
Capítulo 4: Caracterización de la planta

En el presente capítulo se describe la obtención del modelo matemático de la planta del experimento de Franck-Hertz, así como algunos conceptos preliminares relacionados con sistemas físicos de primer orden.

4.1 SISTEMAS TÉRMICOS

Los sistemas térmicos son aquellos que involucran la transferencia de calor de una sustancia a otra. Estos sistemas se analizan en términos de resistencia y capacitancia, aunque la capacitancia térmica y la resistencia térmica tal vez no se representen con precisión como elementos de parámetros concentrados, dado que, por lo general, están distribuidas en todas las sustancias.

Para lograr análisis precisos, deben usarse modelos de parámetros distribuidos. Sin embargo, aquí supondremos que un sistema térmico se representa mediante un modelo de parámetros concentrados, que las sustancias que se caracterizan mediante una resistencia al flujo de calor tienen una capacitancia térmica insignificante y que las sustancias que se caracterizan por una capacitancia térmica tienen una resistencia insignificante al flujo de calor.

El calor fluye de una sustancia a otra de tres formas diferentes: por conducción, por convección y por radiación, sin embargo, la mayor parte de los procesos térmicos en los sistemas de control de procesos no involucran transferencia de calor por radiación, se puede despreciar frente a los demás.

Para la transferencia de calor por conducción o convección,

$$q = K\Delta T \dots\dots\dots (4.1)$$

En donde:

$q \left[\frac{\text{kcal}}{\text{s}} \right]$ es el flujo de calor

1 cal = 4.184 J

$\Delta T [^{\circ}\text{C}]$ es la diferencia de temperatura

$K \left[\frac{\text{kcal}}{\text{s}\cdot^{\circ}\text{C}} \right]$ es un coeficiente

El coeficiente K se obtiene mediante

$$K = \frac{kA}{A_x} \dots\dots\dots(4.2)$$

para transferencia de calor por conducción, en donde:

$k \left[\frac{kcal}{m \cdot s \cdot ^\circ C} \right]$ es la conductividad térmica

$A [m^2]$ es el área normal para flujo de calor

$A_x [m]$ es el espesor del conductor

Mientras que para transferencia de calor por convección se define

$$K = HA \dots\dots\dots (4.3)$$

Donde:

$H \left[\frac{kcal}{m^2 \cdot s \cdot ^\circ C} \right]$ es el coeficiente de convección

$A [m^2]$ es el área normal para flujo de calor

Resistencia y capacitancia térmicas

La resistencia térmica R para la transferencia de calor entre dos sustancias se define del modo siguiente:

$$R = \frac{\Delta T}{\Delta q} \dots\dots\dots (4.4)$$

La resistencia térmica para una transferencia de calor por conducción o por convección se obtiene mediante:

$$R = \frac{d(\Delta T)}{dq} = \frac{1}{K} \dots\dots\dots(4.5)$$

Dado que los coeficientes de conductividad y convección térmica son casi constantes, la resistencia térmica para la conducción ó la convección es constante.

La capacitancia térmica C se define mediante

$$C = \frac{\Delta Q}{\Delta T} \dots\dots\dots(4.6)$$

Donde:

$\Delta Q [kcal]$ es el cambio en el calor almacenado

O bien

$$C = mc \dots\dots\dots(4.7)$$

Donde:

m [kg] es la masa de la sustancia considerada

c $\left[\frac{kcal}{kg \cdot ^\circ C} \right]$ es el calor específico de la sustancia

A menudo es necesario controlar la temperatura para procesos termodinámicos complejos. Bajo algunas consideraciones de simplificación, el flujo de calor a través de materiales puede ser modelado con analogías simples para sistemas eléctricos.

En la siguiente tabla se muestran dichas analogías entre las variables para el flujo de calor y un circuito eléctrico RC.

Símbolo térmico	Magnitud térmica	Símbolo eléctrico	Magnitud eléctrica
q	Flujo de calor	i	Corriente
T	Temperatura	v	Voltaje
R	Resistencia térmica	R	Resistencia eléctrica
C	Capacitancia térmica	C	Capacitancia eléctrica

Tabla 4.1 Analogía entre variables térmicas y eléctricas

En la figura 4.1 se muestran algunos ejemplos de flujo de calor a través de un material compuesto por vidrio de cierto fluido que cambia de una temperatura T_2 a otra temperatura T_1 al pasar a través del material.

Esto fenómeno podría representar la pérdida de calor del aire contenido en un recinto térmico a una temperatura alta al pasar a través de un vidrio en contacto con una masa de aire frío.

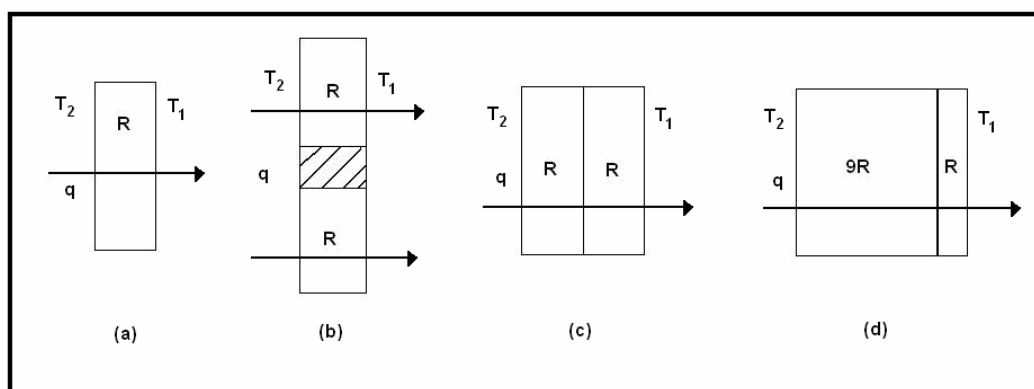


Figura 4.1 Ejemplos de flujo de calor a través de un material. (a) Flujo a través de una ventana con una hoja de vidrio. (b) Flujo a través de dos ventanas. (c) Flujo a través de una ventana de doble espesor. (d) Flujo a través de una ventana térmicamente aislada.

Para la figura 4.1(a), empleando la nomenclatura descrita en la tabla 4.1, se tiene que

$$q = \frac{T_2 - T_1}{R} = q_0 \dots\dots\dots (4.8)$$

Una situación análoga a la expresada por (4.8) se tiene en el flujo de corriente a través de un circuito eléctrico dada por

$$i = \frac{v_2 - v_1}{R} \dots\dots\dots (4.9)$$

Considere ahora un recinto térmico con dos ventanas similares (cada una con una resistencia térmica R), según se muestra en la figura 4.1 (b).

Ambas ventanas causan un flujo de calor en paralelo, de tal forma que la resistencia térmica equivalente es la combinación de las dos resistencias térmicas individuales empleando la misma regla mediante la cual se calcula la resistencia eléctrica de un arreglo en paralelo.

Es decir,

$$q = \frac{T_2 - T_1}{\frac{R}{2}} = 2q_0 \dots\dots\dots (4.10)$$

Por lo tanto, el flujo de calor es el doble con respecto a la expresada por la ecuación (4.8).

Supóngase que se tiene una ventana con doble espesor, como se muestra en la figura (4.1). La resistencia térmica es 2R, en analogía a la combinación de dos resistores en serie. El flujo de calor resultante es

$$q = \frac{T_2 - T_1}{2R} = \frac{q_0}{2} \dots\dots\dots (4.11)$$

Acoplado un material térmicamente aislante cuya resistencia térmica sea 9R al material cuya resistencia térmica es R, causa una situación análoga a la que se tiene al conectar dos resistores en serie de valor 9R y R, respectivamente, para obtener una resistencia total de 10R, entonces:

$$q = \frac{T_2 - T_1}{10R} = \frac{q_0}{10} \dots\dots\dots (4.12)$$

Obteniendo como resultado una pérdida menor de calor.

La temperatura de un fluido cambia de una forma similar al cambio en el voltaje a través de un capacitor eléctrico.

Para un sistema térmico

$$q = C \frac{dT}{dt} \dots\dots\dots (4.13)$$

Mientras que análogamente, para un sistema eléctrico se tiene

$$i = C \frac{dv}{dt} \dots\dots\dots (4.14)$$

Se observa que tanto en (4.13) como en (4.14), C representa ya sea la capacitancia térmica o eléctrica.

4.2 ESQUEMA BÁSICO DE UN SISTEMA TÉRMICO

El objetivo de un sistema de control de temperatura es mantener la temperatura dentro de la planta de temperatura a un valor correspondiente al que proporciona la señal de referencia.

La señal de referencia es un nivel de voltaje que representa la temperatura deseada para la planta T_o , según se muestra en la figura 4.2

La temperatura del sensor contenido dentro de la planta produce un voltaje proporcional a la temperatura T_o , dicho voltaje es amplificado por K_f y es acoplado al amplificador sumador junto con la señal de referencia E_s .

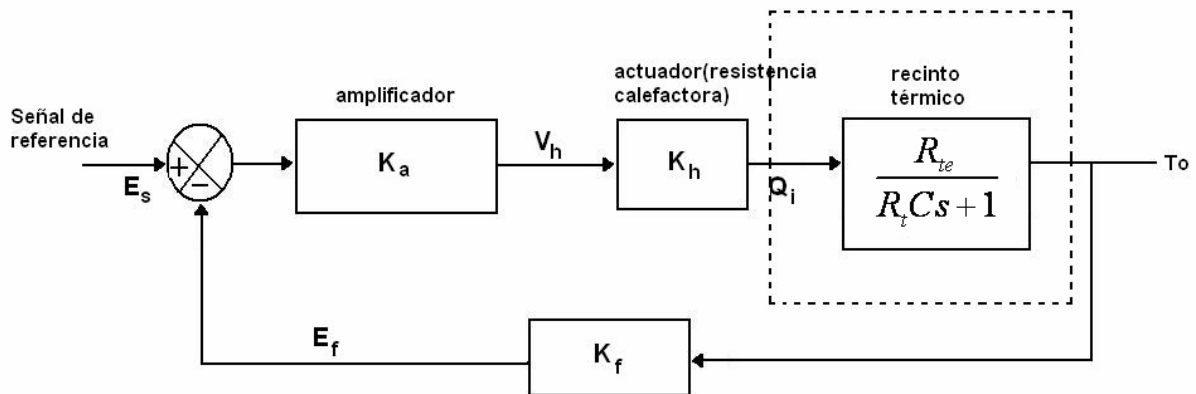


Figura 4.2 Diagrama de bloques de un sistema de control de temperatura

Como resultado del proceso mostrado en la figura 4.2, la temperatura dentro del recinto térmico o planta de temperatura corresponde al indicado por la señal de referencia.

El equilibrio térmico dentro de la planta de temperatura no permanece en equilibrio indefinidamente, debido a que las paredes del sistema no están hechas de un aislante perfecto, y por lo tanto, cierta cantidad de calor se pierde a través de las paredes.

La cantidad de flujo de calor q_0 a través de las paredes del sistema de temperatura depende de la diferencia de temperatura ($T_0 - T_a$) que existe entre las paredes, y de la resistencia térmica del material que conforma dichas paredes.

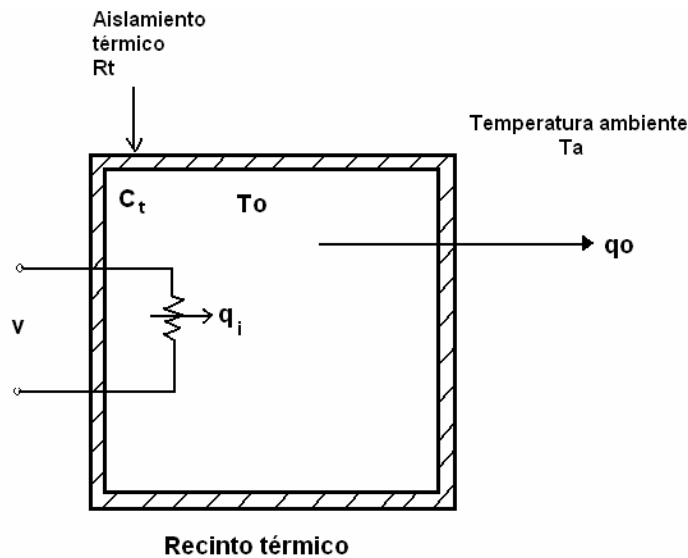


Figura 4.3 Esquema básico de un recinto térmico

Mediante el empleo de retroalimentación negativa, el sistema de control proporciona un control automático de la temperatura del recinto térmico (horno eléctrico).

La temperatura ambiente T_a , la cual es externa al horno, tiene el efecto de una carga en el sistema, es decir, variaciones en la temperatura ambiente T_a resultan en una carga fluctuante la cual tiende a modificar la temperatura del horno.

De igual manera, cualquier variación en la ganancia del amplificador de potencia K_a también tiene el efecto de modificar también la temperatura del horno; con la utilización de retroalimentación negativa, el sistema toma en cuenta estos dos efectos y mantiene la temperatura del horno en el punto de control (set point) o muy cercano al punto de control, difiriendo únicamente por el error en estado estable.

La ecuación diferencial que describe el comportamiento del sistema ilustrado en la figura 4.3 es

$$q_i - q_0 = Ct \frac{dT_0}{dt} \dots\dots\dots (4.15)$$

Donde:

$q_i(t) \left[\frac{kcal}{s} \right]$ es el flujo de calor suministrado al horno

$q_o = \frac{(T_o - T_a)}{R_t} \left[\frac{kcal}{s} \right]$ es el flujo de calor a través de las paredes del horno

$R_t \left[\frac{^\circ C \cdot s}{kcal} \right]$ es la resistencia térmica del material de las paredes del horno

$C_t \left[\frac{kcal}{^\circ C} \right]$ es la capacitancia térmica del medio contenido dentro del horno

Sustituyendo la expresión $q_o = \frac{(T_o - T_a)}{R_t}$ en (4.15), y tras reacomodar términos, se obtiene la siguiente ecuación diferencial para el horno:

$$\tau_t \frac{dT_o}{dt} + T_o(t) = R_t q_i(t) + T_a \dots \dots \dots (4.16)$$

donde $\tau_t = R_t C_t$

Para caracterizar el horno como un bloque lineal que forme parte del diagrama de bloques, se debe determinar la función de transferencia de la ecuación diferencial que describe el comportamiento del horno, es decir, se debe encontrar la relación entre la salida $T_o(s)$ y la entrada $Q_i(s)$.

Se define la resistencia térmica efectiva R_{te} o equivalente de las paredes del horno por la expresión

$$R_{te} = \frac{(R_t q_i + T_a)}{q_i} \dots \dots \dots (4.17)$$

El parámetro R_{te} incluye el efecto de la carga (la temperatura externa T_a puede ser considerada como una carga para el sistema).

Utilizando la expresión (4.17), la ecuación diferencial (4.16) puede ser expresada como

$$\tau_t \frac{dT_o}{dt} + T_o(t) = R_{te} q_i(t) \dots \dots \dots (4.18)$$

Tomando la transformada de Laplace para la ecuación (4.18) , se obtiene

$$\frac{T_o(s)}{Q_i(s)} = \frac{R_{te}}{\tau_i s + 1} \dots\dots\dots (4.19)$$

donde $\tau_i = R_i C_i$ es la constante de tiempo térmica del horno.

Se observa que la función de transferencia descrita por (4.19) representa un sistema de primer orden.

4.3 RESPUESTA DEL SISTEMA A ENTRADAS ESCALÓN

Análisis de la respuesta transitoria

Una vez obtenido un modelo matemático para un sistema de control, existen varios métodos para el análisis del desempeño del sistema.

En la práctica, la señal de entrada para un sistema de control no se conoce con anticipación, pero es de naturaleza aleatoria, y la entrada instantánea no puede expresarse en forma analítica.

Sólo en algunos casos especiales se conoce con anticipación la señal de entrada y se puede expresar en forma analítica o mediante curvas.

En el análisis y diseño de sistemas de control, se debe tener una base de comparación del desempeño de diversos sistemas de control. Esta base se configura especificando las señales de entrada de prueba particulares y comparando las respuestas de varios sistemas a estas señales de entrada.

Muchos criterios de diseño se basan en tales señales o en la respuesta del sistema a los cambios en las condiciones iniciales (sin señales de prueba). El uso de señales de prueba se justifica porque existe una correlación entre las características de respuesta de un sistema para una señal de entrada de prueba común y la capacidad del sistema de manejar las señales de entrada reales.

Ya que el tiempo es la variable independiente empleada en la mayoría de los sistemas de control, es usualmente de interés evaluar las respuestas del estado y la salida con respecto al tiempo, o simplemente, la respuesta en el tiempo. En el problema de análisis, una señal de referencia se aplica al sistema, y el desempeño del sistema se evalúa al estudiar la respuesta del sistema en el dominio del tiempo.

En la mayoría de los sistemas de control, la evaluación final del desempeño de un sistema se basa en las respuestas en el tiempo.

La respuesta en el tiempo de un sistema de control se divide normalmente en dos partes: la respuesta transitoria y la respuesta en estado estable.

Sea $y(t)$ la respuesta en el tiempo de un sistema en tiempo continuo; entonces, en general, se puede escribir:

$$y(t) = y_t(t) + y_{ss}(t) \dots\dots\dots(4.20)$$

En donde $y_t(t)$ indica la respuesta transitoria; $y_{ss}(t)$ indica la respuesta en estado estable.

En sistemas de control, la respuesta transitoria está definida como la parte de la respuesta en el tiempo que tiende a cero cuando el tiempo se hace muy grande. Por tanto, $y_t(t)$ tiene la propiedad de que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_t(t) = 0 \dots\dots\dots(4.21)$$

La respuesta en estado estable es la parte de la respuesta total que permanece después que la transitoria ha desaparecido.

Todos los sistemas de control estables reales presentan un fenómeno transitorio antes de alcanzar la respuesta en estado estable.

Como la masa, la inercia y la inductancia son inevitables en los sistemas físicos, las respuestas de un sistema de control típico no pueden seguir cambios súbitos en la entrada en forma instantánea, y normalmente se observan transitorios.

En consecuencia, la respuesta transitoria de un sistema de control es necesariamente importante, ya que es una parte significativa del comportamiento dinámico del sistema; y la desviación entre la respuesta de salida y la entrada o la respuesta deseada se debe controlar cuidadosamente antes de alcanzar el estado estable.

La respuesta en estado estable de un sistema de control es también muy importante, ya que indica en dónde termina la salida del sistema cuando el tiempo se hace grande.

En general, si la respuesta en estado estable de la salida no concuerda exactamente con la referencia deseada, se dice que el sistema tiene un error en estado estable. Este error indica la precisión del sistema.

En el problema de diseño de un sistema de control, las especificaciones se proporcionan normalmente en términos del desempeño transitorio y en estado estable, y los controladores se diseñan para que todas esas especificaciones sean cumplidas por el sistema diseñado.

Señales de prueba típicas para obtener la respuesta en el tiempo de sistemas de control

Para propósitos de análisis y diseño, es necesario suponer algunos tipos básicos de entradas de prueba para evaluar el desempeño de un sistema.

Los criterios de desempeño se pueden especificar con respecto a estas señales de prueba, en tal forma que el sistema se puede diseñar para cumplir con dichos criterios.

Las señales de prueba que se usan regularmente son funciones escalón, rampa, parábola, impulso, senoidales, etc. Con estas señales de prueba, es posible realizar con facilidad análisis matemáticos y experimentales de sistemas de control, dado que las señales son funciones del tiempo muy simples.

Entrada función escalón

La entrada función escalón representa un cambio instantáneo en la entrada de referencia. La representación matemática de una función escalón de magnitud R es:

$$r(t) = \begin{cases} R & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \dots\dots\dots (4.22)$$

en donde R es una constante real. O bien,

$$r(t) = R u_s(t)$$

en donde $u_s(t)$ es la función escalón unitario. La función escalón unitario se muestra en la figura 4.4.

La función escalón es muy útil como señal de prueba, ya que su brinco inicial de amplitud revela qué tan rápido responde un sistema a entradas con cambios abruptos.

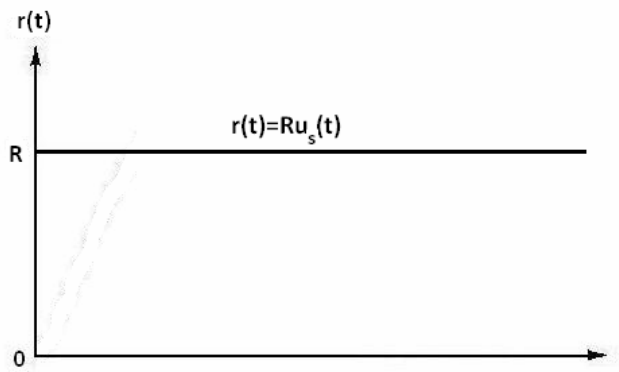


Figura 4.4 Función escalón

4.3.1 SISTEMAS DE PRIMER ORDEN

Considere el sistema de primer orden de la figura 4.5(a). Físicamente este sistema representa un circuito RC, un sistema térmico o algún sistema similar. La figura 4.5(b) presenta un diagrama de bloques simplificado.

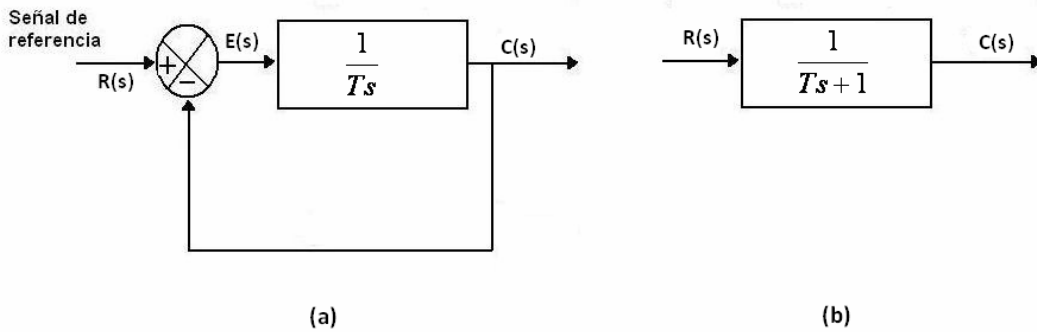


Figura 4.5 (a) Diagrama de bloques de un sistema de primer orden; (b) diagrama de bloques simplificado.

La relación entrada-salida se obtiene mediante

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{Ts+1} \dots\dots\dots (4.23)$$

Se realizará un análisis para la respuesta del sistema a una entrada escalón unitario, suponiendo que las condiciones iniciales son cero.

Todos los sistemas que tienen la misma función de transferencia exhibirán la misma salida en respuesta a la misma entrada. Para cualquier sistema físico dado, la respuesta matemática recibe una interpretación física.

Respuesta escalón unitario de sistemas de primer orden

Dado que la transformada de Laplace de la función escalón unitario es $\frac{1}{s}$, sustituyendo

$R(s) = \frac{1}{s}$ en la ecuación (4.23), obtenemos:

$$C(s) = \frac{1}{Ts+1} \cdot \frac{1}{s} \dots\dots\dots (4.24)$$

Al expandir $C(s)$ en fracciones parciales produce

$$C(s) = \frac{1}{s} - \frac{T}{Ts+1} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \left(\frac{1}{T}\right)} \dots\dots\dots (4.25)$$

Si tomamos la transformada inversa de Laplace de la ecuación (4.25), obtendremos:

$$c(t) = 1 - e^{-\frac{t}{T}}, \text{ para } t \geq 0 \dots\dots\dots (4.26)$$

La ecuación plantea que la salida $c(t)$ es inicialmente cero y al final se vuelve unitaria. Una característica importante de tal curva de respuesta exponencial $c(t)$ es que, para $t = T$, el valor de $c(t)$ es 0.632, o que la respuesta $c(t)$ alcanzó 63.2% de su cambio total. Este hecho se aprecia con facilidad sustituyendo $t=T$ en (4.26), es decir:

$$c(T) = 1 - e^{-1} = 0.632 \dots\dots\dots (4.27)$$

Conforme más pequeña es la magnitud de la constante de tiempo T , más rápida es la respuesta del sistema.

La curva de respuesta exponencial $c(t)$ caracterizada por la ecuación (4.26), se muestra en la siguiente figura.

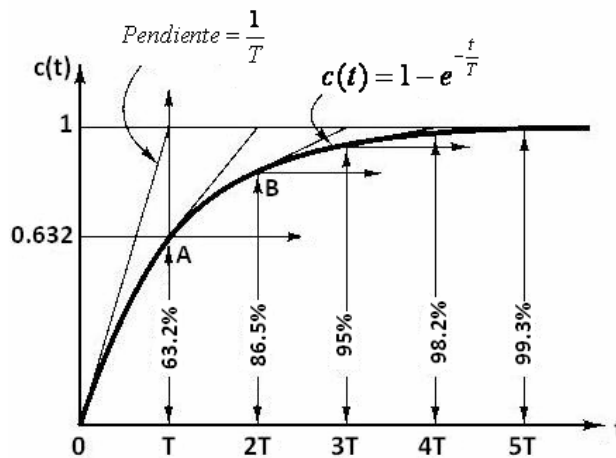


Figura 4.6 Respuesta escalón para un sistema de primer-orden

En una constante de tiempo, la curva de respuesta exponencial ha ido de 0 a 63.2% del valor final.

En dos constantes de tiempo, la respuesta alcanza 86.5% del valor final.

En $t=3T, 4T$ y $5T$, la respuesta alcanza 95%, 98.2% y 99.3%, respectivamente, del valor final.

Por tanto, para $t \geq 4T$, la respuesta permanece dentro del 2% del valor final. Por tanto, con base en la ecuación (4.26), el estado estable se alcanza matemáticamente sólo después de un tiempo infinito.

Sin embargo, en la práctica, una estimación razonable del tiempo de respuesta es la magnitud de tiempo que necesita la curva de respuesta para alcanzar la línea de 2% del valor final, o cuatro constantes de tiempo.

Gráfica de la respuesta-escalón unitario para la planta de temperatura

En la siguiente gráfica se muestra la respuesta-escalón para la planta de temperatura caracterizada por la ecuación (4.54)

$$G(s) = \frac{11.4 - 1.425s}{3.2355s^2 + 17.625s + 1}$$

Para una entrada escalón-unitario

$$R(s) = \frac{1}{s} \quad \Rightarrow \quad C(s) = G(s)R(s)$$

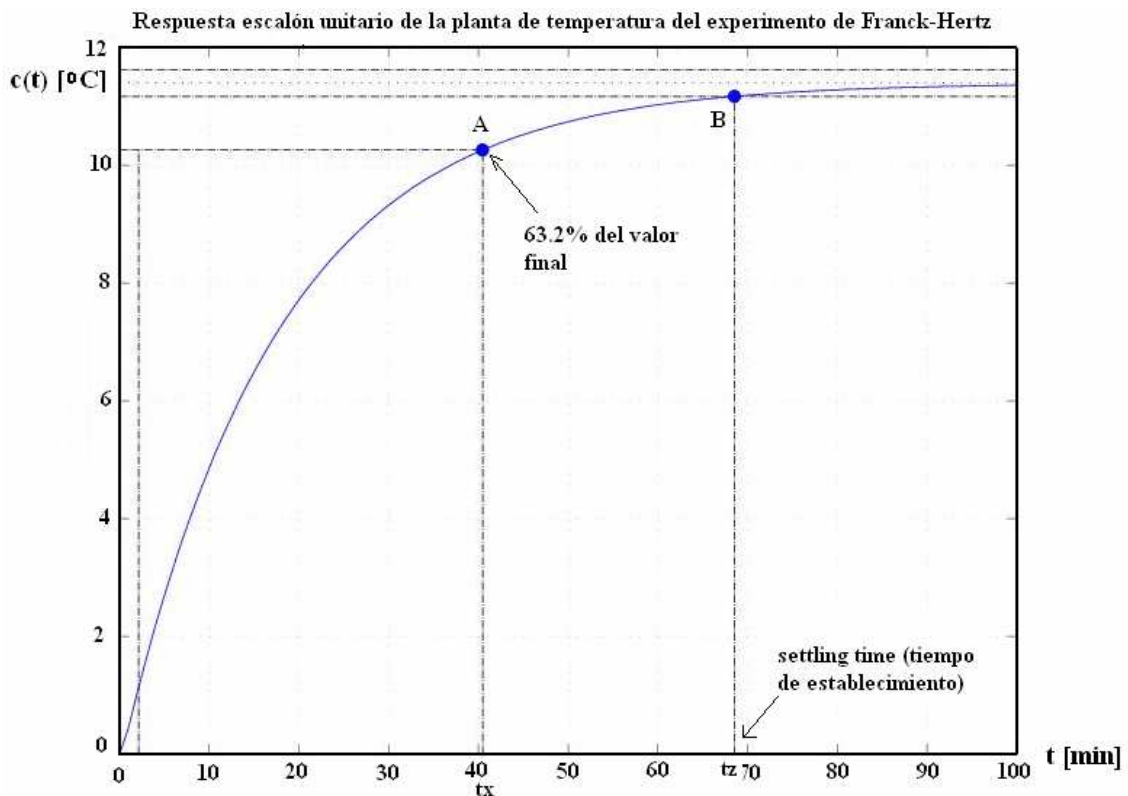


Figura 4.7 Respuesta escalón-unitario de la planta de temperatura caracterizada por la ecuación (4.69)

4.4 RESPUESTA DEL SISTEMA A ENTRADAS VARIABLES

La forma de la entrada a la que el sistema estará sujeto con mayor frecuencia bajo una operación normal determina cuál de las señales de entrada típicas se debe usar para analizar las características del sistema.

Si las entradas para un sistema de control son funciones del tiempo que cambian en forma gradual, una función rampa sería una buena señal de prueba.

Asimismo, si un sistema está sujeto a perturbaciones repentinas, una función escalón sería una buena señal de prueba; y para un sistema sujeto a entradas de choque, una función impulso sería la mejor.

Una vez diseñado un sistema de control con base en las señales de prueba, por lo general el desempeño del sistema en respuesta a las entradas reales es satisfactorio. El uso de tales señales de prueba permite comparar el desempeño de todos los sistemas sobre la misma base.

Entrada función rampa

La función rampa es una señal que cambia constantemente con el tiempo. Matemáticamente, una función rampa se representa mediante:

$$r(t) = Rtu_s(t) \dots\dots\dots (4.28)$$

en donde R es una constante real. La función rampa se muestra en la figura (4.8). La función rampa tiene la habilidad de probar cómo responde el sistema a señales que cambian linealmente con el tiempo.

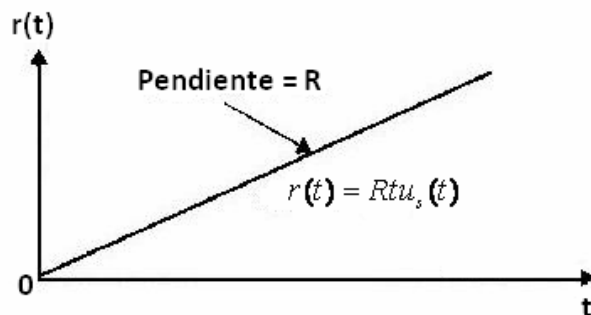


Figura 4.8 Función rampa

Entrada función parabólica

La función parabólica representa una señal que tiene un orden más rápido que la función rampa. Matemáticamente, se representa como:

$$r(t) = \frac{Rt^2u_s(t)}{2} \dots\dots\dots (4.29)$$

en donde R es una constante real, y el factor $\frac{1}{2}$ se añade por conveniencia matemática, ya que la transformada de Laplace de r(t) es simplemente $\frac{R}{s^3}$. La representación gráfica de la función parabólica se muestra en la figura 4.9.

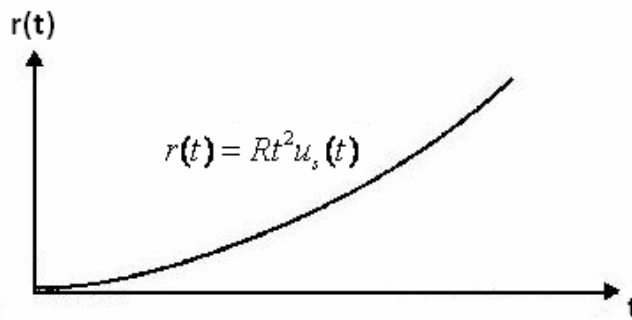


Figura 4.9 Función parábola

De la función escalón a la función parabólica, las señales se vuelven progresivamente más rápidas con respecto al tiempo. En teoría, se pueden definir señales con velocidades aún más rápidas, como t^3 , y así sucesivamente.

Sin embargo, rara vez es necesario o factible emplear señales de prueba más rápidas que una función parabólica.

Respuesta rampa unitaria de sistemas de primer orden

Dado que la transformada de Laplace de la función rampa unitaria es $\frac{1}{s^2}$, obtenemos la salida del sistema de la figura 4.5 como

$$C(s) = \frac{1}{Ts+1} \left(\frac{1}{s^2} \right) \dots\dots\dots (4.30)$$

Si expandimos C(s) en fracciones parciales, obtenemos

$$C(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{T}{s} + \frac{T^2}{Ts+1} \dots\dots\dots (4.31)$$

Tomando la transformada inversa de Laplace de la ecuación (4.31), obtenemos

$$c(t) = t - T + Te^{-\left(\frac{t}{T}\right)} \dots\dots\dots (4.32), \text{ para } t \geq 0$$

La entrada rampa unitaria y la salida del sistema se muestran en la figura 4.10. El error después de la entrada rampa unitaria es igual a T para una t suficientemente grande.

Entre más pequeña es la constante de tiempo T, más pequeño es el error en estado estable después de la entrada rampa.

La señal de error e(t) se define como

$$e(t) = r(t) - c(t) \dots\dots\dots (4.33)$$

$$= t - (t - T + T e^{-\frac{t}{T}}) = T(1 - e^{-\frac{t}{T}})$$

Conforme t tiende a infinito, $e^{-\frac{t}{T}}$ se aproxima a cero y, por tanto, la señal de error se aproxima a T , o $e(\infty) = T$

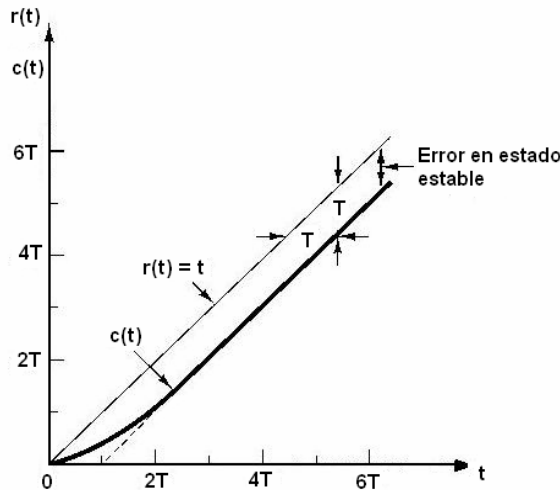


Figura 4.10 Respuesta rampa-unitaria para el sistema mostrado en la figura 4.5

Respuesta impulso unitario de sistemas de primer orden

Para la entrada de impulso unitario, $R(s)=1$, y la salida del sistema de la figura 4.5 puede obtenerse como

$$C(s) = \frac{1}{Ts + 1} \dots\dots\dots (4.34)$$

Tomando la transformada inversa de Laplace de la ecuación (4.34), se obtiene

$$c(t) = \frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}}, \text{ para } t \geq 0 \dots\dots\dots (4.35)$$

La curva de respuesta al impulso unitario para el sistema de primer orden puede observarse en la figura 4.11.

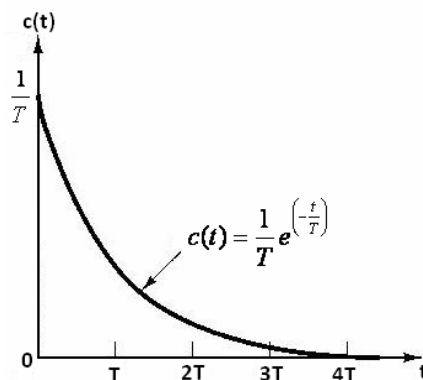


Figura 4.11 Respuesta impulso-unitario para un sistema de primer orden

Gráfica de respuesta rampa-unitaria para la planta de temperatura

En la siguiente gráfica se muestra la respuesta-rampa unitaria para la planta de temperatura caracterizada por la ecuación (4.54)

$$G(s) = \frac{11.4 - 1.425s}{3.2355s^2 + 17.625s + 1}$$

Para una entrada escalón-unitario

$$R(s) = \frac{1}{s^2} \quad \Rightarrow C(s) = G(s)R(s)$$

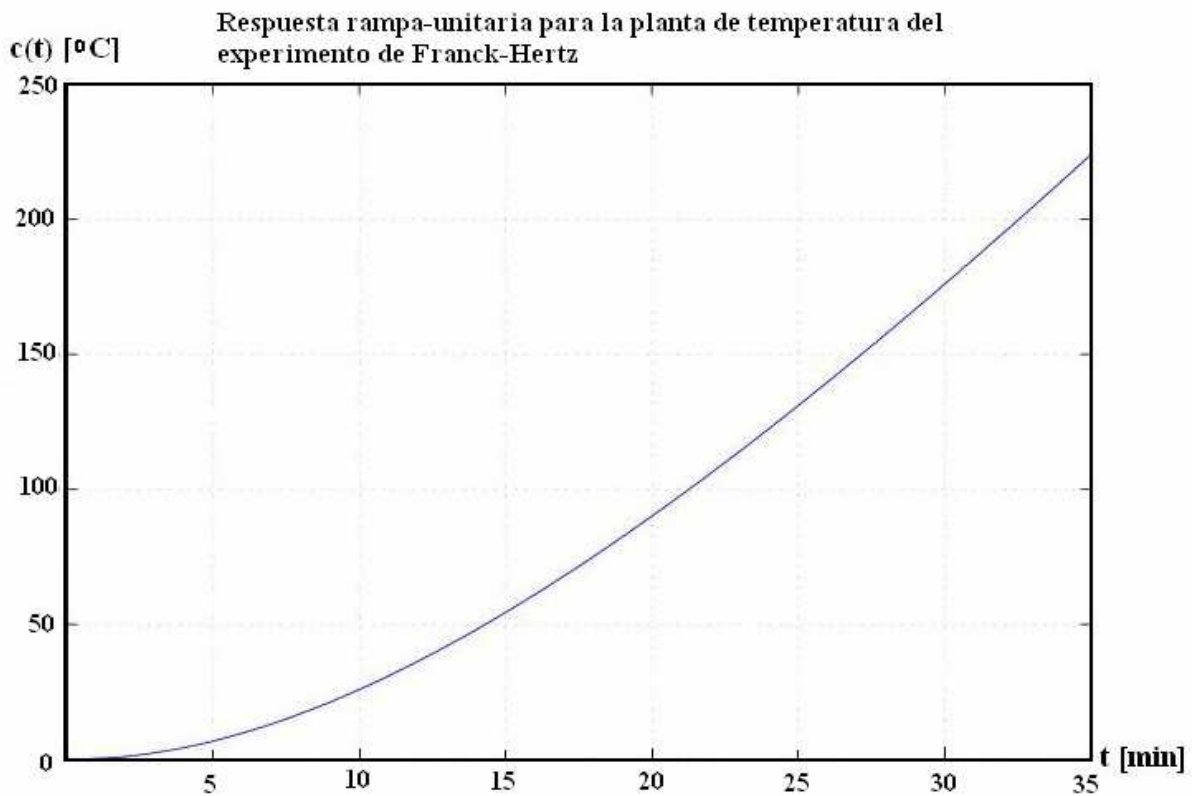


Figura 4.12 Respuesta rampa-unitaria de la planta de temperatura del experimento de Franck-Hertz

Gráfica de respuesta a la función impulso-unitario para la planta de temperatura

En la siguiente gráfica se muestra la respuesta impulso-unitario para la planta de temperatura caracterizada por la ecuación (4.54)

$$G(s) = \frac{11.4 - 1.425s}{3.2355s^2 + 17.625s + 1}$$

Para una entrada impulso-unitario

$$R(s) = 1 \quad \Rightarrow C(s) = G(s)R(s)$$

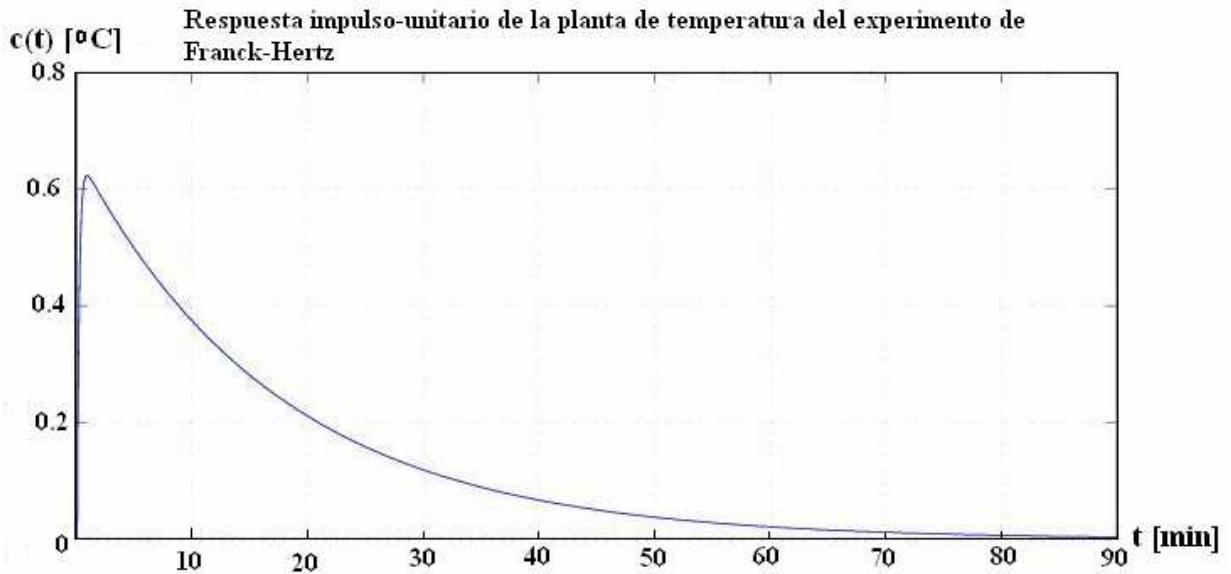


Figura 4.13 Gráfica de respuesta al impulso-unitario $R(s)=1$ para la planta de temperatura

4.5 OBTENCIÓN DEL MODELO MATEMÁTICO

Cuando es posible obtener un modelo matemático de la planta, se pueden emplear diversas técnicas de diseño mediante las cuales se obtienen los parámetros del controlador que satisfagan las especificaciones en estado transitorio y en estado estable del sistema en lazo cerrado requeridas.

Sin embargo, en caso contrario, cuando la planta es tan complicada que no es fácil o práctico obtener su modelo matemático, tampoco es posible un enfoque analítico para el diseño del controlador.

Por tanto, debemos recurrir a los enfoques experimentales para la sintonización de los controladores, en este caso, para un controlador PID, el cual se detallará en el capítulo 5.

El proceso de seleccionar los parámetros del controlador que cumplan con las especificaciones de desempeño se conoce como sintonización del controlador.

Ziegler y Nichols sugirieron más reglas para sintonizar los controladores PID (lo cual significa establecer los parámetros K_p , T_i y T_d) con base en las respuestas escalón experimentales.

Las reglas de Ziegler-Nichols, que se presentan a continuación, son muy convenientes cuando no se conocen los modelos matemáticos de las plantas.

La utilidad real de las reglas de sintonización de Ziegler-Nichols se vuelve evidente cuando no se conoce la dinámica de la planta, por lo que no se cuenta con enfoques analíticos ó gráficos para el diseño de controladores.

4.5.1 REGLAS DE ZIEGLER-NICHOLS

Ziegler y Nichols propusieron unas reglas para determinar los valores de la ganancia proporcional K_p , del tiempo integral T_i y del tiempo derivativo T_d , con base en las características de respuesta transitoria de una planta específica. Tal determinación se realiza en el sitio mediante experimentos sobre la planta.

Existen dos métodos denominados reglas de sintonización de Ziegler-Nichols, en ambos se pretende obtener un 25% de sobrepaso máximo en la respuesta escalón, como se muestra en la figura 4.14.

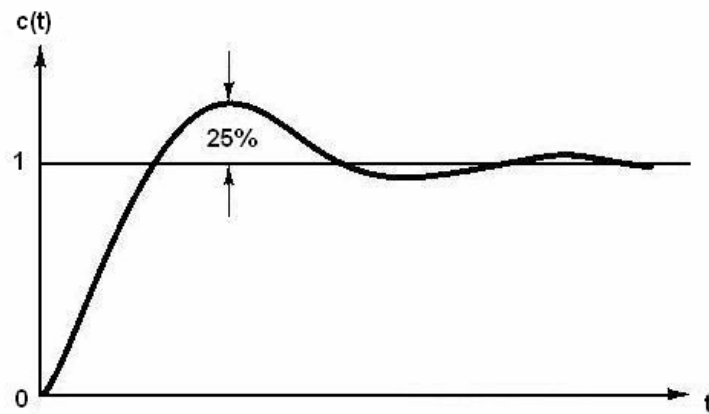


Figura 4.14 Curva de respuesta escalón unitario que muestra un sobrepaso máximo de 25%

En el presente trabajo, sin embargo, sólo se analizará el primer método, en el cual la respuesta de la planta a una entrada escalón unitario se obtiene de manera experimental, según se puede observar en la figura 4.15.

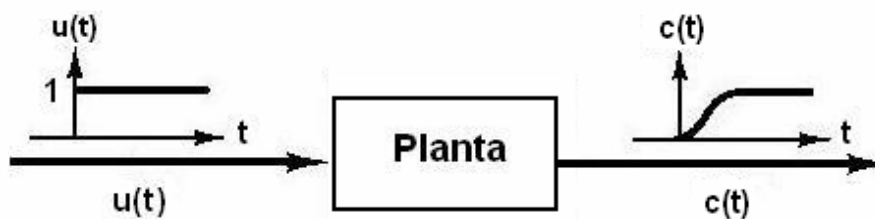


Figura 4.15 Respuesta escalón unitario de una planta

Si la planta no contiene integradores ni polos dominantes complejos conjugados, la curva de respuesta escalón unitario puede tener forma de S, y se denomina curva de reacción, según se muestra en el siguiente esquema:

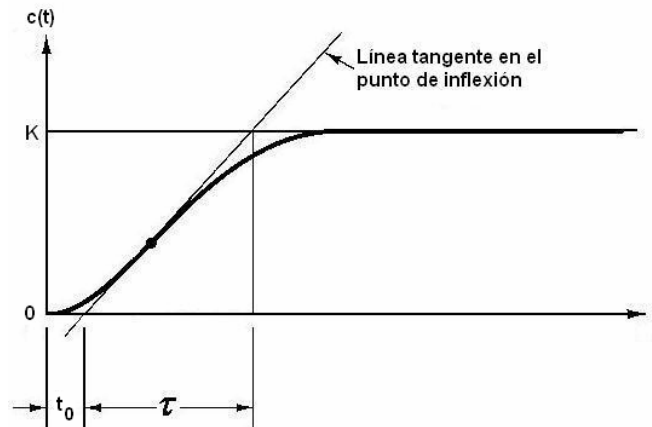


Figura 4.16 Curva de respuesta con forma de S (curva de reacción)

Si la respuesta no exhibe una curva con forma de S, este método no es pertinente. Tales curvas de respuesta escalón se generan experimentalmente o a partir de una simulación dinámica de la planta.

La curva con forma de S se caracteriza por dos parámetros: el tiempo de retardo t_0 y la constante de tiempo τ .

Un método para determinar el tiempo de retardo y la constante de tiempo es dibujar una recta tangente en el punto de inflexión de la curva de reacción (como se observa en la figura 4.16) y determinar las intersecciones de esta tangente con el eje del tiempo y la línea $c(t) = K$.

En este caso, la función de transferencia $\frac{C(s)}{U(s)}$ se aproxima mediante un sistema de primer orden con un retardo de transporte del modo siguiente:

$$\frac{C(s)}{U(s)} = \frac{Ke^{-t_0s}}{\tau s + 1} \dots\dots\dots (4.36)$$

4.5.2 CARACTERIZACIÓN DEL PROCESO

Se caracteriza al proceso mediante un modelo simple de primer orden con tiempo de retardo o tiempo muerto.

La concentración de las funciones de transferencia de la válvula de control, del proceso, y del sensor se hace no sólo por conveniencia, sino por razones prácticas; si a esta combinación de funciones de transferencia se le designa como $G(s)$:

$$G(s) = Gv(s)Gm(s)H(s) \dots\dots\dots (4.37)$$

Donde:

$G_v(s)$ es la función de transferencia de la válvula de control (o elemento final de control)

$G_m(s)$ es la función de transferencia del proceso entre la variable controlada y la variable manipulada

$H(s)$ es la función de transferencia del sensor-transmisor

Es precisamente esta función de transferencia combinada la que se aproxima mediante los modelos de orden inferior con el objeto de caracterizar la respuesta dinámica del proceso.

Lo importante es que en el proceso caracterizado se incluye el comportamiento dinámico de la válvula de control y del sensor/transmisor. El modelo que se empleará para caracterizar el proceso es el siguiente:

$$G(s) = \frac{Ke^{-t_0s}}{\tau s + 1} \dots\dots\dots (4.38)$$

Donde:

K es la ganancia del proceso en estado estacionario

t_0 es el tiempo muerto del proceso

τ es la constante de tiempo del proceso

En este modelo el proceso se caracteriza mediante tres parámetros: La ganancia K, el tiempo muerto o de retardo t_0 y la constante de tiempo τ .

De modo que el problema consiste en la manera en que se pueden determinar dichos parámetros para un sistema en particular; la solución consiste en realizar pruebas dinámicas en el sistema real; la prueba más simple que se puede realizar es la de introducir una entrada escalón.

Curva de reacción del proceso

Antes del advenimiento de las computadoras, los datos de las pruebas del proceso eran analizados mediante construcciones gráficas de la respuesta del proceso a un cambio escalón en la salida del controlador.

La prueba se realiza como sigue:

1. Se deja que el proceso alcance un estado de equilibrio previo.
2. Se aplica al proceso un cambio escalón en la señal de salida del controlador en lazo abierto (ya sea incremento o decremento).
3. Se recaban datos de la respuesta de la variable controlada.

En la figura 4.17 se muestra una gráfica típica de la prueba.

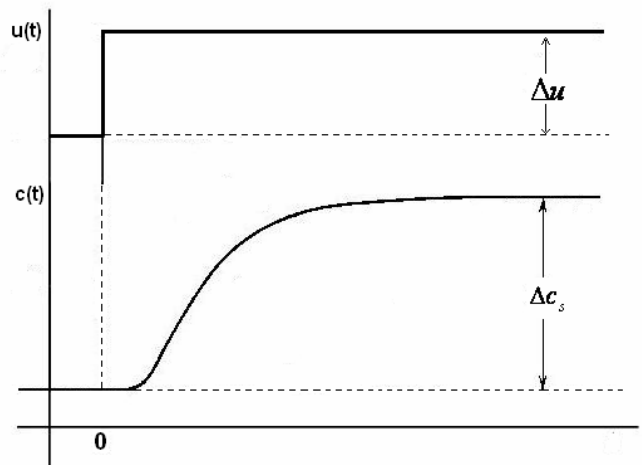


Figura 4.17 Curva de reacción del proceso o respuesta escalón de circuito abierto

El siguiente paso es hacer coincidir la curva de reacción del proceso con el modelo de un proceso simple para determinar los parámetros del modelo.

El término Δc es la perturbación o cambio de salida de la variable de proceso respecto a su valor inicial:

$$\Delta c(t) = c(t) - c(0) \dots\dots\dots (4.39)$$

Se define Δc_s como

$$\Delta c_s = \lim_{t \rightarrow \infty} \Delta c(t) = K \Delta u \dots\dots\dots (4.40)$$

A partir de esta ecuación, y si se tiene en cuenta que la respuesta del modelo debe coincidir con la curva de reacción del proceso en estado estable, se puede calcular la ganancia de estado estacionario del proceso, la cual es uno de los parámetros del modelo que describe la ecuación (4.38)

$$K = \frac{\Delta c_s}{\Delta u} \dots\dots\dots (4.41)$$

El tiempo muerto t_0 y la constante de tiempo τ se determinan de la siguiente forma:

Los valores de t_0 y τ se seleccionan de tal manera que la respuesta del modelo y la real coincidan en la región de alta tasa de cambio. Los dos puntos que se recomiendan son $\left(t_0 + \frac{1}{3\tau}\right)$ y $(t_0 + \tau)$, y para localizar dichos puntos se emplea la ecuación (4.42), calculada con base en la respuesta escalón en la salida del controlador y un modelo de primer orden más tiempo muerto.

$$\Delta c(t) = K\Delta m \cdot u(t-t_0) \left[1 - e^{-\left(\frac{t-t_0}{\tau}\right)} \right] \dots\dots\dots (4.42)$$

Sustituyendo en (4.42) se obtiene:

$$\Delta c(t_0 + \tau) = K\Delta u[1 - e^{-1}] = 0.632\Delta c_s \dots\dots\dots (4.43)$$

$$\Delta c\left(t_0 + \frac{1}{3}\tau\right) = K\Delta u[1 - e^{-\frac{1}{3}}] = .283\Delta c_s \dots\dots\dots(4.44)$$

Estos dos puntos, ilustrados en la siguiente figura, se denominan t_2 y t_1 , respectivamente.

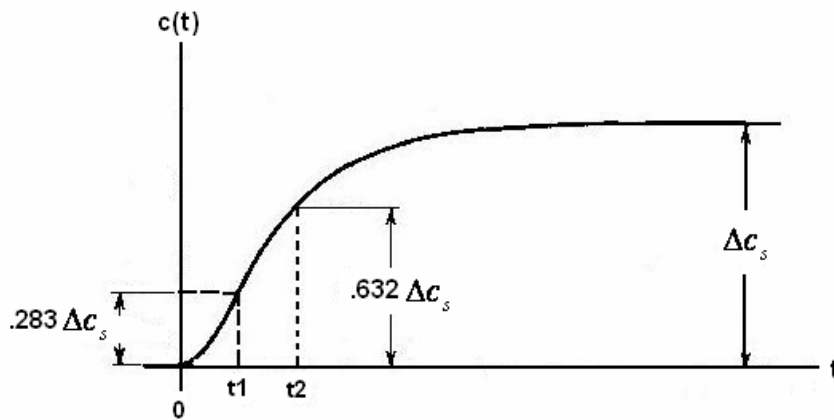


Figura 4.18 Parámetros del modelo de primer orden más tiempo muerto

Los valores de t_0 y τ se pueden obtener fácilmente mediante la simple resolución del siguiente sistema de ecuaciones

$$t_0 + \tau = t_2 \dots\dots\dots(4.45)$$

$$t_0 + \frac{1}{3}\tau = t_1 \dots\dots\dots (4.46)$$

Lo cual se reduce a

$$\tau = \frac{3}{2}(t_2 - t_1) \dots\dots\dots (4.47)$$

$$t_0 = t_2 - \tau \dots\dots\dots (4.48)$$

donde

t_1 = tiempo en el cual $\Delta c = 0.283 \Delta c_s$

t_2 = tiempo en el cual $\Delta c = 0.632 \Delta c_s$

Obtención experimental de la curva de reacción

Datos experimentales recabados del proceso de caracterización de la planta para un cambio en la entrada escalón del controlador en lazo abierto del 25% al 30%.

t [min]	T[°C]	t [min]	T[°C]	t [min]	T[°C]	t [min]	T[°C]	t [min]	T[°C]	t [min]	T[°C]
0	19	14.66	116	29.33	138	44	145	58.66	157.5	73.33	164
.33	19.5	15	117	29.66	138	44.33	145	59	158	73.66	164
.66	20	15.33	117.5	30	138	44.66	145	59.33	158	74	164
1	22	15.66	118	30.33	138.5	45	145	59.66	158	74.33	164
1.33	24	16	119	30.66	139	45.33	145	60	159	74.66	164
1.66	26.5	16.33	120	31	139	45.66	145	60.33	159	75	164
2	30	16.66	121	31.33	139	46	145	60.66	159	75.33	164
2.33	33.5	17	121.5	31.66	139.5	46.33	145.5	61	159	75.66	164
2.66	37	17.33	122	32	139.5	46.66	145.5	61.33	159.5	76	164
3	41	17.66	123	32.33	140	47	145.5	61.66	160	76.33	164
3.33	45	18	124	32.66	140	47.33	145.5	62	160	76.66	164
3.66	48	18.33	124.5	33	140	47.66	146	62.33	160	77	164
4	52	18.66	125	33.33	140	48	146	62.66	160	77.33	164
4.33	56	19	125.5	33.66	140.5	48.33	146	63	160	77.66	164
4.66	60	19.33	126	34	141	48.66	146	63.33	160	78	164.5
5	63	19.66	127	34.33	141	49	146	63.66	160.5	78.33	165
5.33	66	20	127	34.66	141	49.33	146	64	161	78.66	165
5.66	69.5	20.33	128	35	141	49.66	146	64.33	161	79	165
6	72.5	20.66	128	35.33	141.5	50	146	64.66	161	79.33	165
6.33	75	21	129	35.66	142	50.33	146	65	161	79.66	165
6.66	78	21.33	129	36	142	50.66	146	65.33	161	80	165
7	80.5	21.66	130	36.33	142	51	147	65.66	161.5	80.33	165
7.33	83	22	130	36.66	142	51.33	148	66	161.5	80.66	165
7.66	85	22.33	131	37	142	51.66	148.5	66.33	161.5	81	165
8	87	22.66	131	37.33	142.5	52	149	66.66	162	81.33	165
8.33	89.5	23	132	37.66	143	52.33	150	67	162	81.66	165
8.66	91.5	23.33	132	38	143	52.66	150	67.33	162	82	165
9	93.5	23.66	132.5	38.33	143	53	151	67.66	162	82.33	165
9.33	95	24	133	38.66	143	53.33	151.5	68	162	82.66	165
9.66	97	24.33	133	39	143	53.66	152	68.33	162	83	165
10	98	24.66	134	39.33	143.5	54	153	68.66	162.5		
10.33	100	25	134	39.66	143.5	54.33	153	69	162.5		
10.66	102	25.33	134	40	144	54.66	153.5	69.33	163		
11	103	25.66	135	40.33	144	55	154	69.66	163		
11.33	105	26	135	40.66	144	55.33	154.5	70	163		
11.66	106	26.33	135	41	144	55.66	155	70.33	163		
12	107	26.66	135	41.33	144	56	155	70.66	163		
12.33	108	27	135.5	41.66	144	56.33	155.5	71	163		
12.66	110	27.33	136	42	144	56.66	156	71.33	163		
13	111	27.66	136	42.33	144	57	156	71.66	163		
13.33	112	28	136.5	42.66	144.5	57.33	156	72	163		
13.66	113	28.33	137	43	145	57.66	157	72.33	163		
14	114	28.66	137	43.33	145	58	157	72.66	163.5		
14.33	115	29	137.5	43.66	145	58.33	157	73	163.5		

Tabla 4.2 Datos experimentales para la caracterización de la planta

Gráficas de t vs. T

En la figura 4.19 se presenta la curva de reacción obtenida de los datos anexados en la tabla 4.2 para un cambio en la salida del controlador en lazo abierto del 25% al 30% en $t = 50$ s.

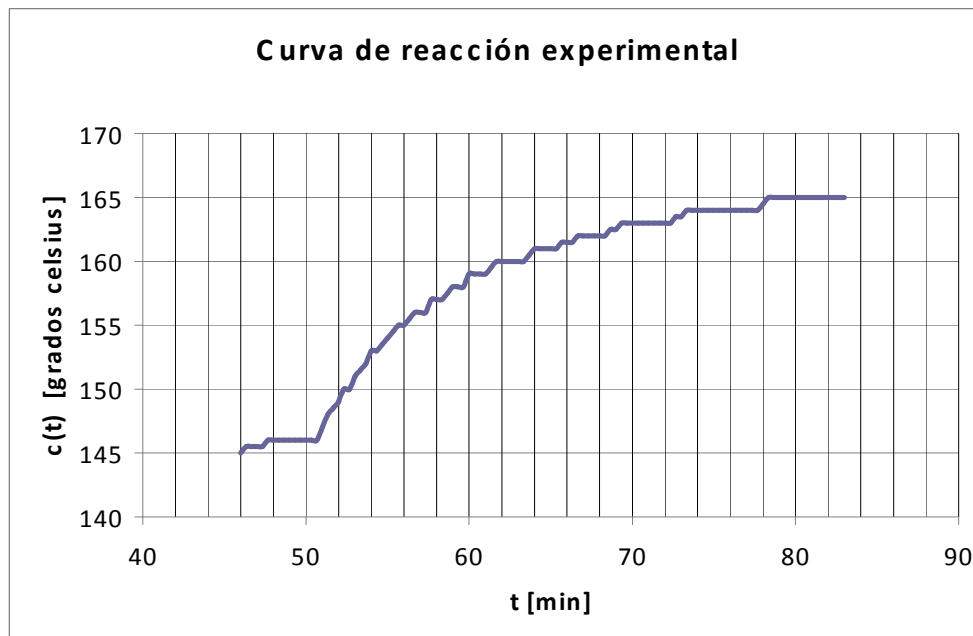


Figura 4.19 Curva de reacción del proceso para un incremento de 5% en la salida del controlador.

Donde:

t [min] es el tiempo a partir del cual se efectúa el cambio en la respuesta del controlador en lazo abierto

$T=c(t)$ [°C] es la temperatura medida por el termómetro de mercurio que está contenido en el recinto térmico

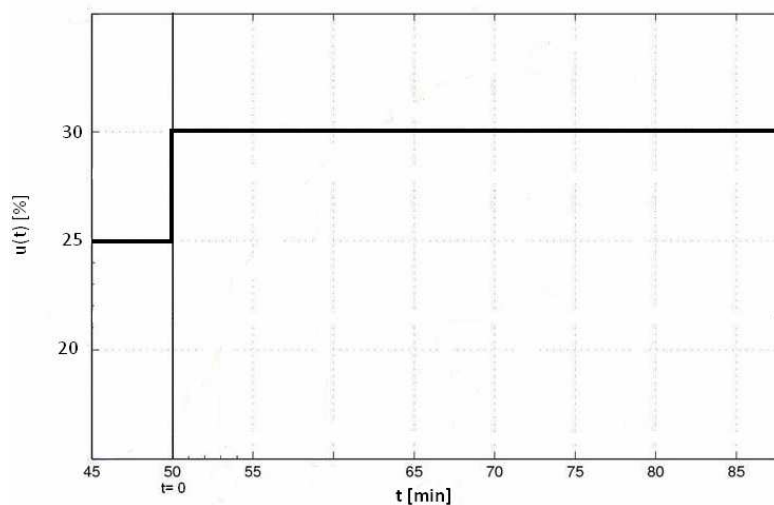


Figura 4.20 Cambio en la salida del controlador en lazo abierto

Obtención experimental del modelo matemático de la planta

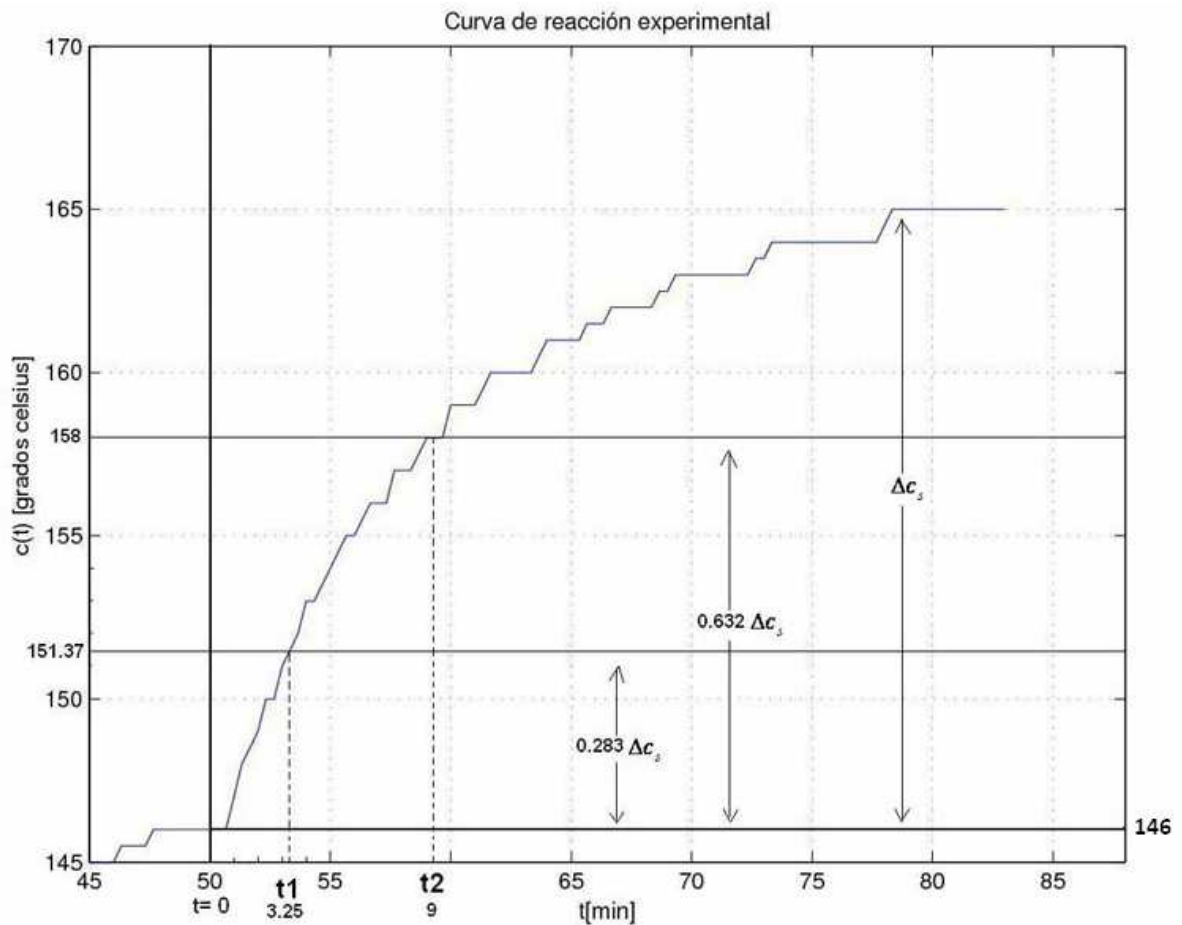


Figura 4.21 Parámetros del modelo primer orden más tiempo de retardo obtenidos mediante el método de Ziegler-Nichols

De la figura 4.21, se obtiene que:

$$t_1 = \text{tiempo en min para el cual } c(t) = 0.283 \Delta c_s \dots\dots\dots (4.49)$$

$$t_2 = \text{tiempo en min para el cual } c(t) = 0.632 \Delta c_s \dots\dots\dots (4.50)$$

Se toma $t = 50$ s como un nuevo tiempo de referencia (es decir, el instante de tiempo para el cual se realiza el cambio en la señal del controlador)

$$\Rightarrow \Delta c_s = (165 - 146) = 19 \text{ } ^\circ\text{C}$$

Sustituyendo Δc_s en (4.49) y (4.50), tomando como una nueva referencia de temperatura $T_0 = 146 \text{ } ^\circ\text{C}$

$$c(t_1) = 0.283 \Delta c_s = 0.283 (19) = 5.37 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$c(t_2) = 0.632 \Delta c_s = 0.632(19) = 12 \text{ }^\circ\text{C}$$

De la gráfica se obtiene que

$$t_1 \cong 3.25 \text{ min}$$

$$t_2 \cong 9 \text{ min}$$

Sustituyendo t_1 y t_2 en las ecuaciones (4.47) y (4.48) se pueden calcular los valores para el t_0 y τ

$$\tau = \frac{3}{2}(9 - 3.25) = 8.625 \text{ min}$$

$$t_0 = 9 - 8.625 = 0.375 \text{ min}$$

Por lo tanto

$$\tau = 8.625 \text{ min}$$

$$t_0 = 0.375 \text{ min}$$

Cálculo de la ganancia estática del proceso K

$$K = \frac{\Delta c [^\circ\text{C}]}{\Delta CO [\%]} = \frac{19}{30 - 25} = 3.8 \left[\frac{^\circ\text{C}}{\%} \right] \dots\dots\dots (4.49)$$

Sustituyendo los parámetros obtenidos en el modelo de primer orden más tiempo de retardo descrito por la ecuación $G(s) = \frac{Ke^{-t_0s}}{\tau s + 1}$, se obtiene la función de transferencia de la planta de temperatura.

Sustituyendo K, t_0 y τ en (4.38)

$$G(s) = \frac{3.8e^{-.375s}}{8.625s + 1} \dots\dots\dots (4.50)$$

4.5.3 SISTEMAS CON RETARDO DE TRANSPORTE

Estos sistemas se caracterizan debido a que la salida no comienza a responder a la entrada sino hasta después de un intervalo de tiempo dado.

Los sistemas que están descritos inherentemente por funciones de transferencia trascendentales son más difíciles de manejar. Muchas herramientas analíticas, tal como el criterio de Routh-Hurwitz, están restringidas a funciones de transferencia racionales.

Existen muchas formas de aproximar a e^{-t_0s} por una función racional. Una aproximación es la de Padé, la cual está dada por una aproximación de dos términos:

$$e^{-t_0s} = \frac{1 - \frac{t_0s}{2}}{1 + \frac{t_0s}{2}} \dots\dots\dots (4.51)$$

Si se sustituye la relación (4.51) en (4.38) se obtiene

$$G(s) = \frac{K \left(\frac{1 - \frac{1}{2}t_0s}{1 + \frac{1}{2}t_0s} \right)}{\tau s + 1} = \frac{K \frac{2 - t_0s}{2 + t_0s}}{\tau s + 1} = \frac{K(2 - t_0s)}{(2 + t_0s)(\tau s + 1)} \dots\dots\dots (4.52)$$

$$G(s) = \frac{K(2 - t_0s)}{t_0\tau s^2 + (t_0 + 2\tau)s + 1} \dots\dots\dots (4.53)$$

Sustituyendo los valores obtenidos para K, t_0 y τ

$$G(s) = \frac{11.4 - 1.425s}{3.2355s^2 + 17.625s + 1} \dots\dots\dots (4.54)$$

La cual es la función de transferencia que se emplea para representar la planta de temperatura del experimento de Franck-Hertz y a partir de ella se obtienen las respuestas del sistema a entradas variables.