



Universidad Nacional Autónoma de México

---

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA

CONTROL DE ROBOTS COOPERATIVOS  
SIN MEDICIÓN DE VELOCIDAD/FUERZA

**T E S I S**  
QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE  
DOCTOR EN INGENIERÍA ELÉCTRICA  
Área de investigación : Control  
**P R E S E N T A:**  
JUAN CARLOS MARTÍNEZ ROSAS

Director de tesis:  
Dr. MARCO ANTONIO ARTEAGA PÉREZ



MÉXICO, D.F.

2006



**CONTROL DE ROBOTS COOPERATIVOS SIN MEDICIÓN  
DE VELOCIDAD/FUERZA**

**Juan Carlos Martínez Rosas**

**Dirigida por:  
Dr. Marco Antonio Arteaga Pérez**

**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO  
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN  
INGENIERÍA  
SEPTIEMBRE 2006**

## Agradecimientos

- A Dios por todo, comenzando con el milagro de la vida.
  - A mi padre Anastacio Martínez, a mi madre Juana Rosas y a cada uno de mis hermanos (Carolina, Miguel, Oscar, Gabriela y Leticia) por su apoyo y estar siempre junto a mí.
  - A Rocío por su paciencia y cariño.
  - A mis amigos de LabRob: Jorge, Eduardo, Rene, Adrian, Angélica, Carlo y Kike.
  - A CONACyT por el valioso apoyo económico durante los estudios de doctorado.
-

## Dedicatorias

A mi querido padre, por que no pude haber tenido mejor  
amigo en la vida. Te extraño.

A mis pequeños. Fer, Dulce y Juan Pablo.



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Estado del arte . . . . .	2
1.2. Organización del trabajo . . . . .	5
<b>2. Movimiento restringido cooperativo sin fricción</b>	<b>7</b>
2.1. Modelo dinámico de un sistema cooperativo . . . . .	10
2.2. Restricciones cinemáticas . . . . .	11
2.3. Posición y velocidad restringida . . . . .	12
2.4. Restricciones de posición y velocidad . . . . .	12
2.5. Método de ortogonalización del espacio articular . . . . .	13
2.6. Principio de ortogonalización . . . . .	14
<b>3. Control descentralizado de robots cooperativos sin medición de velocidad/fuerza</b>	<b>17</b>
3.1. Controlador implícito con estimación de velocidad . . . . .	18
3.2. Observador de velocidad . . . . .	22
3.3. Demostración del Lema 3.2.1 . . . . .	26
3.4. Demostración del Teorema 3.2.1 . . . . .	27
3.5. Controlador con observadores de velocidad/fuerza . . . . .	29
3.6. Diseño de observador de fuerza . . . . .	31
3.7. Demostración del Teorema 3.6.1 . . . . .	33
<b>4. Resultados experimentales</b>	<b>37</b>
4.1. Trayectorias de posición . . . . .	38
4.2. Trayectorias de fuerza . . . . .	44
4.3. Descripción de los experimentos . . . . .	44
4.4. ganancias de control . . . . .	45

---

4.5.	Resultados experimentales para controlador implícito con estimación de velocidad y movimiento circular rápido, $T=1[s]$ . . .	46
4.6.	Resultados experimentales para controlador implícito con estimación de velocidad y movimiento circular lento, $T=40[s]$ . . .	53
4.7.	Resultados experimentales para esquema de control sin movimiento circular . . . . .	59
4.8.	Discusión y conclusión de resultados experimentales de esquema sin observador de fuerza . . . . .	65
4.9.	Resultados experimentales para controlador con observadores de velocidad/fuerza y movimiento circular rápido $T=1[s]$ . . .	66
4.10.	Resultados experimentales para controlador con observadores de velocidad/fuerza y movimiento circular lento $T=40[s]$ . . .	75
4.11.	Resultados experimentales para controlador con observadores de velocidad/fuerza sin movimiento circular . . . . .	83
4.12.	Discusión y conclusión de resultados experimentales de esquema con observador de velocidad/fuerza . . . . .	91
4.13.	Tablas de índice de desempeño . . . . .	91
4.14.	Tabla de comparación de $\mathcal{I}^2$ de error en coordenadas cartesianas	92
4.15.	Tabla de comparación de $\mathcal{I}^2$ de error en coordenadas articulares	93
4.16.	Tabla de comparación de $\mathcal{I}^2$ de error en fuerza . . . . .	94
4.17.	Tabla de comparación de $\mathcal{I}^2$ de errores de observación . . . . .	95
<b>5.</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>97</b>
5.1.	Contribuciones en el campo de robots cooperativos . . . . .	98
<b>A.</b>	<b>Propiedades y definiciones de un sistema de robots cooperativos</b>	<b>99</b>
A.1.	Suposiciones del sistema cooperativo . . . . .	102
A.1.1.	Suposiciones relacionadas con los manipuladores . . .	103
A.1.2.	Suposiciones relacionadas con el objeto a manipular .	103
A.1.3.	Suposiciones relacionadas con las restricciones . . . . .	103

---



# Índice de figuras

2.1. Tarea de manipulación de un objeto mediante robots cooperativos. . . . .	8
2.2. Tarea de manipuladores en coordinación para actuar herramienta. . . . .	9
2.3. Tarea de ensamble con robots cooperativos. . . . .	9
2.4. Esquema de robots A465 y A255 de <i>CRS Robotics</i> . . . . .	10
2.5. Principio de ortogonalización . . . . .	15
3.1. Diagrama a bloques de observador de velocidad. . . . .	22
4.1. Robots A465 y A255 de <i>CRS Robotics</i> . . . . .	38
4.2. Trayectorias de posición deseada en coordenadas cartesianas con movimiento circular rápido. a) $x_1$ , b) $y_1$ , c) $z_1$ , d) $x_2$ , e) $y_2$ , f) $z_2$ . . . . .	41
4.3. Trayectorias de posición deseada en coordenadas cartesianas con movimiento circular lento. a) $x_1$ , b) $y_1$ , c) $z_1$ , d) $x_2$ , e) $y_2$ , f) $z_2$ . . . . .	42
4.4. Trayectorias de posición deseada en coordenadas cartesianas sin movimiento circular. a) $x_1$ , b) $y_1$ , c) $z_1$ , d) $x_2$ , e) $y_2$ , f) $z_2$ . . . . .	43
4.5. Desviación angular del robot A465. . . . .	47
4.6. Errores de seguimiento en coordenadas articulares. a) $\tilde{q}_{11}$ , b) $\tilde{q}_{12}$ , c) $\tilde{q}_{13}$ , d) $\tilde{q}_{21}$ , e) $\tilde{q}_{22}$ , f) $\tilde{q}_{23}$ . . . . .	48
4.7. Errores de seguimiento en coordenadas cartesianas. a) $\tilde{x}_1$ , b) $\tilde{y}_1$ , c) $\tilde{z}_1$ , d) $\tilde{x}_2$ , e) $\tilde{y}_2$ , f) $\tilde{z}_2$ . . . . .	49
4.8. Fuerza medida de los robots A465 y A255. a) $F_{x_1}$ . b) $F_{y_1}$ . c) $F_{z_1}$ . d) $F_{x_2}$ . e) $F_{y_2}$ . f) $F_{z_2}$ . — medida. - - - deseada. . . . .	50
4.9. Errores de observación de velocidad articular. a) $z_{11}$ . b) $z_{12}$ . c) $z_{13}$ . d) $z_{21}$ . e) $z_{22}$ . f) $z_{23}$ . . . . .	51

4.10. Voltajes de entrada. a) $v_{11}$ . b) $v_{12}$ . c) $v_{13}$ . d) $v_{21}$ . e) $v_{22}$ . f) $v_{23}$ .	52
4.11. Errores de seguimiento en coordenadas articulares. a) $\tilde{q}_{11}$ , b) $\tilde{q}_{12}$ , c) $\tilde{q}_{13}$ , d) $\tilde{q}_{21}$ , e) $\tilde{q}_{22}$ , f) $\tilde{q}_{23}$ . . . . .	54
4.12. Errores de seguimiento en coordenadas cartesianas. a) $\tilde{x}_1$ , b) $\tilde{y}_1$ , c) $\tilde{z}_1$ , d) $\tilde{x}_2$ , e) $\tilde{y}_2$ , f) $\tilde{z}_2$ . . . . .	55
4.13. Fuerza medida de los robots A465 y A255. a) $F_{x_1}$ . b) $F_{y_1}$ . c) $F_{z_1}$ . d) $F_{x_2}$ . e) $F_{y_2}$ . f) $F_{z_2}$ . — medida. - - - deseada. . . . .	56
4.14. Errores de observación de velocidad articular. a) $z_{11}$ . b) $z_{12}$ . c) $z_{13}$ . d) $z_{21}$ . e) $z_{22}$ . f) $z_{23}$ . . . . .	57
4.15. Voltajes de entrada. a) $v_{11}$ . b) $v_{12}$ . c) $v_{13}$ . d) $v_{21}$ . e) $v_{22}$ . f) $v_{23}$ .	58
4.16. Errores de seguimiento en coordenadas articulares. a) $\tilde{q}_{11}$ , b) $\tilde{q}_{12}$ , c) $\tilde{q}_{13}$ , d) $\tilde{q}_{21}$ , e) $\tilde{q}_{22}$ , f) $\tilde{q}_{23}$ . . . . .	60
4.17. Errores de seguimiento en coordenadas cartesianas. a) $\tilde{x}_1$ , b) $\tilde{y}_1$ , c) $\tilde{z}_1$ , d) $\tilde{x}_2$ , e) $\tilde{y}_2$ , f) $\tilde{z}_2$ . . . . .	61
4.18. Fuerza medida de los robots A465 y A255. a) $F_{x_1}$ . b) $F_{y_1}$ . c) $F_{z_1}$ . d) $F_{x_2}$ . e) $F_{y_2}$ . f) $F_{z_2}$ . — medida. - - - deseada. . . . .	62
4.19. Errores de observación de velocidad articular. a) $z_{11}$ . b) $z_{12}$ . c) $z_{13}$ . d) $z_{21}$ . e) $z_{22}$ . f) $z_{23}$ . . . . .	63
4.20. Voltajes de entrada. a) $v_{11}$ . b) $v_{12}$ . c) $v_{13}$ . d) $v_{21}$ . e) $v_{22}$ . f) $v_{23}$ .	64
4.21. Errores de seguimiento en coordenadas articulares. a) $\tilde{q}_{11}$ , b) $\tilde{q}_{12}$ , c) $\tilde{q}_{13}$ , d) $\tilde{q}_{21}$ , e) $\tilde{q}_{22}$ , f) $\tilde{q}_{23}$ . . . . .	68
4.22. Errores de seguimiento en coordenadas cartesianas. a) $\tilde{x}_1$ , b) $\tilde{y}_1$ , c) $\tilde{z}_1$ , d) $\tilde{x}_2$ , e) $\tilde{y}_2$ , f) $\tilde{z}_2$ . . . . .	69
4.23. Fuerza medida de los robots A465 y A255. a) $F_{x_1}$ . b) $F_{y_1}$ . c) $F_{z_1}$ . d) $F_{x_2}$ . e) $F_{y_2}$ . f) $F_{z_2}$ . — medida. - - - deseada. . . . .	70
4.24. Errores de observación de velocidad articular. a) $z_{11}$ . b) $z_{12}$ . c) $z_{13}$ . d) $z_{21}$ . e) $z_{22}$ . f) $z_{23}$ . . . . .	71
4.25. Voltajes de entrada. a) $v_{11}$ . b) $v_{12}$ . c) $v_{13}$ . d) $v_{21}$ . e) $v_{22}$ . f) $v_{23}$ .	72
4.26. Errores de fuerza estimada menos fuerza deseada. a) $\Delta\hat{\lambda}_1$ , b) $\Delta\hat{\lambda}_2$ . . . . .	73
4.27. Fuerza real (Azul) Vs. estimada (Roja). a) $\lambda_1$ Vs $\hat{\lambda}_1$ , b) $\lambda_2$ Vs $\hat{\lambda}_2$	74
4.28. Errores de seguimiento en coordenadas articulares. a) $\tilde{q}_{11}$ , b) $\tilde{q}_{12}$ , c) $\tilde{q}_{13}$ , d) $\tilde{q}_{21}$ , e) $\tilde{q}_{22}$ , f) $\tilde{q}_{23}$ . . . . .	76
4.29. Errores de seguimiento en coordenadas cartesianas. a) $\tilde{x}_1$ , b) $\tilde{y}_1$ , c) $\tilde{z}_1$ , d) $\tilde{x}_2$ , e) $\tilde{y}_2$ , f) $\tilde{z}_2$ . . . . .	77
4.30. Fuerza medida de los robots A465 y A255. a) $F_{x_1}$ . b) $F_{y_1}$ . c) $F_{z_1}$ . d) $F_{x_2}$ . e) $F_{y_2}$ . f) $F_{z_2}$ . — medida. - - - deseada. . . . .	78

4.31. Errores de observación de velocidad articular. a) $z_{11}$ . b) $z_{12}$ . c) $z_{13}$ . d) $z_{21}$ . e) $z_{22}$ . f) $z_{23}$ . . . . .	79
4.32. Voltajes de entrada. a) $v_{11}$ . b) $v_{12}$ . c) $v_{13}$ . d) $v_{21}$ . e) $v_{22}$ . f) $v_{23}$ .	80
4.33. Errores de fuerza estimada menos fuerza deseada. a) $\Delta\tilde{\lambda}_1$ , b) $\Delta\tilde{\lambda}_2$ . . . . .	81
4.34. Fuerza real (Azul) Vs. estimada (Roja). a) $\lambda_1$ Vs $\hat{\lambda}_1$ , b) $\lambda_2$ Vs $\hat{\lambda}_2$	82
4.35. Errores de seguimiento en coordenadas articulares. a) $\tilde{q}_{11}$ , b) $\tilde{q}_{12}$ , c) $\tilde{q}_{13}$ , d) $\tilde{q}_{21}$ , e) $\tilde{q}_{22}$ , f) $\tilde{q}_{23}$ . . . . .	84
4.36. Errores de seguimiento en coordenadas cartesianas. a) $\tilde{x}_1$ , b) $\tilde{y}_1$ , c) $\tilde{z}_1$ , d) $\tilde{x}_2$ , e) $\tilde{y}_2$ , f) $\tilde{z}_2$ . . . . .	85
4.37. Fuerza medida de los robots A465 y A255. a) $F_{x_1}$ . b) $F_{y_1}$ . c) $F_{z_1}$ . d) $F_{x_2}$ . e) $F_{y_2}$ . f) $F_{z_2}$ . — medida. - - - deseada. . . . .	86
4.38. Errores de observación de velocidad articular. a) $z_{11}$ . b) $z_{12}$ . c) $z_{13}$ . d) $z_{21}$ . e) $z_{22}$ . f) $z_{23}$ . . . . .	87
4.39. Voltajes de entrada. a) $v_{11}$ . b) $v_{12}$ . c) $v_{13}$ . d) $v_{21}$ . e) $v_{22}$ . f) $v_{23}$ .	88
4.40. Errores de fuerza estimada menos fuerza deseada. a) $\Delta\tilde{\lambda}_1$ , b) $\Delta\tilde{\lambda}_2$ . . . . .	89
4.41. Fuerza real Vs estimada. a) $\lambda_1$ Vs $\hat{\lambda}_1$ , b) $\lambda_2$ Vs $\hat{\lambda}_2$ . . . . .	90



# Resumen

En esta tesis se presenta el control descentralizado de un sistema de robots cooperativos, el cual usa únicamente retroalimentación de posición angular, es decir, se restringe el uso de transductores de velocidad angular y de fuerza de contacto. El objetivo o tarea designada al sistema cooperativo es conseguir la manipulación de un objeto en el espacio de trabajo mediante el seguimiento de una trayectoria deseada de posición y una de fuerza. En este trabajo se han propuesto dos esquemas de control híbrido. El primero, es un enfoque de control descentralizado de posición y de fuerza (posición/fuerza) con un observador lineal de velocidad. El segundo esquema de control es un enfoque descentralizado de posición/fuerza con dos observadores dinámicos, el primero es un observador de velocidad y el segundo es uno de fuerza de contacto. El método usado en ambos esquemas de control propuestos está basado en el principio de ortogonalización en el espacio articular. En los dos esquemas propuestos, no es considerada la dinámica del objeto, en lugar de ello, se hace uso de las ecuaciones de restricción estática (restricciones holónomas) y el modelo de los manipuladores A465 y A255 de la marca canadiense *CRS Robotics* ubicados en el laboratorio de robótica del Edificio de Posgrado de la Facultad de Ingeniería (UNAM). En el reporte de resultados experimentales tanto para el primero como para el segundo esquema de control se logra un buen desempeño de control tanto de posición como de fuerza, con lo cual, se cumple el objetivo durante movimiento restringido. Los resultados experimentales han sido llevados a cabo con un tiempo de muestreo de 10 milisegundos, sin embargo, se ha comprobado que con una reducción del tiempo de muestreo es posible mejorarlos. La estabilidad del sistema para ambos esquemas de control es validado mediante el Segundo Método de Lyapunov, de esta manera, el controlador-observador provee un seguimiento asintótico en las trayectorias prescritas y en la fuerza deseada. Finalmente, los resultados experimentales han mostrado que es posible el control de robots cooperativos

sin transductores de velocidad/fuerza mediante una ley de control adecuada basada en observadores.

---

# Prólogo

El control en movimiento libre de robots industriales, robots manipuladores o simplemente manipuladores está basado en la información de sus coordenadas en el espacio de trabajo, desplazamientos angulares y velocidades angulares. Sin embargo, cuando un manipulador o grupo de manipuladores desempeñan operaciones de ensamble, maquinado superficial, devastado, esmerilado ó manipulación, es decir, cuando el efector final de un manipulador esta en contacto con alguna superficie (denotado comúnmente como movimiento restringido), es de suma importancia conocer la información sobre la fuerza que dicho manipulador ejerce sobre tal superficie, esta fuerza puede ser medida mediante sensores de fuerza ubicados en el efector final de dicho manipulador. Ahora bien, Si el objetivo de control de un manipulador es ejercer movimiento y fuerza de manera simultánea (llamado control híbrido) sobre alguna superficie para realizar una tarea específica, entonces en este sentido, se dice que un manipulador incrementa su capacidad para realizar tareas de mayor complejidad a las simplemente realizadas en movimiento libre. Por su impacto e importancia en la industria, el control híbrido ha resultado de gran interés en el desarrollo de nuevos enfoques y esquemas de control tanto en la industria como en la investigación.

La investigación en problemas de control de fuerza de manipuladores se mantiene vigente desde la década de los ochentas; este tópico esta en pleno crecimiento y es de vital importancia en el campo de la robótica aplicada. Actualmente, se ha observado que en la mayoría de los esquemas de control híbrido existentes en la literatura, la retroalimentación de fuerza mediante sensores produce una efectiva corrección de los errores dinámicos durante una tarea de fuerza deseada. Sin embargo, el uso de sensores de fuerza no garantiza un control de fuerza adecuado durante ciertos periodos de su operación, ya que las mediciones de fuerza pueden verse alteradas o afectadas cuando en

los sensores de fuerza se manifiestan principalmente tres efectos indeseables, el primero puede ser manifestado por vibraciones mecánicas en los componentes internos que lo constituyen, como segundo efecto se tiene a la presencia de temperaturas inducidas generadas en su entorno y suficientes como para deteriorar la medición registrada por dicho transductor, por último, el envejecimiento por el desgaste de los componentes mecánicos que lo constituyen. Como resultado a dichos efectos, el registro en las mediciones mostrará un deterioro en el desempeño de control de fuerza en un robot ó grupo de robots durante una tarea deseada. En el caso de tareas como esmerilado y devastado de piezas, el resultado del trabajo final podría presentar pequeñas irregularidades o excesos de material sobre una superficie trabajada. Para el caso de manipulación de objetos con robots cooperativos, los efectos de una débil o excesiva fuerza aplicada ocasionaría daño a los objetos manipulados durante el periodo de agarre.

En consecuencia a lo anterior, surge la motivación por presentar nuevas alternativas para sustituir sensores de fuerza por algoritmos de control que puedan mejorar el desempeño de control de fuerza en manipuladores industriales. Especialmente, en aquellos sistemas que cuentan con una mayor capacidad de manipulación y carga de objetos, es decir, en los llamados sistemas de robots cooperativos.

---



# Capítulo 1

## Introducción

Actualmente, uno de los problemas de investigación de más interés en la robótica práctica y teórica, es el control de posición y de fuerza (posición/fuerza) de manipuladores interactuando con entornos restringidos, es decir, con superficies de tipo estático y dinámico que permite obtener una gran variedad de beneficios en la industria, tema que ha tomado gran relevancia en este contexto es la manipulación cooperativa de robots. Un sistema de robots cooperativos tiene como objetivo realizar tareas de manipulación de una complejidad mayor a las que puede realizar un solo robot. Para ello, los esquemas de control utilizados deben de considerar la medición de señales de posición, velocidad y fuerza mediante sensores de alto costo, considerable peso y tamaño para cumplir este objetivo. Aunque puede decirse que dichos sensores han mostrado ser eficaces, no puede descartarse que estos dispositivos sean vulnerables a fallar o a presentar diversas anomalías durante la operación de una tarea deseada. Algunos efectos indeseables tales como descalibración, vibraciones, envejecimiento de componentes e inducción de temperaturas pueden llegar a ocasionar distorsión en la señal entregada por tales transductores. En consecuencia, la motivación de plantear nuevas soluciones para hacer posible el control de sistemas electromecánicos con el menor número de sensores posible, ha impulsado técnicas de control como los que se presentan en este trabajo de tesis, que abordan la reducción de sensores de velocidad y de fuerza en un sistema mecánico restringido como lo es un sistema de robots coordinados. El desarrollo de esta tesis gira en torno a la siguiente pregunta:

¿Es posible sustituir la retroalimentación velocidad/fuerza de un sistema de robots coordinados mediante estimadores dinámicos?, y de ser posible, ¿se

garantizará un movimiento restringido estable?.

Como se verá en el presente trabajo, la respuesta a estas preguntas es positiva en algunos casos.

## 1.1. Estado del arte

El estudio convencional de control de manipuladores trata con el movimiento en el espacio sin contacto con el entorno. El problema de controlar manipuladores con articulaciones rígidas los cuales mantienen contacto con objetos en su entorno es de central importancia en algunas aplicaciones. Muchas tareas de los robots corresponden a actividades peligrosas o desagradables para los seres humanos. En los laboratorios médicos o de investigación, los robots manejan materiales que conllevan a posibles riesgos, como muestras radioactivas, sustancias explosivas, muestras de fluidos corporales, etc. En otros casos, los robots se emplean en tareas repetitivas y monótonas en las que el rendimiento de una persona podría disminuir con el tiempo. Actualmente ya se emplean robots para ayudar a los cirujanos en intervenciones quirúrgicas. Otras actividades que entrañan gran peligro para las personas, como la localización de barcos hundidos, la búsqueda de depósitos minerales submarinos, la ubicación de minas, exploración de volcanes activos, exploración espacial, etc, son razones especialmente apropiadas para emplear robots con alta capacidad de manipulación.

Uno de los principales usuarios de robots es la industria. Grandes empresas utilizan robots para trabajos como carga de máquinas, construcción de estructuras de acero, transferencia de piezas y montaje. Estas son sólo algunas de las aplicaciones industriales de la robótica que más están creciendo. Exige una mayor precisión que la soldadura o la pintura y emplea sensores de alto costo y computadoras de última generación. En estas actividades la cooperación de robots es esencial. Una cooperación de robots incrementa la posibilidad de llevar a cabo tareas más complicadas y de mayor capacidad y flexibilidad de manipulación en procedimientos de ensamble, las cuales no pueden llevarse a cabo con un solo robot.

Se ha establecido que la interacción entre un robot manipulador y su entorno es una condición necesaria para desarrollar una gran cantidad de tareas prácticas. Esta situación es generalmente citada como movimiento restringi-

---

do (Siciliano y Villani 1999). Sin embargo, el movimiento restringido de un sistema de robots cooperativos carecería de efectividad en la realización de diversas tareas sin un control de coordinación efectivo. En el desarrollo de técnicas para lograr el control de dos o más manipuladores, se han propuesto principalmente tres tipos de enfoques: arquitectura maestro-esclavo, arquitecturas de control centralizado y descentralizado. Sobresale la arquitectura descentralizada en el hecho de que no hay necesidad de operar matrices de alta-dimensión y su programación es sencilla, de tal manera que su implementación es más simple y directa. Por ejemplo, Liu *et al.* (1997) proponen un control descentralizado adaptable basado en modelo. En Leksono *et al.* (1997), Leksono *et al.* (1998) y Caccavale *et al.* (1999) un control de movimiento cooperativo descentralizado es propuesto para manipular un objeto mediante un sistema de múltiples robots. Recientemente ha sido necesario considerar el desarrollo de controladores no lineales para robots manipuladores, enfocados en reducir el número de sensores requeridos para implementar un algoritmo de control. Sin embargo, la literatura disponible en robots cooperativos que no disponen de medición de velocidad articular ni medición de fuerza de contacto en el efector final es muy escasa. De hecho, la carencia de medición de velocidad puede ser compensada mediante la medición de datos con diferenciación numérica. No obstante, investigaciones recientes han sugerido que un observador de velocidad en una ley de control tiene un mejor desempeño (Arteaga Pérez 2003), (Arteaga Pérez y Kelly 2004).

Matemáticamente, es posible determinar el comportamiento de un sistema de robots restringidos de manera holónoma o re-holónoma mediante un conjunto de ecuaciones diferenciales acoplado a un conjunto de ecuaciones algebraicas. Dicho sistema de ecuaciones es denotado comúnmente como (DAE) ó también como ecuación diferencial/algebraica (Petzold y Lötstedt 1986). Este tipo de sistemas se encuentran frecuentemente en el modelado de problemas de ingeniería; por ejemplo, en la simulación de redes eléctricas y sistemas mecánicos. Sin embargo, un problema característico de las DAE es la dificultad para controlar su comportamiento dinámico, lo que se debe principalmente al acoplamiento de restricciones dinámicas con restricciones algebraicas. Algunos investigadores han propuesto principalmente dos enfoques para resolver el problema de control; el primero es llamado modelo reducido y el segundo es el método de ortogonalización en el espacio articular (joint space orthogonalization method). En el primer método, McClamroch y Wang (1988) desarrollaron una transformación no lineal para convertir un sistema

restringido a dos subsistemas reducidos matemáticamente tratables. Basados en este modelo, Chiu *et al.* (2004) obtienen señales de posición y fuerza en robots restringidos con incertidumbre cinemática. Extendiendo las aplicaciones con dicho enfoque, la eliminación de sensores de fuerza de alto costo y el uso de observadores asintóticos para estimar la fuerza de contacto ya ha sido contemplada. En Huang y Tzeng (1989), una estrategia de control de fuerza es propuesta usando un estimador de fuerza asintótico, el cual es construido en un marco de transformaciones no lineales del subsistema reducido; en este esquema, una extensión del principio de separación dada en los resultados de Vidyasagar (1980) se aplican para el diseño del observador de fuerza de contacto. En Huang y Tzeng (1991), dos tipos de observadores de fuerza son diseñados para sistemas de robots restringidos. En este modelo, las variables algebraicas son consideradas como variables de estado sin ser regidas por ecuaciones diferenciales. En de Queiroz *et al.* (1996), el problema de diseñar un controlador de posición-fuerza durante movimiento restringido es llevado a cabo; el controlador propuesto está basado en el conocimiento exacto de la dinámica del sistema y no requiere medición de velocidad articular ni de fuerza en el efector final. Ningún resultado experimental es presentado. En de Queiroz *et al.* (1997) un enfoque de control adaptable es propuesto que no requiere medición de velocidad; aunque se tiene la desventaja de que la transformación del sistema debe de ser llevada a cabo en línea, aumentando de manera drástica el cálculo computacional.

Con la finalidad de presentar una solución alterna a tal problema, Liu y Arimoto (1996) proponen un controlador sencillo sin retroalimentación de fuerza mediante el uso del método de ortogonalización en el espacio articular, el cual tiene por objetivo desacoplar señales de posición/fuerza en el espacio articular mediante matrices de proyección ortogonal, con la ventaja de proporcionar un modelo matemático del sistema fácilmente tratable. Con base en este esquema, Cheah *et al.* (2003) desarrollan una ley de control para regulación de fuerza en robots restringidos con incertidumbre cinemática. Sin embargo, su enfoque aún necesita medición de velocidad y ningún resultado experimental es presentado; tampoco se considera el diseño de observadores de fuerza de contacto.

A lo largo de este trabajo de tesis, el esquema de ortogonalización en el espacio articular es usado para diseñar dos controladores de arquitectura descentralizada para seguimiento de posición/fuerza en sistemas de robots cooperativos,

---

ambos sin retroalimentación de velocidad articular ni fuerza de contacto en el efector final. La estabilidad es probada mediante el uso de funciones de Lyapunov. Resultados experimentales respaldan la teoría desarrollada. El enfoque desarrollado en esta tesis está basado en el trabajo presentado por Gudiño Lau *et al.* (2004), pero en este trabajo se introducen mejoras respecto al algoritmo original, tales como un observador de velocidad más sencillo y el desarrollo de un observador asintótico de fuerza. Como ya se ha mencionado, ninguna medición de fuerza es necesaria en los algoritmos presentados.

## 1.2. Organización del trabajo

El presente trabajo está constituido por 5 capítulos y un Apéndice, cuya descripción es la siguiente:

En el Capítulo 1 se desglosa el estado del arte de robots cooperativos y las estrategias de control de fuerza utilizadas en la literatura; se da cita a las contribuciones más importantes en el ámbito de robots cooperativos sin medición velocidad/fuerza, finalmente la descripción del contenido y su organización. El capítulo 2 presenta el modelo dinámico de un sistema cooperativo mecánicamente restringido y se hace referencia del método de ortogonalización en el espacio articular, fundamental para el desarrollo de este trabajo. En el Capítulo 3 se describe el diseño de dos esquemas de control descentralizado para robots cooperativos durante movimiento restringido sin medición de velocidad ni de fuerza. Se propone un observador de velocidad lineal de alta ganancia y es llevado a cabo el diseño de un observador asintótico de fuerza. Finalmente, se presentan los teoremas correspondientes a cada esquema de control y la demostración de estabilidad explícita de los mismos utilizando el segundo método de Lyapunov. En el Capítulo 4 se presentan los resultados experimentales de los dos esquemas de control del Capítulo 3 con una extensión de discusión y conclusión de los resultados experimentales obtenidos. Las conclusiones y contribuciones del desarrollo teórico-experimental se exponen en el capítulo 5. En el Apéndice A se incluyen las propiedades, suposiciones y definiciones utilizadas a lo largo del diseño de los esquemas de control y observadores propuestos.



## Capítulo 2

# Movimiento restringido cooperativo sin fricción

En la industria automotriz y de ensamblado de partes los robots manipuladores juegan un papel fundamental en tareas donde la calidad y rapidez son un factor necesario e indispensable. Se pueden distinguir fácilmente dos tipos de aplicación de los manipuladores según su forma de interactuar con el ambiente o espacio de trabajo; la interacción con el ambiente tiene significado cuando el efector final de un manipulador está en contacto con alguna superficie, en caso contrario se tiene movimiento libre. En éste entendido, se ha denominado sistema mecánico restringido o simplemente robots restringidos a los robots con interacción en su ambiente de trabajo. Algunas aplicaciones industriales son el esmerilado, devastado de piezas, dibujo, corte; etc. La ventaja principal de un sistema restringido es la capacidad de ejercer fuerza sobre alguna superficie con el efector final. Este intercambio de movilidad por fuerza es una cualidad que hace posible el control híbrido de robots. Extendiendo esta cualidad a configuraciones de robots de mayor complejidad como los robots cooperativos, los beneficios correspondientes pueden ser reflejados en un sin número de aplicaciones en la industria e investigación (transferencia de piezas, montaje de estructuras, ensamble de partes, manipulación de sustancias, exploración marina, micro tecnología, etc.).

La manipulación de objetos rígidos con un esquema de robots cooperativos impone algunas restricciones cinemáticas y dinámicas complejas al igual que fuertes requerimientos para lograr agarre estable, control rápido, distribución de cargas, eficiente algoritmo de planeación de trayectorias, una tarea

de transición estable, compensación de fuerzas de fricción y eficiente balance energético en lazo cerrado. Tales características proporcionan mayor destreza, capacidad de manipulación y flexibilidad en tareas de ensamble. Una variedad de enfoques sobre robots cooperativos han sido expuestos en la literatura. Los más relevantes son: Enfoque de distribución de carga (Zheng y Luh 1988), cadena en cinemática cerrada (Tarn *et al.* 1987), enfoque maestro-esclavo (Arimoto 1987), control de posición fuerza híbrido (Liu *et al.* 1997), dinámica de orden reducido (McClamroch y Wang 1988), control de fuerza basado en pasividad (Liu *et al.* 1997). Cuando un sistema cooperativo sostiene un objeto indeformable en  $m$  puntos independientes, un conjunto de  $m$  restricciones independientes es impuesta sobre cada dedo. En consecuencia la tarea será controlar simultáneamente la posición y velocidad de cada dedo conforme las fuerzas internas aplicadas sobre el objeto aseguran el agarre y controlar las fuerzas externas las cuales mueven al objeto mismo.

En la Figura 2.1 se muestra la manipulación de un objeto por dos manipuladores en coordinación. El objetivo es sujetar un objeto con una fuerza suficientemente grande para evitar que gire o resbale y trasladarlo dentro de su espacio de trabajo, dicha tarea sólo se puede lograr con un diseño apropiado de control tanto de posición como de fuerza, denotado en la literatura como control de posición/fuerza o control híbrido. Diversos objetos de diferentes formas tamaños y pesos pueden ser levantados y trasladados, lo cual no puede ser hecho por un solo manipulador. La ventaja se debe a que la distribución de cargas o exceso de longitud pueden ser compensadas por dos o más manipuladores en cooperación.

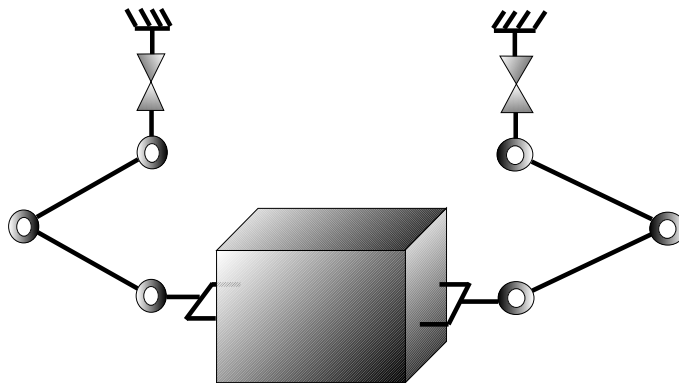


Figura 2.1: Tarea de manipulación de un objeto mediante robots cooperativos.



En la Figura 2.2 se muestra un ejemplo de una aplicación utilizando una herramienta por dos manipuladores coordinados. En este caso, el uso de una herramienta o efector final llega a ser posible con una apropiada rigidez del sistema. La cinemática en lazo cerrado está formada por los manipuladores y la herramienta utilizada.

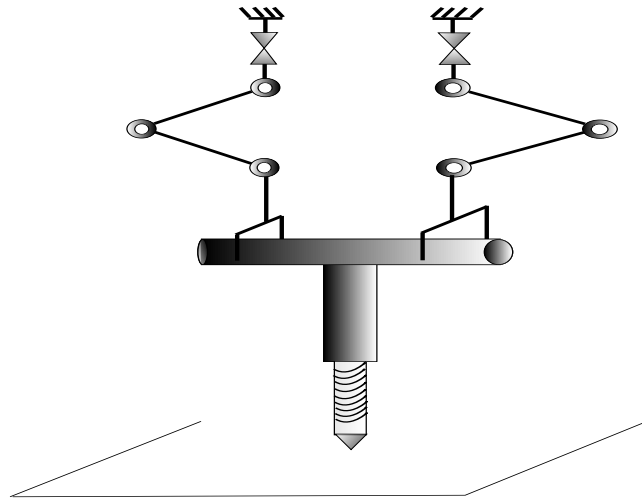


Figura 2.2: Tarea de manipuladores en coordinación para actuar herramienta.

En la Figura 2.3 se muestra una tarea de ensamble de dos partes. Esta tarea puede ser realizada con un solo robot; sin embargo, con un sistema cooperativo se pueden ensamblar dos partes sin ninguna guía ni dispositivo adicional en los manipuladores.

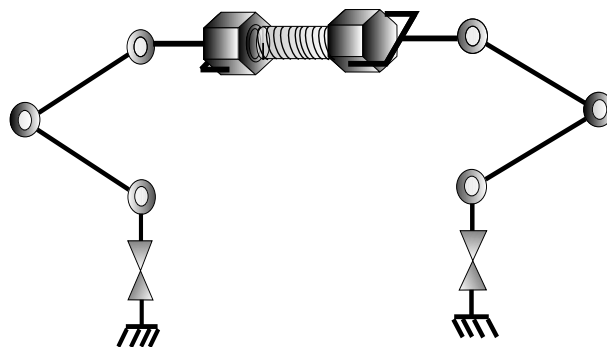


Figura 2.3: Tarea de ensamble con robots cooperativos.

## 2.1. Modelo dinámico de un sistema cooperativo

Un robot manipulador que interactúa con su entorno, puede ser modelado por un conjunto de ecuaciones diferenciales algebraicas no lineales, que provienen de aplicar el principio de Lagrange.

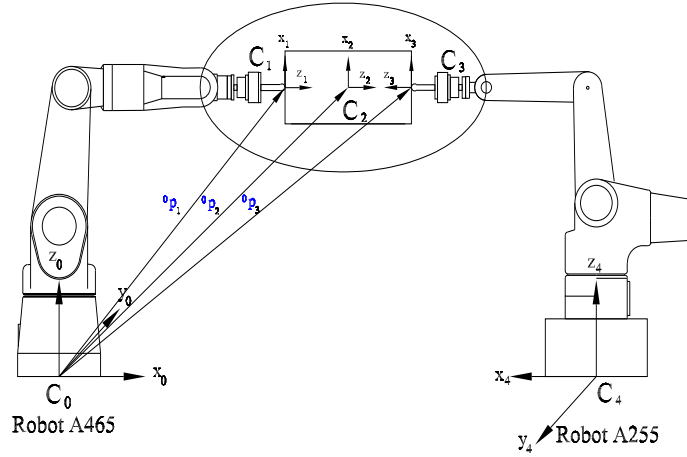


Figura 2.4: Esquema de robots A465 y A255 de *CRS Robotics*.

Las restricciones (A.3) de un sistema de robots cooperativos sosteniendo un objeto, tal como se muestra en la Figura 2.4, originan una reducción de los grados de libertad del sistema, y como consecuencia una reducción en el movimiento del sistema. De esta manera, los grados de libertad de movimiento perdidos, se convierten en fuerzas de contacto, los cuales deben ser incluidas en la dinámica de un sistema cooperativo. El modelo dinámico para cada manipulador  $i$  con movimiento restringido se obtiene empleando la formulación de Lagrange como en Liu *et al.* (1995) y Parra-Vega *et al.* (2001), *i.e.*,

$$\mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i)\ddot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)\dot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{D}_i\dot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{g}_i(\mathbf{q}_i) = \boldsymbol{\tau}_i + \mathbf{J}_{\varphi_i}^T(\mathbf{q}_i)\boldsymbol{\lambda}_i, \quad (2.1)$$

donde  $\mathbf{q}_i \in \mathbb{R}^{n_i}$  es el  $i$ -ésimo vector de coordenadas generalizadas de las articulaciones,  $\mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i) \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$  es la matriz de inercia simétrica positiva definida,  $\mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)\dot{\mathbf{q}}_i \in \mathbb{R}^{n_i}$  es el vector de torques centrífugos y de Coriolis,  $\mathbf{g}_i(\mathbf{q}_i) \in \mathbb{R}^{n_i}$  es el vector de torques gravitacionales,  $\mathbf{D}_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$  es la

matriz diagonal positiva semidefinida que considera los coeficientes de fricción viscosa de las articulaciones,  $\boldsymbol{\tau}_i \in \mathbb{R}^{n_i}$  es el vector de torques actuando en las articulaciones y  $\boldsymbol{\lambda}_i \in \mathbb{R}^{m_i}$  es el vector de multiplicadores de Lagrange; físicamente representan la fuerza aplicada en el punto de contacto.  $\mathbf{J}_{\varphi_i}(\mathbf{q}_i) = \nabla \varphi_i(\mathbf{q}_i) \in \mathbb{R}^{m_i \times n_i}$  es una matriz ortogonal, que en esta tesis su rango se supone completo debido a que se considera que todas las restricciones son independientes.  $\nabla \varphi_i(\mathbf{q}_i)$  denota el gradiente de la superficie del objeto  $\varphi_i \in \mathbb{R}^{m_i}$  que mapea un vector sobre el plano normal al plano tangente en el punto de contacto descrito por (A.3).

## 2.2. Restricciones cinemáticas

Las ecuaciones que describen la dinámica de un sistema de robots cooperativos incorporan un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales acoplado a un conjunto de restricciones holónomas o variables algebraicas impuestas a nivel dinámico sobre los manipuladores. Este conjunto es conocido como sistema de ecuaciones diferenciales-algebraicas o sistema singular de ecuaciones diferenciales (McClamroch 1986).

En este trabajo se considera un sistema cooperativo formado por  $l$  robots manipuladores, de  $n_i$  grados de libertad y  $m_i$  restricciones independientes originadas por la sujeción de un objeto. El número total de articulaciones está dado por  $n = \sum_{i=1}^l n_i$ ; y el número total de restricciones está dado por

$$m = \sum_{i=1}^l m_i, \text{ con } n_i > m_i.$$

El objeto a ser manipulado por el sistema cooperativo es modelado mediante un conjunto de restricciones holónomas-homogéneas (A.1) que restringen el movimiento del robot manipulador en cada punto de contacto. Con ello, la dinámica del objeto no tiene que ser calculada explícitamente para controlar un sistema cooperativo. Es decir; la función de una restricción es relacionar la configuración de la cinemática de un robot con el entorno.

### 2.3. Posición y velocidad restringida

La posición y velocidad restringidas son el resultado del movimiento relativo existente entre cada manipulador de un sistema cooperativo y el objeto manipulado (Arimoto *et al.* 1993a, Naniwa *et al.* 1997, Liu *et al.* 1997). Es decir, la posición y velocidad del efector final de cada manipulador pueden ser definidas en términos de las posiciones y velocidades de los manipuladores restantes. De no ser así, se puede dar el caso en que se pierda el punto de contacto entre alguno de los manipuladores y el objeto.

### 2.4. Restricciones de posición y velocidad

En este trabajo, se considera que restricciones de tipo holónomo se satisfacen en todo instante y se utilizan únicamente para fines de análisis durante todo el análisis matemático.

**Definición 2.4.1** *Dada la restricción holónoma homogénea (A.1), la velocidad restringida del  $i$ -ésimo manipulador es*

$$\dot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{J}_{\varphi_i}(\mathbf{q}_i)\dot{\mathbf{q}}_i = \mathbf{0}. \quad (2.2)$$

En vista de (A.3) se tiene además

$$\sum_{i=1}^l \dot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{0}. \quad (2.3)$$

△

**Definición 2.4.2** *La variable de posición restringida está dada por la integral de la velocidad restringida*

$$\mathbf{p}_i = \int_0^t \mathbf{J}_{\varphi_i}(\mathbf{q}_i)\dot{\mathbf{q}}_i dt = \mathbf{0} \quad (2.4)$$

con  $\mathbf{p}_i = \mathbf{0}$ . Nótese que en el caso de restricciones holónomas se tiene  $\mathbf{p}_i = \varphi_i$ .  
△

---

Cuando se conocen las trayectorias de posición y velocidad deseadas, la velocidad y posición restringida son calculadas como sigue:

$$\sum_{i=1}^l \dot{\mathbf{p}}_{di} = \sum_{i=1}^l \mathbf{J}_{\varphi_i}(\mathbf{q}_{di}) \dot{\mathbf{q}}_{di} = \mathbf{0} \quad (2.5)$$

y

$$\sum_{i=1}^l \mathbf{p}_{di} = \sum_{i=1}^l \int_0^t \mathbf{J}_{\varphi_i}(\mathbf{q}_{di}) \dot{\mathbf{q}}_{di} dt = \mathbf{0}, \quad (2.6)$$

con  $\mathbf{p}_{di} = \mathbf{0}$ . Dados los vectores de velocidad  $\dot{\mathbf{p}}_i$  y posición restringida  $\mathbf{p}_i$ , es posible definir los siguientes errores de velocidad y posición restringida como

$$\Delta \dot{\mathbf{p}}_i \triangleq \dot{\mathbf{p}}_i - \dot{\mathbf{p}}_{di}, \quad (2.7)$$

$$\Delta \mathbf{p}_i \triangleq \mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{di}, \quad (2.8)$$

que satisfacen

$$\sum_{i=1}^l \Delta \dot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{0} \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^l \Delta \mathbf{p}_i = \mathbf{0}. \quad (2.9)$$

Nótese que, dado que  $\dot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{p}_i = \mathbf{0}$  y  $\dot{\mathbf{p}}_{di} = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{p}_{di} = \mathbf{0}$ , los errores son, de hecho, siempre nulos. Sin embargo, esto no significa que  $\mathbf{q}_i = \mathbf{q}_{di}$ , por lo que, para fines de análisis de estabilidad conviene manejar de manera explícita  $\Delta \mathbf{p}_i$  y  $\Delta \dot{\mathbf{p}}_i$ .

## 2.5. Método de ortogonalización del espacio articular

El efector final de un manipulador que está restringido por un entorno rígido no puede moverse libremente a través de este, ya que tiene sus grados de libertad reducidos. Como resultado, al menos uno de sus grados de libertad de movimiento está perdido. Esto ocurre en el punto de contacto con el entorno. Así, la reducción de libertad posicional mientras se desarrollan fuerzas de interacción de contacto motiva el diseño de controladores de posición/fuerza que incorporen este fenómeno. Un robot manipulador restringido tiene  $n_i - m_i$

grados de libertad. Sin embargo, dado que el modelo en el espacio articular (2.1) contiene  $n_i$  variables de posición (*i.e.*,  $\mathbf{q}_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ ), combinado con las  $m_i$  variables de fuerza (*i.e.*,  $\boldsymbol{\lambda}_i \in \mathbb{R}^{m_i}$ ) resulta en  $n_i + m_i$  estados a controlar. Puesto que existen solo  $n_i$  entradas de control, se pueden emplear principalmente dos estrategias para resolver el problema de control de posición/fuerza. Estos se enfocan en desacoplar el conjunto de ecuaciones diferenciales de las variables algebraicas. En McClamroch y Wang (1988) se desarrolla un modelo dinámico reducido mediante una transformación no lineal particionada en control de posición y control de fuerza. La cual es complicada de llevar a cabo en línea. Por otro lado, en Arimoto *et al.* (1993b), Liu *et al.* (1996) y Liu *et al.* (1997) se presenta el desarrollo de un esquema de ortogonalización en el espacio articular que desacopla señales de posición y fuerza en el espacio articular mediante proyecciones ortogonales. En este trabajo de tesis, se empleará el esquema de ortogonalización, dado que permite desacoplar la ley de control en dos partes, una para posición y otra para fuerza de una manera más directa que el modelo reducido de McClamroch y Wang (1988).

## 2.6. Principio de ortogonalización

Suponiendo que la matriz  $\mathbf{J}_{\varphi_i}^T(\mathbf{q}_i)$  es de rango completo, debido a que se considera que todas las restricciones son independientes, se tiene que las fuerzas de reacción o contacto ejercidas sobre el manipulador  $i$  pertenecen al espacio de fuerza  $\boldsymbol{\Omega}_i$ , generado por los vectores columna de  $\mathbf{J}_{\varphi_i}^T(\mathbf{q}_i)$ . En consecuencia, el complemento ortogonal resultante es denotado por  $\mathbf{T}_i$ .

Las matrices que proyectan un vector articular  $\dot{\mathbf{q}}_i$  dentro de los subespacios de posición y fuerza respectivamente, están dadas por (Arimoto *et al.* 1993a, Arimoto *et al.* 1993b, Liu *et al.* 1995)

$$\mathbf{Q}_i(\mathbf{q}_i) = \mathbf{I}_{n_i \times n_i} - \mathbf{J}_{\varphi_i}^+(\mathbf{q}_i)\mathbf{J}_{\varphi_i}(\mathbf{q}_i) \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i} \quad (2.10)$$

$$\mathbf{P}_i(\mathbf{q}_i) = \mathbf{J}_{\varphi_i}^+(\mathbf{q}_i)\mathbf{J}_{\varphi_i}(\mathbf{q}_i) \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}, \quad (2.11)$$

donde la matriz  $\mathbf{Q}_i(\mathbf{q}_i)$  proyecta al subespacio ortogonal de posición  $\mathbf{T}_i$  y la matriz  $\mathbf{P}_i(\mathbf{q}_i)$  al de fuerza  $\boldsymbol{\Omega}_i$ ,  $\mathbf{I}_{n_i \times n_i}$  es la matriz de identidad y  $\mathbf{J}_{\varphi_i}^+(\mathbf{q}_i)$  es la pseudoinversa de Penrose del Jacobiano de la restricción  $\mathbf{J}_{\varphi_i}(\mathbf{q}_i)$ , que se define por

$$\mathbf{J}_{\varphi_i}^+ = \mathbf{J}_{\varphi_i}^T (\mathbf{J}_{\varphi_i} \mathbf{J}_{\varphi_i}^T)^{-1} \in \mathbb{R}^{n_i \times m_i}. \quad (2.12)$$

En la Figura 2.5 se muestran las proyecciones mediante el principio de ortogonalización en el espacio articular. Dada la ortogonalidad entre los espacios de posición y fuerza, se tiene que

$$\mathbf{Q}_i(\mathbf{q}_i)\mathbf{J}_{\varphi_i}^T(\mathbf{q}_i) = \mathbf{0} \quad \text{y} \quad \mathbf{Q}_i(\mathbf{q}_i)\mathbf{J}_{\varphi_i}^+(\mathbf{q}_i) = \mathbf{0}. \quad (2.13)$$

Además cumple con las siguientes relaciones

$$\mathbf{J}_{\varphi_i}(\mathbf{q}_i)\dot{\mathbf{q}}_i = \dot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{0} \quad \implies \quad \mathbf{Q}_i(\mathbf{q}_i)\dot{\mathbf{q}}_i = \dot{\mathbf{q}}_i, \quad (2.14)$$

y

$$\mathbf{P}_i(\mathbf{q}_i)\mathbf{J}_{\varphi_i}^T(\mathbf{q}_i) = \mathbf{J}_{\varphi_i}^T(\mathbf{q}_i). \quad (2.15)$$

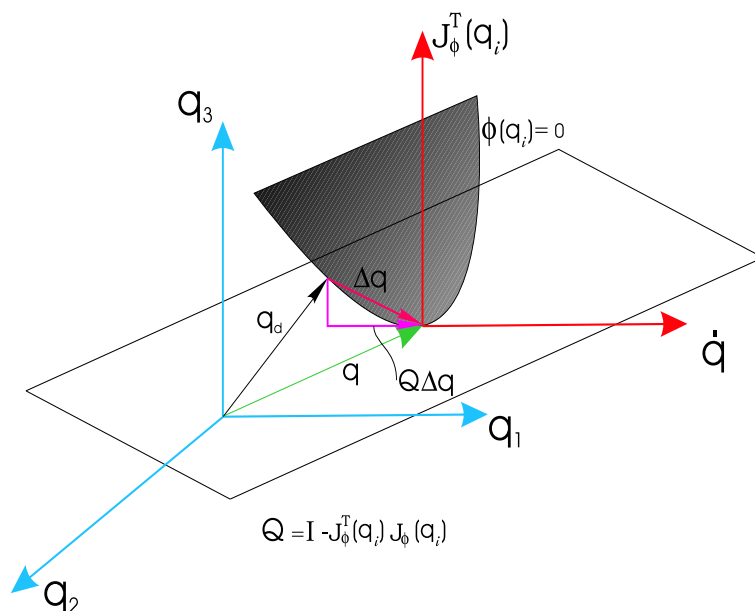


Figura 2.5: Principio de ortogonalización





## Capítulo 3

# Control descentralizado de robots cooperativos sin medición de velocidad/fuerza

En este Capítulo, son diseñados dos controladores de posición/fuerza para robots cooperativos durante movimiento restringido. Los esquemas propuestos se basan en el conocimiento de la dinámica de los manipuladores y no requieren de la medición de la velocidad articular ni de fuerzas de contacto en el efector final. El esquema de ortogonalización en el espacio articular y una arquitectura descentralizada son empleados en ambos algoritmos. En el primer algoritmo un observador de velocidad lineal y el uso de la fuerza deseada de manera implícita son las bases para su desarrollo, mientras que el segundo algoritmo emplea observadores tanto de velocidad como de fuerza. Importantes mejoras sobre el algoritmo original han sido realizadas en ambos casos (observador sin dinámica del modelo y diseño de observador de fuerza sin contemplar dinámica de objeto). Basados en el método directo de Lyapunov, se analiza la estabilidad de los esquemas de control en lazo cerrado. La validación de los métodos propuestos es verificada mediante resultados experimentales. En resumen, el problema que se resuelve consiste en que, dadas las trayectorias de fuerza de contacto y posición deseada en un sistema cooperativo, se determinan los torques necesarios para manipular un objeto de manera estable, sin considerar la retroalimentación de velocidad articular ni fuerzas de contacto en el efector final, con el objetivo de lograr una manipulación deseada y estable y convergencia a cero de los errores de posición, observación y fuerza.

### 3.1. Controlador implícito con estimación de velocidad

Para el diseño de la ley de control, se considera el modelo (3.1), en el cual el sistema completo se encuentra sujeto a  $m_i$  restricciones holónomas, dadas por (A.1). Físicamente, esto significa que un objeto está siendo manipulado y su entorno es modelado por las restricciones (A.1). Considerando que todas las articulaciones son de revolución, las propiedades (2.13)–(A.4) pueden ser establecidas, lo cual implica que las definiciones 2.4.1 y 2.4.2 se satisfacen, asegurando el contacto en  $t = t_0$  de los manipuladores con el objeto. Ahora bien, para realizar el diseño del esquema controlador-observador, las suposiciones y definiciones del Apéndice A son consideradas.

A partir de la dinámica de un sistema de robots cooperativos, dada por

$$\mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i)\ddot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)\dot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{D}_i\dot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{g}_i(\mathbf{q}_i) = \boldsymbol{\tau}_i + \mathbf{J}_{\varphi_i}^T(\mathbf{q}_i)\boldsymbol{\lambda}_i, \quad (3.1)$$

es posible definir los errores de seguimiento, observación, fuerza y posición restringida como

$$\tilde{\mathbf{q}}_i \triangleq \mathbf{q}_i - \mathbf{q}_{di} \quad (3.2)$$

$$\mathbf{z}_i \triangleq \mathbf{q}_i - \hat{\mathbf{q}}_i, \quad (3.3)$$

$$\Delta\boldsymbol{\lambda}_i \triangleq \boldsymbol{\lambda}_i - \boldsymbol{\lambda}_{di}, \quad (3.4)$$

$$\Delta\mathbf{p}_i \triangleq \mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{di}, \quad (3.5)$$

donde  $\mathbf{q}_{di}$  es una trayectoria deseada suave y acotada,  $\mathbf{p}_{di}$  es la posición restringida deseada, la cual satisface  $\boldsymbol{\varphi}_i(\mathbf{q}_i) = \mathbf{0}$ , (*i.e.*  $\mathbf{p}_{di} = \mathbf{0}$ ),  $\hat{(\cdot)}$  representa el valor estimado de  $(\cdot)$  y  $\boldsymbol{\lambda}_{di}$  es la fuerza deseada a ser aplicada por cada manipulador sobre una superficie. Para explotar el hecho de que el principio de ortogonalización se establece en el espacio articular a nivel de velocidad, se propone definir una señal de referencia  $\dot{\mathbf{q}}_{ri}$  a nivel de velocidad, llamada referencia nominal. Ya que las variables de velocidad y de fuerza son físicamente ortogonales y deben de ser controladas, entonces  $\dot{\mathbf{q}}_{ri}$  debe de ser diseñada en función de referencias nominales ortogonales de velocidad y fuerza, resultando

---

las siguientes definiciones

$$\dot{\mathbf{q}}_{ri} \triangleq \mathbf{Q}_i(\mathbf{q}_i) (\dot{\mathbf{q}}_{di} - \mathbf{\Lambda}_i (\hat{\mathbf{q}}_i - \mathbf{q}_{di})) + \mathbf{J}_{\varphi_i}^+(\mathbf{q}_i) (\dot{\mathbf{p}}_{di} - \beta_i \Delta \mathbf{p}_i), \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_i &\triangleq \dot{\mathbf{q}}_i - \dot{\mathbf{q}}_{ri} \\ &= \mathbf{Q}_i(\mathbf{q}_i) (\tilde{\mathbf{q}}_i + \mathbf{\Lambda}_i \tilde{\mathbf{q}} - \mathbf{\Lambda}_i \mathbf{z}_i) + \mathbf{J}_{\varphi_i}^+(\mathbf{q}_i) (\Delta \dot{\mathbf{p}}_i + \beta_i \Delta \mathbf{p}_i), \end{aligned} \quad (3.7)$$

donde  $\mathbf{\Lambda}_i = k_i \mathbf{I} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$  con  $k_i > 0$ , es una matriz diagonal positiva definida, y  $\beta_i$  una constante positiva. Como se mencionó antes, es importante notar que  $\Delta \dot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{0}$  y  $\Delta \mathbf{p}_i = \mathbf{0}$ . Sin embargo, en este desarrollo son utilizadas solo de manera explícita durante el análisis matemático para demostrar la estabilidad del sistema en lazo cerrado. También es importante apreciar, que contrario a  $\dot{\mathbf{q}}_{ri}$  dado en Gudiño Lau *et al.* (2004), aquí el término  $\Delta \mathbf{F}_i = \int_0^t \Delta \boldsymbol{\lambda}_i d\vartheta$  no es utilizado. *Esto significa que ninguna retroalimentación de fuerza es necesaria para implementar el controlador.* Para obtener (3.7), la identidad  $\hat{\mathbf{q}}_i - \mathbf{q}_{di} = \tilde{\mathbf{q}}_i - \mathbf{z}_i$  ha sido utilizada.

A continuación se obtiene la derivada de  $\dot{\mathbf{q}}_{ri}$  como sigue

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{q}}_{ri} &\triangleq \dot{\mathbf{Q}}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) (\dot{\mathbf{q}}_{di} - \mathbf{\Lambda}_i (\hat{\mathbf{q}}_i - \mathbf{q}_{di})) + \dot{\mathbf{J}}_{\varphi_i}^+(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) (\dot{\mathbf{p}}_{di} - \beta_i \Delta \mathbf{p}_i) \\ &\quad + \mathbf{Q}_i(\mathbf{q}_i) \left( \ddot{\mathbf{q}}_{di} - \mathbf{\Lambda}_i (\dot{\hat{\mathbf{q}}}_i - \dot{\mathbf{q}}_{di}) \right) + \mathbf{J}_{\varphi_i}^+(\mathbf{q}_i) (\ddot{\mathbf{p}}_{di} - \beta_i (\dot{\mathbf{p}}_i - \dot{\mathbf{p}}_{di})). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Como se mostrará más adelante,  $\ddot{\mathbf{q}}_{ri}$  es necesario para la implementación del controlador-observador. Es importante notar que  $\dot{\mathbf{Q}}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)$  y  $\dot{\mathbf{J}}_{\varphi_i}^+(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)$  están en función de  $\dot{\mathbf{q}}_i$ , y dado que la velocidad articular no está disponible,  $\ddot{\mathbf{q}}_{ri}$  no puede ser empleado directamente. Se propone entonces el siguiente desarrollo

$$\dot{\mathbf{Q}}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) = \begin{bmatrix} \frac{\partial a_{11}(\mathbf{q}_i)}{\partial \mathbf{q}_i} \dot{\mathbf{q}}_i & \cdots & \frac{\partial a_{1n_i}(\mathbf{q}_i)}{\partial \mathbf{q}_i} \dot{\mathbf{q}}_i \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial a_{n_i 1}(\mathbf{q}_i)}{\partial \mathbf{q}_i} \dot{\mathbf{q}}_i & \cdots & \frac{\partial a_{n_i n_i}(\mathbf{q}_i)}{\partial \mathbf{q}_i} \dot{\mathbf{q}}_i \end{bmatrix}, \quad (3.9)$$

donde  $a_{\alpha\beta}$  es el elemento  $\alpha\beta$  de  $\mathbf{Q}_i(\mathbf{q}_i)$ . Basado en (3.9), considérese la si-

guiente definición

$$\dot{\mathbf{Q}}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_{oi}) \triangleq \begin{bmatrix} \frac{\partial a_{11}(\mathbf{q}_i)}{\partial \mathbf{q}_i} \dot{\mathbf{q}}_{oi} & \cdots & \frac{\partial a_{1n_i}(\mathbf{q}_i)}{\partial \mathbf{q}_i} \dot{\mathbf{q}}_{oi} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial a_{n_i1}(\mathbf{q}_i)}{\partial \mathbf{q}_i} \dot{\mathbf{q}}_{oi} & \cdots & \frac{\partial a_{n_in_i}(\mathbf{q}_i)}{\partial \mathbf{q}_i} \dot{\mathbf{q}}_{oi} \end{bmatrix}, \quad (3.10)$$

con

$$\dot{\mathbf{q}}_{oi} \triangleq \dot{\hat{\mathbf{q}}}_i - \mathbf{\Lambda}_i \mathbf{z}_i. \quad (3.11)$$

Entonces, se puede calcular

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{Q}}_i(\mathbf{q}_i, \mathbf{r}_i) &\triangleq \dot{\mathbf{Q}}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) - \dot{\mathbf{Q}}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_{oi}) \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial a_{11}(\mathbf{q}_i)}{\partial \mathbf{q}_i} \mathbf{r}_i & \cdots & \frac{\partial a_{1n_i}(\mathbf{q}_i)}{\partial \mathbf{q}_i} \mathbf{r}_i \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial a_{n_i1}(\mathbf{q}_i)}{\partial \mathbf{q}_i} \mathbf{r}_i & \cdots & \frac{\partial a_{n_in_i}(\mathbf{q}_i)}{\partial \mathbf{q}_i} \mathbf{r}_i \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

donde

$$\mathbf{r}_i \triangleq \dot{\hat{\mathbf{q}}}_i - \dot{\mathbf{q}}_{oi} = \dot{\mathbf{z}}_i + \mathbf{\Lambda}_i \mathbf{z}_i. \quad (3.13)$$

En vista de (3.10), se propone la siguiente sustitución para  $\ddot{\mathbf{q}}_{ri}$

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{q}}_{ri} &\triangleq \dot{\mathbf{Q}}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_{oi}) (\dot{\mathbf{q}}_{di} - \mathbf{\Lambda}_i (\hat{\mathbf{q}}_i - \mathbf{q}_{di})) + \hat{\mathbf{J}}_{\varphi_i}^+(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_{oi}) (\dot{\mathbf{p}}_{di} - \beta_i \Delta \mathbf{p}_i) \\ &\quad + \mathbf{Q}_i(\mathbf{q}_i) (\ddot{\mathbf{q}}_{di} - \mathbf{\Lambda}_i (\dot{\hat{\mathbf{q}}}_i - \dot{\mathbf{q}}_{di})) + \mathbf{J}_{\varphi_i}^+(\mathbf{q}_i) (\ddot{\mathbf{p}}_{di} - \beta_i (\dot{\mathbf{p}}_i - \dot{\mathbf{p}}_{di})), \end{aligned} \quad (3.14)$$

donde  $\hat{\mathbf{J}}_{\varphi_i}^+(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_{oi})$  se define de la misma manera que  $\dot{\mathbf{Q}}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_{oi})$  en (3.10). Ahora, recordando que  $\dot{\mathbf{p}}_i = \dot{\mathbf{p}}_{di} = \ddot{\mathbf{p}}_{di} = \mathbf{0}$ , de (3.8) es posible obtener

$$\begin{aligned} &\mathbf{Q}_i(\mathbf{q}_i) (\ddot{\mathbf{q}}_{di} - \mathbf{\Lambda}_i (\dot{\hat{\mathbf{q}}}_i - \dot{\mathbf{q}}_{di})) + \mathbf{J}_{\varphi_i}^+(\mathbf{q}_i) (\ddot{\mathbf{p}}_{di} - \beta_i (\dot{\mathbf{p}}_i - \dot{\mathbf{p}}_{di})) \\ &= \ddot{\mathbf{q}}_{ri} - \dot{\mathbf{Q}}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) (\dot{\mathbf{q}}_{di} - \mathbf{\Lambda}_i (\hat{\mathbf{q}}_i - \mathbf{q}_{di})) - \hat{\mathbf{J}}_{\varphi_i}^+(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) (\dot{\mathbf{p}}_{di} - \beta_i \Delta \mathbf{p}_i). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Sustituyendo (3.15) en (3.14) se tiene

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{q}}_{ri} \triangleq & \dot{\mathbf{Q}}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_{oi}) (\dot{\mathbf{q}}_{di} - \mathbf{\Lambda}_i(\hat{\mathbf{q}}_i - \mathbf{q}_{di})) + \dot{\mathbf{J}}_{\varphi_i}^+(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) (\dot{\mathbf{p}}_{di} - \beta_i \Delta \mathbf{p}_i) \\ & + \ddot{\mathbf{q}}_{ri} - \dot{\mathbf{Q}}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) (\dot{\mathbf{q}}_{di} - \mathbf{\Lambda}_i(\hat{\mathbf{q}}_i - \mathbf{q}_{di})) - \dot{\mathbf{J}}_{\varphi_i}^+(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) (\dot{\mathbf{p}}_{di} - \beta_i \Delta \mathbf{p}_i). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Simplificando (3.16) se tiene

$$\ddot{\mathbf{q}}_{ri} = \ddot{\mathbf{q}}_{ri} + \mathbf{e}_i(\mathbf{r}_i), \quad (3.17)$$

donde

$$\mathbf{e}_i(\mathbf{r}_i) \triangleq -\dot{\mathbf{Q}}_i(\mathbf{q}_i, \mathbf{r}_i) (\dot{\mathbf{q}}_{di} - \mathbf{\Lambda}_i(\hat{\mathbf{q}}_i - \mathbf{q}_{di})) - \dot{\mathbf{J}}_{\varphi_i}^+(\mathbf{q}_i, \mathbf{r}_i) (\dot{\mathbf{p}}_{di} - \beta_i \Delta \mathbf{p}_i). \quad (3.18)$$

Donde  $\dot{\mathbf{J}}_{\varphi_i}^+(\mathbf{q}_i, \mathbf{r}_i)$  ha sido calculado de la misma forma que  $\dot{\mathbf{Q}}_i(\mathbf{q}_i, \mathbf{r}_i)$ . El controlador propuesto está dado para cada uno de los manipuladores por

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}_i \triangleq & \mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i) \ddot{\mathbf{q}}_{ri} + \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_{ri}) \dot{\mathbf{q}}_{ri} + \mathbf{D}_i \dot{\mathbf{q}}_{ri} + \mathbf{g}_i(\mathbf{q}_i) \\ & - \mathbf{K}_{R_i} (\dot{\mathbf{q}}_{oi} - \dot{\mathbf{q}}_{ri}) - \mathbf{J}_{\varphi_i}^T(\mathbf{q}_i) \boldsymbol{\lambda}_{di}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

donde  $\mathbf{K}_{R_i} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$  es una matriz diagonal definida positiva. Nótese que de (3.7) y (3.13) se tiene  $\dot{\mathbf{q}}_{oi} - \dot{\mathbf{q}}_{ri} = \mathbf{s}_i - \mathbf{r}_i$ . Substituyendo (3.19) en (3.1), y realizando algunas manipulaciones, se obtiene la dinámica de los robots en lazo cerrado con la ley de control como sigue

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i) \dot{\mathbf{s}}_i = & -\mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) \mathbf{s}_i - \mathbf{K}_{DR_i} \mathbf{s}_i + \mathbf{K}_{R_i} \mathbf{r}_i \\ & + \mathbf{J}_{\varphi_i}^T(\mathbf{q}_i) \Delta \boldsymbol{\lambda}_i - \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_{ri}) \mathbf{s}_i + \mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i) \mathbf{e}_i(\mathbf{r}_i), \end{aligned} \quad (3.20)$$

donde  $\mathbf{K}_{DR_i} \triangleq \mathbf{K}_{R_i} + \mathbf{D}_i$ . A fin de obtener (3.20), la Propiedad A.0.5 ha sido utilizada como sigue

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) \dot{\mathbf{q}}_i - \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_{ri}) \dot{\mathbf{q}}_{ri} &= \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) \dot{\mathbf{q}}_i - \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_{ri}) \dot{\mathbf{q}}_{ri} \\ &= \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) \dot{\mathbf{q}}_{ri} + \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) \dot{\mathbf{q}}_{ri} \\ &= \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) (\dot{\mathbf{q}}_i - \dot{\mathbf{q}}_{ri}) + \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i - \dot{\mathbf{q}}_{ri}) \dot{\mathbf{q}}_{ri} \\ &= \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) \mathbf{s}_i + \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \mathbf{s}_i) \dot{\mathbf{q}}_{ri} \\ &= \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) \mathbf{s}_i + \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_{ri}) \mathbf{s}_i. \end{aligned} \quad (3.21)$$

### 3.2. Observador de velocidad

A diferencia del observador propuesto en Gudiño Lau *et al.* (2004), dado por

$$\dot{\hat{\mathbf{q}}}_i = \dot{\hat{\mathbf{q}}}_{oi} + \Lambda_i \mathbf{z}_i + k_{di} \mathbf{z}_i \quad (3.22)$$

$$\ddot{\hat{\mathbf{q}}}_{oi} = \ddot{\hat{\mathbf{q}}}_{ri} + k_{di} \Lambda_i \mathbf{z}_i + \mathbf{H}_i^{-1} \mathbf{J}_{\varphi_i}^T(\mathbf{q}_i)(\Delta \boldsymbol{\lambda}_i + k_{Fi} \Delta \mathbf{F}_i), \quad (3.23)$$

en este trabajo de investigación, se ha contribuido con un estructura de observador de velocidad más simple dado por

$$\dot{\hat{\mathbf{q}}}_i = \dot{\hat{\mathbf{q}}}_{oi} + \Lambda_i \mathbf{z}_i + k_{di} \mathbf{z}_i \quad (3.24)$$

$$\ddot{\hat{\mathbf{q}}}_{oi} = \ddot{\hat{\mathbf{q}}}_{ri} + k_{di} \Lambda_i \mathbf{z}_i, \quad (3.25)$$

donde  $k_{di}$  es una constante positiva. Este observador es mucho más simple que el dado que (3.22)-(3.23), donde, la inversa de la matriz de inercia y medición de fuerza son requeridas por el término extra en (3.23), dado por  $\mathbf{H}_i^{-1} \mathbf{J}_{\varphi_i}^T(\mathbf{q}_i)(\Delta \boldsymbol{\lambda}_i + k_{Fi} \Delta \mathbf{F}_i)$ . El nuevo estimador (3.24)-(3.25) se logra con una apropiada selección de ganancias, permitiendo una reducción de cálculo computacional durante su operación y un análisis de estabilidad más simple. Como se verá en el Capítulo 4, los resultados experimentales demuestran un buen desempeño de estimación. La Figura 3.1 muestra la dinámica del observador propuesto en esta tesis, el cual esta dado por

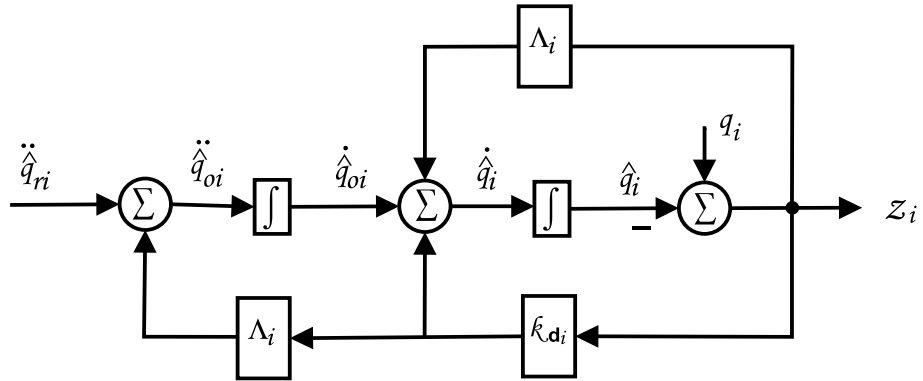


Figura 3.1: Diagrama a bloques de observador de velocidad.

A partir de que (3.24) se puede reescribir como  $\ddot{\tilde{\mathbf{q}}}_{oi} = \ddot{\tilde{\mathbf{q}}}_i - \Lambda_i \dot{\mathbf{z}}_i - k_{di} \dot{\mathbf{z}}_i$ , realizando algunas manipulaciones, se tiene que (3.25) resulta en  $\dot{\mathbf{s}}_i = \dot{\mathbf{r}}_i + k_{di} \mathbf{r}_i + \mathbf{e}_i(\mathbf{r}_i)$ . Multiplicando ambos lados por  $\mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i)$ , considerando (3.20) y  $\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_{ri} = \ddot{\mathbf{q}}_{ri} + \mathbf{e}_i(\mathbf{r}_i)$ , se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i) \dot{\mathbf{r}}_i = & -\mathbf{H}_{rd_i} \mathbf{r}_i - \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) \mathbf{s}_i - \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_{ri}) \mathbf{s}_i - \mathbf{K}_{DR_i} \mathbf{s}_i \\ & + \mathbf{J}_{\varphi_i}^T(\mathbf{q}_i) \Delta \boldsymbol{\lambda}_i, \end{aligned} \quad (3.26)$$

donde  $\mathbf{H}_{rd_i} \triangleq k_{di} \mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i) - \mathbf{K}_{R_i}$ . Finalmente, la Propiedad A.0.5 es aplicada para manipular el término  $-\mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) \mathbf{s}_i - \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_{ri}) \mathbf{s}_i$  de (3.26) como sigue

$$\begin{aligned} & -\mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) \mathbf{s}_i - \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_{ri}) \mathbf{s}_i \\ = & -\mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) \mathbf{s}_i - \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_{ri}) \mathbf{s}_i - \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) \mathbf{r}_i + \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) \mathbf{r}_i \\ = & -\mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) (\mathbf{s}_i - \mathbf{r}_i) - \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_{ri}) \mathbf{s}_i - \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) \mathbf{r}_i \\ = & -\mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \mathbf{s}_i + \dot{\mathbf{q}}_{ri}) (\mathbf{s}_i - \mathbf{r}_i) - \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_{ri}) \mathbf{s}_i - \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) \mathbf{r}_i \\ = & -\mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \mathbf{s}_i + \dot{\mathbf{q}}_{ri}) \mathbf{s}_i + \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \mathbf{s}_i + \dot{\mathbf{q}}_{ri}) \mathbf{r}_i - \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_{ri}) \mathbf{s}_i - \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) \mathbf{r}_i \\ = & -\mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \mathbf{s}_i) (\mathbf{s}_i + \dot{\mathbf{q}}_{ri}) + \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \mathbf{s}_i + \dot{\mathbf{q}}_{ri}) \mathbf{r}_i - \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \mathbf{s}_i) \dot{\mathbf{q}}_{ri} - \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) \mathbf{r}_i \\ = & -\mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \mathbf{s}_i) (\mathbf{s}_i + 2\dot{\mathbf{q}}_{ri}) + \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \mathbf{s}_i + \dot{\mathbf{q}}_{ri}) \mathbf{r}_i - \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) \mathbf{r}_i \\ = & -\mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \mathbf{s}_i + 2\dot{\mathbf{q}}_{ri}) \mathbf{s}_i + \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \mathbf{s}_i + \dot{\mathbf{q}}_{ri}) \mathbf{r}_i - \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) \mathbf{r}_i. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Sustituyendo (3.27) en (3.26) se obtiene la dinámica en lazo cerrado del controlador-observador como sigue

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i) \dot{\mathbf{r}}_i = & -\mathbf{H}_{rd_i} \mathbf{r}_i - \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) \mathbf{r}_i - \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \mathbf{s}_i + 2\dot{\mathbf{q}}_{ri}) \mathbf{s}_i \\ & + \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \mathbf{s}_i + \dot{\mathbf{q}}_{ri}) \mathbf{r}_i - \mathbf{K}_{DR_i} \mathbf{s}_i + \mathbf{J}_{\varphi_i}^T(\mathbf{q}_i) \Delta \boldsymbol{\lambda}_i. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Ahora, es posible definir el vector

$$\mathbf{x}_i \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{s}_i^T & \mathbf{r}_i^T \end{bmatrix}^T, \quad (3.29)$$

como estado para (3.20) y (3.28). La idea principal del diseño del controlador/observador es mostrar que, cuando  $\|\mathbf{x}_i\|$  tiende a cero, los errores de seguimiento  $\tilde{\mathbf{q}}_i$ ,  $\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_i$  y de observación  $\mathbf{z}_i$  y  $\dot{\mathbf{z}}_i$  tenderán a cero también. De (3.13), es claro que si  $\mathbf{r}_i$  está acotado y tiende a cero, también  $\mathbf{z}_i$  y  $\dot{\mathbf{z}}_i$  tenderán a cero. Sin embargo, esto no es evidente para las otras variables.

El siguiente lema muestra que este es el caso bajo algunas condiciones.

**Lema 3.2.1** *Si  $\mathbf{x}_i$  está acotado por  $x_{\max_i}$  y tiende a cero, entonces los siguientes hechos se satisfacen:*

- a)  $\tilde{\mathbf{q}}_i$  y  $\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_i$  permanecen acotados. Además, si la cota  $x_{\max_i}$  para  $\|\mathbf{x}_i\|$  es seleccionada suficientemente pequeña tal que garantice que  $\|\tilde{\mathbf{q}}_i\| \leq \eta_i$  para todo tiempo  $t$ , con  $\eta_i$  una constante positiva y suficientemente pequeña, entonces tanto  $\tilde{\mathbf{q}}_i$  como  $\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_i$  tenderán a cero también.
- b) Si, además, el vector de velocidad  $\dot{\mathbf{q}}_i$  está acotado, entonces  $\Delta\lambda_i$  permanecerá acotado y tenderá a cero. △

La demostración del Lema 3.2.1 se muestra en el Apéndice I de Gudiño Lau *et al.* (2004). La conclusión principal es que si  $\mathbf{x}_i$  está acotado, entonces  $\mathbf{s}_i$  y  $\mathbf{r}_i$  también lo están. Además, tenderán a cero si  $\mathbf{x}_i$  lo hace. Es interesante notar que, si  $\|\mathbf{x}_i\|$  está acotado por  $x_{\max_i}$ , entonces, es siempre posible encontrar una cota para  $\mathbf{e}_i(\mathbf{r}_i)$  en (3.18) que satisfaga

$$\|\mathbf{e}_i(\mathbf{r}_i)\| \leq M_{ei}(x_{\max_i})\|\mathbf{r}_i\| < \infty, \quad (3.30)$$

donde  $M_{ei}(x_{\max_i})$  es un escalar positivo. Considérese la siguiente función candidata de Lyapunov para el sistema (3.20) y (3.28)

$$V_i(\mathbf{x}_i) = \frac{1}{2}\mathbf{x}_i^T \mathbf{M}_i \mathbf{x}_i, \quad (3.31)$$

donde  $\mathbf{M}_i \triangleq \text{block diag} \{ \mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i), \mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i) \}$ , y  $V_i(\mathbf{x}_i)$  satisface

$$\lambda_{1i}\|\mathbf{x}_i\|^2 \leq V_i(\mathbf{x}_i) \leq \lambda_{2i}\|\mathbf{x}_i\|^2, \quad (3.32)$$

con

$$\begin{aligned} \lambda_{1i} &\triangleq \frac{1}{2} \min_{\forall \mathbf{q}_i \in \mathbb{R}^{n_i}} \lambda_{\min}(\mathbf{M}_i) \\ \lambda_{2i} &\triangleq \frac{1}{2} \max_{\forall \mathbf{q}_i \in \mathbb{R}^{n_i}} \lambda_{\max}(\mathbf{M}_i), \end{aligned} \quad (3.33)$$

para  $i = 1, \dots, l$ . Supóngase que se puede encontrar un dominio

$$\mathbb{D}_i = \{ \mathbf{x}_i : \|\mathbf{x}_i\| \leq x_{\max_i} \}, \quad (3.34)$$



tal que para todo instante  $\dot{V}_i(\mathbf{x}_i) \leq 0$  con  $\dot{V}_i(\mathbf{x}_i) = 0$ , si  $x_{\max_i}$  es suficientemente pequeña en el sentido del Lema 3.2.1, entonces, a partir de la discusión anterior se puede concluir convergencia a cero de todas las señales de error.

El siguiente Teorema establece las condiciones necesarias de los parámetros del controlador-observador que garanticen esto.

**Teorema 3.2.1** *Considérese la dinámica de un sistema cooperativo dado por (A.1) y (3.1) en lazo cerrado con la ley de control (3.19) y el observador (3.24)–(3.25), donde  $\mathbf{q}_{di}$  y  $\mathbf{p}_{di}$  son la posición deseada acotada en coordenadas articulares y la posición restringida; cuyas derivadas  $\dot{\mathbf{q}}_{di}$ ,  $\ddot{\mathbf{q}}_{di}$ ,  $\dot{\mathbf{p}}_{di}$  y  $\ddot{\mathbf{p}}_{di}$  están acotadas, y todas satisfacen las restricciones (2.2) y (2.4). Considérese los  $l$  dominios  $\mathbb{D}_i \in \mathbb{R}^{n_i}$  definidos por (3.34) para cada subsistema, donde las cotas  $x_{\max_i}$ ,  $i = 1, \dots, l$ , son seleccionadas de acuerdo con*

$$x_{\max_i} \leq \frac{\eta_i \alpha_i}{(1 + \sqrt{n_i})}, \quad (3.35)$$

donde  $\alpha_i \triangleq k_i - |k_i - \beta_i| - \gamma_i$ ,  $k_i$  y  $\beta_i$  dadas en (3.6) y  $\gamma_i \triangleq c_{0i} L_i (v_{mi} + \beta_i \eta_i)$ , con  $L_i$  y  $c_{0i}$  dadas en (A.8) y (3.75) respectivamente,  $\eta_i$  en el Lema 3.2.1 y  $\|\dot{\mathbf{q}}_{di}\| \leq v_{mi} \forall t$ . Entonces, cada dinámica y señal de error se mantiene acotada, consiguiendo estabilidad asintótica de los errores de seguimiento, observación y fuerza, i. e.

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{q}}_i &= \mathbf{0}, & \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_i &= \mathbf{0}, & \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{z}_i &= \mathbf{0}, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\tilde{\mathbf{z}}}_i &= \mathbf{0}, & \lim_{t \rightarrow \infty} \Delta \boldsymbol{\lambda}_i &= \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (3.36)$$

si las siguientes condiciones son satisfechas

$$\lambda_{\min}(\mathbf{K}_{R_i}) \geq \mu_{1i} + 1 + \delta_i, \quad (3.37)$$

$$k_{di} \geq \frac{\lambda_{\max}(\mathbf{K}_{R_i}) + \omega_i}{\lambda_{hi}}, \quad (3.38)$$

donde  $\omega_i = \mu_{2i} + \gamma_{2i} + \frac{1}{4}(\lambda_{Di} + \mu_{3i} + \mu_{4i} + \gamma_{1i})^2 + \delta_i$ , con  $\delta_i$  una constante positiva;  $\mu_{1i}$ ,  $\mu_{2i}$ ,  $\mu_{3i}$ ,  $\mu_{4i}$ ,  $\gamma_{1i}$ ,  $\gamma_{2i}$  y  $\lambda_{Di}$  se definen en la sección 3.4.  $\triangle$

Ver sección 3.4 para demostración de Teorema 3.2.1.

**Comentario 3.2.1** *Los resultados del Teorema 3.2.1 son sólo locales y es muy difícil encontrar un dominio  $\mathbb{D}_i$  de manera analítica. Además, esta región no puede ser hecha arbitrariamente grande, debido a que el análisis local es el que permite garantizar la convergencia a cero de los errores de seguimiento  $\tilde{\mathbf{q}}_i$  y  $\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_i$ . Sin embargo, esto no representa un inconveniente serio, puesto que para propósitos de agarre es común dar trayectorias suaves con error de posición inicial igual a cero. Por otro lado, es importante señalar que el esquema controlador-observador es implementado para cada robot por separado, porque sólo es necesario el conocimiento de cada restricción de la forma (A.1).  $\triangle$*

### 3.3. Demostración del Lema 3.2.1

En esta sección, solamente el inciso b) del Lema 3.2.1 es demostrado. Para una prueba del inciso a) véase Gudiño Lau *et al.* (2004), donde sólo se debe considerar el vector reducido  $\mathbf{x}_i^T = [\mathbf{s}_i^T \ \mathbf{r}_i^T]^T$  y  $\boldsymbol{\xi}_i = \mathbf{0}$ , donde  $\boldsymbol{\xi}_i$ , es la ganancia para la retroalimentación de fuerza  $\Delta \mathbf{F}_i$ , la cual no es utilizada aquí.

- b) Cuando  $\|\mathbf{x}_i\|$  está acotada y tiende a cero,  $\Delta \boldsymbol{\lambda}_i$  no necesariamente se mantendrá acotada. A fin de probar esto, se puede usar el hecho de que  $\mathbf{J}_{\varphi_i}(\mathbf{q}_i)\mathbf{s}_i = 0$ . Así, se tiene que

$$\mathbf{J}_{\varphi_i}(\mathbf{q}_i)\dot{\mathbf{s}}_i + \dot{\mathbf{J}}_{\varphi_i}(\mathbf{q}_i)\mathbf{s}_i = 0, \quad (3.39)$$

y de (3.20) se obtiene

$$\begin{aligned} \Delta \boldsymbol{\lambda}_i &= -(\mathbf{J}_{\varphi_i}(\mathbf{q}_i)\mathbf{H}_i^{-1}(\mathbf{q}_i)\mathbf{J}_{\varphi_i}^T(\mathbf{q}_i))^{-1} \\ &\quad \cdot (\dot{\mathbf{J}}_{\varphi_i}(\mathbf{q}_i)\mathbf{s}_i + \mathbf{J}_{\varphi_i}(\mathbf{q}_i)\mathbf{H}_i^{-1}(\mathbf{q}_i)\mathbf{h}_i(\mathbf{t})), \end{aligned} \quad (3.40)$$

con

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_i &= \mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i)\mathbf{e}_i(\mathbf{r}_i) - \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)\mathbf{s}_i \\ &\quad + \mathbf{K}_{R_i}\mathbf{r}_i - \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_{R_i})\mathbf{s}_i - \mathbf{K}_{DR_i}\mathbf{s}_i. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Debido a la suposición de que  $\dot{\mathbf{q}}$  y  $\mathbf{x}_i$  están acotados,  $\Delta \boldsymbol{\lambda}_i$  debe de estar acotada también, como se muestra en (3.40). Más aún, si  $\|\mathbf{x}_i\| \rightarrow 0$  entonces  $\Delta \boldsymbol{\lambda}_i \rightarrow \mathbf{0}$ . Finalmente, nótese que, de (3.20), se puede concluir adicionalmente que  $\dot{\mathbf{s}}_i$  esta acotada y tiende a cero.

---

### 3.4. Demostración del Teorema 3.2.1

De el Teorema 4.1 sobre estabilidad asintótica de Khalil (2002) [pp. 114], se deben encontrar dominios  $\mathbb{D}_i$  para los cuales, cada  $V_i(\mathbf{x}_i)$  en (3.31) satisfacen  $\dot{V}_i(\mathbf{x}_i) < 0$  en  $\mathbb{D}_i - \{\mathbf{0}\}$ . Nótese que  $V_i(\mathbf{x}_i)$  es positiva definida en  $\mathbb{R}^{n_i}$ . Haciendo esto, se puede probar que  $\mathbf{x}_i \rightarrow \mathbf{0}$  para todo  $i$ . Entonces, el Lema 3.2.1 puede ser empleado para analizar el comportamiento de diferentes señales de error.

Con base en la discusión dada en la sección 3.3, se define cada dominio  $\mathbb{D}_i$  como en (3.34) donde  $x_{\max_i}$ , es seleccionada como  $x_{\max_i} \leq \frac{\eta_i \alpha_i}{1 + \sqrt{n_i}}$ . Véase el Apéndice I de Gudiño Lau *et al.* (2004) para más detalles. Cabe recordar que  $x_{\max_i}$  no sólo no puede ser arbitrariamente grande, sino que debe ser suficientemente pequeña. En  $\mathbb{D}_i$  es posible definir

$$\mu_{1i} \triangleq \max_{\|\mathbf{x}_i\| \leq x_{\max_i}} \|\mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_{ri})\|, \quad (3.42)$$

$$\mu_{2i} \triangleq \max_{\|\mathbf{x}_i\| \leq x_{\max_i}} \|\mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \mathbf{s}_i + \dot{\mathbf{q}}_{ri})\|, \quad (3.43)$$

$$\mu_{3i} \triangleq \max_{\|\mathbf{x}_i\| \leq x_{\max_i}} \|\mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \mathbf{s}_i + 2\dot{\mathbf{q}}_{ri})\|, \quad (3.44)$$

$$\mu_{4i} \triangleq M_{ei}(x_{\max_i})\lambda_{Hi}, \quad (3.45)$$

$$\lambda_{Di} \triangleq \lambda_{\max}(\mathbf{D}_i), \quad (3.46)$$

$$c_{2i} \triangleq \max_{\forall \mathbf{q}_i \in \mathbb{R}^{n_i}} \left\| \left[ \mathbf{J}_{\varphi_i}(\mathbf{q}_i) \mathbf{H}_i^{-1}(\mathbf{q}_i) \mathbf{J}_{\varphi_i}^T(\mathbf{q}_i) \right]^{-1} \right\|, \quad (3.47)$$

$$\|\dot{\mathbf{J}}_{\varphi_i}(\mathbf{q}_i)\| \leq \alpha_{1i} \|\mathbf{s}_i\| + \alpha_{1i} \|\dot{\mathbf{q}}_{ri}\|, \quad (3.48)$$

$$\|\dot{\mathbf{q}}_{ri}\| \leq v_{mi} + k_i \eta_i + \sqrt{n_i} x_{\max_i}, \quad (3.49)$$

$$\gamma_{1i} \triangleq c_{1i} c_{2i} \alpha_{1i} (x_{\max_i} + \alpha_{3i}) + c_{1i}^2 c_{2i} \sigma_{Hi} (\mu_{3i} + \lambda_{\max_i}(\mathbf{K}_{DR_i})), \quad (3.50)$$

$$\gamma_{2i} \triangleq c_{1i}^2 c_{2i} \sigma_{Hi} \lambda_{\max_i}(\mathbf{K}_{R_i}) + c_{1i}^2 c_{2i} M_{ei}, \quad (3.51)$$

$$\|\mathbf{r}_i^T \mathbf{J}_{\varphi_i}^T(\mathbf{q}_i) \Delta \boldsymbol{\lambda}_i\| \leq \gamma_{1i} \|\mathbf{s}_i\| \|\mathbf{r}_i\| + \gamma_{2i} \|\mathbf{r}_i\|^2, \quad (3.52)$$

donde  $\alpha_{1i}$  es una constante positiva,  $M_{ei}$  es dada en (3.30),  $\|\dot{\mathbf{q}}_{di}\| \leq v_{mi} \forall t$ , y  $\eta_i$  es suficientemente pequeña. Nótese que es directo calcular (3.42)–(3.52) como función de diferentes constantes definidas a lo largo de este trabajo, pero aquí se omite por simplicidad. (3.52) puede ser calculada mediante la

sustitución de  $\Delta\boldsymbol{\lambda}_i$  de (3.40) y las definiciones (3.42)–(3.51). El siguiente paso es calcular la derivada de la función candidata de Lyapunov en (3.31) a lo largo de (3.20) y (3.28), como sigue

$$\begin{aligned} \dot{V}_i(\mathbf{x}_i) \leq & - \mathbf{s}_i^T \mathbf{K}_{R_i} \mathbf{s}_i - \mathbf{r}_i^T \mathbf{H}_{rd_i} \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_i^T \mathbf{D}_i \mathbf{s}_i + \mathbf{s}_i^T \mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i) \mathbf{e}_i(\mathbf{r}_i) \\ & - \mathbf{r}_i^T \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \mathbf{s}_i + 2\dot{\mathbf{q}}_{ri}) \mathbf{s}_i + \mathbf{r}_i^T \mathbf{J}_{\varphi_i}^T(\mathbf{q}_i) \Delta\boldsymbol{\lambda}_i \\ & - \mathbf{s}_i^T \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_{ri}) \mathbf{s}_i + \mathbf{r}_i^T \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \mathbf{s}_i + \dot{\mathbf{q}}_{ri}) \mathbf{r}_i, \end{aligned} \quad (3.53)$$

donde la Propiedad A.0.3 ha sido usada y el hecho de que  $\mathbf{s}_i^T \mathbf{J}_{\varphi_i}^T(\mathbf{q}_i) = 0$ . Puesto que sólo se está interesado en el comportamiento de  $\dot{V}_i(\mathbf{x}_i)$  para  $\mathbf{x}_i$  en  $\mathbb{D}_i$ , se tiene a partir de (3.42)–(3.52)

$$\begin{aligned} \dot{V}_i(\mathbf{x}_i) \leq & - \lambda_{\min}(\mathbf{K}_{R_i}) \|\mathbf{s}_i\|^2 - k_{di} \lambda_{hi} \|\mathbf{r}_i\|^2 + \lambda_{\max}(\mathbf{K}_{R_i}) \|\mathbf{r}_i\|^2 \\ & + \gamma_{2i} \|\mathbf{r}_i\|^2 + \mu_{1i} \|\mathbf{s}_i\|^2 + \mu_{2i} \|\mathbf{r}_i\|^2 \\ & + (\lambda_{Di} + \mu_{3i} + \mu_{4i} + \gamma_{1i}) \|\mathbf{s}_i\| \|\mathbf{r}_i\|. \end{aligned} \quad (3.54)$$

El siguiente paso es seleccionar las diferentes ganancias para garantizar que  $\dot{V}_i(\mathbf{x}_i) < 0$  en  $\mathbb{D}_i - \{\mathbf{0}\}$ . Antes que nada, se considera  $\lambda_{\min}(\mathbf{K}_{R_i})$  de (3.37) and  $k_{di}$  de (3.38), tal que se tiene de (3.54)

$$\begin{aligned} & - (\mu_{1i} + 1 + \delta_i) \|\mathbf{s}_i\|^2 \\ & - \left( \lambda_{hi} \left( \frac{\lambda_{\max}(\mathbf{K}_{R_i}) + \omega_i}{\lambda_{hi}} \right) - \lambda_{\max}(\mathbf{K}_{R_i}) \right) \|\mathbf{r}_i\|^2 \\ & = -\delta_i \|\mathbf{s}_i\|^2 - \delta_i \|\mathbf{r}_i\|^2 - \mu_{1i} \|\mathbf{s}_i\|^2 - \|\mathbf{s}_i\|^2 \\ & - \left( \mu_{2i} + \gamma_{2i} + \frac{1}{4} (\lambda_{Di} + \mu_{3i} + \mu_{4i} + \gamma_{1i})^2 \right) \|\mathbf{r}_i\|^2, \end{aligned}$$

debido a que  $\omega_i = \mu_{2i} + \gamma_{2i} + \frac{1}{4} (\lambda_{Di} + \mu_{3i} + \mu_{4i} + \gamma_{1i})^2 + \delta_i$ . Así, (3.54) pasa a ser  $\dot{V}_i(\mathbf{x}_i) \leq -\delta_i \|\mathbf{s}_i\|^2 - \delta_i \|\mathbf{r}_i\|^2$  o también  $\dot{V}_i(\mathbf{x}_i) \leq -\delta_i \|\mathbf{x}_i\|^2$ . Aplicando el Teorema 4.1 de Khalil (2002), se concluye que  $\mathbf{x}_i \rightarrow \mathbf{0}$ . Ahora, de la ecuación (3.13) se tiene directamente que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{z}_i = \mathbf{0}$  y  $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\mathbf{z}}_i = \mathbf{0}$ . Más aún, en vista de (3.34) se tiene  $\|\mathbf{x}_i\| \leq x_{\max_i}$  y así  $\|\tilde{\mathbf{q}}_i\| \leq \eta_i$  (de la discusión del Apéndice I de Gudiño Lau *et al.* (2004). Así, a partir del Lema 3.2.1, a), se obtiene  $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_i = \mathbf{0}$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{q}}_i = \mathbf{0}$ . Para aplicar b) del Lema 3.2.1, sólo se requiere mostrar que  $\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_i$  esta acotada. Este es ciertamente el caso, debido a que  $\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_i$  y  $\dot{\mathbf{q}}_{di}$  están acotadas. Así, se tiene que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta\boldsymbol{\lambda}_i = \mathbf{0}$ . Finalmente, la

estabilidad de todo el sistema, puede ser probada mediante

$$V = \sum_{i=1}^l V_i(\mathbf{x}_i). \quad (3.55)$$

### 3.5. Controlador con observadores de velocidad/fuerza

En esta sección, se desarrolla un controlador para seguimiento de posición/fuerza basado en observadores de velocidad/fuerza. En el esquema propuesto, el mismo observador de velocidad (3.24)–(3.25) de la Sección anterior es utilizado y el diseño de un observador de fuerza es empleado para evitar el uso de sensores de fuerza.

Retomando el modelo dinámico de un sistema de robots cooperativos (3.1) y considerando que los errores de seguimiento, observación y fuerza son los mismos que se definieron en la Sección 3.1. En este esquema, contrario al de la Sección 3.1, donde sólo se explota el conocimiento de la restricción (A.1), se propone superar la carencia de la medición de fuerza, mediante un valor estimado de  $\lambda_i$ , *i.e.*  $\hat{\lambda}_i$ . El correspondiente error de observación está dado por  $\Delta\bar{\lambda}_i \triangleq \lambda_i - \hat{\lambda}_i$ . Otras definiciones son

$$\dot{\mathbf{q}}_{ri} \triangleq \mathbf{Q}_i(\mathbf{q}_i) (\dot{\mathbf{q}}_{di} - \mathbf{\Lambda}_i (\hat{\mathbf{q}}_i - \mathbf{q}_{di})) + \mathbf{J}_{\varphi_i}^+(\mathbf{q}_i) \left( \dot{\mathbf{p}}_{di} - \beta_i \Delta\mathbf{p}_i + \boldsymbol{\xi}_i \Delta\tilde{\mathbf{F}}_i \right), \quad (3.56)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_i &\triangleq \dot{\mathbf{q}}_i - \dot{\mathbf{q}}_{ri} & (3.57) \\ &= \mathbf{Q}_i(\mathbf{q}_i) (\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_i + \mathbf{\Lambda}_i \tilde{\mathbf{q}}_i - \mathbf{\Lambda}_i \mathbf{z}_i) + \mathbf{J}_{\varphi_i}^+(\mathbf{q}_i) \left( \Delta\dot{\mathbf{p}}_i + \beta_i \Delta\mathbf{p}_i - \boldsymbol{\xi}_i \Delta\tilde{\mathbf{F}}_i \right), \end{aligned}$$

$$\Delta\tilde{\mathbf{F}}_i \triangleq \int_0^t \Delta\tilde{\lambda}_i d\vartheta, \quad (3.58)$$

donde  $\Delta\tilde{\lambda}_i = \hat{\lambda}_i - \lambda_{di}$ , es un error de fuerza auxiliar, el cual no está incluido en el esquema anterior. Nótese que, en este esquema, también se cumple que  $\dot{\mathbf{p}}_{di} = \mathbf{0}$ ,  $\Delta\dot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{0}$  y  $\Delta\mathbf{p}_i = \mathbf{0}$ . El propósito, es utilizar el observador de velocidad (3.24)–(3.25), junto con (3.9)–(3.13). Por lo que en este caso se

tiene la siguiente sustitución para  $\ddot{\mathbf{q}}_{ri}$

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{q}}_{ri} \triangleq & \mathbf{Q}_i(\mathbf{q}_i) \left( \ddot{\mathbf{q}}_{di} - \mathbf{\Lambda}_i(\dot{\mathbf{q}}_i - \dot{\mathbf{q}}_{di}) \right) + \mathbf{J}_{\varphi_i}^+(\mathbf{q}_i) \left( \ddot{\mathbf{p}}_{di} - \beta_i(\dot{\mathbf{p}}_i - \dot{\mathbf{p}}_{di}) + \xi_i \Delta \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_i \right) \\ & + \dot{\mathbf{Q}}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_{oi}) (\dot{\mathbf{q}}_{di} - \mathbf{\Lambda}_i(\hat{\mathbf{q}}_i - \mathbf{q}_{di})) + \dot{\mathbf{J}}_{\varphi_i}^+(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_{oi}) \left( \dot{\mathbf{p}}_{di} - \beta_i \Delta \mathbf{p}_i + \xi_i \Delta \tilde{\mathbf{F}}_i \right), \end{aligned} \quad (3.59)$$

donde  $\dot{\mathbf{p}}_i = \dot{\mathbf{p}}_{di} = \ddot{\mathbf{p}}_{di} = \mathbf{0}$  para satisfacer (A.1) y (2.4).  $\dot{\mathbf{J}}_{\varphi_i}^+(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_{oi})$  y  $\dot{\mathbf{J}}_{\varphi_i}^+(\mathbf{q}_i, \mathbf{r}_i)$  se definen de la misma forma que  $\dot{\mathbf{Q}}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_{oi})$  y  $\dot{\mathbf{Q}}_i(\mathbf{q}_i, \mathbf{r}_i)$  en la Sección 3.1.

Después de algunas manipulaciones, es posible obtener  $\ddot{\mathbf{q}}_{ri} = \ddot{\mathbf{q}}_{ri} + \mathbf{e}_i(\mathbf{r}_i)$ , donde

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_i(\mathbf{r}_i) \triangleq & -\dot{\mathbf{Q}}_i(\mathbf{q}_i, \mathbf{r}_i) (\dot{\mathbf{q}}_{di} - \mathbf{\Lambda}_i \tilde{\mathbf{q}}_i + \mathbf{\Lambda}_i \mathbf{z}_i) \\ & - \dot{\mathbf{J}}_{\varphi_i}^+(\mathbf{q}_i, \mathbf{r}_i) \left( \dot{\mathbf{p}}_{di} - \beta_i \Delta \mathbf{p}_i + \xi_i \Delta \tilde{\mathbf{F}}_i \right). \end{aligned} \quad (3.60)$$

El controlador propuesto para cada entrada simple está dado por

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}_i \triangleq & \mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i) \ddot{\mathbf{q}}_{ri} + \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_{ri}) \dot{\mathbf{q}}_{ri} + \mathbf{D}_i \dot{\mathbf{q}}_{ri} + \mathbf{g}_i(\mathbf{q}_i) \\ & - \mathbf{K}_{R_i} (\dot{\mathbf{q}}_{oi} - \dot{\mathbf{q}}_{ri}) - \mathbf{J}_{\varphi_i}^T(\mathbf{q}_i) (\boldsymbol{\lambda}_{di} - k_{F_i} \Delta \tilde{\mathbf{F}}_i - \zeta_i \Delta \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_i), \end{aligned} \quad (3.61)$$

donde  $k_{F_i}$  y  $\zeta_i$  son constantes positivas. Sustituyendo (3.61) en (3.1), y realizando algunas manipulaciones, se obtiene la dinámica en lazo cerrado

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i) \dot{\mathbf{s}}_i = & - \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) \mathbf{s}_i - \mathbf{K}_{DR_i} \mathbf{s}_i + \mathbf{K}_{R_i} \tilde{\mathbf{r}}_i \\ & + \mathbf{J}_{\varphi_i}^T(\mathbf{q}_i) \left[ \Delta \boldsymbol{\lambda}_i + k_{F_i} \Delta \tilde{\mathbf{F}}_i + \zeta_i \Delta \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_i \right] \\ & - \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_{ri}) \mathbf{s}_i + \mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i) \mathbf{e}_i(\mathbf{r}_i), \end{aligned} \quad (3.62)$$

donde  $\mathbf{K}_{DR_i} \triangleq \mathbf{K}_{R_i} + \mathbf{D}_i$ . A fin de conseguir (3.62), (3.21) ha sido usada.

Para obtener la dinámica del error de observación de velocidad, se realiza el mismo procedimiento que en la sección anterior, pero utilizando la dinámica (3.62). De esta forma se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i) \dot{\mathbf{r}}_i = & - \mathbf{H}_{rd_i} \mathbf{r}_i - \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) \mathbf{s}_i - \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_{ri}) \mathbf{s}_i \\ & - \mathbf{K}_{DR_i} \mathbf{s}_i + \mathbf{J}_{\varphi_i}^T(\mathbf{q}_i) \left[ \Delta \boldsymbol{\lambda}_i + k_{F_i} \Delta \tilde{\mathbf{F}}_i + \zeta_i \Delta \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_i \right], \end{aligned} \quad (3.63)$$

donde  $\mathbf{H}_{\text{rd}_i} \triangleq k_{\text{di}}\mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i) - \mathbf{K}_{\text{R}_i}$ . Aplicando (3.27) en (3.63), y realizando algunas manipulaciones, se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i)\dot{\mathbf{r}}_i = & - \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)\mathbf{r}_i - \mathbf{H}_{\text{rd}_i}\mathbf{r}_i + \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \mathbf{s}_i + \dot{\mathbf{q}}_{\text{ri}})\mathbf{r}_i \\ & - \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \mathbf{s}_i + 2\dot{\mathbf{q}}_{\text{ri}})\mathbf{s}_i - \mathbf{K}_{\text{DR}_i}\mathbf{s}_i \\ & + \mathbf{J}_{\varphi_i}^{\text{T}}(\mathbf{q}_i) \left[ \Delta\boldsymbol{\lambda}_i + k_{F_i} \Delta\tilde{\mathbf{F}}_i + \zeta_i \Delta\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_i \right]. \end{aligned} \quad (3.64)$$

### 3.6. Diseño de observador de fuerza

Un observador asintótico de fuerza de contacto para un sistema de robots cooperativos es construido en esta sección. Con base en el sistema dinámico (3.1), se procede a multiplicar ambos lados de (3.1) por  $\mathbf{J}_{\varphi_i}^{+\text{T}}(\mathbf{q}_i)$ , obteniendo

$$\mathbf{J}_{\varphi_i}^{+\text{T}}(\mathbf{q}_i)\mathbf{J}_{\varphi_i}^{\text{T}}(\mathbf{q}_i)\boldsymbol{\lambda}_i = \mathbf{J}_{\varphi_i}^{+\text{T}}(\mathbf{q}_i) \left[ \mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i)\ddot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)\dot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{D}_i\dot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{g}_i(\mathbf{q}_i) - \boldsymbol{\tau}_i \right]. \quad (3.65)$$

De propiedades de las matrices, se tiene que  $\mathbf{J}_{\varphi_i}^{+\text{T}}\mathbf{J}_{\varphi_i}^{\text{T}} = (\mathbf{J}_{\varphi_i}\mathbf{J}_{\varphi_i}^+)^{\text{T}}$ , mediante la sustitución de  $\mathbf{J}_{\varphi_i}^+$ , se obtiene  $[\mathbf{J}_{\varphi_i}\mathbf{J}_{\varphi_i}^{\text{T}}(\mathbf{J}_{\varphi_i}\mathbf{J}_{\varphi_i}^+)^{-1}]^{\text{T}} = \mathbf{I}$ . Finalmente, la fuerza aplicada por un robot en un punto de contacto está dada por

$$\boldsymbol{\lambda}_i = \mathbf{J}_{\varphi_i}^{+\text{T}}(\mathbf{q}_i) \left[ \mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i)\ddot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)\dot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{D}_i\dot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{g}_i(\mathbf{q}_i) - \boldsymbol{\tau}_i \right]. \quad (3.66)$$

Con base en (3.66), se propone el siguiente observador de fuerza

$$\hat{\boldsymbol{\lambda}}_i = \mathbf{J}_{\varphi_i}^{+\text{T}}(\mathbf{q}_i) \left[ \mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i)\ddot{\mathbf{q}}_{\text{ri}} + \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_{\text{ri}})\dot{\mathbf{q}}_{\text{ri}} + \mathbf{D}_i\dot{\mathbf{q}}_{\text{ri}} + \mathbf{g}_i(\mathbf{q}_i) - \boldsymbol{\tau}_i \right]. \quad (3.67)$$

La eliminación de velocidad y aceleración, es superada mediante el uso de las señales de referencia ortogonalizadas. Después de sustituir la Ley de control propuesta (3.61) en (3.67) y proceder con algunas manipulaciones, se obtiene la dinámica simplificada del estimador de fuerza de contacto como sigue

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\lambda}}}_i = \mathbf{J}_{\varphi_i}^{+\text{T}}(\mathbf{q}_i)\mathbf{K}_{\text{R}_i}(\dot{\mathbf{q}}_{\text{oi}} - \dot{\mathbf{q}}_{\text{ri}}) + \boldsymbol{\lambda}_{\text{di}} - k_{F_i}\Delta\tilde{\mathbf{F}}_i - \zeta_i\Delta\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_i, \quad (3.68)$$

finalmente, sustituyendo  $\Delta\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_i = \hat{\boldsymbol{\lambda}}_i - \boldsymbol{\lambda}_{\text{di}}$  en (3.68) y realizando algunas manipulaciones se obtiene

$$\hat{\lambda}_i = \frac{1}{1 + \zeta_i} \left[ \mathbf{J}_{\varphi_i}^{+\text{T}}(\mathbf{q}_i) \mathbf{K}_{R_i} (\dot{\mathbf{q}}_{oi} - \dot{\mathbf{q}}_{ri}) - k_{Fi} \Delta \tilde{\mathbf{F}}_i \right] + \lambda_{di}. \quad (3.69)$$

A continuación se define el vector

$$\mathbf{x}_i \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{s}_i^{\text{T}} & \mathbf{r}_i^{\text{T}} & \Delta \tilde{\mathbf{F}}_i^{\text{T}} \end{bmatrix}^{\text{T}}, \quad (3.70)$$

como estado para (3.58), (3.62) y (3.64). La idea principal del diseño del control-observador, es mostrar que siempre que  $\|\mathbf{x}_i\|$  esté acotado y tienda a cero, los errores de seguimiento  $\tilde{\mathbf{q}}_i$ ,  $\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_i$ ,  $\Delta \tilde{\lambda}_i$ , los errores de observación  $\Delta \tilde{\lambda}_i$ ,  $\mathbf{z}_i$ ,  $\dot{\mathbf{z}}_i$ , y los errores de fuerza auxiliares  $\Delta \tilde{\lambda}_i$  y  $\Delta \tilde{\mathbf{F}}_i$ , también tenderán a cero.

El siguiente Lema muestra que este es el caso bajo algunas condiciones.

**Lema 3.6.1** *Si  $\mathbf{x}_i$  está acotado por  $x_{\max_i}$  y tiende a cero, entonces los siguientes hechos se satisfacen:*

- a)  $\tilde{\mathbf{q}}_i$  y  $\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_i$  permanecen acotados. Además, si la cota  $x_{\max_i}$  para  $\|\mathbf{x}_i\|$  es seleccionada suficientemente pequeña tal que garantice que  $\|\tilde{\mathbf{q}}_i\| \leq \eta_i$  para todo tiempo  $t$ , con  $\eta_i$  una constante positiva y suficientemente pequeña, entonces tanto  $\tilde{\mathbf{q}}_i$  como  $\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_i$  tenderán a cero también.  $\triangle$

La demostración es similar en todo a la presentada en Gudiño Lau *et al.* (2004) siempre y cuando se sustituya  $\Delta \tilde{\mathbf{F}}_i$  por  $\Delta \mathbf{F}_i$  en  $\mathbf{s}_i$  dado por (3.57). Considérese ahora el siguiente Teorema.

**Teorema 3.6.1** *Considérese el sistema de robots cooperativos dado por (3.1), (A.1) y (2.2), en lazo cerrado con la ley de control (3.61), el observador de velocidad articular (3.24)–(3.25) y el observador de fuerza de contacto (3.69), donde  $\mathbf{q}_{di}$  y  $\mathbf{p}_{di}$  son la posición articular deseada y restringida, cuyas derivadas  $\dot{\mathbf{q}}_{di}$ ,  $\ddot{\mathbf{q}}_{di}$ ,  $\dot{\mathbf{p}}_{di}$ , y  $\ddot{\mathbf{p}}_{di}$  están acotadas también, y todas satisfacen las restricciones (2.2) y (2.4). Considérense también los  $l$  dominios dados  $\mathbb{D}_i \in \mathbb{R}^{n_i}$  definidos por  $\mathbb{D}_i = \{\mathbf{x}_i : \|\mathbf{x}_i\| \leq x_{\max_i}\}$  para cada subsistema, donde las cotas  $x_{\max_i}$ ,  $i = 1, \dots, l$ , son seleccionadas suficientemente pequeñas. Entonces,*



cada señal dinámica de error se mantiene acotada, resultando en estabilidad asintótica de los errores de seguimiento, observación y fuerza, i. e.

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{q}}_i &= \mathbf{0}, & \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_i &= \mathbf{0}, & \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{z}_i &= \mathbf{0}, & \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\mathbf{z}}_i &= \mathbf{0}, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \Delta \boldsymbol{\lambda}_i &= \mathbf{0}, & \lim_{t \rightarrow \infty} \Delta \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_i &= \mathbf{0}, & \lim_{t \rightarrow \infty} \Delta \tilde{\mathbf{F}}_i &= \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (3.71)$$

si las siguientes condiciones se satisfacen

$$\lambda_{\min}(\mathbf{K}_{R_i}) \geq \mu_{1i} + \theta_{1i}, \quad (3.72)$$

$$\begin{aligned} k_{di} \lambda_{hi} &\geq \lambda_{\max}(\mathbf{K}_{R_i}) + \mu_{2i} + c_{11i} \lambda_{\min}(\mathbf{K}_{R_i}) \\ &\quad + c_{12i} M_{ei} + \alpha_{6i} \lambda_{\max}(\boldsymbol{\xi}_i) \lambda_{\max}(\mathbf{K}_{R_i}) + \theta_{2i}, \end{aligned} \quad (3.73)$$

$$\theta_{3i} \leq c_{7i} \lambda_{\min}(\boldsymbol{\xi}_i \mathbf{H}_{ji} \boldsymbol{\xi}_i) + c_{8i} \lambda_{\min}(\boldsymbol{\xi}_i), \quad (3.74)$$

donde  $\theta_{1i}$ ,  $\theta_{2i}$ ,  $\theta_{3i}$ ,  $\mu_{1i}$ ,  $\mu_{2i}$ ,  $\mu_{3i}$ ,  $c_{7i}$ ,  $c_{8i}$ ,  $c_{11i}$ ,  $c_{12i}$ ,  $\alpha_{6i}$ ,  $\alpha_{8i}$  y  $M_{ei}$  son constantes positivas definidas en la sección 3.7. La matriz  $\mathbf{H}_{ji}$  ha sido definida en la sección 3.1.  $\triangle$

La demostración del Teorema 3.6.1 es desarrollada en la sección 3.7. Es importante notar que el comentario 3.2.1 también aplica en este caso

## 3.7. Demostración del Teorema 3.6.1

Considérese nuevamente el Teorema 4.1 de estabilidad asintótica de Khalil (2002) [pp. 114] y siguiendo el mismo procedimiento que en la Sección 3.4. Se define cada dominio para  $\mathbb{D}_i = \{\mathbf{x}_i : \|\mathbf{x}_i\| \leq x_{\max_i}\}$ , donde  $x_{\max_i}$  es seleccionada suficientemente pequeña como se calculo en Gudiño Lau *et al.* (2004). Considérense nuevamente las constantes dadas por (3.42)–(3.46) de la Sección 3.4, más los que a continuación se definen (en la región  $\mathbb{D}_i$ , como antes)

$$c_{0i} \triangleq \max_{\forall \mathbf{q}_i \in \mathbb{R}^{n_i}} \|\mathbf{J}_{\varphi_i}^+(\mathbf{q}_i)\| \quad (3.75)$$

$$c_{1i} \triangleq \max_{\forall \mathbf{q}_i \in \mathbb{R}^{n_i}} \|\mathbf{J}_{\varphi_i}(\mathbf{q}_i)\| \quad (3.76)$$

$$\|\dot{\mathbf{q}}_{ri}\| \leq v_{mi} + k_i \eta_i + \sqrt{n_i} x_{\max_i} + \lambda_{\max}(\boldsymbol{\xi}_i) c_{0i} = \alpha_{3i} \quad (3.77)$$

$$\|\dot{\mathbf{J}}_{\varphi_i}(\mathbf{q}_i)\| \leq \alpha_{1i} \|\mathbf{s}_i\| + \alpha_{1i} \|\dot{\mathbf{q}}_{ri}\| \leq \alpha_{1i} x_{\max_i} + \alpha_{1i} \alpha_{3i} = \alpha_{2i} \quad (3.78)$$

$$\|\mathbf{s}_i\| \leq x_{\max_i} \quad (3.79)$$

$$\sigma_{Hi} = \max_{\forall \mathbf{q}_i \in \mathbb{R}^{n_i}} \lambda_{\max}(\mathbf{H}_i^{-1}) \quad (3.80)$$

$$\sigma_{hi} \leq \|\mathbf{H}_i^{-1}(\mathbf{q}_i)\| \leq \sigma_{Hi} \quad (3.81)$$

$$c_{2i} \triangleq \max_{\forall \mathbf{q}_i \in \mathbb{R}^{n_i}} \|\mathbf{H}_{ji}\| \quad (3.82)$$

$$\begin{aligned} \psi_{0i} = & \lambda_{Di} + \mu_{4i} + \mu_{3i} + c_{11i} \mu_{3i} + c_{11i} \lambda_{\max}(K_{DR_i}) \\ & + \alpha_{5i} + \alpha_{6i} \lambda_{\max}(\boldsymbol{\xi}_i) \lambda_{\max}(K_{R_i}) \end{aligned} \quad (3.83)$$

$$\begin{aligned} \psi_{1i} = & c_{10i} \lambda_{\max}^2(\boldsymbol{\xi}_i) \lambda_{\max}(K_{R_i}) + \alpha_{4i} \lambda_{\max}(\boldsymbol{\xi}_i) + c_{5i} \mu_{3i} \lambda_{\max}(\boldsymbol{\xi}_i) \\ & + c_{5i} \lambda_{\max}(\boldsymbol{\xi}_i) \lambda_{\max}(K_{DR_i}) + c_{6i} \lambda_{\max}(\boldsymbol{\xi}_i) \lambda_{\max}(K_{R_i}) \end{aligned} \quad (3.84)$$

$$\begin{aligned} \psi_{2i} = & c_{10i} \lambda_{\max}^2(\boldsymbol{\xi}_i) \lambda_{\max}(K_{R_i}) + c_{5i} \lambda_{\max}(\boldsymbol{\xi}_i) \lambda_{\max}(K_{R_i}) \\ & + c_{9i} \lambda_{\max}(\boldsymbol{\xi}_i) M_{ei} + c_{6i} \lambda_{\max}(\boldsymbol{\xi}_i) \lambda_{\max}(K_{R_i}) + \alpha_{7i} \lambda_{\max}(\boldsymbol{\xi}_i), \end{aligned} \quad (3.85)$$

donde  $\eta_i > 0$  y suficientemente pequeña,  $\mathbf{H}_{ji} = [\mathbf{J}_{\varphi_i}(\mathbf{q}_i) \mathbf{H}_i^{-1}(\mathbf{q}_i) \mathbf{J}_{\varphi_i}^T(\mathbf{q}_i)]^{-1} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$  es una matriz positiva definida y  $c_{3i} = \frac{1}{1+\zeta_i}$ ,  $c_{4i} = \frac{\zeta_i}{1+\zeta_i}$ ,  $c_{5i} = c_{1i} c_{2i} \sigma_{Hi}$ ,  $c_{6i} = c_{0i} c_{4i}$ ,  $c_{7i} = k_{Fi} c_{2i} c_{3i}$ ,  $c_{8i} = k_{Fi} c_{4i}$ ,  $c_{9i} = c_{1i} c_{2i}$ ,  $c_{10i} = c_{0i} c_{2i} c_{3i}$ ,  $c_{11i} = c_{1i}^2 c_{2i} \sigma_{Hi}$ ,  $c_{12i} = c_{1i}^2 c_{2i}$ ,  $\alpha_{5i} = c_{1i} c_{2i} \alpha_{2i}$ ,  $\alpha_{6i} = c_{0i} c_{1i} c_{2i} c_{3i}$ ,  $\alpha_{7i} = c_{9i} c_{3i} k_{Fi}$  son constantes positivas,  $\|\dot{\mathbf{q}}_{di}\| \leq v_{mi} \forall t$ .  $M_{ei} > 0$  está acotado para  $\mathbf{e}_i(\mathbf{r}_i)$  en (3.60) que satisface

$$\|\mathbf{e}_i(\mathbf{r}_i)\| \leq M_{ei} \|\mathbf{r}_i\| < \infty, \quad (3.86)$$

para  $\|\mathbf{x}_i\| \leq x_{\max_i}$ . Nótese que de (3.42)–(3.46) y (3.75)–(3.85) son funciones de diferentes constantes definidas a lo largo del esquema (3.61). Cabe recordar que de la propiedad A.1.11 se tiene  $\|\mathbf{J}_{\varphi_i}(\mathbf{q}_i) - \mathbf{J}_{\varphi_i}(\mathbf{q}_{di})\| \leq L_i \|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_{di}\|$ , para una constante positiva  $L_i$  y para todo  $\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_{di} \in \mathbb{R}^{n_i}$ .

La relación (3.85) puede ser calculada sustituyendo  $\Delta \boldsymbol{\lambda}_i$  de (3.92) y usando las definiciones (3.42)–(3.46) y (3.75)–(3.85). Dada la siguiente función candidata

de Lyapunov

$$\dot{V}_i = \frac{1}{2} \mathbf{s}_i^\top \mathbf{H}_i \mathbf{s}_i + \frac{1}{2} \mathbf{r}_i^\top \mathbf{H}_i \mathbf{r}_i + \frac{1}{2} \Delta \tilde{\mathbf{F}}_i^\top \boldsymbol{\xi}_i \Delta \tilde{\mathbf{F}}_i, \quad (3.87)$$

el siguiente paso es calcular la derivada de (3.87) a lo largo de (3.58), (3.62) y (3.64), tal que

$$\begin{aligned} \dot{V}_i(\mathbf{x}_i) \leq & - \mathbf{s}_i^\top \mathbf{K}_{R_i} \mathbf{s}_i - \mathbf{r}_i^\top \mathbf{H}_{rd_i} \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_i^\top \mathbf{D}_i \mathbf{s}_i + \mathbf{s}_i^\top \mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i) \mathbf{e}_i(\mathbf{r}_i) \quad (3.88) \\ & - \Delta \tilde{\mathbf{F}}_i^\top \boldsymbol{\xi}_i \Delta \lambda_i - k_{F_i} \Delta \tilde{\mathbf{F}}_i^\top \boldsymbol{\xi}_i \Delta \tilde{\mathbf{F}}_i - \mathbf{r}_i^\top \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \mathbf{s}_i + 2\dot{\mathbf{q}}_{ri}) \mathbf{s}_i \\ & + \mathbf{r}_i^\top \mathbf{J}_{\varphi_i}^\top(\mathbf{q}_i) \left( \Delta \lambda_i + k_{F_i} \Delta \tilde{\mathbf{F}}_i + \zeta_i \Delta \tilde{\lambda}_i \right) - \mathbf{s}_i^\top \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_{ri}) \mathbf{s}_i \\ & + \mathbf{r}_i^\top \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \mathbf{s}_i + \dot{\mathbf{q}}_{ri}) \mathbf{r}_i, \end{aligned}$$

donde la Propiedad A.0.3 ha sido utilizada junto al hecho de que  $\mathbf{s}_i^\top \mathbf{J}_{\varphi_i}^\top(\mathbf{q}_i) = -\Delta \tilde{\mathbf{F}}_i^\top \boldsymbol{\xi}_i^\top$ . Puesto que sólo se está interesado en el comportamiento de  $\dot{V}_i(\mathbf{x}_i)$  para  $\mathbf{x}_i$  en  $\mathbb{D}_i$ , si se considera (3.75)–(3.85) y se hacen las sustituciones necesarias se puede obtener

$$\begin{aligned} \dot{V}_i(\mathbf{x}_i) \leq & - (\lambda_{\min}(\mathbf{K}_{R_i}) - \mu_{1i}) \|\mathbf{s}_i\|^2 - (k_{d_i} \lambda_{h_i} - \lambda_{\max}(\mathbf{K}_{R_i}) - \mu_{2i}) \quad (3.89) \\ & - c_{11i} \lambda_{\min}(\mathbf{K}_{R_i}) - c_{12i} M_{ei} - \alpha_{6i} \lambda_{\max}(\boldsymbol{\xi}_i) \lambda_{\max}(\mathbf{K}_{R_i}) \|\mathbf{r}_i\|^2 \\ & - (c_{7i} \lambda_{\min}(\boldsymbol{\xi}_i \mathbf{H}_{j_i} \boldsymbol{\xi}_i) + c_{8i} \lambda_{\min}(\boldsymbol{\xi}_i)) \|\Delta \tilde{\mathbf{F}}_i\|^2 \\ & + \psi_{0i} \|\mathbf{s}_i\| \|\mathbf{r}_i\| + \psi_{1i} \|\mathbf{s}_i\| \|\Delta \tilde{\mathbf{F}}_i\| + \psi_{2i} \|\mathbf{r}_i\| \|\Delta \tilde{\mathbf{F}}_i\|. \end{aligned}$$

El siguiente paso es seleccionar las diferentes ganancias para garantizar que  $\dot{V}_i(\mathbf{x}_i) < 0$  in  $\mathbb{D}_i - \{\mathbf{0}\}$ . Considerando  $\lambda_{\min}(\mathbf{K}_{R_i})$  de (3.72) y  $k_{d_i}$  de (3.73), la desigualdad (3.89) toma la siguiente forma

$$\begin{aligned} \dot{V}_i(\mathbf{x}_i) \leq & - \theta_{1i} \|\mathbf{s}_i\|^2 - \theta_{2i} \|\mathbf{r}_i\|^2 - \theta_{3i} \|\Delta \tilde{\mathbf{F}}_i\|^2 \quad (3.90) \\ & + \psi_{0i} \|\mathbf{s}_i\| \|\mathbf{r}_i\| + \psi_{1i} \|\mathbf{r}_i\| \|\Delta \tilde{\mathbf{F}}_i\| + \psi_{2i} \|\mathbf{s}_i\| \|\Delta \tilde{\mathbf{F}}_i\|, \end{aligned}$$

tal que se puede tomar  $\theta_{1i} = 2 + \delta_i$ ,  $\theta_{2i} = \frac{1}{4} \psi_{1i}^2 + \delta_i + \frac{1}{4} \psi_{0i}^2$  y  $\theta_{3i} = \frac{1}{4} \psi_{2i}^2 + \delta_i + 1$  para completar la función cuadrada, con  $\delta_i > 0$ . Así, (3.90) es negativa, *i.e.*  $\dot{V}_i(\mathbf{x}_i) \leq -\delta_i \|\mathbf{s}_i\|^2 - \delta_i \|\mathbf{r}_i\|^2 - \delta_i \|\Delta \tilde{\mathbf{F}}_i\|^2$ . De manera más simplificada se tiene  $\dot{V}_i(\mathbf{x}_i) \leq -\delta_i \|\mathbf{x}_i\|^2$ . Aplicando el Teorema 4.1 de estabilidad asintótica de Khalil (2002), se concluye que  $\mathbf{x}_i \rightarrow \mathbf{0}$ . Nótese que, en general  $\|\mathbf{x}_i(0)\|$  debe de estar en una sub-región de  $\mathbb{D}_i$ . *i.e.*, la región de atracción suele ser más pequeña que  $\mathbb{D}_i$ . Manteniendo esto en mente, y en vista de que  $\mathbb{D}_i =$

$\{\mathbf{x}_i : \|\mathbf{x}_i\| \leq x_{\max_i}\}$ , se tiene  $\|\mathbf{x}_i\| \leq x_{\max_i}$  y  $\|\tilde{\mathbf{q}}_i\| \leq \eta_i$  (a partir de la discusión dada en el Apéndice I de Gudiño Lau *et al.* (2004). De este modo, de acuerdo con la referencia se obtiene  $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_i = \mathbf{0}$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{q}}_i = \mathbf{0}$ . De la ecuación (3.13), se tiene directamente que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\mathbf{z}}_i = \mathbf{0}$  y  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{z}_i = \mathbf{0}$ .  $\Delta\tilde{\mathbf{F}}_i$  también tiende a cero. Entonces, para probar que  $\Delta\boldsymbol{\lambda}_i \rightarrow \mathbf{0}$ , se hace notar que  $\mathbf{J}_{\varphi_i}(\mathbf{q}_i)\mathbf{s}_i = -\boldsymbol{\xi}_i\Delta\tilde{\mathbf{F}}_i$  (debido a que se tiene  $\Delta\dot{\mathbf{p}}_i = \Delta\mathbf{p}_i = \mathbf{0} \forall t$ ), con lo cual se obtiene

$$\mathbf{J}_{\varphi_i}(\mathbf{q}_i)\dot{\mathbf{s}}_i + \dot{\mathbf{J}}_{\varphi_i}(\mathbf{q}_i)\mathbf{s}_i = -\boldsymbol{\xi}_i\Delta\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_i, \quad (3.91)$$

y de (3.62), se obtiene después de algunas manipulaciones

$$\begin{aligned} \Delta\boldsymbol{\lambda}_i = & \mathbf{H}_{ji} \left[ -c_{3i} \boldsymbol{\xi}_i \mathbf{J}_{\varphi_i}^{+\text{T}}(\mathbf{q}_i) \mathbf{K}_{R_i} \mathbf{s}_i + c_{3i} \boldsymbol{\xi}_i \mathbf{J}_{\varphi_i}^{+\text{T}}(\mathbf{q}_i) \mathbf{K}_{R_i} \mathbf{r}_i \right. \\ & + c_{3i} \boldsymbol{\xi}_i k_{F_i} \Delta\tilde{\mathbf{F}}_i - \dot{\mathbf{J}}_{\varphi_i}(\mathbf{q}_i) \mathbf{s}_i + \mathbf{J}_{\varphi_i}(\mathbf{q}_i) \mathbf{H}_i^{-1} \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \mathbf{s}_i + 2\dot{\mathbf{q}}_i) \mathbf{s}_i \\ & + \mathbf{J}_{\varphi_i}(\mathbf{q}_i) \mathbf{H}_i^{-1}(\mathbf{q}_i) \mathbf{K}_{DR_i} \mathbf{s}_i - \mathbf{J}_{\varphi_i}(\mathbf{q}_i) \mathbf{H}_i^{-1}(\mathbf{q}_i) \mathbf{K}_{R_i} \mathbf{r}_i \\ & \left. - \mathbf{J}_{\varphi_i}(\mathbf{q}_i) \mathbf{e}_i(\mathbf{r}_i) \right] - k_{F_i} \Delta\tilde{\mathbf{F}}_i - c_{4i} \mathbf{J}_{\varphi_i}^{+\text{T}}(\mathbf{q}_i) \mathbf{K}_{R_i} \mathbf{s}_i \\ & + c_{4i} \mathbf{J}_{\varphi_i}^{+\text{T}}(\mathbf{q}_i) \mathbf{K}_{R_i} \mathbf{r}_i + c_{4i} k_{F_i} \Delta\tilde{\mathbf{F}}_i \end{aligned} \quad (3.92)$$

con  $\mathbf{H}_{ji} = [\mathbf{J}_{\varphi_i}(\mathbf{q}_i) \mathbf{H}_i^{-1}(\mathbf{q}_i) \mathbf{J}_{\varphi_i}^{\text{T}}(\mathbf{q}_i)]^{-1}$ . Puesto que  $\mathbf{s}_i$ ,  $\mathbf{r}_i$  y  $\Delta\tilde{\mathbf{F}}_i$  tienden a cero, sólo es necesario mostrar que  $\dot{\mathbf{q}}_i$  está acotado, a fin de que  $\Delta\boldsymbol{\lambda}_i$  también tienda a ser cero. Este es el caso, debido a que  $\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_i$  y  $\mathbf{q}_{di}$  están acotadas.

Adicionalmente  $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_i = c_{3i} [\mathbf{J}_{\varphi_i}^{+\text{T}}(\mathbf{q}_i) \mathbf{K}_{R_i} (\mathbf{s}_i - \mathbf{r}_i) - k_{F_i} \Delta\tilde{\mathbf{F}}_i]$  y  $\Delta\bar{\boldsymbol{\lambda}}_i = \boldsymbol{\lambda}_i - \hat{\boldsymbol{\lambda}}_i = \Delta\boldsymbol{\lambda}_i - \Delta\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_i$  también están acotados y tienden a cero. Finalmente, la estabilidad de todo el sistema puede ser comprobado utilizando (3.55).

# Capítulo 4

## Resultados experimentales

Aunque en la literatura existe una cantidad basta sobre esquemas de control para seguimiento de posición/fuerza para robots manipuladores, pocas implementaciones experimentales de esos algoritmos han sido reportadas en configuración de robots cooperativos (Sun y Mills 1998, Kosuge y Oosumi 1996, Kosuge *et al.* 1997), sin embargo, muy escasos han sido los resultados experimentales reportados en la literatura sobre algoritmos de control de robots cooperativos sin medición de velocidad y fuerza (Martínez-Rosas *et al.* 2006, Martínez-Rosas y Arteaga Pérez 2006).

En este capítulo se presentan los resultados experimentales que validan el desarrollo teórico de los controladores para seguimiento de posición/fuerza (3.19) y (3.61), el observador de velocidad (3.24)–(3.25) y el observador de fuerza (3.69).

El sistema de robots cooperativos es formado por dos manipuladores industriales tal como se muestra en la Figura 4.1 del Laboratorio de Robótica de la Universidad Nacional Autónoma de México. Los robots utilizados son el A465 y A255 de la marca canadiense *CRS Robotics* (CRS. 1995, CRS. 1997a, CRS. 1997b, CRS. 2001a, CRS. 2001b). Por simplicidad y debido a algunas limitantes de hardware y tiempo de muestreo, únicamente las tres primeras articulaciones de cada robot fueron usadas para realizar los experimentos. Cada articulación es actuada por motores de c.d. Así, a fin de implementar las leyes de control y los observadores, la dinámica de los motores de cada robot ha sido considerada. Los dos robots cuentan con su propio sensor de fuerza en el efector final, tal que se pueda verificar el seguimiento con las



Figura 4.1: Robots A465 y A255 de *CRS Robotics*.

fuerzas deseadas. El marco de referencia de todo el sistema se encuentra fijo en la base del robot A465, con su eje  $x$  apuntando hacia el otro manipulador. La tarea consiste en levantar un objeto y presionarlo con una fuerza deseada; entonces, las restricciones en coordenadas cartesianas simplemente están dadas por  $\varphi_i = x_i - b_i = 0$ , para  $i = 1, 2$  y  $b_i$  una constante positiva. El objeto manipulado por los robots es un bloque rectangular de unisel con peso de  $200[g]$  de alta densidad (No.12), cubierto con placas plásticas de polietileno rígido; dando como resultado un bloque suficientemente rígido, indeformable y ligero para llevar a cabo los experimentos de agarre y manipulación. Las dimensiones del bloque son: largo= $0.3065[m]$ , ancho= $0.15[m]$  y alto= $0.15[m]$ .

## 4.1. Trayectorias de posición

Las trayectorias de movimiento deseadas se generan con el propósito de guiar los movimientos del robot de una configuración actual a una posterior requerida. Comúnmente, las trayectorias se describen en el espacio

---

operacional del robot y en seguida se utiliza la cinemática inversa para reconstruir los movimientos que las articulaciones deberán ejecutar. Dos tipos de trayectorias de posición han sido desarrolladas durante la etapa experimental de este trabajo; trayectorias para llevar los robots hasta el objeto, levantarlo, bajarlo y devolverlo a su posición original y trayectorias para producir movimiento circular al objeto cuando el objeto ya ha sido levantado por los robots. En el primer tipo de trayectoria, para que los valores de la velocidad y la aceleración de la trayectoria no sean discontinuos al inicio y final del recorrido, se han propuesto polinomios de quinto orden  $p_d(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 + a_4t^4 + a_5t^5$  de manera consecutiva (punto a punto); cuyos coeficientes pueden ser calculados con las condiciones  $t_i$ ,  $t_f$  y las posiciones deseadas. Tomando la primera y segunda derivada de  $p_d(t)$  se obtiene la velocidad y aceleración correspondiente. i.e.,  $\dot{p}_d(t) = a_1 + 2a_2t + 3a_3t^2 + 4a_4t^3 + 5a_5t^4$  y  $\ddot{p}_d(t) = 2a_2 + 6a_3t + 12a_4t^2 + 20a_5t^3$ .

Con respecto al diseño de las trayectorias que producen movimiento al objeto cuando este ya ha sido levantado por los robots, en esta sección se presentan las trayectorias de posición deseada que son utilizadas durante cada etapa experimental. Han sido desarrolladas tres etapas experimentales para cada uno de los dos algoritmos sin medición de velocidad/fuerza utilizados en esta tesis (3.19) y (3.61). La primer etapa experimental contempla movimiento circular rápido con un periodo  $T = 1[s]$ , la segunda etapa es realizada con movimiento circular lento con periodo  $T = 40[s]$  y en la tercer etapa no hay movimiento circular (experimento estático). Las trayectorias deseadas de posición son definidas como sigue

$$\begin{aligned}
 x_{d1} &= 0,557[m], \\
 x_{d2} &= 0,8635[m], \\
 y_{d1,2} &= 0,0163 \sin(\omega(t - t_i))[m], \\
 z_{d1,2} &= 0,635 + 0,0163 \cos(\omega(t - t_i)) - 0,0163[m].
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Tales trayectorias son válidas desde un tiempo inicial  $t_i$  a un tiempo final  $t_f$ , mientras que  $\omega$  es diseñada especialmente para satisfacer  $\omega(t_i) = \omega(t_f) = 0$ . Las derivadas de  $\omega$  son cero tanto en  $t_i$  como en  $t_f$ . Los experimentos han sido fijados en  $t_i = 25[s]$  y  $t_f = 65[s]$ .

En la primer etapa, los robots harán círculos cada segundo en el plano  $y-z$

con un radio de 0.0163[m]. En la segunda etapa los dos robots se moverán lentamente haciendo solamente un círculo con un radio de 0.0163[m] en el plano  $y-z$  durante toda la etapa experimental. Finalmente, en la tercer etapa, los robots no harán ningún movimiento circular, es decir, se mantendrán inmóviles mientras sostienen al objeto. En la Figura 4.2, se puede apreciar la evolución de las trayectorias en el espacio operacional sobre los tres ejes cartesianos X, Y, Z. Donde el eje X esta representado por la dirección en la que apunta cada efector final de cada robot, El eje Y es la dirección de movimiento lateral y finalmente el eje Z representa la altura. El marco de referencia general ha sido situado en la base del robot CRSA465. Como puede observarse en la Figura 4.2, el círculo rápido es formado por la contribución de movimiento tanto del eje Y como de Z. En la Figura 4.3, se puede apreciar la trayectoria para cuando es programada (4.1)-(4.2) como círculo lento. Finalmente la Figura 4.4 corresponde a las trayectorias sin movimiento circular.

---



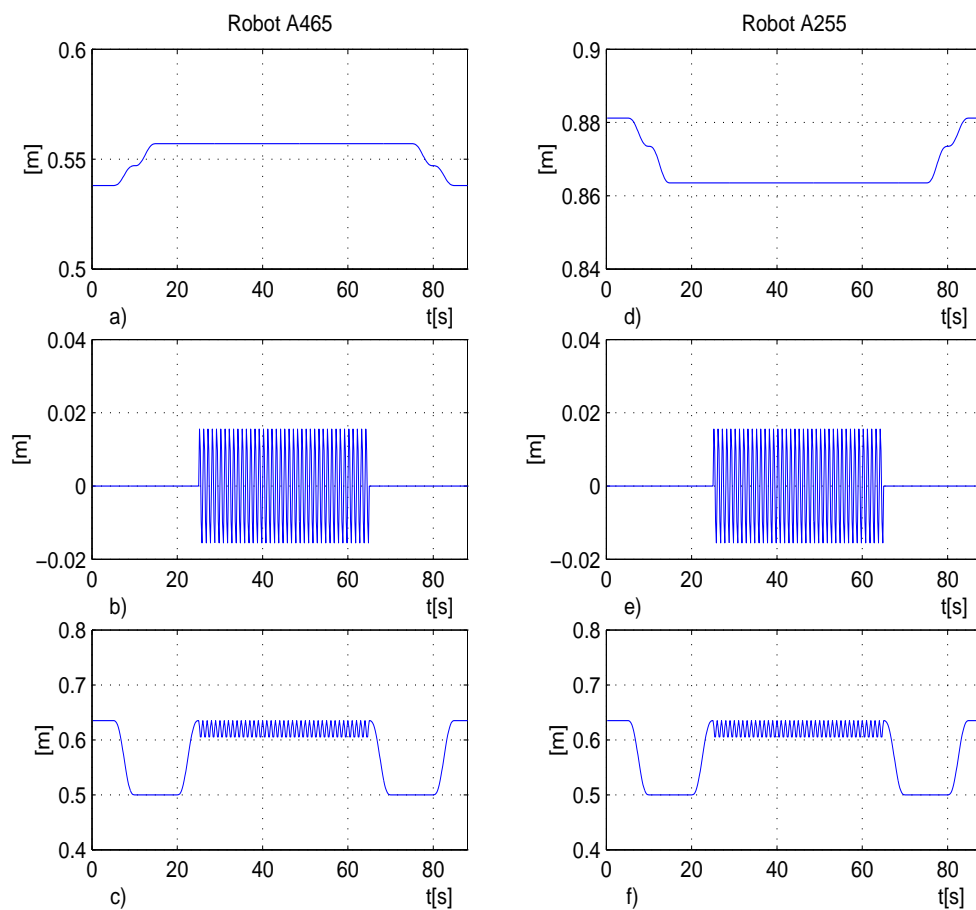


Figura 4.2: Trayectorias de posición deseada en coordenadas cartesianas con movimiento circular rápido. a)  $x_1$ , b)  $y_1$ , c)  $z_1$ , d)  $x_2$ , e)  $y_2$ , f)  $z_2$

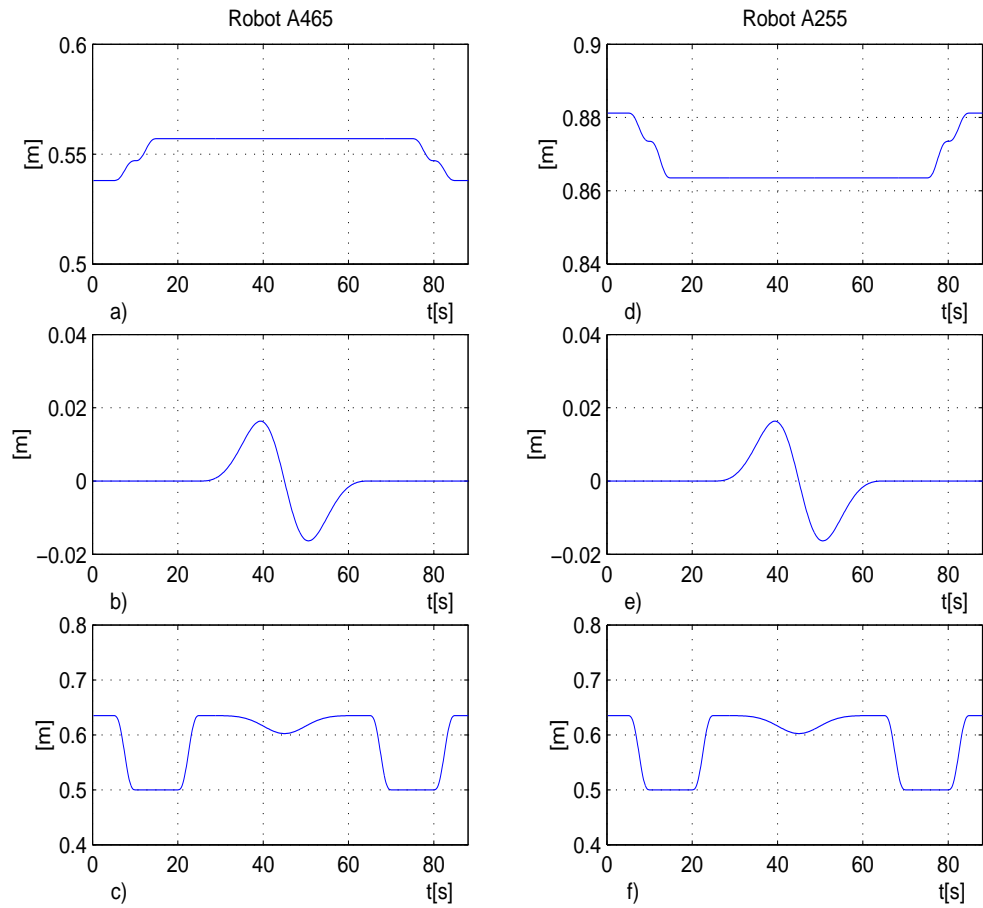


Figura 4.3: Trayectorias de posición deseada en coordenadas cartesianas con movimiento circular lento. a)  $x_1$ , b)  $y_1$ , c)  $z_1$ , d)  $x_2$ , e)  $y_2$ , f)  $z_2$

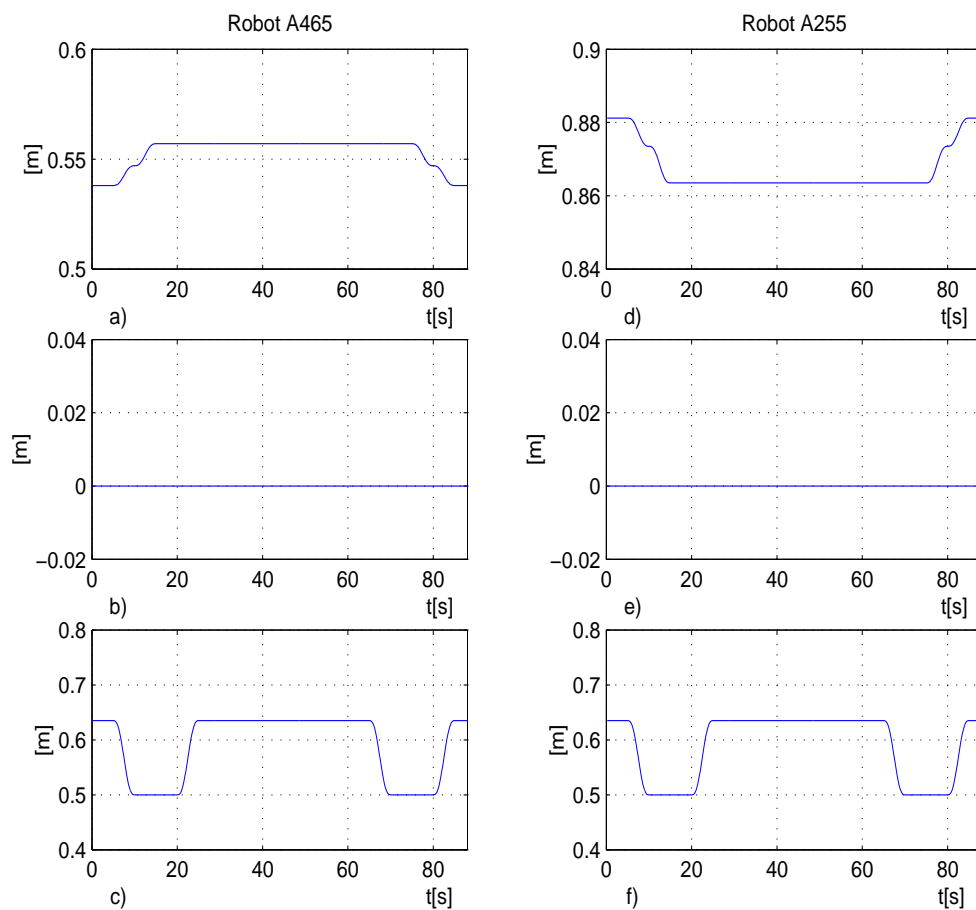


Figura 4.4: Trayectorias de posición deseada en coordenadas cartesianas sin movimiento circular. a)  $x_1$ , b)  $y_1$ , c)  $z_1$ , d)  $x_2$ , e)  $y_2$ , f)  $z_2$

## 4.2. Trayectorias de fuerza

En esta sección, se hace una descripción de las trayectorias de fuerza deseada utilizadas a lo largo de cada etapa experimental. El diseño de las señales de fuerza deseada esta dado por

$$f_{dx1,2} = \begin{cases} 16 \frac{(t-15)}{5} \text{ [N]} & 15 \leq t < 25 \\ 32 + 18 \sin\left(\frac{3\pi(t-25)}{40}\right) \text{ [N]} & 25 \leq t < 65 \\ 32 - 16 \frac{(t-65)}{5} \text{ [N]} & 65 \leq t \leq 75 \end{cases} \quad (4.2)$$

y  $f_{dy1,2} = f_{dz1,2} = 0$  [N] respectivamente. La razón del diseño anterior esta directamente relacionada con las trayectorias de posición definidas en la Sección 4.1, dado que para poder sujetar, levantar y bajar al objeto es necesario aplicar una fuerza suficientemente necesaria que evite que este gire, resbale o caiga. Es necesario comentar que cuando las trayectorias de fuerza imprimen una señal senoidal sobre el objeto, las trayectorias de posición (4.1)-(4.2) también estarán programadas para producir o no producir movimiento circular al objeto. Es decir, el objeto estará fuertemente sometido a la dinámica de las trayectorias tanto de posición como de fuerza.

## 4.3. Descripción de los experimentos

En esta sección se describe de manera detallada como es que las trayectorias de posición (4.1)-(4.2) y las trayectorias de fuerza (4.2) operan sobre los robots y el objeto. Durante los experimentos presentados en las secciones siguientes el objeto es presionado lentamente a partir de un tiempo  $t = 15$  [s]. Antes de ello, los robots están en movimiento libre y los controladores (3.19) y (3.61) son programados con la parte de fuerza en cero (*i. e.*  $\mathbf{Q}_i = \mathbf{I}$  y  $\mathbf{J}_{\varphi_i} = \mathbf{O}$ ). Del intervalo de tiempo  $t = 15$  [s] a  $t = 25$  [s] el objeto es levantado lentamente, mientras que, al mismo tiempo, las fuerzas deseadas comienzan a aumentar en forma de rampa. Durante el siguiente intervalo de tiempo dado por  $t = t_i = 25$  [s] hasta  $t = t_f = 65$  [s] los robots siguen la trayectoria de movimiento preestablecida, es decir, los robots están programados para hacer círculos completos cada segundo, hacer solamente un círculo lento durante

este lapso de tiempo o simplemente permanecer inmóviles presionando el objeto. Simultáneamente, las fuerzas aplicadas por ambos robots siguen la parte de la señal sinusoidal de (4.2). Posteriormente, en el intervalo de  $t = 65\text{s}$  a  $t = 75\text{s}$  el objeto es bajado con y dejado en reposo; las fuerzas disminuyen en forma de rampa hasta una magnitud deseada cero. Finalmente, en el lapso de  $t = 75\text{s}$  a  $t = 90\text{s}$  los manipuladores regresan a sus posiciones iniciales nuevamente con la parte de fuerza en cero (*i. e.*  $\mathbf{Q}_i = \mathbf{I}$  y  $\mathbf{J}_{\varphi_i} = \mathbf{O}$ ). Es decir en movimiento libre.

## 4.4. ganancias de control

En esta sección, se presentan dos tablas de ganancias para cada esquema de control. La sintonización se realizó mediante prueba y error en ambos esquemas (3.19) y (3.61). Observándose que un aumento de ganancias representaba inestabilidad en los robots y una reducción de las mismas reducía el desempeño en los resultados obtenidos. Los resultados son los siguientes.

$Robot_i$	$\Lambda_i$	$\mathbf{K}_{R_i}$	$k_{di}$	$k_{Fi}$	$\xi_i$	$\zeta_1$
$Robot_{A465}$	$21\mathbf{I}$	diag { 80 81 81 }	12	0.0	0.0	0.0
$Robot_{A255}$	$20\mathbf{I}$	diag { 40 20 40 }	12	0.0	0.0	0.0

Cuadro 4.1: Selección de Ganancias para esquema de control de posición/fuerza (3.19).

$Robot_i$	$\Lambda_i$	$\mathbf{K}_{R_i}$	$k_{di}$	$k_{Fi}$	$\xi_i$	$\zeta_1$
$Robot_{A465}$	$21\mathbf{I}$	diag { 100 100 100 }	6.0	300	0.00001	0.001
$Robot_{A255}$	$23\mathbf{I}$	diag { 60 50 30 }	6.0	200	0.00001	0.001

Cuadro 4.2: Selección de Ganancias para esquema de control de posición/fuerza (3.61).

Los esquemas de control se programaron en un computadora Pentium IV, con un tiempo de muestreo  $h = 10[\text{ms}]$ . La duración total de los experimentos es de  $90[\text{s}]$  en los dos esquemas de control empleados.

## 4.5. Resultados experimentales para controlador implícito con estimación de velocidad y movimiento circular rápido, $T=1$ [s]

Con las trayectorias programadas de posición (4.1)-(4.2) y fuerza (4.2), se han obtenido los errores de seguimiento en coordenadas articulares, coordenadas cartesianas, fuerza, observación de velocidad y señales de control como se muestra en las siguientes Figuras; 4.6, 4.7, 4.8, 4.9 y 4.10 respectivamente.

Los resultados en coordenadas articulares y cartesianas muestran un seguimiento satisfactorio en magnitud, sin embargo, se observa que en coordenadas cartesianas las Figuras 4.7a y 4.7d muestran ruido en su respuesta. El cual está siendo transmitido por el movimiento circular rápido a todas las articulaciones rígidas del robot, tal y como se muestra en las Figuras de seguimiento articular 4.6. Esta vibración también es transmitida a los sensores de fuerza produciendo ruido por los impactos generados durante la sujeción del objeto, el cual produce un deterioro en las mediciones que validan los resultados como se muestra en la Figura 4.8. Otro parámetro que perjudica las mediciones de fuerza durante el movimiento circular rápido es debido a que no se cuenta con el conocimiento exacto de la dinámica de los robots, puesto que los modelos usados en los experimentos son sólo aproximados. Otra causa importante, es la digitalización. Mediante simulaciones se puede apreciar que 10[ms] es un tiempo de muestreo demasiado grande, en los experimentos se refleja como una pérdida de respuesta de control. En la Figura 4.9, se muestran los errores de observación de velocidad respectivos a cada robot. Como puede apreciarse, el resultado es muy satisfactorio aún con el ruido transmitido durante el movimiento circular de *periodo* = 1[s].

Es importante señalar que bajo este esquema de control, el desempeño en control de fuerza decrece para movimiento circular lento del objeto, tal y como se aprecia en los siguientes experimentos.

**Comentario 4.5.1** *Es importante hacer notar que tanto la configuración de el robot A465 como el A255 son diferentes desde el punto de vista cinemático y dinámico; es decir, mientras que el primero es más alto y tiene seis g.d.l., el segundo es más pequeño y sólo cuenta con cinco g.d.l.. Ahora bien, con-*

---

*siderando que por limitaciones de tarjetas de adquisición de datos solo es posible trabajar con tres articulaciones en cada robot, se presenta un problema que tiene efecto directo en los resultados obtenidos durante todos los experimentos, tal problema se presenta en la falta de control de orientación del robot A465, en el sentido de que se evita que el efector final no pueda llegar de manera perpendicular a la cara del objeto cuando es producido el agarre. Cuando los dos robots comienzan a levantar al objeto e imprimirle fuerza, el efector final del robot A465 produce desviaciones marcadas en las mediciones de fuerza y posición en el espacio de trabajo. Las desviaciones son producidas principalmente al comienzo de levantar el objeto y al final de bajar el objeto tal y como se muestra en las figuras de resultados experimentales. En la Figura 4.5 se muestra la inclinación del efector final con la que el robot CRS A465 hace contacto en la superficie del objeto.*

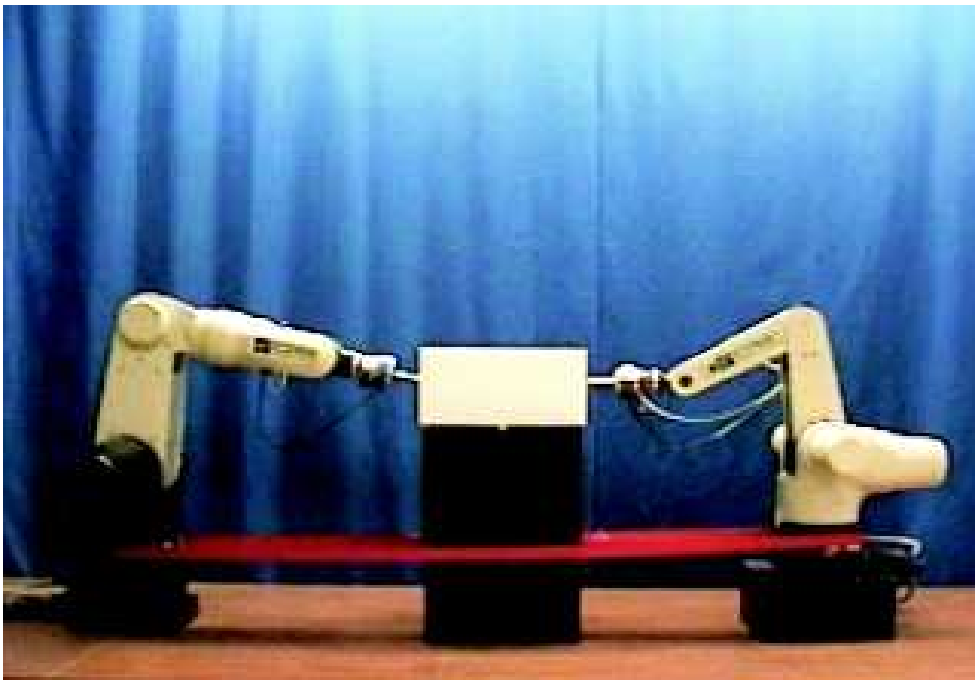


Figura 4.5: Desviación angular del robot A465.

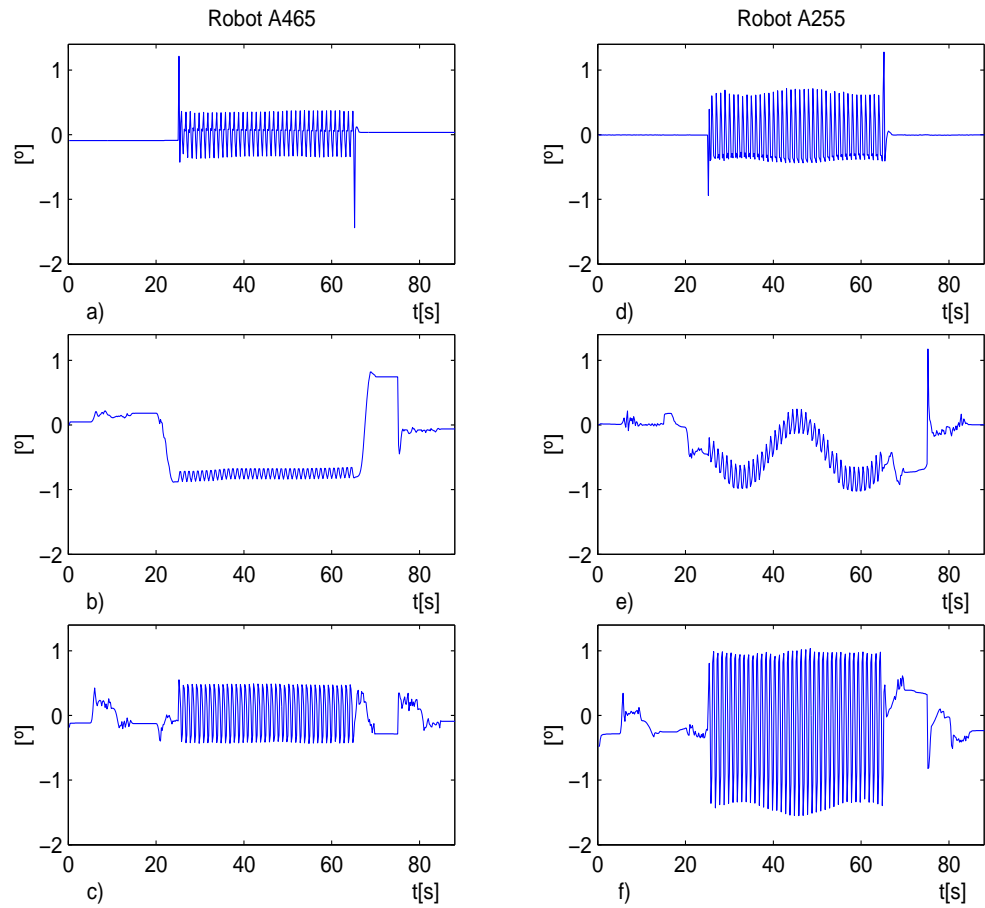


Figura 4.6: Errores de seguimiento en coordenadas articulares. a)  $\tilde{q}_{11}$ , b)  $\tilde{q}_{12}$ , c)  $\tilde{q}_{13}$ , d)  $\tilde{q}_{21}$ , e)  $\tilde{q}_{22}$ , f)  $\tilde{q}_{23}$



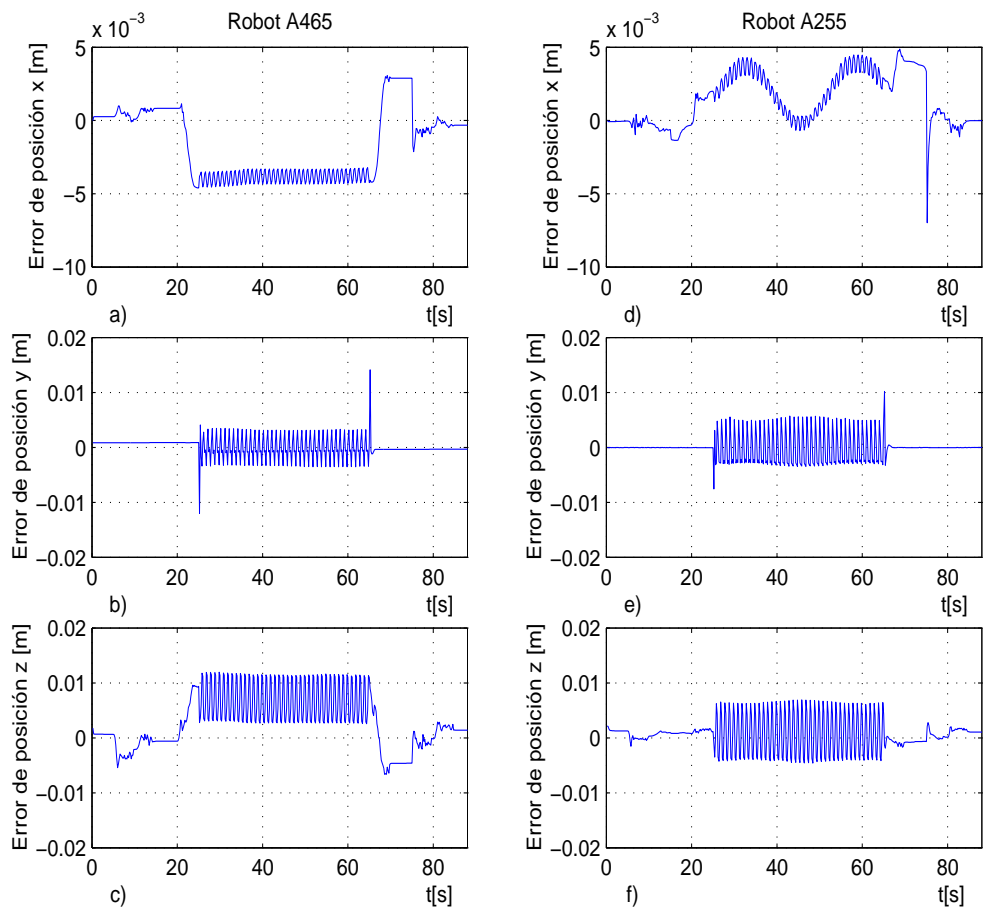


Figura 4.7: Errores de seguimiento en coordenadas cartesianas. a)  $\tilde{x}_1$ , b)  $\tilde{y}_1$ , c)  $\tilde{z}_1$ , d)  $\tilde{x}_2$ , e)  $\tilde{y}_2$ , f)  $\tilde{z}_2$

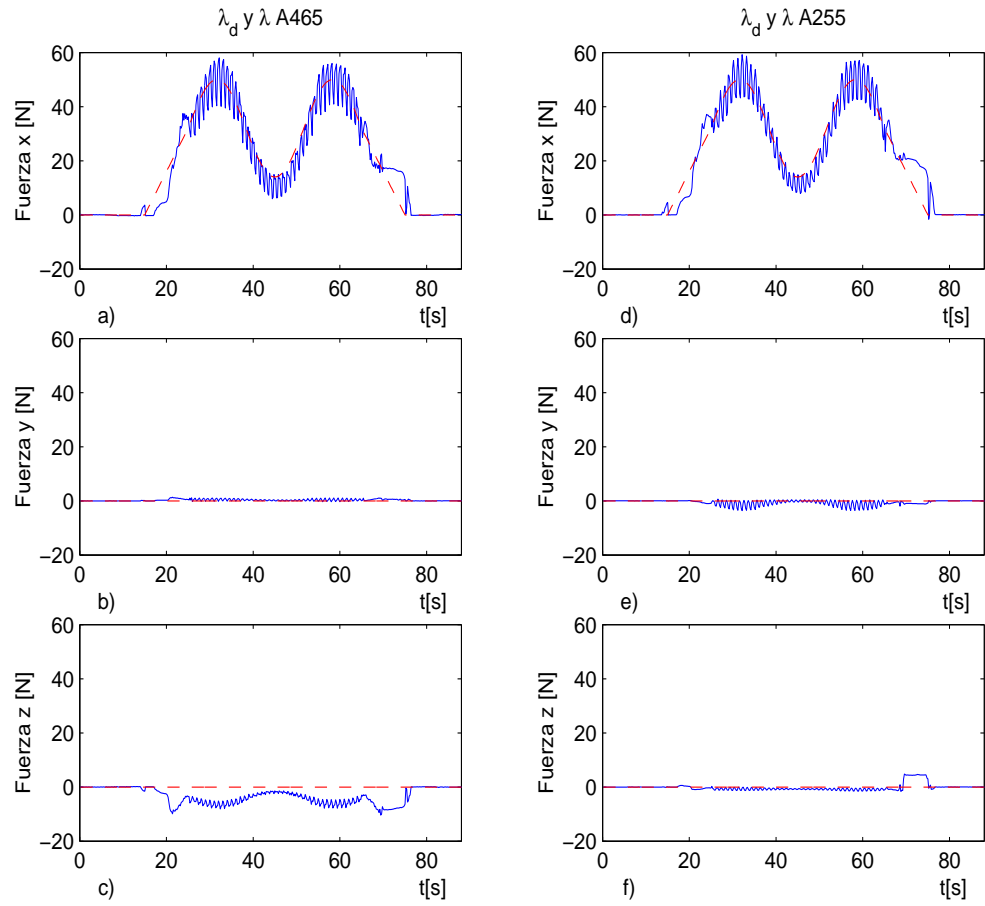


Figura 4.8: Fuerza medida de los robots A465 y A255. a)  $F_{x1}$ . b)  $F_{y1}$ . c)  $F_{z1}$ . d)  $F_{x2}$ . e)  $F_{y2}$ . f)  $F_{z2}$ . — medida. - - - deseada.

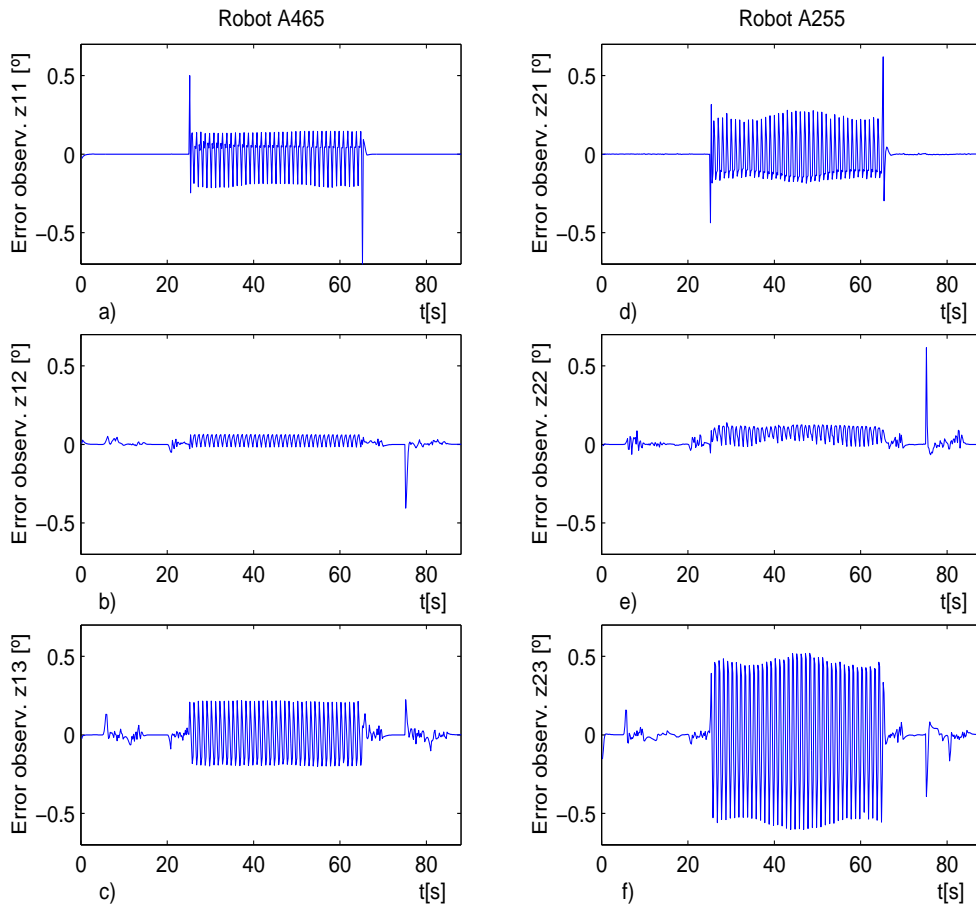


Figura 4.9: Errores de observación de velocidad articular. a)  $z_{11}$ . b)  $z_{12}$ . c)  $z_{13}$ . d)  $z_{21}$ . e)  $z_{22}$ . f)  $z_{23}$ .

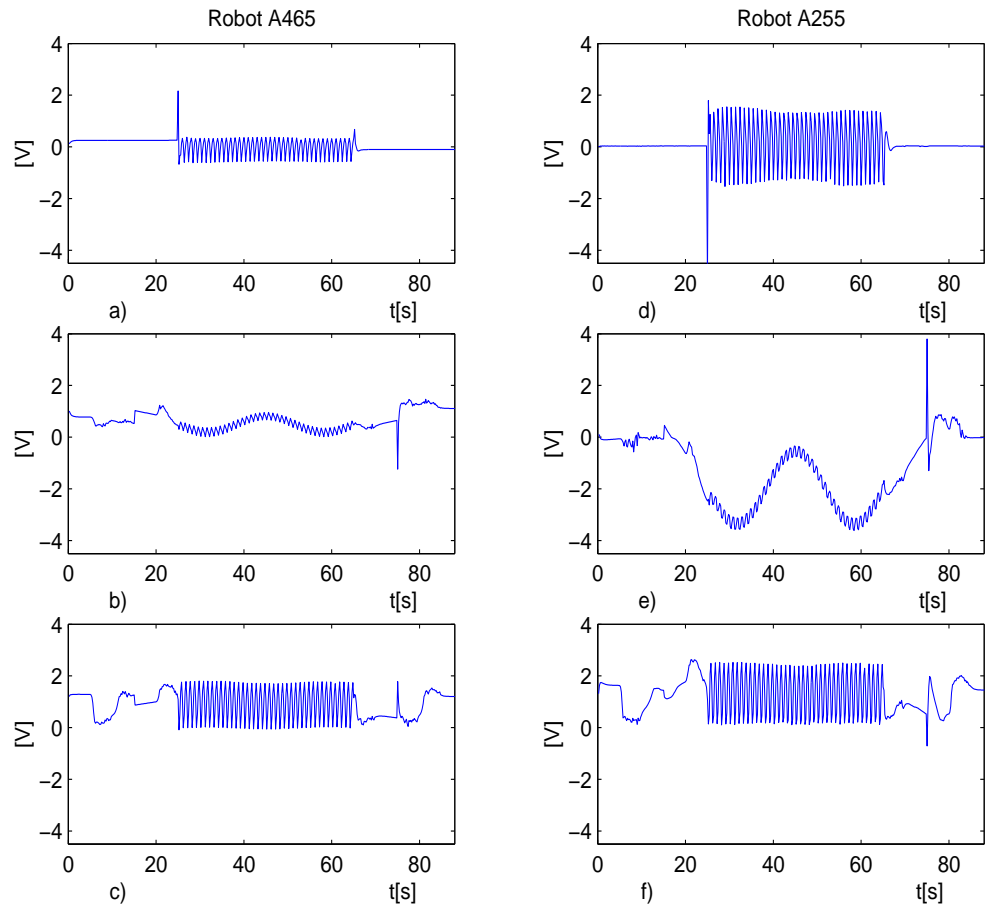


Figura 4.10: Voltajes de entrada. a)  $v_{11}$ . b)  $v_{12}$ . c)  $v_{13}$ . d)  $v_{21}$ . e)  $v_{22}$ . f)  $v_{23}$ .

## 4.6. Resultados experimentales para controlador implícito con estimación de velocidad y movimiento circular lento, $T=40[s]$

Dadas la trayectorias deseadas (4.1)-(4.2) con movimiento circular lento  $T=40[s]$  y una fuerza (4.2), se han obtenido los errores de seguimiento en coordenadas articulares, coordenadas cartesianas, fuerza, observación de velocidad y señales de control como se muestra en las siguientes Figuras; 4.11, 4.12, 4.13,4.14 y 4.15 respectivamente.

Como era de esperarse, el movimiento en coordenadas articulares y cartesianas resulta tener una reducción considerable de ruido en su respuesta respecto a los resultados del experimento de la sección 4.5. Los errores de seguimiento de observación de velocidad muestran que la estimación reconstruye de manera satisfactoria la dinámica de velocidad. Sin embargo, la respuesta en fuerza muestra desviación respecto de la señal deseada principalmente cuando se imprimen fuerzas cercanas a la magnitud de cresta de la señal de fuerza deseada.

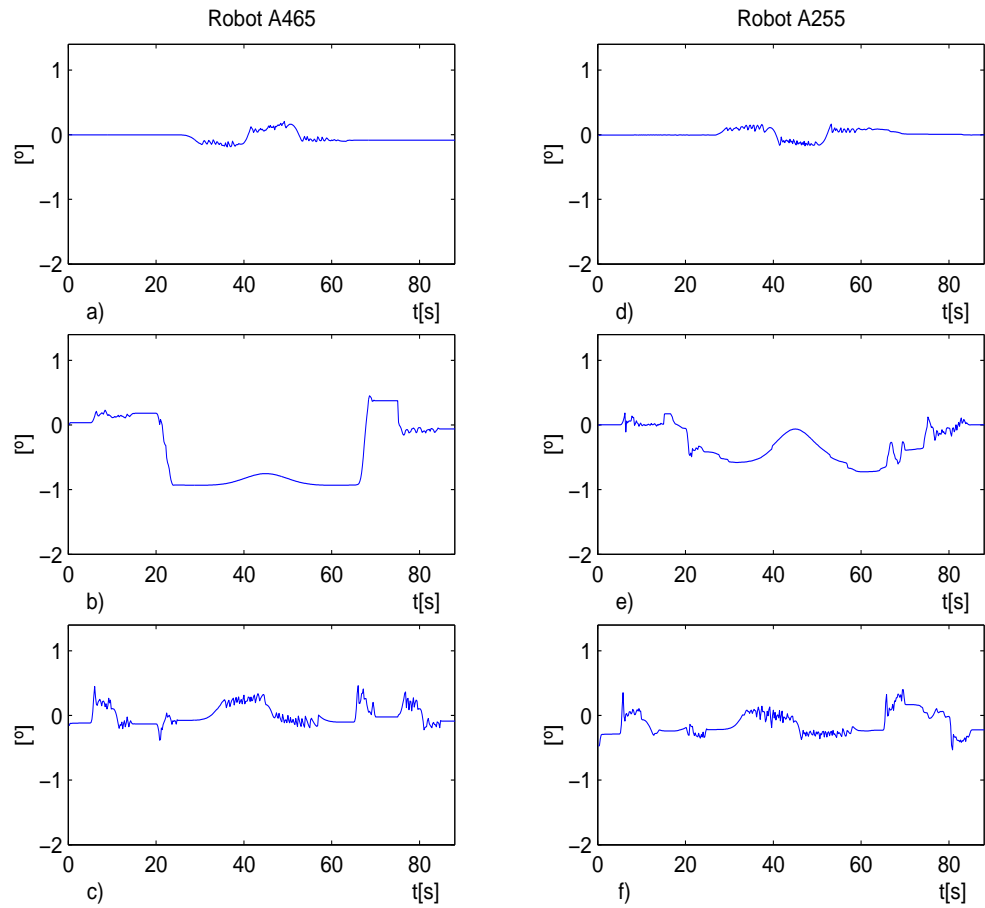


Figura 4.11: Errores de seguimiento en coordenadas articulares. a)  $\tilde{q}_{11}$ , b)  $\tilde{q}_{12}$ , c)  $\tilde{q}_{13}$ , d)  $\tilde{q}_{21}$ , e)  $\tilde{q}_{22}$ , f)  $\tilde{q}_{23}$

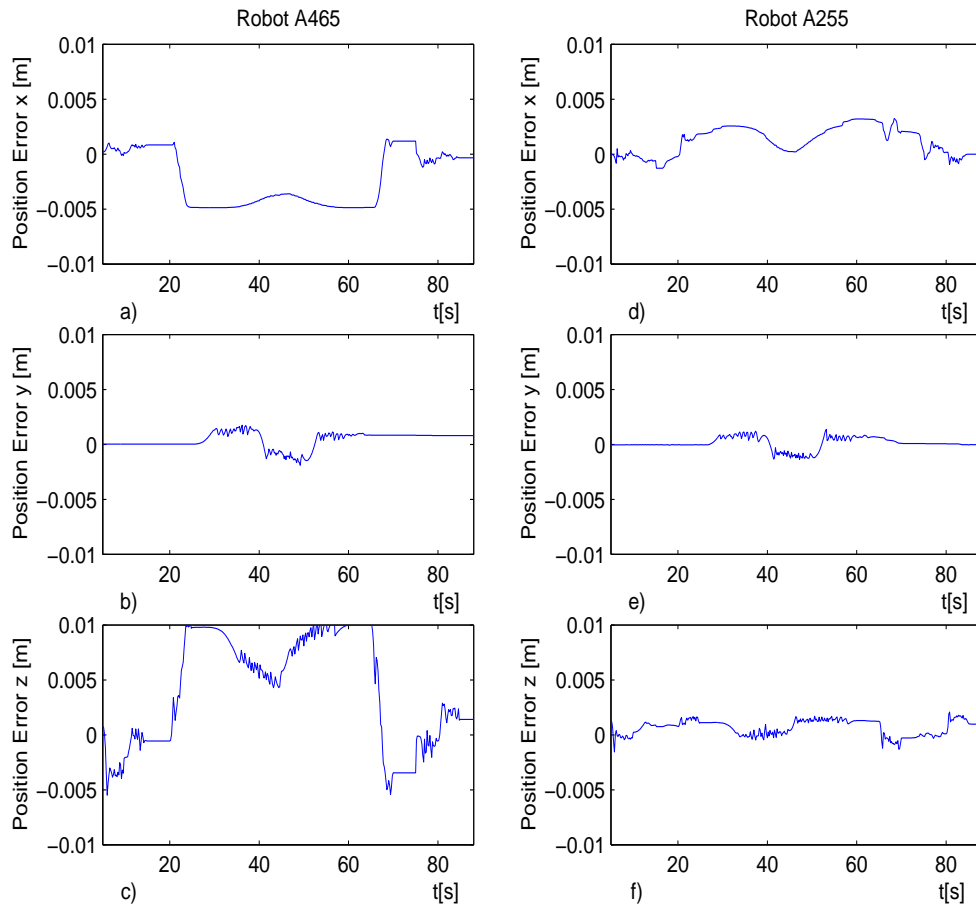


Figura 4.12: Errores de seguimiento en coordenadas cartesianas. a)  $\tilde{x}_1$ , b)  $\tilde{y}_1$ , c)  $\tilde{z}_1$ , d)  $\tilde{x}_2$ , e)  $\tilde{y}_2$ , f)  $\tilde{z}_2$

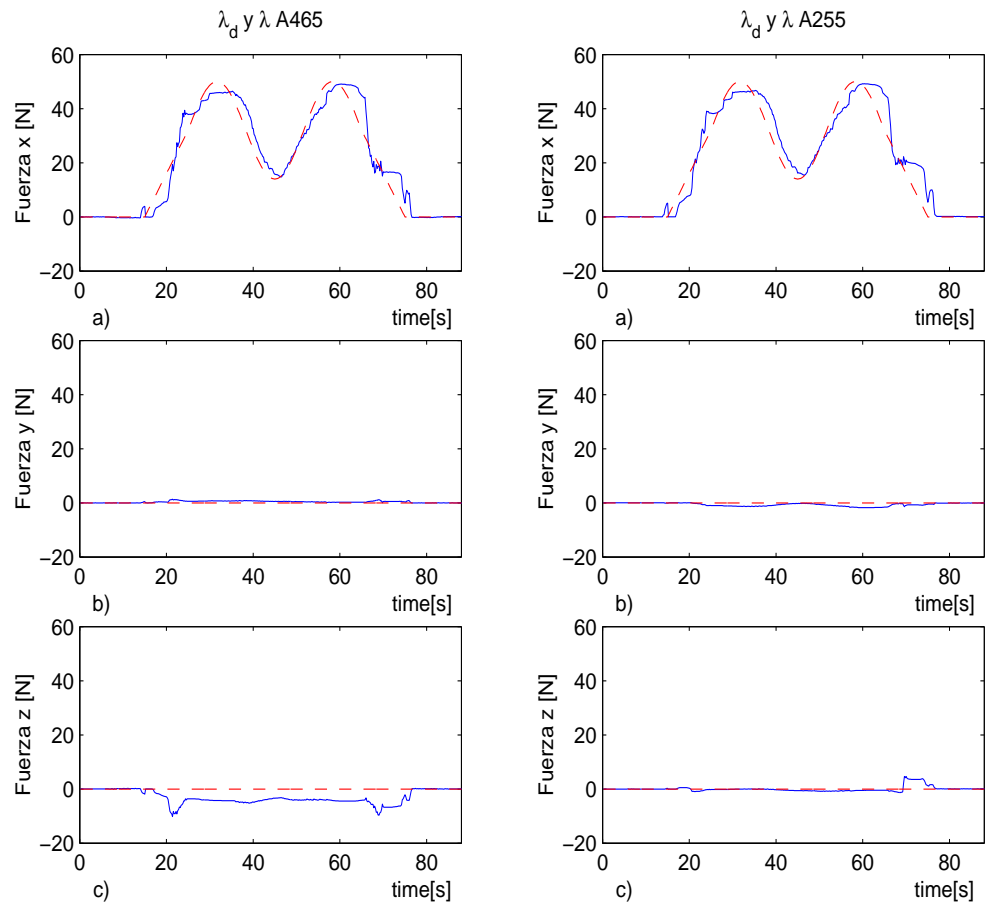


Figura 4.13: Fuerza medida de los robots A465 y A255. a)  $F_{x1}$ . b)  $F_{y1}$ . c)  $F_{z1}$ . d)  $F_{x2}$ . e)  $F_{y2}$ . f)  $F_{z2}$ . — medida. - - - deseada.



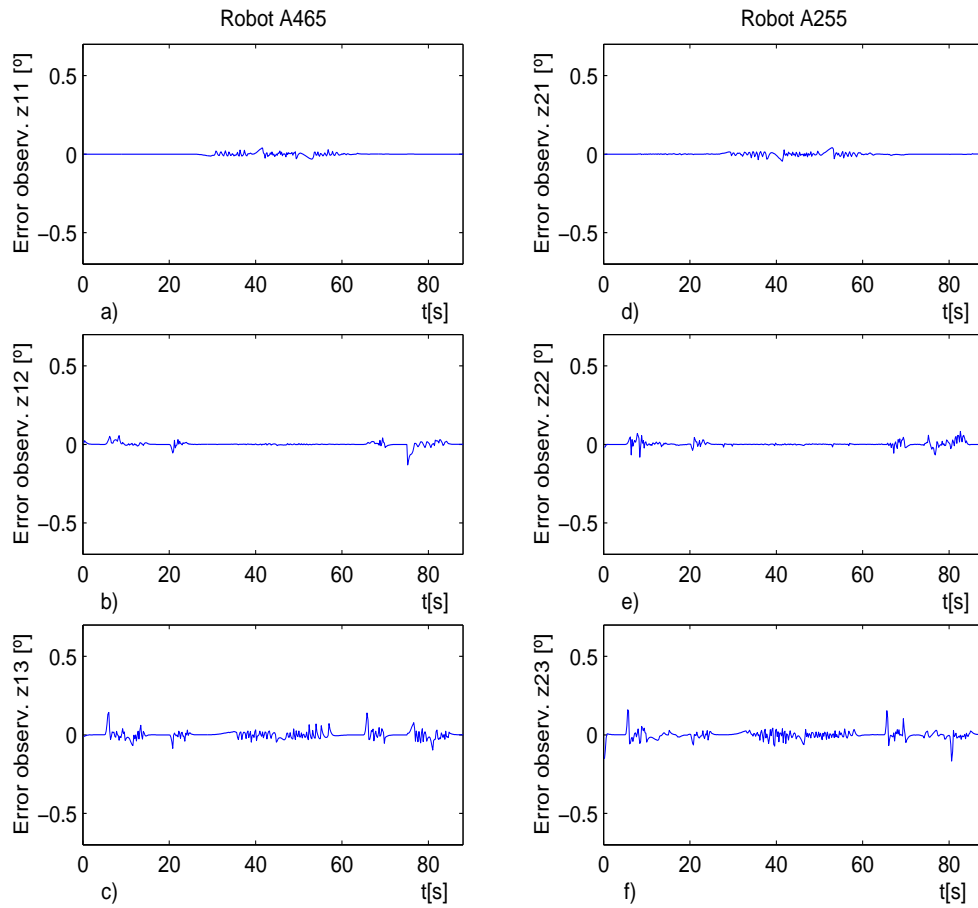


Figura 4.14: Errores de observación de velocidad articular. a)  $z_{11}$ . b)  $z_{12}$ . c)  $z_{13}$ . d)  $z_{21}$ . e)  $z_{22}$ . f)  $z_{23}$ .

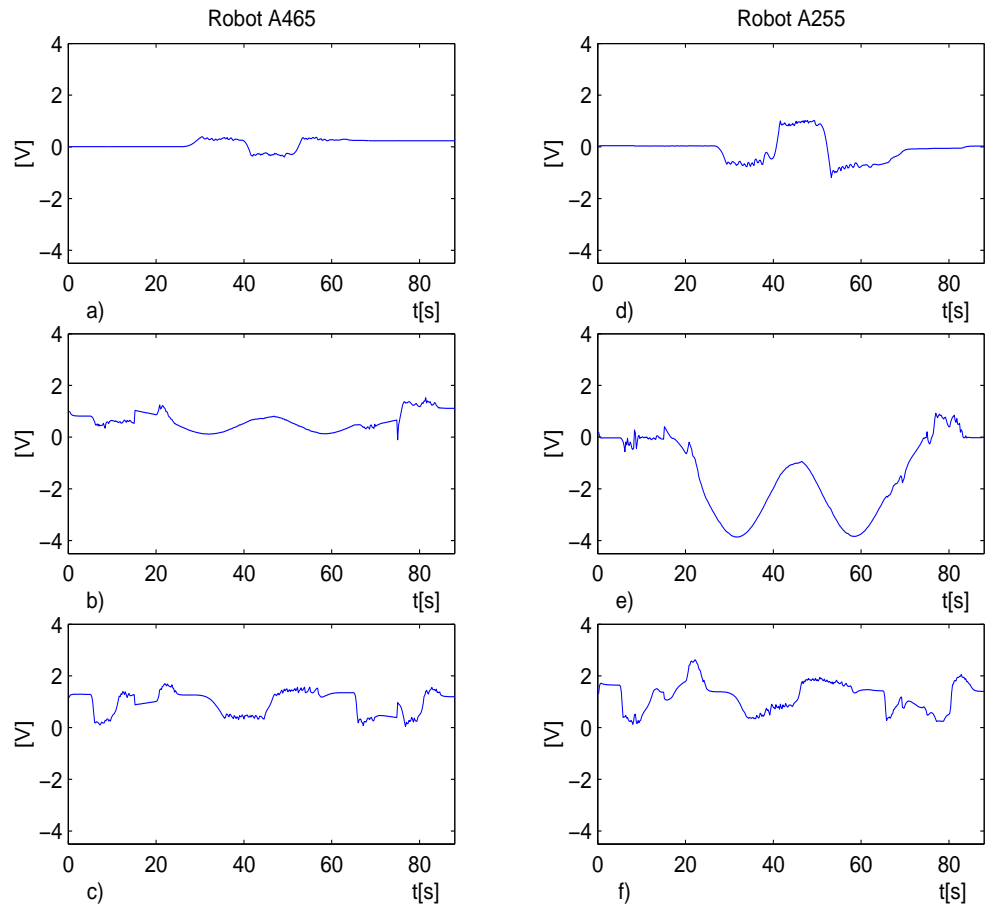


Figura 4.15: Voltajes de entrada. a)  $v_{11}$ . b)  $v_{12}$ . c)  $v_{13}$ . d)  $v_{21}$ . e)  $v_{22}$ . f)  $v_{23}$ .

## 4.7. Resultados experimentales para esquema de control sin movimiento circular

Dadas la trayectorias deseadas (4.1)-(4.2) sin movimiento circular lento  $T=0[s]$  y una fuerza (4.2), se han obtenido los errores de seguimiento en coordenadas articulares, coordenadas cartesianas, fuerza, observación de velocidad y señales de control como se muestra en las siguientes Figuras; 4.16, 4.17, 4.18, 4.19 y 4.20 respectivamente.

Puesto que el error de seguimiento articular como cartesiano se mantiene suficientemente reducido y satisfactorio, la respuesta en fuerza en este experimento se muestra notablemente degradada con un desempeño deficiente, el cual refleja un retardo de la señal de fuerza medida respecto de la señal de fuerza deseada. Por otro lado, se tiene que la respuesta de observación en velocidad muestra un comportamiento de reconstrucción satisfactoria.

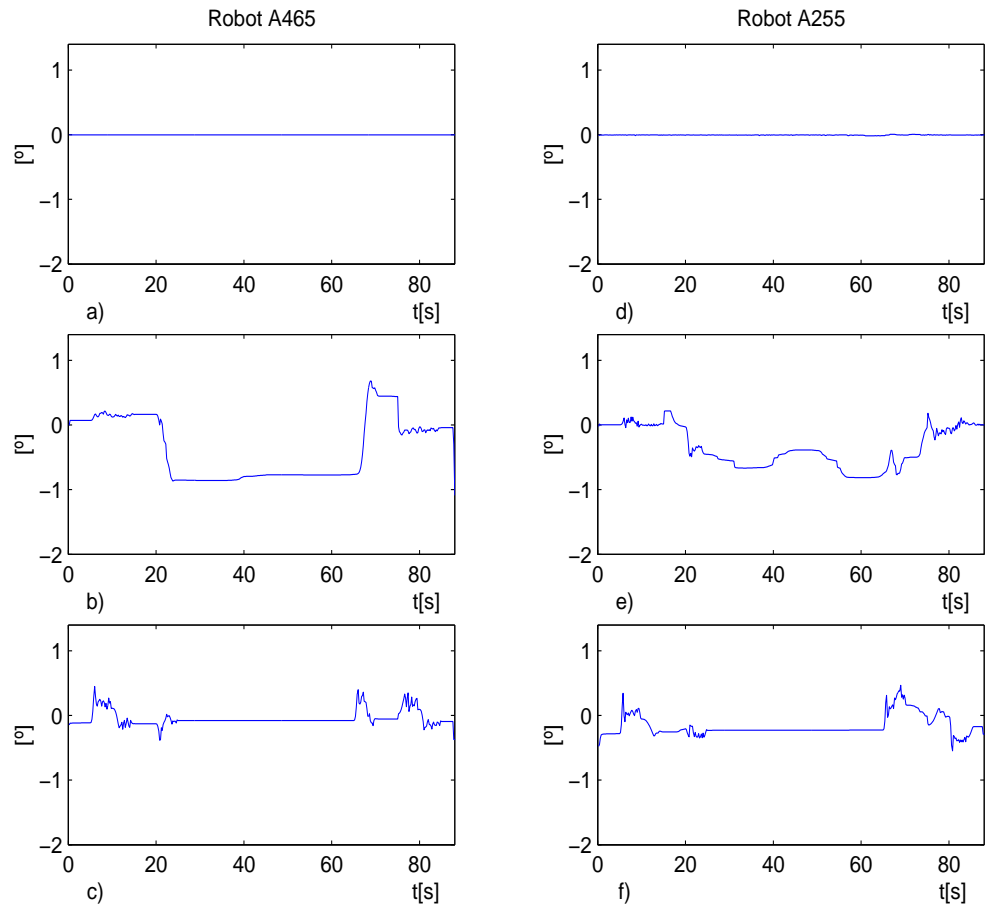


Figura 4.16: Errores de seguimiento en coordenadas articulares. a)  $\tilde{q}_{11}$ , b)  $\tilde{q}_{12}$ , c)  $\tilde{q}_{13}$ , d)  $\tilde{q}_{21}$ , e)  $\tilde{q}_{22}$ , f)  $\tilde{q}_{23}$

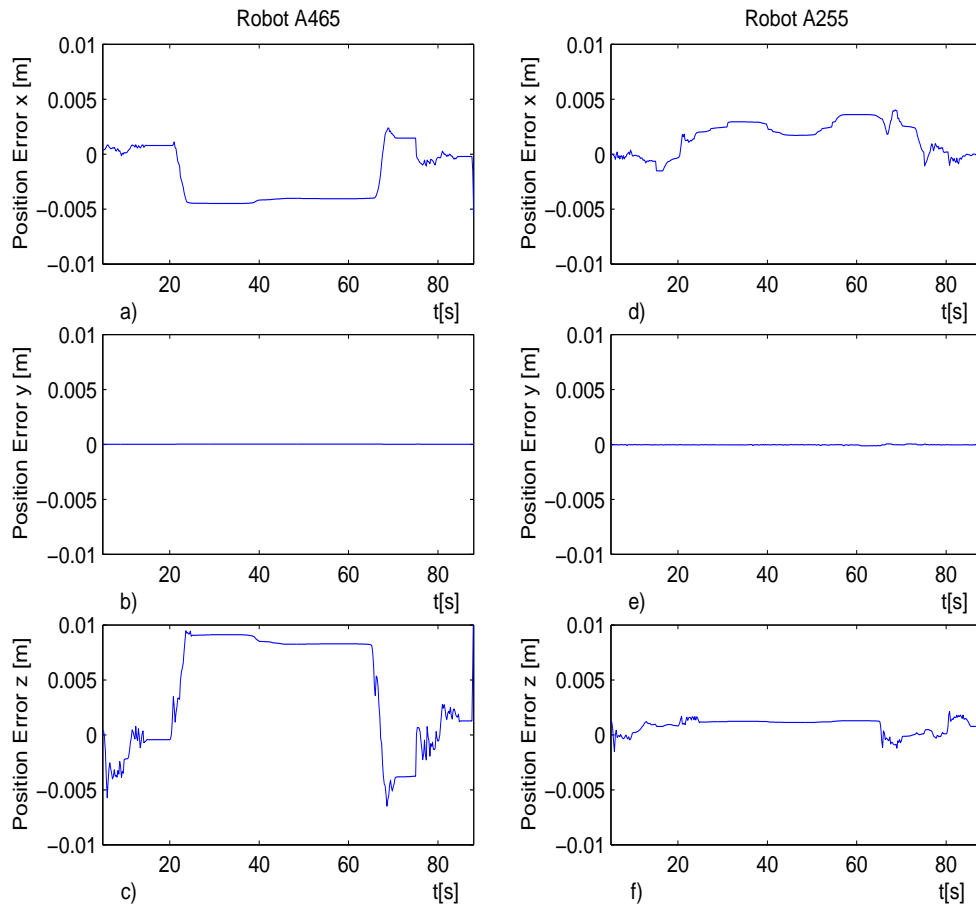


Figura 4.17: Errores de seguimiento en coordenadas cartesianas. a)  $\tilde{x}_1$ , b)  $\tilde{y}_1$ , c)  $\tilde{z}_1$ , d)  $\tilde{x}_2$ , e)  $\tilde{y}_2$ , f)  $\tilde{z}_2$

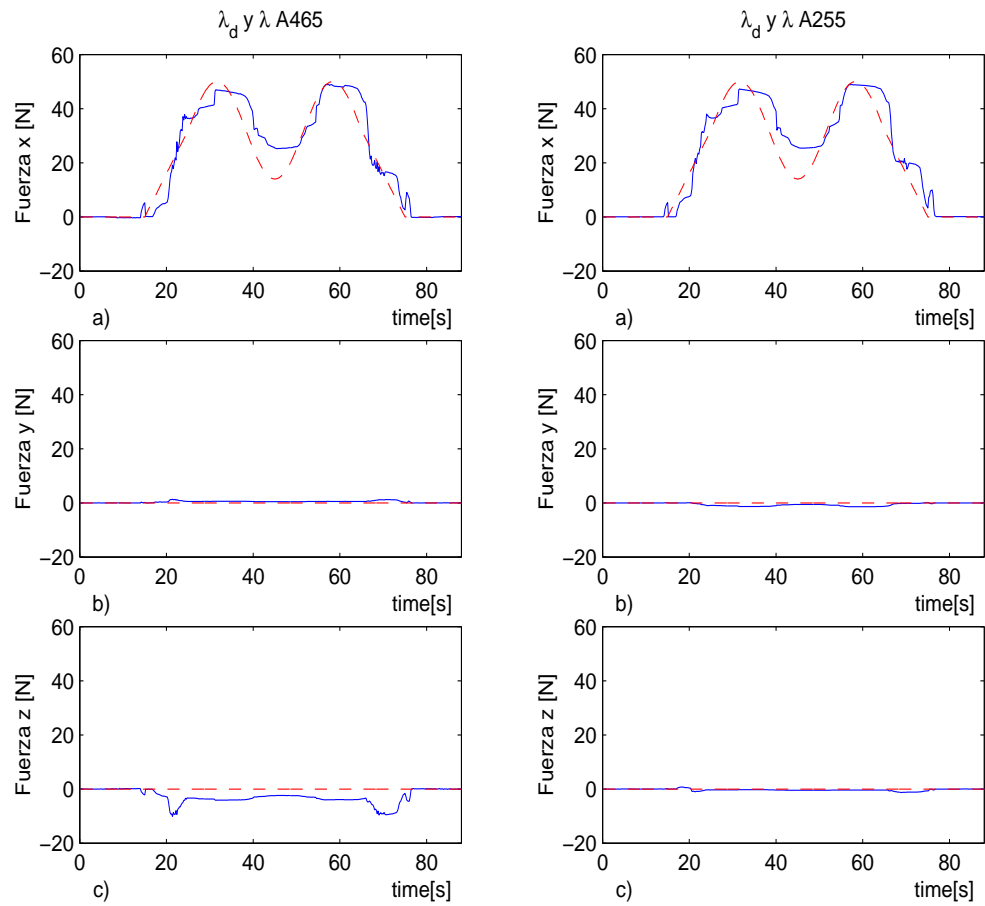


Figura 4.18: Fuerza medida de los robots A465 y A255. a)  $F_{x1}$ . b)  $F_{y1}$ . c)  $F_{z1}$ . d)  $F_{x2}$ . e)  $F_{y2}$ . f)  $F_{z2}$ . — medida. - - - deseada.

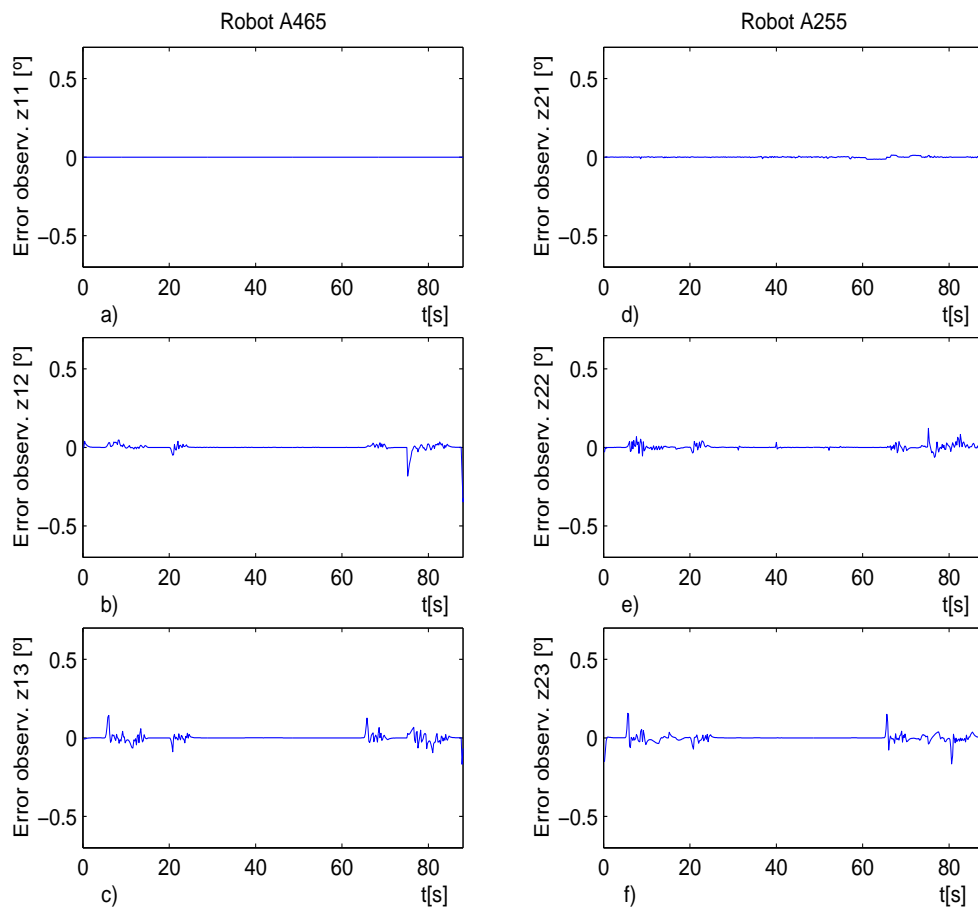


Figura 4.19: Errores de observación de velocidad articular. a)  $z_{11}$ . b)  $z_{12}$ . c)  $z_{13}$ . d)  $z_{21}$ . e)  $z_{22}$ . f)  $z_{23}$ .

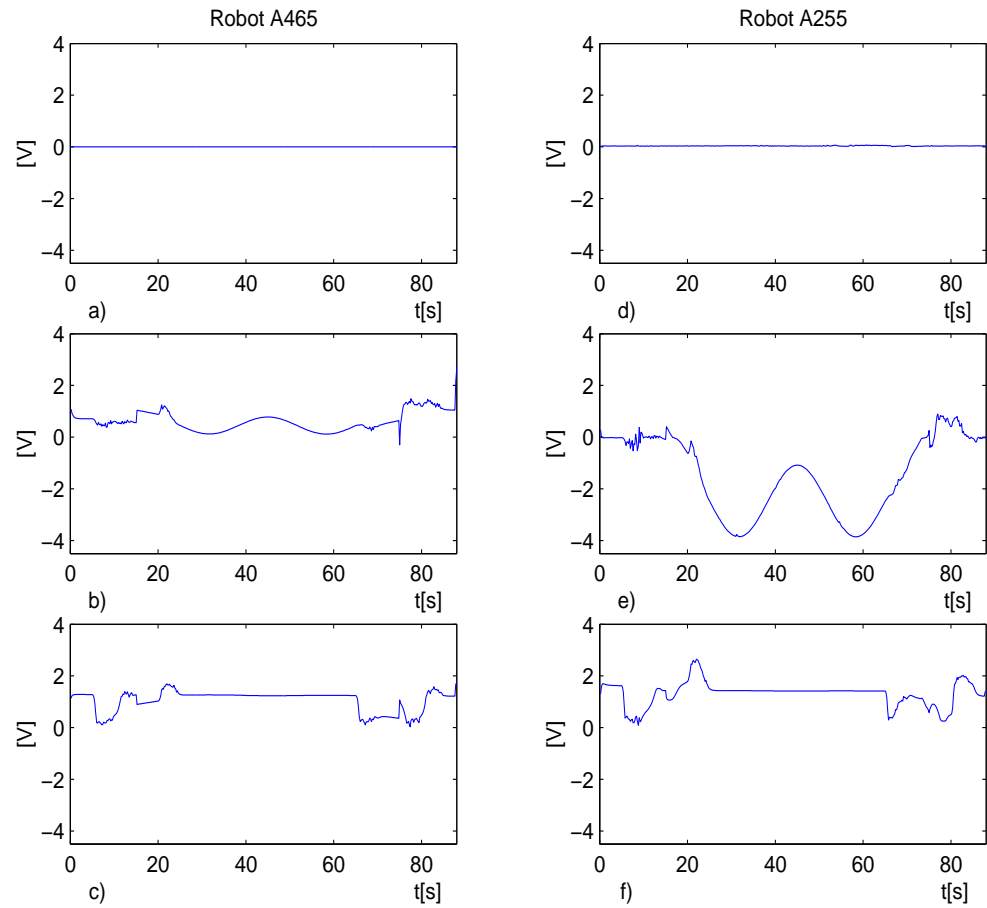


Figura 4.20: Voltajes de entrada. a)  $v_{11}$ . b)  $v_{12}$ . c)  $v_{13}$ . d)  $v_{21}$ . e)  $v_{22}$ . f)  $v_{23}$ .



## 4.8. Discusión y conclusión de resultados experimentales de esquema sin observador de fuerza

La inserción de un observador de velocidad en un esquema de control implícito descentralizado de robots cooperativos sin considerar la dinámica del objeto manipulado ni la medición de fuerza, tiene sustento y formalismo teórico bajo el segundo esquema de Lyapunov, el cual permite condiciones suficientes para operar de manera eficiente bajo cierta elección de ganancias teóricas y un modelo exacto de los robots, sin embargo, experimentalmente no se ha podido obtener un procedimiento sistemático para sintonizar ganancias básicamente debido a la naturaleza no lineal del sistema en lazo cerrado, como tampoco contar con un modelo preciso de los robots, lo cual es un problema fundamental en robótica debido a la cantidad de incertidumbre introducida en el sistema. Sin embargo el esquema anterior resultó ser experimentalmente estable bajo una adecuada selección de ganancias tanto a bajas como para altas velocidades de movimiento, mostrando una vibración generalizada en el desempeño cuando se trabaja en régimen de altas velocidades de movimiento y un seguimiento muy deficiente en bajas velocidades, observando que la pérdida de excitación persistente en este esquema produce falta de respuesta dinámica. Sin embargo, el esquema ha mostrado buenos resultados en la reconstrucción de velocidad mediante un observador lineal de alta ganancia tanto para altas como a bajas velocidades. En consecuencia una pérdida de precisión y de fuerza a bajas velocidades sugiere que este esquema de control implícito sea diseñado con una estrategia que permita contemplar mayor conocimiento dinámico de la fuerza producida por cada robot. En este sentido, se propone un observador de fuerza o filtro de fuerza que intervenga como reconstructor de la dinámica de fuerza producida en el sistema que sea lo más independiente posible a una excitación persistente, de tal manera que permita mejorar el desempeño a bajas y a altas velocidades de movimiento.

## 4.9. Resultados experimentales para controlador con observadores de velocidad/fuerza y movimiento circular rápido $T=1[s]$

Dadas la trayectorias deseadas (4.1)-(4.2) con movimiento circular rápido  $T=1[s]$  y una fuerza (4.2), se obtuvieron los errores de seguimiento en coordenadas articulares, coordenadas cartesianas, fuerza, observación de velocidad, señales de control, error de fuerza filtrada y Fuerza real Vs. estimada como se muestra en las siguientes Figuras; 4.21, 4.22, 4.23, 4.24, 4.25, 4.26 y 4.27 respectivamente.

Los mismos efectos de ruido presentados en los resultados experimentales de 4.5 son manifestados durante esta evaluación experimental. Los resultados en coordenadas articulares y cartesianas muestran un seguimiento afectado por ruido. En coordenadas cartesianas las Figuras 4.22a y 4.22d muestran ruido alrededor de su respuesta. El cual se transmite por el movimiento circular rápido a todas las articulaciones rígidas del robot, tal y como se muestra en las Figuras de seguimiento articular 4.21. Esta vibración también es reflejada a los sensores de fuerza produciendo un deterioro generalizado en las mediciones que validan los resultados como se muestra en la Figura 4.23. Sin embargo, Los resultados en fuerza muestran ser ligeramente mejores que los obtenidos en el esquema sin observador de fuerza, lo cual es justificado por permitir un mayor margen de ganancia en la sintonización tanto en el controlador como en el observador de fuerza, siendo este un esquema que permite superar el aumento de ganancias respecto al esquema sin observador de fuerza sin caer en la inestabilidad. En este sentido es importante notar que la ganancia  $k_{di}$  en este esquema de control es reducida al 50% respecto al esquema sin observador de fuerza, un aumento de la misma es producto de inestabilidad, sin embargo en los resultados obtenidos en la Figura 4.24, se muestra que los errores de observación de velocidad respectivos a cada robot son satisfactorio aún con el ruido transmitido durante el movimiento circular de periodo  $T = 1[s]$ . Lo cual permite notar que el observador de velocidad

---

muestra robustez dentro de cierto margen de ganancia.

En la figura 4.26, se observa que los errores de fuerza estimada menos fuerza deseada muestran estar montados sobre un nivel constante de fuerza, el cual oscila entre 6[N] y 7[N], originados por la respuesta de una estimación de fuerza afectada por el ruido del movimiento circular rápido. Finalmente el comparativo de la fuerza real contra la fuerza estimada es presentado en la figura 4.27, permitiendo notar que la señal estimada de fuerza varía en magnitud respecto de la señal medida por los sensores de fuerza. Sin embargo el comportamiento es satisfactorio considerando que la vibración producida en todo el sistema afecta los resultados obtenidos.

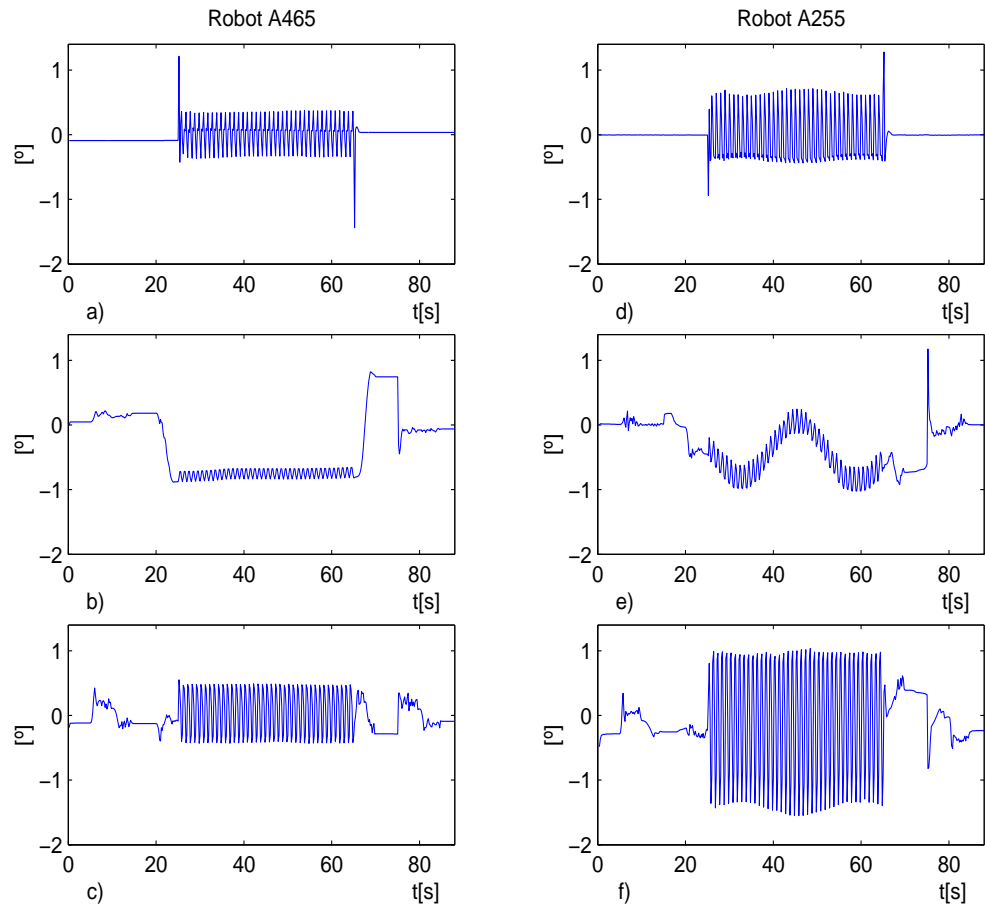


Figura 4.21: Errores de seguimiento en coordenadas articulares. a)  $\tilde{q}_{11}$ , b)  $\tilde{q}_{12}$ , c)  $\tilde{q}_{13}$ , d)  $\tilde{q}_{21}$ , e)  $\tilde{q}_{22}$ , f)  $\tilde{q}_{23}$

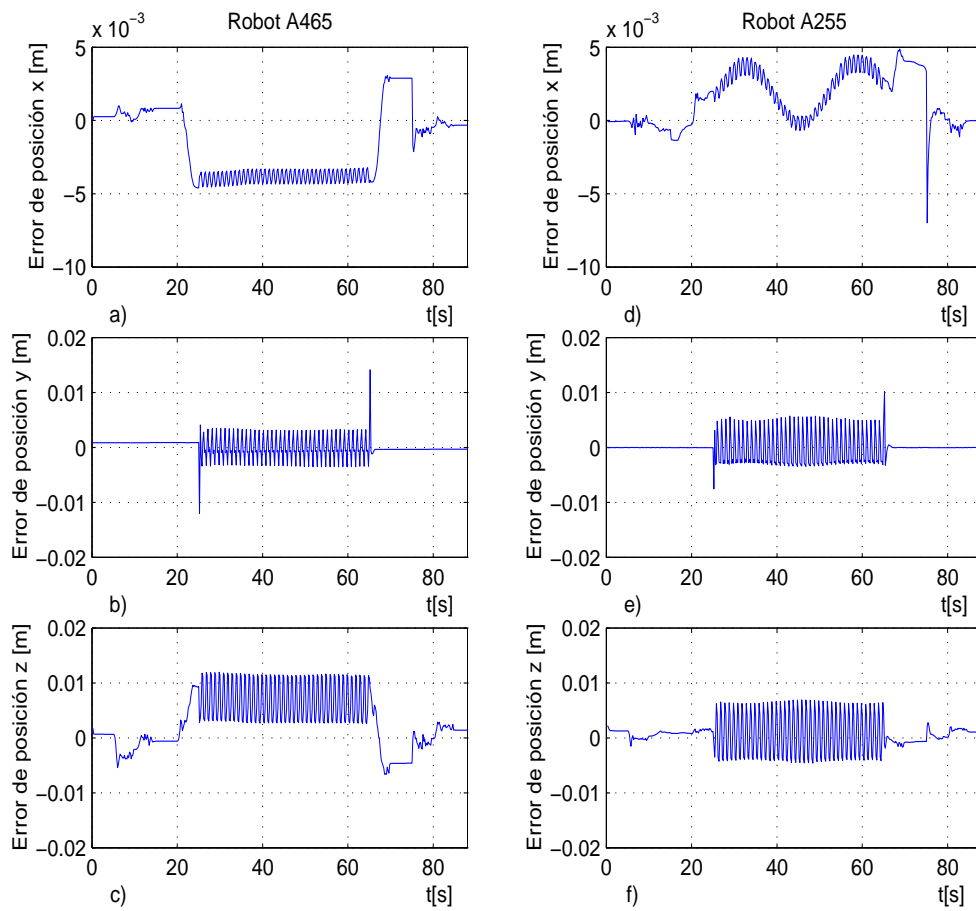


Figura 4.22: Errores de seguimiento en coordenadas cartesianas. a)  $\tilde{x}_1$ , b)  $\tilde{y}_1$ , c)  $\tilde{z}_1$ , d)  $\tilde{x}_2$ , e)  $\tilde{y}_2$ , f)  $\tilde{z}_2$

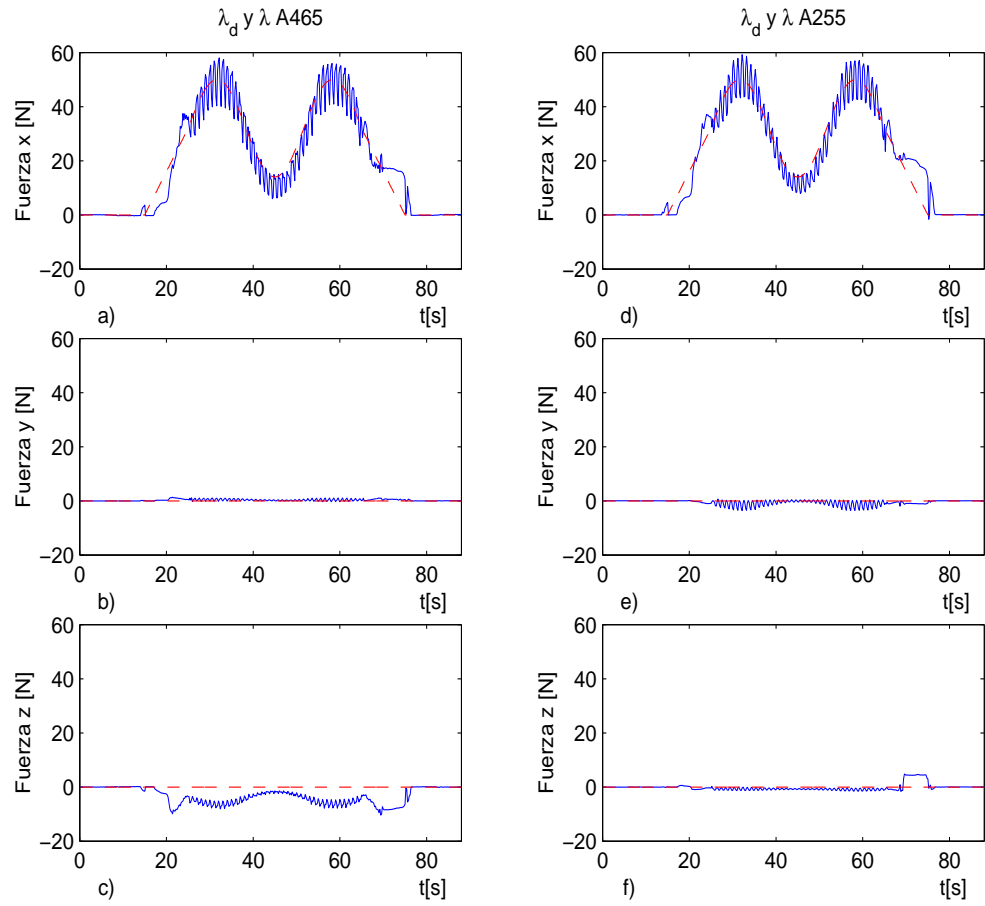


Figura 4.23: Fuerza medida de los robots A465 y A255. a)  $F_{x1}$ . b)  $F_{y1}$ . c)  $F_{z1}$ . d)  $F_{x2}$ . e)  $F_{y2}$ . f)  $F_{z2}$ . — medida. - - - deseada.

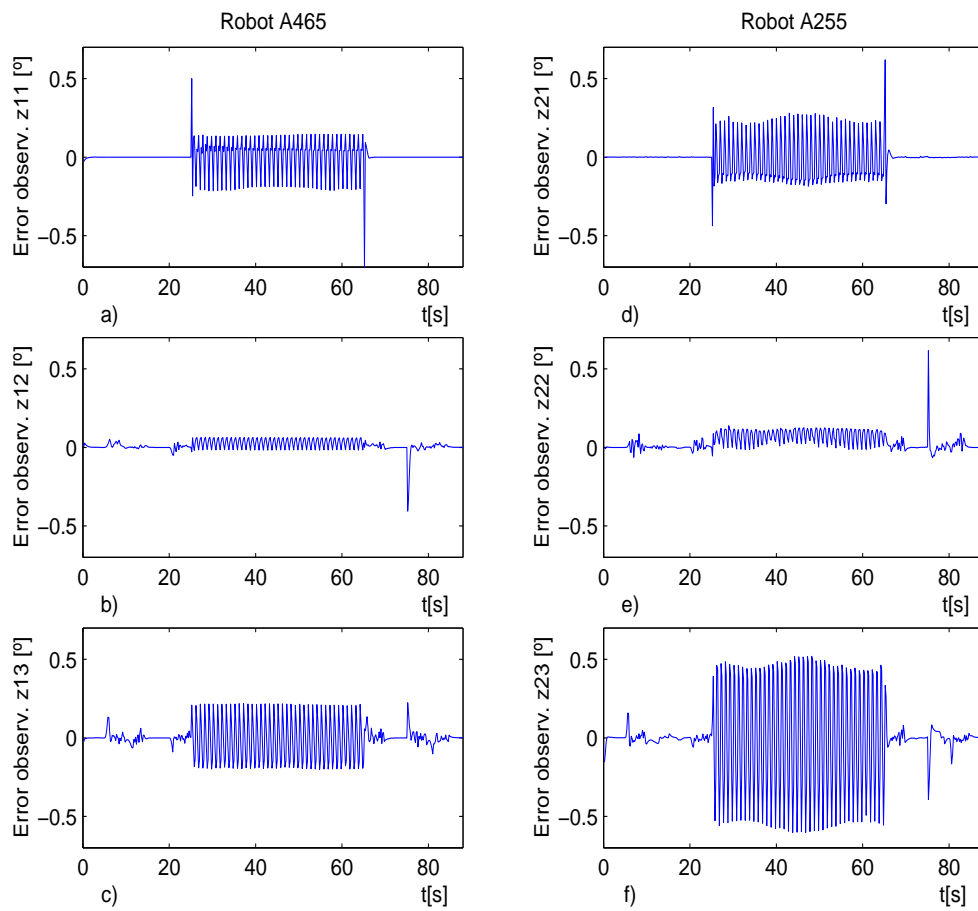


Figura 4.24: Errores de observación de velocidad articular. a)  $z_{11}$ . b)  $z_{12}$ . c)  $z_{13}$ . d)  $z_{21}$ . e)  $z_{22}$ . f)  $z_{23}$ .

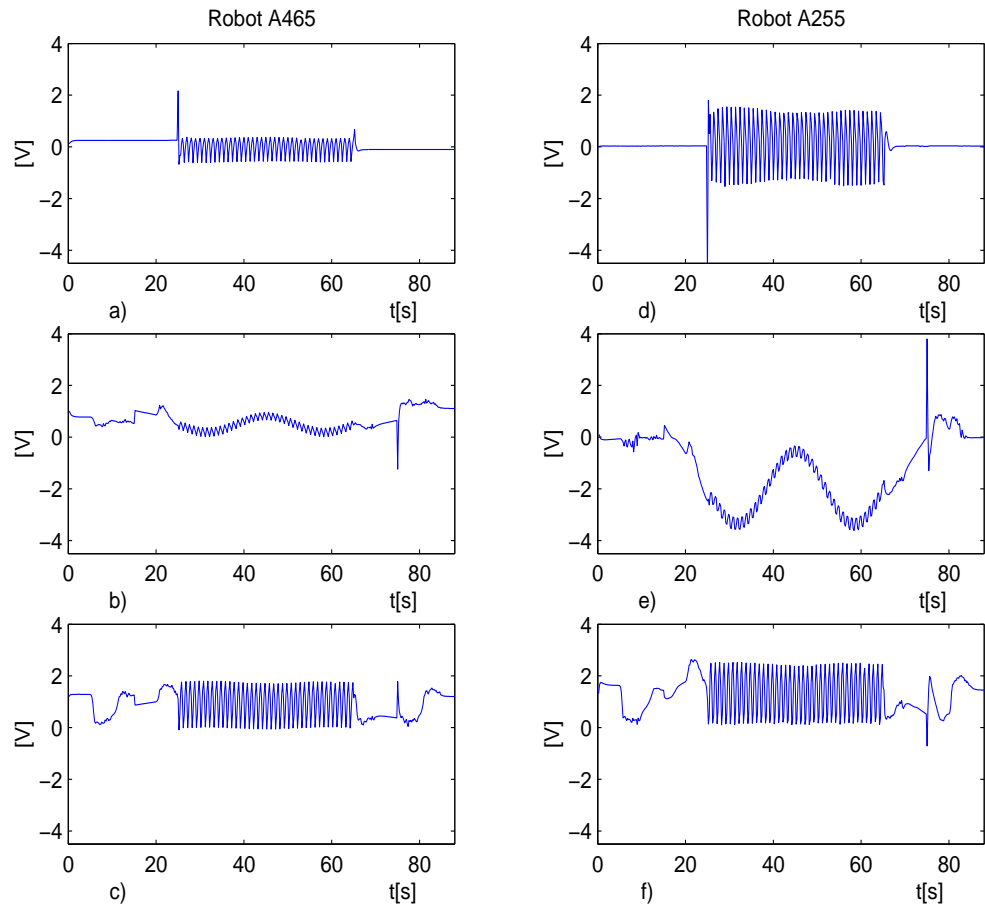


Figura 4.25: Voltajes de entrada. a)  $v_{11}$ . b)  $v_{12}$ . c)  $v_{13}$ . d)  $v_{21}$ . e)  $v_{22}$ . f)  $v_{23}$ .



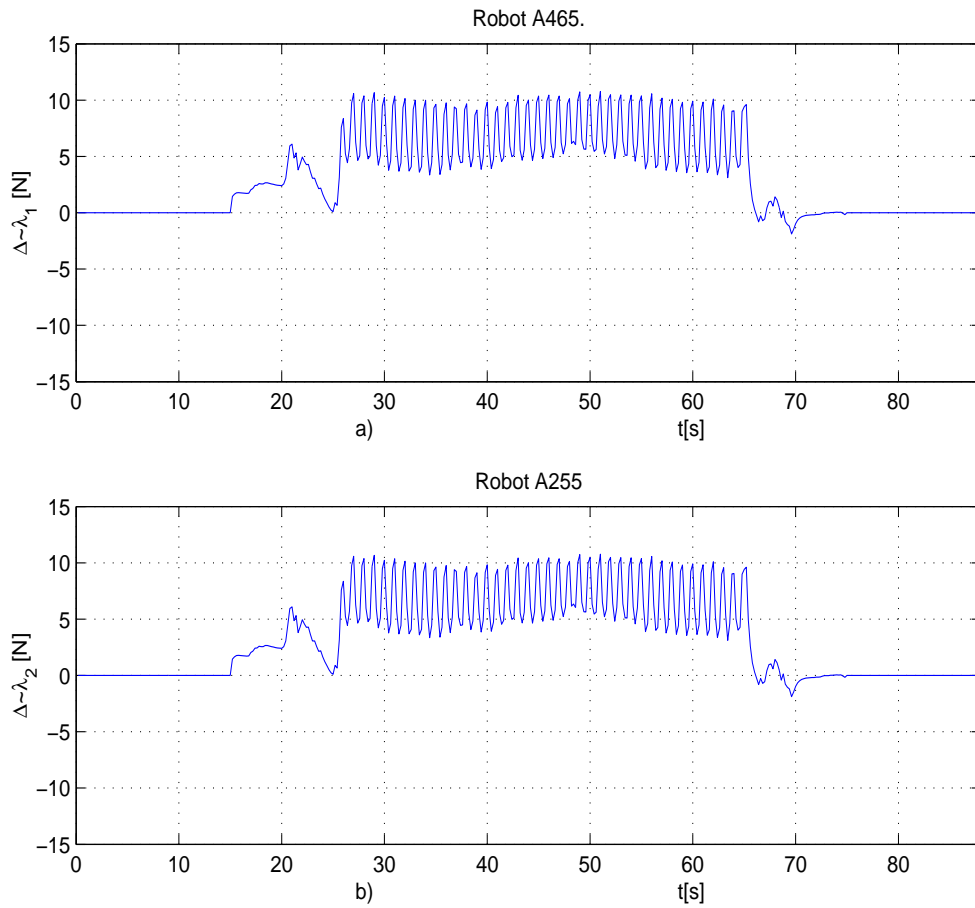


Figura 4.26: Errores de fuerza estimada menos fuerza deseada. a)  $\Delta\tilde{\lambda}_1$ , b)  $\Delta\tilde{\lambda}_2$

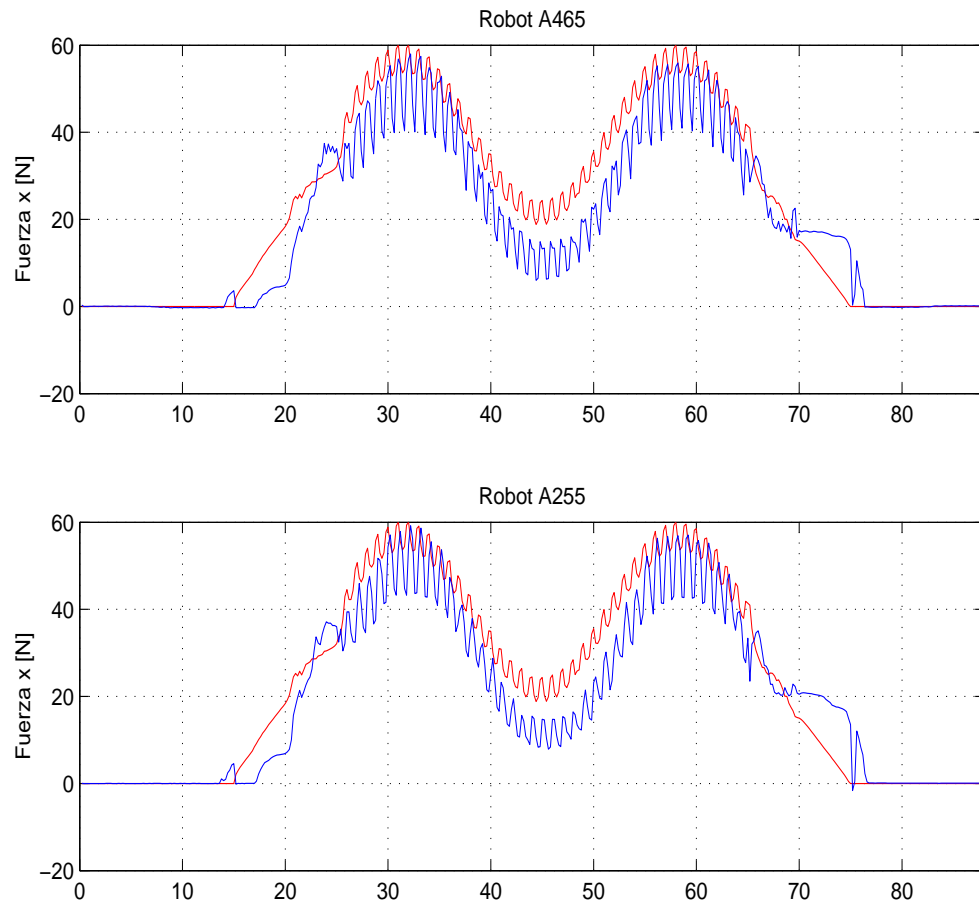


Figura 4.27: Fuerza real (Azul) Vs. estimada (Roja). a)  $\lambda_1$  Vs  $\hat{\lambda}_1$ , b)  $\lambda_2$  Vs  $\hat{\lambda}_2$

## 4.10. Resultados experimentales para controlador con observadores de velocidad/fuerza y movimiento circular lento $T=40[s]$

Dadas la trayectorias deseadas (4.1)-(4.2) con movimiento circular lento  $T=40[s]$  y una fuerza (4.2), se obtuvieron los errores de seguimiento en coordenadas articulares, coordenadas cartesianas, fuerza, observación de velocidad, señales de control, error de fuerza filtrada y Fuerza real Vs. estimada como se muestra en las siguientes Figuras; 4.28, 4.29, 4.30, 4.31, 4.32, 4.33 y 4.34 respectivamente.

Los efectos de una sintonización de ganancia más elevado, la introducción de un filtro de fuerza, la reducción de velocidad y la atenuación de ruido en las señales. Muestran en esta evaluación experimental un desempeño más eficiente respecto a los resultados obtenidos en 4.6. Los resultados en coordenadas cartesianas y en coordenadas articulares son satisfactorios, pero sobresale el comportamiento obtenido en fuerza, el cual tiene un buen seguimiento respecto a la señal deseada durante el intervalo en que se presenta el movimiento circular de periodo  $T = 40[s]$ .

En la figura 4.33, se observa que los errores de fuerza estimada menos fuerza deseada son pequeños. Finalmente el comparativo de la fuerza real contra la fuerza estimada muestra una reconstrucción satisfactoria de la fuerza aplicada por los robots al objeto manipulado.

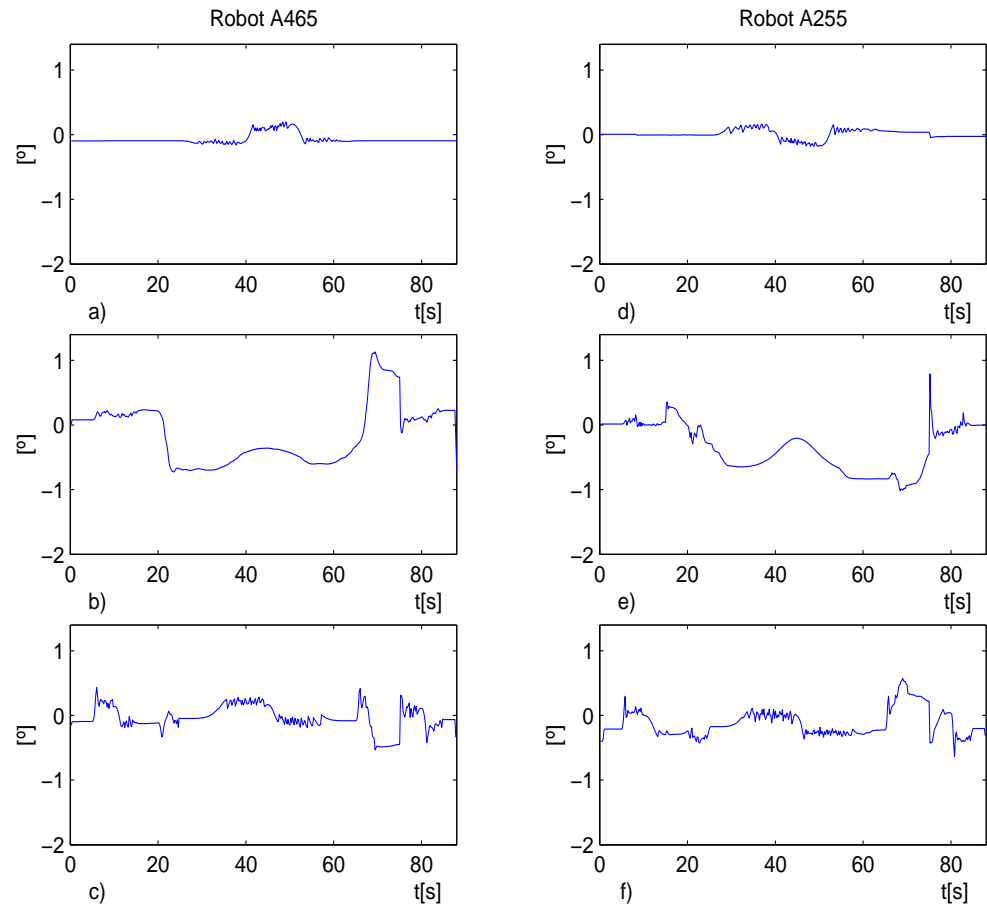


Figura 4.28: Errores de seguimiento en coordenadas articulares. a)  $\tilde{q}_{11}$ , b)  $\tilde{q}_{12}$ , c)  $\tilde{q}_{13}$ , d)  $\tilde{q}_{21}$ , e)  $\tilde{q}_{22}$ , f)  $\tilde{q}_{23}$

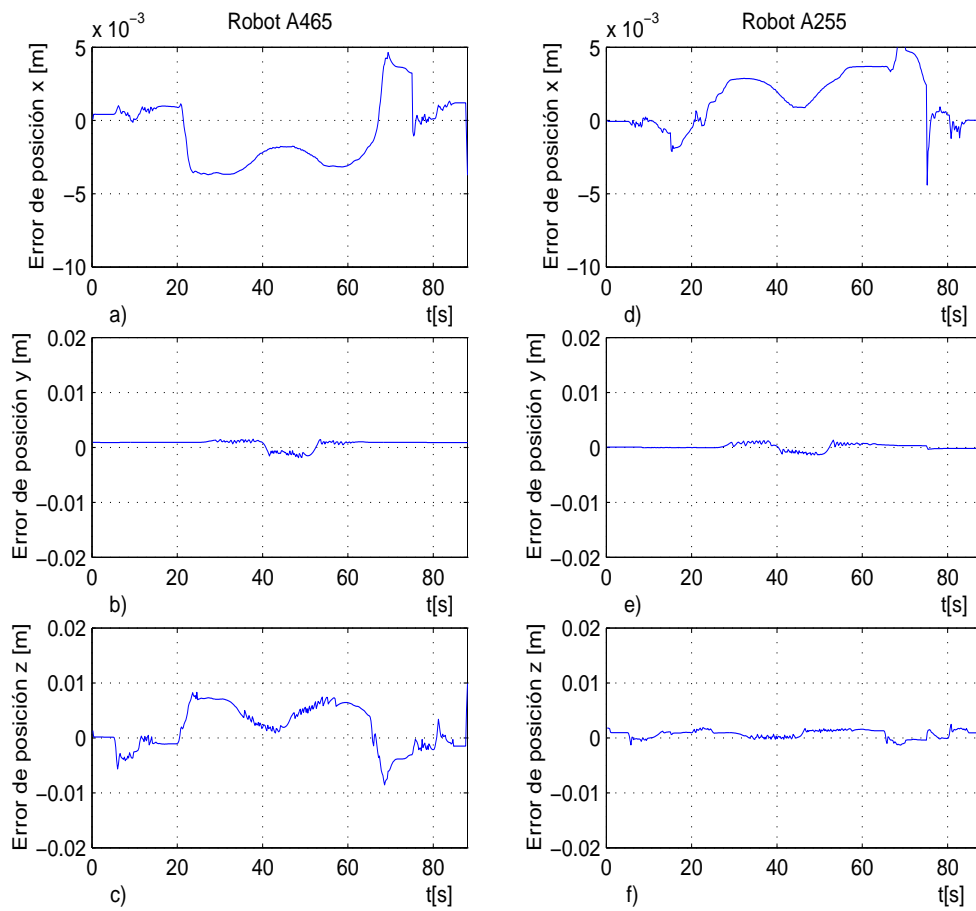


Figura 4.29: Errores de seguimiento en coordenadas cartesianas. a)  $\tilde{x}_1$ , b)  $\tilde{y}_1$ , c)  $\tilde{z}_1$ , d)  $\tilde{x}_2$ , e)  $\tilde{y}_2$ , f)  $\tilde{z}_2$

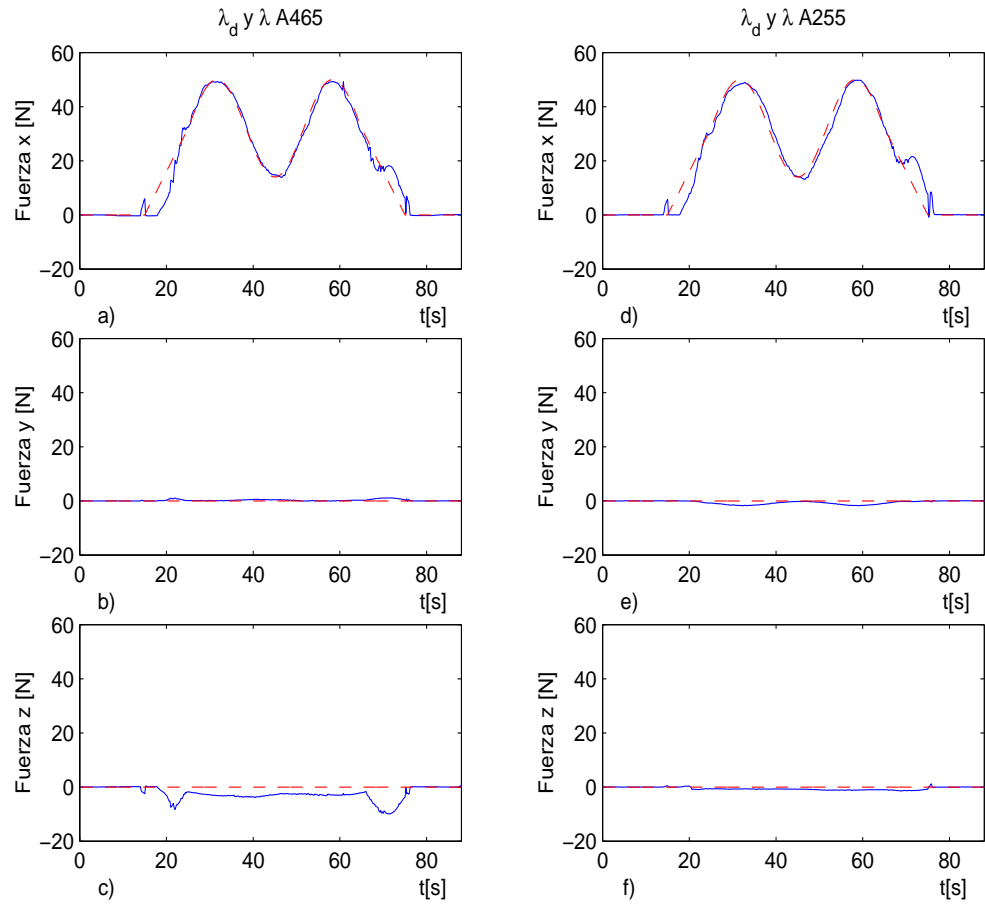


Figura 4.30: Fuerza medida de los robots A465 y A255. a)  $F_{x1}$ . b)  $F_{y1}$ . c)  $F_{z1}$ . d)  $F_{x2}$ . e)  $F_{y2}$ . f)  $F_{z2}$ . — medida. - - - deseada.

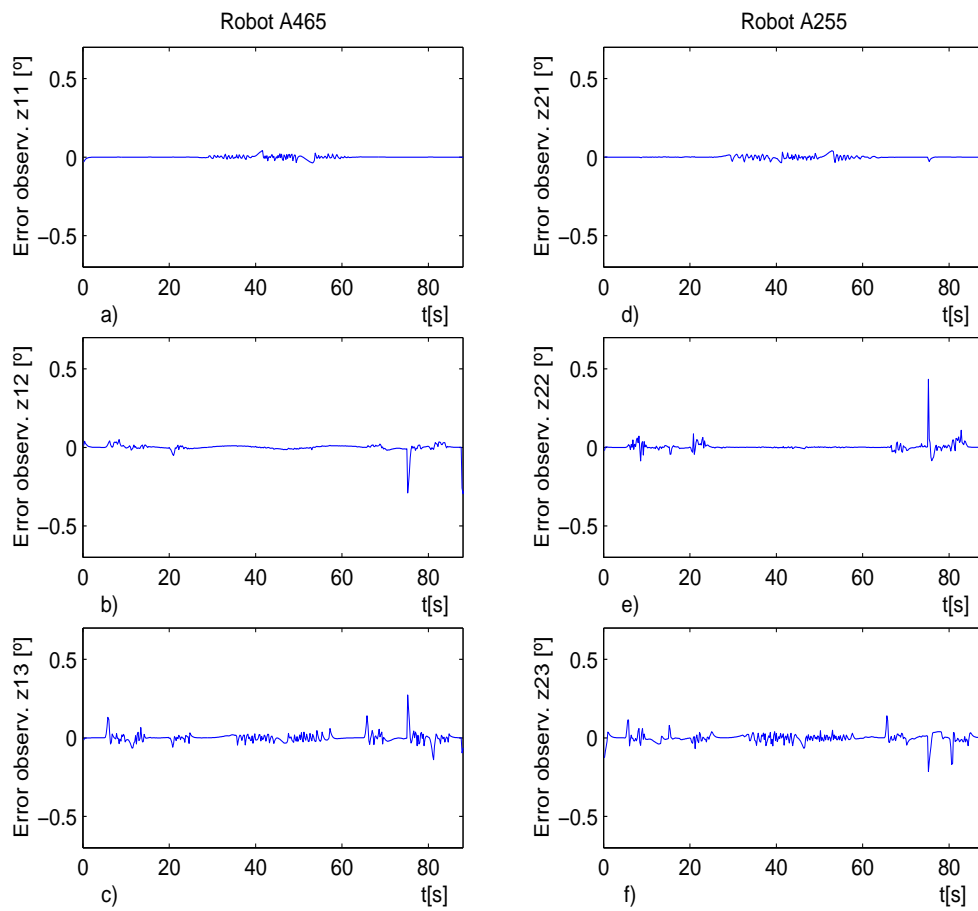


Figura 4.31: Errores de observación de velocidad articular. a)  $z_{11}$ . b)  $z_{12}$ . c)  $z_{13}$ . d)  $z_{21}$ . e)  $z_{22}$ . f)  $z_{23}$ .

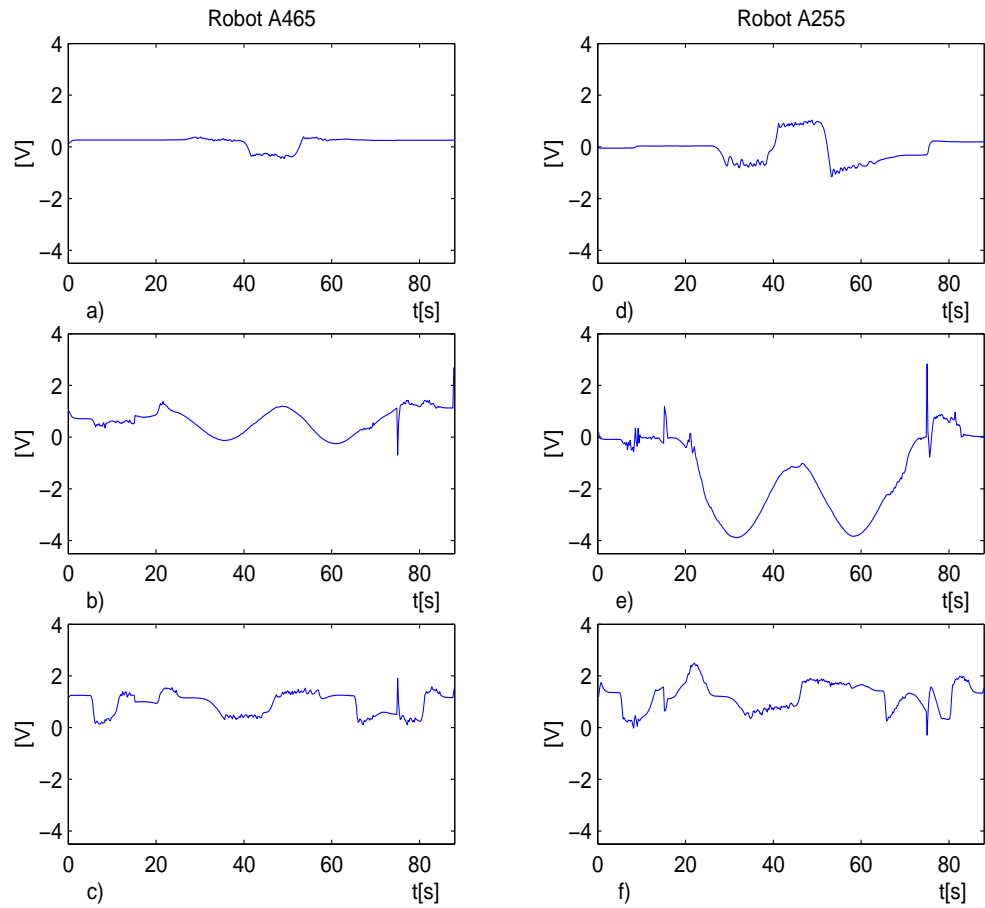


Figura 4.32: Voltajes de entrada. a)  $v_{11}$ . b)  $v_{12}$ . c)  $v_{13}$ . d)  $v_{21}$ . e)  $v_{22}$ . f)  $v_{23}$ .



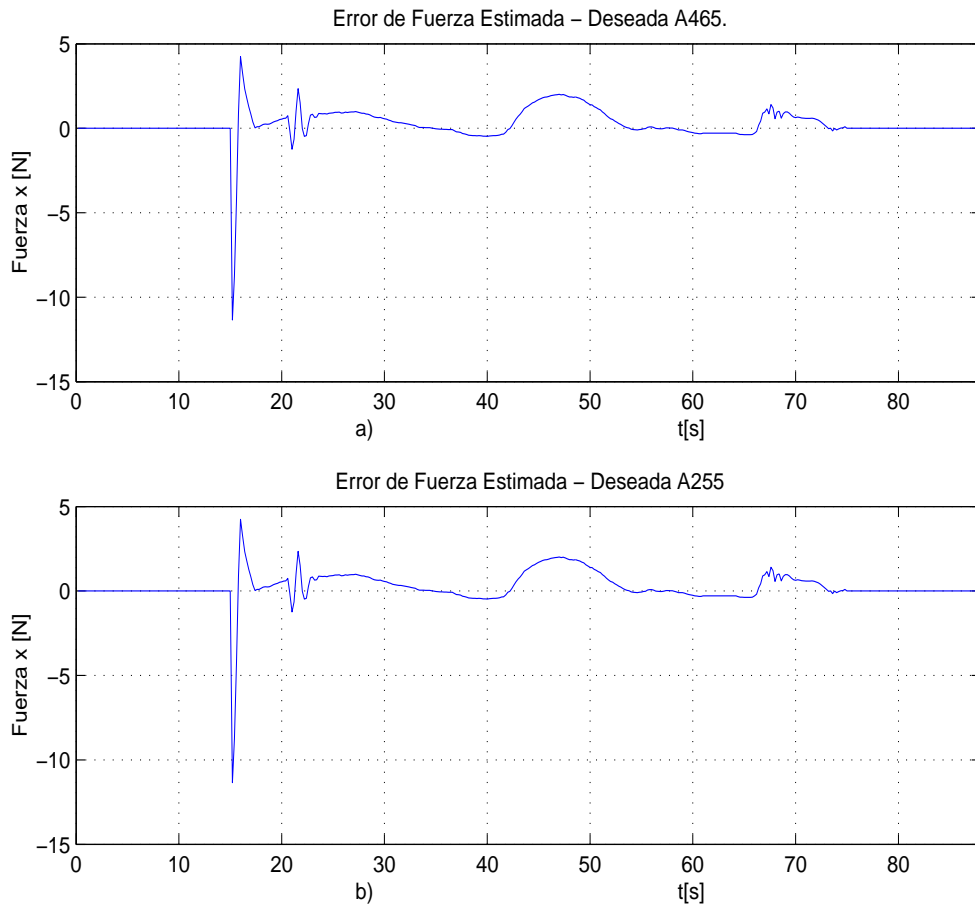


Figura 4.33: Errores de fuerza estimada menos fuerza deseada. a)  $\Delta\tilde{\lambda}_1$ , b)  $\Delta\tilde{\lambda}_2$

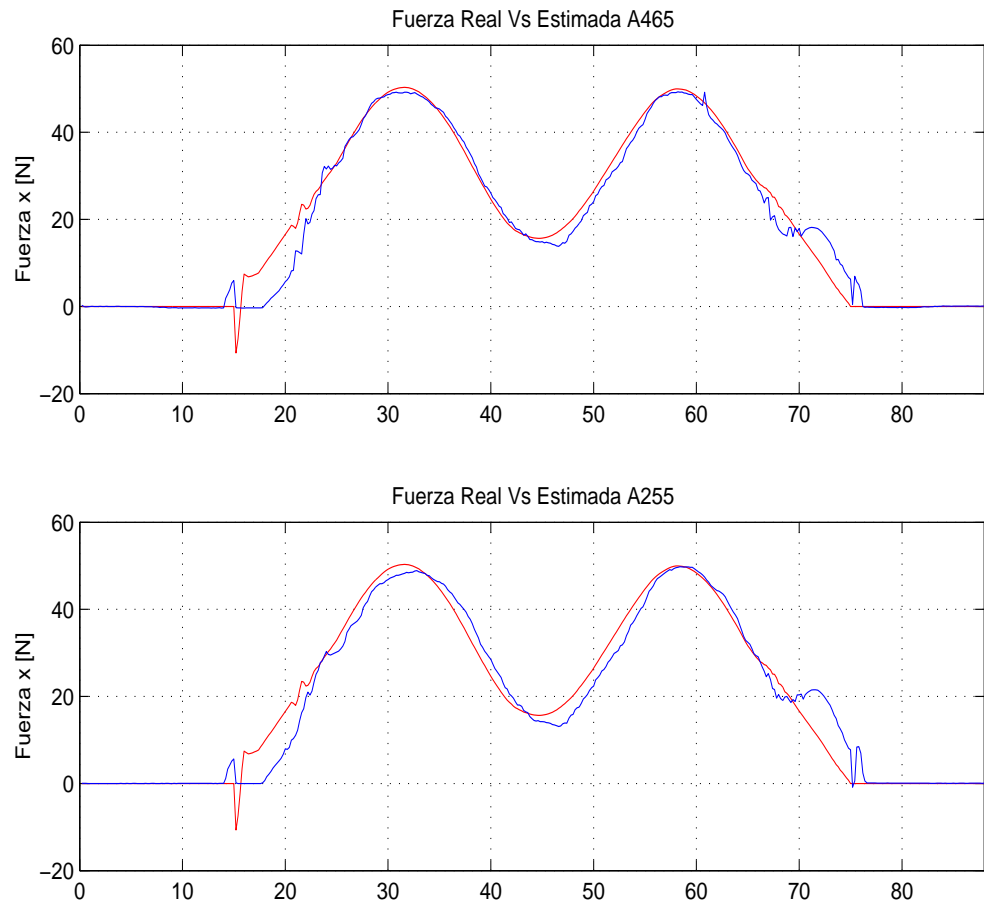


Figura 4.34: Fuerza real (Azul) Vs. estimada (Roja). a)  $\lambda_1$  Vs  $\hat{\lambda}_1$ , b)  $\lambda_2$  Vs  $\hat{\lambda}_2$

## 4.11. Resultados experimentales para controlador con observadores de velocidad/fuerza sin movimiento circular

Dadas la trayectorias deseadas (4.1)-(4.2) con movimiento circular lento  $T=40$ [s] y una fuerza (4.2), se obtuvieron los errores de seguimiento en coordenadas articulares, coordenadas cartesianas, fuerza, observación de velocidad, señales de control, error de fuerza filtrada y Fuerza real Vs. estimada como se muestra en las siguientes Figuras; 4.35, 4.36, 4.37, 4.38, 4.39, 4.40 y 4.41 respectivamente.

Una adecuada sintonización de ganancias y un observador de fuerza, permite que este esquema de control tenga un desempeño considerablemente mayor a los resultados del esquema 4.7, principalmente en fuerza, el cual muestra un buen seguimiento durante la ausencia de movimiento. A pesar de que el enfoque de ortogonalización en el espacio articular proyecta las señales de error velocidad en un plano tangente al punto de contacto, es importante notar que tal vector de velocidad tiende a cero bajo este esquema de control a velocidades de movimiento nulas, sin embargo, en la Figura de respuesta de posición en coordenadas cartesianas se nota que existe un ligero movimiento que evita la pérdida total del vector de velocidad que es perpendicular al vector de fuerza en el punto de contacto, con ello, un pequeño error residual de velocidad es suficiente para corregir los efectos de fuerza en cada robot. Lo que permite argumentar que el observador de fuerza junto con la ley de control y el observador de velocidad muestran cierta robustez a velocidades deseadas casi nulas de movimiento.

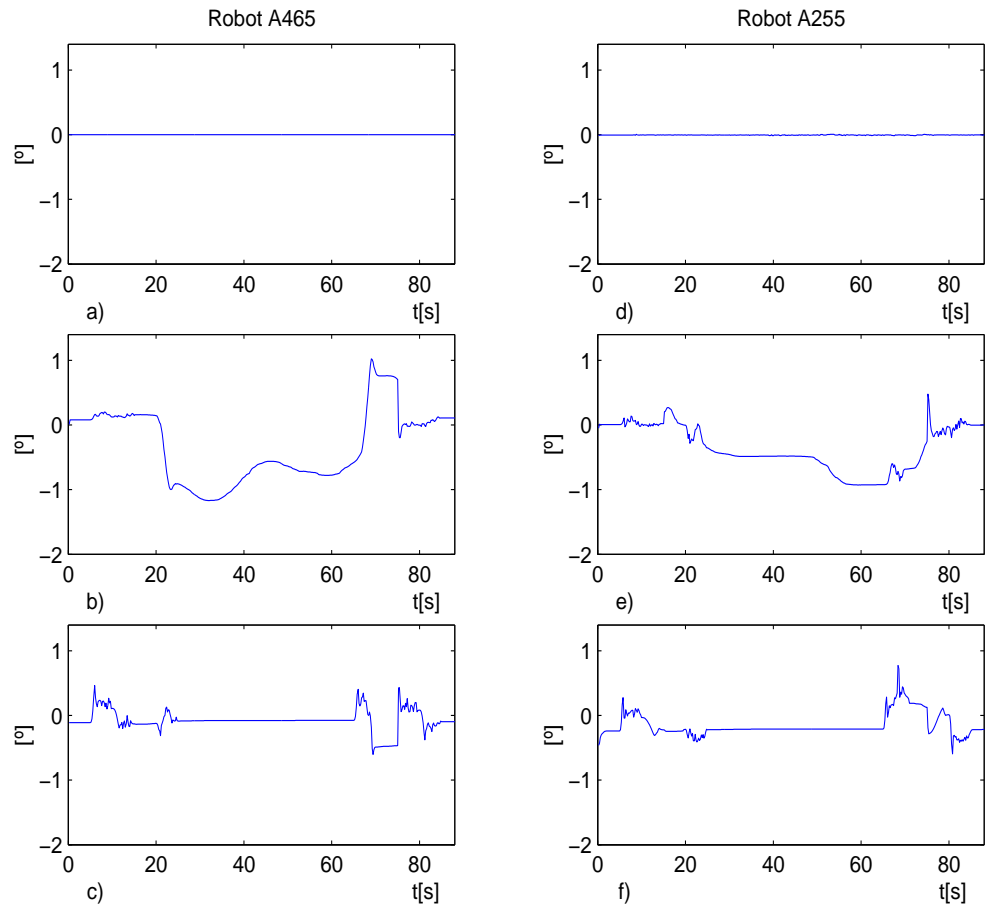


Figura 4.35: Errores de seguimiento en coordenadas articulares. a)  $\tilde{q}_{11}$ , b)  $\tilde{q}_{12}$ , c)  $\tilde{q}_{13}$ , d)  $\tilde{q}_{21}$ , e)  $\tilde{q}_{22}$ , f)  $\tilde{q}_{23}$

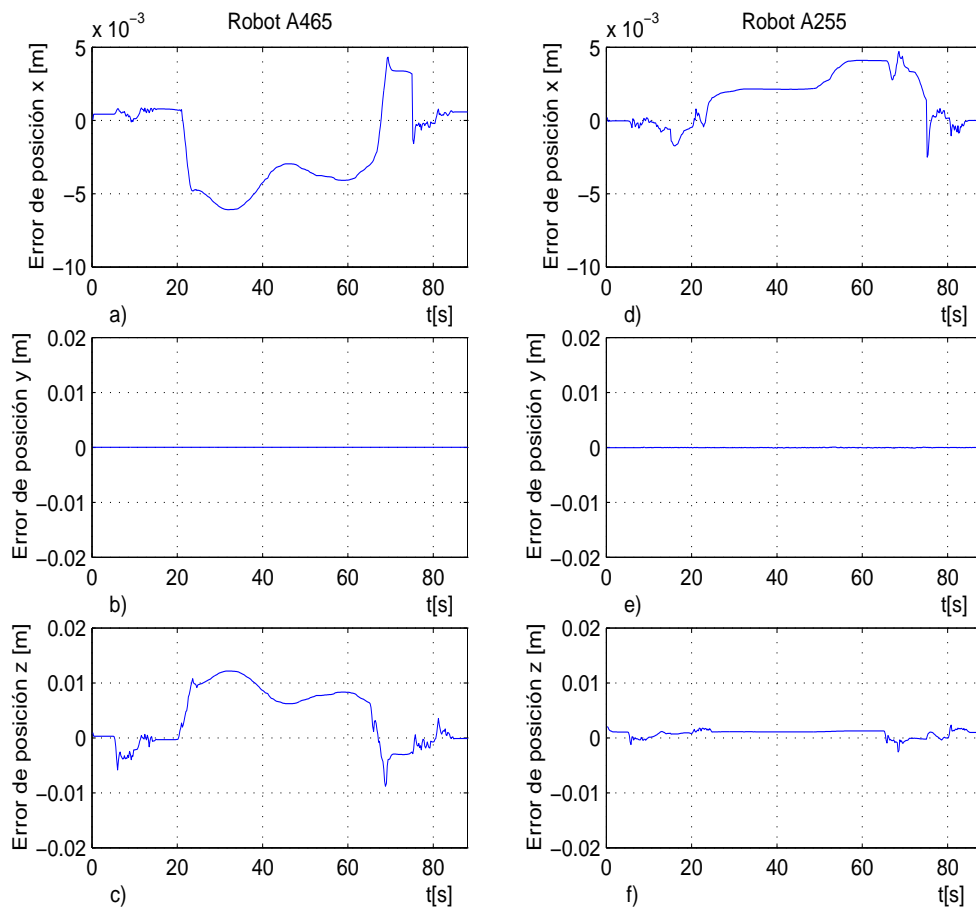


Figura 4.36: Errores de seguimiento en coordenadas cartesianas. a)  $\tilde{x}_1$ , b)  $\tilde{y}_1$ , c)  $\tilde{z}_1$ , d)  $\tilde{x}_2$ , e)  $\tilde{y}_2$ , f)  $\tilde{z}_2$

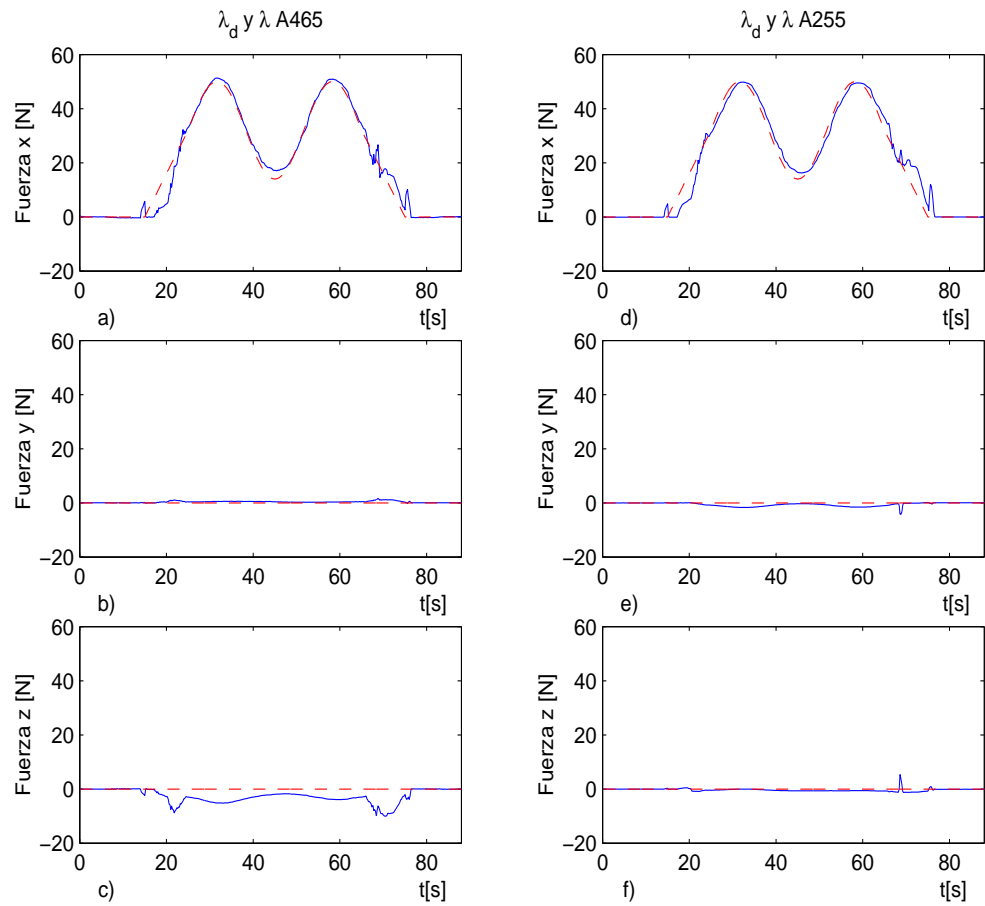


Figura 4.37: Fuerza medida de los robots A465 y A255. a)  $F_{x_1}$ . b)  $F_{y_1}$ . c)  $F_{z_1}$ . d)  $F_{x_2}$ . e)  $F_{y_2}$ . f)  $F_{z_2}$ . — medida. - - - deseada.

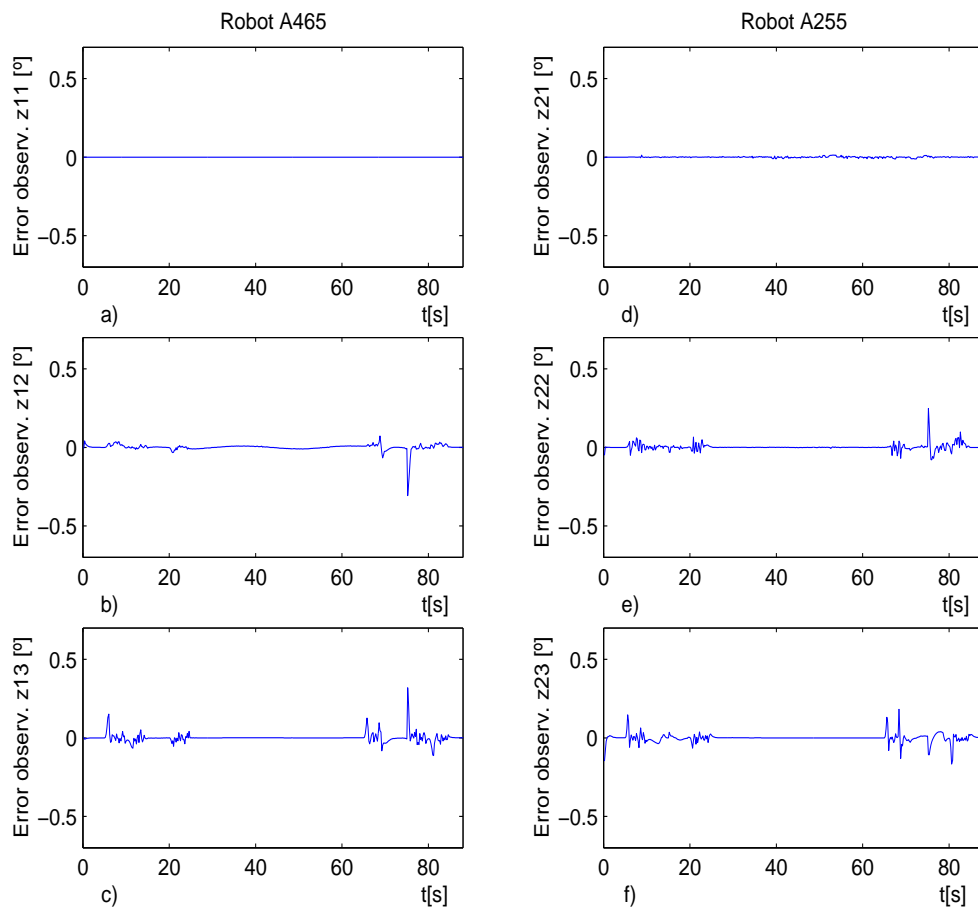


Figura 4.38: Errores de observación de velocidad articular. a)  $z_{11}$ . b)  $z_{12}$ . c)  $z_{13}$ . d)  $z_{21}$ . e)  $z_{22}$ . f)  $z_{23}$ .

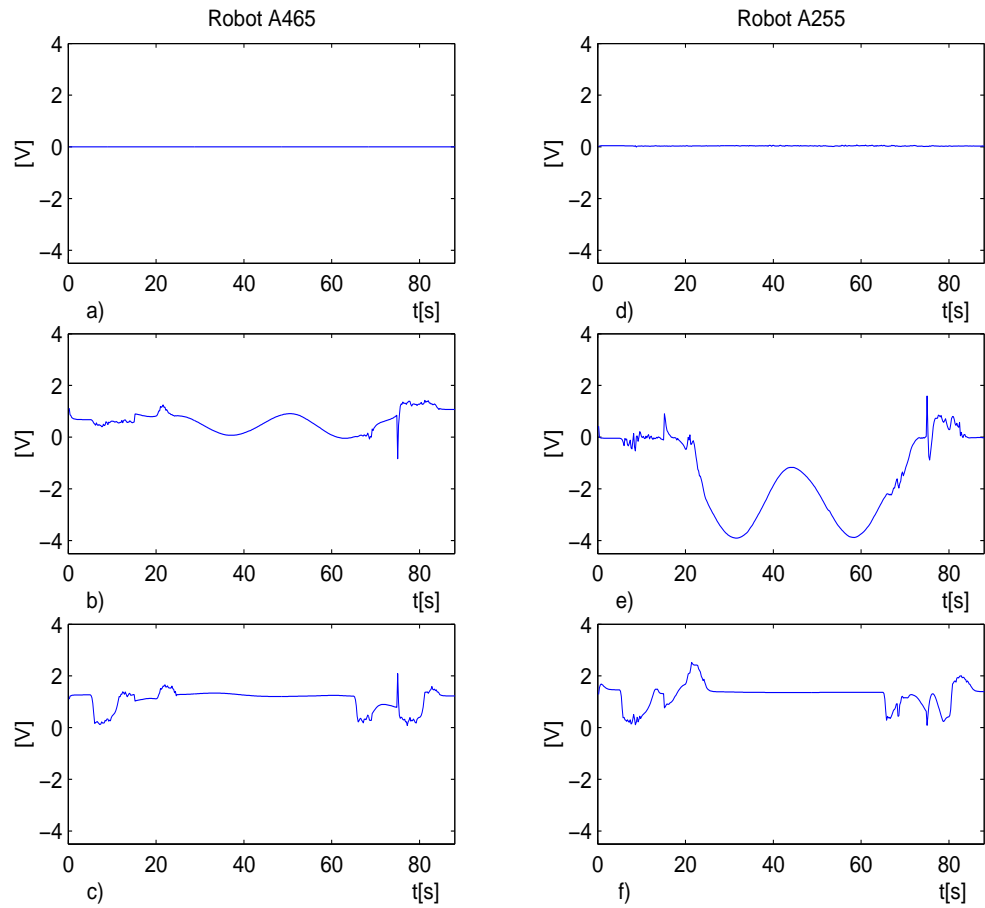


Figura 4.39: Voltajes de entrada. a)  $v_{11}$ . b)  $v_{12}$ . c)  $v_{13}$ . d)  $v_{21}$ . e)  $v_{22}$ . f)  $v_{23}$ .



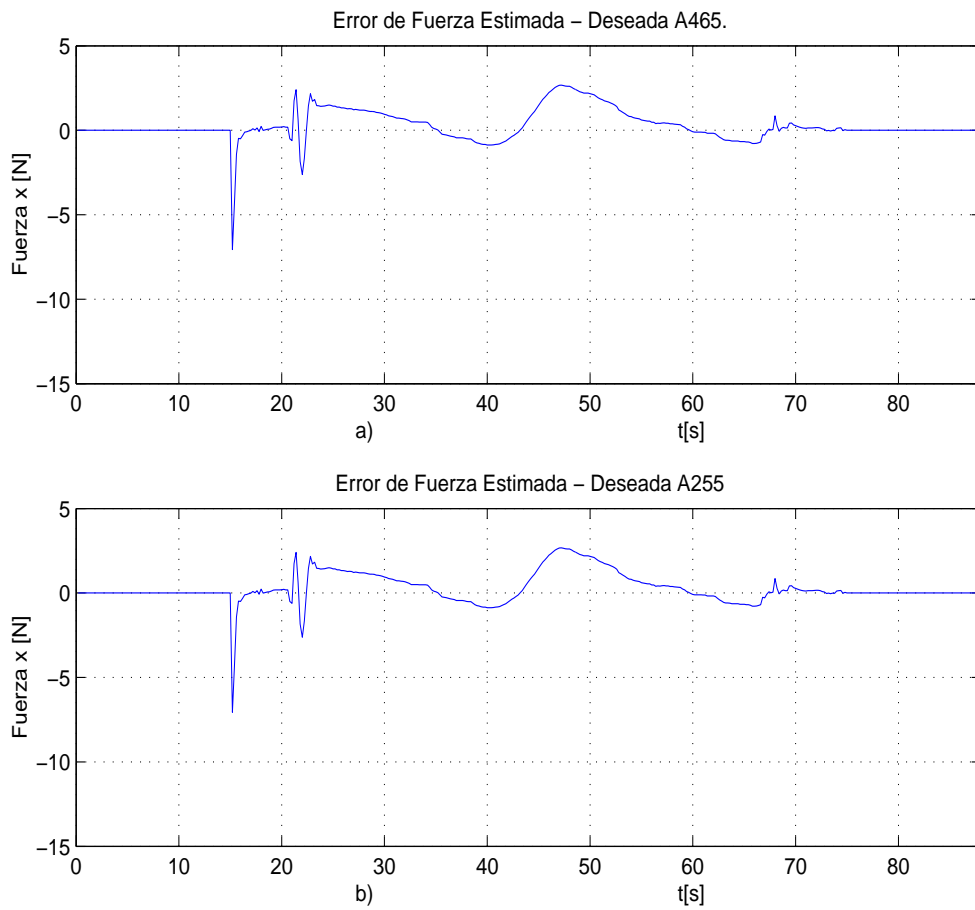


Figura 4.40: Errores de fuerza estimada menos fuerza deseada. a)  $\Delta\tilde{\lambda}_1$ , b)  $\Delta\tilde{\lambda}_2$

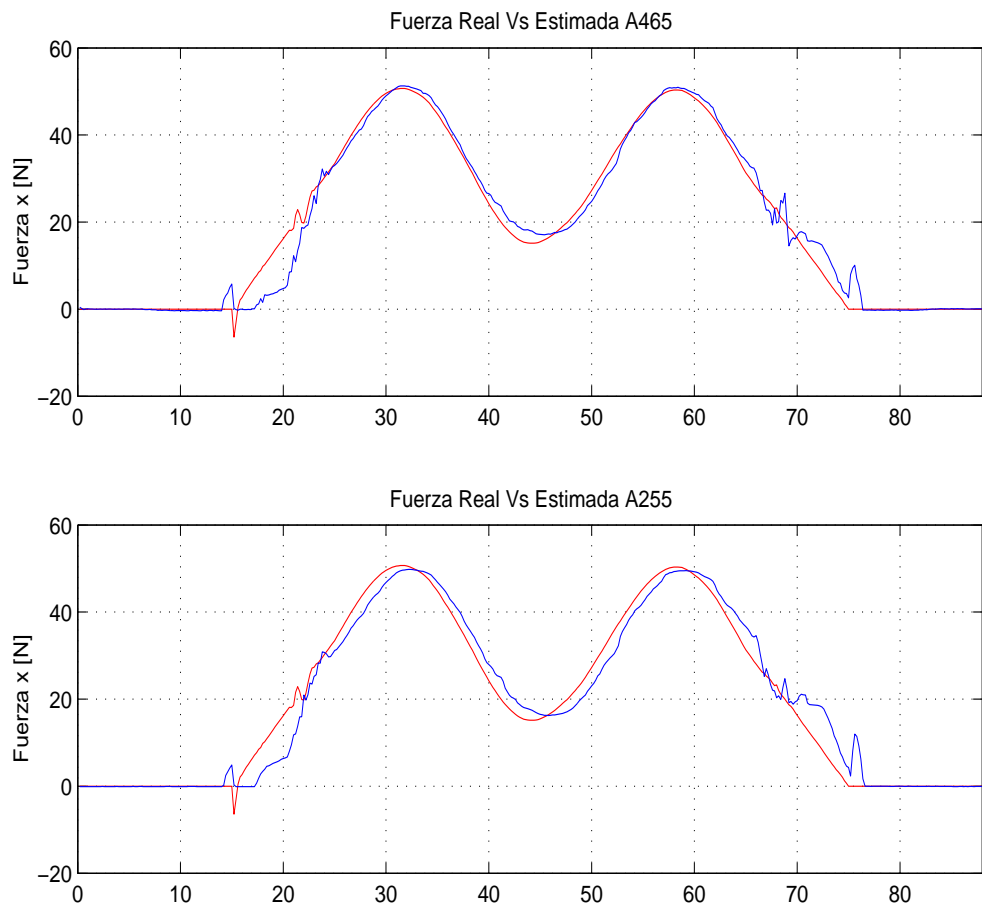


Figura 4.41: Fuerza real Vs estimada. a)  $\lambda_1$  Vs  $\hat{\lambda}_1$ , b)  $\lambda_2$  Vs  $\hat{\lambda}_2$

## 4.12. Discusión y conclusión de resultados experimentales de esquema con observador de velocidad/fuerza

La naturaleza de éste esquema permite que una selección de ganancias adecuada en el controlador sea un factor contundente junto con el diseño de un filtro de fuerza que permite estimular la dinámica del error de fuerza en el sistema, tal que a velocidades casi nulas el esquema de ortogonalización en el espacio articular cumpla con proyectar el vector de velocidad en un plano tangente al punto de contacto y en este sentido pueda ser mapeado un vector de fuerza perpendicular a dicho plano. Los resultados resultan ser significativos comparados con el esquema implícito de fuerza sin observador de fuerza. Los resultados muestran un buen desempeño en la reconstrucción de velocidad mediante un observador de velocidad de alta ganancia tanto a bajas como para altas velocidades. En este sentido, el observador de fuerza o filtro de fuerza de alta ganancia cumple su principal objetivo, el cual es mostrar independencia a excitación persistente, tal que permite mejorar considerablemente el desempeño a bajas velocidades y ligeramente a altas velocidades de movimiento.

## 4.13. Tablas de índice de desempeño

Para tener una idea más objetiva de los resultados obtenidos, se ha utilizado como índice de desempeño, la norma L2 Arteaga Pérez y Kelly (2004) para obtener la evaluación de los errores de seguimiento en coordenadas articulares, cartesianas, errores de observación y errores de fuerza, definido por

$$\mathcal{I}^2[\cdot] = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \|\cdot\|^2 dt} \quad (4.3)$$

#### 4.14. Tabla de comparación de $\mathcal{I}^2$ de error en coordenadas cartesianas

<i>Robot</i> <sub>A465</sub>	Esquema	sin observador	de fuerza	
<i>Velocidad</i>	$\mathcal{I}^2(\widehat{xyz})$	$\mathcal{I}^2(\widehat{x})$	$\mathcal{I}^2(\widehat{y})$	$\mathcal{I}^2(\widehat{z})$
$T = 1[s]$	0.007390 [m]	0.003212 [m]	0.001714 [m]	0.006431 [m]
$T = 40[s]$	0.007295 [m]	0.003290 [m]	0.000805 [m]	0.006461 [m]
$T = 0[s]$	0.007152 [m]	0.003095 [m]	0.000017 [m]	0.006447 [m]
<i>Robot</i> <sub>A465</sub>	Esquema	con observador	de	fuerza
$T = 1[s]$	0.006969 [m]	0.002969 [m]	0.001761 [m]	0.006054 [m]
$T = 40[s]$	0.005105 [m]	0.002357 [m]	0.000979 [m]	0.004421 [m]
$T = 0[s]$	0.007319 [m]	0.003278 [m]	0.000008 [m]	0.006543 [m]

Cuadro 4.3: Comparación de índice de desempeño de error en coordenadas cartesianas de robot CRS A465.

<i>Robot</i> <sub>A255</sub>	Esquema	sin observador	de fuerza	
<i>Velocidad</i>	$\mathcal{I}^2(\widehat{xyz})$	$\mathcal{I}^2(\widehat{x})$	$\mathcal{I}^2(\widehat{y})$	$\mathcal{I}^2(\widehat{z})$
$T = 1[s]$	0.004272 [m]	0.002147 [m]	0.002207 [m]	0.002961 [m]
$T = 40[s]$	0.002030 [m]	0.001682 [m]	0.000528 [m]	0.001005 [m]
$T = 0[s]$	0.002337 [m]	0.002073 [m]	0.000049 [m]	0.001077 [m]
<i>Robot</i> <sub>A255</sub>	Esquema	con observador	de	fuerza
$T = 1[s]$	0.004376 [m]	0.002276 [m]	0.002293 [m]	0.002951 [m]
$T = 40[s]$	0.002596 [m]	0.002326 [m]	0.000541 [m]	0.001017 [m]
$T = 0[s]$	0.002489 [m]	0.002250 [m]	0.000047 [m]	0.001062 [m]

Cuadro 4.4: Comparación de índice de desempeño de error en coordenadas cartesianas de robot CRS A255.

### 4.15. Tabla de comparación de $\mathcal{I}^2$ de error en coordenadas articulares

<i>Robot</i> <sub>A465</sub>	Esquema	sin observador	de fuerza	
<i>Velocidad</i>	$\mathcal{I}^2(\tilde{\mathbf{q}})$	$\mathcal{I}^2(\tilde{q}_1)$	$\mathcal{I}^2(\tilde{q}_2)$	$\mathcal{I}^2(\tilde{q}_3)$
$T = 1[s]$	0.729352 [°]	0.179370 [°]	0.650004 [°]	0.277983 [°]
$T = 40[s]$	0.671932 [°]	0.084732 [°]	0.648023 [°]	0.156137 [°]
$T = 0[s]$	0.679031 [°]	0.001776 [°]	0.665031 [°]	0.137166 [°]
<i>Robot</i> <sub>A465</sub>	Esquema	con observador	de fuerza	
$T = 1[s]$	0.688240 [°]	0.183736 [°]	0.598907 [°]	0.285002 [°]
$T = 40[s]$	0.529020 [°]	0.101942 [°]	0.483431 [°]	0.189116 [°]
$T = 0[s]$	0.667339 [°]	0.000916 [°]	0.643008 [°]	0.178555 [°]

Cuadro 4.5: Comparación de índice de desempeño de error en coordenadas articulares de robot CRS A465.

<i>Robot</i> <sub>A255</sub>	Esquema	sin observador	de fuerza	
<i>Velocidad</i>	$\mathcal{I}^2(\tilde{\mathbf{q}})$	$\mathcal{I}^2(\tilde{q}_1)$	$\mathcal{I}^2(\tilde{q}_2)$	$\mathcal{I}^2(\tilde{q}_3)$
$T = 1[s]$	0.861071 [°]	0.279062 [°]	0.470709 [°]	0.664831 [°]
$T = 40[s]$	0.438945 [°]	0.067158 [°]	0.372016 [°]	0.223085 [°]
$T = 0[s]$	0.429945 [°]	0.005333 [°]	0.362893 [°]	0.230504 [°]
<i>Robot</i> <sub>A255</sub>	Esquema	con observador	de fuerza	
$T = 1[s]$	0.873997 [°]	0.289630 [°]	0.483207 [°]	0.668203 [°]
$T = 40[s]$	0.557165 [°]	0.069155 [°]	0.496667 [°]	0.242843 [°]
$T = 0[s]$	0.545338 [°]	0.006018 [°]	0.491477 [°]	0.236237 [°]

Cuadro 4.6: Comparación de índice de desempeño de error en coordenadas articulares de robot CRS A255.

#### 4.16. Tabla de comparación de $\mathcal{I}^2$ de error en fuerza

<i>Robot</i> <sub>A465</sub>	Esquema	sin observador	de fuerza	
<i>Velocidad</i>	$\mathcal{I}^2(\tilde{\lambda})$	$\mathcal{I}^2(\tilde{\lambda}_x)$	$\mathcal{I}^2(\tilde{\lambda}_y)$	$\mathcal{I}^2(\tilde{\lambda}_z)$
$T = 1[s]$	7.075917 [N]	5.157617 [N]	0.6913412 [N]	4.794750 [N]
$T = 40[s]$	6.055126 [N]	4.633599 [N]	0.484848 [N]	3.867717 [N]
$T = 0[s]$	6.301459 [N]	5.030912 [N]	5.30912 [N]	3.756883 [N]
<i>Robot</i> <sub>A465</sub>	Esquema	con observador	de	fuerza
$T = 1[s]$	6.662610 [N]	4.968689 [N]	0.442348 [N]	4.416654 [N]
$T = 40[s]$	4.582683 [N]	3.063096 [N]	0.358684 [N]	3.389656 [N]
$T = 0[s]$	4.622883 [N]	2.837903 [N]	0.452817 [N]	3.621092 [N]

Cuadro 4.7: Comparación de índice de desempeño de error en fuerza de robot CRS A465.

<i>Robot</i> <sub>A255</sub>	Esquema	sin observador	de fuerza	
<i>Velocidad</i>	$\mathcal{I}^2(\tilde{\lambda})$	$\mathcal{I}^2(\tilde{\lambda}_x)$	$\mathcal{I}^2(\tilde{\lambda}_y)$	$\mathcal{I}^2(\tilde{\lambda}_z)$
$T = 1[s]$	5.058665 [N]	4.909929 [N]	0.901171 [N]	0.818886 [N]
$T = 40[s]$	5.125277 [N]	4.961658 [N]	0.822457 [N]	0.986907 [N]
$T = 0[s]$	5.907000 [N]	5.839100 [N]	0.767500 [N]	0.455900 [N]
<i>Robot</i> <sub>A255</sub>	Esquema	con observador	de	fuerza
$T = 1[s]$	5.203195 [N]	4.940564 [N]	1.018754 [N]	1.275224 [N]
$T = 40[s]$	3.663905 [N]	3.491116 [N]	0.821322 [N]	0.749495 [N]
$T = 0[s]$	3.462104 [N]	3.296531 [N]	0.862970 [N]	0.611820 [N]

Cuadro 4.8: Comparación de índice de desempeño de error en fuerza de robot CRS A255.

### 4.17. Tabla de comparación de $\mathcal{I}^2$ de errores de observación

<i>Robot</i> <sub>A465</sub>	Esquema	sin observador	de fuerza	
<i>Velocidad</i>	$\mathcal{I}^2(\tilde{\mathbf{z}})$	$\mathcal{I}^2(\tilde{z}_1)$	$\mathcal{I}^2(\tilde{z}_2)$	$\mathcal{I}^2(\tilde{z}_3)$
$T = 1[s]$	0.141241 [°]	0.088222 [°]	0.044344 [°]	0.100991 [°]
$T = 40[s]$	0.037481 [°]	0.007590 [°]	0.027299 [°]	0.024534 [°]
$T = 0[s]$	0.036106 [°]	0.000037 [°]	0.028302 [°]	0.022419 [°]
<i>Robot</i> <sub>A465</sub>	Esquema	con observador	de fuerza	
$T = 1[s]$	0.143762 [°]	0.086640 [°]	0.047601 [°]	0.104380 [°]
$T = 40[s]$	0.043675 [°]	0.008373 [°]	0.031447 [°]	0.029128 [°]
$T = 0[s]$	0.042898 [°]	0.000017 [°]	0.031803 [°]	0.028790 [°]

Cuadro 4.9: Comparación de índice de desempeño de error de observación de velocidad de robot CRS A465.

<i>Robot</i> <sub>A255</sub>	Esquema	sin observador	de fuerza	
<i>Velocidad</i>	$\mathcal{I}^2(\tilde{\mathbf{z}})$	$\mathcal{I}^2(\tilde{z}_1)$	$\mathcal{I}^2(\tilde{z}_2)$	$\mathcal{I}^2(\tilde{z}_3)$
$T = 1[s]$	0.298260 [°]	0.105671 [°]	0.060637 [°]	0.272242 [°]
$T = 40[s]$	0.032162 [°]	0.008680 [°]	0.015274 [°]	0.026940 [°]
$T = 0[s]$	0.028433 [°]	0.004329 [°]	0.015210 [°]	0.023630 [°]
<i>Robot</i> <sub>A255</sub>	Esquema	con observador	de fuerza	
$T = 1[s]$	0.294655 [°]	0.110152 [°]	0.065939 [°]	0.265217 [°]
$T = 40[s]$	0.041323 [°]	0.009030 [°]	0.027066 [°]	0.029891 [°]
$T = 0[s]$	0.034408 [°]	0.003791 [°]	0.021348 [°]	0.026716 [°]

Cuadro 4.10: Comparación de índice de desempeño de error de observación de velocidad de robot CRS A255.





# Capítulo 5

## Conclusiones

El problema de control de seguimiento posición/fuerza de robots cooperativos con efector final restringido sobre superficies geométricas y sin medición de velocidad/fuerza es considerado en esta tesis. Las leyes de control que se proponen son del tipo descentralizado. En este trabajo se han tomado en cuenta las restricciones de movimiento en lugar de la dinámica del objeto a manipular. Los enfoques propuestos se basan en el esquema de ortogonalización en el espacio articular.

Asumiendo que la dinámica de cada robot no es bien conocida, el punto crucial de este trabajo es mostrar que las leyes de control propuestas no requieren de ninguna retroalimentación de velocidad/fuerza para mantener una sujeción estable del objeto manipulado en ambos esquemas de control propuestos. Un observador de velocidad lineal que no requiere ningún conocimiento de la dinámica de los robots es propuesto en este trabajo para estimar las velocidades articulares, los resultados muestran una respuesta satisfactoria y robustez a diferente selección de ganancias. Respecto al control de fuerza, en el primer esquema solo se hace uso de la fuerza deseada en la ley de control de manera implícita, mientras que en el segundo esquema se hace uso de un observador para obtener un estimado de la fuerza de contacto en el efector final. A pesar de que los análisis de estabilidad son complejos, los controladores y especialmente los observadores no lo son.

Los resultados experimentales han sido llevados a cabo para validar ambos enfoques de control. Con sensores de fuerza montados en el efector final de ambos robots, fue posible comprobar el seguimiento de las fuerzas reales res-

pecto de las deseadas en el esquema de control con observador de fuerza. Sin embargo, el desempeño en el control de fuerza implícito sin observador de fuerza decrece a bajas velocidades de movimiento debido principalmente al impedimento de aumentar las ganancias sin provocar inestabilidad en todo el sistema. Otro inconveniente que reduce el desempeño en ambos esquemas de control es debido al tiempo de muestreo de 10[ms], el cual evita una corrección dinámica efectiva en el seguimiento de las señales deseadas. En el comentario 4.5.1 se hace una descripción detallada de los motivos que producen una desviación considerable no deseada en las respuestas experimentales durante el principio y final de cada experimento.

## 5.1. Contribuciones en el campo de robots cooperativos

En resumen, las contribuciones de este trabajo de tesis se establecen como sigue:

- a) Se presentan dos algoritmos de control para sistemas de robots cooperativos sin medición de velocidad ni de fuerza de contacto. Se realizan experimentos en línea de los esquemas propuestos.
  - b) Los esquemas de control solo requieren de medición de posición articular.
  - c) Se propone un observador de velocidad lineal reducido, el cual reconstruye de manera satisfactoria la dinámica de velocidad en ambos esquemas de control de posición/fuerza. Se demuestra la estabilidad en lazo cerrado.
  - c) Se diseña un observador de fuerza, el cual reduce el alto costo de los sensores de fuerza. Los resultados son satisfactorios a bajas velocidades de movimiento del objeto.
  - e) Se contribuye con un artículo publicado en *Automatica* y uno sometido actualmente a revista *Robotica*.
-

# Apéndice A

## Propiedades y definiciones de un sistema de robots cooperativos

En esta sección se presentan algunas propiedades derivadas del procedimiento para obtener el modelo dinámico del sistema cooperativo (2.1), las cuales han sido empleadas en Ortega y Spong (1989), Arimoto *et al.* (1993a), Liu *et al.* (1995) y Arteaga Pérez (1998). De aquí en adelante, se utilizará la norma euclidiana para vectores  $\|\mathbf{x}\| \triangleq (\mathbf{x}^T \mathbf{x})^{\frac{1}{2}}$ . La norma de una matriz  $\mathbf{A}$  está dada por  $\|\mathbf{A}\| \triangleq (\lambda_{\max}(\mathbf{A}^T \mathbf{A}))^{\frac{1}{2}}$ , donde,  $\lambda_{\max}(\cdot)$  ( $\lambda_{\min}(\cdot)$ ) denotan el máximo (mínimo) valor propio de una matriz.

Algunas propiedades y definiciones del modelo dinámico de un sistema cooperativo son necesarias para análisis posteriores durante el desarrollo de este trabajo.

**Definición A.0.1** *Una restricción holónoma se define como aquella ecuación algebraica que aparece en un sistema a nivel cinemático. Las restricciones holónomas se pueden clasificar con respecto al tiempo, de la siguiente manera (Greenwood 1988, Arnold 1989, Liu et al. 1995, Liu y Arimoto 1996):*

- a) *Restricción esclero-holónoma.* La variable de tiempo  $t$  no aparece de manera explícita. Esta restricción es invariante en el tiempo y la forma general se representa por una función en el espacio articular como:

$$\varphi_i(\mathbf{q}_i) = \mathbf{0}, \tag{A.1}$$

donde  $\boldsymbol{\varphi}_i \in \mathbb{R}^{m_i}$  y  $\mathbf{q}_i \in \mathbb{R}^{n_i}$  es el vector de coordenadas generalizadas de las articulaciones del  $i$ -ésimo manipulador.

- b) *Restricción reo-holónoma.* La variable de tiempo  $t$  aparece de manera explícita. Esta restricción es variante en el tiempo y la forma general se representa por

$$\boldsymbol{\varphi}_i(t, \mathbf{q}_i) = \mathbf{0}. \quad (\text{A.2})$$

△

**Definición A.0.2** *La cooperación es holónoma si las restricciones de movimiento sobre un sistema cooperativo formado por dos o más robots manipuladores son holónomas (Liu et al. 1997).*

△

**Definición A.0.3** *Las restricciones de movimiento de un sistema cooperativo son homogéneas si las restricciones de movimiento dadas por (A.1) se pueden escribir en la siguiente forma:*

$$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_l) = \sum_{i=1}^l \boldsymbol{\varphi}_i(\mathbf{q}_i) = \mathbf{0}, \quad (\text{A.3})$$

donde  $\boldsymbol{\varphi}_i(\mathbf{q}_i)$  depende sólo de las variables de articulación del robot  $i$  (Arnold 1989).

△

**Propiedad A.0.1** *El sistema cooperativo consta de  $n = \sum_{i=1}^l (n_i - m_i)$  grados de libertad de movimiento y de  $m = \sum_{i=1}^l m_i$  grados de fuerza.*

△

**Propiedad A.0.2** *La matriz de inercia generalizada  $\mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i)$  es simétrica positiva definida.*

△

**Propiedad A.0.3** *La matriz  $\mathbf{N}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) \triangleq \dot{\mathbf{H}}_i(\mathbf{q}_i) - 2\mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es antisimétrica.*

△

**Propiedad A.0.4** *El vector  $\dot{\mathbf{q}}_i$  puede ser escrito como*

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{q}}_i &= \dot{\mathbf{q}}_i + (\mathbf{J}_{\varphi_i}^+ \mathbf{J}_{\varphi_i} \dot{\mathbf{q}}_i - \mathbf{J}_{\varphi_i}^+ \mathbf{J}_{\varphi_i} \dot{\mathbf{q}}_i) \\ &= (\mathbf{I}_{n_i \times n_i} - \mathbf{J}_{\varphi_i}^+ \mathbf{J}_{\varphi_i}) \dot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{J}_{\varphi_i}^+ \mathbf{J}_{\varphi_i} \dot{\mathbf{q}}_i \\ &\triangleq \mathbf{Q}_i(\mathbf{q}_i) \dot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{J}_{\varphi_i}^+(\mathbf{q}_i) \dot{\mathbf{p}}_i,\end{aligned}\tag{A.4}$$

donde  $\text{rango}(\mathbf{Q}_i) = n_i - m_i$ . △

**Propiedad A.0.5** *El vector  $\mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \mathbf{x})\mathbf{y}$  satisface la igualdad*

$$\mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \mathbf{x})\mathbf{y} = \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \mathbf{y})\mathbf{x} \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n_i}.\tag{A.5}$$

△

**Propiedad A.0.6** *La matriz  $\mathbf{D}_i$  es diagonal positiva semidefinida y satisface:*

$$\lambda_{\min}(\mathbf{D}_i) \|\mathbf{y}_i\|^2 \leq \mathbf{y}_i^T \mathbf{D}_i \mathbf{y}_i \leq \lambda_{\max}(\mathbf{D}_i) \|\mathbf{y}_i\|^2 \quad \forall \mathbf{y}_i \in \mathbb{R}^{n_i}.\tag{A.6}$$

△

**Propiedad A.0.7** *Cada matriz de inercia  $\mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i)$  satisface  $\lambda_{\text{hi}} \|\mathbf{x}\|^2 \leq \mathbf{x}^T \mathbf{H}_i \mathbf{x} \leq \lambda_{\text{Hi}} \|\mathbf{x}\|^2 \quad \forall \mathbf{q}_i, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n_i}$ , donde*

$$\begin{aligned}\lambda_{\text{hi}} &\triangleq \min_{\forall \mathbf{q}_i \in \mathbb{R}^{n_i}} \lambda_{\min}(\mathbf{H}_i), \\ \lambda_{\text{Hi}} &\triangleq \max_{\forall \mathbf{q}_i \in \mathbb{R}^{n_i}} \lambda_{\max}(\mathbf{H}_i),\end{aligned}$$

*y*

$$0 < \lambda_{\text{hi}} \leq \lambda_{\text{Hi}} < \infty.\tag{A.7}$$

△

**Propiedad A.0.8** *La matriz  $\mathbf{H}_i^{-1}(\mathbf{q}_i)$  existe y satisface  $\sigma_{\text{hi}} \|\mathbf{x}\|^2 \leq \mathbf{x}^T \mathbf{H}_i^{-1}(\mathbf{q}_i) \mathbf{x} \leq \sigma_{\text{Hi}} \|\mathbf{x}\|^2 \quad \forall \mathbf{q}_i, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n_i}$ , donde*

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{hi}} &\triangleq \min_{\forall \mathbf{q}_i \in \mathbb{R}^{n_i}} \lambda_{\min}(\mathbf{H}_i^{-1}), \\ \sigma_{\text{Hi}} &\triangleq \max_{\forall \mathbf{q}_i \in \mathbb{R}^{n_i}} \lambda_{\max}(\mathbf{H}_i^{-1}),\end{aligned}$$

*y*

$$0 < \sigma_{hi} \leq \sigma_{Hi} < \infty. \quad \triangle$$

**Propiedad A.0.9** *La matriz de inercia satisface*

$$0 < \lambda_{hi} \leq \|\mathbf{H}_i(\mathbf{q}_i)\| \leq \lambda_{Hi} < \infty. \quad \triangle$$

**Propiedad A.0.10**  $\mathbf{H}_i^{-1}(\mathbf{q}_i)$  *satisface*

$$0 < \sigma_{hi} \leq \|\mathbf{H}_i^{-1}(\mathbf{q}_i)\| \leq \sigma_{Hi} < \infty. \quad \triangle$$

**Propiedad A.0.11** *La matriz  $\mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)$  satisface*

$$\|\mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)\| \leq k_{ci} \|\dot{\mathbf{q}}_i\|, \quad k_{ci} > 0. \quad \triangle$$

**Propiedad A.0.12** *El vector de fuerzas gravitacionales  $\mathbf{g}_i(\mathbf{q}_i)$  satisface*

$$\|\mathbf{g}_i(\mathbf{q}_i)\| \leq \sigma_{gi}, \quad \sigma_{gi} > 0. \quad \triangle$$

**Propiedad A.0.13** *El vector  $\mathbf{g}_i(\mathbf{q}_i)$  satisface*

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{g}_i(\mathbf{q}_i)}{\partial \mathbf{q}_i} \right\| \leq \delta_i, \quad (\text{A.7})$$

con  $\delta_i > 0$ .  $\triangle$

## A.1. Suposiciones del sistema cooperativo

El modelo dinámico de cada robot manipulador involucrado en el sistema cooperativo se obtiene a partir de una formulación de Euler-Lagrange (2.1), para facilitar la formulación de la dinámica de los robots manipuladores involucrados en el sistema cooperativo, se hacen las siguientes suposiciones.

---

### A.1.1. Suposiciones relacionadas con los manipuladores

**Suposición A.1.1** *Los robots están formados por articulaciones rotacionales.*  $\triangle$

**Suposición A.1.2** *Los eslabones de los manipuladores cooperativos son rígidos.*  $\triangle$

**Suposición A.1.3** *Los brazos robots no entran en configuraciones singulares durante toda la tarea.*  $\triangle$

**Suposición A.1.4** *Los robots cooperativos son no redundantes.*  $\triangle$

### A.1.2. Suposiciones relacionadas con el objeto a manipular

**Suposición A.1.5** *El objeto manipulado es rígido y no sufre deformaciones cuando es sujetado.*  $\triangle$

**Suposición A.1.6** *La fuerza aplicada por los robots para sujetar el objeto es suficientemente grande, de tal forma que este ni se desliza ni rota; por lo tanto, no hay movimiento relativo entre los efectores finales y el objeto (condición de agarre estable).*  $\triangle$

**Suposición A.1.7** *Como no existe movimiento relativo entre los efectores finales y el objeto, los efectos debidos a la fricción tangencial entre los efectores de los robots manipuladores y el objeto son cero.*  $\triangle$

### A.1.3. Suposiciones relacionadas con las restricciones

**Suposición A.1.8** *Se considera un sólo punto de contacto entre cada uno de los robots manipuladores y el objeto; por lo tanto, el número de restricciones de movimiento sobre el sistema cooperativo,  $m$ , es igual al número de robots manipuladores que lo forman,  $l$ .*  $\triangle$

**Suposición A.1.9** *Las restricciones de movimiento impuestas sobre el sistema cooperativo son holónomas y homogéneas.*  $\triangle$

**Suposición A.1.10** *Los  $l$  robots que componen el sistema satisfacen las restricciones (A.1).*  $\triangle$

**Suposición A.1.11** *La matrix  $\mathbf{J}_{\varphi_i}$  es continuamente Lipschitz, i. e.*

$$\|\mathbf{J}_{\varphi_i}(\mathbf{q}_i) - \mathbf{J}_{\varphi_i}(\mathbf{q}_{di})\| \leq L_i \|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_{di}\|, \quad (\text{A.8})$$

para una constante positiva  $L_i$  y para todo  $\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_{di} \in \mathbb{R}^{n_i}$ .  $\triangle$

Nótese que la Suposición A.1.11 considera que la restricción no incluye singularidades. Además (3.75) y (3.76) son bastante razonables para robots con articulaciones de revolución, puesto que los elementos de  $\mathbf{q}_i$  aparecen solo como argumentos de funciones trigonométricas (senos y cosenos). Esta es la razón de que (3.75) y (3.76) sean validas. Nótese que no solamente  $\mathbf{J}_{\varphi_i}^+(\mathbf{q}_i)$  está acotada, sino también  $\mathbf{J}_{\varphi_i}(\mathbf{q}_i)$  está acotada para cualquier  $\mathbf{q}_i$ .

---



# Bibliografía

- Arimoto, S.** 1987. Cooperative motion control of multirobot arms or fingers. *icra*.
- Arimoto, S., Y. Liu y T. Naniwa.** 1993a. Model-based adaptive hybrid control for geometrically constrained robots. *Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation* 618–623.
- Arimoto, S., Y. Liu y T. Naniwa.** 1993b. The orthogonalization principle for robot manipulators. *IFAC Congress on Automatic Control* 1. 507–512.
- Arnold, V.** 1989. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. 1<sup>th</sup> edn. : Springer-Verlag.
- Arteaga Pérez, M. A.** 1998. On the properties of a dynamic model of flexible robot manipulators. *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control* 120. 8–14.
- Arteaga Pérez, M. A.** 2003. Robot control and parameter estimation with only joint position measurements. *Automatica* 39(1). 67–73.
- Arteaga Pérez, M. A. y R. Kelly.** 2004. Robot control without velocity measurements: New theory and experimental results. *IEEE Transactions on Robotics and Automation* 20(2). 297–308.
- Caccavale, F., P. Chiacchio y S. Chiaverini.** 1999. Analysis of a task-space regulator for cooperative manipulators. *Proceedings of the American Control Conference*. San Diego, California. 45–49.
- Cheah, C., S. Kawamura y S. Arimoto.** 2003. Stability of hybrid position and force control for robotic manipulator with kinematics and dynamics uncertainties. *Automatica* 39(5). 847–855.

- Chiu, C.-S., K.-Y. Lian y T.-C. Wu.** 2004. Robust adaptive motion/force tracking control design for uncertain constrained robot manipulators. *Automatica* 40(12). 2111–2119.
- CRS.** 1995. *Controlller C500 – User’ guide – UMI-17-556-E*. CRS Robotics Corporation. Ontario, Canada.
- CRS.** 1997a. *A465 Robot Service Manual – Service Manual – UMS-17-504*. CRS Robotics Corporation. Ontario, Canada.
- CRS.** 1997b. *Robot A255 – User’s guide – UMI-14-504-E*. CRS Robotics Corporation. Ontario, Canada.
- CRS.** 2001a. *A255 Robot System User Guide – – UMI-A255-400*. CRS Robotics Corporation. Ontario, Canada.
- CRS.** 2001b. *A465 Robot System User Guide – – UMI-A465-400*. CRS Robotics Corporation. Ontario, Canada.
- de Queiroz, M. S., D. M. Dawson y T. Burg.** 1996. Position/force control of robot manipulators without velocity/force measurements. *Proc. IEEE Conference on Robotics and Automation*. Minneapolis, Minnesota. 2561–2566.
- de Queiroz, M. S., J. Hu, D. M. Dawson, T. Burg y S. R. Donepudi.** 1997. Adaptive position/force control of robot manipulators without velocity measurements: Theory and experimentation. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics* 27(5). 796–808.
- Greenwood, D.** 1988. *Principles of Dynamics*. : Prentice Hall.
- Gudiño Lau, J., M. A. Arteaga Pérez, L. A. Muñoz y V. Parra-Vega.** 2004. On the control of cooperative robots without velocity measurements. *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 12(4). 600–608.
- Huang, H.-P. y W. L. Tzeng.** 1989. Robotic force control by using estimated contact force. *Proc. of the 28th Conference on Decision and Control, IEEE*. Tampa, Florida. 2158–2163.
- Huang, H.-P. y W. L. Tzeng.** 1991. Asymptotic observer design for constrained robot system. *IEE Proc. Part D*. Florida. usa. 211–216.
-

- Kelly, M. R.** 2003. *Control de movimiento de robots manipuladores*. Madrid, España: Prentice–Hall.
- Khalil, H.** 2002. *Nonlinear Systems Third Edition*. U.S.A.: Prentice Hall. 746p.
- Kosuge, K.** y **T. Oosumi**. 1996. Decentralized control of multiple manipulators handling and object. *Proc. IROS 1996 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*. 318–323.
- Kosuge, K.**, **T. Oosumi** y **H. Seki**. 1997. Decentralized control of multiple manipulators handling and object in coordination based on impedance control of each arm. *Proc. IROS 1997 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*. 17–22.
- Leksono, E.**, **T. Murakami** y **K. Ohnishi**. 1997. Cooperative motion control of multimanipulator based on workspace disturbance observer with variable compliance gain. *Proceedings of the 23rd International Conference on Industrial Electronics, Control and Instrumentation of the IEEE*. 1379–1384.
- Leksono, E.**, **T. Murakami** y **K. Ohnishi**. 1998. Observer based robust force control in cooperative motion systems. *Proceedings of the 24th Annual Conference of the IEEE*. 1801–1806.
- Liu, Y.-H.**, **S. Arimoto**, **V. Parra-Vega** y **K. Kitagaki**. 1997. Decentralized adaptive control of multiple manipulators in cooperations. *International Journal of Control* 67(5). 649–673.
- Liu, Y.** y **S. Arimoto**. 1996. Implicit and explicit force controllers for rheo-holonomically constrained manipulators and their extension to distributed cooperation control. *IFAC. 13th Triennial World Congress* 1–6.
- Liu, Y.**, **S. Arimoto** y **K. Kitagaki**. 1995. Adaptive control for holonomically constrained robots: time-invariant and time-variant cases. *IEEE International Conference on Robotics and Automation* 905–912.
- Liu, Y.**, **S. Arimoto** y **T. Ogasawara**. 1996. Decentralized cooperation control: Non-communication object handling. *IEEE International Conference on Robotics and Automation* 2414–2419.

- Liu, Y., S. Arimoto, V. Parra-Vega y K. Kitagaki.** 1995. Adaptive distributed cooperation controller for multiple manipulators. *Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation* 489–494.
- Martínez-Rosas, J. C.** 2002. *Identificación paramétrica de un robot industrial con diferentes esquemas de control adaptable*. Dissertation. Universidad Veracruzana. Veracruz.
- Martínez-Rosas, J. C. y M. Arteaga Pérez.** 2006. Force and velocity observers for the control of cooperative robots. *sometido en Robotica*.
- Martínez-Rosas, J. C., M. Arteaga Pérez y A. M. Castillo-Sánchez.** 2006. Decentralized control of cooperative robots without velocity-force measurements. *Automatica* 42. 329–336.
- McClamroch, H.** 1986. Singular systems of differential equations as dynamic models for constrained robot systems. *Proc. IEEE Conference on Robotics and Automation*. San Francisco, CA. 21–28.
- McClamroch, H. y D. Wang.** 1988. Feedback stabilization and tracking of constrained robots. *IEEE Transactions on Automatic Control* 33. 419–426.
- Naniwa, T., S. Arimoto y K. Wada.** 1997. Learning and adaptive controls for coordination of multiple manipulators without knowing physical parameters of a object. *IEEE International Conference on Robotics and Automation* 2. 1496–1502.
- Ortega, R. y M. W. Spong.** 1989. Adaptive motion control of rigid robots: a tutorial. *Automatica* 25(6). 877–888.
- Parra-Vega, V., A. Rodríguez-Ángeles, S. Arimoto y G. Hirzinger.** 2001. High precision constrained grasping with cooperative adaptive control. *Journal of Intelligent and Robotic System* 32. 235–254.
- Petzold, L. y P. Lötstedt.** 1986. Numerical solution of nonlinear differential equations with algebraic constraints ii: Practical implications. *SIAM Journal on Scientific Computing* 7. 720–733.
- Siciliano, B. y L. Villani.** 1999. *Robot Force Control*. The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
-

- 
- Sun, D.** y **J. K. Mills.** 1998. Position and force control of two crs a460 robots manipulating a flexible sheet: Theory and experiment. *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*.
- Tarn, T. J., A. Bejczy** y **X. Yuan.** 1987. Design of dynamic control of two cooperating robots arms: closed chain formulation. *icra*.
- Vidyasagar, M.** 1980. On the stabilization of nonlinear systems using state detection. *IEEE Transactions on Automatic Control* 25(3). 504–509.
- Zheng, Y. F.** y **J. Y. Luh.** 1988. Optimal load distribution for two industrial robots handling a single object. *icra*.