

# **TESIS DOCTORAL**

## **TEORÍA DE ESFUERZOS PARA CUERPOS ELASTOPLÁSTICOS EN CONTACTO NO HERTZIANO**

Juan Leonardo Hernández Anda

Septiembre de 2005

Para: Lila, Jesi e Iván

Gracias Dr. Luis Ferrer por su ayuda con los experimentos de foto elasticidad

Gracias Dr. Ángel Rojas por tu paciencia durante todo este tiempo

Gracias Facultad de Ingeniería

Gracias UNAM

# ÍNDICE

<b>1. INTRODUCCIÓN</b>	4
1.1 Resumen	4
1.2 Estructura de la tesis	7
1.3 Antecedentes	9
1.4 Alcance y limitaciones	10
<b>2. SISTEMAS DE ESFUERZO GENERADOS DURANTE EL CONTACTO ENTRE CUERPOS ELÁSTICOS</b>	11
2.1 Introducción	11
2.2 Fuerza normal concentrada	11
2.3 Presión normal	14
2.5 Presión normal uiforme	17
2.5 Indentación con un punzó rígido y plano	19
<b>3. ANÁLISIS ELASTOPLÁSTICO DEL CONTACTO NO HERTZIANO ENTRE CUERPOS CILÍNDRICOS</b>	23
3.1 Introducción	23
3.2 Contacto no hertziano entre cuerpos cilíndricos	24
3.2.1 Presión mediante aproximación polinomial	24
3.2.2 Condición de frontera	26
3.2.3 Esfuerzos producidos por $p(X)$	27
3.2.4 Análisis plástico de esfuerzos	29
3.2.5 Algoritmo para obtener las deformaciones incrementales	31
3.2.6 Desplazamiento del indentador en el disco de aluminio	31
3.2.7 Análisis experimental de esfuerzos	32
3.2.8 Conclusiones	35
3.3 Contacto no hertziano entre tres cuerpos cilíndricos	36
3.3.1 Presión mediante aproximación polinomial	36
3.3.2 Esfuerzo polinomial sobre un disco	37
3.3.3 Análisis plástico	39
3.3.4 Ejemplo	39
3.3.5 Análisis experimental de esfuerzos	39
3.3.6 Conclusiones	40
<b>4. ANÁLISIS DE LOS ESFUERZOS PRODUCIDOS EN UN CUERPO ELÁSTICO MEDIANTE TRES INDENTADORES CILÍNDRICOS</b>	41
4.1 Introducción	41
4.2 Modelo matemático de la indentación	41
4.3 Desplazamiento plástico	44
4.3.1 Ejemplo	44
4.4 Aplicación práctica	46
4.4.1 Máquina para marcar alambre de alta resistencia	46
4.4.2 Operación	48
4.4.3 Consideraciones	48

4.4.4 Análisis de esfuerzos en el cuerpo de la máquina	50
4.5 Conclusiones	55
<b>5. OTRAS APLICACIONES</b>	<b>56</b>
5.1 Presiones polinomiales	56
5.2 Análisis experimental de esfuerzos	59
5.3 Esfuerzos en las esquinas del indentador	60
5.3.1 Indentador rígido y plano	61
5.3.2 Perfil con esquinas	61
5.3.3 Indentadores cuneiformes	63
5.4 Esfuerzos de superficie	64
5.4.1 Engranés	64
5.4.2 Diferencias con las ecuaciones de la AGMA	66
5.4.3 Levas con seguidor de rodillo	67
5.4.4 Levas con seguidor de cara plana	68
<b>6. CONCLUSIONES</b>	<b>69</b>
<b>APÉNDICE 1      DEDUCCIÓN DE LA PRESIÓN HERTZIANA</b>	<b>70</b>
A1.1 Postulados de la teoría hertziana	70
A1.2 Dedución del polinomio hertziano	72
A1.3 Distribución de la presión	73
A1.4 Conclusión	76
<b>APÉNDICE 2</b>	
<b>CÁLCULO DEL ESFUERZO EN DIENTES DE ENGRANES MEDIANTE LA MECÁNICA DEL CONTACTO</b>	<b>78</b>
A2.1 Resumen	78
A2.2 Introducción	78
A2.3 Contacto hertziano	79
A2.4 Carga $P$ modificada	83
A2.5 Ejemplo	84
A2.6 Diferencias	86
A2.7 Conclusiones	87
<b>APÉNDICE 3</b>	
<b>FÓRMULA PARA LA OBTENCIÓN DE ESFUERZOS EN MECANISMOS DE LEVA Y SEGUIDOR</b>	<b>88</b>
A3.1 Introducción	88
A3.2 Contacto entre cuerpos cilíndricos	88
A3.3 Leva con seguidor de rodillo	88
A3.4 Leva con seguidor de cara plana	93
A3.5. Conclusiones	95
<b>REFERENCIAS</b>	<b>96</b>

# 1 INTRODUCCIÓN

## 1.1 OBJETIVOS

En este trabajo se describe la forma de obtener la carga necesaria para marcar permanentemente un cuerpo de material elastoplástico, al que llamaremos espécimen, utilizando cuerpos considerados rígidos, a los que llamaremos indentadores.

Al marcado permanente del espécimen se le conoce con el nombre de indentación, ésta tiene dos fases:

- i) El desplazamiento del indentador en el espécimen hasta alcanzar su límite elástico.
- ii) La deformación permanente del espécimen que se da al rebasar su límite elástico.

El espécimen, usado en este trabajo, es un alambre de sección circular y los indentadores son discos cóncavos en la cara de contacto con el alambre. El radio de la sección circular del espécimen y el de la cara de contacto de los indentadores es el mismo.

La sección circular del alambre es el espacio bidimensional donde se produce la indentación, y está formado por los ejes  $x$  y  $z$ , horizontal y vertical respectivamente. En el eje  $x$  se representa el ancho, designado por  $2a$ , del área de contacto y el eje  $z$  la profundidad de la indentación. La longitud de los cuerpos en el eje  $y$ , perpendicular al plano de la sección circular del alambre, se considera unitaria para facilitar los cálculos. De esta forma la carga de indentación, los esfuerzos, las deformaciones y los desplazamientos obtenidos serán por unidad de longitud.

Los indentadores están dispuestos simétricamente con respecto a la vertical del espécimen para lograr el equilibrio estático y radialmente para marcar la mayor parte de la superficie del alambre.

Cuando los indentadores hacen contacto con la mayor parte de la superficie del espécimen el contacto es conformable.

La teoría propuesta por Hertz [9], según sus postulados, es aplicable en la solución de problemas de contacto entre cuerpos cilíndricos cuando la superficie de contacto de éstos es relativamente pequeña en relación a su tamaño. Entonces el método para hallar la carga de indentación entre cuerpos cilíndricos en contacto conformable, presentado en este estudio, es no hertziano.

El material del espécimen es continuo, homogéneo, isotrópico y elastoplástico, y los indentadores se consideran rígidos, de tal manera que se puede emplear la teoría de la elasticidad para hallar una relación matemática entre la carga de los indentadores y el desplazamiento de estos dentro del material del espécimen.

Las relaciones matemáticas obtenidas son:

- i) El gradiente del desplazamiento del indentador sobre la superficie del espécimen, a lo largo del eje  $x$ , es igual a la variación del contorno de la superficie del indentador sobre el espécimen a lo largo del mismo eje.
- ii) La presión producida por la carga del indentador sobre el espécimen, es proporcional al gradiente del desplazamiento del indentador sobre el espécimen a lo largo del eje  $x$ .
- iii) De los puntos anteriores se obtiene la relación entre la variación del perfil del indentador sobre el espécimen y la presión producida por la carga de indentación.

La relación resultante es una ecuación integral simple, cuya solución general obtenida por Mikhlin[24] y Muskhelishvili[16], da la distribución de presión generada por la carga de indentación, siempre y cuando la integral involucrada pueda resolverse.

Esta integral es la de una función que representa la variación del contorno de la superficie del indentador sobre el espécimen con respecto al eje  $x$ , es decir, la integral de una función que contiene la derivada de la ecuación de la circunferencia, con el origen desplazado al punto de aplicación de la carga, y no puede resolverse directamente mediante alguna de las fórmulas conocidas.

Para hacerlo y obtener la forma general de la presión, se ha recurrido a una aproximación numérica mediante polinomios, ya que cualquier polinomio de grado  $n$  puede ser integrado directamente.

Varios polinomios de distinto grado fueron empleados para aproximar el perfil de la circunferencia en la zona de contacto, desde el polinomio de segundo grado, usado por Hertz en el desarrollo de su teoría, hasta el de décimo grado para conocer la complejidad del proceso de integración.

En este estudio se usa el polinomio de cuarto grado, que tiene un error en la aproximación del perfil de la circunferencia menor que el hertziano, para resolver la ecuación integral simple y hallar la distribución de presión que requiere el indentador para penetrar en el espécimen y marcarlo permanente a una determinada profundidad.

Una vez resuelta la integral, se obtiene la forma general de la presión producida por el indentador en el área de contacto, pero esta presión no describe el problema de cada caso particular. La solución particular de la distribución de presión para marcar un espécimen mediante dos o más indentadores con el mismo perfil, tiene dos condiciones :

- i) Cuando los indentadores tienen esquinas, y
- ii) Cuando los indentadores no las tienen

Para la primera condición se obtiene una presión que tiende a incrementarse en las esquinas del indentador.

Para la segunda se obtiene una presión que es máxima en el centro del área de contacto y nula en sus puntos extremos.

Los esfuerzos producidos por cada uno de estos sistemas de presión pueden ser calculados mediante una función analítica [25] de esfuerzo que cumpla con la teoría de la elasticidad, Timoshenko[20]. En este trabajo la función de esfuerzo empleada es la propuesta por Flamant[4], generalizada para las distribuciones de presión de los sistemas descritos anteriormente.

Las ecuaciones resultantes definen los esfuerzos normales y cortantes que actúan en cada punto de la sección transversal del espécimen en función de la carga aplicada, de tal manera que pueden localizarse los puntos sometidos a mayor esfuerzo cortante, responsable de la cedencia, mediante el criterio de Tresca.

La distribución del esfuerzo cortante máximo obtenida, muestra que el punto donde éste es mayor, se localiza por debajo de la superficie de contacto entre el espécimen y el indentador, a 0.4 veces el ancho del área de contacto y disminuye hasta llegar a la superficie. Es decir, que la cedencia o pérdida de la capacidad de carga del material del espécimen, se inicia por debajo del área de contacto mientras que el material de la superficie permanece elástico.

En el caso de que el espécimen sea indentado mediante dos o más indentadores distribuidos simétricamente y en forma radial, la zona de mayor esfuerzo cortante se localiza en el centro de la sección transversal del alambre.

Si la carga de indentación aplicada se incrementa hasta rebasar el límite elástico del material, los desplazamientos que se producen entonces, harán que quede una marca permanente sobre la superficie del alambre. Estos desplazamientos se calculan usando la teoría de esfuerzos incrementales propuesta por Prandtl(1925) y Reus(1930), el criterio de cedencia de von Mises y la relación no lineal esfuerzo efectivo-deformación efectiva de la curva de cedencia del material obtenida en pruebas de tensión, R. Hill[10].

El proceso de indentación arriba descrito, desde que se empieza a ejercer la presión y hasta el punto donde se inicia la cedencia del material del espécimen, involucra una serie de ecuaciones no lineales que están en función de la carga de indentación, la geometría de la superficie de contacto, las coordenadas de cada uno de los puntos de la sección transversal del espécimen y del ancho del área de contacto. Por esta razón, no es posible obtener una relación directa entre la carga de indentación y el desplazamiento del indentador.

Sin embargo, el conjunto de ecuaciones que conduce al cálculo de la carga en función del desplazamiento, se resuelve numéricamente mediante un algoritmo usando un criterio empírico (causa efecto). Se propone una carga, se calculan la presión, los esfuerzos y los desplazamientos en el régimen plástico y se aumenta o disminuye la carga hasta obtener el desplazamiento deseado sin llegar al límite de falla del material.

El algoritmo calcula numéricamente los desplazamientos, en el eje  $z$ , de cada uno de los puntos del material que están por debajo de la superficie de contacto, integra los desplazamientos en el régimen plástico y calcula el desplazamiento total del indentador.

Los resultados obtenidos con este algoritmo muestran que el indentador se desplaza para marcar el espécimen hasta que todos los puntos de una zona por debajo del área de contacto, hayan rebasado el límite elástico del material, porque a partir de ahí disminuye su resistencia.

La validez de la solución obtenida con las ecuaciones se comprueba experimentalmente con la ayuda de la fotoelasticidad.

El método presentado para obtener la carga necesaria para deformar permanentemente el material del espécimen es usado para rediseñar el cuerpo de una máquina para marcar alambre de acero de alta resistencia.

Asimismo, se usa en el cálculo de la resistencia de superficie de los dientes de engranes y los resultados se comparan con los obtenidos mediante las ecuaciones de la AGMA (American Gear Manufacturers Association).

El método se usa también en el cálculo de la resistencia de superficie de sistemas de leva y seguidor; algunos resultados no se han encontrado en la bibliografía alusiva al tema.

## 1.2 ESTRUCTURA DE LA TESIS

Esta tesis consta de cinco capítulos que contienen la teoría y tres apéndices que incluyen los cálculos utilizados, así como resultados de los experimentos fotoelásticos que comprueban la teoría presentada, con lo que se establecen las bases para la obtención de sistemas de esfuerzo de cuerpos cilíndricos en contacto hertziano y no hertziano.

El segundo capítulo inicia con un estudio sobre lo que se ha escrito acerca de la mecánica del contacto, para conocer los esfuerzos de varios cuerpos con propiedades físicas distintas, bajo la acción de cargas en condiciones de deformación plana,  $\varepsilon_y=0$ , y libres de fricción.

Los sistemas matemáticos empleados en el segundo capítulo se obtienen con la teoría de la elasticidad, y las ecuaciones integrales resultantes se resuelven mediante la solución de Mikhlin [24] y Muskhelishvili[16].

El tercer capítulo presenta los principales avances obtenidos en esta investigación:

Primero, se analiza el proceso de contacto entre un indentador rígido, de superficie semicircular, con un cuerpo cilíndrico, ambos con el mismo radio, y se establecen las relaciones entre presión producida por la carga de indentación y el perfil del indentador, mediante la teoría de la elasticidad.

En la solución de la ecuación integral simple resultante se emplea un polinomio de cuarto grado, y se establecen las condiciones que debe cumplir para describir este proceso de contacto. La solución es la distribución de presión que produce un indentador rígido, de superficie semicircular, sobre un cuerpo cilíndrico, ambos con el mismo radio.

Este paso es el más importante pues establece la diferencia entre la teoría hertziana y el método de solución de los problemas de contacto conformable en general y el de este trabajo en particular.

Con esta presión y la distribución de esfuerzo de Flamant, se calcula la distribución del esfuerzo cortante máximo y mediante la teoría de la Plasticidad se calcula la fuerza necesaria para deformar permanentemente el material del espécimen.

Segundo, se obtiene la solución para el modelo de la indentación de un cuerpo cilíndrico, mediante dos indentadores rígidos y opuestos en contacto no hertziano (conformable), usando el mismo método del primer caso.

Se realiza la verificación de los sistemas de esfuerzo resultantes de las ecuaciones experimentalmente con fotoelasticidad, y se obtiene el mismo tipo de distribución del esfuerzo cortante.

El cuarto capítulo presenta la aplicación del mismo modelo de presión obtenido en el capítulo tres, este modelo se emplea para determinar los esfuerzos producidos mediante la acción de tres indentadores rígidos, dispuestos radialmente a  $120^\circ$  sobre el cuerpo del material que se va a indentar y se calcula la fuerza necesaria para efectuar una marca permanente con una determinada profundidad. Con base en estos resultados se rediseña el cuerpo de una máquina para indentar alambre de alta resistencia y los esfuerzos se obtienen mediante el método del elemento finito.

El quinto capítulo presenta otras aplicaciones de este trabajo, entre las que destacan:

En el rango elástico:

Se hace una comparación de distintos polinomios para describir el perfil de las superficies en contacto. Se muestra la forma cómo se producen las concentraciones de esfuerzo en las esquinas de los indentadores, como resultado del análisis de la geometría desarrollada en los capítulos 2, 3 y 4. El valor resultante de los esfuerzos puede conocerse usando el procedimiento descrito en este estudio.

Se muestra, además, el cálculo del valor del esfuerzo de resistencia superficial que deben tener los dientes de los engranes para soportar las cargas sin deformarse permanentemente, así como su localización por debajo de la superficie de contacto. Con el valor del esfuerzo y su localización, se conocen la dureza del material y su profundidad, ya que están en relación directa. Este mismo concepto puede usarse en la fabricación de levas.

En el rango plástico:

Se realizó el cálculo de los valores mínimos de las cargas necesarias para producir la indentación, para marcar permanentemente alambre en el proceso de fabricación de concreto preesforzado y con estos valores se desarrolla un nuevo diseño de la máquina indentadora.

En el capítulo seis se exponen los resultados obtenidos en este trabajo.

En el Apéndice 1 se desarrolla la teoría hertziana para obtener la distribución de presión y su distribución de esfuerzos.

En el Apéndice 2 se presenta una comparación de los esfuerzos de superficie de los dientes de engrane obtenidos usando el método mencionado en el Capítulo 2, con los obtenidos mediante las

ecuaciones de la “American Gear Manufacturers Association” (AGMA)” usadas en los libros de diseño mecánico. Las diferencias encontradas son analizadas y discutidas.

En el Apéndice 3 se hace un análisis de los esfuerzos producidos en la superficie de las levas al contacto con sus seguidores, cuando hay deslizamiento y cuando no lo hay. Este análisis es una aportación original; ya que no se encuentra en la bibliografía alusiva al tema.

### 1.3 ANTECEDENTES

Al análisis de los fenómenos que se producen durante el contacto entre cuerpos de distintos perfiles, se le ha denominado mecánica del contacto.

La mecánica del contacto inició en 1881 con la publicación por Heinrich Hertz [9] del artículo "On the Contact of Elastic Solids", (1882, J. of Math.(Crelle), Vol. 92).

El interés en el tema surgió cuando Hertz hacía experimentos sobre interferencia óptica entre lentes de vidrio y su inquietud creció cuando se preguntó si la deformación elástica de los lentes, bajo la acción de una fuerza que los mantuviera en contacto, podría tener una influencia significativa en las líneas del patrón de interferencia. Al observar las líneas de interferencia, pudo darse cuenta fácilmente que las áreas de contacto eran elípticas y obtuvo fórmulas para la presión de contacto con esta suposición.

Sin embargo, la teoría hertziana está restringida a superficies sin fricción y a sólidos perfectamente elásticos, donde el ancho de la cara de contacto  $a$  es mucho menor que el radio de los cuerpos,  $a \ll r$ .

Otros trabajos en este campo de investigación no aparecieron en la literatura, sino hasta principios del siglo XX, estimulados por el desarrollo de la ingeniería en ferrocarriles, básicamente para las ruedas, así como en reductores de velocidad marinos y en la fabricación de rodamientos. El campo de esfuerzos debido al contacto parece haber sido introducido primero por Huber [11] en 1904, más tarde por Fuchs [6] en 1913 y por Morton & Close [15] en 1922.

Los progresos en la mecánica del contacto en la segunda mitad del siglo XX están asociados a la manera de eliminar las restricciones de la teoría hertziana, ya que un tratamiento adecuado de la fricción en las interfaces de la superficie de contacto, entre los cuerpos, ha permitido que la teoría de la elasticidad sea aplicable a los problemas que involucran deslizamiento y movimiento, como en el caso de los rodamientos.

S. Timoshenko [20] en su libro "Theory of Elasticity", trata los problemas clásicos de la indentación usando las ecuaciones de Flamant [4], Boussinesq [1] y la teoría hertziana, para determinar las ecuaciones de los esfuerzos que se generan durante el proceso de marcado.

A pesar de la importancia del tema, los libros sobre mecánica del contacto son pocos, no es sino hasta 1953 que aparece el libro del ruso L.A. Galin [7] (traducido al inglés en 1963) "Contact Problems in Elasticity", que resume los trabajos pioneros de Muskhelishvili [16]. Más tarde en 1980, Gladwell [8] publicó su libro "Contact Problems in the Classical Theory of Elasticity", el cual excluye deslizamiento y movimiento, y se restringe a sólidos perfectamente elásticos.

En 1985, K.L. Johnson [12] en su libro "Contact Mechanics" aborda aspectos como el cálculo de cargas lineales y puntuales sobre un semiespacio elástico; aplica la teoría hertziana; considera el contacto entre sólidos inelásticos, cargas tangenciales y el contacto entre cuerpos cilíndricos; toma en cuenta la lubricación, el impacto entre sólidos y el contacto termoelástico; realiza un análisis riguroso y aplica la teoría de la elasticidad para llegar a los resultados que antes se habían obtenido experimentalmente.

R. L. Norton [18], en su libro editado en 1996, "Machine Design", aborda los problemas del contacto en el diseño de elementos de máquinas y en la solución emplea las ecuaciones hertzianas.

Todos estos estudios de la mecánica del contacto se han hecho para conocer los esfuerzos elásticos del material que está siendo indentado, sin embargo poco se conoce de lo que sucede después de pasar el límite elástico.

R. Hill [10] en su libro "The Mathematical Theory of Plasticity", presenta las ecuaciones propuestas por Prandtl(1925) y Reus(1930) para obtener los incrementos de deformación plástica, a partir del estado de esfuerzos producido por cargas incrementales usando el criterio de cedencia de von Mises, con la inclusión de la relación *esfuerzo efectivo-deformación efectiva* de la curva real de cedencia del material, obtenida en pruebas de tensión , explicada en forma simple por Dieter[2]. Sin embargo, no trata problemas de indentación de cuerpos elastoplásticos en el régimen plástico.

## **1.4 ALCANCES Y LIMITACIONES**

Este trabajo se propone obtener las distribuciones de presión, esfuerzos y deformaciones que se producen durante el contacto conformable de cuerpos cilíndricos en los procesos de indentación. El método para obtener lo anterior puede aplicarse a cuerpos de cualquier geometría, siempre que sea posible obtener las integrales de los polinomios que describen el desplazamiento en las ecuaciones que se usan para el cálculo de la presión.

El método para obtener los desplazamientos en el régimen plástico puede ser aplicado en otros problemas que no sean de contacto. Los sistemas de presión obtenidos en el presente trabajo son bidimensionales para la indentación, pero pueden ser ampliados a sistemas tridimensionales en otras aplicaciones.

En el régimen plástico se presenta el estudio del comportamiento de las deformaciones producidas en el espécimen por debajo del indentador, lo cual requiere de una investigación posterior para conocer su distribución y la forma de fluencia del material del espécimen.

# 2 SISTEMAS DE ESFUERZOS GENERADOS DURANTE EL

## CONTACTO ENTRE CUERPOS ELÁSTICOS

### 2.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo se hace una recopilación de los problemas de contacto, existentes en la literatura relacionada con el tema, iniciando con el cálculo del sistema de esfuerzos generado por una fuerza normal, concentrada sobre una línea perpendicular a un semiespacio elástico, resuelto mediante la función de esfuerzo propuesta por Flamant [4], posteriormente se generaliza esta solución cambiando la fuerza por una distribución de presión para obtener los esfuerzos que esta distribución genera, mediante la teoría de la elasticidad se encuentra la relación que tiene con las deformaciones producidas en la superficie de contacto con el semiespacio elástico.

Las soluciones propuestas por autores como Johnson[12], Timoshenko[20] y Nadai[17] se han adaptado en este capítulo para usarlas en la solución del problema que se aborda, de tal forma que puedan tener variaciones con respecto a las originales, aunque los resultados finales no varían sensiblemente ya que se basan en los mismos principios, las integrales que resultan al obtener los sistemas de esfuerzo han sido resueltas directamente en las referencias conocidas hasta ahora, otra forma es hacerlo numéricamente, como en el presente trabajo, lo cual no restringe el campo a soluciones cerradas únicamente.

### 2.2 FUERZA NORMAL CONCENTRADA

Cuando dos cuerpos elastoplásticos se ponen en contacto, dependiendo de la magnitud de la fuerza y de los cuerpos que se traten, se tocan primero en un punto o en una línea y a medida que la fuerza se incrementa, el punto o la línea de contacto se transforma en área debido a la propiedad de los materiales elastoplásticos de deformarse antes de que ocurra la falla o se deformen permanentemente.

La presión producida por una fuerza normal concentrada, por unidad de longitud en el eje  $y$ , como se muestra en la Fig. 2.1, a lo largo del semiespacio elástico fue resuelto por primera vez por Flamant [4].

Flamant propuso como solución para el problema de contacto la función de esfuerzo  $\phi(r, \theta) = Arsen\phi$  y obtuvo sus componentes,

$$\sigma_r = \frac{2A \cos \theta}{r} \quad \text{y} \quad \sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0 \quad (2.1)$$

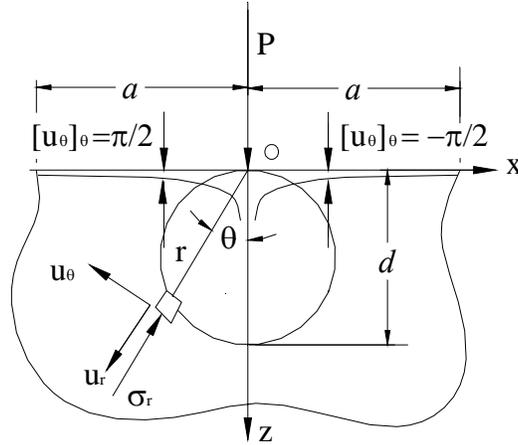


Fig. 2.1 Fuerza normal concentrada sobre una línea del semiespacio elástico

Este sistema de esfuerzos es una distribución radial simple que pasa por el punto  $O$  donde se aplica la fuerza. En la superficie, para  $\theta = \pm \pi/2$ ,  $\sigma_\theta = 0$  y  $\tau_{r\theta} = 0$ , y a una distancia considerable del origen, los esfuerzos tienden a cero.

La constante  $A$  se obtiene igualando las componentes del esfuerzo que actúan en un semicírculo a una distancia  $r$  del punto de aplicación de la fuerza  $P$ , como se muestra en la Fig. 2.1, al considerar lo anterior resulta:

$$-P = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sigma_r \cos \theta r d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2A \cos^2 \theta d\theta = A\pi$$

Entonces el esfuerzo de contacto se transforma en

$$\sigma_r = -\frac{2P \cos \theta}{\pi r} \quad (2.2)$$

En la Fig. 2.1 puede apreciarse que  $r = d \cos \theta$ , entonces el esfuerzo radial se transforma en:

$$\sigma_r = -\frac{2P}{\pi d} \quad (2.3)$$

Este esfuerzo depende del diámetro de la circunferencia que pasa por  $O$ .

Como  $\sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0$ ,  $\sigma_r$  es esfuerzo principal y el esfuerzo cortante máximo será:

$$\tau_{\max} = -\frac{P}{\pi d} \quad (2.4)$$

Este esfuerzo actúa en planos a 45° de la dirección del esfuerzo radial y su contorno es una familia de círculos que pasan por  $O$ , y su magnitud es inversamente proporcional al diámetro del círculo.

Transformando la ecuación (2.2) a coordenadas cartesianas, se obtienen las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \sigma_r \operatorname{sen}^2 \theta = -\frac{2P}{\pi} \frac{x^2 z}{(x^2 + z^2)^2} \\ \sigma_z &= \sigma_r \cos^2 \theta = -\frac{2P}{\pi} \frac{z^3}{(x^2 + z^2)^2} \\ \tau_{xz} &= \sigma_r \operatorname{sen} \theta \cos \theta = -\frac{2P}{\pi} \frac{xz^2}{(x^2 + z^2)^2}\end{aligned}\quad (2.5)$$

Para obtener la forma en la que se distorsiona el semiespacio bajo la acción de la carga, el esfuerzo dado por la ecuación (2.2) se sustituye en la ley de Hooke, para  $\varepsilon_y = 0$ , obteniéndose

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r} = -\frac{(1-\nu^2)}{E} \sigma_\theta = -\frac{(1-\nu^2)}{E} \frac{2P \cos \theta}{\pi r}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = \frac{\nu(1+\nu)}{E} \sigma_\theta = \frac{\nu(1+\nu)}{E} \frac{2P \cos \theta}{\pi r} \text{ y} \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} = \frac{\tau_{r\theta}}{G} = 0\end{aligned}$$

Timoshenko y Goodier [20] integran estas ecuaciones y obtienen los desplazamientos como:

$$\begin{aligned}u_r &= -\frac{1-\nu^2}{\pi E} 2P \cos \theta \ln r - \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{\pi E} P \theta \operatorname{sen} \theta + C_1 \operatorname{sen} \theta + C_2 \cos \theta \\ u_\theta &= \frac{(1-\nu^2)}{\pi E} 2P \operatorname{sen} \theta \ln r + \frac{\nu(1+\nu)}{\pi E} 2P \operatorname{sen} \theta - \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{\pi E} 2P \theta \cos \theta + \\ &\quad \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{\pi E} P \operatorname{sen} \theta + C_1 \cos \theta - C_2 \operatorname{sen} \theta + C_3 r\end{aligned}\quad (2.6)$$

Si los puntos sobre el eje  $z$  sólo se desplazan a lo largo de  $O$ - $z$ , entonces  $u_\theta=0$  para  $\theta=0$ , de donde  $C_1=C_3=0$ , y con estos valores

$$[u_r]_{\theta=0} = -\frac{1-\nu^2}{\pi E} 2P \ln r + C_2$$

Si a una distancia  $r_0$  del punto de aplicación de la fuerza  $u_r=0$ , entonces

$$C_2 = \frac{1-\nu^2}{\pi E} 2P \ln r_0$$

y las ecuaciones (2.6) se transforman en:

$$u_r = -\frac{1-\nu^2}{\pi E} 2P \cos \theta \ln \frac{r_0}{r} - \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{\pi E} P \theta \operatorname{sen} \theta$$

$$u_\theta = -\frac{(1-\nu^2)}{\pi E} 2P \operatorname{sen} \theta \ln \frac{r_0}{r} + \frac{\nu(1+\nu)}{\pi E} 2P \operatorname{sen} \theta - \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{\pi E} 2P \theta \cos \theta + \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{\pi E} P \operatorname{sen} \theta$$

De aquí, el desplazamiento horizontal para  $\theta = \pi/2$  es:

$$[u_r]_{\theta=\frac{\pi}{2}} = [u_r]_{\theta=-\frac{\pi}{2}} = -\frac{(1-2\nu)(1+\nu)P}{2E} \quad (2.7)$$

y el desplazamiento vertical

$$[u_\theta]_{\theta=\frac{\pi}{2}} = -[u_\theta]_{\theta=-\frac{\pi}{2}} = -\frac{(1-\nu^2)}{\pi E} 2P \ln \frac{r_0}{r} + \frac{(1+\nu)}{\pi E} P \quad (2.8)$$

La deformación de la superficie se muestra en la curva debajo de la carga  $P$ , Fig.2.1. El desplazamiento infinito en  $O$  es de esperarse ya que el esfuerzo tiene una singularidad en ese punto.

## 2.3 PRESIÓN NORMAL

La presión que actúa en el entorno del punto  $B$  de una superficie de ancho  $ds$  a una distancia  $s$  del origen  $O$ , puede tomarse como fuerza concentrada (por unidad de longitud en el eje  $y$  y perpendicular al plano que se observa en la Fig. 2.2) de magnitud  $pds$ .

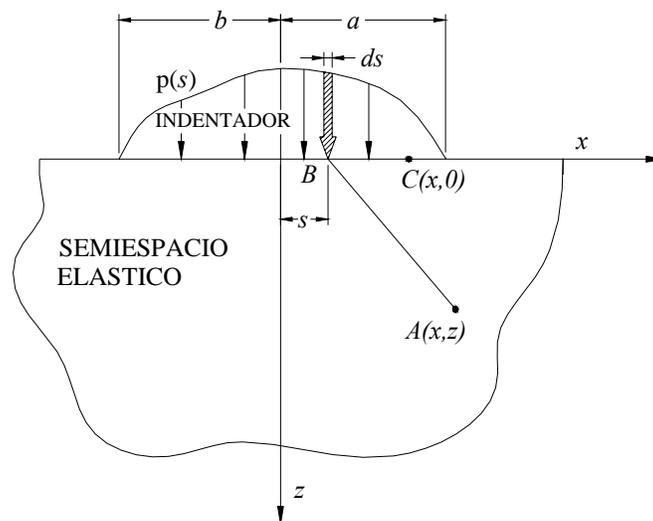


Fig. 2.2 Distribución de presión sobre un semiespacio elástico

Los esfuerzos que se producen en un punto  $A$  del semiespacio elástico debido a la presión normal, se calculan mediante las ecuaciones (2.5) reemplazando en ellas a  $x$  por  $(x-s)$  e integrando sobre la región de carga,  $-b \leq s \leq a$ , las ecuaciones resultantes son:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= -\frac{2z}{\pi} \int_{-b}^a \frac{p(s)(x-s)^2 ds}{[(x-s)^2 + z^2]^2} \\ \sigma_z &= -\frac{2z^3}{\pi} \int_{-b}^a \frac{p(s) ds}{[(x-s)^2 + z^2]^2} \\ \tau_{xz} &= -\frac{2z^2}{\pi} \int_{-b}^a \frac{p(s)(x-s) ds}{[(x-s)^2 + z^2]^2}\end{aligned}\quad (2.9)$$

En estas ecuaciones el esfuerzo depende del tipo de presión  $p(s)$  que se ejerce sobre el semiespacio elástico, y la integración deberá hacerse dentro de los límites adecuados,  $(a, b)$ , para cada caso en particular.

Empleando las ecuaciones para los desplazamientos elásticos ocasionados por la fuerza normal concentrada (2.7), y teniendo en cuenta que  $[u_r]_{\theta=\frac{\pi}{2}} = u_x$  y  $[u_\theta]_{\theta=\frac{\pi}{2}} = u_z$ , se obtienen los desplazamientos en el punto  $A$  debido a la acción de la presión  $p(s)$ , los cuales resultan como (Rekach 1979):

$$\begin{aligned}u_x &= -\frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{2E} \left[ \int_{-b}^x p(s) ds - \int_x^a p(s) ds \right] \\ u_z &= \frac{2(1-\nu^2)}{\pi E} \int_{-b}^a p(s) \ln|x-s| ds - \frac{(1+\nu)P}{\pi E}\end{aligned}\quad (2.10)$$

Estas ecuaciones pueden ser escritas en forma sencilla si se eligen los gradientes del desplazamiento en la superficie, es decir  $\partial u_x / \partial x$  y  $\partial u_z / \partial x$  en lugar de  $u_x$  y  $u_z$ . Las integrales que aparecen entre paréntesis del desplazamiento  $u_x$  pueden ser diferenciadas con respecto al límite  $x$ , Mikhlin 1957[24], y al diferenciar  $u_z$  bajo el signo de la integral (Protter [27]) se obtienen:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = -\frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{E} p(x) \quad (2.11.1)$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial x} = -\frac{2(1-\nu^2)}{\pi E} \int_{-b}^a \frac{p(s)}{x-s} ds \quad (2.11.2)$$

Como  $\frac{\partial u_x}{\partial x}$  es la deformación sobre el eje  $x$ , de tal forma que  $\frac{\partial u_x}{\partial x} = \varepsilon_x$  y usando la ley de Hooke se halla que

$$-\frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{E} p(x) = \frac{1}{E} \left[ (1-\nu^2)\sigma_x - \nu(1+\nu)\sigma_z \right] \quad (2.12)$$

Y al tomar en cuenta que  $\sigma_z = -p(x)$ , resulta que

$$-p(x) = \sigma_x = \sigma_z \quad (2.13)$$

La ecuación (2.11.2) representa la forma en la que se distorsiona la superficie de contacto del semiespacio elástico bajo la acción de la distribución de presión  $p(s)$ . Si se conoce la forma en la que se distorsiona la superficie, se podrá conocer la distribución de presión  $p(x)$  lo cual se logra integrando la ecuación (2.11.2).

Haciendo  $a = b$  en la ecuación (2.11.2) y despejando la función de presión se obtiene:

$$\int_{-a}^a \frac{p(s)}{x-s} ds = -\frac{\pi E}{2(1-\nu^2)} \frac{\partial u_z}{\partial x} \quad (2.14)$$

Esta es una ecuación singular de la forma  $\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{p(\xi)}{\xi-t} d\xi = \frac{2\mu}{\kappa+1} f'(t)$  cuya solución obtuvo Mikhlin

[24], la cual es:

$$p(t) = -\frac{2\mu}{\pi(\kappa+1)(a^2-t^2)^{1/2}} \int_{-a}^a \frac{(a^2-\xi^2)^{1/2}}{\xi-t} f'(\xi) d\xi + \frac{A}{(a^2-t^2)^{1/2}}$$

en donde  $A = \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a p(t) dt = \frac{P}{\pi}$ . Haciendo en esta ecuación los cambios de variable de  $t$  por  $x$  y de  $\xi$  por  $s$ , luego dividiendo entre  $a$ , e introduciendo las nuevas variables definidas como  $X=x/a$  y  $S=s/a$ , además teniendo en cuenta que la constante  $\frac{2\mu}{\kappa+1} = \frac{E}{2(1-\nu^2)}$  se llega a la siguiente

expresión

$$p(X) = -\frac{\pi E}{2\pi^2(1-\nu^2)(1-X^2)^{1/2}} \int_{-1}^1 \frac{(1-S^2)^{1/2}}{X-S} f'(S) dS + \frac{P}{\pi a(1-X^2)^{1/2}} \quad (2.15)$$

En esta última expresión se consideró

$$f'(S) = \frac{\partial}{\partial S} u_z \quad (2.16)$$

y se empleó la fórmula de la integral de Cauchy [25].

Para poder conocer la relación entre  $P$  y  $E/(1-\nu^2)$  y que la ecuación (2.15) sea función de  $P$  solamente, deben conocerse las condiciones de frontera que determinan la geometría del indentador, es decir, si éste tiene esquinas o si no las tiene.

Por último, empleando las ecuaciones de esfuerzo (2.9) desarrolladas a partir de la ecuación de Flamant, y la ecuación (2.15), se obtienen los esfuerzos generados por cualquier tipo de distribución de presión  $p(x)$ , lo que resuelve el problema de la distorsión de la superficie del semiespacio elástico. En el siguiente inciso y en capítulos posteriores se presentará la solución de problemas no hertzianos empleando estos resultados.

## 2.4 PRESIÓN NORMAL UNIFORME

El caso más simple de distribución de presión se presenta cuando  $p(s)=cte$  (Timoshenko 1951), el cual se ilustra en la Fig. 2.3.

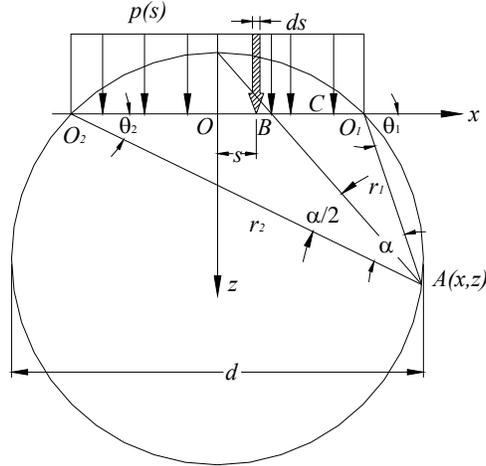


Fig. 2.3 Distribución de presión constante

Si en las ecuaciones de esfuerzo (2.9), la presión es uniforme en la zona de indentación,  $p(s)$  es constante y estas ecuaciones se transforman en:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= -\frac{2z}{\pi} p \int_{-a}^a \frac{(x-s)^2 ds}{[(x-s)^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} \\ \sigma_z &= -\frac{2z^3}{\pi} p \int_{-a}^a \frac{ds}{[(x-s)^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} \\ \tau_{xz} &= -\frac{2z^2}{\pi} p \int_{-a}^a \frac{(x-s) ds}{[(x-s)^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}\quad (2.17)$$

La integración de las ecuaciones (2.17) se simplifica si se emplea la ecuación (2.1) de Flamant, considerando  $P = p_m$  que conduce a:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= -\frac{2p_m}{\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\text{sen}^2 \theta \cos \theta}{r} d\theta \\ \sigma_z &= -\frac{2p_m}{\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\cos^3 \theta}{r} d\theta \\ \tau_{xz} &= -\frac{2p_m}{\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\text{sen} \theta \cos^2 \theta}{r} d\theta\end{aligned}\quad (2.18)$$

estas ecuaciones se pueden integrar directamente para obtener

$$\begin{aligned}\sigma_x &= -\frac{P_m}{2\pi} [2(\theta_1 - \theta_2) + (\text{sen}2\theta_1 - \text{sen}2\theta_2)] \\ \sigma_z &= -\frac{P_m}{2\pi} [2(\theta_1 - \theta_2) - (\text{sen}2\theta_1 - \text{sen}2\theta_2)] \\ \tau_{xz} &= -\frac{P_m}{2\pi} (\cos 2\theta_1 - \cos 2\theta_2)\end{aligned}\quad (2.19)$$

Si la diferencia de los ángulos  $(\theta_2 - \theta_1)$  se sustituye por  $\alpha$ , los esfuerzos principales serán:

$$\begin{aligned}\sigma_{2,1} &= -\frac{P}{\pi} (\alpha \pm \text{sen}\alpha) \\ \tau_{\max} &= -\frac{P}{\pi} \text{sen}\alpha\end{aligned}\quad (2.20)$$

De esta forma los contornos de los esfuerzos cortantes, y en particular del cortante máximo  $\tau_{\max} = p/\pi$ , son una familia de círculos que pasan por  $O_1$  y  $O_2$  como se muestra en la Fig. 2.4a.

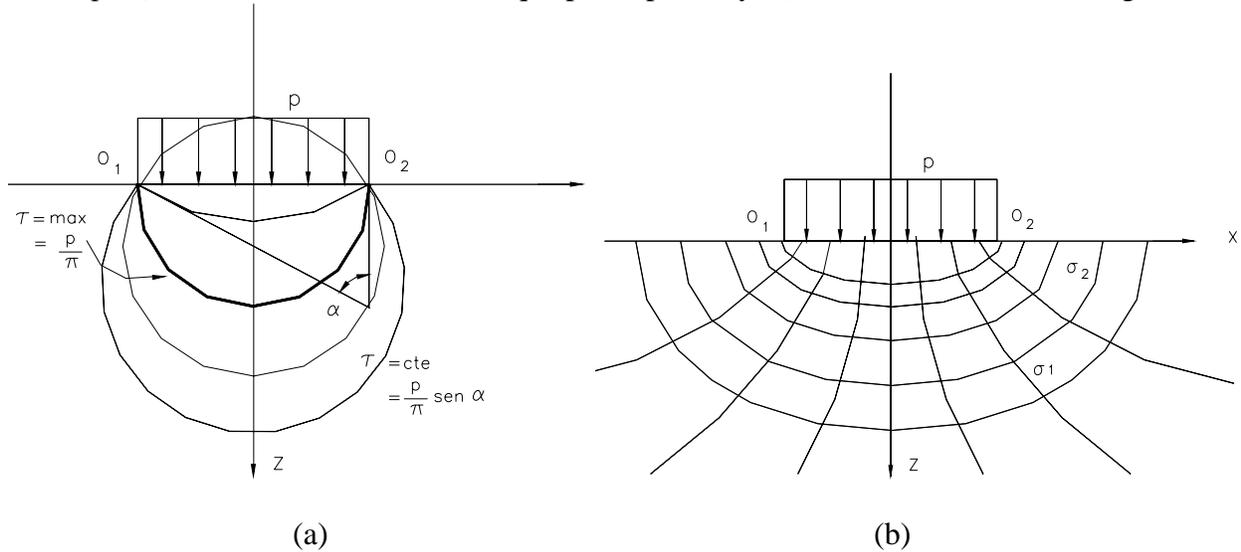


Fig.2.4 a) Distribución del esfuerzo cortante y b) Esfuerzos principales

Las trayectorias de los esfuerzos normales principales son una familia de elipses cofocales e hipérbolas con focos en  $O_1$  y  $O_2$  como se muestra en la Fig. 2.4b.

Como  $p(x)$  es un valor constante, las ecuaciones del gradiente del desplazamiento (2.11) se expresan como:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_x}{\partial x} &= -\frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{E} p \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} &= -\frac{2(1-\nu^2)}{\pi E} p \int_{-a}^a \frac{ds}{x-s}\end{aligned}\quad (2.21)$$

La primera se puede integrar directamente, quedando el desplazamiento en  $x$  como

$$u_x = -\frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{E} p x \quad (2.22)$$

Resolviendo la integral de la segunda de las ecuaciones (2.21) y empleando el valor principal de Cauchy [26] ya que existe una singularidad en  $x=s$ , se obtiene

$$\frac{\partial u_z}{\partial x} = -\frac{2(1-\nu^2)}{\pi E} p [\ln(a+x) - \ln(a-x)]$$

Johnson[12] integra esta última ecuación y obtiene la distribución del desplazamiento  $u_z$  a lo largo del eje  $x$ , este es:

$$u_z = -\frac{(1-\nu^2)}{E} p \left[ (a+x) \ln\left(\frac{a+x}{a}\right)^2 + (a-x) \ln\left(\frac{a-x}{a}\right)^2 \right] + C \quad (2.23)$$

El valor de la constante  $C$  se determina teniendo en cuenta que  $u_z=0$  para  $x=\pm c$ ,  $c$  en este caso se encuentra fuera de la zona de indentación, de la consideración anterior el desplazamiento en  $z$  es:

$$u_z = -\frac{(1-\nu^2)}{E} p \left[ (a+x) \ln\left(\frac{a+x}{a}\right)^2 + (a-x) \ln\left(\frac{a-x}{a}\right)^2 \right] - \left[ (a+c) \ln\left(\frac{a+c}{a}\right)^2 + (a-c) \ln\left(\frac{a-c}{a}\right)^2 \right] \quad (2.24)$$

## 2.5 INDENTACIÓN CON UN PUNZÓN RÍGIDO Y PLANO

La indentación de un semiespacio elástico con un punzón rígido y plano se muestra en la Fig. 2.5, puede verse que al no deformarse el indentador, la deformación total tiene una profundidad constante  $\delta_z=cte$  en el intervalo  $-a \leq x \leq a$ .

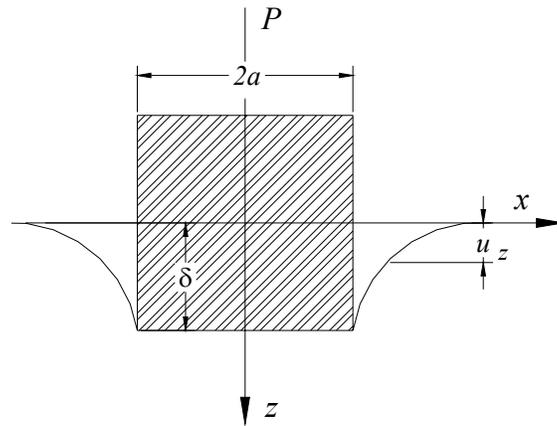


Fig. 2.5 Indentación con un punzón rígido y plano

Para determinar la presión que desplaza al indentador a lo largo del eje  $z$  en forma constante, se emplea la ecuación (2.11.2)

$$\frac{\partial u_z}{\partial x} = -\frac{2(1-\nu^2)}{\pi E} \int_{-a}^a \frac{p(s)}{x-s} ds \quad (2.25)$$

donde  $u_z = cte$  y  $\frac{\partial u_z}{\partial x} = 0$  de tal forma que la ecuación anterior se transforma en:

$$\int_{-a}^a \frac{p(s)}{x-s} ds = 0 \quad (2.26)$$

Usando la solución general (2.15), la presión que genera el desplazamiento constante es:

$$p(x) = \frac{P}{a\pi \left(1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2\right)^{1/2}} \quad (2.27)$$

o bien

$$p(x) = \frac{P_0}{\left(1 - x^2/a^2\right)^{1/2}} \quad \text{donde } p_0 = \frac{P}{a\pi}$$

Cuando  $x \rightarrow a$ , el cortante máximo crece rápidamente aun con cargas pequeñas y el material cede plásticamente cerca de las esquinas del indentador (tabla 2.1, para  $x/a=1$ ).

Los esfuerzos que se generan debido a esta presión se hallan sustituyendo la parte derecha de la ecuación (2.27) en el lugar de  $p(s)$  de las ecuaciones (2.9) y se obtiene:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{2Z}{a\pi^2} P \int_{-1}^1 \frac{(X-S)^2 dS}{[1-S^2]^{1/2} [(X-S)^2 + Z^2]^2} \\ \sigma_z &= -\frac{2Z^3}{a\pi^2} P \int_{-1}^1 \frac{dS}{[1-S^2]^{1/2} [(X-S)^2 + Z^2]^2} \\ \tau_{xz} &= -\frac{2Z^2}{a\pi^2} P \int_{-1}^1 \frac{(X-S)dS}{[1-S^2]^{1/2} [(X-S)^2 + Z^2]^2} \end{aligned} \quad (2.28)$$

$$\frac{\tau_{\max}}{p_0} = \frac{|\sigma_1 - \sigma_2|}{2}$$

intercambiado  $X$  por  $x/a$ ,  $Z$  por  $z/a$  y  $S$  por  $s/a$

Integrando numéricamente las ecuaciones (2.28) se obtienen los resultados mostrados en la Tabla 2.1. Sus contornos se muestran en la Fig. 2.6. Las líneas de deformación obtenidas numéricamente tienen mucha semejanza con las obtenidas mediante fotoelasticidad [9] como las mostradas en la Fig. 2.7.

Tabla 2.1 Valores del esfuerzo cortante máximo para un indentador rígido y plano.

z/a	x/a=0	x/a=0.2	x/a=0.4	x/a=0.6	x/a=0.8	x/a=1	x/a=1.25
	$\tau_{\max}/p_0$						
0	0	0	0	0	0	0	0
0.1	0.009	0.012	0.21	0.051	0.221	0.836	0.229
0.2	0.038	0.045	0.076	0.164	0.456	0.624	0.257
0.3	0.079	0.093	0.145	0.272	0.525	0.535	0.226
0.4	0.128	0.147	0.213	0.346	0.524	0.486	0.224
0.5	0.179	0.201	0.27	0.388	0.504	0.453	0.24
0.6	0.227	0.249	0.314	0.41	0.481	0.429	0.257
0.7	0.269	0.29	0.346	0.419	0.46	0.411	0.27
0.8	0.305	0.322	0.367	0.421	0.442	0.396	0.278
0.9	0.333	0.346	0.381	0.418	0.426	0.383	0.283
1	0.354	0.364	0.39	0.413	0.412	0.372	0.286
1.1	0.368	0.376	0.393	0.406	0.399	0.362	0.286
1.2	0.378	0.383	0.394	0.399	0.388	0.352	0.285
1.3	0.383	0.386	0.392	0.392	0.377	0.344	0.284
1.4	0.385	0.386	0.389	0.384	0.368	0.336	0.271
1.5	0.384	0.384	0.384	0.376	0.359	0.329	0.279

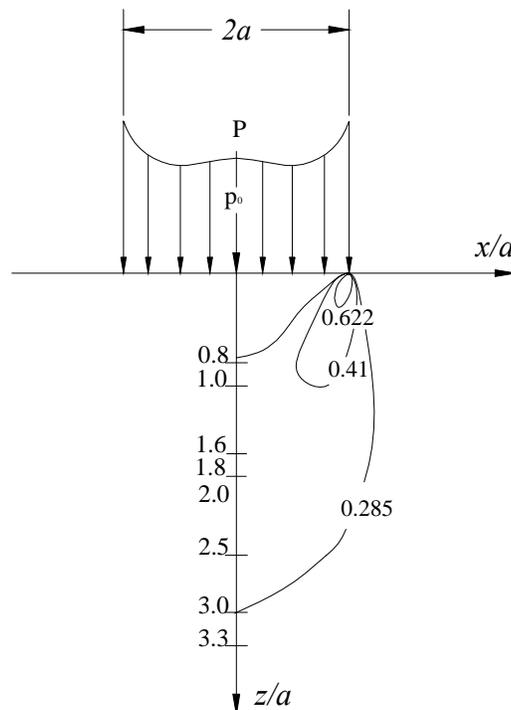


Fig. 2.6 Distribución del esfuerzo cortante máximo en las esquinas de un indentador plano

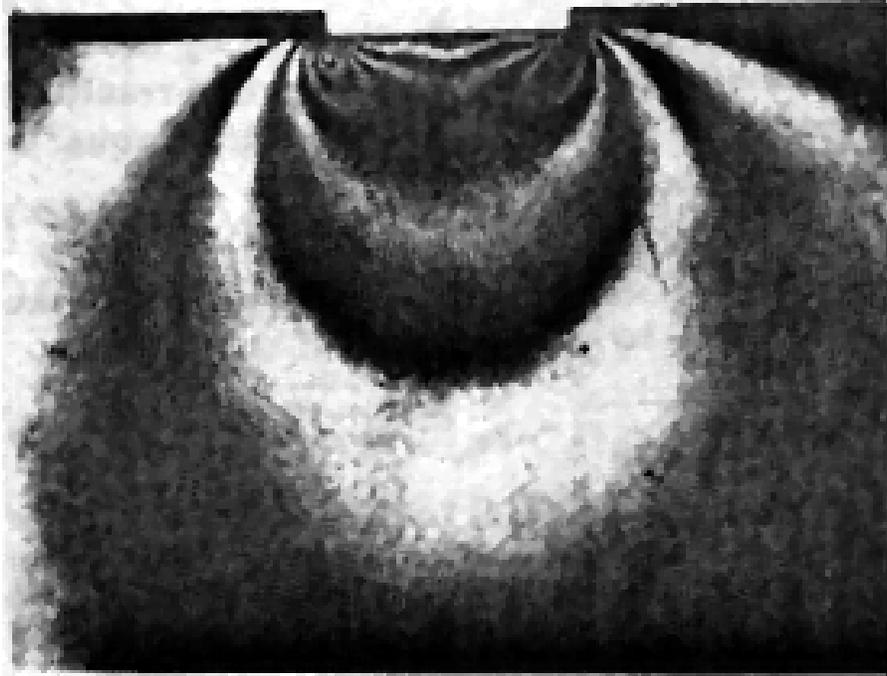


Fig. 2.7 Líneas de concentración de esfuerzo en las esquinas de un indentador plano (Frotch [5])

El desplazamiento normal, fuera de la zona de carga, puede calcularse con la segunda de las ecuaciones (2.10), (Johnson [12]) y se tiene:

$$u_z(x) = -\frac{2(1-\nu^2)P}{E\pi} \ln \left[ \frac{x}{a} + \left( \frac{x^2}{a^2} - 1 \right)^{1/2} \right] + K \quad (2.29)$$

$K$  se obtiene usando las condiciones de frontera,  $u_z(x) = u_z(a) = \delta_z$ , en  $x=a$ , para dar:

$$u_z(x) = -\frac{2(1-\nu^2)P}{E\pi} \ln \left[ \frac{x}{a} + \left( \frac{x^2}{a^2} - 1 \right)^{1/2} \right] + \delta_z \quad (2.30)$$

Esta ecuación representa la curva del desplazamiento fuera de la región de carga en la Fig. 2.5, es decir para  $-a > x > a$ , ya que dentro de la región de carga el desplazamiento es constante e igual a  $\delta_z$ .

# 3 ANÁLISIS ELASTOPLÁSTICO DEL CONTACTO NO HERTZIANO ENTRE CUERPOS CILÍNDRICOS

## 3.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo se analiza el proceso de contacto que produce una carga entre un indentador rígido de superficie semicircular y un cuerpo cilíndrico (espécimen) con el *mismo radio*, es decir en contacto *conformable*.

El análisis consiste en conocer el sistema de presión, la distribución de esfuerzos que se generan durante el contacto, y la carga que se requiere para alcanzar el límite elástico del material del espécimen.

Dado que el sistema de cuerpos en contacto es conformable y la teoría hertziana no es aplicable en este caso, se propone una función polinomial para aproximar la ecuación de las superficies de los cuerpos. Con esta función y las condiciones adecuadas de frontera, se obtiene el sistema de presión, la distribución del esfuerzo cortante máximo y la carga requerida para alcanzar el límite elástico del material en cualquier punto del espécimen. Los resultados tienen mucha similitud con los obtenidos experimentalmente usando fotoelasticidad.

Esta teoría, la cual se denominará no hertziana, es usada para obtener el sistema de esfuerzos producidos por la presión ejercida por dos indentadores opuestos de superficie semicircular sobre un cuerpo cilíndrico del mismo radio.

## 3.2 CONTACTO NO HERTZIANO ENTRE CUERPOS CILÍNDRICOS

En la Fig. 3.1 se muestra un disco de aluminio que está siendo penetrado por un indentador rígido y se desea conocer la carga necesaria para iniciar la deformación permanente de la superficie de contacto con el disco. El disco está sostenido por una base en forma de V para evitar su movimiento

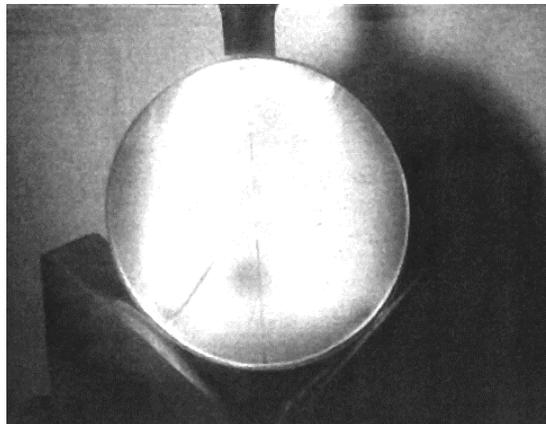


Fig. 3.1 Indentador penetrando un disco de aluminio

### 3.2.1 PRESIÓN MEDIANTE APROXIMACIÓN POLINOMIAL

El proceso de indentación se analiza en la Fig. 3.2. La ecuación de la circunferencia que describe el perfil de los dos cuerpos, con respecto al origen mostrado es:

$$z = -\sqrt{r^2 - x^2} + r \quad (3.1)$$

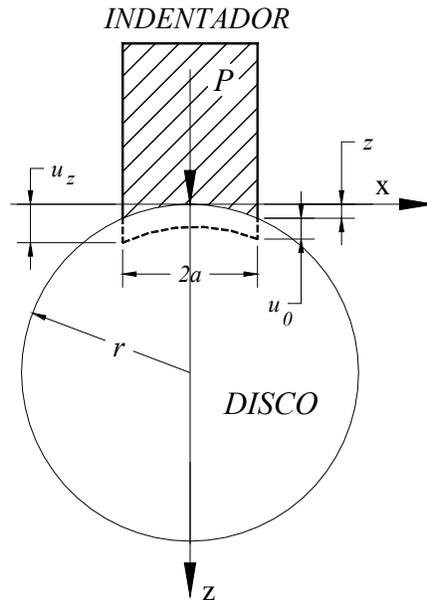


Fig. 3.2 Proceso de deformación de un disco bajo la acción de un indentador rígido

El indentador y el disco al hacer contacto bajo la acción de la fuerza  $P$  (por unidad de longitud en el eje  $y$  perpendicular al dibujo), generan una superficie de contacto de ancho  $2a$  en el eje  $x$ , por unidad de longitud en el eje  $y$ .

Como el radio  $r$  del disco es mayor que el ancho del área de contacto  $2a$ , se considera que el esfuerzo en los puntos de contacto con la base en  $V$  no tiene influencia sobre el producido en el área de contacto.

El desplazamiento del indentador sobre el disco puede expresarse como:

$$u_z = u_0 + z \quad (3.2)$$

que al sustituir la ecuación (3.1) en esta última da:

$$u_z = u_0 - \sqrt{r^2 - x^2} + r \quad (3.3)$$

donde  $u_0$  representa el desplazamiento del indentador en el eje  $z$  y  $u_z$  es el desplazamiento total de cualquier punto de la superficie de contacto con respecto al sistema de referencia,  $u_0$  se considerará constante en una profundidad deseada.

Para encontrar la distorsión de la superficie a lo largo del eje  $x$ , se deriva la ecuación (3.3) con respecto a  $x$  obteniéndose

$$\frac{\partial}{\partial x} u_z = \frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}} \quad (3.4)$$

Esta variación del desplazamiento debe ser igual a la producida por una distribución de presión  $p(x)$ , de la ecuación (2.14) se despeja a  $\frac{\partial u_z}{\partial x}$ , teniéndose

$$\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}} = -\frac{2(1-\nu^2)}{\pi E} \int_{-a}^a \frac{p(s)}{x-s} ds \quad (3.5)$$

La ecuación anterior es una ecuación integral simple cuya solución general se planteó en el inciso 2.3, dividiendo ambos miembros de la ecuación entre  $a$  y reemplazando  $X$  por  $x/a$ ,  $S$  por  $s/a$  y  $R$  por  $r/a$ , se tiene:

$$p(X) = -\frac{E}{2\pi(1-\nu^2)} \int_{-1}^1 \frac{(1-S^2)^{1/2}}{S-X} \left[ \frac{S}{\sqrt{R^2-S^2}} \right] dS + \frac{2D}{a(1-X^2)^{1/2}} \quad (3.6)$$

Sin embargo la integral  $\int_{-1}^1 \frac{(1-S^2)^{1/2}}{S-X} \left[ \frac{S}{\sqrt{R^2-S^2}} \right] dS$  no es posible integrarla directamente y para hallar la solución se emplea una aproximación. Así, el perfil del contorno expresado en la ecuación (3.1) puede aproximarse, en un sistema  $X$ - $Z$ , mediante el polinomio de cuarto grado siguiente:

$$Z = \frac{X^4}{6R^3} + \frac{X^2}{2R} \quad (3.7)$$

Este tipo de polinomio  $Z = f\left(\frac{X^n}{R^{n-1}}\right)$  puede usarse para aproximar cualquier relación,  $R = r/a$ , entre el radio del indentador y el ancho del área de contacto, el grado  $n$  *par* depende de la precisión con la que se desee aproximar la ecuación de la circunferencia expresada en la ecuación (3.1).

Su derivada  $\frac{\partial Z}{\partial X} = \frac{4X^3}{6R^3} + \frac{X}{R}$  al sustituirse en la ecuación (3.6) de la presión, permite obtener una expresión más sencilla de integrar

$$p(X) = -\frac{E}{2\pi(1-\nu^2)} \int_{-1}^1 \frac{(1-S^2)^{1/2}}{S-X} \left[ \frac{2S^3}{3R^3} + \frac{S}{R} \right] dS + \frac{2D}{a(1-X^2)^{1/2}} \quad (3.8)$$

Al efectuar la integración, usando el valor principal de Cauchy, para las integrales entre paréntesis se tiene

$$\int_{-1}^1 \frac{(1-S^2)^{1/2}}{S-X} S^3 dS = \pi X^4 - \frac{\pi X^2}{2} - \frac{\pi}{8} \quad (3.9)$$

y

$$\int_{-1}^1 \frac{(1-S^2)^{1/2}}{S-X} S dS = \pi X^2 - \frac{\pi}{2}$$

Con lo cual se obtiene una distribución de presión aproximada de la ecuación (3.6)

$$p(X) = -\frac{E}{2(1-\nu^2)(1-X^2)^{1/2}} \left[ \frac{2X^4}{3R^3} - \frac{X^2}{3R^3} + \frac{X^2}{R} - \frac{1}{12R^3} - \frac{1}{2R} \right] + \frac{2D}{a(1-X^2)^{1/2}} \quad (3.10)$$

La constante  $D$  puede definirse fácilmente si se tiene en cuenta que  $\frac{P}{a} = \int_{-1}^1 p(X) dX$ , entonces

$$\frac{P}{a} = \int_{-1}^1 \left[ -\frac{E}{2(1-\nu^2)(1-X^2)^{1/2}} \left[ \frac{2X^4}{3R^3} - \frac{X^2}{3R^3} + \frac{X^2}{R} - \frac{1}{12R^3} - \frac{1}{2R} \right] + \frac{2D}{a(1-X^2)^{1/2}} \right] dX$$

de donde

$$P = 2D\pi \text{ o bien } D = \frac{P}{2\pi} \quad (3.11)$$

y la expresión para la distribución general de la presión para el caso en estudio es:

$$p(X) = -\frac{E}{2(1-\nu^2)(1-X^2)^{1/2}} \left[ \frac{2X^4}{3R^3} - \frac{X^2}{3R^3} + \frac{X^2}{R} - \frac{1}{12R^3} - \frac{1}{2R} \right] + \frac{P}{\pi a(1-X^2)^{1/2}} \quad (3.12)$$

### 3.2.2 CONDICIÓN DE FRONTERA

En la ecuación (3.12)  $p(X)$  debe estar únicamente en función de  $P$  para conocer la variación desde que la carga de contacto  $P$  es nula. Para encontrar la relación entre  $P$  y  $E/(1-\nu^2)$  puede emplearse la condición que la distribución de presión  $p(X)$  debe ser continua y simétrica en  $-1 \leq X \leq 1$ , entonces en el punto de inflexión,  $X=0$ , la pendiente debe ser horizontal esto es:

$$\frac{\partial p(X)}{\partial X} = -\frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{E}{2(1-\nu^2)(1-X^2)^{1/2}} \left[ \frac{2X^4}{3R^3} - \frac{X^2}{3R^3} + \frac{X^2}{R} - \frac{1}{12R^3} - \frac{1}{2R} \right] + \frac{P}{\pi a(1-X^2)^{1/2}} \right) = 0 \quad (3.13)$$

de donde

$$\frac{E}{2(1-\nu^2)} = \frac{4PR^3}{3\pi a(2R^2-1)} \quad (3.14)$$

y la distribución de la presión en función de la carga  $P$  será:

$$p(X) = \frac{4PR^2}{3\pi a(2R^2-1)} \left[ \frac{2X^2+3R^2+1}{3R^2} \right] (1-X^2)^{1/2} + \frac{4PR^2}{3\pi a(2R^2-1)(1-X^2)^{1/2}} \left( \frac{3R^2-2}{2R^2} \right)$$

o bien

$$p(X) = \frac{4P}{9\pi a} \left[ \frac{2X^2+3R^2+1}{2R^2-1} \right] (1-X^2)^{1/2} + \frac{2P}{3\pi a(1-X^2)^{1/2}} \left( \frac{3R^2-2}{2R^2-1} \right) \quad (3.15)$$

En esta última ecuación la presión tiende a incrementarse cuando  $x/a=X \Rightarrow l$  tal como se muestra en la Fig. 3.3.

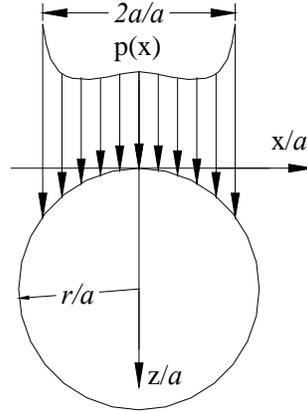


Fig. 3.3 Distribución de la presión  $p(X)$

Si en  $X=0$   $p(X)=p_0$ , entonces

$$p_0 = \frac{4P}{9\pi a} \left( \frac{3R^2 + 1}{2R^2 - 1} \right) + \frac{2P}{3\pi a} \left( \frac{3R^2 - 2}{2R^2 - 1} \right)$$

o bien

$$p_0 = \frac{2P}{9\pi a} \left[ \frac{15R^2 - 4}{2R^2 - 1} \right] \quad (3.16)$$

### 3.2.3 ESFUERZOS PRODUCIDOS POR $p(X)$

Al sustituir la distribución de la presión expresada en la ecuación (3.15) en las ecuaciones generales de esfuerzo (2.9), y considerando  $Z=z/a$ ,  $X=x/a$ ,  $S=s/a$ , se obtienen las ecuaciones de los esfuerzos actuantes en el disco:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{-2Z}{\pi} \left[ \frac{4P}{9\pi a(2R^2 - 1)} \int_{-1}^1 \frac{(2X^2 + 3R^3 + 1)(1 - S^2)^{1/2} (X - S)^2 dS}{[(X - S)^2 + Z^2]^2} + \frac{2P}{3\pi a} \left[ \frac{3R^2 - 2}{2R^2 - 1} \right] \int_{-1}^1 \frac{(X - S)^2}{(1 - S^2)^{1/2} [(X - S)^2 + Z^2]^2} dS \right] \\ \sigma_z &= \frac{-2Z^3}{\pi} \left[ \frac{4P}{9\pi a(2R^2 - 1)} \int_{-1}^1 \frac{(2X^2 + 3R^3 + 1)(1 - S^2)^{1/2} dS}{[(X - S)^2 + Z^2]^2} + \frac{2P}{3\pi a} \left[ \frac{3R^2 - 2}{2R^2 - 1} \right] \int_{-1}^1 \frac{1}{(1 - S^2)^{1/2} [(X - S)^2 + Z^2]^2} dS \right] \\ \tau_{xz} &= \frac{-2Z^2}{\pi} \left[ \frac{4P}{9\pi a(2R^2 - 1)} \int_{-1}^1 \frac{(2X^2 + 3R^3 + 1)(1 - S^2)^{1/2} (X - S) dS}{[(X - S)^2 + Z^2]^2} + \frac{2P}{3\pi a} \left[ \frac{3R^2 - 2}{2R^2 - 1} \right] \int_{-1}^1 \frac{(X - S)}{(1 - S^2)^{1/2} [(X - S)^2 + Z^2]^2} dS \right] \end{aligned} \quad (3.17)$$

El esfuerzo para equilibrar el área libre de presión (Timoshenko[33]) será:

$$\sigma_x = \frac{P}{\pi a R} \quad \text{y} \quad \sigma_z = \frac{P}{\pi a R} \quad (3.18)$$

Con las ecuaciones (3.17) y (3.18) se calcula el esfuerzo cortante máximo adimensional como  $\tau/p_0$ , cuya distribución se muestra en la Fig. 3.4.

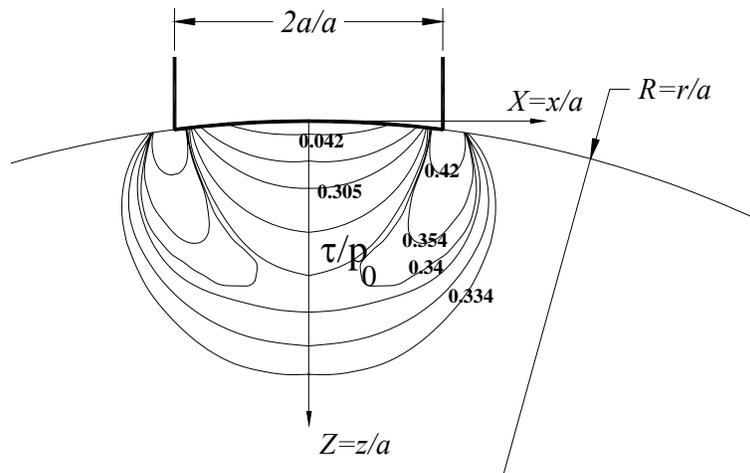


Fig. 3.4 Distribución del esfuerzo cortante  $\tau/p_0$

La concentración del esfuerzo en las esquinas del indentador produce un esfuerzo máximo en este punto de magnitud  $\tau/p_0=0.695$  y corre a lo largo de una zona semicircular hasta un valor mínimo de  $\tau/p_0=0.338$  en  $x/a=0$  y  $z/a=1.3$ . Esta zona, al rebasar su límite elástico, se plastifica y permite la penetración del indentador.

El mapa con los puntos de esfuerzo cortante máximo adimensional  $\tau/p_0$  se muestra en la Fig. 3.5.

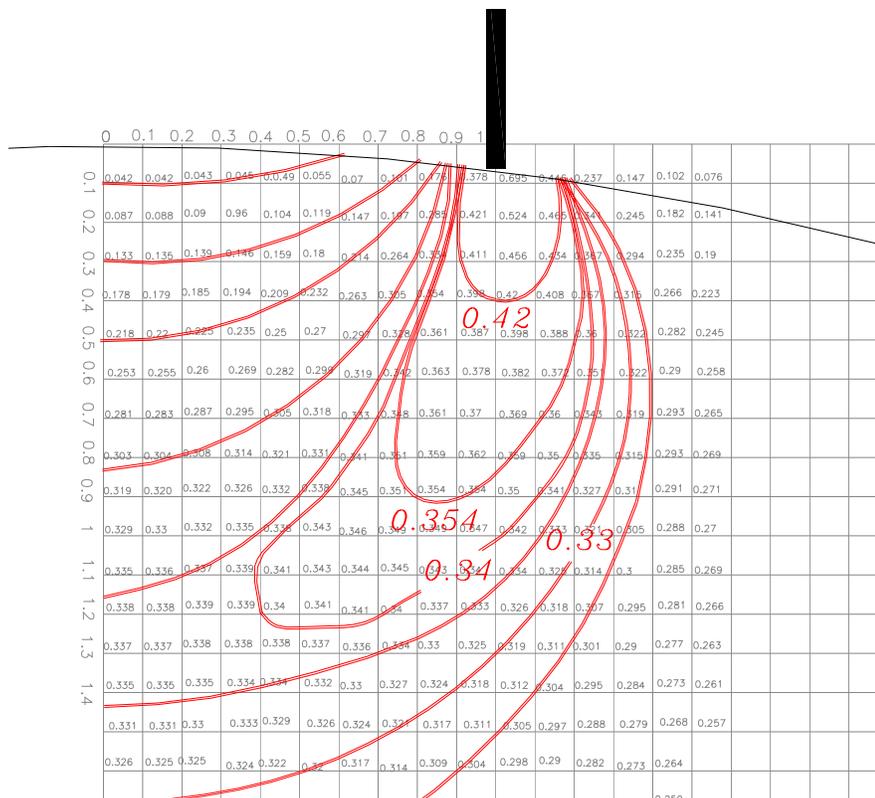


Fig. 3.5 Puntos de esfuerzo cortante máximo adimensional  $\tau/p_0$  dentro del espécimen.

Las líneas de esfuerzo cortante constante  $\tau/p_0$  de la Fig. 3.4 son semejantes a las obtenidas en el inciso (2.5) para el indentador plano, ya que ese indentador y el circular que nos ocupa terminan en esquinas, aunque los valores máximos varían de uno a otro.

En la gráfica obtenida por Frotch mediante el análisis experimental de esfuerzos para el indentador plano, Fig. 2.7, pueden verse también las semejanzas en las líneas de esfuerzo que se muestran en las esquinas del indentador.

### 3.2.4 ANÁLISIS PLÁSTICO DE ESFUERZOS

Usando las ecuaciones de presión y esfuerzos obtenidas anteriormente mediante el polinomio no hertziano, a continuación se emplean las reglas del incremento de deformación de Levy-Mises [2] para determinar el estado de esfuerzos y deformaciones dentro de la zona plástica, así como la carga necesaria para penetrar el espécimen. La ecuación para calcular el incremento de deformación en cada punto del material del disco es:

$$d\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} d\sigma_{ij} + \frac{1-2\nu}{E} \frac{d\sigma_{ii}}{3} + \frac{3}{2} \frac{d\bar{\varepsilon}}{\bar{\sigma}} \sigma'_{ij} \quad (3.19)$$

donde

$d\varepsilon_{ij}$  = componentes del incremento del tensor deformación

$d\sigma_{ij}$  = componentes del incremento del tensor esfuerzo

$\sigma'_{ij}$  = componentes del tensor esfuerzo deviatorico

$E$  = módulo de elasticidad

$\nu$  = módulo de Poisson

$\bar{\sigma}$  = esfuerzo efectivo

$\bar{\varepsilon}$  = deformación efectiva

$$\bar{\sigma} = \frac{\sqrt{2}}{2} [\sigma_{ij}\sigma_{ij}]^{1/2} \quad (3.20)$$

$$\bar{\varepsilon} = \sqrt{\frac{2}{3}} [\varepsilon_{ii}\varepsilon_{ii}]^{1/2} \quad (3.21)$$

La relación  $\frac{d\bar{\varepsilon}}{\bar{\sigma}}$ , se obtiene (Dieter [2]) a partir de

$$\bar{\sigma} = K\bar{\varepsilon}^n \quad (3.22)$$

donde  $K=\sigma_y$  es el factor de resistencia y  $n$  el exponente de endurecimiento obtenidos de las pruebas de tensión del material.

Las dos primeras componentes de la ecuación (3.19) representan el incremento elástico de la deformación, de tal forma que la marca permanente es producida únicamente por la componente plástica de ésta que es:

$$d\varepsilon^P_{ij} = \frac{3}{2} \frac{d\bar{\varepsilon}}{\bar{\sigma}} \sigma'_{ij} \quad (3.23)$$

### 3.2.5 ALGORITMO PARA OBTENER LAS DEFORMACIONES INCREMENTALES

El proceso para obtener las deformaciones en la zona plástica es iterativo, es decir se propone una fuerza inicial para calcular esfuerzos y compararlos con el límite de cedencia y se incrementa o disminuye hasta alcanzarlo. Zienkiewics [21] usa un proceso parecido en la solución de este tipo de problemas.

El algoritmo iterativo es de la siguiente forma:

1. Se propone una fuerza inicial.
2. Se calcula la presión  $p_0$  y con ésta los esfuerzos de contacto  $\sigma_{ij}$  de la ecuación (2.41).
3. Se calculan los esfuerzos desviadores  $\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{ii} \delta_{ij}$  y los esfuerzos principales  $\sigma_{ii}$ ,  $\tau_{max}$  y las deformaciones principales  $\varepsilon_{ii}$ .
4. Se calcula el esfuerzo efectivo  $\bar{\sigma}$  y se verifica si  $\bar{\sigma} \geq \sigma_Y$ , si no es igual se incrementa la fuerza y se regresa al punto 2. Si es igual o mayor, se inicia el proceso de deformaciones incrementales, punto 5.
5. Se calculan:

$$\bar{\varepsilon} = \left( \frac{\bar{\sigma}}{K} \right)^{\frac{1}{n}} \quad (3.24)$$

$$d\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}_{el} \quad (3.25)$$

donde  $\bar{\varepsilon}_{el} = 1$ , debido a la construcción de la ecuación de flujo para el régimen plástico,

6. Con estos valores se determina el incremento plástico de la deformación  $d\varepsilon^P_{ij}$  en la ecuación (3.23).
7. Se calcula el desplazamiento del indentador sobre el eje  $z/a$ , integrando la deformación plástica,  $d\varepsilon^P_z$ , con respecto a  $z/a$ , para  $x/a=1$ , mediante

$$\delta = \int_{z_1}^{z_n} d\varepsilon_z^p dz \quad (3.26)$$

donde  $z_i$ , son los valores de  $z/a$  de los puntos donde se rebasó el límite elástico del material,  $i=1, \dots, n$ .

Se verifica si se alcanzó la profundidad deseada

- Se regresa al punto 2 y el proceso de incremento de la presión continúa hasta alcanzar la profundidad deseada.

### 3.2.6 DESPLAZAMIENTO DEL INDENTADOR EN EL DISCO DE ALUMINIO

El disco de aluminio y el indentador mostrado en la Fig. 3.1 tienen las siguientes características:

Diámetro exterior del disco:  $\phi=101 \text{ mm}$

Ancho del indentador:  $2a=12.7 \text{ mm}$ , de acuerdo con la Fig. 3.2

Largo del indentador:  $y=25.4 \text{ mm}$

Módulo de elasticidad del disco:  $E=7200 \text{ kg/mm}^2$

Esfuerzo de cedencia del material del disco:  $\sigma_Y=33 \text{ kg/mm}^2$

Módulo de Poisson del disco:  $\nu=0.3$

$n=0.25$

Se considera que el material del que está hecho el indentador es rígido, de tal forma que las deformaciones plásticas únicamente afectan al disco. Mediante el proceso descrito anteriormente y teniendo en cuenta las propiedades del aluminio, se obtuvieron los desplazamientos del indentador en función de la carga aplicada usando el código MATHCAD. Los resultados se muestran en la Fig. 3.6.

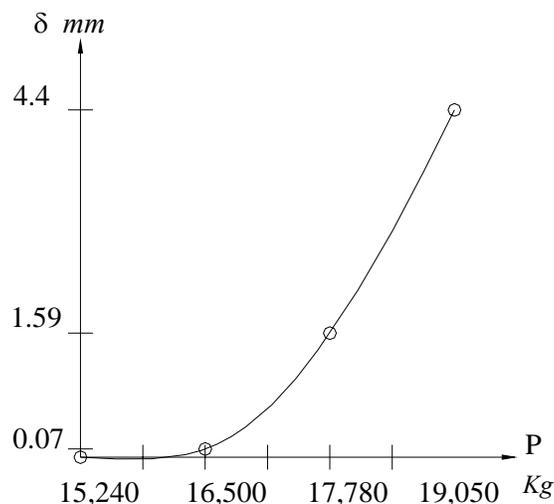


Fig. 3.6 Desplazamiento del indentador en el disco de aluminio.

La carga necesaria para que el indentador se desplace  $1.4\text{ mm}$  sobre la superficie del aluminio es de  $17,700\text{ kg}$  aproximadamente.

### 3.2.7 ANÁLISIS EXPERIMENTAL DE ESFUERZOS

El experimento que se desarrolló para comprobar los resultados obtenidos anteriormente mediante la solución del modelo matemático propuesto, consiste en indentar con una carga controlada, mediante una celda electrónica, el disco de aluminio mostrado en la Fig. 3.1.

La máquina usada es una prensa con capacidad de 30 toneladas y el dispositivo consiste de una base en forma de  $V$ , donde se coloca el disco de aluminio para impedir que se mueva y mediante un indentador conformable con el disco montado en la prensa, se le aplica presión al disco.

El dispositivo completo se monta sobre una celda de carga para controlar electrónicamente la carga que se le aplica manualmente a la prensa.

Las cargas aplicadas se iniciaron con 9 toneladas, la penetración se inició a las 18 toneladas y únicamente se pudieron aplicar 19.6 toneladas, ya que en este punto el material al empezar a fluir descargaba rápidamente la prensa. En cada una de las etapas de carga se tomaron fotografías mediante lentes polarizados para observar las líneas de deformación que se formaban en la superficie del disco de aluminio. Las líneas tienen semejanza con las mostradas en la Fig. 3.4.

Las figuras siguientes muestran la secuencia de carga del experimento. La profundidad de la indentación alcanzada con 19.6 toneladas fue de 1.4 milímetros.

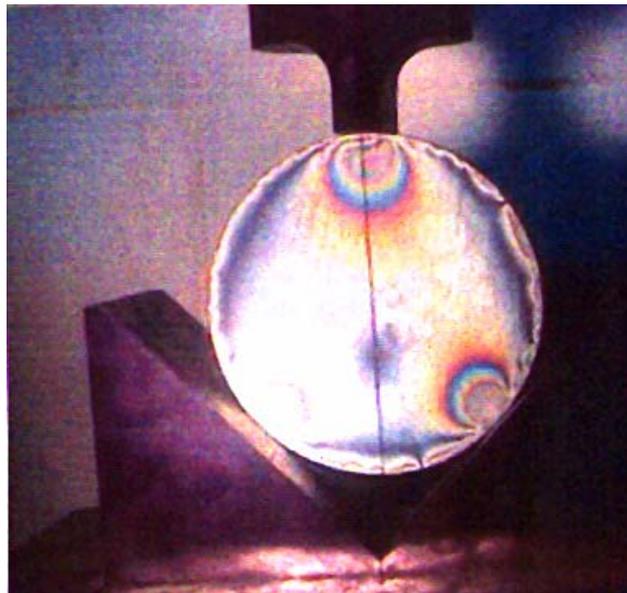


Fig. E1 Líneas de deformación para una carga de 12 toneladas

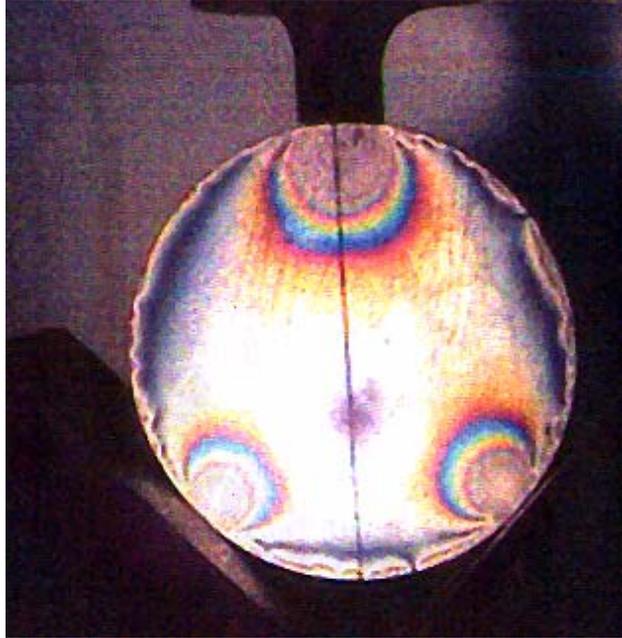


Fig. E2 Líneas de deformación para una carga de 15 toneladas

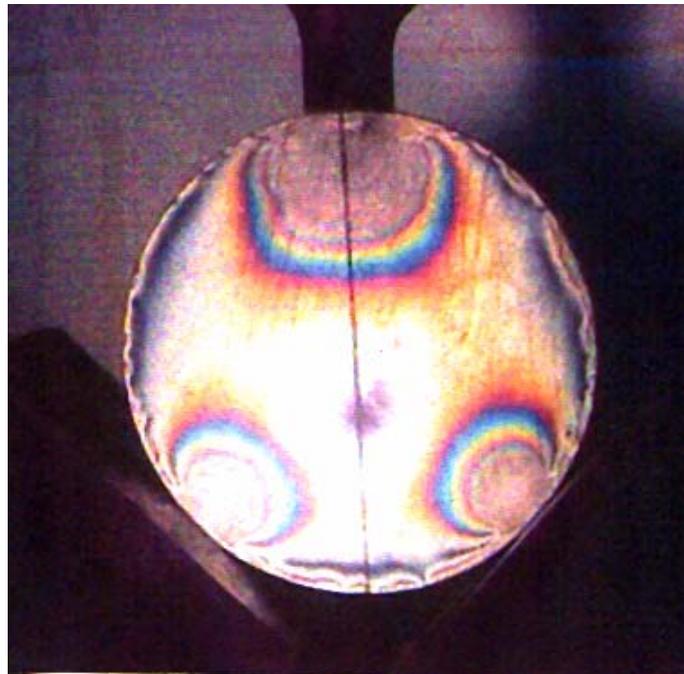


Fig. E3 Líneas de deformación para 18 toneladas.  
Inicia la penetración

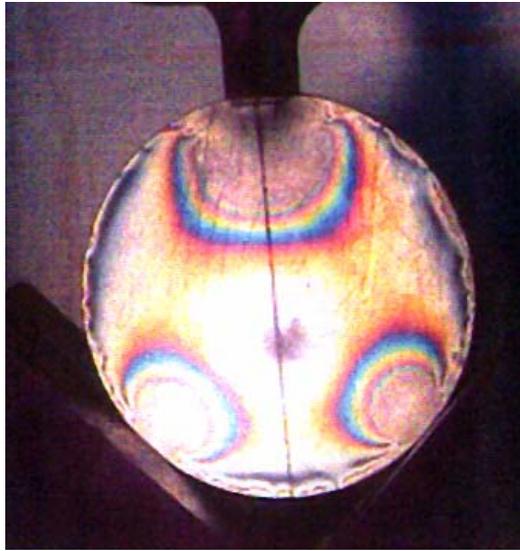


Fig. E4 Líneas de deformación para 19.6 toneladas.  
Inicio de la fluencia del material

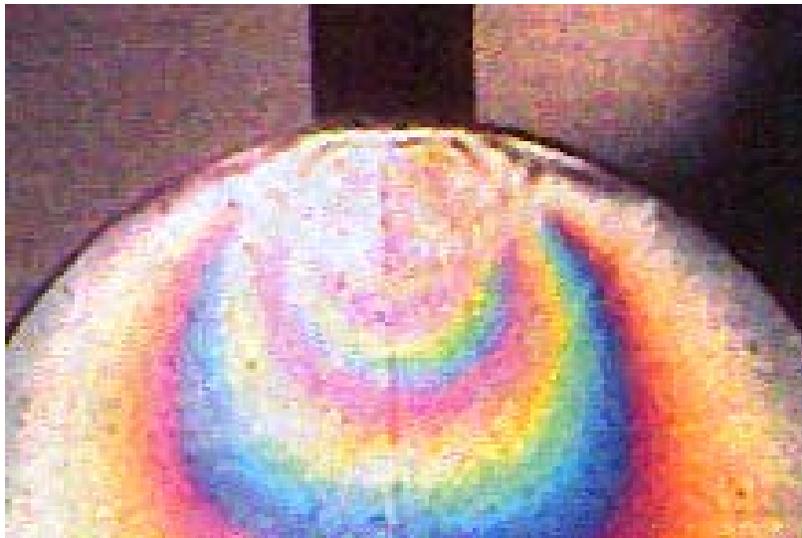


Fig. E5 Líneas de deformación para 18 toneladas. Ampliación

De la Fig. E1a la E3 se muestran las líneas de esfuerzo cortante equipotencial desde el momento en el que aparecen hasta el punto en el que se inicia la indentación del material del disco.

En la Fig. E4 se muestra el momento en el que el material empieza a fluir, determinado en forma visual. En la Fig. E5 se muestra una ampliación del disco con una carga de 18 toneladas, debido a la carga tan alta requerida para indentar el disco no es posible ver las líneas de concentración de esfuerzos en la esquina del indentador. Sin embargo esta zona podrá analizarse en el inciso 3.3.

El estudio de la zona plastificada está fuera del alcance de este estudio y se deja para investigaciones posteriores.

### 3.2.8 CONCLUSIONES

El análisis experimental de esfuerzos muestra que el modelo matemático propuesto puede usarse para calcular la carga necesaria para indentar el disco de aluminio, pues el valor de 17,700 kg obtenido se aproxima al de 19,600 kg observado experimentalmente.

Las diferencias pueden ajustarse conociendo exactamente el límite elástico del material con el que fue desarrollado el experimento, así como el valor del exponente de endurecimiento, ya que pequeñas variaciones de estos valores producen grandes cambios en los resultados.

## 3.3 CONTACTO NO HERTZIANO ENTRE TRES CUERPOS CILÍNDRICOS

### 3.3.1 PRESIÓN MEDIANTE APROXIMACIÓN POLINOMIAL

Para definir la distribución de presión  $p(x)$  que generan dos o más cuerpos en contacto, se emplea el proceso establecido en el inciso 3.2, el cual será aplicado en ese caso.

En la Fig. 3.7 se muestran tres cuerpos en contacto conformable, dos indentadores indeformables cilíndricos presionando un cuerpo elastoplástico también cilíndrico, el radio de las tres superficies es  $r$ . La ecuación de la circunferencia que describe el perfil de los tres cuerpos, con respecto al origen mostrado es la ecuación (3.1):

$$z = -\sqrt{r^2 - x^2} + r$$

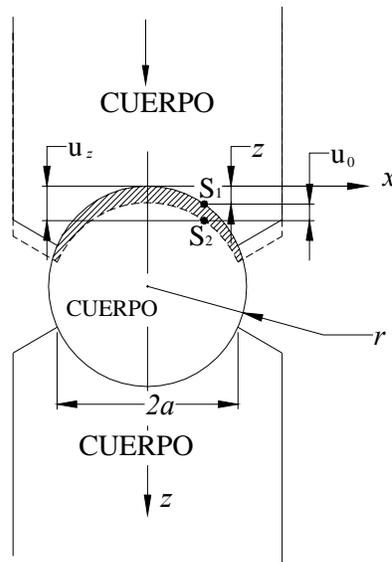


Fig.3.7 Cuerpo elastoplástico presionado por dos indentadores opuestos

El desplazamiento de los indentadores 1 y 3 sobre el cuerpo 2 puede expresarse con la ecuación (3.3):

$$u_z = u_0 - \sqrt{r^2 - x^2} + r$$

donde  $u_0$  representa el desplazamiento constante del indentador en el eje  $z$  y  $u_z$  es el desplazamiento total de cualquier punto de la superficie de contacto con respecto al sistema de referencia.

Como este sistema se comporta igual al discutido en el inciso 3.2, la presión que produce el desplazamiento de cada uno de los indentadores sobre el espécimen es la de la ecuación (3.15)

$$p(X) = \frac{4P}{9\pi a} \left[ \frac{2X^2 + 3R^2 + 1}{2R^2 - 1} \right] (1 - X^2)^{1/2} + \frac{2P}{3\pi a (1 - X^2)^{1/2}} \left( \frac{3R^2 - 2}{2R^2 - 1} \right)$$

y su distribución se muestra en la Fig. 3.8.

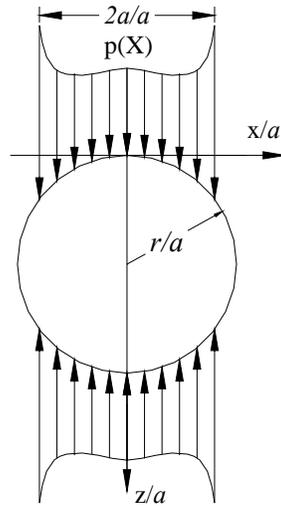


Fig. 3.8 Distribución de la presión polinomial sobre el cuerpo elasto-plástico

### 3.3.- ESFUERZO POLINOMIAL SOBRE UN DISCO

Las ecuaciones que representan los esfuerzos que la presión (3.15) produce sobre el cuerpo elasto-plástico de la Fig.3.7 son las ecuaciones (3.17):

$$\sigma_x = \frac{-2Z}{\pi} \left[ \frac{4P}{9\pi a (2R^2 - 1)} \int_{-1}^1 \frac{(2X^2 + 3R^2 + 1)(1 - S^2)^{1/2} (X - S)^2 dS}{[(X - S)^2 + Z^2]^2} + \frac{2P}{3\pi a} \left[ \frac{3R^2 - 2}{2R^2 - 1} \right] \int_{-1}^1 \frac{(X - S)^2}{(1 - S^2)^{1/2} [(X - S)^2 + Z^2]^2} dS \right]$$

$$\sigma_z = \frac{-2Z^3}{\pi} \left[ \frac{4P}{9\pi a (2R^2 - 1)} \int_{-1}^1 \frac{(2X^2 + 3R^2 + 1)(1 - S^2)^{1/2} dS}{[(X - S)^2 + Z^2]^2} + \frac{2P}{3\pi a} \left[ \frac{3R^2 - 2}{2R^2 - 1} \right] \int_{-1}^1 \frac{1}{(1 - S^2)^{1/2} [(X - S)^2 + Z^2]^2} dS \right]$$

$$\tau_{xz} = \frac{-2Z^2}{\pi} \left[ \frac{4P}{9\pi a (2R^2 - 1)} \int_{-1}^1 \frac{(2X^2 + 3R^2 + 1)(1 - S^2)^{1/2} (X - S) dS}{[(X - S)^2 + Z^2]^2} + \frac{2P}{3\pi a} \left[ \frac{3R^2 - 2}{2R^2 - 1} \right] \int_{-1}^1 \frac{(X - S)}{(1 - S^2)^{1/2} [(X - S)^2 + Z^2]^2} dS \right]$$

Pero el cuerpo elasto-plástico es deformado por dos presiones iguales y opuestas, por lo que el estado de esfuerzos deberá calcularse mediante la superposición de las contribuciones producidas por la carga  $P$ , Timoshenko [20]:

- i) El esfuerzo producido por el indentador superior (ecuaciones 3.17).

ii) El esfuerzo producido por el indentador inferior (ecuaciones 3.17, en la que se sustituye  $Z$  por  $2R-Z$ ).

iii) El esfuerzo para equilibrar el área libre de presión, ecuaciones (3.18)

$$\sigma_x = \frac{P}{\pi a R} \text{ y } \sigma_z = \frac{P}{\pi a R}$$

Con estas tres contribuciones se calculan los esfuerzos principales y el esfuerzo cortante máximo en cada punto del cuerpo elastoplástico. Los valores del esfuerzo cortante adimensional  $\tau/p_0$  se muestran en la Tabla 3.2 y en la Fig. 3.9, su distribución sobre el cuerpo del espécimen. En esta figura puede verse que el esfuerzo cortante máximo se alcanza en el centro del cuerpo 2, pero en las esquinas del indentador, el nivel de esfuerzo es similar.

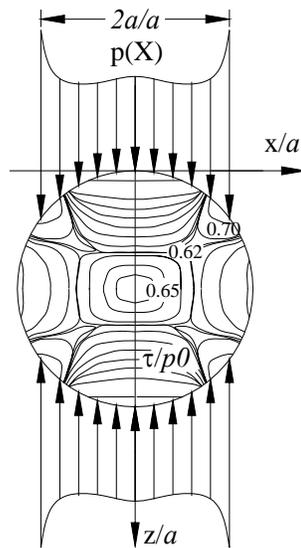


Fig. 3.9 Distribución del esfuerzo cortante  $\tau/p_0$  sobre el cuerpo del espécimen mediante un indentador con esquinas

Tabla 3.2 Valores del esfuerzo cortante máximo  $\tau/p_0$  para valores de  $x/a$  de 0 a 1.25 y de  $z/a$  de 0 a  $r/a=1.25$  en intervalos de 0.2, para  $r=3$  y  $a=2.4$

$\frac{\tau_{\max a}(0, z)}{p_0(a)}$	$\frac{\tau_{\max a}(0.2, z)}{p_0(a)}$	$\frac{\tau_{\max a}(0.4, z)}{p_0(a)}$	$\frac{\tau_{\max a}(0.6, z)}{p_0(a)}$	$\frac{\tau_{\max a}(0.8, z)}{p_0(a)}$	$\frac{\tau_{\max a}(1, z)}{p_0(a)}$
0.246	0.243	0.235	0.222		
0.361	0.362	0.368	0.394		
0.469	0.474	0.495	0.557	0.728	
0.554	0.558	0.574	0.609	0.664	0.702
0.61	0.611	0.613	0.616	0.613	0.591
0.641	0.639	0.631	0.614	0.585	0.543
0.654	0.65	0.637	0.612	0.575	0.526
0.65	0.646	0.635	0.613	0.578	0.531
0.628	0.628	0.624	0.615	0.596	0.562
0.585	0.588	0.598	0.615	0.635	0.635
0.515	0.52	0.541	0.593	0.699	0.806
0.417	0.421	0.436	0.491	0.719	1.292
0.302	0.302	0.3	0.304	0.389	4.518

Una vez conocidos la presión polinomial y los esfuerzos que ésta produce en el cuerpo elastoplástico, se hace el análisis plástico para conocer la magnitud de la carga necesaria para indentar el espécimen a la profundidad deseada.

### 3.3.3 ANÁLISIS PLÁSTICO

En esta parte del análisis se usan las reglas del incremento de deformación de Levy-Mises [2] descritas en los incisos 3.2.4 y 3.2.5 para conocer el estado de esfuerzos y deformaciones dentro de la zona plástica del material del cuerpo 2 y la carga para iniciar la indentación del material.

### 3.3.4 EJEMPLO

Usando el procedimiento anteriormente descrito, se obtiene el desplazamiento  $\delta/a$  del material del cuerpo 2 en función de la carga de indentación. El radio del área de contacto es  $r=3\text{ mm}$ , el ancho  $a=2.4\text{ mm}$  y el largo de la marca  $y=12\text{ mm}$ . El resultado se muestra en la Fig. 3.10 para un acero SAE 1060 con  $K=155\text{ kg/mm}^2$  y  $n=0.1$ .

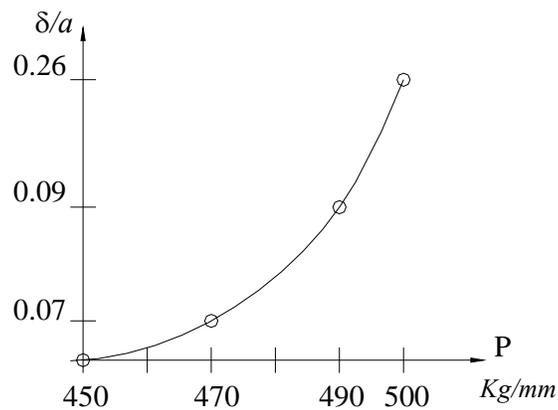


Fig. 3.10 Desplazamiento plástico en función de la carga de indentación para un acero SAE 1060

De acuerdo con la Fig. 3.10, el valor de la carga necesaria para penetrar el espécimen  $\delta/a=0.1$  es de  $490\text{ kg/mm}$ , que para una longitud  $y=12\text{mm}$  la carga total será:

$$P = 5880\text{kg} \quad (3.27)$$

### 3.3.5 ANÁLISIS EXPERIMENTAL DE ESFUERZOS

Para comprobar si los esfuerzos obtenidos mediante la presión polinomial (3.16) concuerdan con el proceso real, se sometió un disco de material elástico a la presión ejercida por dos indentadores de cara cilíndrica y con el mismo radio para observar, mediante fotoelasticidad, las líneas de deformación equivalentes a las líneas de esfuerzo cortante constante de la Fig. 3.9.

Las líneas de deformación constante obtenidas mediante el análisis experimental de esfuerzos se muestran en la Fig. 3.11.a, y tienen semejanza con las líneas de esfuerzo cortante constante obtenidas con el modelo polinomial propuesto anteriormente Fig. 3.11.b.

La disposición de los indentadores con el material elástico es la misma que se representa en la gráfica de la Fig. 3.6 y sus dimensiones son semejantes.

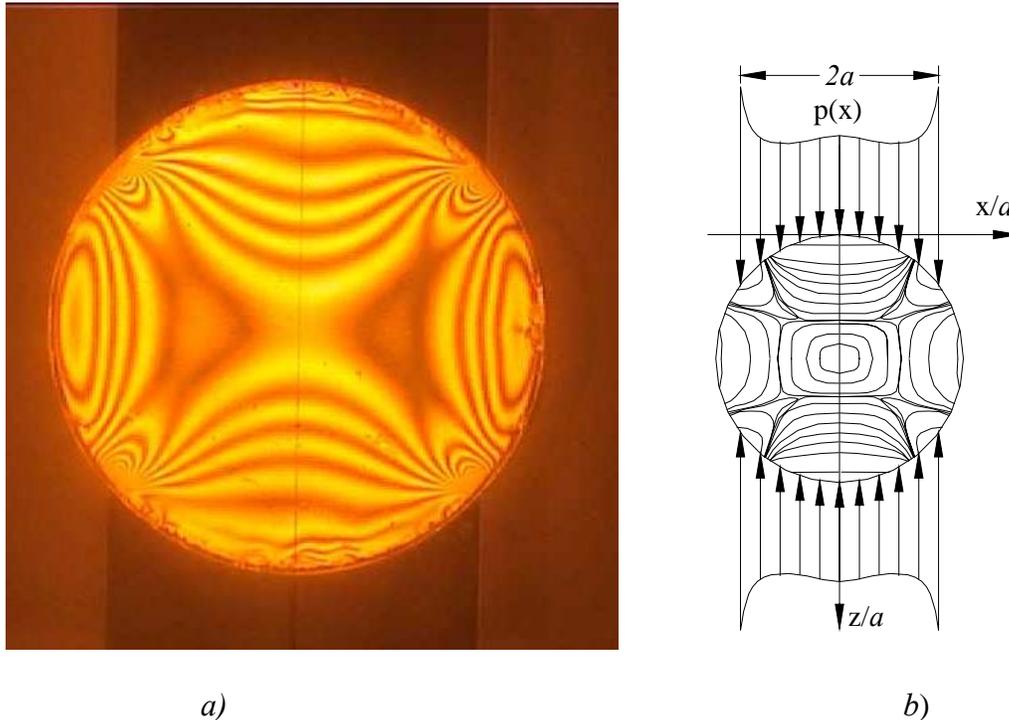


Fig. 3.11 Líneas de deformación constante producidas por dos indentadores cilíndricos y opuestos sobre un cuerpo elástico; a) Fotoelasticidad y b) Teórico

### 3.3.6 CONCLUSIONES

El análisis experimental de esfuerzos ha permitido comprobar que las líneas de esfuerzo cortante equipotenciales tienen semejanza con las obtenidas mediante el modelo de presión polinomial. Las diferencias observadas pueden deberse a la diferencia en la estructura de los dos especímenes usados. El del experimento es polimérico mientras que el del modelo matemático es cristalino cúbico, sin embargo la distribución es semejante tanto en las esquinas como en la superficie del cuerpo.

Los modelos inicialmete probados no habían mostrado el tipo de distribución de esfuerzos en la zona por debajo de las esquinas del indentador.

Para comprobar si el modelo polinomial propuesto describe la distribución de esfuerzos en un material elastoplastico de red cristalina cúbica, requiere de un nuevo experimento.

La forma de determinar el tipo de presión para los indentadores con esquinas no ha sido tratado hasta ahora por ningún autor, los más conocidos se incluyen en las referencias.

# 4 ANÁLISIS DE LOS ESFUERZOS PRODUCIDOS EN UN CUERPO ELÁSTICO MEDIANTE TRES INDENTADORES CILÍNDRICOS

## 4.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo se establece el modelo matemático del proceso de indentación de un cuerpo elástoplástico mediante tres indentadores cilíndricos distribuidos a  $120^\circ$ . El cuerpo elástoplástico es alambre de acero de alta resistencia, usado como refuerzo para fabricar vigas de concreto presforzado, y los indentadores rodillos dentados.

La distribución de presión es análoga a la del inciso 3.2, ecuación (3.15), aplicada por cada uno de los tres indentadores sobre el alambre. Asimismo, los esfuerzos generados por esta presión están establecidos por las ecuaciones (3.17). Los esfuerzos resultantes se obtienen mediante una transformación lineal para referirlos al mismo origen y al mismo sistema de referencia. Una vez conocidos los esfuerzos y mediante el proceso de análisis plástico descrito en el inciso 3.2.4, se calcula la carga necesaria para marcar el alambre, por cada uno de los indentadores.

Determinadas las cargas, se calcula la resistencia que debe tener el cuerpo de la máquina que será empleada para marcar el alambre. Debido a lo complejo de su geometría los esfuerzos se calculan utilizando el método de los elementos finitos para conocer los puntos críticos y su localización, dentro del cuerpo de la máquina

## 4.2 MODELO MATEMÁTICO DE LA INDENTACIÓN

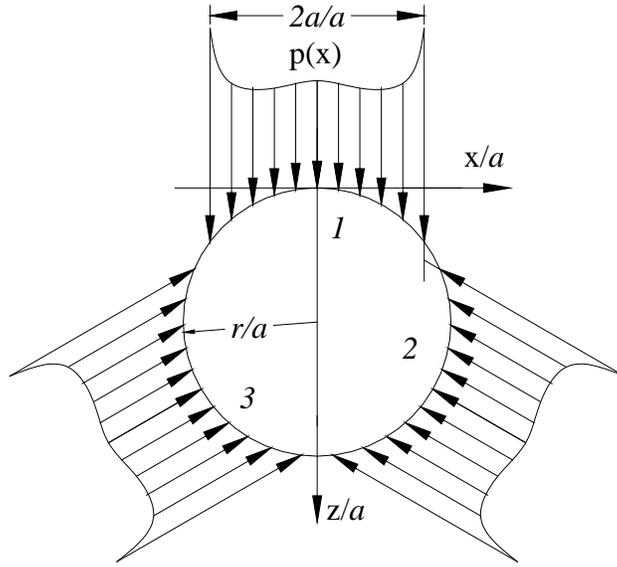
El alambre representado mediante el círculo central en la Fig. 4.1, se encuentra presionado por tres indentadores dispuestos a  $120^\circ$ , los cuales han sido reemplazados por la distribución de la presión que se genera durante el contacto.

El contorno del alambre se describe mediante el polinomio (3.7)

$$Z = \frac{X^4}{6R^3} + \frac{X^2}{2R}$$

y el desplazamiento de cada uno de los indentadores sobre el alambre, como se hizo en el inciso 3.2.1, se puede representar mediante la ecuación (3.7.1)

$$u_z = u_0 + \frac{X^4}{6R^3} + \frac{X^2}{2R}$$



Fíg. 4.1 Representación del proceso de indentación del alambre mediante tres indentadores cilíndricos

La presión que origina este desplazamiento, teniendo en cuenta la condición de que en  $X=0$  la pendiente debe ser horizontal, será la de la ecuación (3.15)

$$p(X) = \frac{4P}{9\pi a} \left[ \frac{2X^2 + 3R^2 + 1}{2R^2 - 1} \right] (1 - X^2)^{1/2} + \frac{2P}{3\pi a (1 - X^2)^{1/2}} \left( \frac{3R^2 - 2}{2R^2 - 1} \right)$$

Así, los esfuerzos producidos por cada indentador sobre el alambre se obtienen de las ecuaciones (3.17)

$$\sigma_x = \frac{-2Z}{\pi} \left[ \frac{4P}{9\pi a (2R^2 - 1)} \int_{-1}^1 \frac{(2X^2 + 3R^2 + 1)(1 - S^2)^{1/2} (X - S)^2 dS}{[(X - S)^2 + Z^2]^3} + \frac{2P}{3\pi a} \left[ \frac{3R^2 - 2}{2R^2 - 1} \right] \int_{-1}^1 \frac{(X - S)^2}{(1 - S^2)^{1/2} [(X - S)^2 + Z^2]^3} dS \right]$$

$$\sigma_z = \frac{-2Z^3}{\pi} \left[ \frac{4P}{9\pi a (2R^2 - 1)} \int_{-1}^1 \frac{(2X^2 + 3R^2 + 1)(1 - S^2)^{1/2} dS}{[(X - S)^2 + Z^2]^3} + \frac{2P}{3\pi a} \left[ \frac{3R^2 - 2}{2R^2 - 1} \right] \int_{-1}^1 \frac{1}{(1 - S^2)^{1/2} [(X - S)^2 + Z^2]^3} dS \right]$$

$$\tau_{xz} = \frac{-2Z^2}{\pi} \left[ \frac{4P}{9\pi a (2R^2 - 1)} \int_{-1}^1 \frac{(2X^2 + 3R^2 + 1)(1 - S^2)^{1/2} (X - S) dS}{[(X - S)^2 + Z^2]^3} + \frac{2P}{3\pi a} \left[ \frac{3R^2 - 2}{2R^2 - 1} \right] \int_{-1}^1 \frac{(X - S)}{(1 - S^2)^{1/2} [(X - S)^2 + Z^2]^3} dS \right]$$

y el esfuerzo cortante máximo mediante

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{|\sigma_1 - \sigma_2|}{2} \quad (4.1).$$

El esfuerzo total producido por los tres indentadores sobre el alambre, con referencia al origen del sistema de la Fig.4.1 será la suma de:

i) El esfuerzo indicado por la ecuación (3.17). sustituyendo en ella  $\begin{bmatrix} X_1 \\ Z_1 \end{bmatrix}_1 = \begin{bmatrix} X \\ Z \end{bmatrix}$

ii) El esfuerzo indicado por la ecuación (3.17). sustituyendo en ella  $\begin{bmatrix} X_2 \\ Z_2 \end{bmatrix}_1 = \begin{bmatrix} \cos(120^\circ) & -\text{sen}(120^\circ) \\ \text{sen}(120^\circ) & \cos(120^\circ) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Z \end{bmatrix}_2 + \begin{bmatrix} 0 \\ R \end{bmatrix}_1 - \begin{bmatrix} \cos(120^\circ) & -\text{sen}(120^\circ) \\ \text{sen}(120^\circ) & \cos(120^\circ) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ R \end{bmatrix}_2$

iii) El esfuerzo indicado por la ecuación (3.17) sustituyendo  $\begin{bmatrix} X_3 \\ Z_3 \end{bmatrix}_1 = \begin{bmatrix} \cos(-120^\circ) & -\text{sen}(-120^\circ) \\ \text{sen}(-120^\circ) & \cos(-120^\circ) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Z \end{bmatrix}_3 + \begin{bmatrix} 0 \\ R \end{bmatrix}_1 - \begin{bmatrix} \cos(-120^\circ) & -\text{sen}(-120^\circ) \\ \text{sen}(-120^\circ) & \cos(-120^\circ) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ R \end{bmatrix}_3$

Con estas ecuaciones los esfuerzos generados por el indentador 2 se giran un ángulo de  $120^\circ$  y los del indentador 3,  $-120^\circ$  para que coincidan con el sistema del indentador 1. Usando la ecuación (4.1) y la ecuación (3.16)

$$p_0 = \frac{2P}{9\pi a} \left[ \frac{15R^2 - 4}{2R^2 - 1} \right]$$

se calcula el esfuerzo cortante máximo adimensional total  $\tau/p_0$ .

La distribución del esfuerzo cortante constante  $\tau/p_0$  resultante, para  $R=1.25$ , se muestra en la Fig. 4.6 y en la Tabla 4.1 se pueden ver sus valores.

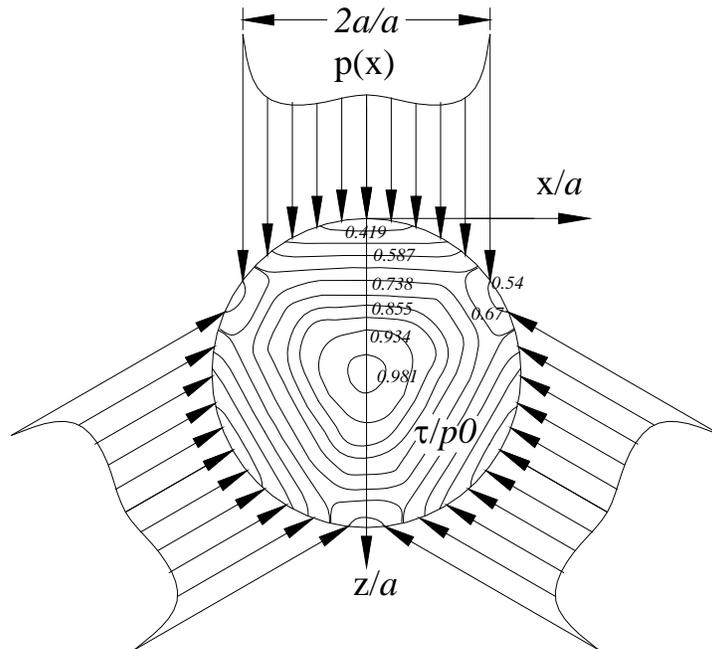


Fig. 4.6 Distribución del esfuerzo cortante producido por tres indentadores

La figura anterior muestra que el valor máximo del esfuerzo cortante es  $\tau/p0=0.981$  y se alcanza en el centro del alambre, mientras que en las esquinas el esfuerzo cortante es  $\tau/p0=0.54$ . A medida que la carga de penetración crece, la zona plastificada del centro avanza hacia las orillas del material permitiendo que los indentadores penetren.

La carga necesaria para alcanzar el esfuerzo máximo del material y empezar a marcarlo, se calcula mediante el análisis plástico descrito en los incisos 3.2.4 y 3.2.5.

Tabla 4.1: Valores del esfuerzo cortante constante  $\tau/p0$  para el sistema de tres indentadores, para  $z/a$  de 0 a 1.5 con incrementos de 0.1.

$\tau_{\max\alpha}(0, z)$	$\tau_{\max\alpha}(0.1, z)$	$\tau_{\max\alpha}(0.3, z)$	$\tau_{\max\alpha}(0.5, z)$	$\tau_{\max\alpha}(0.7, z)$	$\tau_{\max\alpha}(0.9, z)$	$\tau_{\max\alpha}(1, z)$	$\tau_{\max\alpha}(1.2, z)$	$\tau_{\max\alpha}(1.25, z)$
p0(a)	p0(a)	p0(a)	p0(a)	p0(a)	p0(a)	p0(a)	p0(a)	p0(a)
0.336	0.335	0.328	0.316	0.298	0.283	0.274	0.257	0.251
0.419	0.419	0.422	0.432	0.49	0.525	4.232	0.864	0.479
0.504	0.504	0.504	0.504	0.509	0.87	1.678	0.921	0.638
0.587	0.587	0.587	0.586	0.593	0.778	0.964	0.649	0.497
0.666	0.666	0.665	0.662	0.656	0.67	0.66	0.397	0.299
0.738	0.738	0.735	0.725	0.698	0.621	0.54	0.255	0.176
0.801	0.801	0.795	0.778	0.733	0.623	0.529	0.305	0.279
0.855	0.854	0.845	0.821	0.766	0.655	0.575	0.459	0.48
0.9	0.898	0.885	0.854	0.795	0.694	0.633	0.608	0.669
0.934	0.932	0.915	0.879	0.817	0.726	0.679	0.683	0.753
0.958	0.955	0.936	0.895	0.829	0.742	0.697	0.658	0.679
0.973	0.971	0.948	0.902	0.831	0.74	0.691	0.589	0.56
0.981	0.977	0.952	0.899	0.823	0.723	0.667	0.535	0.502
0.981	0.977	0.948	0.89	0.805	0.696	0.632	0.494	0.465
0.974	0.97	0.938	0.873	0.78	0.662	0.594	0.455	0.427
0.962	0.958	0.922	0.851	0.75	0.623	0.553	0.414	0.387

### 4.3 DESPLAZAMIENTO PLÁSTICO

Como en el caso de los dos indentadores opuestos, la carga necesaria para deformar permanentemente el material del alambre, mediante tres indentadores dispuestos radialmente, se calcula con las ecuaciones de Levy-Mises siguiendo el mismo proceso descrito en el inciso 3.2.4.

#### 4.3.1 EJEMPLO

En la Fig. 4.7 se muestra el desplazamiento  $\delta/\alpha$  en función de la carga de indentación  $P$ , por unidad de longitud en el eje  $y$  y por cada indentador, para un alambre de las siguientes características:

El radio del alambre es  $r=3 \text{ mm}$ , el ancho del área de contacto  $2a=4.8 \text{ mm}$ , el material del alambre es un acero SAE 1060 con  $K=155 \text{ kg/mm}^2$  y  $n=0.1$ .

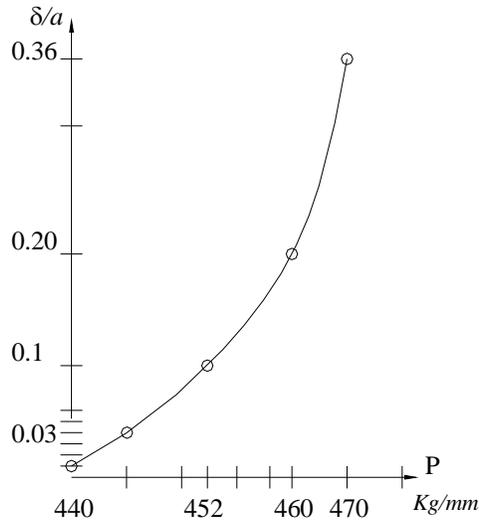


Fig. 4.7 Desplazamiento plástico en función de la carga de indentación en un acero 1060, con tres indentadores cilíndricos dispuestos a 120°.

De la figura anterior, la carga necesaria para marcar el alambre, por cada indentador, a una profundidad constante  $\delta/a=0.1$  ó bien  $\delta=0.24\text{ mm}$ , en una longitud  $y=12\text{mm}$  será:

$$P = 452 \frac{\text{kg}}{\text{mm}} * 12\text{mm} = 5424\text{kg} \quad (4.2)$$

Al compararse con la carga necesaria para penetrar el alambre con dos indentadores opuestos, como se presenta en (3.27)

$$P = 5880\text{kg}$$

puede verse que la carga disminuye en un 8 % debido a la acción de los tres indentadores sobre el cuerpo elastoplástico.

Así como se mencionó anteriormente en el punto 3.3.6, los resultados mostrados en la gráfica de la Fig. 4.7, deben ser comprobados experimentalmente para conocer el nivel de confianza del modelo polinomial propuesto en este estudio.

#### 4.4. APLICACION

El proceso de indentación descrito en los párrafos anteriores, así como la forma de obtener la carga y los esfuerzos que se producen durante la indentación mediante tres indentadores rígidos a una profundidad determinada, puede ser usado para determinar la carga de indentación que debe resistir una máquina usada para el marcaje continuo de alambre de alta resistencia haciendo algunas consideraciones que serán establecidas posteriormente. La máquina indentadora así como su funcionamiento se describen a continuación:

#### 4.4.1- MÁQUINA PARA MARCAR ALAMBRE DE ALTA RESISTENCIA

Las plantas que fabrican alambre de acero estirado en frío, de alta resistencia, usado en la fabricación de concreto preesforzado [23], hacen un marcaje permanente en su superficie que impide que se deslice dentro del concreto, este marcaje se conoce como indentado.

El proceso de *indentado* se hace con máquinas para marcaje colocadas en las líneas de trefilado ya que ocupan muy poco espacio, hacen el marcaje continuo y no tienen motor, pues la energía de la enrolladora de alambre mueve la máquina. La máquina con tres indentadores se muestra en la Fig. 4.8.

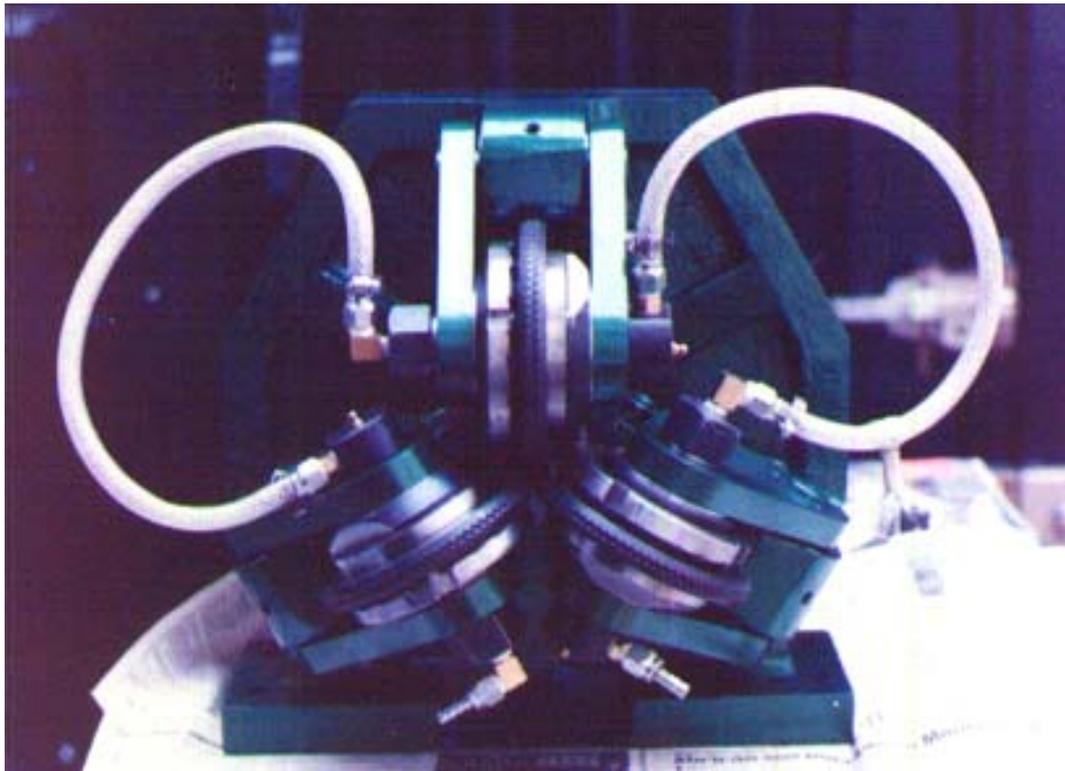


Fig. 4.8 Máquina indentadora

Esta máquina está formada por una base de hierro gris con tres brazos dispuestos a  $120^\circ$  en su parte frontal, donde se montan los soportes de los rodillos indentadores. En la parte central tiene un barreno donde se aloja una flecha agujerada sujeta a la parte posterior mediante una tuerca embalada con la que se ajusta manualmente la profundidad de marcado al mover un cono montado en un extremo donde se apoyan los soportes de los rodillos, Fig. 4.9 .

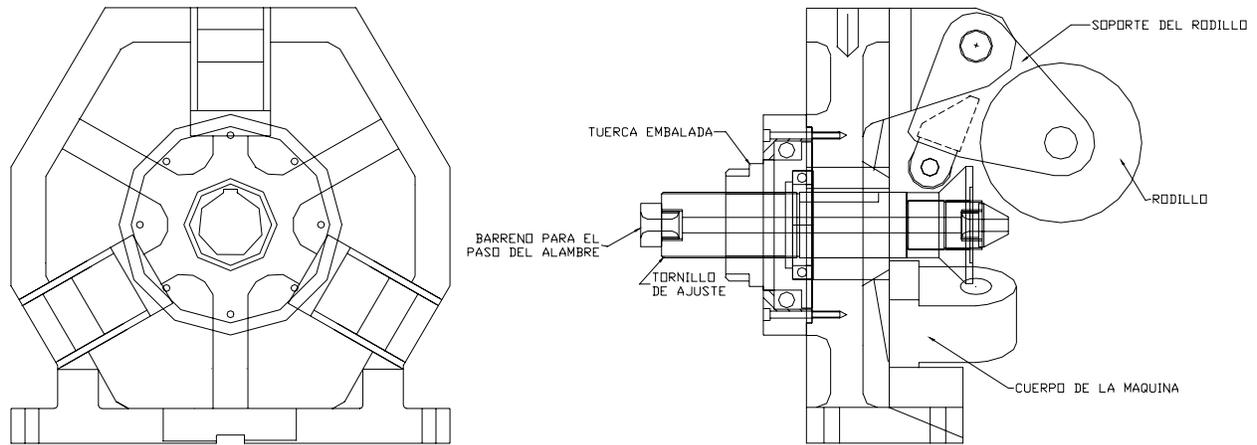


Fig. 4.9 Diagrama de la máquina indentadora

Los soportes de los rodillos, fabricados en acero al carbono, tienen forma triangular y están articulados en cada uno de sus vértices, uno en un brazo de la máquina mediante un perno, otro sujeta la chumacera que le permite girar al rodillo indentador y el último sujeta un rodillo que está en contacto con el cono del tornillo de ajuste para evitar que el soporte se levante y conserve la profundidad del indentado Fig. 4.10.



Fig. 4.10 Soporte de rodillos y chumacera

#### *4.4.2 FORMA DE OPERAR DE LA MÁQUINA INDENTADORA*

El alambre penetra en forma continua por el agujero interior de la flecha de ajuste y al salir de ella es prensado y marcado por los tres rodillos indentadores, los cuales se encuentran montados en los soportes articulados en cada brazo de la máquina.

Los rodillos indentadores son discos delgados con una ranura semicircular con muescas en su cara exterior para guiar y marcar al alambre. Mediante un barreno interior se montan sobre una chumacera embalada que le permite girar y hacer el marcaje continuo, Fig. 4.11.

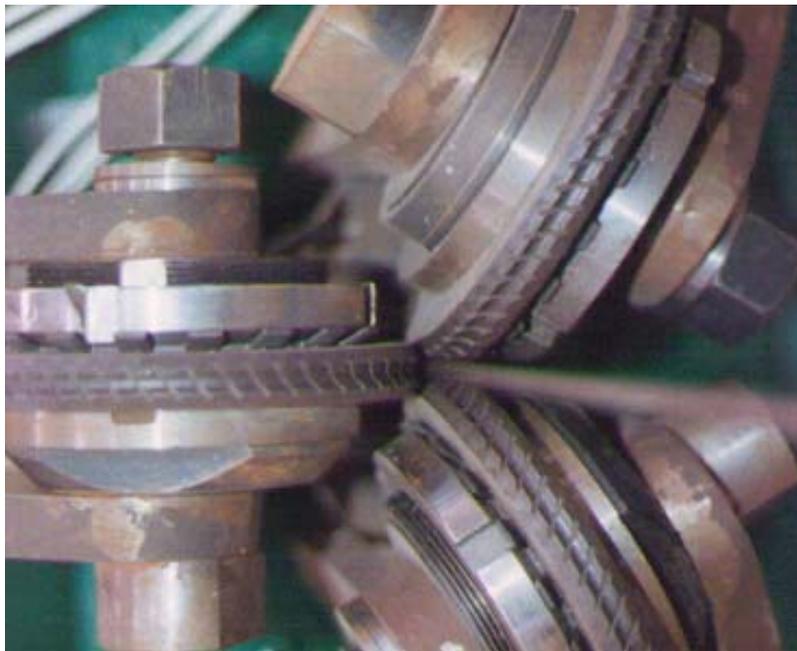


Fig.4.11 Rodillos indentadores

#### *4.4.3 CONSIDERACIONES PARA APLICAR LA TEORÍA DESARROLLADA EN EL CÁLCULO DE LA CARGA DE INDENTACIÓN QUE DEBE RESISTIR LA MÁQUINA*

i) El radio principal de los rodillos indentadores es mucho mayor que el radio del alambre, de tal forma que, en el área de contacto, pueden considerarse indentadores rectos (en el eje  $y$ ) en la cara cilíndrica. En la Fig. 4.12 se muestra un corte y se aprecia la relación indentador-alambre, el problema se resuelve en forma bidimensional como se describió en los capítulos anteriores.

ii) La Fig.4.12 muestra los rodillos en posición para indentar el alambre, al hacer un corte A-A en el punto de contacto se obtiene el esquema de los indentadores mostrados en la Fig. 4.13, el cual es semejante a la disposición de los indentadores mostrados en la Fig. 4.1.

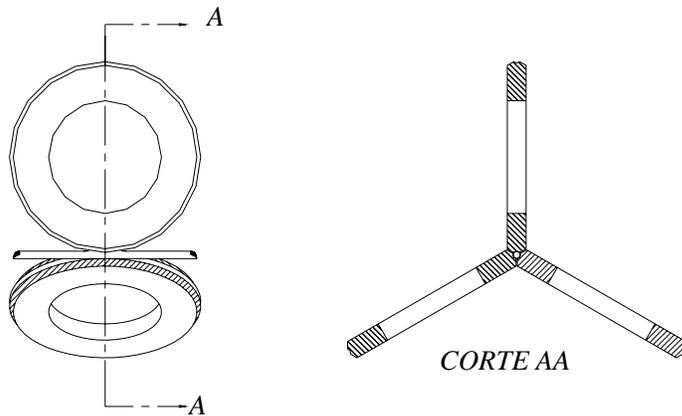


Fig. 4.12 Disposición de los rodillos sobre el alambre (el tercer rodillo no se muestra para evitar interferencias)

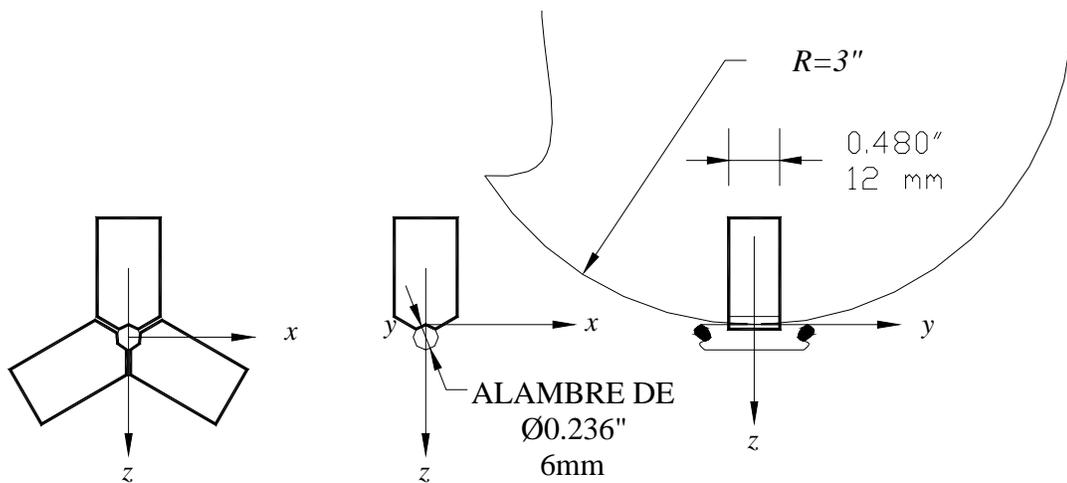


Fig. 4.13 Corte del rodillo en el área de contacto, semejándose a un sistema de tres indentadores rectos de cara cilíndrica, como los mostrados en la Fig.4.1.

Con estas consideraciones y teniendo en cuenta que al inicio de la indentación el rodillo no gira, se puede usar el proceso mostrado en los incisos 4.1 a 4.3 para conocer la carga de indentación requerida para modificar o rediseñar el cuerpo de la máquina para que pueda penetrar alambre de mayor diámetro sin romperse.

En el ejemplo 4.3.1, se obtuvo la gráfica (Fig.4.7) del desplazamiento  $\delta/\alpha$  en función de la carga de indentación  $P$ , por unidad de longitud en el eje  $y$  y por cada indentador, para un alambre de las mismas características del alambre indentado por la máquina descrita en el artículo 4.4.1 y 4.4.2, y la carga de **5424 kg** obtenida en la ecuación (4.2) mediante el modelo matemático propuesto anteriormente, es la carga que produce cada indentador al momento de penetrar el alambre durante el proceso de indentación, ya que la longitud de la coordenada  $y$  es de 12 mm ó 0.48" como se muestra en la Fig. 4.13.

Sin embargo, la teoría usada para resolver este problema, calcula la carga y la distribución de esfuerzos en un plano X-Z, exactamente en el punto de contacto y perpendicular a la cara del indentador en función del desplazamiento del mismo, produciéndose una distribución de esfuerzos en cada punto de contacto a lo largo del eje y.

De tal forma que si se considera que el indentador es plano a lo largo de y, la distribución de esfuerzos será siempre la misma y la carga total se obtendrá multiplicando la carga  $P$  obtenida de la Fig. 4.7 por la longitud del indentador en el eje y., tal como se planteó en el ejemplo 4.3.1.

Si el indentador es circular a lo largo de y, el proceso se complica porque:

- La carga de indentación no es constante sino que disminuye al disminuir la profundidad de indentación a medida que la circunferencia se aleja del origen de X-Z mostrado en la Fig.4.13.
- La carga de indentación tiene componentes en X y Z, y la componente en X disminuye.
- La carga de indentación no es constante y para conocer su valor total es necesario conocer su distribución e integrarla. Esto puede hacerse numéricamente.

De esa forma la carga obtenida para un indentador de cara circular en el eje y, es apenas inferior que para el indentador de cara plana. Así se hizo en el ejemplo 4.3.1 para evitar los cálculos complicados y ésta será la carga usada en el siguiente punto.

#### *4.4.4 ANÁLISIS DE ESFUERZOS EN EL CUERPO DE LA MÁQUINA INDENTADORA*

Para hacer la simulación de esfuerzos en el cuerpo de la máquina indentadora es necesario conocer cómo están distribuidas las fuerzas que actúan en ella, debido a la carga de indentación. En la parte superior derecha de la Fig. 4.14, se muestra el rodillo indentador y la fuerza  $P$  generada durante la indentación; los rodillos que van montados en los soportes inferiores no se muestran para facilitar la visibilidad de las fuerzas en el dibujo.

Las reacciones en la articulación con el brazo de la máquina son  $R_{Bx}$  y  $R_{By}$ . En la parte central se muestran las reacciones en el mecanismo de ajuste,  $R_{Sx}$  y  $R_{Sy}$ .

$R_{Nx}$  es la fuerza actuante en la tuerca del tornillo de ajuste que equilibra a  $R_{Sx}$  para que el tornillo no se separe del cuerpo y evite que el rodillo se levante durante la indentación.

En la Fig. 4.14, se muestran las cargas en la máquina completa y en la Fig. 4.15 se muestra la carga en cada pieza involucrada con la indentación

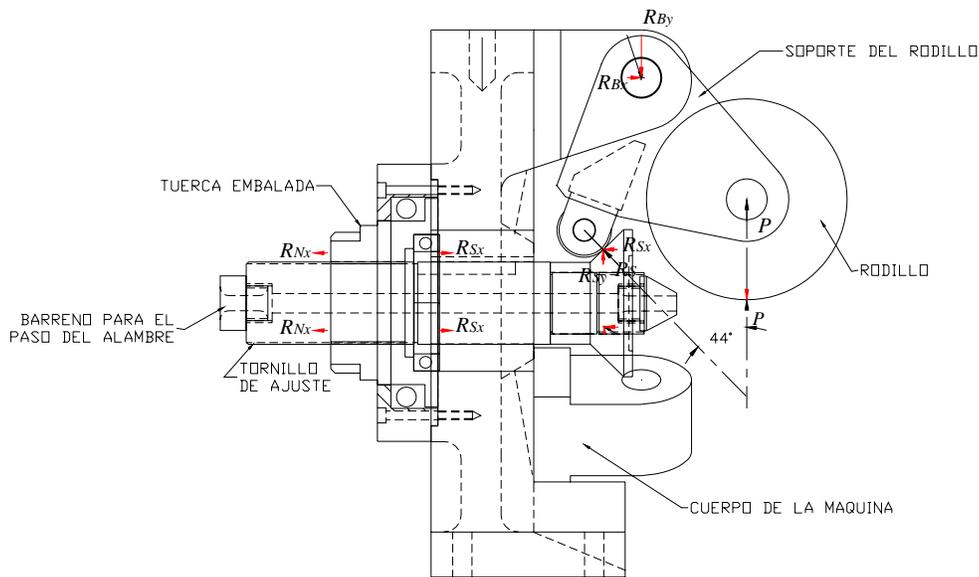


Fig. 4.14 Distribución de fuerzas en el cuerpo de la máquina

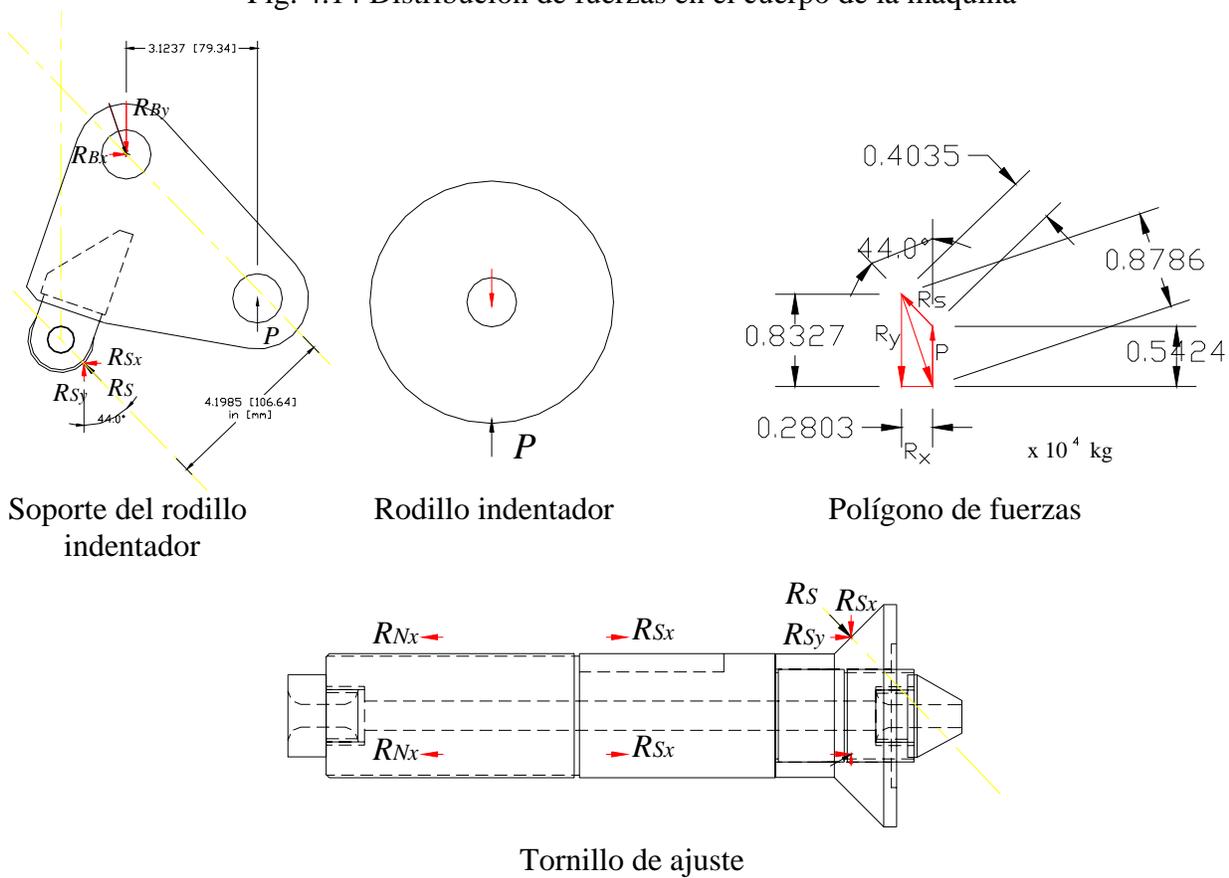


Fig. 4.15 Distribución de fuerzas en las partes de la máquina y polígono de fuerzas

De esta forma, las fuerzas quedan repartidas en el cuerpo de la máquina como se muestra en la Fig. 4.16.

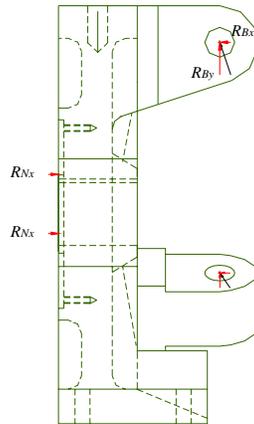


Fig. 4.16 Distribución de las fuerzas en el soporte del indentador

Usando las ecuaciones de equilibrio se obtiene el valor de cada fuerza en función de  $P$ .

$$\Sigma \mathbf{F}_x = 0$$

$$\Sigma \mathbf{F}_y = 0$$

$$\Sigma \mathbf{M}_1 = 0$$

$$R_{Sx} = R_{Bx}$$

$$R_{By} = P + R_S \cos 44^\circ$$

$$3.124P = 4.199R_S$$

$$R_{Bx} = R_S \cos 46$$

$$R_{By} = P + 0.7193R_S$$

$$R_S = \frac{3.124}{4.199} P$$

$$R_{Bx} = 0.6946R_S$$

$$R_S = 0.744P$$

Aplicando estas ecuaciones para la carga de indentación de 5,424 kg, se obtienen las fuerzas actuantes en el cuerpo de la máquina, éstas son:

$$R_S = 4035kg$$

$$R_{Bx} = 2803kg$$

$$R_{By} = 8327kg$$

$$R_S = 8877lb$$

$$R_{Bx} = 6167lb$$

$$R_{By} = 18319lb$$

Con estos valores se hace la simulación con el método de elemento finito, obteniéndose la distribución y valores del esfuerzo equivalente máximo, Fig. 4.17.

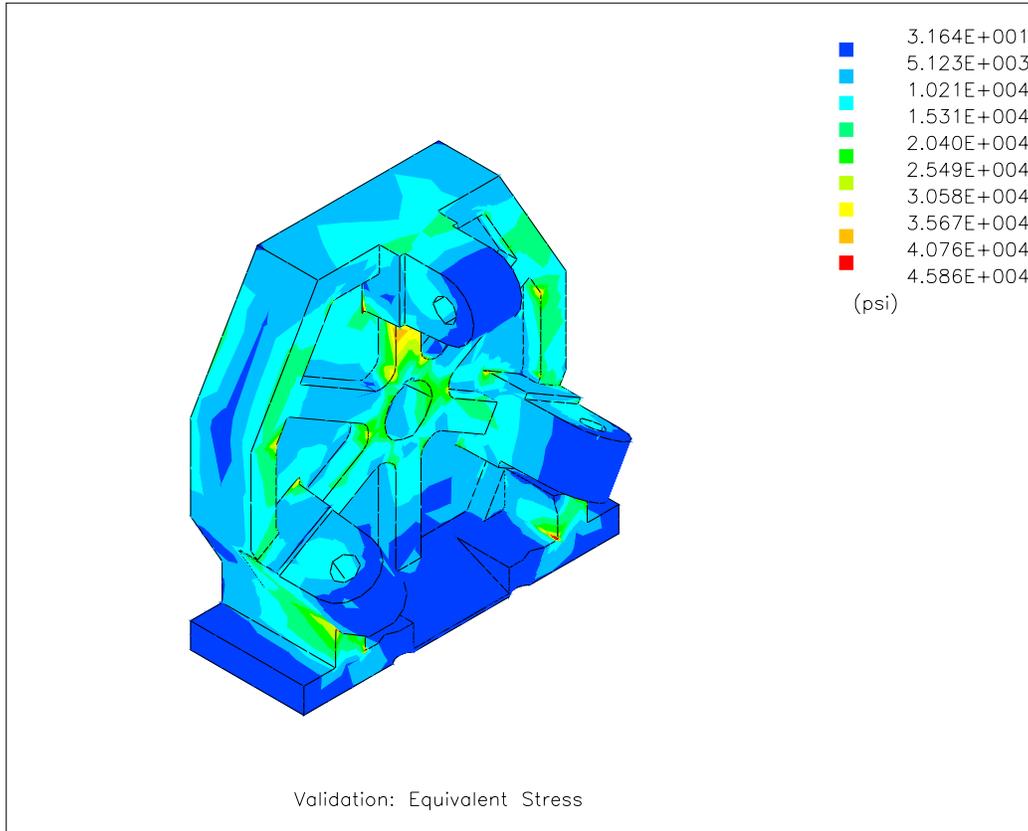


Fig. 4.17 Esfuerzo equivalente para una carga de indentación de 5424 kg

El esfuerzo equivalente máximo obtenido con este procedimiento es de

$$\sigma_e = 31890 \frac{lb}{in^2} \quad \text{ó} \quad \sigma_e = 22.46 \frac{kg}{mm^2}$$

el esfuerzo máximo del hierro colado con el que se fabrica el cuerpo de la máquina es

$$\sigma_u = 40000 \frac{lb}{in^2} \quad \text{ó} \quad \sigma_e = 28.1 \frac{kg}{mm^2}$$

y el factor de seguridad

$$Fs = \frac{28.1}{22.46} = 1.25$$

es mayor a la unidad.

La Fig. 4.18 muestra el cuerpo de la máquina con el brazo superior modificado con radios en las esquinas, mientras que los brazos inferiores se dejaron igual con el fin de comparar gráficamente los resultados de la modificación.

El esfuerzo equivalente se redujo en la esquina del brazo superior de 31,890 psi (22.46 kg/mm<sup>2</sup>) a 30,765 psi (21.67 kg/mm<sup>2</sup>), se obtuvo el factor de seguridad:

$$F_s = \frac{28.1}{21.67} = 1.29$$

también superior a la unidad

A sugerencia de la planta procesadora de alambre y para obtener una máquina de mayor resistencia para procesar alambre de mayor diámetro, se hizo una prueba cambiando el material del cuerpo de la máquina, de hierro gris a acero para maquinaria AISI 4140. Se escogió este material por ser el acero aleado de menor costo conseguido en ese momento, pero sin tener en cuenta sus propiedades físicas ni su resistencia a la fatiga. De esta forma se obtuvo que

$$\sigma_u = 60000 \frac{lb}{in^2} \quad \text{ó} \quad \sigma_e = 42.3 \frac{kg}{mm^2}$$

y el factor de seguridad aumentó a

$$F_s = \frac{42.3}{21.67} = 1.95$$

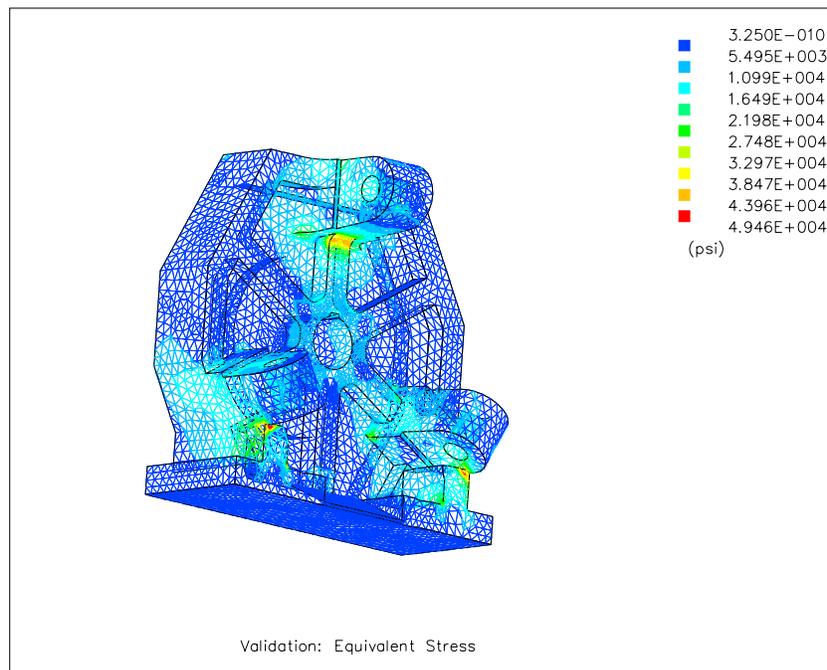


Fig. 4.18 Esfuerzo equivalente para una carga de 5424 kg eliminando las esquinas en el brazo superior

Por último, se hizo una reducción en el área de contacto, pues inicialmente el marcaje era de forma rectangular y por razones de estética se cambió a una forma elíptica, como consecuencia hubo una reducción aproximada de un 34% en el área de indentación al medirse físicamente.

Con este cambio, el esfuerzo máximo equivalente disminuyó de  $21.67 \text{ kg/mm}^2$  a  $20.67 \text{ kg/mm}^2$  y el factor de seguridad aumentó a:

$$F_s = \frac{28.1}{14.3} = 1.96 \text{ para el hierro gris y}$$

$$F_s = \frac{42.3}{14.3} = 2.95 \text{ para el acero}$$

## 4.5 CONCLUSIONES

Con el proceso propuesto para la obtención de las cargas de indentación, pueden calcularse máquinas que soporten el marcaje de alambre de mayor calibre con la seguridad de que no existirán fallas durante su operación, siempre y cuando los resultados de los análisis sean satisfactorios, sin necesidad de cambiar el material del cuerpo de la máquina.

El cambio de geometría de los brazos del cuerpo de la máquina, es una práctica común para evitar concentraciones de esfuerzos, aun sin conocer las cargas a las que serán sometidas las máquinas, con los valores de la carga de indentación puede tenerse una mayor certeza de que el material es adecuado.

La reducción en el volumen del material del cuerpo de la máquina (zona de color azul en las Fig. 11 y 12) no se hizo a solicitud de la planta de alambre.

El proceso de deformaciones incrementales puede aplicarse a cualquier tipo de problemas para calcular las deformaciones producidas en la zona plástica de los materiales.

El análisis de la distribución de esfuerzos en el espécimen una vez que ha empezado la fluencia, es un tema de estudio de futuras investigaciones ya que durante los experimentos realizados las líneas de esfuerzo desaparecen al momento de la fluencia.

# 5 OTRAS APLICACIONES

## 5.1 PRESIONES POLINOMIALES

La teoría *no hertziana*, presentada en el capítulo 3, es útil para conocer los esfuerzos de contacto entre cuerpos cilíndricos en contacto conformable, como el marcaje del alambre de alta resistencia, pero también puede aplicarse a otros problemas de contacto siempre y cuando el contorno de la superficie pueda expresarse en forma polinomial (Apéndice 2 y 3) y los indentadores puedan considerarse rígidos.

La determinación del polinomio que mejor describe el contorno de una superficie puede hacerse usando la interpolación de Newton o de Lagrange [13], sin embargo debe tenerse en cuenta que la derivada con respecto a  $x$  del polinomio resultante debe ser adimensional para que pueda usarse al obtener la presión  $p(x)$  en forma general para cualquier relación  $R=r/a$ , razón por la cual la variable independiente  $x$  debe estar dividida entre  $r$ , el radio de curvatura de los cuerpos en contacto, e incluir el ancho constante del área de contacto  $a$  en la siguiente forma

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{x^n}{mr^{n-1}} \right) = \frac{d}{dx} \left( \frac{x^n / a^{n-1}}{mr^{n-1} / a^{n-1}} \right) = \frac{n x^{n-1} / a^{n-1}}{m r^{n-1} / a^{n-1}} = \left( \frac{n X^{n-1}}{m R^{n-1}} \right) \quad (5.1)$$

De esta manera se obtienen los polinomios adecuados para describir los cuerpos cilíndricos en contacto, en la Tabla 5.1 se muestran varios polinomios construidos con este procedimiento y puede verse la diferencia del valor de la coordenada  $Z$  para cada valor de  $X$ . En la Fig. 5.1, se muestran las gráficas para la circunferencia y los polinomios de 2°, 4° y 10° grado

Las primeras cuatro columnas muestran las variables del polinomio. En la sexta columna se muestra el valor de  $z/a$  de la ecuación de la circunferencia, con respecto al origen, en uno de sus cuadrantes, correspondiente a distintos valores de  $x/a$  desde 0 hasta 1.25 con incrementos de 0.1.

En la quinta columna se muestran los valores de  $z/a$  en función de  $x/a$  para la ecuación hertziana, en la séptima para el polinomio de grado 4 propuesto en este estudio, y en las últimas columnas se muestran los valores de  $z/a$  para polinomios de 6°, 8° y 10° grado.

Si se comparan los resultados de los valores de  $z/a$  para  $0 \leq x \leq 0.5$  puede decirse que no hay diferencia entre estos polinomios y la ecuación de la circunferencia cuyos valores se muestran en la columna 6. Por esta razón, Hertz establece que su polinomio funciona cuando la relación  $r/a$  es muy grande, ya que  $z$  no tiene gran variación cerca del origen.

Tabla 5.1 Comparación del perfil de la circunferencia con el generado por cinco polinomios

x	r	a	R	$z=x^2/2R$	$z=-(R^2-x^2)^{1/2}+R$	$z=x^4/6R^3+x^2/2R$	$z=x^6/30R^5+x^4/4R^3+x^2/2R$	$z=x^8/24R^7+x^6/10R^5+x^4/8R^3+x^2/2R$	$z=x^{10}/30R^9+x^8/24R^7+x^6/10R^5+x^4/8R^3+x^2/2R$
0	3	2.4	1.25	0	0	0	0	0	0
0.1	3	2.4	1.25	0.004	0.004006421	0.004008533	0.004006433	0.004006433	0.004006433
0.2	3	2.4	1.25	0.016	0.016103732	0.016136533	0.016104497	0.01610452	0.01610452
0.3	3	2.4	1.25	0.036	0.03653389	0.0366912	0.036542288	0.036542861	0.036542881
0.4	3	2.4	1.25	0.064	0.065728072	0.066184533	0.065772618	0.065778344	0.065778696
0.5	3	2.4	1.25	0.1	0.104356076	0.105333333	0.104512	0.104546133	0.10454941
0.6	3	2.4	1.25	0.144	0.15341439	0.1550592	0.153823224	0.153969991	0.15399028
0.7	3	2.4	1.25	0.196	0.214384241	0.216488533	0.215221522	0.215725258	0.215820041
0.8	3	2.4	1.25	0.256	0.289531364	0.290952533	0.290804335	0.29227035	0.292630638
0.9	3	2.4	1.25	0.324	0.382532421	0.3799872	0.383404659	0.387166139	0.388336109
1	3	2.4	1.25	0.4	0.5	0.485333333	0.496768	0.505506133	0.508861577
1.1	3	2.4	1.25	0.484	0.656282896	0.608936533	0.635752911	0.654483876	0.663187031
1.2	3	2.4	1.25	0.576	0.9	0.7529472	0.806555124	0.844127498	0.864903517
1.25	3	2.4	1.25	0.625	1.25	0.833333333	0.90625	0.958333333	0.989583333

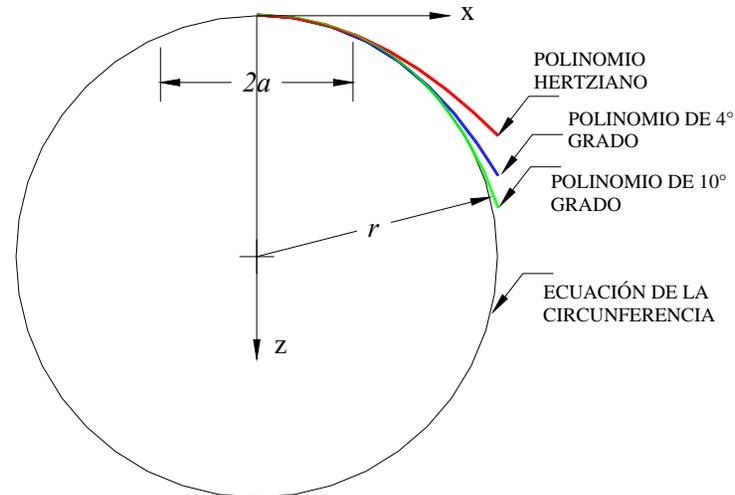


Fig.5.1 Gráficas de los polinomios hertziano, de 4° grado y de 10° grado comparados con la ecuación de la circunferencia

Pero a partir de este punto, el grado y el número de componentes del polinomio deben aumentar para aproximar con mayor precisión el perfil de la circunferencia. Si el polinomio no es muy preciso, como se puede ver en la tabla 5.1 para la ecuación hertziana, se incurre en los siguientes errores:

- No se describe con precisión el desplazamiento del indentador
- El valor del esfuerzo no concuerda con el punto donde se está calculando.

La tabla siguiente muestra la diferencia entre los esfuerzos calculados mediante el polinomio propuesto y el hertziano.

Tabla 5.2 Comparación del esfuerzo cortante máximo entre el obtenido mediante el polinomio adimensional y el hertziano.

### Polinomial adimensional

$\frac{\tau_{\max}(0,z)}{p_0(a)}$	$\frac{\tau_{\max}(0.1,z)}{p_0(a)}$	$\frac{\tau_{\max}(0.2,z)}{p_0(a)}$	$\frac{\tau_{\max}(0.3,z)}{p_0(a)}$	$\frac{\tau_{\max}(0.4,z)}{p_0(a)}$	$\frac{\tau_{\max}(0.5,z)}{p_0(a)}$	$\frac{\tau_{\max}(0.6,z)}{p_0(a)}$	$\frac{\tau_{\max}(0.7,z)}{p_0(a)}$	$\frac{\tau_{\max}(0.8,z)}{p_0(a)}$	$\frac{\tau_{\max}(0.9,z)}{p_0(a)}$	$\frac{\tau_{\max}(1,z)}{p_0(a)}$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.042	0.042	0.043	0.045	0.049	0.055	0.07	0.101	0.176	0.378	0.695
0.087	0.088	0.09	0.096	0.104	0.119	0.147	0.197	0.285	0.421	0.524
0.133	0.135	0.139	0.146	0.159	0.18	0.214	0.264	0.334	0.411	0.456
0.178	0.179	0.185	0.194	0.209	0.232	0.263	0.305	0.354	0.398	0.42
0.218	0.22	0.225	0.235	0.25	0.27	0.297	0.328	0.361	0.387	0.398
0.253	0.255	0.26	0.269	0.282	0.299	0.319	0.342	0.363	0.378	0.382
0.281	0.283	0.287	0.295	0.305	0.318	0.333	0.348	0.361	0.37	0.369
0.303	0.304	0.308	0.314	0.321	0.331	0.341	0.351	0.359	0.362	0.359
0.319	0.32	0.322	0.326	0.332	0.338	0.345	0.351	0.354	0.354	0.35
0.329	0.33	0.332	0.335	0.338	0.343	0.346	0.349	0.349	0.347	0.342
0.335	0.336	0.337	0.339	0.341	0.343	0.344	0.345	0.343	0.34	0.334
0.338	0.338	0.339	0.339	0.34	0.341	0.341	0.34	0.337	0.333	0.326
0.337	0.337	0.338	0.338	0.338	0.337	0.336	0.334	0.33	0.325	0.319
0.335	0.335	0.335	0.334	0.334	0.332	0.33	0.327	0.324	0.318	0.312
0.331	0.331	0.33	0.33	0.329	0.326	0.324	0.321	0.317	0.311	0.305

### Hertz

$\frac{\tau_{\max}(0,z)}{p_0(a)}$	$\frac{\tau_{\max}(0.1,z)}{p_0(a)}$	$\frac{\tau_{\max}(0.2,z)}{p_0(a)}$	$\frac{\tau_{\max}(0.3,z)}{p_0(a)}$	$\frac{\tau_{\max}(0.4,z)}{p_0(a)}$	$\frac{\tau_{\max}(0.5,z)}{p_0(a)}$	$\frac{\tau_{\max}(0.6,z)}{p_0(a)}$	$\frac{\tau_{\max}(0.7,z)}{p_0(a)}$	$\frac{\tau_{\max}(0.8,z)}{p_0(a)}$	$\frac{\tau_{\max}(0.9,z)}{p_0(a)}$	$\frac{\tau_{\max}(1,z)}{p_0(a)}$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.05	0.05	0.051	0.052	0.054	0.058	0.066	0.088	0.147	0.316	0.595
0.099	0.1	0.101	0.105	0.111	0.121	0.141	0.18	0.252	0.368	0.459
0.146	0.147	0.15	0.156	0.165	0.181	0.206	0.246	0.304	0.37	0.409
0.19	0.191	0.195	0.202	0.213	0.23	0.255	0.288	0.328	0.365	0.383
0.228	0.229	0.233	0.24	0.251	0.267	0.288	0.313	0.339	0.359	0.367
0.259	0.26	0.264	0.271	0.281	0.294	0.309	0.327	0.343	0.353	0.355
0.284	0.285	0.288	0.294	0.302	0.311	0.323	0.334	0.343	0.348	0.346
0.302	0.303	0.306	0.31	0.316	0.323	0.33	0.336	0.341	0.342	0.337
0.315	0.316	0.318	0.321	0.324	0.329	0.333	0.336	0.337	0.336	0.33
0.323	0.324	0.325	0.327	0.329	0.331	0.333	0.334	0.333	0.329	0.323
0.327	0.327	0.328	0.329	0.33	0.331	0.331	0.33	0.327	0.323	0.316
0.328	0.328	0.328	0.328	0.328	0.328	0.327	0.325	0.321	0.316	0.309
0.326	0.326	0.326	0.326	0.325	0.323	0.322	0.319	0.315	0.309	0.302
0.323	0.323	0.322	0.322	0.32	0.318	0.316	0.312	0.308	0.302	0.295
0.318	0.318	0.317	0.316	0.315	0.312	0.309	0.306	0.301	0.295	0.289

El error que se comete al usar polinomios consiste en que el valor del esfuerzo cortante constante, donde se inicia la cedencia del material, es menor al real, obteniéndose una carga de cedencia mayor, ya que el valor del esfuerzo cortante adimensional pasa al denominador al calcular la

presión crítica en ese punto. Por ejemplo, para el punto  $(0,1.25)$  de la tabla anterior  $\tau/p_0=0.338$  para la presión polinomial y  $\tau/p_0=0.328$  para la hertziana. Mediante la ecuación del criterio de Tresca

$$p_0 = \frac{\tau}{0.338} = \frac{\sigma_Y}{2*0.338} = 1.479\sigma_Y \quad (5.2)$$

$$p_0 = \frac{\tau}{0.328} = \frac{\sigma_Y}{2*0.328} = 1.524\sigma_Y \quad (5.3)$$

La presión crítica calculada con el polinomio hertziano es 3% mayor que la requerida para iniciar la cedencia.

Estos son los errores que Hertz no explica claramente y se limita a establecer las condiciones en las que su polinomio funciona. De aquí la necesidad de establecer polinomios de mayor grado para describir los problemas de contacto *no hertziano*.

Para los problemas de diseño de maquinaria, un polinomio de mayor grado que el de Hertz proporciona mejores resultados

## 5.2 ANÁLISIS EXPERIMENTAL DE ESFUERZOS

Un aspecto importante en la formulación de esta teoría no hertziana ha sido el análisis experimental de esfuerzos, pues ha permitido corroborar la veracidad de las ecuaciones tanto para el régimen elástico como para el plástico.

Sin el análisis experimental de esfuerzos no se habrían tenido antecedentes para demostrar que la teoría de la elasticidad funciona a pesar de no cumplirse los postulados de Hertz, los cuales son:

Las dimensiones del área de contacto deben ser pequeñas comparadas con:

- a) las dimensiones de cada cuerpo y
- b) el radio de curvatura relativo de las superficies de cada uno de ellos.

La primera condición es necesaria para asegurar que el campo de esfuerzos calculados en un sólido, considerado infinito en extensión (semiespacio elástico), no es influenciado por la proximidad de alguna zona de alta concentración de esfuerzos.

La segunda, para asegurar que las deformaciones en la región de contacto son suficientemente pequeñas, en relación con el tamaño del cuerpo, para que la *teoría lineal de la elasticidad* funcione.

La primera condición hertziana no se cumple en el experimento realizado al indentar un cuerpo elástico mediante dos indentadores convexos con un radio de la misma magnitud que la del radio del cuerpo, donde el ancho del área de contacto es de una magnitud semejante a la del radio de los cuerpos, como se muestra en la Fig.3.11, y sin embargo, puede describirse mediante la teoría de la elasticidad

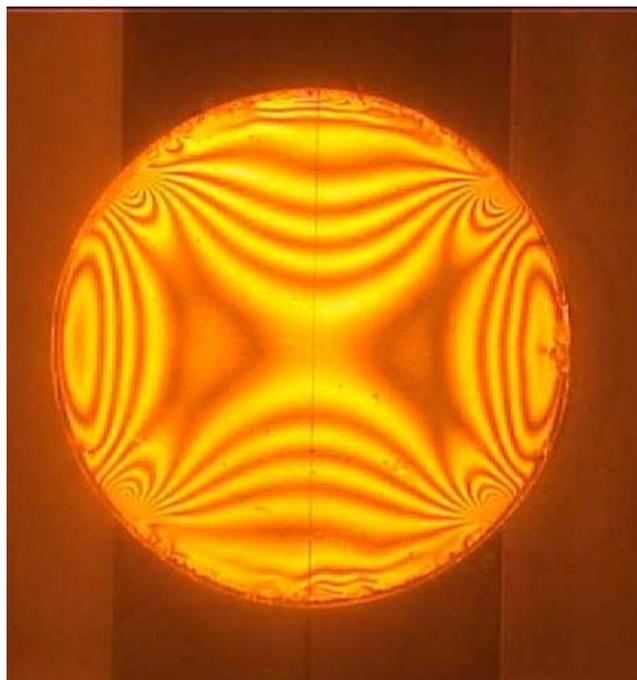


Fig. 3.11 Líneas de deformación constante producidas por dos indentadores cilíndricos y opuestos sobre un cuerpo elástico

La segunda siempre se cumple, al menos en la mecánica del contacto, pues el objetivo es hacer marcajes sin deformar sensiblemente el espécimen.

Pero de acuerdo con lo observado durante el experimento al indentar un disco de aluminio, la teoría de la elasticidad puede describir el fenómeno hasta el momento de la fluencia; ya que la teoría de las deformaciones incrementales de la plasticidad se apoya en los esfuerzos desviadores elásticos.

### **5.3 ESFUERZOS EN LAS ESQUINAS DEL INDENTADOR**

Las concentraciones de esfuerzo se presentan principalmente en los cambios de geometría en los cuerpos de las máquinas y en las esquinas de los indentadores cuando se trata de problemas de contacto.

Las concentraciones de esfuerzo en los problemas de contacto se presentan en dos casos, cuando:

- a) El perfil del indentador es plano y termina en esquinas
- b) El perfil tiene cualquier geometría pero termina en esquinas

### 5.3.1 INDENTADOR RÍGIDO Y PLANO

La indentación de un cuerpo elástico con un punzón rígido y plano, Fig. 2.5, produce un desplazamiento constante  $\delta$  en el área de contacto  $-a \leq x \leq a$ .

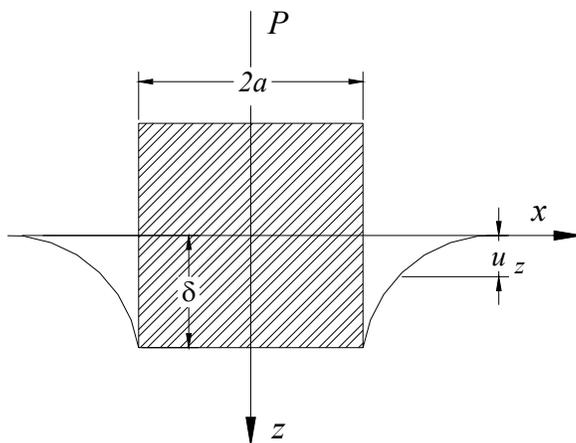


Fig. 2.5 Indentación con un punzón rígido y plano

Para determinar la presión que desplaza al indentador a lo largo del eje  $z$  en forma constante, se usa la ecuación (2.25)

$$\frac{\partial u_z}{\partial x} = -\frac{2(1-\nu^2)}{\pi E} \int_{-a}^a \frac{p(s)}{x-s} ds$$

donde  $u_z = \delta = cte$  y  $\frac{\partial u_z}{\partial x} = 0$  de tal forma que la ecuación anterior se transforma en (2.26):

$$\int_{-a}^a \frac{p(s)}{x-s} ds = 0$$

Usando la solución general (2.15), la presión que genera el desplazamiento constante es la ecuación (2.27):

$$p(x) = \frac{P}{\pi(a^2 - x^2)^{1/2}}$$

Esta presión tiende a ser muy grande cerca de las esquinas,  $x \rightarrow a$ , del indentador lo que produce esfuerzos muy altos en ellas, conocidos como concentración de esfuerzos, ver las Fig. 2.6 y 2.7.

### 5.3.2- PERFIL CON ESQUINAS

La indentación es conformable y el ancho es menor que el radio del espécimen, Fig.3.2.

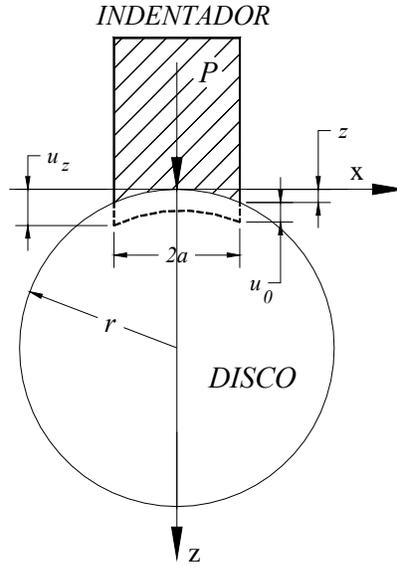


Fig. 3.2 (repetida) Proceso de deformación de un disco bajo la acción de un indentador rígido

Por ejemplo, para un cuerpo cuyo perfil se puede describir mediante el polinomio (3.7)

$$Z = \frac{X^4}{6R^3} + \frac{X^2}{2R}$$

y al ser indentado mediante un punzón rígido el desplazamiento es (3.7.1)

$$u_z = u_0 + \frac{X^4}{6R^3} + \frac{X^2}{2R}$$

y la presión que lo produce será la ecuación (3.8)

$$p(X) = -\frac{Ea}{2\pi a(1-\nu^2)(1-X^2)^{1/2}} \int_{-1}^1 \frac{(1-S^2)^{1/2}}{S-X} \left[ \frac{2S^3}{3R^3} + \frac{S}{R} \right] dS + \frac{P}{\pi a(1-X^2)^{1/2}}$$

$p(X)$  debe estar únicamente en función de  $P$  para conocer su variación desde que la carga de contacto es nula, y para ello pueden tenerse las siguientes condiciones de frontera:

a) La presión  $p(X)$  es simétrica en  $-1 \leq X \leq 1$ , entonces en  $X=0$  la pendiente es horizontal y

$$\frac{\partial p(X)}{\partial X} = 0, \text{ de donde } \frac{E}{2(1-\nu^2)} = \frac{4PR^3}{3\pi a(2R^2-1)} \text{ y la presión será la ecuación (3.15)}$$

$$p(X) = \frac{4P}{9\pi a} \left[ \frac{2X^2 + 3R^2 + 1}{2R^2 - 1} \right] (1-X^2)^{1/2} + \frac{2P}{3\pi a(1-X^2)^{1/2}} \left( \frac{3R^2 - 2}{2R^2 - 1} \right)$$

b) En este caso,  $p(X)=0$  en  $X=1$ ,  $\frac{E}{2(1-\nu^2)} \left[ \frac{1}{4R^3} + \frac{1}{2R} \right] = \frac{P}{\pi a}$  y la distribución de la presión será:

$$p(X) = \frac{4P}{3\pi a} \left[ \frac{2X^2 + 3R^3 + 1}{1 + 2R^2} \right] (1 - X^2)^{1/2} \quad (5.4)$$

De estas dos distribuciones de presión, la primera es la que tiende a incrementarse cuando  $X \rightarrow 1$ . Esto significa que la condición de frontera elegida es la adecuada en la descripción del problema.

La segunda condición de frontera describirá los indentadores sin esquinas y la presión se hace cero en  $x=a$ , lo cual indica que no existe penetración en el borde.

La anterior discusión establece que las distribuciones de presión en los problemas de contacto dependen de las condiciones de frontera que describen el problema.

### 5.3.3 INDENTADORES CUNEIFORMES

Este tipo de indentadores, Fig. 5.2, han sido analizados por Johnson[12], y la ecuación del desplazamiento del indentador en el semiespacio elástico es:

$$u_{z1} - u_{z2} = \delta - \cot \alpha |x| \quad (5.5)$$

y la distorsión en  $z/a$  a lo largo de  $x/a$

$$u'_{z1} - u'_{z2} = -(\text{sign} x) \cot \alpha \quad (5.6)$$

y la distribución de presión que produce este desplazamiento es:

$$p(X) = \frac{E \cot \alpha}{(1 - \nu^2)} \cosh^{-1} \left( \frac{1}{X} \right) \quad (5.7)$$

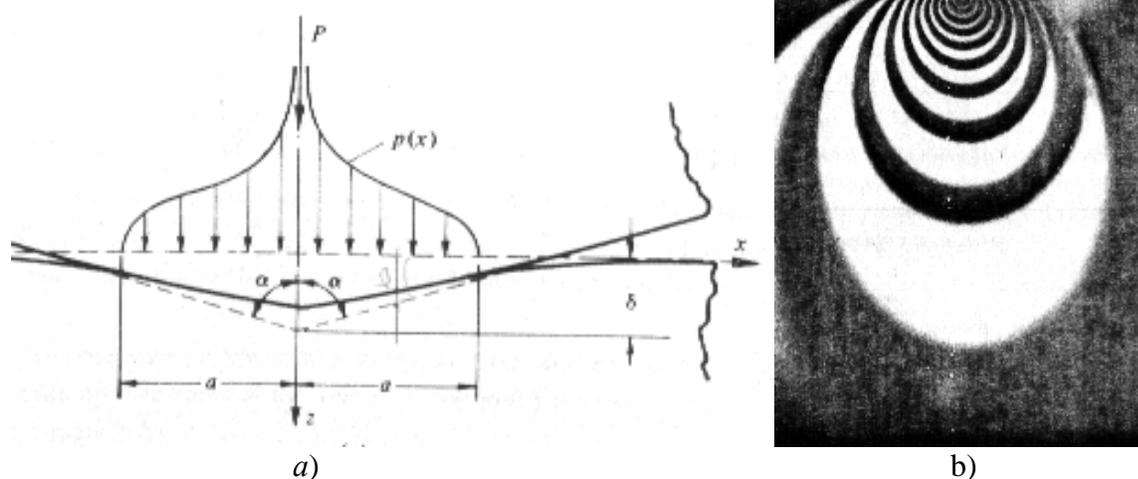


Fig. 5.2: a) Distribución de presión en una cuña y b) Líneas de esfuerzo cortante constante (Johnson [12])

Esta presión tiende a ser muy alta en  $X=0$ , es decir en el vértice de la cuña donde está la discontinuidad del perfil, ver la Fig. 5.1a. Las líneas de esfuerzo cortante constante se muestran en la Fig. 5.1b. En la ecuación (5.7), puede verse que la presión  $p(X)$  aumenta a medida que el ángulo  $\alpha$  del vértice de la cuña disminuye.

Si existe alguna *discontinuidad* en la superficie del indentador, la presión tiende a incrementarse en ese punto. Los picos de presión producen concentraciones de esfuerzo y las condiciones de frontera determinan la descripción del problema

## 5.4 ESFUERZOS DE SUPERFICIE

### 5.4.1 EN ENGRANES

Para el cálculo de la resistencia en la superficie que deben tener los dientes de los engranes, así como las levas, y resistir las cargas sin deformarse permanentemente, es decir la dureza que debe tener el material y la profundidad mínima que debe alcanzar.

La Fig. 5.3 muestra dos dientes de engrane durante la transmisión de la fuerza de contacto y las líneas de esfuerzo que ésta produce en sus superficies. El valor del esfuerzo cortante constante y la profundidad a la que se inicia la cedencia puede ser calculado mediante la teoría mostrada en el Apéndice 2. Los valores del esfuerzo se muestran en la Tabla 5.3.

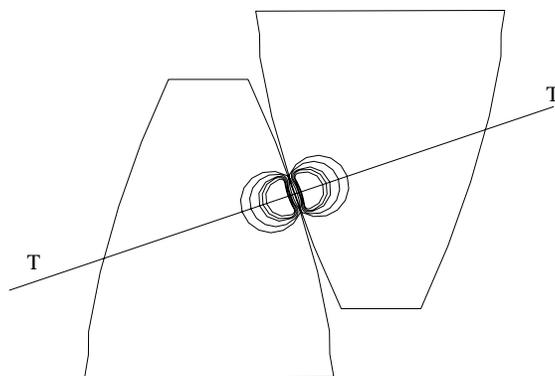


Fig. 5.3 Sistema de esfuerzos producido por el contacto entre dos engranes

Tabla 5.3 Valores del esfuerzo cortante máximo  $\tau/p_0$  y del esfuerzo equivalente  $\sigma_e/p_0$  para  $x/a=0$  y  $x/a=1$ , para  $z/a: 0, 0.1, \dots 1.5$ .

z/a	x/a=0	x/a=1
	$\tau_{\max}/p_0$	$\tau_{\max}/p_0$
0	0	0
0.1	0.09	0.162
0.2	0.161	0.2
0.3	0.214	0.22
0.4	0.251	0.231
0.5	0.276	0.237
0.6	0.291	0.239
0.7	0.299	0.239
0.8	0.3	0.238
0.9	0.298	0.235
1	0.293	0.231
1.1	0.286	0.227
1.2	0.278	0.223
1.3	0.27	0.218
1.4	0.261	0.213
1.5	0.252	0.208

En esta tabla se puede ver que el esfuerzo cortante máximo es  $\tau/p_0 = 0.3$  y está a  $z/a = 0.8$ , entonces

$$p_0 = \frac{\tau}{0.3} = \frac{\sigma_Y}{2 * 0.3} = 1.67\sigma_Y \quad (5.8)$$

y

$$P = \frac{\pi a}{2} p_0 = 2.62a\sigma_Y \quad (5.9)$$

para

$$z/a=0.8 \quad (5.10)$$

En el diseño de engranes, la carga de transmisión siempre es conocida, entonces de la ecuación (5.9) el esfuerzo mínimo que debe tener el material del engrane en  $z/a=0.8$  deberá ser igual al esfuerzo de cedencia del material a esa profundidad, es decir que

$$\sigma_{emgrane} = \sigma_Y = \frac{P}{2.62a} \quad (5.11)$$

A medida que el ancho de contacto  $a$  crece, el esfuerzo resistente disminuye, pero la profundidad a la que inicia la cedencia del material aumenta, entonces si se requiere que el material siempre esté elástico, el esfuerzo resistente del material debe alcanzar esa profundidad.

Es posible obtener un material de resistencia variable, ya que los aceros con los que se fabrican los engranes alcanzan su resistencia máxima después del tratamiento térmico, que normalmente es un endurecimiento superficial mediante el enriquecimiento de carbono. A medida que el carbono penetra en el material, la composición química cambia en su zona superficial y posteriormente se puede endurecer con un temple y revenido adicional, mientras que la zona

donde no ha penetrado presenta una mayor tenacidad y menor dureza. Las profundidades comerciales de endurecimiento con el proceso de cementado están entre 1 y 1.5 mm, entonces el material del engrane deberá tener la resistencia mínima a  $z=1.5mm$ , de tal forma que sustituyendo este valor de  $z$  en la ecuación (5.10) y el resultado en la ecuación (5.11) se tiene que

$$\sigma_y = \frac{0.8P}{2.62 * 1.5} = 0.2P \quad (5.12)$$

o bien

$$P = 4.9\sigma_y \quad (5.13)$$

que es la carga que puede resistir el diente del engrane por milímetro de longitud. La resistencia de los aceros para engranes[22] está entre  $43 \leq \sigma_y \leq 168 \text{ kg/m}^2$ , por lo que la carga que puede resistir el diente del engrane sin deformarse plásticamente, de acuerdo con la ecuación (5.13), será

$$211 \leq P \leq 823 \text{ kg/mm} \quad (5.14)$$

El ancho de la cara del engrane dependerá de la magnitud de la carga total  $P$  (por unidad de longitud en el eje  $y$ ). El análisis completo de este problema se hace en el Apéndice 2 y para las levas, en el Apéndice 3.

#### 5.4.2 DIFERENCIAS CON LAS ECUACIONES DE LA AMERICAN GEAR MANUFACTURERS ASSOCIATION

Al usar la teoría desarrollada en los capítulos anteriores y al aplicar el proceso para obtener la distribución de esfuerzos en las caras de dos dientes de engranes (Apéndice 2), se puede observar que la ecuación del esfuerzo de la AGMA está basada en la ecuación de Buckingham [22], (A2.22):

$$s_c = \frac{2W}{\pi Fa}$$

Donde  $s_c$  representa el esfuerzo normal máximo de contacto,  $W$  la carga de contacto,  $F$  la longitud de la cara de contacto en el eje  $y$ , y  $a$  la mitad del ancho de la cara de contacto en el eje  $x$ . Transformando la ecuación obtenida en el Apéndice 2, ecuación (A2.10)

$$\sigma_{\max} = \frac{2P}{1.66\pi a} = \frac{P}{2.61a}$$

para compararla con la (A2.22), se hace

$$P = \frac{W}{F}$$

que es la carga por unidad de longitud del diente en el eje  $y$ .

Entonces, la ecuación (A2.10) se puede escribir nuevamente como (A2.23):

$$\sigma_{\max} = \frac{2W}{1.66\pi Fa}$$

La diferencia entre las ecuaciones (A2.22) y (A2.23) es el número 1.66, que en la de la AGMA es la unidad.

El factor 1.66 se obtiene del valor máximo de  $\tau/p_0$  en la distribución del esfuerzo cortante constante, de la Tabla A2.1 y de la Fig. A.2, ecuación (A2.9).

$$p_0 = \frac{\tau}{0.30} = \frac{\sigma_{\max}}{2 * 0.30} = 1.66\sigma_{\max}$$

Si la ecuación de la AGMA usa el valor unitario, se puede calcular el valor de  $\tau/p_0$  que le corresponde, usando el criterio de Tresca. Este valor es 0.5 ya que

$$p_0 = \frac{\tau}{0.50} = \frac{s_c}{2 * 0.50} = 1 * s_c$$

o bien

$$\frac{\tau}{p_0} = 0.5 \tag{5.15}$$

Si buscamos este valor del esfuerzo cortante constante en la Tabla A2.1 o en la Fig. A2.2, puede verse que no existe, el máximo es  $\tau/p_0=0.3$ .

La ecuación de Buckinham no usa algún criterio de falla, sino que usa el esfuerzo normal en lugar del esfuerzo cortante. Este error hace que los cálculos no sean iguales como se muestra ampliamente en el Apéndice 2.

### 5.4.3 LEVAS CON SEGUIDOR DE RODILLO

En el Apéndice 3, se hace un análisis completo de los esfuerzos de superficie en sistemas leva-seguidor, estudiando dos tipos de contacto, sin fricción y con fricción y se proponen ecuaciones para el cálculo de los esfuerzos y el punto donde se inicia la falla del material.

En el caso de la leva con seguidor de rodillo no existe fuerza de fricción,  $q(x)=0$ , y la ecuación para el cálculo del esfuerzo máximo a la tensión que produce la carga  $P$  a una profundidad  $z = 0.8a$  (ver la tabla 5.2) es la ecuación (A3.18):

$$\sigma_{\max} = \sqrt{\frac{\pi E * P}{2.61^2 4R}}$$

Este esfuerzo debe ser siempre menor al esfuerzo de cedencia,  $\sigma_y$ , del material del que están contruidos tanto la leva como el seguidor.

$$\sigma_{\text{m}\acute{\text{a}}\text{x}} < \sigma_y \quad (5.16)$$

#### 5.4.4- LEVAS CON SEGUIDOR DE CARA PLANA

En el caso de existir deslizamiento entre la leva y el seguidor, como en el caso del seguidor de cara plana, al sistema de esfuerzos hallado para el seguidor de rodillo es necesario sumarle el efecto de la carga de deslizamiento  $q(x) = \mu p(x)$ , como se explica en la sección A.3.4 del Apéndice 3, la ecuación resultante considerando  $\mu = 0.2$  es la ecuación (A3.25):

$$\sigma_{\text{max}} = \sqrt{\frac{\pi E * P}{2.59^2 4R}}$$

Esta ecuación, como la ecuación (A3.18), calcula el esfuerzo máximo a la tensión que produce la carga  $P$  a una profundidad  $z = 0.8a$ , esfuerzo que debe ser siempre menor al esfuerzo de cedencia,  $\sigma_y$ , del material del que está construida la leva y el seguidor, ya que los esfuerzos tienen la misma distribución y magnitud en ambas partes.

En los casos en que la carga de fricción se incremente considerablemente,  $\mu > 0.2$ , será necesario hacer un análisis de esfuerzos para ese caso en particular, pues el sistema de esfuerzos difiere considerablemente de los casos presentados en este estudio, ya que el punto donde se inicia la cedencia cambia de posición acercándose a la superficie de contacto y produce fallas prematuras.

# 6 CONCLUSIONES GENERALES

Las principales aportaciones que este trabajo presenta son:

1. Al analizar la literatura relativa al contacto entre un cuerpo y un semiespacio elástico, la presión obtenida matemáticamente no hace distinción alguna del tipo de geometría de la superficie de los cuerpos en contacto, usando para describirlas en general a la presión hertziana. Además, no se explica claramente cómo se modifica la presión cuando un indentador plano tiene esquinas, pues en la mayoría de los problemas presentados en la literatura presuponen que no las tienen. La forma como puede obtenerse analíticamente la distribución de esfuerzos en las esquinas de un indentador plano, a partir de las ecuaciones existentes, no coincide con las obtenidas experimentalmente, Fig. 2.6 y Fig. 2.7.
2. Para poder describir adecuadamente la geometría de la superficie de contacto entre cuerpos elastoplásticos, se propone el uso de polinomios y mediante las condiciones de frontera propuestas en el capítulo tres, pueden distinguirse los tipos de presión cuando los indentadores tienen esquinas y cuando no las tienen. La distribución de esfuerzo así obtenida, para los indentadores con esquinas, se acercan más a los obtenidos por métodos experimentales, Fig. 3.4 y Fig. 2.7.
3. El uso de polinomios para la solución de problemas de cuerpos en contacto, implica una mayor complejidad de las ecuaciones que las obtenidas con el modelo hertziano, por este motivo se recurre al uso de los métodos numéricos y de la computadora para resolverlos.
4. Los desplazamientos del material del espécimen dentro del régimen plástico fueron obtenidos mediante el uso de los métodos numéricos, debido a lo complejo de las ecuaciones,.
5. Los experimentos hechos mediante la ayuda de la foto elasticidad establecieron hacia dónde deberían ir los cálculos analíticos pues mostraron, antes de tener resultados, la magnitud de las cargas requeridas para penetrar un espécimen, la posible distribución de los esfuerzos cortantes en la superficie del espécimen y la concentración de esfuerzos en la zona de contacto con las esquinas de los indentadores. Los resultados analíticos mostraron al final una gran semejanza.
6. Faltaron experimentos por realizarse, pues algunos de los materiales con los que se hace similitud no tienen la misma estructura del acero o del aluminio y se requiere comprobar la confiabilidad del método polinomial haciendo los experimentos con materiales de las mismas características.
7. El algoritmo usado para calcular la carga de indentación para el disco de aluminio requiere de parámetros exactos para el límite elástico del material y el coeficiente de endurecimiento, pues pequeñas variaciones de éstos producen grandes variaciones en los resultados. Es necesario hacer pruebas de tensión del material utilizado para conocer el índice de confiabilidad de las ecuaciones.

8. Para dos indentadores la concentración de esfuerzos en sus esquinas hace que el esfuerzo cortante máximo se desplace del centro geométrico del alambre.

9. Con tres indentadores el nivel de esfuerzo aumenta, en relación con el de dos, y en este caso el nivel máximo de esfuerzo se localiza en el centroide del alambre.

10. El algoritmo para el cálculo de la carga de indentación para dos y tres indentadores muestra que el desplazamiento del material del espécimen no es uniforme, requiriendo de un estudio amplio de este punto en particular.

11. El cálculo del desplazamiento del indentador sobre el cuerpo del espécimen muestra que aunque algunos puntos por debajo de la superficie de contacto ya hayan sobrepasado su límite elástico, el indentador no se desplaza hasta todos los puntos por debajo de ella lo alcancen.

12. El experimento realizado con el disco de aluminio, para comparar los resultados experimentales con los analíticos, es el que ha proporcionado el nivel de confianza para usar el modelo polinomial en el cálculo de la carga de indentación para dos y tres indentadores.

13. La comparación de polinomios de distinto grado con la ecuación hertziana, ha permitido conocer la razón de las restricciones para su aplicación, ya que la ecuación hertziana presenta un mayor error en los cálculos de los esfuerzos en cuerpos cilíndricos, a medida que los puntos donde se desea conocer el esfuerzo se alejan el punto de aplicación de la carga.

14. La teoría desarrollada en este trabajo ha sido usada en el cálculo de los esfuerzos de superficie en dientes de engranes, los resultados muestran mayor precisión que los obtenidos mediante las ecuaciones de la AGMA (American Gear Manufacturers Association).

# APÉNDICE 1

## DEDUCCIÓN DE LA PRESIÓN HERTZIANA

### A1.1 POSTULADOS DE LA TEORÍA HERTZIANA

El primer análisis del esfuerzo de contacto satisfactorio entre dos sólidos elásticos fue hecho por Heinrich Hertz [9], esto ocurrió durante la observación de las líneas de interferencia óptica de Newton, en el claro existente entre dos lentes de vidrio, y estudió la influencia de la presión de contacto en la deformación elástica, en el plano de contacto entre las superficies de los lentes.

Hertz estableció primero la hipótesis de que el área de contacto entre dos cuerpos de revolución es, en general, elíptica, guiado sin duda por la observación de las líneas de interferencia de los lentes, y de acuerdo con esta hipótesis introdujo la simplificación de que cada cuerpo puede considerarse como un semiespacio elástico cargado sobre una pequeña región elíptica de su superficie, con el propósito de calcular las deformaciones locales.

Esta idea es usada generalmente en la obtención de los esfuerzos generados durante el contacto entre cuerpos elásticos. Sin embargo, para que esta simplificación sea justificable, dos condiciones deben ser satisfechas: Las dimensiones del área de contacto deben ser pequeñas comparadas; a) con las dimensiones de cada cuerpo y b) con el radio de curvatura relativo de las superficies de cada uno de ellos.

La primera condición es necesaria para asegurar que el campo de esfuerzos calculados en un sólido, considerado infinito en extensión, no es influenciado por la proximidad de alguna zona de alta concentración de esfuerzos.

La segunda, para asegurar que las deformaciones en la región de contacto son suficientemente pequeñas, en relación con el tamaño del cuerpo, para que la *Teoría Lineal de la Elasticidad* sea válida.

Finalmente, las superficies se consideran sin fricción, de tal forma que sólo la presión normal es transmitida entre ellas.

Designamos  $2a$ , en la Fig. A.1, al ancho del área de contacto, al radio relativo de curvatura de los cuerpos  $r$ , al radio de cada cuerpo  $r_1$  y  $r_2$ , a la longitud lateral  $y$ , y a la profundidad  $z$ , las suposiciones de la teoría de Hertz quedan como sigue:

- i) Las superficies son continuas y no conformables:  $a \ll r$
- ii) Las deformaciones son pequeñas  $a \ll r$
- iii) Cada sólido puede considerarse como un semiespacio elástico:  $a \ll r_1$ ,  $a \ll r_2$  y  $a \ll y$
- iv) Las superficies no tienen fricción:  $q_x = q_y = 0$

De esta forma, la carga  $P$  que actúa sobre los cuerpos producirá una distribución de presión  $p(x)$  de ancho  $2a$  en la superficie de los dos semiespacios elásticos y la presión, los desplazamientos normales sobre las superficies,  $u_{z1}$  y  $u_{z2}$ .

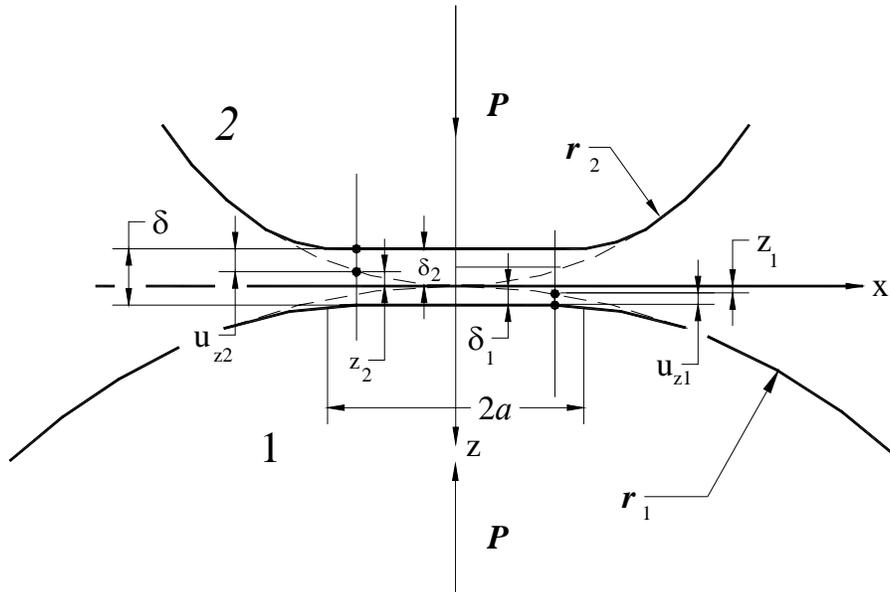


Fig. A1.1 Cuerpos en contacto hertziano

En la Fig. A1.1, el desplazamiento total de la interacción del cuerpo 2, sobre el contorno del cuerpo 1, puede expresarse mediante la ecuación:

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 \quad (\text{A1.1})$$

donde

$$\delta_1 = u_{z1} + z_1 \text{ y } \delta_2 = -u_{z2} - z_2$$

que al sustituir en la ecuación (A1.1) se llega a:

$$\delta = u_{z1} + z_1 - u_{z2} - z_2$$

o

$$u_{z1} - u_{z2} = \delta - z_2 + z_1 \quad (\text{A1.2})$$

donde  $z_1$  y  $z_2$  indican la posición relativa del perfil de los cuerpos 1 y 2 en el plano  $x-z$ ,  $u_{z1}$  y  $u_{z2}$  el desplazamiento de la superficie de los cuerpos debido a la presión de contacto y  $\delta$  el desplazamiento total del cuerpo 2 sobre el cuerpo 1.

## A1.2 DEDUCCIÓN DEL POLINOMIO HERTZIANO

Para aproximar  $z_1$  y  $z_2$ , se inicia con la ecuación de una circunferencia trasladada de su centro a uno de sus cuadrantes,

$$z = -\sqrt{r^2 - x^2} + r, \quad (\text{A1.3})$$

y se emplea un polinomio de orden cuadrático para aproximar la ecuación anterior, de la forma

$$z = a_1 + a_2x + a_3x^2 \quad (\text{A1.4})$$

que pase por los puntos  $P_1(-0.08r, 0.0032r)$ ,  $P_2(0,0)$   $P_3(0.08r, 0.0032r)$ , de la circunferencia como se muestra en la Fig. A1.2.

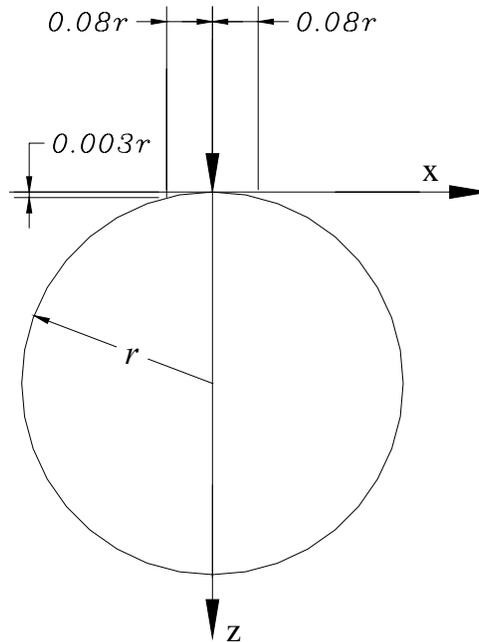


Fig. A1.2: Circunferencia con centro en un cuadrante

Para calcular los valores de los coeficientes  $a_i$  se sustituyen las coordenadas de los puntos en la ecuación (A1.1) obteniéndose el sistema

$$0.0032r = a_1 - 0.08ra_2 + 0.0064r^2a_3 \quad \text{con } P_1 \quad (\text{A1.5})$$

$$0 = a_1 + 0 + 0 \quad \text{con } P_2 \quad (\text{A1.6})$$

$$0.0032r = a_1 + 0.08ra_2 + 0.0064r^2a_3 \quad \text{con } P_3 \quad (\text{A1.7})$$

Entonces, de (A1.6)

$$a_1 = 0$$

Despejando  $a_2$  de (A 1.5) y dividiendo entre  $r$  se llega a

$$a_2 = \frac{0.0064ra_3 - 0.0032}{0.08}$$

que sustituyendo en (A1.7) y resolviendo el álgebra se obtienen

$$a_3 = \frac{0.0064}{0.0128r} = \frac{1}{2r}$$

y

$$a_2 = \frac{0.0064r \frac{1}{2r} - 0.0032}{0.08} = 0$$

por lo que la ecuación del polinomio será:

$$z = \frac{x^2}{2r} \tag{A1.8}$$

Es evidente que cualquier polinomio que se ajuste a una curva simétrica debe tener los coeficientes de las variables con exponente impar nulos.

Así, las ecuaciones que describen los contornos de las superficies de los dos cuerpos en contacto serán los polinomios del tipo

$$z_1 = \frac{x_1^2}{2r_1}$$

y

$$z_2 = -\frac{x_2^2}{2r_2}$$

ya que las dos superficies tienen distinta concavidad

### **A1.3 DISTRIBUCIÓN DE LA PRESIÓN**

Sustituyendo las ecuaciones (A1.9) en la ecuación (A1.2) se llega a:

$$u_{z1} - u_{z2} = \delta + \left( \frac{x_1^2}{2r_1} + \frac{x_2^2}{2r_2} \right) \tag{A1,10}$$

Teniendo en cuenta que  $x_1 = x_2 = x$ , se tiene que

$$u_{z1} - u_{z2} = \delta + \left( \frac{x^2}{2r_1} + \frac{x^2}{2r_2} \right) \tag{A1,11}$$

Pero del punto 2.3, ecuación (2.14), la variación del desplazamiento  $u_z$  de un cuerpo sobre el otro, a lo largo del eje  $x$ ,

$$u'_{z1} - u'_{z2} = \left( \frac{x}{r_1} + \frac{x}{r_2} \right) \quad (\text{A1.12})$$

debe ser igual a la variación del desplazamiento producida por la distribución de presión que se genera al momento de entrar en contacto, así:

$$u'_{z1} = -\frac{2(1-\nu_1^2)}{\pi E_1} \int_{-a}^a \frac{p1(s)}{x-s} ds$$

y

$$-u'_{z2} = \frac{2(1-\nu_2^2)}{\pi E_2} \int_{-a}^a \frac{p2(s)}{x-s} ds \quad (\text{A1.13})$$

Sustituyendo las ecuaciones (A1.13) en la ecuación (A1.12) se obtiene

$$\frac{x}{r_1} + \frac{x}{r_2} = -\frac{2(1-\nu_1^2)}{\pi E_1} \int_{-a}^a \frac{p1(s)}{x-s} ds + \frac{2(1-\nu_2^2)}{\pi E_2} \int_{-a}^a \frac{p2(s)}{x-s} ds \quad (\text{A1.14})$$

Por la primera ley de Newton  $p1(s) = -p2(s) = p(s)$  y la ecuación (A1.14) se transforma en

$$\frac{x}{r_1} + \frac{x}{r_2} = -\frac{2(1-\nu_1^2)}{\pi E_1} \int_{-a}^a \frac{p(s)}{x-s} ds - \frac{2(1-\nu_2^2)}{\pi E_2} \int_{-a}^a \frac{p(s)}{x-s} ds$$

o bien

$$x \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) = -\frac{2}{\pi} \left( \frac{(1-\nu_1^2)}{E_1} + \frac{(1-\nu_2^2)}{E_2} \right) \int_{-a}^a \frac{p(s)}{x-s} ds \quad (\text{A1.15})$$

Si para simplificar la escritura de esta ecuación se usan

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2}$$

y

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \quad (\text{A1.16})$$

donde  $r$  es el radio equivalente y  $E^*$  el módulo de elasticidad combinado. De esta forma la ecuación de la variación del desplazamiento a lo largo del eje de las  $x$  es:

$$\frac{x}{r} = -\frac{2}{\pi E^*} \int_{-a}^a \frac{p(s)}{x-s} ds$$

o

$$\int_{-a}^a \frac{p(s)}{x-s} ds = -\frac{\pi E^*}{2} \frac{x}{r} \quad (\text{A1.17})$$

Dividiendo entre  $a$  ambos miembros de la ecuación anterior, la mitad del ancho del área de contacto, sustituyendo  $X$  por  $x/a$  y  $S$  por  $s/a$  y  $R$  por  $r/a$  se obtiene

$$\int_{-1}^1 \frac{p(S)}{X-S} dS = -\frac{\pi E^*}{2} \frac{X}{R} \quad (\text{A1.18})$$

Esta ecuación es de la forma  $\int_{-1}^1 \frac{f(S)}{X-S} dS = g'(X)$ , cuya solución general es, Mikhlin[24]:

$$p(X) = -\frac{E^*}{2\pi(1-X^2)^{1/2}} \int_{-1}^1 \frac{(1-S^2)^{1/2}}{X-S} f'(S) dS + \frac{P}{\pi a(1-X^2)^{1/2}} \quad (\text{A1.19})$$

que al sustituir  $f'(S) = \frac{S}{R}$  de la ecuación (A1.18) se obtiene

$$p(X) = -\frac{E^*}{2\pi R(1-X^2)^{1/2}} \int_{-1}^1 \frac{(1-S^2)^{1/2}}{X-S} S dS + \frac{P}{\pi a(1-X^2)^{1/2}} \quad (\text{A1.20})$$

Teniendo en cuenta que el valor principal de la integral  $\int_{-1}^1 \frac{(1-S^2)^{1/2}}{X-S} S dS = \pi X^2 - \frac{\pi}{2}$

$$p(X) = -\frac{E^*}{2\pi R(1-X^2)^{1/2}} \left( \pi X^2 - \frac{\pi}{2} \right) + \frac{P}{\pi a(1-X^2)^{1/2}}$$

o bien

$$p(X) = -\frac{E^*}{2R(1-X^2)^{1/2}} \left( X^2 - \frac{1}{2} \right) + \frac{P}{\pi a(1-X^2)^{1/2}} \quad (\text{A1.21})$$

Como condición de frontera se tiene que la presión  $p(X)$  debe ser igual a cero cuando  $x=\pm a$ , es decir cuando  $X=\pm 1$  en los extremos del indentador, entonces multiplicando por  $(1-X^2)^{1/2}$  ambos lados de la ecuación anterior e igualando a cero se obtiene que

$$\frac{E^*}{4R} = \frac{P}{\pi a} \quad (\text{A1.22})$$

y despejando a la carga  $P$  (por unidad de longitud en el eje  $y$ )

$$P = \frac{\pi a E^*}{4R} \quad (\text{A1.23})$$

o bien

$$P = \frac{\pi a^2 E^*}{4r} \quad (\text{A1.24})$$

Sustituyendo el valor de  $P$  de la ecuación (A1.22) en la ecuación (A1.21) se obtiene que:

$$p(X) = -\frac{E^*}{2R(1-X^2)^{1/2}} \left( X^2 - \frac{1}{2} \right) + \frac{E^*}{4R(1-X^2)^{1/2}} \quad (\text{A1.25})$$

y simplificando

$$p(X) = \frac{E^*}{2R} (1-X^2)^{1/2} \quad (\text{A1.26})$$

Al sustituir (A1.22) en (A1.26), se obtiene la ecuación de la presión generada por la carga  $P$  en cada uno de los cuerpos en contacto, ésta es:

$$p(X) = \frac{2P}{\pi a} (1-X^2)^{1/2} \quad (\text{A1.27})$$

La ecuación anterior es la presión parabólica de Hertz o presión hertziana, donde la presión máxima  $p_0$  ocurre en  $X=0$ , de donde

$$p_0 = \frac{2P}{\pi a} \quad (\text{A1.28})$$

## A1.4 CONCLUSIÓN

La sustitución de la ecuación de la circunferencia  $z = -\sqrt{r^2 - x^2} + r$ , por la del polinomio hertziano  $z = \frac{x^2}{2r}$ , se usa para simplificar la ecuación integral singular  $\int_{-a}^a \frac{p(s)}{x-s} ds = -\frac{\pi E^*}{2} u'_z$ , donde

$$u'_z = \frac{d}{dx} (\delta - z_2 + z_1)$$

Si

$$z_1 = -\sqrt{r_1^2 - x^2} + r_1$$

y

$$z_2 = -\left( -\sqrt{r_2^2 - x^2} + r_2 \right)$$

la deflexión sería

$$u'_{z_1} - u'_{z_2} = u'_z = \frac{d(\delta - z_2 + z_1)}{dx} = x(r_2^2 - x^2)^{-1/2} + x(r_1^2 - x^2)^{-1/2}$$

y la ecuación integral singular de la presión quedaría

$$\int_{-a}^a \frac{p(s)}{x-s} ds = -\frac{\pi E^*}{2} \left[ x(r_1^2 - x^2)^{-1/2} + x(r_2^2 - x^2)^{-1/2} \right]$$

y su solución general, dividiendo entre  $a$  y haciendo los cambios de variable necesarios, sería

$$p(X) = -\frac{E^*}{2\pi(1-X^2)^{1/2}} \int_{-1}^1 \frac{(1-S^2)^{1/2}}{X-S} \left[ S(R_1^2 - S^2)^{-1/2} + S(R_2^2 - S^2)^{-1/2} \right] dS + \frac{P}{\pi a(1-X^2)^{1/2}}$$

que al resolver la integral, (si esto es factible), se obtendría la presión que produce exactamente el desplazamiento,  $u_{z_1} - u_{z_2} = \delta + z_1 - z_2$ .

Usando el polinomio hertziano la ecuación integral singular se simplifica a:

$$\int_{-a}^a \frac{p(s)}{x-s} ds = -\frac{\pi E^*}{2} \frac{x}{r}$$

cuya solución es

$$p(X) = \frac{2P}{\pi a} (1-X^2)^{1/2}$$

o

$$p(x) = \frac{2P}{\pi a^2} (a^2 - x^2)^{1/2}$$

La idea de Hertz de aproximar la ecuación de la circunferencia desplazada con un polinomio de grado 2 es congruente con sus postulados, ya que a medida que crece el ancho del área contacto, la ecuación de la parábola se aleja de la circunferencia produciendo errores en los cálculos.

Sin embargo, la teoría de la elasticidad funciona aun con el polinomio hertziano para anchos del área de contacto muy grandes, lo que difiere es la posición del punto en la superficie del semiespacio elástico donde se calcula el esfuerzo.

# APÉNDICE 2

## CÁLCULO DEL ESFUERZO EN DIENTES DE ENGRANES MEDIANTE LA MECÁNICA DEL CONTACTO

### A2.1 RESUMEN

El esfuerzo generado en la superficie de los dientes de engranes, debido a la carga que transmiten durante su operación, se ha calculado mediante la ecuación de Buckingham [18] desde que ésta fue aceptada como norma de la “American Gear Manufacturers Association” (AGMA), pero esta ecuación no especifica por qué el esfuerzo que calcula es máximo.

Mediante el uso de la mecánica del contacto, se llega a una ecuación del esfuerzo de superficie, semejante a la de la AGMA, pero que toma en cuenta el punto donde se alcanza el esfuerzo crítico en el material del diente.

La diferencia entre las dos ecuaciones es el valor del esfuerzo cortante constante adimensional que se usa para calcular el esfuerzo normal crítico. Con la Mecánica del Contacto, el valor máximo es  $\tau/p_0 = 0.3$  en tanto que el valor máximo mediante la ecuación de Buckingham es  $\tau/p_0 = 0.5$ , valor que no es posible mediante la distribución de esfuerzos existente.

### A2.2 INTRODUCCIÓN

El cálculo de los esfuerzos que se producen durante el contacto entre los dientes de engrane, puede hacerse mediante la teoría del contacto elástico de Hertz, pues cumple con sus postulados:

- i) Las superficies deben ser continuas y no conformables
- ii) Las deformaciones son pequeñas,  $a \ll r$
- iii) Cada sólido puede considerarse como un semiespacio elástico,  $a \ll F$  (*ancho de la cara del diente*).

Ya que durante el contacto entre las caras de los dientes de engrane,  $a$ , el ancho del área de contacto, es pequeño con respecto al radio de curvatura del diente del engrane en el punto de contacto y no se viola la condición  $a \ll r$ .

Por lo tanto, al aplicar la mecánica del contacto, se obtiene el esfuerzo máximo al que se somete el diente en el punto crítico, en función de su radio, del módulo de elasticidad del material y de la carga  $P$  que se está transmitiendo.

Los resultados que se obtienen se comparan con los calculados mediante las ecuaciones de la AGMA y se discuten las diferencias.



Sustituyendo las ecuaciones (A2.3) en la ecuación (A2.2), se obtiene la ecuación (A1,10)

$$u_{z1} - u_{z2} = \delta + \left( \frac{x_1^2}{2r_1} + \frac{x_2^2}{2r_2} \right)$$

y siguiendo el desarrollo de las ecuaciones del Apéndice 1, se llega a la ecuación de la presión (A1.18)

$$\int_{-1}^1 \frac{p(S)}{X-S} dS = -\frac{\pi E^* X}{2 R}$$

cuya solución es la ecuación (A1.27)

$$p(X) = \frac{2P}{\pi a} (1 - X^2)^{1/2}$$

donde

$$P = \frac{\pi a E^*}{4R} \text{ o bien, } P = \frac{\pi a^2 E^*}{4r}$$

y despejando  $a$

$$a = \sqrt{\frac{4 Pr}{\pi E^*}} \quad (\text{A2.4})$$

Además, como en  $X=0$  la distribución de presión tiene su valor máximo,  $p(0)=p_0$ , se tiene que

$$p_0 = \frac{2P}{\pi a} \quad (\text{A2.5})$$

que al sustituir en la ecuación (A1.27), ésta se convierte en:

$$p(X) = p_0 (1 - X^2)^{1/2} \quad (\text{A2.6})$$

Los esfuerzos que se producen en un punto  $A$  del diente del engrane debido a la presión normal, se calculan mediante las ecuaciones del esfuerzo de Flamant, ecuaciones (2.9) ya vistas,

$$\sigma_x = -\frac{2z}{\pi} \int_{-b}^a \frac{p(s)(x-s)^2 ds}{[(x-s)^2 + z^2]^2}$$

$$\sigma_z = -\frac{2z^3}{\pi} \int_{-b}^a \frac{p(s) ds}{[(x-s)^2 + z^2]^2}$$

$$\tau_{xz} = -\frac{2z^2}{\pi} \int_{-b}^a \frac{p(s)(x-s) ds}{[(x-s)^2 + z^2]^2}$$

dividiendo estas expresiones entre  $a$ , considerando  $Z=z/a$ ,  $X=x/a$ ,  $S=s/a$ , sustituyendo  $p(X)$  de la ecuación (A2.6) haciendo el cambio de variable  $X$  por  $S$  y dividiendo los esfuerzos entre  $p_0$ , se obtienen las ecuaciones adimensionales para los esfuerzos actuantes en los dientes de los engranes, estas ecuaciones resultan como:

$$\frac{\sigma_x}{p_0} = -\frac{2Z}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{(1-S^2)^{1/2} (X-S)^2 dS}{[(X-S)^2 + Z^2]^2}$$

$$\frac{\sigma_z}{p_0} = -\frac{2Z^3}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{(1-S^2)^{1/2} dS}{[(X-S)^2 + Z^2]^2} \quad (\text{A2.7})$$

$$\frac{\tau_{xz}}{p_0} = -\frac{2Z^2}{\pi} \int_{-a}^a \frac{(1-S^2)^{1/2} (X-S) ds}{[(X-S)^2 + Z^2]^2}$$

y la ecuación para el cálculo del punto de falla es:

$$\frac{\tau}{p_0} = \frac{|\sigma_1 - \sigma_2|}{2} \quad (\text{A2.8})$$

La distribución del esfuerzo cortante adimensional  $\tau/p_0$ , por debajo de la superficie del diente, se muestra en la Fig. A2.2 y sus valores en la Tabla A2.1.

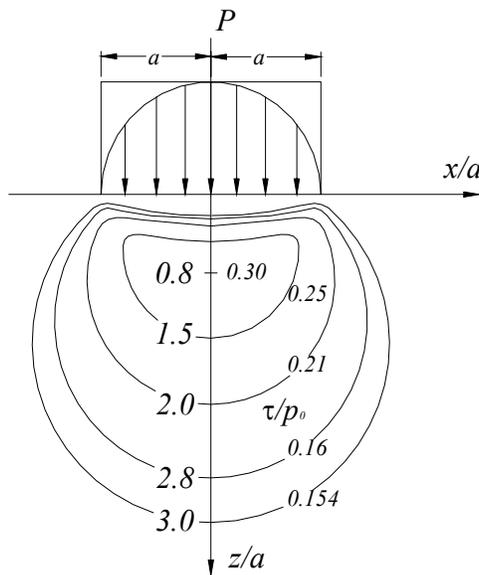


Fig. A2.2 Distribución del esfuerzo cortante  $\tau/p_0$

Tabla A2.1 Valores del esfuerzo cortante máximo  $\tau/p_0$  para  $x/a = 0$  y  $x/a = 1$  y  $0 \leq z/a \leq 1.5$ .

z/a	x/a=0	x/a=1
	$\tau_{\max}/p_0$	$\tau_{\max}/p_0$
0	0	0
0.1	0.09	0.162
0.2	0.161	0.2
0.3	0.214	0.22
0.4	0.251	0.231
0.5	0.276	0.237
0.6	0.291	0.239
0.7	0.299	0.239
0.8	0.3	0.238
0.9	0.298	0.235
1	0.293	0.231
1.1	0.286	0.227
1.2	0.278	0.223
1.3	0.27	0.218
1.4	0.261	0.213
1.5	0.252	0.208

El valor máximo del esfuerzo cortante adimensional producido por la transmisión de la carga  $P$  en la superficie del diente, de la Tabla 1, es  $\tau/p_0 = 0.30$  y la presión máxima para alcanzar este nivel de esfuerzo, usando el criterio de Tresca, es:

$$p_0 = \frac{\tau}{0.30} = \frac{\sigma_{\max}}{2 * 0.30} = 1.66\sigma_{\max} \quad (\text{A2.9})$$

Donde  $\sigma_{\max}$  es el esfuerzo máximo a la tensión, producido por la carga en el punto de contacto, a una profundidad  $z/a = 0.8$ . Sustituyendo  $p_0$  de la ecuación (A2.5) en la (A2.9), se obtiene el valor del esfuerzo máximo a la tensión producido por la carga  $P$ , en función del ancho del área de contacto  $a$ , éste es:

$$\sigma_{\max} = \frac{2P}{1.66\pi a} = \frac{P}{2.61a} \quad (\text{A2.10})$$

En esta ecuación puede verse que el esfuerzo máximo se incrementa a medida que  $a$  disminuye, para cualquier valor de la carga  $P$ , pero el valor de  $a$  esta fijado por la ecuación (A2.4), que al sustituirse en (A2.10) se obtiene

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{2.61\sqrt{\frac{4Pr}{\pi E^*}}} = \sqrt{\frac{\pi E^* P}{2.61^2 4r}} \quad (\text{A2.11})$$

Para calcular el radio equivalente  $r$ , mediante la ecuación (A2.4), se pueden usar las ecuaciones para el radio de curvatura de la AGMA [18]

$$\rho_1 = \sqrt{\left(r_1 + \frac{1}{p_d}\right)^2 - (r_1 \cos \phi)^2} - \frac{\pi}{p_d} \cos \phi \quad (\text{A2.12})$$

$$\rho_2 = C \sin \phi + \rho_1 \quad (\text{A2.13})$$

donde  $r_1$  es el radio de paso del piñón,  $r_2$  el del engrane,  $C$  es la distancia entre centros y  $\phi$  el ángulo de presión, para obtener:

$$\frac{1}{r} = \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \quad (\text{A2.14})$$

Entonces, usando la ecuación (A2.14) y la ecuación del esfuerzo (A2.11) se puede escribir

$$\sigma_{\max} = \sqrt{\frac{\pi E * P}{4 * 2.61^2} \left( \frac{1}{\rho_p} + \frac{1}{\rho_g} \right)} \quad (\text{A2.15})$$

Que es la ecuación del esfuerzo máximo a la compresión que produce la carga  $P$  a una profundidad  $z = 0.8a$ .

Este esfuerzo debe ser siempre menor al esfuerzo de cedencia,  $\sigma_y$ , del material, del que está construido el engrane.

$$\sigma_{\max} < \sigma_y \quad (\text{A2.16})$$

## A2.4 CARGA $P$ MODIFICADA

La carga que transmiten los dientes de los engranes debe ser modificada por los distintos factores que toman en cuenta las condiciones de operación a las que está sometido el diente del engrane.

La AGMA ha establecido los siguientes:

- C<sub>m</sub>: Factor de distribución de la carga. Este factor toma en cuenta el desalineamiento que pueda tener el diente, al ser maquinado en el ancho del engrane,  $1.6 < C_m < 2$ .
- C<sub>a</sub>: Factor de aplicación de la carga. Cuando la aplicación de la carga no es uniforme y hay golpeteos, dependiendo del tipo de máquina que mueva el engrane,  $1 < C_a < 2.25$ .
- C<sub>v</sub>: Factor dinámico. Toma en cuenta las vibraciones que se producen por los desajustes en los dientes de los engranes,  $0.4 < C_v < 1$ .
- C<sub>f</sub>: Factor de rugosidad del diente. Si los dientes están maquinados con los métodos tradicionales  $C_f = 1$ , de lo contrario deberá ser mayor a la unidad.

Teniendo estos factores en cuenta, y que la carga  $P$  es perpendicular a la superficie del diente en el punto de contacto se puede establecer que

$$P = \frac{W}{F} \frac{CaCm}{Cv} Cf \quad (A2.17)$$

Donde:

$$W = \frac{W_t}{\cos \phi} \quad (A2.18)$$

y F es el ancho de la cara del diente, entonces

$$F = \frac{12}{p_d} \quad (A2.19)$$

Usando estas ecuaciones y las conocidas para el cálculo de engranes, se puede desarrollar el siguiente ejemplo.

## A2.5 EJEMPLO

Determinar el esfuerzo de superficie en la cara de los engranes de un tren formado por tres engranes de  $p_d=6$  y  $25^\circ$  de ángulo de presión, el piñón tiene  $N_p = 14$  dientes, el engrane intermedio  $N_i = 17$  dientes y el engrane conducido  $N_g = 49$  dientes, los tres engranes están contruidos en acero.

La carga tangencial en el diente  $W_t = 432 \text{ lb}$ . El ejemplo es el 11.6 de la referencia [18], para poder comparar resultados.

De la ecuación (A2.18)

$$W = \frac{432}{\cos 25} = 476 \text{ lb} \quad (A2.20)$$

del ejemplo 11.6, referencia [2];  $C_v=0.66$ ;  $C_m=1.6$ ;  $C_a=1$ ; y  $C_f=1$ .

Con estos factores y con  $F=2$  de la ecuación (A2.19) se obtiene el valor de la carga en el punto de contacto

$$P = \frac{476}{2} * \frac{1*1.6}{0.66} * 1 = 577 \quad (A2.21)$$

Conociendo  $P$ , con los datos del problema y con las ecuaciones de la (A2.12), a la (A2.19), además de las ecuaciones conocidas para el cálculo de engranes, se construye la Tabla A2.2.

Tabla A2.2 Valores del ancho del área de contacto y del esfuerzo de superficie del tren de engranes, sistema inglés

Np	Ng	$\rho_d$	$r_p$	$r_g$	$\phi$	$\phi$ rad	$\cos \phi$	$\rho_b$	C	$\rho_g$	Rp	Rg	P	E	E*	a	$\sigma_{max}$
14	49	6	1.16667	4.083	25	0.43633	0.90631	0.338	5.250	1.881	0.286315	0.286315	577	3E+07	16483516	0.0036	61886.38
14	17	6	1.16667	1.417	25	0.43633	0.90631	0.338	2.583	0.754	0.233252	0.233252	577	3E+07	16483516	0.0032	68565.37
17	49	6	1.41667	4.083	25	0.43633	0.90631	0.452	5.500	1.872	0.364096	0.364096	577	3E+07	16483516	0.0040	54879.41

Los valores del esfuerzo en la superficie de los dientes de los engranes, se muestran en la última columna.

En la primera fila se calcula el valor del esfuerzo de superficie sin el engrane intermedio, el esfuerzo es

$$\sigma_{max} = 61,886 \text{ psi.}$$

En la segunda, el esfuerzo entre el piñón y el engrane intermedio es

$$\sigma_{max} = 68,565 \text{ psi.}$$

En la tercera, entre el engrane intermedio y el engrane conducido es

$$\sigma_{max} = 54,879 \text{ psi.}$$

Aunque la fuerza que se está transmitiendo entre los engranes es la misma fuerza  $P$ , el esfuerzo resulta ser sensiblemente distinto debido a que, aunque los dientes de los engranes tienen el mismo paso, el perfil de la involuta en cada uno de ellos no es exactamente el mismo, pues depende del diámetro de paso, y cada engrane tiene un  $d_p$  distinto.

Esta situación hace que el ancho  $a$  del área de contacto varíe, ecuación (A2.10) como se muestra en la penúltima columna de la Tabla A2.2, lo que varía el valor del esfuerzo. Sin embargo, el ancho del área de contacto  $a$  entre cada par de engranes es el mismo.

Los resultados del problema de la referencia [18], con las ecuaciones de la AGMA son:

En el piñón  $s_c = 113,315 \text{ psi.}$   
 En el engrane intermedio  $s_c = 102,831 \text{ psi.}$   
 En el engrane conducido  $s_c = 53,422 \text{ psi.}$

Las variaciones en los esfuerzos son del orden del 60%. El único valor del esfuerzo que coincide es en el engrane conducido.

## A2.6 DIFERENCIAS EN EL CÁLCULO DE ESFUERZOS DE SUPERFICIE

La ecuación del esfuerzo de la AGMA está basada en la ecuación de Buckingham, [22]:

$$s_c = \frac{2W}{\pi F a} \tag{A2.22}$$

Donde  $s_c$  representa el esfuerzo máximo de contacto,  $W$ ,  $F$  y  $a$  los mismos parámetros descritos anteriormente.

Transformando la ecuación obtenida mediante la Mecánica del Contacto, ecuación (A2.10)

$$\sigma_{\max} = \frac{2P}{1.66\pi a} = \frac{P}{2.61a}$$

para compararla con la (A2.22), se hace

$$P = \frac{W}{F}$$

que es la carga por unidad de longitud del diente antes de modificarla con los factores  $C_a$ ,  $C_v$ ,  $C_m$  y  $C_f$ .

Entonces, la ecuación (A2.10) se puede describir

$$\sigma_{\max} = \frac{2W}{1.66\pi F a} \quad (\text{A2.23})$$

La diferencia entre las ecuaciones (A2.22) y (A2.23) es el número 1.66, de la ecuación de la mecánica del contacto, que en la de la AGMA es la unidad.

El factor 1.66 se obtiene del valor máximo de  $\tau/p_0$  en la distribución del esfuerzo cortante constante, de la Tabla 1 y de la Fig. 2, ecuación (A2.9).

$$p_0 = \frac{\tau}{0.30} = \frac{\sigma_{\max}}{2 * 0.30} = 1.66\sigma_{\max} \quad (\text{A2.9})$$

Si la ecuación de la AGMA usa el valor unitario, se puede calcular el valor de  $\tau/p_0$  que le corresponde, usando el criterio de Tresca. Este valor es 0.5 ya que

$$p_0 = \frac{\tau}{0.50} = \frac{s_c}{2 * 0.50} = 1 * s_c$$

o bien

$$\frac{\tau}{p_0} = 0.5$$

Si buscamos este valor del esfuerzo cortante constante en la Tabla A2.1 o en la Fig. A2.2, puede verse que no existe, ya que la distribución de esfuerzos no alcanza este valor.

## A2.7 CONCLUSIONES

La razón por la cual los esfuerzos obtenidos en el ejemplo no son iguales a los obtenidos con las ecuaciones de la AGMA es que ésta última usa el esfuerzo normal para calcular el punto donde inicia la cedencia y no toma en cuenta el criterio de falla de Tresca o von Mises que usan el esfuerzo cortante.

Los esfuerzos calculados con las ecuaciones de la AGMA son distintos en cada par de dientes que entran en contacto.

Los esfuerzos deben ser iguales en cada par de dientes, segunda ley de Newton.

Las ecuaciones de la AGMA no muestran que los esfuerzos calculados, lo sean en el punto de mayor concentración de esfuerzo en el material del diente.

La ecuación (A2.16), usando la mecánica del contacto y el criterio de Tresca, indica cuál es el esfuerzo máximo.

Los esfuerzos calculados con la mecánica del contacto son iguales en cada par de engranes, se conoce el ancho del área de contacto y se calculan los esfuerzos en el punto crítico del material.

Los resultados del problema, calculados mediante la mecánica del contacto, están de acuerdo con la tercera ley de Newton, no así los de la AGMA.

# APÉNDICE 3

## FÓRMULA PARA LA OBTENCIÓN DE ESFUERZOS EN MECANISMOS DE LEVA Y SEGUIDOR

### A3.1 INTRODUCCIÓN

Una vez desarrollada la síntesis cinemática del perfil de la leva [18], se requiere conocer cuáles propiedades físicas debe tener el material con el que se va a fabricar para que resista el desgaste al que va a ser sometida durante su operación. Es decir, el esfuerzo máximo que debe resistir su superficie.

En este apéndice se propone una fórmula, que nos conduce directamente a conocer el valor del esfuerzo máximo y su localización por debajo de la superficie de contacto con el seguidor, para que el material de fabricación tenga ese valor del esfuerzo a la profundidad calculada previamente de efectuado el tratamiento térmico.

### A3.2 CONTACTO ENTRE CUERPOS CILÍNDRICOS

El contacto entre la leva y el seguidor puede considerarse como el contacto entre dos superficies de sección transversal cilíndrica, para aplicar la teoría de la elasticidad y conocer el gradiente de desplazamiento que sufren a partir de la carga normal  $P$  y transversal  $Q$ , por unidad de longitud, que se están transmitiendo, y conocer la distribución de las presiones que se producen al momento en que se deforman las superficies en el punto de contacto y se genera un área de ancho  $2a$ , Fig. A3.1.

Conocidas las presiones y mediante la ecuación de esfuerzos propuesta por Flamant [4], generalizada para una distribución de presión, se puede calcular la distribución del esfuerzo cortante máximo, responsable de la deformación plástica, en la superficie por debajo del área de contacto para conocer su valor y profundidad.

Con el valor del esfuerzo cortante y su localización se puede establecer el proceso para darle al material el tratamiento térmico que requiere para rebasar el valor del esfuerzo cortante crítico y la profundidad a la que debe tener esa resistencia.

### A3.3 LEVA CON SEGUIDOR DE RODILLO

En la Fig. A3.1, el desplazamiento del seguidor 2, sobre la superficie de la leva 1, puede expresarse, como en el Apéndice 1, mediante la ecuación (A1.2):

$$u_{z1} + u_{z2} = \delta - z_1 - z_2$$

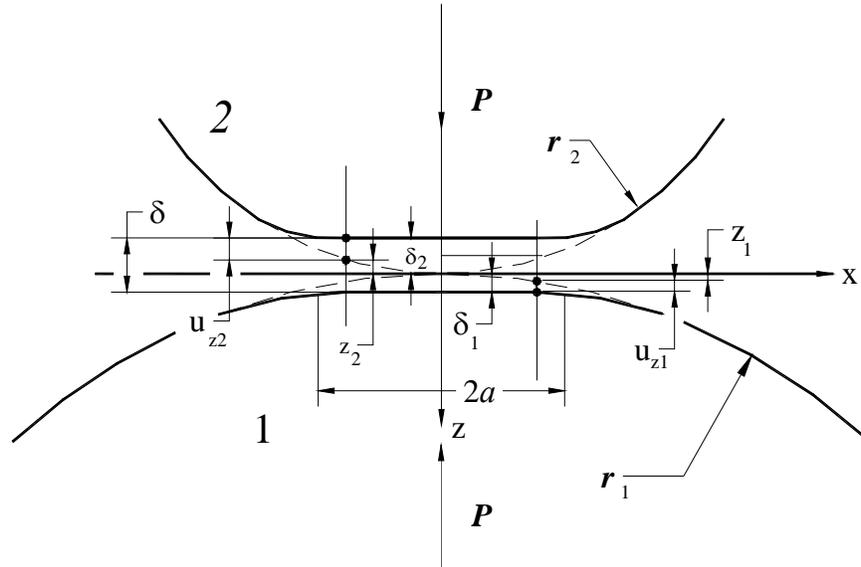


Fig. A3.1 Contacto entre leva y seguidor

Donde  $u_{z1}$  y  $u_{z2}$  son los desplazamientos elásticos de la superficie de la *leva 1* y del *seguidor 2* respectivamente,  $z_1$  y  $z_2$  representan la forma del perfil de la leva y del seguidor y  $\delta$  el desplazamiento total del cuerpo 2 sobre el cuerpo 1.

Las ecuaciones de la superficie que describen el perfil de la leva y del seguidor, respectivamente, pueden aproximarse mediante los polinomios de segundo grado (A1.9)

$$z_1 = \frac{x_1^2}{2r_1}$$

y

$$z_2 = -\frac{x_2^2}{2r_2}$$

Sustituyendo las ecuaciones (A1.9) en la ecuación (A1.2), se obtiene (A1.10)

$$u_{z1} - u_{z2} = \delta + \left( \frac{x_1^2}{2r_1} + \frac{x_2^2}{2r_2} \right)$$

y siguiendo el desarrollo de las ecuaciones del Apéndice 1, se llega a la ecuación de la presión (A1.27)

$$p(X) = \frac{2P}{\pi a} (1 - X^2)^{1/2}$$

y a la del ancho del área de contacto, ecuación (A2.4)

$$a = \sqrt{\frac{4Pr}{\pi E^*}}$$

Además, como en  $X=0$  la distribución de presión tiene su valor máximo,  $p(0)=p_0$ , se obtiene la ecuación (A2.5)

$$p_0 = \frac{2P}{\pi a}$$

que al sustituir en la ecuación (A1.27), ésta se convierte en la ecuación de la presión (A2.6):

$$p(X) = p_0(1-X)^{\frac{1}{2}}$$

Los esfuerzos que se producen en un punto del interior de la superficie de la leva debido a la presión normal, se calculan mediante las ecuaciones del esfuerzo de Flamant [4], ecuaciones (2.9), y haciendo además las sustituciones y cambios de variable descritos en el Apéndice 2 se llega a las ecuaciones adimensionales para los esfuerzos actuantes en la superficie de contacto entre leva y seguidor, éstas son las ecuaciones (A2.7):

$$\frac{\sigma_x}{p_0} = -\frac{2Z}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{(1-S^2)^{1/2}(X-S)^2 dS}{[(X-S)^2 + Z^2]^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\sigma_z}{p_0} = -\frac{2Z^3}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{(1-S^2)^{1/2} dS}{[(X-S)^2 + Z^2]^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\tau_{xz}}{p_0} = -\frac{2Z^2}{\pi} \int_{-a}^a \frac{(1-S^2)^{1/2}(X-S) ds}{[(X-S)^2 + Z^2]^{\frac{3}{2}}}$$

y con ecuación (A2.8) se calculan los puntos donde inicia la falla

$$\frac{\tau}{p_0} = \frac{|\sigma_1 - \sigma_2|}{2}$$

La distribución del esfuerzo adimensional  $\tau/p_0$ , por debajo de la superficie de la leva, se muestra en la Fig. A3.2 y sus valores en la Tabla. A3.1.

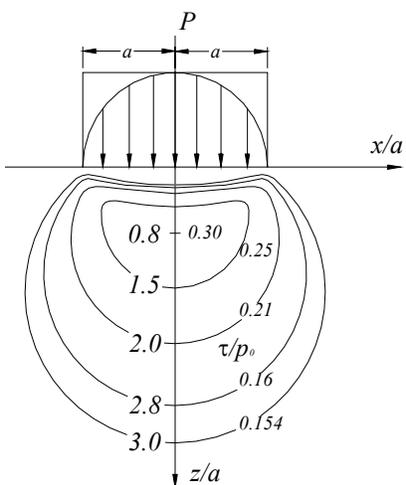


Fig. A3.2 Distribución del esfuerzo cortante  $\tau/p_0$

Tabla A3.1 Valores del esfuerzo cortante máximo  $\tau/p_0$  para  $x/a = 0$  y  $x/a = 1$  y  $0 \leq z/a \leq 1.5$ .

z/a	x/a=0	x/a=1
	$\tau_{\max}/p_0$	$\tau_{\max}/p_0$
0	0	0
0.1	0.09	0.162
0.2	0.161	0.2
0.3	0.214	0.22
0.4	0.251	0.231
0.5	0.276	0.237
0.6	0.291	0.239
0.7	0.299	0.239
0.8	0.3	0.238
0.9	0.298	0.235
1	0.293	0.231
1.1	0.286	0.227
1.2	0.278	0.223
1.3	0.27	0.218
1.4	0.261	0.213
1.5	0.252	0.208

El valor máximo del esfuerzo cortante adimensional producido por la transmisión de la carga  $P$  en la superficie de la leva de la Tabla A3.1, es  $\tau/p_0 = 0.30$  y la presión máxima para alcanzar este nivel de esfuerzo, usando el criterio de Tresca, es la ecuación (A2.9):

$$p_0 = \frac{\tau}{0.30} = \frac{\sigma_{\max}}{2 * 0.30} = 1.66\sigma_{\max}$$

Donde  $\sigma_{\max}$  es el esfuerzo máximo a la tensión, producido por la carga en el punto de contacto, a una profundidad  $z/a = 0.8$ . Sustituyendo  $p_0$  de la ecuación (A2.5) en la ecuación (A2.9), se obtiene el valor del esfuerzo máximo a la tensión producido por la carga  $P$ , en función del ancho del área de contacto  $a$ , el cual está dado por la ecuación (A2.10):

$$\sigma_{\max} = \frac{2P}{1.66\pi a} = \frac{P}{2.61a}$$

En esta ecuación puede verse que el esfuerzo máximo se incrementa a medida que  $a$  disminuye, para cualquier valor de la carga  $P$ , pero el valor de  $a$  está fijado por la ecuación (A2.4), que al sustituirse en la ecuación (A2.10) se obtiene la ecuación (A2.11)

$$\sigma_{\max} = \sqrt{\frac{\pi E * P}{2.61^2 4R}}$$

Que es la ecuación del esfuerzo máximo a la tensión que produce la carga  $P$  a una profundidad  $z = 0.8a$ . Este esfuerzo debe ser siempre menor al esfuerzo de cedencia,  $\sigma_Y$ , del material del que está construida la leva y el seguidor.

$$\sigma_{\max} < \sigma_Y$$

### A3.4 LEVAS CON SEGUIDOR DE CARA PLANA

En el caso de existir deslizamiento entre la leva y el seguidor, Fig. A3.3, al sistema de esfuerzos hallado para el seguidor de rodillo es necesario sumarle el efecto de la carga de deslizamiento  $q(x) = \mu p(x)$ .

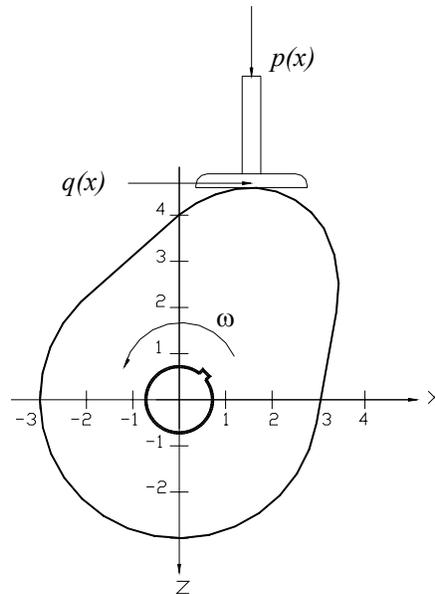


Fig. A3.3 Leva con seguidor deslizante

Esta carga actúa a  $90^\circ$  de  $p(x)$  y pueden usarse las ecuaciones de esfuerzo de  $p(x)$  giradas  $90^\circ$  o bien, de la ecuación de esfuerzo de Flamant, (2.9), con  $\theta = \theta + \pi/2$ , reemplazando en ellas a  $x$  por  $(x-s)$  e integrando sobre la región de carga,  $-a \leq s \leq a$ , las ecuaciones resultantes son:

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= -\frac{2}{\pi} \int_{-b}^a \frac{q(s)(x-s)^3 ds}{[(x-s)^2 + z^2]^2} \\
\sigma_z &= -\frac{2z^2}{\pi} \int_{-b}^a \frac{q(s)(x-s) ds}{[(x-s)^2 + z^2]^2} \\
\tau_{xz} &= -\frac{2z}{\pi} \int_{-b}^a \frac{q(s)(x-s)^2 ds}{[(x-s)^2 + z^2]^2}
\end{aligned} \tag{A3.1}$$

sustituyendo la función de presión (A2.6), teniendo en cuenta que  $q(x)=\mu p(x)$ , cambiando  $x$  por  $s$ , haciendo  $Z=z/a$ ,  $X=x/a$ ,  $S=s/a$ , y dividiendo los esfuerzos entre  $p_0$ , se obtienen las ecuaciones adimensionales para los esfuerzos transversales entre leva y seguidor, éstas son:

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma_x}{p_0} &= -\frac{2\mu}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{(1-S^2)^{1/2} (X-S)^3 dS}{[(X-S)^2 + Z^2]^2} \\
\frac{\sigma_z}{p_0} &= -\frac{2z^2\mu}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{(1-S^2)^{1/2} (X-S) dS}{[(X-S)^2 + Z^2]^2} \\
\frac{\tau_{xz}}{p_0} &= -\frac{2Z\mu}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{(1-S^2)^{1/2} (X-S)^2 ds}{[(X-S)^2 + Z^2]^2} \\
\frac{\tau}{p_0} &= \frac{|\sigma_1 - \sigma_2|}{2}
\end{aligned} \tag{A3.2}$$

Superponiendo el efecto de las dos fuerzas,  $p(x)$  y  $q(x)$  ecuaciones (A2.7) y (A3.2) se llega a las ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma_x}{p_0} &= -\frac{2Z}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{(1-S^2)^{1/2} (X-S)^2 dS}{[(X-S)^2 + Z^2]^2} - \frac{2\mu}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{(1-S^2)^{1/2} (X-S)^3 dS}{[(X-S)^2 + Z^2]^2} \\
\frac{\sigma_z}{p_0} &= -\frac{2Z^3}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{(1-S^2)^{1/2} dS}{[(X-S)^2 + Z^2]^2} - \frac{2Z^2\mu}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{(1-S^2)^{1/2} (X-S) dS}{[(X-S)^2 + Z^2]^2} \\
\frac{\tau_{xz}}{p_0} &= -\frac{2Z^2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{(1-S^2)^{1/2} (X-S) ds}{[(X-S)^2 + Z^2]^2} - \frac{2Z\mu}{\pi} \int_{-a}^a \frac{(1-S^2)^{1/2} (X-S)^2 ds}{[(X-S)^2 + Z^2]^2} \\
\frac{\tau}{p_0} &= \frac{|\sigma_1 - \sigma_2|}{2}
\end{aligned} \tag{A3.3}$$

Como en el caso anterior, la distribución del esfuerzo adimensional  $\tau/p_0$ , por debajo de la superficie de la leva, se muestra en la Fig. A3.4 y sus valores en la Tabla A3.2.

El valor máximo del esfuerzo cortante adimensional producido por la transmisión de las cargas  $p(x)$  y  $q(x)$  en la superficie de la leva, con  $\mu=0.2$  de la Tabla A3.1, es  $\tau/p_0 = 0.302$  y la presión máxima para alcanzar este nivel de esfuerzo, usando el criterio de Tresca, es:

$$p_0 = \frac{\tau}{0.302} = \frac{\sigma_{\max}}{2 \cdot 0.302} = 1.65 \sigma_{\max} \quad (\text{A3.4})$$

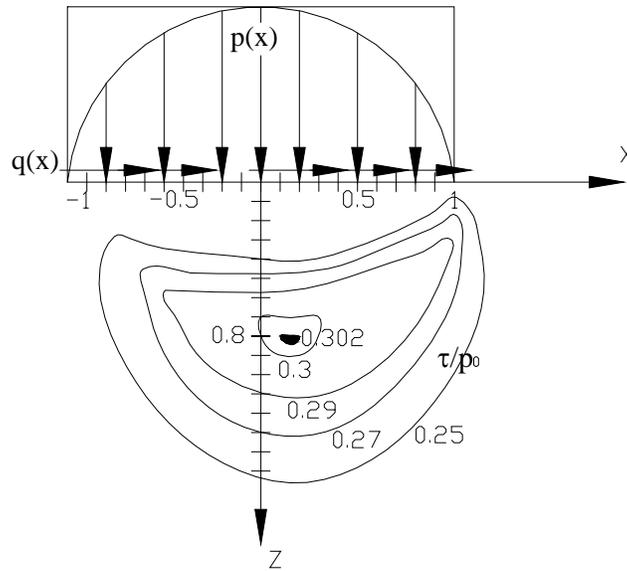


Fig. A3.4 Distribución del esfuerzo cortante en una leva con seguidor deslizando

Tabla A3.2 Valores del esfuerzo cortante máximo  $\tau/p_0$  para  $x/a = 0$  a  $x/a = 0.31$  y  $0 \leq z/a \leq 1.5$  para  $\mu = 0.2$ .

z/a	x/a=0	x/a=0.1	x/a=0.2	x/a=0.3
	$\tau_{\max}/p_0$	$\tau_{\max}/p_0$	$\tau_{\max}/p_0$	$\tau_{\max}/p_0$
0	0	0.199	0.04	0.06
0.1	0.121	0.129	0.15	0.163
0.2	0.174	0.171	0.175	0.184
0.3	0.22	0.218	0.218	0.222
0.4	0.255	0.254	0.253	0.255
0.5	0.278	0.278	0.178	0.279
0.6	0.293	0.293	0.293	0.293
0.7	0.299	0.3	0.3	0.299
0.8	0.301	0.302	0.302	0.301
0.9	0.298	0.3	0.3	0.298
1	0.293	0.295	0.295	0.293
1.1	0.286	0.288	0.288	0.287
1.2	0.278	0.28	0.28	0.279
1.3	0.27	0.271	0.272	0.27
1.4	0.261	0.262	0.263	0.262
1.5	0.252	0.254	0.254	0.253

Donde  $\sigma_{max}$  es el esfuerzo máximo a la tensión, producido por las cargas a una distancia  $x/a=0.2$  del origen y una profundidad  $z/a = 0.8$ . Sustituyendo  $p_0$  de la ecuación (A2.4) en la (A3.4), se obtiene el valor del esfuerzo máximo a la tensión producido por la carga  $P$ , en función del ancho del área de contacto  $a$ , éste es:

$$\sigma_{max} = \frac{2P}{1.65\pi a} = \frac{P}{2.59a} \quad (A3.5)$$

y usando el valor de  $a$  en función de  $P$  fijado por la ecuación (A2.4), se llega a

$$\sigma_{max} = \sqrt{\frac{\pi E^* P}{2.59^2 4R}} \quad (A3.6)$$

Esta ecuación, como la (A2.11), calcula el esfuerzo máximo a la tensión que produce la carga  $P$  a una profundidad  $z = 0.8a$ , este esfuerzo debe ser siempre menor al esfuerzo de cedencia,  $\sigma_Y$ , del material del que está construida la leva y el seguidor.

### A3.5 CONCLUSIONES

La diferencia principal entre los dos mecanismos es el deslizamiento que existe entre la cara del seguidor plano y su leva, ya que el seguidor de rodillo rueda sin deslizar.

La carga de deslizamiento solo hace que el sistema de esfuerzos tenga un corrimiento con respecto al punto de aplicación de la carga normal,  $x=0.2a$ , sin embargo la localización del punto donde se inicia la cedencia,  $z=0.8a$ , permanece inalterable.

El resultado anterior permite que la ecuación para el cálculo de los esfuerzos sea la misma (A2.11 y A3.6) ya que la diferencia entre los factores  $1/1.66= 0.602$  y  $1/1.65=0.606$  es menor al 1%, pues el coeficiente de fricción debe permanecer bajo.

En los casos en que la carga de tracción se incremente considerablemente será necesario hacer un análisis de esfuerzos para ese caso en particular, pues el sistema de esfuerzos difiere considerablemente de los casos presentados en este estudio, ya que el punto donde se inicia la cedencia cambia de posición acercándose a la superficie de contacto, produciendo fallas prematuras.

# 7.- REFERENCIAS

- 1) Boussinesq J. (1885), *Aplicacion des potentials à l'etude de l'equilibre et du mouvement des solides élastiques*. Gauthier Villars, (45, 108).
- 2) Dieter G.E. (1988), *Mechanical Metallurgy*, Mc Graw Hill, London.
- 3) Fisher - Cripps A. (1998), *Introduction to Contact Mechanics*, University of Technology, Sydney Australia.
- 4) Flamant (1892), *Compt. Rendus*, 114, 1465, París.
- 5) Frotch M. M. (1941), *Photo elasticity*, J. Willey.
- 6) Fuchs S. (1913), *Hauptspannungstrajektorien bei der Betührung einer Kugel mit einer Platte*, *Phisik Zeitschr*, 14,p1282-1285
- 7) Galin L. A. (1953), *Contact Problems in the Theory of Elasticity*. Moscow. (English translation by H. Moss, North Carolina State College, 1961)
- 8) Gladwell G. M. L. (1980), *Contact Problems in the Classical Theory of Elasticity*. Alphen an den Rijn: Sijthoff and Noordhoff.
- 9) Hertz H., "On the Contact of Elastic Solids" (1881), *J. of Math.(Crelle)*, vol., 92, pág. 156-176. Translated and reprinted in English in Hertz's miscellaneous papers, McMillan & Co., London 1896, Chap. 6.
- 10) Hill R. (1950) *The Mathematical Theory of Plasticity*, Oxford University Press. N. Y.
- 11) Huber M. T. (1904), *Zur Theorie der Berührung fester elastische Körper*, *Ann. Der Phys.*,14, 153, [62].
- 12) Johnson K. L. (1985), *Contact Mechanics*. Cambridge University Press. N. Y.
- 13) Maron M. J. y López R. J. (1995), *Análisis Numérico: Un enfoque práctico*, CECSA.
- 14) Mises, R. von (1913), *Göttingen Natchrichten*, Math-phys. Klasse.
- 15) Morton, W. B. & Close, L. J. (1922), Notes on Hertz' Theory of Contact Problems. *Philosophical Magazine*, 43, 320,[62].
- 16) Muskhelishvili, N. I. (1949), *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*. English translation by J. Radok, Nordhoff, 1953.
- 17) Nadai, A. (1963), *Theory of Flow of Solids*, vol. II, McGraw-Hill Book Co., N. Y.
- 18) Norton R. (1996), *Machine Design*. Prentice Hall.
- 19) Shaw M & DeSalvo D., "A New Approach to Plasticity and its Application to Blunt two Dimension Indenters", *J. Eng. Ind. Trans. ASME*, 92, 1970,p469-479.
- 20) Timoshenko S. and Goodier J. (1951), *Theory of Elasticity*. McGraw Hill..
- 21) Zienkiewics O. C.(1994), *El Método de los Elementos Finitos*, cuarta edición, McGraw Hill, Madrid.
- 22) Townsend D. P. (1992), *Dudley's Gear Handbook*, Second Edition, McGraw Hill.
- 23) ASTM. A 886/A 886M – 94. Standard Specification for Steel Standard, Indented, Seven Wire Stress-Relieved for Prestressed Concrete.
- 24) Mikhlin S. G. (1957), *Singular Integral Equations*, Pergamon, pp 302-312.
- 25) Churchill R.V. (1974), *Complex Variables & Applications*, Mc Graw Hill.
- 26) Hildebrand F. B. (1976), *Advanced Calculus for Applications*, Second Edition, Prentice Hall.
- 27) Protter M. H. (1964), *Modern Mathematical Analysis*, Addison Wesley.
- 28) Rekach V. G. (1979), *Manual of the Theory of Elasticity*, MIR Publishers, Moscow.