome en cuenta efecto de la carga axial puede emplearse la expresión simplificada

$$V_R = F_R 0.7 v^* A_T$$

Para muros diafragma la resistencia es mayor, debido a que al trabajar como puntales no se introducen en ellos esfuerzos por flexión. La resistencia está dada por

$$V_R = F_R (0.85v * A_T)$$

Además de la fuerza cortante, hay que revisar la flexocompresión en el plano del muro, lo cual puede hacerse con los procedimientos usuales en concreto reforzado o con fórmulas simplificadas incluidas en las normas.

El reglamento de diseño sísmico admite un factor de reducción por ductilidad de 2 para mampostería de piezas macizas confinada o trabajando como diafragma, de 1.5 para mampostería de piezas huecas con refuerzo interior y de 1 para mampostería no reforzada o cuyo refuerzo no cumple con los mínimos especificados por el reglamento. Esto hace que las fuerzas de diseño para la mampostería sean superiores a las que se prescriben para estructuras de acero y de concreto.

## 6. RECOMENDACIONES GENERALES PARA DISEÑO SISMICO

Debido a la fragilidad del material hay que ser particularmente cuidadoso en las precauciones que eviten concentraciones de esfuerzos, especialmente los de tensión.

Es importante una estructuración simétrica tanto en planta como en elevación. En planta para evitar torsiones y en elevación para evitar concentraciones de disipación de energía de sismo en unos pocos elementos.

La continuidad de la estructura es un aspecto importante. El techo de

be formar un diafragma rígido en el plano y estar ligado a los muros.

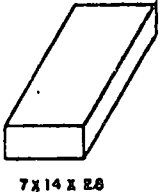
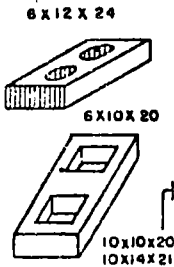
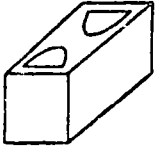
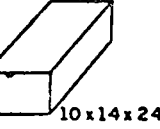
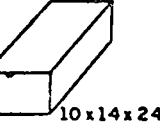
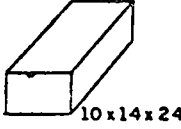
Hay que evitar los huecos o reforzar su periferia. Hay que evitar el empleo de piezas con altos porcentajes de huecos por su gran fragilidad y también el de aquellas que por su acabado superficial no permitan buena adherencia con el mortero.

#### REFERENCIAS

1. R. Meli "Comportamiento sísmico de muros de mampostería" Informe No. 350 del Instituto de Ingeniería, 1975.
2. R. Meli y O. Hernández "Propiedades de piezas para mampostería fabricadas en el D.F.", Informe No. 297, Instituto de Ingeniería. 1977
3. Diseño y construcción de estructuras de mampostería. Normas Técnicas Complementarias del Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal. Informe No. 403, Instituto de Ingeniería, 1977
4. R. Meli y A. Reyes "Propiedades mecánicas de piezas para mampostería" Informe No. 288 Instituto de Ingeniería, 1973



TABLA 8. RESULTADOS DE ENSAYES EN PIEZAS

Material	Geometría *	Procedencia	Clasificación	An/Ab	f <sub>p</sub> , en kg/cm <sup>2</sup> (1)				C, en porcentaje				Abs, en porcentaje	(2) γ <sub>s,30</sub> <sup>o</sup> ton/m <sup>3</sup>	
					Etapas I	Etapas II	Etapas III	Etapas IV	Etapas I	Etapas II	Etapas III	Etapas IV			
Tabique rojo recocido		T 1	B	1.00	52	64	56	58	26	23	24	19	20	1.45	
		T 2	C	1.00	52				29					24	1.37
		T 3	C	1.00	51				34					25	1.37
		T 4	B	1.00	114	112	109		34	25	23			21	1.55
		T 5	C	1.00	60	64			21	17				25	1.38
		T 6	C	1.00	85	109			23	52				21	1.50
		T 7	C	1.00	93	76	66	88	58	19	24	11		25	1.45
		T 8	C	1.00	33				32					26	1.34
		T 9	C	1.00	53				45					26	1.40
		T 10	C	1.00	45	43	47	55	28	22	10	21		25	1.40
		T 11	C	1.00	36	45	51	45	32	28	20	28		27	1.31
Tabique extruido perforado verticalmente		TE1	A	0.57	215	226			8	11			16	1.75	
		TE2	A	0.63	428	361	394	295	14	25	20	15	10	1.96	
		TE3	B	0.69	225				17					19	1.65
		TE4	B	0.59	181	156			16	15				17	1.75
		TE2	A	0.67	376	308	365	329	11	15		16	15	12	1.85
		TE3	B	0.59	169				24					20	1.61
		TE5	A	0.65	486	473	575	540	21	19	15	20	4	2.06	
		TE1	A	0.57	129	143			15	15				17	1.66
		TE5	A	0.59	426	400			26	11				6	2.20
		TE4	B	0.65	417					12				7	2.02
TE5	A	0.61	489	466	572	519	22	16	18	15	5	2.13			
Bloque ligero		B 1	A	0.56	37	35			10	12			29	1.21	
		B 2	A	0.59	42	49			16	12			35	1.09	
		B 3	A	0.63	43	41			24	22			24	1.23	
		B 4	B	0.54	17				23				33	1.01	
		B 1**	A	1.00	44	42			17	26			40	0.95	
Bloque intermedio		B 1	A	0.56	62	77			24	7			15	1.61	
		B 2	A	0.59	41	74			14	14			21	1.50	
		B 3	A	0.61	82	80			28	21			15	1.70	
		B 4	B	0.54	21				20				27	1.32	
		B 5	C	0.59	40				18				16	1.45	
Bloque pesado		B 1	A	0.56	135	101			31	15			9	2.12	
		B 2	A	0.59	146	143	132	108	23	10	28	7	11	2.15	
		B 3	A	0.63	100	128	104	81	20	21	20	15	10	2.09	
		B 4	B	0.54	71				13				14	1.79	
Tabicón		TC 1	B	1.00	31	65	68	42	24	14	11	15	25	1.45	
		TC 2	A	1.00	76	123	66	101	35	34	19	17	27	1.42	
		TC 3	B	1.00	59	63			23	27			19	1.42	
		TC 4	B	1.00	36				23				28	1.05	
		TC 5	C	1.00	48	55			36	22			16	1.60	
Sílico calcáreo	7x12x24	S	A	1.00	201	177			15	11			15	1.79	

A Fábrica grande y adecuado control de calidad

B Fábrica mediana y nulo control de calidad

C Fábrica rudimentaria \*\* Bloque macizo

An/Ab Relación de área neta sobre área bruta

f<sub>p</sub> resistencia promedio de la pieza

C coeficiente de variación

s peso volumétrico seco

\* Medidas nominales

(1) sobre área bruta medida

(2) sobre volumen neto

TABLA 2 RESULTADOS DE ENSAYES DE MORTEROS ELABORADOS POR UN MISMO ALBAÑIL

PROPORCIONAMIENTO cemento:cal:arena	Número de muestras	Resistencia media, en kg/cm <sup>2</sup>	Coefficiente de variación, en %	Percentil 2%, en kg/cm <sup>2</sup>
1:0:3	211	205	24	95
1:1/2:5	70	108	19	57
1:0:6	55	106	31	45
1:1:6	26	75	38	23

Los valores individuales son promedio de tres ensayos

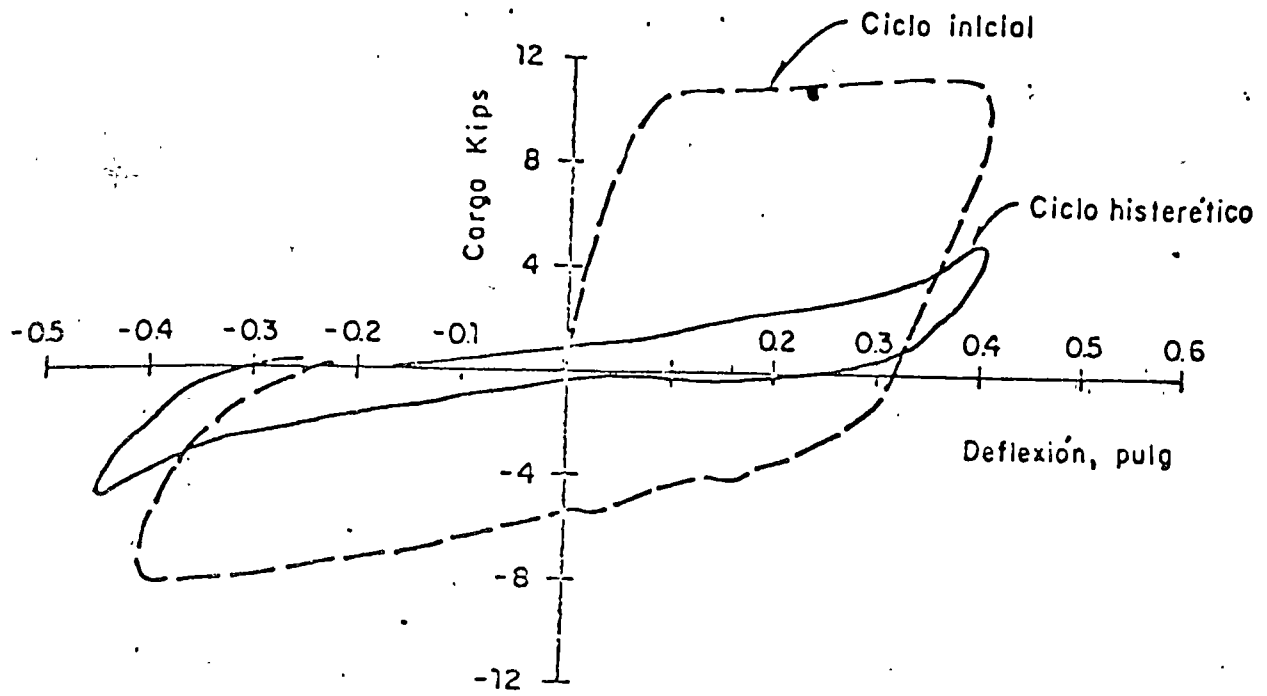
Tabla 3 PROPORCIONAMIENTOS MORTEROS EN VOLUMEN

Tipo Mortero	Partes Cemento	Partes Cemento Mampostería	Partes Cal	Partes Arena	Valor Típico $f_b^*$ kg/cm <sup>2</sup>
I	1	— 0 a 1/2	0 a 1/4 —	de 2.25 a 3 veces la suma de cementantes	125
II	1	— 1/2 a 1	1/4 a 1/2 —		75
III	1 —	— 1	1/2 a 1/4 —		40

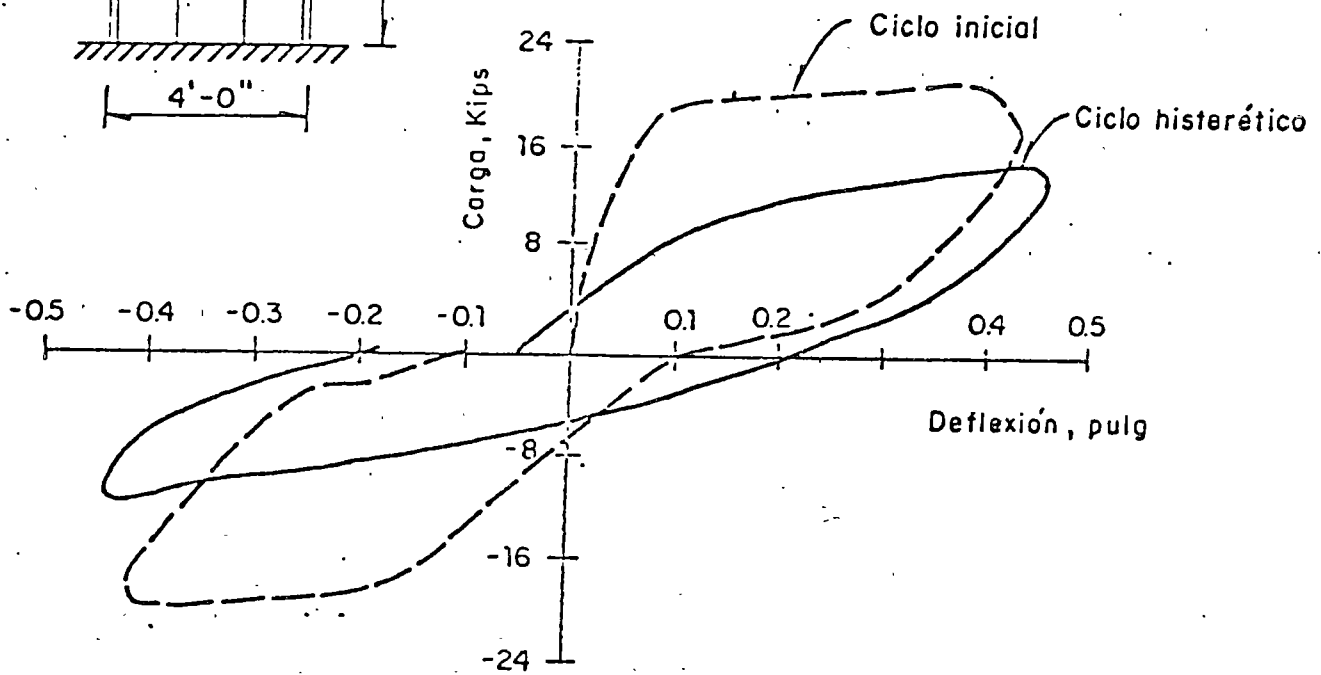
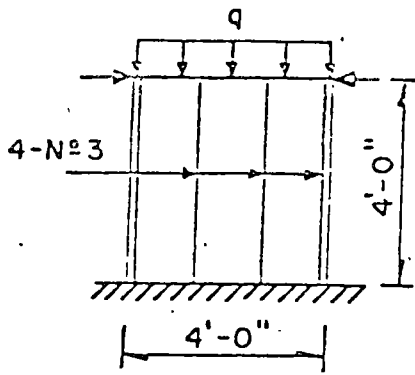
Tabla 4 PROPIEDADES MAMPOSTERIA

Pieza	Mortero	$f_m^*$	$v^*$	para corta duración	
				E	G
Tabique recocido	I	15	3.5	6000	1800
	II	15	3	600	1800
	III	15	3	6000	1800
Tabique extruido	I	40	3	16000	4800
	II	40	2	16000	4800
	III	30	2	12000	3600
Bloque Concreto Pesado	I	20	3.5	12000	3600
	II	15	2.5	9000	2700
	III	15	2.5	9000	2700

Esfuerzos en kg/cm<sup>2</sup>

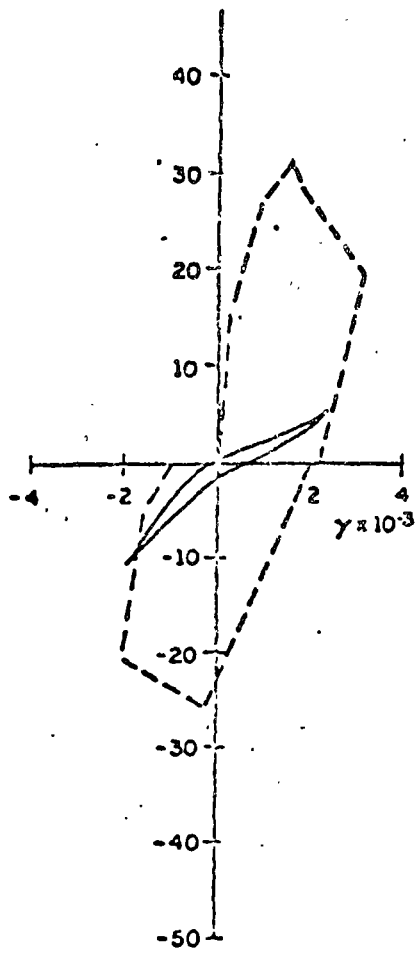


a) Muro sin carga vertical

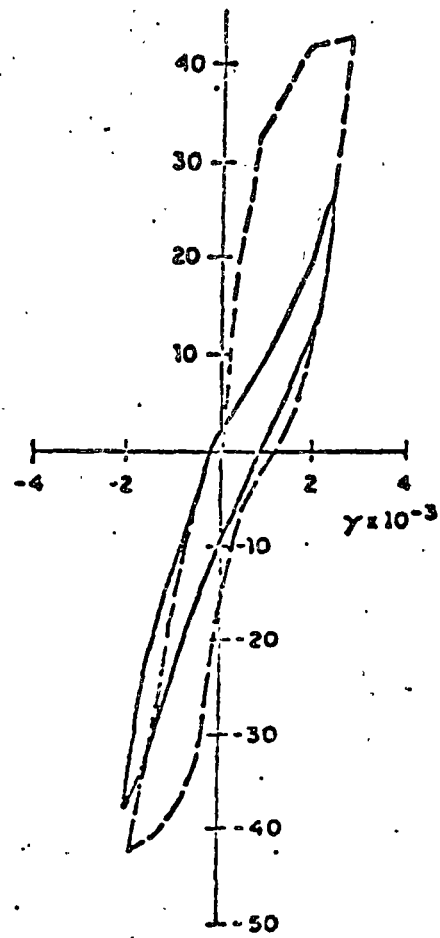


b) Muro con carga vertical,  $q = 125$  psi

Fig 1 Comportamiento histerético de muros con falla por flexión



a) Sin carga vertical



b) Carga vertical ( Esfuerzo de compresión 4.5 kg/cm<sup>2</sup>)

Fig 2 Comportamiento hysterético de muros con refuerzo interior. Falla por cortante

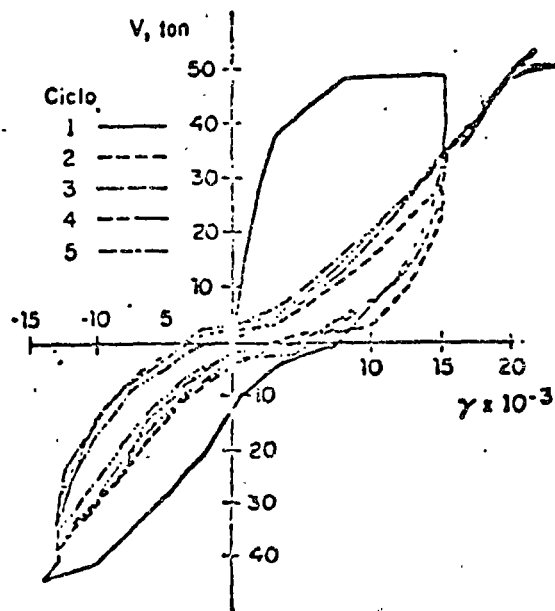


Fig 3 Comportamiento hysterético de muro con marco<sup>6</sup>

REQUISITOS DE DISEÑO POR CARGAS LATERALES DE LAS NORMAS TECNICAS  
PARA DISEÑO Y CONSTRUCCION DE ESTRUCTURAS DE MADERA DEL  
REGLAMENTO DE CONSTRUCCIONES PARA EL DISTRITO FEDERAL

4.5 Resistencia a cargas laterales

4.5.1 Consideraciones generales

La resistencia a cargas laterales de un muro deberá revisarse para el efecto de la fuerza cortante, del momento flexionante en su plano y eventualmente también de momentos flexionantes debidos a empujes normales a su plano.

Para fines de diseño por cargas laterales se distinguen los siguientes tipos de muros de acuerdo con su estructuración:

a) Muros-diafragma. Estos son los que se encuentran totalmente rodeados por vigas y columnas de un marco estructural y su función es rigidizarlo para el efecto de fuerzas laterales. Además las columnas y vigas, en una zona igual a una cuarta parte de su longitud libre medida a partir de cada esquina, deberán ser capaces de resistir, cada una, una fuerza cortante igual a la cuarta parte de la que actúa sobre el tablero.

b) Muros confinados. Estos son los que están reforzados con castillos y dadas que cumplen con los requisitos siguientes:

Las dadas o castillos tendrán como dimensión mínima el espesor del muro. El concreto tendrá una resistencia a compresión,  $f'_c$ , no menor de  $150 \text{ kg/cm}^2$ , y el refuerzo longitudinal estará formado por lo menos de tres barras, cuya área total no será inferior a  $0.2 f'_c/f_y$  por el área de castillo y estará anclado en los elementos que limitan al muro de manera que pueda desarrollar su esfuerzo de fluencia.

El área del refuerzo transversal no será inferior a  $\frac{1000s}{f_y d_c}$ , siendo  $s$  la separación de los estribos y  $d_c$  el peralte del castillo. La separación de los estribos no excederá  $1.5 d_c$  ni  $20 \text{ cm}$ .

Existirán castillos por lo menos en los extremos de los muros y en puntos intermedios del muro a una separación no mayor que vez y media su altura, ni  $4 \text{ m}$ .

Existirá una dada en todo extremo horizontal de muro, a menos que este último esté ligado a un elemento de concreto reforzado. Además existirán dadas en el interior del muro a una separación no mayor de  $3 \text{ m}$ .

Existirán elementos de refuerzo en el perímetro de todo hueco cuya dimensión exceda de la cuarta parte de la dimensión del muro en la misma dirección.

Además si la relación altura a espesor del muro excede de 30 deberán proveerse elementos rigidizantes que eviten la posibilidad de pandeo del muro, por cargas laterales.

c) Muros reforzados interiormente. Estos son muros reforzados con malla o barras corrugadas de acero, horizontales y verticales, colocadas en los huecos de las piezas, en ductos o en las juntas. Para que un muro pueda considerarse como reforzado deberán cumplirse los siguientes requisitos mínimos.

La suma de la cantidad de refuerzo horizontal,  $p_h$ , y vertical,  $p_v$ , no será menor que 0.002 y ninguna de las dos cantidades será menor que 0.0007. La cantidad de refuerzo horizontal se calculará como  $p_h = A_{sh}/st$ , donde  $A_{sh}$  es el refuerzo horizontal que se colocará en el espesor  $t$  del muro a una separación  $s$ ;  $p_v = A_{sv}/tL$ , en que  $A_{sv}$  es el área total de refuerzo que se colocará verticalmente en la longitud  $L$  del muro.

Todo espacio que contenga una barra de refuerzo deberá tener una distancia libre mínima entre el refuerzo y las paredes de la pieza igual a la mitad del diámetro de la barra y deberá ser llenado a todo lo largo con mortero o concreto. La distancia libre mínima entre una barra de refuerzo y el exterior del muro será de 1.5 cm o una vez el diámetro de la barra, la que resulte mayor.

Para el colado de los huecos donde se aloje el refuerzo podrá emplearse el mismo mortero que se usa para pegar las piezas, o un concreto de alto revenimiento, con agregado máximo de 1 cm y resistencia a compresión no menor de  $75 \text{ kg/cm}^2$ . El



hueco de las piezas tendrá una dimensión mínima mayor de 5 cm y un área no menor de  $30 \text{ cm}^2$ .

Deberá colocarse por lo menos una varilla No. 3 en dos huecos consecutivos en todo extremo de muros, en las intersecciones entre ellos o a cada 3 m. El refuerzo vertical y horizontal en el interior del muro tendrá una separación no mayor de 6 veces el espesor del mismo ni 90 cm, la menor de ellas.

Cuando los muros transversales lleguen a tope, sin traslape de piezas, será necesario unirlos mediante dispositivos que aseguren la continuidad de la estructura.

El refuerzo horizontal debe ser continuo en la longitud del muro y anclado en sus extremos. Se deberán cumplir los mismos requisitos de anclaje que para concreto reforzado. Deberá haber refuerzo consistente en una barra No. 4 o su equivalente, alrededor de toda abertura cuya dimensión exceda de 60 cm en cualquier dirección.

La relación altura/espesor de estos muros no será superior a 30, a menos que se provean elementos rigidizantes que eviten la posibilidad de pandeo del muro. Deberá haber una supervisión continua en la obra que se asegure que el refuerzo esté colocado de acuerdo a lo indicado en planos y que los huecos en que se aloja el refuerzo sean colados completamente.

d) Muros no reforzados. Se considerarán como muros no reforzados aquellos que no tengan el refuerzo necesario para ser incluidos en alguna de las tres categorías anteriores.

#### 4.5.2 Esfuerzo cortante medio de diseño

La determinación de la fuerza cortante resistida por la mampostería se basa en el esfuerzo cortante medio de diseño,  $v^*$ , el cual se tomará de la tabla del inciso 3.3.

Para materiales no cubiertos en la tabla mencionada, la resistencia a cargas laterales se fijará con base en resultados de ensayos a satisfacción del Departamento.

#### 4.5.3 Fuerza cortante resistida por la mampostería

La fuerza cortante resistente de diseño se determinará como:

a) Para muros diafragma

$$V_R = F_R (0.85 v^* A_T)$$

b) Para otros muros

$$V_R = F_R (0.5 v^* A_T + 0.3 P) \leq 1.5 F_R v^* A_T$$

en que

P es la carga vertical que actúa sobre el muro, sin multiplicar por el factor de carga

Para muros reforzados interiormente de acuerdo con los requisitos de 4.5.1 c), se tomará  $v^*$  como 1.5 veces el valor medido en los ensayos para mampostería sin refuerzo o el consignado en la tabla del inciso 3.3.

El factor de reducción de resistencia,  $F_R$ , se tomará como:

0.6 para muros diafragma, muros confinados y muros con refuerzo interior que cumplan con los requisitos de 4.5.1

0.3 para muros no reforzados

#### 4.5.4 Contribución del refuerzo

No se considerará ninguna contribución a la resistencia a fuerza cortante por efecto de los castillos y dalas que es necesario colocar en los muros para que

estos puedan considerarse confinados, de acuerdo con lo especificado en 4.5.1 b.

#### 4.5.5 Resistencia a flexocompresión en el plano del muro

La resistencia a flexión y a flexocompresión en el plano del muro se calculará, para muros sin refuerzos, según la teoría de resistencia de materiales suponiendo una distribución lineal de los esfuerzos en la mampostería. Se considerará que la mampostería no resiste tensiones y que la falla ocurre cuando aparece en la sección crítica un esfuerzo de compresión igual a  $f_m^*$ .

La capacidad a flexión o flexocompresión en el plano de un muro con refuerzo interior o exterior se calculará con un método de diseño basado en las hipótesis estipuladas en 4.4.5.

Para muros reforzados con barras colocadas simétricamente en sus extremos, las fórmulas simplificadas siguientes dan valores suficientemente aproximados y conservadores del momento resistente de diseño.

Para flexión simple, el momento resistente se calculará como

$$M_o = F_R A_s f_y d'$$

donde

$A_s$  es el área de acero colocada en el extremo del muro

$d'$  la distancia entre los centroides del acero colocado en ambos extremos del muro

Cuando exista carga axial sobre el muro, el momento de la sección se modificará de acuerdo con la ecuación.

$$M_R = M_o + 0.30 P_U d \quad ; \quad \text{si } P_U \leq \frac{P_R}{3}$$

$$M_R = (1.5 M_o + 0.15 P_R d) \left(1 - \frac{P_U}{P_R}\right); \text{ si } P_U > \frac{P_R}{3}$$

donde

$P_U$  es la carga axial de diseño total sobre el muro, que se considerará positiva si es de compresión

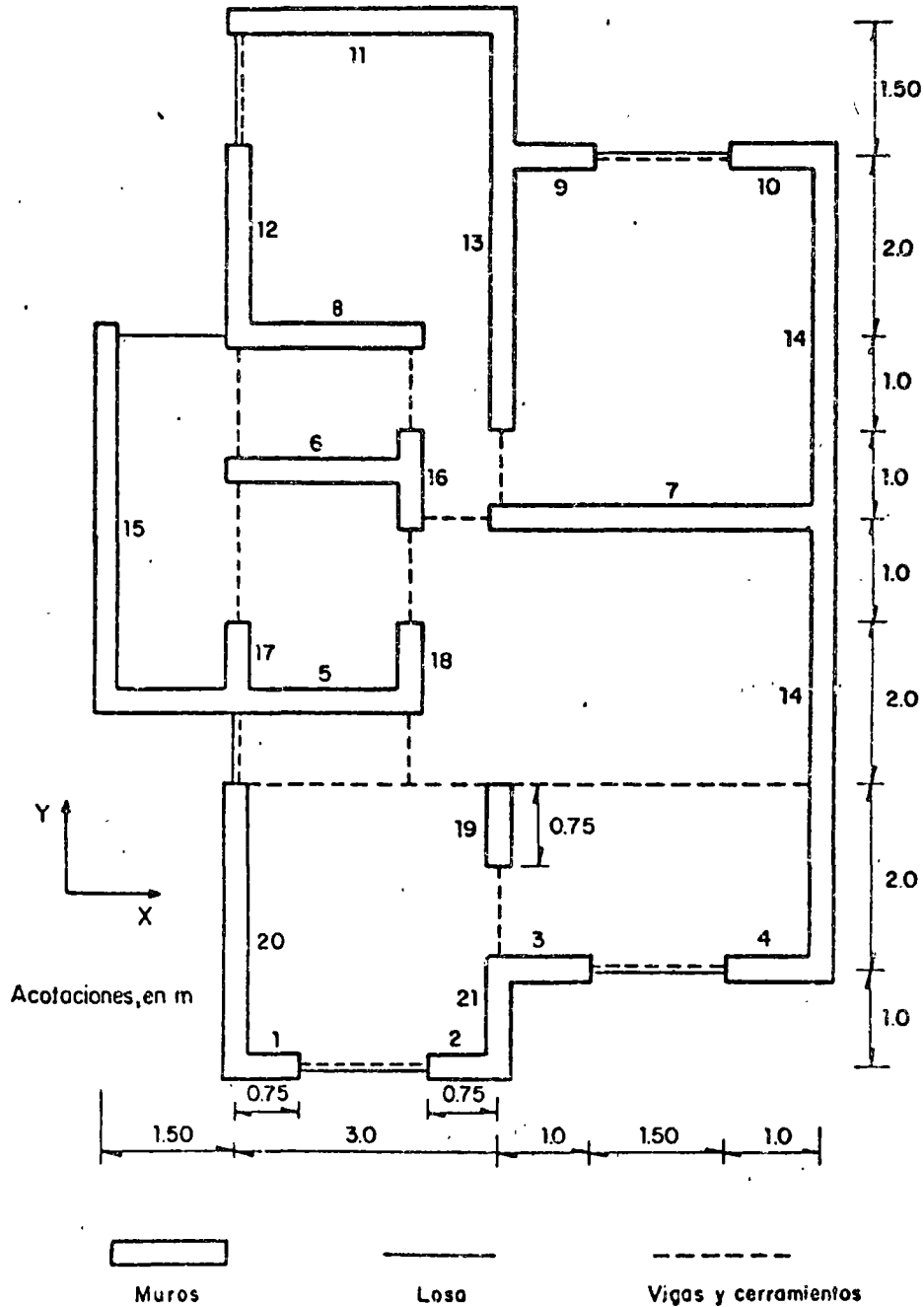
$d$  el peralte efectivo del refuerzo de tensión

$P_R$  la resistencia a compresión axial

$F_R$  en este caso igual a 0.6

DATOS

Construcción para vivienda con dos niveles idénticos en planta, ubicada en zona de terreno compresible del Distrito Federal



Area losa en cada nivel =  $73.5 \text{ m}^2$

Altura libre de entrepiso = 2.35 m

Muros de tabique rojo recocido, reforzados con castillos y dalas, Mortero 1:1:6, cemento : cal : arena

Espesor nominal de los muros 14 cm

## CARGAS

1 Azotea: carga muerta  $350 \text{ kg/m}^2$   
 carga viva  $100 \text{ kg/m}^2$  (para diseño por carga vertical);  $70 \text{ kg/m}^2$  (para  
 diseño por sismo)

2 Primer piso: carga muerta  $325 \text{ kg/m}^2$   
 carga viva  $170 \text{ kg/m}^2$  (para diseño por carga vertical);  $90 \text{ kg/m}^2$  (para  
 diseño por sismo)

Peso muros  $450 \text{ kg/m}$

Longitud total de muros en planta =  $46.7 \text{ m}$

Carga total en muros de planta baja para diseño por cargas verticales

$$W = (350 + 100) 73.5 + (325 + 170) 73.5 + 450 \times 46.7 \times 2 = 111\,500 \text{ kg}$$

Carga total en muros de planta baja para diseño por sismo

$$W_s = (350 + 70) 73.5 + (325 + 90) 73.5 + 450 \times 46.7 \times 2 = 103\,000 \text{ kg}$$

## PROPIEDADES DEL MATERIAL

3  $f_m^* = 15 + 4 = 19 \text{ kg/cm}^2$

4  $v^* = 3 \text{ kg/cm}^2$

## REVISION POR SISMO

5 Se cumplen los requisitos para el empleo del método simplificado de diseño sísmico

6  $c = 0.09$

7  $V_X = V_Y = c W_s = 0.09 \times 103 = 9.3 \text{ ton}$

$$V_u = 1.1 V = 10.2 \text{ ton}$$

## RESISTENCIA EN DIRECCION X

$$8 \quad V_{RX} = F_R (0.7 v^*) A_T$$

$$A_T = t \sum L_i F_i$$

De tabla adjunta  $\sum L_i F_i = 15.86 \text{ m} = 1586 \text{ cm}$

$$V_{RX} = 0.6 \times 0.7 \times 3 \times 14 \times 1586 = 28\,000 \text{ kg} > 10\,200 \text{ kg}; \text{ la resistencia es adecuada}$$

En dirección Y la longitud de muros es mayor (22.42 m), por tanto la seguridad contra sismo será adecuada

## REVISION POR CARGAS VERTICALES

9 Revisión de la resistencia total

$$W_U = 1.4 W = 1.4 \times 111.5 = 156.1 \text{ ton}$$

$$W_R = F_R F_E f_m^* A_T$$

$$10 \quad F_E A_T = t \sum F_E L_i$$

De la tabla adjunta

$$\sum F_E L_i = 30.83 \text{ m} = 3083 \text{ cm}$$

$$W_R = 0.6 \times 19 \times 14 \times 3\,083 = 492\,000 \text{ kg} > 156\,000 \text{ kg}; \text{ adecuada}$$

11 Revisión de muros individuales

Se hace en la tabla adjunta. Resulta que para el muro 19 la resistencia es insuficiente.

Esto puede remediarse aumentando la longitud de este muro, construyéndolo de un material más resistente en compresión o diseñando los castillos como columnas para que tomen la carga vertical actuante.

### REFUERZO

- 12 La distribución propuesta de castillos se muestra en el croquis siguiente. No se requieren dalas intermedias.

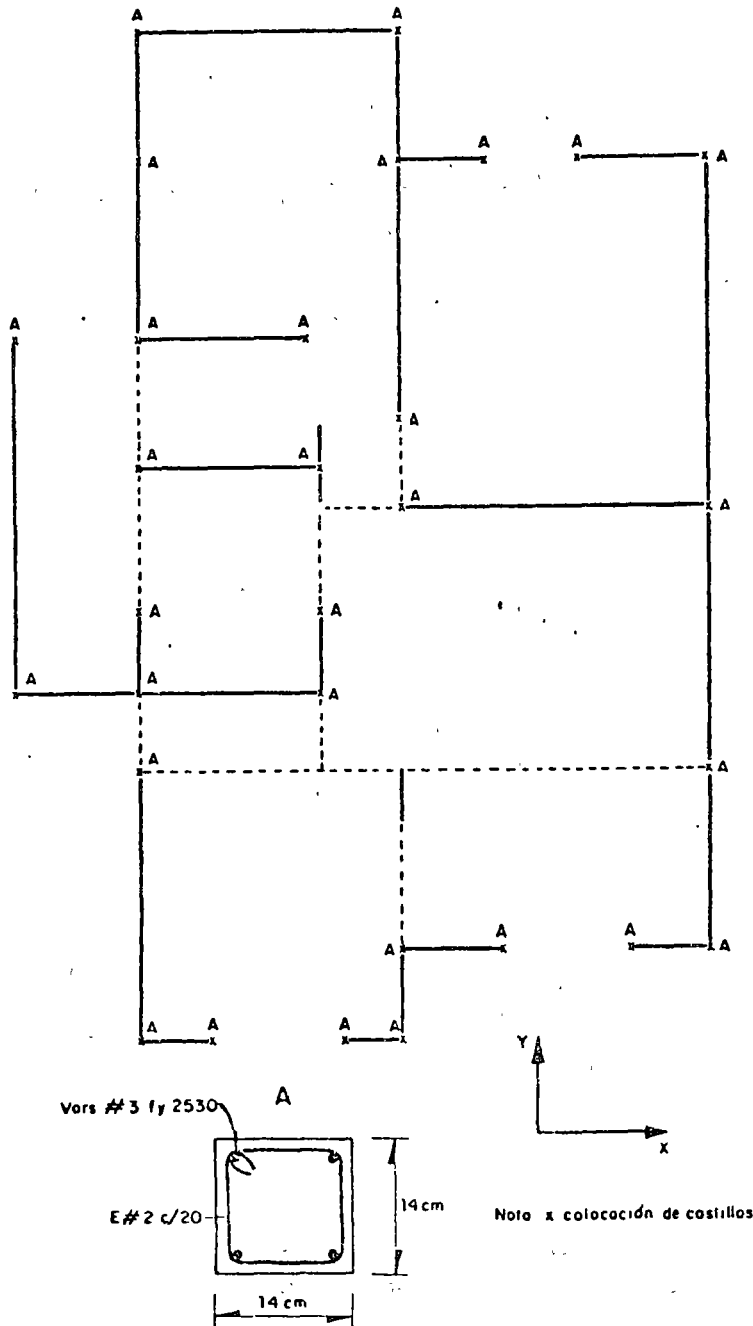




TABLA 1. DATOS PARA LA REVISION DE LA RESISTENCIA DE LOS MUROS

Muro (1)	Longitud $L_i$ , m	Area tributaria, $m^2$ (2)	$F_E$ (3)	$F_i$ (4)	$F_E \times L_i$	$F_i \times L_i$	Carga viva, $kg/m^2$ (5)	Carga vertical, kg		
								actuante	resistente(6)	
Dirección X	1	0.75	1.2	0.6	0.18	0.45	0.14	500	3090	7180
	2	0.75	1.2	0.6	0.18	0.45	0.14	500	3090	7180
	3	1.0	1.3	0.6	0.32	0.60	0.32	490	3560	9580
	4	1.0	1.3	0.6	0.32	0.60	0.32	490	3560	9580
	5	3.5	4.5	0.7	1.00	2.80	3.50	320	11310	39100
	6	2.0	2.0	0.7	1.00	1.40	2.00	420	5870	22300
	7	3.5	7.5	0.7	1.00	2.45	3.50	270	15390	39100
	8	2.0	3.2	0.7	1.00	1.40	2.00	350	7560	22300
	9	1.0	1.5	0.6	0.32	0.60	0.32	460	3850	9580
	10	1.25	1.5	0.6	0.50	0.75	0.62	460	4170	11970
	11	3.0	2.3	0.6	1.00	1.80	3.00	400	7560	28700
Suma	19.75				13.30	15.86				
Dirección Y	12	2.0	3.0	0.6	1.00	1.20	2.00	360	7290	19100
	13	3.0	7.0	0.7	1.00	2.10	3.00	280	14100	33500
	14	9.0	12.0	0.7	1.00	6.30	9.00	240	28400	100500
	15	4.0	3.5	0.7	1.00	2.80	4.00	340	10500	44700
	16	1.0	2.8	0.7	0.32	0.70	0.32	370	5750	11200
	17	1.0	1.5	0.7	0.32	0.70	0.32	460	3850	11200
	18	1.0	3.5	0.7	0.32	0.70	0.32	340	6720	11200
	19	0.75	7.5	0.7	0.18	0.53	0.14	270	11900	8400
	20	3.0	3.5	0.6	1.00	1.80	3.00	340	9240	33500
	21	1.0	2.0	0.7	0.32	0.70	0.32	420	4330	28700
Suma	25.75				17.53					
Suma total					30.83					

- (1) La numeración corresponde a la identificación del plano de la hoja 1
- (2) Area tributaria de losa en cada nivel
- (3) Factor de reducción por excentricidad y esbeltez dado en el inciso 3.2
- (4)  $F_i = (1.33 L_i/h)^2$ ; siendo  $h = 2.35$  m
- (5)  $w_{Vm} = 120 + 420/\sqrt{A}$ ; A es el área tributaria de la columna 2
- (6)  $W_u = 1.4 ((350 + 100) A + (325 + w_{Vm}) A + 2 \times 450 \times L_i)$
- (7)  $W_R = F_R F_E F_m^* A_t$

## COMENTARIOS

1. Carga viva para azoteas con pendiente menor de 5%. Art 227 del Reglamento
2. Carga viva para áreas destinadas a habitación  $w_{Vm} = 120 + 420 A^{-\frac{1}{2}}$ . Se considera el área total de la planta  $A = 73.5 \text{ m}^2$
3. Resistencia a compresión,  $f_m^*$ , tomada de la tabla del inciso 2.4.1c de estas normas; para tabique rojo y mortero Tipo III,  $f_m^* = 15 \text{ kg/cm}^2$ ; se añaden  $4 \text{ kg/cm}^2$  según lo estipulado en el inciso 2.4.1e) para muros con dadas y castillos que cumplen los requisitos necesarios para considerar los muros como confinados.
4. Resistencia en cortante tomada de la tabla del inciso 3.3 de estas normas para los materiales en cuestión.
5. Se cumplen los requisitos del Art 238 del Reglamento para el empleo del método simplificado de diseño sísmico, relativos a que existan dos muros paralelos que cubren más de 50% de la longitud de la construcción, y a los límites de altura y de relación de lados de la construcción.
6. Coeficiente sísmico de la tabla del Art 239 del Reglamento, para zona III, muros de piezas macizas y altura entre 4 y 7 m.
7. Según el método simplificado de diseño sísmico solo hay que verificar, en cada dirección, que la suma de la fuerza cortante de todos los muros sea igual o mayor que la actuante calculada multiplicando el coeficiente sísmico por el peso de la construcción arriba del nivel en estudio. Solo se revisarán los muros de planta baja, ya que los de primer nivel son obviamente menos críticos.
8. El Art 239 citado especifica que la contribución a la resistencia de muros cuya relación altura a longitud exceda de 1.33 debe reducirse afectándola del coeficiente  $(1.33 L/h)^2$ . Aquí se prefiere emplear una longitud reducida de muro, afectada por el factor  $F_i = (1.33 L/h)^2$ . Los valores para cada muro se obtienen en la tabla adjunta. Un procedimiento alternativo que resulta práctico y conservador es el de desprestigiar la contribución de los muros cuya relación altura a longitud es superior a 1.33.
9. Se requiere revisar que cada muro sea capaz de soportar la carga que sobre él actúa; sin embargo, resulta útil e indicativo revisar el margen de seguridad global de la resistencia a carga vertical comparando la carga vertical actuante con la suma de las resistencias de todos los muros. Este cálculo se hará solo para los muros de planta baja.
10. El factor  $F_E$  afecta la resistencia de los muros a carga vertical por efecto de excentricidad y esbeltez. Al igual que para la resistencia por sismo, resulta cómodo emplear una longitud equivalente de muro, multiplicando la real por el factor  $F_E$  obtenido del inciso 3.2; los cálculos se muestran en la tabla adjunta.

11. La revisión de muros individuales implica el cálculo de la carga viva de diseño para cada uno según su área tributaria (columna 6 de la tabla adjunta) y de la carga actuante sobre cada muro. La resistencia se calcula en la misma forma que para la revisión global.
12. Para que sean aplicables los métodos y los factores de seguridad adoptados el muro debe cumplir los requisitos para mampostería confinada del inciso 4.5.1 b)

## II. ESTRUCTURAS DE MADERA

Los usos estructurales más frecuentes de la madera son en techos de construcciones industriales o de vivienda, en los cuales las estructuras de madera no están sujetas a fuerzas sísmicas importantes. En algunos países son frecuentes las viviendas en que tanto los elementos verticales como los horizontales son de madera.

En general el comportamiento observado ante temblores importantes de las estructuras de madera ha sido bueno. Este buen desempeño se atribuye principalmente a que se trata de construcciones muy ligeras en las que las fuerzas de inercia inducidas por el sismo son pequeñas.

Las fallas que se han presentado por efectos de sismo son atribuibles casi exclusivamente a uno de estos factores.

a) Degradación de la madera por efecto de intemperismo o por ataques de insectos; esto es particularmente grave en la madera en contacto con el suelo. Un ejemplo dramático es la falla de cientos de construcciones de "taquezal" en Managua en 1972.

b) Conexiones inadecuadas de los elementos entre sí y falta de anclaje con la cimentación.

Daños importantes han ocurrido también por las grandes deformaciones que se han requerido para que alguna estructura de madera disipara la energía del sismo y que han causado falla en elementos no estructurales frágiles.

Como se ha hecho notar en un tema anterior, la madera es un material con comportamiento frágil ante cualquier modo de falla que se puede presentar (tensión,

compresión, cortante, etc). Aunque esto es una grave desventaja desde el punto de vista del comportamiento sísmico, existen dos circunstancias que mitigan la situación: la resistencia de la madera aumenta sensiblemente cuando las cargas se aplican dinámicamente (ver fig 1) y el comportamiento ante cargas cíclicas muestra un amortiguamiento notable (amortiguamiento viscoso equivalente de 8 a 10% (ver fig 2) y no presenta deterioro de resistencia hasta la carga máxima. Adicionalmente al amortiguamiento propio del material, se tiene alta disipación de energía a través de movimientos en las conexiones, lo cual hace que sean típicos amortiguamientos totales equivalente de entre 15 y 20%. Lo anterior permite reducir notablemente los espectros elásticos de diseño construidos generalmente para amortiguamiento del orden de 5%. El reglamento del Distrito Federal acepta un factor de reducción de cuatro para construcciones de madera.

Por tratarse de un material natural, la variabilidad de las propiedades mecánicas de la madera es grande. En países en que el uso estructural de la madera es amplio, se adoptan procedimientos de clasificación de los elementos que aseguran una menor variación en las propiedades. La variabilidad es también grande en los productos industriales, como la manera laminada (triplay), por variación de la prima empleada y de los adhesivos.

La ref 1 trata en forma muy clara y resumida sobre el diseño de estructuras de madera; de la pag 43 a 52 se describen las propiedades del material y en el capítulo 29 se trata el comportamiento estructural y el diseño.

Textos más completos sobre el diseño de estructuras de madera son las ref 2 y 3. El diseño según las normas del reglamento para el Distrito Federal se presenta e

ilustra en la ref 4.

Ninguna de las publicaciones anteriores trata sin embargo el diseño sísmico de estas construcciones. Un breve pero muy claro tratamiento de este tema se encuentra en la ref 5 (pag 277 a 289).

Los sistemas estructurales más usuales en madera son las armaduras o las vigas paralelas para techos, en las que la principal función ante el efecto sísmico es la de constituir diafragmas rígidos en su plano que distribuyen las cargas a los elementos verticales resistentes. Es necesario por tanto un contraventeo en el plano de estos elementos para proporcionar dicha rigidez.

El marco rígido de la madera es relativamente poco empleado actualmente debido a la dificultad de lograr continuidad en las conexiones viga-columna y a la baja rigidez lateral de los marcos.

El sistema constructivo más común, especialmente para vivienda, es el formado por diafragmas horizontales y verticales; estos son paneles constituidos por un armazón ligero de madera recubierto por placas de triplay o de yeso o con aplanchado de cemento y cal sobre metal desplegado (para exteriores).

En esta forma (fig 3) el comportamiento sísmico es similar al de las estructuras de muros de mampostería con losas de concreto y son aplicables los mismos procedimientos de análisis.

Los requisitos que deben cumplirse son que el diafragma horizontal de piso o techo sea suficientemente rígido en su plano. Para ello el recubrimiento debe

poderse conectar adecuadamente a las vigas de soporte del piso. Cuando el recubrimiento es de triplay o de dueda se especifica una relación máxima entre lado mayor y menor del tablero de piso ( $L/B = 4$  según las recomendaciones de Nueva Zelanda).

Los tableros verticales (muros) deben tener suficiente rigidez y resistencia. La resistencia es muy variable según la calidad del recubrimiento, el tipo de armazón y la forma de unión entre recubrimiento y armazón; se especifican esfuerzos cortantes permisibles variables entre 10 y 50  $\text{kg/cm}^2$ .

El aspecto más importante es el de las conexiones (fig 4) que deben diseñarse para resistir los esfuerzos cortantes que se generan entre elementos horizontales y verticales y los esfuerzos de tensión debidos al momento de volteo.

Recomendaciones detalladas sobre el diseño sísmico de construcciones para vivienda con este sistema se encuentran en la ref 6. Algunos detalles de conexión típicos se muestran en las figs 5 y 6.

## Referencias

1. White R N, Gergely P y Sexsmith R, "Structural Engineering. Vol 3, Behavior of Members and Systems", J Wiley, 1974
2. Booth L G y Reece P O, "The Structural Use of Timber. A Commentary on the British Standard Code of Practice CP112". E y FN Spon Ltd, Londres, 1967
3. Gurfinkel G, "Wood Engineering" Southern Forest Product Association, N Orleans, 1973
4. "Diseño y construcción de estructuras de madera" Informe No. 404 del Instituto de Ingeniería, UNAM. México, D.F. 1977
5. Dowrick D J, "Earthquake Resistant Design", J Wiley, 1977
6. "A Methodology for Seismic Design and Construction of Single-Family Dwellings" Department of Housing and Urban Development, Washington, 1977



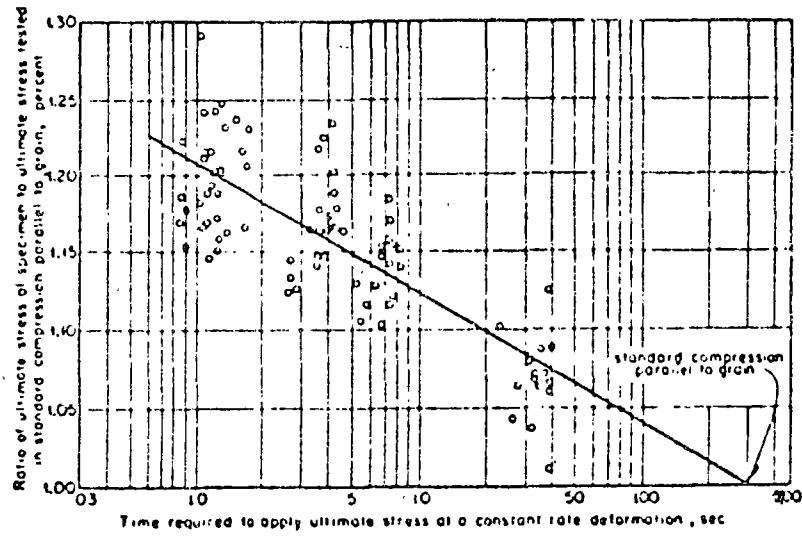


Fig 1 Efecto de la velocidad de carga en la resistencia de la madera

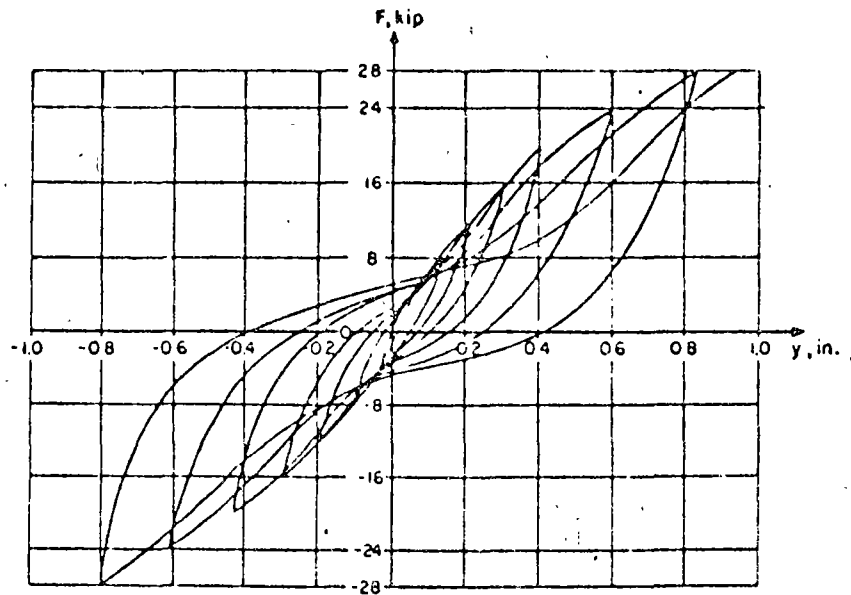


Figure 634 Hysteretic behaviour of timber diaphragms under cyclic loading (after Medearis<sup>74</sup>)

Fig 2 Comportamiento de tableros de madera ante cargas alternadas repetidas

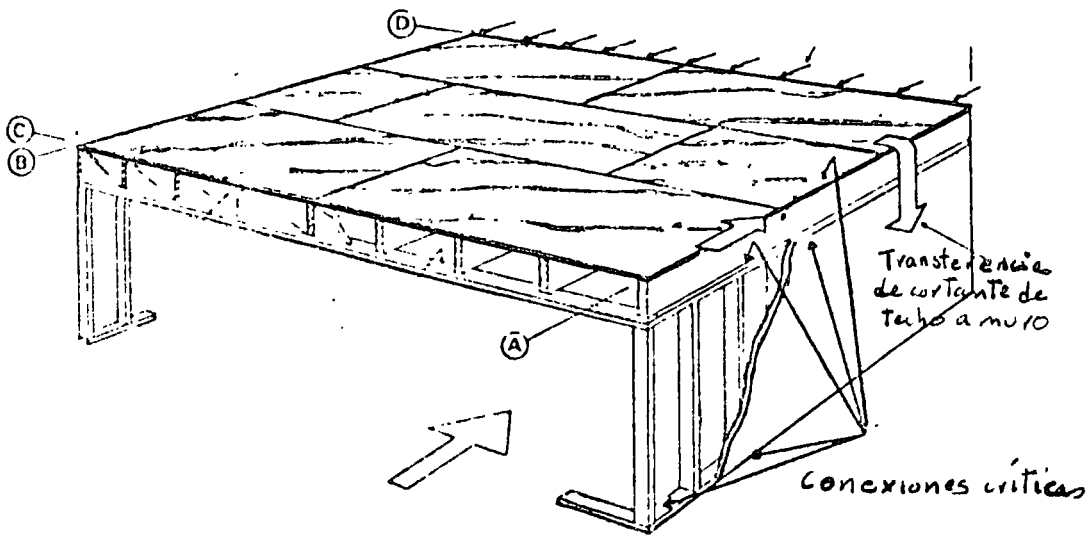


Fig 3 Estructuración típica a base de diafragmas de madera

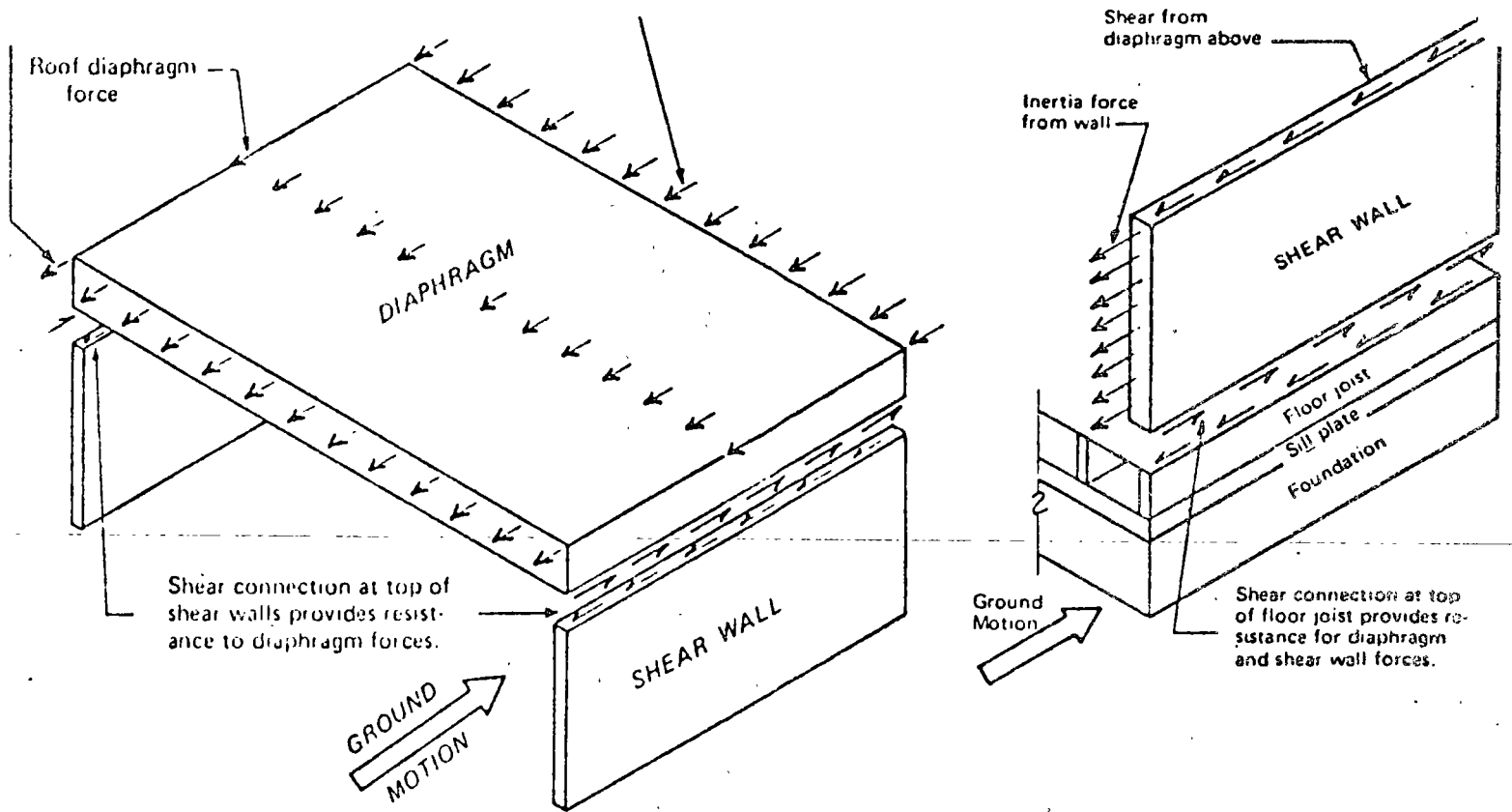


Fig 4 Trasmisión de fuerzas entre los distintos elementos

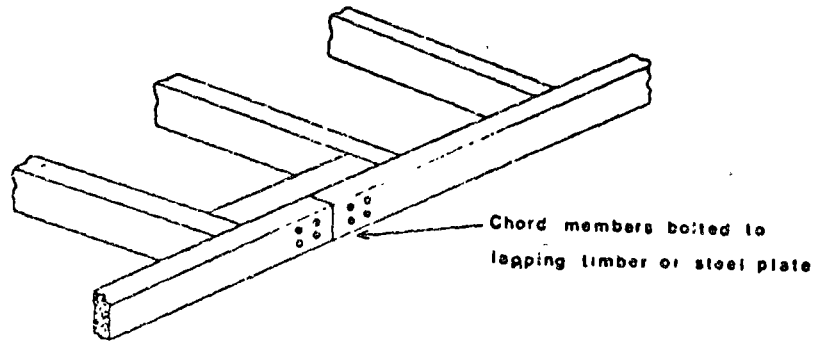


Fig 5 Conexión en las cuerdas del armazón

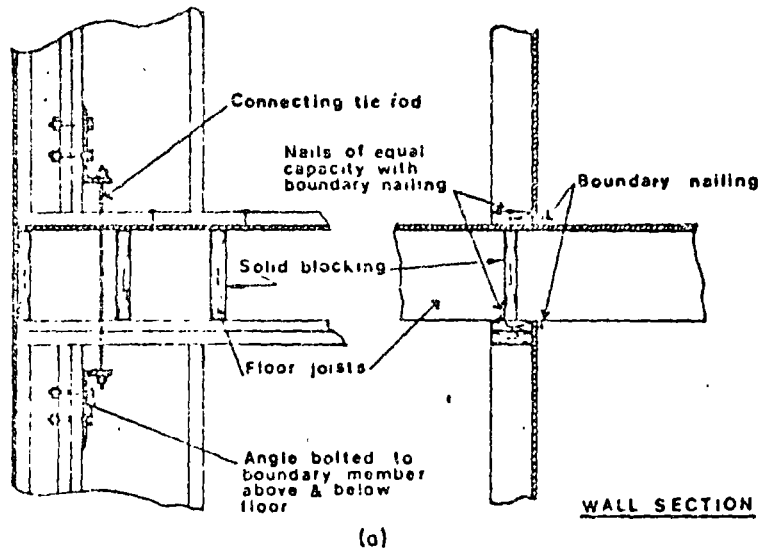


Fig 6 Conexión muros-piso

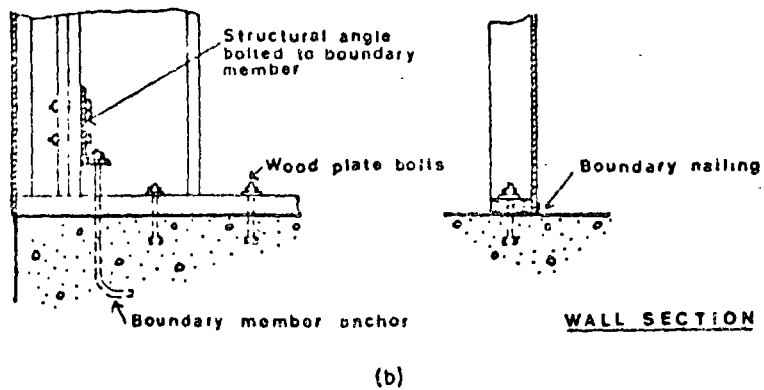


Fig 7 Conexión Muro cimentación

DIRECTORIO DE ALUMNOS DEL CURSO: "DISEÑO SISMICO DE EDIFICIOS", DEL 24 DE JULIO AL 18 DE AGOSTO DE 1978.

1. SR. GUSTAVO AGUIRRE PIEDRA  
AV. COL. DEL VALLE No. 443  
COL. DEL VALLE  
MEXICO 12, D. F.  
TEL. 523-99-90
  2. SR. LEONARDO ALVAREZ TROYA  
10 DE AGOSTO No. 3858  
V-VITO ECUADOR  
TEL. 543904
  3. ING. OSCAR ANGELES
  4. SR. ROBERTO ENRIQUE BRENES BRENES  
CALLE 19, cas 4-6  
CARTAGO, COSTA RICA
  5. ARQ. ALFONSO GUILLERMO CACHO VAZQUEZ
  6. ING. STANISLAW DOROSZ  
ODONTOLOGIA No. 57 DEPTO. 302  
COL. COPILCO-UNIVERSIDAD  
MEXICO 20, D. F.  
TEL. 550-38-56 EXT. 302
  7. SR. SERGIO OCTAVIO R. ESCOBAR MEDINA  
JUAN DE TOLOSA No. 809  
ZACATECAS, ZAC.  
TEL. 2-11-47
  8. ING. CARLOS M. FERREGUT AVILA  
RET. 29 No. 47 DE F.S.T. DE MIER  
COL. JARDIN BALBUENA  
MEXICO 9, D. F.  
TEL. 571-56-57
  9. SR. ELIAS GALINDO VALLERINA  
GERMAN PATINO No. 36 - 5  
COL. ARAGON  
QUERETARO, QRO.
  10. SR. OSCAR JAIME GELBWASER  
SUDERMAN No. 143 - 1  
COL. POLANCO  
MEXICO 5, D. F.  
TEL. 545-55-99
- U. TECNICA PARTICULAR DE LOJA  
ECUADOR, S. A.  
LECTURAS DE MECANICA ANALITICA  
P.O. BOX # 71 SUR. A  
LOJA ECUADOR
- UNIVERSIDAD CENTRAL V-VITO ECUADOR  
PROFESOR  
V-VITO, ECUADOR
- INSTITUTO COSTARRICENSE DE ELECTRICIDAD  
INGENIERO CIVIL III  
SABANA NORTE  
SAN JOSE, COSTA RICA
- CONSTRUCCIONES Y MANTENIMIENTO, S.A.
- INSTITUTO DE INGENIERIA, UNAM  
APDO. 70-472  
MEXICO 20, D. F.  
TEL. 548-97-94
- ESC. DE INGENIERIA, UAZ.  
PROFESOR DE MEDIO TIEMPO  
LOPEZ VELARDE S/N  
ZACATECAS, ZAC.  
TEL. 2-08-27
- ESC. SUPERIOR DE INGENIERIA Y  
ARQUITECTURA  
PROFESOR  
ZACATENCO, D. F.
- UNIVERSIDAD AUTONOMA DE QUERETARO  
PROFESOR DE TIEMPO COMPLETO  
CENTRO UNIVERSITARIO  
QUERETARO, QRO.
- EURO ESTUDIOS, S. A. DE C. V.  
INGENIERO CALCULISTA  
GAUSS No. 9 - 202  
COL. ANZURES  
TEL. 250-70-00

11. SR. RAÚL MENDOZA MONROY  
LAGO VICTORIA No. 52-2  
COL. ANAHUAC  
MEXICO 17, D. F.  
TEL. 250-30-62

12. ING. RAMON MORALES ROSS  
PESTALOZZI No. 526 - 5  
COL. NARVARTE  
MEXICO 12, D. F.  
TEL. 523-21-52

13. SR. FLORENCIO MORENO LOPEZ  
PRIMAVERA OTE No. 35  
QUERETARO, QRO.  
TEL. 2-72-20

14. SR. ANTONIO NIETO GUTIERREZ  
IRLANDA No. 132 - 30  
COL. SAN ANDRES CHURUBUSCO  
MEXICO 21, D. F.  
TEL. 549-68-73

15. SR. HUGO OSORIO VAZQUEZ  
LAGO CARDIEL No. 104  
COL. ARGENTINA  
MEXICO 17, D. F.  
TEL. 527-1023 1

16. SR. JESUS PORRAS MARICASL  
CALZ. SNTA. ANITA No. 115  
COL. MODERNA  
MEXICO, D. F.

17. ING. CONSTANCIO RODRIGUEZ CABELLO

18. SR. ALFONSO RUIZ VAZQUEZ  
AV. VALLE DE BRAVO No. 19  
COL. VERGEL DE COYOACAN  
MEXICO 22, D. F.  
TEL. 677-37-30

19. SR. ANTONIO SANCHEZ HERNANDEZ  
SAN LUIS POTOSI No. 19  
COL. HIDALGO  
QUERETARO, QRO.  
TEL. 2-33-29

CIA. DE LUZ Y FUERZA DEL CENTRO, S.A.  
INGENIERO  
MELCHOR OCAMPO No. 171  
MEXICO 6, D. F.  
TEL. 518-00-80 EXT. 574

UNIVERSIDAD JUARES AUTONOMA DE  
TABASCO  
CIUDAD UNIVERSITARIA  
PROFESOR  
VILLAHERMOSA, TAB.

UAQ. ESCUELA DE INGENIERIA  
PROFESOR DE CARRERA  
CENTRO UNIVERSITARIO QRO.  
QUERETARO, QRO.  
TEL. 2-51-89

INDUSTRIAL MINERA MEXICO, S. A.  
SUPERVISOR DE DISEÑO  
BAJA CALIFORNIA No. 200  
COL. ROMA SUR  
MEXICO 11, D. F.  
TEL. 564-70-66 EXT. 288

PETROLEOS MEXICANOS  
INGENIERO CIVIL (CALCULISTA)  
AV. MARINA NACIONAL No. 329  
MEXICO 17, D. F.  
TEL. 545-74-60 EXT. 30-18

INSTITUTO TEC. REG. DE OAXACA  
CATEDRATICO  
CALZ. INSTITUTO TEC. REG. OACACA

UNION DE PROFESORES DE LA FACULTAD  
DE INGENIERIA, UNAM

ARVA CONSTRUCCIONES

ESC. DE ING. DE LA UNIVERSIDAD DE  
QUERETARO  
PROFESOR DE CARRERA  
CENTRO UNIVERSITARIO DE QRO.  
TEL. 2-51-89

20. SR. RAUL SERRANO LIZAOLA  
BONAMPAK No. 4506  
COL. REFORMA AGUA AZUL  
PUEBLA, PUE.  
TEL. 43-92-96

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE PUEBLA  
DOCENTE  
ESCUELA DE INGENIERIA CIVIL  
CIUDAD UNIVERSITARIA  
PUEBLA, PUE

21. SR. LUIS SIMANCAS ORDOÑO  
CALLE CENTRAL No. 111 - 1  
COL. ATLANTIDA  
MEXICO 21, D. F.  
TEL. 544-47-54

S.A.H.O.P.  
DIREC. GRAL. PREVENCION Y ATENCION  
DE EMERGENCIA URBANA  
EXPERTO "L"  
RUBEN DARIO No. 13  
COL. POLANCO  
MEXICO 5, D. F.  
TEL. 250-78-75

22. SR. TIVADO INDA FEDERICO  
JUAREZ No. 57  
CHILPANCINGO, GRO.

ESC. DE INGENIERIA- UAG  
SUBDIRECTOR-MAESTRO TIEMPO COMPLETO  
AV. CASA DE LA JUVENTUD S/N

23. SR. ANGEL J. VALLEJO GONZALEZ  
VALLE DE OAXACA No. 24  
COL. VISTA DEL VALLE  
NAUCALPAN, MEX.  
TEL. 560-50-65

CIA. DE LUZ Y FUERZA DEL CENTRO, S.A.  
ING. CLS. 20  
TLALOC No. 90  
COL. ANAHUAC  
TEL. 592-37-18

24. SR. V. PABLO VAZQUEZ MORENO  
ORIENTE 166 No. 83  
COL. MOCTEZUMA  
MEXICO 9, D. F.  
TEL. 762-02-28

INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL  
E.S.I.A.  
PROF. TITULAR DEPTO. DE ESTRUCTURAS  
PABELLON No. 4 - U.P.Z.  
MEXICO 15, D. F.